ARGUMENTACIONES Y JUSTIFICACIONES EN TORNO A UNA SITUACION DE ROMBOS.

Ismenia Guzmán R. y Lidia Consigliere D,

Instituto de Matemáticas, Universidad Católica de Valparaíso, Chile

iguzman@entelchile.net lconsigl@ucv.cl

RESUMEN

La presente investigación se inscribe en el estudio de las argumentaciones y justificaciones en Matemáticas (Geometría y Algebra). Se trata de investigar ¿cómo están elaboradas las argumentaciones y justificaciones? ¿Cuál es su estructura? ¿Cuánto se apoyan en el lenguaje natural? ¿Qué grado de comprensión se revela en el manejo y dominio de los objetos matemáticos (rol de los símbolos y rol de las figuras)? Estas interrogantes plantean una problemática didáctica fundamental, que no ha sido estudiada en profundidad. Es esencial prestarle atención en la formación de los futuros profesores de Matemática,

Este reporte se centra en las argumentaciones y demostraciones en torno a una situación de rombos que fue sometida a estudiantes universitarios de primer año y jóvenes profesores de Matemática. La metodología de Investigación que se emplea es cualitativa, con apoyo en la observación de binomios, en entrevistas y un cuestionario. El marco teórico es la teoría de Raymond Duval sobre el razonamiento matemático.

Considerando que la argumentación es una forma natural de razonamiento que escapa a los criterios lógicos clásicos se propone estudiar cómo aparece esta forma de razonamiento en los discursos orales y escritos de estudiantes y cómo evoluciona esta argumentación en jóvenes profesores de Matemática que ya se han encontrado con el razonamiento formal de la Matemática.

MARCO TEÓRICO

El enfoque que Raymond Duval plantea para el razonamiento lo podemos sintetizar en las ideas siguientes:

- La argumentación tiene sus raíces en la exigencia de la comunicación y no es posible convencer sin comprender. Por lo que el rol del lenguaje natural es esencial tanto en la comunicación oral, como en la escrita.
- La argumentación está relacionada con las justificaciones de las afirmaciones o tesis que se postulan distinguiendo en las justificaciones dos operaciones: la de producir un razonamiento o un argumento y la de aceptar los razonamientos producidos.
- La primera operación, de producción, es una función general que consiste en responder a preguntas ¿porqué?. Esta función se manifiesta por preguntas de **Dicto y de Re** como afirma R. Duval. Las **de Dicto** son del tipo ¿por qué afirmas eso?, ¿Por qué respondes que...?, es decir requieren un argumento. Las preguntas **de Re** son por ejemplo ¿por qué se produce este fenómeno?, ¿por qué se obtiene este resultado? es decir, requieren de una explicación.
- La segunda operación, se refiere a la aceptación o no de los razonamientos producidos
- Los argumentos se aceptan o se rechazan según dos criterios. El criterio *de pertenencia del argumento* y el *de fuerza del argumento*. El **de pertenencia** es de naturaleza semántica, depende de la relación entre el contenido de la afirmación y su justificación y el **de fuerza** es aquel que resiste a objeciones y depende de su valor epistémico (evidente, posible o plausible).

Como la investigación apunta al estudio del ¿cómo están elaboradas las argumentaciones y justificaciones?, ¿cuál es su estructura?, ¿cuánto se apoyan en el lenguaje natural? y ¿qué grado de comprensión se revela en el manejo y dominio de los objetos matemáticos (rol de los símbolos y rol de las figuras)?, se necesita entonces disponer de un cierto número de argumentaciones. Para recogerlas se ha elegido la siguiente situación de rombo, la cual se experimentó con binomios de estudiantes universitarios de primer año y cuatro jóvenes profesores de matemática.

LA SITUACIÓN Y SU ESTUDIO A PRIORI.

SITUACIONES DE ROMBOS

Recuerde que: un rombo es un cuadrilátero con todos sus lados de igual medida

1. Construya un rombo con regla y compás, póngale letras y explique los pasos de su construcción.
2. Complete la siguiente frase: *"Un rombo es un.................particular"* Ayuda: Para completar se sugiere utilizar una de las palabras: triángulo, rectángulo, paralelogramo, cuadrado, cuadrilátero
3. Justifique por escrito la veracidad de la frase completada.
4. ¿Qué puede decir sobre la veracidad de las siguientes frases:
   (a) *"Todos los cuadrados son rombos"*
   (b) *"Todos los cuadriláteros son rombos"*
   (c) *"Todos los rombos son cuadrados"*
   (d) *"Todos los rombos y cuadrados son cuadriláteros"*

Justifique por escrito cada una de sus respuestas.

