

~~S. 1/600~~

III 2  
D 423

Der mittlere meridionale und vertikale Transport  
von mechanischer Wellenenergie  
(12. Dezember 1957, 00 GMT)

Freie wissenschaftliche Arbeit  
zur Erlangung des Grades eines Diplom-Meteorologen  
der Hohen Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel



Eingereicht von

KLAUS ARPE

Referent: Prof. Dr. Friedrich Defant

Kiel 1967

## INHALTSVERZEICHNIS

	<u>Seite</u>
1. AUFGABENSTELLUNG .....	1
2. DATENBESCHAFFUNG .....	3
2.1 Radiosonden .....	3
2.2 Handanalyse .....	4
2.3 Gitterwerte .....	4
2.4 Interpolation auf z-Niveau .....	4
2.5 Fourieranalyse .....	6
3. WINDFELDBERECHNUNG .....	7
3.1 Vernachlässigungen .....	7
3.2 Auswahl der Gleichungen.....	7
3.3 Linearisierung durch Störungsrechnung .....	9
3.4 Darstellung in Fourierreihen .....	11
3.5 Auflösung nach den Geschwindigkeitskomponenten .....	12
3.6 Näherungsformel .....	13
3.61 Näherung für u .....	13
3.62 Näherung für v .....	19
3.63 Näherung für w .....	19
3.7 Fehlerrechnung .....	24
3.71 Allgemeine Betrachtungen .....	24
3.72 Meßfehler .....	25
3.73 Fehler der Dichte und der potentiellen Temperatur .....	25
3.74 Fehler der Fourierkoeffizienten .....	26
3.75 Fehler der Ableitungen .....	26
3.76 Fehler des mittleren zonalen Windes ...	26
3.77 Fehler der Vertikalgeschwindigkeit ...	27
3.78 Fehler des Vertikaltransportes .....	28
3.8 Ergebnisse der Windfeldberechnungen .....	29
3.81 Allgemeine Wetterlage .....	29
3.82 Mittelbilder der Temperatur .....	44
3.83 Mittelbild des zonalen Windes .....	47
3.84 Vergleich der berechneten Winde mit den gemessenen .....	50
3.85 Horizontales Windfeld .....	52
3.86 Vertikalwindfeld .....	53
4. BALANCEGLEICHUNG FÜR MECHANISCHE WELLENENERGIE ...	68
4.1 Vernachlässigungen .....	68
4.2 Grundgleichungen .....	69
4.3 Allgemeine Wellenenergiegleichung .....	70
4.4 Interpretation der Balancegleichung .....	71
4.5 Weitere Vernachlässigungen .....	72

	<u>Seite</u>
5. METHODE NACH CHARNEY UND DRAZIN BZW. VAN MIEGHEM ..	73
5.1 Vernachlässigungen .....	73
5.2 Grundgleichungen .....	74
5.3 Näherungsausdruck für den Vertikaltransport..	75
5.4 Vertikale Druckverteilung .....	75
5.5 Vertikaltransport in Abhängigkeit von der charakteristischen Größe $N^2$ .....	76
6. VERTIKAL- und MERIDIONALTRANSPORTE .....	78
6.1 Dimension der Wellenenergetransporte .....	79
6.2 Diskussion des mittleren Wellenenergie- transportes für die einzelnen Wellenzahlen ..	81
6.21 Wellenzahl 1 .....	81
6.22 Wellenzahl 2 .....	87
6.23 Wellenzahl 3 .....	93
6.24 Wellenzahl 4 .....	103
6.25 Wellenzahl 5 .....	109
6.26 Wellenzahl 6 .....	121
6.27 Wellenzahl 7 und höher .....	129
6.3 Transporte über alle Wellen summiert .....	138
6.4 Vergleich mit den Ergebnissen von Charney und Drazin .....	143
7. ZUSAMMENFASSUNG UND SCHLUSSBETRACHTUNG .....	146
8. LITERATURVERZEICHNIS .....	149
ANHANG:	
I. Darstellung der Fourierkoeffizienten (Ampli- tuden) als Meridionalschnitte .....	150
II. Berechnung der Isoplethen .....	175
III. Zonale Mittel von Produkten aus Fourierkoeffizienten .....	178
IV. Beweis für die Reflexion von Wellenenergie bei Wellen externen Typs .....	180

Verzeichnis der verwendeten Symbole und Abkürzungen

T	Temperatur in °K	
h	Höhe in Metern	
R	Gaskonstante der trockenen Luft	
g	Erdbeschleunigung	
mb	Millibar	
⊖	potentielle Temperatur	
ρ	Dichte der trockenen Luft	
t	Zeit	
x - λ	zonale	} Raumkoordinate
y - φ	meridionale	
z	vertikale	
u	zonale	} Komponente der Windgeschwindigkeit
v	meridionale	
w	vertikale	
a	Erdradius	
f	= 2ω sin φ	Coriolisparameter
f	= 2ω cos φ	
β	= $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\omega}{R} \cos \phi$	Känderung des Coriolisparameters mit der Breite
$H = \frac{Q}{c_p T} \frac{dy}{dt}$	Wärmequellen bzw. -senken	
$c_p$	} spezifische Wärmen bei konstantem	Druck Volumen
$c_v$		
K	mechanische Wellenenergie	
$N^2$	charakteristische Größe für Reflexion von Wellenenergie	
$\sigma_s^2$	Maß für die vertikale Stabilität	

In wenigen Ausnahmen werden einige dieser Symbole auch noch in anderer Bedeutung benutzt; in diesen Fällen ist es aber aus dem Zusammenhang eindeutig zu erkennen.

## 1. AUFGABENSTELLUNG

Van Wieghem (1962) hat eine Balancegleichung der mechanischen Wellenenergie abgeleitet. Daraus geht hervor, daß die Produkte aus den Druck- und Windschwankungen ( $p'v$ ) und ( $p'w$ ) den meridionalen und vertikalen Wellenenergie-transport darstellen. Diese Produkte sollen aus synoptischen Daten eines Termins, des 12.12.1957 o.ä., berechnet werden. Als Anleitung dienen Arbeiten von van Wieghem (1962), von Charney und Brazin (1961) und die Vorlesung von Lefant im Wintersemester 1964/65.

Charney und Brazin, bzw. van Wieghem, berechneten nur die vertikalen Wellenenergie-transporte. Es gelang ihnen durch Vernachlässigungen in den hydrodynamischen Gleichungen eine Näherungsformel für das Produkt aus den Druck- und Vertikalwindschwankungen zu finden, die nur noch von der mittleren vertikalen Verteilung der meteorologischen Parameter (Druck, Temperatur, Windgeschwindigkeit, u.s....) abhängt. Setzt man in diese Näherungsformel für den vertikalen Wellenenergie-transport jahreszeitliche Mittelwerte der meteorologischen Parameter ein, so erhält man als wesentliches Ergebnis, daß die Energie-transporte der kurzen Wellen an der Tropopause reflektiert und die Transporte der langen Wellen nicht reflektiert werden.

In dieser Arbeit soll untersucht werden, ob sich dieses Ergebnis auch für einen einzelnen Termin bestätigt. Wie mehrere Versuche gezeigt haben, ist es nicht möglich, die Methode und damit die Näherungsformel von van Wieghem u.ä. für einen einzelnen Termin zu benutzen, da die notwendigen meteorologischen Parameter nicht genau genug bestimmt werden konnten, während man bei jahreszeitlichen Flächenmitteln auf die bekannten klimatologischen Daten zurückgreifen kann.

Es wird daher versucht, auf einem anderen Wege die Schwankungen des Druckes und des Windes einzeln zu berechnen

und daraus den Wellenenergie-transport zu ermitteln. Eine solche Methode hat den Vorteil gegenüber der Methode von van Mieghem, daß auch der meridionale Wellenenergie-transport berechnet werden kann. Weil bei dieser Methode keine flächengemittelte Wellenenergie-transporte ermittelt werden, können Zusammenhänge zwischen Wellenenergie-transporten und meteorologischen Erscheinungen, wie z.B. dem Jet und der Polarfront, untersucht werden.

## 2. DATENBESCHAFFUNG

### 2.1 Radiosondendaten

Die Radiosondendaten der Nordhalbkugel lagen auf Mikro-  
karten vor, die die World Meteorological Organization  
(WMO) herausgegeben hat. Sie wurden zweimal unabhängig  
voneinander auf Lochstreifen gestanzt und dann zur  
Vermeidung von Stanz- und Lesefehlern von der elektroni-  
schen Rechenmaschine Z 22, die im Rechenzentrum der  
Universität Kiel zur Verfügung stand, vergleichend gele-  
sen und korrigiert.

Die gewünschten Niveaus 125, 100, 80, 70, 60, 50 und 40  
mb konnten dann unter Verwendung der speziellen- und  
Standardniveaus interpoliert werden.

Die Temperatur wurde logarithmisch bezüglich des Druckes  
interpoliert. Wenn die Temperaturen in den Druck-Niveaus  
 $p_1$  und  $p_2$  gegeben waren, so ergab sich für die Temperatur  
in dem Druckniveau  $p$ :

$$t(p) = t(p_1) + \left\{ t(p_2) - t(p_1) \right\} \cdot \left\{ \ln(p) - \ln(p_1) \right\} / \left\{ \ln(p_2) - \ln(p_1) \right\}$$

Die Höhe wurde mit Hilfe der barometrischen Höhenformel  
unter Verwendung der Höhen- und Temperaturwerte eines  
benachbarten Niveaus und der schon vorher für dieses  
Niveau interpolierten Temperatur berechnet:

$$h(p) = h(p_1) - \frac{R}{g} \left\{ \ln(p) - \ln(p_1) \right\} \left[ \frac{t(p)}{2} + \frac{t(p_1)}{2} + 273,15 \right]$$

$R$  = Gaskonstante,       $g$  = Erdbeschleunigung

Wenn möglich, geschah dieses von beiden benachbarten  
Druckniveaus aus, einmal von unten und einmal von oben,  
und dann wurden die sich meistens unterschiedlich erge-  
benden Höhenwerte entsprechend der Entfernung der Nach-  
bar-Niveaus von dem zu untersuchenden Niveau gewichtet  
gemittelt.

## 2.2. Handanalyse

Die interpolierten Werte wurden in eine Zirkumpolarkarte an den Radiosondenstationen eingetragen und dann mit der Hand analysiert. Zur Erhaltung der vertikalen Konsistenz wurde ein Durchleuchtungstisch bei der Analyse benutzt.

## 2.3 Gitterwerte

Für die Berechnungen wurden aus den analysierten Karten Gitterwerte gelesen und gestanzt und zwar zonal alle 5 Grad und meridional alle 2,5 Grad. Bei einer solchen engen Ablesung ist das Abtasttheorem sicherlich erfüllt. Um die Fehler beim Stanzen und Lesen möglichst zu vermeiden, wurde es zweimal unabhängig voneinander durchgeführt und dann mit Hilfe der elektronischen Rechenmaschine korrigiert.

Nach derselben Methode waren bereits für eine andere Untersuchung die Gitterwerte in den Niveaus 850, 800, 700, 600, 500, 400, 300, 250, 200 und 150 mb hergestellt worden. Das Institut stellte mir diese Daten zur Verfügung.

## 2.4 Interpolation auf z-Niveau

Für die Berechnung des Windfeldes konnten diese Werte noch nicht direkt verwendet werden. In der Balancegleichung für Wellenenergie wird die Vertikalgeschwindigkeit direkt gefordert, die Gitterwerte in einem Druck-Niveau lassen aber nur die Berechnung der generalisierten Vertikalgeschwindigkeit zu. Die Druck- und Temperaturwerte in den verschiedenen Höhenniveaus mußten also aus den gegebenen Werten interpoliert werden.

Bei der Wahl der Höhenstufen, für die diese Interpolation ausgeführt werden sollte, wurden folgende Kriterien benutzt:

- a) Es sollten genau so viele Höhenniveaus entstehen, wie Druckniveaus analysiert worden waren, da durch

Interpolation weiterer Höhenniveaus keine höhere Information erzielt werden kann.

- b) Da bei dieser Interpolation die speziellen Punkte der Radiosonden nicht mehr berücksichtigt werden konnten, sollten die zu interpolierenden Flächen möglichst nahe bei den analysierten Druck-Niveaus liegen.

Aus diesen Gründen wurden als Höhenstufen die mittleren Höhen der einzelnen analysierten Druck-Niveaus gewählt und zwar auf 100 m abgerundet. So liegt z.B. die mittlere Höhe der 850 mb-Fläche bei 1300 m.

Der Druck wurde für die Höhenfläche logarithmisch aus den Höhenwerten der beiden benachbarten Druckniveaus interpoliert. Wenn die Indices 1 und 2 die Werte der benachbarten Druck-Niveaus angeben und die indexfreien Größen die Werte der zu interpolierenden Fläche sind, so berechnet sich der Druck für jeden Gitterwert folgendermaßen:

$$\ln(p) = \ln(p_1) + \left\{ \ln(p_2) - \ln(p_1) \right\} \frac{h - h_1}{h_2 - h_1}$$

Zur Interpolation der Temperatur wurden die interpolierten Druckwerte mitbenutzt.

$$t = t_1 + \left( t_2 - t_1 \right) \frac{\ln(p) - \ln(p_1)}{\ln(p_2) - \ln(p_1)}$$

Zusammenfassend ergibt sich, daß die Radiosonden zunächst auf Druck-Niveaus interpoliert und dann nach der Handanalyse auf Höhen-Niveaus interpoliert worden waren. Bei einer solchen zweifachen Interpolation gehen wichtige Einzelheiten verloren, da besonders bei der zweiten Interpolation keine speziellen Punkte der Radiosondendaten berücksichtigt werden konnten. Man hätte wahrscheinlich bessere Ergebnisse erhalten, wenn auf gleichabständigen Höhenniveaus analysiert worden wäre. Da hier aber nur lange Wellen untersucht werden, macht sich die Ungenauigkeit durch die zweifache Interpolation kaum bemerkbar.

## 2.5 Fourieranalyse

Aus der Druck- und Temperaturverteilung in einer Höhe konnten dann auch die Verteilungen der zugehörigen Dichte und potentiellen Temperatur berechnet werden.

$$\Theta = (t + 273.15) \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\kappa} \quad \delta = \frac{f}{R(t + 273.15)} \quad \kappa = \frac{R}{c_p} = 0.285$$

Die Druck-, Dichte- und potentielle Temperaturfelder mußten in zonale Fourierreihen zerlegt werden. Da die Daten gleichabständig rund um die Erde reichten, konnten die Orthogonalitätsbeziehungen für Fourierreihen ausgenutzt werden. Unter der Annahme, daß Integrale als Summen dargestellt werden können, was gerade bei trigonometrischen Funktionen keinen Fehler erzeugt, ergibt sich nach der Gauss'schen Methode der kleinsten quadratischen Abweichung für die Fourierkoeffizienten:

$$a_n = \frac{1}{360} \sum_{x=0}^{360} \left\{ f(x) \cos(nx) \right\}$$
$$b_n = \frac{1}{360} \sum_{x=0}^{360} \left\{ f(x) \sin(nx) \right\}$$

Diese Fourierkoeffizienten dienen als Ausgangsdaten für die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes.

### 3. WINDFELDBERECHNUNG

#### 3.1 Vernachlässigungen

Für die Windfeldberechnung sollen möglichst wenig Vernachlässigungen gemacht werden, so daß auch Glieder mitbenutzt werden, die in Wirklichkeit keinen Einfluß auf die Ergebnisse haben. Dafür werden nach der Aufstellung der allgemeinen Gleichungen noch Näherungslösungen angegeben, in denen nur noch diejenigen Glieder vorkommen, die für die Ergebnisse von Bedeutung sind. Die Berechnung für diesen Termin wurde aber mit allen Gliedern durchgeführt.

Bei der Kompliziertheit der hydrodynamischen Gleichungen ist es jedoch nicht möglich, ohne Vereinfachungen und Vernachlässigungen Lösungen zu finden. Folgende Näherungen wurden deshalb gemacht:

- a) Störungsrechnung soll anwendbar sein
- b) Störungsgrößen nullter Ordnung sollen nur von  $f$  und  $z$  abhängen, (daraus folgt, daß im Mittel nur zonaler Wind möglich ist).
- c) Reibungskräfte werden vernachlässigt.
- d) In der thermodynamischen Gleichung soll nicht-adiabatische Erwärmung vernachlässigbar klein sein (Adiabatengleichung).
- e) Die lokalzeitliche Änderung braucht nicht berücksichtigt zu werden.
- f) Für die Berechnung der Höhe kann hydrostatisches Gleichgewicht angenommen werden.
- g) Alle Variablen lassen sich als Fourierreihen darstellen (Wellen verschiedener Wellenzahlen beeinflussen sich nicht).

#### 3.2 Auswahl der Gleichungen

Da die dritte Bewegungsgleichung für die Berechnung der Höhe und die Gasgleichung für die Dichte benutzt werden, bleiben noch 4 Gleichungen zur Berechnung des Windfeldes,

nämlich die ersten beiden Bewegungsgleichungen, die Kontinuitätsgleichung und die thermodynamische Gleichung (Adiabatengleichung). Das sind vier Gleichungen mit den drei unbekanntenen Komponenten der Geschwindigkeit,  $u$ ,  $v$  und  $w$ , da die anderen Variablen  $p$ ,  $\zeta$  und  $\Theta$  gemessene oder schon berechnete Größen sind.

Wenn die hier gemachten Näherungen nicht zu schwerwiegend sind, dann ist es nicht nötig, mit Hilfe einer Näherungsrechnung das Geschwindigkeitsfeld möglichst gut den vier Gleichungen anzupassen, sondern es genügt, aus den vier Gleichungen die drei günstigsten auszuwählen und dann dieses Gleichungssystem exakt zu lösen, was numerisch einfacher ist. Die vierte Gleichung muß dann automatisch erfüllt sein, da die Atmosphäre sich nach den Gesetzen der Hydrodynamik verhält.

Die Wahl der drei günstigsten Gleichungen fällt in diesem Fall sehr leicht, denn in den ersten beiden Bewegungsgleichungen und in der Adiabatengleichung gehen die drei Komponenten der Geschwindigkeit  $u$ ,  $v$  und  $w$ , wie sich später zeigen wird, nur undifferenziert ein, während in der Kontinuitätsgleichung auch noch ihre Ableitungen enthalten sind. Weil Ableitungen numerisch nur unbequem und ungenau berechnet werden können, ist die Kontinuitätsgleichung die ungünstigste der 4 Gleichungen. Ein nachträglicher Versuch, die Kontinuitätsgleichung zur Kontrolle des berechneten Windfeldes zu benutzen, scheitert wieder an der Fehlerquelle bei den Ableitungen.

Die Kontinuitätsgleichung besteht im wesentlichen aus

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{w}{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

Wie sich später zeigen wird, liegt der mittlere Fehler der Fourierkoeffizienten der Vertikalgeschwindigkeit bei 0,2 cm/sec. Für die numerische Berechnung der Ableitung der Vertikalgeschwindigkeit nach der Höhe benutzt man Differenzen, die bei dem hier betrachteten Beispiel kleiner als die Fehlergrenze sind. Solche Ableitungen sind zu ungenau und machen die Ergebnisse unbrauchbar.

Es erweist sich also, daß die günstigste Kombination der 4 Gleichungen aus den ersten beiden Bewegungsgleichungen und der Adiabatengleichung besteht. Es wird in sphärischen Koordinaten unter Berücksichtigung der metrischen Glieder gerechnet.

Mit den Annahmen (c) - (d), ohne Störungsrechnung, lauten die drei Gleichungen:

$$\frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f^* v + f^* w + \frac{u w}{a} - \frac{u v}{a} \tan \varphi = - \frac{1}{\rho a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda}$$

$$\frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \frac{\partial v}{\partial z} + f u + \frac{1}{a} \{ \rho w + u^2 \tan \varphi \} = - \frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \varphi}$$

$$\frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Theta}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} + w \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0$$

a = Erdradius , f = 2ω sin(φ) , f\* = 2ω cos (φ)

### 3.3 Linearisierung durch Störungsrechnung

Bei der Störungsrechnung werden die Variablen (φ, p, Θ, u, v, w) in ihre Mittelwerte und die Abweichungen davon aufgeteilt. Die Mittelwerte erhalten den Index 0 und die Abweichungen (Störungsgrößen erster Ordnung) zunächst den Index 1, der bei weiteren Rechnungen jedoch fortgelassen wird. Die Variablen setzen sich also folgendermaßen zusammen:

$$p = p_0 + p_1 , \quad \Theta = \Theta_0 + \Theta_1 , \quad u = u_0 + u_1 , \quad \text{u. s. w.}$$

Damit die Störungsrechnung anwendbar ist, müssen die Störungsgrößen bedeutend kleiner als die Mittelwerte der zugehörigen Variablen sein, was in diesem Fall für die Ausgangsdaten p, φ und Θ gut erfüllt ist. Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich, daß Produkte zweier Störungsgrößen erster Ordnung gegenüber anderen Produkten vernachlässigt werden können, z.B.  $p_1 \Theta_1 \ll p_0 \Theta_1$

#### Nullte Störung

Es wird angenommen, daß die obigen hydrodynamischen Gleichungen auch für die Mittelwerte der Variablen erfüllt

sein müssen. Die Mittelwerte sollen nur von  $f$  und  $z$  abhängen, d.h., es werden zonale Mittel benutzt.

Aus der zweiten Bewegungsgleichung ergibt sich eine quasi-geostrophische Balance für die mittlere zonale Windgeschwindigkeit. Die anderen beiden Gleichungen können nur erfüllt werden, wenn der mittlere meridionale und vertikale Wind identisch Null ist.

$$v_0 = 0 \quad w_0 = 0$$

$$u_0 f = \frac{a^2}{2} t_{\theta}^2 \gamma - \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial p_0}{\partial r}$$

$$u_0 = - \frac{a f}{2 t_{\theta}^2 \gamma} \pm \frac{1}{t_{\theta}^2 \gamma} \sqrt{ \frac{a^2 f^2}{4} - \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial p_0}{\partial r} t_{\theta}^2 \gamma }$$

Der zweite Term unter der Wurzel ist vielmals kleiner als der erste. Daher kann die Näherung von BERNICELLI

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$$

zu der Entscheidung benutzt werden, welches Vorzeichen vor der Wurzel den physikalischen Gegebenheiten am besten angepaßt ist.

$$u_0 = \frac{a f}{2 t_{\theta}^2 \gamma} \left\{ -1 \pm \left( 1 - \frac{2}{\sigma_0 a^2 f^2} \frac{\partial p_0}{\partial r} t_{\theta}^2 \gamma \right) \right\}$$

Man erkennt, daß bei der Wahl des positiven Vorzeichens sich die geostrophische Balance ergibt. Da es sich gezeigt hat, daß in der Atmosphäre der Wind in guter Näherung mit der geostrophischen Balance berechnet werden kann, muß hier das positive Vorzeichen gewählt werden.

### Erste Störung

Bei den Störungsgleichungen erster Ordnung werden Produkte zweier Störungsgrößen erster Ordnung vernachlässigt, Störungsgrößen nullter Ordnung erhalten den Index 0 und Störungsgrößen erster Ordnung erhalten keinen Index.

Für den Quotienten  $\frac{1}{s_0 + s}$  wird die Näherung

$$\frac{1}{s_0 + s} = \frac{1}{s_0} - \frac{s}{s_0^2} \quad \text{benutzt.}$$

$$\frac{\mu_0}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{r}{a} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} + w \frac{\partial u_0}{\partial z} - f v + f^* w + \frac{\mu_0 w}{a} - \frac{\mu_0 r}{a} \tan \varphi = -\frac{1}{s_0 a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda}$$

$$\frac{\mu_0}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + 2 \frac{\mu \mu_0}{a} \tan \varphi + f u = -\frac{1}{s_0 a} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{s}{a s_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\mu_0}{a \cos \varphi} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} + \frac{r}{a} \frac{\partial \theta_0}{\partial \varphi} + w \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = 0$$

### 3.4 Darstellung in Fourierreihen

Es erweist sich hier als günstig, die Störungsgrößen als Fourierreihen darzustellen und weiterhin anzunehmen, daß die hydrodynamischen Gleichungen für jede einzelne Wellenzahl erfüllt sein müssen.

Eine beliebige Störungsgröße  $f(x)$  kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} [ a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx) ]$$

oder in komplexer Schreibweise:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{i m x} \quad a_m - \text{Komplexe Zahl}$$

Ableitungen nach  $x$  oder  $\lambda$  werden durch die Einführung der Fourierreihen besonders einfach:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{m=0}^{\infty} i m a_m e^{i m x}$$

Dadurch treten in den drei Gleichungen keine Ableitungen der unbekanntenen  $u$ ,  $v$  und  $w$  mehr auf.

Da hier nur planetarische Wellen untersucht werden sollen, wird die Fourierreihe nach dem 11. Glied abgebrochen.

Weil jede Gleichung der ersten Störung für alle  $\lambda$  gelten muß, ist es notwendig, daß sich die Sinus- und Cosinusglieder jeweils alleine balancieren. Es ergeben sich dann für jede Wellenzahl  $m$  sechs Gleichungen mit sechs Unbekannten, wobei der Index 1 die Fourierkoeffizienten der Cosinus-Glieder und der Index 2 die Fourierkoeffizienten der Sinus-Glieder bedeutet.

$$\begin{aligned}
 u_2 \frac{m u_0}{a \omega f} + \gamma_1 \left\{ \frac{u_0 f}{a} - f - \frac{u_0}{a} \frac{f}{\gamma_1} \right\} + W_1 \left( u_{02} + f^* + \frac{u_0}{a} \right) &= - \frac{P_2 m}{a \beta_0 \omega f} \\
 - u_1 \frac{m u_0}{a \omega f} + \gamma_2 \left\{ \frac{u_0 f}{a} - f - \frac{u_0}{a} \frac{f}{\gamma_2} \right\} + W_2 \left( u_{02} + f^* + \frac{u_0}{a} \right) &= \frac{P_1 m}{a \beta_0 \omega f} \\
 u_1 \left\{ f + 2 \frac{f}{\gamma_1} \frac{u_0}{a} \right\} + \gamma_2 \frac{u_0 m}{a \omega f} &= - \frac{1}{a \beta_0} \frac{\partial P_1}{\partial \varphi} + \beta_1 \frac{P_0 \varphi}{\beta_0^2 a} \\
 u_2 \left\{ f + 2 \frac{f}{\gamma_2} \frac{u_0}{a} \right\} - \gamma_1 \frac{u_0 m}{a \omega f} &= - \frac{1}{a \beta_0} \frac{\partial P_2}{\partial \varphi} + \beta_2 \frac{P_0 \varphi}{\beta_0^2 a} \\
 \frac{\gamma_1}{a} \Theta_{0c} + W_1 \Theta_{0z} &= - \Theta_2 \frac{u_0 m}{a \omega f} \\
 \frac{\gamma_2}{a} \Theta_{0c} + W_2 \Theta_{0z} &= \Theta_1 \frac{u_0 m}{a \omega f}
 \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem sechster Ordnung läßt sich mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine simultan lösen.

### 3.5 Auflösung nach den Geschwindigkeitskomponenten

Für genauere Betrachtungen über die Wichtigkeit der einzelnen Glieder ist es aber vorteilhaft, die Gleichungen direkt nach den drei Geschwindigkeitskomponenten  $u$ ,  $v$  und  $w$  aufzulösen. Zur besseren Übersicht verwendet man am besten die komplexe Schreibweise.

$$u = \frac{-\frac{m \cdot f}{\rho_0 a \omega f} + \frac{m \cdot u_0}{\rho_0 \omega f} \left( u_{02} + \frac{u_0}{a} + f \right) \frac{\Theta}{\Theta_{02}} - \frac{1 \cdot \omega f}{m \omega f} \left[ \frac{\rho_0}{a} - \frac{f}{a} \frac{\rho_0 f}{a} \right] \left\{ \frac{u_0 \omega f}{a} \left( \frac{u_0 \omega f}{a} + f - \frac{\Theta_{02}}{\Theta_{02}} \left( u_{02} + \frac{u_0}{a} + f \right) \right) \right\}}{\frac{m \cdot a \omega}{a^2 \omega f} + \frac{a \cdot u_0}{m \omega f} \left\{ f + \frac{u_0 \omega f}{a} \right\} \left\{ \frac{m \omega f}{a} - \frac{u_0 \omega f}{a} + f - \left( u_{02} + \frac{u_0}{a} + f \right) \right\} \frac{\Theta}{\Theta_{02}}}$$

$$v = \frac{\frac{i \cdot m}{a \omega f} \left\{ -\frac{p}{\rho_0} + \frac{u_0}{\rho_0} \frac{\frac{1 \cdot \omega f}{a} - \frac{f}{a} \frac{\rho_0 f}{a}}{f + \frac{u_0 \omega f}{a}} + \frac{u_0}{\Theta_{02}} \frac{\Theta}{\Theta_{02}} \left( u_{02} + f + \frac{u_0}{a} \right) \right\}}{\frac{m^2 \cdot u_0^2}{a^2 \omega f} \left( f + \frac{u_0 \omega f}{a} \right)^{-1} + \frac{u_0 \omega f}{a} - f - \frac{u_0}{a} + \frac{1}{a} \frac{\Theta_{02}}{\Theta_{02}} \left( u_{02} + f + \frac{u_0}{a} \right)}$$

$$w = \frac{\frac{i \cdot m}{a \omega f} \left\{ -\frac{p}{\rho_0} + \frac{u_0}{\rho_0} \frac{\frac{1 \cdot \omega f}{a} - \frac{f}{a} \frac{\rho_0 f}{a}}{f + \frac{u_0 \omega f}{a}} + u_0 \frac{a \Theta}{\Theta_{02}} \left[ \frac{m^2 \cdot u_0^2}{a^2 \omega f} \left( f + \frac{u_0 \omega f}{a} \right)^{-1} \cdot \frac{u_0 \omega f}{a} - f - \frac{u_0}{a} \right] \right\}}{u_{02} + f + \frac{u_0}{a} - a \frac{\Theta_{02}}{\Theta_{02}} \left\{ m^2 \frac{u_0^2}{a^2 \omega f} \left( f + \frac{u_0 \omega f}{a} \right)^{-1} + \frac{u_0 \omega f}{a} - f - \frac{u_0}{a} \right\}}$$

### 3.6 Näherungsformeln

Die Näherungsformeln wurden dadurch gefunden, daß in den ausführlichen Formeln für u, v und w an Hand von Beispielen festgestellt wurde, welche Terme wichtig und welche unwichtig sind. Dann wurde rückwärts festgestellt, welche Glieder in den Ausgangsgleichungen (siehe Kap. 3.3, Seite 9) den wichtigsten Termen in den Endgleichungen für u, v und w entsprechen. Mit Hilfe dieser Methode entstanden die folgenden Näherungsformeln für u, v und w.

#### 3.61 Näherung für u

Als wichtig erwies sich in der zweiten Bewegungsgleichung, wie schon bekannt, die geostrophische Balance. Außerdem wurde auch das zonale advektive Glied bemerkbar:

$$\frac{u_0}{a \omega f} \frac{\partial u}{\partial t} + f u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Für v kann in erster Näherung die geostrophische Balance

$$v_0 = \frac{1}{\rho_0 f a \omega f} \frac{\partial p}{\partial y}$$

gesetzt werden, dann bleibt nur  $u$  als unbekannte Größe.

$$u = - \frac{1}{2gH} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{u_0}{f a \cos \varphi} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Die folgenden Tabellen zeigen die Abweichungen dieser Näherungslösung von der ausführlichen Formel, wie sie bei der Berechnung (Kap. 3.3) benutzt wurde. Es werden hier die Fourierkoeffizienten der verschiedenen Wellenzahlen einzeln betrachtet, auf der oberen Hälfte der Seite sind die Koeffizienten der Cosinusglieder und auf der unteren Hälfte die Koeffizienten der Sinusglieder aufgeführt.

In der ersten Spalte steht die Wellenzahl  $m$ , in der zweiten die Fourierkoeffizienten, die sich aus der geostrophischen Balance ergeben, in der dritten Spalte findet man den Beitrag, der durch das Beschleunigungsglied (advective Glied) geliefert wird. Die Ergebnisse der Spalten 2 und 3 werden summiert und ergeben in der vierten Spalte die Näherungslösung. Zum Vergleich stehen in der fünften Spalte die Ergebnisse der ausführlichen Formel.

Man erkennt, daß für die sehr langen Wellen (Wellenzahl 1 - 4) die Ergebnisse, die mit der ausführlichen Formel (Kap. 3.5, Seite 12) berechnet wurden, sehr gut mit der geostrophischen Balance übereinstimmen. In dem unteren Niveau (1800 m) sind Abweichungen von 0,1 m/sec selten, im höheren Niveau (6800 m), das nahe dem Jet-Niveau liegt, sind die Abweichungen größer, übersteigen aber nur selten 10 %. Bei den höheren Wellenzahlen ist der Einfluß des Beschleunigungsgliedes (advectives Glied) schon größer als bei den kleinen Wellenzahlen und kann besonders im höheren Niveau gleiche Größenordnung wie das geostrophische Glied annehmen. Beschleunigungsglied und geostrophisches Glied zusammen ergeben die Näherungslösung, die von der ausführlichen Berechnung nach Kap. 3.5 nur wenig abweicht, meistens weniger als 10 %.

Abweichung der Näherungsformel von der ausführlichen  
in der Höhe 1800 Meter und der geographischen Breite 45

U Cosinus-Glied

M	Geostr.	Advekt.	Näherung	Ergebnis der ausführlichen Formel
1	-2,5	-,0	-2,5	-2,3
2	+3,9	-,1	+3,9	+3,9
3	-3,0	-,2	-3,1	-3,1
4	-2,6	-,3	-2,9	-2,9
5	-1,0	-,7	-1,7	-1,7
6	+1,7	-,3	+1,4	+1,5
7	+ ,3	-,1	+ ,2	+ ,3
8	-,7	+ ,2	-,5	-,6
9	-,2	-,0	-,2	-,2
10	-,8	+ ,3	-,5	-,5
11	-1,3	+ ,4	-1,0	-1,0

U Sinus-Glied

M	Geostr.	Advekt.	Näherung	Ergebnis der ausführlichen Formel
1	+ ,5	+ ,0	+ ,5	+ ,4
2	+ ,3	+ ,1	+ ,3	+ ,3
3	+3,4	-,2	+3,2	+3,0
4	-1,1	+ ,1	-1,0	-1,0
5	-,2	+ ,3	+ ,2	+ ,2
6	+ ,6	+ ,8	+1,4	+1,5
7	-,3	+ ,2	-,1	-,2
8	-1,1	+ ,2	-1,0	-1,0
9	+1,2	+ ,2	+1,4	+1,5
10	+ ,9	-,0	+ ,9	+ ,9
11	+1,1	+1,0	+2,0	+2,1

Abweichung der Näherungsformal von der ausführlichen  
in der Höhe 1800 Meter und der geographischen Breite 55

U Cosinus-Glied

M	Geostr.	Advekt.	Näherung	Ergebnis der ausführlichen Formel
1	-5,6	+,0	-5,6	-5,3
2	-1,7	-,1	-1,8	-1,6
3	-6,5	+,1	-6,4	-6,3
4	-4,1	-,0	-4,1	-3,9
5	-1,8	-,5	-2,3	-2,2
6	-,5	-,8	-1,2	-1,0
7	+,7	-,2	+,5	+,6
8	+1,1	-,0	+1,1	+1,0
9	-,2	+,5	+,3	+,2
10	+1,6	-,4	+1,2	+1,2
11	+,8	+,4	+1,2	+1,1

U Sinus-Glied

M	Geostr.	Advekt.	Näherung	Ergebnis der ausführlichen Formel
1	-,9	+,0	-,9	-1,0
2	+,9	+,0	+1,0	+1,0
3	+,3	-,3	-,1	-,1
4	-,3	+,1	-,2	-,3
5	+1,5	+,2	+1,7	+1,8
6	+1,7	+,6	+2,3	+2,3
7	-1,4	+,5	-1,0	-1,0
8	+1,0	+,2	+1,2	+1,2
9	-,6	-,4	-1,0	-1,0
10	-1,4	+,2	-1,2	-1,2
11	+,6	+,1	+,7	+,7

Abweichung der Näherungsformel von der ausführlichen  
in der Höhe 6800 Meter und der geographischen Breite 45

U Cosinus-Glied

M	Geostr.	Advekt.	Näherung	Ergebnis der ausführlichen Formel
1	-3,8	+0	-3,8	-3,5
2	+3,6	+0	+3,7	+3,7
3	-4,6	-,5	-5,0	-4,9
4	-5,7	-1,4	-7,1	-6,9
5	-,1	-2,7	-2,8	-2,9
6	+2,2	+3	+2,5	+2,6
7	+1,0	+1,4	+2,4	+2,5
8	+,8	-1,5	-,7	-,8
9	+2,4	-,2	+2,1	+2,3
10	-,7	+,4	-,3	-,3
11	+,1	+3,3	+3,5	+4,3

U Sinus-Glied

M	Geostr.	Advekt.	Näherung	Ergebnis der ausführlichen Formel
1	+7,0	-,1	+7,0	+6,4
2	-1,2	+,3	-,9	-,9
3	+8,4	-,9	+7,5	+7,3
4	-3,3	+,3	-3,1	-2,9
5	+1,7	+1,4	+3,1	+3,0
6	+1,2	+3,8	+4,9	-5,1
7	-6,9	-,2	-7,1	-7,4
8	+2,4	-,7	+1,6	+1,7
9	+4,6	+2,4	+7,0	+7,7
10	+1,9	+,4	+2,3	+2,7
11	-,4	+,8	+,4	+,5

Abweichung der Näherungsformel von der ausführlichen  
in der Höhe 6300 Meter und der geographischen Breite 55

U Cosinus-Glied

M	Geostr.	Advekt.	Näherung	Ergebnis der ausführlichen Formel
1	-6,3	+1	-6,3	-5,9
2	+2,4	-,2	+2,2	+2,2
3	-2,4	-,0	-2,5	-2,5
4	-7,4	-,0	-7,5	-7,3
5	-5,3	-1,5	-6,8	-6,4
6	-1,8	-1,1	-2,9	-2,6
7	-,2	+9	+7	+6
8	-1,6	-1,1	-2,6	-2,6
9	-2,1	+9	-1,2	-1,3
10	+2	-1,0	-,8	-,7
11	+1,1	+2,6	+3,7	+3,7

U Sinus-Glied

M	Geostr.	Advekt.	Näherung	Ergebnis der ausführlichen Formel
1	+3,0	-,1	+3,0	+2,7
2	-,5	+3	-,1	-,2
3	+3	-1,4	-1,1	-,8
4	+2,2	+0	+2,3	+2,2
5	-,0	+1,7	+1,7	+1,5
6	+5,5	+2,5	+8,0	+7,6
7	-,0	+1,7	+1,6	+1,5
8	-,3	-,4	-,7	-,6
9	-1,6	-,7	-2,3	-2,4
10	-,5	-,1	-,6	-,6
11	+1,0	+4	+1,5	+1,5

### 3.62 Näherung für v

Eine einfache Näherungslösung für v, die besser als die geostrophische Balance ist, konnte nicht gefunden werden.

### 3.63 Näherung für w

Für die Näherungslösung für w wird wie bei der ausführlichen Formel von der Adiabatangleichung ausgegangen:

$$\frac{u_0}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Theta}{\partial \lambda} + v \frac{\Theta_{\varphi}}{a} + w \Theta_{\sigma_2} = 0$$

Hier muß v substituiert werden, und zwar geschieht dieses wieder mit der geostrophischen Balance.

$$W = - \frac{1}{\Theta_{\sigma_2}} \left\{ \frac{u_0}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Theta}{\partial \lambda} + \frac{\Theta_{\varphi}}{a} \frac{1}{\sin \varphi a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right\}$$

Auch für die Vertikalgeschwindigkeit wird in den folgenden Tabellen nach derselben Methode wie bei dem zonalen Wind die Näherungslösung mit den Ergebnissen der ausführlichen Formel verglichen. Das erste Glied in der obigen Formel für die Vertikalgeschwindigkeit, das mit dem mittleren zonalen Wind multipliziert wird, ist in der Tabelle zonal genannt worden, das zweite Glied, das mit dem meridionalen Wind multipliziert wird, heißt hier meridional. Die Summe von beiden ergibt die Näherung.

Beide Terme dieser Näherungslösung für die Vertikalgeschwindigkeit sind von gleicher Größenordnung. Vergleicht man diese Näherungslösung mit den Rechenergebnissen der ausführlichen Formel (5. Spalte), so findet man eine gute Übereinstimmung. Abweichungen von mehr als 10 % sind sehr selten.

Abweichung der Näherungsformel von der ausführlichen  
in der Höhe 1800 Meter und der geographischen Breite 55

W	Cosinus-Glied				
M	Zonal	Meridio	Näherung	Ergebnis der ausführlichen Formel	
1	+ ,2	+ ,0	+ ,2	+ ,2	
2	- ,3	+ ,1	- ,3	- ,3	
3	+ ,6	- ,4	+ ,2	+ ,3	
4	+ ,3	+ ,1	+ ,4	+ ,4	
5	- ,7	+ ,2	- ,5	- ,6	
6	- ,6	+ ,3	- ,3	- ,3	
7	+ ,3	+ ,2	+ ,5	+ ,5	
8	+ ,3	+ ,1	+ ,4	+ ,4	
9	+ ,2	- ,2	+ ,1	+ ,1	
10	+ ,6	- ,1	+ ,6	+ ,6	
11	+ ,1	+ ,0	+ ,1	+ ,1	

W	Sinus Glied				
M	Zonal	Meridio	Näherung	Ergebnis der ausführlichen Formel	
1	+ ,2	- ,0	+ ,2	+ ,2	
2	+ ,1	+ ,2	+ ,2	+ ,2	
3	- ,2	- ,1	- ,3	- ,3	
4	+ ,2	+ ,0	+ ,3	+ ,3	
5	- ,0	+ ,3	+ ,3	+ ,3	
6	+ ,8	+ ,4	+ 1,2	+ 1,2	
7	+ ,8	+ ,1	+ ,9	+ ,9	
8	- ,8	+ ,0	- ,7	- ,8	
9	+ ,2	- ,2	+ ,0	+ ,0	
10	- ,3	+ ,1	- ,2	- ,2	
11	- ,2	- ,1	- ,3	- ,4	

Abweichung der Näherungsformel von der ausführlichen  
in der Höhe 1800 Meter und der geographischen Breite 45

W	Cosinus-Glied				
M	Zonal	Meridie	Näherung	Ergebnis der ausführlichen Formel	
1	+1	+0	+1	+1	
2	-1	+1	+0	+0	
3	+4	-4	-0	-0	
4	-2	+1	-1	-1	
5	-3	+4	+0	+1	
6	-1,1	+7	-3	-3	
7	+4	+2	+6	+6	
8	+4	+1	+6	+6	
9	-3	+1	-1	-1	
10	+2	-0	+2	+2	
11	+6	+5	+1,0	+1,1	

W	Sinus-Glied				
M	Zonal	Meridie	Näherung	Ergebnis der ausführlichen Formel	
1	+1	+1	+2	+2	
2	+3	+2	+5	+5	
3	-1	+3	+1	+2	
4	-1	+5	+3	+4	
5	-4	+7	+3	+4	
6	+6	+3	+9	+9	
7	+7	+1	+7	+8	
8	-5	-1	-6	-6	
9	-0	+0	-0	-0	
10	+1	-2	-0	-0	
11	+1	-2	-1	-1	

Abweichung der Näherungsformel von der ausführlichen  
in der Höhe 6800 Meter und der geographischen Breite 45

W Cosinus-Glied

M	Zonal	Meridial	Näherung	Ergebnis der ausführlichen Formel
1	+0,6	-0,2	+0,4	+0,5
2	-0,5	+0,6	+0,1	+0,1
3	+0,4	-1,3	-0,9	-0,7
4	-0,5	+0,3	-0,2	-0,3
5	-0,0	+1,2	+1,2	+1,3
6	-2,6	+2,7	+0,1	+0,4
7	+0,4	-0,2	+0,2	-0,2
8	+0,4	-0,4	+0,1	+0,2
9	-1,2	+1,2	-0,0	+0,6
10	-0,1	+0,2	+0,1	+0,3
11	+0,6	+0,3	+0,9	+0,9

W Sinus-Glied

M	Zonal	Meridial	Näherung	Ergebnis der ausführlichen Formel
1	+0,2	-0,1	+0,2	+0,2
2	+0,7	-0,0	+0,6	+0,6
3	-0,9	+0,7	-0,2	-0,1
4	-1,1	+1,5	+0,4	+0,7
5	-2,1	+2,3	+0,2	+0,4
6	+0,9	-0,2	+0,7	+0,5
7	+1,1	-0,8	+0,2	+0,1
8	-1,3	+0,3	-0,5	-0,5
9	+0,2	+0,1	+0,3	+0,2
10	-0,3	-0,2	-0,5	-0,5
11	+0,3	-1,3	-1,0	-1,4

Abweichung der Näherungsformel von der ausführlichen  
in der Höhe 6800 Meter und der geographischen Breite 55

W Cosinus-Glied

M	Zonal	Meridio	Näherung	Ergebnis der ausführlichen Formel
1	+ ,5	- ,1	+ ,4	+ ,4
2	- ,3	+ ,1	- ,2	- ,2
3	+ ,7	- ,3	+ ,4	+ ,4
4	- ,1	+ ,0	- ,1	- ,0
5	-1 ,0	+ ,2	- ,8	- ,8
6	-1 ,4	+ ,2	-1 ,2	-1 ,2
7	- ,7	+ ,1	- ,6	- ,6
8	- ,4	- ,0	- ,4	- ,4
9	+ ,9	- ,0	+ ,9	+ ,9
10	+ ,0	- ,0	+ ,0	+ ,0
11	+ ,2	+ ,0	+ ,3	+ ,3

W Sinus-Glied

M	Zonal	Meridio	Näherung	Ergebnis der ausführlichen Formel
1	+ ,3	- ,0	+ ,2	+ ,2
2	- ,1	+ ,1	- ,0	- ,0
3	- ,6	+ ,0	- ,6	- ,6
4	- ,5	+ ,0	- ,4	- ,4
5	- ,3	+ ,2	- ,1	- ,1
6	+ ,3	+ ,1	+ ,4	+ ,4
7	+ ,4	- ,1	+ ,3	+ ,3
8	-1 ,3	+ ,1	-1 ,2	-1 ,2
9	- ,3	- ,1	- ,4	- ,4
10	+ ,0	+ ,1	+ ,1	+ ,1
11	+ ,4	- ,1	- ,3	+ ,3

### 3.7 Fehlerrechnung

#### 3.71 Allgemeine Betrachtungen

Der systematische Fehler, der durch die Vereinfachung der hydrodynamischen Gleichungen entsteht, kann hier nicht angegeben werden. Es ist aber ziemlich sicher, daß in Polnähe dieser Fehler wohl am größten ist. Die Störungsrechnung hat zur Folge, daß die Geschwindigkeitskomponenten am Pol verschwinden. Wenn die polare Zyklone oder Antizyklone ihr Zentrum am geographischen Nordpol hat, ist die horizontale Geschwindigkeit in guter Näherung gleich Null, die Vertikalgeschwindigkeit wird dann in Wirklichkeit nicht Null sein, wie die Diskussion der Wellenzahl 1 zeigen wird, besteht eine Abweichung von  $15^\circ$  zwischen dem Zyklonenzentrum und dem Pol, so, daß man bei der Interpretation nördlich  $75^\circ$  N vorsichtig sein muß.

In dieser Arbeit kann nur der numerische Fehler, der durch Meßungenauigkeit entsteht, bestimmt werden. Es wird dabei der mittlere Fehler in der 500 mb-Fläche berechnet, da diese Fläche repräsentativ für die ganze Atmosphäre ist. Der numerische Fehler in höheren Niveaus wird etwas größer sein, da die Temperaturdaten durch Strahlungseinfluß ungenauer und die relativen Fehler des Druckes ungünstiger werden. Dafür wird der systematische Fehler in den großen Höhen geringer sein, weil die adiabatische Bedingung, die Reibungsfreiheit und die Stationarität besser erfüllt sein werden, als in den unteren Niveaus.

Wie sich in Kap. 3.84 zeigen wird, besteht bei den Horizontalgeschwindigkeiten im Jet-Niveau die größte Abweichung der berechneten Winde von den gemessenen. Diese Ungenauigkeit hängt sicherlich mit der Vernachlässigung der Reibungskräfte, die im Jet-Niveau besonders groß sind, zusammen (Vergleiche dazu auch Kap. 3.84).

Für Niveaus unterhalb der 500 mb-Fläche gelten genau die umgekehrten Zusammenhänge wie in der Stratosphäre:

Kleinere, numerische Fehler, aber größere systematische Fehler. Besonders in Bodennähe darf die Reibung nicht vernachlässigt werden. In dieser Arbeit liest aber das tiefste Niveau bei 1300 m, so daß die Bodenreibung nicht berücksichtigt zu werden braucht.

### 3.72 Meßfehler

Wie Vergleichsaufstiege der WMO in Payerne und anderen Orten gezeigt haben, können die Meßwerte, besonders in großen Höhen, stark von der Wirklichkeit abweichen. Bei den hier verwendeten Gitterwerten der Temperatur und des Druckes handelt es sich nicht mehr um die Radiosonden-Daten, sondern um Werte, die bei der Handanalyse korrigiert und geglättet werden. Der genaue mittlere Fehler dieser Werte kann nicht angegeben werden, jedoch ist bei der Wahl von

$$\Delta p = 1 \text{ mb} \quad \Delta t = 0.5^\circ \text{ C}$$

der Fehler nicht zu niedrig abgeschätzt worden, so daß die berechneten Ergebnisse wahrscheinlich genauer sind, als die angegebenen Fehlergrenzen vermuten lassen.

### 3.73 Fehler der Dichte und der potentiellen Temperatur

Der Fehler für die Dichte ergibt sich aus der Zustandsgleichung:

$$\rho = \frac{p}{R T} \quad \Delta \rho = \rho \sqrt{\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2} \quad T = t + 273.15$$

Nun setzt man mittlere Werte für  $\rho$  und  $p$  der 500 mb-Fläche ein:

$$\Delta \rho = 2 \left[ \frac{\rho}{\rho} \right] \text{ oder der relative Fehler beträgt } 0,3 \%$$

Aus der Definitionsgleichung für die potentielle Temperatur wird der zugehörige Fehler berechnet:

$$\Theta = T \left( \frac{1000}{p} \right)^k \quad \Delta \Theta = \Theta \sqrt{\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(k \frac{\Delta p}{p}\right)^2}$$

$$\Delta \Theta = 0.6 \left[ \frac{\Theta}{\text{K}} \right] \text{ oder der relative Fehler beträgt } 0,2 \%$$

### 3.74 Fehler der Fourierkoeffizienten

Die Fourierkoeffizienten ergeben sich durch Integration, bzw. Summation über die Gitterwerte.

$$a_n = \frac{1}{36} \sum_{x=0}^{71} \{ f(x) \cos(nx) \}$$

$$\Delta a_n = \frac{1}{36} \sqrt{\sum_{x=0}^{71} \Delta \{ f(x) \cos(nx) \}^2} \approx \frac{\sqrt{72}}{36} \Delta \{ f(x) \cos(nx) \}$$

$$\Delta a_n = \frac{1}{4} \cdot \begin{cases} \frac{\Delta f}{2} & \text{für } n \neq 0 \\ \Delta f & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

Nach dieser Methode ergeben sich die Fehler für die Fourierkoeffizienten:

$$\Delta P_n = 0,12 \text{ mb}$$

$$\Delta P_0 = 0,25 \text{ mb}$$

$$\Delta \zeta_n = 0,25 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$$

$$\Delta \zeta_0 = 0,5 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$$

$$\Delta \Theta_n = 0,1 \text{ } ^\circ\text{K}$$

$$\Delta \Theta_0 = 0,2 \text{ } ^\circ\text{K}$$

### 3.75 Fehler der Ableitungen

Zur Bildung der partiellen Ableitungen werden Differenzen dividiert. Als Beispiel wird die Funktion  $f$  nach der Höhe  $z$  differenziert, wobei die Höhenmessung als exakt anzusehen ist.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{f_A - f_B}{z_A - z_B}$$

$$\Delta \left\{ \frac{\partial f}{\partial z} \right\} = \frac{\sqrt{2} \Delta f}{z_A - z_B}$$

Nach diesen Formeln können die Ableitungen gebildet werden.

$$\Delta \Theta_{0z} = 0,0001 \frac{^\circ\text{K}}{\text{m}} = 10^{-6} \frac{^\circ\text{K}}{\text{cm}}$$

$$\frac{\Delta \Theta_{0r}}{a} = 0,6 \cdot 10^{-8} \frac{^\circ\text{K}}{\text{cm}}$$

$$\frac{\Delta P_{0r}}{a} = 0,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{mb}}{\text{cm}}$$

### 3.76 Fehler des mittleren zonalen Windes

In erster Näherung kann der mittlere zonale Wind  $u_0$  durch die geostrophische Balance dargestellt werden:

$$u_0 = -\frac{1}{f \rho_0 a} \frac{\partial P_0}{\partial y}, \quad \Delta u_0 = u_0 \sqrt{\left( \frac{\Delta \zeta_0}{\zeta_0} \right)^2 + \left( \frac{\Delta P_{0r}}{P_0} \right)^2}$$

Mit den Zahlenwerten bei 50° N in 5300 m Höhe (die Zahlenwerte sind einzeln in Kap. 3.77 angeführt) ergibt sich:

$$\Delta u_0 = 16 \sqrt{49 \cdot 10^{-8} + 9 \cdot 10^{-7}} = 0.5 \frac{m}{sec}$$

Wie man sieht, spielt der Fehler der mittleren Dichte keine Rolle. Der hauptsächlichste Fehler entsteht vielmehr durch numerische Ableitungen.

### 3.77 Fehler der Vertikalgeschwindigkeit

Zur Berechnung des numerischen Fehlers der Vertikalgeschwindigkeit wird die Näherungslösung benutzt (Kap. 3.63, Seite 19).

$$W = - \frac{u_0}{\Theta_{0z}} \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Theta}{\partial \lambda} - \frac{\Theta_{0r}}{a \Theta_{0z}} \frac{1}{f \rho_0 a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda}$$

oder mit Einführung von Fourierreihen gilt für die einzelnen Fourierkoeffizienten:

$$W = - \frac{i m}{a \cos \varphi \Theta_{0z}} \left\{ u_0 \Theta + \frac{p}{f \rho_0 a} \Theta_{0r} \right\}$$

Daraus ergibt sich das Quadrat des mittleren Fehlers:

$$\begin{aligned} (\Delta W)^2 = & \frac{m^2 f \rho_0}{\Theta_{0z}^2 \cos^2 \varphi} \left\{ \left( \frac{\Delta \Theta_{0z}}{\Theta_{0z}} \right)^2 \left( f \rho_0 a u_0 \Theta + p \Theta_{0r} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left( \Delta u_0 f \rho_0 a \Theta \right)^2 + \left( u_0 f \rho_0 a \Delta \Theta \right)^2 + \left( \Delta p \Theta_{0r} \right)^2 + \left( p \Delta \Theta_{0r} \right)^2 + \left( p \Theta_{0r} \frac{\Delta f \rho_0}{f \rho_0} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

Bei 50° N in 5300 m Höhe lauten die Ausgangsdaten folgendermaßen:

$$\begin{array}{ll} u_0 = 16 \text{ m/sec} & p = 5 \text{ mb} \quad (\text{mittlere Amplitude}) \\ \Theta_{0z} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ K/m & \Theta = 4 \text{ } ^\circ K \quad ( \quad " \quad ) \\ \rho_0 = 716 \text{ g/m}^3 & \frac{\Theta_{0r}}{a} = 3.6 \cdot 10^{-2} \frac{^\circ K}{m} \end{array}$$

Es stellt sich heraus, daß der Fehler der mittleren Dichte und des Druckes unbedeutend sind. Den größten Einfluß hat der Fehler der meridionalen Ableitung der mittleren potentiellen Temperatur. Für den Fehler der Vertikalgeschwindigkeit ergibt sich:

$$\Delta w = m \cdot 0,03 \text{ cm/sec}$$

m = Wellenzahl

Die Genauigkeit der Vertikalgeschwindigkeit hängt von der Wellenzahl ab, d.h., mit wachsender Wellenzahl werden die Ergebnisse ungenauer.

Dieses ist der mittlere Fehler für die Fourierkoeffizienten der Vertikalgeschwindigkeit in 5300 m bei 50° N. Dieser numerische Fehler wird als repräsentativ für alle Vertikalgeschwindigkeiten angesehen.

Zur Berechnung des mittleren Fehlers der Gitterwerte, die durch die Synthese der Fourierkoeffizienten der Vertikalgeschwindigkeit entstanden sind, wird eine mittlere Wellenzahl 6 genommen, da diese Wellenzahl den größten Einfluß auf die Ergebnisse hat. Der Gitterwert setzt sich aus der Fourrierreihe zusammen:

$$W = \sum_{m=1}^{11} \{ c_w m \cos(m\lambda) + s_w m \sin(m\lambda) \}$$

$$\Delta W = \sqrt{\sum_{m=1}^{11} \{ \Delta [c_w m \cos(m\lambda)]^2 + \Delta [s_w m \sin(m\lambda)]^2 \}}$$

wegen  $\Delta s_w = \Delta c_w$  gilt:  $\Delta W \approx \sqrt{11} \cdot \Delta W_6 = 0,5 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$

Bei der Berechnung der Fehler wurde bei Abschätzungen immer nach oben abgerundet, so daß die berechneten numerischen Fehler größer als die wirklichen numerischen Fehler sind. Da der systematische Fehler unbekannt ist, sind diese vergrößerten Zahlenwerte berechtigt.

### 3.78 Fehler des Vertikaltransportes

Der mittlere Fehler des Vertikaltransportes für mechanische Wellenenergie für einen Gitterwert ergibt sich zu:

$$\Delta(pw) = \sqrt{(w \Delta p)^2 + (p \Delta w)^2} = \sqrt{(0,5)^2 + (2,5)^2}$$

$$\Delta(pw) = 2,5 \frac{\text{Joule}}{\text{m}^2 \text{ sec}} = 2,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ sec}}$$

Der Fehler des Druckes ist im Vergleich zum Fehler der Vertikalgeschwindigkeit unbedeutend.

Die zonalen Mittel der Vertikaltransporte für die einzelnen Wellenzahlen  $m$  wurden direkt aus den Fourierkoeffizienten bestimmt.

$$\overline{pw}_m = \frac{1}{2} (c p_m w_m + s p_m w_m)$$
$$\Delta(\overline{pw})_m = \sqrt{(p_m \Delta w_m)^2 + (w_m \Delta p_m)^2} = \frac{1}{10} \sqrt{2,25 \cdot m + 1}$$
$$m=1 \Rightarrow \overline{pw}_1 = 2 \cdot 10^2 \text{ erg cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$$
$$m=5 \Rightarrow \overline{pw}_5 = 8 \cdot 10^2 \text{ erg cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$$

d.h., in den Meridionalschnitten können die Werte um 2, bzw. 8 Einheiten schwanken. Die Stetigkeit der Isoplethen in diesen Meridionalschnitten deutet aber darauf hin, daß die Fehlergrenze kleiner als der numerische Fehler ist.

### 3.8 Ergebnisse der Windfeldberechnungen

Die Amplituden der berechneten Fourierkoeffizienten des Druckes, der Temperatur und der Windkomponenten werden im Anhang I als Vertikalschnitte dargestellt. Aus den Fourierkoeffizienten werden Gitterwerte der Windgeschwindigkeitskomponenten berechnet und graphisch als Isoplethen dargestellt. (Die Methode der graphischen Darstellung wird im Anhang II erläutert.) Damit über die Richtigkeit der berechneten Windkomponenten besser entschieden werden kann, wird zunächst ein kurzer Überblick über die Wetterlage zu diesem Termin gebracht.

#### 3.81 Allgemeine Wetterlage

Bei der Betrachtung der troposphärischen Karten (Abb. 1 - 6) fallen fünf Tiefdruckgebiete auf, die in der Stratosphäre nur noch als Tröge zu erkennen sind. Es handelt sich um folgende Tröge:

- 1) westlich von Europa
- 2) über Zentralrußland mit dem Kern über Nowaja Selmja
- 3) an der Ostküste Asiens, den man fast in zwei aufteilen kann, einen nördlich Koreas und einen

östlich Japans

- 4) über Ostamerika
- 5) über dem östlichen Pazifik, der sich schon so weit abgeschnürt hat, daß er in dem Isobarenfeld nördlich  $40^{\circ}$  N nur noch schwach zu erkennen ist.

Es handelt sich also um 5 Tröge, so daß man vermuten muß, daß die Wellenzahl 5 eine wesentliche Rolle spielen wird.

Zu jedem Trog der freien Atmosphäre gehört eine Zyklonenserie am Boden, deren Frontenverlauf in den Isobarenkarten mit grünen Linien angedeutet ist. Zu dem westeuropäischen, dem zentralasiatischen, dem ostpazifischen und dem ostamerikanischen Trog gehören je zwei Bodenstörungen; nur bei dem großen ostasiatischen Trog befindet sich eine einzige Bodenstörung, obwohl man mehrere erwarten würde. Hier spielen die hohen Gebirge in Ost- und Südasiens (Himalaya, ...) eine wesentliche Rolle, da sie eine natürliche Luftmassengrenze darstellen und somit eine Ausbildung von Frontalsystemen unterdrücken. Es handelt sich also um insgesamt 9 Bodenstörungen.

Die vertikalen Achsen der Zyklonenzentren am Boden und der Tröge der oberen Wellen verlaufen von 1800 m bis 20 000 m fast senkrecht. Eine solche Lage der Vertikalachse läßt erwarten, daß die Zyklonen schon im Absterben begriffen sind. Dazu kommt noch, daß die zugehörigen Fronten schon weit okkludiert sind, und der Jet stark meandriert.

In den Wetterkarten der folgenden Tage findet man diese Annahme bestätigt:

Am 15. Dezember 1957, also drei Tage später, hat sich die Zyklone über Amerika aufgefüllt, das Tief westlich Spaniens hat sich vollkommen abgeschnürt und ist unter Auffüllung als Kaltlufttropfen nach Süden weiter gewandert, und das Tief über Ostasien blieb in dieser Zeit zwar noch bestehen, hat sich aber aufgefüllt.

In der unteren und mittleren Troposphäre bestehen die

Zyklonen aus kalter Luft und die Antizyklonen aus warmer Luft (Abb. 7 - 12), so daß die Isobaren fast denselben Verlauf wie die Isothermen haben. In 8700 m, dem Polar-Jet-Niveau, macht sich der Ausgleich, bzw. die Umkehr, der horizontalen Temperaturverteilung bemerkbar, nur südlich  $60^{\circ}$  N ist noch die Temperaturverteilung der unteren Niveaus zu erkennen. In den höheren Niveaus ist die Temperaturumkehr vollkommen eingetreten. Dazu vergleiche man die 1800 m- mit der 15 700 m-Fläche. Über den großen Seen von Amerika liegt in der Troposphäre ein Kaltlufttropfen und in der Stratosphäre befindet sich eine Warmluftinsel. Ebenso verhält es sich bei den Kaltlufttropfen über dem östlichen Pazifik und Ostasien und bei dem Kaltluftausbruch westlich Spaniens. In den Hochdruckgebieten und Rücken findet man in der unteren und mittleren Troposphäre relativ warme Luft und in der Stratosphäre relativ tiefe Temperaturen, z.B. über dem westlichen Atlantik, über Mitteleuropa und über Westamerika; jedoch ist die Temperaturumkehr über den Hochdruckgebieten nicht so deutlich ausgeprägt wie bei den Zyklonen.

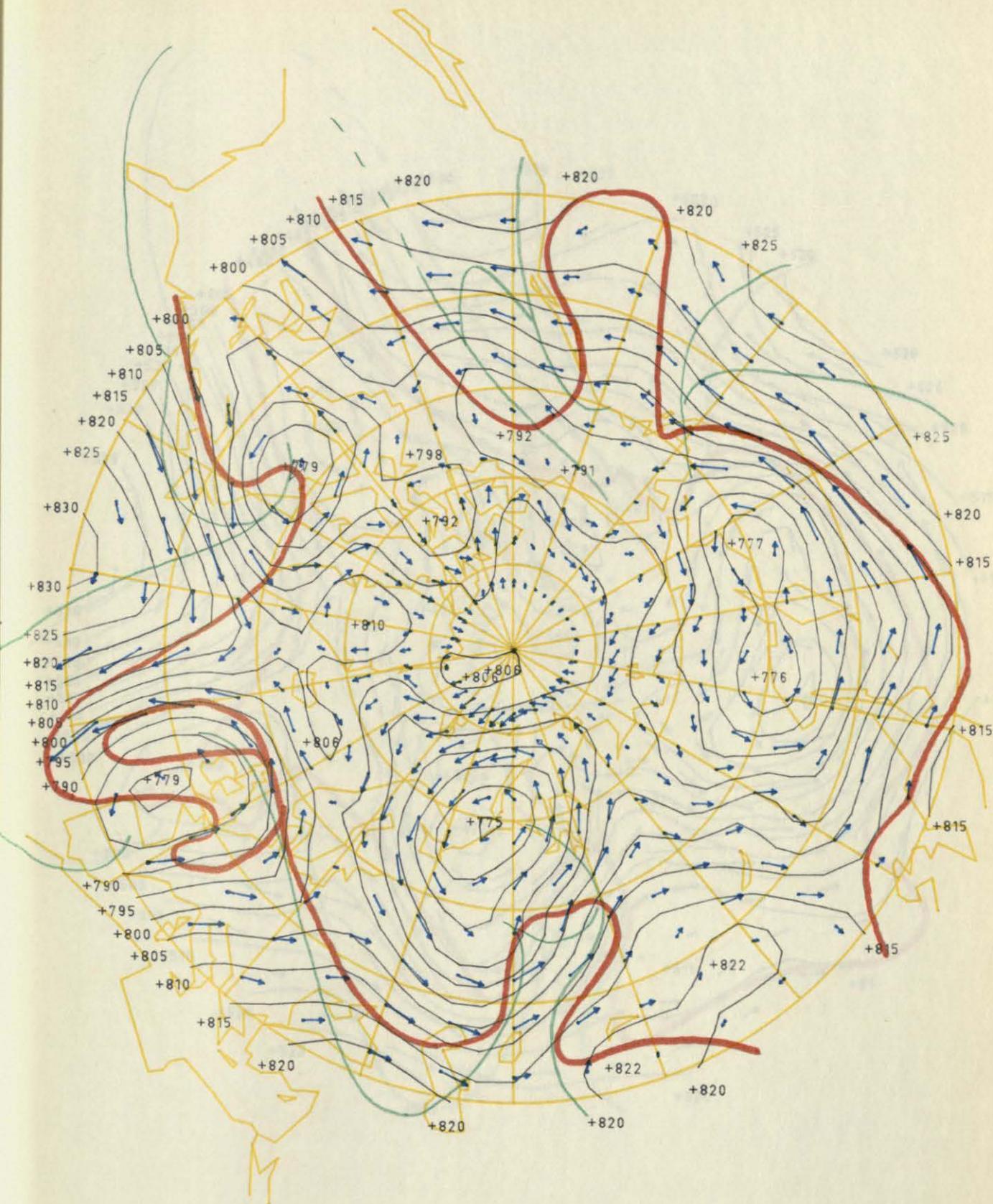


Abb. 1.

