UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO COM ALUNOS DO 9.º ANO

Sandra Guerreiro Gonçalves Nobre

Orientadores: Prof. Doutora Nélia Maria Pontes Amado

Prof. Doutor João Pedro Mendes da Ponte

Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutor em Educação na especialidade de Didática da Matemática.

2016

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO COM ALUNOS DO 9.º ANO

Sandra Guerreiro Gonçalves Nobre

Orientadores: Professora Doutora Nélia Maria Pontes Amado
Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte

Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutor em Educação na especialidade de Didática da Matemática.

Júri:

Presidente: Doutor Henrique Manuel Alonso da Costa Guimarães, Professor Associado e membro do Conselho Científico do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Vogais:

- Doutor António Manuel Dias Domingos, Professor Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa;
- Doutora Nélia Maria Pontes Amado, Professora Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve;
- Doutora Ana Paula Florêncio Aires, Professora Auxiliar, Escola de Ciências e Tecnologia da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro;
- Doutora Maria Leonor de Almeida Domingues dos Santos, Professora Associada com Agregação, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;
- Doutor Henrique Manuel Alonso da Costa Guimarães, Professor Associado, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;
- Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira, Professora Auxiliar, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;
- Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques, Professora Auxiliar, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;

Trabalho financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia pela atribuição de uma bolsa com a referência SFRH/BD/69917/2010.

2016

Resumo

A presente investigação tem como objetivo analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9.º ano no estudo de tópicos algébricos, no quadro de uma experiência de ensino onde foi privilegiada a atividade de resolução de problemas, em muitos casos propostos para resolver com a folha de cálculo. Dado que o pensamento algébrico é uma forma de pensamento matemático bastante ampla, o estudo centra-se no modo de utilização das representações matemáticas na aprendizagem de métodos formais algébricos, considerando a sua evolução e coordenação na resolução das diferentes tarefas propostas no estudo de diversos tópicos. Concomitantemente, procura-se compreender o papel da folha de cálculo na aprendizagem dos métodos formais algébricos, designadamente quando usada em articulação com o papel e lápis. O quadro teórico tem como conceito central o pensamento algébrico, sendo essencialmente sustentado por teorias desenvolvidas ao nível das representações matemáticas, da resolução de problemas e da folha de cálculo como recurso pedagógico.

O estudo seguiu o *design* de experiência de ensino, pelo que assumi a perspetiva de professora-investigadora em todo o processo de condução da investigação. A intervenção pedagógica foi realizada numa turma com 24 alunos, de idades entre os 14 e os 18 anos. Debrucei-me em especial sobre o trabalho de duas alunas, Carolina e Gabriela, com caraterísticas distintas, de modo a considerar dois casos elucidativos do desenvolvimento do pensamento algébrico envolvendo a folha de cálculo e a resolução de problemas na sala de aula.

As sequências de tarefas propostas e a sua articulação, ora conjugando ora alternando entre papel e lápis e folha de cálculo, permitiram que as alunas evoluíssem nas representações utilizadas bem como na sua transformação. A resolução de problemas, em especial com a folha de cálculo, destacou-se como uma atividade fundamental que impulsionou as alunas para um pensamento mais abstrato e para uma perspetiva algébrica das resoluções que conduziu ao uso da notação algébrica. Por seu lado, a resolução de exercícios serviu outros propósitos, em particular promoveu a destreza na manipulação simbólica e a fluência na utilização dos métodos formais.

Palavras-chave: Álgebra, Pensamento algébrico, Métodos formais, Representações matemáticas, Resolução de problemas, Folha de cálculo, Experiência de ensino.

Abstract

This study aims to examine the development of algebraic thinking of ninth graders in the study of algebraic topics, as part of a teaching experiment that promoted problem solving tasks and often encouraged the use of the spreadsheet. As algebraic thinking is a broad kind of mathematical thinking, the study focuses on the ways of using mathematical representations in the learning of formal algebraic methods, considering its progress and coordination in addressing the different tasks proposed in the study of several topics. Simultaneously, the study aims to ascertain the role of the spreadsheet in the learning of algebraic formal methods, particularly when it is used in articulation with paper and pencil. The theoretical framework takes algebraic thinking as its central concept, being essentially supported by theories developed in the field of mathematical representations, problem solving approaches and the use of the spreadsheet as a pedagogical tool.

The study adopted the design of a teaching experiment, which means that the whole research process was conducted under my perspective as teacher-researcher. The teaching experiment was carried out in a class with 24 students, aged between 14 and 18 years old. I focused on the work of two students with different characteristics, Carolina and Gabriela, in order to ensure two illustrative cases of algebraic thinking development concerning problem solving and use of the spreadsheet in the classroom.

The implemented sequences of tasks and their articulation, sometimes combining paper and pencil with the use of the spreadsheet and other times switching between them, allowed the students to advance in the representations used and its transformation. The problem solving activity, especially with the spreadsheet, stood out as a key activity that drove the students to a more abstract thinking and to an algebraic perspective of the solutions, thus leading to the use of algebraic notation. In addition, the practice with more routine exercises served other purposes, in particular by improving the ability to perform symbolic manipulation and fluency in the use of formal algebraic methods.

Keywords: Algebra, Algebraic thinking, Formal methods, Mathematical representations, Problem solving, Spreadsheet, Teaching experiment.

Às minhas filhas, Carolina e Gabriela!

Agradecimentos

Na realização desta tese contei sempre com vários apoios e incentivos, pelos quais estou profundamente grata.

Em primeiro lugar, quero agradecer aos meus orientadores: Professora Doutora Nélia Amado e Professor Doutor João Pedro da Ponte por todo o incentivo e apoio permanente que me deram, pelas suas sugestões e críticas que me ajudaram a refletir e fomentaram o crescimento e a profundidade deste trabalho.

À professora Doutora Susana Carreira que sempre acompanhou a minha caminhada, pela sua disponibilidade e por todos os seus importantes contributos em vários momentos ao longo do meu percurso.

À minha escola, em particular à diretora Elsa Parreira que sempre me incentivou e me deu a liberdade necessária para efetuar este trabalho de investigação na minha prática letiva.

Aos alunos da turma por aceitarem o desafio de participar neste estudo, em especial às duas alunas que estiveram sempre disponíveis e participaram de forma muito prestável.

A toda a equipa do projeto Problem@Web em que participei, pela amizade, por todos os momentos de discussão, pelo trabalho que desenvolvemos em colaboração e que veio contribuir para o avanço desta investigação.

