FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS: UNA INNOVACIÓN EN SU ENSEÑANZA

María Rey Genicio; Graciela Lazarte; Clarisa Hernández; Silvia Forcinito,
Facultad de Ingeniería- Universidad Nacional de Jujuy- Argentina
tresm@imagine.com.ar

RESUMEN

El cálculo por medio del logaritmo fue durante mucho tiempo el plato fuerte del programa de matemática de 4º año del bachillerato en nuestro nivel medio. Con la popularización de las calculadoras electrónicas el cálculo logarítmico en sí mismo fue perdiendo espacio, y en forma gradual se fue reduciendo su enseñanza, convirtiéndose en un mero entrenamiento algebraico. Como el tema está en el programa se sigue enseñando pero sin darle un nuevo significado ya que el original, facilitador de cálculos, lo perdió

Con la intención de ensayar nuevas estrategias didácticas se ofrece al docente un material que le permitirá reflexionar sobre una innovación en la forma de enseñar el tema funciones exponenciales y logarítmicas.

Este trabajo se apoya en una concepción de aprendizaje constructivo y significativo que adopta la «Ingeniería Didáctica», como metodología para la investigación.

CONSIDERACIONES SOBRE LA PROPUESTA

En el marco de la investigación Estrategias Innovadoras en la Enseñanza de la Matemática en el Nivel Medio se ha desarrollado una propuesta didáctica para abordar el tema**:** Función exponencial y logarítmica.

Esta investigación se nutre teóricamente de los aportes de la psicología del aprendizaje y de la didáctica. Sintetizamos a continuación los aportes más relevantes de cada una.

De la fuente psicológica tomamos en especial las teorías cognitivas, las que en general entienden que el aprendizaje efectivo requiere que el estudiante participe activamente en la construcción del conocimiento y que aquel es mediado por los procesos de pensamiento, de comprensión y de dotación de significado (Constructivismo psicogenético, la Teoría Socio–Histórica de Vigotsky y el Aprendizaje Significativo de Ausubel).

Tenemos entonces que la actividad de los alumnos es base fundamental para el aprendizaje en tanto que la acción del docente es intervenir aportando las ayudas necesarias, estableciendo los esquemas básicos sobre los cuales éstos pueden explorar, observar, y reconstruir conocimientos. En esos esquemas se articulan la información (aportada por el docente, los textos, los materiales y los alumnos) con las acciones cognitivas de los sujetos.

De esta misma fuente se toma el concepto de Interacción Socio–Cognitiva, entendiendo que la cognición humana óptima se lleva a cabo con la colaboración de otras personas y de objetos físicos y simbólicos que potencian las capacidades individuales. De allí sostenemos que los procesos grupales de construcción de conocimientos se constituyen en medios altamente eficaces para el logro de un aprendizaje significativo. Sin embargo, en ellos se hace necesaria una intervención del docente de forma muy cuidadosa, tendiente a optimizar las actividades, supervisando cada grupo, facilitando los intercambios de tipo cognitivo, recuperando oportunamente lo producido en cada uno y logrando una reorganización final de los conocimientos trabajados.

Por otra parte, de la fuente didáctica tomamos en primer lugar el concepto de estrategia didáctica de Bixio que designa al conjunto de las acciones que realiza el docente con clara y explícita intencionalidad pedagógica. Algunas de sus componentes son el estilo de enseñanza, la estructura comunicativa de la clase, el modo de presentar los contenidos, las consignas, los objetivos y su intencionalidad, la relación entre materiales y actividades, los criterios de evaluación, etc. Las estrategias deben apoyarse en las construcciones de sentido previas de los alumnos (significatividad), orientar la construcción de conocimientos a partir de materiales adecuados y ser factibles de desarrollarse en el tiempo planificado, con la cantidad de alumnos con que se cuenta y con la carga horaria destinada.

En segundo lugar, la propuesta se apoya en la *«ingeniería didáctica»* (Douady – 1996), por lo que se elaboró un conjunto de secuencias de clases concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo para efectuar un proyecto de aprendizaje sobre el tema mencionado.

En los análisis preliminares se tuvieron en cuenta: las dificultades y los errores más frecuentes de estos aprendizajes, las prácticas habituales de los docentes para el tratamiento de este tema y los diferentes enfoques que presentan los libros de texto sobre el mismo.

