



Proyecto Fin de Grado

Ingeniería Electrónica de Telecomunicación

Propiedades de sistemas con monopolos magnéticos a partir de propagación EM en guías de ondas y medios no confinados.

Fernando López Bara

Director: Joan Costa Quintana

Departamento de Física

Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de Barcelona (UAB)

Septiembre 2013



El sotassignant, *Joan Costa Quintana*, Professor de l'Escola d'Enginyeria de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB),

CERTIFICA:

Que el projecte presentat en aquesta memòria de Projecte Fi de Grau ha estat realitzat sota la seva direcció per l'alumne *Fernando López Bara*.

I, perquè consti a tots els efectes, signa el present certificat.

Bellaterra, de setembre 2013.

Signatura:

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Joan Costa Quintana', written over a horizontal line.

Resum:

Des de 2009, la magneticitat, que és la conductivitat de càrregues magnètiques sota camps magnètics externs, es pot detectar, mesurar i descriure en els gels d'espín. Aquestes càrregues magnètiques són monopolos magnètics no confinats que dominen per damunt el nombre de dipols confinats. Com a conseqüència de la magneticitat, l'apantallament del camp magnètic per materials amb càrregues magnètiques pot ser aconseguit. En aquest sistema, tres situacions diferents poden estar presents al variar la temperatura i altres agents externs com el camp magnètic. Aquests estats poden ser constituïts de dipols confinats i dipols magnètics immòbils produïts pel gir del moment magnètic entre els tetraedres contigus de la estructura cristal·lina, de monopolos magnètics lliures submergits barrejats amb dipols confinats de diferents longituds de separació entre càrregues positives i negatives i de condensats de parells de pol-antipol. En els tres casos, la dinàmica es regeix mitjançant una interacció de Coulomb entre càrregues magnètiques. En el cas de càrregues magnètiques lliures, el sistema es tracta com un plasma magnètic i quan els parells de pol-antipol dominen numèricament el sistema, la situació és similar a un condensat de Bose-Einstein. S'analitza la propagació d'ones electromagnètiques transversals en aquest plasma que poden donar a conèixer les masses magnètiques efectives de les càrregues magnètiques. En una segona part, es determinen algunes propietats diferents de aquestes situacions mitjançant la propagació electromagnètica en ones guiades. Aquest anàlisi permet determinar les propietats de propagació electromagnètica dels estats esmentats.

Resumen:

Desde 2009, la magnetividad, que es la conductividad de cargas magnéticas bajo campos magnéticos externos, se puede detectar, medir y describir en los hielos de espín. Estas cargas magnéticas son monopolos magnéticos no confinados que pueden dominar sobre los dipolos confinados. Como consecuencia de la magnetividad, el apantallamiento del campo magnético por materiales con cargas magnéticas puede ser conseguido. En estos sistemas, tres situaciones diferentes pueden estar presentes al variar la temperatura y otros agentes externos como el campo magnético. Estos estados pueden ser constituidos de dipolos confinados y dipolos magnéticos inmóviles producidos por giro del momento magnético entre los tetraedros contiguos de la estructura cristalina, de monopolos magnéticos libres sumergidos y mezclados con dipolos confinados de diferentes longitudes de separación entre cargas positivas y negativas y de condensados de pares de polo-antipolo. En los tres casos, la dinámica se rige a través de una interacción de Coulomb entre cargas magnéticas. En el caso de cargas magnéticas libres, el sistema se trata como un plasma magnético y cuando los pares de polo-antipolo dominan numéricamente el sistema, la situación es similar a un condensado de Bose-Einstein. Se analiza la propagación de ondas electromagnéticas transversales en este plasma que puede dar el conocimiento de las masas magnéticas efectivas de las cargas magnéticas. En una segunda parte, se determinan algunas propiedades diferentes de estas situaciones por medio de la propagación electromagnética en ondas guiadas. Este análisis permite determinar las propiedades de propagación electromagnética de los estados citados.

Summary:

Since 2009 magnetivity, which is the conductivity of magnetic charges under external magnetic fields, can be detected, measured and described in the spin-ices when the unconfined magnetic monopoles dominate over the confined dipoles. As a consequence of magnetivity, the magnetic field shielding by materials with magnetic charges can be pondered. In these systems, three different situations can be present according to the temperature and other external agents such as hydrostatic stress and above all magnetic field. These states can be constituted of confined and immobile magnetic dipoles produced by spin flips among the contiguous tetrahedrons of crystal structure, free magnetic monopoles submerged in enlarged also confined dipoles of different lengths of splitting between positive and negative charges and mobile condensate of poles-antipole pairs. In the three cases, the dynamics is governed via a magnetic Coulomb interaction. In the case of free magnetic charges, the system is treated as a magnetic plasma and when the pole-antipole pairs dominate numerically, the system, the situation is similar to a Bose-Einstein condensate. I analyze the propagation of transversal electromagnetic waves in this plasma which can give knowledge of the effective magnetic masses of the magnetic charges. In a second part, I determine some different properties of these situations by means of electromagnetic propagation in guided waves. This analysis allows me determine the propagation properties of the cited states.

Índice.

1.	<i>Introducción</i>	6
2.	<i>Fuerza de Lorentz</i>	10
3.	<i>Ecuaciones de campos</i>	12
4.	<i>Dos tipos de estados: Condensados de dipolos frente al de plasma magnético</i>	14
4.1.	<i>Posible condensado de pares polo-antipolo</i>	16
4.1.1.	<i>Transición de fase de primera especie del condensado</i>	22
4.2.	<i>Situación de plasma magnético neutro</i>	24
4.2.1.	<i>Propiedades térmicas del plasma</i>	26
5.	<i>Determinación de la masa de monopolos por propagación Electromagnética</i>	31
5.1.	<i>Propagación con un tipo de corriente magnética</i>	32
5.2.	<i>Propagación con dos tipos de corriente magnética</i>	37
6.	<i>Propagación EM en guías de ondas con plasma magnético o condensado</i>	39
6.1.	<i>Ecuaciones en guías</i>	43
6.2.	<i>Soluciones de prueba</i>	44
6.3.	<i>Ondas transversales magnéticas</i>	45
6.4.	<i>Ecuación de ondas para la componente longitudinal del campo eléctrico</i>	45
6.5.	<i>Ondas transversales eléctricas</i>	52
7.	<i>Casos particulares en guías de ondas</i>	55
8.	<i>Resumen y conclusiones</i>	58
9.	<i>Bibliografía</i>	62

Índice de figuras

<i>Figura 1.- Cuerda de Dirac</i>	6
<i>Figura 2.- Disposición geométrica de la estructura cristalina de los "spin-ices"</i>	7
<i>Figura 3.- Tetraedros con sus respectivos momentos magnéticos en sus vértices</i>	8
<i>Figura 4.- Representación esquemática de los monopolos libres</i>	15
<i>Figura 5.- Condensado de Bose-Einstein</i>	21
<i>Figura 6.- Calor específico del condensado</i>	24

Índice de tablas.

<i>Tabla 1.- Componentes de la corriente y los campos en relación con las funciones base en modos TM</i>	55
<i>Tabla 2.- Componentes de la corriente y los campos en relación con las funciones base en modos TE</i>	55

Índice de gráficas.

Gráfica 1. Curva de la serie funcional de la densidad de pares.	20
Gráfica 2.-Representación de la densidad de pares en función de la temperatura y la fugacidad.	20
Gráfica 3.- Curva de la serie funcional de la energía interna.	23
Gráfica 4.-Densidad de cargas magnéticas libres en plasma en función de la temperatura y fugacidad.	28
Gráfica 5.-Densidad de energía interna del plasma en función de la temperatura y fugacidad.	28
Gráfica 6.- Energía interna media de cada carga magnética en función de la temperatura y fugacidad.	29
Gráfica 7.- Parte real de la función dieléctrica en función del parámetro p y la variable x .	35
Gráfica 8.-Parte imaginaria de la función dieléctrica en función del parámetro p y la variable x .	36
Gráfica 9.- Parte real y parte imaginaria de la función dieléctrica en función de ω .	36
Gráfica 10.- Índice de refracción y coeficiente de extinción.	37
Gráfica 11.- Parte real de la función dieléctrica con dos tipos de corriente.	39
Gráfica 12.-Parte real e imaginaria de conductividad de cargas magnéticas ante el campo magnético.	42
Gráfica 13.- Parte transversal de la componente longitudinal del campo eléctrico.	47
Gráfica 14.-Parte transversal de la función $f_1(x,y,z)$.	49

1. Introducción.

Dirac en 1931 [1] formalizó de forma cuantitativa y cualitativa la idea de monopolo magnético asemejándolo a un solenoide muy largo y extensible de forma similar a como si fuera una cuerda deformable que se han venido a denominar cuerdas de Dirac o “Dirac’s strings”. Este solenoide, cuya longitud debe ser mucho mayor que su radio, mantendría sus dos polos prácticamente sin interacción debido a la distancia entre ellos. Por lo tanto, estos polos ante la presencia de un campo magnético externo tendrían un comportamiento similar al que se supone que debieran tener dos monopolos magnéticos independientes y libres (o casi libres). Además, de acuerdo con la idea de Dirac, los monopolos tendrían una carga magnética efectiva bajo el campo magnético externo que debe producir una fuerza de Lorentz de forma similar a la que produce el campo eléctrico sobre la carga eléctrica. Según el modelo de Dirac, la carga magnética efectiva debería estar cuantizada según la expresión $g = h / (e\mu_0)$, donde h es la constante de Planck, e es la carga del electrón y μ_0 es la permeabilidad magnética de vacío. La cuantización de la carga magnética, según este autor, era una condición para explicar la cuantización de la carga eléctrica.

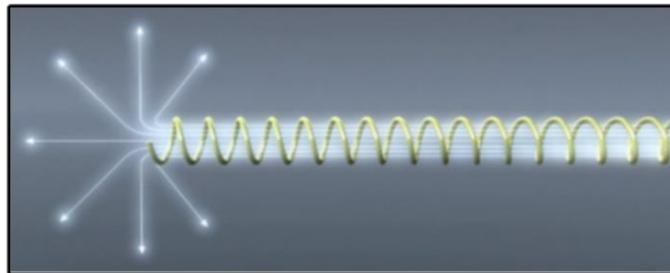


Figura 1.- Cuerda de Dirac. [2]

Cinco décadas después, Cabrera [3] presentó un evento empírico en el que este autor justifica las características de la corriente superconductor generada en un dispositivo “squid” (superconducting quantum interference device), diciendo que había sido producida al atravesar el centro del dispositivo un monopolo magnético. Esta corriente superconductor era en forma de pico extremadamente alto y, según este autor, sólo podía originar este tipo de corriente la inducción electromagnética en el disco superconductor del dispositivo producida por un intenso campo magnético debido a una partícula móvil que viajaba a gran velocidad. Por desgracia, este evento nunca ha sido repetido. En cualquier caso, desde que Dirac argumentó que la cuantización de la carga eléctrica sólo era posible explicarse si a su vez existía una carga también magnética cuantizada, la investigación teórica de la carga magnética en la electrodinámica es un problema recurrente y siempre presente [4-9]. No obstante, por diferentes motivos y ante la existencia de modernos métodos de captación de señales, ahora ha aumentado sensiblemente el interés por la búsqueda de estos monopolos magnéticos tanto en Física de Altas Energías como en el Estado Sólido y Electrónica Física, debido al potencial que se podría producir en la generación de dispositivos si estas cargas magnéticas tuvieran una existencia tanto si es real como si es efectiva. Todas estas circunstancias

han provocado, en la actualidad, una búsqueda sistemática experimental de la existencia de cargas magnéticas en diversos ámbitos de la Ciencia y la Tecnología [10-21].

A pesar de los numerosos intentos para obtener evidencias de partículas elementales con carga magnética, tanto en sistemas de altas energías como en la detección de la radiación cosmológica [9], la idea de Dirac de cargas magnéticas cuantificadas no ha sido confirmada con evidencia empírica, sólo los resultados del experimento de Cabrera se han presentado como una posible indicación de la existencia de monopolos. Sin embargo, el tema recurrente de la existencia de cargas magnéticas ha recibido recientemente un impacto importante en un sentido diferente al que los pioneros de este tema intentaron diseñar. En realidad, los últimos experimentos en materiales sólidos, concretamente en los llamados "spin-ices" [10-17,20-25] y los aislantes topológicos [13], han detectado entidades magnéticas estructurales cuyo comportamiento es similar al que se supone que deben tener las cargas magnéticas.

Estas entidades magnéticas no son partículas elementales con carga magnética cuantizada, sino determinadas modificaciones de la estructura magnética producidas en la naturaleza, debidas a ligeros aumentos de temperatura que crean comportamientos efectivos que se asemejan a los que deberían producir los monopolos idealizadas por Dirac hace ochenta años. Los aislantes topológicos tienen un indudable interés desde el punto de vista teórico, pero sus aplicaciones tecnológicas son, al menos en la actualidad, inferiores a las que presentan los cristales cuya denominación ha venido a ser acuñada como "spin-ices", por la semejanza de simetría estructural de los momentos magnéticos con la que presentan los dipolos eléctricos en los cristales del agua helada. En experimentos recientes, realizados en estos compuestos, se ha podido constatar que son candidatos serios para ser utilizados en la fabricación de dispositivos de transmisión de energía e información.

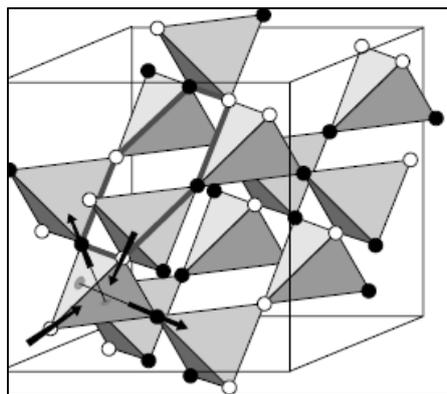


Figura 2.- Disposición geométrica de la estructura cristalina de los "spin-ices". [15]

Estos materiales están compuestos de tierras raras de Holmio o Disproso y cuya fórmula química es $Ho_2Ti_2O_7$ y $Dy_2Ti_2O_7$. Estos compuestos cristalizan en un tipo "pírochlore" [26] cuya característica principal es que su celda primitiva se compone de varios tetraedros regulares unidos en cada vértice a otros idénticos y contiguos en los que cada vértice hay una tierra rara cuyo momento magnético es muy

elevado y está en la dirección (1, 1, 1). Además, en el estado fundamental del sistema, de los cuatro momentos magnéticos de cada tetraedro, dos de ellos se dirigen hacia el interior y otros dos hacia el exterior. Por lo tanto, la magnetización del sistema, en el estado fundamental es cero, es decir, es un material antiferromagnético perfecto. El punto crucial de la fenomenología de estos “spin-ices” se produce cuando un momento magnético $\vec{\mu}$ de un vértice sufre un cambio de dirección de 180 grados. Como consecuencia de este giro, la neutralidad magnética de los dos tetraedros contiguos desaparece, generándose una microimánación de signo contrario en ambos tetraedros; es decir, se generan microimanes con polo norte y polo sur, donde cada polo está en el correspondiente tetraedro. El polo sur se ubica en el tetraedro en el que salen tres momentos magnéticos y entra uno, y el polo norte en el contiguo al entrar tres y salir uno.

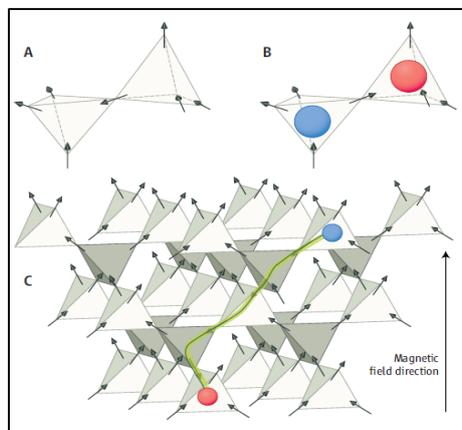


Figura 3.- Tetraedros con sus respectivos momentos magnéticos en sus vértices. [22]

En la figura A, la dirección de los momentos magnéticos están en el estado fundamental y por lo tanto dos momentos magnéticos están en dirección de entrada hacia el centro del tetraedro y dos están hacia fuera. En la figura B, se ha producido la inversión del momento magnético en el vértice que une los dos tetraedros y en consecuencia la imanación es diferente de cero en ambos. Esto, según el modelo de “dumbbells” ideado por Castelnovo y otros [10], equivale a la presencia de dos entidades que generan campo magnético y que se comportan ante la presencia de éste como los monopolos de Dirac. En la figura C, la inversión de los momentos magnéticos progresa a través del cristal y entonces se genera la verdadera cuerda de Dirac, pues los polos cada vez están más alejados y su interacción disminuye. En la estructura magnética de los “spin-ice”, los cambios de dirección del momento magnético se producen por un ligero aumento muy pequeño de energía y la transmisión sucesiva de estos cambios de dirección a lo largo de los tetraedros contiguos puede ocurrir también con pequeños aumentos de energía.

El grupo de Castelnovo diseñó en el 2008 [10,11] el modelo denominado “dumbbells” con el fin de analizar la fenomenología de estas inversiones de dirección de los momentos magnéticos en los tetraedros, y que pueden progresar y trasladarse a lo largo del sistema cuando la energía térmica desplaza el estado

fundamental a estados excitados de baja energía. El ingrediente principal de este modelo es la sustitución de los momentos magnéticos $\vec{\mu}$ de cada vértice por un dipolo de cargas magnéticas $\pm g$ de manera que $\vec{\mu} = g\vec{l}$, donde \vec{l} es un vector que comienza en las cargas magnéticas negativas y termina en la positiva. Por lo tanto, cada tetraedro sin ningún “spin-flip” (sin modificaciones en la dirección de los momentos magnéticos) tiene dos cargas negativas y dos positivas y por lo tanto en este caso los tetraedros son neutros en el estado fundamental. Cuando se produce un “spin-flip”, uno de los dos tetraedros conectados del par correspondiente, tiene $3g^+$ y una g^- , y el tetraedro contiguo otras $3g^-$ y una g^+ . En consecuencia, el par de tetraedros con un “spin-flip” es similar a una carga magnética cuyo valor es de $Q_m = \pm 2\vec{\mu} / L$, donde L es la separación de los centros de los dos tetraedros contiguos. Cuando el “spin-flip” progresa en el cristal, la separación de las cargas positivas y negativas, Q_m , aumenta, lo cual implica que la energía de interacción entre ellas disminuye; ya que esta energía viene dada por $W_{ij} = \mu_0 Q_i Q_j / (4\pi r_{ij})$, con $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$, donde \vec{r}_i y \vec{r}_j son los radios vectores que marcan la posición de las dos cargas del dipolo.

Cuando las inversiones recorren el cristal, las cargas magnéticas resultantes se separan cada vez más e interactúan cada vez más débilmente formando progresivamente estructuras cristalinas que presentan similitudes con las cuerdas de Dirac. La dinámica del cristal permite el aumento de la longitud de estas cadenas que, en el límite, los monopolos resultantes pueden ser consideradas cargas magnéticas cuasi-libres. El resultado final que viene a ser el escenario en el que se van a analizar los fenómenos de propagación electromagnética es un sistema de las denominadas cuasi-partículas con cargas magnéticas sumergidas en un mar de dipolos magnéticos y cuerdas de Dirac de diferentes longitudes. En este escenario hay varias situaciones que la Física Cuántica las define como tres estados diferentes.

Uno de estos estados es un “gas” de cargas magnéticas de tipo coulombiano sumergido en un sistema de dipolos. La característica fundamental de este caso es la población de cargas o densidad de cargas (número de cargas por unidad de volumen) con relación al número de tetraedros, así como la masa efectiva con la que se mueven estas entidades denominadas cargas magnéticas. El segundo de los estados es una configuración donde no existen cargas magnéticas libres pero sí dipolos inmóviles. Y una tercera que se puede producir por acoplamiento debida a la interacción atractiva de cargas magnéticas de diferente signo formando pares de polo-antipolo (denominación de Witten [27] que quiere decir pares de polo norte-sur). En este último estado, los pares forman entidades móviles y cuya interacción entre ellas es débil por ser neutra la carga total de cada par. La configuración de dipolos magnéticos móviles se asemeja a un condensado de pares similar al caso de las gotas excitónicas [28] de los sólidos que puede existir a muy baja temperatura y en el caso del gas coulombiano de cargas libres constituye un estado que se asemeja a un plasma magnético más o menos denso y de carga total nula. Entre los dos estados extremos pueden

existir todos los posibles estados intermedios donde conviven los dipolos confinados junto con cuerdas de Dirac de diferentes longitudes y cargas magnéticas libres.

Entonces, la propagación electromagnética tanto en sistemas ilimitados como en confinados puede poner en claro en qué tipo de estado se encuentra el sistema, dada la diferente manifestación en la propagación de cada una de las diferentes situaciones. El grado de cada una de las posibilidades puede venir determinado por las masas efectivas de las cargas libres y por la densidad de portadores cargas magnéticas (en el caso del plasma magnético) y de pares polo-antipolo (en el caso del condensado). Estas variables son decisivas en las características de conducción y propagación electromagnética. Por ello, he realizado el estudio que puede discriminar la situación del sistema mediante las diferencias que surgen en los parámetros de propagación en cada uno de los casos extremos y en los intermedios.