Ao Ministério da Educação por me ter concedido Equiparação a Bolseiro e à FCT por me ter atribuído uma bolsa individual de doutoramento (referência SFRH/BD/69917/2010) que permitiram dedicar-me à elaboração da tese e participar em vários encontros de investigação em educação.

Aos meus amigos e colegas que estiveram sempre ao meu lado, por todo o apoio e pela força que me deram para prosseguir o trabalho com ânimo.

Ao Luís por ter assumido por várias vezes um duplo papel de pai e mãe, por me ter apoiado nos momentos mais frágeis e sempre me ter incentivado a continuar.

À minha família, aos meus pais e ao meu irmão Claude, que sempre me têm incentivado a estudar ao longo da vida, por todo o apoio e compreensão inestimáveis que me deram durante o meu percurso neste trabalho.

Às minhas filhas, já habituadas às minhas ausências e que sempre me compreenderam e apoiaram – é a elas que dedico esta tese.

Índice

Índice de tabelas

Índice de figuras

Índice de gráficos

Índice de anexos

CAPÍTULO 1

Introdução

Neste capítulo apresento o estudo que me proponho realizar. Começo por dar a conhecer alguns dos aspetos mais relevantes do meu percurso profissional como professora de Matemática do 3.º ciclo que me conduziram à realização de uma experiência de ensino, no tema da Álgebra, que serve de suporte ao presente estudo. Para além das minhas experiências pessoais, destaco igualmente algumas referências da literatura que contribuíram para despertar o meu interesse por este tema e que são igualmente importantes para justificar a relevância desta investigação. Para terminar, exponho os objetivos da investigação e apresento a estrutura do trabalho.

1.1. Pertinência do estudo

1.1.1. Motivações pessoais

Ao longo do meu percurso profissional tenho constatado que os alunos revelam grandes dificuldades na aprendizagem da Álgebra, em particular, no ensino básico. Esta situação surge a partir do 7.º ano, onde encontro alunos com dificuldade em desenvolver uma compreensão adequada do simbolismo algébrico e com uma reduzida habilidade para recorrer a este tipo de representação em contextos diversificados. Por exemplo, na resolução de equações, os alunos, muitas vezes ao usarem métodos formais algébricos operam com os símbolos de uma forma puramente mecanicista, sem compreenderem o significado das operações que estão a efetuar. Estas e outras dificuldades na aprendizagem da Álgebra contribuem para aumentar o desinteresse e o insucesso dos alunos no estudo da Matemática.

Na sequência destas dificuldades, tenho procurado pôr em prática métodos mais promissores para o ensino deste tema, nomeadamente usando estratégias que promovam o desenvolvimento do pensamento algébrico, tendo em conta os vários aspetos desta forma de pensamento. Questiono-me frequentemente sobre as tarefas a propor aos alunos, a sequência mais adequada e os recursos mais apropriados para promover aprendizagens mais ricas e significativas.

A minha frequência do curso de Mestrado em Didática e Inovação no Ensino das Ciências (especialização de Matemática) no ano letivo de 2008/2009 permitiu-me uma primeira incursão na literatura relacionada com o ensino da Matemática, em particular, na resolução de problemas. Por outro lado, o meu envolvimento, durante os anos letivos de 2009/2010 e 2010/2011 no Acompanhamento do Plano da Matemática e na implementação do Programa de Matemática (Ministério da Educação, 2007) enriqueceu significativamente a minha experiência profissional e, ao mesmo tempo, aumentou o meu desejo de aprofundar os meus conhecimentos na área da Didática da Matemática. Ao longo dos anos em que desempenhei o papel de professora acompanhante tive oportunidade de participar em diversas formações específicas, em particular, relacionadas com o ensino e aprendizagem da Álgebra. Esta experiência marcante contribuiu de forma significativa para a ampliação dos meus conhecimentos em diversas áreas, nomeadamente na análise de tarefas específicas para o desenvolvimento do pensamento algébrico e na sua utilização em sala de aula.

Em simultâneo, com a frequência do Mestrado e o desempenho das funções de professora acompanhante, estive envolvida em diversas iniciativas organizadas pela Universidade do Algarve, tais como as Olimpíadas Concelhias do Algarve em Matemática e os campeonatos de resolução de problemas de Matemática Sub12 e Sub14[1]. Estas iniciativas têm com principais objetivos desenvolver nos alunos a capacidade de resolução de problemas, bem como o gosto pela Matemática. Os campeonatos de Matemática Sub12 e Sub14 constituem um exemplo marcante de uma atividade de elevado mérito no desenvolvimento de diversas competências, em

[1] http://www.fctec.ualg.pt/matematica/5estrelas/.

particular, no domínio da Álgebra. Esta iniciativa permitiu-me contactar com uma diversidade de problemas e de resoluções produzidas pelos alunos que despertaram fortemente o meu interesse pela resolução de problemas. A minha participação nesta organização tem-me permitido contactar com resoluções que não encontrava na sala de aula e que se apresentam como uma via poderosa para compreender o modo como os alunos pensam, conjeturam, os métodos que utilizam e como interpretam os enunciados dos problemas. Embora, os jovens participantes nestas competições recorram naturalmente a conhecimentos escolares, a criatividade patente nas estratégias que utilizam resulta do facto de poderem utilizar estratégias diversificadas e os mais variados recursos sem estarem condicionados aos métodos estudados na escola. Este tipo de trabalho, realizado fora da sala de aula, em campeonatos de resolução de problemas, tem vindo a ser valorizado por permitir aprofundar e enriquecer o conhecimento matemático escolar dos alunos (Kenderov, Rejali, Bussi, Pandelieva, Richter, Maschietto, Kadijevich & Taylor, 2009). Por vezes, é possível estabelecer relações entre os problemas dos campeonatos e alguns tópicos da Matemática escolar de 9.º ano ou até mais avançados. Os alunos apesar de não conhecerem os métodos formais (como o método de substituição na resolução de sistemas de equações) recorrem a estratégias informais para resolverem os problemas que mostram afinidades com estes métodos e que podem ser encaradas como um meio para a sua abordagem.