En cuanto a la concepción y al diseño de las actividades se encuadra dentro de *«la teoría de las situaciones didácticas»* de Guy Brousseau. Se proponen entonces situaciones *«adidácticas»* en las que el docente no debe mostrar su intencionalidad ni intervenir indicando al alumno qué hacer; debe provocar que el alumno acepte la responsabilidad de la situación de aprendizaje. La llamada «*Situación fundamental*» está dada por las situaciones adidácticas que intentan enfrentar a los alumnos ante un conjunto de problemas que evolucionan de manera tal que el conocimiento que se quiere que aprendan es el único medio eficaz para resolverlos. Las *«variables didácticas»* intervienen para que el conocimiento evolucione en niveles crecientes de complejidad. Las *«recontextualizaciones»* de las funciones tratadas le otorgan a la propuesta el valor de la utilidad para resolver problemas de otras ciencias y como objeto matemático, necesario para su propio desarrollo.

En la resolución de los problemas, se propone que se de lugar a distintas estrategias de resolución. También se sugieren puestas en común en las que se validen los resultados, se detecten los errores, se analicen las distintas estrategias y representaciones que se hayan utilizado, se elijan las más eficaces, se debatan las argumentaciones, se identifiquen los conocimientos puestos en juego, etc. a fin de que esos conocimientos evolucionen en la totalidad del grupo de clase y converjan hacia el que se quiere construir.

Desde la *«dialéctica instrumento – objeto»* de Regine Douady, un concepto matemático funciona como *«instrumento»* cuando es la herramienta que permite resolver un problema; y funciona como *«objeto»* cuando es descontextualizado y aislado como objeto matemático. Los problemas diseñados responden a las *«condiciones del buen problema»* enunciadas por Douady; ya que: los enunciados tienen sentido en relación con los conocimientos previos; todos los alumnos están en condiciones de dar alguna respuesta, al menos para el problema inicial; admiten distintas estrategias de resolución y se pueden formular en distintos marcos (aritmético, algebraico y gráfico). Y, principalmente, el conocimiento buscado es un conocimiento adaptativo en tanto es el medio científico de responder eficazmente a los problemas. Además se propone que en la puesta en marcha se cumplan las fases enunciadas por Douady en las que, dado el problema inicial: 1º− Se movilizan los objetos matemáticos conocidos para resolver el problema (Antigua). 2º− Se ponen en marcha instrumentos nuevos. Aparece el "nuevo implícito" (Búsqueda). 3º− Se hacen explícitos los conocimientos construidos en la fase anterior (Explicitación). 4º− El docente descontextualiza el conocimiento dándole la categoría de *«objeto ma-*

temático» (Institucionalización). 5º– Se da a los alumnos diversos problemas destinados a provocar el funcionamiento como instrumentos explícitos de lo que ha sido institucionalizado (Familiarización – reinversión). 6º– El nuevo objeto es susceptible de convertirse en antiguo para un nuevo ciclo de la dialéctica instrumento-objeto (Complejidad de la tarea o nuevo problema)

PROPUESTA DIDÁCTICA

Se comienza el desarrollo de la clase presentando distintos ejemplos donde se utilizan estas funciones para modelizar cierto tipo de fenómenos. Por ejemplo**:**

> *Determinar, mediante el fechado del carbono 14, en qué época estuvo habitado el Pucara de Volcán, lugar que se encuentra ubicado en la localidad de Volcán de la provincia de Jujuy– Argentina.*

Al comenzar el abordaje de esta manera, se da respuesta a una posible demanda de los alumnos sobre la aplicación del tema (-*¿esto para qué me sirve?* -).

A continuación se presenta al estudiante la siguiente situación que contiene tres problemas y que conducen a la definición de función exponencial general**:**

> *Se tiene una hoja de papel, de tamaño oficio, cuyas dimensiones son de 22 cm de ancho por 34 cm de largo, y cuyo espesor es de aproximadamente 0,1 mm. Se procede a dividir la hoja en dos partes, cortándola por el lado más largo y se las apila. Luego dicha pila se vuelve a dividir, de la misma forma, por la mitad y se vuelve a apilar. Se repite este procedimiento varias veces.*
>
> **Problema 1:** a) *Calcular el número de hojas de la pila cuando se realizan 0, 1, 2, 3, 4, 5, 20 divisiones, b) encontrar una fórmula general que permita obtener el número de hojas para n divisiones, c) volcar en un gráfico los 5 primeros datos obtenidos y d) determinar si la función es creciente o decreciente.*

Los alumnos podrán utilizar distintos formatos para volcar los datos, pero considerando que ya han trabajado con otro tipo de funciones se privilegiará la organización de los datos en una tabla. Con este problema el alumno dio el primer paso en la construcción de la fórmula general $\mathbf{y = b.\ a^x}$ (b = 1). Con el siguiente se pretende avanzar con la incorporación de $b \neq 1$

> **Problema 2:** a) *Calcular el espesor de cada pila cuando se realizan 0, 1, 2, 3, 4, 5, 20, divisiones, b) encontrar una fórmula general que permita obtener el espesor de la pila cuando se realizan **n** divisiones, c) volcar en un gráfico los 5 primeros datos obtenidos y d) determinar si la función es creciente o decreciente.*

Según la actitud que vayan adoptando los alumnos el docente podrá sugerir que usen la tabla anteriormente realizada. Aquí es conveniente que se recuperen los saberes ya construidos y se expliciten asegurando que la totalidad del grupo pueda capitalizarlos (hacerlos concientes)

El siguiente problema apunta a que el alumno se enfrente a una situación en la que la función es decreciente.

