KÉT GYŰRŰELMÉLETI PROBLÉMÁRÓL

SZÁSZ FERENC

1. §. Bevezetés

A modern algebrában gyakoriak az olyan törekvések, amelyek bizonyos előre kiszabott tulajdonsággal rendelkező algebrai struktúrák teljes osztályának explicit leírására irányulnak. Ebben a dolgozatban két hasonló gyűrűelméleti problémáról van szó, amelyek a [2] és [7] csoportelméleti dolgozatok problémáinak gyűrűelméleti megfelelői.

A modern algebra alapfogalmait az olvasó megtalálhatja pl. a [3], [4] és [6] könyvekben. Ezért mellőzzük a terminológiai és jelölési megjegyzéseket, csupán arra emlékeztetünk, hogy egy tetszőleges R gyűrűt akkor hívunk *ciklikus*nak, ha a gyűrű additív csoportja ciklikus (lásd közelebbről a [6] könyvet). Például a racionális egész számok I gyűrűje ciklikus.

Egy tetszőleges R gyűrűt P_1*-tulajdonságú* gyűrűnek nevezünk, ha az R gyűrű minden S részgyűrűje az R gyűrűnek nR többszöröse, ahol nR jelöli az összes nr elemek halmazát ($n \in I$ és $r \in R$). Világos, hogy P_1-tulajdonságú gyűrű bármely homomorf képe is P_1-tulajdonságú. Az I gyűrű nyilvánvalóan P_1-tulajdonságú gyűrűre is példa.

Egy tetszőleges R gyűrűt P_2*-tulajdonságú*nak nevezünk, ha az R gyűrű bármely S részgyűrűje (gyűrűelméleti értelemben) direkt összeadandója az R gyűrűnek. Például bármely véges K_p prímtest P_2-tulajdonságú.

Dolgozatunknak az a célja, hogy megadjuk a P_1-tulajdonságú, illetve a P_2-tulajdonságú gyűrűk teljes osztályának explicit leírását. Azt találjuk, hogy ezek a gyűrűk kommutatívok.

2. §. A P_1-tulajdonságú gyűrűk leírása

Bebizonyítjuk a következő tételt:

1. TÉTEL. *Egy tetszőleges R gyűrű akkor és csak akkor ciklikus, ha P_1-tulajdonságú.*

I. MEGJEGYZÉS. Az 1. tétel problémájának duálisaként megemlítjük azt, hogy a [8] dolgozat tétele alapján világos a következő állítás: egy tetszőleges R gyűrű akkor és csak akkor ciklikus, ha az R gyűrű bármely nem-triviális nR többszöröse ciklikus (az nR többszörös triviális, ha $n = 1$, 0 vagy -1).

BIZONYÍTÁS. Mindenekelőtt azt igazoljuk, hogy zérusosztómentes P_1-tulajdonságú R gyűrű szükségképpen kommutatív. Világos ui. az, hogy R-nek bármely S részgyűrűje ideál az R gyűrűben, következésképpen, ha $a \neq 0$ és $b \in R$ akkor $ab = a' \in \{a\}$, ahol $\{M\}$ jelöli az M részhalmazzal generált részgyűrűt R-ben. Ekkor $aa' = a'a$ alapján kapjuk, hogy $a(ba - a') = (ab - a')a = 0$, és minthogy R zérusosztómentes, $ab = ba = a'$.

A továbbiakban két esetet különböztetünk meg.

I. Legyen előbb R olyan P_1-tulajdonságú gyűrű, amelynek R^+ additív csoportja torziomentes.

Ha vannak az R gyűrűben zérusosztók, $a \neq 0$, $b \neq 0$ és $ab = 0$, akkor a P_1-tulajdonság miatt $\{a\} = mR$ és $\{b\} = nR$, tehát $\{0\} = \{a\} \cdot \{b\} = mn \cdot R^2$, ami csak úgy lehet, ha R zéró-gyűrű. Ezért a [7] dolgozat tétele szerint R a végtelen ciklikus csoportra épített zérógyűrű.