Os desempenhos dos participantes na resolução de um problema numérico/algébrico são analisados por Amado, Carreira, Nobre e Ponte (2010), mostrando que os alunos que recorreram a métodos formais – puramente algébricos, chegam à solução de forma bastante eficaz. No entanto, os alunos que recorrem a estratégias consideradas informais, baseadas essencialmente em operações de *unwind* (desfazer) ou através de tentativa e erro, providenciam, como se pode perceber nos dados, uma base consistente para uma representação simbólica, mais formal, indo de encontro ao que refere Johanning (2004). Este aspeto merece particular realce, pois é reconhecida a importância dos métodos informais na busca de soluções para determinada tarefa, verificando-se que estes métodos antecipam os procedimentos formais a abordar posteriormente (Streefland, 1991). Este problema constituiu, ainda, uma situação propícia para os alunos trabalharem no âmbito das relações de dependência entre variáveis, que envolve a manifestação de pensamento algébrico bastante relevante para a aprendizagem de métodos formais e, neste caso, para a construção e a resolução de um sistema linear de equações.

Outro aspeto particularmente relevante na resolução dos problemas destes campeonatos está presente nas estratégias e nos modos de representação proporcionados pelas ferramentas tecnológicas que os alunos têm ao seu dispor. A folha de cálculo é um recurso a que os participantes recorrem, por vezes, na resolução dos problemas. Alguns jovens mostram conhecer as funcionalidades do Excel e tiram partido das suas potencialidades, o que lhes permite de forma rápida e eficiente chegar à solução dos problemas. Esta utilização do Excel despertou a minha curiosidade e interesse em compreender como é que os alunos resolvem problemas recorrendo à folha de cálculo e perceber como é que esta ferramenta pode ser útil, não só para a resolução de problemas, mas também no estudo de determinados tópicos matemáticos.

Movida pelo desejo de compreender o contributo do Excel, desenvolvi um conjunto de tarefas que envolveram a utilização da folha de cálculo nas aulas de Estudo Acompanhado, em duas turmas de 8.º ano, no ano letivo de 2009/10. Este trabalho consistiu no recurso continuado à resolução de problemas numéricos/algébricos com o Excel. Atendendo ao reduzido número de computadores, optei por privilegiar o trabalho em pares. Os problemas sofreram um aumento gradual do grau de dificuldade e fui sempre solicitando aos alunos a justificação dos procedimentos efetuados. Comecei por desafiá-los a recorrerem ao Excel e algumas das propostas foram guiadas, por mim, com o propósito de os levar a contactarem e a entenderem as funcionalidades desta ferramenta. Este trabalho foi desenvolvido em estreita colaboração com a organização do Campeonato de Matemática Sub14 que, para o efeito, lançou alguns problemas de cariz numérico e/ou algébrico. Deste modo, aproveitei o potencial destes problemas para desenvolver com os meus alunos nas aulas de Estudo Acompanhado um trabalho piloto que revelou algumas potencialidades da resolução de problemas com recurso à folha de cálculo no desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Nesta primeira experiência foi evidente o progresso dos alunos no tipo de estratégias usadas na resolução de problemas com a folha de cálculo. Verifiquei ainda que os alunos evidenciavam maior facilidade em identificar variáveis e relações entre essas variáveis cuja exploração os conduzia à(s) solução(ões) dos problemas. Um outro artigo (Amado, Nobre, Carreira & Ponte, 2010) mostra como a resolução de um desses problemas e a comunicação matemática envolvida resultam de uma interação permanente dos alunos com a folha de cálculo.

As experiências realizadas, assim como o contributo da literatura relacionada com o ensino e a aprendizagem da Álgebra e do desenvolvimento do pensamento algébrico, tornaram evidente a relevância em desenvolver um estudo que pudesse contribuir para a melhoria das práticas de ensino e das aprendizagens dos alunos neste domínio.

1.1.2. Aspetos destacados na literatura

A minha primeira incursão na literatura sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra permitiu-me perceber a relevância deste tema na investigação. O elevado número de artigos publicados em diversas revistas e jornais internacionais, bem como as inúmeras comunicações apresentadas no encontro anual *Psychology of Mathematics Education* (PME) constituem um forte indicador da importância deste tema.

No *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, Kieran (2006), apresenta uma panorâmica do foco nas abordagens do ensino e aprendizagem da Álgebra, nos últimos trinta anos. Esta autora destaca três períodos distintos na investigação neste domínio. O primeiro, que decorre entre 1977 e 2006, fica marcado pelo interesse acerca da transição da Aritmética para a Álgebra, variáveis e incógnitas, equações e resolução de equações, problemas verbais algébricos; o segundo, que decorre entre meados de 1980 e 2006, tem como referência a utilização das ferramentas tecnológicas e o foco nas múltiplas representações, onde a generalização assume maior relevância. Finalmente, num terceiro período que decorre de meados de 1990 até 2006, a investigação centra-se no pensamento algébrico dos alunos do ensino básico, tanto na aprendizagem dos conteúdos algébricos como em situações de modelação de fenómenos físicos com recurso a ambientes dinâmicos.

Os conhecimentos de Álgebra são fundamentais, sendo a linguagem algébrica essencial para permitir o prosseguimento de estudos e possibilitar o acesso a um vasto leque de opções profissionais (Ponte, 2006a). Apesar de, ao longo dos tempos, terem surgido várias perspetivas sobre o ensino deste tema, persiste ainda uma visão redutora da Álgebra que a considera uma mera manipulação simbólica. Usiskin (2004) refere que a Álgebra raramente é encarada como uma linguagem viva com uma estrutura lógica que pode promover conexões entre diversos temas. Pelo contrário, surge frequentemente como uma linguagem sem vida, onde as regras surgem do nada e cujas aplicações parecem simples jogos, o que torna a sua compreensão complexa e inacessível a muitos alunos.

Alguns investigadores sugerem que as dificuldades apresentadas pelos alunos podem ser causadas por uma falta de preparação para o estudo da Álgebra, uma vez que o currículo tradicional dá uma grande ênfase à Aritmética descurando aspetos importantes de preparação para o estudo da Álgebra, o que leva à desmotivação e ao fraco desempenho (Greenes & Rubenstein, 2008). Tendo em conta toda a problemática associada ao ensino e à aprendizagem da Álgebra, Stacey e Chick (2004) consideram da maior importância dar continuidade à investigação que tem sido feita e destacam a necessidade de se investigar a utilização da tecnologia por possuir potencialidades para melhorar o ensino e a aprendizagem neste tema. Da mesma forma, English, Lesh e Fennewald (2008) apontam a necessidade de se investigar melhor a articulação entre a resolução de problemas e a aprendizagem de conceitos matemáticos. Consideram, ainda, que o desempenho na resolução de problemas está intimamente ligado à aprendizagem de conceitos matemáticos importantes e argumentam que é necessário encarar a resolução de problemas como uma oportunidade para a construção e revisão de modelos, o que implica ciclos de compreensão que levam a rever, clarificar e refinar sistemas conceptuais.

