

Concepciones de profesores de matemáticas en formación respecto a los intervalos de confianza

LUZDARI RANGEL RUIZ

lrangelruiz@gmail.com

Universidad Industrial de Santander (Estudiante)

GABRIEL YÁÑEZ CANAL

gyanez@uis.edu.co

Universidad Industrial de Santander (Profesor)

Resumen. Se presentan algunos resultados de una investigación que se está llevando a cabo con profesores de matemáticas en formación cuya finalidad es conocer su comprensión acerca de los intervalos de confianza con el ánimo de diseñar una descomposición genética que permita diseñar actividades didácticas que contribuyan a la superación de las malas concepciones que puedan poseer sobre ellos.

Palabras Clave: Intervalos de confianza, nivel de confianza, teoría APOE

1. Introducción

Los intervalos de confianza (IC) hacen parte de la estimación de parámetros, y, por su naturaleza inferencial, son altamente utilizados en la toma de decisiones a partir de la información contenida en una muestra. Por esta razón varios investigadores se dieron a la tarea de identificar los tipos de concepciones presentes en los aprendices y usuarios de la estadística inferencial respecto a los intervalos de confianza. Al respecto, Behar (2001) señala que:

- Estudiantes y expertos asocian el nivel de confianza con el porcentaje de datos poblacionales que están contenidos en el intervalo de confianza. Es decir, un intervalo con un nivel de confianza del 95% contiene el 95% de los valores posibles de la población en estudio.
- Los estudiantes hacen una interpretación bayesiana del intervalo de confianza al suponer que el coeficiente de confianza es la probabilidad a posteriori de obtener el parámetro dentro del intervalo.

- Estudiantes y expertos no asocian el nivel de confianza con una frecuencia relativa, es decir, no comprenden que el nivel de confianza lo que dice es que si se repite el muestreo muchas veces y se construye un intervalo de confianza para cada muestra obtenida, se espera que un porcentaje igual al nivel de confianza de dichos intervalos contengan el parámetro que se desea estimar.
- Los estudiantes asumen que altos niveles de confianza, manteniendo los demás datos constantes, conllevan a intervalos más estrechos.
- Estudiantes y expertos asumen que el ancho del intervalo es directamente proporcional al tamaño de la muestra, es decir, un incremento en el tamaño de la muestra conduce a que el ancho del intervalo aumente.
- Estudiantes y expertos consideran que un intervalo de confianza contiene los valores de la media muestral y no los posibles valores del parámetro que se está estimando.

Estas concepciones fueron corroboradas por otros investigadores (Cumming, Williams y Fidler, 2004; Olivo, 2008; Behar y Yáñez, 2009). Todos estos estudios, con la excepción de Yáñez y Behar (2009), son de carácter descriptivo y carecen de explicaciones para estas concepciones erradas y de propuestas educativas para ayudar a superarlas. Por estas razones, y teniendo en cuenta la importancia del tema, resolvimos investigar a profundidad las razones de estas equivocadas concepciones al mismo tiempo que se propone una estrategia que permita generar en los estudiantes mejores esquemas respecto a los intervalos de confianza. Para satisfacer estos dos objetivos diseñamos una investigación que asume como referente teórico la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) con el objetivo de lograr una descomposición genética del concepto de intervalos de confianza (Arnon et al., 2014).

En el próximo apartado realizamos una breve presentación de esta teoría, la metodología que se está utilizando y algunos resultados obtenidos hasta el momento.

2. Marco teórico y aspectos metodológicos

La teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema) da cuenta de las estructuras y mecanismos mentales que un individuo desarrolla cuando aprende un concepto matemático. Estas estructuras (acciones, procesos, objetos y esquemas) son resultado de la aplicación de los mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación y des-encapsulación).

El proceso de construcción de un concepto matemático inicia con la manipulación, de manera física o mental, de objetos construidos previamente por el sujeto. Esta manipulación recibe el nombre de acción, que una vez interiorizada pasa a formar un proceso; una vez que este proceso es encapsulado pasa a ser un objeto cognitivo. Un objeto se puede des-encapsular para volver al proceso que le dio origen y de esta manera coordinarlo con otro(s) proceso(s) para llegar a un único proceso que posteriormente será encapsulado. Por lo tanto, un sujeto puede llegar a la construcción de un proceso de dos formas, ya sea mediante la interiorización de acciones o a partir de la coordinación de dos o más procesos. La colección de estas estructuras y mecanismos mentales relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente dan lugar a un esquema que puede ser utilizado para resolver un problema matemático en particular (Arnon et al., 2014).

La teoría APOE cuenta con un elemento llamado descomposición genética que permite describir de manera hipotética las estructuras y mecanismos mentales que se espera un individuo desarrolle para la construcción exitosa de un concepto matemático (Arnon et al., 2014). Esta descomposición genética es de gran utilidad para el diseño de actividades de clase con el objetivo de promover las construcciones y mecanismos mentales sugeridos en el análisis teórico. Esta teoría plantea un paradigma de investigación a seguir, el cual está compuesto por tres componentes: 1) Análisis teórico, 2) diseño e implementación de la enseñanza y 3) observación, análisis y verificación de datos. Para este estudio se van a tener en cuenta la primer y tercer componente. Presentamos algunos resultados obtenidos a partir del desarrollo de la primer componente la cual comprende una revisión de los estudios realizados alrededor de los IC, revisión de los textos utilizados por los estudiantes que participan en el estudio, y el diseño y aplicación de un cuestionario con el objetivo de identificar las concepciones y dificultades de los estudiantes que participan en esta estudio con respecto a los IC.

