View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Funes

UNA PROPUESTA DE SECUENCIACIÓN DEL SISTEMA DE CONOCIMIENTOS Y EL DISEÑO DE ACTIVIDADES PARA UN APRENDIZAJE COOPERATIVO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

Rogelio Acosta González
Centro Universitario Las Tunas, Cuba
rpacostaglez@yahoo.com.mx

Herminia Hernández Fernández
CEPES, Universidad de La Habana, Cuba
hthf1939@yahoo.com

RESUMEN

Partiendo de la relevancia del Cálculo Diferencial como parte de la formación matemática en una cantidad considerable de carreras universitarias, se exponen razones que aconsejan una secuenciación de su sistema de conocimientos, esencialmente diferente a la que se sigue en programas y textos, que facilite la concepción de actividades para el trabajo en grupos de aprendizaje cooperativo, de manera que el estudiante sea sujeto activo de su aprendizaje. Para el logro de tales propósitos se aplica un sistema de principios, revelado por los autores, fundamentado en presupuestos de la Escuela Histórico Cultural y la Teoría de la Actividad, así como en los principios didácticos. También se toman en cuenta la dinámica de las interacciones grupales y la lógica interna del Cálculo Diferencial. Es parte del trabajo un ejemplo que ilustra la propuesta.

INTRODUCCIÓN

El Cálculo Diferencial de Funciones Reales de una Variable Real —que en lo adelante se designa por CD— es un componente esencial de la formación matemática que está prevista en una considerable cantidad de carreras que se cursan en las universidades. La relevancia del CD obedece a dos razones fundamentales. De una parte, es el medio mediante el cual se pueden establecer las principales características de una función real de una variable real, de manera que cuando en una disciplina a la que tributa la matemática se modela determinado proceso o fenómeno mediante una de tales funciones, entonces la información que aporta la aplicación del CD es, a fin de cuentas, relativa al fenómeno o proceso de que se trate. Por otra parte, el proceso de modelación matemática puede requerir de técnicas y herramientas matemáticas que no son propias del CD, pero que lo necesitan como requisito ineludible para desarrollarlas.

De los argumentos anteriores se infieren a su vez dos conclusiones: la primera es que según sea la calidad de los aprendizajes de los estudiantes sobre los contenidos del CD así será, en general, su desempeño en otras ramas de la Matemática con él vinculadas. La segunda es la pertinencia de toda propuesta dirigida a facilitar el aprendizaje de los contenidos del CD. En este sentido, y como se reporta en numerosos estudios (Jiménez, 2000; Delgado 1999), subsisten insuficiencias en la calidad de los aprendizajes sobre el CD que resultan del proceso de enseñanza–aprendizaje que al respecto se lleva a cabo, entre las que se pueden señalar las siguientes:

- Predominio de una lógica expositiva y una enseñanza mecanicista, que privilegia al profesor como transmisor de información y donde se reserva al alumno el papel de receptor de verdades preestablecidas, «listas para el consumo».
- Derivada de la anterior, está la necesidad de un papel más activo del estudiante, así como desarrollar su creatividad y responsabilidad individual y ante el colectivo.
- Deficiencias en la estructuración del sistema de conocimientos, en ocasiones como secuela de la organización y ordenamiento que se sigue en los textos correspondientes.
- Bajo aprovechamiento y poca solidez del aprendizaje.

- Pobre transferencia y aplicación de lo aprendido a nuevas situaciones.
- Bajo desarrollo de la capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.