5. Pruebe que las diagonales de un rombo son ejes de simetría. Identifique puntos de simetría.
6. Enuncie una proposición sobre los ángulos del rombo. Intente demostrarla.

ANÁLISIS A PRIORI

En el análisis de la situación se pueden distinguir dos momentos primero, la explicación de la construcción de un rombo. Esto es en cierto modo un relato de los pasos. (De Dicto) y segundo la explicación del por qué la figura construida es un rombo. Esto es una justificación de los pasos dados para la construcción. (De Re)

Algunas de las posibles construcciones posibles de rombo son las siguientes:

1. A partir de la propiedad de las diagonales que son perpendiculares y que se dimidian.
2. A partir de un ángulo dado, marcando dos medidas iguales sobre sus lados y construir el cuarto punto.
3. A partir del trazado de dos paralelas y una transversal que las corte. Con la distancia resultante entre los puntos de intersección, se determinan los otros dos vértices.

4. A partir de las diagonales (perpendiculares) como ejes de simetría, ubicando los cuatro vértices como puntos simétricos respecto a cada diagonal.
5. A partir de un triángulo isósceles, se construye el triángulo simétrico respecto a la base.

De los alumnos con respecto a la construcción del rombo y su descripción se espera

- Que realicen algunas construcciones básicas, como: trazar una paralela a una recta dada por un punto fuera de ella, encontrar puntos simétricos respecto a un eje, trazar la simetral de un segmento dado.
- Que designen de algún modo (letras o marcas) los objetos matemáticos que dibujan.
- Que utilicen un vocabulario geométrico.
- Que justifique que la construcción realizada corresponde a un rombo.
- Que enuncien los teoremas que ponen en juego.
- Que enuncien las propiedades utilizadas.

Con respecto a las nociones geométricas y propiedades que deberían manejar los alumnos destacamos las siguientes:

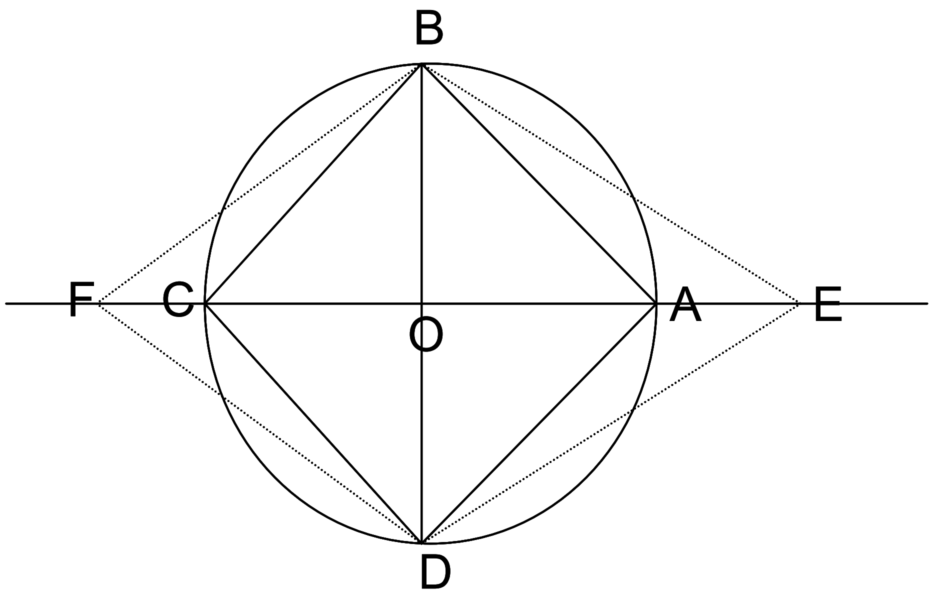
1. Rombo: paralelogramo equilátero.
2. Noción de paralelas: rectas del plano que no se cortan
3. Distancia entre paralelas: es la perpendicular trazada desde un punto de una de ellas a la otra.
4. Las diagonales de un paralelogramo se dimidian
5. Los paralelogramos son cuadriláteros con un par de lados paralelos e iguales
6. Teoremas:
   - Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.
   - Las diagonales de un rombo se dimidian y son perpendiculares.

RESPUESTAS RECOGIDAS Y ANALISIS

En este párrafo consideraremos las respuestas de dos binomios de alumnos y la de un profesor.

Un primer binomio ha dado la siguiente respuesta al cuestionario.