> **Problema 3:** a)*Determinar el área de cada hoja de la pila cuando se realizan 0, 1, 2, 3, 4, 5, 20, divisiones, b) efectuar las actividades indicadas en los incisos b) c) y d) de los problemas anteriores, c) a partir de la observación de los distintos gráficos obtenidos, determinar la ordenada al origen e indicar cómo se puede anticipar dicho valor utilizando únicamente la fórmula, d) discuta con sus compañeros de grupo, qué determina que la función sea creciente o decreciente*

Nuevamente se recuperará el conocimiento construido y se internalizará el concepto de función exponencial y su fórmula general, reconociendo que en ella interviene una potencia que tiene por exponente a la variable independiente y que, por este motivo, este tipo de funciones recibe el nombre de **función exponencial**. Además se aclarará que en los tres problemas considerados, la variable independiente toma valores naturales y el cero, pero que en la generalización de la función, como puro objeto matemático, podrá tomar también valores reales. Para ejemplificar proponemos que el alumno resuelva la siguiente situación**:**

> *Una población de bacterias se encuentra en un medio nutritivo homogéneo. Suponer que, mediante la realización de muestras de la población a ciertos intervalos de tiempo, se determina que la población se quintuplica cada día. Si la población inicial es de 100 bacterias, calcular cuál será la población al cabo de 30 días, encontrar la fórmula de una función que permita obtener el número de bacterias **P** cuando han transcurrido **t** días, averiguar cuántas bacterias hay cuando transcurrieron 12 y 80 horas y finalmente determinar los valores que puede tomar la variable independiente **t***

Los alumnos cuentan ahora con los elementos suficientes para realizar una primera formalización de la definición de función exponencial

Se podrá advertir que de las situaciones trabajadas es difícil que el estudiante llegue a establecer el campo de variabilidad de la base **a** y el coeficiente **b**. Por ello para determinar el valor que toma **a** puede ser ventajoso que como primer paso el grupo recupere el conocimiento sobre el concepto de potencia. Como segundo paso es conveniente que descubran las restricciones que se deben imponer a la constante **a**. Para ello se propone como actividad que determinen el valor de la función exponencial para distintos valores de **a** y **x** tomando **b** = 1. Luego se pide que discutan sobre el valor que se le puede asignar a la constante **b**.

Aquí se recuperarán los saberes construidos y se explicitarán, para tener cierta seguridad de que la totalidad del grupo los haya asimilado.

Luego se presenta un ejemplo que muestra la aparición del número ***e*** en aquel campo del conocimiento que sea más acorde a la orientación del plan de estudio o características del grupo. Un ejemplo puede ser el siguiente**:**

> *La masa (**m**) de una célula crece a medida que pasa el tiempo (**t**). Supongamos que una célula de árbol crece un 1% de su masa cada día. Suponiendo que su tamaño inicial es de m_0, calcular su tamaño al cabo de 100 días.*

A continuación se pide al alumno que realice representaciones gráficas de distintas funciones exponenciales generales. El objetivo de esta actividad es que el alumno investigue el comportamiento de éstas funciones para distintos valores de las constantes **a** y **b**. Conviene que utilice para ello algún software de matemática; si no se dispone de ninguno, convendría que el docente le proporcione los distintos gráficos, para que luego indique el comportamiento de los mismos.

Se propone a continuación una actividad que muestra la variedad de aplicaciones de la función exponencial. Se utiliza como método participativo la técnica de la rejilla, de modo que los alumnos no sientan la aridez de realizar tantos cálculos y puedan apreciar la variedad de aplicaciones. Una de ellas puede ser la siguiente**:**

> *La demanda de un nuevo producto aumenta rápidamente y luego se nivela. A través de distintas experiencias se determinó aproximadamente que el porcentaje P de compradores de dicho producto responde a la fórmula***:** $P(t) = 100 - 80\,(0{,}25)^{t}$ *siendo t la cantidad de meses que el producto está en el mercado. Calcular P(2) e indicar que representa este valor; determinar a cuántas personas se puede estimar que se les ha vendido el producto luego de 10 días de permanencia en el mercado, sabiendo que existe en el mercado 10 000 posibles compradores.*

Para introducir el tema de ecuaciones exponenciales se puede retomar el problema de la hoja de papel y las sucesivas divisiones, pero encarado de la siguiente manera**:**