Los autores, al tiempo que reconocen la contribución que a la superación de estas y otras insuficiencias se sigue de las propuestas de muchos investigadores, así como de la práctica concreta de los profesores universitarios de matemáticas, sostienen que tres cuestiones relevantes al proceso de enseñanza–aprendizaje no han sido tratadas con el grado requerido de profundidad y sistematización:

1. Muchos de estos trabajos se sostienen teórica y metodológicamente sobre presupuestos del enfoque histórico cultural y de la actividad y, en consecuencia, en ellos se propugna, tanto de forma explícita como implícita, la necesidad de fomentar y propiciar la participación activa del estudiante en su propio aprendizaje. En algunas de las propuestas se concibe la realización de actividades para el logro de este objetivo, como es el desarrollo de determinadas tareas con el apoyo de técnicas participativas y el trabajo en grupos. Sin embargo, no se profundiza en el contenido de la actividad como principio estructurante y organizador que determina la existencia real del grupo, ni se aprovechan las potencialidades de ese sujeto activo individual en su interacción con sus compañeros, de manera que no se revela y utiliza el sujeto grupal que se configura en la propia dinámica del trabajo conjunto.
2. No se propicia que el subsistema de conocimientos que en un momento determinado se ha conformado, junto con el papel que tradicionalmente se le asigna como prerrequisito para introducir los nuevos conocimientos previstos, también se revele a los estudiantes como **anticipador** de ellos, en el sentido de reflejar su carácter insuficiente para la consideración, planteamiento y resolución con sus recursos de nuevos problemas del objeto de que se trate, y la consecuente necesidad de nuevos contenidos que permitan el planteamiento y resolución de esos problemas.
3. No se concibe la secuenciación del sistema de conocimientos de manera que de ella se facilite la concepción de actividades para la formación de zonas de desarrollo próximo, tanto individuales como grupales, en las que cada vez se ubica el nuevo contenido objeto de aprendizaje.

Los autores de este trabajo revelaron y fundamentaron, desde presupuestos de la escuela histórico cultural y la teoría de la actividad, un sistema de principios, ya utilizados para concebir hojas de trabajo y otros medios de orientación sobre Cálculo Integral de Funciones Reales de una Variable Real (Acosta y Hernández, 2002), para el trabajo en grupos de aprendizaje cooperativo. En esta ocasión se aplican estos principios, tanto para fundamentar la secuenciación del sistema de conocimientos, como en la concepción de actividades para el aprendizaje de conceptos, teoremas y procedimientos del CD. Se presenta un ejemplo en el que se ilustra la dinámica de la aplicación de este sistema.

Necesidad de una secuenciación del sistema de conocimientos del CD que facilite la concepción de actividades en las que el estudiante sea sujeto activo de su aprendizaje

Como regularidad, en los cursos universitarios donde se desarrolla el CD, inicialmente está previsto considerar unos preliminares sobre funciones, que tienen el propósito de activar, sistematizar y complementar resultados que trae el estudiante de niveles precedentes de enseñanza, para luego tratar los aspectos específicos sobre límite, continuidad y derivación. Para la secuenciación del sistema de conocimientos y la dirección del proceso de enseñanza–

aprendizaje del CD se han utilizado distintas consideraciones.

No obstante, en la práctica los programas analíticos no han podido obviar el ordenamiento que usualmente se sigue en los textos disponibles en los que se trata esta materia. La tendencia predominante, que a nuestro juicio constituye la principal dificultad, es que en la parte inicial sobre funciones, tanto en programas como en textos, no se agotan todas las potencialidades que a nivel elemental se pueden aprovechar para obtener información sobre una función cualquiera, porque muchos conceptos elementales, en los que no intervienen resultados que se siguen de procesos de paso al límite, se introducen y formalizan junto con los de límite, continuidad y derivada. De igual forma, resultados que son atinentes al límite y la continuidad se tratan simultáneamente con la derivada y sus aplicaciones.

Como ejemplos de los primeros se tienen los conceptos de función monótona, extremos, sentido de la concavidad y análisis de la simetría, entre otros. Entre los segundos se puede señalar el concepto de asíntota y los métodos para determinarlas, que se tratan al considerar las aplicaciones de la derivada para la construcción de gráficas y no como partes integrantes del límite, la continuidad y sus interpretaciones.