2. Fuerza de Lorentz.

La dinámica del movimiento de estas entidades puede tratarse clásicamente [10,15,24] puesto que tanto el caso del plasma magnético como el del condensado de pares son estados macoscópicos y aunque su origen y formación es microscópica por efectos cuánticos su comportamiento ante agentes externos (presión, campo magnético, temperatura, etc) puede estudiarse dentro de la Física Clásica. En concreto en cuanto a su comportamiento ante el campo electromagnético o incluso como generador de éste, se puede utilizar las ecuaciones de campo tales como las ecuaciones de Maxwell, eso sí, modificadas por el hecho de existir cargas y corrientes magnéticas [30]. Así mismo, las interacciones entre los campos y las cargas han de tratarse mediante la fuerza de Lorentz, también siendo ésta modificada, o mejor dicho, generalizada al caso de existir tanto cargas eléctricas como magnéticas [30]. Por un lado, se debe aceptar en analogía con la relación carga eléctrica y campo eléctrico que el campo magnético asignado a los monopolos desacoplados puede escribirse de la siguiente manera [10,11,14-16, 24]:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_m}{r^3} \vec{r} \quad (1)$$

Donde Q_m es la carga magnética que ha sido definida en la introducción. El campo magnético creado por esta carga Q_m puede considerarse procedente de un potencial que viene dado por:

$$V_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0 Q_m}{4\pi r} \quad (2)$$

Lo cual permite la definición de una fuerza entre el campo magnético y la carga que es similar y dual según la simetría de dualidad [10, 11,14-16, 24] de la fuerza de Coulomb entre cargas y campos eléctricos:

$$\vec{F}(\vec{r}) = Q_m \vec{B}(\vec{r}) \quad (3)$$

Cuando esta carga lleva una velocidad \vec{v} , el campo \vec{B} se transforma de acuerdo con la teoría de la relatividad especial [29-31] en $\vec{B}' \rightarrow \vec{B} - (\vec{v}/c^2) \wedge \vec{E}$ y por lo tanto la fuerza sobre la carga Q_m es:

$$\vec{F}(\vec{r}) = Q_m \left(\vec{B}(\vec{r}) - \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E}(\vec{r}) \right) \quad (4)$$

Por otro lado, la interacción de dos cargas eléctricas a velocidades mucho menores que la velocidad de la luz en el vacío, una a velocidad \vec{v} y otra a velocidad \vec{v}_1 viene dada por la siguiente expresión [29-31]:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qq_1 \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \left(\frac{\vec{v}_1}{c} \wedge \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \right) \right) \quad (5)$$

Por lo tanto, por analogía, la interacción de dos cargas magnéticas Q_m y Q_m' que lleven velocidades \vec{v} y \vec{v}_1 , respectivamente toma la forma:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 Q_m Q_m'}{4\pi} \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \left(\frac{\vec{v}_1}{c} \wedge \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \right) \right) \quad (6)$$

De modo que, teniendo en cuenta las ecuaciones (4) y (6) se llega a la siguiente expresión del campo eléctrico creado por una carga magnética Q_m' en movimiento con velocidad \vec{v}_1 :

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi} Q_m' \vec{v}_1 \wedge \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad (7)$$

De las ecuaciones (3-7) se deduce directamente que la fuerza de Lorentz cuando existen cargas magnéticas es [30,33-37]:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = q \left(\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \wedge \vec{B}(\vec{r}) \right) + Q_m \left(\vec{B}(\vec{r}) - \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E}(\vec{r}) \right)} \quad (8)$$

Esta fórmula general se puede poner en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= \left(q, \frac{Q_m}{c} \right) \left[\begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} - \frac{\vec{v}}{c} \wedge \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} \right] = \\ &= - \left(q, \frac{Q_m}{c} \right) \left(\Omega + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \right) \Omega \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} = \left(q, \frac{Q_m}{c} \right) \left(\vec{I}_d + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \Omega \right) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

Donde la matriz Ω es una matriz cuya expresión es $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La fuerza de Lorentz en éste como en el caso del Electromagnetismo estándar tiene dos términos, uno que depende de las cargas y de los campos (e independientes de las velocidades de éstas) y otro término transversal que es lineal con las velocidades.

3. Ecuaciones de campos.

Las ecuaciones de los campos electromagnéticos con la existencia de cargas magnéticas ha sido un tema analizado en diversas publicaciones, siendo el punto fundamental el aumento de simetría de éstas respecto del campo eléctrico y magnético. En este trabajo no se va a entrar a comentar la génesis de estas ecuaciones y me atenderé a lo escrito en las referencias correspondientes [30,32,34-37]. Sin embargo, me parece significativo e importante analizar la ecuación que en la propagación electromagnética analizada en los capítulos siguientes tiene mayor trascendencia e influencia diferenciada con respecto a lo que ocurre cuando no se considera la existencia de cargas magnéticas. Esta ecuación es la del rotacional del campo eléctrico. La ecuación (7) del campo eléctrico generado por cargas magnéticas que lleva una velocidad definida, puede generalizarse cuando existen un número N de esta cargas magnéticas, la cual, entonces, viene dado por:

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_m^N Q_m \vec{v}_m \wedge \frac{(\vec{r} - \vec{r}_m)}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^3} \quad (10)$$

Y si se considera un continuo de cargas, el correspondiente campo eléctrico producido por una densidad de monopolos magnéticos, $\rho_m(\vec{r}', t)$ que llevan una velocidad constante viene dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\rho_m(\vec{r}', t) \vec{v}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \wedge (\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}_m(\vec{r}', t) \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' \quad (11)$$

Donde se define la corriente de monopolos magnéticos como:

$$\vec{J}_m(\vec{r}', t) = \rho_m(\vec{r}', t) \vec{v} \quad (12)$$

O en su versión de cargas puntuales discretas, la densidad de corriente se puede poner de la forma:

$$\vec{J}_m(\vec{r}', t) = N Q_m \frac{d\vec{r}'}{dt} \quad (13)$$

Si se calcula el rotacional de este campo en el caso de corrientes estacionarias, $\nabla \cdot \vec{J}_m = 0$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\nabla \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \vec{J}_m(\vec{r}, t) \quad (14)$$

Además si se considera la inducción electromagnética como elemento de generación de campo eléctrico se obtiene la expresión general de la ecuación extendida de “Maxwell” cuya expresión es:

$$\nabla \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \vec{J}_m(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (15)$$

En consecuencia, teniendo en cuenta la expresión del campo magnético de la ecuación (1), se puede establecer las siguientes ecuaciones extendidas de “Maxwell” para el caso de los “spin-ices”:

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\mu_0 \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (16)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (17)$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_e + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (19)$$

En realidad la ecuación (19) si se refiriese al campo molecular magnético siendo éste el que crea en su proximidad cada carga magnética, la ecuación debiera ser $\nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m$, pero tal como se demuestra en las referencias [32,34-37] que sea así la divergencia no nula del campo magnético molecular no implica que en el caso de campo medio o campo de Maxwell la ecuación siga teniendo divergencia nula. Estas cuatro ecuaciones han de ser las que se resuelvan tanto en el caso de sistemas infinitos como en el caso de sistemas confinados. Las ecuaciones de los rotacionales presentan una mayor simetría que las ecuaciones de Maxwell estándar, con la excepción de los signos negativos del lado derecho de la igualdad en la ecuación del rotacional del campo eléctrico. Esta diferencia de signo en un rotacional respecto del otro es fundamental en orden a mantener el principio de conservación de la energía. Si los signos menos que aparecen en el rotacional del campo eléctrico se sustituyeran por signos más en orden a obtener una completa simetría entre los campo eléctricos y magnéticos, el principio de conservación de la energía se violaría.

Si estos signos negativos no existieran, es decir, si se sustituyen por signos positivos dada una corriente lineal de cargas magnéticas sobre un eje, por ejemplo, el eje Z, generaría un campo eléctrico azimutal en sentido antihorario, si la corriente va en sentido positivo de dicho eje. Al encontrarse con cargas eléctricas generaría una corriente azimutal de cargas eléctricas que generaría un campo magnético en la misma dirección de la corriente de cargas magnéticas aumentando esta por la ley de Coulomb correspondiente al campo magnético. A su vez este aumento de corriente magnética generaría un crecimiento en el campo eléctrico azimutal que volvería a implicar crecimientos sucesivos de campo magnético sobre el eje Z que

volvería a aumentar la corriente de cargas magnéticas de forma que se procedería a una situación de crecimiento en forma completamente divergente con lo que se debería obtener energía infinita. Esto obviamente es imposible por violar el principio de conservación de la energía. Este signo menos de la corriente magnética en el rotacional del campo eléctrico produce el mismo efecto que el signo negativo en la variación temporal del campo magnético que define la ley de Lenz y que completa la ley de Faraday.

4. Dos tipos de estados: Condensados de dipolos frente al de plasma magnético.

El modelo “dumbbells” que se indica en la introducción justifica teóricamente la idea de monopolos magnéticos en los “spin-ices” [10]. Por otra parte, la conductancia de cargas magnéticas equivalentes en estos materiales [15-16] ratifica experimentalmente la existencia efectiva de entidades cuyo comportamiento es mimético a los monopolos magnéticos. Estos experimentos se han acuñado como magnetricidad, propiedad dual de la electricidad basada en la conductancia de iones de agua en donde se ha producido hidrólisis generándose pares de iones positivos y negativos sumergidos en la parte de agua que no se ha hidrolizado y que bajo un fuerte campo eléctrico producen una corriente eléctrica. Por lo tanto, la “magnetricity” es la determinación de la movilidad cuantitativa de cargas magnéticas en el interior de los “spin-ices” bajo el campo magnético externo [15-16] y que en analogía con la hidrólisis del agua ante el campo eléctrico estas cargas magnéticas están sumergidas en un medio en el que puede haber dipolos y cuerdas de Dirac en donde dichas cargas magnéticas están “disueltas”.

La clave de la situación de los estados posibles en los “spin-ices” lo constituye el paso de la energía magnética de una red antiferromagnética de momentos magnéticos localizados en los vértices de los tetraedros a la formación por medio de inversiones de los momentos magnéticos a la consideración de existencia de cargas magnéticas. Cuantitativamente la interacción dipolo-dipolo viene a ser [10-12,14-17]:

$$E = \sum_{i,j} \left[J \vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j + \frac{\mu_0}{4\pi} D \left(\frac{\vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j}{r_{ij}^3} - \frac{3(\vec{\mu}_j \cdot \vec{r}_i)(\vec{\mu}_i \cdot \vec{r}_j)}{r_{ij}^5} \right) \right] \quad (20)$$

Donde J y D son constantes de acoplamiento deducibles empíricamente y la distancia entre los momentos magnéticos μ_i y μ_j es r_{ij} . La energía dada por esta expresión es igual, salvo errores cuantitativamente despreciables, a la energía que procede de considerar la interacción tipo coulombiano de cargas magnéticas que puede expresarse de la siguiente forma [10-11]:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,j(r_{ij} \neq 0)} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} + \sum_{i,j(r_{ij}=0)} v_0 Q_i Q_j \quad (21)$$

Donde Q_i y Q_j son las cargas magnéticas cuyos valores vienen definidos por $Q = |2\vec{\mu}| / L$, donde $|\vec{\mu}|$

es el módulo del vector del momento magnético del ion de tierra rara ubicado en cada vértice de cada tetraedro. La longitud L es igual a la separación entre dos tetraedros contiguos que es un parámetro fijo de la estructura cristalina. Además, el término $v_0 Q_i Q_j$ es la energía termodinámica para formar un par acoplado, es decir, un microimán formado por un polo norte con carga equivalente $+Q$ y un polo sur con igual carga pero signo contrario. Con una energía del tipo de las ecuaciones (20-21), existen dos posibilidades extremas que pasan de una a otra de forma gradual mediante infinitos estados intermedios.

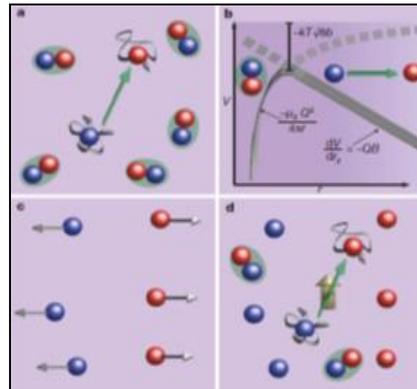


Figura 4.- Representación esquemática de los monopolos libres. [16]

En esta figura se observa como existen dipolos unidos o confinados, dipolos separándose y cargas libres. En la figura B, se representa esquemáticamente cómo cuando el potencial atractivo entre polo “rojo” y “azul” es suficientemente intensa los dos elementos del par polo-antipolo están en una situación de energía total menor que cero es decir la energía potencial es superior en módulo y diferente signo a la energía cinética y cuando ésta supera a aquella la carga se convierten en cargas libres.

El proceso de paso entre los diferentes estados es debido a la temperatura y el parámetro que ordena los diferentes estados es el número de dipolos confinados por un lado, en número de cuerdas de Dirac y el número de cargas libres sometidas a la dinámica procedente de la energía de la expresión (21). Cuando lo que domina es la existencia de dipolos confinados, el sistema se encuentra en una situación neutra con baja movilidad y prácticamente nula formación de corrientes magnéticas ante la presencia del campo magnético exterior. Existe un límite crítico en el cual se puede formar un condensado de dipolos generado por la interacción atractiva de las cargas de diferente signo de la expresión (21) cuando ésta predomina sobre la repulsiva de las cargas del mismo signo. Cuando esta densidad supera un valor crítico que se determina más adelante en este trabajo, se produce un condensado denominado condensado de Bose-Einstein. En este estado, la conducción magnética desaparece pues prácticamente la totalidad de cargas magnéticas están formando dipolos cuyo movimiento si existe es aleatorio como las moléculas de un gas. Si aumenta la temperatura, las inversiones de momentos magnéticos descritas en la introducción generan primero cuerdas Dirac y después cargas libres que pueden producir corrientes magnéticas ante la presencia

de campo magnético externo. El otro caso extremo, en la dirección de formar cargas magnéticas libres, es el que constituye la fase de Coulomb del plasma magnético en los “spin-ices” [24]. En este caso, la existencia de los monopolos no confinados puede coexistir con dipolos magnéticos confinados, aunque la presencia de cargas magnéticas viene a ser mayor. Por tanto, el parámetro de orden que caracteriza a la situación o estado físico es el número y densidad de cargas magnéticas libres de ambos signos.

En definitiva, existen tres estados diferenciados del sistema además del estado fundamental a 0 kelvins que es el originario de la estructura antiferromagnética de imanación cero. En estado fundamental, el sistema está formado por la estructura magnética antiferromagnética con los tetraedros compartiendo un vértice con sus homólogos y con imanación cero para cada tetraedro. Al aumentar la temperatura muy ligeramente se forman los primeros microimanes, este proceso es progresivo pero inestable puesto que la formación de microimanes viene acompañada de progresión de los “spin-flips” para formar cuerdas de Dirac. De manera gradual, al crecer las longitudes de las cuerdas se empiezan a formar las cargas cuasi-libres y posteriormente completamente libres. Con aumento de la temperatura y ayudado el sistema por un campo magnético externo, no necesariamente intenso, la densidad de cargas libres magnéticas aumenta hasta formarse el plasma magnético, cuya dinámica viene dada por la ecuación (21). En este plasma los parámetros de orden fundamentales son las masas efectivas de estas cargas magnéticas y sobre todo la densidad de éstas. El propio sistema coulombiano genera una cierta viscosidad en el movimientos de las cargas propio de todo plasma neutro y al bajar la temperatura, la interacción atractiva de las cargas de diferente signo pueden dominar sobre la repulsivas de las del mismo propiciando la generación de un sistema de dipolos móviles cuyas propiedades pueden ser similares a los estados coherentes que forman los condensados de Bose-Einstein [38-42]. Esta situación de generación de pares de polo-antipolo no necesariamente se tiene que asimilar al inicial de formación de dipolos dado que en aquel caso el sistema es inestable y tiende a evolucionar a los siguientes estadios formando cuerdas y cargas libres, mientras que el condensado que procede del gas coulombiano es una situación estable y de menor energía. Este estado es más similar al existente en los semiconductores en los que se forman gotas de pares de electrón-hueco formando lo que en Electrónica Física se denomina gota excitónica [28].

4.1. Posible condensado de pares polo-antipolo.

En este condensado los pares pueden evolucionar dentro del sistema cuasi-libremente con la simple fricción producida por los choques cinéticos entre entidades de carga nula. Por lo tanto, existe una baja interacción entre los pares y el campo magnético externo; sólo cuando el campo magnético es tan intenso que supera la energía de interacción atractiva entre los pares polo-antipolo, los pares pueden empezar a romperse y se dice, entonces, que el condensado empieza a evaporarse (es un proceso similar a la evaporación del agua formando vapor de agua al aumentar la temperatura). Además, cuando el sistema está en el estado condensado tampoco se genera corriente magnética y por lo tanto la propagación de señales

electromagnéticas tanto en medios confinados como no confinados es como si fuera en un medio no conductor.

Por otro lado, más que la interpretación física de este sistema en esta situación interesa identificar los parámetros físicos del sistema que sean identificables ante la propagación de señales electromagnéticas. En este sentido la ecuación que describe cada uno de los componentes del "gas" de dipolos usando las condiciones periódicas similares a las existentes en las cavidades resonantes en la propagación de ondas electromagnéticas viene dado por ondas planas del tipo [28]:

$$\psi(\vec{r}) = \Omega^{-1/2} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (22)$$

Donde Ω es el volumen del sistema donde se ubica el condensado. Los vectores de onda vienen dados por:

$$\vec{k} = 2\pi \left(\frac{n_x}{L_x}, \frac{n_y}{L_y}, \frac{n_z}{L_z} \right) \quad (23)$$

Donde L_x , L_y y L_z son las longitudes del volumen Ω en cada dirección y por lo tanto un volumen infinitesimal en el espacio de las \vec{k} se relaciona con el número posible de componentes de vector de onda:

$$d^3k = dk_x dk_y dk_z = \frac{(2\pi)^3}{\Omega} dn_x dn_y dn_z = \frac{(2\pi)^3}{\Omega} dN \quad (24)$$

Es decir, el número de posibles estados que corresponden a momentos de ocupados por dipolos en elemento de volumen en el espacio de los momentos es:

$$dN = \frac{\Omega}{(2\pi)^3} d^3k \quad (25)$$

La energía correspondiente para el dipolo con la función de onda (22), esto se ve en la solución de la ecuación de Schroedinger para partículas libres sin estar inmersas en un potencial, viene dado por [28,43]:

$$E(\vec{k}) = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2 \frac{k^2}{2m} = \frac{h^2 k^2}{16\pi^2 m} \quad (26)$$

Donde h es la constante de Planck y m la masa efectiva correspondiente a cada una de las cargas magnéticas que forman los dipolos, por ello la masa viene multiplicada por dos en el denominador. Como se verá después, estas masas efectivas podrán determinarse mediante propagación de ondas en el estado en forma de plasma magnético. Para conocer la dinámica del sistema se necesita conocer cuántos estados por unidad de volumen real existen entre una energía E y $E + dE$, lo que se define como densidad de estados de energía en Electrónica Física. Dado que la energía tiene simetría esférica, en una capa esférica en el espacio de momentos entre los radios k y $k + dk$ el número de posibles dipolos es:

$$dN = 4\pi k^2 dk \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \quad (27)$$

Y sustituyendo en esta expresión el valor de del módulo del momento en función de la energía:

$$dN = 4\pi k^2 dk \frac{\Omega}{8\pi^3} = 4\pi \cdot \frac{16\pi^2 mE}{h^2} \cdot \frac{4\pi m^{1/2}}{2hE^{1/2}} dE \cdot \frac{\Omega}{8\pi^3} = \frac{16\Omega\pi m^{3/2} E^{1/2}}{h^3} dE \quad (28)$$

Lo cual permite encontrar la densidad de estados por unidad de volumen entre E y $E + dE$, que viene definido por:

$$\frac{1}{\Omega} \frac{dN}{dE} = g(E) = \frac{16\pi m^{3/2} E^{1/2}}{h^3} \quad (29)$$

Con esta introducción, se puede determinar la relación existente entre la masa efectiva, la densidad de portadores y la temperatura de transición a partir de la cual el número de pares crece indefinidamente y que físicamente se puede interpretar como que el sistema transita hacia una condensación de pares polo-antipolo.

