La coinducción como estrategia metodológica para la enseñanza de los números reales

JAMES QUINTERO PÉREZ
james-129@hotmail.com
Universidad del Valle (Estudiante)

AIRON STIVEN CASTIBLANCO
aironsti@hotmail.com
Universidad del Valle (Estudiante)

Aprobado por: MARIBEL ANACONA
maribel.anacona@correounivalle.edu.co
Universidad del Valle (Profesor)

GUILLERMO ORTIZ
guillermo.ortiz@correounivalle.edu.co
Universidad del Valle (Profesor)

Resumen. La presente comunicación breve se enmarca dentro de una investigación en curso, y tiene como objeto de interés ilustrar la manera en que el principio de coinducción posibilita una vía alternativa para la enseñanza de los números reales, lo cual pone de manifiesto el hecho de que las matemáticas no siempre son inductivas y que además, el estudio de los números reales, a través de una presentación basada en *estructuras* –reconocida como el dual del principio inductivo y el coinductivo– permite reflexionar sobre propiedades como, la continuidad y la densidad de los racionales respecto a los reales, las cuales difícilmente pueden analizarse desde una perspectiva netamente axiomática comúnmente arraigada en la escuela. De esta manera, se destaca el papel y las implicaciones didácticas del método coinductivo en la construcción conceptual de las propiedades de los números reales por parte de los estudiantes.

Palabras claves: Enseñanza de los números reales, principio de inducción, principio de coinducción, principio de recursión, principio de corecursión.

1. Presentación del problema

La construcción de los números reales como objetos formales de la matemática, fue un asunto de interés para una amplia gama de matemáticos del siglo XX y ha sido un tema de mucho interés para los educadores matemáticos. Al respecto, la historia de las matemáticas pone de relieve dos momentos importantes:

El primer momento surgió con la matemática modernaa mediados del siglo XIX; Hilbert en (1900) en su libro de *Fundamentos de las Matemáticas* propone el método axiomático, el cual consiste en dar existencia a los objetos matemáticos a través de constructos teóricos previamente definidos, denominados axiomas. Según Zalamea (2009) el método axiomático, pertenece a la matemática moderna y se fundamenta en axiomas y definiciones, que se ligan: por ejemplo, la teoría de conjuntos se fundamenta con la lógica matemática, y esto permite definir un objeto matemático. Un segundo momento transcurre con los miembros del grupo Bourbaki en los años 1940-1960, cuando presentan su programa unificador de las matemáticas introduciendo las estructuras madres en el interior de las axiomáticas básicas. Un tercer momento aparece con el estructuralismo categorial de Eilenberg-Mac Lane y Grothendieck a partir de los años 1960. También llamado las matemáticas contemporáneas, que se fundamentan en el método sintético, el cual es un proceso que relaciona hechos aparentemente aislados y se formula una teoría que unifica los diversos elementos; es decir, consiste en la reunión racional de varios elementos dispersos en una nueva totalidad.

El método axiomático se ha implementado en la enseñanza de los números reales en la escuela y universidades, porque la naturaleza de las matemáticas actuales es axiomática y formalista. Pero ello no implica que tal método permita observar todas propiedades de los números reales, por ejemplo: Si se utiliza el principio inductivo (perteneciente a este método) no se puede observar estructuralmente, que, los números reales son un objeto completo, porque esto se establece mediante el axioma de completez.

En esta comunicación breve, se presentará otro método de enseñanza de los números reales perteneciente a las matemáticas contemporáneas, este método es conocido como el principio de coinducción el cual permite observar las propiedades de completez y densidad. Tal método está basado en las estructuras de los objetos y es el dual al principio de inducción. Además, permite observar a los números reales como un todo o un objeto final, y ello admite identificar otras propiedades (como la continuidad en los reales y la densidad en los racionales respecto a los reales), las cuales no son reconocidas en la enseñanza de la escuela que emplea un método axiomático, En la escuela actual, se hace hincapié en la construcción de contenidos aritméticos yálgebraicos. Muchos estudiantes guiados probablemente por la manera en que acceden a la matemática, no la conciben como una disciplina en la que sus objetos deben tener significado y sentido, sino como una colección de símbolos, reglas y procedimientos de forzosa aplicación que manipulan mecánicamente, dejando a un lado el análisis matemático. Desde el principio de coinducción se pueden observar nuevas herramientas para la enseñanza de los números reales, permitiendo reconocer la complejidad conceptual de los mismos.

Con la anterior surge en la siguiente pregunta de investigación **¿Por qué usar el principio de la coinducción en la enseñanza de los números reales?**

2. Marco teórico conceptual

El tema de interés de este trabajo es la coinducción matemática como eje para comprender los números reales. Al abordar este tema, es necesario al menos, conocer acerca de la inducción matemática dado que es dual a la coinducción.

La coinducción es un término que se utiliza en el lenguaje de la computación y, a pesar de utilizar propiedades matemáticas, no es muy conocida en el mundo de las matemáticas y la educación, porque recientemente en la comunidad matemática fue considerada como un principio lógico verdadero. Tal principio es el generador de coálgebras finales, y su contraparte, la inducción, es el generador de álgebras iniciales, como lo menciona Pavlovic y Pratt (2002).