Un aspecto de esta cuestión de singular importancia es el hecho de que al aprendizaje de determinados conocimientos matemáticos les son inherentes elevados grados de dificultad. En el caso que se está tratando, hay suficiente acuerdo, entre investigadores en Educación Matemática y profesores de esta materia, que el concepto de límite, y los que se expresan a través de él (derivada de una función en un punto, serie, integral definida, entre otros), son difíciles para los estudiantes[1]. De esta consideración se sigue que tratarlos junto con otros que pudieran introducirse con antelación incorpora una dificultad añadida al proceso de enseñanza–aprendizaje que se pudiera obviar, de manera que los recursos cognitivos de que disponen los estudiantes no tengan que ser compartidos.

De igual forma, la situación que así se configura no propicia la concepción de actividades en las que los estudiantes puedan realizar inferencias y formular conjeturas relativas a conceptos no tratados, como tampoco se facilita que los estudiantes tomen conciencia de la necesidad de nuevos recursos, ni dispongan de resultados e información que sirvan como indicadores para el control y una eventual regulación.

Principios para la secuenciación del sistema de conocimientos del CD y la concepción de actividades que propicien el trabajo grupal y el carácter activo de los estudiantes

Una secuenciación del sistema de conocimientos del CD, que contribuye a disminuir las dificultades que se han señalado, se sigue de la aplicación de dos principios fundamentales:

P1 Principio de agotar potencialidades

Este principio está dirigido a agotar al máximo las posibilidades que sobre un objeto de conocimiento sean asequibles y pertinentes al estudiante en una relación espacio–temporal determinada. Asimismo, propicia que en el aquí y ahora se asimile ese objeto que se sabe necesario retomar en otro momento.

P2 Principio de aislar complejidades

Con este principio, cuya aplicación en un contexto determinado es posible en relación

[1] No sólo a estudiantes. Los matemáticos de los siglos XVII y XVIII no pudieron fundamentar el Análisis infinitesimal porque no fueron capaces de formular un concepto coherente y riguroso del límite funcional.

dialéctica con el anterior, se expresa la necesidad de no considerar en paralelo con objetos de conocimiento de elevada complejidad otros que sea posible tratar con antelación.

Los dos principios enunciados anteriormente se complementan con otros cuatro para la concepción de actividades que fomentan la creación de zonas de desarrollo potencial, que son inicialmente individuales y luego grupales (Castellanos, 1999). Son los siguientes:

P3 Principio de activación de conocimientos

Con este principio se propicia que el estudiante recupere de manera individual, o como resultado de su interacción con sus compañeros de grupo, la información ya instalada, relacionada con el objeto de aprendizaje que se esté considerando. Se concreta por medio de preguntas dirigidas a esa búsqueda, preguntas que implican una reflexión consciente y que constituyen una ayuda en tanto presuponen una orientación de esa actividad. Se puede concretar también a través de ejemplos o resultar de la aplicación del siguiente principio.

P4 Principio de recurrencia

Este principio expresa la intención y el hecho de recurrir reiteradamente a un determinado objeto o resultado matemático —un concepto, un teorema o propiedad, una interpretación, un ejemplo— lo que se traduce en la práctica en el hecho de que permite recuperar, con poco gasto de recursos cognitivos, información ya instalada.

P5 Principio de promoción y resolución de conflictos

Este principio está dirigido a propiciar que el estudiante se haga consciente, por percatarse por sí mismo o con ayuda, de que son insuficientes los recursos de que dispone para resolver un problema y de la necesidad de búsqueda y aprendizaje de otros conocimientos para ello. El conflicto motiva el aprendizaje, obliga a plantear alternativas de solución y a tomar partido técnico, propicia la formulación de conjeturas, el argumentar las ideas y a convencer al otro; en definitiva, a resolverlo como sujeto individual en la interacción social.

P6 Principio de control y regulación

El control, como uno de los componentes fundamentales de la actividad humana; en particular, de la actividad de aprendizaje en su sentido de enriquecimiento y transformación del conocimiento, exige de la regulación como elemento de intervención, de corrección. Este principio se concreta en la práctica cuando de las actividades de aprendizaje en las que se involucra el estudiante, como parte integrante de un pequeño grupo cooperativo, se hacen explícitos resultados que se constituyen en indicadores que propician el control y la eventual regulación.