De acuerdo con los principios generales de la distribución de portadores en función de la temperatura para el caso de sistemas compuestos de pares polo-antipolo [43], se tiene que el número de componentes a una temperatura dada se puede expresar:

$$N = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\exp[\beta(E(\vec{k}) - \mu)] - 1} \quad (30)$$

Es preciso indicar que la N de las fórmulas (27-29) indica el número de vectores de onda y la N de la fórmula (30) indica número de estados ocupados a una T dada. Donde $E(\vec{k})$ es la energía de los pares polo-antipolo; μ (no confundir este magnitud escalar con el momento magnético que es una magnitud vectorial) es el potencial químico que define la energía a partir de la cual ya no hay pares que superen esa energía a la temperatura que viene definida por la variable β cuyo valor es $\beta = 1/K_{\beta}T$, siendo K_{β} la constante de Boltzman y T es la temperatura en la escala absoluta.

Pasando la anterior expresión al continuo $\sum_{\vec{k}} \rightarrow \Omega \int d^3k / (2\pi)^3$, se tiene que el número de partículas para una temperatura dada viene dado por:

$$n(T, \mu) = \frac{N}{\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{\exp[\beta(E - \mu)] - 1} d^3k = \int_0^{\infty} \frac{1}{\exp[\beta(E - \mu)] - 1} g(E) dE \quad (31)$$

Siendo $n(T, \mu)$ la densidad de partículas para una temperatura y potencial químico dados. Considerando la ecuación (24) y sustituyendo la expresión de la densidad de estados (29), se tiene que la densidad de partículas es:

$$n(T, \mu) = \frac{16\pi (mK_{\beta}T)^{3/2}}{h^3} \int_0^{\infty} \frac{z \exp(-x)}{1 - z \exp(-x)} x^{1/2} dx \quad (32)$$

Donde $x = \beta E$ y $z = \exp(\beta\mu)$, variable que viene a denominarse fugacidad. La fracción del integrando se puede desarrollar en serie de Taylor de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{z \exp(-x)}{1 - z \exp(-x)} &= z \exp(-x) (1 + z \exp(-x) + z^2 \exp(-2x) + \dots) = \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} z^p \exp(-px) \end{aligned} \quad (33)$$

Esta serie es convergente si y sólo si z es menor que 1. Teniendo en cuenta el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp(-px) x^{1/2} dx &= p^{-3/2} \int_0^{\infty} \exp(-y) y^{1/2} dy = \\ &= p^{-3/2} \Gamma(3/2) = p^{-3/2} \frac{1}{2} \Gamma(1/2) = p^{-3/2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \end{aligned} \quad (34)$$

Donde se ha hecho el cambio de variable $px = y$ y siendo la función Γ una conocida función denominada

“gamma” [44,45] que viene a ser definida por $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} y^{t-1} e^{-y} dy$, función que tiene la siguiente fórmula

de recurrencia $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$, siendo $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Teniendo presente el cálculo anterior, se obtiene la densidad de pares:

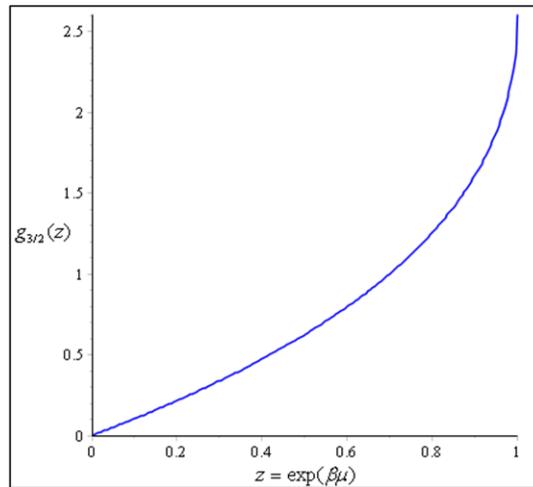
$$n(T, \mu) = \left(\frac{4\pi mK_{\beta}T}{h^2} \right)^{3/2} g_{3/2}(z) \quad (35)$$

Donde la función $g_{3/2}(z)$ es:

$$g_{3/2}(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^p}{p^{3/2}} \quad (36)$$

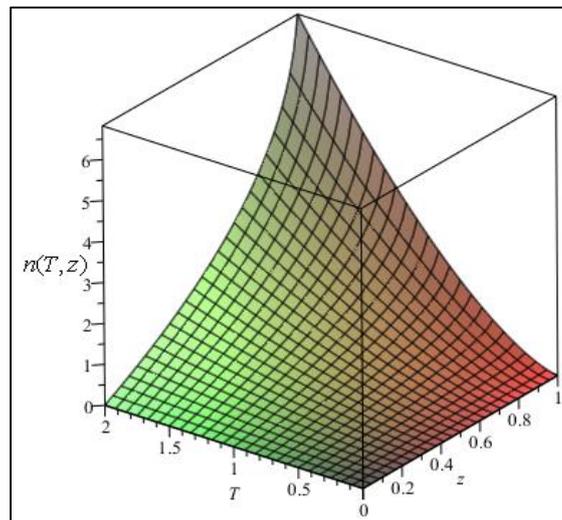
Para analizar la densidad de portadores para una temperatura dada y un potencial químico determinado, se necesita evaluar la función $g_{3/2}(z)$ que es una serie funcional que converge para valores $|z| \leq 1$ [43].

Y para el valor $z = 1 \rightarrow g_{3/2}(z) = 2,612$.



Gráfica 1. Curva de la serie funcional de la densidad de pares.

La curva de esta gráfica representa la función $g_{3/2}(z)$ que viene dada en la ecuación (36). Las características de esta curva permiten diseñar el proceso de la generación del condensado Bose-Einstein de pares polo-antipolo. El valor de esta función para $z=1$ es 2,612. Para este valor su derivada es infinita y el valor de la serie diverge para valores superiores a 1. Esto implica que para el valor 1, el condensado contiene prácticamente todos los componentes (pares polo-antipolo) en el estado de más baja energía. A partir del valor 1 la ecuación (35) de densidad de pares no tiene interpretación física. Con estas condiciones se puede determinar el valor de la densidad de pares polo-antipolo en función de la temperatura y la fugacidad del sistema, lo cual corresponde a la ecuación (35) y cuya representación queda reflejada en la siguiente gráfica:



Gráfica 2.-Representación de la densidad de pares en función de la temperatura y la fugacidad.

Y considerando que la temperatura de transición se obtiene para el valor de la función $g_{3/2}(z = 1)$, se puede determinar esta temperatura como aquella para la cual a partir de esta temperatura se tiene que la derivada de la densidad de pares polo-antipolo con respecto a la fugacidad tiende a infinito, por lo tanto,

sustituyendo $g_{3/2}(z = 1) = 2,612$ en la ecuación (35), se obtiene la temperatura de transición que viene dada por la siguiente expresión:

$$T_c = \frac{h^2}{4\pi m K_\beta} \left(\frac{n}{2,612} \right)^{2/3} \quad (37)$$

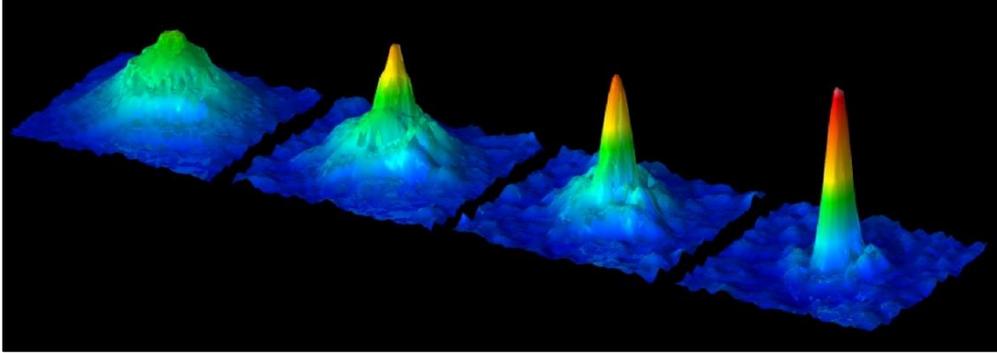


Figura 5.- Condensado de Bose-Einstein. [46]

En esta figura se indica el proceso de consecución del condensado a partir de la densidad por unidad de volumen del número de componentes del sistema que se localizan en el estado cuántico de menor energía. Las únicas variables de las que depende la temperatura crítica a partir y por debajo de la cual todos los pares polo-antipolo están en el estado condensado son la masa efectiva de las cargas magnéticas que es desconocida y la densidad de portadores a dicha temperatura. Por otro lado, si se considera alta temperatura, $g_{3/2}(z) \rightarrow z = \exp(\beta\mu)$ y por lo tanto de la ecuación (35), se deduce que el potencial químico viene dado por:

$$\mu \approx -\frac{3}{2} K_\beta T \ln \left(\frac{4\pi m K_\beta T}{h^2 n^{2/3}} \right) \quad (38)$$

Es necesario recalcar que esta variable (potencial químico) vuelve a depender de la masa de las cargas magnéticas y de la densidad de pares de polos. Haciendo un análisis de esta expresión, se ve que para el valor de la temperatura igual a cero el valor de $z = 1$ todos los pares están en el condensado (el valor de la densidad tiende a su valor máximo).

Falta, por último, delimitar una relación de la densidad de polos con la masa de las cargas magnéticas. Según el criterio de Einstein [43], cuando el potencial químico tiende a cero implica que todos componentes del sistema están a una energía tendiendo a cero que según la ecuación (26) corresponde a momento $k=0$. En este caso:

$$N_0 = (\exp(-\beta\mu) - 1)^{-1} \quad (39)$$

Y despejando el potencial químico de esta ecuación $\mu = -K_\beta T \ln(1 + 1/N_0) \approx -K_\beta T/N_0$, coherente con el criterio de Einstein. Y para temperaturas crecientes pero menores que la temperatura crítica, se tiene que el número de pares vendrá dado por el número de nuevos pares que se vayan generando además de los que se han formado en el condensado cuando el potencial químico tiende a cero [43]:

$$N = N_0 + \sum_{k \neq 0} \frac{1}{\exp(\beta E(\vec{k})) - 1} \quad (40)$$

Y procediendo de la misma forma que se obtuvo la expresión del número de pares, partiendo de las expresiones (30) y (31) para llegar a la ecuación (35), se tiene la expresión de la densidad de pares para temperaturas menores de la temperatura crítica, viene dada por la siguiente ecuación:

$$n = n_0 + 2,612 \left(\frac{4\pi m K_\beta T}{h^2} \right)^{3/2} \quad (41)$$

4.1.1. Transición de fase de primera especie del condensado.

La temperatura de transición puede obtenerse desde la discontinuidad del calor específico a volumen constante que se obtiene a partir de la derivada de la energía interna del sistema con la temperatura. La expresión de la energía Interna se deriva de la estadística de Bose-Einstein [43]:

$$U = \sum_k \frac{E(\vec{k})}{\exp[\beta(E(\vec{k}) - \mu)] - 1} = \Omega \int_0^\infty \frac{E}{\exp[\beta(E - \mu)] - 1} g(E) dE \quad (42)$$

Y utilizando la expresión de la densidad de estados se tiene lo siguiente:

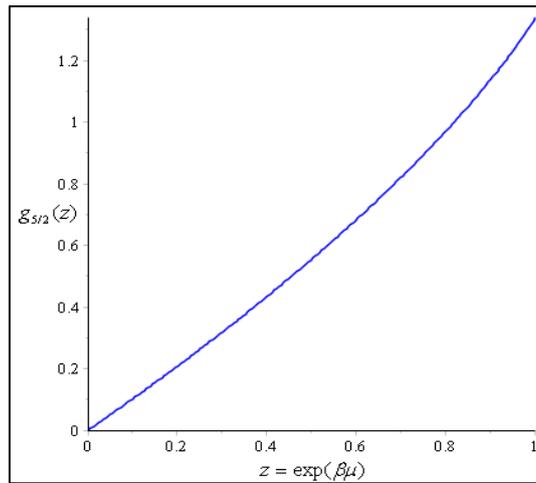
$$\frac{U(T, \mu)}{\Omega} = \frac{16\pi m^{3/2} (K_\beta T)^{5/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{z \exp(-x)}{1 - z \exp(-x)} x^{3/2} dx \quad (43)$$

Y considerando los cálculos realizados para determinar la densidad de pares polo-antipolo, se tiene que la energía interna viene dada por:

$$\begin{aligned} \frac{U(T, \mu)}{\Omega} &= \frac{16\pi m^{3/2} (K_\beta T)^{5/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{z \exp(-x)}{1 - z \exp(-x)} x^{3/2} dx = \\ &= \frac{16\pi m^{3/2} (K_\beta T)^{5/2}}{h^3} \sum_{p=1}^\infty \frac{z^p}{p^{5/2}} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{12(\pi m)^{3/2} (K_\beta T)^{5/2}}{h^3} g_{5/2}(z) \end{aligned} \quad (44)$$

Donde $g_{5/2}(z) = \sum_{p=1}^{\infty} z^p / p^{5/2}$. En consecuencia la energía interna por cada par viene dada para las temperaturas $T > T_c$, es decir para valores de las temperaturas superiores a la de transición que coincide para valores de $z < 1$ por:

$$u = \frac{U}{N} = \frac{3}{2} K_{\beta} T \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \tag{45}$$



Gráfica 3.- Curva de la serie funcional de la energía interna.

La curva de esta gráfica corresponde a la serie funcional con la que se determina la energía interna del sistema para temperaturas superiores al valor crítico. Para el valor crítico, se obtiene que esta función vale 1,342 y su derivada no diverge para ningún valor. Es importante definir la energía por componente del sistema dividiendo la energía por el número de partículas. Y para valores de la temperatura, menores o iguales a la temperatura crítica, se tiene que:

$$u = \frac{U}{N} = \frac{3}{2} K_{\beta} \frac{T^{5/2}}{T_c^{3/2}} \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} \tag{46}$$

Si se calcula la derivada respecto de la temperatura de la función energía interna se obtiene el calor específico a volumen constante. Además a partir de esta derivada de la energía interna se observa una discontinuidad en este calor específico para el valor de la temperatura crítica. Esto implicaría una transición de primera especie al estar la discontinuidad en la primera derivada. Efectivamente, para $T < T_c$:

$$c_v = \frac{1}{N} \frac{\partial U}{\partial T} \approx 1,875 K_{\beta} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \tag{47}$$

Que implica una función creciente con la temperatura hasta un valor de $1,875 K_\beta$. Para el caso de temperaturas $T > T_c$, la expresión del calor específico es:

$$c_v = \frac{1}{N} \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{3}{2} K_\beta \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} + \frac{3}{2} \frac{K_\beta T}{2z} \left(1 - \frac{g_{5/2}(z)g_{1/2}(z)}{g_{3/2}^2(z)} \right) \quad (48)$$

La representación del calor específico es relativamente compleja, tiene la forma de función creciente con la temperatura hasta un máximo (para temperatura crítica) y a partir de ésta una forma decreciente tipo exponencial para valores mayores que la temperatura de transición. Una representación esquemática de este calor específico donde se aprecia claramente la transición de fase puede verse en la siguiente figura:

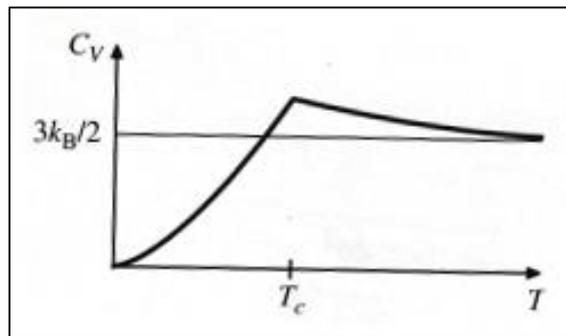


Figura 6.- Calor específico del condensado. [47]

La forma de pico de este calor específico sin llegar a la discontinuidad en su valor manifiesta clara evidencia que en el punto de la temperatura de transición, la derivada por la derecha y por la izquierda son diferentes, es decir, en ese punto la función no tiene derivada propiamente dicha, lo que anuncia una transición de fase de primera especie. Las dos fases que separa la temperatura crítica es un condensado cuyos componentes están con momento cero para valores inferiores y un gas de pares polo-antipolo con momento lineal diferente de cero por encima.

4.2. Situación de plasma magnético neutro.

La conductancia de cargas magnéticas bajo el efecto del campo magnético en los spin-ices [15-16] es el hecho experimental que justifica la existencia de las entidades estructurales cuyo comportamiento mimetiza a aquel que se supone que deben tener los monopolos magnéticos. Estos experimentos se han acuñado con la denominación de magnetricidad, propiedad dual de la electricidad basada en la conductancia de iones de agua hidrolizada bajo la presencia de campo eléctrico intenso. Por lo tanto, la magnetricity es la cuantitativa determinación de la movilidad de las cargas magnéticas en el interior de los "spin-ices" bajo la presencia del campo magnético externo [15-16]. En la fase de coulomb definida por la energía de la expresión (21) cuando las cargas de ambos signos presentan movilidad de tal forma que se pueden

considerar cargas libres, el sistema pasa por tener las características específicas de un plasma cuya denominación es la de un plasma magnético por ser constituido de cargas magnéticas [24]. Bien es cierto que este sistema permite la coexistencia de dipolos confinados y cuerdas de Dirac con cargas libres, siendo el carácter de plasma tanto mejor cuanto mayor es la proporción de cargas libres respecto de las demás estructuras citadas.

En los sistemas conductores y plasmas eléctricos en equilibrio electrostático, las cargas en su interior no tienen movimiento, es decir, no están sometidos a ningún campo eléctrico. Dado que este estado de equilibrio se obtiene incluso aunque existan campos electrostáticos exteriores, la condición de equilibrio junto con la existencia de cargas positivas y negativas en su interior implica que éstas se han de redistribuir de tal forma que el campo total, es decir, el creado por ellas más el campo exterior, se anule en el interior del material. Esto es así porque si no se anulase el campo eléctrico total, las cargas estarían en movimiento y no habría equilibrio electrostático.

En los plasmas magnéticos son las cargas magnéticas las que pueden llegar a estar en su interior en equilibrio magnetostático. En consecuencia, el campo magnético total en el interior del conductor magnético o del plasma ha de ser, de forma dual al caso eléctrico, nulo, pues si no lo fuera habría movimiento de cargas, lo cual es contradictorio con el hecho de estar en equilibrio magnetostático. La anulación del campo magnético en el interior del conductor y/o plasma magnético, incluso cuando existe un campo magnetostático exterior, es debido a la redistribución de cargas. Por todo ello, en los plasmas magnéticos, el fenómeno de exclusión de líneas de campo magnético del material en el que hay cargas magnéticas libres es una propiedad dual de la citada del caso de conductores y plasmas eléctricos en donde se excluyen las líneas de campo eléctrico. Este hecho puede tener potenciales implicaciones técnicas de apantallamiento de sistemas ante el campo magnético. Todo lo que se dice del caso del campo eléctrico en los conductores eléctricos se puede establecer, según la simetría dual [30,34-37], en los "spin-ices" con respecto al campo magnético.

Una diferencia notable con los conductores eléctricos es que no se puede ni incluir carga magnética neta en ellos ni tan siquiera inducirla puesto que esta carga es debida a la elongación primero y ruptura después de los microimanes que se forman en los materiales "spin-ices". Una posibilidad que debe considerarse es que para que la fuerza total sobre las cargas libres en el interior del "spin-ice" sea cero, es decir, que el campo total se anule, es necesario que haya suficientes cargas magnéticas efectivas para que se puedan redistribuir y anular la acción del campo magnético exterior. Por ello, es preciso estudiar cuál es la acción que proporciona la densidad de cargas magnéticas que puedan compensar el campo magnético exterior. Obviamente la temperatura es la variable física que puede producir inversiones en los momentos magnéticos que conducen a la generación de cargas magnéticas. Por lo tanto, es preciso estudiar la evolución termodinámica de la densidad de portadores, es decir, el número de portadores por unidad de

volumen, el cual va variando de acuerdo con la Física Estadística. Además, es necesario tener en cuenta que la fuerza de cohesión que une los monopolos en los dipolos de longitud mínima puede quedar compensada por la acción del campo exterior que mueve a los monopolos del dipolo en sentido contrario. Por consiguiente, a mayor campo exterior, mayor probabilidad de que aumente el número los monopolos efectivos que son los que pueden anular dicho campo exterior. Por ello, se establece la siguiente situación dinámica: cuanto mayor es el campo exterior mayor es el número necesario para compensar sus efectos en el interior, pero a su vez, cuanto mayor es el campo exterior mayor probabilidad de que aumente el número de monopolos libres. Todo ello conduce a una aplicación de estos materiales que apantallan el campo magnético.