P [MB] 1800 M HOEHE



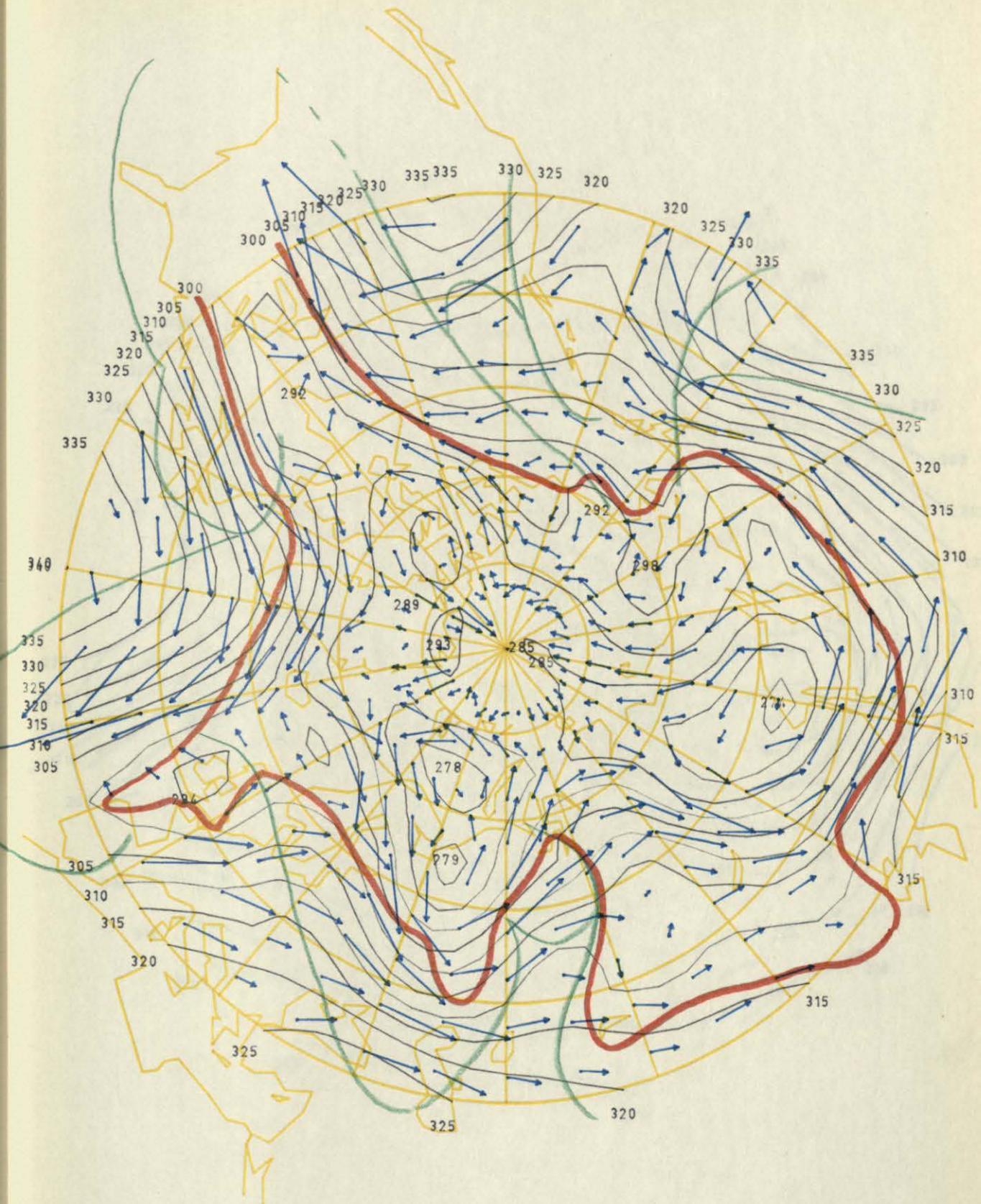


Abb. 3.

P [MB] 8700 M

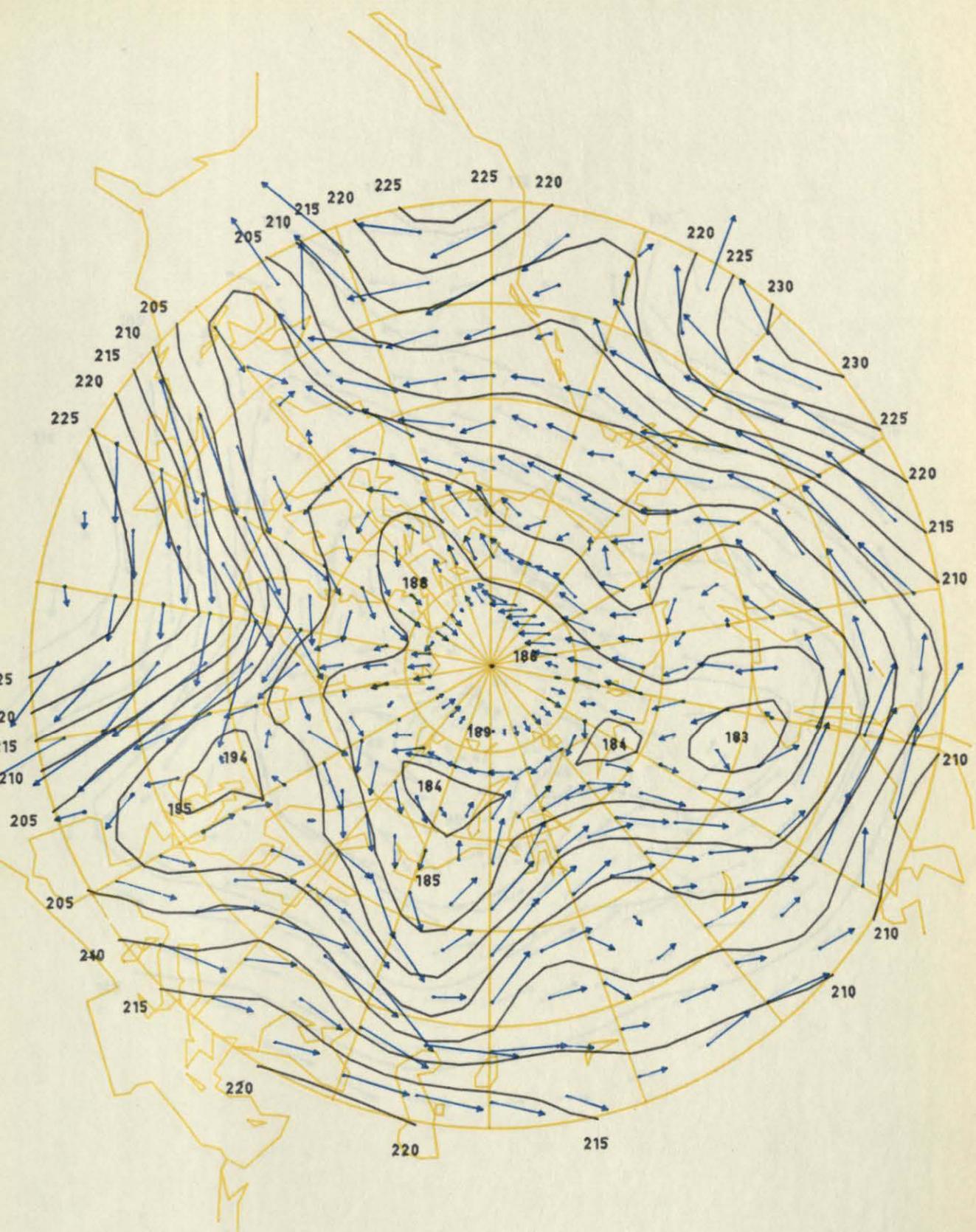


Abb. 4.

P [MB] 11300 M

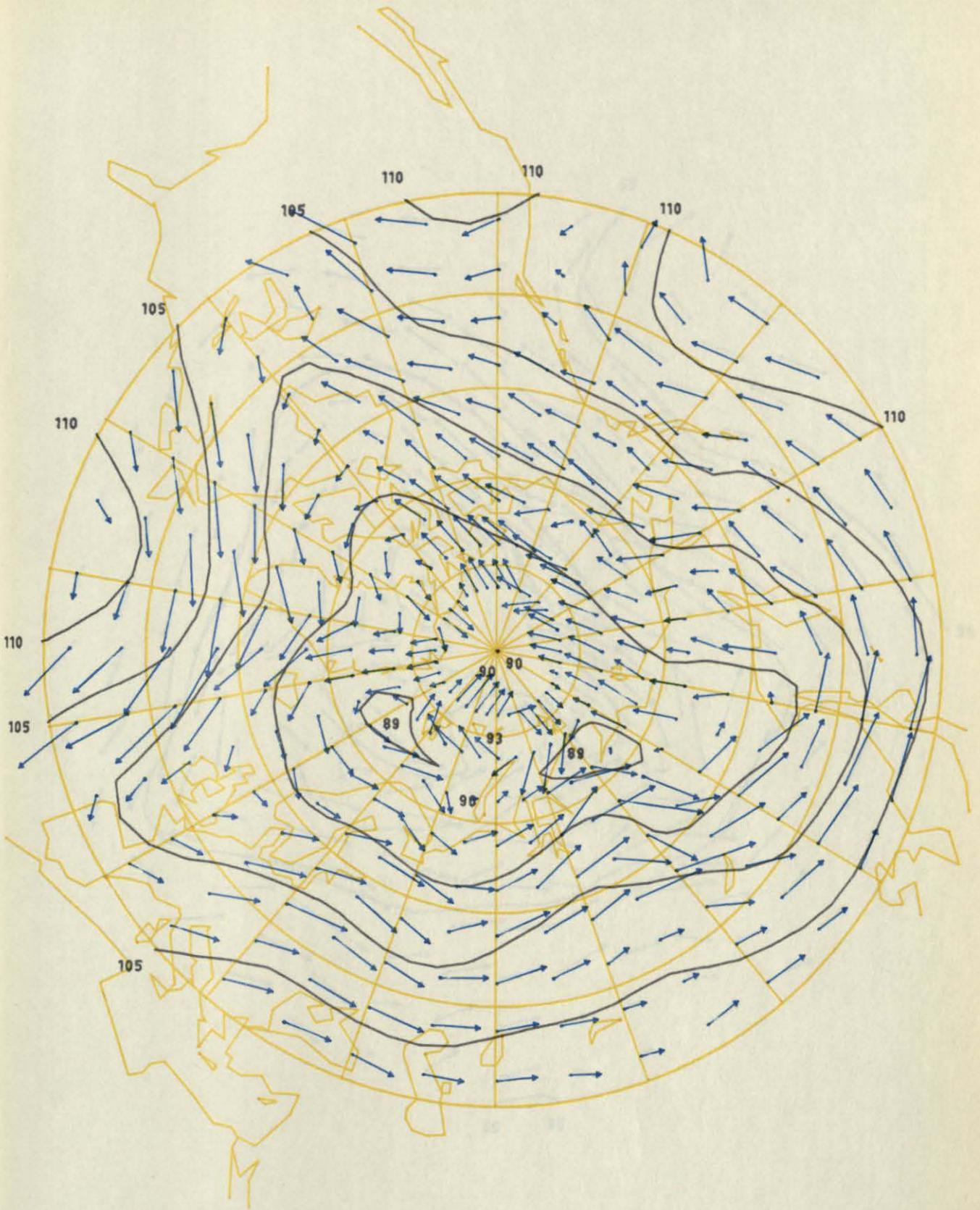


Abb. 5.

P [MB] 15700 M

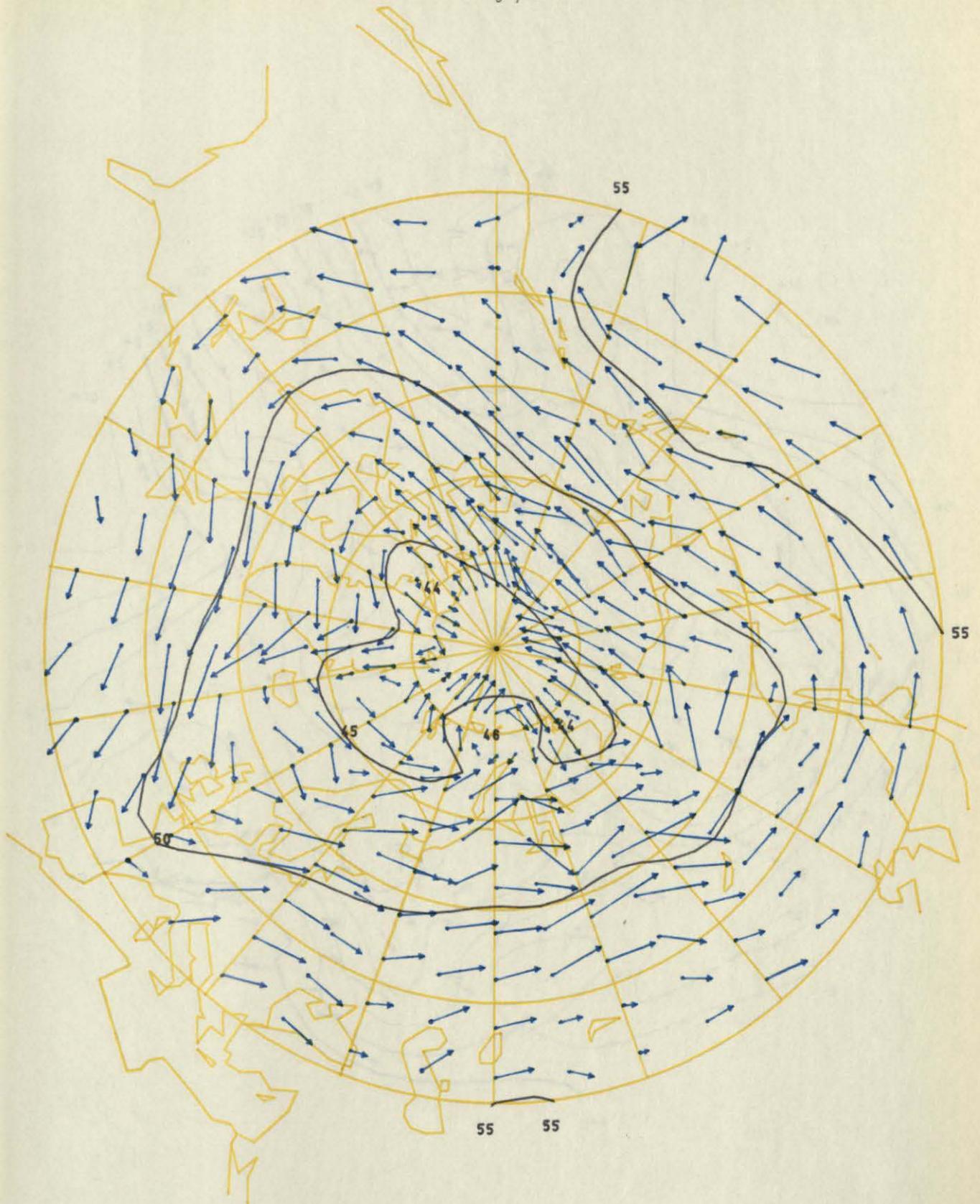


Abb. 6.

P [MB] 20000 M

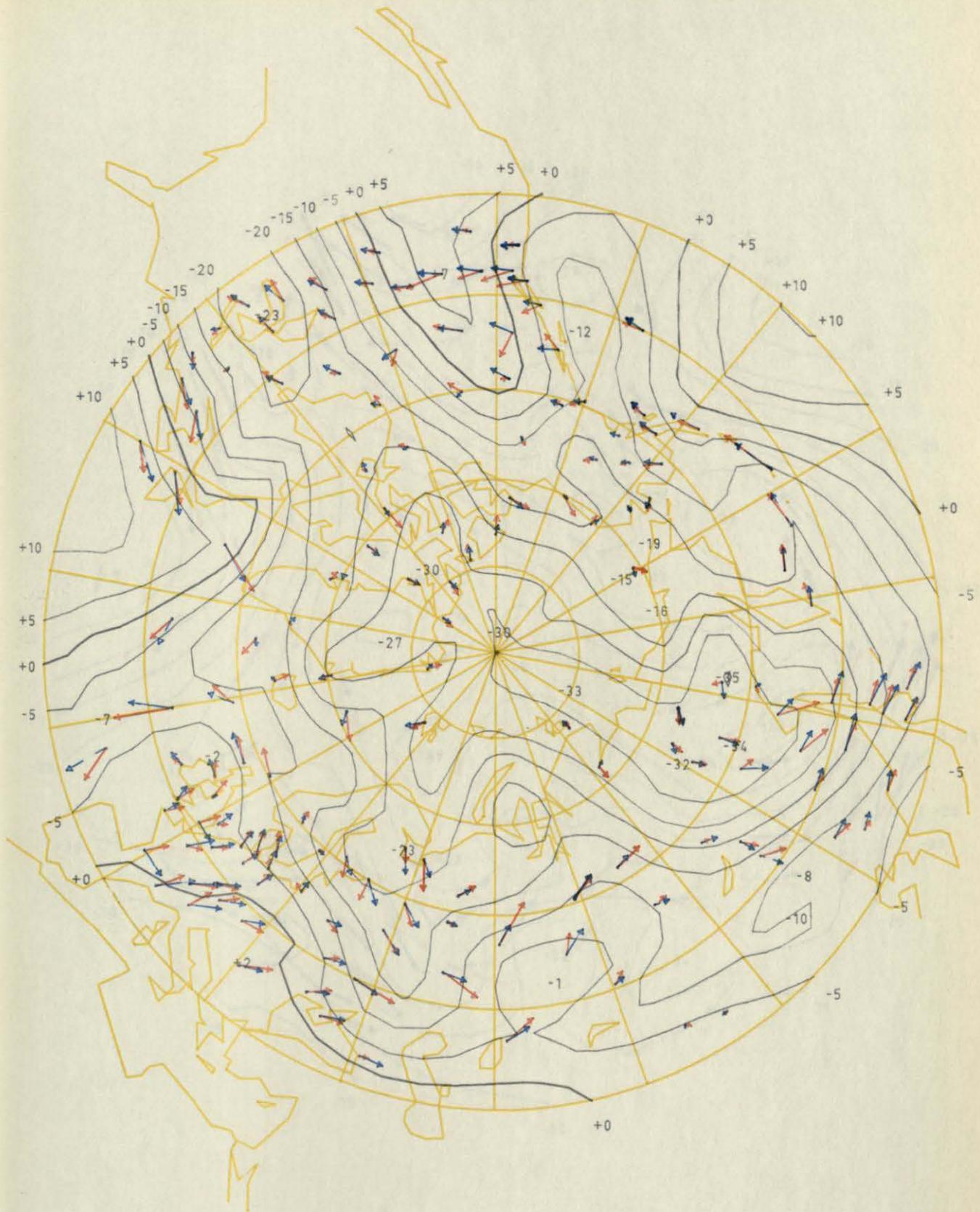


Abb. 7.

T [°C] 1800 M HOEHE

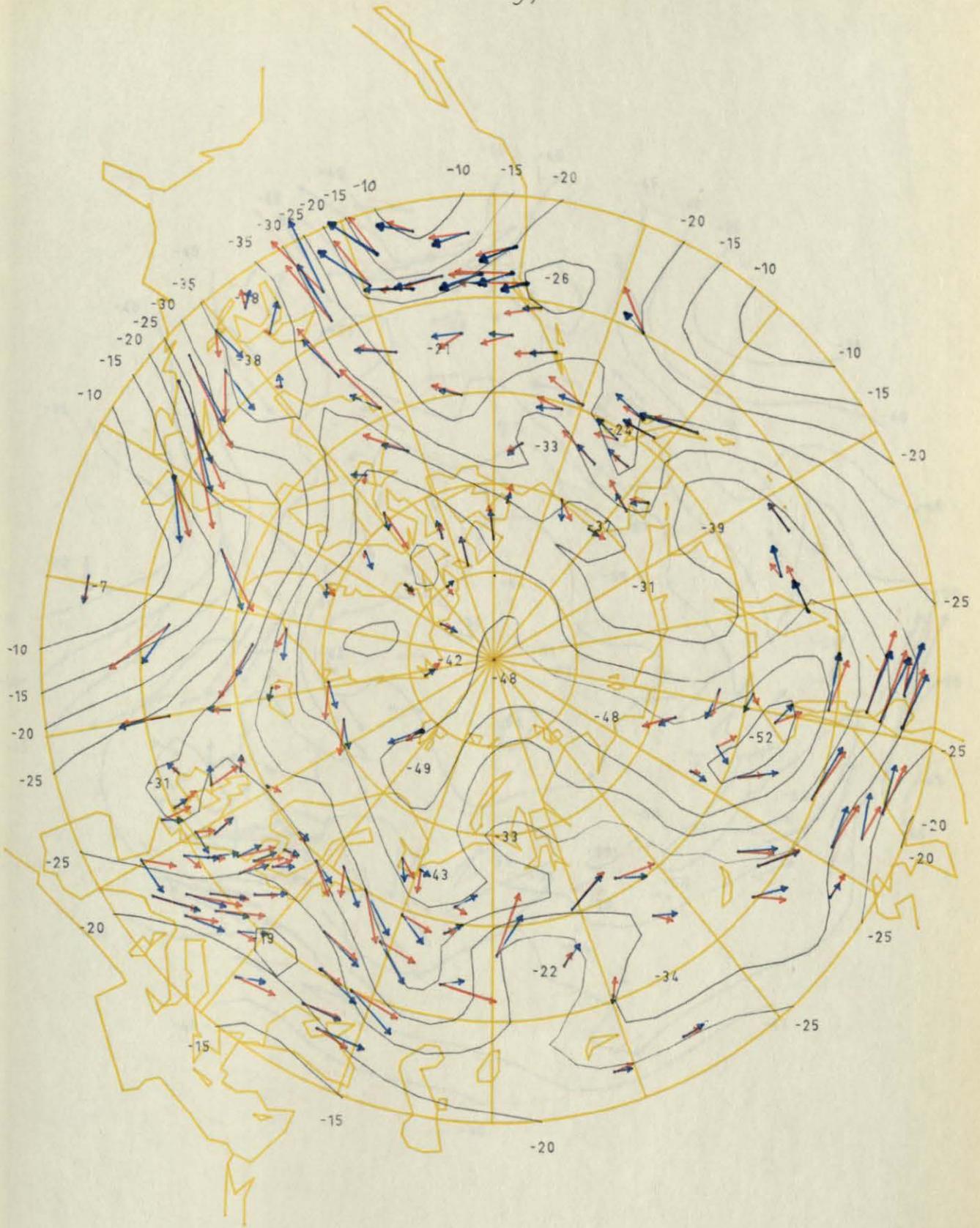


Abb. 8.

T [°C] 5300 M HOEHE

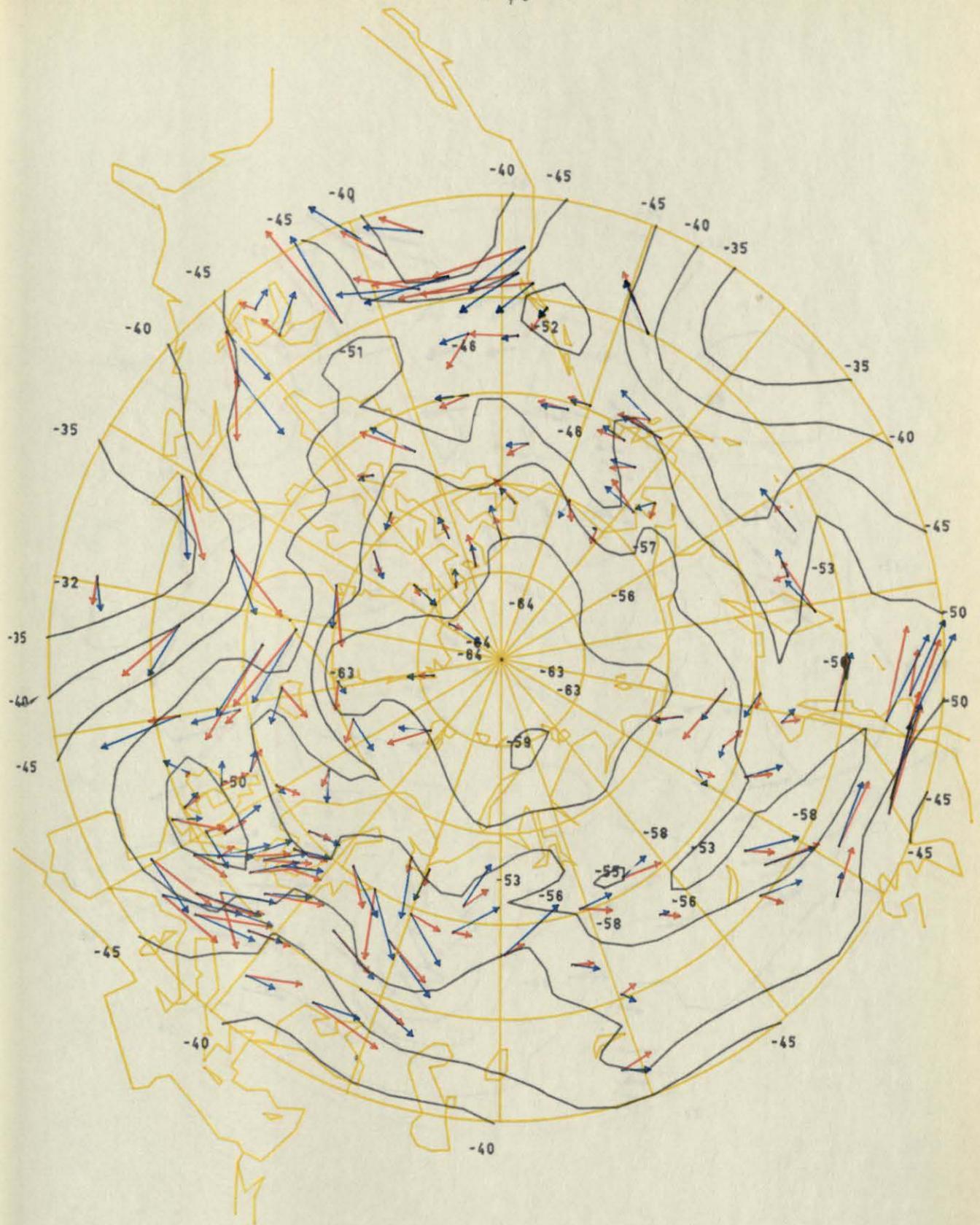


Abb. 9.

T [°C] 8700 M

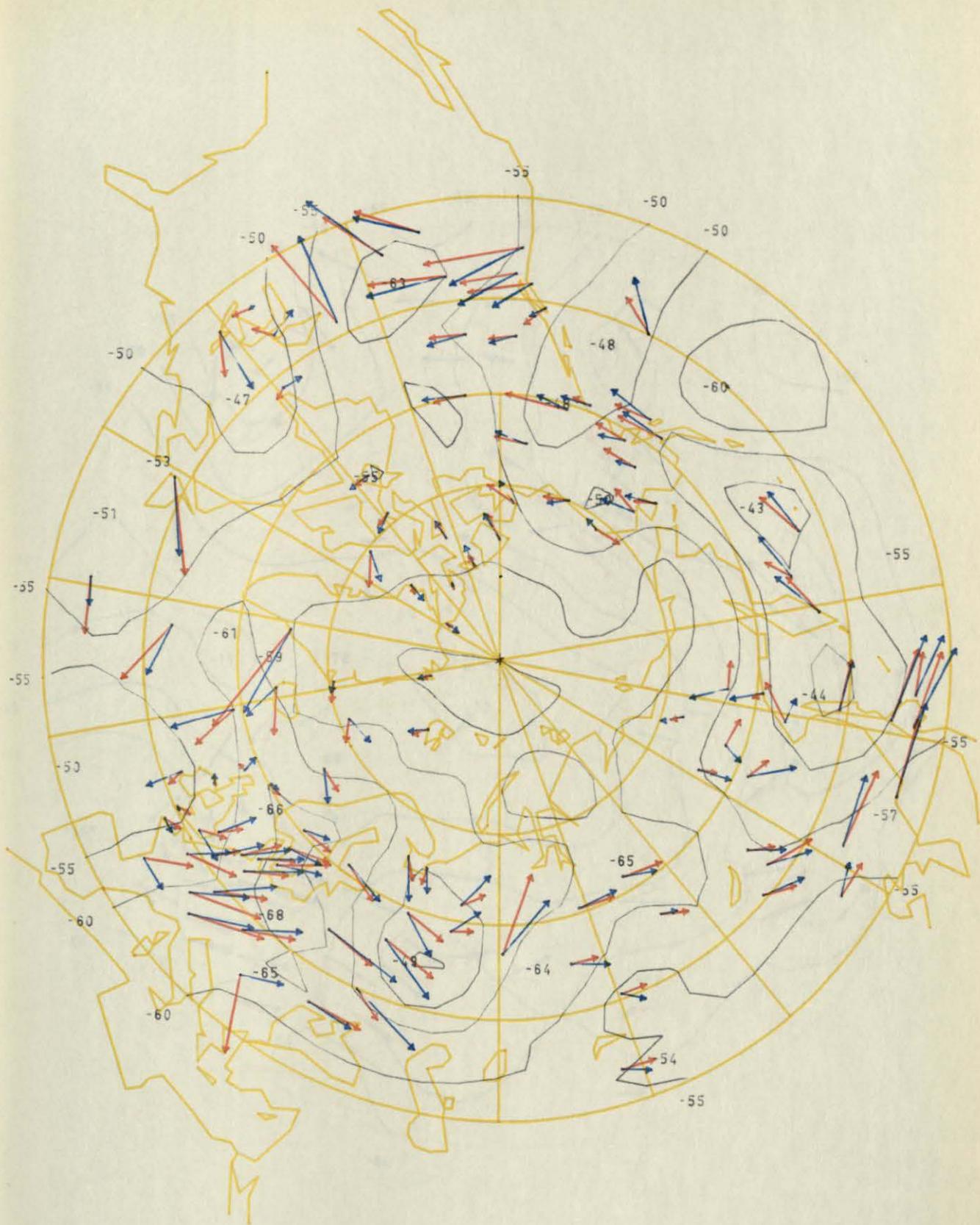


Abb. 10.

T [°C] 11300 M

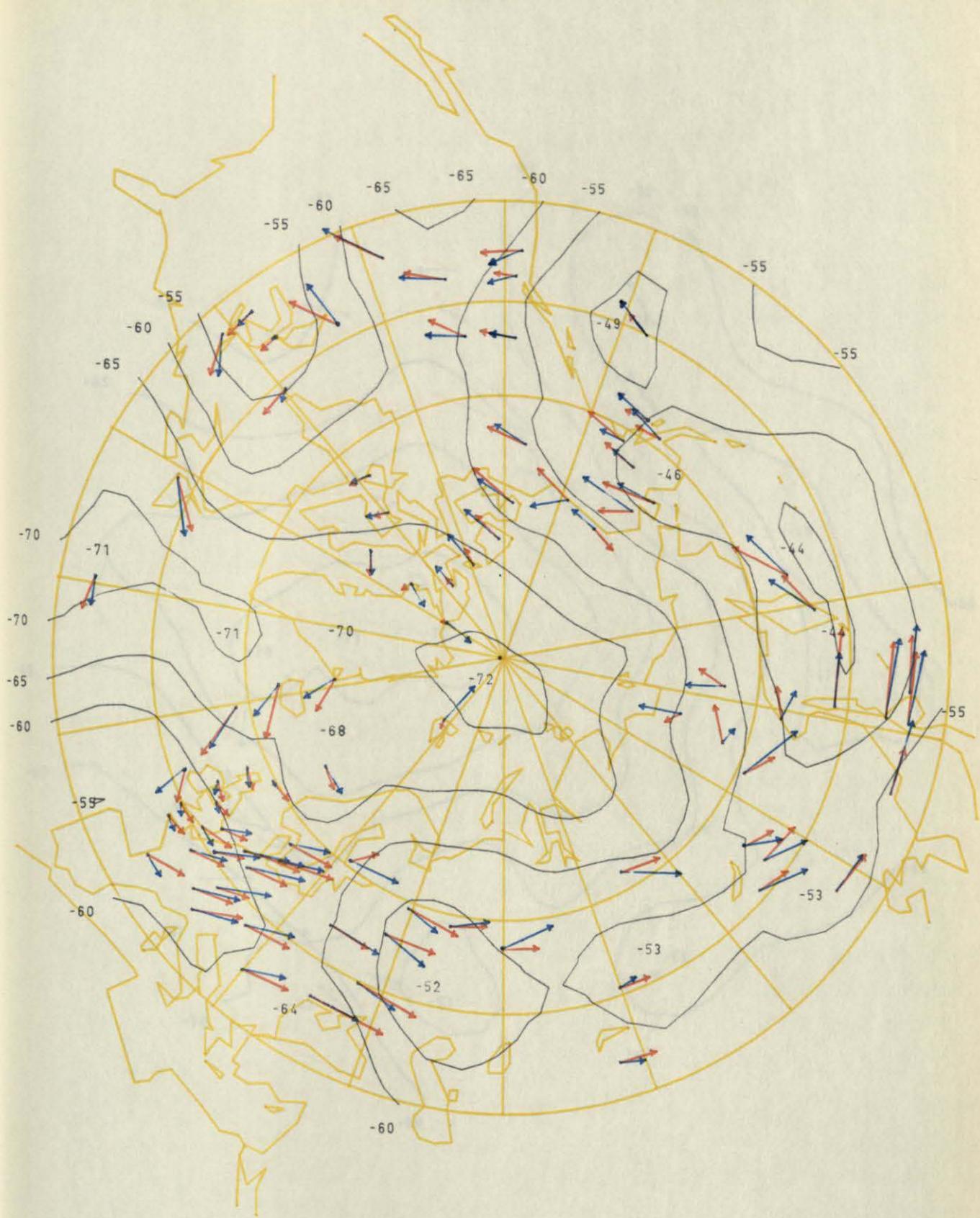


Abb. 11.

T [°C] 15700 M

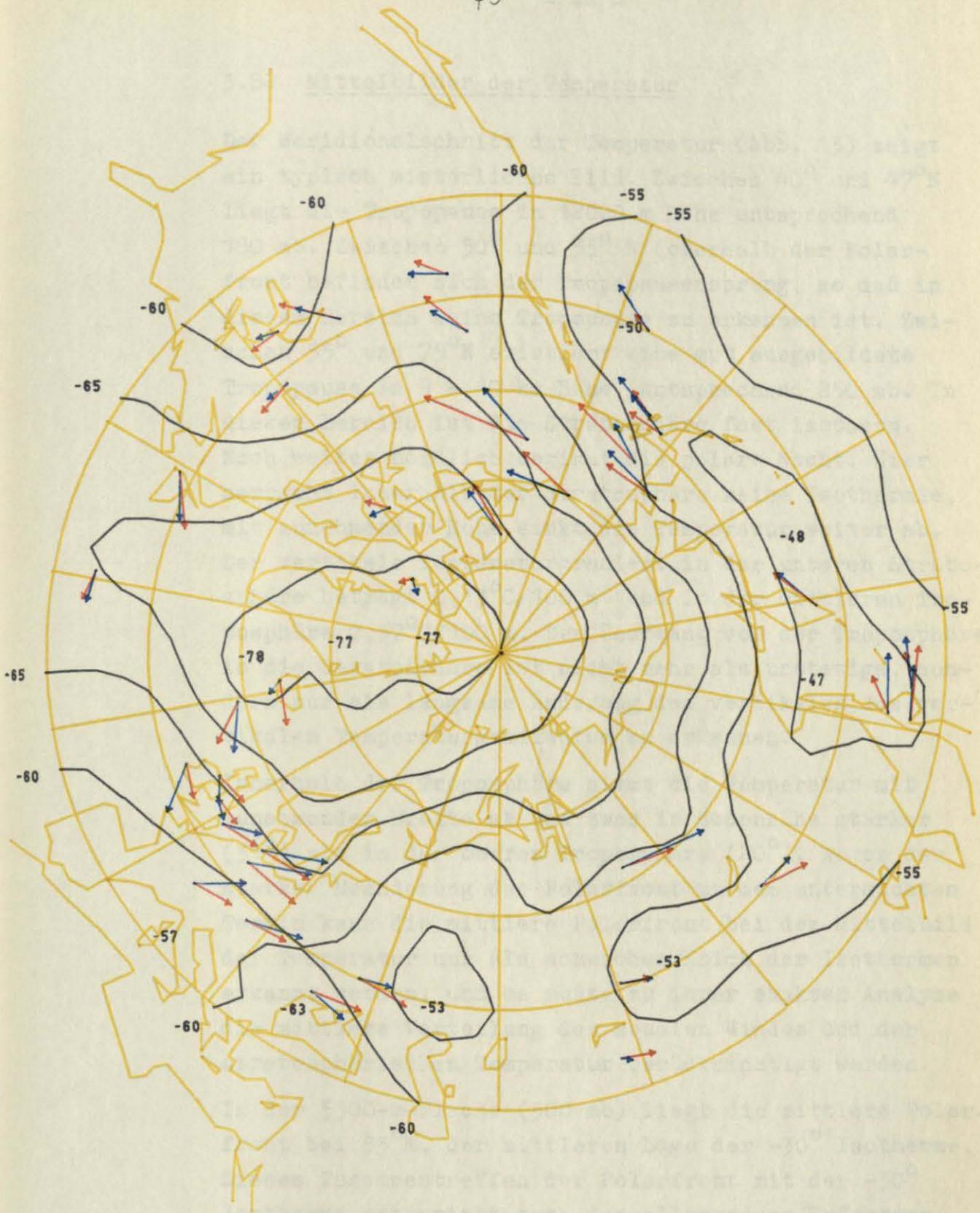


Abb. 12.

T [°C] 20000 M

### 3.82 Mittelbilder der Temperatur

Der Meridionalschnitt der Temperatur (Abb. 13) zeigt ein typisch winterliches Bild. Zwischen  $40^{\circ}$  und  $47^{\circ}\text{N}$  liegt die Tropopause in 12000 m Höhe entsprechend 180 mb. Zwischen  $50^{\circ}$  und  $55^{\circ}\text{N}$  (oberhalb der Polarfront befindet sich der Tropopausensprung, so daß in diesem Bereich keine Tropopause zu erkennen ist. Zwischen  $55^{\circ}$  und  $75^{\circ}\text{N}$  existiert eine gut ausgebildete Tropopause in 9 - 10 km Höhe, entsprechend 250 mb. In diesem Bereich ist die Stratosphäre fast isotherm. Noch weiter nördlich beginnt die polare Nacht. Hier herrscht innerhalb der Stratosphäre keine Isothermie, mit zunehmender Höhe sinkt die Temperatur weiter ab. Der vertikale Temperaturgradient in der unteren Stratosphäre beträgt  $0,13^{\circ}\text{C}/100\text{ m}$  und in der mittleren Troposphäre  $0,57^{\circ}\text{C}/100\text{ m}$ . Der Übergang von der Troposphäre in die Stratosphäre ist nicht mehr als unstetige, sondern nur als langsame Änderung des vertikalen des vertikalen Temperaturgradienten zu erkennen.

Innerhalb der Troposphäre nimmt die Temperatur mit zunehmender Breite ab und zwar in Bodennähe stärker ( $31^{\circ}$ ) als in der oberen Troposphäre ( $20^{\circ}$ ). Wegen der starken Meandering der Polarfront zu dem untersuchten Termin kann die mittlere Polarfront bei dem Mittelbild der Temperatur nur als schwacher Knick der Isothermen erkannt werden, und es mußte zu ihrer exakten Analyse die mittlere Verteilung des zonalen Windes und der stratosphärischen Temperatur berücksichtigt werden.

In der 5300-m-Fläche (500 mb) liegt die mittlere Polarfront bei  $53^{\circ}\text{N}$ , der mittleren Lage der  $-30^{\circ}$  Isotherme. Dieses Zusammentreffen der Polarfront mit der  $-30^{\circ}$  Isotherme entspricht auch der allgemeinen Erfahrung im mittleren Winter bei synoptischen Analysen.

In der Stratosphäre findet man oberhalb der mittleren Polarfront eine hohe isotherme Schicht. Hier treten

auch die wärmsten Temperaturen der Stratosphäre auf ( $-54^{\circ}\text{C}$ ); nördlich und südlich davon nehmen die Temperaturen mit der Breite ab. In der oberen Stratosphäre und in den höheren Breiten macht sich der stratosphärische Winter mit Temperaturen unter  $-75^{\circ}$  bemerkbar.

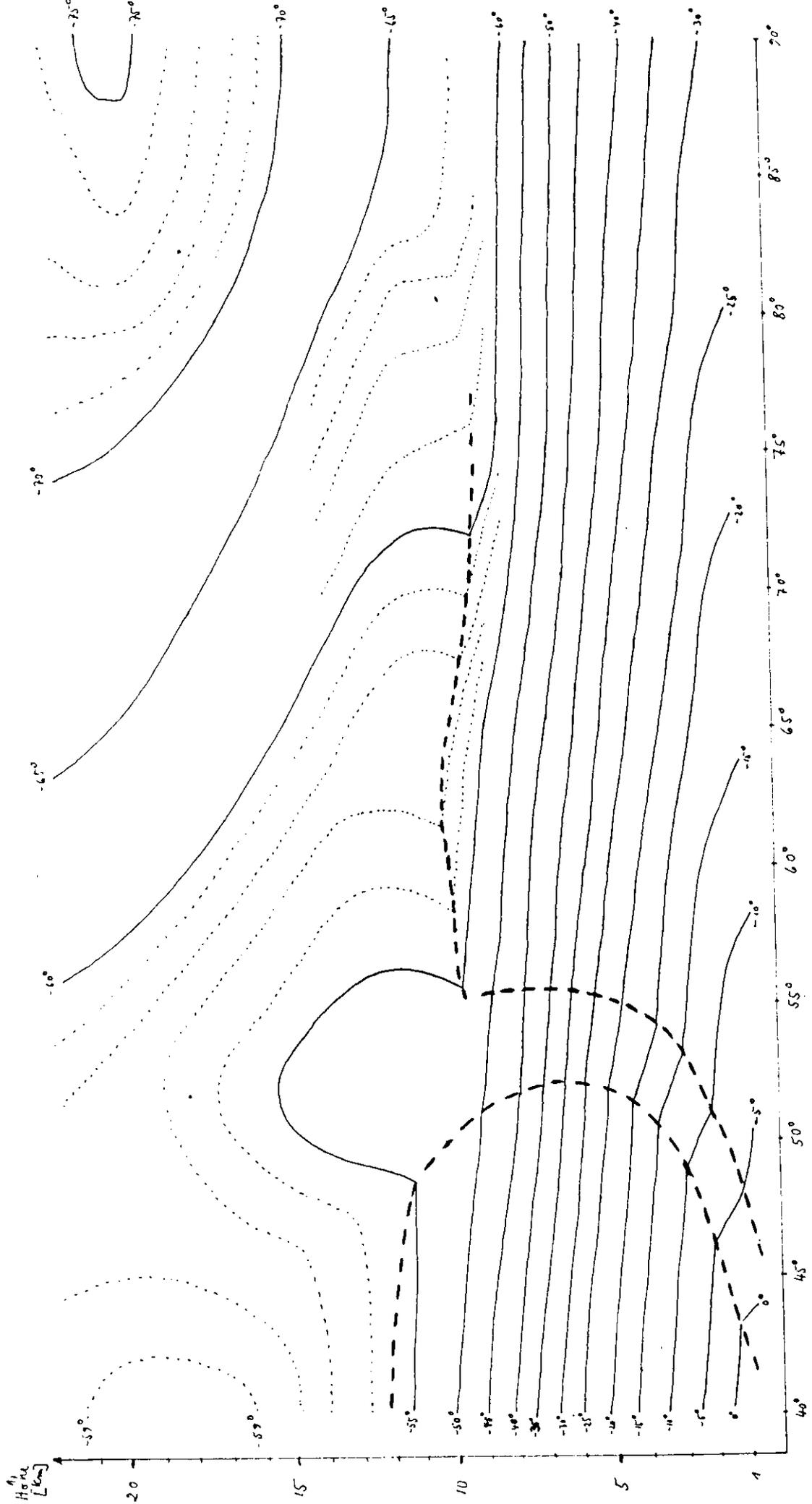


Abb. 13. MERIDIONALSCHNITT DER TEMPERATUR

### 3.83 Mittelbild des zonalen Windes

Auch der Meridionalschnitt des mittleren zonalen Windes  $u_0(\varphi, z)$  gibt das typische winterliche Bild wieder. (Abb. Südlich der mittleren Polarfront bei  $47^\circ\text{N}$  unterhalb der Tropopause bei 10 000 m Höhe liegt das mittlere Starkwindband, das wegen der starken Meandering an diesem Tage nur schwach (mit etwa 26 m/sec) ausgeprägt ist. Die Einzelwerte im Jet betragen dagegen bis zu 70 m/sec.

An dieser Stelle muß noch darauf hingewiesen werden, daß in der Atmosphäre zwei Jet-Ströme existieren, der subtropische und der polare Jet, von denen der subtropische im allgemeinen der Stärkere ist. Im Winter liegt der subtropische Jet im Mittel südlich  $40^\circ\text{N}$ , so daß er bei dieser Untersuchung nicht erfaßt werden konnte. In einer Arbeit von DEFANT (1963) wurde für diesen Termin (12.12.57 00z) die Lage des subtropischen Jets ermittelt. Er liegt im Mittel bei  $29^\circ\text{N}$  und hat eine Stärke von ca. 40 m/sec. Für das hier betrachtete Gebiet nördlich  $40^\circ\text{N}$  hat dieser Jet in den Rücken noch Bedeutung, da einige Meander weit nach Norden reichen.

Nördlich  $60^\circ\text{N}$  findet man in der unteren Troposphäre einen schwachen Ostwindgürtel von maximal 6 m/sec, der sich durch die kalte polare Antizyklone am Boden gebildet hat.

Weiterhin fällt noch eine Zunahme des Westwindes in der höheren Stratosphäre auf und zwar bei  $57^\circ\text{N}$  eine Zunahme auf 26 m/sec und bei  $85^\circ\text{N}$  auf 15 m/sec.

Nördlich des mittleren Polarjets ( $55^\circ\text{N}$ ) ist auf Grund der thermischen Windgleichung für die zonalen Mittel in der Stratosphäre eine Zunahme des mittleren zonalen Windes mit der Höhe zu erwarten, da in diesem Bereich ein negativer mittlerer horizontaler Temperaturgradient besteht. Südlich von  $55^\circ\text{N}$  ist der mittlere horizontale Temperaturgradient in der Stratosphäre positiv, was nach der thermischen Windgleichung zu einem negativen vertikalen Windgradienten führt. Man findet also eine gute Konsistenz zwi-

schen den Verteilungen der mittleren Temperatur und des mittleren zonalen Windes.

Bei der Interpretation des zweiten Maximums bei  $85^{\circ}\text{N}$  sollte man vorsichtig sein, da in diesen Breiten nur wenig Radiosonden die großen Höhen erreichen.

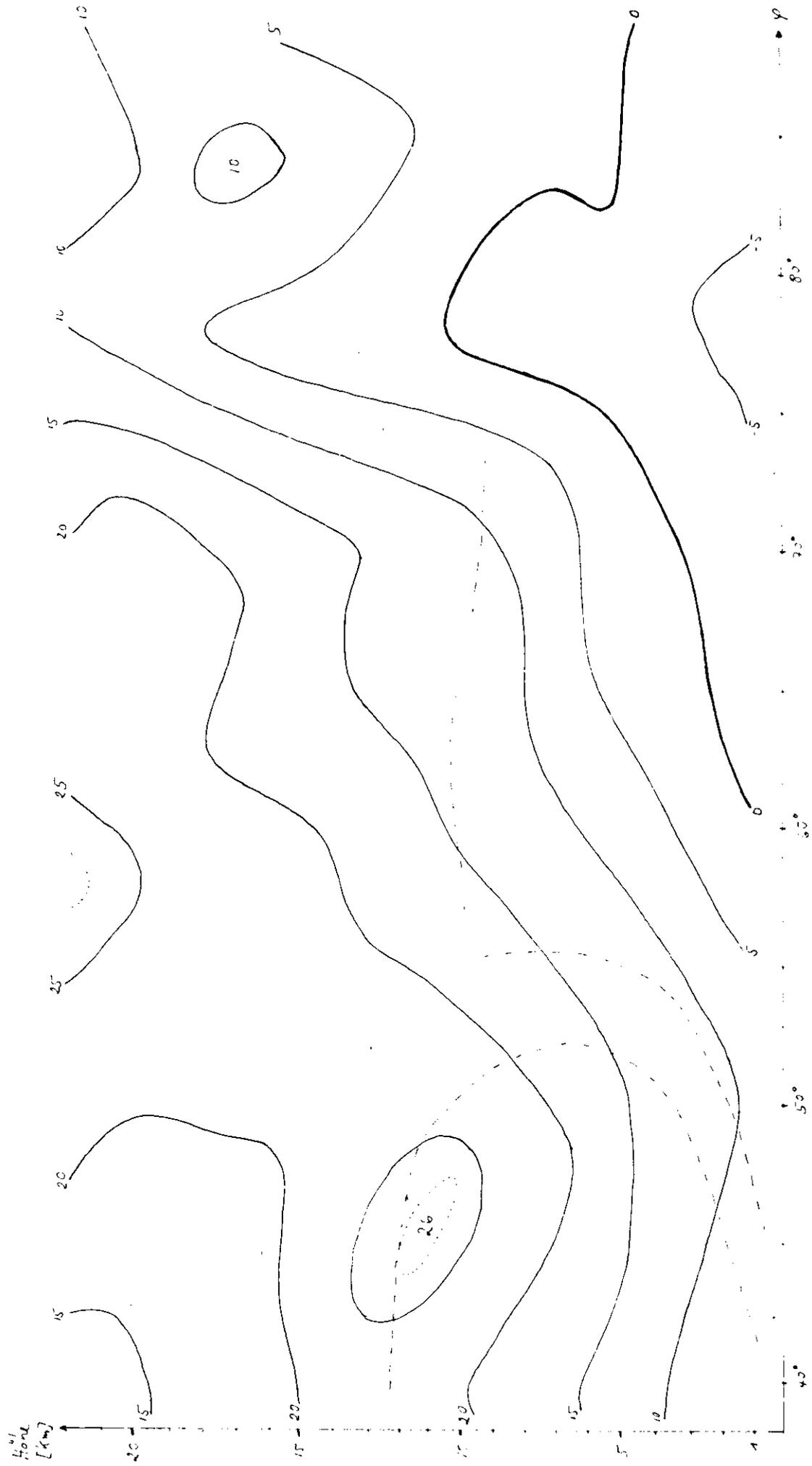


Abb. 14. MERIDIONALSCHNITT DES MITTLEREN ZONALEN WINDES  $u_0(\varphi, z)$

### 3.84 Vergleich der berechneten mit den gemessenen Winden

In den Horizontalschnitten des Druckes (Abb. 1 - 6) werden die berechneten horizontalen Winde als Pfeile eingetragen, und zwar beträgt die Geschwindigkeit in m/sec das Dreifache der Länge der Pfeile in mm.

In den Horizontalschnitten der Temperatur (Abb. 7 - 12) werden an den Radiosondenstationen, an denen Winde gemessen wurden, zum Vergleich die gemessenen und die berechneten Winde als Pfeile eingetragen. Blaue Pfeile stellen die berechneten Winde und die roten Pfeile die gemessenen Winde dar. Ein Vergleich dieser beiden Vektorfelder ergibt im allgemeinen eine ausreichende Übereinstimmung.

Bei der Handanalyse der Höhe wurden die Winde, besonders der einzeln liegenden Stationen, berücksichtigt, so daß man zwischen gemessenen und berechneten Winden keine großen Unterschiede erwarten darf. Bei bisherigen Rechnungen führte das Fehlen eines Reibungsgliedes in den Bewegungsgleichungen zu Beträgen bei den berechneten Winden, die viel größer als die gemessenen Winde waren; das traf besonders in Bodennähe und im Jet-Niveau zu.

Eine solche Übertreibung der Windstärken findet bei dieser Arbeit nicht statt, wenn man von den Windgeschwindigkeiten in Polnähe absieht, die durch die Abweichung des polaren Zyklonenzentrums vom geographischen Nordpol verfälscht werden. Die Übereinstimmung der Beträge der Geschwindigkeit ist wahrscheinlich der glättenden Wirkung der Fourieranalyse zuzuschreiben, da die größte Wellenzahl 11 noch nicht imstande ist, den im allgemeinen kleinräumigen Jet-Kern wiederzugeben.

Nur in den Tiefdruckgebieten, in den man kleine Geschwindigkeiten erwartet, ergeben sich Unterschiede zwischen berechneten und gemessenen Werten. Bei den berechneten Werten ergeben sich besonders in der oberen Troposphäre

innerhalb eines großen Bereiches der Tröge und Zyklonen Ost-Komponenten des Windes und zwar auch auf der Südseite der Tiefdruckzentren, was im Gegensatz zu der Anschauung steht.

Diese Ostwinde entstehen wahrscheinlich aus einem systematischen Fehler, der aus der Verbindung der Störungsrechnung mit der Annahme der Reibungsfreiheit hervorgerufen wird:

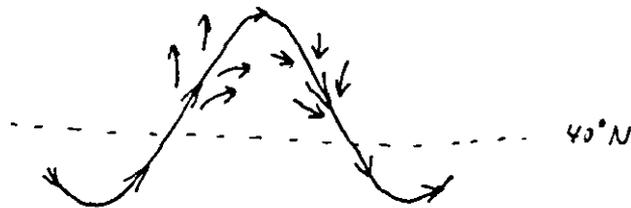
Für die Berechnung des mittleren zonalen Windes ist sicherlich die Annahme der Reibungsfreiheit berechtigt, da hierbei nur geringe Gradienten des Windes auftreten. Bei den Berechnungen der Fourierkoeffizienten aus den Störungsgleichungen erster Ordnung dürften aber besonders im Jet-Niveau die Reibungskräfte wegen der auftretenden starken Windgradienten nicht mehr vernachlässigt werden. Man erhält daher vergrößerte Fourierkoeffizienten. Die Gitterwerte des zonalen Windes  $u$  setzen sich aus den beiden Störungsgrößen nullter und erster Ordnung  $u_0$  und  $u_1$  zusammen:  $u = u_0 + u_1$ . Im Tiefdruckzentrum ist  $u = 0$ , d.h., da  $u_0$  im Jet-Niveau groß ist, muß  $u_0 = -u_1$  sein.

Bei der hier benutzten Methode wurde  $u_0$  etwa richtig, der Wert der ersten Störung  $u_1$  jedoch absolut genommen zu groß berechnet, und da  $u_1$  im Tiefdruckzentrum negativ ist, überwiegt bei der Summe von  $u_0$  und  $u_1$  das negative Vorzeichen.

Wenn in den Tiefdruckgebieten, in denen  $u_1$  ein Minimum annimmt,  $u_1$  absolut zu groß ist, so muß man an den Stellen, an denen  $u_1$  ein Maximum annimmt, etwa im Jet, auch zu große Werte erwarten. Jedoch fällt es an solchen Stellen mit meridionalen Komponenten von 50 m/sec kaum auf, ob die zonale Komponente 15 oder 20 m/sec beträgt, während es sehr auffällt, wenn statt 2 m/sec Westwind ein Ostwind von 3 m/sec errechnet wird.

### 3.85 Horizontales Windfeld

Im allgemeinen scheinen die Winde die geostrophische Balance zu erfüllen, besonders in der Stratosphäre. In den Gebieten mit starkem Wind, etwa in der Nähe der Jet-Achse, findet man systematische Abweichungen von der geostrophischen Balance. Auf der Westseite der Hochdruckrücken (besonders deutlich über dem Atlantik) strömt die Luft über die Isobaren hinweg in das Hochdruckgebiet hinein und auf der Ostseite heraus. Außerdem strömt die Luft auf der Westseite der Zyklonen aus den Tiefdruckgebieten heraus und auf der Westseite hinein.



Zwischen den Hoch- und Tiefdruckgebieten entsteht dadurch in der Gegend des stärksten Windes auf der Westseite der Zyklone eine Richtungskonvergenz und auf der Ostseite der Zyklone eine Richtungsdivergenz. Zur Erhaltung der Max.-Kontinuität (die horizontalen Ableitungen in der Kontinuitätsgleichung kompensieren sich im allgemeinen allein), nimmt auf der Westseite der Zyklone der Wind mit abnehmender Breite zu und auf der Ostseite mit zunehmender Breite ab. Dadurch ergibt sich, daß beim Jet an der nördlichen Umbiegungsstelle die schwächsten Winde auftreten, auf dem Weg nach Süden nimmt seine Geschwindigkeit zu. Die großen Meander (nur an solchen sind Untersuchungen möglich) liegen nicht vollständig in dem Bereich nördlich  $40^{\circ}N$ , so daß die südliche Umbiegungsstelle hier nicht untersucht werden kann. Aus anderen Arbeiten ist aber bekannt, daß der Jet an der südlichen Umbiegungsstelle wie an der nördlichen relativ geringe Geschwindigkeiten aufweist. Nach Durchlaufen des südlichsten Punktes nimmt daher die Ge-

schwindigkeit zunächst wieder zu und tritt etwa mit maximaler Geschwindigkeit in unser Bild. Von hier ab nimmt die Geschwindigkeit bei seinem Weg nach Norden wieder ab. Dieses Verhalten erkennt man bei den Wellen über Amerika, dem Atlantik und über Europa sehr deutlich; über Asien und dem Pazifik sind die Amplituden der Isobaren nicht so groß, und damit ist dieses Verhalten nicht mehr so klar.

### 3. 86 Vertikalwindfeld

In der Troposphäre besteht eine gute Übereinstimmung der Vertikalgeschwindigkeitsverteilung mit den Windsystemen an Fronten, wie sie BERGERON 1937 entwickelt hat. Die beiden wichtigsten Frontarten, die BERGERON betrachtete, sind die Warmfront und die Kaltfront zweiter Art.

Bei der Warmfront findet man fast im ganzen Bereich ober-

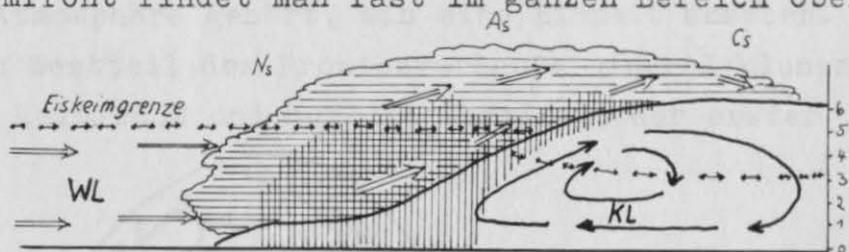
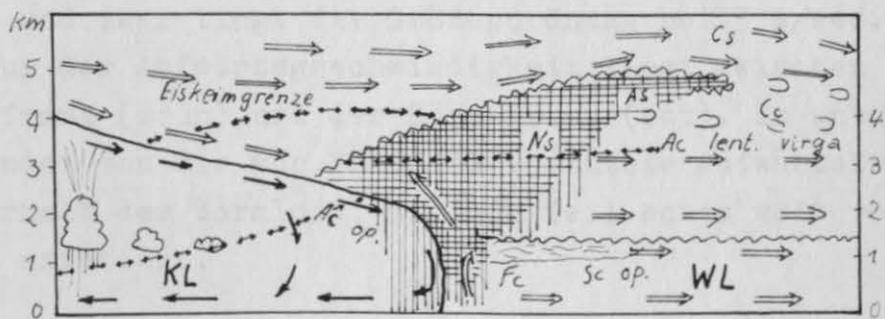


Abb. 15.

und unterhalb der Front bis in 7 km Höhe Aufwärtsbewegung der Luft. Nur an der vordersten Spitze der Front herrscht Absinken vor, doch hängt diese Absinkbewegung wahrscheinlich mit der Rückseite des vorgelagerten Tiefs zusammen.

Bei der Kaltfront zweiter Art, die in der Atmosphäre die häufigste Kaltfront ist, herrscht hinter der Bodenkaltfront



Richtung des Fortschreitens →

Abb. 16.

absinkende Bewegung vor, nur in einem schmalen Bereich vor der Front gibt es aufsteigende Luft. Diesen Bereich wird man bei den Berechnungen mit langen Wellen kaum verifizieren können.

Die Modelle von BERGERON reichen nur bis zu einer Höhe von 6 km, da vor 1940 die Radiosonden in größeren Höhen noch zu ungenaue Meßwerte abgaben. Heute wissen wir, daß die Fronten bis an die Tropopause reichen. Diese Modelle waren hauptsächlich für Fronten gedacht, die zu einer (jungen) Zyklone mit offenem Warmluftsektor gehören. In dieser Arbeit konnten die einzelnen Zyklonen einer Zyklonenfamilie nicht untersucht werden, da die angewandte Methode zu grob war. Es wurden nur die langen Wellen der freien Atmosphäre beachtet. Daher muß man bei dem Vergleich der Vertikalgeschwindigkeitsverteilung mit BERGERONS Modellen jede Zyklonenfamilie, die zu einer langen Welle der freien Atmosphäre gehört, als eine Einheit ansehen. Faßt man den Westteil des Frontenverlaufs einer Zyklonenfamilie als Kaltfront und nur die Warmfront der ersten



Zyklone als Warmfront auf, so findet man eine gute Übereinstimmung der Modelle BERGERONS mit den Rechenergebnissen dieser Arbeit.

In den Horizontalabschnitten der Vertikalgeschwindigkeit (Abb. 19 - 24) ist regelmäßig bis in 8700 m Höhe zu sehen, daß an der Warmfront vorwiegend Aufwärtsgeschwindigkeit herrscht, und zwar liegt die Größenordnung bei 3 m/sec. Das Maximum der Aufwärtsgeschwindigkeit liegt zwischen der Bodenfront (grün) und der Höhenfront (rot). Im untersten Niveau findet man die von BERGERON vermutete Aufwärtsbewegung innerhalb der Warmluft, die zum Teil schon weit vor der Front existiert.

Die beiden Frontalwellen über Westamerika und Mittelrußland sind Beispiele dafür, daß man die beiden Frontalwellen am Boden als eine einzige Welle auffassen muß. Bei der Berechnung der Vertikalgeschwindigkeit wurden nur lange Wellen mit einer minimalen Wellenlänge von  $35^\circ$  betrachtet. Daher können die beiden kurz aufeinander folgenden Frontalwellen bei diesen Untersuchungen gar nicht in Erscheinung treten. Faßt man beide Wellen als eine einzige auf, so ist die Übereinstimmung mit BERGERONS Modell wieder gegeben.

An den Kaltfronten existiert eine genauso exakte Übereinstimmung zwischen BERGERONS Modell und den Berechnungen dieser Arbeit. Die Gebiete mit absinkender Luft liegen deutlich hinter der Bodenkaltfront, wenn man wieder die beiden kurzen Wellen über Westamerika und Mittelrußland zu einer einzigen Welle zusammenfaßt. Das schmale Gebiet vor der Front mit Aufwärtsbewegung tritt, wie erwartet, nicht in Erscheinung.

In der 8700-m-Fläche (Abb. 21), die von BERGERON noch nicht betrachtet werden konnte, treten Änderungen gegenüber den unteren Niveaus auf. Der Wechsel zwischen Auf- und Abbewegung wird kleinräumiger als in den unteren Niveaus. Auch in den Vertikalschnitten der Fourierkoeffizienten der Vertikalgeschwindigkeit (Anhang I) ist zu erkennen, daß in dieser Höhe die großen Wellenzahlen ein Maximum (über 10 mm/sec bei Wellenzahl 9 und 10, (Abb. 124/129)) aufweisen. So ergeben sich über dem Atlantik in dieser Höhe drei Extrema, während in der unteren Atmosphäre nur zwei existieren, über Nordamerika sind es vier statt drei. Die Bevorzugung der kurzen Wellen hat zur Folge, daß die Vertikalgeschwindigkeitsverteilung nicht mehr so fest an die Fronten gebunden ist. Das ist nicht verwunderlich, da in diesem Niveau bereits der Ausgleich, bzw. die Umkehr des horizontalen Temperaturgradienten beginnt. Jedoch bleibt an den entscheidenden Stellen die Verteilung der unteren Niveaus erhalten. Nur über Ostamerika und auf der Rückseite des ostasiatischen Tiefs erkennt man wesentliche Unter-

schiede zu den unteren Niveaus. Über Ostamerika entsteht ein großes Gebiet mit Aufwind und über Ostasien hat sich das Gebiet mit Absinken weiter westwärts verschoben.

Der Übergang von der Troposphäre in die Stratosphäre ist in den Horizontalschnitten nur ungenügend zu erkennen, da die Höhe der Tropopause entlang eines Breitenkreises eine starke Variation zwischen 6 km und 13 km aufweist. So liegt die 8700-m-Fläche zum Teil in der Troposphäre und zum Teil in der Stratosphäre. Um die Verhältnisse an der Tropopause deutlicher zu machen, werden zwei Vertikalschnitte der Vertikalgeschwindigkeit entlang der Breitenkreise  $50^{\circ}$  und  $55^{\circ}$ N (Abb. 18) gezeigt. Auf der Ordinate wird die Höhe und auf der Abszisse die geographische Länge abgetragen. Die Verteilung der Vertikalgeschwindigkeit wird nicht als Isoplethen sondern als eine Schar von Wellenzügen dargestellt, die in den verschiedenen Höhen die Schwankungen der Vertikalgeschwindigkeit entlang eines Breitenkreises wiedergeben. Die Abweichung jeder einzelnen Wellenlinie von der zugehörigen Höhenlinie gibt an, wie stark die Luft aufsteigt oder absinkt.

Außerdem wird noch der Verlauf der Tropopause entlang des Breitenkreises als dicke Linie abgebildet. Bei der Darstellung der Tropopause muß man bedenken, daß der Übergang von der hohen Tropopause der Tropen und der Subtropen zur Tropopause der gemäßigten Breiten an der Subtropenfront un stetig vor sich geht. Ebenso befindet sich ein Tropopausensprung an der Polarfront. Aus Gründen der Einfachheit wird die Tropopause aber als stetige Linie dargestellt.

Betrachtet man die untere und mittlere Troposphäre für sich, so findet man wie bei den Horizontalschnitten in der vertikalen Verteilung der Vertikalgeschwindigkeit nur sehr geringe Änderungen. Ebenso sieht es innerhalb der Stratosphäre aus: zwischen 13 km und 20 km Höhe liegen die einzelnen Wellen fast vollkommen in Phase, nur die Amplituden nehmen etwas mit der Höhe ab.

Vergleicht man die Wellen der Stratosphäre mit den Wellen der unteren und mittleren Troposphäre, so erkennt man an fast allen infrage kommenden Stellen, daß Absinkbewegung mit Aufsteigbewegung in der Stratosphäre zusammenfällt und umgekehrt. Der Umschlag von Aufsteig- in Absinkbewegung findet ziemlich genau an der Tropopause statt. Dieser Ausgleich ist so stark ausgeprägt, daß es möglich ist, entlang der Tropopause eine Linie mit verschwindender Vertikalgeschwindigkeit (dicke gestrichelte Linie) zu zeichnen. Nur an wenigen Stellen ist diese Linie unterbrochen. Bei dem Vertikalschnitt in  $50^{\circ}\text{N}$  (Abb. 17) befindet sich eine Stelle bei etwa  $60^{\circ}\text{E}$ , und bei dem Vertikalschnitt in  $55^{\circ}\text{N}$  (Abb. 18) gibt es zwei Stellen bei  $70^{\circ}\text{E}$  und  $140^{\circ}\text{E}$ , jedoch sind an diesen Unterbrechungen die Werte der Vertikalgeschwindigkeit nur gering.

Betrachtet man nun wieder die Horizontalschnitte der Vertikalgeschwindigkeit, so findet man die Ergebnisse der Vertikalschnitte auch großräumig bestätigt. Innerhalb der Stratosphäre ändert sich bei der Verteilung der Vertikalgeschwindigkeit nur sehr wenig, nur die Beträge nehmen mit der Höhe ab. In der Stratosphäre dominieren wie in der unteren Troposphäre die längeren Wellen (5 und 6). Es haben sich aber die Vorzeichen der Vertikalgeschwindigkeit gegenüber der unteren Troposphäre umgekehrt; z.B. existiert in der unteren Troposphäre über Ostamerika absinkende und in der Stratosphäre aufsteigende Luft. Ebenso sieht es über Westamerika, dem Ochotskischen Meer und mit umgekehrten Vorzeichen über Mittelamerika und nördlich des Schwarzen Meeres aus. An zwei Stellen ist die Umkehr des Vorzeichens nicht gegeben: in den Gebieten westlich Europas und an der Nordspitze des Urals ( $70^{\circ}\text{N}$ ,  $70^{\circ}\text{E}$ ). Hier gibt es in der 1800-m-Fläche und in der 20000-m-Fläche absinkende bzw. aufsteigende Luft. Dazu betrachte man noch einmal die Vertikalschnitte entlang der Breitenkreise, von denen aber nur das Gebiet westlich Europas geschnitten wird, so daß das andere Gebiet hier nicht weiter unter-

sucht werden kann. Man sieht eindeutig, daß sowohl in der unteren Troposphäre als auch in der Stratosphäre absinkende Bewegung vorherrscht, zwischen 5300 und 8700 m existiert in diesem Gebiet aber Aufwärtsbewegung. Man hat hier also eine zweifache Umkehr des Vorzeichens bei der Vertikalgeschwindigkeit, einmal in 5300 und einmal im Tropopausenniveau bei 9000 m. Bei dem Gebiet am nördlichen Ende des Urals scheint die Verteilung der Vertikalgeschwindigkeit ähnlich zu sein.