O processo dinâmico e evolutivo da aprendizagem da Matemática, num ambiente de resolução de problemas, está ligado ao facto de um dado sistema de representação poder estar associado a várias constelações de ideias matemáticas na mente dos alunos. Desta forma, é importante incentivá-los a representar as suas ideias matemáticas de modo a que façam sentido para eles, mesmo que essas representações não sejam convencionais. É igualmente importante que os alunos aprendam formas estabelecidas de representação que facilitem a atividade matemática e que promovam a comunicação das ideias matemáticas. A resolução de problemas pode ser um bom veículo para estimular o uso de uma grande diversidade de representações. Além disso, possibilita o estabelecimento de conexões entre diferentes tipos de representação e a passagem de umas para outras, ampliando o conhecimento matemático dos alunos

(Dufour-Janvier, Bednarz & Belanger, 1987). A resolução de problemas constituiu atualmente uma metodologia de trabalho recomendada em sala de aula e que deve fazer parte de toda a aprendizagem matemática (NCTM, 2000).

Chazan e Yerushalmy (2003) argumentam que o desenvolvimento do desempenho dos alunos requer um currículo que vá mais além do que o ensino de métodos para resolver vários tipos de problemas de forma isolada. Os alunos para escolherem o método precisam de saber em que situações os métodos são adequados. Por seu lado, Vaiyavutjamai e Clements (2006) destacam a falta de investigação, em particular, na aprendizagem de equações do 2.º grau e nas dificuldades que os alunos manifestam. Estes autores salientam o reduzido número de estudos que têm sido feitos neste âmbito.

Neste contexto, pretendo com este estudo dar um contributo que enriqueça o conhecimento científico na área da Didática da Álgebra. Entre outros aspetos, procuro repensar o papel e a relevância da folha de cálculo como ferramenta poderosa para o desenvolvimento do pensamento algébrico, a partir da resolução de problemas que envolvem números, relações entre variáveis, padrões e regularidades, entre outros. Tendo em consideração os resultados da minha experiência prévia neste domínio, as recomendações apresentadas na literatura e toda a problemática relativa ao ensino da Álgebra, considerei pertinente realizar uma experiência de ensino na aula de Matemática. No momento da realização do estudo, para o 9.º ano ainda não se encontrava em vigor o Programa de Matemática do Ensino Báscio (ME, 2007), no entanto, decidi planear a intervenção pedagógica tendo como suporte as indicações metodológicas desse programa, assumindo que esta opção não oferece qualquer inconveniente para os alunos na medida em que os conteúdos são os mesmos, existindo diferenças apenas ao nível da abordagem metodológica.

1.2. Objetivos de investigação

Os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2000) defendem uma "Álgebra para todos". Em particular, consideram que os alunos devem compreender os diversos significados e usos de letras para representar variáveis, no contexto da resolução de problemas. Tendo presente estas recomendações torna-se necessário mudar o rumo do ensino da Álgebra, de modo a dotá-la de significado para todos os alunos. O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) revela essa preocupação, apresentando como propósito principal do ensino da Álgebra:

> Desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos” (ME, 2007, p. 55).

Relativamente às tarefas e recursos, as indicações metodológicas do referido programa referem que:

> As tarefas a propor aos alunos devem privilegiar a resolução de problemas e a modelação de situações, usando conceitos e procedimentos algébricos de complexidade crescente, sem perder de vista a consolidação dos procedimentos algébricos de rotina. O computador (por exemplo, com a folha de cálculo) é um bom recurso para apoiar os alunos no estabelecimento de relações entre a linguagem algébrica e os métodos gráfico, na realização de tarefas de exploração e investigação e na resolução de problemas. (ME, 2007, p. 56).

O uso de expressões algébricas para representar condições e dados de problemas, utilizando letras para designar incógnitas ou variáveis e introduzindo expressões com variáveis ligadas a um contexto é considerado altamente vantajoso nos dias de hoje. A resolução de problemas é reconhecida como uma atividade que valoriza o potencial da Álgebra (Canavarro, 2007; NCTM, 2000; Pereira & Saraiva, 2008; ME, 2007). Por outro lado, é igualmente recomendado tirar partido dos avanços tecnológicos para a melhoria do ensino e aprendizagem da Álgebra. Atualmente, a maioria das pessoas que trabalha com uma folha de cálculo, está implicitamente a utilizar a Álgebra, sem ter consciência desse facto por não associar os procedimentos que usa com a Álgebra escolar. Assim sendo, a folha de cálculo pode e deve ser usada para ajudar a introduzir a linguagem da Álgebra. Note-se que tal não significa que a Álgebra com recurso ao papel e lápis seja obsoleta; pelo contrário, continua a ser necessário saber resolver equações simples e efetuar transformações simples à mão. Porém, a Álgebra escolar precisa de mudar de modo a tornar-se mais relevante para os alunos, sendo por isso importante que se explore a sua relação com a tecnologia para a tornar mais acessível a todos (Usiskin, 2004). Neste mesmo sentido, as indicações metodológicas do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), no tema Álgebra do 3.º ciclo, defendem que:

> No desenvolvimento dos conceitos e procedimentos algébricos é importante que sejam proporcionados aos alunos experiências informais antes da manipulação algébrica formal (por exemplo, na resolução de equações, sistemas de equações e inequações). (ME, 2007, p. 55).

É com base neste pressuposto que me proponho realizar uma experiência de ensino ao longo da aprendizagem de três tópicos do tema Álgebra do 9.º ano. A proposta didática a implementar tem como pressuposto que as aprendizagens dos alunos sejam realizadas num contexto de resolução de problemas onde a folha de cálculo constitui uma ferramenta disponível para o trabalho. Esta ferramenta é reconhecida por vários autores (e.g., Ainley & Pratt, 2005; Dettori, Garuti & Lemut, 2001; Rojano, 2002) como muito útil para o desenvolvimento do pensamento algébrico, em particular, pelo facto de propiciar uma ponte entre a linguagem natural e a linguagem algébrica. Para além da resolução de problemas, são igualmente contempladas tarefas como a resolução de exercícios e explorações (Ponte, 2005). A organização do trabalho dos alunos, em sala de aula, terá em conta as características das tarefas, podendo assim ser individual, em pares ou em grupo.