Un ejemplo que revela la dinámica del sistema de principios

El ejemplo siguiente sirve al propósito de revelar la presencia y la dinámica del sistema de principios. Para mayor precisión, se le llamará recurrencia cero[2] (**R0**) a la ocasión en la que por primera vez se considera el objeto matemático de que se trate. Las siguientes ocasiones en las que se recurra a ese objeto se denotarán por **R1**, **R2** y así sucesivamente.

R0: La función definida por la expresión $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ se introduce en los preliminares

[2] Esta es la recurrencia cero a los efectos del ejemplo que se está considerando. Las funciones que se dividen para formar la expresión analítica se podían haber considerado con antelación.

sobre funciones. Las características de esta función racional que se pueden determinar a nivel elemental son las siguientes:

Su **dominio** es el conjunto de los números reales R: $D_f = R$, de donde se infiere que su gráfica tiene intersección con el eje de las y: el punto $(0, f(0)) = (0, 0)$. El único cero de la función es el número $x = 0$, y el punto que él determina sobre el plano de coordenadas es el propio origen $(0, 0)$, que así resulta la única intersección de la gráfica con los ejes de coordenadas. Los valores de la función son positivos en el intervalo $(0, +\infty)$ y negativos en $(-\infty, 0)$. La función es **impar** ya que para todo x real se cumple que $f(-x) = -f(x)$. Notar que con este resultado se tiene un indicador para el control y eventual regulación, ya que toda función impar definida en $x = 0$ se anula en este número. Recíprocamente, si sucede que $f(0) \neq 0$, entonces la función no puede ser impar.

Observación. Llevando esta información a un sistema de coordenadas cartesianas en el plano se pueden plantear otras conclusiones. En efecto, se **infiere** el cumplimiento, para todo $x > 0$, de la desigualdad $f(-x) < f(0) < f(x)$, que indica que la función es **creciente** en el propio $x = 0$ y en todo un intervalo al que pertenece este número, cuyos **extremos** son opuestos (por la simetría), pero que no se pueden determinar a nivel elemental. Tampoco se puede establecer cómo se comporta la función en los puntos frontera del dominio. En este punto se promueve un conflicto, lo que se facilita a partir de interrogantes concebidas para orientar el trabajo conjunto cooperativo. En calidad de tales preguntas pueden tomarse las siguientes:

1. ¿Puede el valor $f(0) = 0$ ser un extremo de la función? ¿Es creciente la función en $x = 0$? Fundamenta tus respuestas.
2. ¿Puedes extraer alguna conclusión sobre la existencia de extremos para esta función?
3. Completa la tabla siguiente con los valores de la función y conjetura lo que sucede con los mismos cuando los valores positivos del argumento x se toman cada vez mayores.

x	10	20	30	40	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
$f(x)$									

Nota: Utiliza una computadora para la realización de los cálculos necesarios.

4. ¿Cómo se comportan los valores de la función cuando los valores negativos del argumento x se toman cada vez menores (mayores en valor absoluto)?
5. Considera nuevamente la segunda interrogante a la luz de la nueva información que se sigue de los análisis realizados para responder las preguntas tercera y cuarta.

R1: Se recurre a la función $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ al tratar el límite y la continuidad de funciones reales de una variable real. La función trae consigo todas las características ya establecidas.

Por cuanto es una **función elemental**, es **continua** en su dominio $D_f = R$, de manera que para todo $x_0 \in R$ se determina de forma trivial el límite $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{4x}{x^2+1}$ luego de evaluar en el punto x_0. Los valores calculados en R0 se utilizan para inferir que $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x}{x^2+1} = 0$, que a su vez, junto con otros similares, permite conjeturar un resultado de más generalidad, atinente al límite en el infinito de una función racional cuyo numerador sea de grado inferior al del denominador, momento que es propicio para tratar el concepto de asíntota, su interpretación geométrica y los distintos tipos de asíntotas. La posición de la asíntota con respecto a la gráfica se puede inferir del signo de la función, ya establecido en R0.