Este estudio se está llevando a cabo con profesores de matemáticas en formación de la Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, que ya cursaron y aprobaron dos cursos de estadística básica e inferencial y uno de didáctica de la probabilidad y la estadística.

3. Algunos resultados

Para ejemplificar los resultados obtenidos a partir del análisis teórico, a continuación se presentan algunas respuestas dadas por un estudiante al ítem 1 propuesto en el cuestionario

asociados a los IC y a su vez un breve resumen de las respuestas dadas por los demás estudiantes.

El siguiente ítem fue tomado y adaptado de Olivo (2008) con el objetivo de conocer el significado que los estudiantes le adjudican a un intervalo de confianza. La opción correcta es la c. que da una interpretación adecuada para un intervalo con un 45% de confianza.

Ítem 1. Un intervalo de confianza del 45% asociado a una muestra específica para la media de una población (μ) es:

- a. *El intervalo que contiene el 45% de los valores posibles de la media muestral (\underline{x}).
F__ V__*
- b. *Un intervalo más ancho que el intervalo de confianza del 95%. F__ V__*
- c. *Un intervalo de valores calculado a partir de los datos de la muestra. En el 45% de las muestras de una población, el intervalo calculado contiene a la media de la población. F__ V__*
- d. *Dos veces más ancho que el intervalo de confianza del 90%. F__ V__*

7 de los 15 estudiantes consideran que el inciso a) es verdadero, 8 de los 15 estudiantes asumieron como verdadero la afirmación de los incisos b) y d) y sólo 6 de los 15 estudiantes asumieron como verdadera la afirmación del inciso c). En general las justificaciones ofrecidas a cada inciso muestran la falta de claridad en cuanto al significado de un intervalo de confianza y el efecto del nivel de confianza en la construcción e interpretación del mismo.

María, en su respuesta al inciso b) deja ver su concepción respecto al nivel de confianza: es un indicativo de la cercanía de los valores del intervalo al parámetro buscado, cercanía que está estrechamente relacionada con la cantidad de valores que contienen los intervalos (ver figura 1). De esta forma entre más sea la confianza menos valores se tienen y más cercanos estos valores al parámetro buscado. Relaciona inversamente el error de estimación con el nivel de confianza, a mayor confianza menos error, concepción que, conjeturamos, se asocia con una interpretación inadecuada de la palabra “confianza”. En su respuesta al inciso d) María relaciona la confianza con las características propias de la muestra seleccionada: “puede ocurrir que...los datos estén muy dispersos”, lo que revela la falta de una concepción de proceso que se forma cuando se tiene claro que la construcción del intervalo es consecuencia de la distribución de la media muestral cuando se consideran todas las muestras posibles del mismo tamaño y no de la muestra específica seleccionada.

- 1]
- b) Un intervalo de confianza del 45% es más ^{ancho} grande que uno del 95% de confianza porque el del 45% de confianza me está diciendo que en él están los valores que necesito, es decir, se acerca más a mostrarme lo que necesito con un rango de error menor que el intervalo de confianza del 95%. (Una manera de explicarlo es que el del 45% de confianza toma valores que "no me sirven" y el del 95% de confianza se acerca "mucho" a decirme lo que necesito mostrando me un rango de error menor, los valores que necesito porque ahí ya se han "calculado" "encontrado" casi todos los valores del estudio realizado.)
- d) que 45% + 45% sea 90% no quiere decir que este intervalo de confianza sea dos veces más grande que el de el 90% de confianza, puede ocurrir que en el de el 45% de confianza los datos estén muy dispersos y en el de el 90% de confianza sea muy estrecho, es decir que se aproxima ya a datos contundentes para el estudio que se realiza.

Figura 1: Respuesta de María al ítem 1

4. Conclusiones

Con base en lo expuesto anteriormente y en las respuestas de los demás estudiantes consideramos que la mayoría de ellos tienen una concepción acción de los IC para la media poblacional, ya que dependen de la expresión $\bar{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, en caso de que la recuerden, para construir el intervalo de confianza, de manera mecánica, sin reflexionar sobre los efectos de los conceptos estadísticos que intervienen de manera directa en la construcción del mismo como lo son el nivel de confianza, el tamaño muestral y la desviación estándar poblacional o su estimación en caso de que no se conozca.

En algunos casos esta concepción está un poco más evolucionada, sin embargo, no muestran evidencias claras de una concepción proceso de intervalo de confianza.

Referencias bibliográficas

- Arnon, I., Dubinsky, E., Cottrill, J., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *Apos theory—a framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.
- Behar, R. (2001). *Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza aprendizaje de la estadística*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Politécnica de Catalunya. Barcelona, España.
- Behar, R. y Yáñez, G. (2009). Experts and students' conceptions regarding confidence intervals. *Heurística* 16, 5-12
- Cumming, G., Williams, J. y Fidler, F. (2004). Replication and researchers' understanding of confidence intervals and standard error bars. *Understanding Statistics* 3, 299 – 311.
- Olivo, E., (2008). *Significado de los intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en México*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada, España.
- Yáñez, G y Behar, R (2009) Interpretaciones erradas del nivel de confianza en los intervalos de confianza y algunas explicaciones plausibles. En M. J. González; M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática*. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM. Santander.