O principal objetivo deste estudo é analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, no estudo dos tópicos: sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, proporcionalidade inversa, representações gráficas e equações do 2.º grau a uma incógnita, do programa de Matemática do 9.º ano. Dado que o pensamento algébrico é uma forma de pensamento bastante ampla, decidi restringir o estudo aos modos de representação na aprendizagem de métodos formais algébricos e analisar a sua evolução. O trabalho na folha de cálculo procura ser uma ponte que facilita e possibilita a passagem da linguagem natural para a algébrica. Assim, tanto no ambiente de trabalho com papel e lápis, como no ambiente digital da folha de cálculo pretendo analisar (i) de que forma os alunos evoluem nas representações utilizadas e como as articulam na resolução das tarefas ao longo do estudo dos diferentes tópicos, em particular, na aprendizagem dos métodos formais algébricos. Uma vez que o trabalho desenvolvido em sala de aula inclui algumas tarefas com a folha de cálculo, neste ambiente e em articulação com o trabalho com papel e lápis pretendo igualmente analisar (ii) de que modo é estabelecida a conexão entre o trabalho desenvolvido com a folha de cálculo e a notação algébrica com papel e lápis e (iii) de que forma este trabalho de conexão entre os dois ambientes contribui para a aprendizagem dos métodos formais algébricos.

1.3. Organização do estudo

Este trabalho é composto por nove capítulos. No primeiro apresento a pertinência do estudo, refiro as minhas motivações pessoais e destaco aspetos apontados na literatura que fundamentam a necessidade de investigação neste domínio. Por fim, apresento os objetivos desta investigação.

O enquadramento teórico está dividido em três capítulos. No capítulo 2, intitulado Álgebra e pensamento algébrico na Matemática escolar, destaco o papel da Álgebra no currículo atual; discuto o conceito de pensamento algébrico do ponto de vista de diferentes autores e apresento a perspetiva adotada neste estudo. O capítulo 3 é dedicado às representações matemáticas pelo seu contributo para a compreensão das aprendizagens formais algébricas e do desenvolvimento do pensamento algébrico, em geral. Por sua vez, o quarto capítulo é dedicado às tarefas matemáticas, sendo destacadas as diferentes tipologias de tarefas presentes na intervenção e sua importância na aprendizagem da Álgebra. Ao longo destes três capítulos é feita referência à folha de cálculo pela sua relevância no desenvolvimento do pensamento algébrico, pelo seu contributo nas diversas formas de representação e como ferramenta tecnológica na resolução das tarefas.

No capítulo 5 descrevo a experiência prévia realizada na turma, traço as principais características da experiência de ensino e apresento os objetivos a trabalhar em cada um dos tópicos em estudo. De seguida, o capítulo 6 é destinado à apresentação das opções metodológicas deste estudo. É justificada a opção metodológica e é feita descrição dos procedimentos adotados na recolha, organização e tratamento dos dados.

Nos capítulos 7 e 8 apresento os casos de Gabriela e Carolina, respetivamente, com a descrição da evolução do seu pensamento algébrico ao longo do estudo dos diferentes tópicos. Por fim, o capítulo 9 é dedicado à apresentação das conclusões deste estudo. Neste capítulo faço uma pequena reflexão pessoal sobre a realização deste trabalho, apontando algumas limitações com que me defrontei e propondo sugestões para futuras investigações.

CAPÍTULO 2

Álgebra e pensamento algébrico na Matemática escolar

A Álgebra é um dos temas mais relevantes no currículo da Matemática, envolvendo uma grande diversidade de conceitos. Neste capítulo apresento alguns trabalhos e resultados de investigações relacionadas com este tema. Refiro, em primeiro lugar, aspetos curriculares acerca do ensino da Álgebra. Em seguida, discuto o conceito de pensamento algébrico proposto por diferentes investigadores e exponho a perspetiva de pensamento algébrico que adoto neste estudo. Por fim, abordo a aprendizagem dos métodos formais algébricos bem como o papel da folha de cálculo no desenvolvimento do pensamento algébrico.

2.1. A Álgebra no currículo

O ensino da Álgebra é um tema muito presente na investigação em Educação Matemática. O 12.º *ICMI Study* foi dedicado à análise da situação atual do ensino e aprendizagem da Álgebra e a traçar linhas orientadoras para o futuro (Stacey & Chick, 2004). Neste encontro foi amplamente reconhecido que os alunos que pretendem prosseguir estudos necessitam de um conhecimento profundo deste tema, o que requer forte capacidade de abstração. A compreensão de conceitos algébricos foi considerada indispensável na formação matemática dos jovens ao mesmo tempo que se reconheceu que isso não é fácil e acessível a todos os alunos. Quando a aprendizagem da Álgebra assenta essencialmente na manipulação simbólica, esta torna-se pouco apelativa, provocando desinteresse e insucesso em Matemática. É reconhecida a necessidade de compreender as dificuldades cognitivas que os alunos revelam, de modo a maximizar as suas oportunidades de aprendizagem. Neste sentido, considera-se prioritário mudar o rumo do ensino da Álgebra, de modo a dotá-la de significado para todos os alunos.

O avanço tecnológico tem sido um dos fatores impulsionadores da mudança curricular no ensino da Álgebra, fornecendo perspetivas enriquecedoras para melhorar o ensino deste tema. As tarefas rotineiras, tais como a simplificação de expressões e a resolução de equações, a que frequentemente se resume o ensino da Álgebra, podem atualmente ser executadas prontamente pelo computador ou por qualquer sistema de Cálculo Algébrico Simbólico (CAS). Por outro lado, algumas situações originam uma tendência para distinguir e colocar os processos aritméticos em oposição aos algébricos, o que é criticado por Blanton e Kaput (2005) que consideram o pensamento aritmético como uma vertente do pensamento algébrico.

Vários investigadores distinguem diversos aspetos fundamentais na Álgebra. Por exemplo, Sutherland (1994) considera que a atividade algébrica escolar pode ser dividida em categorias: generalização, formalização e resolução de equações, trabalho com funções e com fórmulas e desenvolvimento de métodos de resolução de problemas. Esta investigadora salienta que são observáveis diferenças significativas na ênfase dada a cada uma destas categorias nos diferentes países e, até mesmo, em diferentes regiões do mesmo país. Para Kaput (2008), os aspetos centrais da Álgebra podem ser sintetizados como mostra a tabela 2.1.