1) "*Trazamos una recta y la perpendicular a ésta*"
2) *"Desde el punto O hicimos una circunferencia de radio OB"*
3) "*Unimos los puntos de la circunferencia A, B, C, D*".
4) *"Nos queda un cuadrado de vértices A, B, C, D"*
5) *"No sabíamos construir un rombo, pero una definición "vulgar" es que si uno toma un rombo y lo achata la figura que se forma es un rombo. Por lo que el cuadrilátero DEBF es un rombo."*



En el escrito de este Binomio, constatamos que enumeran los pasos sucesivos de su construcción. Pero en general observamos una falta de precisión, por ejemplo en el punto 1). "Trazamos una recta" y no la precisan, podría ser CA o FE o AE o BD.

Además agregan "y la perpendicular a". Aquí falta señalar el punto por el cual la trazan y cómo, con qué instrumento. En el dibujo constatamos que debió ser por el punto O.

Siguiendo con el relato, la frase de 2) nos indica que el radio OB, que toman es arbitrario. En 3) mencionan los puntos A, B, C, D y no precisan que no son puntos cualesquiera, sino intersecciones de su circunferencia con las rectas perpendiculares. En 4) afirman que "ABCD es un cuadrado", sin justificar el porqué, qué definiciones o propiedades matemáticas le permiten hacer tal afirmación.

En el 5), reconocen que no saben construir un rombo y recurren a una "definición vulgar" según ellas, pero en realidad lo que hacen es una visualización incorrecta.

En la entrevista, no aportan nuevos conocimientos geométricos, sino que queda al descubierto la debilidad de la descripción de los pasos. Por ejemplo la propiedad de las diagonales de un paralelogramo no la dominan y la utilizan en forma intuitiva reproduciendo figuras encontradas en clases. Tampoco ven en el rombo, los triángulos isósceles que podrían reconocerse. En la pregunta 3, admiten que un rombo es un cuadrado particular lo cual se contradice con la respuesta que dan a la pregunta 4. En la cual dan una clasificación con justificación correcta de los cuadriláteros mediante un gráfico. Se les pide que expliquen el porqué de la contradicción señalándoseles que el gráfico es correcto. Ellas reconocen que este gráfico lo hicieron al cursar la asignatura de Geometría y Computación, pero que no lo sabían leer, hablamos de leer "de afuera hacia adentro" o "al revés".

Un segundo binomio presentó los siguientes pasos en la construcción del rombo:

1) *"Pongamos un punto A y un punto B a una distancia "x".*
2) *"Trazamos el segmento* $\overline{AB}$*"*

3) *“Ajustamos el compás a la medida de $\overline{AB}$ y hacemos el ¼ de circunferencia.*

4) *“Tomamos un punto D, en el arco trazado y medimos la distancia a un punto C que tiene que ser igual a la distancia $\overline{AB}$”*

5) *“Nos aseguramos que $\overline{AB} \cong \overline{AD}$. Porque ambos son radio y aseguramos que $\overline{AB} // \overline{DC}$ por el cuadriculado de la hoja.”*

6) *“Trazamos el segmento $\overline{BC}$ que también es paralelo a $\overline{AD}$.”*

Constatamos que en la descripción de los pasos 1 a 3 ellos tratan de construir una figura de 4 lados iguales. Pero en el 4º paso, tienen dificultades para construir el 4º vértice. Pues, uno de los lugares geométricos es el arco de circunferencia con centro en D y radio AB y el otro que podría ser es la paralela por D al lado AB, lo consideran mecánicamente usando el cuadriculado de la hoja.

En la entrevista quedó en evidencia, que el cuadriculado no les permitió justificar el porqué eran paralelas. Para obviar esta dificultad, consideraron la circunferencia con centro B y radio AB, como 2º lugar geométrico para el 4º vértice. Esto muestra, que para ellos que el paralelismo no jugó un rol importante en su construcción del rombo. No lo consideran como paralelogramo.

En la pregunta 2, la explicación que dieron en la entrevista nos confirma esta apreciación, ya que la respuesta la seleccionaron por descarte, del triángulo, rectángulo y cuadrilátero, éste último, porque era muy amplio. Enfatizando el hecho de que los lados opuestos eran de igual medida y no el paralelismo.

Estos alumnos, además, en la pregunta 5, se apoyan en un paralelogramo que no es un rombo, no obstante afirman que es un rombo y a partir de ella tratan de buscar los puntos simétricos respecto a una diagonal que dibujaron y demostraron era eje de simetría. En consecuencia no pudieron identificar puntos simétricos.

En la entrevista se dieron cuenta de la necesidad de apoyarse en una figura que fuera rombo, ya que su concepto de eje de simetría era intuitivo, basado en el doblez. Ellos dibujaron un romboide, en vez de un rombo, y dicho concepto intuitivo no les funcionó ya que en su figura no funcionó. El concepto geométrico de eje de simetría y puntos simétricos está ausente, en su argumentación.