4.2.1. Propiedades térmicas del plasma.

En el plasma magnético, se puede asumir que las energías de las cargas positivas y negativas son las mismas. Por lo tanto, siguiendo un proceso similar al caso del condensado, se tiene que las energías de cada carga sea positiva o negativa dentro del concepto mecánico-cuántico de partícula vienen dadas por:

$$E(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{8\pi^2 m} \quad (49)$$

Lo cual implica, siguiendo un proceso similar al caso del condensado, una densidad de partículas para una energía E :

$$dN = \frac{2\Omega\pi(2m)^{3/2} E^{1/2}}{\hbar^3} dE \quad (50)$$

Donde se ha supuesto dos cargas positivas y dos cargas negativas por cada onda plana. De acuerdo con la estadística de Fermi-Dirac [43], se tiene que el número de partículas viene dado por

$$N = 4 \sum_k \frac{1}{\exp[\beta(E(\vec{k}) - \mu)] + 1} \quad (51)$$

Y pasando al continuo, se tiene que:

$$\frac{N}{\Omega} = \frac{8\pi(2m)^{3/2}}{\hbar^3} \int_0^\infty \frac{e^{\beta\mu} \exp(-\beta E)}{1 + e^{-\beta\mu} \exp(-\beta E)} E^{1/2} dE \quad (52)$$

Considerando $z = e^{\beta\mu}$ y $x = \beta E$, la ecuación anterior puede ponerse de la forma siguiente:

$$\frac{N}{\Omega} = n(T, \mu) = 8\pi \left(\frac{2mK_\beta T}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{z \exp(-x)}{1 + z \exp(-x)} x^{1/2} dx \quad (53)$$

Expresión que salvo constantes y el signo + del denominador es similar al caso del condensado:

$$n(T, \mu) = 2\pi \left(\frac{2mK_\beta T}{h^2} \right)^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[(ze^{-x})^{k+1} - (ze^{-x})^{k+2} \right] x^{1/2} dx \quad (54)$$

Y en el caso de la energía viene dado por:

$$\frac{U}{\Omega} = \frac{8\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^{\infty} \frac{e^{\beta\mu} \exp(-\beta E)}{1 + e^{-\beta\mu} \exp(-\beta E)} E^{3/2} dE \quad (55)$$

Considerando los mismos cambios de variables de la ecuación (53) se tiene:

$$\frac{U}{\Omega} = \frac{8\pi(2m)^{3/2} (K_\beta T)^{5/2}}{h^3} \int_0^{\infty} \frac{z \exp(-x)}{1 + \exp(-x)} x^{3/2} dx \quad (56)$$

Y siguiendo los mismos pasos que se han seguido para obtener la (44) se obtiene el siguiente resultado para la energía interna por unidad de volumen:

$$\frac{U}{\Omega} = u = 2\pi \frac{(2m)^{2/3} (K_\beta T)^{5/2}}{h^3} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[(ze^{-x})^{k+1} - (ze^{-x})^{k+2} \right] x^{3/2} dx \quad (57)$$

La deducción de las expresiones de $n(T, \mu)$ y U/Ω requiere la determinación de las integrales:

$$\int_0^{\infty} (ze^{-x})^{k+1} x^{1/2} dx = \int_0^{\infty} z^{k+1} e^{-(k+1)x} x^{1/2} dx \quad (58)$$

$$\int_0^{\infty} (ze^{-x})^{k+1} x^{3/2} dx = \int_0^{\infty} z^{k+1} e^{-(k+1)x} x^{3/2} dx \quad (59)$$

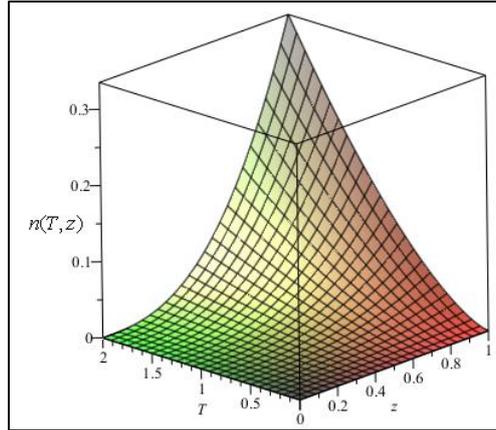
Y haciendo el cambio de variable $(k+1)x = t$, se tiene lo siguiente:

$$\int_0^{\infty} (ze^{-x})^{k+1} x^{1/2} dx = \frac{z^{k+1}}{(k+1)^{3/2}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{4/2-1} dt = \frac{z^{k+1}}{(k+1)^{3/2}} \Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{z^{k+1}}{(k+1)^{3/2}} \quad (60)$$

$$\int_0^{\infty} (ze^{-x})^{k+1} x^{3/2} dx = \frac{z^{k+1}}{(k+1)^{3/2}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{5/2-1} dt = \frac{z^{k+1}}{(k+1)^{3/2}} \Gamma(5/2) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \frac{z^{k+1}}{(k+1)^{3/2}} \quad (61)$$

Y por lo tanto:

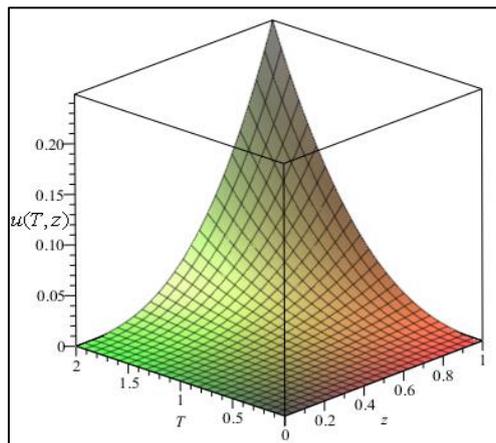
$$\boxed{n(T, \mu) = 8\sqrt{2} \left(\frac{\pi m K_\beta T}{h^2} \right)^{3/2} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)^{3/2}} - \frac{z^{2k+2}}{(2k+2)^{3/2}} \right) \right\}} \quad (62)$$



Gráfica 4.-Densidad de cargas magnéticas libres en el plasma en función de la temperatura y fugacidad.

En esta gráfica, se representa la densidad de cargas magnéticas correspondiente a la expresión (62). Respecto de la temperatura esta densidad varía como $n(T, z) \propto T^{3/2}$ y respecto de la fugacidad su dependencia viene dada por la diferencia entre las dos series expresadas en esta ecuación. No obstante, su evolución es similar respecto de las dos variables T y z . Esta evolución del número de cargas magnéticas por unidad de volumen está de acuerdo con lo que se espera de un gas de Fermi que es como se denomina a un gas cualquiera sometido a una interacción coulombiana tal como es la que gobierna el plasma magnético. Y además, la energía por unidad de volumen viene dada resolviendo las integrales de la ecuación (57) por el procedimiento que se detalla arriba y el resultado es:

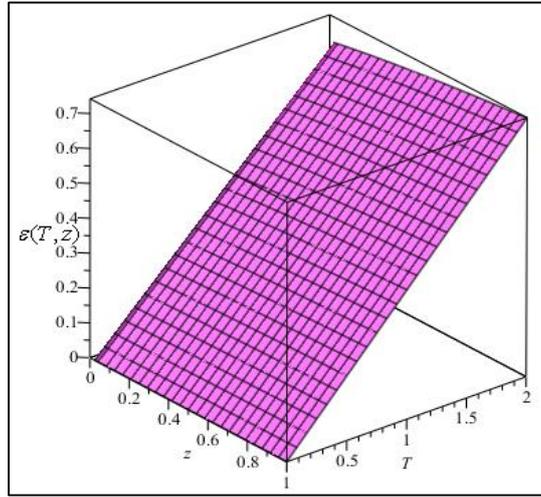
$$\frac{U}{\Omega} = u = 12\sqrt{2} \frac{(\pi m)^{3/2} (K_{\beta} T)^{5/2}}{h^3} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)^{5/2}} - \frac{z^{2k+2}}{(2k+2)^{5/2}} \right) \right\} \quad (63)$$



Gráfica 5.-Densidad de energía interna del plasma en función de la temperatura y fugacidad.

Las expresiones (62) y (63) son exactas y sus representaciones que están en las gráficas 4 y 5, corresponden a aproximaciones de dichas expresiones considerando cien sumandos en las series que aparecen en dichas expresiones. El número de sumandos es suficiente para la convergencia de las series

en el intervalo de cero a uno en cuanto al valor de la fugacidad. Otra interesante variable física es la energía media por carga libre que es el cociente entre la energía interna y el número de componentes del plasma.



Gráfica 6.- Energía interna media de cada carga magnética en función de la temperatura y fugacidad.

En esta gráfica se representa el cociente entre las expresiones de la ecuación (63) y (62) que viene a dar la energía interna media de cada carga magnética, la cual es perfectamente lineal con la temperatura que viene a ser

$$\varepsilon(T, z) = \frac{3}{2} K_{\beta} T \varphi(z) \tag{64}$$

$$\varphi(z) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)^{5/2}} - \frac{z^{2k+2}}{(2k+2)^{5/2}} \right)}{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)^{3/2}} - \frac{z^{2k+2}}{(2k+2)^{3/2}} \right)} \tag{65}$$

Existen otros procedimientos de aproximación [41] para determinar el parámetro de orden de la ecuación (62) y la energía interna del sistema (63). Las ecuaciones (53) y (56) pueden ponerse de la forma siguiente:

$$n(T, \mu) = C \int_0^{\infty} \frac{g_1(E)}{\exp[\beta(E - \mu)] + 1} dE \tag{66}$$

$$\frac{U}{\Omega} = u(T, \mu) = C \int_0^{\infty} \frac{g_2(E)}{\exp[\beta(E - \mu)] + 1} dE \tag{67}$$

Donde:

$$C = \frac{8\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \tag{68}$$

$$g_1(E) = E^{1/2} \text{ y } g_2(E) = E^{3/2} \tag{69}$$

Por lo tanto se pueden hacer las dos integrales a la vez considerando la integral genérica:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{g(E)}{\exp[\beta(E - \mu)] + 1} dE \quad (70)$$

Donde $g(E)$ es o bien $CE^{3/2}$ para el caso de la energía y $CE^{1/2}$ para el caso del parámetro de orden que viene definido por el número de cargas magnéticas para una temperatura dada. La integral I , puede ponerse como

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \frac{g(E)}{\exp[\beta(E - \mu)] + 1} dE = \\ &= \int_{\mu}^{\infty} \frac{g(E)}{\exp[\beta(E - \mu)] + 1} dE + \int_0^{\mu} g(E) dE - \int_0^{\mu} \frac{g(E)}{\exp[-\beta(E - \mu)] + 1} dE \end{aligned} \quad (71)$$

Se hace el cambio de variable $x = \beta(E - \mu)$ en la primera integral del lado derecho de la igualdad y $x = -\beta(E - \mu)$ en la segunda, lo cual deja la expresión de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \frac{g(E)}{\exp[\beta(E - \mu)] + 1} dE = \\ &= \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} \frac{g(\mu + \frac{x}{\beta})}{\exp[x] + 1} dx + \int_0^{\mu} g(E) dE - \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta\mu} \frac{g(\mu - \frac{x}{\beta})}{\exp(x) + 1} dx \end{aligned} \quad (72)$$

Para bajas temperaturas, $g(\mu \pm x/\beta) = g(\mu) \pm (x/\beta) g'(\mu)$ y $\beta\mu \rightarrow \infty$, por lo tanto, se obtiene este valor para la integral I:

$$I = \int_0^{\mu} g(E) dE + \frac{2}{\beta^2} g'(\mu) \int_0^{\infty} \frac{xdx}{\exp(x) + 1} \quad (73)$$

Donde la segunda integral puede encontrarse en libros de fórmulas matemáticas [44] que $\pi^2/12$ es su valor. De esta forma se sustituye la expresión de la "densidad de estados" $g_1(E) = E^{1/2}$ para determinar el número de cargas magnéticas por unidad de volumen a una determinada temperatura o $g_2(E) = E^{3/2}$ para obtener la energía interna por unidad de volumen. Por lo tanto, de acuerdo con la integral de la expresión (73), se tiene que el número de componentes del plasma por unidad de volumen y la energía interna del sistema también por unidad de volumen es:

$$n(T, \mu) = \frac{16\pi(2m)^{2/3}}{h^3} \mu^{3/2} + \frac{2\pi^3(2m)^{2/3}}{3h^3} (K_{\beta}T)^2 \mu^{-1/2} \quad (74)$$

$$u(T, \mu) = \frac{16\pi(2m)^{2/3}}{5h^3} \mu^{5/2} + \frac{2\pi^3(2m)^{2/3}}{h^3} (K_\beta T)^2 \mu^{1/2} \quad (75)$$

Como se puede apreciar en estas dos expresiones y tal como ocurría en el caso del condensado, las variables físicas fundamentales que definen y determinan las dos situaciones dependen de la masa efectiva de las cargas magnéticas que al no tener el soporte material de una partícula másica con masa gravitatoria se ha de determinar empíricamente o mediante un modelo físico que puede ser la propagación de campos electromagnéticos en los sistemas “spin-ices”.

5. Determinación de la masa de monopolos por propagación Electromagnética.

Una de las propiedades que permiten determinar la masa de los componentes es la determinación de la función dieléctrica e índice de refracción del sistema ante la propagación transversal de ondas electromagnéticas ya que estas funciones respuesta del medio dependen de la masa de los componentes que forman el sistema por el que se propagan las señales electromagnéticas. Esta propagación puede permitir de forma empíricamente sencilla la masa de estas entidades magnéticas al relacionarla con frecuencias críticas para las cuales existe absorción electromagnética, lo cual es detectable.

Los monopolos proceden de los dipolos en forma de cuerdas de Dirac, al separarse espacialmente tienen comportamiento ante el campo magnético exterior como si de un plasma neutro de cargas magnéticas se tratara. Consecuentemente, para cada carga positiva debe existir ineludiblemente una carga negativa con la misma masa efectiva y cuyos movimientos ante el campo magnético externo son, obviamente, los inversos. Además, de acuerdo con la fuerza de Lorentz para el caso de las cargas magnéticas, para obtener la forma dual del fenómeno, el campo magnético que debe actuar en el caso del plasma electrónico, hay que sustituirlo por un campo exterior eléctrico cuya dirección debe ser paralela al vector de onda del campo electromagnético que, en forma de onda monocromática debe hacerse incidir sobre el correspondiente plasma. Por otro lado, este plasma magnético presenta otra diferencia esencial respecto del plasma electrónico, en el cual, la masa de las cargas negativas, es decir, electrones es al menos mil quinientas veces menor que las de las cargas positivas que son iones, formados por núcleos atómicos. Por tanto, el movimiento de las cargas eléctricas positivas y su influencia sobre la onda electromagnética es sensiblemente inferior. Por ello, en el estudio de la propagación electromagnética en un plasma electrónico se puede obviar el movimiento de los iones y la formación de las corrientes iónicas.

Por el contrario, en el plasma magnético, la masa efectiva de las cargas positivas y negativas es la misma y en consecuencia, una de las cuestiones que van a permitir encontrar la diferencia de comportamiento de la propagación en el caso magnético de plasma es considerar la diferencia de funciones respuesta que se obtiene cuando se considera una o dos tipos de corriente magnética. Es decir se va a establecer cómo

afecta considerar unos o dos grados de libertad en cuanto a la existencia de una o dos tipos de corriente para comprobar la diferencia que ello supone sobre las respuestas dieléctricas. Además, deben considerarse las ecuaciones correspondientes tomándolas de las generales dadas en las expresiones (16-19), considerando que ahora existen dos tipos de corrientes magnéticas, las procedentes de las cargas magnéticas positivas y negativas. Además, no deben considerarse corrientes eléctricas, puesto que en los “spin-ices” y en los aislantes topológicos no existen movimientos de cargas eléctricas. Por todo ello, las ecuaciones a resolver, teniendo presente que se está considerando una onda plana transversal en un plano de fase y un campo eléctrico intenso perpendicular a dicho plano y por lo tanto paralelo al vector de propagación, son las que se tratan a continuación en las siguientes subsecciones.

5.1. Propagación con un tipo de corriente magnética.

Por lo tanto, se procede en primer lugar a considerar que existen un tipo de corriente magnética en orden a obtener la información necesaria sobre las respuesta del medio en forma de índice refracción complejo, cuya parte real es el índice de refracción propiamente dicho y la parte compleja es el índice de extinción de la onda interaccionante:

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\mu_0 \vec{J} - \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (76)$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (77)$$

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \gamma \vec{J} = \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m} \vec{H} - \frac{Q_m E_0}{mc^2} \vec{J} \wedge \vec{e}_z \quad (78)$$

Donde la ecuación (78) es la fuerza de Lorentz haciendo la sustitución de $\vec{J} = N Q_m \left(d\vec{r}/dt \right)$; N es densidad de cargas magnéticas libres, es decir, número de cargas partido por el volumen donde se contienen y que en primera aproximación y sin perder generalidad para los objetivos de este trabajo, consideraré que es espacialmente uniforme, Q_m es la carga magnética en las unidades apropiadas, J es la corriente de cargas magnéticas y E_0 es el módulo del campo eléctrico exterior cuya dirección es la del vector \vec{e}_z .

La variable física decisiva en el comportamiento de la propagación es la densidad de cargas magnéticas por unidad de volumen que ya se ha analizado en la sección anterior y que su valor depende de la temperatura y de la masa efectiva de las cargas magnéticas tal como se expresa en las ecuaciones (62) y (74). Por ello, el modelo estudiado en la sección anterior con el que se ha obtenido dicha ecuación está concatenado con el resultado de este análisis de propagación puesto que la propagación depende de N y N depende de la masa m que puede determinarse a partir de la respuesta dieléctrica que se va a poder determinar con el análisis de la propagación. Tal como se hace en el caso de un plasma electrónico, se ha

de asumir que la dinámica fundamental de las cargas magnéticas se circunscribe al plano de fase y además que el campo eléctrico que ejerce la aceleración sobre las cargas magnéticas es un campo exterior, estático e intenso [28]. Este planteamiento no proporciona una solución general que implicaría que se tendrían que considerar las 9 ecuaciones diferenciales que en forma vectorial son las (76-78), y por consiguiente, se deberían resolver las 9 incógnitas que aparecen en las mismas. Las funciones de prueba que se deben proponer son las correspondientes a una polarización en el plano de fase. Estas funciones de prueba para las ondas con polarización elíptica que vienen dadas por son las siguientes 3 soluciones:

$$\vec{E} = E_0 (\alpha \vec{e}_x + i\alpha' \vec{e}_y) \exp[\mp i(\omega t - kz)] \quad (79)$$

$$\vec{H} = H_0 (\beta \vec{e}_x + i\beta' \vec{e}_y) \exp[\mp i(\omega t - kz)] \quad (80)$$

$$\vec{J} = J_0 (\alpha \vec{e}_x + i\alpha' \vec{e}_y) \exp[\mp i(\omega t - kz)] \quad (81)$$

Donde $\beta' = \sqrt{1 - \beta^2}$ y $\alpha' = \sqrt{1 - \alpha^2}$. Los campos eléctricos y magnéticos definidos por estas soluciones son campos que están polarizados elípticamente, donde la solución con signo menos en la fase implica que la polarización es dextrógira o que evoluciona el vector total de forma horaria y el signo más es levógira y evoluciona de forma antihoraria. Al introducir estas funciones de prueba en las ecuaciones (76-78), se tiene las siguientes ecuaciones algebraicas:

$$\pm ik E_0 \vec{e}_z \wedge (\alpha \vec{e}_x + i\alpha' \vec{e}_y) = -\mu_0 J_0 (\alpha \vec{e}_x + i\alpha' \vec{e}_y) \pm i\omega \mu_0 H_0 (\beta \vec{e}_x + i\beta' \vec{e}_y) \quad (82)$$

$$\pm ik H_0 \vec{e}_z \wedge (\beta \vec{e}_x + i\beta' \vec{e}_y) = \mp i \epsilon_0 \omega E_0 (\alpha \vec{e}_x + i\alpha' \vec{e}_y) \quad (83)$$

$$\begin{aligned} \mp i \omega J_0 (\alpha \vec{e}_x + i\alpha' \vec{e}_y) + \gamma J_0 (\alpha \vec{e}_x + i\alpha' \vec{e}_y) = \\ = \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m} H_0 (\beta \vec{e}_x + i\beta' \vec{e}_y) - \omega_E J_0 (i\alpha' \vec{e}_x - \alpha \vec{e}_y) \end{aligned} \quad (84)$$

Haciendo la separación por componentes vectoriales se tienen las siguientes 6 ecuaciones algebraicas:

$$\mp i \omega J_0 \alpha + \gamma J_0 \alpha = \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m} H_0 \beta - i\alpha' \omega_E J_0 \quad (85)$$

$$\pm \omega J_0 \alpha' + i\gamma J_0 \alpha' = i \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m} H_0 \beta' + \alpha \omega_E J_0 \quad (86)$$

$$\pm k \alpha' E_0 = -\mu_0 J_0 \alpha \pm i\mu_0 \omega H_0 \beta \quad (87)$$

$$\pm ik \alpha E_0 = -i\mu_0 J_0 \alpha' \mp \mu_0 \omega H_0 \beta' \quad (88)$$

$$\pm k H_0 \beta' = \mp i \epsilon_0 \omega E_0 \alpha \quad (89)$$

$$\mp ik H_0 \beta = \mp \epsilon_0 \omega E_0 \alpha' \quad (90)$$

Donde:

$$\omega_E = \frac{Q_m E_0}{mc^2} \quad (91)$$

Esta es la frecuencia producida en el movimiento de las cargas magnéticas por el campo eléctrico exterior. Esta frecuencia tiene un interés especial pues permite determinar la masa efectiva de las cargas magnéticas dado que para esa frecuencia se encontrará más adelante una resonancia con máxima absorción electromagnética y que está relacionada con el campo eléctrico exterior que es un dato experimental de entrada. Esta frecuencia corresponde al movimiento de precesión determinado por la rotación de las cargas magnéticas en el plano de fase perpendicular al campo eléctrico externo y es esencial pues explicita la naturaleza de la respuesta dieléctrica.