Um diesen Unterschied bei der Vertikalverteilung der Vertikalgeschwindigkeit verstehen zu können, muß zuerst untersucht werden, wie die Vertikalgeschwindigkeit entsteht. In der Troposphäre kommt die Vertikalgeschwindigkeit durch das Zusammentreffen von horizontalen Winden unterschiedlicher Richtung an Fronten zustande. Da in der Stratosphäre keine Fronten existieren, muß eine allgemeinere Erklärung für das Entstehen von Vertikalgeschwindigkeiten gefunden werden. Man findet absinkende Bewegung an Stellen, an denen kalte Luft in Gebiete mit höherer Temperatur strömt (entspricht der Kaltfront) und aufsteigende Luft an den Stellen, an denen warme Luft in kalte Regionen transportiert wird (entspricht der Warmfront).

Eine solche Abhängigkeit läßt sich leicht aus den Annahmen ableiten, die in dieser Arbeit zur Lösung des Gleichungssystems gemacht wurden:

Beim Fehlen von nichtadiabatischen Wärmequellen muß, um die Stationarität zu wahren, bei einer horizontalen Strömung über die Isothermen hinweg von tiefer zu hoher Temperatur eine absinkende Bewegung erfolgen.

Da sich zu diesem Termin die horizontalen Winde in ihrer vertikalen Verteilung nur wenig ändern (die Tröge weisen fast keine Änderung ihrer Lage mit der Höhe auf), ist es verständlich, daß sich bei einer Umkehr der horizontalen Temperaturverteilung mit der Höhe (Kap. 3.81) auch die horizontale Verteilung der Vertikalgeschwindigkeit umkehrt,

Wenn dieses Prinzip der Umkehr der Vertikalgeschwindigkeit nicht überall eingehalten wird, so liegt es daran, daß eine der beiden Feststellungen (Temperaturumkehr und Unveränderlichkeit des horizontalen Windfeldes mit der Höhe) nicht erfüllt ist. Bei der Rückseite des Tiefs westlich Spaniens handelt es sich wahrscheinlich um eine mangelhafte Temperaturumkehr. Vergleicht man das Temperaturfeld in 1800 m und in 20000 m, so sieht man, daß dem Temperaturminimum bei 20°W ein Temperaturmaximum in der Höhe bei 10°E entspricht, also liegen diese beiden Extrema nicht genau übereinander. Bei der Vorderseite des Tiefs des Urals hat sich der Wind zwischen 1800 m und 20000 um fast 90° gedreht.

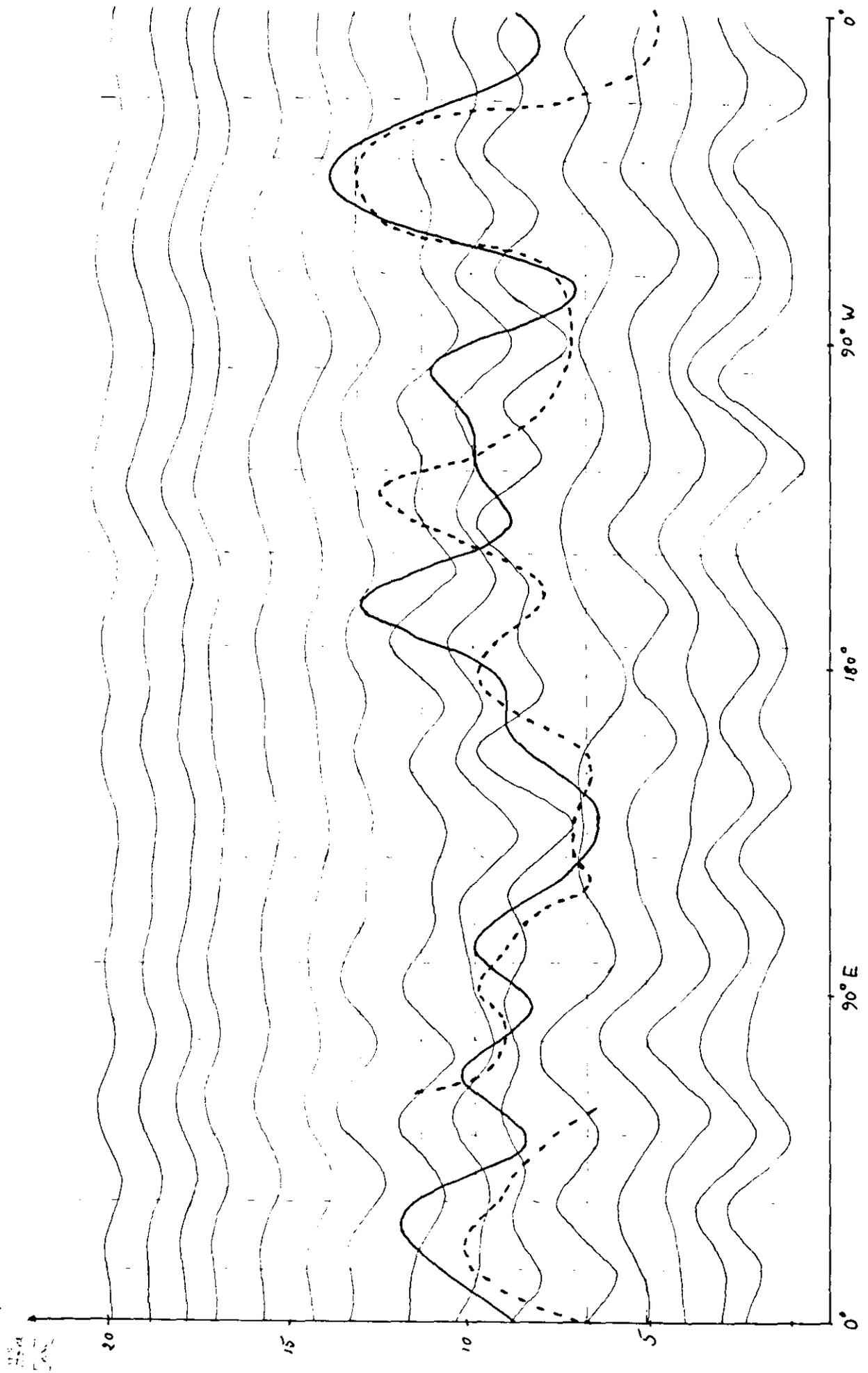


Abb. 17. VERTIKALSCHNITT DER VERTIKALGESCHWINDIGKEIT ENTLANG DES BREITENKREISES 50°N

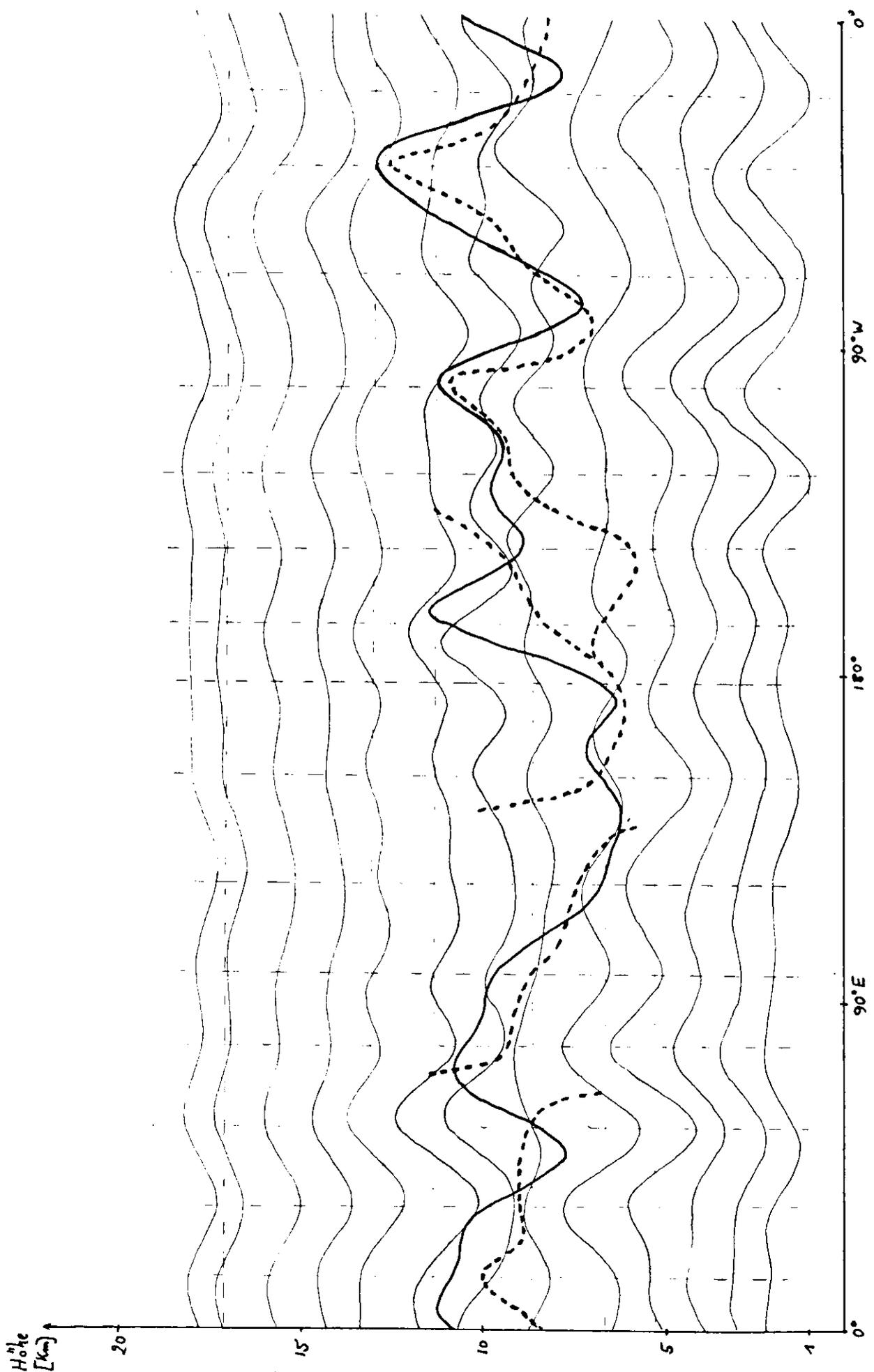


Abb. 18. VERTIKALSCHNITT DER VERTIKALGESCHWINDIGKEIT ENTLANG DES BREITENKREISES 55°N

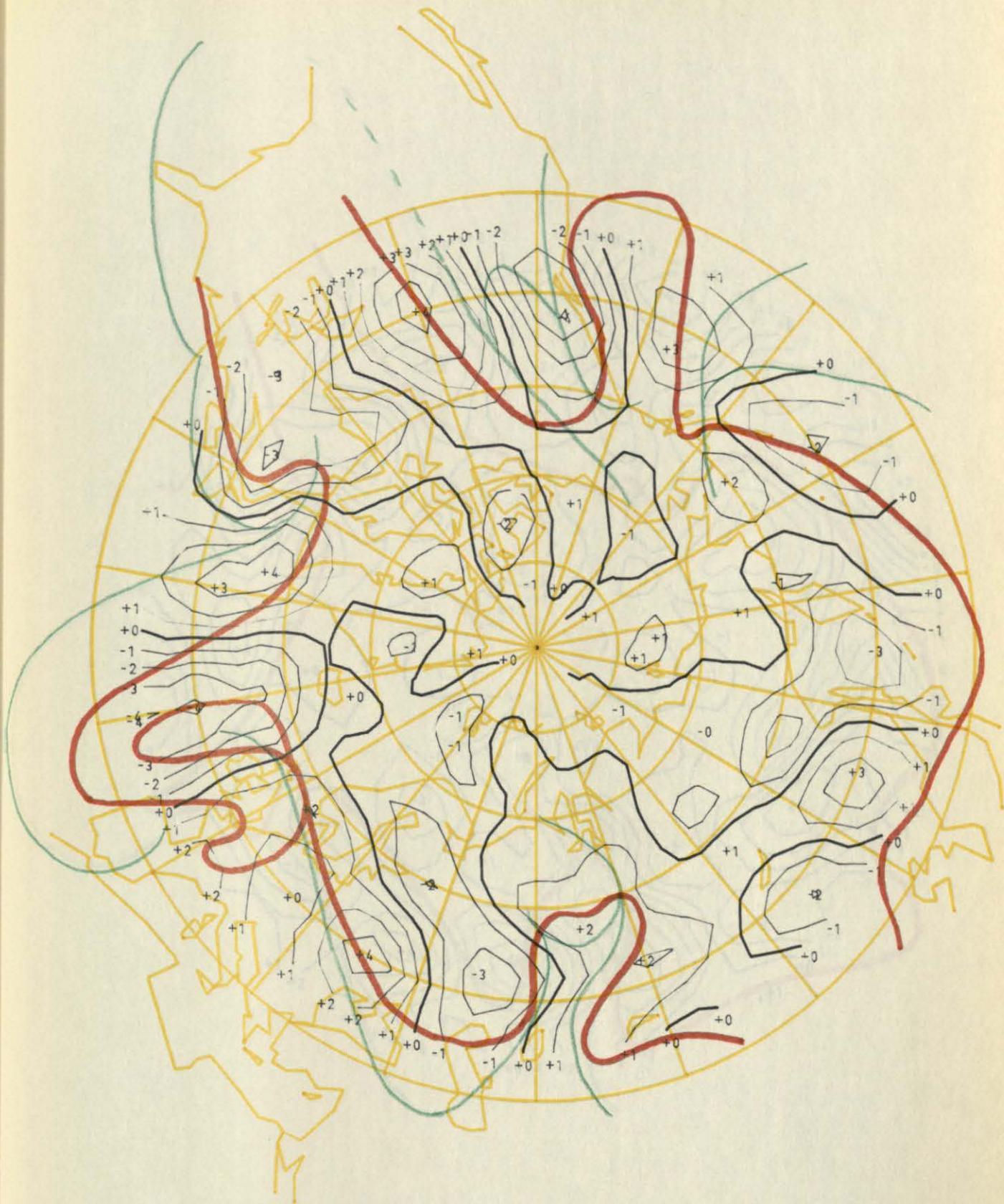


Abb. 19.

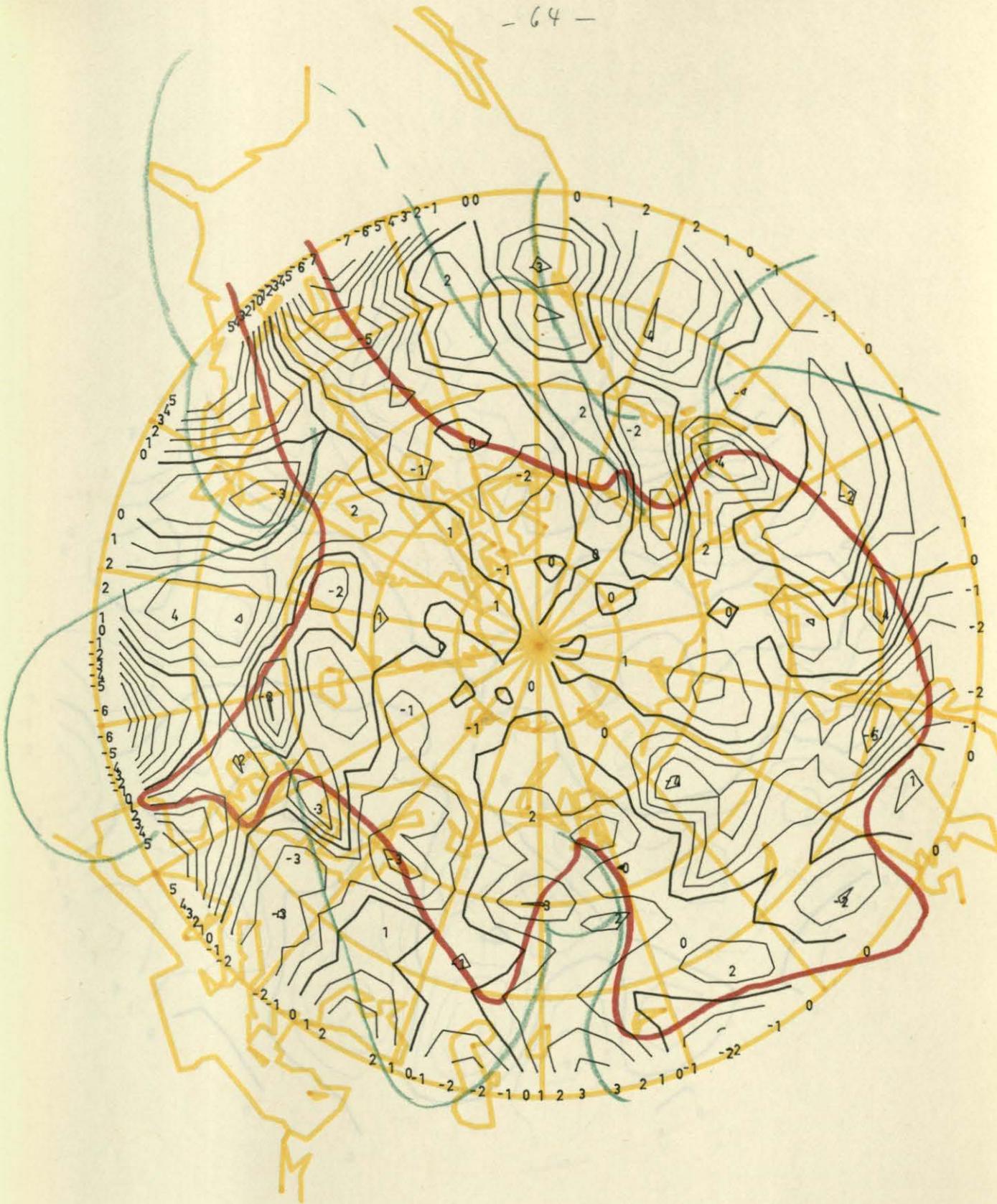
W [CM/SEC] 1800 M HOEHE



W [CM/SEC] 8700 M

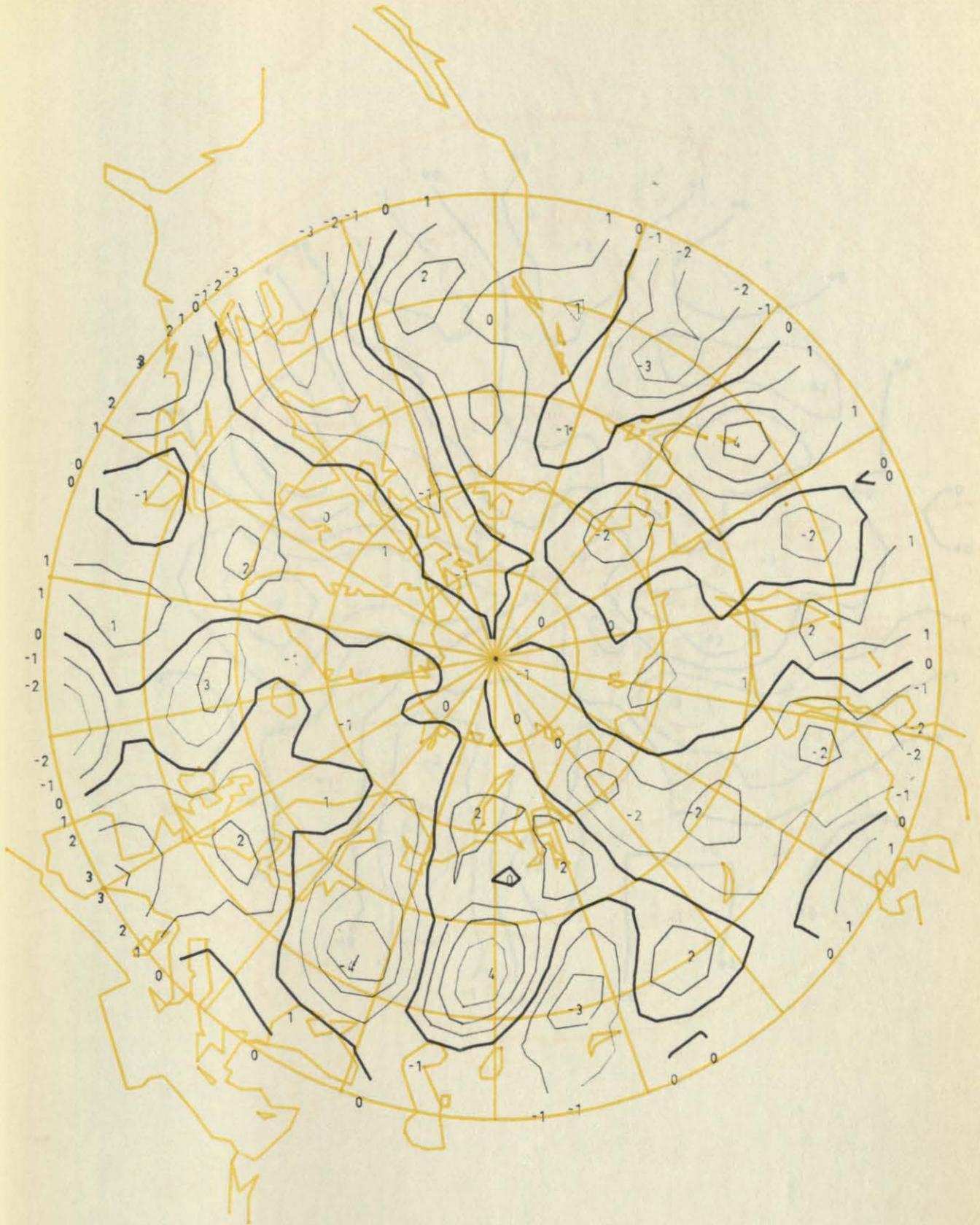
Abb. 20.

W [CM/SEC] 5300 M HOEHE



W [CM/SEC] 8700 M

W [CM/SEC] 11300 M

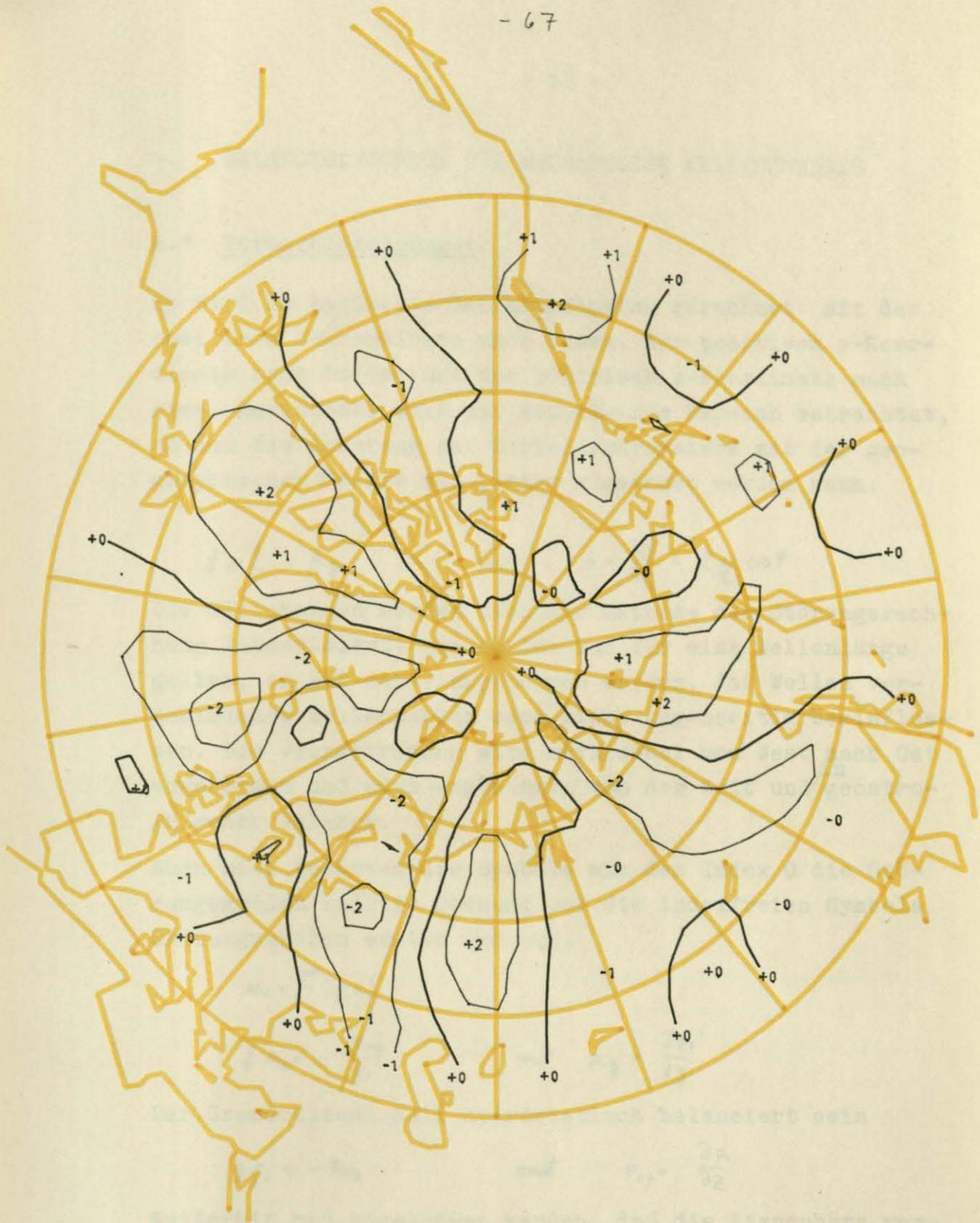


W [CM/SEC] 15700 M HOEHE

W [CM/SEC] 11300 M



W [CM/SEC] 15700 M HOEHE



W [CM/SEC]

20000 M

HOEHE

#### 4. BALANCEGLEICHUNG FÜR MECHANISCHE WELLENENERGIE

##### 4.1 Vernachlässigungen

Es wird in kartesischen Koordinaten gerechnet: mit der positiven x-Koordinate nach Osten, der positiven y-Koordinate nach Norden und der positiven z-Koordinate nach oben. Meridional wird nur ein kleiner Bereich betrachtet, so daß die Änderung des Coriolisparameters mit der geographischen Breite als linear angesehen werden kann.

$$f = f_0 + \beta y \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \frac{\omega}{a} \cos \varphi$$

Die Gleichungen werden nach der Methode der Störungsrechnung linearisiert. Sie sollen nur für eine Wellenlänge gelten, es muß daher angenommen werden, daß Wellen verschiedener Wellenzahlen sich nicht gegenseitig beeinflussen. Die Grundströmung wird rein zonal von West nach Ost angenommen und zwar unabhängig von der Zeit und <sup>in</sup>geostrophischer Balance.

Auch hier bedeuten die Symbole mit dem Index 0 die Störungsgrößen nullter Ordnung und die indexfreien Symbole Störungsgrößen erster Ordnung.

$$u_0 = F(y, z)$$

$$f u_0 = - \frac{p_{0y}}{\rho_0} \quad \text{mit} \quad p_{0y} = \frac{\partial p_0}{\partial y}$$

Der Grundzustand soll hydrostatisch balanciert sein

$$g \rho_0 = - p_{0z} \quad \text{mit} \quad p_{0z} = \frac{\partial p_0}{\partial z}$$

Weiterhin muß angenommen werden, daß die Atmosphäre vertikal stabil geschichtet ist, d.h.  $\Theta_{0z} > 0$ , und dynamisch stabil ist, d.h.  $f > u_{0y}$ .

Diese Annahmen bedeuten keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, da man sie fast immer bestätigt findet, höchstens südlich des Subtropenjets könnte die Atmosphäre dynamisch instabil werden.

Für die geostrophisch balancierte Grundströmung muß die vertikale Änderung des Windes durch die meridionale Änderung im Massen- bzw. Temperaturfeld kompensiert sein. Diese thermische Windgleichung für die Grundströmung kann durch Einführung der potentiellen Temperatur und mit Hilfe der Zustandsgleichung

$$\Theta_0 = T_0 \left( \frac{1000}{P_0} \right)^k, \quad R T_0 = \frac{P_0}{\rho_0}$$

in eine neue Form gebracht werden:

$$u_{0z} = - \frac{g}{f} \Theta_0 \left( \Theta_{0y} - \Theta_{0z} \frac{P_{0y}}{P_{0z}} \right)$$

#### 4.2 Grundgleichungen

Unter den oben gemachten Voraussetzungen lauten die Bewegungsgleichungen für die Störung erster Ordnung:

$$u_t + u_0 u_x + v u_{0y} + w u_{0z} - f v + \frac{P_x}{\rho_0} = 0 \quad (1)$$

$$\rho_0 v_t + \rho_0 u_0 v_x + \rho_0 u_0 f + \rho_0 u f + P_y = 0 \quad (2)$$

$$\rho_0 w_t + \rho_0 u_0 w_x + P_z + \rho_0 g = 0 \quad (3)$$

Um die Balancegleichung für die mechanische Wellenenergie möglichst allgemein zu halten, werden Wärmequellen und -senken zunächst zugelassen. Nach Herleitung der Gleichungen wird dann spezialisiert. Als Symbol für die Wärmequellen bzw. -senken wird der Buchstabe  $H = \frac{Q}{c_p T} \frac{dq}{dt}$  gewählt, wobei  $\frac{dq}{dt}$  die individuelle Änderung der Wärmemenge mit der Zeit bedeutet.

Wenn man die potentielle Temperatur einführt, so lautet der erste Hauptsatz der Wärmelehre:

$$\left( \frac{\Theta}{\Theta_0} \right)_t + u_0 \left( \frac{\Theta}{\Theta_0} \right)_x + v \frac{\Theta_{0y}}{\Theta_0} + w \frac{\Theta_{0z}}{\Theta_0} = H$$

Wobei zu beachten ist, daß  $\Theta_0$  nicht von  $t$  und  $x$  abhängt.  
Die Kontinuitätsgleichung ergibt sich zu:

$$\rho_t + u_0 \rho_x + v \rho_y + w \rho_z + \rho_0 u_x + \rho_0 v_y + \rho_0 w_z = 0 \quad (5)$$

Die Zustandsgleichung in Störungsform lautet

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p}{p_0} - \frac{\rho}{\rho_0}$$

Eliminiert man aus dieser Gleichung  $T$  und  $T_0$  und führt dafür die potentielle Temperatur ein, so ergibt sich:

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} + \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{c_v}{c_p} \cdot \frac{p}{p_0} \quad (8)$$

Mit derselben Gleichung kann man außerdem durch logarithmische Differentiation die nützliche Gleichung

$$\frac{\rho_{0,x}}{\rho_0} + \frac{\Theta_{0,x}}{\Theta_0} = \frac{c_v}{c_p} \cdot \frac{p_{0,x}}{p_0} \quad (9)$$

ableiten.

Addiert man Gl (4) und (5), so kann man mit Hilfe der Gleichungen (8) und (9) die Ableitungen der Dichte eliminieren:

$$\frac{c_v}{c_p} \left( \frac{p}{p_0} \right)_t + \frac{c_v}{c_p} u_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)_x + \frac{c_v}{c_p} v \frac{p_{0,y}}{p_0} + \frac{c_v}{c_p} w \frac{p_{0,z}}{p_0} + u_x + v_y + w_z = H \quad (10)$$

#### 4.3 Allgemeine Wellenenergiegleichung

Die mechanische Wellenenergie  $K$  pro Masseneinheit setzt sich aus der turbulenten kinetischen Energie

$$E_{kin} = \frac{v^2}{2}$$

und der verfügbaren potentiellen Energie

$$E_{pot} = \frac{\rho}{2} \left\{ \frac{\Theta_0}{\Theta_{0z}} \left( \frac{\Theta}{\Theta_0} \right)^2 - \frac{c_v}{c_p} \frac{p_0}{p_{0z}} \left( \frac{p}{p_0} \right)^2 \right\}$$

zusammen:  $K = E_{kin} + E_{pot}$

Hier geht die Bedingung  $C_{0z} > 0$  ein (vertikale Schichtungsstabilität), da für  $\Theta_{0z} = 0$  die verfügbare potentielle Energie unendlich groß werden würde.

Multipliziert man die Eulerschen Bewegungsgleichungen jeweils mit  $u$ ,  $v$  oder  $w$ , die thermodynamische Gleichung (4) mit  $\rho \rho_0 \frac{\Theta}{\Theta_{0z}}$  und die abgewandelte Kontinuitätsgleichung (10) mit  $-\rho \rho_0 \frac{p}{p_{0z}}$  und addiert die so erhaltenen Gleichungen, so ergibt sich die Balancegleichung für die mechanische Wellenenergie.

Unter Benutzung der Definition für die Wellenenergie kann man die Gleichung folgendermaßen zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
 (\rho_0 K)_t + (\rho_0 u_0 k)_x + (p u)_x + (p v)_y + (p w)_z = \\
 - \rho_0 u_{0y} (uv) - \rho_0 u_{0z} (uw) + \rho_0 (\Theta v) \left\{ \frac{u_{0z}}{\Theta_{0z}} - \rho \rho_0 \frac{H}{\Theta_{0z}} \left( \Theta - \Theta_{0z} \frac{p}{p_{0z}} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

#### 4.4. Interpretation der Balancegleichung

$(\rho_0 K)_t$  ist die lokalzeitliche Änderung der mechanischen Wellenenergie pro Volumeneinheit, die sich als Resultat folgender Prozesse ergibt:

- a)  $(\rho_0 K u_0)_x + (p u)_x + (p v)_y + (p w)_z$  ist die Divergenz bzw. Konvergenz des Wellenenergieflusses  $\rho_0 u_0 K \vec{i} + p \vec{V}$

Durch die horizontalen und vertikalen Begrenzungsflächen des betrachteten Volumens.

- b) Alle Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens geben die von Produktion oder Vernichtung von Wellenenergie an (Quellen oder Senken innerhalb des Volumens)

- b<sup>1)</sup>  $\left. \begin{array}{l} -u_{0y} (\rho_0 u v) \\ -u_{0z} (\rho_0 u w) \end{array} \right\}$  Ausmaß der Übertragung pro Volumeneinheit von kinetischer Energie der Grundströmung in Wellenenergie  
 ( $\rho_0 u v, \rho_0 u w$  — Meridionaler bzw. vertikaler Transport von relativem West-Moment)
- b<sup>2)</sup>  $\frac{f u_{0z}}{\Theta_{0z}} (\rho_0 \Theta v)$  Übertragung von verfügbarer potentieller Energie der Grundströmung in Wellenenergie  
 ( $\rho_0 \Theta v$  — Meridionaltransport von Wärme).
- b<sup>3)</sup>  $\frac{g \rho_0 H}{\Theta_{0z}} \left( \Theta - \Theta_{0z} \frac{p}{p_{0z}} \right)$  Erzeugung von Wellenenergie durch nichtadiabatische Erwärmung.

#### 4.5. Weitere Vernachlässigungen

Bei der weiteren Bearbeitung wird angenommen, daß die lokalzeitliche Änderung und die nichtadiabatische Erwärmung vernachlässigbar klein sind, so daß sich die Gleichung noch vereinfacht:

$$(u_0 \rho_0 k)_x + (p u)_x + (p v)_y + (p w)_z = -\rho_0 u_{0y} (u v) - \rho_0 u_{0z} (u w) + \rho_0 f (\Theta v) \frac{u_{0z}}{\Theta_{0z}}$$

Bildet man zonale Mittel (hier durch ein Querstrich angedeutet), so fallen auch noch die ersten beiden Glieder weg.

$$\overline{(p v)_y} + \overline{(p w)_z} = -\rho_0 u_{0y} \overline{(u v)} - \rho_0 u_{0z} \overline{(u w)} + \rho_0 f \overline{(\Theta v)} \frac{u_{0z}}{\Theta_{0z}}$$

Beweis dafür, daß die ersten beiden Glieder wegfallen:

F = beliebige Funktion

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_A^B \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx = F_A - F_B$$

Bei zonalen Mittel gilt  $F_A = F_B \Rightarrow \overline{\frac{\partial F}{\partial x}} = 0$

In dieser Arbeit interessiert am meisten die Divergenz bzw. Konvergenz des vertikalen und meridionalen Wellenenergieflusses  $\overline{(F w)}_z$  und  $\overline{(P v)}_y$ . Für die Anschauung genau so wichtig ist die Verteilung der vertikalen und meridionalen Wellenenergieflüsse selbst.

## 5. METHODE VON CHARNEY UND DRAZIN BEW. VAN MIEGHEM

Die Methode von CHARNEY und DRAZIN bzw. van MIEGHEM besteht darin, daß sie versuchen, eine Gleichung für den Vertikaltransport der mechanischen Wellenenergie zu gewinnen, die nur von der längen- und breitengemittelten Vertikalverteilung des Druckes und der Temperatur abhängt. Außerdem werden nur jahreszeitliche Mittel betrachtet. Entsprechend kann man bei dieser Methode auch nur grobe Mittelbilder des Vertikaltransportes an Wellenenergie erhalten.

### 5.1 Vernachlässigungen

Da hier nur lange, quasistatische und quasi-geostrophische Wellen interessieren und auch nur jahreszeitliche und Flächen-Mittel berücksichtigt werden, können außer den Vereinfachungen, wie sie schon im Kapitel 4 gemacht wurden (Störungsrechnung,  $\beta$ -Ebene) noch folgende vorgenommen werden:

- (A) In den Eulerschen Störungsgleichungen entfallen alle Terme, welche die Vertikalgeschwindigkeit  $w$  enthalten.
- (B) In den Beschleunigungsgliedern werden  $u$  und  $v$  geostrophisch approximiert, jedoch nicht in den Coriolisgliedern der ersten beiden Bewegungsgleichungen und nicht in der Kontinuitätsgleichung.

$$u = - \frac{P_t}{f_0 \rho_0} \qquad v = \frac{P_r}{f_0 \rho_0}$$

(Dabei wird der Coriolisparameter als konstant angesehen)

- (C) Die Variabilität von  $g$  mit  $y$  wird vernachlässigt.
- (D) Nichtdiabatische Erwärmung wird vernachlässigt.

## 5.2 Grundgleichungen

Unter diesen Bedingungen ergeben sich die ersten beiden Bewegungsgleichungen zu:

$$-p_{yt} - u_0 p_{yx} + (u_{0y} + f_0) p_x - f_0 f \rho_0 v = 0 \quad (1)$$

$$p_{xt} + u_0 p_{xx} + f_0 f \rho_0 u + f_0 p_y = 0 \quad (2)$$

Für die dritte Bewegungsgleichung wird Gleichung (8) aus Kapitel 4 mit benutzt

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} + \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{c_v}{c_p} \frac{p}{p_0}$$

wobei noch die Näherung eingeführt wird, daß das rechte Glied vielfach kleiner ist, als die beiden anderen.

Dann folgt

$$\frac{p_z}{\rho_0} - g \frac{\Theta}{\Theta_0} = 0 \quad (3)$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet unter diesen Voraussetzungen folgendermaßen:

$$u_x + v_y + \frac{1}{\rho_0} (\rho_0 w)_z = 0 \quad (4)$$

Für die thermodynamische Gleichung wird die thermische Windgleichung

$$u_{0z} = - \frac{g}{f_0} \frac{\Theta_{0y}}{\Theta_0} \quad (5)$$

und Gleichung (3) mit der Näherung

$$\frac{\Theta_{0y}}{\Theta_{0z}} \gg \frac{p_{0y}}{p_{0z}}$$

benutzt. Außerdem wird für die vertikale Stabilität die Größe  $\gamma^2 = g \frac{\Theta_{0z}}{\Theta_0}$  eingeführt.

$$p_{zt} + u_0 p_{zx} - u_{0z} p_x + \rho_0 \gamma^2 w = 0 \quad (6)$$

### 5.3 Näherungsausdruck für den Vertikaltransport

Man multipliziert die thermodynamische Gleichung (5) mit  $p/\rho_0 \vartheta^2$  und mittelt über die Zeit und entlang eines Breitenkreises. Zur Mittelbildung wird folgende Relation ausgenutzt:

$$p p_x = \left( \frac{p^2}{2} \right)_x, \quad p_x p_x = \left( \frac{p^2}{2} \right)_{2x} - p_x p_x$$

Entsprechendes gilt für die zeitliche Ableitung, wenn man anstelle des  $x$  ein  $t$  schreibt.

Da weiter angenommen wird, daß sich der Druck als Fourierreihe bezüglich  $x$  und  $t$  darstellen läßt, vereinfacht sich die Gleichung bei der zeitlichen und zonalen Mittelbildung zu:

$$(\overline{pw}) = \frac{1}{\rho_0 \vartheta^2} \left\{ (\overline{p_t p_x}) + \mu_0 (\overline{p_x p_x}) \right\}$$

Bei Stationarität entfällt auch noch das erste Glied

$$(\overline{pw}) = \frac{\mu_0}{\rho_0 \vartheta^2} (\overline{p_x p_x})$$

Unter der Annahme, daß die mittlere zonale Geschwindigkeit  $\mu_0$  nicht von der Breite abhängt, kann man zeigen, daß

$$\frac{(\overline{p_x p_x})}{\rho_0 \vartheta^2}$$

nicht von der Höhe abhängt, d.h., daß die mittlere Verteilung von  $(\overline{pw})$  im wesentlichen von der Vertikalverteilung von  $\mu_0$  abhängt.

### 5.4 Vertikale Druckverteilung

Da CHARNEY und DRAZIN, bzw. van MIEGHEM, die horizontalen Verteilungen des Druckes und der Temperatur in den verschiedenen Höhen nicht bekannt waren, versuchen sie aus den gegebenen Werten, nämlich der Vertikalverteilung der Mittelwerte dieser Größen, mit Hilfe der vorhandenen Gleichungen die nötigen Informationen zu erhalten.

Dazu wird die erste Bewegungsgleichung nach  $y$  und die zweite nach  $x$  differenziert und die dabei entstehenden Terme  $u_x$  und  $v_y$  der Coriolisglieder in die Kontinuitätsgleichung eingesetzt. So erhält man unter Vernachlässigung der lokalzeitlichen Ableitung eine Differentialgleichung für den Druck, die nur noch von der mittleren Vertikalverteilung des Druckes, der Dichte und der potentiellen Temperatur abhängt.

$$u_0 (p_{xx} + p_{yy})_x + (\beta - u_{0yy}) p_x + \frac{f_0^2}{S_0} \left\{ \left( \frac{S_0}{\gamma_3^2} \right)_z \left[ \rho_0 u_0 \left( \frac{p_x}{S_0} \right)_z - u_{0z} p_z \right] \right\} + \frac{f_0^2}{\gamma_3^2} \left\{ \rho_0 u_0 \left( \frac{p_x}{S_0} \right)_{zz} - u_{0zz} p_x \right\} = 0$$

Mit Hilfe eines Produktenansatzes ergibt sich für jede Raumkoordinate eine gewöhnliche Differentialgleichung des Druckes. Die Differentialgleichungen bezüglich der Koordinaten  $x$  und  $y$  lassen sich mit einer zweidimensionalen Fourierreihe lösen:

$$p = \frac{\sqrt{\gamma_3^2 S_0}}{v_m} P(z) e^{i(m x + n y)}$$

Für die  $z$ -Abhängigkeit ergibt sich die Differentialgleichung

$$P_{zz} + N^2 P = 0$$

mit

$$N^2 = - \frac{\gamma_3^2}{f_0^2} (m^2 + n^2) + \frac{\gamma_3^4}{u_0} \left\{ \frac{\beta}{f_0^2} - \frac{1}{S_0} \left( \frac{\rho_0 u_{0z}}{\gamma_3^2} \right)_z \right\} - \sqrt{\frac{\gamma_3^4}{S_0}} \left( \sqrt{\frac{S_0}{\gamma_3^2}} \right)_{zz}$$

$m$  und  $n$  sind die Wellenzahlen in zonaler und meridionaler Richtung.

### 5.5 Vertikaltransport in Abhängigkeit von der charakteristischen Größe $N^2$

Wenn  $N^2$  über ein größeres Höhenintervall konstant ist oder angesehen werden kann oder sich nur wenig ändert,

daß es als konstant angesehen werden kann, so läßt sich die Differentialgleichung einfach lösen.

a) Wenn  $N^2 < 0$ , dann ändert sich  $p$  exponentiell mit der Höhe. Es ist keine vertikale Energieübertragung möglich. Wenigstens nehmen die Beträge des Vertikaltransportes stark mit der Höhe ab (Wellen externen Typs).

Beweis: siehe Anhang IV

b) Wenn  $N^2 > 0$ , dann ändert sich  $p$  sinusförmig mit der Höhe, vertikale Energieübertragung ist dann möglich. (Wellen internen Typs).

c) Wenn die Atmosphäre aus mehreren Schichten mit verschiedenen  $N^2$  besteht und

c<sup>1</sup>) in der höchsten Schicht  $N^2 < 0$  ist, so wirkt die höchste Schicht als totaler Reflektor für Wellen der unteren Schichten.

c<sup>2</sup>) In der höchsten Schicht  $N^2 > 0$  ist, so werden Zwischenschichten mit  $N^2 < 0$  nur als teilweise Reflektoren wirken.

## 6. VERTIKAL- UND MERIDIONALTRANSPORTE

CHARNEY und DRAZIN berechneten mit ihrer Methode zeitlich- und flächengemittelte Vertikaltransporte, sie konnten daher nicht erwarten, Zusammenhänge zwischen Vertikaltransporten und meteorologischen Erscheinungen zu finden. In dieser Arbeit ist eine solche detaillierte Untersuchung durchgeführt worden.

Nachteilig macht sich bei einer solchen genauen Bearbeitung der Zeitmangel bemerkbar, so daß nur ein einzelner Termin betrachtet werden konnte. Daher ist es nicht sicher, ob die hier gefundenen Ergebnisse allgemein oder nur für diesen einzelnen Termin gelten.

Wegen des großen Zahlenmaterials kann hier nur eine Auswahl der Ergebnisse gezeigt werden. Für jede Wellenzahl werden folgende Bilder gezeigt:

- 1) Meridionalschnitt des vertikalen Wellenenergieportes
- 2) Meridionalschnitt des meridionalen Wellenenergieportes
- 3) Meridionalschnitt der Divergenz der Wellenenergieporte
- 4) Vektorfeld, das aus den beiden Wellenenergieporten entstanden ist
- 5) Horizontalschnitt der Temperatur
- 6) Horizontalschnitt des Druckes
- 7) Horizontalschnitt der Vertikalgeschwindigkeit.

Die Horizontalschnitte gelten für die besonders interessante 6800-m-Fläche (400 mb) und geben die Verteilung an, die sich aus der zugehörigen Wellenzahl ergibt.

### 6.1 Dimension der Wellenenergie Transporte

Da der Luftdruck in mb gegeben ist ( $1 \text{ mb} = 10^3 \text{ gr cm}^{-1} \text{ sec}^{-2}$ ) und die Windgeschwindigkeiten in cm/sec bzw. m/sec, erhält man für die Produkte ( $\overline{pW}$ ) bzw. ( $\overline{pV}$ ) folgende Dimensionen

$$[\overline{pW}] = 10^3 \text{ gr sec}^{-3} = 10^3 \text{ erg cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$$

$$[\overline{pV}] = 10^5 \text{ gr sec}^{-3} = 10^5 \text{ erg cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$$

(In den Vertikalschnitten werden die Wellenenergie Transporte in den Dimensionen  $10^2$  bzw.  $10^4 \text{ erg cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$  dargestellt).

Da sich bei der Produktbildung für ( $\overline{pW}$ ) und ( $\overline{pV}$ ) in dieser Dimension ähnliche Größenordnungen ergeben, konnte man annehmen, daß der meridionale Transport den vertikalen um das 100-fache übertrifft.

Bei allen Meridionalschnitten in der Atmosphäre wird die Vertikalachse um den Faktor Hundert bis Tausend gedehnt, da sonst wegen der unterschiedlichen Dimension in der Horizontalen (10 000 km von Pol bis Äquator) und der Vertikalen (10 km vom Boden bis zur Tropopause) eine Zeichnung überhaupt nicht möglich ist.

Ähnlich verhält es sich bei den Berechnungen in dieser Arbeit. Der Vertikaltransport geht durch eine horizontale Fläche und der Meridionaltransport durch eine vertikale Fläche. Jeder Gitterwert repräsentiert zonal eine Entfernung von  $5^\circ$ , das entspricht bei  $60^\circ\text{N}$  einer Entfernung von 280 km, meridional eine Entfernung von  $2,5^\circ$  entsprechend 280 km und vertikal eine mittlere Entfernung von 1,3 km.

Das ergibt ein Verhältnis zwischen horizontaler und vertikaler Entfernung von 215 : 1.

Für eine Berechnung der Divergenz an Wellenenergie müssen diese Dimensionsunterschiede berücksichtigt werden. Zur Ermittlung der wahren Transporte durch die oben beschriebenen Flächen müssen die Zahlenwerte des mittleren

vertikalen Transportes ( $\overline{pW}$ ) für die zonale Richtung mit dem Breitenkreisumfang und für die meridionale Richtung mit 280 km entsprechend  $2,5^\circ$  multipliziert werden. Die Zahlenwerte des mittleren Meridionaltransportes ( $\overline{pV}$ ) müssen für die zonale Richtung ebenfalls mit dem Breitenkreisumfang und für die vertikale Richtung mit 1,3 km multipliziert werden. Sieht man zunächst von dem Produkt mit dem Breitenkreisumfang ab, der für die beiden Transporte gleich groß ist, so ergibt sich der wahre Transport zu:

$$[\overline{pW}] = 2,8 \cdot 10^{10} \frac{\text{erg}}{\text{sec}}$$

Durch die horizontale Fläche, die von einem cm-Breitenkreis und 280 km in meridionaler Richtung gebildet wird.

$$[\overline{pV}] = 1,3 \cdot 10^{10} \frac{\text{erg}}{\text{sec}}$$

durch die vertikale Fläche, die sich aus einem cm-Breitenkreis und 1,3 km Höhenintervall ergibt.

Man erkennt also, daß bei gleichen Zahlenwerten von ( $\overline{pW}$ ) und ( $\overline{pV}$ ) nicht der meridionale, wie anfangs angenommen, sondern der vertikale Transport der größere ist und zwar um den Faktor 2,15.

Will man außerdem noch die Transporte in verschiedenen Breiten vergleichen, so muß man auch noch die Breitenabhängigkeit des Breitenkreisumfangs, d.h. die Meridiankonvergenz, berücksichtigen,

Diese Korrekturen wurden berücksichtigt, um die Divergenz des Wellenenergie-transportes berechnen zu können. Eine Einheit der dargestellten mittleren Divergenz des Wellenenergie-transportes hat aber die Dimension:

$$10^{-3} \text{ erg cm}^{-3} \text{ sec}^{-1}$$

Bei der Darstellung des Vektorfeldes muß beachtet werden, daß die Vektoren entsprechend dem erwähnten Größenunterschied um den Faktor 100 fast nur horizontale Richtung haben. Zum besseren Verständnis wurde aber die vertikale Achse um den Faktor Hundert gedehnt.

6.2. Diskussion des mittleren meridionalen und vertikalen Wellenenergietransportes für einzelne Wellenzahlen

6.21 Wellenzahl 1

Die Wellenzahl 1 gibt die Abweichung des Kältepolars bzw. der polaren Zyklone oder Antizyklone von der Lage des wahren Nordpols wieder. Die in dieser Arbeit benutzte Methode zur Berechnung des Windfeldes fordert, daß am Pol Windstille herrscht. Das ist nur möglich, wenn direkt am Nordpol ein zykloner oder antizykloner Wirbel liegt.

Die Existenz einer nicht vernachlässigbar kleinen Exzentrizität, wie sie die Bilder der Wellenzahl 1 (Abb. 29) zeigen, deutet darauf hin, daß diese Methode in Polnähe zu fehlerhaften Ergebnissen führen kann. Da die polare Zyklone in 6800 m Höhe bei etwa  $75^{\circ}\text{N}$  liegt, darf man die Ergebnisse nördlich  $75^{\circ}\text{N}$  nur mit Vorbehalten interpretieren.

Die Wellenenergietransporte für die Wellenzahl 1 (Abb. 25 und 26) sind von geringem Ausmaß. Die maximalen Werte liegen bei 10 Einheiten gegenüber 40 - 50 Einheiten bei den anderen wichtigen Wellenzahlen. Im Bereich der Polarfront und etwas nördlich davon wird Wellenenergie aufwärts transportiert, wobei besonders die obere Troposphäre (7 - 8 km) als Quelle dient, wie die Verteilung der Divergenz (Abb. 27) zeigt. Im Tropopausen-Niveau wird die Energie meridional nach Norden und Süden von der Polarfront wegtransportiert und zu einem geringen Teil in einer Zirkulation in Bodennähe zur Polarfront zurücktransportiert. Um diese Zirkulation zu erkennen, betrachte man das Vektorfeld (Abb. 28) der zu einem Bild zusammengesetzten meridionalen und vertikalen Wellenenergietransporte. An der Länge der Pfeile erkennt man, daß die Stärke der Transporte in dem Zirkulationsrad südlich der Polarfront gegenüber den anderen Transporten vernachlässigt

werden kann. Für eine Untersuchung, ob die Zirkulation überhaupt geschlossen ist, fehlen die nötigen Anschlußwerte nach Süden und zum Boden.

Der größte Teil der aufwärtstransportierten Energie geht aber der Troposphäre verloren und wird innerhalb der Stratosphäre weiter nach oben transportiert, d.h., die Tropopause hat keinen hemmenden Einfluß auf den Aufwärtstransport. Im Gegensatz dazu findet man bei den höheren Wellenzahlen, daß die Tropopause eine Sperrschicht für die Wellenenergie darstellt. Dieser Unterschied im Verhalten der Tropopause bei verschiedenen Wellenzahlen wurde schon bei den Untersuchungen von van MIEGHEM bzw. CHARNEY und DRAZIN gefunden.

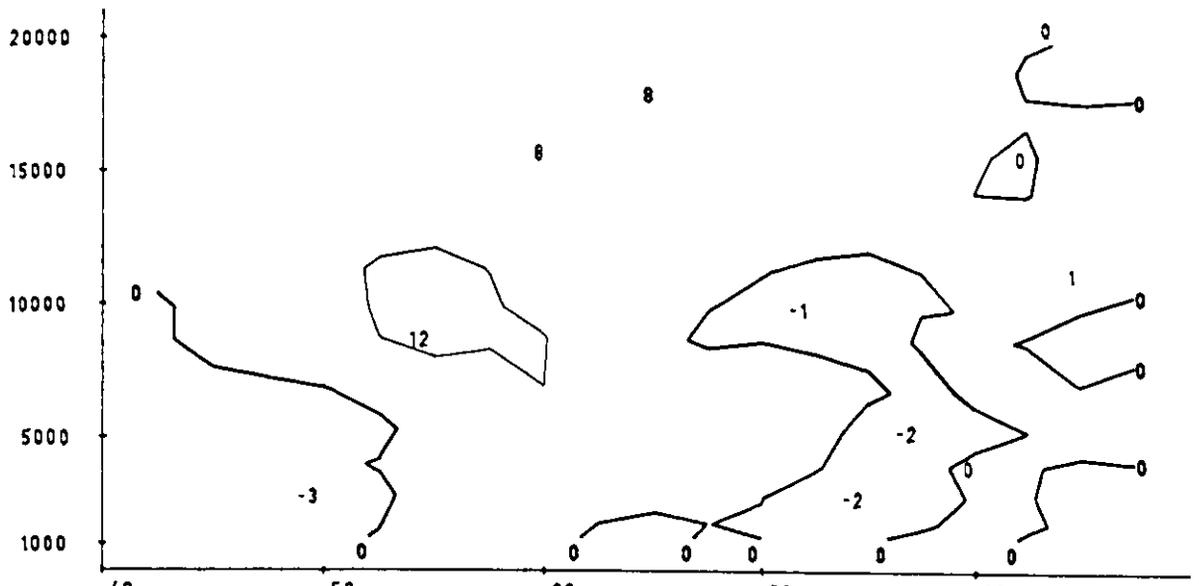


Abb. 25. VERTIKALTRANSPORT VON WELLENENERGIE ZONAL GEMITTELT FUER DIE WELLENZAHL 1

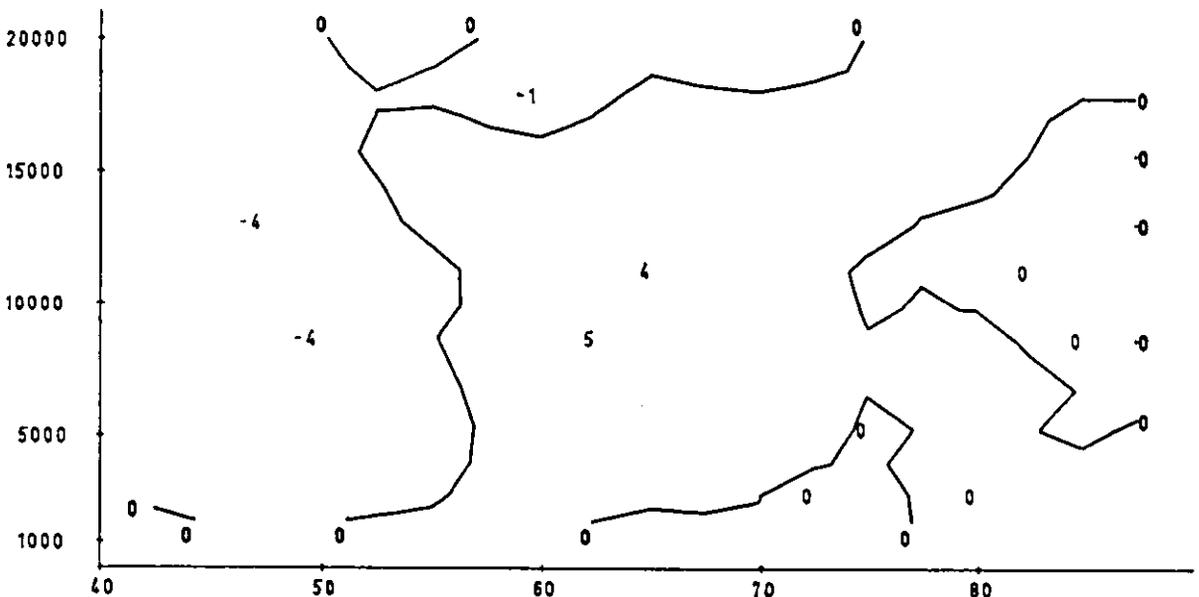


Abb. 26. MERIDIONALTRANSPORT VON WELLENENERGIE ZONAL GEMITTELT FUER DIE WELLENZAHL 1

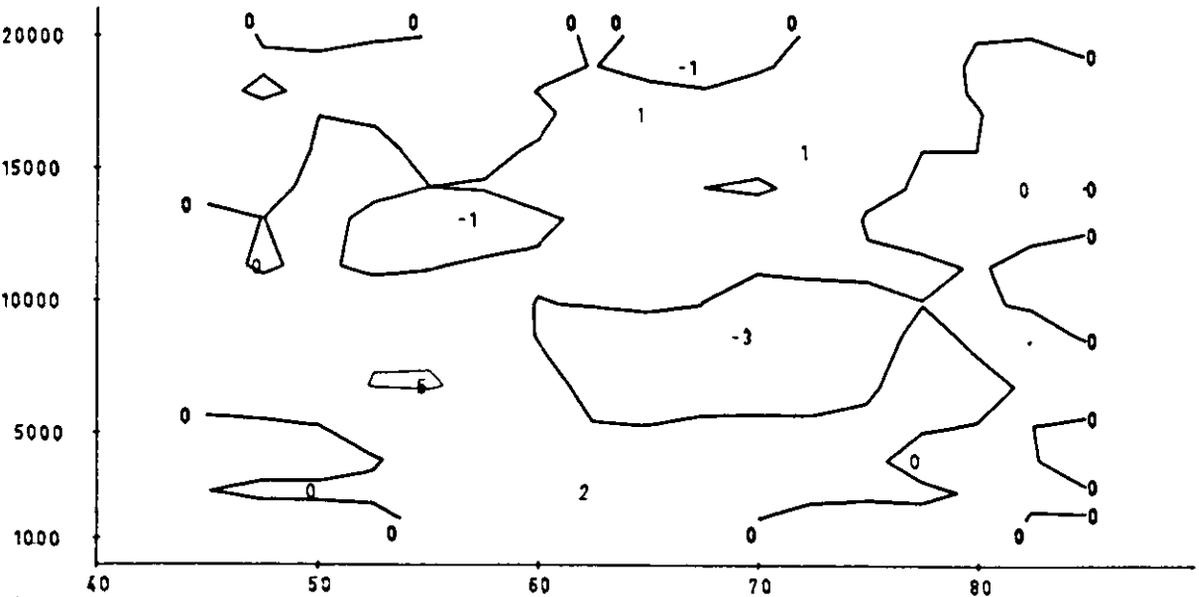


Abb. 27. DIVERGENZ DES WELLENENERGIETRANSPORTES ZONAL GEMITTELT FUER DIE WELLENZAHL 1

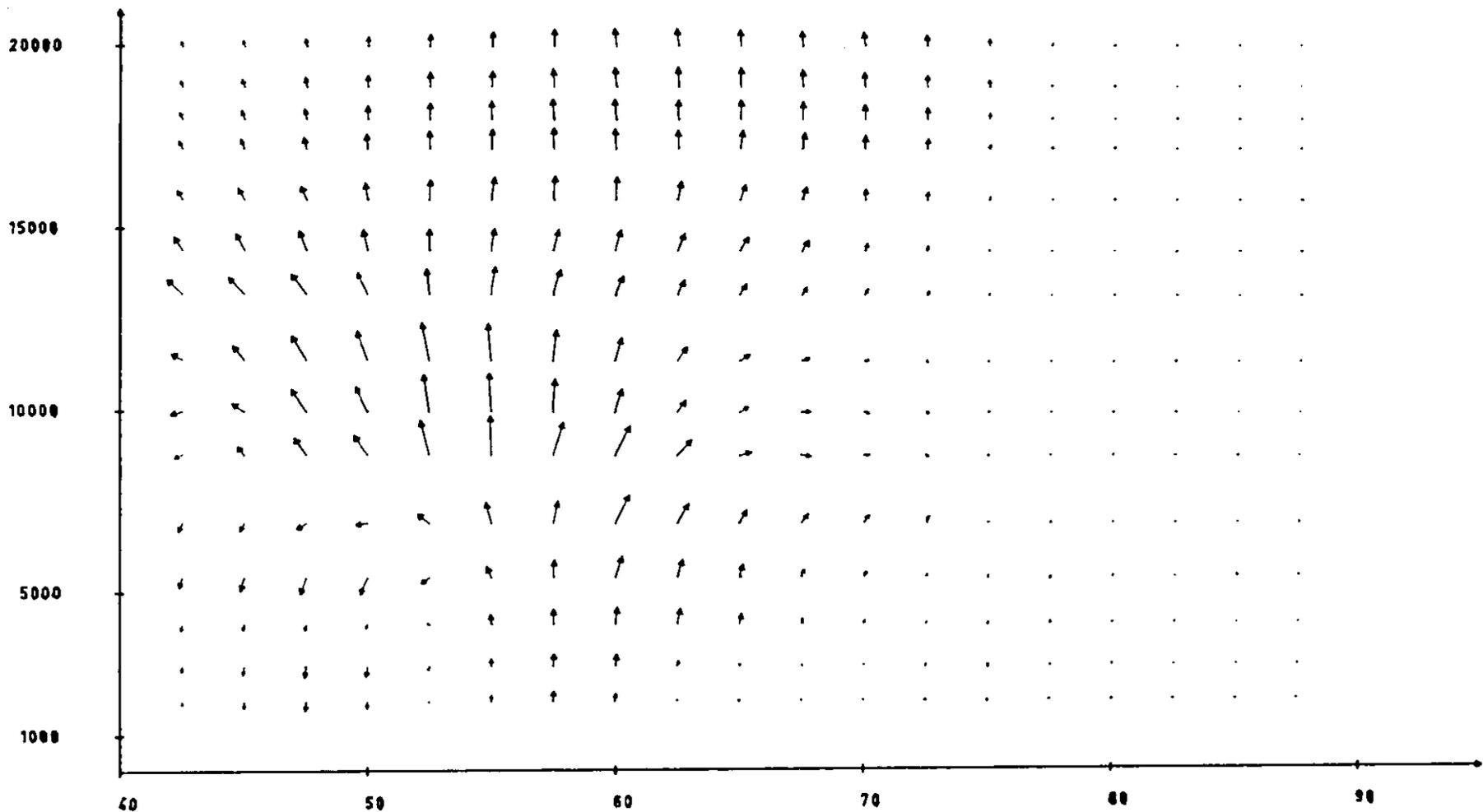


Abb. 28. WELLENERGIETRANSPORT VON DER WELLENZAHL 1



Abb. 29.

T1 6800 M

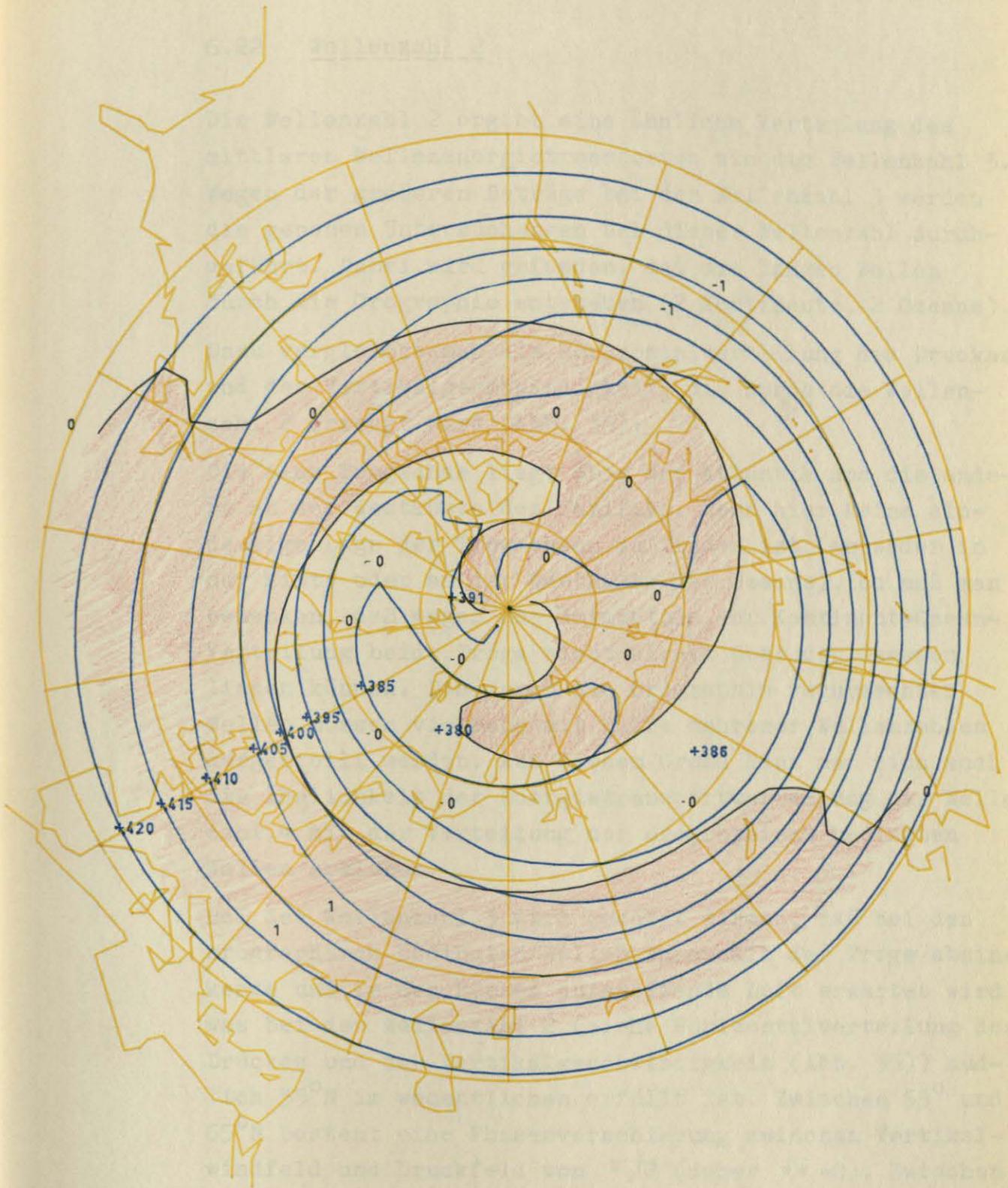


Abb. 30.

P1

W1

6800 M

## 6.22 Wellenzahl 2

Die Wellenzahl 2 ergibt eine ähnliche Verteilung des mittleren Wellenenergie-transportes wie die Wellenzahl 3. Wegen der größeren Beträge bei der Wellenzahl 3 werden die genauen Untersuchungen bei dieser Wellenzahl durchgeführt. Dabei wird gefunden, daß die langen Wellen durch die Orographie entstehen (2 Kontinente, 2 Ozeane).