Una profesora joven ha respondido como sigue:

1º) “Se traza un segmento $\overline{BD}$, luego con el compás se ubica el punto medio”

2º) Para ubicar el punto medio la abertura del compás tiene que ser igual a la del segmento $\overline{BD}$, luego se pone la punta del compás en el punto D y se dibuja un arco de circunferencia, en el extremo superior y en el extremo inferior. A continuación se pone la punta del compás en el punto B y se dibujan”

Construcción

1. “Dibujar un segmento $\overline{BD}$, luego trazar la simetral de este segmento”
2. “Al segmento resultante, de acuerdo a una medida, colocar A y C”
3. “Unir los puntos A, B, C, D. Se obtiene un rombo.”

Ella plantea su estrategia a partir del punto medio de un segmento. Trata de construir este punto pero lo deja incompleto y en ella se observa que la simetral juega un papel implícito en su construcción. Luego, en la parte llamada por ella: construcción, cuando menciona la simetral no explica como la construye ni hace referencia al punto medio y no precisa como determinar el segmento y los puntos A y C, que son infinitos.

Finalmente, afirma haber construido un rombo, sin ver la necesidad de demostrar.

En la pregunta 3 se pide justificar que el rombo es un paralelogramo particular. Ella lo hace en lenguaje natural considerando la propiedad de la simetral, y la igualdad de los lados del rombo. Pero, no se pronuncia sobre el paralelismo del rombo

En esta respuesta observamos que la entrevistada no justifica la proposición que escribe a partir de la hipótesis (definición de rombo) y se remite a repetir la construcción que ha hecho, quedándose sólo en la propiedad de la igualdad de los lados, sin hacer referencia al paralelismo de los lados opuestos. En su relato ella escribe: " por lo tanto AB//CD y BC//CD", una conclusión que se desprende de algo ausente.

En la entrevista a esta profesora joven le preguntamos respecto a cómo ha sido su formación en Geometría y su respuesta es la siguiente: "*No estudié en la Universidad la construcción de figuras y la demostración. Tampoco en la Enseñanza Media."* Entonces le preguntamos cómo ha enfrentado este problema? Y responde: "*Lo hice con mis propios conocimientos que he ido aprendiendo con mi experiencia*"

En la entrevista da su definición de rombo, es un cuadrilátero con sus lados iguales y ángulos interiores opuestos iguales. Respecto al paralelismo no se pronuncia. También conoce la propiedad de las diagonales de un rombo. Esto queda en evidencia cuando se le pregunta por los ejes de simetría.

Esta entrevistada pertenece a la época de profesores de matemáticas que no estudiaron geometría en la Universidad y tampoco recibió formación en geometría en su vida escolar Básica y Media. Nos preguntamos ¿si sus profesores de Matemáticas de enseñanza Media recibieron en su formación profesional enseñanza de Geometría?

CONCLUSIONES

Nuestras conclusiones en este artículo serán algo parciales, ya que lo presentado es sólo una parte de nuestra investigación. No obstante podemos adelantar que el desempeño de los alumnos responde a la cultura escolar que han adquirido, la cual ha privilegiado las tareas reproductivas, aplicaciones de propiedades y ejercicios algorítmicos. En Geometría estos procedimientos no tienen lugar y por lo tanto los alumnos tratan de hacer funcionar la mecánica, se apoyan en las figuras y en las percepciones visuales; ellos realizan acciones que describen linealmente, pero no se preocupan de explicar o justificar. Ellos realizan construcciones mecánicas en lugar de geométricas.

La situación de rombo que hemos presentado deja en evidencia que el concepto de la figura rombo es desconocido para los entrevistados. En consecuencia, a nivel "de Dicto", ellos dan explicaciones imprecisas geométricamente ya que cuando se refieren a rectas; no se preocupan de la notación, y cuando mencionan un punto, tampoco lo caracterizan. Entonces, no se podría estudiar su relato sino está a la vista la figura.

A nivel "de Re", estas explicaciones son vacías, pues no pueden llegar a dar justificaciones geométricas, por la debilidad de los conocimientos que han exhibido.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Mariotti, H. (1999). "El problema de la construcción en geometría". X[ème] Ecole d'été de Didactiques Mathématiques, Houlgate.

Duval, R. (1999). "Argumentar, demostrar, explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?", p.37-61. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Duval, R. (1995). "Sémiosis et Pensée Humaine. Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels". Editorial Peter Lang S.A. Editions Scientifiques Européennes.

Duval, R. (1996). "Pour une approche cognitive de l'argumentation. Annales de Didactique et de Science Cognitive. Vol. 3. Strasbourg.

Padilla, V. (1990) "¿Ayudan las figuras a ver en geometría?" Annales de Didactique et de Science Cognitive. Vol. 3. Strasbourg.