Notar que la cuestión relativa a la existencia de extremos se enfrenta ahora con más recursos al integrar en el análisis los elementos obtenidos y considerar una representación geométrica. Es un hecho que los estudiantes ya pueden inferir la existencia de un valor máximo en algún número positivo y que este máximo es positivo, así como un mínimo que es negativo y que se alcanza en un número negativo (opuesto al punto de máximo, lo que se sigue de la imparidad). El conflicto ahora lo provoca la imposibilidad de determinar sin la derivada las coordenadas de los extremos.

R2: Se recurre a la función $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$ al tratar la derivada de un cociente, que es una función par, hecho que se infiere de ser impar la función. Los ceros de la derivada –1 y 1 son precisamente los puntos de extremo y este hecho se puede explorar comparando las imágenes por la función en ellos con valores en una vecindad de cada uno, para luego pasar a formalizar las condiciones necesaria y suficiente de extremo. Con la información que aquí se aporta se formulan conclusiones relativas a la concavidad y puntos de inflexión, para lo que se requiere considerar la derivada segunda en una nueva iteración.

Conclusiones

La relevancia del CD a la formación matemática de muchos profesionales universitarios requiere de una dirección del proceso de enseñanza–aprendizaje que propicie que aumente la calidad de su aprendizaje, a través de una organización del sistema de conocimientos y del diseño de actividades que favorezcan la actividad del estudiante como integrante de un grupo de aprendizaje cooperativo. La aplicación de un sistema de principios revelados y fundamentados por los autores constituye una propuesta que marca una diferencia esencial con respecto al tratamiento que usualmente se sigue con el CD en las aulas universitarias. Esta propuesta contribuye al logro de los propósitos enunciados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, R., y Hernández, H., (2002). Principios para la Concepción de Medios para un Aprendizaje Cooperativo del Cálculo Integral. CEPES, Universidad de la Habana, Cuba.

Brousseau, G., (2000). Research in Mathematics Education: Observation and ... Mathematics. En: *Proceedings of European Research in Mathematics Education*. Bordeaux, France.

Castellanos, A. V., (1999). *El Sujeto Grupal en la Actividad de Aprendizaje: Una Propuesta Teórica*. Tesis doctoral no publicada. CEPES, Universidad de La Habana, Cuba.

De Guzmán, M., (1996). Matemática. En: *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*. *OEI* (Organización de Estados Iberoamericanos). España.

Delgado, J. R. (1999). *La Enseñanza de la Resolución de Problemas Matemáticos. Dos elementos para lograr su eficacia: la estructuración sistémica de los contenidos de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas.* Tesis doctoral no publicada. CUJAE, La Habana, Cuba.

Dubinsky, E., (1995). A Practical Guide to Cooperative Learning in Collegiate Mathematics. *Math. Note Number 37. The Mathematical Association of America.* USA.

Jhonson, D. and Jhonson, R., (1998). Cooperative Learning and Social Interdependence Theory. En: *Social Phychological Aplications to Social Issues*. USA.

Jiménez, M. H., (2000). *Propuesta para Mejorar la Referencia y Aplicación de los Saberes del Análisis Matemático en la Formación de Profesores.* Tesis doctoral no publicada. ISP Enrique José Varona, La Habana, Cuba.

Karpov, Y. V. and Haywood, H. C., (1998, January). Two Ways to Elaborate Vygotsky's Concept of Mediation: Implications for Instruction. *American Psychologist*. USA.

Wells, G. (1999). The Zone of Proximal Development and its Implications for Learning and Teaching. En *Dialogic inquiry*: *Towards a Sociocultural Practice and Theory of Education*. New York, Cambridge University Press, USA.