Tabela 2.1: Aspetos centrais da Álgebra (Kaput, 2008, p. 11).

Aspetos centrais	Vertentes
(A) Álgebra como utilização da simbologia para representar generalizações a partir de regularidades. (B) Álgebra como um raciocínio guiado e generalizações expressas no sistema convencional de símbolos.	1. Álgebra como o estudo de estruturas e sistemas abstratos de cálculos e relações, incluindo aqueles que provêm da aritmética (Álgebra como aritmética generalizada) e no raciocínio quantitativo. 2. Álgebra como estudo de funções, relações, relações e variação conjunta 3. Álgebra como linguagem de aplicação à modelação dentro e fora da Matemática.

A primeira vertente (aspetos centrais A e B) corresponde à Álgebra como aritmética generalizada. Aqui inclui-se a generalização das operações na aritmética e suas propriedades acerca das relações mais gerais, como as propriedades do zero, comutatividade, relações inversas, etc. Inclui-se também a generalização de propriedades dos números ou das suas relações, relativas à soma de dois números ímpares e à soma de três números consecutivos, e propriedades na tabela de 100 para a soma e para a multiplicação. Esta vertente abarca a construção dos aspetos sintáticos da Álgebra a partir da estrutura da Aritmética, a construção da ideia de que uma expressão pode ser substituída por uma outra equivalente. A atividade designa-se de algébrica quando se estabelecem as relações explicitamente e se usam na sua generalidade. Estes aspetos implicam olhar para as expressões aritméticas numa perspetiva onde se valoriza mais a estrutura do que propriamente o seu valor quando são efetuados os cálculos.

A segunda vertente envolve a generalização, a partir da ideia de função. A generalização pode ser tomada a partir da variação em determinado domínio. O aspeto sintático da Álgebra é usado para escrever expressões a partir de regularidades encontradas, podendo alguns padrões surgir a partir de tarefas realizadas em Geometria.

Na terceira vertente, a Álgebra é entendida como uma atividade de modelação, na qual Kaput (2008) considera três tipos. O primeiro tipo de modelação algébrica diz respeito a problemas aritméticos cuja resolução requer a utilização de aspetos sintáticos da Álgebra. O segundo usa o primeiro aspeto central na generalização de padrões, surgindo a generalização com a utilização de uma ou mais variáveis que podem depois expressar uma função ou classe de funções. O terceiro tipo envolve situações de resposta única ou problemas de palavras puramente aritméticos cuja resolução não requer manipulação algébrica. Neste caso, a introdução de variáveis expressando a generalidade das situações apenas toma a forma de parâmetros (Kaput, 2008).

A Álgebra pode ser entendida do ponto de vista simbólico. Kaput, Blanton e Moreno (2008) veem a Álgebra nesta perspetiva e consideram que a generalização e a simbolização são o cerne do pensamento algébrico. Estes investigadores afirmam que a maneira de uma pessoa fazer uma só afirmação que se aplique a várias situações, sem a repetir em cada situação, é fazer uma única afirmação onde se expresse a generalização. Mas esta expressão requer algum tipo de simbolismo para unificar a multiplicidade. A generalização é o ato de criar esse objeto simbólico. Estes investigadores discutem também em que condições o simbolismo se assume como atividade algébrica ou não. Referem que isso apenas acontece nas situações em que os símbolos estão ao serviço da generalização ou na presença de um raciocínio sistemático onde são utilizados os sistemas convencionais da simbologia algébrica, incluindo os mais recentes sistemas gráficos e dinâmicos. Os autores definem ainda a atividade quase-algébrica (*quasi-algebraic*) como a que satisfaz as condições anteriores, exceto na utilização de quaisquer símbolos, como os tradicionalmente utilizados na Aritmética ou outros como a linguagem oral e materiais manipuláveis (físicos). Acrescentam ainda que, a utilização de números refere-se à utilização destes símbolos não apenas para efetuar cálculos, mas para analisar a sua estrutura, por exemplo na exploração de propriedades.

Kaput (1999) considera que a Álgebra é muitas vezes ensinada como um conjunto de procedimentos sem qualquer ligação com outros conhecimentos matemáticos ou com a realidade do dia-a-dia dos alunos. Como exemplo, refere os problemas artificiais como os típicos problemas de idades e de dinheiro que não levam os alunos a refletir sobre as suas experiências pessoais nem a articular o novo conhecimento com outros. Desta forma, os alunos acabam por memorizar regras e procedimentos como cadeias de operações e resolvem artificialmente problemas que não têm qualquer significado para eles, nem os ajudam a compreender os conceitos matemáticos envolvidos. Deste modo, os alunos não valorizam nem compreendem a importância do conhecimento matemático nas suas vidas.

O simbolismo algébrico é muito importante para a evolução tecnológica e sem ele muito do conhecimento científico seria inexistente. Kaput (1999) propõe um conjunto de linhas orientadoras para o ensino da Álgebra: (i) começar a trabalhá-la nos primeiros anos, nomeadamente a partir do conhecimento informal dos alunos; (ii) integrar as aprendizagens da Álgebra na aprendizagem de outros temas estendendo e aplicando esses conhecimentos; (iii) trabalhar as diversas formas do pensamento algébrico; (iv) incentivar os alunos a refletirem acerca do que aprendem e articularem esse conhecimento com o conhecimento anterior; e (v) incentivar uma aprendizagem ativa, bem como promover a construção de conexões que levem os alunos a dar sentido e a compreender as expressões algébricas.

Kaput (1999) considera que estas mudanças envolvem um trabalho desde os primeiros anos, onde deve estar presente a generalização, sendo a sua expressão feita numa linguagem cada vez mais formal. Afirma ainda que a generalização deve começar na Aritmética, em situações de modelação e em Geometria. Este autor organiza o pensamento algébrico em cinco formas diferentes, que se interrelacionam e favorecem o estabelecimento de conexões com outras áreas da Matemática: (i) a generalização e formalização; (ii) manipulação de formalismos; (iii) estudo de estruturas abstratas; (iv) estudo de funções/relações; e (v) linguagem na modelação matemática e no controlo de fenómenos (Figura 2.1).