Por otro lado, de las ecuaciones (87-90) se puede deducir sin dificultad que $\alpha = \alpha' = \beta = \beta'$. Por lo tanto las ecuaciones (85-91) se reducen a tres que constituyen un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son E_0, H_0, J_0 y para que este sistema tenga solución diferente de la trivial, $E_0 = H_0 = J_0 = 0$, es necesario y suficiente que el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas sea igual a cero. Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{vmatrix} \mp i\omega + \gamma + i\omega_E & 0 & -\frac{\mu_0 N Q_m^2}{m} \\ i\mu_0 & \pm ik & \pm \mu_0 \omega \\ 0 & \mp \varepsilon_0 \omega & \pm ik \end{vmatrix} = 0 \quad (92)$$

Evaluando el determinante se tiene la siguiente condición para que el sistema homogéneo tenga solución no trivial:

$$(\mp i\omega + \gamma + i\omega_E) \left[-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \pm i \frac{\mu_0 N Q_m^2}{mc^2} \omega = 0 \quad (93)$$

Lo cual implica la siguiente expresión para el índice de refracción complejo ($n = (ck/\omega)$):

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{\omega \pm \omega_E}{(\omega \pm \omega_E)^2 + \gamma^2} \pm i \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{\gamma}{(\omega \pm \omega_E)^2 + \gamma^2} \quad (94)$$

La ecuación (94) contiene tres variables, que dependen del sistema físico (el plasma): la frecuencia del plasmón, ω_p , la frecuencia de precesión, ω_E y el parámetro de rozamiento, γ , que también tiene unidades de frecuencia. La variable independiente es la frecuencia de la onda electromagnética monocromática, ω , que interacciona con el el plasma y cuya propagación se intenta estudiar. Como se observa, ω_p^2 es la frecuencia propia del plasma y cuya expresión es:

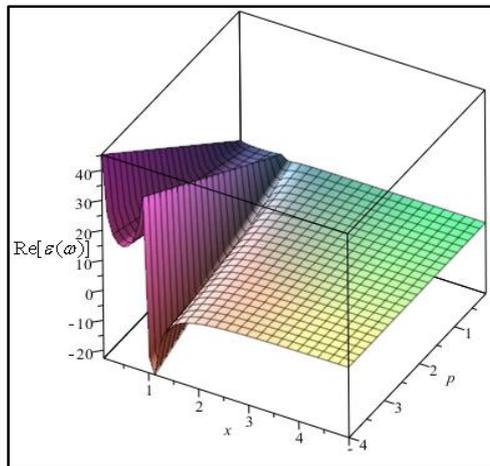
$$\omega_p^2 = \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m} \quad (95)$$

Esta variable característica de cualquier plasma, sea eléctrico o magnético, depende otra vez de la masa de los componentes de dicho plasma, es decir, de las cargas magnéticas, de la densidad de ellas que han quedado determinadas en función de la temperatura en las ecuaciones (62) y (74) y en la gráfica 4 y de la masa efectiva de las correspondientes cargas.

La frecuencia de precesión, cuya expresión viene dada en la ecuación (91), tiene una influencia determinante en la función dieléctrica compleja dada en la expresión (94), puesto que para la frecuencia del campo electromagnético que igual a la frecuencia de precesión, la parte imaginaria de n^2 tiene un máximo cuando $\omega = \omega_E$, siendo éste un máximo absoluto de la expresión (94). En consecuencia cuando en la propagación se obtenga una absorción máxima estará en la frecuencia de resonancia que es igual a la de precesión y por lo tanto se tendrá fijada la masa de las cargas magnéticas. Para representar expresión de la función dieléctrica, es conveniente transformar la expresión (94) en función de variables adimensionales, considerando los siguientes cambios de variable $x = \omega/\omega_E$ y $p = \omega_p^2/\omega_E^2$. Con estas modificaciones, la ecuación (94) toma la siguiente forma:

$$n^2 = 1 - \frac{p}{x} \frac{1}{(x \pm 1)^2 + \theta^2} \pm i \frac{p}{x} \frac{\theta}{(x \pm 1)^2 + \theta^2} \tag{96}$$

Una representación de n^2 en función de p y x se muestra en las siguientes gráficas 7, 8 y 9 para valores de $\theta = \gamma/\omega_E = 0.06$.

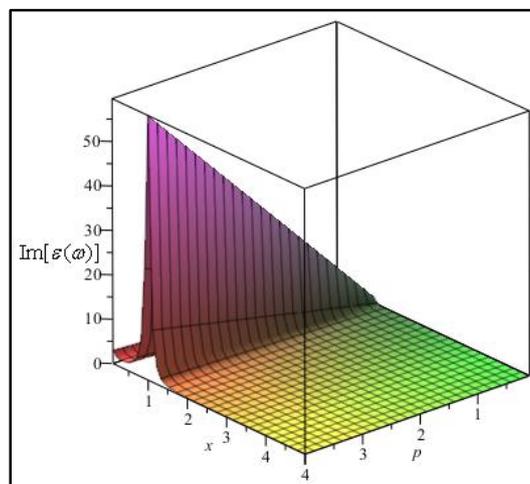


Gráfica 7.- Parte real de la función dieléctrica en función del parámetro p y la variable x .

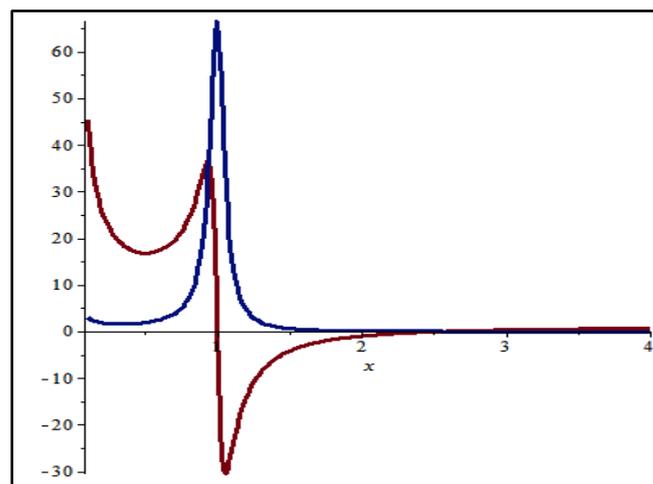
La parte real tiene un cambio brusco de signo para valores de la frecuencia del campo electromagnético igual a la frecuencia de precesión de las cargas magnéticas ante el campo eléctrico, lo que ocurre cuando $x = 1$. Para este valor, la parte imaginaria presenta un máximo en forma de pico cuyo ancho de banda es igual a $\Delta x = 0.06$, lo cual implica un parámetro de amortiguamiento o de fuerza no conservativa de

viscosidad de $\gamma = 0,06\omega_E$. Una de las cuestiones que resuelve este estudio es que mediante la absorción electromagnética que se produce en el máximo de esta parte imaginaria, la masa de las cargas magnéticas viene dada por $m = Q_m E_0 / (x\omega_E c^2)$.

Es preciso tener en cuenta que la descripción de los posibles estados en los que se puede encontrar el sistema físico en su sentido más genuino como es su comportamiento termodinámico, las variable físicas más significativas, tales como temperatura de transición, potencial químico, energía interna, densidad de portadores o componentes del propio sistema dependen de esta masa de las cargas magnéticas que al no tener masa real gravitatoria es difícil de observar por otros procedimientos diferentes de la propagación.

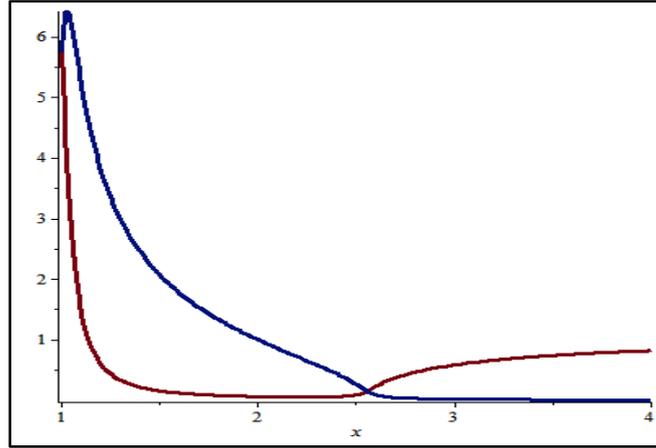


Gráfica 8.-Parte imaginaria de la función dieléctrica en función del parámetro p y la variable x .



Gráfica 9.- Parte real (granate) y parte imaginaria (azul) de la función dieléctrica en función de ω .

A partir del índice de refracción complejo se puede obtener el índice de refracción óptico propiamente dicho como parte real del coeficiente complejo de tal forma que su parte imaginaria es el coeficiente de extinción de la onda electromagnética.



Gráfica 10.- Índice de refracción (granate) y coeficiente de extinción (azul).

En esta gráfica se ve que el índice de refracción tiende a uno cuando la frecuencia crece y se aleja de la frecuencia de precesión. Por el contrario en el intervalo de ancho de banda alrededor de la frecuencia de precesión, los valores del índice de refracción no son interpretables físicamente dado que para ese intervalo la absorción electromagnética es tan elevada que impide la propia propagación.

5.2. Propagación con dos tipos de corriente magnética.

Si se consideran dos tipos de corriente magnética correspondientes a monopolos de carga positiva diferenciados de los de carga negativa, las ecuaciones (76-78), se convierten en:

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\mu_0(\vec{J}^+ + \vec{J}^-) - \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{97}$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{98}$$

$$\frac{\partial \vec{J}^+}{\partial t} + \gamma \vec{J}^+ = \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m} \vec{H} - \frac{Q_m E_0}{mc^2} \vec{J}^+ \wedge \vec{e}_z \tag{99}$$

$$\frac{\partial \vec{J}^-}{\partial t} + \gamma \vec{J}^- = \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m} \vec{H} + \frac{Q_m E_0}{mc^2} \vec{J}^- \wedge \vec{e}_z \tag{100}$$

Donde Q_m es el valor de la carga magnética positiva o módulo de la carga magnética en general. Las funciones de prueba para los campos son idénticas a las de las ecuaciones (79) y (80) y las soluciones para las dos corrientes son:

$$\vec{J}^+ = J_0^+ (\alpha \vec{e}_x + i\alpha' \vec{e}_y) \exp[\mp i(\omega t - kz)] \tag{101}$$

$$\vec{J}^- = J_0^- (\alpha \vec{e}_x + i\alpha' \vec{e}_y) \exp[\mp i(\omega t - kz)] \tag{102}$$

E incluyendo las ecuaciones de prueba en las ecuaciones diferenciales (97-100) se obtiene la siguiente condición para que el sistema lineal de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas tenga solución no trivial:

$$\begin{vmatrix} \Gamma^- & 0 & 0 & -\frac{\mu_0 N Q_m^2}{m} \\ 0 & \Gamma^+ & 0 & -\frac{\mu_0 N Q_m^2}{m} \\ i\mu_0 & i\mu_0 & \pm ik & \pm \mu_0 \omega \\ 0 & 0 & \mp \varepsilon_0 \omega & \pm ik \end{vmatrix} = 0 \quad (103)$$

Donde se ha definido $\Gamma^- = \mp i\omega + \gamma - i\omega_E$ y $\Gamma^+ = \mp i\omega + \gamma + i\omega_E$. Y desarrollando esta ecuación proporcionada por la anulación del determinante, se tiene lo siguiente:

$$\Gamma^- \Gamma^+ \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \pm i\Gamma^- \omega_P^2 \frac{\omega}{c^2} \pm i\Gamma^+ \omega_P^2 \frac{\omega}{c^2} = 0 \quad (104)$$

Lo cual genera la relación:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \pm \omega_P^2 \frac{\omega}{c^2} \left(\frac{i}{\mp i\omega + \gamma + i\omega_E} + \frac{i}{\mp i\omega + \gamma - i\omega_E} \right) \quad (105)$$

Que implica la expresión del índice de refracción complejo:

$$n^2 = 1 \pm \frac{\omega_P^2}{\omega} \left(\frac{1}{\mp \omega + \omega_E - i\gamma} + \frac{1}{\mp \omega - \omega_E - i\gamma} \right) \quad (106)$$

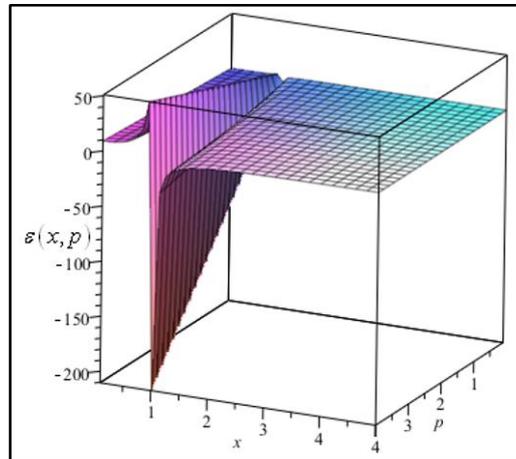
O lo que es lo mismo:

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega} \left(\frac{1}{\omega \mp \omega_E \pm i\gamma} + \frac{1}{\omega \pm \omega_E \pm i\gamma} \right) \quad (107)$$

Cuando el plasma tiene una densidad de cargas apreciable, la fuerzas viscosas que vienen dadas por el parámetro γ establece un índice de refracción complejo que implica un coeficiente de extinción de la onda electromagnética y por consiguiente una absorción electromagnética para una frecuencia igual a la de precesión. Esta frecuencia de precesión, ω_E , es la relación entre impulso mecánico y la energía en reposo del monopolo magnético. Si se considera un plasma magnético con una densidad de cargas muy baja, la fuerza viscosa puede ser nula, y entonces, la función de índice de refracción de la ecuación (107) se puede escribir como:

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega} \left(\frac{1}{\omega \mp \omega_E} + \frac{1}{\omega \pm \omega_E} \right) \quad (108)$$

Para hacer una representación de la expresión de la parte real de la (107) considerará los cambios de variables aplicados en la fórmula (96): $x = \omega/\omega_E$ y $p = \omega_p^2/\omega_E^2$. Así de esta forma se obtiene una expresión en función de variables adimensionales análoga a la (96) pero con dos términos.



Gráfica 11.- Parte real de la función dieléctrica con dos tipos de corriente.

La función dieléctrica considerando dos tipos de carga es idéntica para las funciones de prueba de onda electromagnética levógira y dextrógira que quedan definidas mediante la elección del signo, el menos para la de polarización levógira y el más para la dextrógira. En este caso, el resultado es diferente respecto del de un tipo de corriente en el que la función dieléctrica es diferente para cada una de las polarizaciones dado que al existir un solo sumando pierde la simetría de la expresión ante el cambio del signo. Por lo tanto en el caso de dos tipos de corriente de cargas magnéticas el resultado es contrario al caso de plasma magnético considerando una única corriente de cargas, cuya función dieléctrica en la propagación electromagnética es similar al caso de la propagación en el plasma electrónico. Es decir, al considerar dos tipos de corriente magnética, el sistema pierde la birrefringencia que se deduce de la ecuación (94) y que está presente en el caso del plasma eléctrico dado que la polarización levógira tiene índice de refracción diferente de la dextrógira.

6. Propagación EM en guías de ondas con plasma magnético o condensado.

Esta sección tiene un doble objetivo. En primer lugar estudiar la propagación de las señales electromagnéticas en medios confinados cuando en su interior existen cargas magnéticas en libertad de movimiento. Esta propagación, en mi opinión, tiene interés en sí misma pues permite poner en funcionamiento la determinación de las soluciones de las ecuaciones de campo conjuntamente con las del movimiento de las partículas en dichos campos. Todo ello se estudia en sistemas confinados que presentan variantes respecto de lo que ocurre en el caso de las ecuaciones de Maxwell al existir cargas y corrientes magnéticas. Se podrá determinar la relación existente entre los campos eléctrico y magnético, tanto en sus componentes transversales como en las longitudinales extrayendo conclusiones en la comparación con el

problema dual de estas mismas ecuaciones en el caso normal de inexistencia de cargas magnéticas. Tal como se demuestra en esta sección, la densidad de estas cargas es el elemento fundamental que determina las características de la propagación, constituyendo un verdadero parámetro de orden a la hora de distinguir la fase en que se encuentra el sistema físico que está contenido guía de ondas.

En segundo lugar, el sistema puede tener diferentes estados colectivos que presentan propiedades electromagnéticas esencialmente diferentes. Por un lado se tiene la situación de posible condensado de pares que implicaría la existencia de una mínima parte de cargas libres, lo que constituiría una situación en la que las corrientes magnéticas serían despreciables y el medio se comportaría como un gas de partículas neutras y en consecuencia la propagación electromagnética sería similar a la que se tendría en el caso de inexistencia de monopolos magnéticos. Es decir, la propagación es la típica que proporcionan las ecuaciones de Maxwell estándar.

Por otro lado, y el más interesante desde el punto de vista de la propagación y de su posible utilización como dispositivos de transmisión de señales y de energía electromagnética, cuando en el sistema existe una proporción apreciable de cargas magnéticas que producen a su vez corrientes magnéticas. Este sería el caso del plasma magnético lo cual permite profundizar en el comportamiento de estos sistemas ante la presencia de campos variables en el espacio-tiempo, cuando hay cargas magnéticas en el interior del medio limitado.

Las ecuaciones de campo que se deben utilizar son como en el caso de la propagación electromagnética de la sección anterior. Por otro lado, es necesario recordar que no existen corrientes de cargas eléctricas. En consecuencia de todo ello las ecuaciones son las siguientes:

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\mu_0 \vec{J} - \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (109)$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (110)$$

$$\frac{\partial \vec{J}^+}{\partial t} + \gamma \vec{J}^+ = \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m} \vec{H} - \frac{Q_m}{mc^2} \vec{J}^+ \wedge \vec{E} \quad (111)$$

$$\frac{\partial \vec{J}^-}{\partial t} + \gamma \vec{J}^- = \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m} \vec{H} + \frac{Q_m}{mc^2} \vec{J}^- \wedge \vec{E} \quad (112)$$

Además, teniendo en cuenta que no existen corrientes superficiales de cargas magnéticas, las condiciones de contorno de separación de medios son las mismas que se utilizan en las ecuaciones de Maxwell estándar. Por otro lado, a diferencia del caso de la sección anterior de propagación en el que se considera un campo eléctrico intenso independiente de la onda que se propaga, el término en el que aparece el campo eléctrico en las ecuaciones (111-112) puede despreciarse de forma cuantitativa, puesto que en este caso, este campo eléctrico procede de la propia onda que es de intensidad mucho menor que el campo externo

considerado anteriormente. De hecho, si se hace una estimación comparativa de los módulos de los dos términos de la derecha de las ecuaciones (111-112), se obtiene que la relación entre el primero y el segundo de ambas ecuaciones varía de la forma siguiente:

$$\frac{\left| \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m} \vec{H} \right|}{\left| \frac{Q_m}{m c^2} \vec{J} \wedge \vec{E} \right|} \approx \frac{N Q_m c}{|\vec{J}|} \quad (113)$$

Siendo \vec{J} , cualquiera de las dos corrientes y c la velocidad de la luz en el vacío. Por lo tanto, la comparación entre los módulos del primer término y el segundo es equivalente a comparar una corriente cuyas cargas fueran a la velocidad de la luz frente a la corriente de cargas magnéticas que evolucionan dentro de los “hielos de spin”, corriente que procede de las cargas magnéticas que viajan a velocidades, muy probablemente mayor que los electrones dentro de un sólido, pero muy inferiores a la velocidad c . En consecuencia, si se desprecian los términos en campo eléctrico de las ecuaciones (111-112), éstas quedan de la forma más simplificada siguiente:

$$\frac{\partial \vec{J}^+}{\partial t} + \gamma \vec{J}^+ = \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m} \vec{H} \quad (114)$$

$$\frac{\partial \vec{J}^-}{\partial t} + \gamma \vec{J}^- = \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m} \vec{H} \quad (115)$$

Las corrientes de cargas magnéticas positivas y las negativas cumplen la misma ecuación, por lo tanto, en lugar de tener cuatro, son tres las ecuaciones que hay que resolver.

$$\frac{\partial \vec{J}_T}{\partial t} + \gamma \vec{J}_T = \frac{\mu_0 N_T Q_m^2}{m} \vec{H} \quad (116)$$

Donde N_T es la suma de las densidades de cargas magnéticas positivas y negativas. Por lo tanto, si se consideran las soluciones del tipo de las expresiones (81), (101) y (102), se obtiene una expresión para la conductividad de cargas magnéticas ante la presencia del campo magnético, cuya expresión es:

$$(-i\omega + \gamma) \vec{J}_T = \frac{\mu_0 N_T Q_m^2}{m} \vec{H} \quad (117)$$

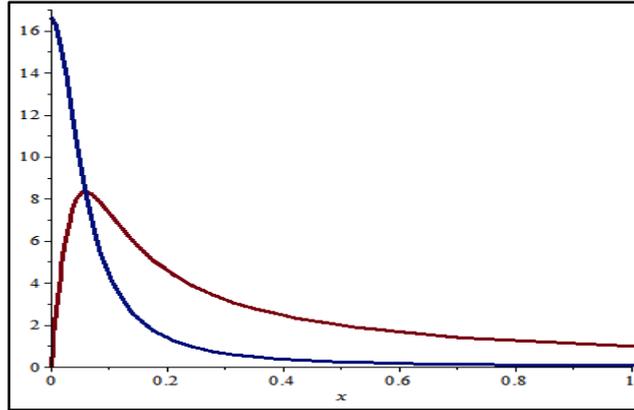
Y por lo tanto, esto permite determinar una ley equivalente a la ley de Ohm para cargas magnéticas en este tipo de propagación, donde la conductividad viene dada por:

$$\sigma(\omega) = \frac{\mu_0 N_T Q_m^2}{m(-i\omega + \gamma)} = \frac{\mu_0 N_T Q_m^2}{m} \left(\frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} + \frac{i\omega}{\omega^2 + \gamma^2} \right) \quad (118)$$

Sustituyendo el valor de la masa de las cargas magnéticas a partir de la frecuencia de precesión, $m = Q_m E_0 / \omega_E c^2$, definiendo $x = \omega / \omega_E$ y $\theta = \gamma / \omega_E$, la expresión (118) de la conductividad es:

$$\sigma(x) = \frac{N_T Q_m}{\epsilon_0 E_0} \left(\frac{\theta}{x^2 + \theta^2} + i \frac{x}{x^2 + \theta^2} \right) \quad (119)$$

Esta expresión se representa en la gráfica que se muestra a continuación:



Gráfica 12.-Parte real (azul) e imaginaria (granate) de la conductividad de las cargas magnéticas ante el campo magnético en función de la frecuencia.