Dazu vergleiche man die Horizontalverteilung des Druckes und der Vertikalgeschwindigkeit, die durch die Wellenzahl 2 erzeugt wird (Abb. 35):

Die eine Trogachse liegt über dem Atlantik und die andere an der Westküste des Pazifiks. Wenn hier keine eindeutige Lage der Trogachsen zu finden ist (entweder in der Mitte oder an der Westküste der Ozeane), so muß man bedenken, daß wegen der Asymmetrie der Kontinent-Ozean-Verteilung beide Tröge nicht direkt über den Ozeanen liegen können. Die durch die Orographie verursachten Wellen müssen vielmehr mit Hilfe mehrerer Wellenzahlen dargestellt werden. Aus diesem Grund kann man sich auch die Ähnlichkeit der Energietransportverteilung der Wellenzahl 4 mit der Verteilung der orographisch bedingten Wellen erklären.

Bei der Wellenzahl 3 wird gezeigt werden, daß bei den orographisch bedingten Wellen innerhalb der Tröge absinkende und in den Rücken aufsteigende Luft erwartet wird, was bei der Wellenzahl 2 (siehe Horizontalverteilung des Druckes und der Vertikalgeschwindigkeit (Abb. 35)) südlich  $55^{\circ}\text{N}$  im wesentlichen erfüllt ist. Zwischen  $55^{\circ}$  und  $65^{\circ}\text{N}$  besteht eine Phasenverschiebung zwischen Vertikalwindfeld und Druckfeld von  $\pi/2$  (daher  $\overline{p'w} = 0$ ). Zwischen  $65^{\circ}$  und  $72^{\circ}\text{N}$  steigt die Luft in den Trögen auf, und in den Rücken sinkt sie ab (Phasenunterschied von  $\pi$ , d.h.  $\overline{p'w} < 0$ ), und noch weiter nördlich existiert wieder eine Phasenverschiebung von  $\pi/2$ .

Die Abweichung der berechneten von der theoretischen

Vertikalgeschwindigkeitsverteilung nördlich  $55^{\circ}\text{N}$  ist leicht zu erklären: zwischen  $55^{\circ}$  und  $65^{\circ}\text{N}$  existiert praktisch nur noch der Atlantische Ozean, der Pazifik hat sich zu der Beringstraße verengt und bleibt daher ohne Einfluß. Noch weiter nördlich besteht die Erdoberfläche fast nur noch aus dem arktischen Ozean, so daß auch hier keine Bedingungen wie südlich  $55^{\circ}\text{N}$  existieren. Beim Vergleich der Divergenzverteilung von Wellenzahl 2 und 3 (Abb. 34 und Abb. 40) stellt man fest, daß die Extrema bei der Wellenzahl 2 etwas tiefer liegen als bei der Wellenzahl 3.

An den Vektorbildern der Wellenenergietransporte (Abb. 33 und Abb. 39) erkennt man, daß die hauptsächlichsten Transporte bei der Wellenzahl 2 weiter südlich als bei der Wellenzahl 3 liegen. Die mittlere Tropopause (etwa in 11 - 12 km Höhe) wirkt hier bereits als stärkere Barriere für einen Austausch von Wellenenergie zwischen Tropo- und Stratosphäre.

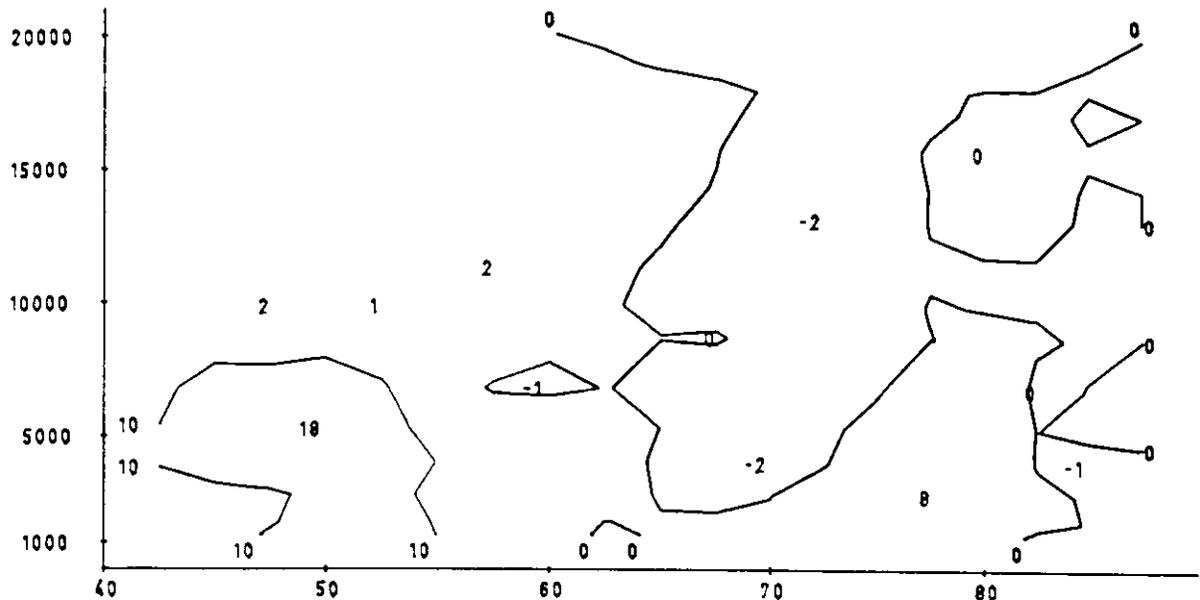


Abb. 31. VERTIKALTRANSPORT VON WELLENENERGIE ZONAL GEMITTELT FUER DIE WELLENZAHL 2

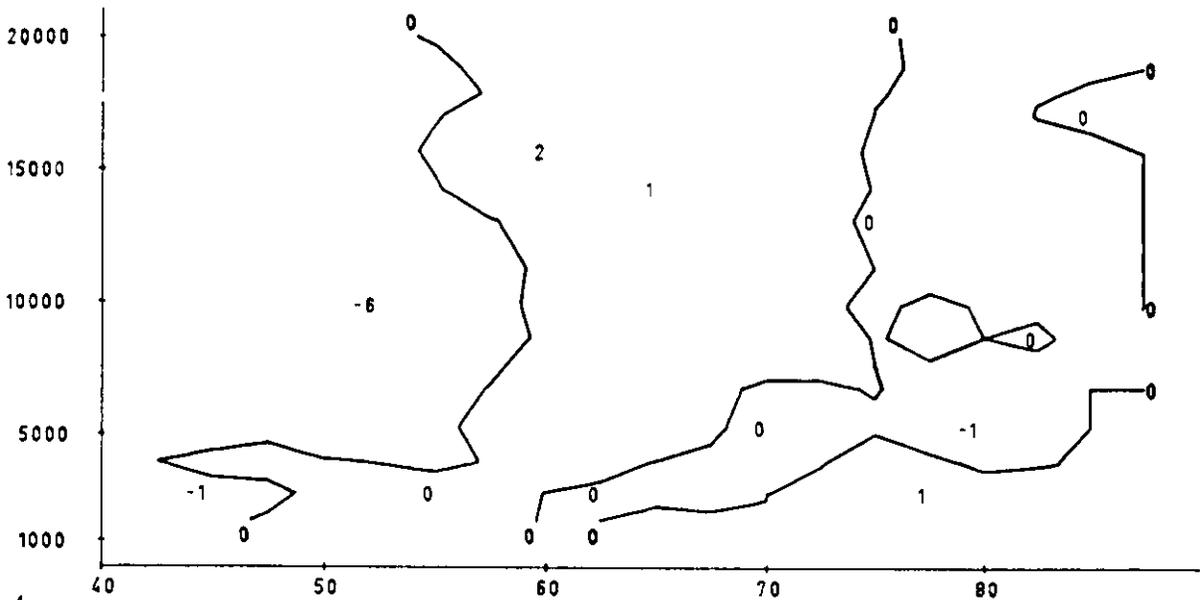


Abb. 32. MERIDIONALTRANSPORT VON WELLENENERGIE ZONAL GEMITTELT FUER DIE WELLENZAHL 2

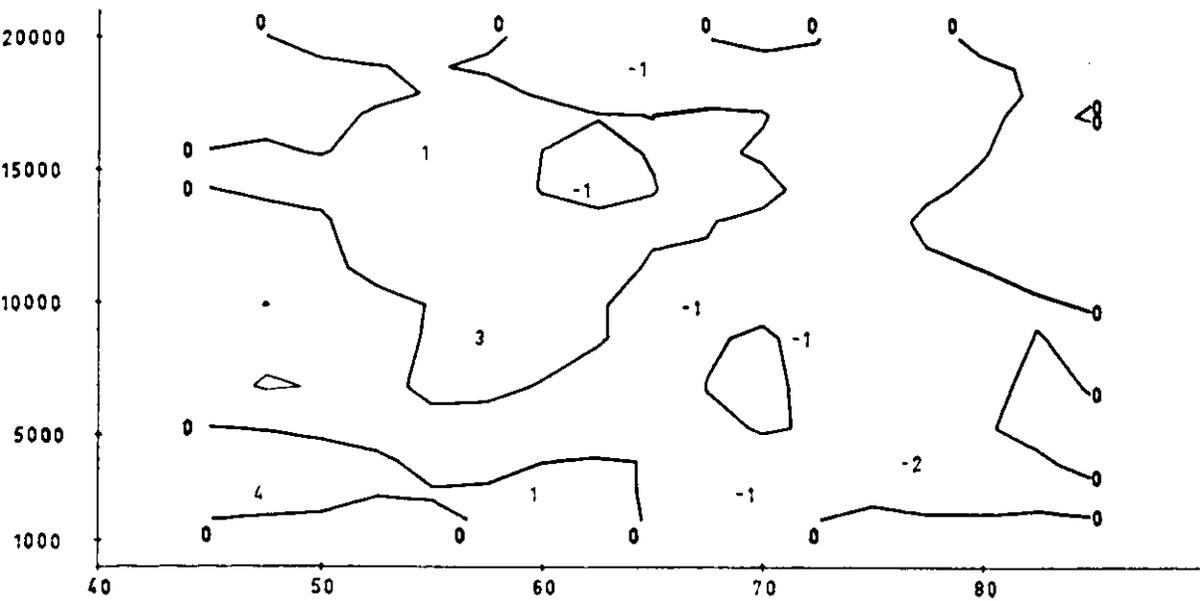


Abb. 33. DIVERGENZ DES WELLENENERGIE-TRANSPORTES ZONAL GEMITTELT FUER DIE WELLENZAHL 2

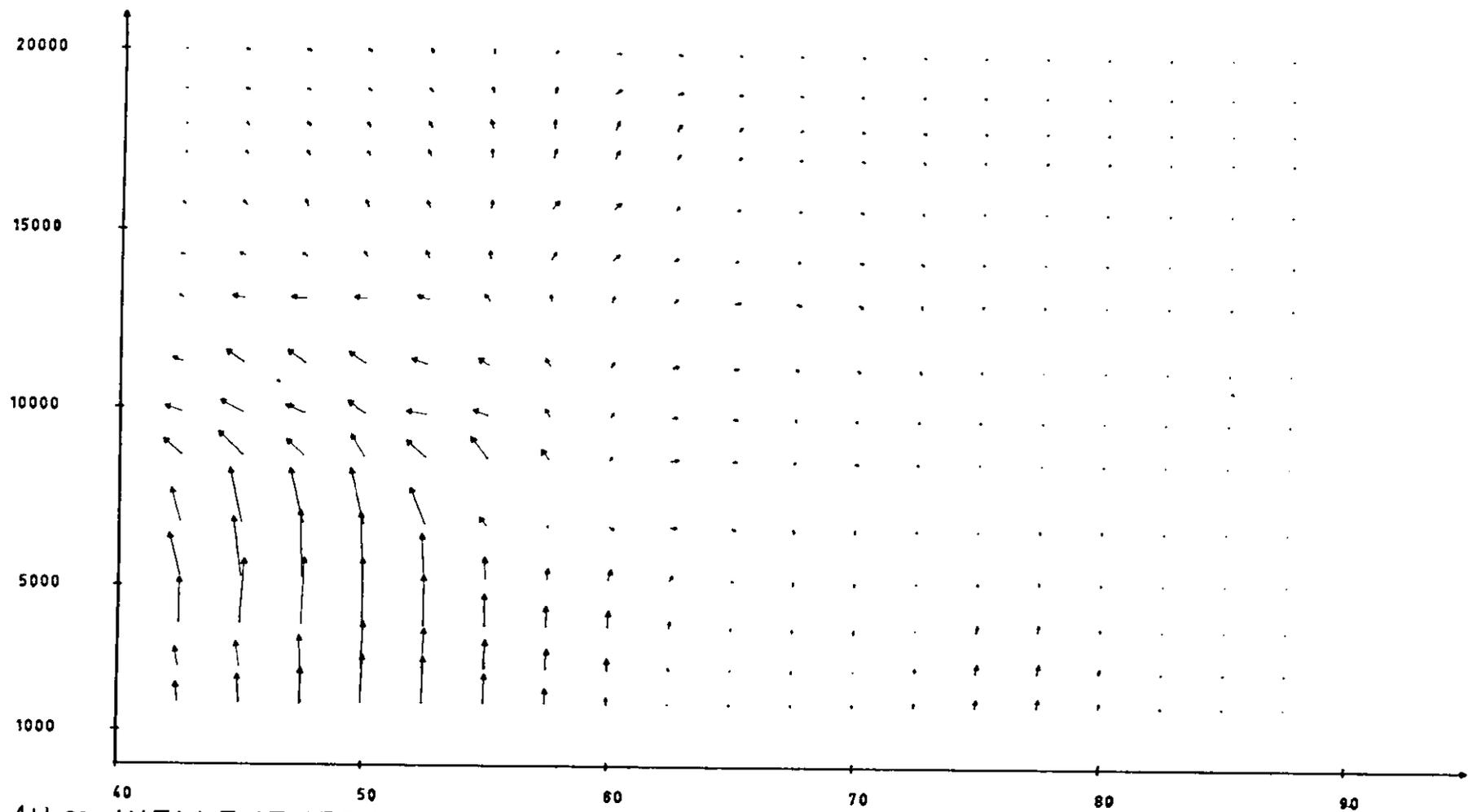


Abb. 33. WELLENENERGIETRANSPORT VON DER WELLENZAHL 2

99-66

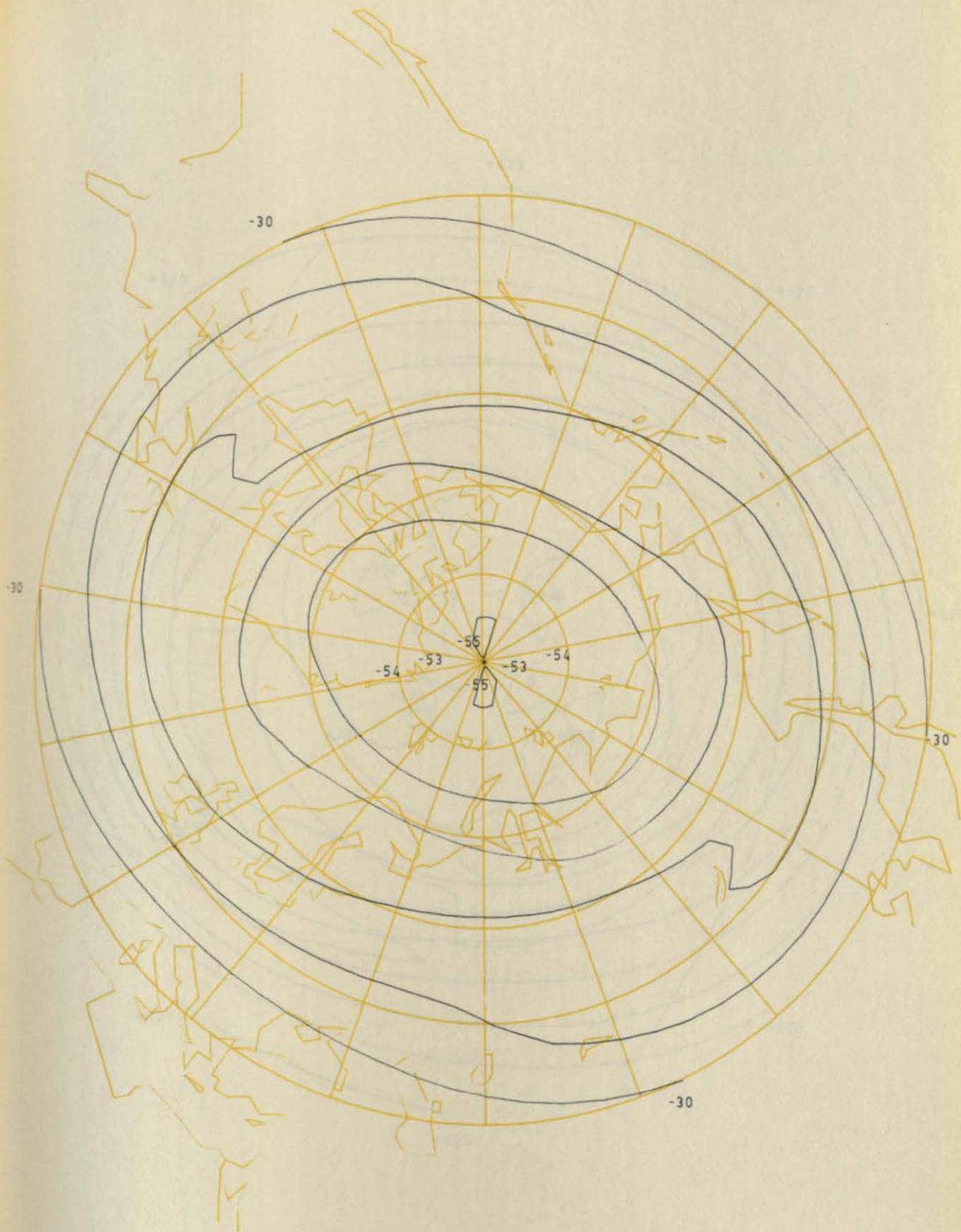


Abb. 34.

T2 6800 M

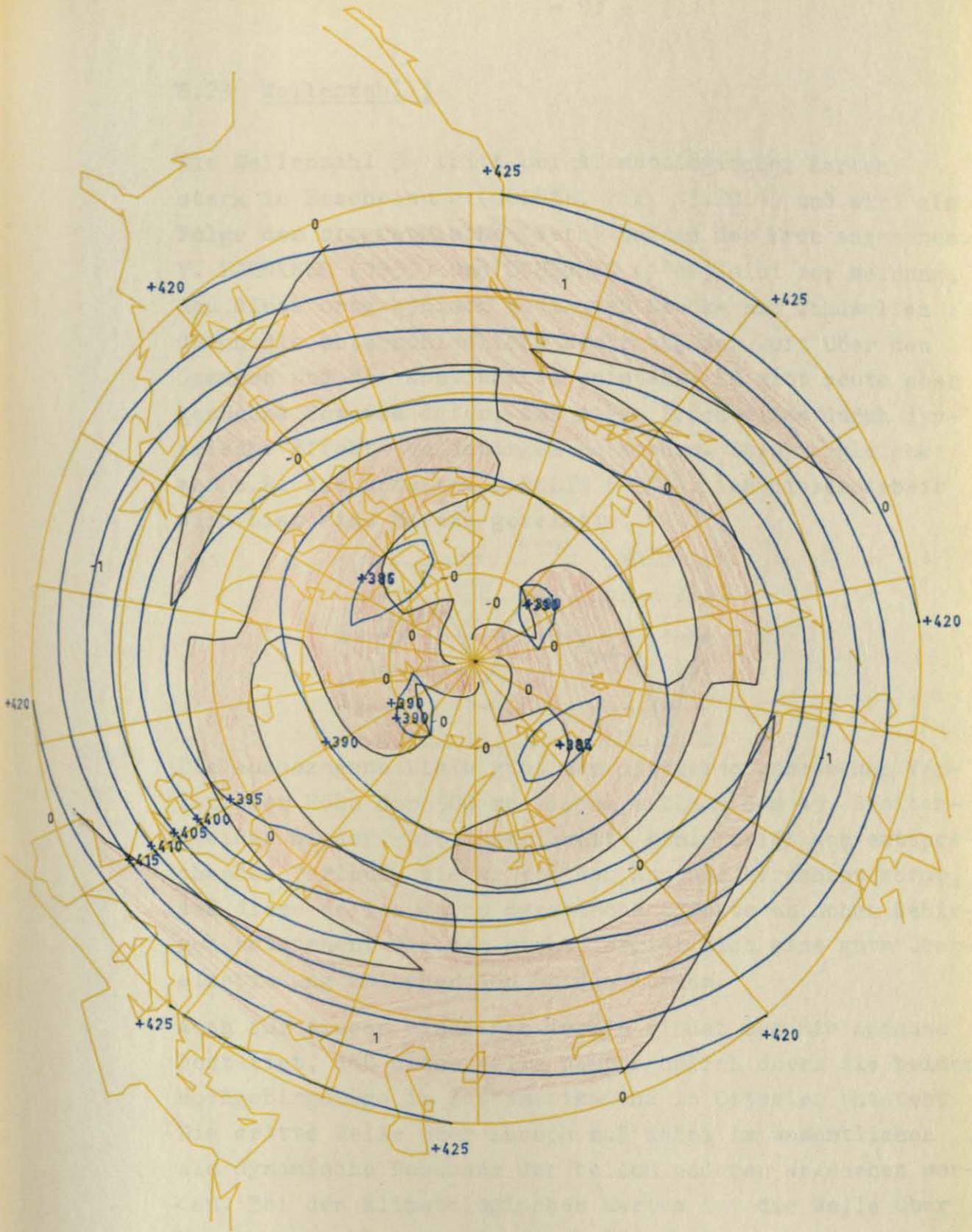


Abb. 35.

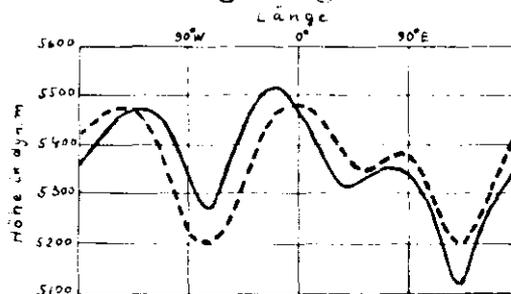
P2

W2

6800 M

### 6.23 Wellenzahl 3

Die Wellenzahl 3 tritt bei klimatologischen Karten stark in Erscheinung (GODSKE, Fig. 13.20.1) und wird als Folge der orographischen Verhältnisse der Erde angesehen. V. BJERKNES (1933) und SCHERHAG (1948) sind der Meinung, daß diese orographisch bedingten Druck- und Windwellen durch die unterschiedliche Erwärmung der Luft über den Ozeanen und den Kontinenten entsteht. Es gibt heute aber genügend Beweise dafür, daß diese Druckwellen durch dynamische Effekte an Gebirgen entstehen. Dazu vergleiche man z.B. die Arbeit von BOLIN (1950). Aus dieser Arbeit wird hier eine Skizze gezeigt:



Die ausgezogene Linie gibt den mittleren gemessenen Verlauf der Höhe der 500 mb-Fläche entlang des 45. Breitenkreises wieder. Die gestrichelte Linie zeigt den entsprechenden Verlauf, wie er aus der Annahme berechnet wurde, daß diese Wellen durch dynamische Effekte an hohen Gebirgen entstehen. Wie man sieht, ergibt sich eine gute Übereinstimmung zwischen den beiden Kurven.

Auch für diesen einzelnen Termin findet man die Annahme bestätigt, daß diese Welle hauptsächlich durch die beiden Hochgebirgszüge in Westamerika und in Ostasien entsteht. Die dritte Welle über Europa muß dabei im wesentlichen als dynamische Resonanz der beiden anderen angesehen werden. Bei den klimatologischen Karten ist die Welle über Europa auch kleiner als die beiden anderen Wellen.

Bei einem mittleren zonalen Wind über ein meridional ausgestrecktes Gebirge ergibt sich nach der Theorie über Lee-Wellen in Luv des Gebirges aufsteigende und in Lee absinkende Luft. Außerdem kann man theoretisch mit Hilfe

einer Balancegleichung für die Vorticity beweisen, daß in Luv des Gebirges ein Rücken und in Lee ein Trog entsteht. Dazu vergleiche man die in dieser Arbeit berechnete Druck- und Vertikalwindverteilung in 6800 m (Abb. 42). Es treffen in Lee minimaler Druck mit absinkender Luft und in Luv maximaler Druck mit aufsteigender Luft zusammen, so daß sich ein positiver mittlerer Vertikaltransport an Wellenenergie ( $\overline{PW}$ ) ergibt. Auch dieses Ergebnis findet man im Meridionalschnitt des mittleren Vertikaltransportes (Abb. 37) in fast der ganzen Troposphäre bestätigt.

Die stärksten Aufwärtstransporte liegen wieder, wie bei den vorherigen Wellenzahlen, im Bereich der Polarfront, und zwar befindet sich der wesentliche Teil südlich der Front. Nach der obigen Erklärung über die Entstehung dieser Welle ist auch diese Verteilung gut zu verstehen, da südlich der Polarfront die stärksten mittleren Westwinde existieren (Kap. 383). Die Abwärtstransporte in der unteren Troposphäre nördlich  $65^{\circ}N$  kann mit den vorherrschenden Ostwinden erklärt werden. Man findet auch eine vollständige Übereinstimmung der Nullisoplethen des mittleren zonalen Windes und des Vertikaltransportes.

Faßt man die Vertikaltransporte mit den Meridionaltransporten zu einem Vektorfeld (Abb. 39) zusammen, so erkennt man folgendes:

Zwischen  $45^{\circ}N$  und  $65^{\circ}N$  herrscht in der ganzen betrachteten Atmosphäre Aufwärtstransport vor, der nach Süden abgelenkt wird. Nur in der unteren Troposphäre südlich  $50^{\circ}N$  existiert ein kleines Gebiet, in dem die Energie nach unten transportiert wird. In der südlichen Stratosphäre sind die Transporte schon so weit abgelenkt, daß die Aufwärtstransporte gegenüber den horizontalen Transporten vernachlässigt werden können. Betrachtet man dazu noch die Divergenz des Wellenenergie-transportes (Abb. 40), so wird deutlich, daß in der unteren und mittleren Troposphäre Wellenenergie entsteht und im Bereich des middle-

ren Starkwindbandes akkumuliert wird. Dieses Verhalten stimmt mit der Theorie von SMAGORINSKY (1965) überein, daß der Jet durch turbulente-, d.h. Wellenenergie, aufrechterhalten wird. Wie sich zeigen wird, existiert eine solche Akkumulation von Wellenenergie im Jet-Niveau nur bei den langen Wellen mit den Wellenzahlen 2, 3 und 4, die Wellenzahlen 5, 6 und 7 scheinen dem Jet vielmehr Energie zu entziehen. SMAGORINSKYs Theorie stimmt also nur mit den Ergebnissen bei den orographisch bedingten Wellen (hauptsächlich Wellenzahl 3) überein. Da SMAGORINSKY für seine Untersuchungen nur klimatologische Daten verwendet hat, bei denen, wie oben gezeigt wurde, die Wellenzahl 3 am stärksten hervortritt, kann diese Arbeit als Bestätigung der Theorie von SMAGORINSKY angesehen werden.

Nördlich  $65^{\circ}\text{N}$  ist eine Zirkulation von Wellenenergie zu finden, die wegen ihrer geringen Werte nur wenig Bedeutung hat. In der oberen Troposphäre (Abb. 42) und in der Stratosphäre nördlich  $75^{\circ}\text{N}$  sind die Druck- und Vertikalwindwellen um  $\pi/2$  verschoben, d.h., extremaler Druck trifft mit der Nullisoplethe des Vertikalwindes zusammen. Durch diese Phasenverschiebung ergeben sich für den Vertikaltransport in diesem Gebiet nur geringe Werte. Wie weit dieser Effekt physikalischen Gegebenheiten oder systematischen Fehlern zuzuschreiben ist, kann nur schwer entschieden werden, da bei Wellenzahl 1 schon darauf hingewiesen wurde, daß in diesen hohen Breiten der systematische Fehler sehr groß sein kann.

Bei den Theorien über die Lee-Wellen an Gebirgen wird nur wenig über die ageostrophische Komponente des meridionalen Windes gesagt. Die Werte des meridionalen Wellenenergie-transportes zeigen, daß in den Trögen die ageostrophische Komponente nach Norden und in den Rücken nach Süden weist, da nur bei einer solchen Verteilung  $(\overline{pV})$  negativ werden kann.

Ein weiteres Phänomen, daß CHARNEY und DRAZIN bzw. van MIEGHEM hauptsächlich für höhere Wellenzahlen gefunden

haben, nämlich die Undurchlässigkeit der Tropopause für Wellenenergie, ist auch hier bei der Wellenzahl 3 schon gut zu erkennen. Oberhalb der Tropopause betragen die Transportwerte nur noch etwa  $\frac{1}{4}$  der troposphärischen Werte.

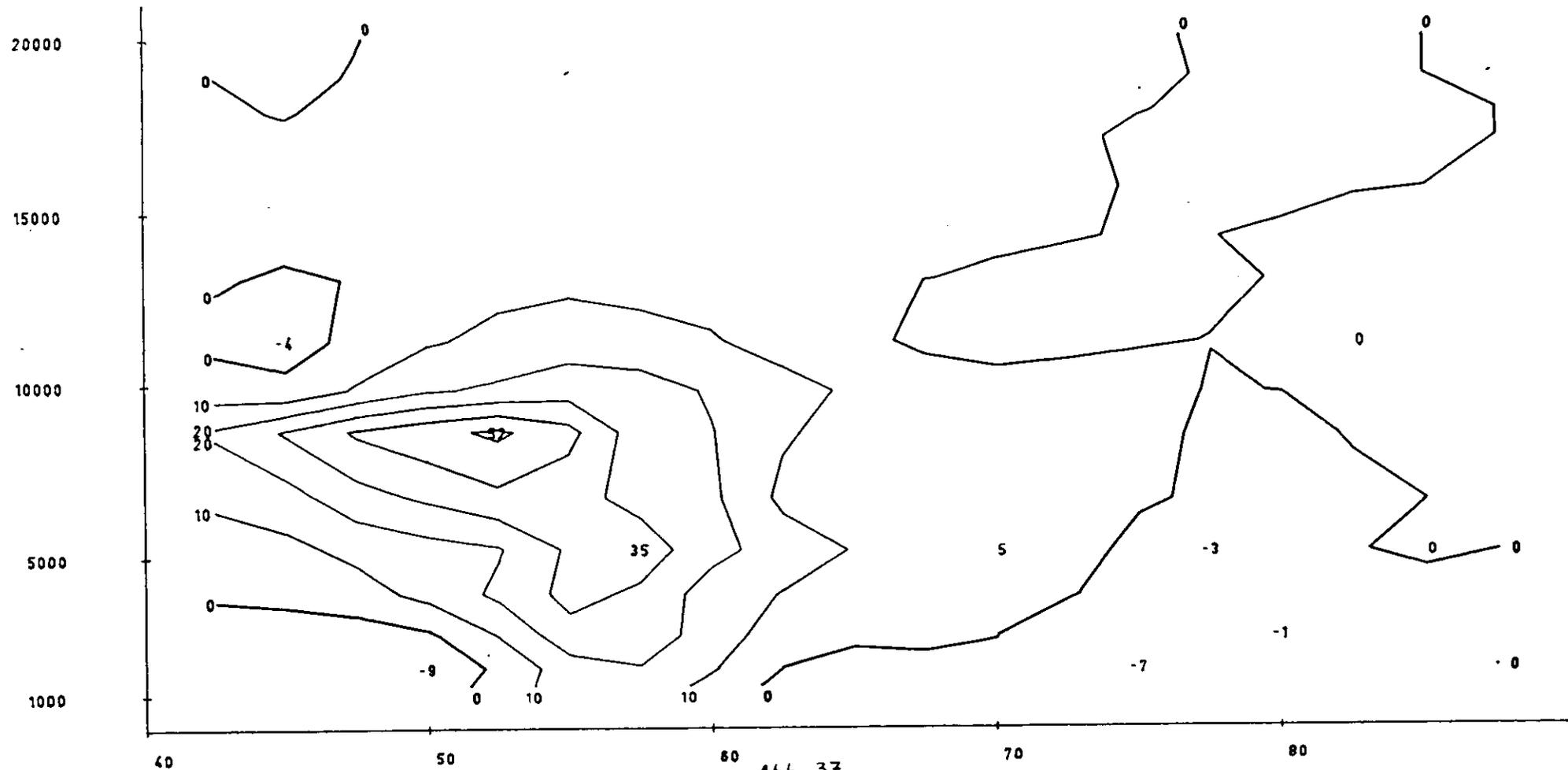


Abb. 37.

-97-

VERTIKALTRANSPORT VON WELLENENERGIE ZONAL GEMITTELT FUER DIE WELLENZAHL 3

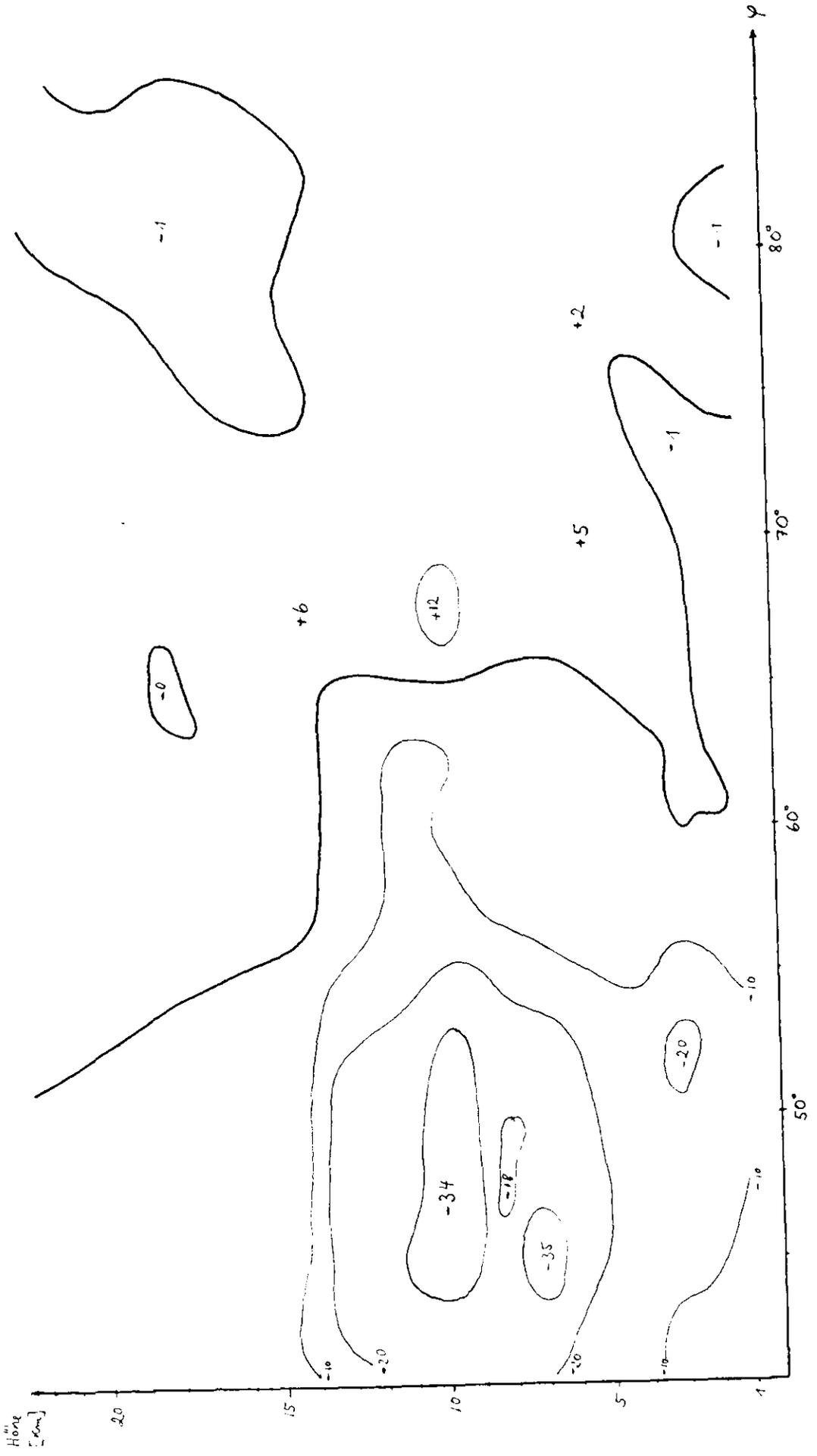
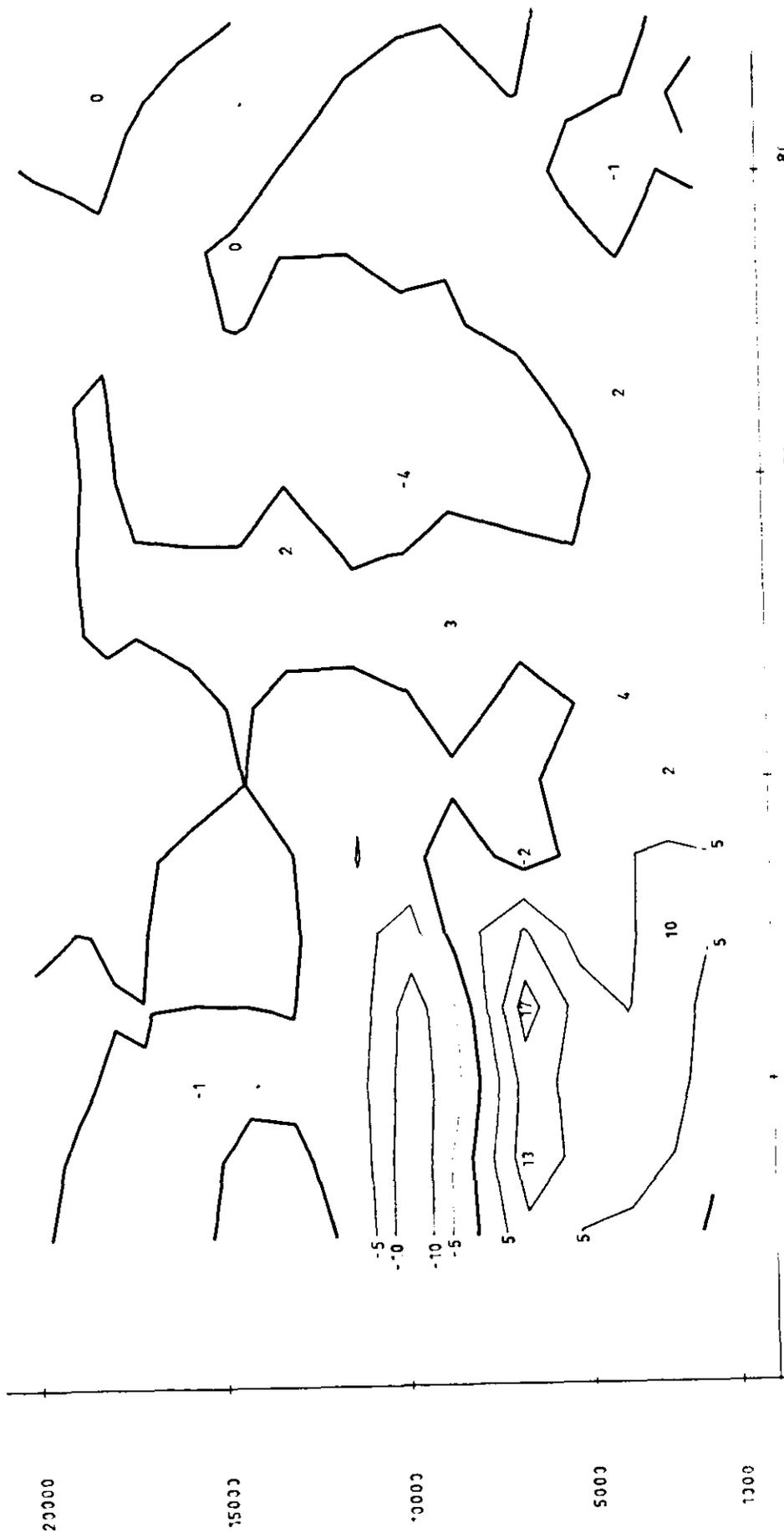


Abb. 38. MERIDIONALTRANSPORT VON WELLENENERGIE (PV) WELLENZAHL 3



Ab b. 39. DIVERGENZ DES WELLENENERGIETRANSPORTES FÜR DIE WELLENZAHL 3

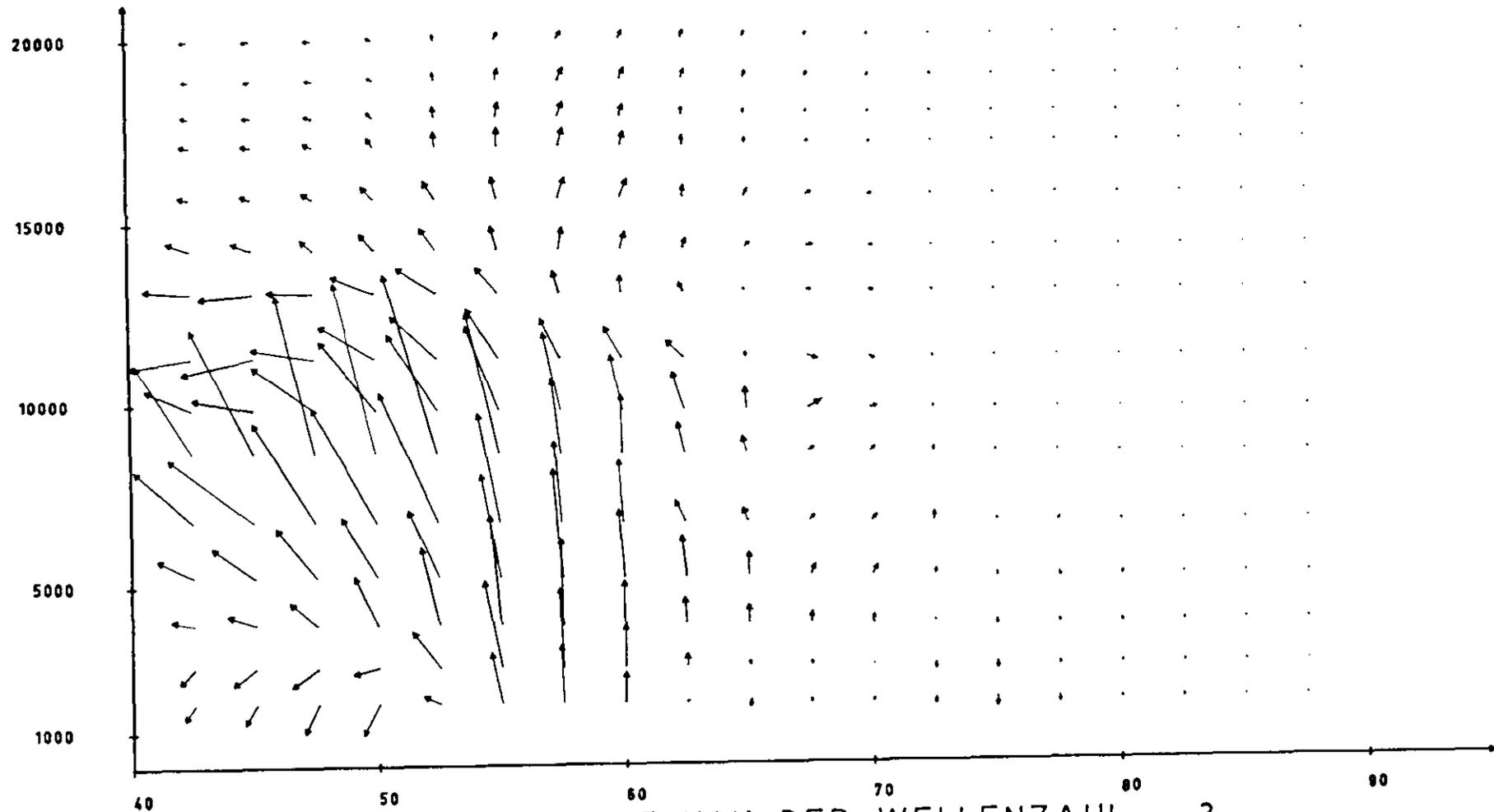


Abb. 40. WELLENENERGIETRANSPORT VON DER WELLENZAHL 3

— 50% —

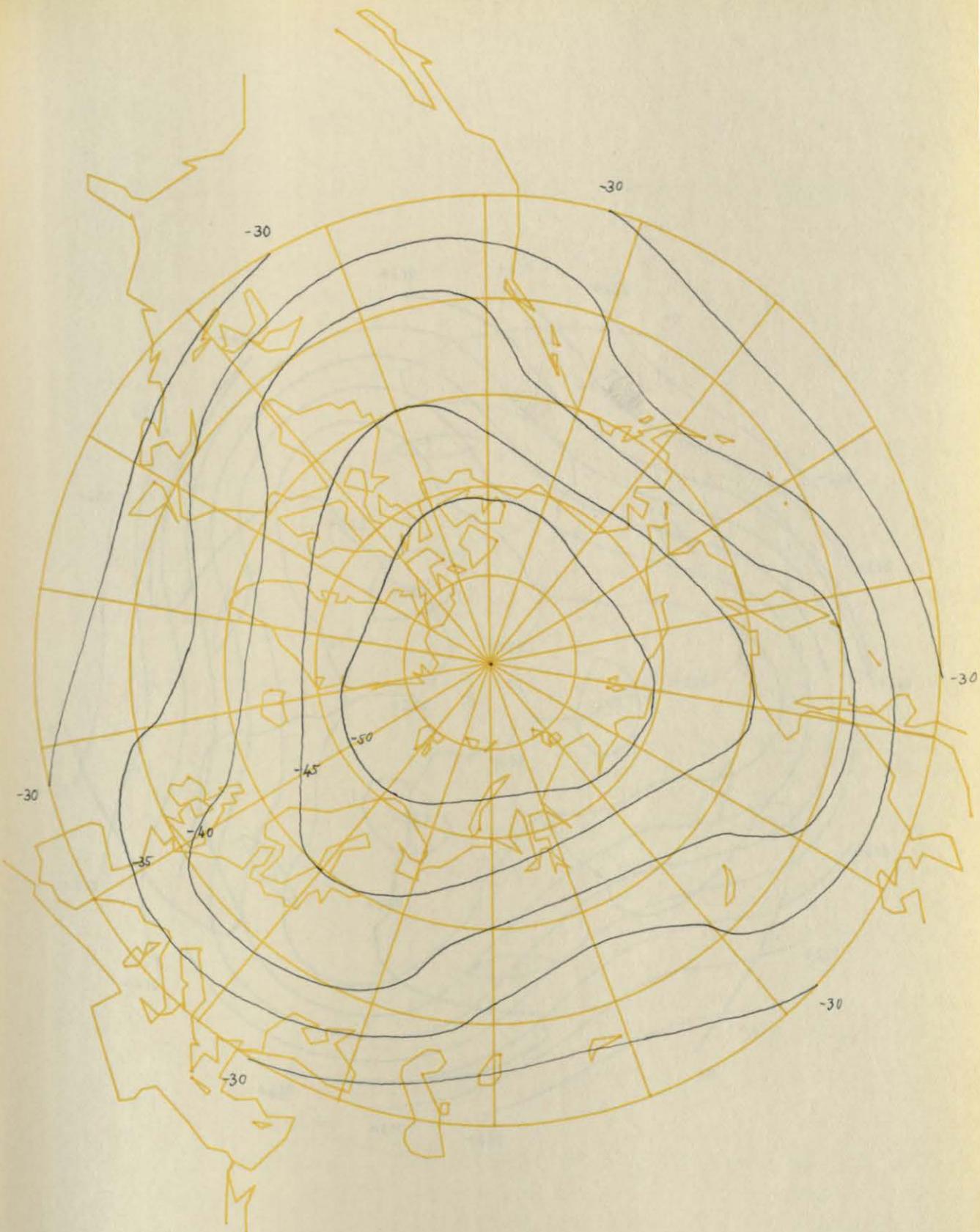


Abb. 41.

T3 6800 M

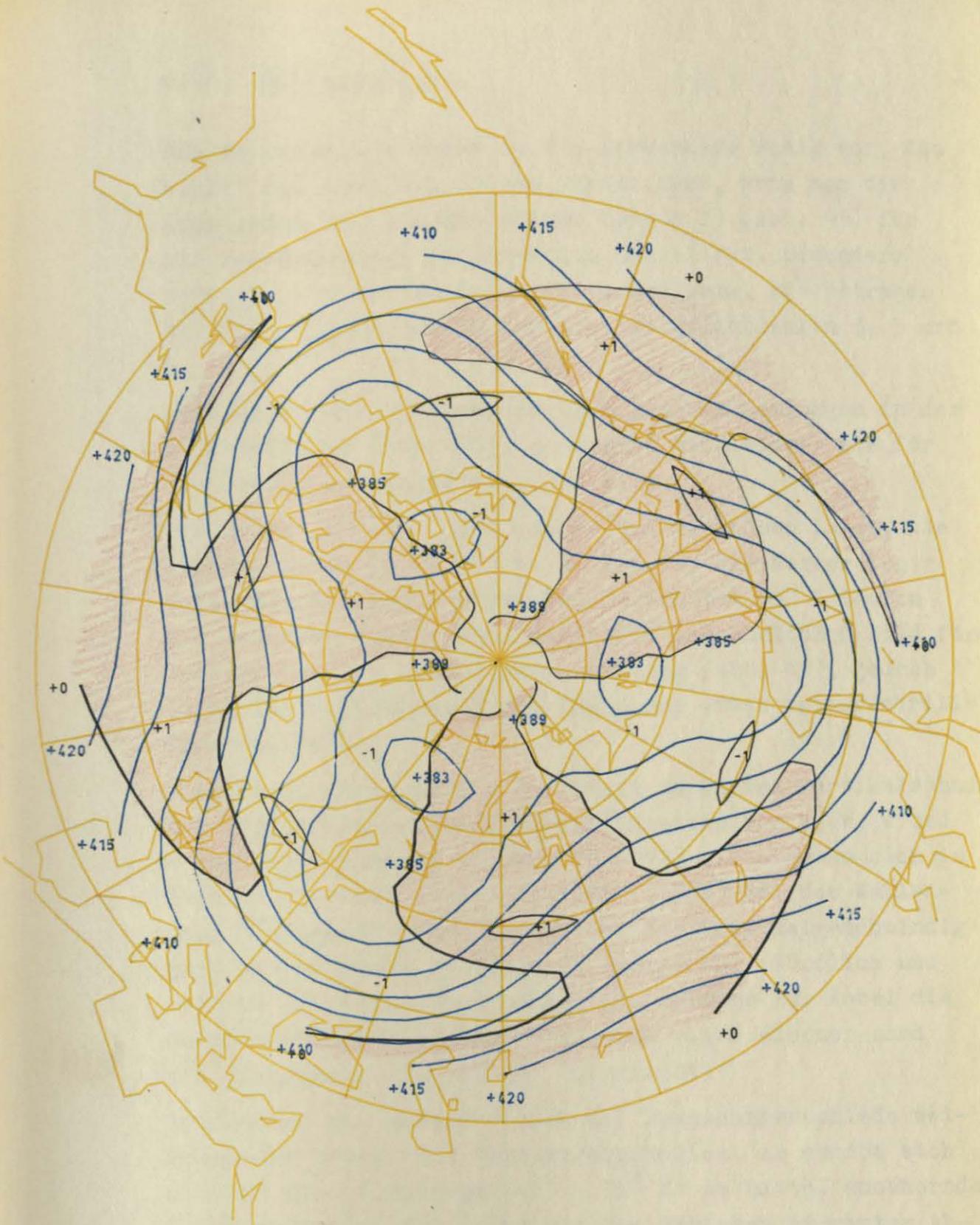


Abb. 42.

P3

W3

6800 M

#### 6.24 Wellenzahl 4

Die Wellenzahl 4 kommt in der Atmosphäre wenig vor, das stellt man auch bei diesem Termin fest, wenn man die Amplituden des Druckes (siehe Anhang I) (Abb. 95) für die verschiedenen Wellenzahlen überblickt. Besonders schwach sind die Wellenenergietransporte, sie betragen nur etwa  $\frac{1}{3}$  der Transporte für die Wellenzahlen 3, 5 und 6.

Betrachtet man die horizontalen Druckverteilungen in der 6800 m-Fläche (Abb. 48), so ergibt sich wieder ein für die Atmosphäre ungewöhnliches Bild:

Die Tröge in  $40^{\circ} - 50^{\circ}N$  liegen auf derselben Länge, wie die Rücken in  $60^{\circ} - 80^{\circ}N$ . In dem für die Meteorologie interessanten Bereich der Polarfront bei  $55^{\circ}N$  laufen die Isobaren fast breitenparallel. Ein ähnliches Bild findet man bei der Temperaturverteilung (Abb. 47), jedoch liegt die breitenparallele Isotherme etwas weiter nördlicher bei  $50^{\circ}N$ .

Diese Verteilung wird noch einmal durch den Vertikalschnitt der Amplituden der Fourierkoeffizienten von  $p$ ,  $t$ ,  $w$  und  $v$  bestätigt (Anhang I, Abb. 95 - 99). Es ergeben sich im Bereich der mittleren Polarfront ( $55^{\circ}N$ ) bei der Wellenzahl 4 minimale Beträge, nur bei der Vertikalgeschwindigkeit ist es nicht so deutlich ausgeprägt. Nördlich und südlich der Polarfront nehmen die Beträge zu, wobei die Amplituden nördlich der Polarfront etwas kleiner sind als diejenigen südlich der Polarfront.

Betrachtet man außerdem noch die Phasenunterschiede zwischen den Druck- und Vertikalwindwellen, so ergibt sich südlich der Polarfront ( $40^{\circ} - 50^{\circ}N$ ) im Mittel annähernde Übereinstimmung der Tröge mit den Gebieten stärkster Absinkbewegung und der Rücken mit den Gebieten stärksten Aufsteigens. Die Übereinstimmung ist nicht vollkommen erfüllt, da die Trogachsen in diesem Breitenbereich eine leichte Vorwärtsneigung aufweisen, während die Linien

extremaler Vertikalgeschwindigkeit rückwärts geneigt sind. (Man vergleiche dazu die entsprechenden Horizontalschnitte in 6800 m Höhe (Abb. 47 und 48)). Nördlich der Polarfront sind die Trogachsen und Linien extremaler Vertikalgeschwindigkeit gleichstark rückwärts geneigt. Hier existiert eine Phasendifferenz zwischen den Druck- und Vertikalwindwellen von annähernd  $\pi/2$ , d.h., daß die Nullisoplethen der Vertikalgeschwindigkeit mit den Trog- und Rückenachsen übereinstimmen. Wegen dieser Phasendifferenz ergeben sich, obwohl die Amplituden des Druckes und der Vertikalgeschwindigkeit (Anhang I, Abb. 95 und 99) nördlich und südlich der Polarfront annähernd gleich groß sind, viel geringere Wellenenergietransporte nördlich als südlich der Polarfront.

Man erkennt am Vektorfeld, daß die wichtigsten Transporte fast nur südlich  $50^{\circ}\text{N}$  auftreten. Nördlich  $55^{\circ}\text{N}$  existiert noch ein sekundäres Maximum an Wellenenergietransport, die Werte sind aber bedeutungslos klein, und ihre Beträge liegen in der Größenordnung des numerischen Fehlers.

Im Bereich des mittleren Jets wird Wellenenergie akkumuliert, d.h., die Wellenzahl 4 unterstützt auch wie die Wellenzahlen 2 und 3 SMAGORINSKYs Theorie, daß der Jet durch turbulente Energie aufrechterhalten wird. Nach diesem Verhalten muß man die Wellenzahl 4, wenn sie auch keinen so plausiblen Zusammenhang mit der Orographie aufzeigt, in ihrer Wirksamkeit den orographischen Wellen zuordnen.

Da die orographisch bedingten Druck- und Vertikalwindverteilung nicht nur durch die Wellenzahlen 2 und 3 dargestellt werden können, wäre es leicht möglich, daß die Ergebnisse der Wellenzahl 4 nur Rechengrößen sind, die die restlichen orographisch bedingten Druck- und Windverteilungen darstellen. Unter diesen Umständen wäre ein Zusammenhang zwischen der Orographie und der Druck- und Windverteilung der Wellenzahl 4 nur schwer zu erkennen. Man muß sogar annehmen, daß auch noch höhere Wellenzahlen Wirkungen der orographisch bedingten Wellen enthalten, doch sind bei den folgenden Wellenzahlen andere Phänomene dominant.

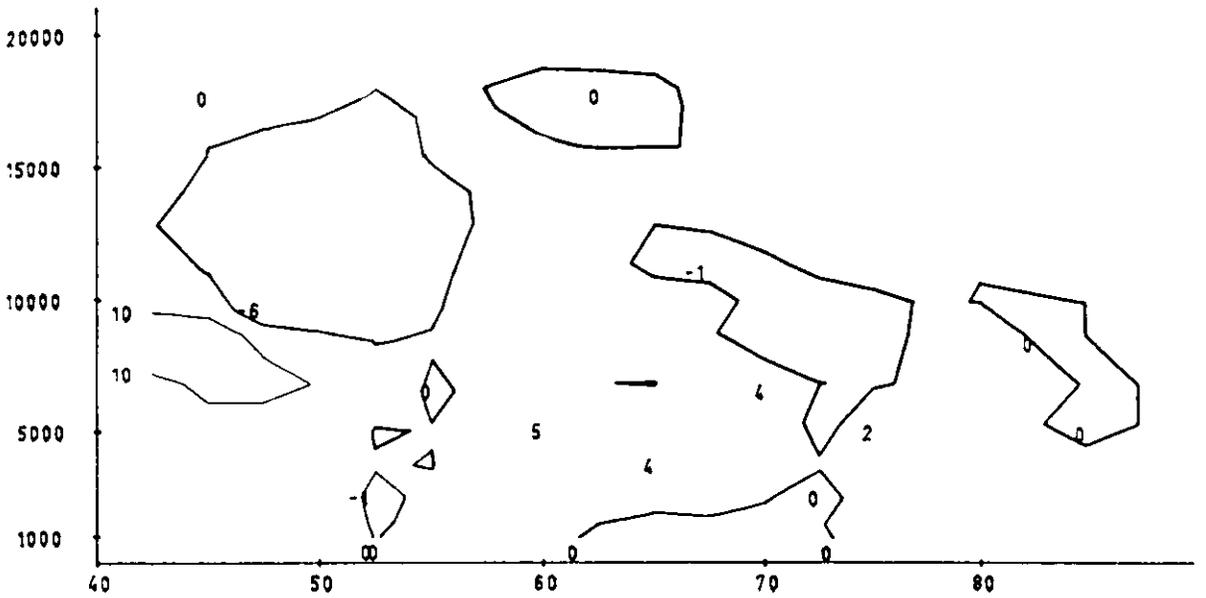


Abb. 43 VERTIKALTRANSPORT VON WELLENENERGIE ZONAL GEMITTELT FUER DIE WELLENZAHL 4

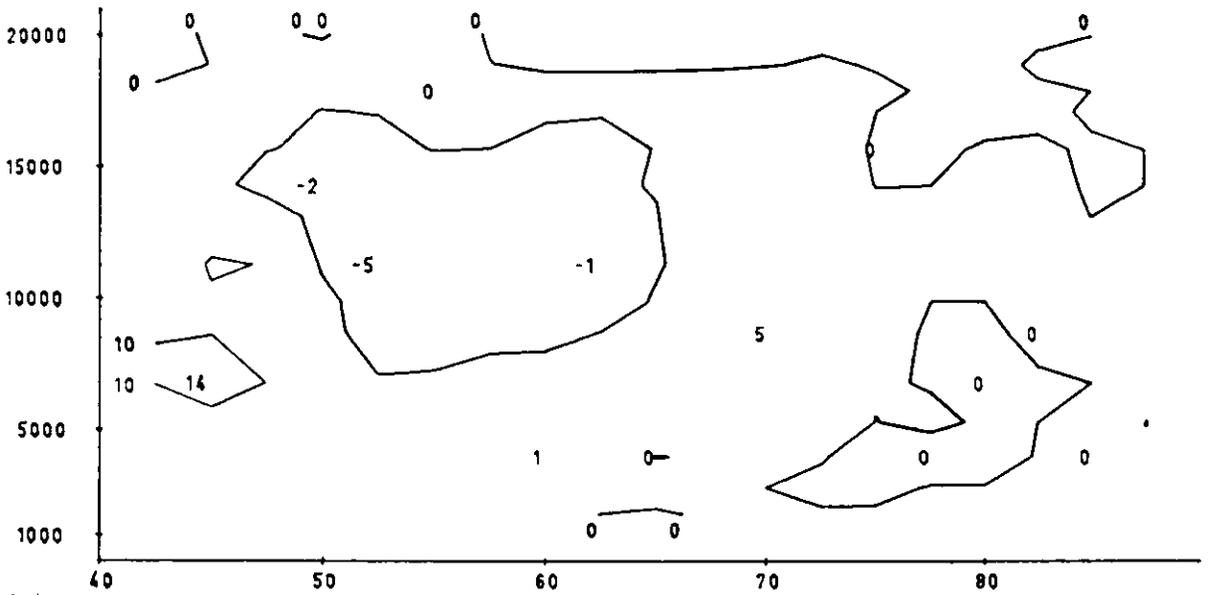


Abb. 44 MERIDIONALTRANSPORT VON WELLENENERGIE ZONAL GEMITTELT FUER DIE WELLENZAHL 4

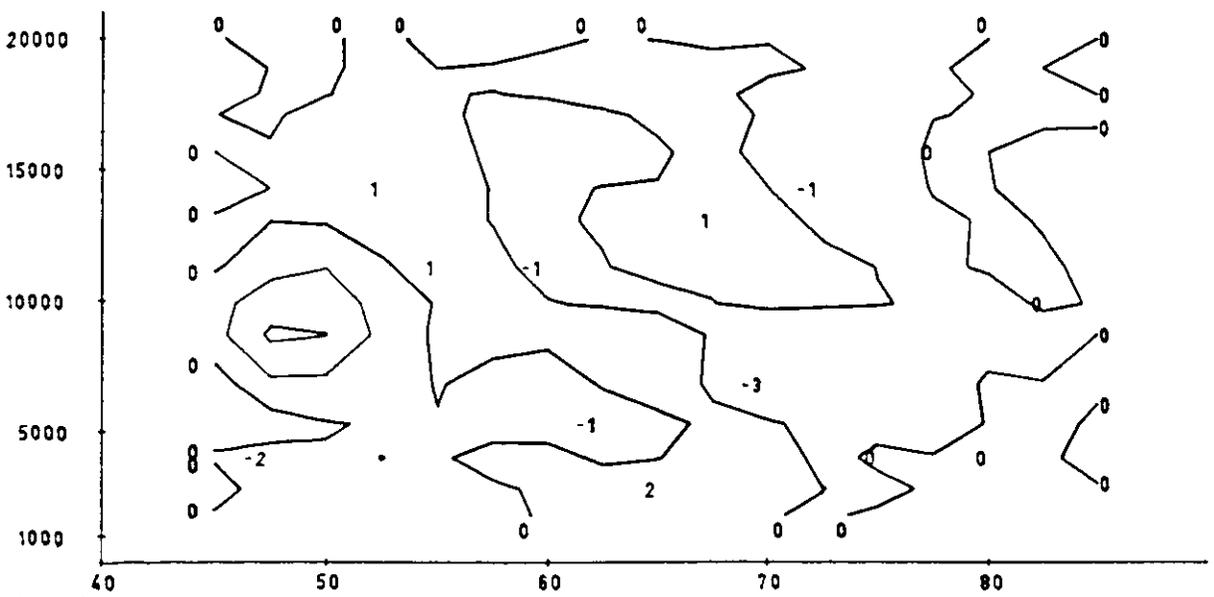


Abb. 45 DIVERGENZ DES WELLENENERGIETRANSPORTES ZONAL GEMITTELT FUER DIE WELLENZAHL 4

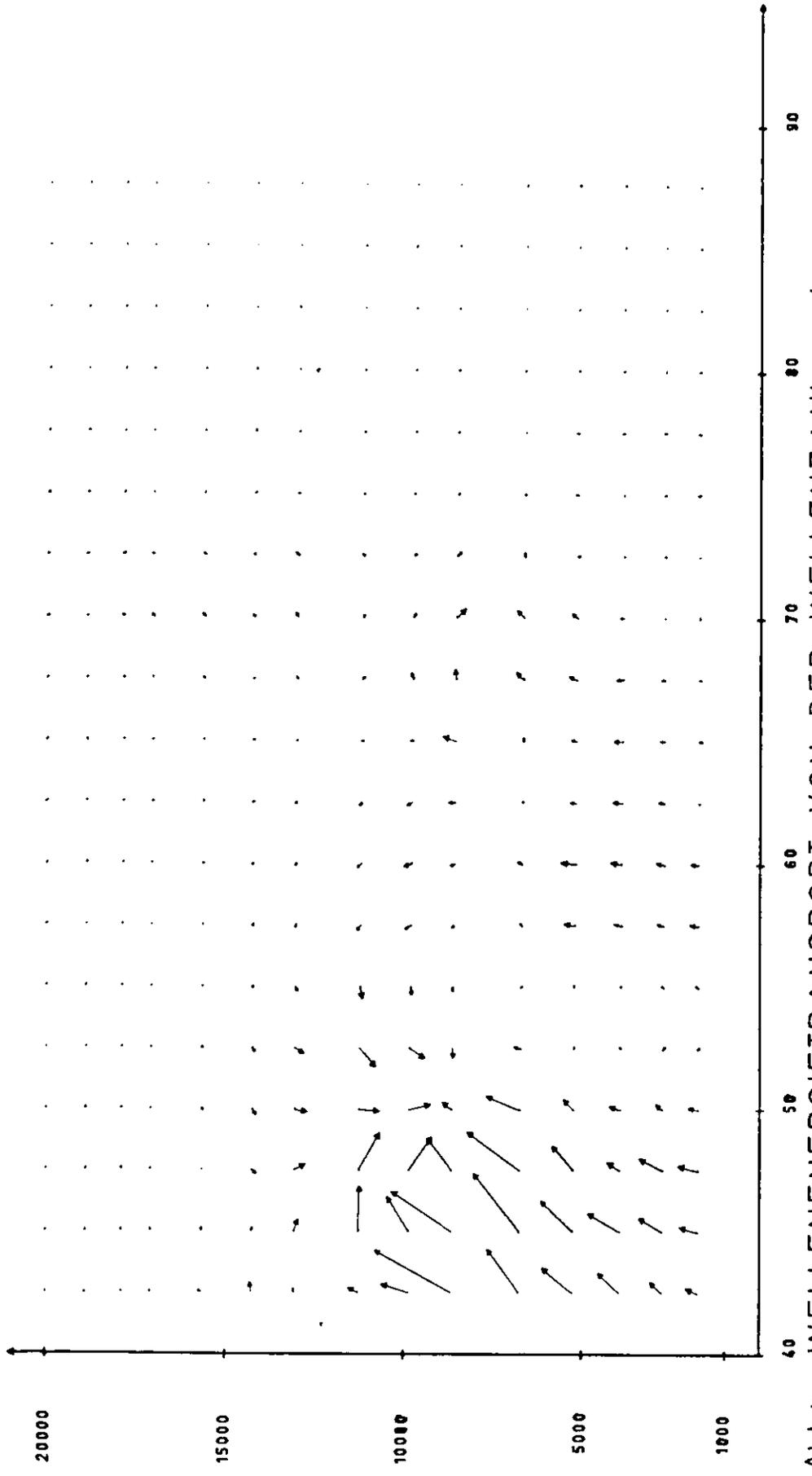


Abb. 46. WELLENENERGIETRANSPORT VON DER WELLENZAHL 4



Abb. 47.