Ha pedig R zérusosztómentes, akkor kommutatív is. Bármely $a \neq 0$ elemre nézve $Ra \neq \{0\}$, ezért $Ra = nR$, ahol $n \neq 0$. Nyilván van olyan $b \in R$ elem, amelyre $ab = ba = na$. Tekintsük mindazon c gyűrűelemek S halmazát, amelyekhez van olyan (c-től függő) egész szám, legyen ez n_c, amelyre $ac = ca = n_c \cdot a$. Könnyen igazolható, hogy S részgyűrű, amely $b \in S$ miatt különbözik a zéruselemből álló gyűrűtől, ezért van olyan m egész szám, amelyre $S = mR$. Következésképpen $Sa = (mR)a = mnR$ is részgyűrű R-ben, mégpedig az S értelmezése szerint szükségképpen ciklikus. Másfelől az $r \rightarrow mn \cdot r$ leképezés nyilván izomorfizmusa az R^+ csoportnak az $(mnR)^+$ ciklikus csoportra, vagyis R ciklikus gyűrű.

II. Legyen mármost R olyan P_1-tulajdonságú gyűrű, amelynek R^+ additív csoportjában van végesrendű $a \neq 0$ elem is. Ha az a elem rendje $O(a) = n$ és $\{a\} = mR$, akkor $mn \cdot R = \{0\}$, tehát az R^+ csoport legfeljebb mn-korlátos. Az R gyűrűben a p-hatványrendű elemek R_p halmaza (p prímszám) nyilván ideál R-ben, sőt — mint R-nek direkt összeadandója endomorf képe is. Ennek folytán R_p is P_1-tulajdonságú gyűrű. Így nyilván elegendő a tételt p-gyűrűkre bebizonyítani. Megállapíthatjuk, hogy az R_p gyűrű összes részgyűrűi: $R, pR, \ldots, p^{k-1}R, p^kR = \{0\}$. Minthogy a P_1-tulajdonságú R_p/pR_p faktorgyűrűben nincsenek valódi részgyűrűk, ezért [9] és a [6] könyv 85. tétele szerint R_p/pR_p vagy prímszámrendű zéró-gyűrű, vagy véges primtest. Tehát R_p/pR_p mindkét esetben ciklikus faktorgyűrű, minthogy pedig az [1] dolgozat szerint a korlátos elemrendű $(R_p)^+$ Abel-féle csoport ciklikus csoportok direkt összege, a [6] könyv 99. tétele szerint az $(R_p)^+$ csoport és ezzel együtt az R gyűrű is ciklikus.

Fordítva, természetesen bármely ciklikus gyűrű P_1-tulajdonságú, amivel az I. tétel bizonyítását befejeztük.

3. §. A P_2-tulajdonságú gyűrűk leírása

Bebizonyítjuk a következő tételt:

2. TÉTEL. *Egy tetszőleges R gyűrű akkor és csakis akkor P_2-tulajdonságú, ha primszámrendű gyűrűk direkt összege és minden p-komponense bármely direkt felbontásában a primszámrendű gyűrűk közt legfeljebb csak egy K_p test fordul elő.*

2. MEGJEGYZÉS. Egy P_2-tulajdonságú, vagy egy P_1-tulajdonságú R gyűrű bármely S részgyűrűje ideál R-ben, azaz R általános értelemben vett teljes ideál-gyűrű, amelyeknek a leírása bizonyos speciális esetre vonatkozólag az [5] dolgozatban található meg.

Mindenekelőtt bebizonyítunk néhány segédtételt:

1. SEGÉDTÉTEL. *P_2-tulajdonságú R gyűrű bármely részgyűrűje is P_2-tulajdonságú.*

BIZONYÍTÁS: Minthogy az R gyűrűnek bármely részgyűrűje endomorf kép, elegendő megmutatni, hogy az R gyűrű bármely $R'=R\varphi$ homomorf képe is P_2-tulajdonságú.

Legyen S' tetszőleges részgyűrű R'-ben, ekkor a $T=(S')\varphi^{-1}$ teljes inverz kép részgyűrű R-ben, ezért $R=T+T_1$, következésképpen $R'=S'+T_1\varphi$.

2. SEGÉDTÉTEL: *P_2-tulajdonságú gyűrű bármely a eleme algebrai a racionális egész számok I gyűrűje vagy annak valamely I' homomorf képe felett.*

BIZONYÍTÁS. Minthogy az 1. segédtétel szerint az $\{a\}$ gyűrű is P_2-tulajdonságú, ezért van olyan $R_1\subseteq\{a\}$ részgyűrű és $f(x)\in x\cdot I[x]$, polinom, hogy $\{a\}=\{a^2\}+R_1$ és $a=f(a^2)+r_1$, ahol $r_1\in R_1$. Ekkor $a^2\cdot r_1\in R_1\cap\{a^2\}=0$ miatt $a^3=a^2\cdot f(a^2)$, és itt a jobboldal vagy 0, vagy legalább negyedfokú polinomja a-nak.