Una característica específica de esta conductividad es que la parte real cuyo significado físico es el de la conductividad propiamente dicha tiene un máximo en forma de pico para frecuencia nula y además si las fuerzas disipativas tienden a cero, la conductividad es imaginaria pura. En la gráfica anterior se da la conductividad para un valor de $N_T Q_m / \epsilon_0 E_0$ igual a la unidad cuyo valor viene condicionado por el campo eléctrico constante. Variaciones del valor de esta expresión que aparece en la ecuación (119) modificarán cuantitativamente el resultado, pero se mantendrá cualitativamente la forma de $\sigma(x)$.

Siguiendo en el análisis de la propagación en guías de ondas, cuando no se considera el término de campo eléctrico en el movimiento correspondiente a las cargas que generan corriente magnética de las ecuaciones (111-112), las ecuaciones para cada señal electromagnética monocromática vienen a ser:

$$\nabla \wedge \vec{H} = -i\epsilon_0 \omega \vec{E} \quad (120)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\mu_0 \vec{J} + i\omega \mu_0 \vec{H} \quad (121)$$

$$\left(-i\omega \vec{J} + \gamma \right) \vec{J} = \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m} \vec{H} \quad (122)$$

En la ecuación (122), se vuelve a poner la letra N para designar la densidad de cargas magnéticas pero es por simplificación, por lo que se elimina el subíndice T de las ecuaciones (116-118), pero es necesario decir que la densidad que aparece en la ecuación (122) es la densidad total suma de las densidades de

cargas positivas y negativas. Por otro lado, hay que tener presente que en el caso de ondas electromagnéticas en recintos limitados por material conductor, existen las condiciones de contorno que, como se ha dicho anteriormente, son idénticas al caso estándar siempre y cuando se considere la inexistencia de corrientes magnéticas superficiales.

6.1. Ecuaciones en guías.

En este apartado se van a desglosar las ecuaciones causales de los campos en componentes transversales y longitudinales relacionando éstas con aquellas, para lo cual es conveniente realizar algunas transformaciones exactas en estas ecuaciones en orden a establecer dichas relaciones que simplifican el análisis global. En primer lugar se considera el gradiente de la componente longitudinal (a lo largo del eje de la guía que se elige como eje Z):

$$\nabla E_z = \nabla(\vec{e}_z \cdot \vec{E}) = (\vec{e}_z \cdot \nabla)\vec{E} + \vec{e}_z \wedge (\nabla \wedge \vec{E}) = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} + \vec{e}_z \wedge (\nabla \wedge \vec{E}) \quad (123)$$

Por lo tanto:

$$\nabla E_z - \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = \vec{e}_z \wedge (\nabla \wedge \vec{E}) \quad (124)$$

Y esto implica:

$$\nabla_t E_z = \vec{e}_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} + \vec{e}_z \wedge (\nabla \wedge \vec{E}) \quad (125)$$

Donde $\nabla_t = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y}$, y sustituyendo el valor del rotacional del campo eléctrico de la ecuación

(121), se tiene lo siguiente:

$$\nabla_t E_z = \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} + \vec{e}_z \wedge (-\mu_0 \vec{J} + i\mu_0 \omega \vec{H}) \quad (126)$$

Y de forma definitiva se obtiene:

$$\boxed{\nabla_t E_z = \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} - \mu_0 \vec{e}_z \wedge \vec{J}_t + i\mu_0 \omega \vec{e}_z \wedge \vec{H}_t} \quad (127)$$

Haciendo lo mismo con el campo magnético, se tiene:

$$\nabla H_z = \nabla(\vec{e}_z \cdot \vec{H}) = (\vec{e}_z \cdot \nabla)\vec{H} + \vec{e}_z \wedge (\nabla \wedge \vec{H}) = \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} + \vec{e}_z \wedge (\nabla \wedge \vec{H}) \quad (128)$$

Y sustituyendo el valor del rotacional del campo magnético se obtiene que:

$$\boxed{\nabla_t H_z = \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} - i\varepsilon_0 \omega \vec{e}_z \wedge \vec{E}_t} \quad (129)$$

6.2. Soluciones de prueba.

Tal como se hace en el caso de las ecuaciones de Maxwell estándar, se consideran las siguientes soluciones de prueba para las ondas monocromáticas que se pueden propagar en la guía:

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{H}(\vec{r}, t) \end{cases} = \begin{cases} \vec{E}_0(x, y) \\ \vec{H}_0(x, y) \end{cases} \exp(\pm ik_z z - i\omega t) \quad (130)$$

E introduciendo estas funciones de prueba en las ecuaciones (127) y (129), se tiene lo siguiente:

$$\nabla_t E_z = \pm ik_z \vec{E}_t + i\mu_0 \omega \vec{e}_z \wedge \vec{H}_t - \mu_0 \vec{e}_z \wedge \vec{J}_t \quad (131)$$

$$\nabla_t H_z = \pm ik_z \vec{H}_t - i\varepsilon_0 \omega \vec{e}_z \wedge \vec{E}_t \quad (132)$$

Estas últimas ecuaciones acopladas mezclan en la parte derecha de la igualdad componentes del campo eléctrico y magnético lo cual complica su solución. Para obtener un resultado más simple que es el que proporcionan las ecuaciones desacopladas, se pueden hacer algunas simplificaciones y modificaciones exactas realizando la multiplicación vectorial \vec{e}_z por la (131) y sustituyendo el resultado en la (132), se tiene lo siguiente:

$$\vec{e}_z \wedge \nabla_t E_z = \pm ik_z \vec{e}_z \wedge \vec{E}_t - i\mu_0 \omega \vec{H}_t + \mu_0 \vec{J}_t \quad (133)$$

O también:

$$\pm ik_z \vec{e}_z \wedge \vec{E}_t = \vec{e}_z \wedge \nabla_t E_z + i\mu_0 \omega \vec{H}_t - \mu_0 \vec{J}_t \quad (134)$$

Y sustituyendo el resultado de $\vec{e}_z \wedge \vec{E}_t$ en la ecuación (132), se tiene:

$$\boxed{\nabla_t H_z \pm \frac{\varepsilon_0 \omega}{k_z} \vec{e}_z \wedge \nabla_t E_z = \pm i \left(k_z - \frac{\omega^2}{c^2 k_z} \right) \vec{H}_t \pm \frac{\omega^2}{c^2 k_z} \vec{J}_t} \quad (135)$$

En esta ecuación, en la parte derecha de la igualdad sólo existen componentes transversales del campo magnético ya que la corriente transversal, de acuerdo con la ley de ohm deducida anteriormente, es proporcional al campo magnético de acuerdo con la ecuación (122). Y si ahora se opera de forma similar multiplicando vectorialmente \vec{e}_z por (132):

$$\vec{e}_z \wedge \nabla_t H_z = \pm ik_z \vec{e}_z \wedge \vec{H}_t + i\varepsilon_0 \omega \vec{E}_t \quad (136)$$

Y sustituyendo en (131) se tiene que:

$$\boxed{\nabla_t E_z \mp \frac{\mu_0 \omega}{k_z} \vec{e}_z \wedge \nabla_t H_z = \pm i \left(k_z - \frac{\omega^2}{c^2 k_z} \right) \vec{E}_t - \mu_0 \vec{e}_z \wedge \vec{J}_t} \quad (137)$$

En la parte derecha de esta última ecuación hay una componente transversal del campo eléctrico y otro término proporcional al campo magnético mediante la presencia de la corriente transversal y por lo tanto aparentemente no se ha conseguido el desacoplo de la ecuación, tal como ocurría en la (135). Sin embargo, como se verá esto no será inconveniente a la hora de determinar las componentes transversales del campo eléctrico en función de las longitudinales teniendo en cuenta la ley de Ohm. En consecuencia, se puede decir que las expresiones (135) y (137) constituyen las ecuaciones generales de las guías de ondas que relacionan las componentes longitudinales con las trasversales de los campos eléctricos y magnéticos.

6.3. Ondas transversales magnéticas.

En estas ondas, la componente longitudinal del campo magnético se anula. De ahí la denominación de ondas transversales magnéticas. De las ecuaciones generales, se toman éstas considerando la transversalidad del campo magnético y por lo tanto se anula H_z . En este caso las ecuaciones (135) y (137) se convierten en las siguientes:

$$\mp i \varepsilon_0 \omega \vec{e}_z \wedge \nabla_t E_z = \pm (k_z^2 - k_0^2) \vec{H}_t \mp i \frac{\omega}{c^2} \vec{J}_t \quad (138)$$

$$-i k_z \nabla_t E_z = \pm (k_z^2 - k_0^2) \vec{E}_t + i k_z \mu_0 \vec{e}_z \wedge \vec{J}_t \quad (139)$$

Donde $k_0^2 = \omega^2/c^2$ y $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$. Estas ecuaciones, tal como se va a ver más adelante, permiten determinar \vec{E}_t y \vec{H}_t a partir de la componente longitudinal del campo eléctrico, con lo cual habrá quedado determinado completamente el sistema electromagnético. Además de estas ecuaciones, hay que añadir la ecuación de la corriente magnética, es decir:

$$\vec{J}_t = \left(\frac{\mu_0 N Q_m^2}{m(-i\omega + \gamma)} \right) \vec{H}_t \quad (140)$$

$$J_z = J_0 \exp(-\gamma t) \quad (141)$$

La corriente a lo largo del eje de la guía (eje Z) como es evanescente se puede considerar como elemento espurio dado que no va influir en el resultado final.

6.4. Ecuación de ondas para la componente longitudinal del campo eléctrico.

De las ecuaciones de Maxwell generalizadas (16-19), se toma el rotacional en el rotacional del campo eléctrico:

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{E}) = -\mu_0 \nabla \wedge \vec{J} - \mu_0 \frac{\partial (\nabla \wedge \vec{H})}{\partial t} \quad (142)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \nabla \wedge \vec{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (143)$$

Si se considera que no hay cargas eléctricas que produzcan la dispersión de las ondas electromagnéticas, la ecuación (143) queda de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \nabla \wedge \vec{J}} \quad (144)$$

Considerando la condición de transversalidad de la onda TM ($H_z = 0$), se tiene la siguiente relación entre la corriente y el campo:

$$(-i\omega + \gamma) \vec{J}_t = \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m} \vec{H}_t \quad (145)$$

De lo cual se deduce:

$$\nabla \wedge \vec{J}_t = \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m(-i\omega + \gamma)} \nabla \wedge \vec{H}_t = \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m(-i\omega + \gamma)} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t} \quad (146)$$

Y por tanto la ecuación de ondas para la componente longitudinal del campo eléctrico viene dada por:

$$\nabla^2 E_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m(-i\omega + \gamma)} \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (147)$$

La cual si se considera una onda monocromática, se tiene que:

$$\nabla^2 E_z - \frac{(-i\omega)^2}{c^2} E_z + i \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m(-i\omega + \gamma)} \frac{\omega}{c^2} E_z = 0 \quad (148)$$

Suponiendo que la amortiguación debida a las fuerzas no conservativas sea pequeña, (148) queda:

$$\nabla^2 E_z + \left[k_0^2 - \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m c^2} \right] E_z = 0 \quad (149)$$

Y por lo tanto la relación entre corriente y campo intensidad magnética, en el caso de que las fuerzas disipativas sean despreciables, viene a ser:

$$\vec{J}_t = i \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m \omega} \vec{H}_t \quad (150)$$

Esta expresión indica que la existencia de cargas magnéticas establece una diferencia de fase constante e independiente de la temperatura entre la corriente y el campo magnético de 180° . Además, la proporcionalidad entre estos dos vectores depende linealmente de la densidad de portadores y por lo tanto es función de la temperatura del plasma tal como se ha demostrado en la sección 4.2.1. Se ha de tomar en

cuenta una función de prueba para la componente longitudinal que sea solución de la ecuación (149) en el caso de una guía de sección transversal rectangular de lados a y b que además cumpla las condiciones de contorno que implican la anulación del campo eléctrico longitudinal en la superficie de la guía. Una solución que cumple estas condiciones es del tipo siguiente:

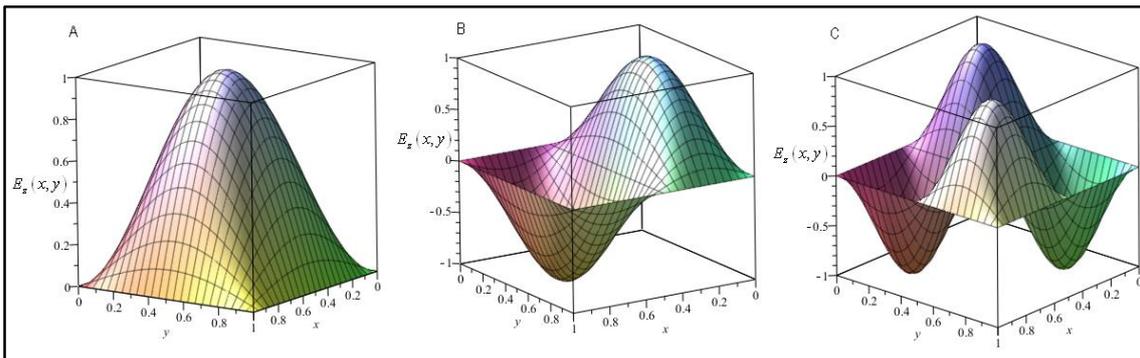
$$E_z(\vec{r}, t) = E_0[\sin(k_x x) \sin(k_y y)] \exp(\pm i k_z z - i \omega t) \tag{151}$$

Donde las componentes transversales del vector de ondas son:

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \tag{152}$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b} \tag{153}$$

En la siguiente gráfica se da la forma de la parte correspondiente a la sección transversal del campo eléctrico definido en la ecuación (151) para diferentes valores de los parámetros m y n con los que se definen los modos de esta ecuación:



Gráfica 13.- Parte transversal de la componente longitudinal del campo eléctrico. A modo 11, B modo 21 y C modo 22.

La ecuación (151) como función de prueba de la parte componente longitudinal del campo eléctrico tiene las características típicas de la solución de la ecuación diferencial (149) en un recinto limitado por un material conductor cuya sección transversal sea un paralelogramo. No obstante, en el caso específico de la figura se ha elegido, sin pérdida de generalidad, que coincida con un cuadrado en el que en sus paredes debe anularse el campo eléctrico tangencial. Este campo tangencial coincide con la componente longitudinal del campo eléctrico de la guía. Cuando la sección transversal de la guía tiene otra forma geométrica, se ha de proponer una función de prueba para el campo de forma adecuada para que se cumpla esta condición de contorno de anulación de la componente longitudinal en las paredes de la guía. La ecuación (149) con la solución del tipo (151) se transforma en:

$$\nabla_t^2 E_z + \left[k_0^2 - \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m c^2} - k_z^2 \right] E_z = 0 \tag{154}$$

Y por lo tanto, el vector de onda de la componente longitudinal viene dado por:

$$-k_x^2 - k_y^2 + \left(k_0^2 - \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m c^2} \right) = k_z^2 \quad (155)$$

La ecuación (155) constituye un auténtico selector de soluciones transversales, puesto que para que se tenga solución longitudinal eléctrica no evanescente, esta ecuación debe tener solución real. De acuerdo con esta expresión sólo existe componente longitudinal no evanescente del campo eléctrico cuando se tienen valores reales de k_z . Se debe poner énfasis en el hecho de que si la solución de la componente longitudinal es evanescente, las demás componentes que dependen de aquella también lo serán y por lo tanto no habrá propagación. De acuerdo con esta expresión (155), y estando fijado el valor de las cargas magnéticas, la componente longitudinal del vector de ondas depende de la concentración de portadores de carga magnética y de la masa de dichos portadores, variables éstas que son las que dan fundamento a las propiedades termodinámicas de los estados, tal como se ha analizado en secciones 4.1 y 4.2 de este trabajo. De ahí la importancia, en mi opinión, del estudio conjunto de las propiedades termodinámicas y de propagación en estos sistemas. Todo ello lleva a que existe una frecuencia electromagnética de corte que viene dada por el valor de la frecuencia que anula k_z , siendo este valor de la frecuencia denominado frecuencia de corte, puesto que para frecuencias inferiores a ésta, el campo no se propaga. La frecuencia de corte vendrá dada por la expresión siguiente:

$$\omega_c = c \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m c^2} \right)^{1/2} \quad (156)$$

Esta definición es fundamental en la teoría y práctica de la propagación de las señales electromagnéticas en guías de ondas, y en este caso, lo es de forma añadida pues como se ve, otra vez se encuentra una variable importante, tanto física como de uso práctico que depende de las dos variables que son fundamentales en las propiedades termodinámicas del estado en que se encuentran los "spin-ices". Estas variables son la masa de las cargas magnéticas y la densidad de portadores de dichas cargas. De esta forma se puede diseñar un circuito que permita detectar la existencia de cargas magnéticas, así como determinar la masa efectiva que se debe asignar a las entidades estructurales que juegan el papel de monopolos. Esto puede realizarse si la concentración de estas cargas ha sido previamente determinada mediante otro dispositivo experimental tal como la determinación de portadores a partir de la medida de la conductancia ("magnetricity"). Por otro lado, para modos normales cuyas componentes transversales de los vectores de ondas, definidas por las ecuaciones (152-153), sean pequeños, la frecuencia de corte se puede aproximar a:

$$\omega_c \approx Q_m \left(\frac{\mu_0 N}{m} \right)^{1/2} \quad (157)$$

Es necesario remarcar que esta frecuencia de corte depende exclusivamente de las tres más importantes variables que definen el plasma magnético y que han sido ya definidas, evaluadas y analizadas. Además, una importante coincidencia ocurre en este resultado y es la igualdad entre esta frecuencia de corte y la frecuencia del plasmón que como ya se ha establecido es la frecuencia característica del plasma.