T4

6800 M

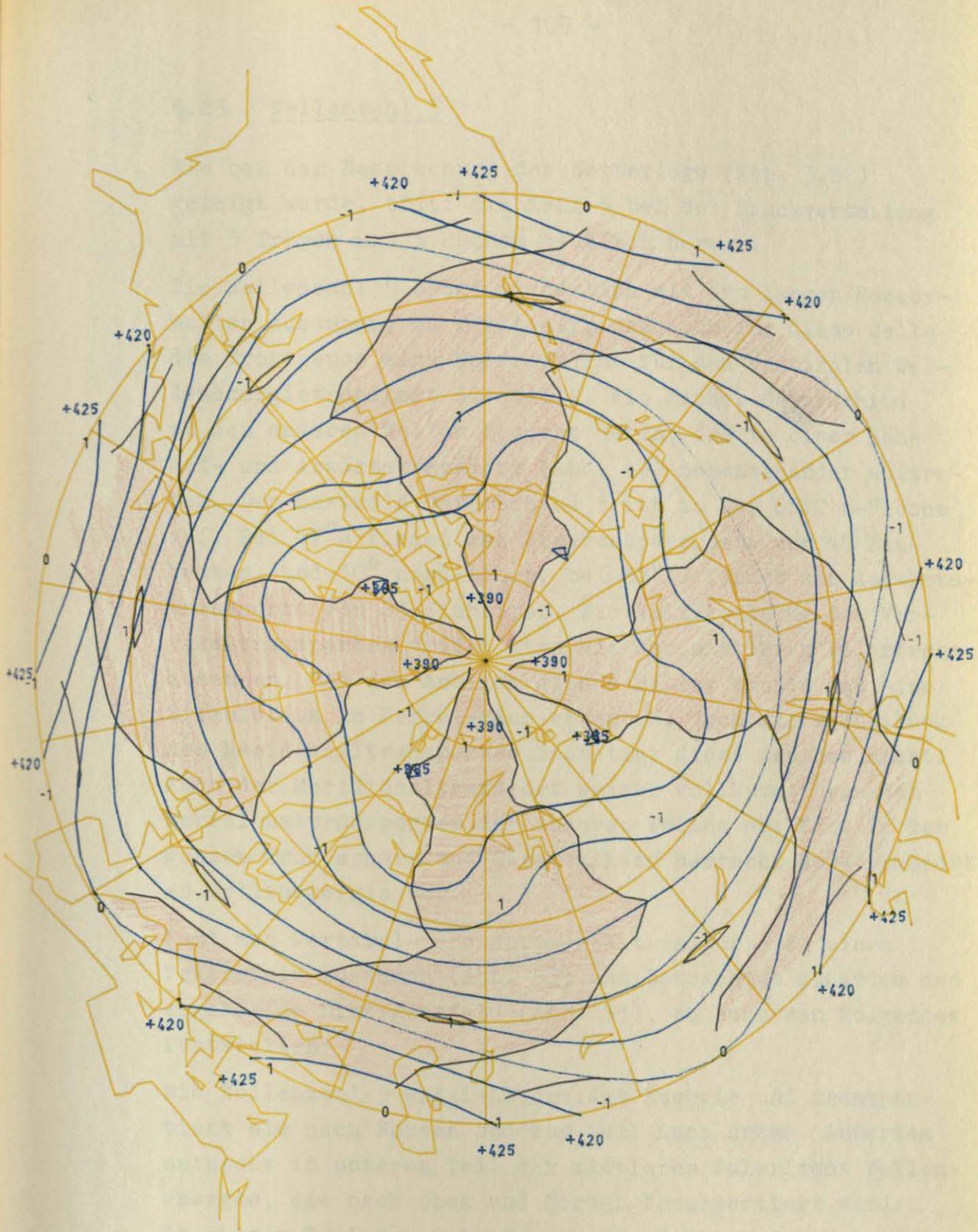


Abb. 48

P4

W4

6800 M

## 6.25 Wellenzahl 5

Wie bei der Besprechung der Wetterlage (Kap. 3.82) gezeigt wurde, tritt die Zahl 5 bei der Druckverteilung mit 5 Trüben und 5 Rücken deutlich hervor.

Die Wellenzahl 5 hängt sicherlich mit den langen Rossbywellen zusammen, es fällt auf, daß auch für diese Welle die Tropopause eine Sperrschicht für den vertikalen Wellenenergie-transport darstellt. Ein großer Unterschied zu den anderen Wellen besteht darin, daß in einer Höhe Auf- und Abwärtstransport (Abb. 49) nebeneinander auftreten. Der maximale Unterschied tritt in der 6800 m-Fläche auf. Bei  $47^{\circ}\text{N}$  findet man Abwärtstransporte von 49 Einheiten, und  $10^{\circ}$  nördlicher, bei  $57^{\circ}\text{N}$ , findet man Aufwärtstransporte von 23 Einheiten. Die Nullisoplethe des Vertikaltransportes trifft etwa mit der mittleren Polarfront zusammen. Bei dem Anblick dieses Bildes könnte man eine Zirkulation im Ferrel-Sinn erwarten, doch die Verteilung des Meridionaltransportes Bestätigt diese Annahme nicht. Auch der Meridionaltransport weicht vollkommen von den Meridionaltransporten der anderen Wellen ab: Fast in der ganzen Troposphäre und Stratosphäre herrscht Nordtransport an Wellenenergie vor.

Fast man Vertikal- und Horizontaltransporte zu einem Vektorfeld zusammen (Abb. 52) und betrachtet außerdem das zugehörige Divergenzfeld (Abb. 51), so kann man Folgendes feststellen:

Die Wellenzahl 5 entzieht dem Jet Energie und transportiert sie nach Norden und zum Teil nach unten. Außerdem entsteht im unteren Teil der mittleren Polarfront Wellenenergie, die nach oben und Norden transportiert wird. Im oberen Teil der Polarfront und nördlich davon trifft dieser Transport mit dem aus dem Jet-Strom zusammen, und es wird Energie akkumuliert. Über deren Verbleiben kann hier noch nicht ausgesagt werden.

Zwischen  $57^{\circ}\text{N}$  und  $75^{\circ}\text{N}$  scheint eine schwache Energiezirkulation zu existieren, bei der der untere Teil wegen

der fehlenden Daten nicht belegt ist.

In der unteren Stratosphäre südlich  $67^{\circ}\text{N}$  erkennt man einen ziemlich gleichmäßigen Nordtransport von Wellenenergie, die Energie wird hauptsächlich zwischen  $65^{\circ}\text{N}$  und  $70^{\circ}\text{N}$  akkumuliert, jedoch weisen dieser Transport und diese Divergenz nur geringe Werte auf.

Um für diese Verteilung der Wellenenergie Transporte eine Erklärung zu finden, muß man auf die Druck- und Windverteilung zurückgehen. Sieht man sich die Druckverteilung in 6800 m Höhe (Abb. 54) an, die durch die Wellenzahl 5 erzeugt wird, so findet man, daß die Trogachse vorwärts geneigt ist. Eine solche Neigung kommt in der Atmosphäre fast nur bei Wellen vor, die bereits instabil geworden sind. (Die in dieser Arbeit untersuchte Wetterlage besteht aus Trögen bzw. Tiefs, die in ihrer Entwicklung schon sehr weit fortgeschritten sind). Die Annahme, daß die Wellenzahl 5 die absterbenden Tröge bzw. Tiefs verkörpert, kann die besondere Verteilung des meridionalen und vertikalen Wellenenergie Transportes erklären helfen.

Es ist bekannt, daß bei einem Abschluß einer Zyklonenserie oder auf der Rückseite einer sich auffüllenden Zentralzyklone Kaltluft im Höhentrog nach Süden austropt. Ein solcher Kaltluftvorstoß ist mit einer ageostrophischen Südkomponente des Windes innerhalb des Höhentrog und einer Absinkbewegung verbunden. Entsprechend findet man auf der Vorderseite der Zyklone im Höhenrücken einen Warmluftvorstoß, der mit einer Aufwärtsbewegung verbunden ist. Jedoch ist dieser Warmluftvorstoß meistens weniger stark ausgeprägt, oder wie sich später genauer zeigen wird, ist der Warmluftvorstoß nicht am Boden zu finden, sondern in größeren Höhen. Eine solche Druck-Wind-Verteilung ergibt nördlich der Polarluft einen Aufwärtstransport von Wellenenergie ( $\overline{\rho w}$ ) und einen Nordtransport ( $\overline{\rho v}$ ), da bei einem zonalen Mittel von ( $\overline{\rho v}$ ) nur die ageostrophische Komponente zum Tragen kommt.

Betrachtet man die berechnete horizontale Verteilung der Vertikalgeschwindigkeit in 6800 m (Abb. 54), so findet

man wie beim Druck eine Vorwärtsneigung der Linien extremer Vertikalgeschwindigkeit, jedoch in viel stärkerem Ausmaß, so daß sich diese Linien fast wie Spiralen um den Pol winden. Dieser starke Unterschied in der Achsenneigung zwischen dem Druck- und Vertikalwindfeld macht sich in der oben gefundenen Breitenabhängigkeit des Vertikaltransportes der Wellenenergie bemerkbar.

Südlich  $52^{\circ}\text{N}$  treffen Trog und Aufwind bzw. Rücken und Absinken zusammen, daraus resultiert ein abwärts gerichteter Vertikaltransport. Zwischen  $52^{\circ}$  und  $62^{\circ}\text{N}$  ist es genau umgekehrt. Noch weiter nördlich ist die Druck- und Vertikalwindwelle um  $\pi/2$  verschoben, d.h., die Extrema der Druckwelle treffen mit der Nullisoplethe des Vertikalwindes zusammen, so daß sich bei einer zonalen Mittelbildung des Vertikaltransportes ( $\overline{\rho w}$ ) Null ergibt.

- RIEHL und FULTZ haben 1958 an Tankexperimenten festgestellt, daß die Massenzirkulation im Tank, wenn man die Geschwindigkeit entlang konzentrischer Kreise mittelt, aus drei Zirkulationsrädern mit direkter Zirkulation am Äquator und am Pol und einer indirekten Zirkulation in mittleren Breiten besteht. Mittelt man aber die Geschwindigkeit entlang der Jet-Achse und auf parallelen Kurven dazu, so ergibt sich nur eine einzige direkte Zirkulation. Die bisherigen Ergebnisse dieser Arbeit regen dazu an, eine solche Mittelung auch für die Atmosphäre zu versuchen. Da es schwierig ist, für eine Partialwelle die Jet-Achse zu finden, wird hier entlang Isothermen gemittelt, die, wie es sich bei synoptischen Analysen gezeigt hat, fast immer Parallel zur Jet-Achse verlaufen.

Bei einer solchen Mittelung ergeben sich Meridionalschnitte der Windfelder  $\tilde{w}$  und  $\tilde{v}$  (Abb. 56).  $\tilde{w}$  bedeutet die mittlere Vertikalgeschwindigkeit entlang einer Isotherme, und  $\tilde{v}$  die mittlere horizontale Komponente der Geschwindigkeit, welche die Isotherme senkrecht überquert. Als Breite wurde die mittlere Lage der Isotherme genommen.

Die Werte von  $\tilde{w}$  und  $\tilde{v}$  unterscheiden sich um den Faktor 1000. Dieser Größenunterschied sagt noch nichts darüber aus,

welche der beiden Geschwindigkeitskomponenten den größeren Einfluß auf die Massenzirkulation hat. Man muß wie in Kap. 6.1 die unterschiedlichen Dimensionen der horizontalen und vertikalen Raumkoordinaten beachten. Zusätzlich zu den Korrekturen von Kap. 6.1 muß noch die Dichteabnahme mit der Höhe berücksichtigt werden. Da hier nur ein kurzer Überblick gezeigt werden soll, werden solche Korrekturen nicht verwendet.

Fügt man beide Zahlenfelder zu einem Vektorfeld (Abb. 57) zusammen, so findet man nördlich der Polarfront (die mittlere Polarfront und die mittlere Tropopause ist gestrichelt eingezeichnet) vorwiegend absinkende Luft mit Nordwind, wobei die stärksten Nordwinde in der unteren Troposphäre liegen. Südlich der Polarfront herrschen starke Aufwinde mit Südwind vor, dabei sind die stärksten Südwinde in der mittleren und oberen Troposphäre. Man findet keine geschlossene Zirkulation, sondern ein Strömungsbild, wie man es sich von einer instabilen Welle vorstellt:

Kaltluftausbruch in der unteren Troposphäre und Warmluftvorstoß in die obere Troposphäre, was zu einer weiteren Verflachung und schließlich Auflösung der Front führt.

Da der Warmluftvorstoß in einem höheren Niveau als der Kaltluftausbruch vor sich geht, empfindet man den Kaltluftausbruch fast immer stärker als den Warmluftvorstoß.

Aus den bisherigen Ergebnissen geht eindeutig hervor, daß die Wellenzahl 5 zu den instabilen Wellen gehört und daß bei dieser Welle die Wellenenergie Transporte von den Kaltluftausbrüchen am Boden und den Warmluftvorstößen in der Höhe geprägt sind.

Diese Ergebnisse gelten für den hier untersuchten Termin. Es wäre interessant, die Allgemeingültigkeit dieser Resultate zu überprüfen.

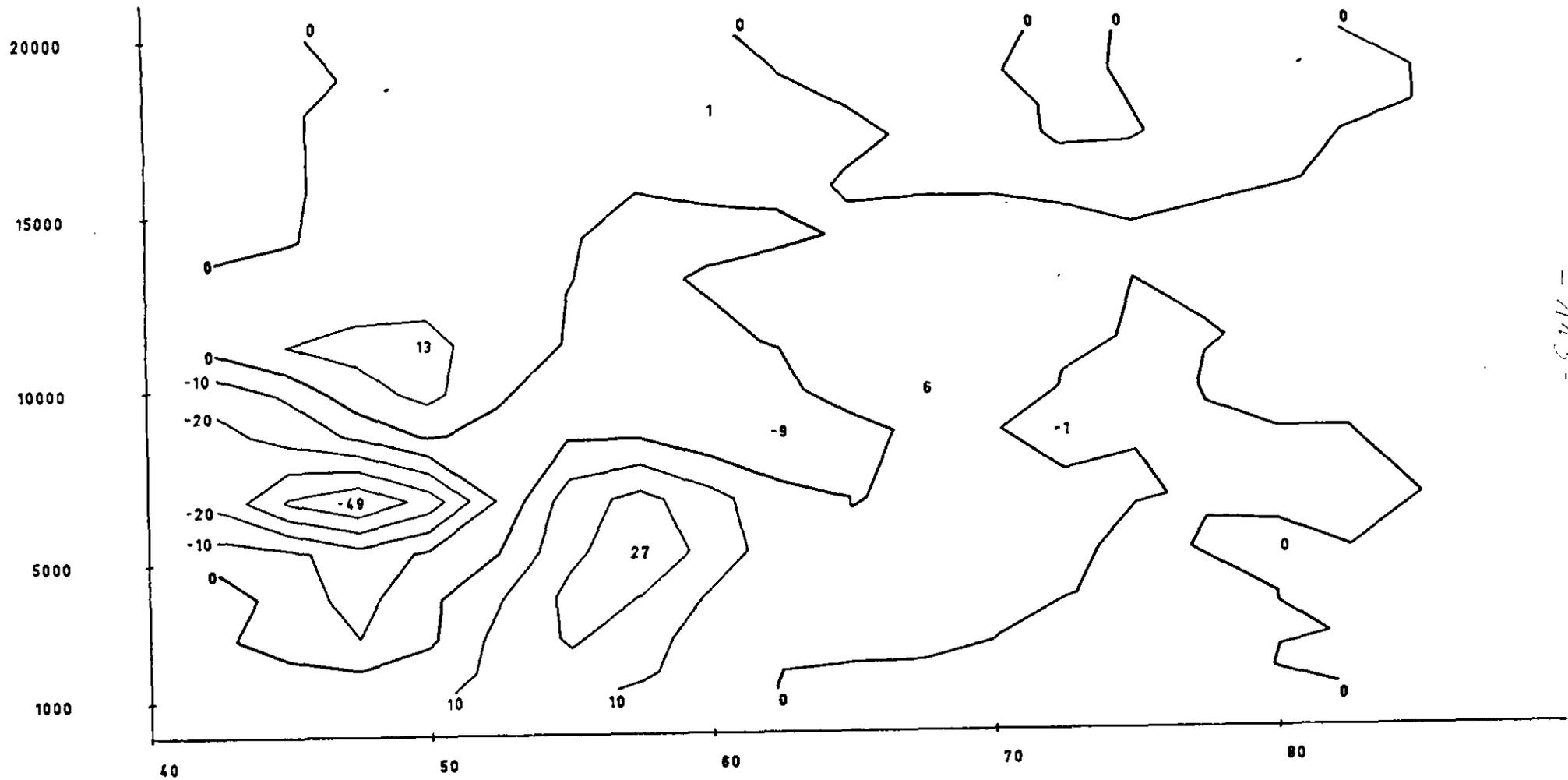


Abb. 49.

VERTIKALTRANSPORT VON WELLENENERGIE ZONAL GEMITTELT FUER DIE WELLENZAHL 5

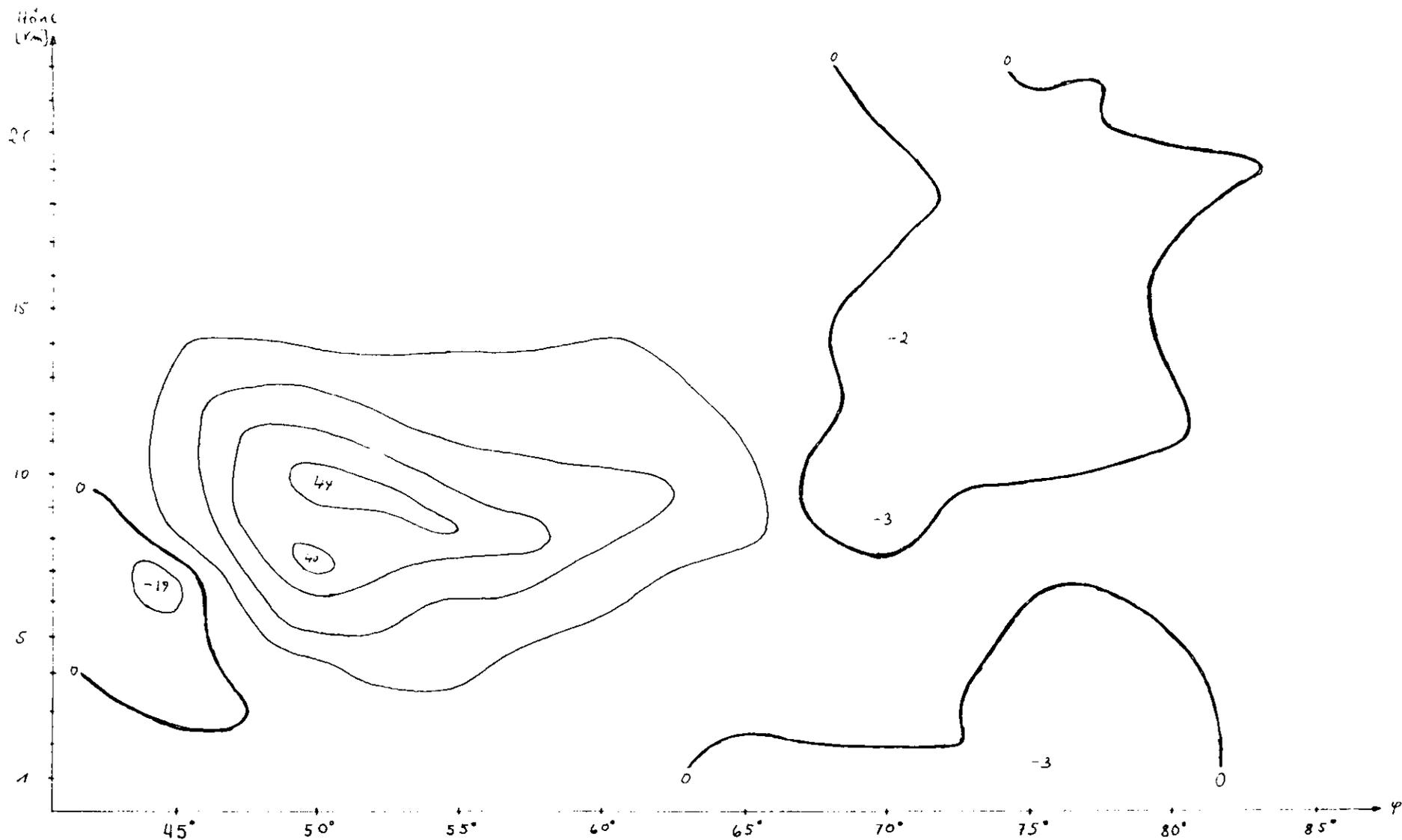


Abb. 50. MERIDIONAL TRANSPORT VON WELLENENERGIE  $\overline{(PV)}$  ZONAL GEMITTELT FÜR DIE WELLENZAHL 5



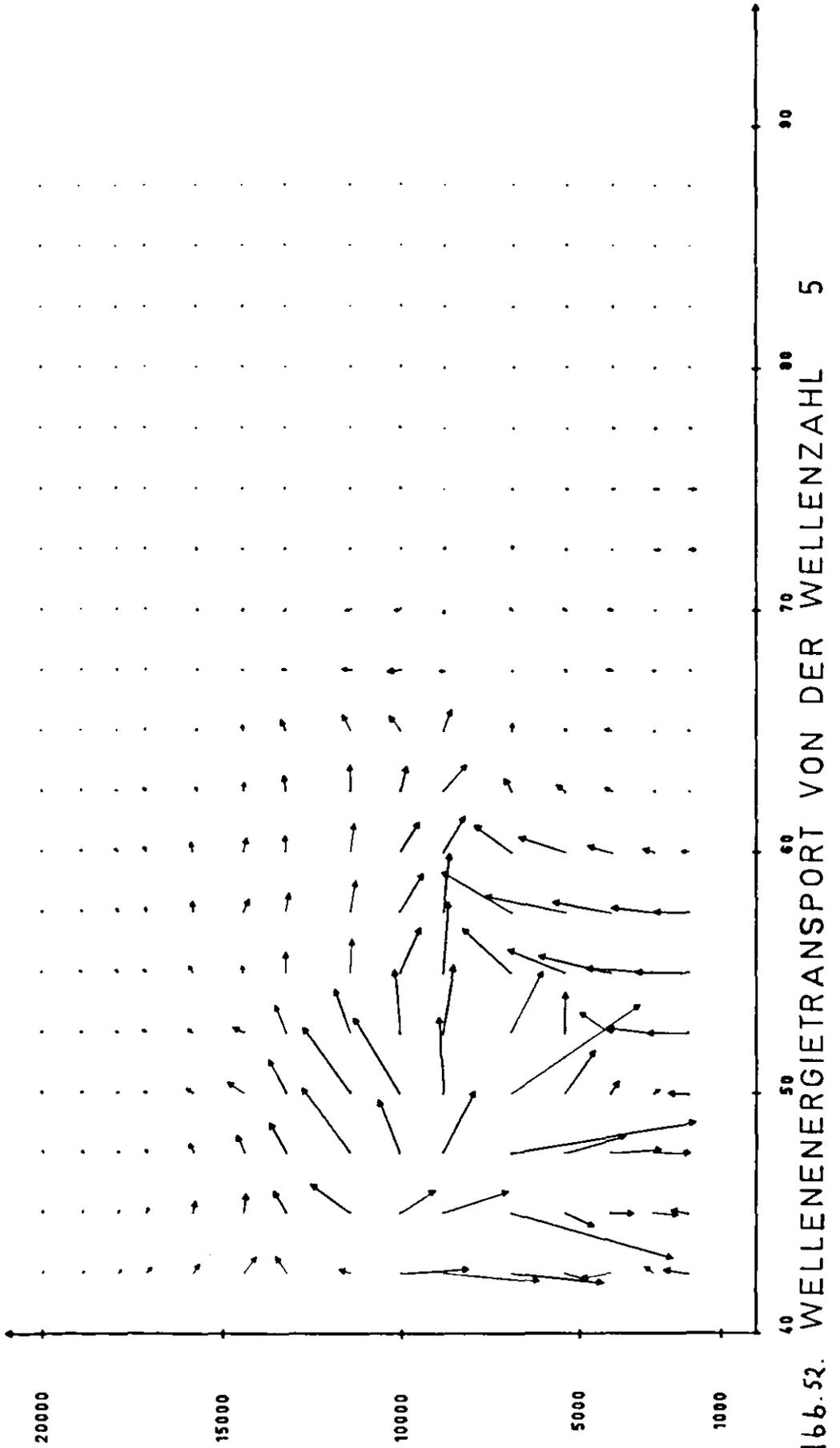


Abb. 52.

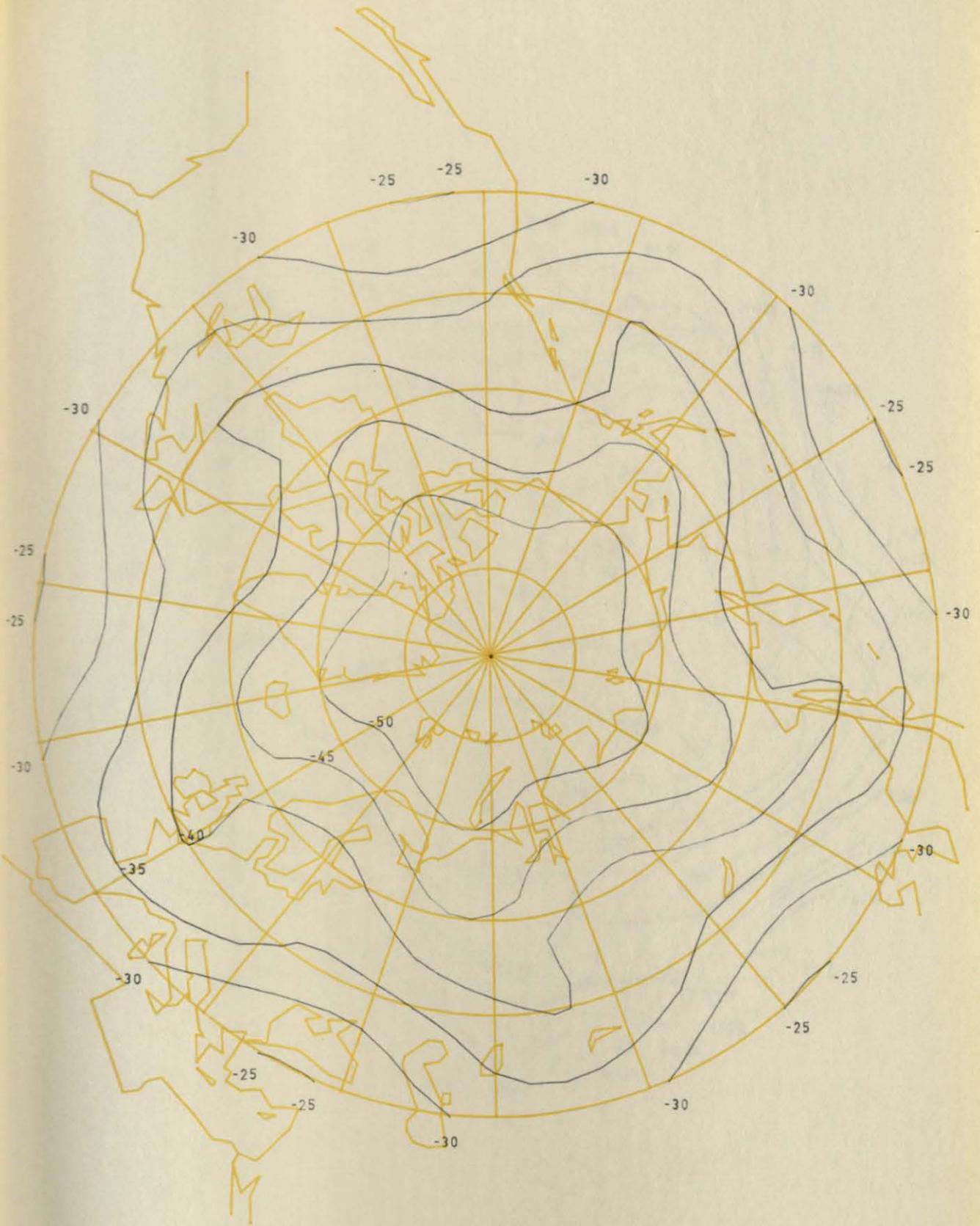


Abb. 53.

T5 6800 M

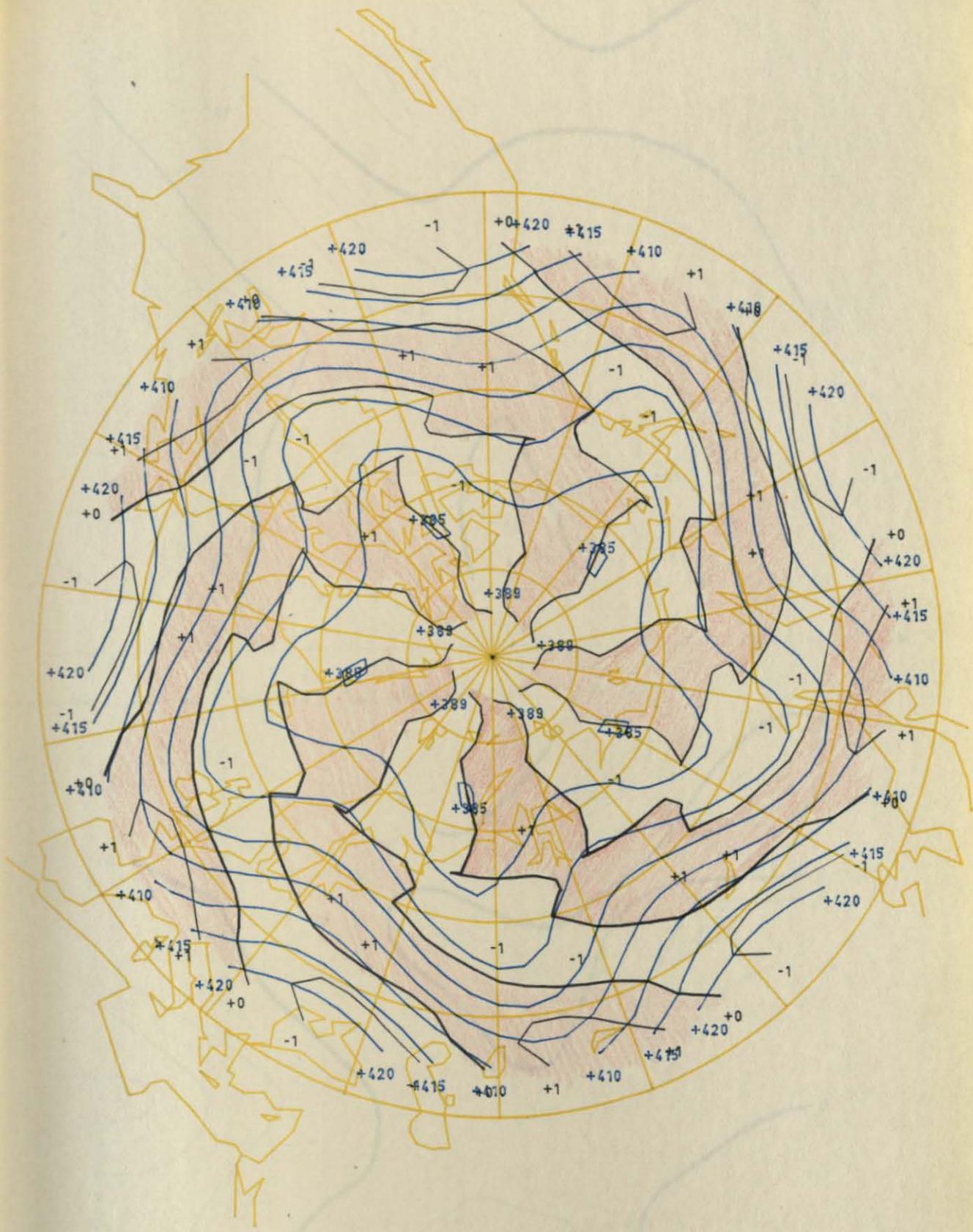
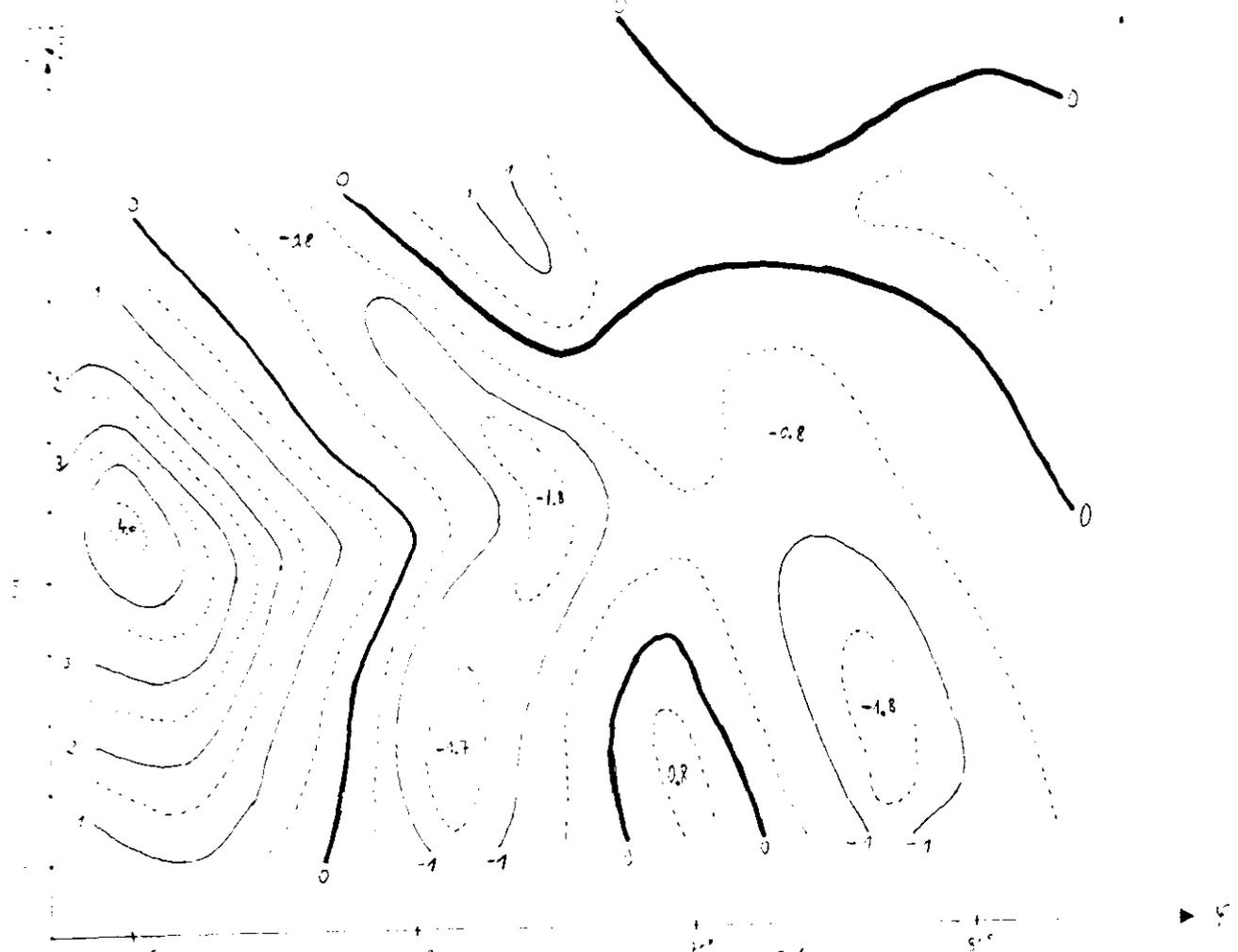


Abb. 54.

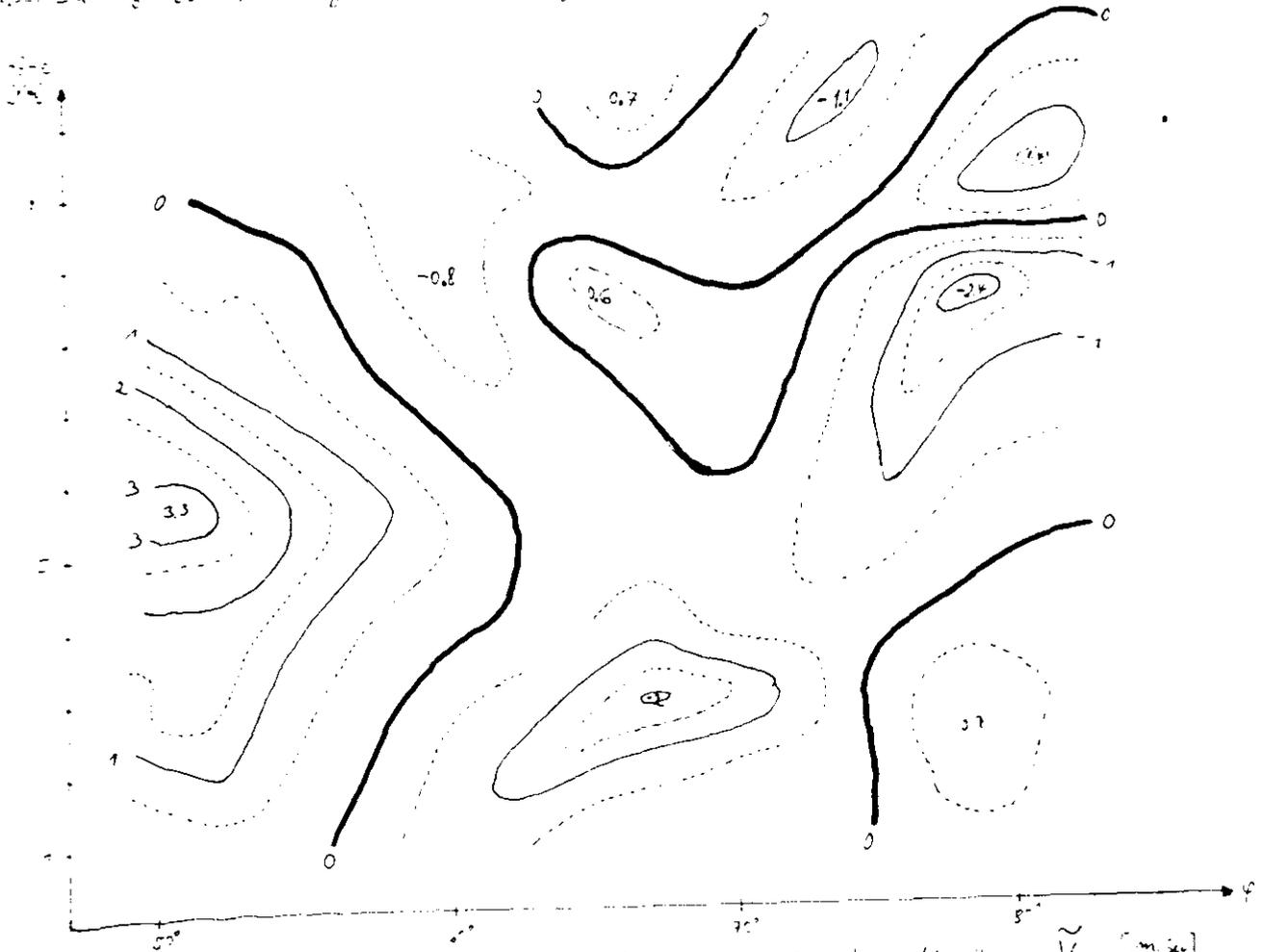
P5

W5

6800 M



25. Entlang Isothermen gemittelte Vertikalgeschwindigkeit  $\tilde{W}$  [mm/sec]



26. Entlang Isothermen gemittelte  $\alpha$ -isotherme Horizontalgeschwindigkeit  $\tilde{V}$  [m/sec]



Abb. 57  $\vec{W}$  und  $\vec{V}$  als Vektoren zusammengefaßt

## 6.26 Wellenzahl 6

Die Wellenzahl 6 repräsentiert die kürzeste wirksame Wellenlänge, weil Druck- und Temperaturwellen mit kürzeren Wellenlängen, die sicherlich vorhanden sind, nicht in Phase liegen und daher bei einer Fourieranalyse herausfallen. Hierzu vergleiche man die Amplituden des Druckes und der Temperatur für verschiedene Wellenzahlen (Anhang I, besonders Abb. 105, 106, 110 und 111). Man erkennt besonders bei den Druckamplituden eine sprunghafte Abnahme beim Übergang von der Wellenzahl 6 auf 7. Man kann deshalb die Wellenzahl 6 den kürzeren (meistens jungen) Zyklonwellen zuschreiben. Hier lohnt es sich, noch einmal die Ungenauigkeit der Berechnungen zu erwähnen. Es ist bekannt, daß die kurzen Wellen am wenigsten stationär sind. Da für die Berechnung Stationarität vorausgesetzt wurde, wird der systematische Fehler bei der Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten bei den höheren Wellenzahlen am größten sein. Außerdem wurde bei der Fehlerabschätzung der Vertikalgeschwindigkeit gezeigt, daß auch der numerische Fehler mit der Wellenzahl wächst.

Die Ergebnisse der Untersuchungen über die kürzeren Wellen müssen daher mit größerer Vorsicht behandelt werden als die über die langen Wellen.

Im Jet-Niveau und oberen Teil der Polarfront existiert eine starke Quelle an Wellenenergie-transport und zwar wird diese Energie hauptsächlich nach unten und Süden transportiert. Dieser Transport trifft unterhalb des Jets auf den Aufwärtstransport, der vom Boden kommt. Er akkumuliert Energie in einem großen Bereich, da der meridionale Wellenenergie-transport nicht genügend divergent ist.

In der Nähe der Polarfront, mit einem großen Breitenbereich, findet man in der unteren Troposphäre einen starken Aufwärtstransport von mechanischer Wellenenergie.

Nördlich der Polarfront ist wieder eine Zirkulation angedeutet, jedoch sind die Beträge zu klein, als daß man die Zirkulation als gesichert ansehen kann.

Das Quellgebiet am Boden stimmt mit der Annahme überein, daß die Wellenzahl 6 die kurzen (jungen) Zyklonenwellen repräsentiert, weil sie ihre größte Intensität in Bodennähe haben.

Auch die horizontale Druckverteilung (Abb. 62) der Wellenzahl 6 zeigt, daß es sich um junge Zyklonen handelt. Südlich  $60^{\circ}\text{N}$  sind die Tröge bzw. Rücken rückwärts geneigt, wie man es bei jungen Zyklonen kennt. Die Vorwärtsneigung nördlich  $60^{\circ}\text{N}$  ist ohne Bedeutung, da hier die Amplituden zu gering sind.

Bei der Wellenzahl 6 wird noch einmal deutlich, was bei den Wellenzahlen 2 und 3 schon angedeutet wurde, nämlich daß die Tropopause eine Sperrschicht für die Wellenenergie darstellt. Im Tropopausenniveau findet man (siehe Vektordarstellung) keine Vertikaltransporte mehr.

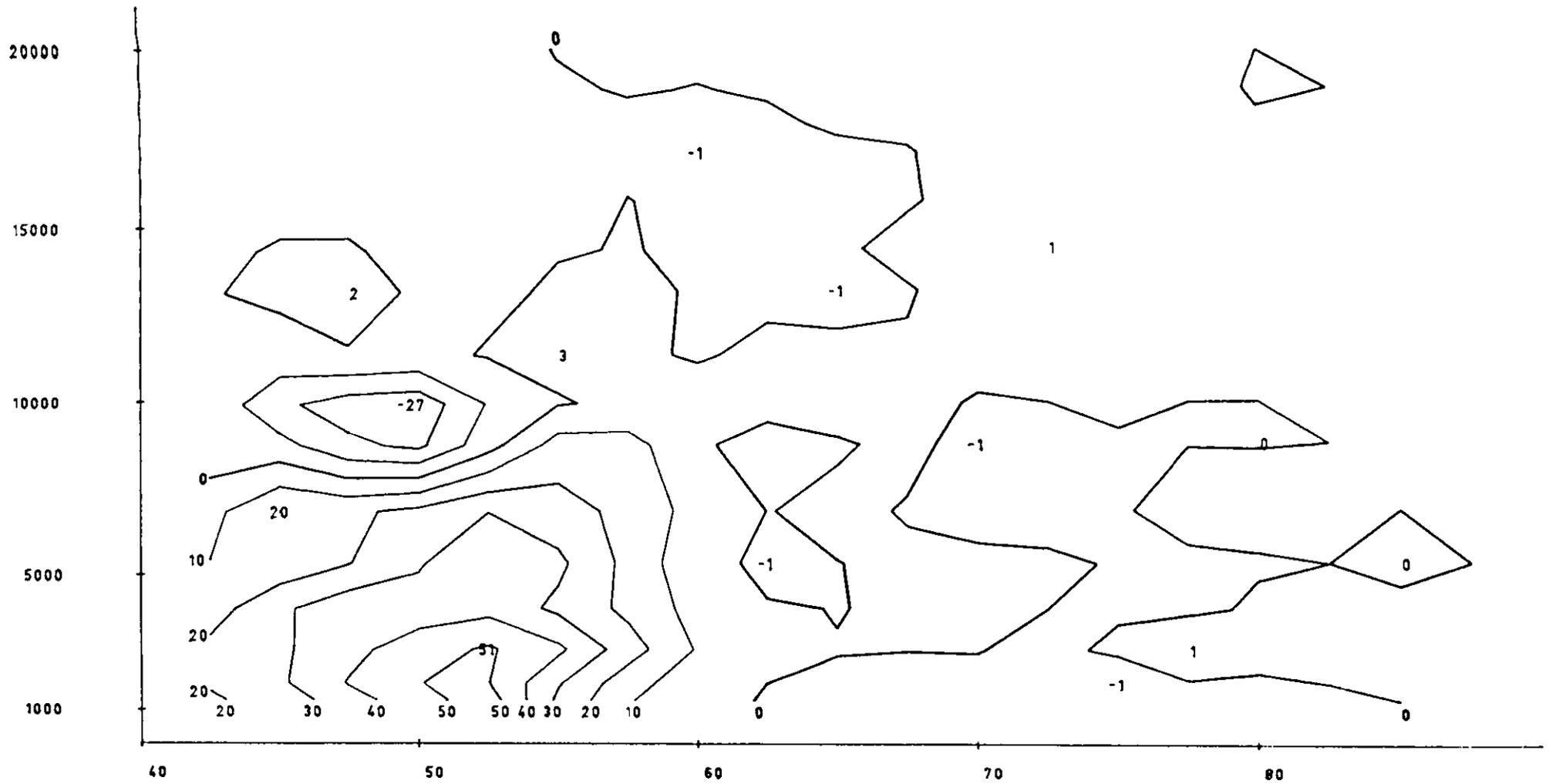


Abb. 58.

VERTIKALTRANSPORT VON WELLENENERGIE ZONAL GEMITTELT FUER DIE WELLENZAHL



Abb. 59. MERIDIONALTRANSPORT VON WELLENENERGIE ( $\overline{Pv}$ ) WELLENZAHL  $\lambda$

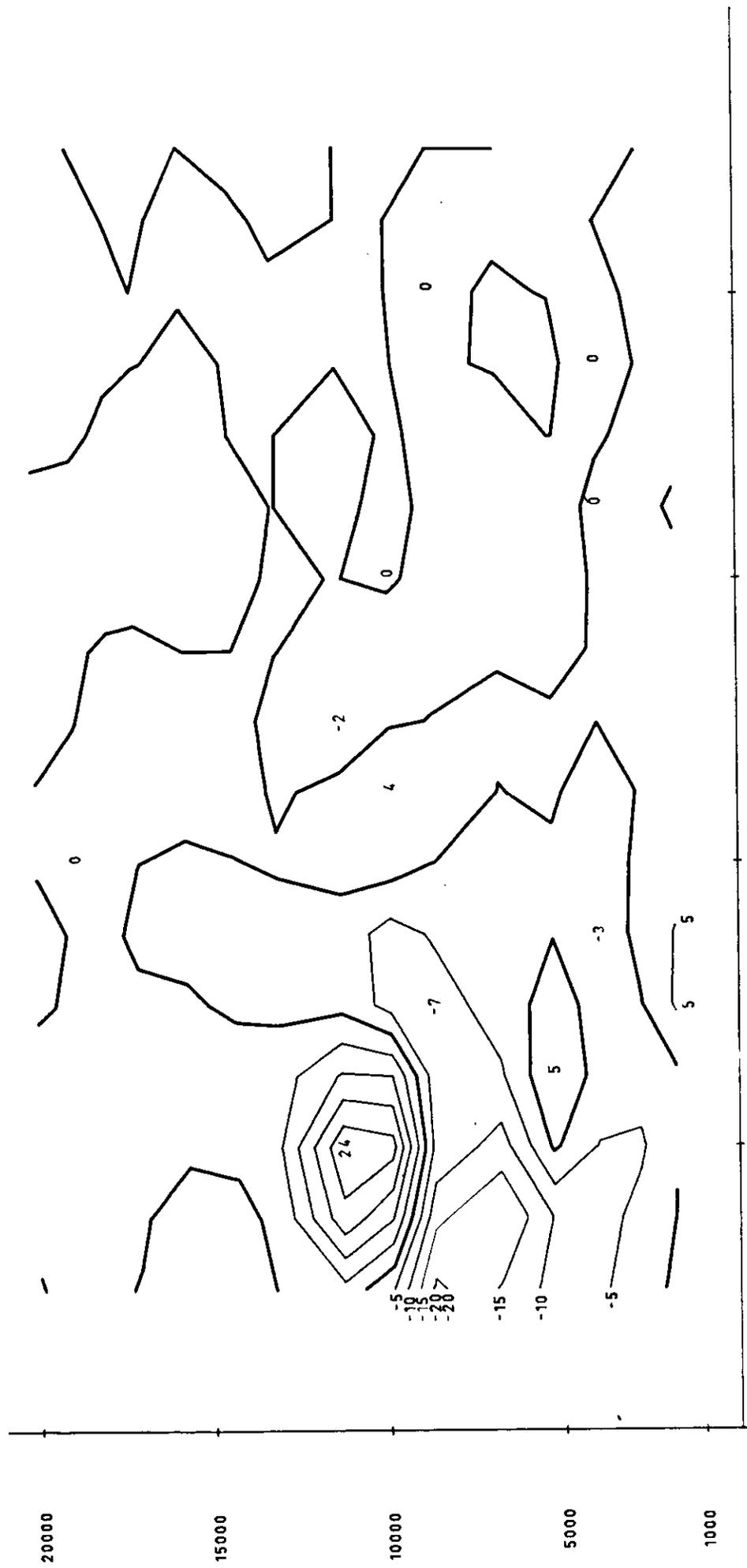


Abb. 60. DIVERGENZ DES WELLENERGIETRANSPORTES FUER DIE WELLENZAHL 6

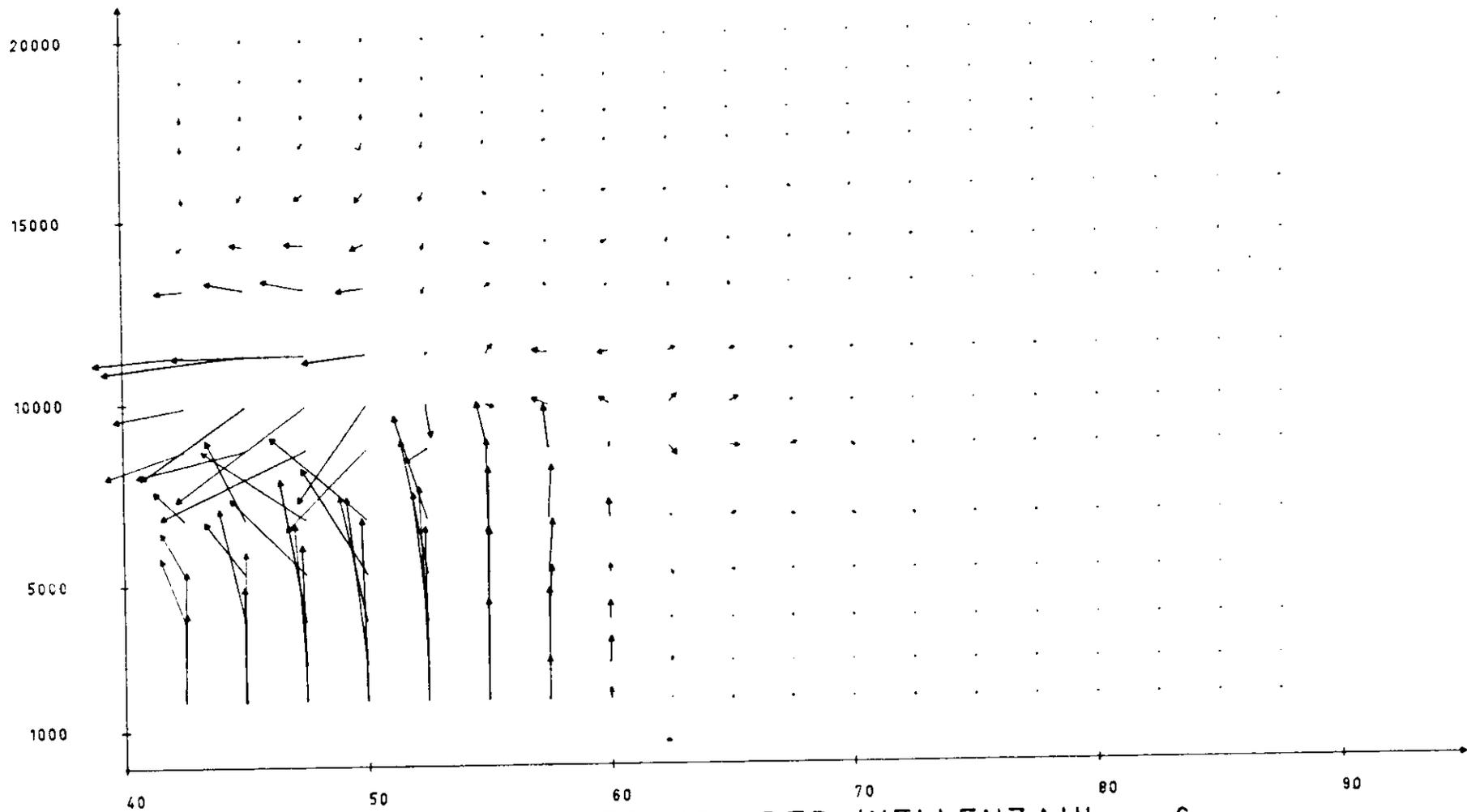


Abb. 61 WELLENENERGIETRANSPORT VON DER WELLENZAHL 6

- 126 -

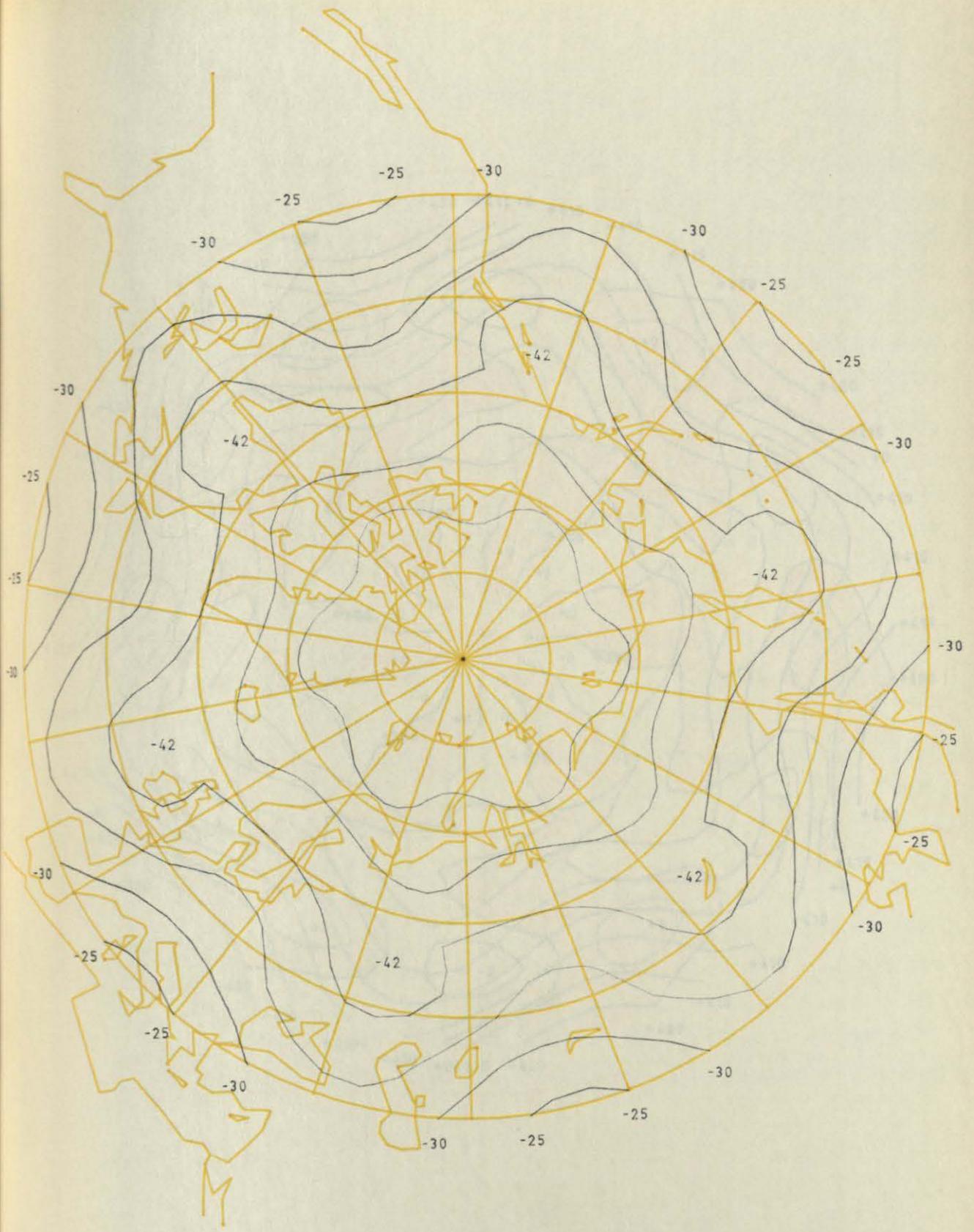


Abb. 62.

T6

6800 M

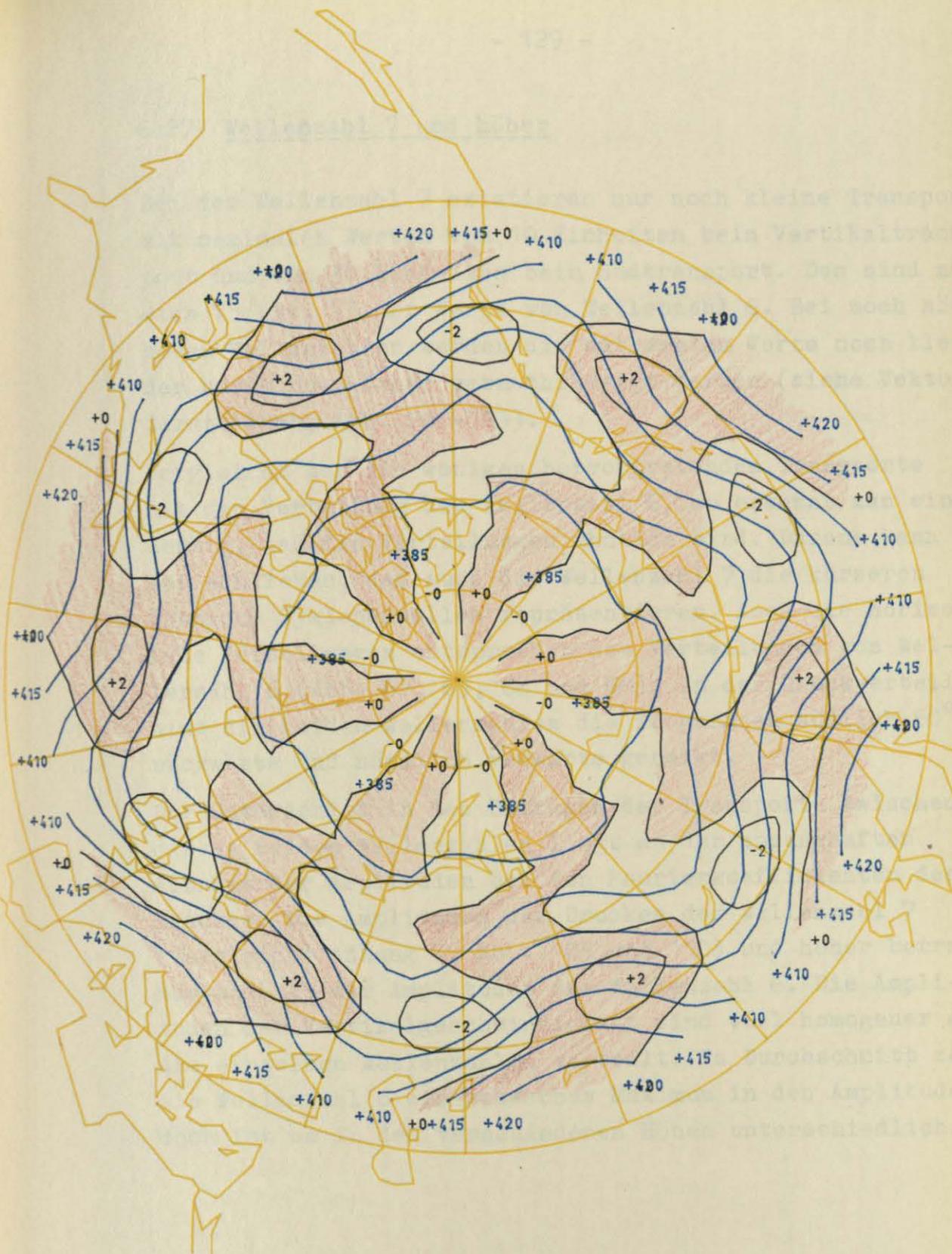


Abb. 63.

P6

W6 6800 M

## 6.27 Wellenzahl 7 und höher

Bei der Wellenzahl 7 existieren nur noch kleine Transporte mit maximalen Werten von 10 Einheiten beim Vertikaltransport und von 30 Einheiten beim Südtransport. Das sind nur etwa  $\frac{1}{5}$  bzw.  $\frac{1}{3}$  der Werte von Wellenzahl 6. Bei noch höheren Wellenzahlen werden die extremalen Werte noch kleiner und können daher vernachlässigt werden (siehe Vektordarstellung, Abb. 70 - 73).

Vergleicht man die wenigen hervortretenden Transporte mit der Verteilung der Wellenzahl 6, so erkennt man eindeutig, daß die Verteilungen ähnlich sind. Daraus kann man schließen, daß auch die Wellenzahl 7 die kürzeren (jungen) Zyklonenwellen repräsentieren. Auch die horizontale Verteilungen entsprechen den Verteilungen von Wellenzahl 6 (Abb. 62, 63, 68 und 69). In der Druckverteilung sind die beiden Wellenzahlen die Trogachsen südlich  $60^{\circ}\text{N}$  rückwärts und nördlich vorwärts geneigt.

Der Unterschied in den Beträgen der Transporte zwischen diesen beiden Wellenzahlen liegt an der sprunghaften Abnahme der Amplituden bei den Fourierkoeffizienten des Druckes. Die Amplituden des Druckes der Wellenzahl 7 (Vergleiche Anhang I, Abb. 105 und 110) und höher betragen nur noch  $\frac{1}{3}$  der Amplituden der Wellenzahl 6. Die Amplituden der Vertikalgeschwindigkeit sind viel homogener auf die einzelnen Wellenzahlen verteilt. Im Durchschnitt zeigt die Wellenzahl 6 ein schwaches Maximum in den Amplituden, doch ist es in den verschiedenen Höhen unterschiedlich.