Los números naturales se establecen como un objeto inicial según Ortíz y Valencia (2010), lo cual permite definir en ellos los principios de inducción y de recursión. La inducción es un principio de demostración y la recursión es un método que permite definir las propiedades de objetos estudiados inductivamente, en el caso de los números naturales se define recursivamente así: cero pertenece a los números naturales, y si n pertenece a N entonces el sucesor de n también. Estos principios permiten construir un objeto a partir de un elemento distinguido que es el cero o vacío y un elemento cualquiera, a esto Pavlovic y Pratt (2002) lo denominan aritmética.

Por otro lado, se puede definir a los números reales como la dualidad del conjunto anterior, es decir, los números reales son un objeto final dado que Hilbert en 1900 demostró que eran un cuerpo arquimedianas totalmente ordenado, y por lo tanto se puede definir el principio de coinducción y de correcursion.

La coinducción es un principio que permite definir estructuras infinitas a partir de sus partes finitas. Para construir objetos se usa la recursión y se construye conjuntos inductivos; al dializar, a partir de un conjunto infinito es necesario destruir sus elementos para obtener otros que de igual forma pertenezcan al conjunto Gonzáles (2007).

La coinducción en términos generales es partir de lo general a un primer elemento y el principio corecursivo permite observar la estructura del objeto. Para aplicar el principio de coinducción se requiere de objetos finales, los cuales pueden contener objetos infinitos, no bien fundados, es decir, no se tiene el primer elemento.

El principio de coinducción se halla oculto en cada análisis matemático que es realizado por alguna persona, es decir la *coinducción* es generado mediante el *análisis* matemático, mientras que su dual la *inducción* es generado en la *aritmética* Esto produce la siguiente ecuación presentada por Pavlovic y Pratt (2002).

$$\frac{Inducción}{Artimética} \approx \frac{coinducción}{Análisis}$$

3. Metodología

En este documento se buscará identificar las posibles maneras en que la coinducción matemática favorece la comprensión de los números reales, y para ello se estudiarán las nociones básicas de inducción, recursión, coinducción, y correcursion. Además se realizara un estudio epistemológico: de la construcción de los números naturales como objeto inicial a través del principio de inducción y recursión. Y de la construcción de los números reales como objeto final a través del principio de coinducción y correcursion. Para ello se propone una situación ejemplificadora tomada de Téllez (2011), en la cualse observan los números reales en intervalo [0,1). Por medio del principio coinductivo que permite comprender las propiedades de densidad y completez de este conjunto.

4. Situación didáctica

Consideremosuna máquina con un conjunto de estados **S** y una aplicación que permite las transiciones o el paso de un estado a otro, llamada **c**. Ahora, supongamos que luego de hacer la acción **c**, la máquina tiene todas o alguna de las siguientes opciones: mostrar un comportamiento o brindar la posibilidad de una modificación.

Supongamos que la máquina anterior tenga como espacio de estados los números reales pertenecientes al intervalo [0,1), y se necesita que muestre su representación decimal, además de considerar si su representación es finita o infinita, De esta manera las posibles observaciones en cada interacción pertenecen al conjunto A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9}. Sea **r** el número real en cuestión, la transición c actúa de la siguiente manera:

$$c(r) = \{\perp\ (d, 10r - d) si\ r = 0 En\ otro\ caso, donde\ d\ es\ tal\ que\ d \leq 10r \leq\ d + 1$$

La pareja ordenada (10r - d) tiene como significado calcular la cabeza y la cola del decimal entre [0,1)

Esta situación didáctica pretende mostrar desde otro punto de vista los números reales, en la cual permite comprender otras propiedades como la densidad y la continuidad (infinito) de este conjunto u objeto que no muestra el método axiomático. Además, este ejemplo identifica a los números reales en el intervalo [0,1), usando el método de coinducción para describir en su forma decimal cada número perteneciente al intervalo.

5. Conclusiones

El uso de la coinducción permite que el estudiante utilice el análisis para estudiar estructuras de cualquier cuerpo, en particular los números reales, este método permite comprender las propiedades que componen a los números reales, dado que, en el método axiomático se dan como axiomas, por ejemplo las propiedades de densidad y completez se pueden observar más fácilmente en el método coinductivo puesto que ayuda a observar aun objeto matemático como una estructura y no por sus elementos.

Los números reales pueden ser tratados con el método coinductivo por que pertenece a las matemáticas basadas en el análisis y no en las matemáticas inductivas como los son los números naturales que se pueden construir recursivamente mediante la operación sucesor, es por ello que se crean obstáculos de aprendizaje en los estudiantes, ya que se hace necesario que ellos tengan herramientas para analizar dicho objeto, porque la mayoría de los docentes tratan a los reales como si fuera parte de la matemática inductiva.

Referencias bibliográficas

- González, L. (2007). *Coinducción: de la Teoría de Categorías a la Programación Funcional* (tesis de pregrado).Universidad Nacional Autónoma, México.
- Ortíz, G. y Valencia, S. (2010). La categoricidad de los reales en Hilbert. *Revista Brasileira de História da Matemática*. Vol. 10, No. 19, pp.39-65
- Pavlovic, D. y Pratt, V. (2002, 09).The continuum as a final coálgebra. *Theoretical Computer Science, volume (280),105-106*.
- Quintero, J. y Castiblanco, Airon. (2014). *La Coinducción Matemática en la Construcción de los Números Reales* (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Santiago de Cali.
- Téllez, A. (2011), *Existencia de coálgebras finales para factores polinomiales* (Tesis de pregrado).Universidad Del Valle, Santiago de Cali
- Zalamea, F. (2009). *Hacia una filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*. Bogotá: Universidad Nacional.