3. SEGÉDTÉTEL. *P_2-tulajdonságú gyűrű nem lehet 0-karakterisztikájú.*

BIZONYÍTÁS. Ha volna olyan $a\neq 0$ elem, amely a 0-karakterisztikájú P_2-tulajdonságú gyűrűnek eleme, akkor az 1. segédtétel szerint $\{a\}=\{na\}+R_1$, ezért $R_1\simeq\{a\}/\{na\}$ miatt $R_1=\{0\}$. Így $\{a\}=\{na\}$ folytán és a-nak I felett való algebrai mivolta miatt feltehető, hogy az $\{a\}$ gyűrűben van olyan $\{b\}\neq 0$ részgyűrű, amely végesrangú I- vagy I'-algebra (az n rang jelenti a $\{b\}$ gyűrű bármely maximális lineárisan független elemrendszerének a számosságát, amely nyilvánvalóan egyértelműen meg van határozva.) Válasszunk a $\{b\}$ gyűrűben egy $c\neq 0$ elemet úgy, hogy a $\{c\}$ gyűrű rangja minimális legyen. Ekkor $\{c\}$ nyilván direkt felbonthatatlan, ezért nem lehetnek benne az 1. segédtétel alapján öröklődő P_2-tulajdonság miatt valódi részgyűrűk, sem valódi balideálok. De [9] és a [6] könyv 85. tétele szerint ekkor $\{c\}$ vagy primszámrendű zérógyűrű, ami lehetetlen, hiszen a $\{c\}$ gyűrű 0-karakterisztikájú, vagy pedig ferdetest, ami szintén lehetetlen, mert 0-karakterisztikájú ferdetest mindig tartalmaz valódi részgyűrűt. Tehát mindkét esetben ellentmondáshoz juthatunk, ezért kell, hogy $a=0$ legyen, ami a segédtétel érvényességét igazolja.

4. SEGÉDTÉTEL. *Bármely primszámrendű gyűrű test vagy zérógyűrű.*

BIZONYÍTÁS. Valóban, ha $\{a\}^+$ az R gyűrű ciklikus additív csoportja, akkor a [6] könyv 164. tétele alapján az a elem úgy is megválasztható, hogy $a^2=da$ és $pa=0$, ahol $d|p$. Ezért $d=p$ esetén $a^2=0$, tehát $R^2=\{0\}$, míg $d=1$ esetén az a elem idempotens. Ekkor az $n\to na$ leképezés az I gyűrűnek homomorf leképezése az R gyűrűre, ahol a homomorfizmus magva a maximális (p) primideál és minthogy I egységelemes, $I/(p)$ test, és a homomorfizmus-tétel szerint, $R\simeq I/(p)$.

5. SEGÉDTÉTEL. *Véges, zérusosztómentes P_2-tulajdonságú R gyűrű primtest.*

BIZONYÍTÁS. Minthogy R véges zérusosztómentes gyűrű, ezért test, amely a P_2-tulajdonság és zérusosztómentessége miatt egybeesik primtestével.

6. SEGÉDTÉTEL. *Abel-féle elemi p-csoportra épített, egy elemmel generált, P_2-tulajdonságú R gyűrű végesszámú primszámrendű gyűrű direkt összege.*

BIZONYÍTÁS. Minthogy a 2. segédtétel szerint bármely $a\in R$ elem algebrai a K_p primtest felett, az R gyűrű nyilván véges. Jelöljük n-nel az $\{a\}^+$ additív csoport ciklikus direkt összeadandóinak számát. A bizonyítást n szerint végrehajtandó teljes indukcióval végezzük el. A segédtétel $n=1$ esetén nyilván igaz. Legyen most $n>1$, ekkor az 5. segédtétel szerint szükségképpen léteznek az $\{a\}$ gyűrűben zérusosztók, vagyis olyan $g(a)\neq 0$ és $h(a)\neq 0$ elemek, amelyekre $g(a)\cdot h(a)=0$. Ennek folytán, ha az $\{a\}=\{g(a)\}+R_2$ felbontásban $R_2=\{0\}$, akkor nyilván $\{a\}\cdot\{h(a)\}=\{0\}$, ezért $\{h(a)\}$ zérógyűrű. Ha az $\{a\}=\{h(a)\}+R_3$ felbontásban $R_3\neq\{0\}$ akkor az indukciós feltevést erre a felbontásra alkalmazzuk, $R_3=\{0\}$ esetén pedig az indukciós feltevés alkalmazása nélkül a [2] tétel alapján igaz a 6. segédtétel, ugyanis $R_3=\{0\}$ esetén $\{a\}=\{h(a)\}$ zérógyűrű. Míg, ha $R_2\neq\{0\}$, már az $\{a\}=\{g(a)\}+R_2$ felbontásra is elegendő alkalmazni az indukciós feltevést.