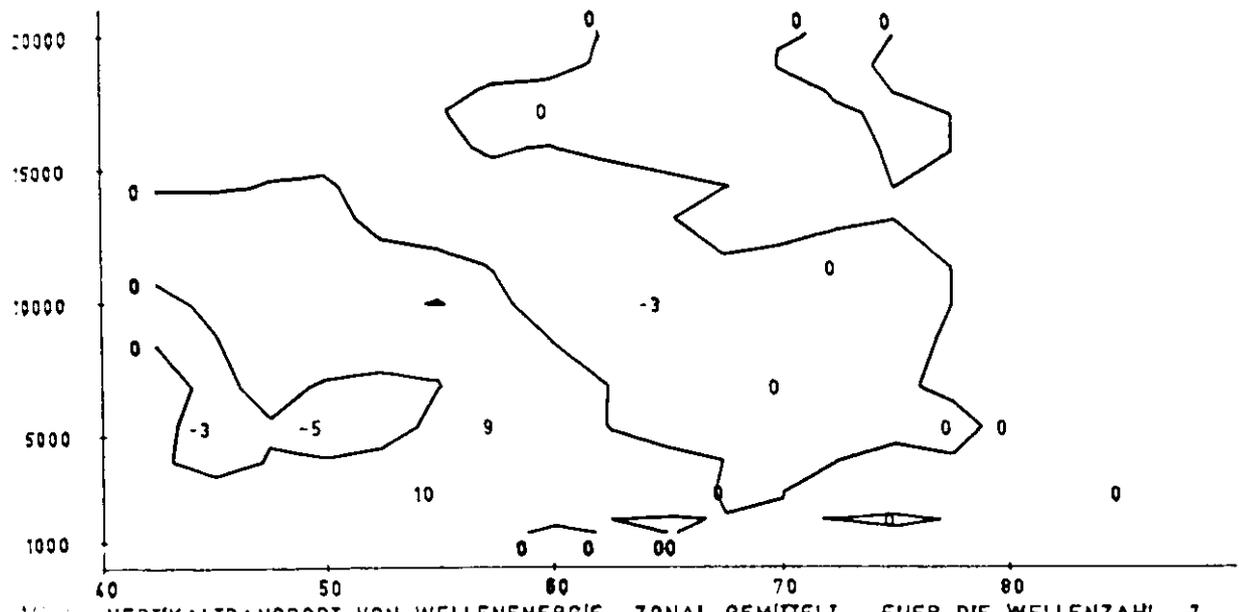


Abb. 64. VERTIKALTRANSPORT VON WELLENENERGIE ZONAL GEMITTELT FUER DIE WELLENZAHL 7

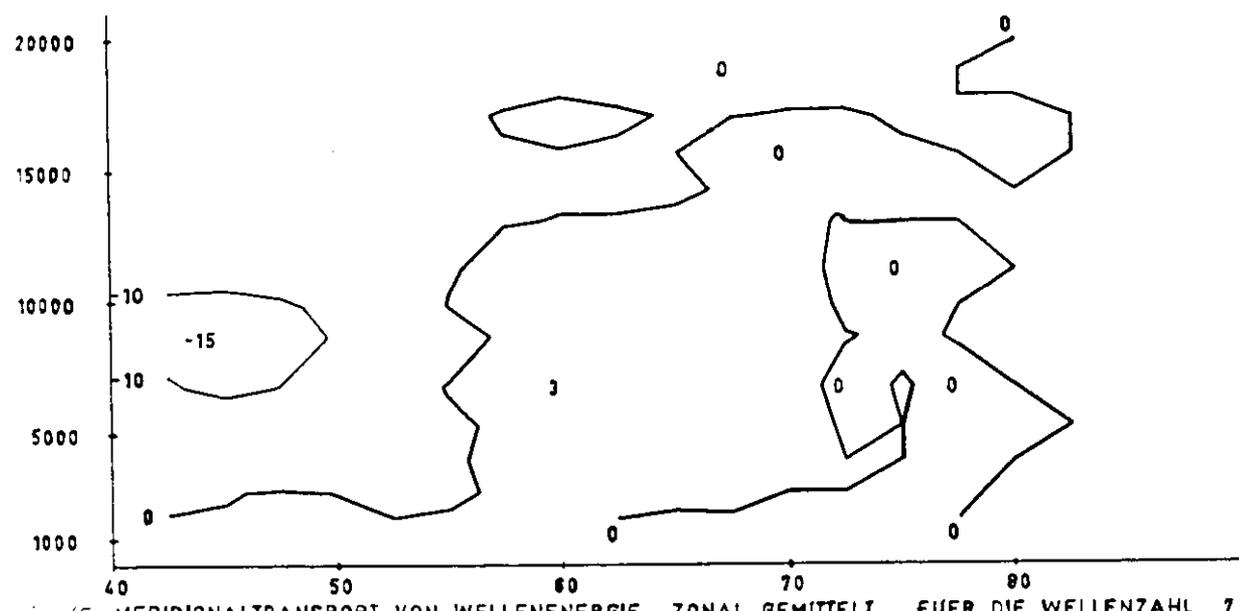


Abb. 65. MERIDIONALTRANSPORT VON WELLENENERGIE ZONAL GEMITTELT FUER DIE WELLENZAHL 7

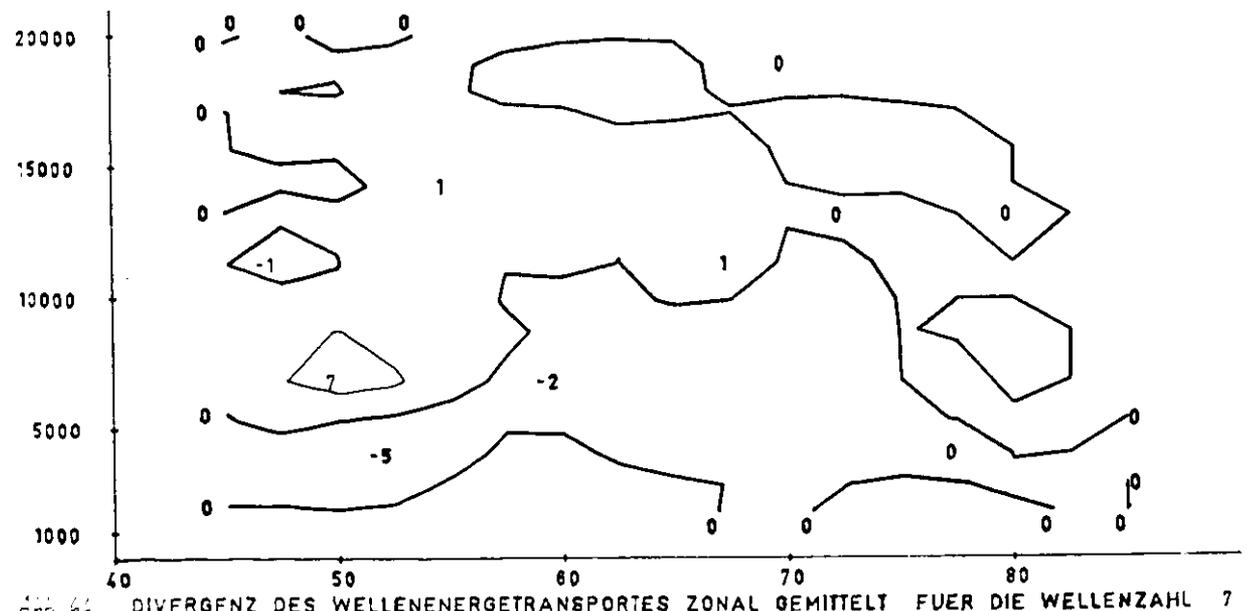


Abb. 66. DIVERGENZ DES WELLENENERGETRANSPORTES ZONAL GEMITTELT FUER DIE WELLENZAHL 7

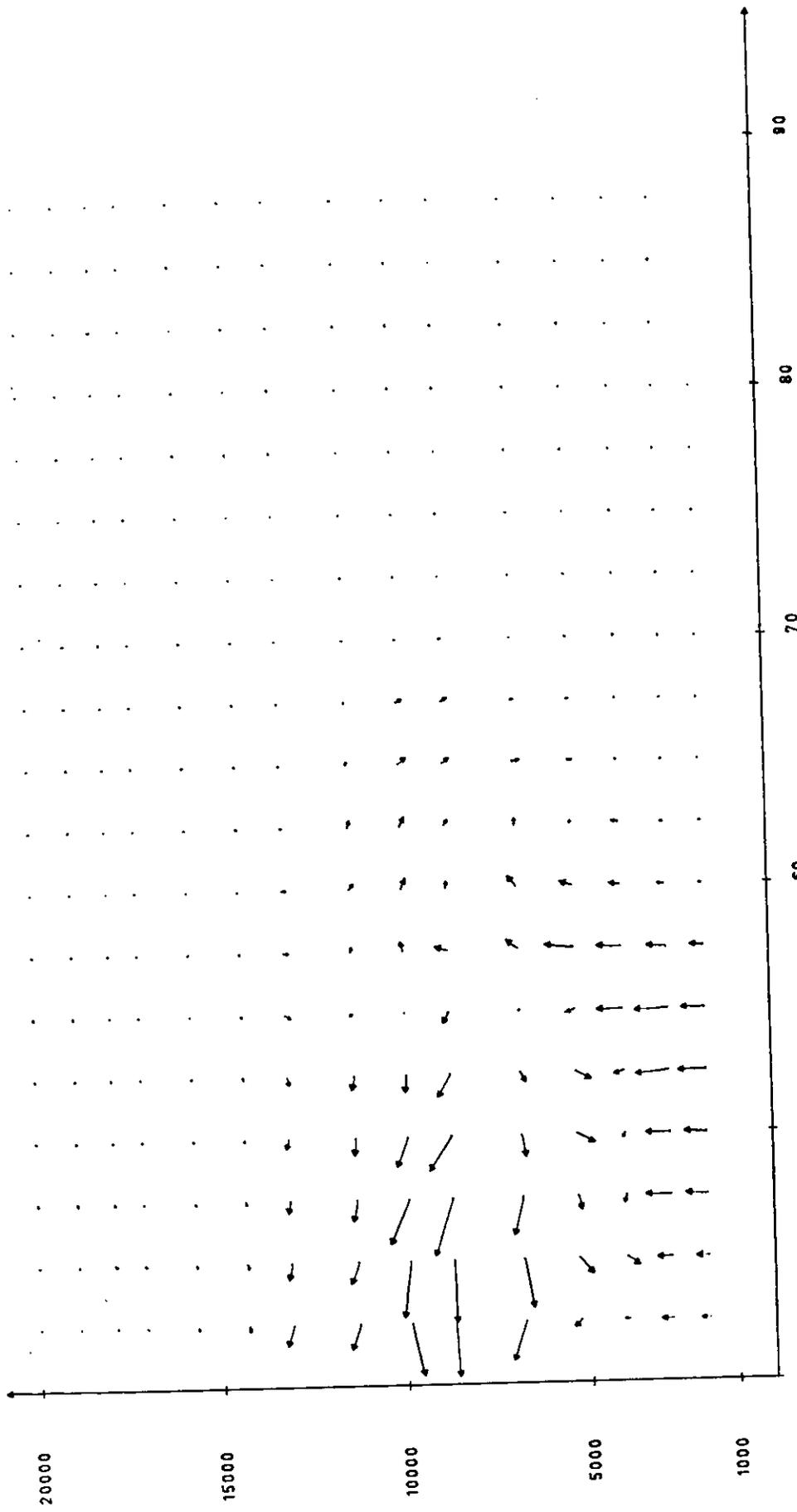


Abb. 67. WELLENENERGIETRANSPORT VON DER WELLENZAHL 7

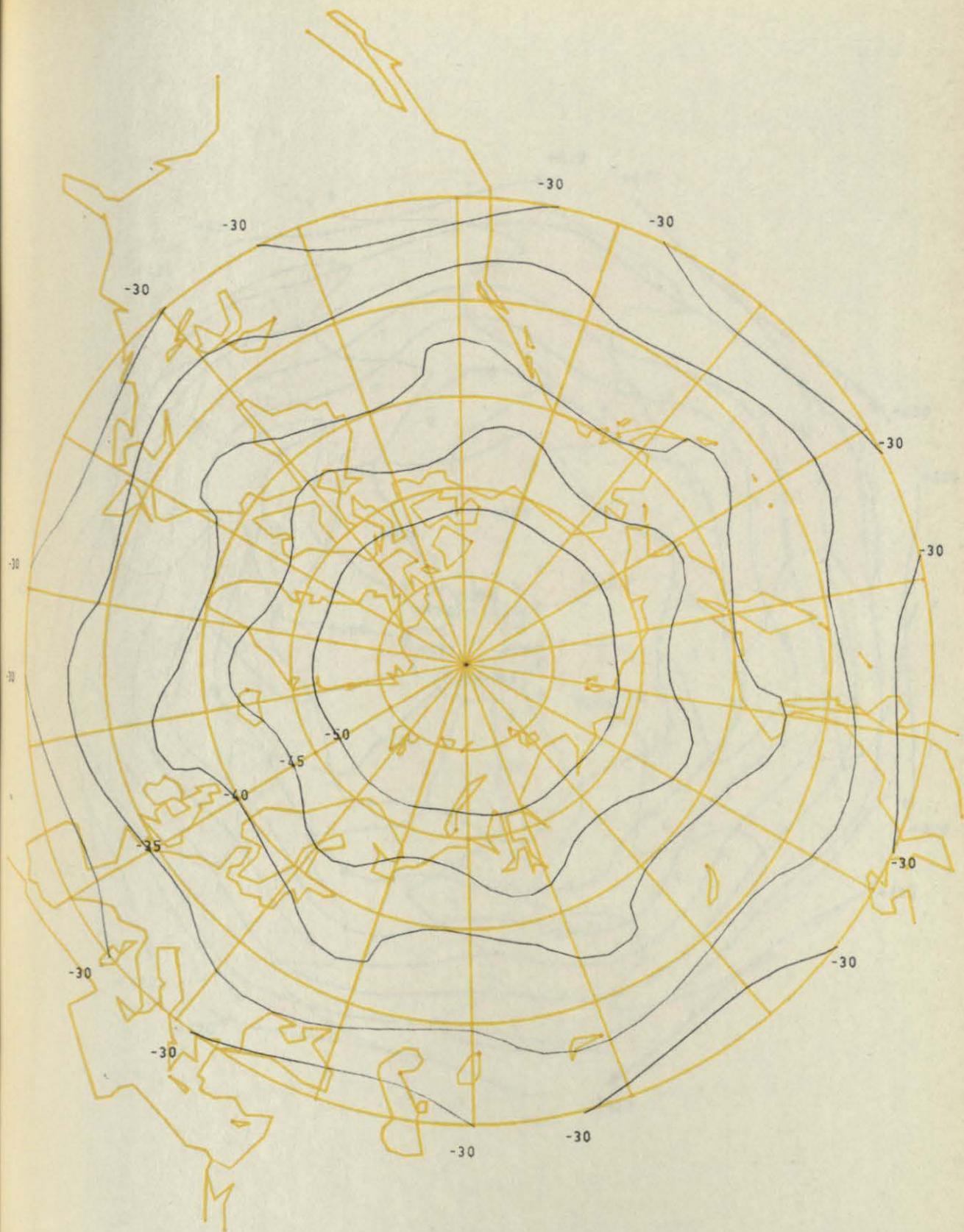


Abb. 68.

T7

6800 M

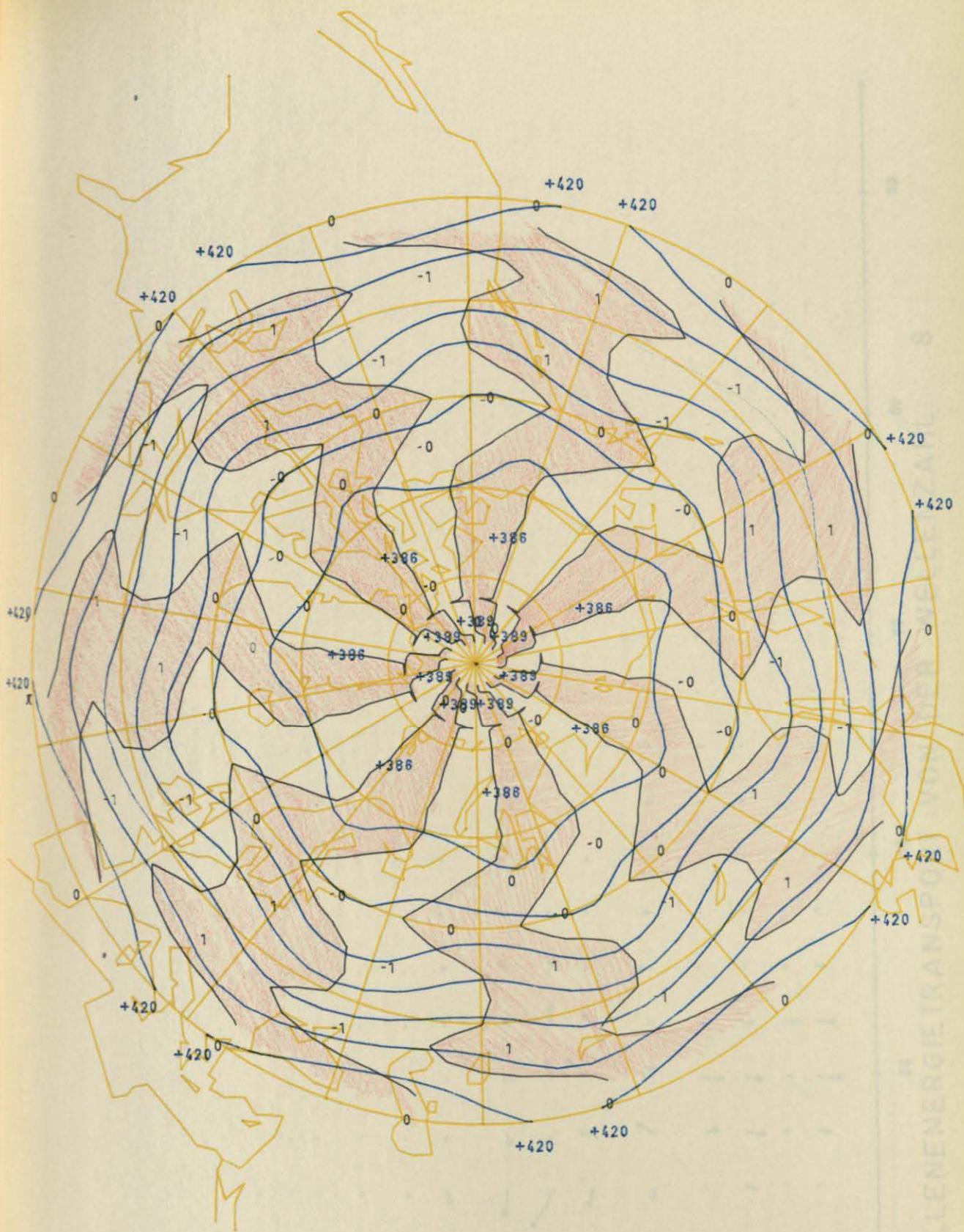


Abb. 69.

P7      W7      6800 M

Abb. 70 WELLENENERGIE (TRANS...)

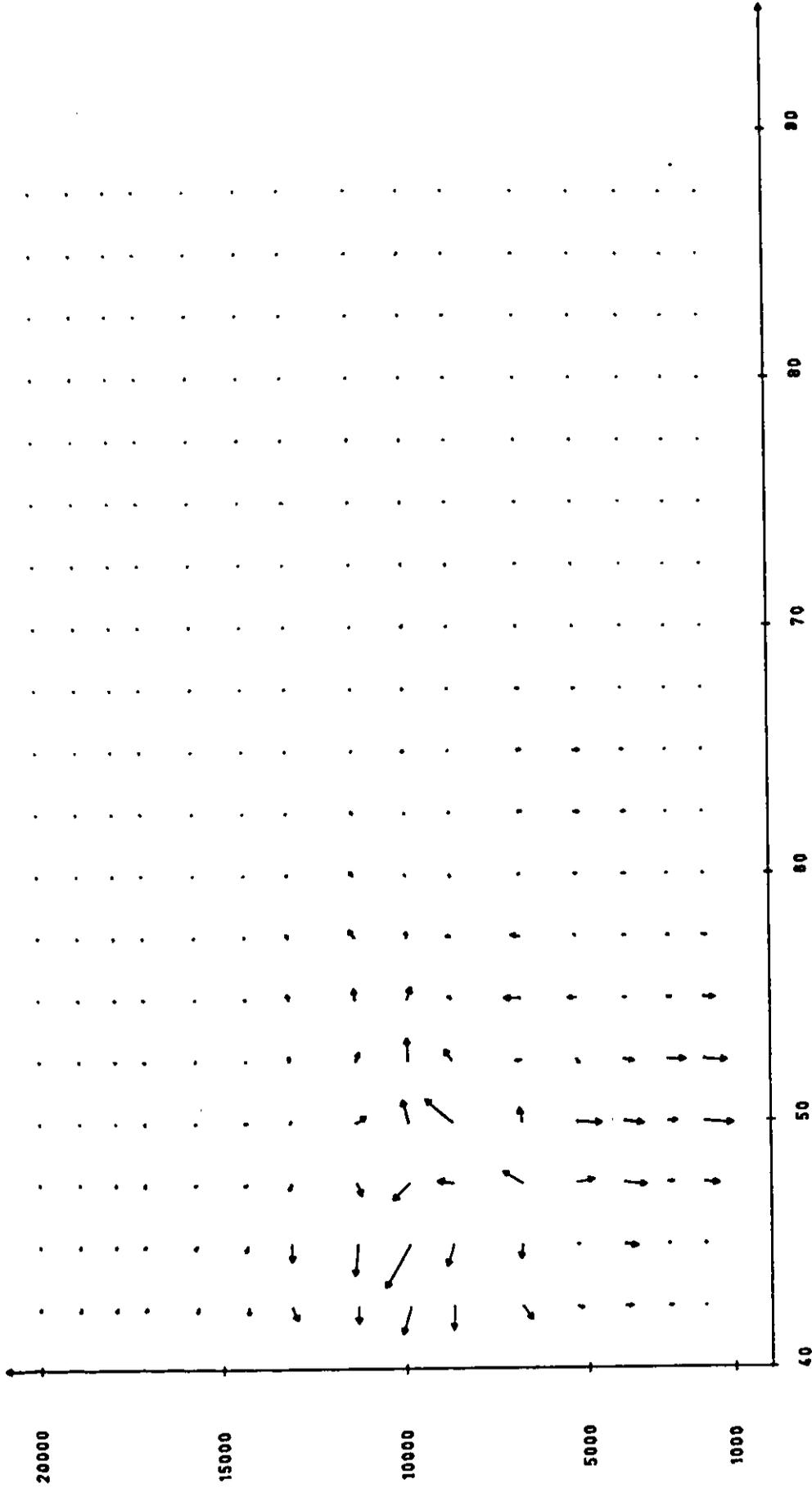


Abb. 70. WELLENENERGIETRANSPORT VON DER WELLENZAHL 8

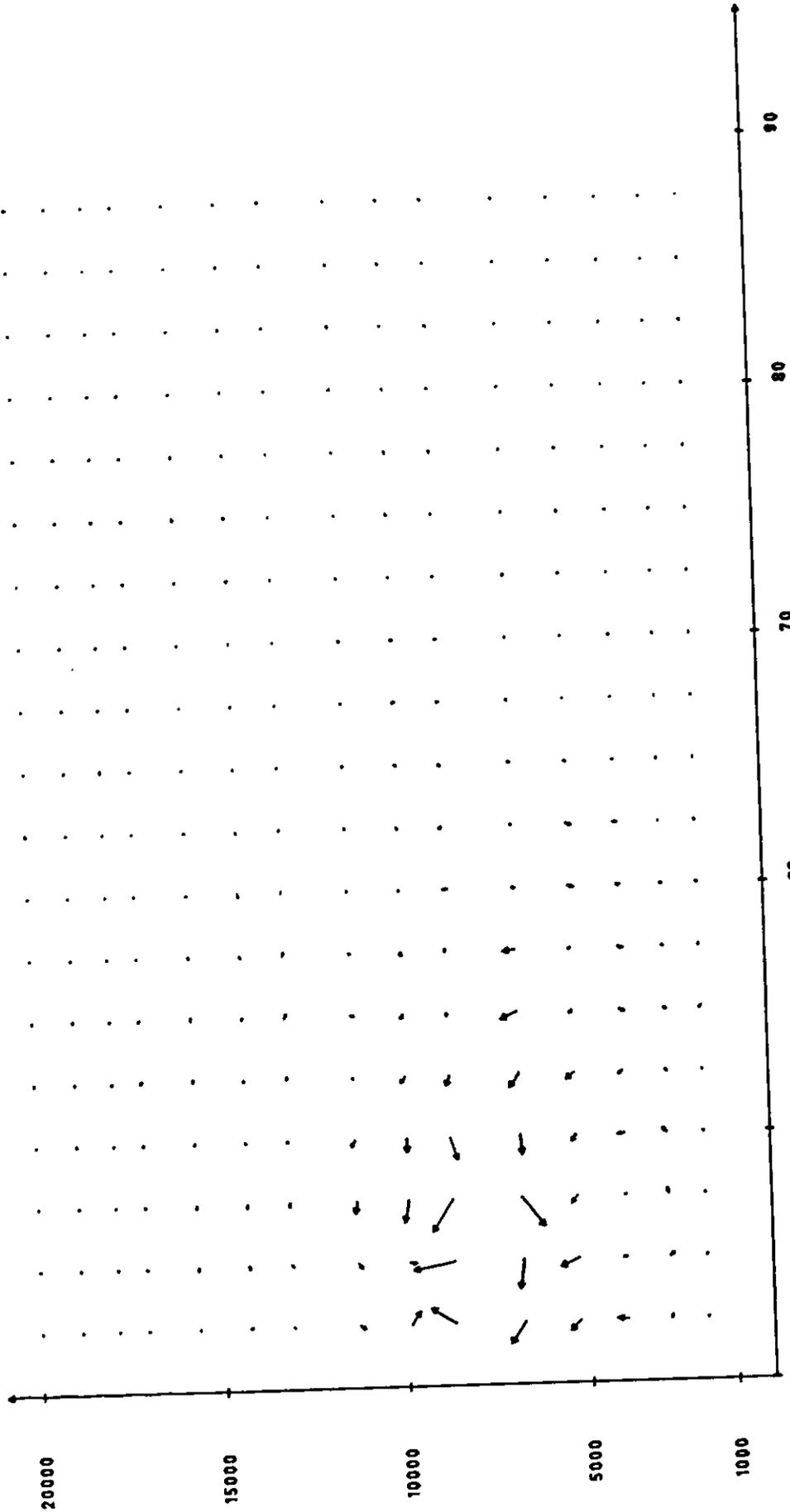


Abb. 71. WELLENENERGIETRANSPORT VON DER WELLENZAHL 9

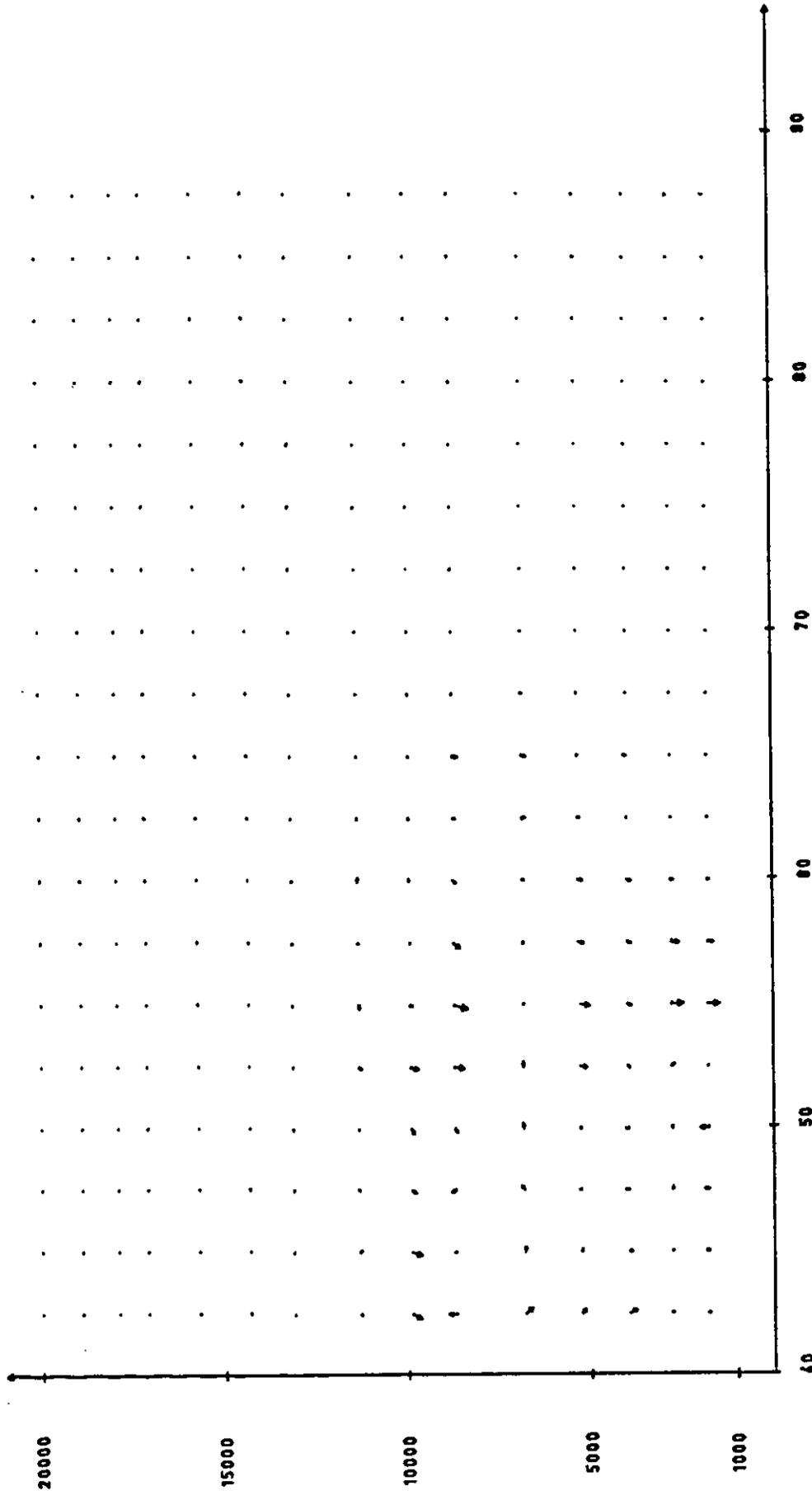


Abb. 72. WELLENENERGIETRANSPORT VON DER WELLENZAHL 10

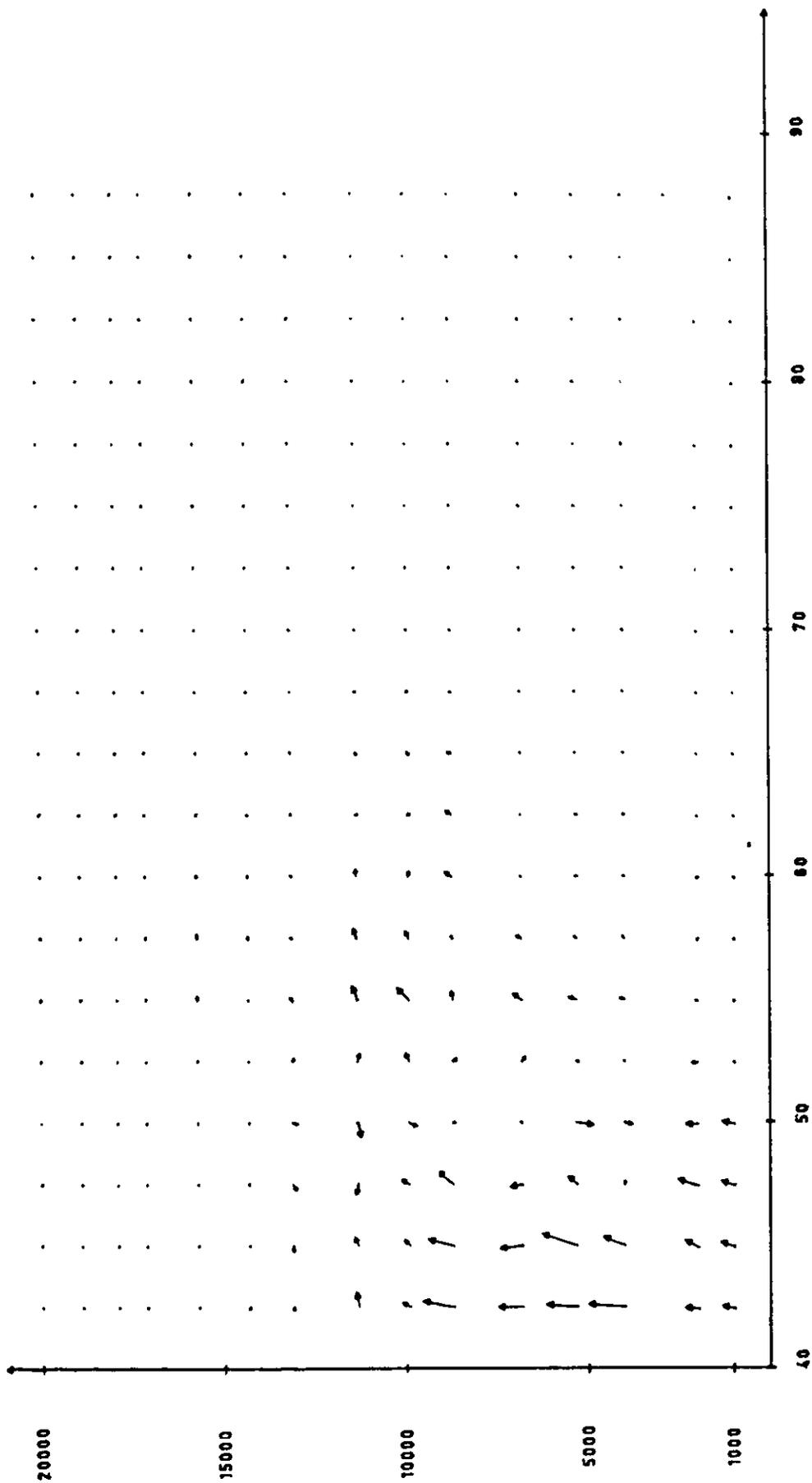
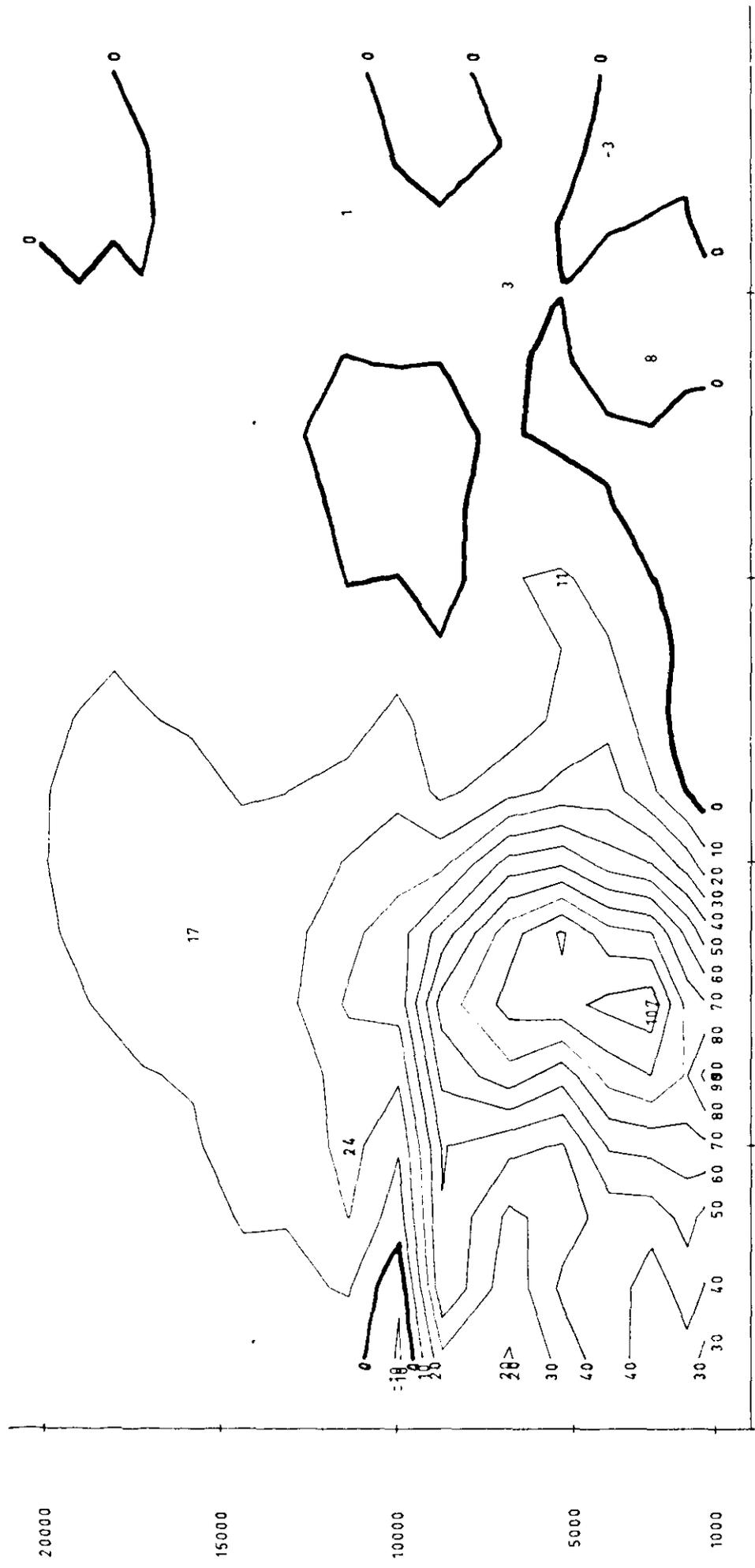


Abb. 73. WELLENENERGIETRANSPORT VON DER WELLENZAHL 11

### 6.3 Transporte über alle Wellen summiert

Bei den Gesamttransporten ergibt sich Übereinstimmung mit den Transporten bei den einzelnen Wellenzahlen, wenn man von der Wellenzahl 5 absieht, die aus den übrigen Wellen herausfiel. In der Nähe der Polarfront, zwischen  $50^{\circ}$  und  $60^{\circ}$  N, finden sehr starke Aufwärtstransporte bis zu 100 Einheiten statt. Die Tropopause bildet für den Vertikaltransport eine Sperrschicht, die nur von den langen Wellen durchstoßen wird, so daß die Transporte der Wellenzahl 1 ungehindert, die Transporte der Wellenzahl 3 nur zu einem geringen Teil und die der kürzeren Wellen fast gar nicht hindurchkommen. So findet man innerhalb der Stratosphäre beim Gesamtbild fast nur die Summe der Werte der Wellenzahlen 1 bis 3.

Unterhalb der Tropopause akkumuliert der Vertikaltransport Energie, die durch den meridionalen Transport nach Norden und Süden abtransportiert wird, wobei die Transporte nach Süden viel stärker sind als die nach Norden (127 : 38). Wie man von der Verteilung der Divergenz des Wellenenergie transportes erkennt, sind diese Transporte insgesamt nicht divergenz- bzw. konvergenzfrei. Bei der Divergenzverteilung des gesamten Wellenenergie transportes kann kein Zusammenhang zwischen den markanten meteorologischen Erscheinungen (Polarfront, Tropopause, Jet...) gefunden werden.



VERTIKALTRANSPORT VON WELLENERGIE ZONAL GEMITTELT ALLE WELLEN SUMMIERT

Abb. 74.

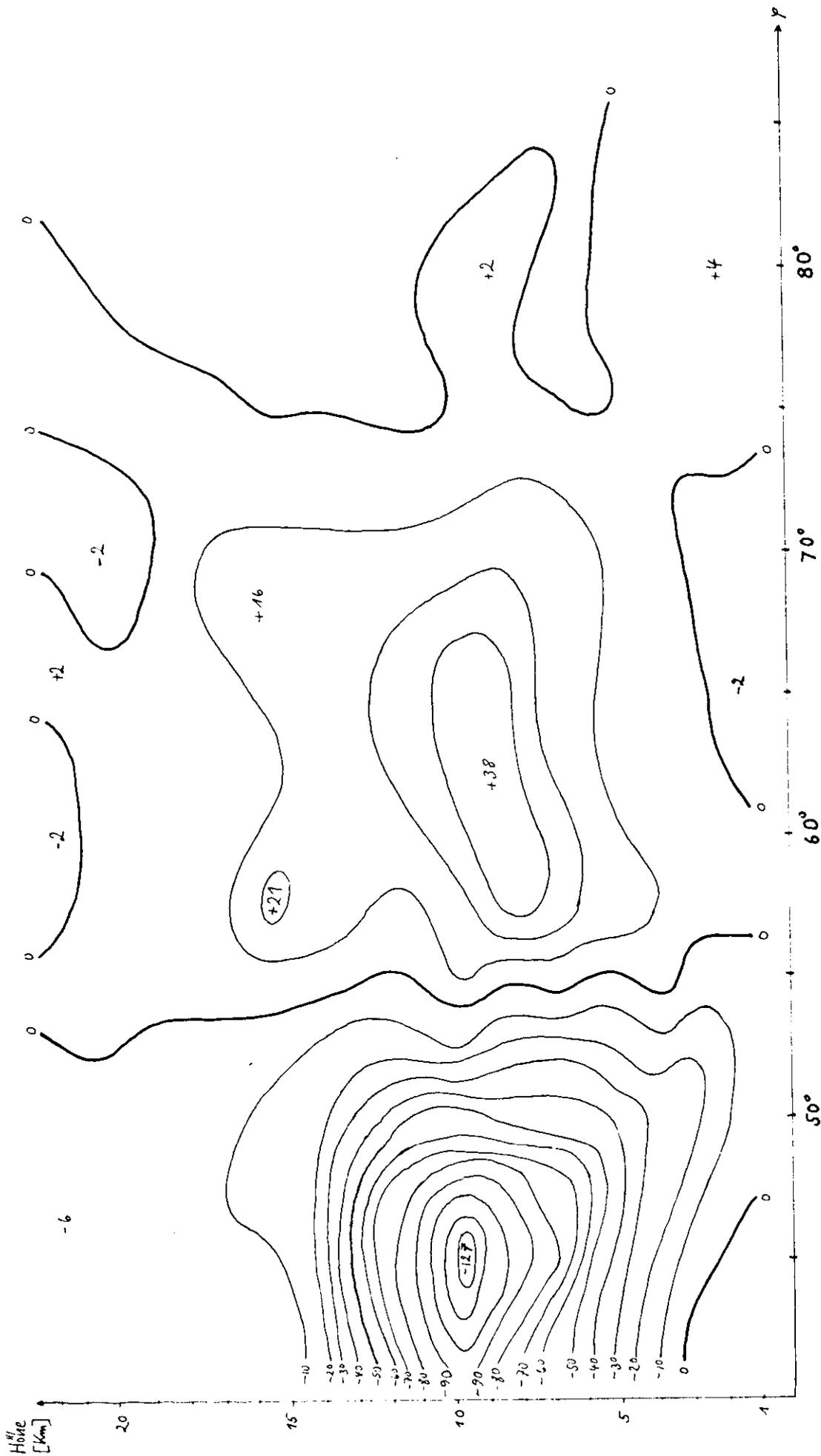


Abb. 75. MERIDIONALTRANSPORT VON WELLENENERGIE ( $\overline{Pv}$ ) ALLE WELLEN SUMMIERT

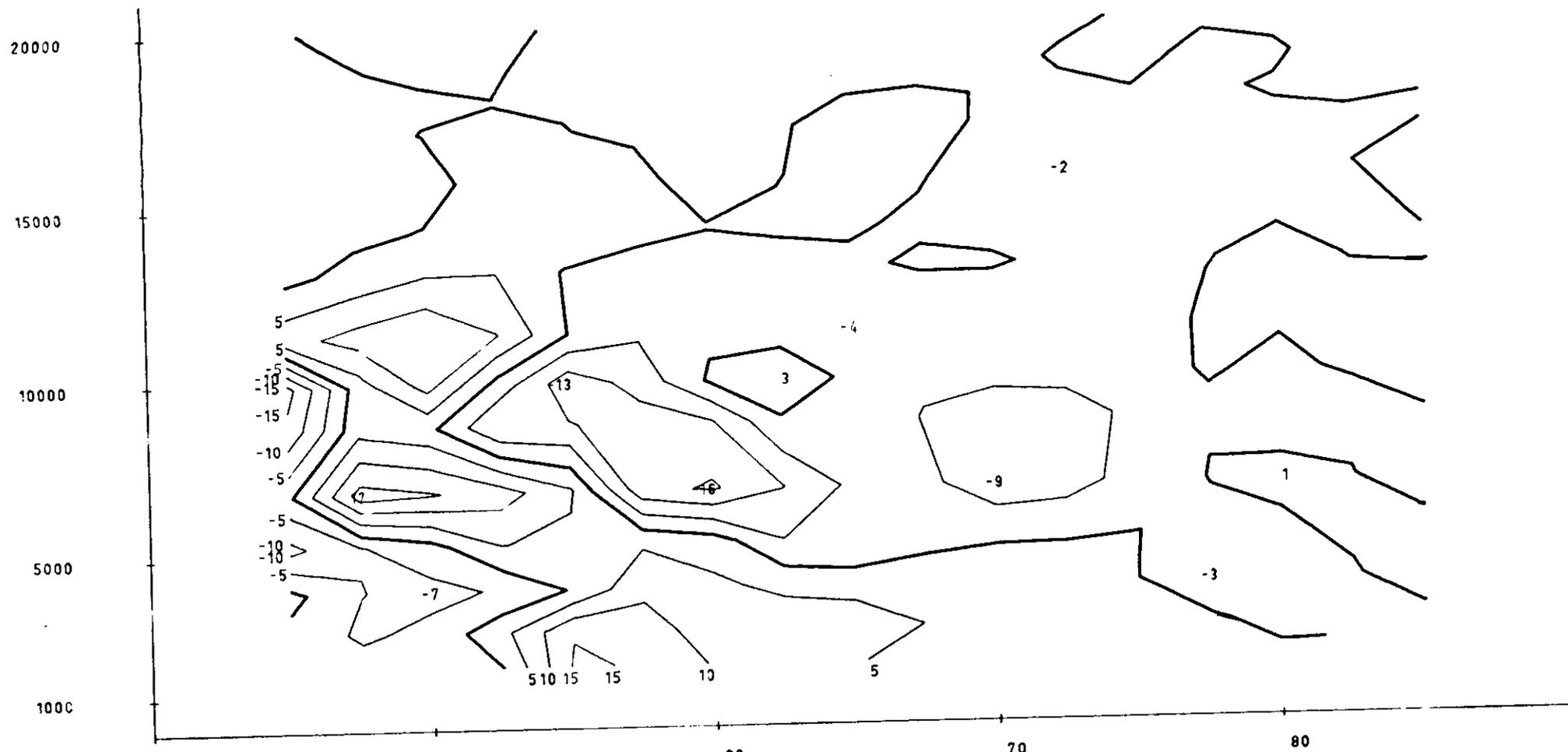
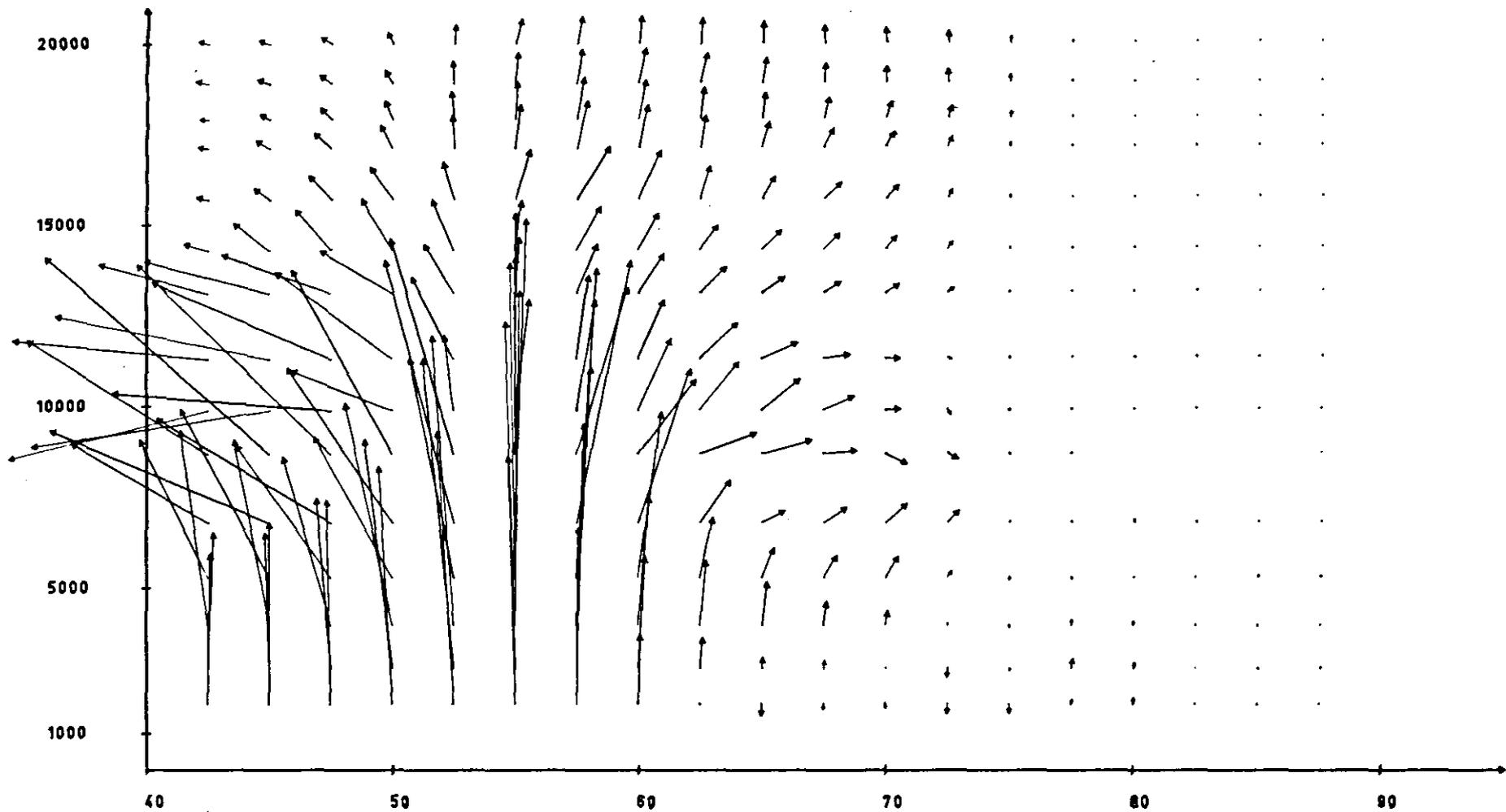


Abb. 76. DIVERGENZ DES WELLENENERGIETRANSPORTES ALLE WELLEN SUMMIERT

- 144 -



- 142 -

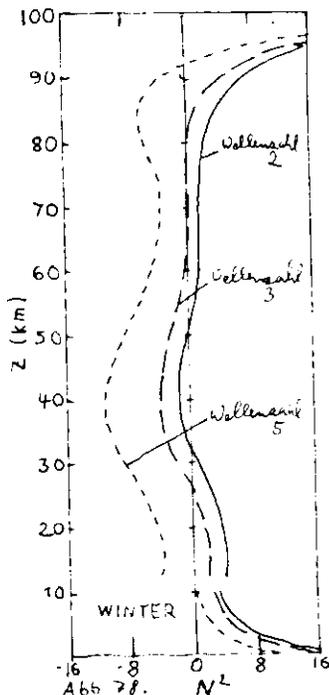
Abb. 77. WELLENENERGIETRANSPORT, ALLE WELLEN SUMMIERT

#### 6.4. Vergleich der Ergebnisse mit denen von CHARNEY und DRAZIN

Setzt man in die Endgleichung von CHARNEY und DRAZIN bzw. van MIEGHEM (Kap. 5.4) für die charakteristische Größe  $N^2$  mittlere Werte der Atmosphäre ein, so ergibt sich Folgendes:

- a) Für die quasistationären planetarischen Wellen in der Troposphäre mit den Wellenzahlen 1 bis 4 wird  $N^2 > 0$ , daher kann Wellenenergie vertikal nach oben in die Stratosphäre transportiert werden.
- b) Für die baroklinen instabilen Wellen in der Troposphäre mit den Wellenzahlen 5 bis 10 wird  $N^2 < 0$ , und daher kann keine Wellenenergie nach oben transportiert werden, besonders nicht durch die Tropopause.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Durchlässigkeit der Tropopause für mechanische Wellenenergie mit zunehmender Wellenlänge wächst. Diese Ergebnisse gelten für jahreszeitliche Flächenmittel.



Dazu wird aus der Arbeit von CHARNEY und DRAZIN die winterliche Verteilung der charakteristischen Größe  $N^2$  (siehe Abb. 78) für verschiedene Wellenzahlen dargestellt. Man erkennt, daß bei allen Wellenzahlen an der Tropopause eine un stetige Abnahme von  $N^2$  existiert, jedoch ist diese Abnahme für die langen Wellen noch nicht so groß, daß  $N^2$  negativ wird, daher stellt für die langen Wellen die Tropopause keine Barriere dar, während sie für die höhere Wellenzahl 5 undurchlässig ist.

Diese Ergebnisse wurden in der vorliegenden Arbeit zum Teil bestätigt:

Auch an einem einzelnen Tag wächst die Durchlässigkeit

der Tropopause mit abnehmender Wellenzahl. Wellenzahl 1 wird noch voll hindurchgelassen und Wellenzahl 6 total reflektiert. Die Grenze zwischen Durchlässigkeit und Reflexion liegt an diesem Tage bereits bei einer kleineren Wellenzahl. Schon Wellenzahl 2 weist teilweise Reflexion auf, und bei Wellenzahl 3 kann man sogar von totaler Reflexion sprechen.

Außerdem wird hier zum Vergleich dieser Arbeit mit den Untersuchungen von van MIEGHEM und anderen eine rein theoretische Verteilung des Vertikaltransportes (entnommen von ELIASSEN und PALM 1960, Abb. 79) gezeigt, die nur auf den in Kap. 5.3 erwähnten Zusammenhang zwischen den Vertikaltransporten und der vertikalen Verteilung des mittleren zonalen Windes beruht. Man erkennt eine erstaunlich gute Übereinstimmung der Wellenenergie-transportverteilungen mit der langen Wellen und der Summen aller

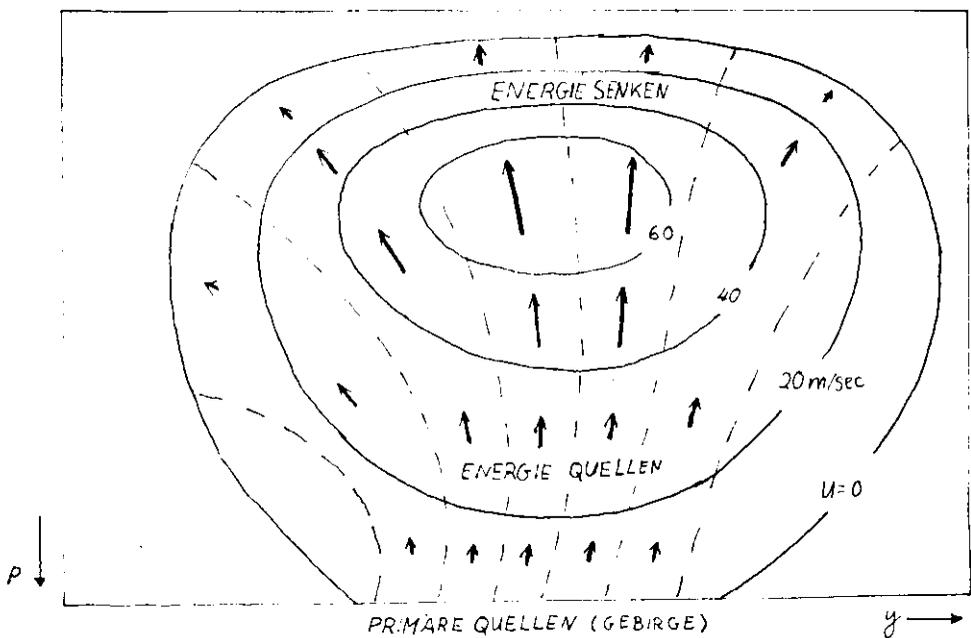


Abb. 79

Wellen. Die theoretische Verteilung des Wellenenergie-transportes soll nach den Angaben der Autoren hauptsächlich für orographisch bedingte Wellen gelten, so daß eine Übereinstimmung mit den Wellenenergie-transporten der

langen Wellen in dieser Arbeit zu erwarten ist. Nur die Divergenz- bzw. Konvergenzverteilung stimmt nicht mit den Resultaten dieser Arbeit überein.

## 7. ZUSAMMENFASSUNG UND SCHLUSSBETRACHTUNG

In dieser Arbeit wurden Radiosondendaten der Höhe und der Temperatur eines einzelnen Termins, des 12.12.1957, coz, in 16 Druckniveaus zwischen 850 mb und 40 mb mit der Hand analysiert. Aus den analysierten Karten wurden Gitterwerte gelesen und gestanzt. Diese Werte wurden auf Gitterwerte des Druckes und der Temperatur in gleichviele Höhenniveaus interpoliert. Aus den Druck- und Temperaturwerten konnten die Gitterwerte der Dichte und der potentiellen Temperatur berechnet werden. Die Gitterwerte des Druckes, der Dichte und der potentiellen Temperaturen wurden in zonale Fourierreihen zerlegt (11 Glieder).

Aus diesen Werten sollten die Windgeschwindigkeiten und die Transporte der mechanischen Wellenenergie berechnet werden. Zur Bestimmung des Windfeldes aus den oben genannten Daten wurde aus den Hydrodynamischen Gleichungen die ersten beiden Bewegungsgleichungen und die Thermodynamische Gleichung ausgewählt. Folgende wichtige Vernachlässigungen wurden vorgenommen:

- a) Störungsrechnung soll anwendbar sein
- b) Störungsgrößen nullter Ordnung sollen nur von der Höhe und der geographischen Breite abhängen
- c) Nicht-adiabatische Erwärmung soll vernachlässigbar sein
- d) Reibungskräfte sollen wenig Einfluß auf die Strömung haben
- e) Die Strömung soll stationär sein.

Es wurde in sphärischen Polarkoordinaten unter Benutzung aller bekannten Glieder der hydrodynamischen Gleichungen gerechnet.

Die berechneten horizontalen Winde stimmen gut mit den wenigen gemessenen Winden überein. Bei den berechneten Vertikalgeschwindigkeiten erkennt man eine Übereinstimmung mit den Windverteilungen an Fronten, wie sie von BERGERON 1937 entwickelt worden sind. Es konnte bewiesen werden, daß die Vertikalgeschwindigkeit im Tropopausen-

niveau verschwindet und unter- und oberhalb der Tropopause unterschiedliche Vorzeichen aufweist.

Aus der Wind- und Druckverteilung konnte der mittlere Wellenenergietransport für verschiedene Wellenzahlen berechnet werden. Es wurde gezeigt, daß die langen Wellen (Wellenzahl 1 - 4) durch die Orographie und durch die Land-See-Verteilung entstehen. Diese Wellen transportieren innerhalb der Troposphäre, besonders in der Nähe der Polarfront, Wellenenergie aufwärts. In der oberen Troposphäre wird die Wellenenergie nach Norden und Süden (hauptsächlich nach Süden) abgelenkt. Die Divergenz des Meridionaltransportes reicht in der oberen Troposphäre nicht aus, um die Konvergenz des Vertikaltransportes zu kompensieren, so daß insgesamt eine Konvergenz in der Nähe des Jets resultiert.

Bei den kürzeren Wellen weisen nur die Wellenzahlen 5 und 6 bedeutende Wellenenergietransporte auf. Diese kürzeren Wellen sind den Rossbywellen zuzuschreiben. Im Gegensatz zu den längeren Wellen entziehen diese Wellen dem Jet Energie. Die Wellenzahl repräsentiert die schon instabil gewordenen Wellen. Daher werden die Wellenenergietransporte von den Kaltluftausbrüchen in der unteren Troposphäre und den Warmluftvorstößen in der oberen Troposphäre geprägt. Die Verteilungen der Wellenenergietransporte sehen daher völlig anders aus als bei den anderen Wellenzahlen. Die Wellenzahl 6 wie auch die höheren Wellenzahlen geben das Verhalten der kürzesten wirksamen (meist jungen) Wellen wieder. Ihre Hauptenergiequelle liegt in der untersten Troposphäre.

Ein weiteres wichtiges Ergebnis ist die Verifizierung der Ergebnisse von CHARNEY und DRAZIN, bzw. van MIEGHEM, für einen einzelnen Termin. Für wachsende Wellenzahlen nimmt die Undurchlässigkeit der Tropopause für Wellenenergie zu. Die Energietransporte der Wellenzahl 1 werden von der Tropopause überhaupt nicht beeinflusst, während die Transporte der Wellenzahl 6 vollkommen an der Tropopause reflektiert werden.

In dieser Arbeit wurde nur ein einzelner Termin untersucht, weil die manuelle Herstellung der Gitterwerte aus den Radiosondendaten für mehrere Termine zu lange gedauert hätte. Es wäre aber interessant, noch weitere Termine zu untersuchen, um die Allgemeingültigkeit dieser Ergebnisse eventuell bestätigt zu sehen. Eine Bearbeitung mehrerer Termine hätte außerdem noch den Vorteil, daß man auf die Annahme der Stationarität verzichten kann. Um die Höhen- und Temperaturfelder möglichst objektiv zu analysieren und die Arbeitszeit zu verkürzen, müßte man überlegen, ob auch die Analyse von der Rechenmaschine übernommen werden könnte; jedoch kann bei der mangelhaften Radiosondendichte (besonders über dem Pazifik und in den Tropen) eine solche Analyse zu Schwierigkeiten führen.

Bei den Untersuchungen dieser Arbeit machte sich das Fehlen der Reibungsglieder in den ersten beiden Bewegungsgleichungen störend bemerkbar. Die Auswirkung dieses Mangels könnte man eventuell durch einen einfachen Reibungsansatz beseitigen oder verringern.

8. LITERATURVERZEICHNIS

- BJERKNES, V., BJERKNES, J., SOLBERG, H., BERGERON, T.  
(1933): *Physikalische Hydrodynamik*,  
Berlin, S. 790
- ECLIN, B. (1940): On the Influence of the Earth's  
Orography on the General Character of  
the Westerlies.  
*Tellus* 2, 3. 184 - 195
- CHARNEY, J.G., DRAZIN, P.G. (1961):  
Propagation of Planetary-Scale Distur-  
bances from the Lower into the upper  
Atmosphere.  
*J. Geophys. Research* 66, 3. 83 - 109
- DEFANT, F., van de BOOGAARD, H.M.E. (1963):  
The Global Circulation Features of the  
Troposphere between the Equator and  
40°N, based on a Single Day's Data.  
*Tellus* 14, 3. 251
- ELIASSEN, A., PALM, E. (1961):  
On the Transfer of Energy in stationary  
mountain Waves.  
*Geof. Publ.* 22/3, 3. 1 - 23
- van MIEGHEM, J., (1962):  
New aspects of the general circula-  
tion of the stratosphere and mesosphere  
*Met. Abhandl. Inst. f. Met. u. Geophys.*  
Berlin, Band XXVI, Sonderdruck
- RIEHL, H., FULTZ, D. (1958):  
General Circulation in dishpan Experi-  
ments.  
*Quart. J. of Royal Met. Soc.* 84, 3. 389
- SCHERHAG, R. (1948):  
*Wetteranalyse und Wetterprognose*,  
Berlin, Springer-Verlag, S. 424
- SMAGORINSKY, J., MANABE, S., HOLCWAY, J.L. (1965):  
Numerical Results From a Nine-Level  
General Circulation Model of the Atmo-  
sphere.  
*Monthly Weather Review* 93/12, 3. 759
- WILLERS, F.A.: *Methoden der praktischen Analysis*.  
Berlin, Göschens Lehrbücherei
- ZURMÜHL, R.: *Praktische Mathematik für Ingenieure  
und Physiker*,  
Berlin, Springer-Verlag
- Chrnov, S.P. (1940): *Einführung in die synoptische  
Meteorologie*  
Berlin, Springer-Verlag  
(Diesem Buch wurden die Abbildungen 15  
und 16 entnommen).

## ANHANG I

### Darstellung der Fourierkoeffizienten (Amplituden) als Meridionalschnitte

Die Fourierreihen für eine Größe  $f$  lauten folgendermaßen:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \}$$

Bei der Fourieranalyse ergeben sich für jede Wellenzahl zwei Koeffizienten. Die Sinus- und Cosinuswellen einer Wellenlänge setzen sich zu einer einzigen Welle zusammen, deren Verlauf man auch durch ihre Amplituden  $c_n$  und Phasen  $\varphi_n$  darstellen kann. Die Fourierreihe lautet in dieser Schreibweise folgendermaßen:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ c_n \cos(nx - \varphi_n) \}$$

Die Amplituden  $c_n$  und Phasen  $\varphi_n$  können aus den Fourierkoeffizienten berechnet werden.

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \varphi_n = \arctan \left( \frac{b_n}{a_n} \right)$$

Da hier nur eine kleine Auswahl des vorhandenen Zahlenmaterials dargestellt werden kann, werden in den folgenden Seiten nur die Vertikalverteilungen der Amplituden für die Wellenzahlen 1 bis 11 gezeigt:

Dabei werden für eine Wellenzahl auf einer Seite die Amplituden des Druckes und der Temperatur und auf der nächsten Seite die Amplituden der Windgeschwindigkeitskomponenten dargestellt. Bei der Diskussion über die Wellenenergietransporte und über die Geschwindigkeitsverteilungen wird auf die Besonderheiten der Amplitudenverteilungen hingewiesen. In den folgenden Absätzen werden noch einmal die wichtigsten Zusammenhänge behandelt.

#### a) Amplituden des Druckes

Die Amplituden des Druckes ergeben sehr stetige Bilder in den Meridionalschnitten. Eine solche Stetigkeit ist nur dadurch möglich, daß bei der Handanalyse vertikale

Konsistenz gewahrt wurde (Entsprechendes gilt auch für die Temperaturverteilung).

Bei den längeren Wellen mit den Wellenzahlen 1 bis 6 liegen die Höchstwerte der Amplituden bei 7 bis 12 mb. Ab Wellenzahl 7 nehmen die Amplituden sprunghaft ab und erreichen nur selten 3 mb. Bei der Wellenzahl 4 fallen die minimalen Werte im Bereich der Polarfront auf. Dadurch ergeben sich zwei relative Maxima der Amplituden, zwischen denen eine Phasendifferenz von  $\pi$  besteht, wie in Kap. 6.24 gezeigt wird.

Innerhalb der Stratosphäre nehmen die Amplituden für die Wellenzahlen 4 und höher rasch mit der Höhe ab. Diese Bevorzugung der langen Wellen in der Stratosphäre ist nicht nur physikalischen Gründen zuzuschreiben, sondern auch der geringeren Radiosonden-Daten-Dichte, die zwangsläufig bei der Handanalyse zu einer Glättung der Isobaren und der Isothermen führt.

#### b) Amplituden der Temperatur

Die meisten Besonderheiten der Druckamplituden gelten auch für die Amplituden der Temperatur (vertikale Stetigkeit, sprunghafte Abnahme bei der Wellenzahl 7, minimale Werte im Bereich der Polarfront bei der Wellenzahl 4, Bevorzugung der langen Wellen innerhalb der Stratosphäre). Es fällt aber noch ein weiteres Phänomen auf:

Im Tropopausenniveau findet horizontal ein Temperaturlausgleich statt, der sich in den Vertikalverteilungen der Temperaturamplituden als Zone minimaler Amplituden bemerkbar macht. Das klarste Beispiel bietet die Wellenzahl 1. Hier kann man sogar den Tropopausensprung an der Polarfront ( $55^{\circ}$  N) erkennen (vergleiche dazu Kap. 3.82). Nur bei den Wellenzahlen 3 und 4 ist eine Abnahme der Temperaturamplituden im Tropopausenniveau schlecht zu erkennen.

Beobachtet man noch die Phasenbeziehungen, die hier nicht abgebildet sind, so stellt man fest, daß die Extrema ober- und unterhalb der Tropopause eine Phasendifferenz

von  $\pi$  aufweisen (dazu vergleiche man das Kapitel 3.81).

c) Amplituden des zonalen Windes

Als erstes fällt bei der Wellenzahl 1 ein sehr starkes Maximum von 22 m/sec der Amplituden des zonalen Windes in der Stratosphäre bei  $77^{\circ}\text{N}$  auf, das mit einem schwächeren Ausläufer in die Troposphäre hineinreicht. Wie in Kap. 6.21 noch genauer untersucht wurde, handelt es sich bei der Wellenzahl 1 um die Abweichung der zentralen Polarzyklone von dem geographischen Nordpol. Die Amplituden des zonalen Windes der Wellenzahl 1 zeigen sehr deutlich, daß die Exzentrizität der polaren Zyklone oder Antizyklone zu Schwierigkeiten in Polnähe führt.

Da der zonale Wind hauptsächlich mit Hilfe der geostrophischen Balance, d.h. der meridionalen Ableitung des Druckes, berechnet wurde, findet man auch die maximalen Amplituden des zonalen Windes an den Stellen mit stärksten meridionalen Gradienten der Druckamplituden.

d) Amplituden des meridionalen Windes

Bei den längsten Wellen (Wellenzahlen 1 und 2) liegen die maximalen Beträge der Amplituden in der mittleren Stratosphäre. Mit zunehmender Wellenzahl sinken die Maxima weiter nach unten. Bei Wellenzahl 3 liegt das Maximum in der unteren Stratosphäre und bei den Wellenzahlen 4 bis 7 in der oberen Troposphäre, besonders im Bereich des Starkwindbandes. Die Wellenzahl 4 fällt etwas durch geringe Amplituden heraus.

e) Amplituden der Vertikalgeschwindigkeit

Bei den Amplituden der Vertikalgeschwindigkeit findet man Anzeichen dafür, daß im Tropopausenniveau wie bei der Temperatur die Amplituden ein Minimum aufweisen.

Betrachtet man die maximalen Amplituden, so findet man bei der Wellenzahl 1 ein Maximum von 7 mm/sec. Mit wachsender Wellenzahl nehmen die maximalen Werte auf 17 mm/sec bei der Wellenzahl 6 zu. Bei noch höheren Wellenzahlen nehmen die Amplituden geringfügig wieder ab.