Siguiendo con la propagación de los modos transversales magnéticos, las ecuaciones de las ondas TM, (138-139) son las que permiten resolver las componentes transversales de los campos a partir del gradiente de la componente longitudinal definida por la expresión (151). Gradiente que toma la forma siguiente:

$$\nabla_{\perp} E_z = \left[E_0 k_x [\cos(k_x x) \sin(k_y y)] \exp(\pm i k_z z - i \omega t) \right] \vec{e}_x + \left[E_0 k_y [\sin(k_x x) \cos(k_y y)] \exp(\pm i k_z z - i \omega t) \right] \vec{e}_y \tag{158}$$

Y considerando esta expresión en las ecuaciones generales para los modos TM, se tienen las siguientes ecuaciones algebraicas:

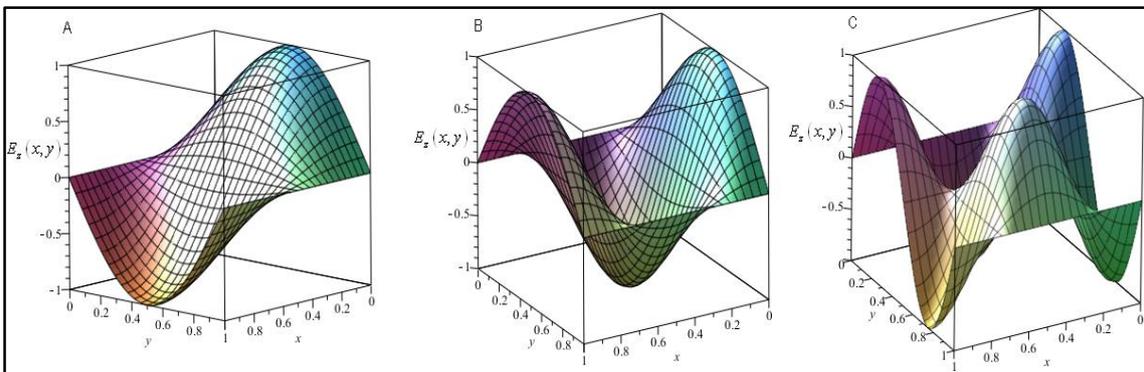
$$\begin{aligned} -i k_z (k_x f_1 \vec{e}_x + k_y f_2 \vec{e}_y) = \\ \pm (k_z^2 - k_0^2) (E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y) + i \mu_0 k_z (-\vec{e}_x J_y + \vec{e}_y J_x) \end{aligned} \tag{159}$$

$$\begin{aligned} \mp i \epsilon_0 \omega (-k_y f_2 \vec{e}_x + k_x f_1 \vec{e}_y) = \\ \pm (k_z^2 - k_0^2) (H_x \vec{e}_x + H_y \vec{e}_y) \mp i \epsilon_0 \mu_0 \omega (\vec{e}_x J_x + \vec{e}_y J_y) \end{aligned} \tag{160}$$

Donde las funciones f_1 y f_2 vienen definidas de la siguiente forma:

$$f_1 = E_0 [\cos(k_x x) \sin(k_y y)] \exp(\pm i k_z z - i \omega t) \tag{161}$$

$$f_2 = E_0 [\sin(k_x x) \cos(k_y y)] \exp(\pm i k_z z - i \omega t) \tag{162}$$



Gráfica 14.-Parte transversal de la función $f_1(x,y,z)$. A modo 11, B modo 21 y C modo 22.

Esta gráfica 14 procede de la derivada con respecto a la variable x de las correspondientes partes transversales de las componentes longitudinales del campo eléctrico en la guía rectangular.

Obviamente son gráficas que representan funciones simples coseno multiplicado por seno. Sin embargo, esta gráfica tiene el interés de representar la forma que presentan las componentes transversales del campo eléctrico y magnético de la onda electromagnética en la guía rectangular. Esto es así porque tal como se demuestra a continuación, estas componentes de los campos eléctricos y magnéticos se obtienen multiplicando estas funciones por las constantes Z_2 , Z_3 , Z_4 y Z_5 que son números complejos que dependen de las variables físicas que se han definido en las propiedades termodinámicas de los diferentes estados del sistema físico que queda configurado en la estructura cristalina y magnética de los “spin-ices”.

Las componentes transversales de los campos son el producto de una de estas funciones por el módulo de la correspondiente constante que vienen definidas más adelante, siendo la parte imaginaria de estas constante la responsable de cuantificar el desfase que tienen estas componentes transversales respecto de la componente longitudinal definida por la ecuación (151) y cuya representación, de algunos modos, queda reflejada en la gráfica 13. Por otro lado, es preciso recalcar que la representación de la función $f_2(x, y, z)$ que tiene las mismas utilidades que la $f_1(x, y, z)$, no se hace por ser redundante, puesto que tiene la misma forma permutando los ejes x e y en la gráfica de la función $f_1(x, y, z)$.

Teniendo en cuenta la ecuación (140) que relaciona las corrientes en sus componentes transversales con las del campo magnético, se tiene:

$$J_x = Z_1 H_x \tag{163}$$

$$J_y = Z_1 H_y \tag{164}$$

Donde el parámetro Z_1 ya ha sido definido en las ecuaciones (118) y representado mediante la gráfica 12. Y de la ecuación (164) se obtienen las relaciones de las componentes del campo magnético con las funciones f_1 y f_2 :

$$H_x = Z_2 f_2 \tag{165}$$

$$H_y = Z_3 f_1 \tag{166}$$

Donde los parámetros Z_2 y Z_3 partir de las ecuaciones (140) y (160) son:

$$Z_2 = \frac{\pm i \varepsilon_0 \omega k_y}{\pm (k_z^2 - k_0^2) \mp i \frac{\omega}{c^2} Z_1} \tag{167}$$

$$Z_3 = \frac{\mp i \varepsilon_0 \omega k_x}{\pm (k_z^2 - k_0^2) \mp i \frac{\omega}{c^2} Z_1} \tag{168}$$

Cuando las fuerzas de rozamiento entre cargas sean despreciables, y teniendo en cuenta la expresión de la componente longitudinal del vector de ondas definido mediante la expresión (155), se tiene que las ecuaciones (167-168) quedan modificadas en las siguientes:

$$Z_2 = -\frac{i\varepsilon_0\omega k_y}{k_t^2} \quad (169)$$

$$Z_3 = \frac{i\varepsilon_0\omega k_x}{k_t^2} \quad (170)$$

Con:

$$k_t^2 = \left(\frac{m\pi}{a}, \frac{n\pi}{b} \right)^2 \quad (171)$$

Y considerando (163-166) y sustituyendo en (159) se obtienen las componentes transversales del campo eléctrico también en función de f_1 y f_2 :

$$E_x = Z_4 f_1 \quad (172)$$

$$E_y = Z_5 f_2 \quad (173)$$

Donde:

$$Z_4 = \frac{-ik_z k_x + i\mu_0 k_z Z_1 Z_3}{\pm(k_z^2 - k_0^2)} \quad (174)$$

$$Z_5 = \frac{-ik_z k_y + i\mu_0 k_z Z_1 Z_2}{\pm(k_z^2 - k_0^2)} \quad (175)$$

Simplificando estas expresiones, considerando la aproximación de $Z_1 \approx i\mu_0 N Q_m^2 / m\omega$ y los resultados anteriores, se obtiene para estos dos parámetros de proporcionalidad entre los campos y las funciones f_1 y f_2 , las siguientes expresiones:

$$Z_4 = \frac{-ik_z k_x}{\pm(k_z^2 - k_0^2)} \left(1 - \frac{\mu_0 N Q_m^2}{mc^2 k_t^2} \right) \quad (176)$$

$$Z_5 = \frac{-ik_z k_y}{\pm(k_z^2 - k_0^2)} \left(1 + \frac{\mu_0 N Q_m^2}{mc^2 k_t^2} \right) \quad (177)$$

El efecto de la existencia de las cargas magnéticas en la propagación de los modos TM viene dado por el valor de la componente longitudinal del vector de ondas y por el segundo término en el paréntesis de las expresiones de Z_4 y Z_5 que depende de la concentración de cargas magnéticas, del valor de dichas cargas y de la masa efectiva asignada a las mismas.

Los resultados fundamentales de esta parte del trabajo consisten en determinar los campos correspondientes a las diferentes ondas que se propagan en la guía cuando dentro de ella hay un material en el que existen cargas magnéticas. Y dado que ya se han definido y representado las funciones f_1 y f_2 en las ecuaciones (161-162) y gráfica 14, se puede vía el análisis de los parámetros Z_2, Z_3, Z_4 y Z_5 , obtener las componentes transversales de los campos eléctricos y magnéticos de las correspondientes señales que se propagan en la guía. Estos campos, son fundamentalmente dependientes de las variables propias del plasma magnético, variables que en el caso de la concentración de portadores de cargas dependen de la temperatura, tal como se ha estudiado en la primera parte de este trabajo.

6.5. Ondas transversales eléctricas.

Los modos correspondientes a las ondas transversales eléctricas son aquellos que $E_z = 0$ por definición. En este caso, las componentes transversales de los campos, tanto las del campo eléctrico como las del campo magnético se obtienen a partir de la componente longitudinal del campo magnético, es decir, a partir de las ecuaciones generales para las guías de ondas con cargas magnéticas (135) y (137). En estas ecuaciones cuando se consideran las condiciones de las ondas TE, $E_z = 0$, se convierten en las siguientes:

$$\nabla_t H_z = \pm i \left(k_z - \frac{\omega^2}{c^2 k_z} \right) \vec{H}_t \pm \frac{\omega^2}{c^2 k_z} \vec{J}_t \quad (178)$$

$$\mp \frac{\mu_0 \omega}{k_z} \vec{e}_z \wedge \nabla_t H_z = \pm i \left(k_z - \frac{\omega^2}{c^2 k_z} \right) \vec{E}_t - \mu_0 \vec{e}_z \wedge \vec{J}_t \quad (179)$$

Por lo tanto, se necesita determinar la componente longitudinal del campo magnético que se puede obtener a partir de la ecuación de ondas para el campo magnético que en el caso de existir cargas y corrientes magnéticas toma la forma siguiente:

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = 0 \quad (180)$$

Y la densidad de corriente se relaciona con el campo magnético a partir de la ecuación (122). La ecuación (180) para una onda monocromática, se transforma en la siguiente expresión:

$$\nabla^2 \vec{H} + k_0^2 \vec{H} + i \frac{\omega}{c^2} Z_1 \vec{H} = 0 \quad (181)$$

Donde $Z_1 = \mu_0 N Q_m^2 / m(\gamma - i\omega)$. Para el caso particular de que las fuerzas de fricción representadas por el parámetro correspondiente a las fuerzas no conservativas γ tiendan a cero, se tiene lo siguiente:

$$\nabla^2 \vec{H} + \left(k_0^2 - \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m c^2} \right) \vec{H} = 0 \quad (182)$$

Por lo tanto, para la componente longitudinal del campo magnético viene a ser:

$$\nabla_x^2 H_z + \nabla_z^2 H_z + \left(k_0^2 - \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m c^2} \right) H_z = 0 \quad (183)$$

Una solución de prueba de esta última ecuación para una guía de ondas de sección transversal rectangular que cumple con las condiciones de contorno del campo magnético en dicha guía es del tipo del tipo:

$$H_z = H_0 \cos k_x x \cos k_y y \exp(\pm i k_z z - i \omega t) \quad (184)$$

Esta función de prueba de la onda cumple las condiciones de contorno adecuadas, es decir $\left. \frac{\partial H_z}{\partial n} \right|_S = 0$.

Donde S es la superficie de delimitación de la guía con dirección normal hacia fuera de la misma.

Y la solución de la ecuación (184) deberá ser tal que se cumpla que:

$$k_{x(y)} = \frac{m(n)\pi}{a(b)} \quad (185)$$

Introduciendo la función de prueba de la onda (184) en la ecuación (183), se tiene la condición de los posibles valores de k_z :

$$k_z = \pm \left(k_0^2 - \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m c^2} - k_x^2 - k_y^2 \right)^{1/2} \quad (186)$$

Por otro lado para obtener las componentes transversales del campo eléctrico y campo magnético, se utilizan las ecuaciones (122) y (178-179). De esta forma se obtienen las siguientes relaciones que permiten determinar estas componentes transversales de los campos mediante las ecuaciones algebraicas que se obtienen la introducir la función de prueba de la onda (184) en las ecuaciones (178-179) y teniendo presente la ecuación (122) que relaciona la corriente con el campo magnético. Estas ecuaciones algebraicas vectoriales son las siguientes:

$$-i k_z (g_1 k_x \vec{e}_x + g_2 k_y \vec{e}_y) = \pm (k_z^2 - k_0^2) (\vec{e}_x H_x + \vec{e}_y H_y) \mp i \frac{\omega}{c^2} Z_1 (\vec{e}_x H_x + \vec{e}_y H_y) \quad (187)$$

Donde se han considerado las siguientes definiciones:

$$\frac{1}{k_x} \frac{\partial H_z}{\partial x} = g_1 = -H_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \exp(\pm i k_z z - i \omega t) = -\frac{H_0}{E_0} f_2 \quad (188)$$

$$\frac{1}{k_y} \frac{\partial H_z}{\partial y} = g_2 = -H_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \exp(\pm i k_z z - i \omega t) = -\frac{H_0}{E_0} f_1 \quad (189)$$

Y además, se debe considerar $Z_1 \approx i \mu_0 N Q_m^2 / m \omega$. E introduciendo la función de prueba de la onda (183) en la (179), se obtiene la siguiente ecuación vectorial algebraica:

$$\begin{aligned} & \pm i \mu_0 \left(-g_2 k_y \vec{e}_x + g_1 k_x \vec{e}_y \right) \\ & = \pm \left(k_z^2 - k_0^2 \right) \left(\vec{e}_x E_x + \vec{e}_y E_y \right) + i \mu_0 k_z \left(-\vec{e}_x Z_1 Z_7 g_2 + \vec{e}_y Z_1 Z_8 g_1 \right) \end{aligned} \quad (190)$$

De estas ecuaciones vectoriales igualando componente a componente se obtienen las siguientes relaciones de las componentes transversales de los campos con las funciones definidas en las expresiones (188-189):

$$H_x = Z_6 g_1 \quad (191)$$

$$H_y = Z_7 g_2 \quad (192)$$

$$E_x = Z_8 g_2 \quad (193)$$

$$E_y = Z_9 g_1 \quad (194)$$

Además si como en el caso de los modos TM, si se considera que las fuerzas disipativas, tienden a cero y teniendo presente la ecuación (186), se tiene que Z_6, Z_7, Z_8 y Z_9 vienen dados por las siguientes relaciones:

$$Z_6 = \frac{-i k_z k_x}{\pm k_t^2} \quad (195)$$

$$Z_7 = \frac{-i k_z k_y}{\pm k_t^2} \quad (196)$$

$$Z_8 = \frac{\mp i \mu_0 \omega k_y - i \mu_0 k_z Z_1 Z_7}{\pm (k_z^2 - k_0^2)} \quad (197)$$

$$Z_9 = \frac{\pm i \mu_0 \omega k_x + i \mu_0 k_z Z_1 Z_6}{\pm (k_z^2 - k_0^2)} \quad (198)$$

En este caso al igual del de los modos TM, si la densidad de portadores de cargas magnéticas libres es cero, bien por estar en forma de pares o bien por no existir cargas magnéticas de ningún tipo, los parámetros Z son como serían en el caso de modos TE en guías rectangulares sometidas a las ecuaciones de Maxwell estándar.

En consecuencia, cuando el sistema se encuentra en el estado de condensado de Bose-Einstein, la densidad de portadores de cargas magnéticas libres, N , es cero y por lo tanto la componente longitudinal

del vector de ondas es igual a $k_z = \pm(k_0^2 - k_t^2)^{1/2}$ que es el valor que tendría en el caso de un material normal que ocupara la guía. Además, si $N = 0$, todos los parámetros Z coincidirán con los que se obtiene con las ecuaciones de Maxwell sin cargas ni corrientes magnéticas.

En las tablas dadas a continuación, son un resumen de los resultados obtenidos. En ellas se da un esquema de las relaciones entre las componentes de los campos y las funciones f_1 de (161) y f_2 de (162) para el caso de las modos TM y g_1 de (188) y g_2 de (189) para los modos TE.

<i>TM</i>	H_x	H_y	H_z	E_x	E_y	E_z de (151)	J_x	J_y	J_z
f_1	0	Z_3	0	Z_4	0	0	0	$Z_1 Z_3$	0
f_2	Z_2	0	0	0	Z_5	0	$Z_1 Z_2$	0	0

Tabla 1.- Componentes de la corriente y de los campos en relación con las funciones base en los modos TM.

En esta tabla se establece la relación entre los campos y las funciones f_1 y f_2 a través de los parámetros de proporcionalidad Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 , correspondientes a los modos TM. Se ha de interpretar de modo que cualquier variable de la primera fila es igual a los parámetros que hay en su respectiva columna multiplicados por las funciones que hay en las dos últimas filas de la primera columna, así por ejemplo la componente H_y es igual a $H_y = Z_3 f_1$, y otro ejemplo, $J_x = Z_1 Z_2 f_2$.

<i>TE</i>	H_x	H_y	H_z de (184)	E_x	E_y	E_z	J_x	J_y	$J_z = Z_1 H_z$
g_1	Z_6	0	0	0	Z_9	0	$Z_1 Z_6$	0	0
g_2	0	Z_7	0	Z_8	0	0	0	$Z_1 Z_7$	0

Tabla 2.- Componentes de la corriente y de los campos en relación con las funciones base en los modos TE.

En esta tabla como en la anterior, pero en este caso para los modos TE, se establece la relación entre los campos y las funciones g_1 y g_2 a través de los parámetros de proporcionalidad Z_1, Z_6, Z_7, Z_8, Z_9 , correspondientes a los modos TE. Se debe seguir el mismo criterio que en la anterior para determinar los valores de las componentes de los diferentes campos y corrientes.

7. Casos particulares en guías de ondas.

- **CASO A:** Cuando en el plasma magnético, existe una fuerza de rozamiento suficientemente grande comparada con la frecuencia de la onda monocromática, entonces, se tiene que las componentes longitudinales de los campos son definidos por las ecuaciones:

$$\nabla^2 \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} - \frac{(-i\omega)^2}{c^2} \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} + i \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m(-i\omega + \gamma)} \frac{\omega}{c^2} \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = 0 \quad (199)$$

Lo cual, considerando las funciones de prueba para la componente longitudinal del campo dadas por las ecuaciones (151) y (184) que definen a los campos longitudinales eléctrico y magnético pertenecientes a los modos TM y TE, respectivamente, el vector de onda en la dirección longitudinal k_z , viene dado por la siguiente expresión:

$$-k_x^2 - k_y^2 + \left(k_0^2 + i \frac{\mu_0 N Q_m^2 \omega}{m(-i\omega + \gamma)c^2} \right) = k_z^2 \quad (200)$$

Este vector de onda es complejo lo cual confiere a las funciones de prueba de la onda longitudinal la característica de ser evanescentes, manteniendo la misma relación con las otras componentes, lo cual implica la evanescencia de todos los campos.

- **CASO B:** Cuando la sección transversal de la guía de ondas no es rectangular sino circular, la ecuación (154) en los modos TM y de forma equivalente la (182) para los modos TE, viene a ser de la forma siguiente:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \alpha^2 \Phi = 0 \quad (201)$$

Donde la función Φ es una función que se puede asignar bien a la componente longitudinal del campo eléctrico o del magnético y cuya solución, utilizando el método de separación de variables, toma la forma:

$$\Phi(r, \varphi, z) = \phi(r, \varphi) \exp(\pm i k_z z - i \omega t) \quad (202)$$

Y el parámetro α puede determinarse mediante la expresión:

$$\alpha^2 = k_0^2 - k_z^2 - \frac{\mu_0 N Q_m^2}{m c^2} \quad (203)$$

La función $\phi(r, \varphi)$ se puede obtener aplicando el mismo método $\phi(r, \varphi) = p_1(r) p_2(\varphi)$. Entonces, la ecuación (201) se convierte en:

$$\frac{r^2}{p_1} \frac{\partial^2 p_1}{\partial r^2} + \frac{r}{p_1} \frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{1}{p_2} \frac{\partial^2 p_2}{\partial \varphi^2} = -\alpha^2 r^2 \quad (204)$$

El tercer término de la izquierda de la igualdad sólo depende de la variable φ , mientras que los dos primeros y el término de la derecha sólo dependen de r . Por lo tanto, el tercer término diferencial debe ser una constante. De esta forma la ecuación diferencial (201) se puede desglosar en las dos siguientes:

$$\frac{1}{p_2} \frac{\partial^2 p_2}{\partial \varphi^2} = -\nu^2 \quad (205)$$

$$\frac{\partial^2 p_1(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial p_1(x)}{\partial x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) p_1(x) \quad (206)$$

Y haciendo el cambio de variable $x = \alpha r$, la ecuación (206) se convierte en la ecuación denominada de Bessel:

$$\frac{\partial^2 p_1(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial p_1(x)}{\partial x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) p_1(x) \quad (207)$$

Cuyas soluciones dependen del parámetro ν y vienen a ser las conocidas funciones esféricas de Bessel de primera especie, cuya sistemática está publicada en todos los libros de fórmulas matemáticas [44]. De esta forma la componente longitudinal del campo eléctrico viene dada por:

$$E_z = E_0 j_\nu(\alpha r) \cos(\nu \varphi) \exp(\pm i k_z z - i \omega t) \quad (208)$$

Donde el término $j_\nu(\alpha r)$ es la función de Bessel de orden ν que debe ser un número entero para que $\cos(\nu \varphi) = \cos[\nu(\varphi + 2\pi)]$, condición que ha de cumplirse para que la función resultante sea univaluada. Además esta función viene dada por la serie [45]:

$$j_\nu(\alpha r) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{\nu+2p} \frac{1}{p!(\nu+p)!} \quad (209)$$

Por otro lado, se ha de cumplir en el caso del campo eléctrico que $j_\nu(\alpha R) = 0$, siendo R la sección transversal de la guía cilíndrica. De esta forma αR ha de venir dado por el hecho de que la correspondiente función de Bessel se anule para éste valor del argumento de dicha función, siendo esta condición equivalente a la que proporciona los valores de k_x y k_y en una guía de sección transversal rectangular. De la misma forma, se deberá cumplir condicionado por las condiciones de contorno que

$\left. \frac{\partial j_\nu}{\partial r} \right|_{r=R} = 0$ en el caso de las ondas cuya componente longitudinal corresponde al campo magnético.