> *Se realizó a la hoja de tamaño oficio un determinado número de divisiones como se indicó anteriormente, y se obtuvo un total de 128 hojas. Se pide averiguar cuántas divisiones se hizo.*

Para ejercitar el tema se propone que mediante la técnica de la rejilla se realice la siguiente actividad**:**

> *1.–Escribir las siguientes funciones como potencias de 2 ó 3 según corresponda***:**
> $y = 8^{x}$; $y = (1/9)^{3x-1}$
> *2. –La siguiente expresión puede factorarse como se muestra. Encontrar el factor faltante***:**
> $2^{x+h} - 2^{x} = 2^{x} \cdot (\qquad)$
> *3.–Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales***:**
> a) $2^{x+5} = 8$ b) $(1/25)^{2-x} = 5^{x+3}$ c) $8 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+4} = 315$

Para abordar la función logarítmica se retoma el ejemplo dado en ecuaciones exponenciales; allí se indicaba que el nº de hojas era 128 (se daba el valor de **y**) y se pedía calcular el nº de divisiones realizado (**n**). Ahora si se indica que se obtuvieron 512 hojas y se pide calcular nuevamente el nº de divisiones se tiene que volver a repetir el procedimiento. Lo mismo se debería hacer si se tuviera como dato otro valor de **y**. Por lo tanto en vez de repetir el mismo procedimiento para cada caso, es deseable encontrar una expresión que permita encontrar el valor de **n** cuando se tiene el valor de **y**, es decir encontrar **n = h (y)**. Surge entonces la necesidad de definir una función que realice el proceso inverso al de la función exponencial y que se llama función logaritmo y a continuación se la define. Para relacionar el tema con otros vistos, se puede preguntar al alumno qué otros procesos inversos conoce y que indique alguno (suma y resta, potencia y raíz, etc.)

A continuación se plantea una actividad donde el alumno debe calcular, aplicando la definición, el logaritmo de distintos números y donde resuelva ecuaciones simples con logaritmo.

También se pide que, para distintos tipos de funciones, representen en un mismo gráfico la función exponencial y su inversa y que determinen si existe alguna vinculación entre ambos gráficos. Al igual que se hizo para función exponencial, se realizará la representación gráfica de funciones logarítmicas, para distintas bases, y para bases recíprocas, analizando las características de cada uno.

Luego se indican las bases más usadas para ambas funciones, se obtienen algunos valores usando la calculadora y se resuelven problemas de aplicación.

A continuación el docente enumera las propiedades de la función logaritmo. Se demuestra una de ellas, ya sea por parte del docente o se intenta que la realice el alumno. Se plantea una actividad donde se apliquen las distintas propiedades.

Se pide al alumno que resuelva la siguiente ecuación $5^{x+1} = 3$. Es conveniente permitir que cada alumno busque una estrategia de resolución. Si en la resolución aplica la definición de logaritmo observará la imposibilidad de encontrar un valor numérico (expresado como un número decimal), lo que dará pie para trabajar el cambio de base. Si el procedimiento que adopta es aplicar logaritmo natural o decimal miembro a miembro, resolverá el ejercicio sin ver la necesidad del cambio de base. En este último caso se propone la actividad siguiente que permite dar significación al tema cambio de base**:**

> a) *Resolver la ecuación anterior aplicando logaritmo natural e indicar qué pasa con los resultados. (si lo resolvió primero aplicando logaritmo natural, se pide que ahora aplique logaritmo decimal). b) Indicar si se podría haber aplicado para resolverlo logaritmo en base 5, o en otra base; en este caso con qué inconveniente se encontraría. c) Indicar qué logaritmo conviene aplicar y por qué. d) Encontrar un método para determinar el valor de* $\log_5 3$. *e) Obtener una expresión que permita calcular* $\log_a b$

A través de un problema se plantea la necesidad de resolver ecuaciones logarítmicas, por ejemplo**:**

> *La magnitud, M, de un temblor en la escala de Richter está relacionada con la energía liberada, E, mediante la fórmula**:** $\log E = 1,5\,M + 11,4$. Se necesita calcular la energía liberada por un temblor de magnitud 2 en la escala de Richter.*

Por último se realiza la ejercitación correspondiente al tema Ecuaciones Logarítmicas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. G.E.I.. México.

Bixio, C. (1998) *Enseñar y aprender*. Homo Sapiens. Bs.As

Brousseau, G "Los roles del maestro" cap. PARRA, C, SAIZ, I, otros. *Didáctica de la Matemática. Aportes y reflexiones*. Compilación. Paidos . Bs As. 1994

Douady, R. (¿) "Dialéctica instrumento–objeto. Juego de encuadres". *Cuaderno de Didáctica de la Matemática* Nº3. Edición mecanografiada