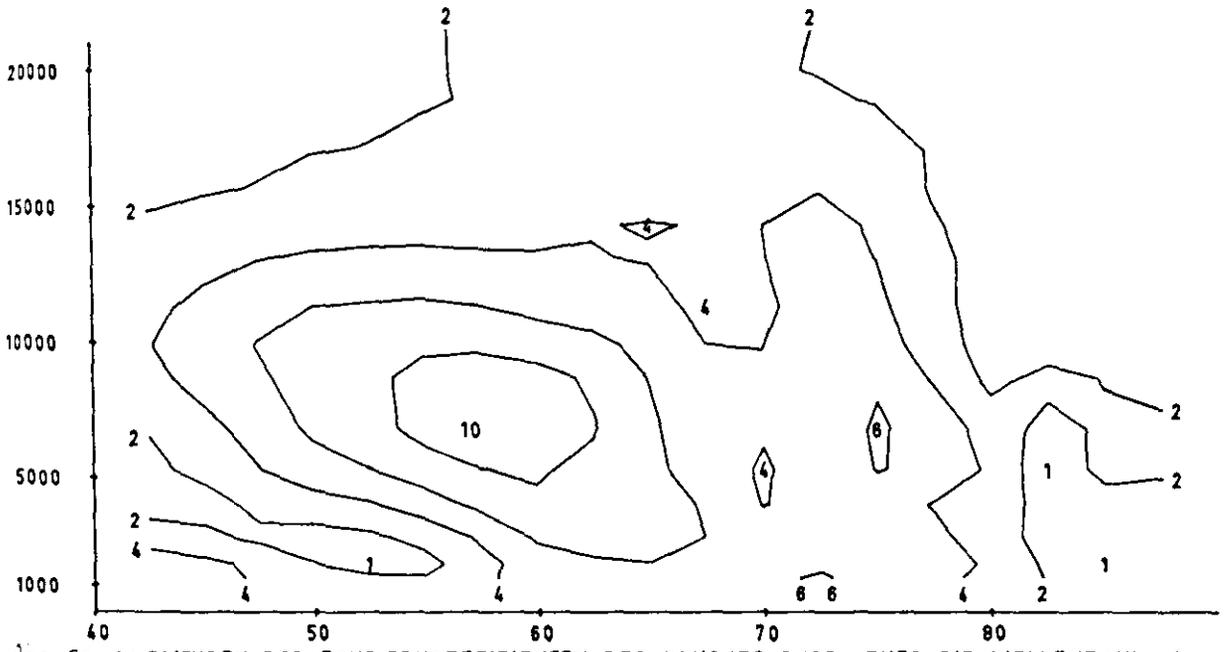


Abb. 80. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN DES DRUCKES (MB) FUER DIE WELLENZAHL 1

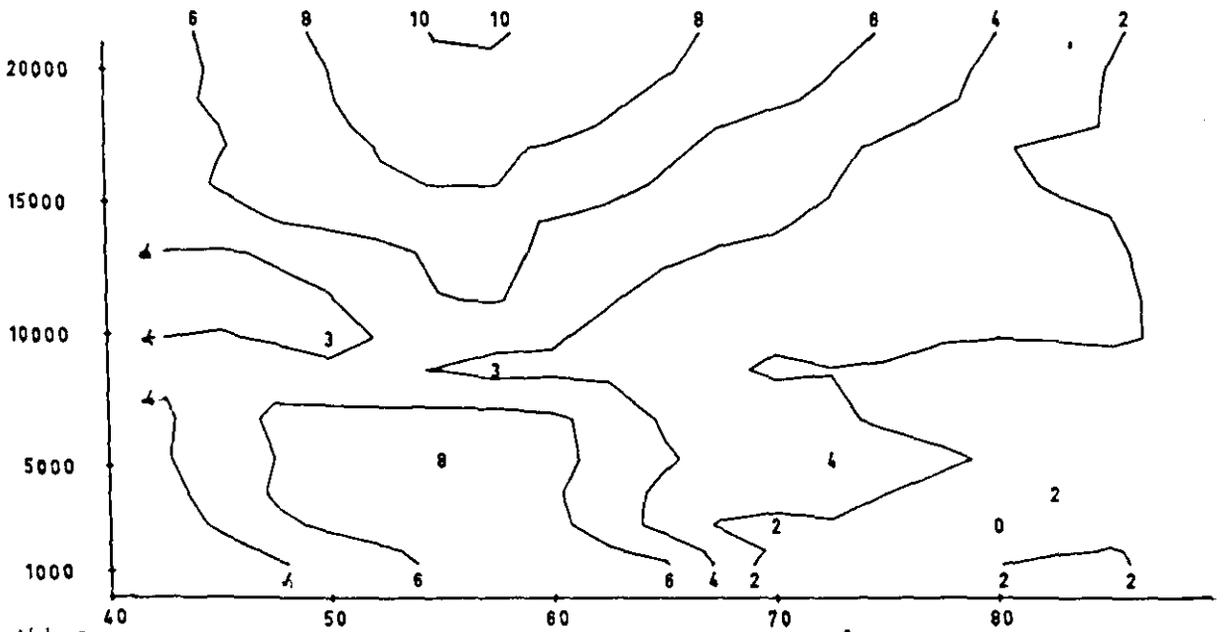


Abb. 81. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN DER TEMPERATUR (°C) FUER DIE WELLENZAHL 1

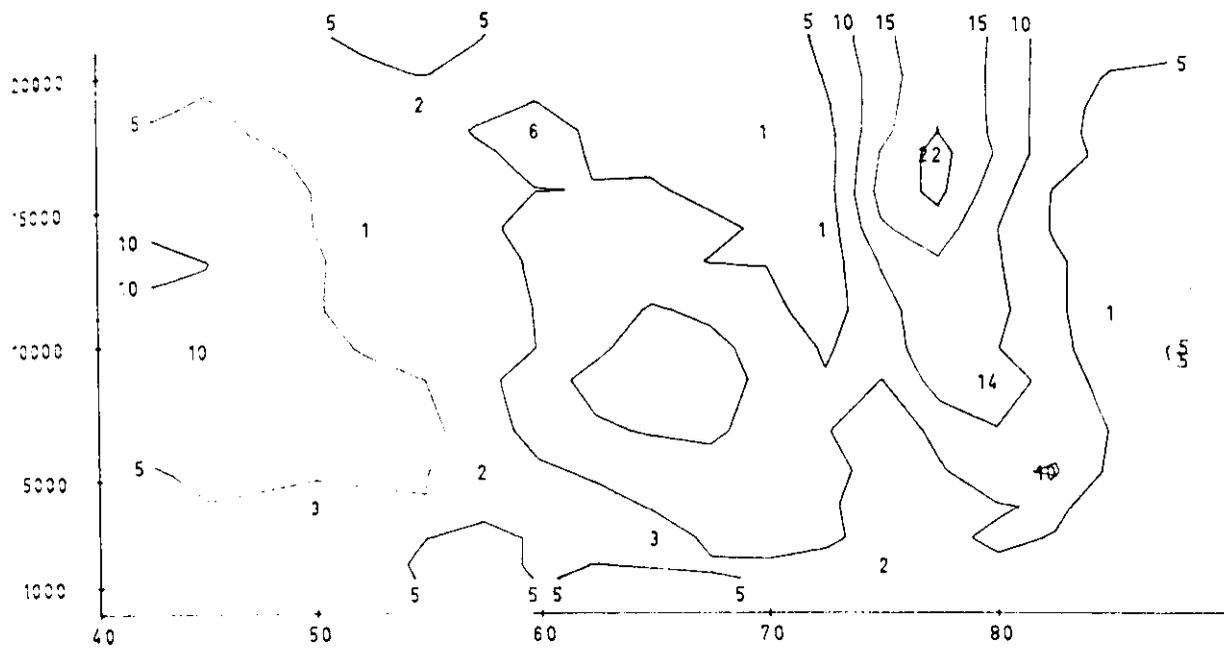


Abb. 82. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON U [M/SEC] FUER DIE WELLENZAHL 1

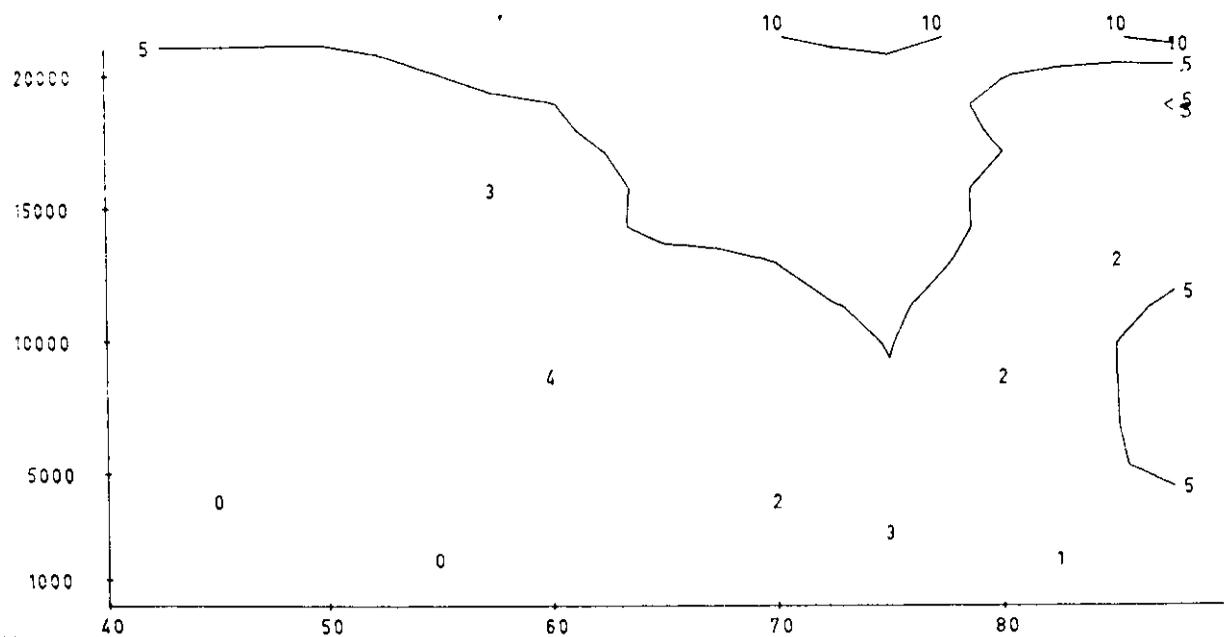


Abb. 83. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON V [M/SEC] FUER DIE WELLENZAHL 1

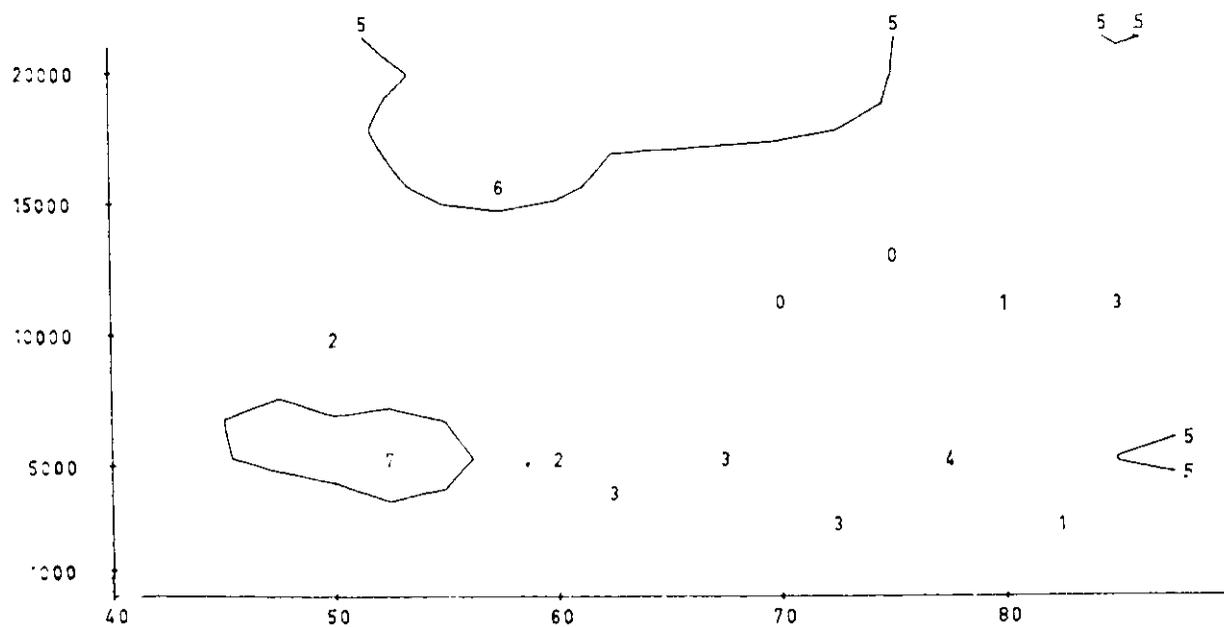


Abb. 84. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON W [MM/SEC] FUER DIE WELLENZAHL 1

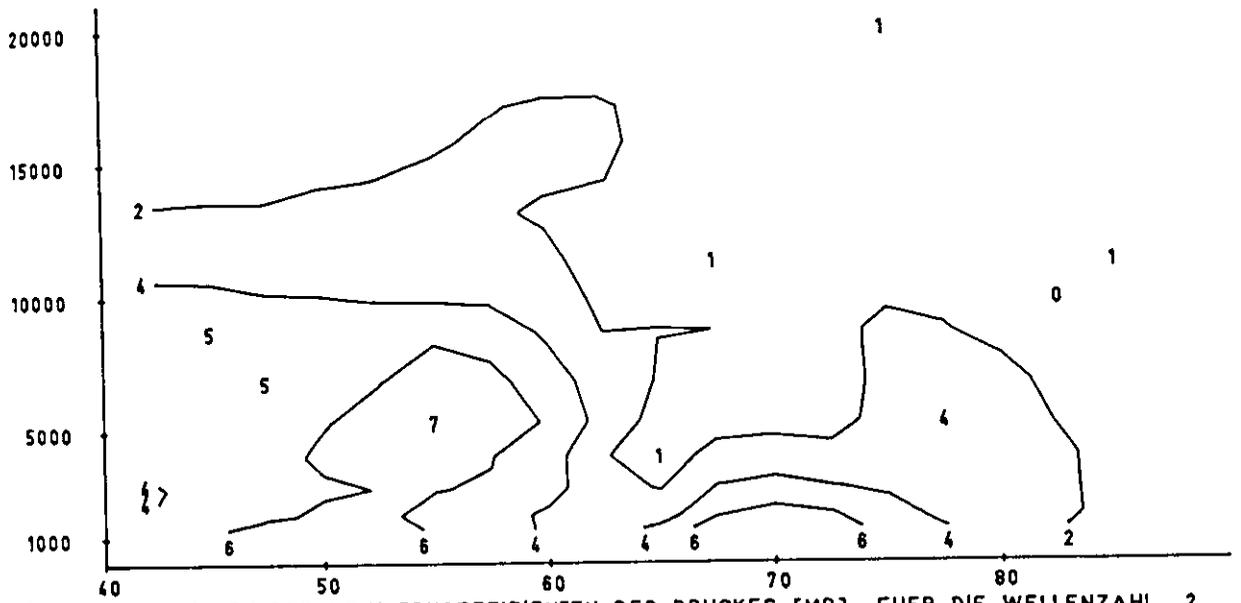


Abb. 85. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN DES DRUCKES [MB] FUER DIE WELLENZAHL 2

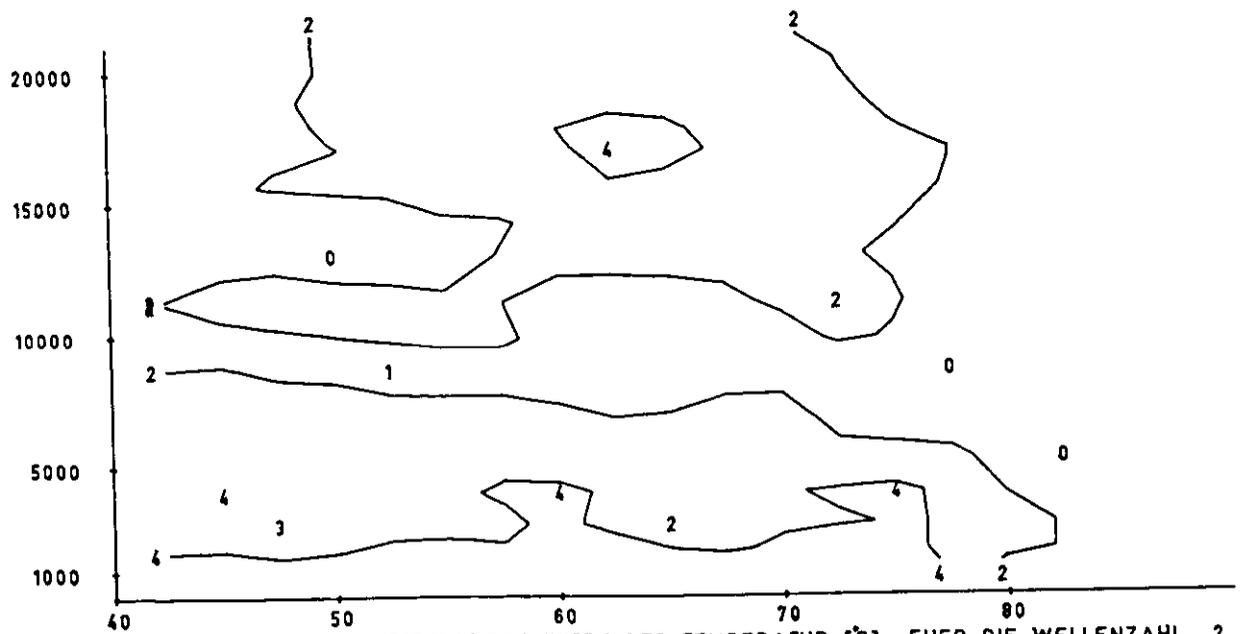


Abb. 86. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN DER TEMPERATUR [°C] FUER DIE WELLENZAHL 2

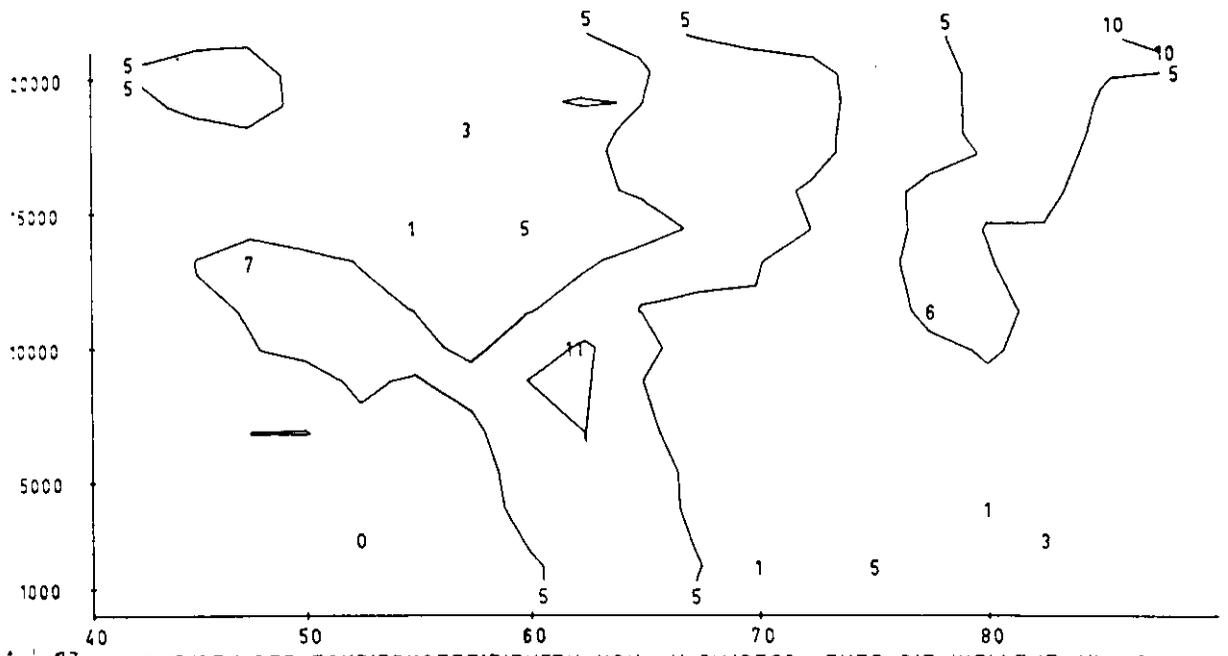


Abb. 87. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON U [M/SEC] FUER DIE WELLENZAHL 2

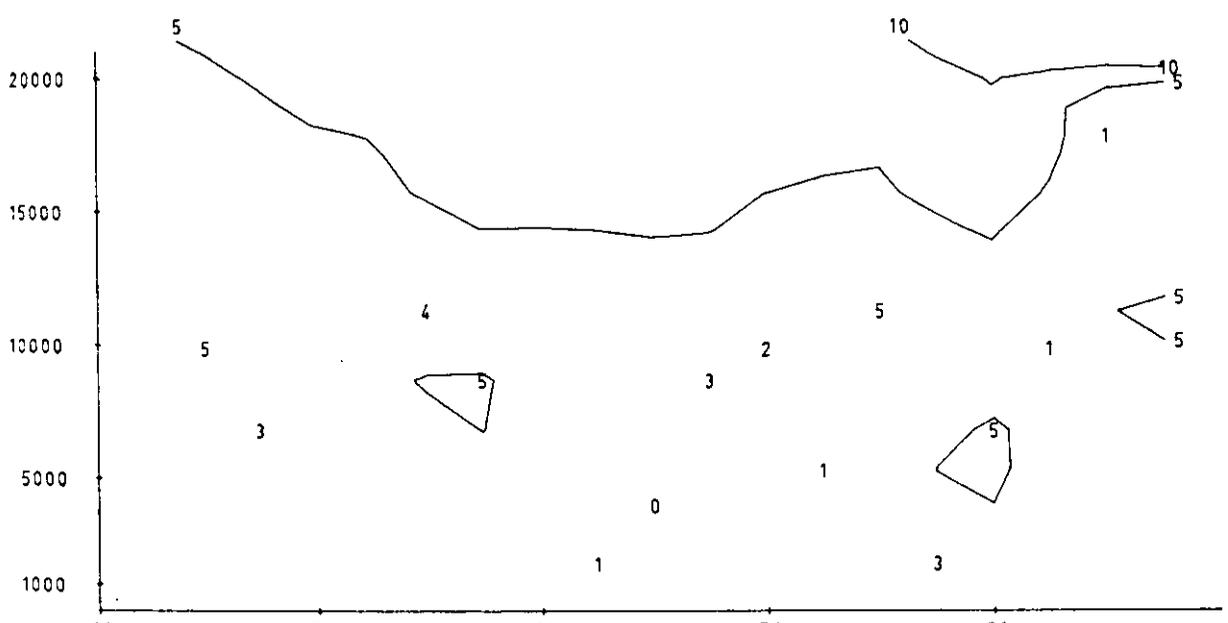


Abb. 88. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON V [M/SEC] FUER DIE WELLENZAHL 2

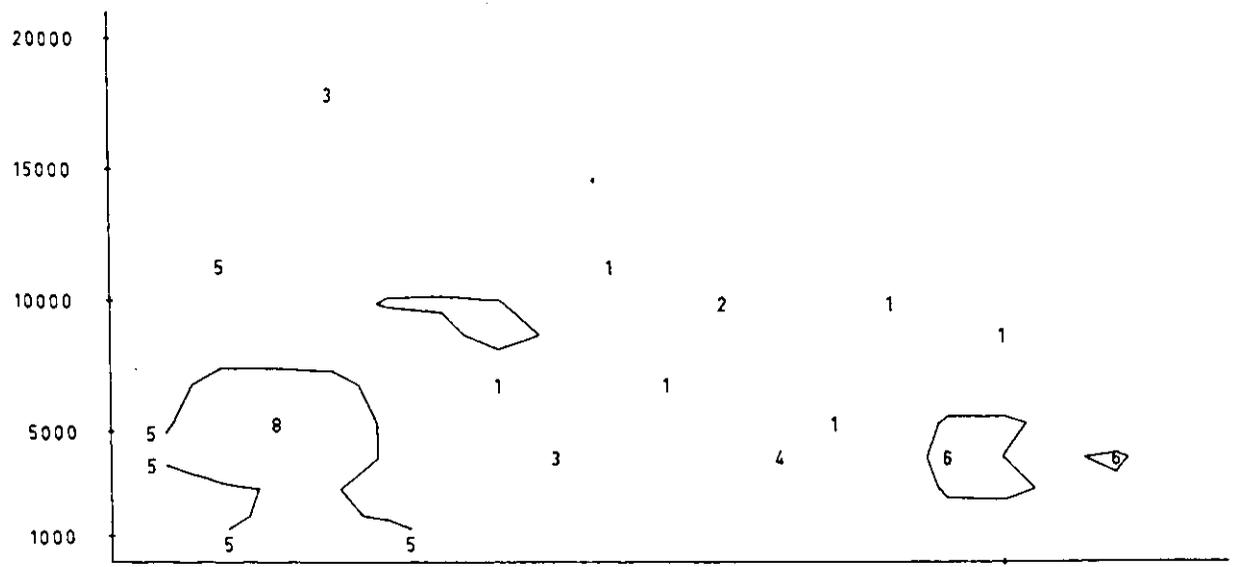


Abb. 89. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON W [MM/SEC] FUER DIE WELLENZAHL 2

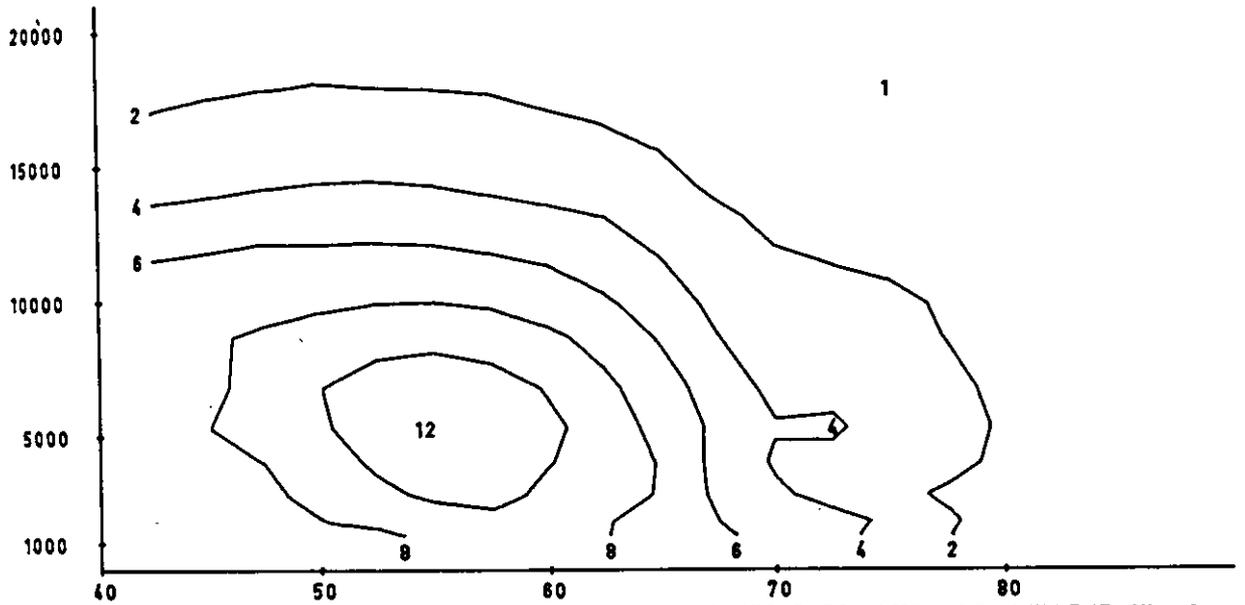


Abb. 90. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN DES DRUCKES [mB] FUER DIE WELLENZAHL 3

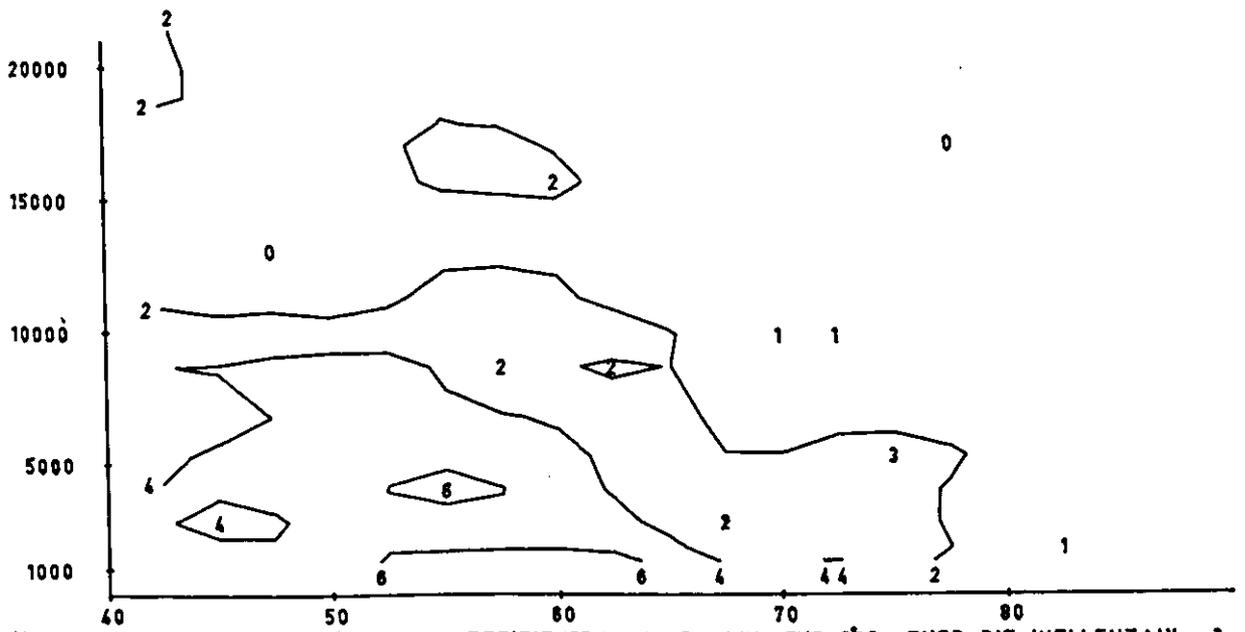


Abb. 91. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN DER TEMPERATUR [°C] FUER DIE WELLENZAHL 3

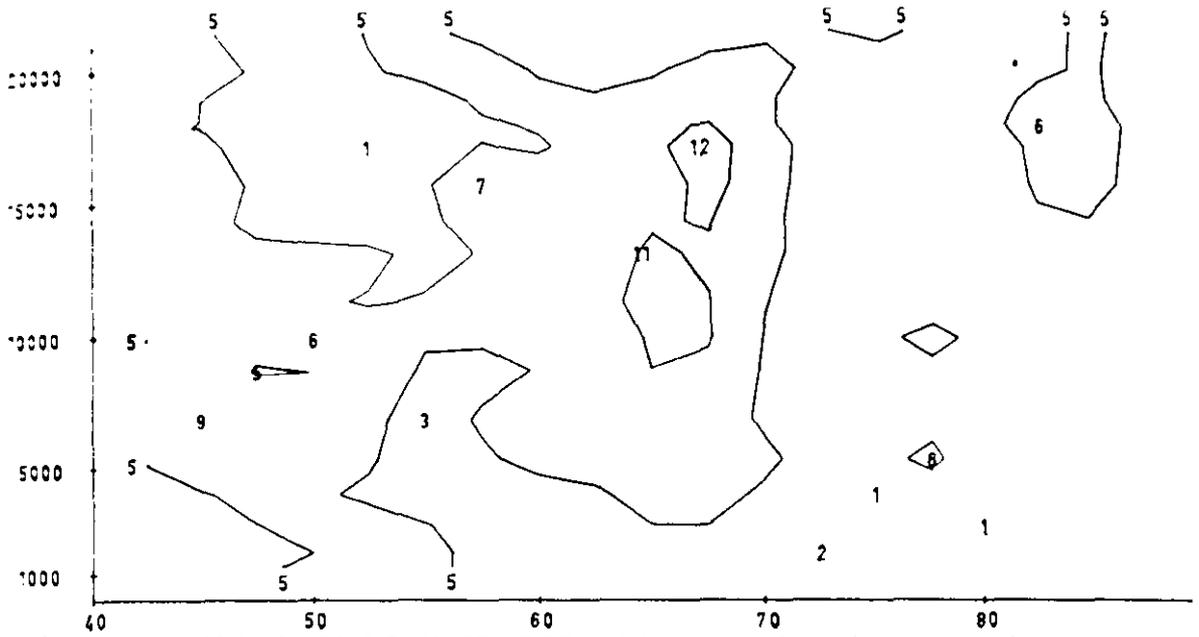


Abb. 92. AMPLITUEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON U [M/SEC] FUER DIE WELLENZAHL  $\lambda$

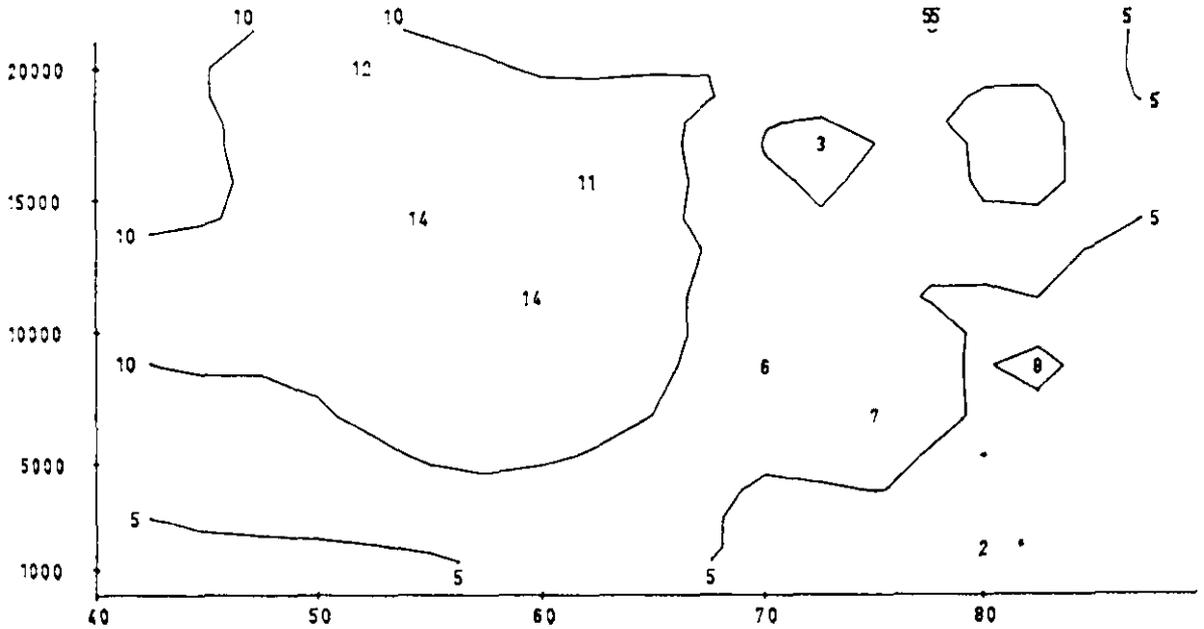


Abb. 93. AMPLITUEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON V [M/SEC] FUER DIE WELLENZAHL  $\lambda$

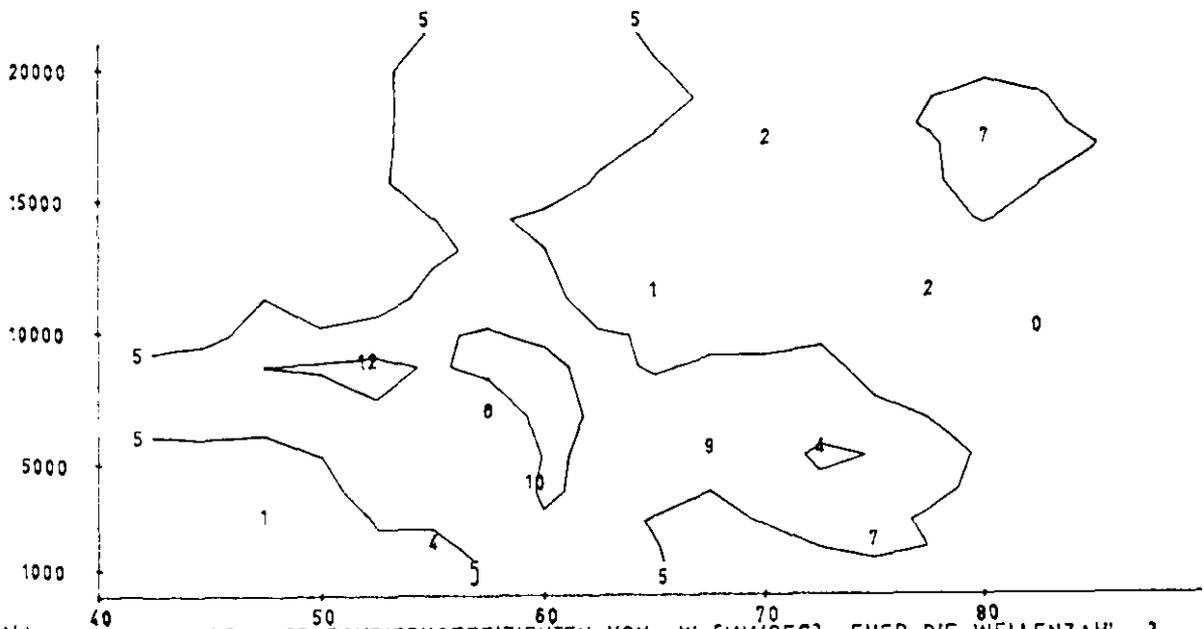


Abb. 94. AMPLITUEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON W [MM/SEC] FUER DIE WELLENZAHL  $\lambda$

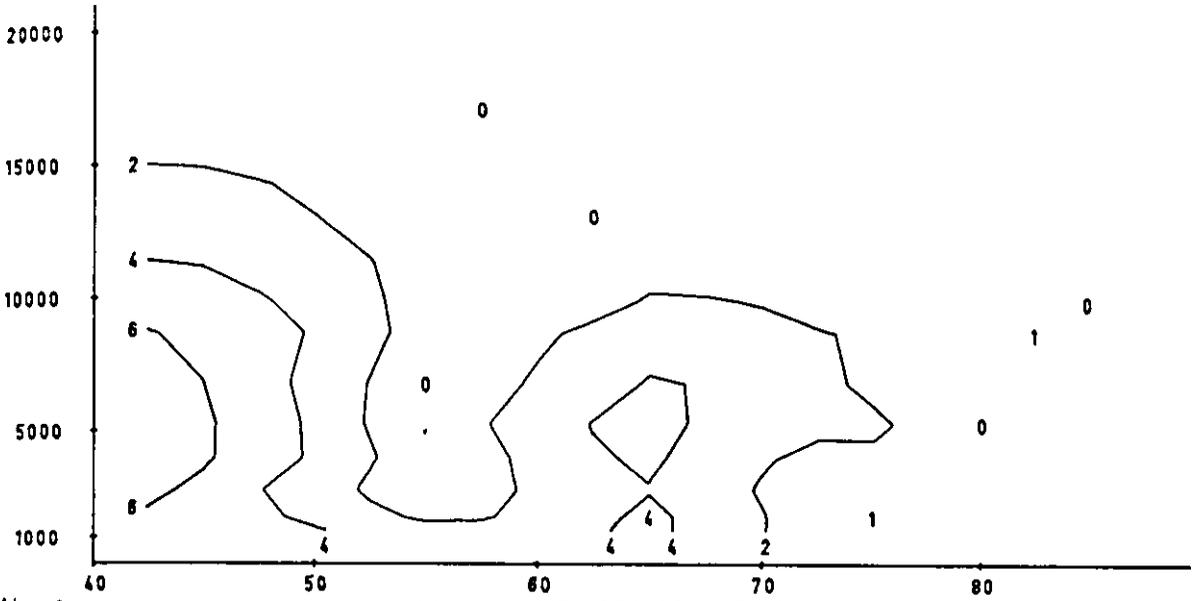


Abb. 95. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN DES DRUCKES (MB) FUER DIE WELLENZAHL 4

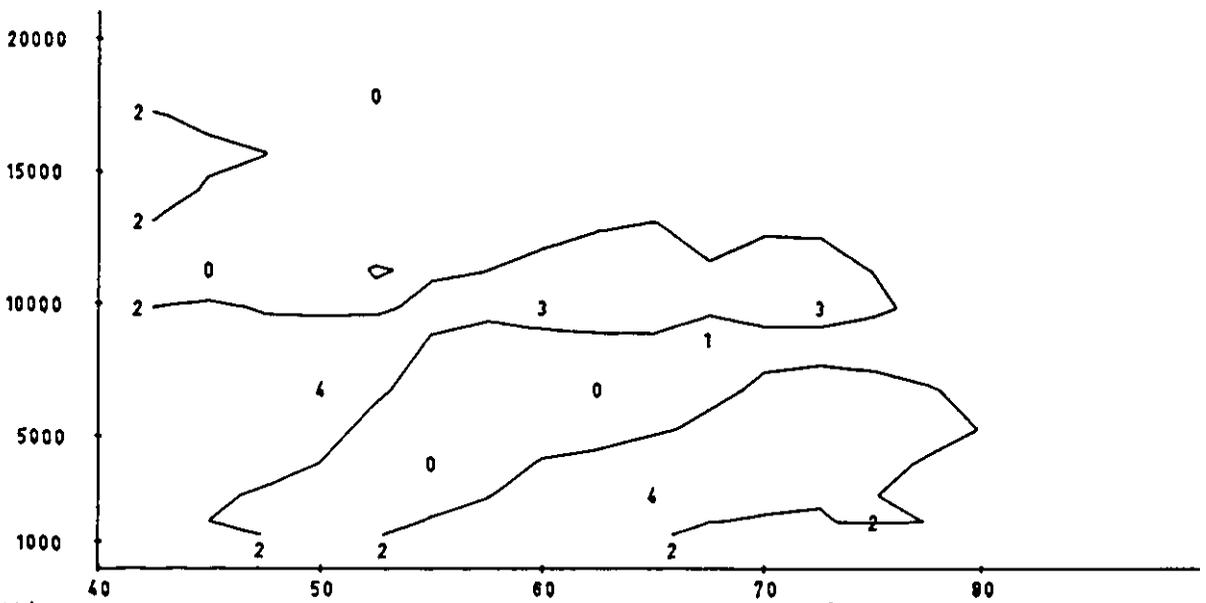


Abb. 96. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN DER TEMPERATUR (°C) FUER DIE WELLENZAHL 4

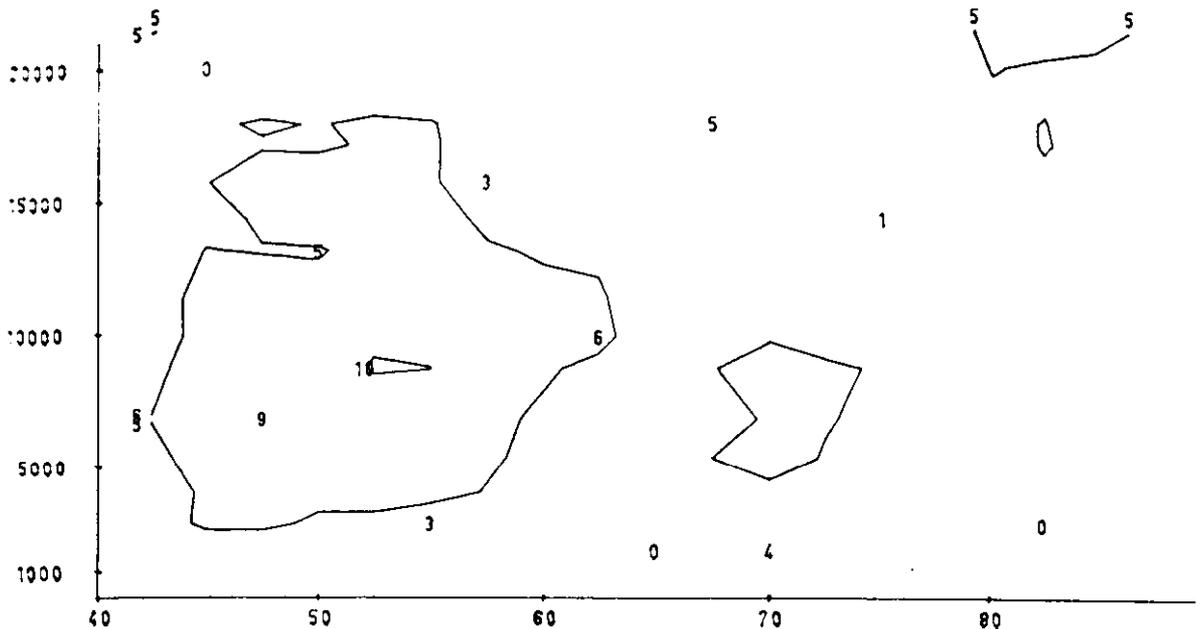


Abb. 97. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON U [M/SEC] FUER DIE WELLENZAHL  $\lambda$

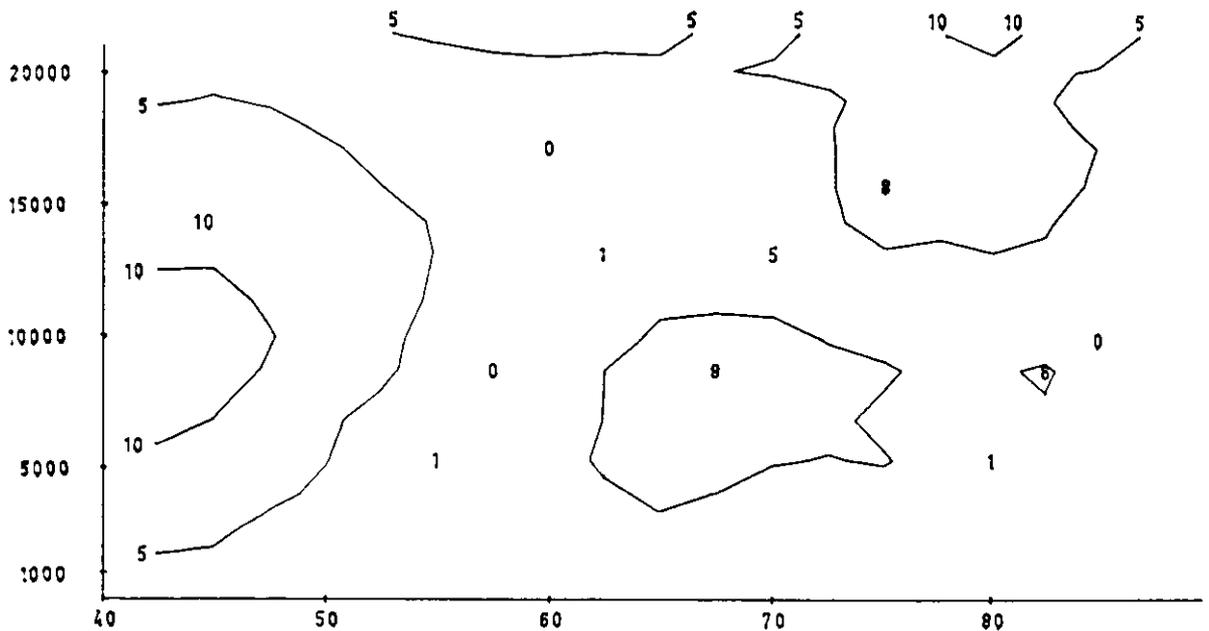


Abb. 98. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON V [M/SEC] FUER DIE WELLENZAHL  $\lambda$

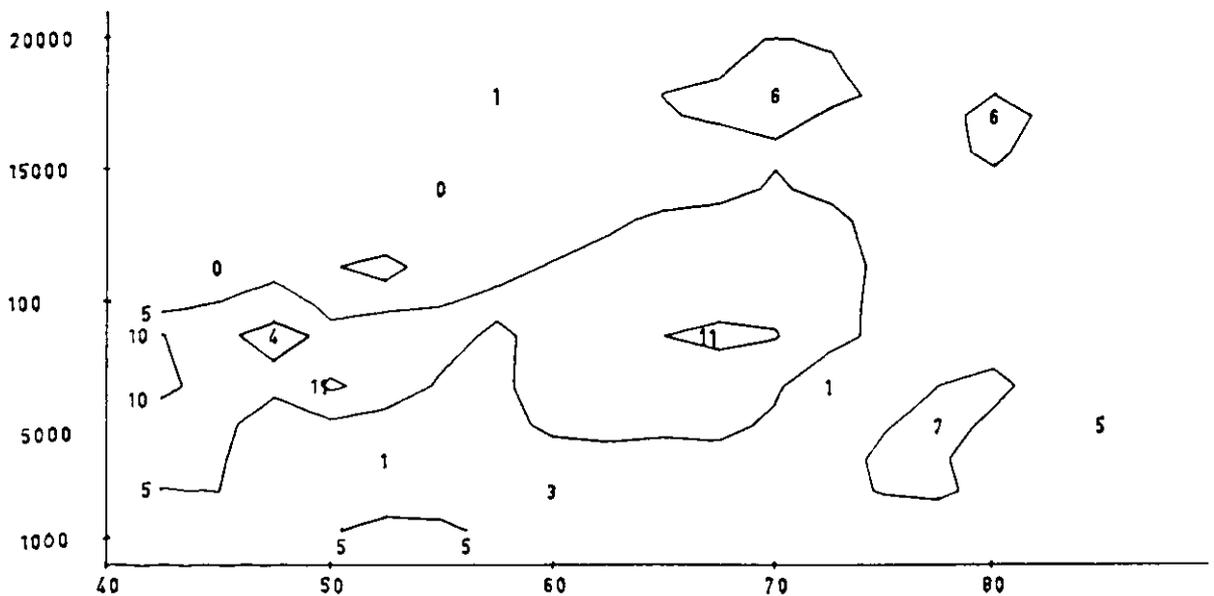


Abb. 99. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON W [MM/SEC] FUER DIE WELLENZAHL  $\lambda$

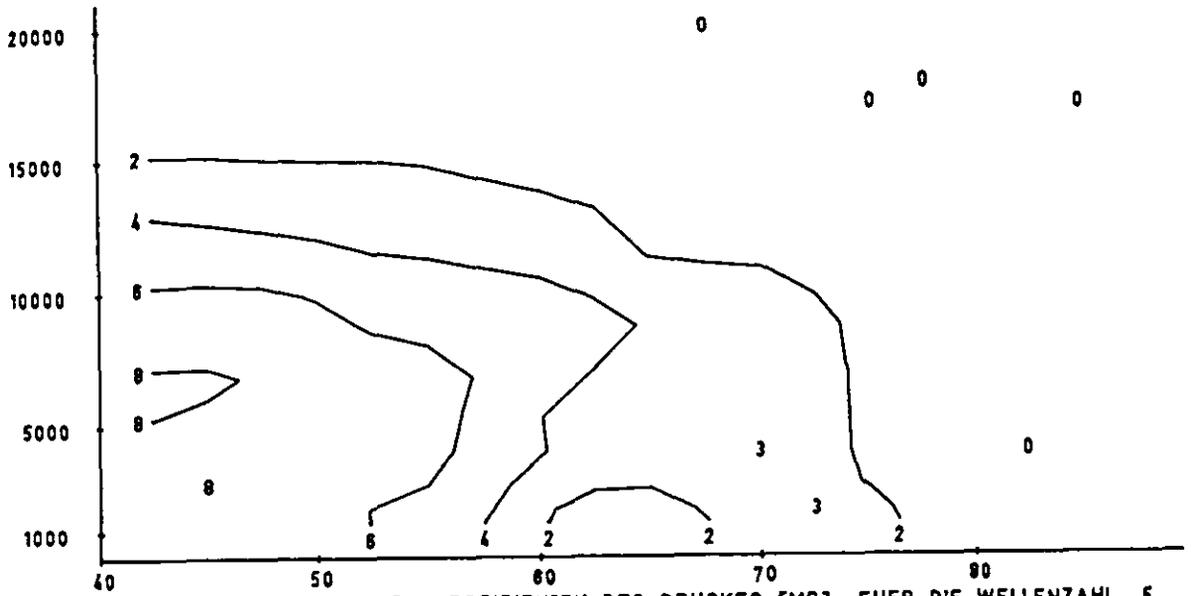


Abb. 100. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN DES DRUCKES [MB] FUER DIE WELLENZAHL 5

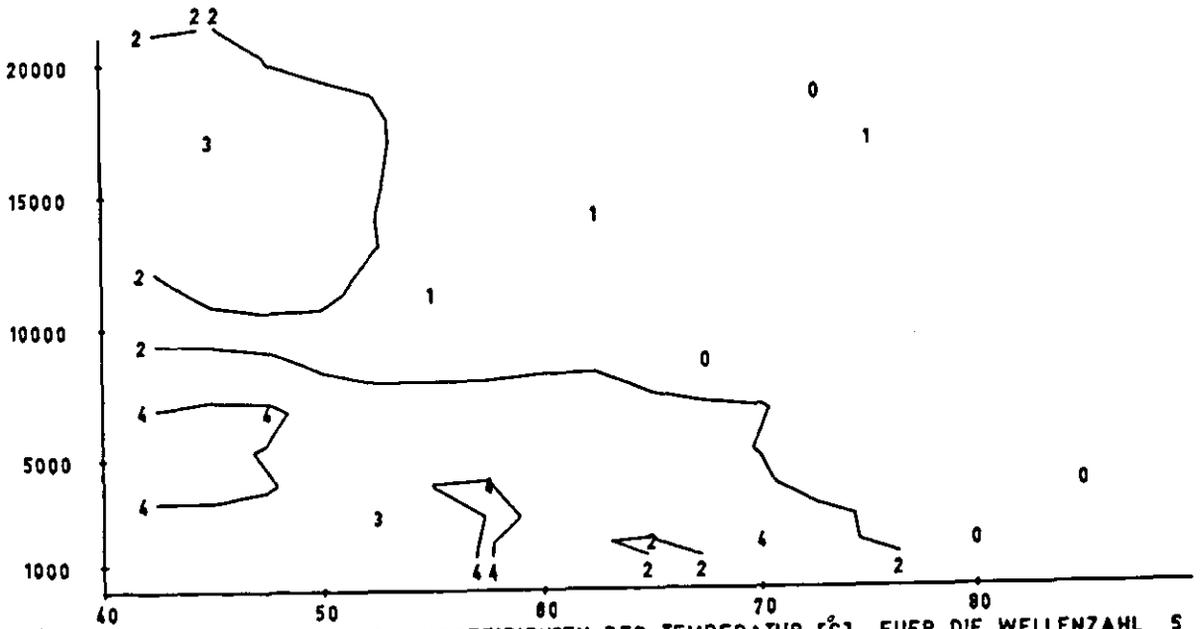


Abb. 101. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN DER TEMPERATUR [°C] FUER DIE WELLENZAHL 5

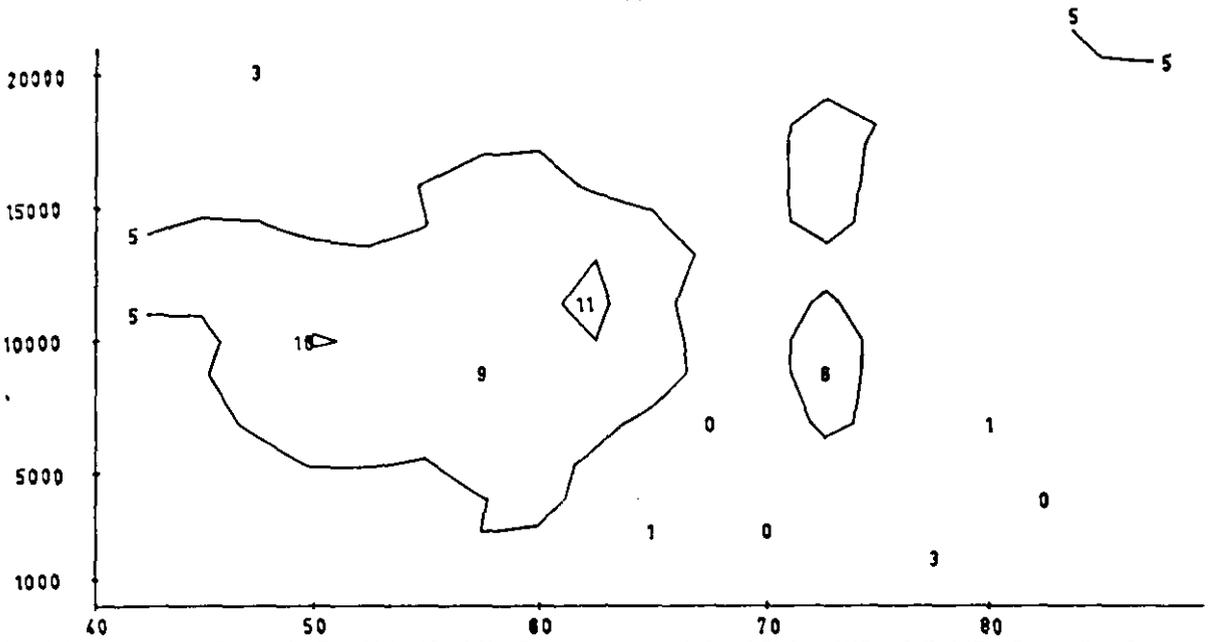


Abb. 102. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON U [M/SEC] FÜR DIE WELLENZAHL 5

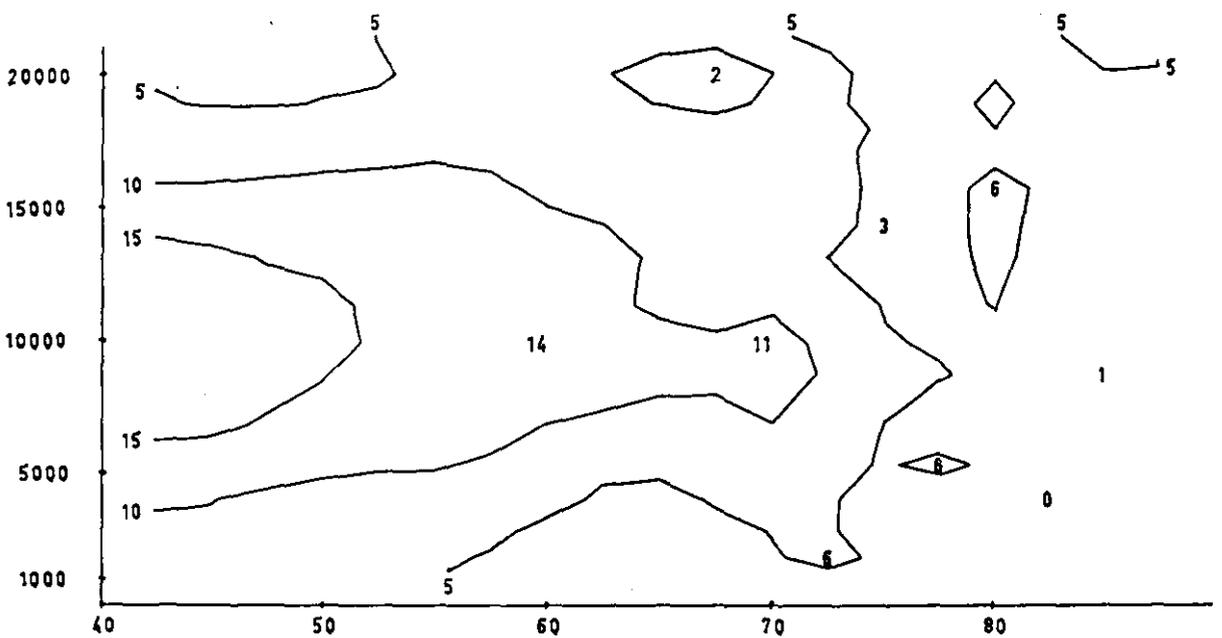


Abb. 103. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON V [M/SEC] FÜR DIE WELLENZAHL 5

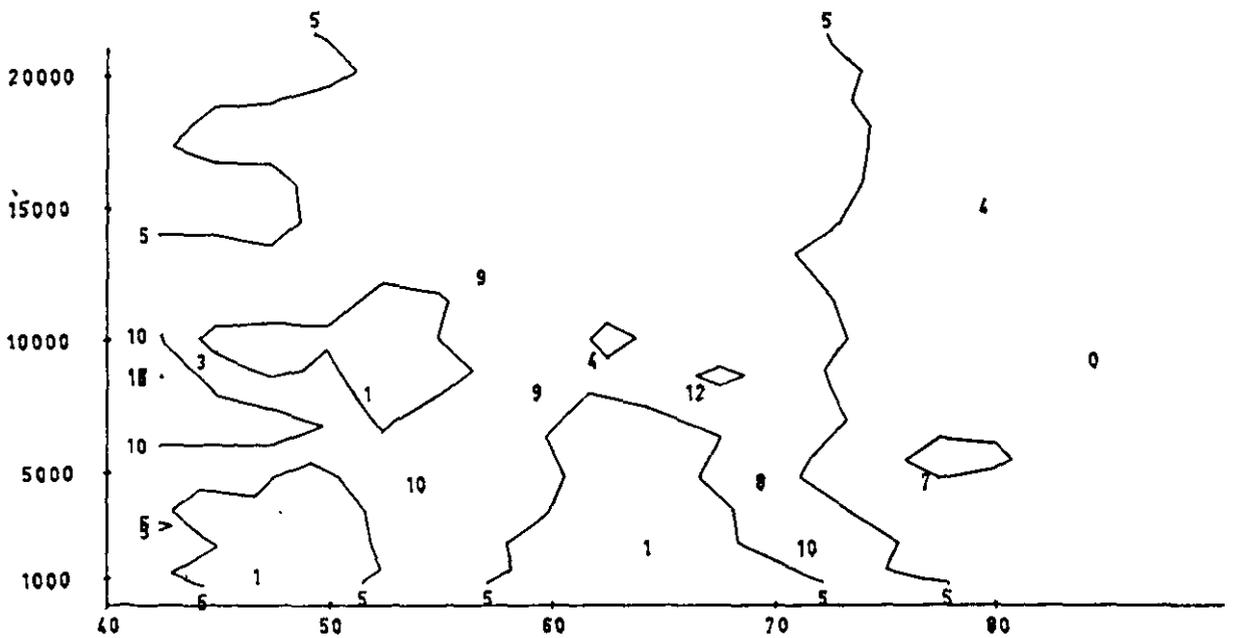


Abb. 104. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON W [MM/SEC] FÜR DIE WELLENZAHL 5

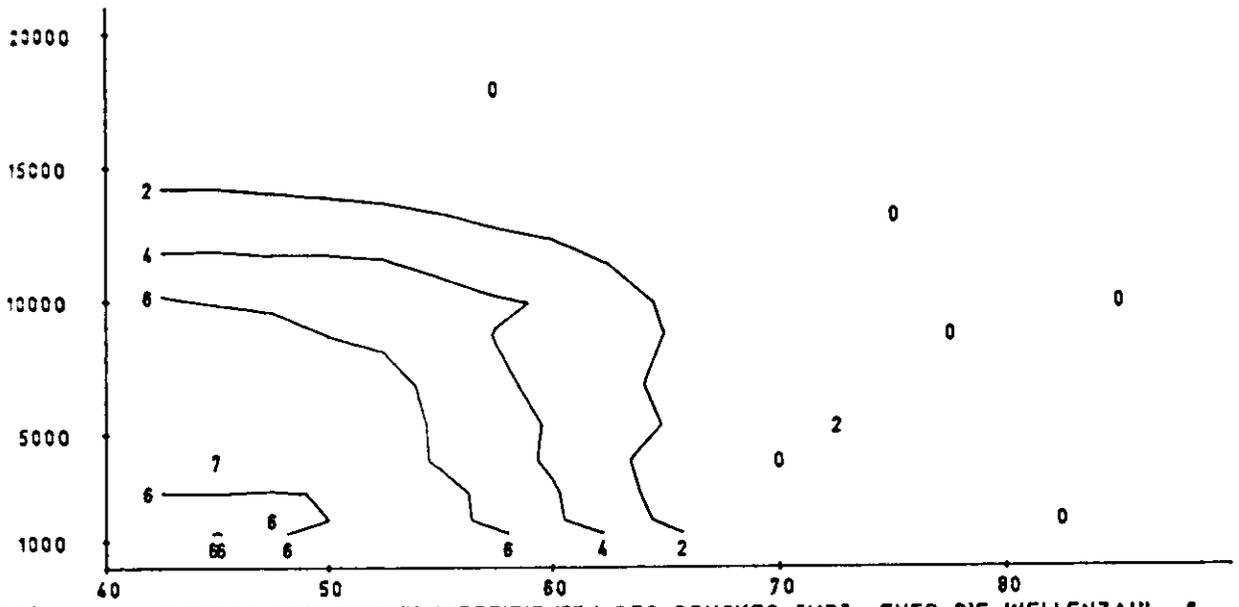


Abb. 105. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN DES DRUCKES [MB] FUER DIE WELLENZAHL  $n$

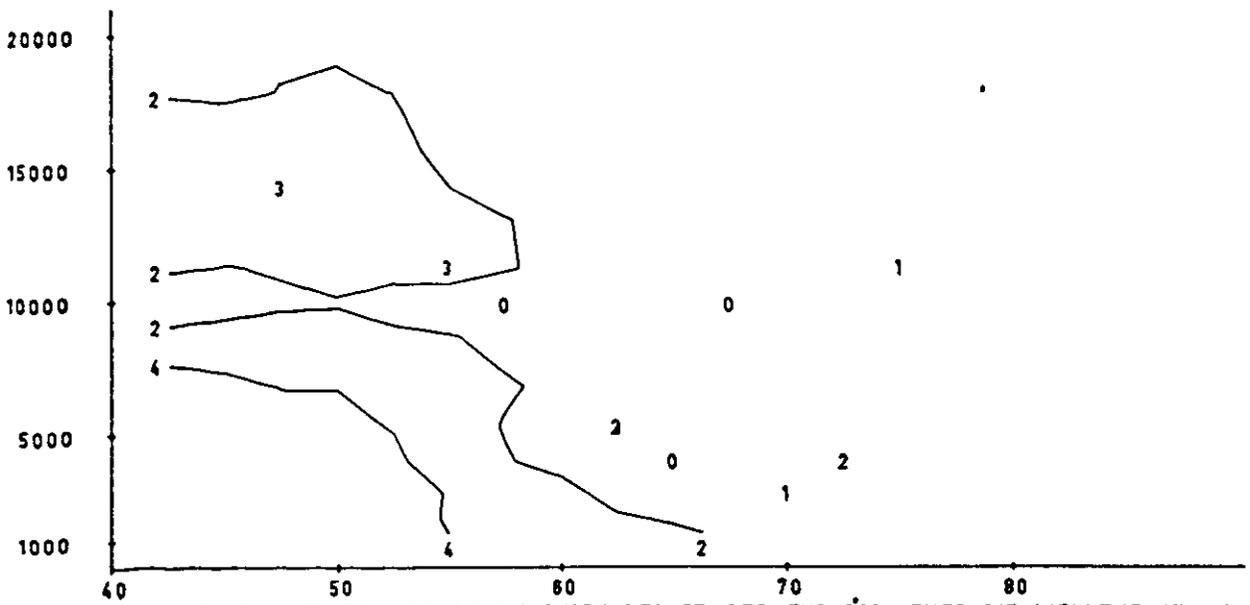


Abb. 106. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN DER TEMPERATUR [°C] FUER DIE WELLENZAHL  $n$

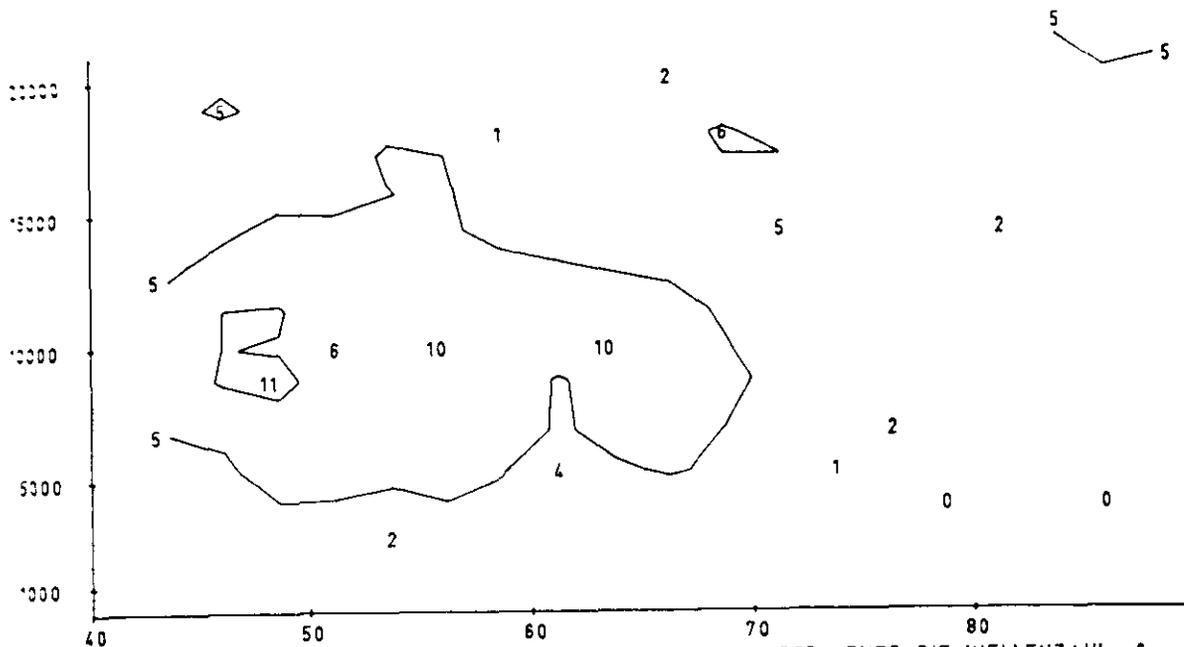


Abb. 107. AMPLITU DEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON  $U$  [M/SEC] FUER DIE WELLENZAHL 6

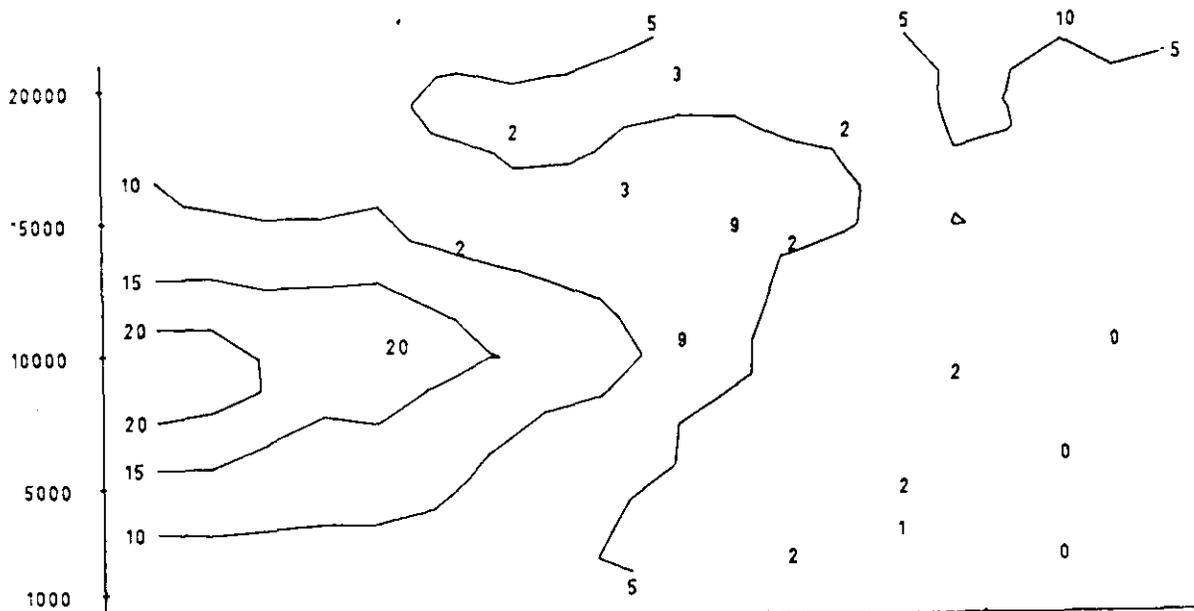


Abb. 108. AMPLITU DEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON  $V$  [M/SEC] FUER DIE WELLENZAHL 6