Para terminar la formalización de las ecuaciones de la guía y obtener unas tablas de relación tales como las Tabla 1 y Tabla 2 que correspondan a secciones transversales en coordenadas cilíndricas es preciso proponer la parte de la derecha de las ecuaciones diferenciales (138-139) en el caso de los modos TM y las (178-179) en el caso de los modos TE en función de los vectores unitarios transversales en estas coordenadas cilíndricas, pero la formalización sistemática para obtener las tablas equivalentes a la 1 y 2 en coordenadas cilíndricas es idéntica a la realizada en coordenadas rectangulares. Por ello, para no caer en repetición y redundancia se obvia este cálculo.

8. Resumen y conclusiones.

El presente trabajo se basa en la existencia de dos situaciones dentro de la estructura cristalina y magnética de los denominados “spin-ices” que han sido definidos como condensado de pares polo-antipolo por un lado y plasma magnético por otro. Estas dos situaciones corresponden a estados cuánticos macroscópicos cuyo desarrollo termodinámico y de propagación electromagnética están íntimamente vinculados a dos parámetros que afectan a las denominadas cargas magnéticas.

El análisis de estos dos estados y su detección requiere establecer una serie de tests experimentales para detectar situaciones similares en otros compuestos que tengan propiedades estructurales que hagan sospechar la existencia de cargas magnéticas efectivas. Entre estos dos estados, el primero en ser analizado corresponde a una especie de condensado de Bose-Einstein de pares polo-antipolo que suele aparecer a bajas temperaturas. Estos pares tienen carga nula y cuando están formando el condensado la gran mayoría de ellos se encuentran en un mismo estado que es el de mínima energía. Este estado, si bien es cierto que tiene interés teórico por su propia característica de estado especial de la materia, su interés aplicado es más reducido puesto que no tiene tanta viabilidad, al menos no se vislumbra a simple vista, como transmisor de energía y por ello de información. Por el contrario, el segundo que aparece como un plasma magnético, tiene un interés teórico inferior pues es similar al gas coulombiano de Fermi, su aplicación para usos de transmisión de información y energía es mucho mayor. Este interés se basa fundamentalmente que la propagación electromagnética tanto a frecuencia cero (magnetricity) como a bajas, medias y altas frecuencias tiene una ventaja sobre los sistemas electrónicos, puesto que la masa efectiva de los portadores de carga magnética es previsible que sea menor que la masa de los portadores de carga eléctrica.

En consecuencia, es interesante el estudio de la propagación en materiales que presentan las características de los “spin-ices” y de los aislantes topológicos ya que en ambos su comportamiento implica la existencia de cargas magnéticas en el interior de su estructura cristalina y magnética. Pero, es que además del posible interés práctico existe también un interés teórico sobre el conocimiento del electromagnetismo, tanto dentro de la tecnología Electrónica como de la propagación y detección de señales. Sobre todo porque dada la inexistencia empírica de estas cargas duales ha propiciado la falta de desarrollo de la electromagnetismo dual, es decir la electrodinámica con los dos tipos de carga, eléctrica y magnética. Este trabajo pretende aportar su grano de arena al estudio y análisis de la propagación electromagnética en sistema infinitos y confinados en los que los campos viajan en medios con monopolos magnéticos.

Evidentemente se ha seguido una línea argumental, una sistemática completamente inspirada en el Electromagnetismo estándar, obviamente modificando lo que es necesario modificar en las ecuaciones

para contemplar la nueva fenomenología. El dato fundamental que he intentado resolver es como mediante la propagación EM es relativamente fácil desde un punto de vista experimental distinguir cuándo el sistema está en fase de condensado o fase de plasma. De acuerdo con este análisis los campos EM se propagan de forma fundamentalmente diferente según sea la situación en la que se encuentra el gas de cargas magnéticas, bien sea a pares o parejas de polo-antipolo o sea en forma de gas neutro de cargas magnéticas de los dos signos con cierta libertad de movimiento lo que genera el sentido de conductancia. Los dos parámetros físicos fundamentales que ordenan las diferentes fases son la masa efectiva, no gravitacional, de las cargas y el número de componentes del sistema. Este número de componentes del sistema aporta una densidad de cargas magnéticas que es crucial tanto en las propiedades termodinámicas fijadas en las ecuaciones (30) y (35), si es el caso del condensado de Bose-Einstein o (52) y (62), si es el caso del plasma magnético, como en las propiedades de propagación electromagnética. Esto es así, porque la densidad de portadores es también el elemento decisivo para que los campos tanto transversales como longitudinales en la guías de ondas sigan la evolución espacio-temporal y temperatura de forma completamente diferente a la que tendrían si en lugar de haber cargas magnéticas sólo hubiera cargas eléctricas.

Todo lo cual implica que tanto en la evolución térmica como en la propagación electromagnética, la densidad de portadores se constituye como el parámetro fundamental que ordena las fases del sistema. En las tablas 1 y 2 que constituyen el resumen del análisis de la propagación, se puede fácilmente comprobar que si el número de portadores de cargas libre es nulo, el resultado es el estándar para una guía de sección rectangular. En estas tablas, figuran los parámetros $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8$ y Z_9 que relacionan las funciones f_1, f_2 , y g_1, g_2 definidas en las ecuaciones (161-162) y (188-189), respectivamente con los campos eléctricos y magnéticos que se propagan en una guía.

Estos parámetros, como se ha dicho en las secciones precedentes dependen de las variables que entran en juego en la estructura magnética que constituye el sistema físico donde se propagan las señales electromagnéticas y que sirven para aclarar cuál es el estado del mismo. Todo ello depende de algunos elementos claves cuya determinación, al menos en sus órdenes de magnitud, es preciso comentar. En el centro del análisis cuantitativo juega un papel importante el valor de las cargas magnéticas Q_m , la frecuencia de precesión, ω_E , la frecuencia característica del plasma, ω_p y la frecuencia de corte, ω_C .

Tal como se ha dicho en el texto, de acuerdo con el modelo “dumbbells” la carga magnética viene definida por $Q_m = 2|\vec{\mu}| / L$, siendo $\vec{\mu}$ el momento magnético de los iones de lantánido que ocupan los vértices de los tetraedros que forman la estructura cristalina de los “spin-ices” y L la distancia entre los centros de dos tetraedros contiguos. De esta forma esta carga magnética tiene unidades en el sistema internacional de unidades de $[Q_m] = C \cdot m \cdot s^{-1}$. Los momentos magnéticos de los vértices de los tetraedros en la

estructura cristalina de los “spin-ices” están constituidos a partir de iones de disprosio o holmio. Estos iones vienen a tener entre 7 y 9 magnetones de Bohr (unidad de momento magnético atómico) y la longitud de separación entre los centros de dos tetraedros es del orden de 10^{-9} metros. Por lo tanto, la carga magnética en unidades del sistema internacional viene a ser alrededor de $Q_m = 1,48 \times 10^{-13} J \cdot T^{-1} \cdot m^{-1}$ unidades equivalentes en el SI a las unidades antes citadas.

Por otro lado, ya ha quedado establecido que la frecuencia precesión, ω_E , que surge por la rotación de las cargas magnéticas ante la presencia de un campo eléctrico constante, intenso y perpendicular al plano de la fase de la señal electromagnética, puede quedar empíricamente establecida mediante la absorción electromagnética. Esto es así ya que, de acuerdo con las ecuaciones (94), (96), (107) y (108), el sistema debe presentar un pico de absorción para una frecuencia del campo electromagnético igual a esta frecuencia ω_E . Esta frecuencia cuyo valor depende del campo eléctrico aplicado, permite obtener la masa de los portadores de carga magnética según la expresión de la ecuación (91). Por lo tanto, si se suponen campos eléctricos externos y constantes, tal como se explica en la sección 5, del orden de $10^7 V \cdot m^{-1}$ y con este campo se obtiene una frecuencia de precesión que se instala en el espectro de microonda (EHF) $\omega_E \approx 10^{11} Hz$. Con estos valores de la frecuencia de precesión y campo eléctrico externo, las cargas magnéticas correspondientes a 16 magnetones de Bohr vienen a tener una masa efectiva, de acuerdo con la expresión (91), de $\approx 0,17 \times 10^{-33} kg$. Es decir, la masa de las cargas magnéticas con estos supuestos es aproximadamente 3 órdenes de magnitud inferior a la masa del electrón. En consecuencia esta es una propiedad interesante a la hora de desarrollar dispositivos que transmitan información dada la menor inercia de estas cargas frente a los portadores de carga que son responsables de la Electrónica. La tercera variable significativa del plasma magnético es la frecuencia de plasmón. Teniendo en cuenta los datos que se aportan en el párrafo anterior y considerando que en el caso de los “spin-ices”, la densidad media de portadores libres a la temperatura en la que se forma el estado de plasma neutro es de $10^{14} cm^{-3}$ [14,15], la frecuencia del plasmón dada en la ecuación (95) es de un valor aproximado a $\omega_p = 1,27 \times 10^{12} Hz$ que viene a ser únicamente un orden superior al de la frecuencia de precesión.

Además, la frecuencia del plasmón es aproximadamente igual a la frecuencia de corte en la propagación de los modos tanto TM como TE en una guía rectangular. Es decir, no se propagarán ondas electromagnéticas a frecuencias inferiores a la frecuencia de corte que coincide casi exactamente con la del plasmón para modos de bajo índice y exactamente para los modos TM_{00} y TE_{00} . Otra consecuencia que se deduce de este estudio es que en el caso del estado del condensado de Bose-Einstein, la propagación electromagnética dentro de la guía sería exactamente igual a la que se tendría en un dieléctrico normal.

Por último, quisiera citar las que para mí son las principales aportaciones contenidas en este trabajo.

- Se ha analizado los posibles estados macroscópicos del sistema formado por los “spin-ices” que por una parte pueden constituir un condensado de Bose-Einstein de pares polo-antipolo y por otra formar un estado plasma neutro de cargas magnéticas, siendo los principales parámetros que pueden gobernar gran parte de las propiedades físicas de cada uno de los estados, la energía media de las partículas que lo componen, así como su densidad de componentes por unidad de volumen.
- Se ha estudiado la propagación de ondas en guías en las que contengan “spin-ices” determinando la propagación. Se han establecido las ecuaciones dinámicas de los campos eléctrico y magnético confinados así como la distribución de corriente de monopolos magnéticos, tanto en cuanto a los modos transversales eléctricos como en el caso de los modos transversales magnéticos.
- Mediante la propagación de ondas transversales en medios infinitos ante la presencia de campo eléctrico externo, intenso y paralelo al vector de Poynting de la onda, se ha determinado la frecuencia de precesión de las cargas magnéticas.
- Esta frecuencia de precesión depende del campo eléctrico externo, de la carga magnética y de la masa de las entidades estructurales cuyo comportamiento es similar a los monopolos magnéticos. Además para una frecuencia de la señal electromagnética igual a dicha frecuencia existe un máximo en forma de pico en la absorción electromagnética.
- Se ha determinado la frecuencia de corte a partir de la cual se pueden propagar dichos modos y por debajo de la cual no existe posibilidad de propagación no evanescente. Esta frecuencia de corte es aproximadamente igual a la frecuencia propia del plasma.
- Se ha demostrado que sólo ante situaciones en las que las fuerzas disipativas sean despreciables existe propagación.
- La propagación es dependiente de la densidad de portadores de cargas magnéticas, siendo esta densidad dependiente de la temperatura tal como se demuestra en la sección del estudio termodinámico.
- En consecuencia de lo anterior, la propagación permite determinar cuándo el sistema está en el estado plasma distinguiéndolo del estado condensado Bose-Einstein.
- En el estado Bose-Einstein, la propagación al no haber corrientes de cargas magnéticas, es idéntica a como es en el caso de las ecuaciones de Maxwell estándar.

9. Bibliografía.

- [1] Peregrinus P. "The letter of Petrus peregrinus" translated by B. Arnold (McGraw Publishing Company 1904)
- [2] Página web: <http://cds.cern.ch/record/1360999>
- [3] Curie M.P. "Sur la possibilité d'existence de la conductibilité magnétique et du magnetisme libre" Seances de la Societé Française de Physique, 76-77 1894.
- [4] Dirac, P. A. M., "Quantized Singularities in the Electromagnetic Field," Proc. Roy. Soc., Vol. A133, 60, 1931.
- [5] Jordan, P., "The Dirac magnetic pole," Ann. Physik, Vol. 32, 66, 1938.
- [6] Hooft, G. 't, "Magnetic monopoles in unified gauge theories," Nuclear Physics 79, 276--284, 1974.
- [7] Polyakov, A. M., "Particle spectrum in quantum field theory," JETP Lett., Vol. 20, 194--195, 1974.
- [8] Cabrera, B., "First Results from a Superconductive Detector for Moving Magnetic Monopoles," Phys. Rev. Lett., Vol. 48, 1378--1381, 1982.
- [9] Balestra, S., G. Giacomelli, M. Giorgini, L. Patrizii, V. Popa, Z. Sahnoun, and V. Togo, "Magnetic Monopole Bibliography-II," arXiv: 1105.5587v1 [hep-ex], 27 May 2011, y referencias dadas en este papel. M. Lublinsky, C. Ratti, and E. Shuryak, "Radiation of an electric charge in the field of a magnetic monopole", Phys. Rev. D, 81, 014008 2010. M. Detrixhe et. Al. (ANITA Collaboration), "Relativistic magnetic monopole search with the ANITA-II balloon-borne radio interferometer", Phys. Rev. D, 83, 023513 2011.
- [10] Castelnovo, C., R. Moessner, and S. L. Sondhi, "Magnetic monopoles in spin ice" (see complementary material published in the same journal where the equivalence between Hamiltonians (1) and (2) is demonstrated) Nature, Vol. 451, 42--45, 2008.
- [11] Sondhi, S., "Wien route to monopoles," Nature, Vol. 461, 888--889, 2009.
- [12] Fennel, T., P.P. Deen, A.R. Wildes, K. Achmalzl, D. Prabhakaran, A. T. Boothroyd, R.J. Aldus, D.F. McMorrow, and S.T. Bramwell, "Magnetic Coulomb Phase in the spin ice ". Science, 326, 415-417 2009
- [13] Qi, X.-L., R. Li, J. Zang, and S.-C. Zhang, "Inducing a Magnetic Monopole with Topological Surface States," Science, Vol. 323, 1184--1187, 2009. X.L. Qi, S.C. Zhang. "Topological insulators and superconductors", Rev. Mod. Phys., 83, 1057 (2011.)
- [14] Morris, D. J. P., D. A. Tennant, S. A. Grigera, B. Klemke, C. Castelnovo, R. Moessner, C. Czternasty, M. Meissner, K. C. Rule, J.-U. Hoffmann, K. Kiefer, S. Gerischer, D. Slobinsky, and R. S. Perry, "Dirac Strings and Magnetic Monopoles in the Spin Ice ", Science, Vol. 326, 411--414, 2009.
- [15] Bramwell, S. T., S. R. Giblin, S. Calder, R. Aldus, D. Prabhakaran, and T. Fennell, "Measurement of the charge and current of magnetic monopoles in spin ice," Nature, Vol. 461, 956--960, 2009, S.T. Bramwell and M.J.P. Gingras, Science, 294, 1495 (2001).
- [16] Giblin, S. R., S. T. Bramwell, P. C. W. Holdsworth, D. Prabhakaran, and I. Terry, "Creation and measurement of long-lived magnetic monopole currents in spin ice," Nature Phys., Vol. 7, 252--258, 2011.
- [17] Bandyopadhyay S., and M. Cahay, "Introduction to Spintronics" CRC Press 2008
- [18] Onsager L.J. "Derivations from Ohm's law in weak electrolytes" J. Chem. Phys. 2, 599-615 (1934).

- [19] Mol L.A.S., W.A. Moura-Melo, and A.R. Pereira, "Conditions for the magnetic monopoles in nanoscale square arrays of dipolar spin-ice," *Phys. Rev. B*, Vol. 82, 054434-1-6, 2010.
- [20] Mellado P., O. Petrova, Y. Shen, and O. Tchernyshyov, "Dynamics of Magnetic charges in artificial spin ice," *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 105, 187206-1-4, 2010.
- [21] Tchernyshyov O., "No longer on thin ice," *Nature Phys.* Vol. 6, 323-324, 2010.
- [22] Gingras, M.J., "Observing Monopoles in a magnetic Analog of Ice," *Science*, Vol. 326, 375-376, 2009.
- [23] Mengotti, E., L. J. Heyderman, A. F. Rodriguez, F. Nolting, R. V. Hugli, and H.-B. Braun, "Real-space observation of emergent magnetic monopoles and associated Dirac strings in artificial kagome spin ice," *Nature Phys.*, Vol. 7, 68-74, 2011.
- [24] Bonitz, M., "A plasma of magnetic monopoles," *Nature Phys.*, Vol. 7, 192-194, 2011.
- [25] Jaubert, L. D. C., and P. C. W. Holsworth, "Signature of magnetic monopole and Dirac string dynamics in spin ice," *Nature Phys.*, Vol. 5, 258-261, 2009.
- [26] Bramwell, S. T. and M. J. P. Gingras "Spin ice state in frustrated magnetic pyrochlore materials," *Science*, Vol. 294, 1495-1501, 2001.
- [27] E. Witten, "Duality, Spacetime and Quantum Mechanics" *Physics Today*, 28 (May 1997).
- [28] Kittel, C. "Introduction to Solid State Physics", 6th Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
- [29] Landau, L. D., E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii, "Electrodynamics of Continuous Media", 2nd edition, Elsevier, 1993.
- [30] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, 3rd edition, John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [31] Costa-Quintana y F. López-Aguilar "Interacción electromagnética: Teoría Clásica", Ed. Reverté (2007)
- [32] López Bara F. "Electromagnetismo en medios materiales con monopolos magnéticos" Proyecto fin de carrera. Dipòsit Digital de Documents de la UAB. Septiembre 2012.
- [33] Costa-Quintana, J. and F. López-Aguilar, "Extended classical electrodynamics with magnetic monopoles," *F. E. Journal of Mechanical Engineering and Physics*, Vol. 1, 19-56, 2010.
- [34] Costa-Quintana J. and F. López-Aguilar, "Propagation of electromagnetic waves in material media with magnetic monopoles," *Progress In Electromagnetics Research*, Vol. 110, 267-295, 2010.
- [35] Costa-Quintana J. and F. López-Aguilar, "Fresnel coefficients in materials with magnetic monopoles," *Optics Express*, Vol. 19, 3742-3757, 2011.
- [36] Costa-Quintana and F. López-Aguilar, "Molecular EM fields and dynamical responses in solids with magnetic charges", *Progress In Electromagnetics Research*, Vol. 121, 159-179 2011.
- [37] Costa-Quintana J. and F. López-Aguilar "Extended Lagrangian formalisms for dyons and some applications to solid systems under external fields" *Annals of Physics (New-York)* 327, 1948-1961, 2012
- [38] Tercas H., D.D. Solnyshkov, and G. Malpuech "Topological Wigner Crystal of Half-Solitons in spinor Bose-Einstein Condensate", *Phys. Rev. Lett.* 110, 035303 (2013). D. Pomaranski, L.R. Yaraskavitch, and S. Meng et al. "Absence of Pauling's Residual Entropy in Thermally equilibrated $Dy_2Ti_2O_7$ ", *Nature Phys.*

9, 353 (2013). W.H. Toews, S. S. Zhang, K.A. Ross et. al. "Thermal Conductivity of $Ho_2Ti_2O_7$ along [111] Direction" Phys. Rev. Lett. 110, 217209 (2013).

[39] Conduit G.J. "Line of Dirac Monopoles embedded in a Bose-Einstein condensate" Phys. Rev A, 86, 021605, (2012).

[40] Solnyshkov D.D, H. Flayac, G. Malpuech "Stable magnetic monopoles in spinor polaritons condensates", Phys. Rev. B, 85, 073105 (2012).

[41] Roukokoski E., V. Pietila, and M. Mottonen, "Ground state Dirac monopole", Phys. Rev. A, 84, 063627 (2011).

[42] Pietila V. and M. Mottonen, "Creation of Dirac Monopoles in spinor Bose-Einstein Condensates" Phys. Rev. Lett. 103, 030401 (2009).

[43] Feynman R. P "Statistical Mechanics" (W.A. Benjamin INC 1972).

[44] Spiegel, M.R, J. Liu and L. Abellanas, Fórmulas y tablas de Matemáticas aplicada, (Mc Graw Hill, 2005)

[45] Joglekar S.D. "Mathematical Physics: Advanced Topics" (CRC Press, 2007).

[46] Página web: <http://www.mpg.de/cms/mpq/en/departments/quanten/homepage/cms/projects/bec/>

[47] Annett J.F. "Superconductivity, Superfluids and Condensates" (Oxford University Press 2010).



Fernando López Bara