A 2. tétel bizonyítása. Legyen R tetszőleges P_2-tulajdonságú gyűrű és F az R torzió-része. Világos az, hogy F ideál R-ben, ezért $R=F+R_1$. Az 1. és 3. segédtétel szerint $R_1=\{0\}$ és $R=F$. Legyen R_p az R gyűrű p-komponense, ekkor $R=\sum\limits_p R_p$. Ha E_p az R_p gyűrű legfeljebb p-rendű elemeiből álló ideálja, akkor $R_p=E_p+R'_p$ miatt szükségképpen $R'_p=\{0\}$.

Ezért az 1. segédtétel és az $R=\sum_p E_p$ felbontás alapján elég vizsgálni az olyan P_2-tulajdonságú R gyűrűk szerkezetét, amelyek elemi p-gyűrűk.

Egy tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha, \ldots$ elemrendszert az R gyűrűben akkor nevezünk algebrailag függetlennek, ha létezik a gyűrűelméleti direkt összeg: $\sum_\alpha \{a_\alpha\}$. Világos, hogy az így értelmezett algebrai függetlenség véges jellegű tulajdonság. Legyen $b_1, \ldots, b_\alpha, \ldots$ az R gyűrű egyik maximális algebrailag független elemrendszere; ilyennek a létezését ZORN lemmája biztosítja. Ha $R_1=\sum_\alpha \{b_\alpha\}$, akkor $R=R_1+R_2$. Bebizonyítjuk, hogy $R_2=\{0\}$, azaz, hogy $R=R_1$. Ha volna ugyanis olyan $0\neq b\in R_2$ elem, amelyre $R_2=\{b\}+R_3$, akkor a 6. segédtétel szerint lenne a $\{b\}$ gyűrűben egy $\{c\}\neq\{0\}$ ciklikus direkt összeadandó is. De a $b_1, \ldots, b_\alpha, \ldots$ elemrendszer maximális választása következtében nyilván $\{c\}\cap R_1\neq\{0\}$ lenne. Ezért $O(\{c\})=p$ miatt $\{c\}\subseteq R_1$, ami ellentmond annak, hogy $R_1\cap R_2=\{0\}$. Következésképpen $R_2=\{0\}$ és $R=\sum_\alpha \{b_\alpha\}$. Ekkor $R=\sum_p R_p$ és a 6. segédtétel alapján az R gyűrű az általános esetben is primszámrendű gyűrűk direkt összege.

Megmutatjuk, hogy bármely p-komponens legfeljebb egy K_p primtestet tartalmazhat.

Ha ugyanis a P_2-tulajdonságú R_p gyűrű egyik direkt felbontásában $\{a\}$ és $\{b\}$ két különböző prímtest volna, akkor az 1. segédtétel szerint $\{a\}+\{b\}$ is P_2-tulajdonságú gyűrű. Feltehető, hogy $a^2=a$, és $b^2=b$. De ekkor az $\{a\}+\{b\}$ gyűrűben $\{a+b\}$ szükségképpen direkt összeadandó. Minthogy $p(a+b)=0$ és $(a+b)^2=a^2+b^2=a+b$ — ugyanis $ab=0$, — ezért $\{a+b\}$ is p-rendű ferdetest. Ezért az $\{a\}+\{b\}$ gyűrűben $\{a+b\}$ valódi direkt összeadandó volna. A komplementer direkt összeadandó részgyűrűnek szintén p-eleműnek, tehát ciklikusnak kell lenni és legyen $ma+nb$ egyik generátoreleme, ahol m és n alkalmas egész számok. Egy feltételezett $\{a\}+\{b\}=\{a+b\}+\{ma+nb\}$ direkt felbontás miatt kell, hogy $0=(a+b)(ma+nb)=ma^2+nb^2=ma+nb$ legyen, tehát maga a generátorelem 0 legyen, ami lehetetlenség. Tehát egy P_2-tulajdonságú R gyűrű mindig prímszámrendű gyűrűk direkt összege és az R gyűrű bármely p-komponensének akármelyik direkt felbontásában legfeljebb csak egy K_p direkt összeadandó lép fel (K_p prímtest).