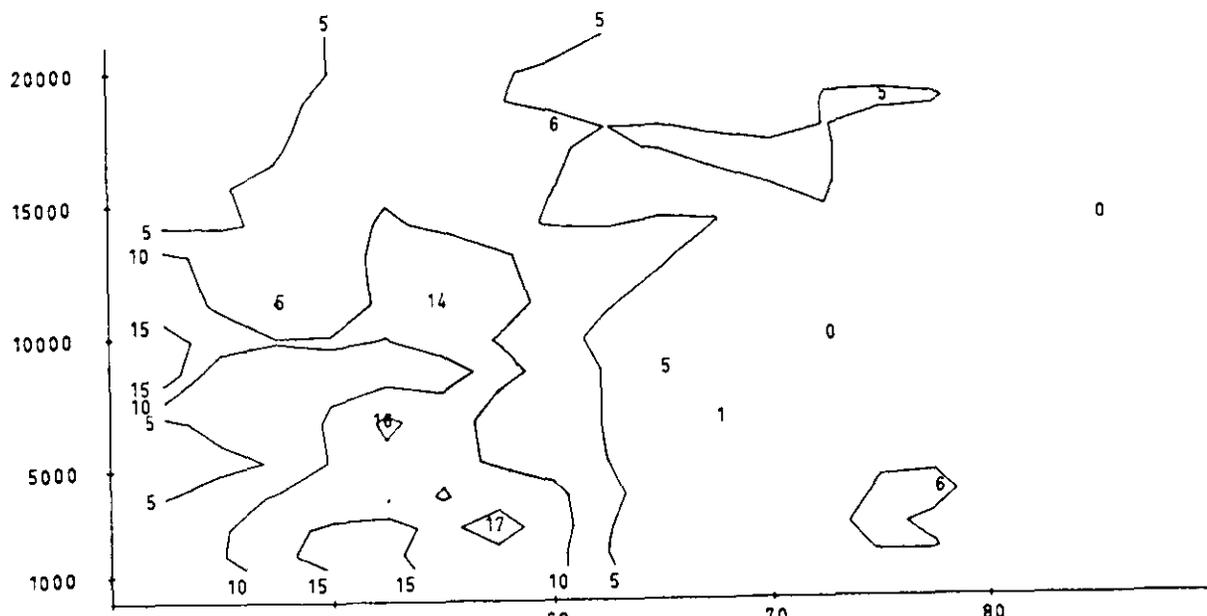


Abb. 109. AMPLITU DEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON  $W$  [MM/SEC] FUER DIE WELLENZAHL 6

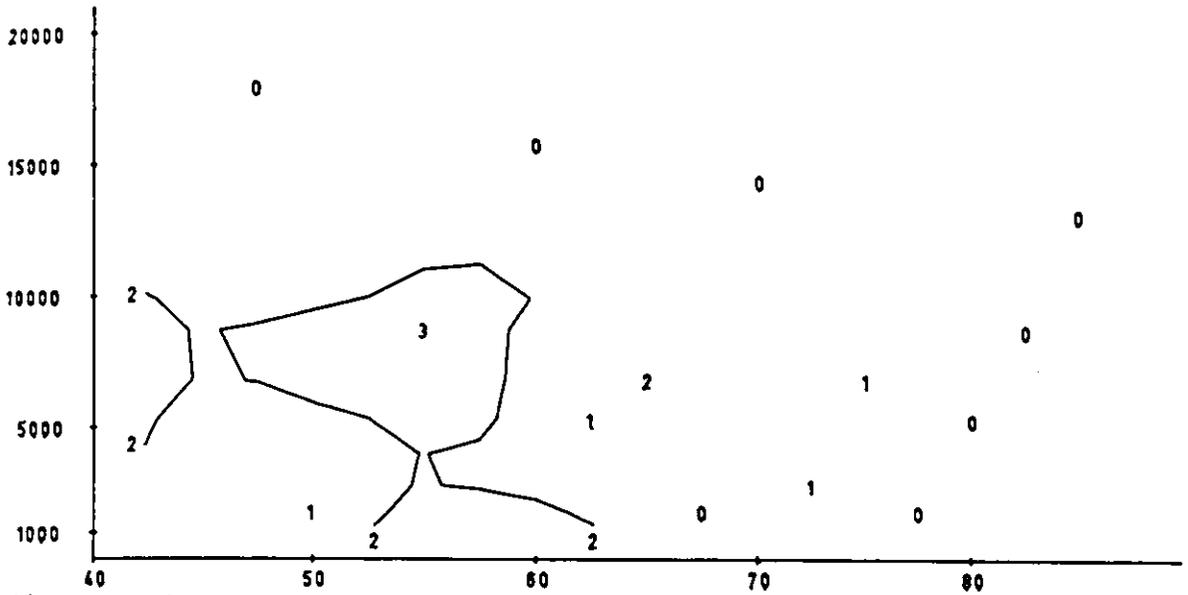


Abb. 110. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN DES DRUCKES [MB] FUER DIE WELLENZAHL 7

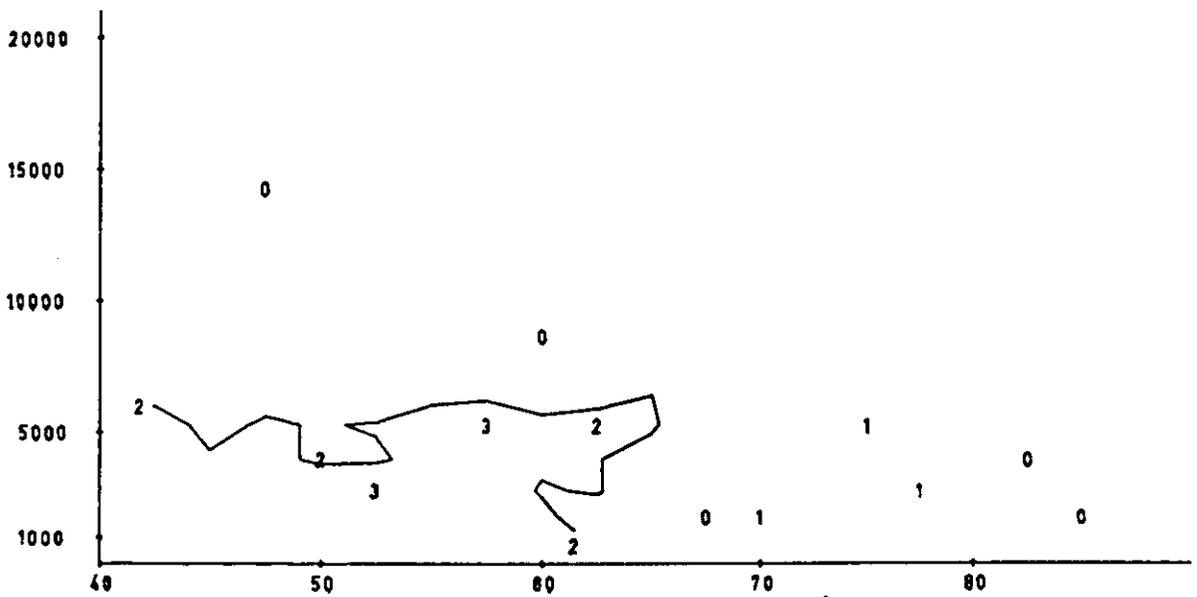


Abb. 111. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN DER TEMPERATUR [°C] FUER DIE WELLENZAHL 7

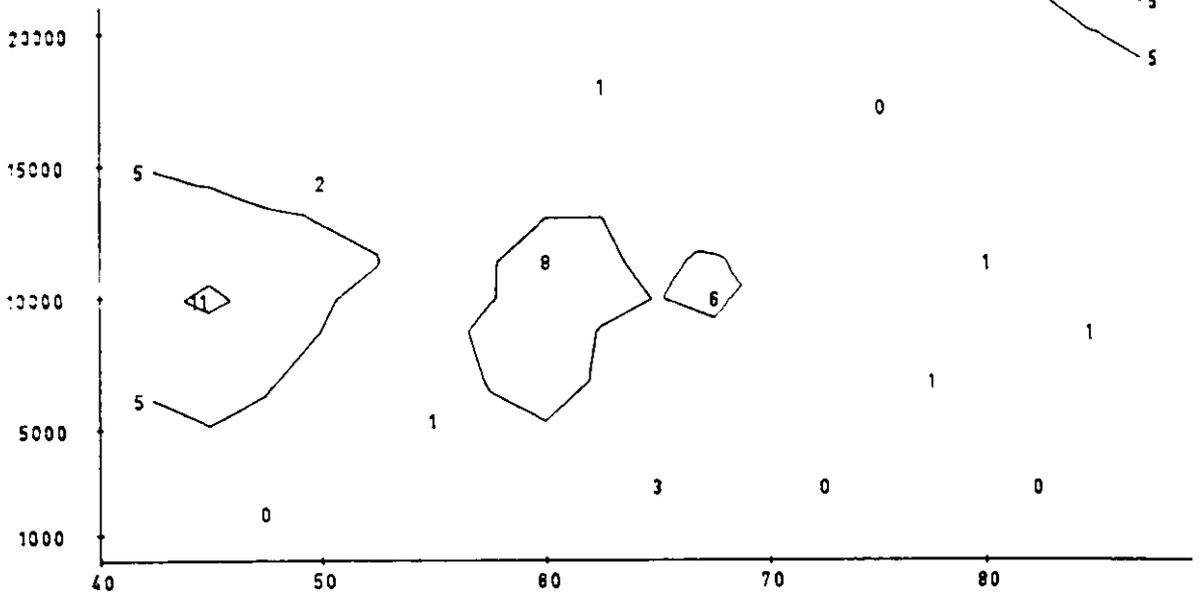


Abb. 112. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON U [M/SEC] FUER DIE WELLENZAHL 7

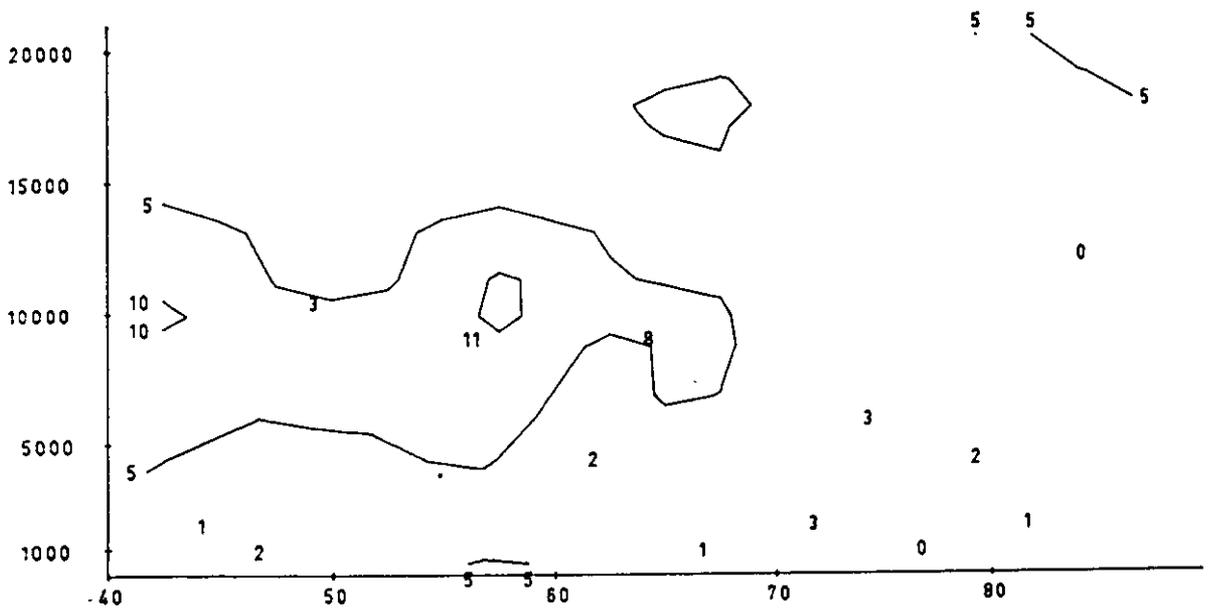


Abb. 113. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON V [M/SEC] FUER DIE WELLENZAHL 7

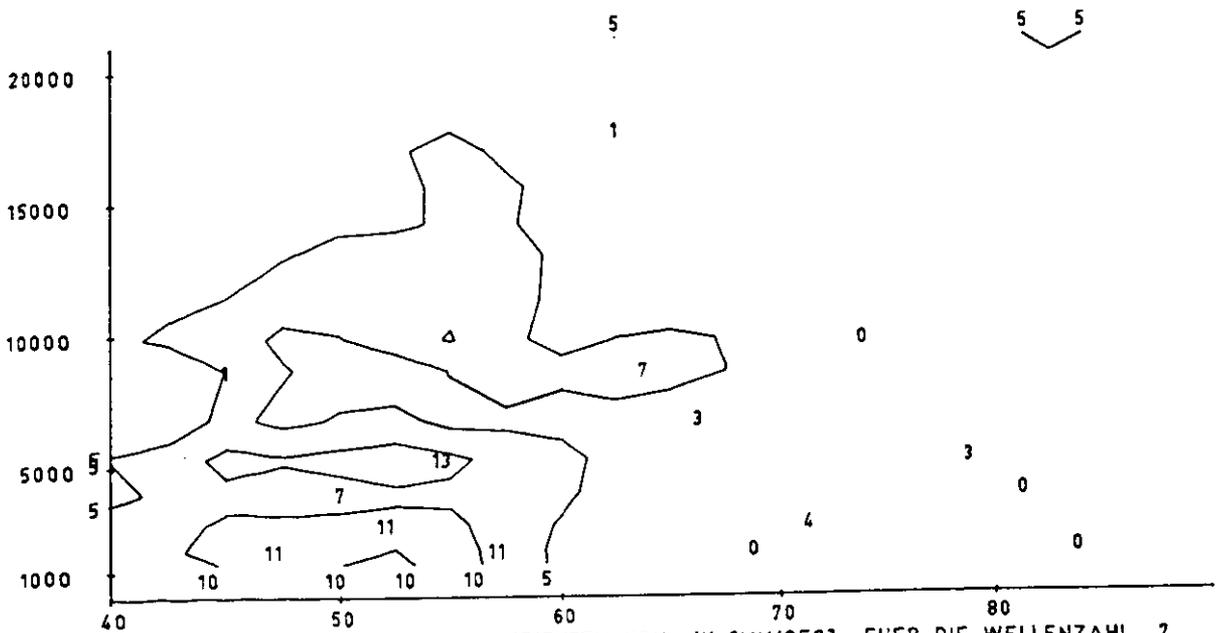


Abb. 114. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON W [MM/SEC] FUER DIE WELLENZAHL 7

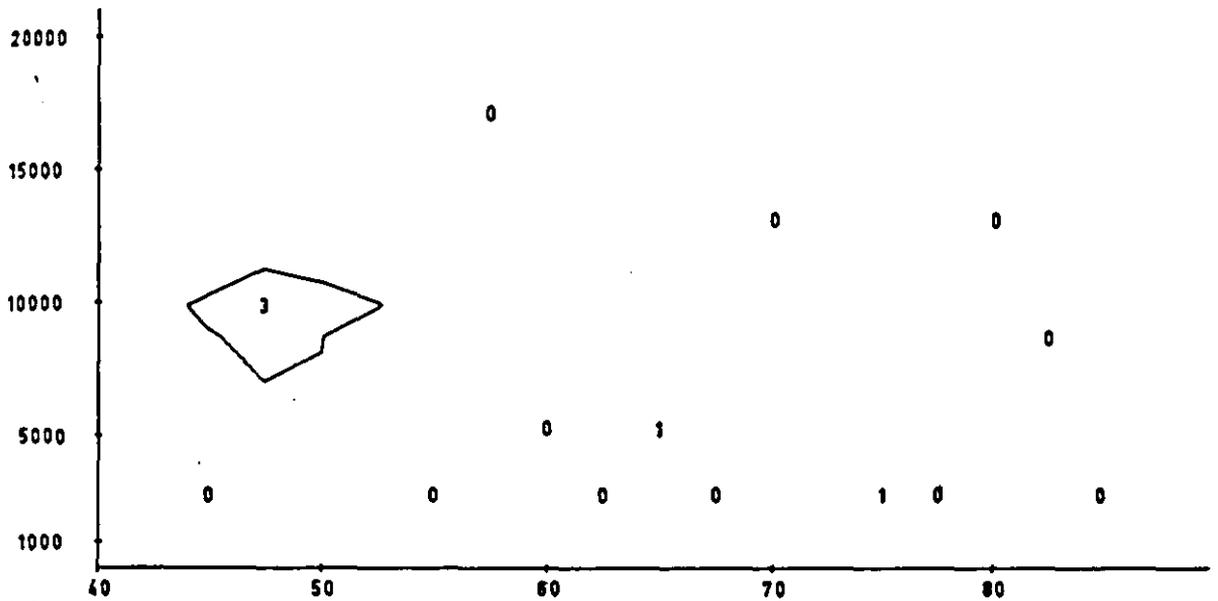


Abb. 115. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN DES DRUCKES [mB] FUER DIE WELLENZAHL  $n$

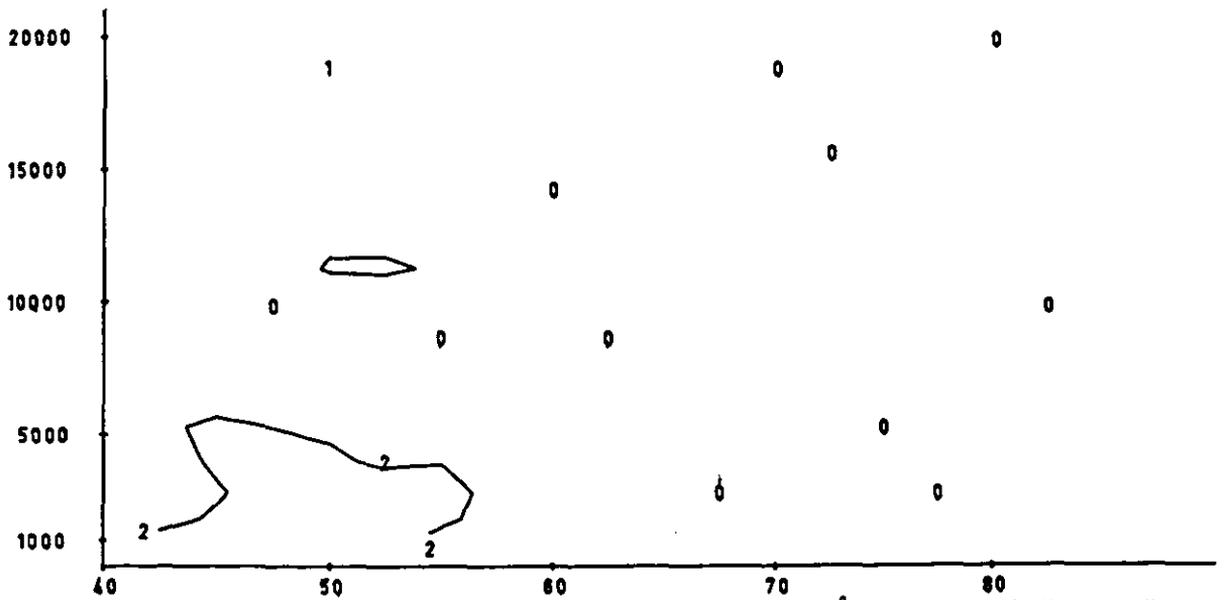


Abb. 116. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN DER TEMPERATUR [°C] FUER DIE WELLENZAHL  $n$

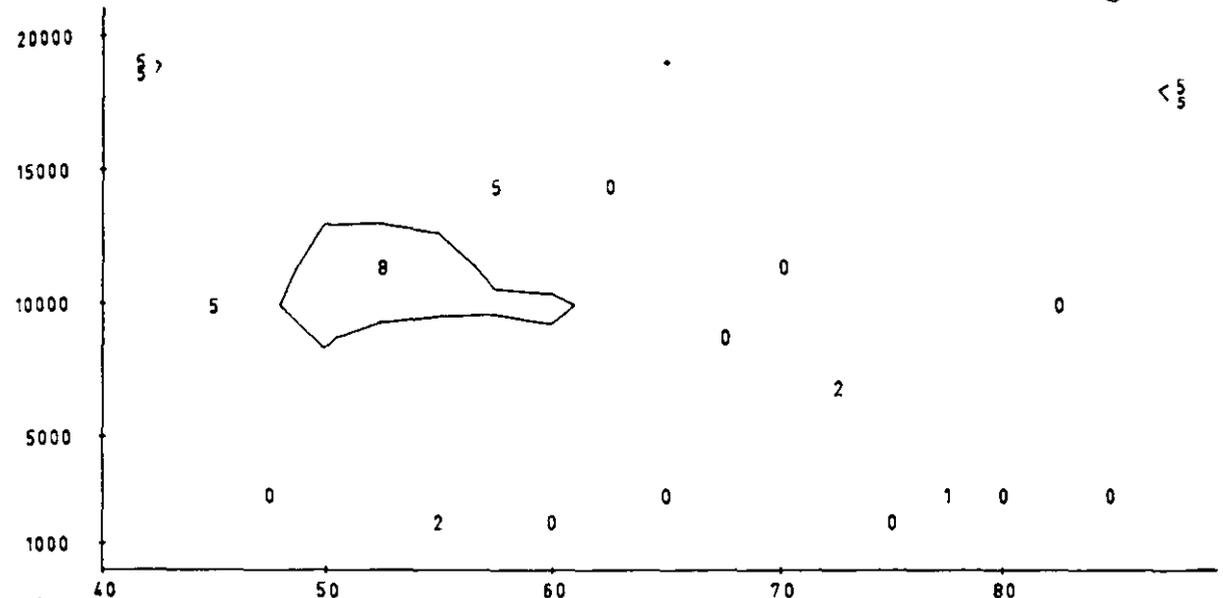


Abb. 117. AMPLITUEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON U [M/SEC] FUER DIE WELLENZAHL n

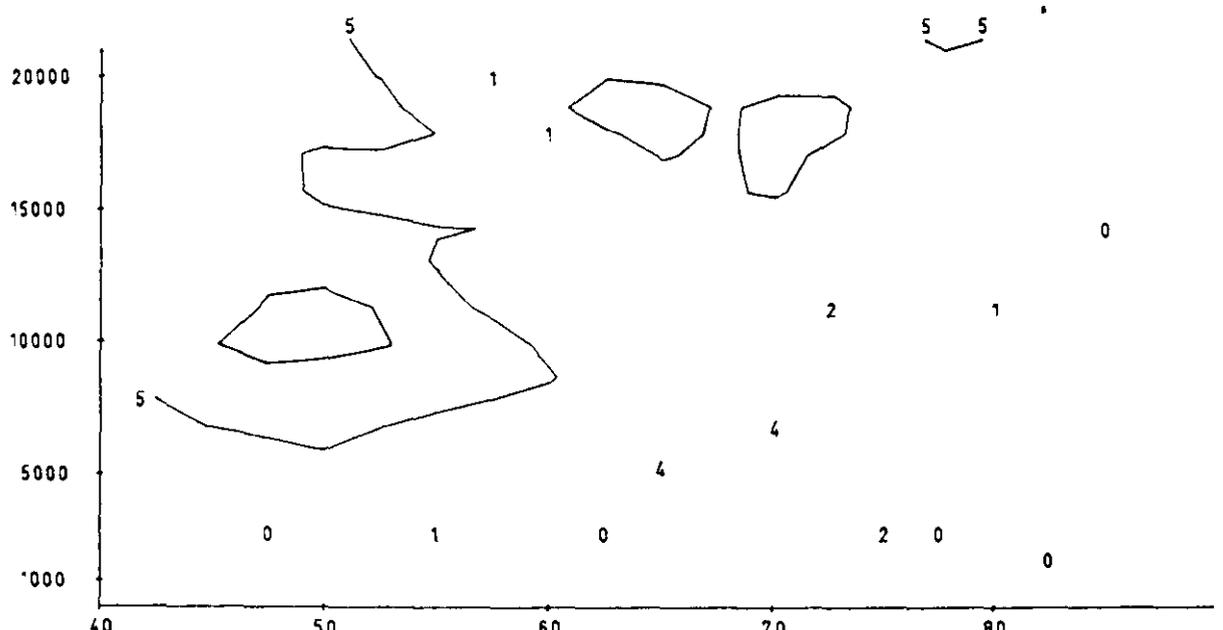


Abb. 118. AMPLITUEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON V [M/SEC] FUER DIE WELLENZAHL n

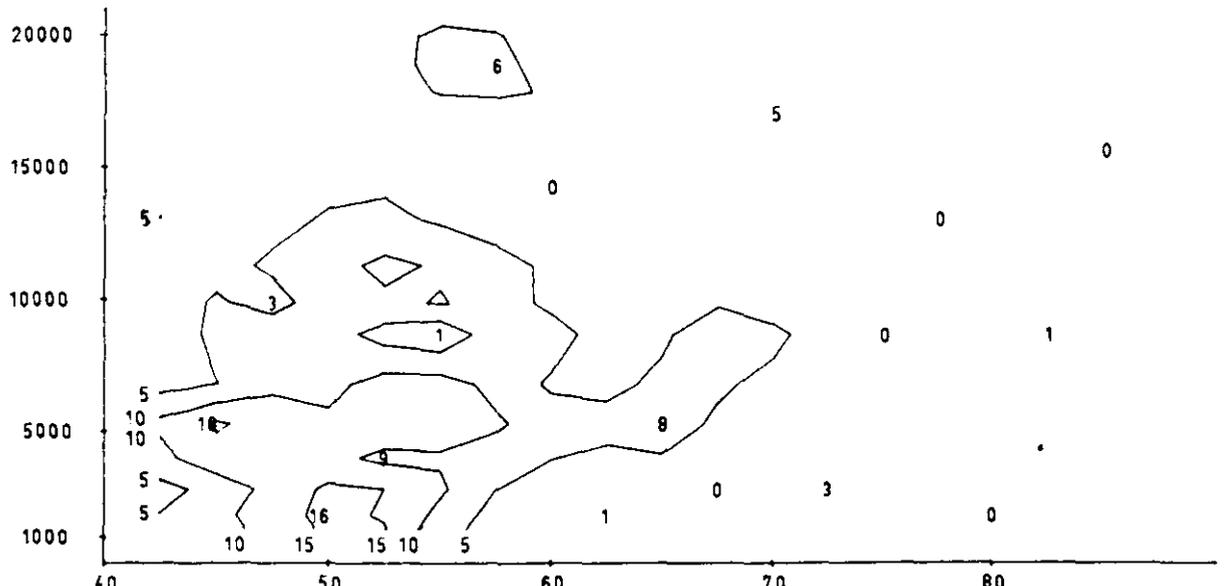


Abb. 119. AMPLITUEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON W [MM/SEC] FUER DIE WELLENZAHL n

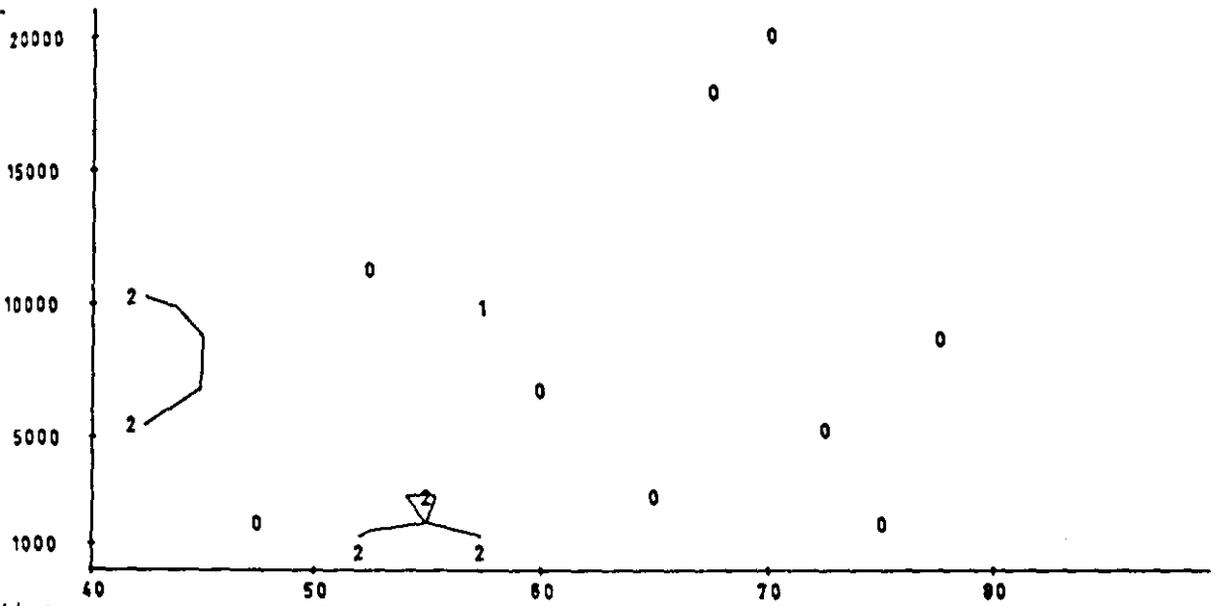


Abb. 120. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN DES DRUCKES [mB] FUER DIE WELLENZAHL 9

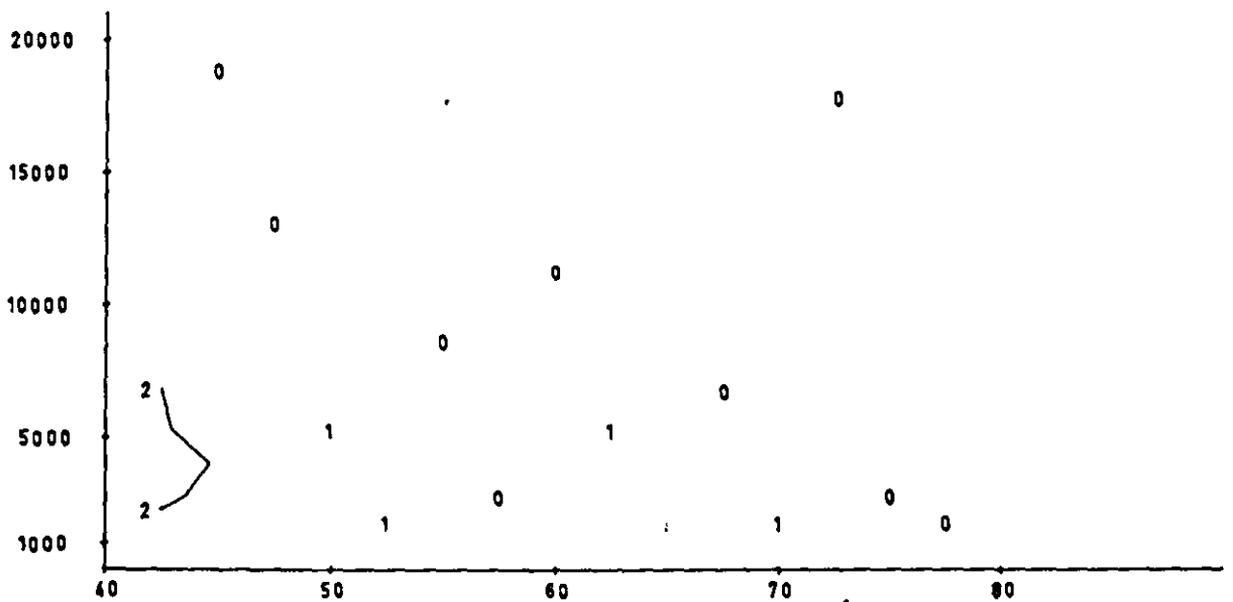


Abb. 121. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN DER TEMPERATUR [°C] FUER DIE WELLENZAHL 9

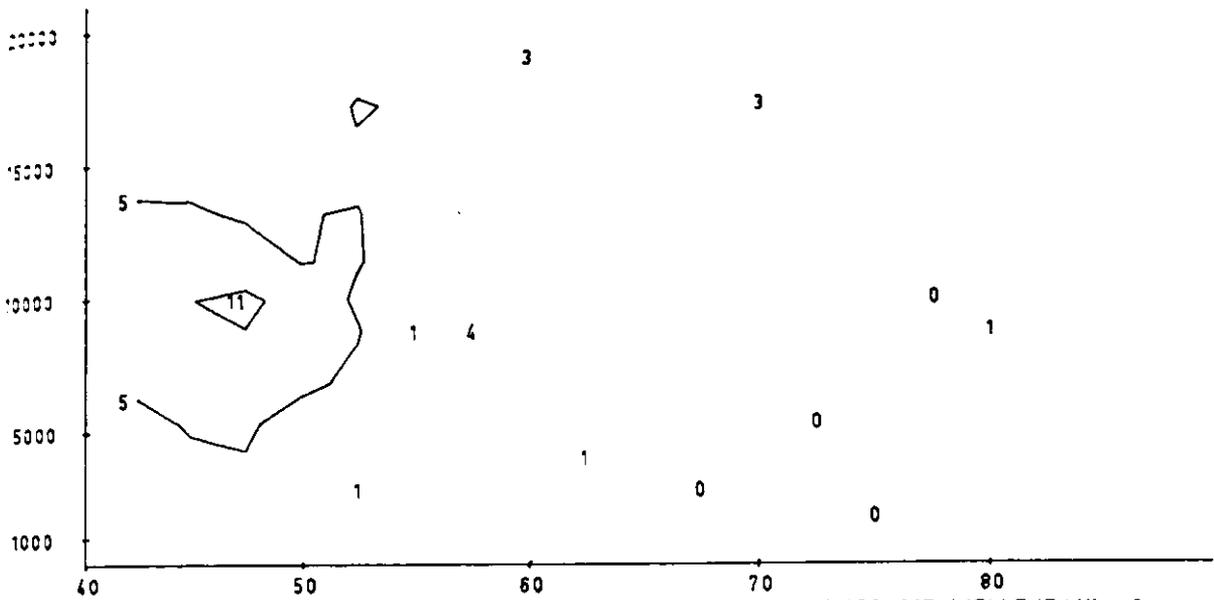


Abb. 122. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON U [M/SEC] FUER DIE WELLENZAHL 9

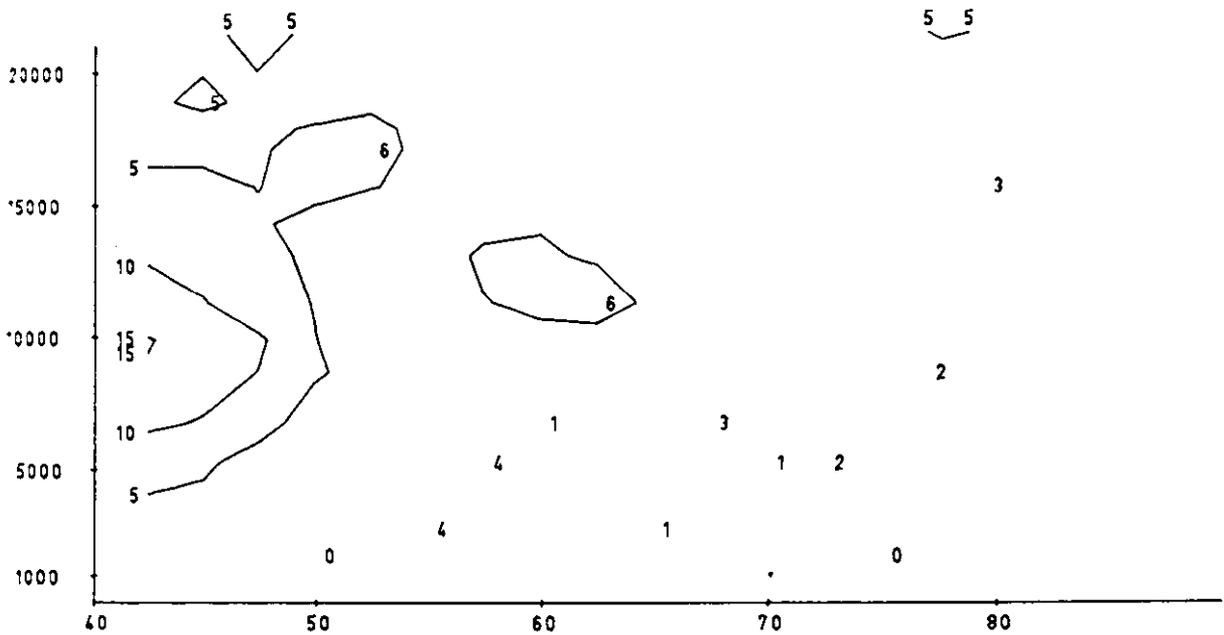


Abb. 123. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON V [M/SEC] FUER DIE WELLENZAHL 9

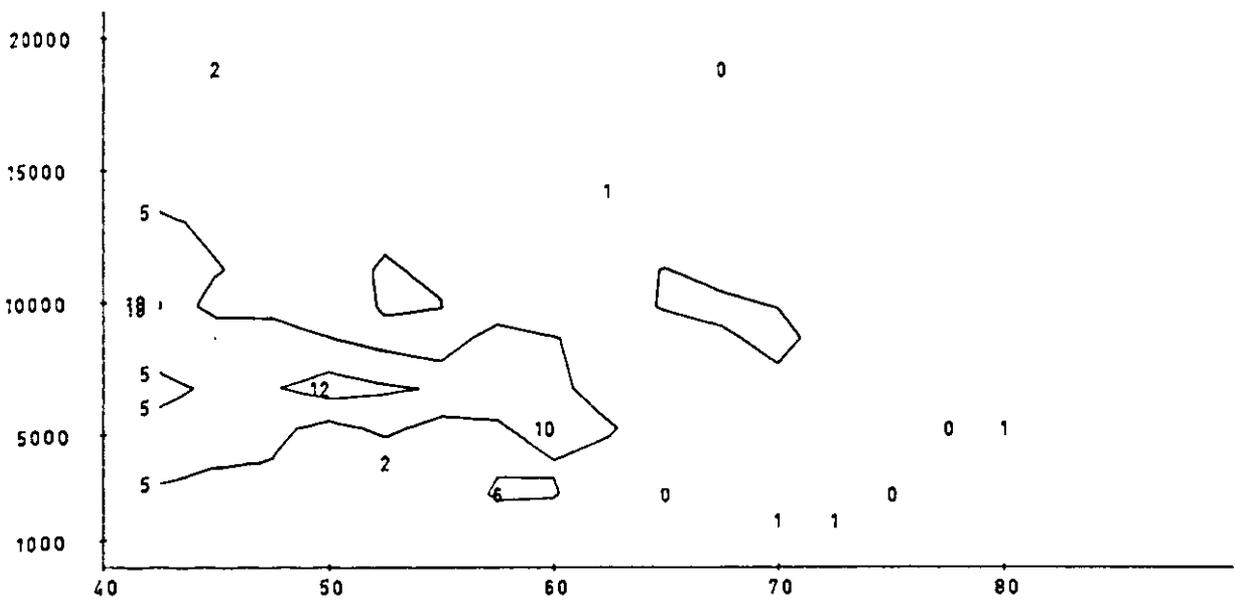


Abb. 124. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON W [MM/SEC] FUER DIE WELLENZAHL 9

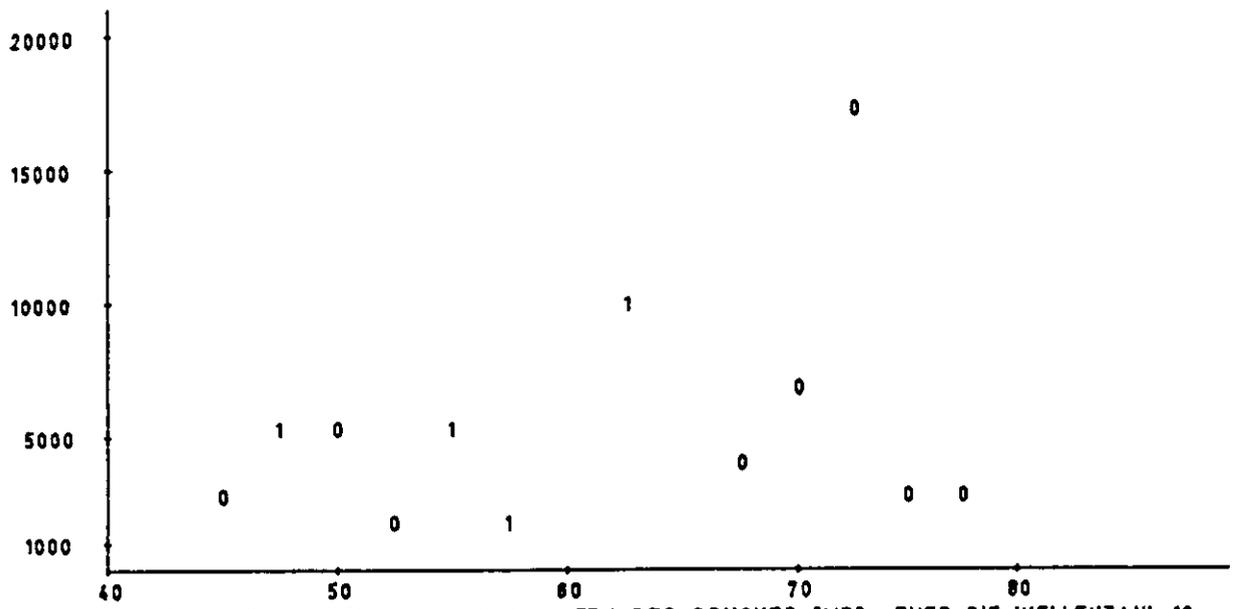


Abb. 125. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN DES DRUCKES (MB) FUER DIE WELLENZAHL 10

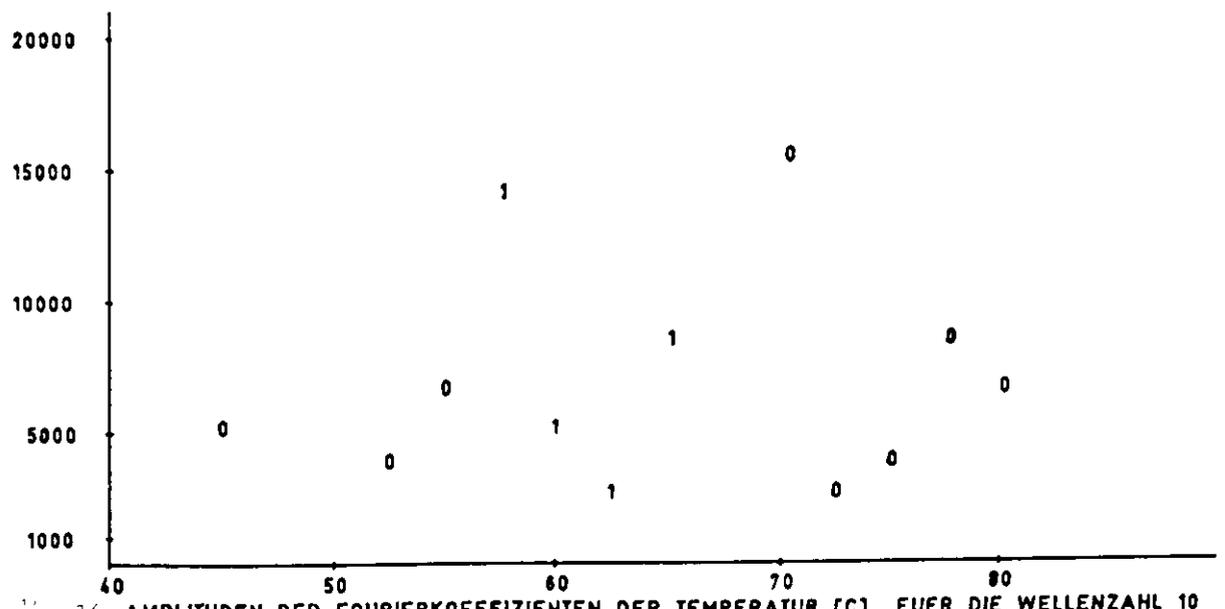


Abb. 126. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN DER TEMPERATUR (C) FUER DIE WELLENZAHL 10



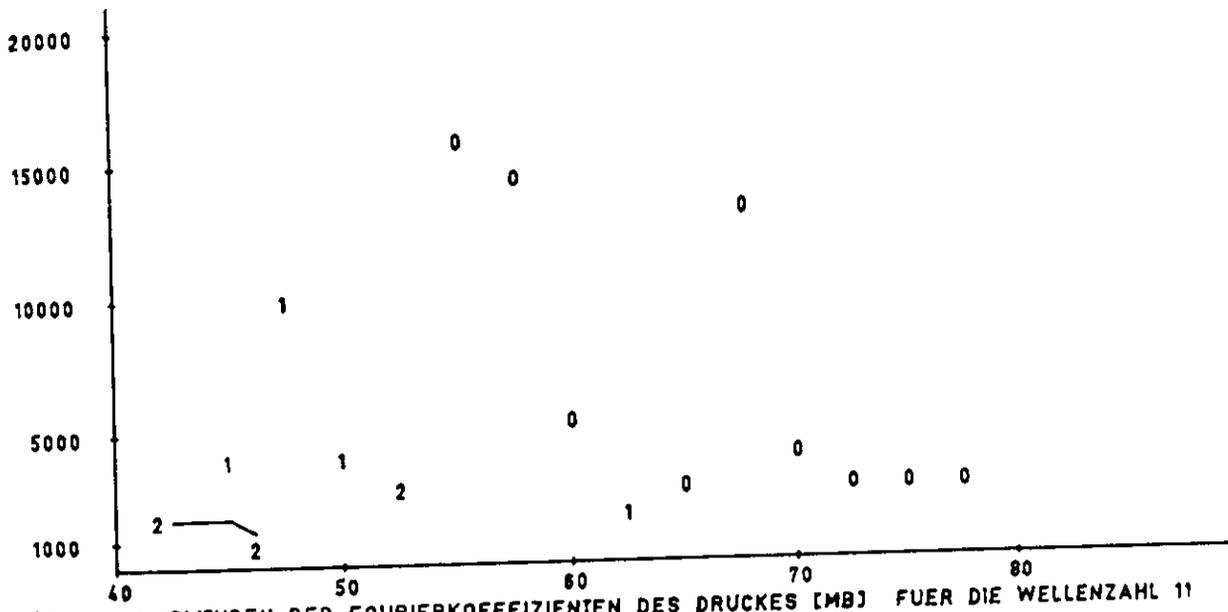


Abb. 130. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN DES DRUCKES [mB] FÜR DIE WELLENZAHL 11

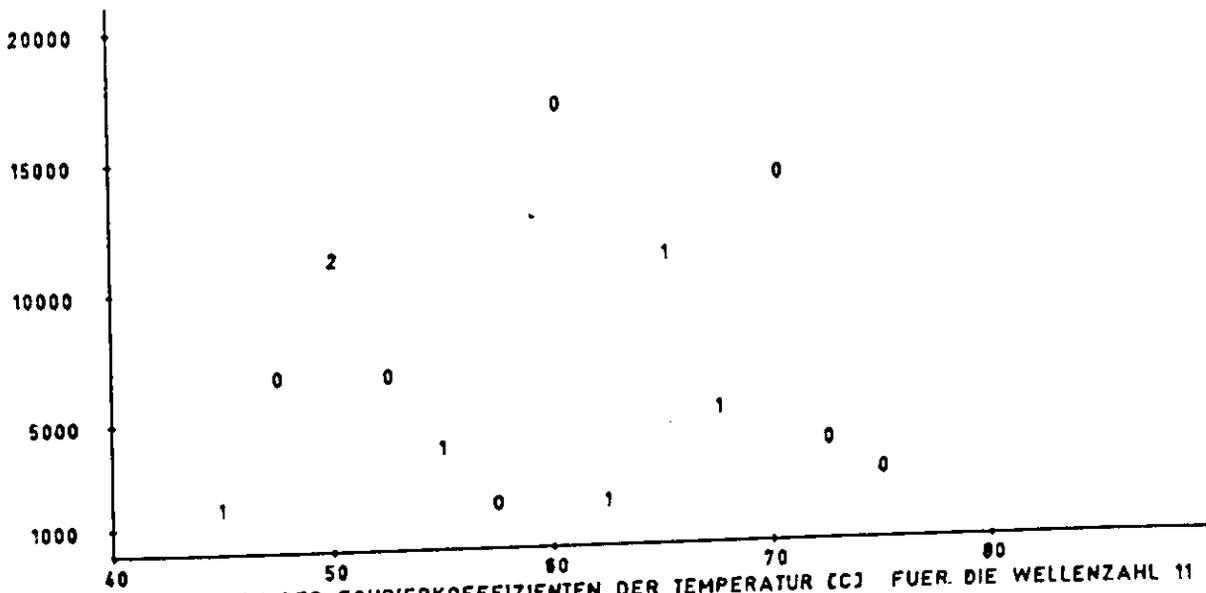


Abb. 131. AMPLITUDEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN DER TEMPERATUR [C] FÜR DIE WELLENZAHL 11

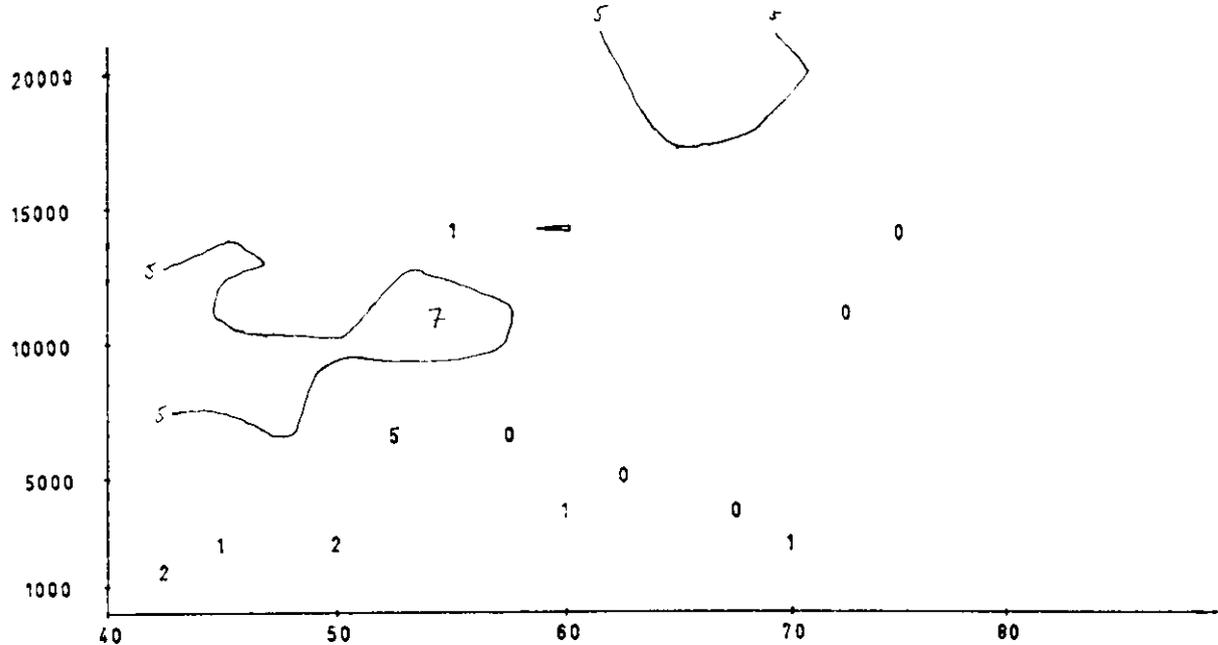


Abb. 132. AMPLITUEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON U [CM/SEC] FUER DIE WELLENZAHL 11

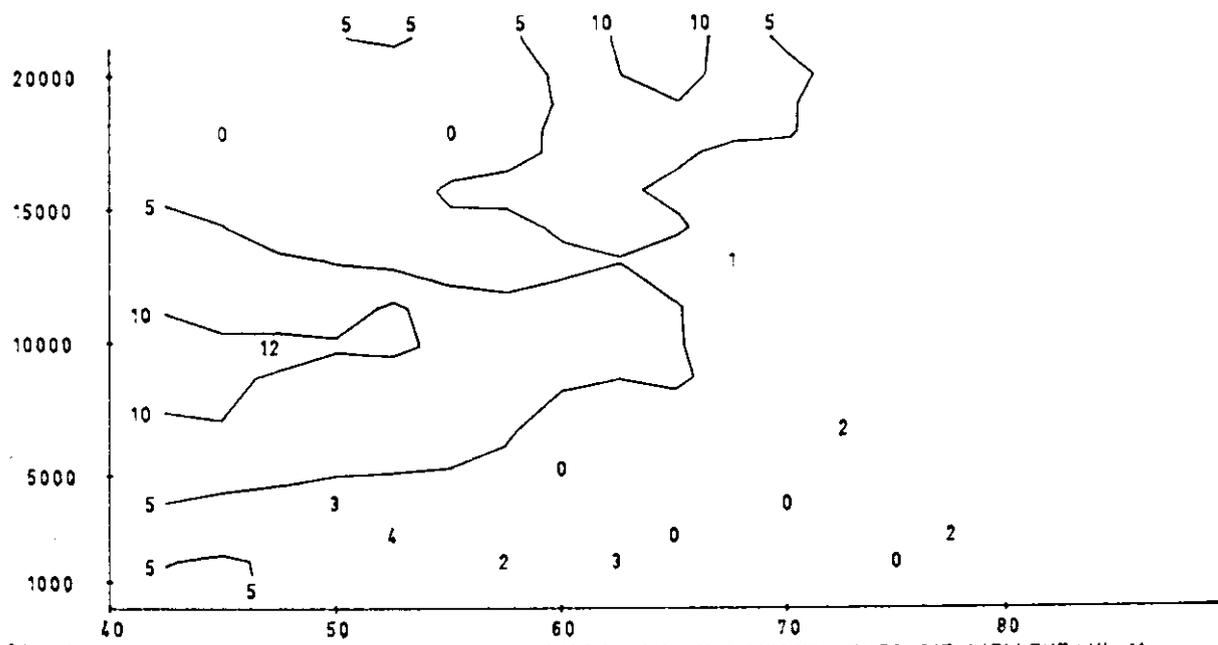


Abb. 133. AMPLITUEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON V [CM/SEC] FUER DIE WELLENZAHL 11

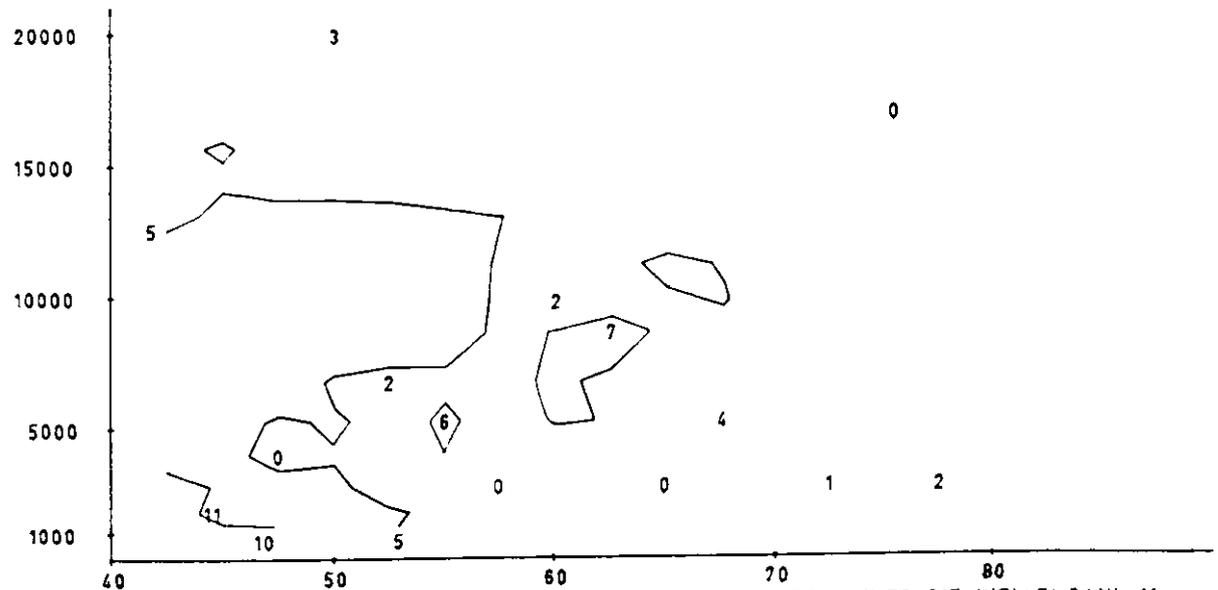


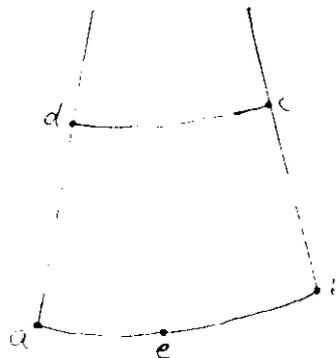
Abb. 134. AMPLITUEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN VON W [MM/SEC] FUER DIE WELLENZAHL 11

## ANHANG II

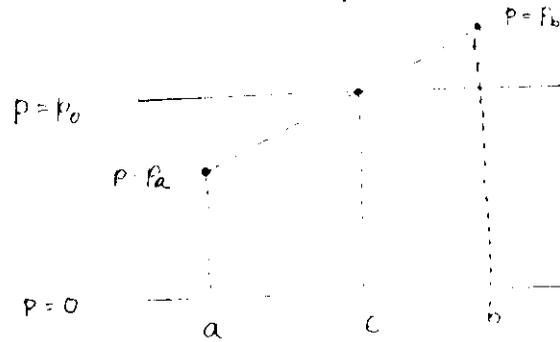
### Berechnung der Isoplethen

Die elektronischen Rechenmaschinen sind in der Lage, in kurzer Zeit sehr viele Daten zu verarbeiten und sehr viele Ergebnisse zu liefern. Das Zahlenmaterial wird dabei so umfangreich, daß es nicht mehr überschaubar ist. In dieser Arbeit wurde zur Veranschaulichung der Ergebnisse die graphische Darstellung gewählt und zwar als Isoplethen auf einer Erdkarte. Für eine manuelle Herstellung der Isoplethen war die Anzahl der Daten zu groß, so daß auch diese Arbeit von der Rechenmaschine übernommen werden mußte. Zum Zeichnen stand neben den Rechenmaschinen auch ein Graphomat zur Verfügung. Die Hauptaufgabe der Rechenmaschinen bestand darin, rechtwinklige Koordinaten von Isoplethenpunkten zu berechnen, die durch eine gerade Linie zu verbinden waren.

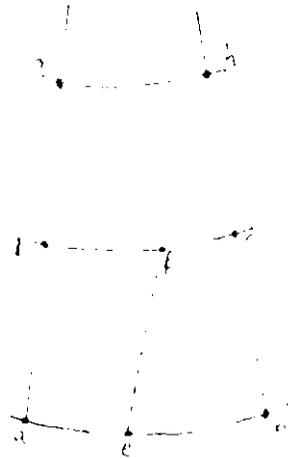
Dieses geschieht im Prinzip folgendermaßen: es wurden longitudinal und meridional gleichabständige Gitterwerte des zu zeichnenden Feldes berechnet. Dann wurde abgefragt, zwischen welchen Gitterwerten eine Isoplethe mit dem Wert  $p_0$  den Rand schneidet. Dies erfolgt in den Punkten a und b.



Der genaue Punkt, an dem die Isoplethe den Rand schneidet, hier e genannt, ergibt sich lineare Interpolation.



Da jede Isoplethe ein Viereck zweimal oder überhaupt nicht schneidet, ist es sicher, daß die Isoplethe, die in das Viereck  $a b c d$  hineingeht, dieses auch wieder verläßt. Um den Seitenpunkt zu suchen, wird abgefragt, ob die Linie



zwischen den Punkten  $b$  und  $c$  oder zwischen  $c$  und  $d$  oder zwischen  $d$  und  $a$  hindurchgeht. Wir nehmen an, daß sie das Viereck zwischen  $d$  und  $c$  schneidet, so daß der genaue Punkt  $f$  wieder durch lineare Interpolation ermittelt werden kann.

Damit beginnt die Prozedur von vorne:

Da die Isoplethe in das Viereck  $d c h g$  hineingeht, muß sie es auch wieder verlassen. Dazu wird abgefragt, ob die Linie zwischen den Punkten  $c$  und  $h$  oder zwischen  $h$  und  $g$  oder zwischen  $g$  und  $d$  hindurchgeht, usw.

Der Linienzug wird solange fortgesetzt, bis er wieder an einen Rand kommt. Es wird dann weiterhin noch berücksichtigt, daß geschlossene Isoplethen vorkommen können und daher den Rand nicht schneiden.

Da hier die berechneten Koordinaten immer nur geradlinig verbunden werden, entstehen eckige Kurven, die durch Interpolation oder durch ein engeres Gitternetz auch krummlinig gezeichnet werden können, jedoch lohnt für diese Aufgabe ein solcher Mehraufwand nicht.

ANHANG III

Zonale Mittel von Produkten aus Fourierkoeffizienten

Als Beispiel wird hier das Mittel des Produktes  $pw$  berechnet. Die Indices  $s$  und  $c$  vor den Fourierkoeffizienten  $p$  und  $w$  geben an, ob die Koeffizienten zu Sinusgliedern oder Cosinusgliedern gehören. Die Indices  $m$  und  $n$  geben die Wellenzahl an, zu der die Fourierkoeffizienten gehören.

$$\begin{aligned} \overline{pw} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} [c_p P_m \cos(m\lambda) + s_p P_m \sin(m\lambda)] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} [c_w W_n \cos(n\lambda) + s_w W_n \sin(n\lambda)] \right\} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ c_p P_m c_w W_n \cos(m\lambda) \cos(n\lambda) + c_p P_m s_w W_n \cos(m\lambda) \sin(n\lambda) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. s_p P_m c_w W_n \sin(m\lambda) \cos(n\lambda) + s_p P_m s_w W_n \sin(m\lambda) \sin(n\lambda) \right] \right\} d\lambda \end{aligned}$$

Da konvergente Reihen vorliegen (in der Praxis wird nach einer endlichen Anzahl von Gliedern die Reihe abgebrochen), können Summation und Integration vertauscht werden.

$$\begin{aligned} \overline{pw} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ c_p P_m c_w W_n \int_0^{2\pi} \cos(m\lambda) \cos(n\lambda) d\lambda + c_p P_m s_w W_n \int_0^{2\pi} \cos(m\lambda) \sin(n\lambda) d\lambda + \right. \\ &\quad \left. s_p P_m c_w W_n \int_0^{2\pi} \sin(m\lambda) \cos(n\lambda) d\lambda + s_p P_m s_w W_n \int_0^{2\pi} \sin(m\lambda) \sin(n\lambda) d\lambda \right] \end{aligned}$$

Wie man leicht nachweisen kann (siehe auch WILLERS oder ZURMÜHL), gilt folgendes:

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\lambda) \sin(n\lambda) d\lambda = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\lambda) \cos(n\lambda) d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ \pi & \text{für } m=n \text{ und } m \neq 0 \\ 2\pi & \text{für } m=n=0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\lambda) \sin(n\lambda) d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ \pi & \text{für } m=n \text{ und } m \neq 0 \\ 0 & \text{für } m=n=0 \end{cases}$$

Es bleibt also von dem langer Ausdruck nur der folgende übrig:

$$\overline{(\rho w)} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ c P_m W_m + s P_m W_m \right] + c P_0 W_0$$

Da  $w_0 = 0$  ist, entfällt das letzte Glied. Der zonal gemittelte Vertikaltransport  $\overline{(\rho w)}$  einer einzelnen Welle mit einer Wellenzahl  $m$  ergibt sich dann zu:

$$\overline{(\rho w)}_m = \frac{1}{2} \left( c P_m W_m + s P_m W_m \right)$$

Ersetzt man die Fourierkoeffizienten der Vertikalgeschwindigkeit durch die Fourierkoeffizienten der Meridionalgeschwindigkeit, so resultiert entsprechend der mittlere Meridionaltransport von Wellenenergie.

ANHANG IV

Beweis für Reflexion von Wellenenergie bei Wellen externen Typs

In Kap. 5.3 wurde gezeigt, daß folgende Näherung gilt:

$$\overline{pw} = \frac{u_c}{g \gamma^2} \overline{(k_1 k_2)}$$

Der Vertikaltransport  $pw$  wird Null, wenn entweder der mittlere zonale Wind oder  $\overline{(p_1 p_2)}$  verschwinden oder  $\gamma^2$  unendlich groß wird. Hier soll gezeigt werden, daß für  $N^2 < 0$  der Mittelwert von  $pw$  Null ergibt.

Unter der Annahme, daß die Skalen-Höhe  $H = -\frac{g}{\gamma}$  und die vertikale Stabilität  $\gamma = \frac{g}{\Theta_0} \Theta_0$  unabhängig von der Höhe sind, lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$p_{zz} + N^2 p = 0$$

für  $N^2 < 0$  folgendermaßen:

$$p = C e^{Nz}$$

Setzt man dieses Ergebnis in Gleichung 6 aus Kap. 5.4 ein, so ergibt sich die allgemeine Lösung für die Druckverteilung.

$$p = \text{Re} \left\{ (A e^{vz} + B e^{\bar{v}z}) e^{iM} \right\}$$

$$\text{mit } v = \gamma \sqrt{-N^2} + \frac{1}{2H} \quad \bar{v} = -\gamma \sqrt{-N^2} + \frac{1}{2H} \quad M = mx - ny$$

$$A = a + ik \quad B = b + i\beta$$

Hier muß eine Grenzbedingung eingeführt werden:

Da  $v > 0$  ist, ergibt sich aus dem Term  $A e^{vz}$  ein exponentieller Anstieg der Druckschwankungen mit der Höhe. Da wir wissen, daß der Druck mit der Höhe abnimmt und schließlich verschwindet, muß  $A$  identisch Null sein. Die Gleichung für die Druckschwankungen vereinfacht sich also zu

$$p = \text{Re} \left\{ B e^{\bar{v}z} e^{iM} \right\}$$

Zur Bestimmung des Realteils dieses Ausdruckes müssen die komplexe Zahl  $B$  und die Funktion  $e^{iM}$  in ihre Real- und Imaginärteile aufgespalten werden.

$$p = b e^{\bar{v}z} \cos(M) - \beta e^{\bar{v}z} \sin(M) \quad M = mx + ny$$

Zur Berechnung des Vertikaltransportes muß der Druck nach der Höhe  $z$  und der geographischen Länge  $x$  differenziert werden.

$$p_x = -mb e^{\bar{v}z} \sin(mx+ny) - m\beta e^{\bar{v}z} \cos(mx+ny)$$

$$p_z = \bar{v}b e^{\bar{v}z} \cos(mx+ny) - \bar{v}\beta e^{\bar{v}z} \sin(mx+ny)$$

$$(p_x p_z) = \frac{1}{2} m\bar{v} (\beta^2 - b^2) \sin 2(mx+ny) - m\bar{v}\beta b \cos 2(mx+ny)$$

Für die zonale Mittelbildung muß über ein Breitenkreis integriert werden.

$$\overline{(p_x p_z)} = \frac{1}{2} m\bar{v} (\beta^2 - b^2) \int_0^{2\pi} \sin^2(mx+ny) dx - m\bar{v}\beta b \int_0^{2\pi} \cos^2(mx+ny) dx = 0$$

Damit ist bewiesen, daß für  $N^2 = 0$  unter den obigen Annahmen der Vertikaltransport von Wellenenergie verschwindet.