Fordítva, tegyük fel, hogy egy R gyűrű prímszámrendű gyűrűk direkt összege és bármelyik R_p p-komponensben direkt összeadandóként legfeljebb csak egy K_p direkt összeadandó fordul elő. Bebizonyítjuk, hogy ekkor az R gyűrű P_2-tulajdonságú.

A bizonyítást előbb p-gyűrűkre végezzük el. Legyen R p-rendű gyűrűk direkt összege és S tetszőleges részgyűrű R-ben.

Ha R direkt felbontásában nem fordul elő K_p prímtest, akkor R zérógyűrű, ezért a [2] tétel alapján igaz, hogy $R=S+T$, ahol T alkalmas részgyűrű R-ben.

Ezek után tegyük fel azt, hogy R-nek prímszámrendű gyűrűk direkt összegére való egyik felbontásában pontosan egy K_p prímtest van. Ha az S részgyűrű nem tartalmaz olyan $s=k_p+z_p$ elemet ($k_p \in K_p$, $z_p \in Z_p$, $R=K_p+Z_p$, és Z_p zérógyűrű), amelynél $k_p \neq 0$, akkor nyilván $SR=RS=\{0\}$ és $S \subseteq Z_p$. Ekkor a [2] tétel szerint van olyan $C_p \subseteq Z_p$, hogy $Z_p=S+C_p$, ezért $S+(C_p+K_p)=(S+C_p)+K_p=K_p+Z_p=R$ miatt S direkt összeadandója R-nek.

Ha pedig van olyan $s=k_p+z_p \in S$, amelynél $k_p \neq 0$, akkor $k_p=ne_p$, ahol e_p a K_p test egységeleme és $1 \leq n \leq p-1$.

Legyen m az $nx \equiv 1 \pmod{p}$ kongruencia megoldása. Ekkor $ms=e_p+$ $+mz_p$, amiből $m^2s^2=e_p^2=e_p \in S$. Tehát $\{e_p\}=K_p \subseteq S$. Nyilván létezik az $S_1=K_p+(S \cap Z_p)$ direkt összeg és $S_1 \subseteq S$. Legyen $s'=k_p'+z_p'$ tetszőleges elem S-ben, ekkor $K_p \subseteq S$ miatt $z_p'=s'-k_p' \in S \cap Z_p$, tehát $S \subseteq S_1$, vagyis $S=K_p+(S \cap Z_p)$.

Legyen mármost $Z_p=(S \cap Z_p)+C$, ugyanis egy ilyen direkt felbontás létezik a [2] dolgozat tétele alapján. Ekkor $S+C=K_p+(S \cap Z_p)+C=K_p+$ $+Z_p=R$, amivel igazoltuk azt, hogy az R p-gyűrű P_2-tulajdonságú.

Ha pedig R nem p-gyűrű, akkor egyértelműen felbomlik p-komponenseinek direkt összegére: $R=\sum R_p$. Legyen S tetszőleges részgyűrű R-ben, amelyre hasonlóan $S=\sum_p S_p$ áll fenn. Ekkor $S_p \subseteq R_p$ és az előzőek szerint $R_p=S_p+T_p$. Legyen $T=\sum_p T_p$, így $S+T=\sum_p S_p+\sum_p T_p=\sum_p (S_p+T_p)=R$, ezért állításunkat az általános esetben is igazoltuk, és ezzel a 2. tételt is teljesen bebizonyítottuk.

IRODALOM

[1] R. BAER, Der Kern, eine charakteristische Untergruppe, *Comp. Math.*, (1935), 254—283.

[2] A. KERTÉSZ, On groups every subgroup of which is a direct summand, *Publ. Math. Debrecen* 2 (1951), 74—75.

[3] А. Г. Курош: Теория групп, Москва (1953).

[4] G. PICKERT, Einführung in die höhere Algebra, *Göttingen* (1951).

[5] L. RÉDEI, Vollidealringe im weiteren Sinn I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 3 (1952), 243—268.

[6] L. RÉDEI, Algebra I. kötet, *Budapest* (1954).

[7] F. SZÁSZ, On groups every cyclic subgroup of which is a power, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* VI. 3—4 (1956), 475—477.

[8] F. SZÁSZ, Csoportokról, amelyeknek összes nem-triviális hatványai ciklikus alcsoportok, Az *MTA* III. Oszt. *Közleményei* 5 (1955), 491—492.

[9] T. SZELE, Die Ringe ohne Linksideale, *Buletin Stiintific Bucuresti,* 1 (1950), 783—789.