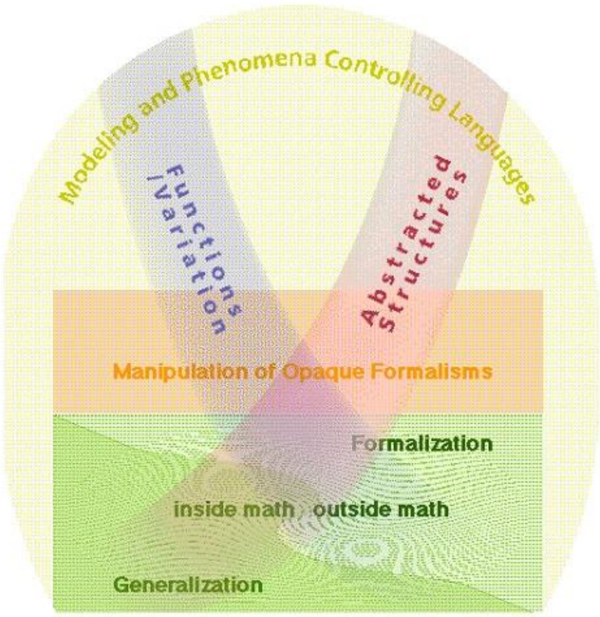


Figura 2.1: A sobreposição e as interpelações entre as cinco formas do raciocínio algébrico (Kaput, 1999, p. 137).

Por sua vez, Crawford (2001, citada por MacGregor, 2004) apresenta uma definição para a competência algébrica, encarando-a como (i) a capacidade para pensar em linguagem simbólica, para entender a Álgebra como Aritmética generalizada, e perceber a Álgebra como o estudo de estruturas matemáticas; (ii) capacidade de perceber a igualdade e equações da Álgebra e aplicá-las na resolução de problemas e (iii) capacidade para perceber relações entre quantidades através de padrões, definindo funções e aplicando à modelação matemática. MacGregor (2004) acrescenta que a capacidade de trabalhar com gráficos de funções e relações no plano é uma componente da competência algébrica.

Usiskin (1988) identifica quatro conceções acerca da Álgebra: aritmética generalizada, conjunto de procedimentos usados para resolver certos problemas, estudo das relações entre quantidades e estudo de estruturas. Por outro lado, num documento produzido pelo NCTM (1998), a Álgebra escolar surge organizada em torno de quatro temas: funções e relações, modelação, estruturas e linguagem, e representações.

Para Kieran (2004), a atividade algébrica pode dividir-se em três tipos de atividade: de geração, de transformação e de carácter meta-global. Na sua perspetiva, as atividades de geração envolvem a construção e interpretação de objetos algébricos – a formação de expressões e equações. Muitas das vezes, as equações com uma incógnita surgem no contexto de resolução de problemas e representam a situação em causa. Outras expressões surgem da generalização de padrões geométricos ou numéricos bem como da tradução de relações numéricas. Os objetos subjacentes às expressões e equações são variáveis e incógnitas e por isso também estão incluídos neste domínio, bem como o sinal de igual e a noção de solução de uma equação. Grande parte do significado construído para os objetos algébricos ocorre durante as atividades de geração. As atividades de transformação baseada em regras (*rule-based*) incluem o trabalho com a equivalência, tais como a simplificação de expressões algébricas, a factorização, o desenvolvimento de expressões, e a resolução de equações e inequações. Por fim, as atividades de caráter meta-global são aquelas em que a Álgebra é utilizada como ferramenta, mas que não são exclusivas deste tema. A autora inclui neste tipo de atividade a resolução de problemas, a análise de relações, a justificação, a prova, a predição, a modelação matemática, incluindo a generalização de padrões e a análise da variação em situações que envolvem funções. Estas atividades são essenciais para o outro tipo de atividades algébricas, em especial para as de geração e para a atribuição de significado, caso contrário revelam-se inúteis. A partir desta noção de atividade algébrica, Kieran (1996) desenvolveu um modelo (Figura 2.2) onde sintetiza as suas ideias.

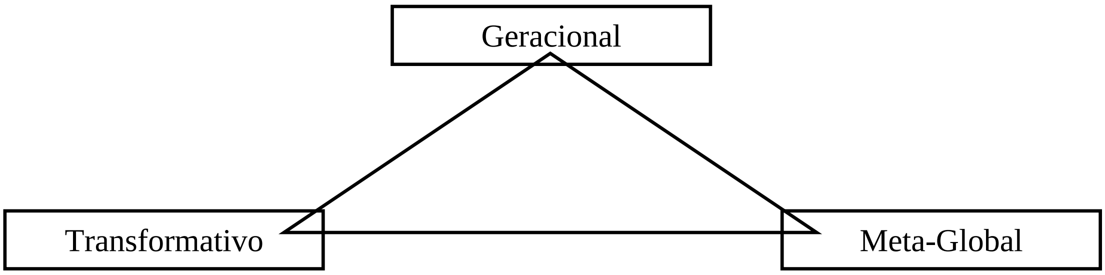


Figura 2.2: Modelo GTG para a conceptualização da atividade algébrica (Kieran, 2007a, p.713).

A utilização do simbolismo algébrico é uma das grandes potencialidades da Álgebra, pois permite expressar ideias matemáticas de forma rigorosa e condensada e é uma poderosa ferramenta na resolução de problemas. No entanto, na Álgebra, a aprendizagem e utilização de equações pode tornar-se complexa para os alunos, na medida em que os conteúdos matemáticos surgem envolvidos numa linguagem muito específica. Apesar de os alunos já conhecerem a simbologia utilizada na Aritmética e grande parte dessa simbologia ser utilizada na Álgebra, isso não garante que os alunos entendam o seu significado neste novo contexto. Um exemplo desta situação ocorre com o sinal de igual que pode, ou não, assumir o significado de equivalência. Este símbolo surge na Aritmética como um sinal de operação, ou seja, indica a necessidade de fazer algo. Contudo, na resolução de equações o sinal de igual assume outro significado, o de equivalência entre os membros da equação (Kieran, 1981). Para uma interpretação adequada da estrutura de uma equação é necessária uma compreensão da conceção de simetria e do carácter transitivo da igualdade.

Em suma, a Álgebra assume atualmente um papel fundamental no ensino e aprendizagem, englobando um trabalho amplo e de grande riqueza matemática. É reconhecido o potencial do seu simbolismo que permite aglutinar as ideias concebidas operacionalmente em agregados compactos e tornar a informação mais fácil de compreender (Sfard & Linchevski, 1994). No entanto, é importante não perder de vista o significado daquilo que os símbolos representam nos variados contextos.

Nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2000) são apresentados os principais aspetos a desenvolver nos diferentes temas de Matemática, desde o ensino pré-escolar até ao 12.º ano (Anexo 4). Podemos verificar que as propostas do NCTM para o estudo da Álgebra envolvem o estudo das estruturas algébricas, a simbolização, a modelação e o estudo da variação.

Em Portugal, o *Currículo Nacional do Ensino Básico* (ME-DEB, 2001) aponta também os aspetos da competência matemática que os alunos devem desenvolver no estudo da Álgebra e funções. No *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) a Álgebra não surge como tema no 1.º ciclo, mas logo a partir dos primeiros anos é feito um trabalho de suporte para os ciclos seguintes. Assim, no 1.º ciclo os alunos começam por estudar sequências numéricas e padrões geométricos que potenciam o alcance de processos de generalização. O trabalho com estruturas multiplicativas e números racionais constitui também uma importante base para o desenvolvimento da noção de proporcionalidade. No 2.º ciclo a Álgebra procura que os alunos ampliem e aprofundem os conhecimentos adquiridos no 1.º ciclo através do estudo de relações e regularidades, que inclui o trabalho com expressões numéricas e propriedades das operações, sequências e regularidades e a proporcionalidade direta. Neste ciclo os alunos começam a utilizar a linguagem simbólica para representar relações, generalizar propriedades das operações aritméticas e aprender a utilizar fórmulas para o cálculo de áreas e volumes. No 3.º ciclo os alunos continuam a ampliar e a aprofundar os conhecimentos adquiridos anteriormente, com o estudo de sequências e regularidades, de equações do 1.º e do 2.º grau, inequações e funções. Neste programa de Matemática para o ensino básico encontro espelhadas muitas das recomendações da literatura, como do NCTM (2000) e de Blanton e Kaput (2005).

Na Álgebra, o estudo de expressões algébricas ou de equações mostra-se da maior relevância pela sua aplicabilidade nos diferentes ramos da Matemática. Este aspeto é muito importante na medida em que possibilita aos alunos estabelecer conexões entre diversos temas matemáticos. Gattegno (1970) considera que a Álgebra está presente em toda a Matemática porque é inerente ao pensamento matemático. Bell (1996) corrobora esta ideia, considerando que a Álgebra não deve ser encarada como uma disciplina separada de outros ramos da Matemática, mas pelo contrário deve ser trabalhada ao longo de todo o currículo. O simbolismo algébrico, os conceitos e os métodos são usados sempre que é apropriado nas diversas áreas da Matemática, para identificar incógnitas, resolver equações ou estabelecer relações, expressar generalizações e resolver problemas.

Este aspeto é fundamental para os alunos entenderem o poder do simbolismo algébrico em toda a aprendizagem da Matemática. São várias as tarefas em que a escrita e resolução de equações agiliza muitas das vezes a sua resolução. Tais tarefas tanto podem surgir em Matemática como nas disciplinas de Física, Química, Contabilidade ou Economia. Assim a Álgebra pode e deve ser encarada como ferramenta no estudo e no estabelecimento de conexões nos mais variados contextos que vão para além da própria Matemática.

2.2. Pensamento algébrico

2.2.1. O que é o pensamento algébrico?

O desenvolvimento do pensamento algébrico deve ser um dos objetivos privilegiados no ensino da Matemática. Porém, a expressão "pensamento algébrico" é utilizada frequentemente com diferentes significados. Para Radford (2006), um dos motivos para ainda não se possuir uma definição precisa para "pensamento algébrico" pode dever-se ao facto de existir uma ampla variedade de objetos algébricos (expressões algébricas, equações, funções…) e processos (simplificação, inversão…), bem como ao facto de haver várias possibilidades para conceber o pensamento em geral. Por seu lado, Ponte (2006a) considera que a expressão "pensamento algébrico" é importante do ponto de vista curricular porque ajuda a perceber que a Álgebra envolve uma forma própria de pensar, não se reduzindo à manipulação de símbolos, devendo por isso estar presente em toda a aprendizagem da Matemática. Acrescenta ainda que se perdeu a noção do papel específico da Álgebra no currículo, resumindo-a apenas ao cálculo algébrico, sendo que o pensamento algébrico deve ser encarado numa perspetiva transversal. Refere também que o trabalho com os símbolos deve ser enriquecido para que o estudo da Álgebra não se reduza à simples manipulação, levando à perda de significados. Para isso, defende que é necessário relacionar a Álgebra com outras áreas da Matemática, apresentando a modelação como um exemplo dessa possibilidade. Finalmente, Mason (2008) refere que o pensamento algébrico ajuda a resolver problemas mais complicados do que aqueles que se podem resolver rapidamente com a Aritmética. Este autor afirma que a resolução de um desses problemas começa com o reconhecimento da ignorância do desconhecido e prossegue-se através de cálculos com esse desconhecido como se fosse um conhecido.

Se há alguns anos a Álgebra privilegiava as representações simbólicas, atualmente a utilização das tecnologias digitais, em sala de aula, nomeadamente o computador, proporcionam outras formas de representação para as relações e outras formas de operar sobre essas relações que podem ser consideradas análogas às atividades de geração e transformação definidas por Kieran (1996). Estas mudanças provocaram uma reflexão acerca do conceito de pensamento algébrico, levando esta autora a afirmar que:

> O pensamento algébrico pode ser interpretado como uma abordagem às situações quantitativas, que evidencia os aspetos relacionais das mesmas, com recurso a ferramentas que não são necessariamente letras usadas como símbolos e que podem ser utilizadas como suporte cognitivo para a introdução e sustentação do discurso mais característico da Álgebra escolar (Kieran, 1996, pp. 274-275).

Lins e Kaput (2004) acrescentam que a Álgebra pode ser abordada, desde bastante cedo, a partir da Aritmética, uma vez que existem muitas propriedades, estruturas e relações que são comuns a estas duas áreas. Assim sendo, a Aritmética e a Álgebra podem ser desenvolvidas como se fossem um conhecimento integrado.

A natureza do pensamento algébrico depende do desenvolvimento e da experiência matemática dos alunos. Num nível mais avançado, o raciocínio algébrico manifesta-se através do uso de expressões simbólicas e de equações, em vez de números e operações. Para os alunos que ainda não aprenderam as notações algébricas, as formas de pensamento mais geral sobre números, operações e notações, como o sinal de igual, podem efetivamente ser consideradas algébricas (Kieran, 2007b). Esta investigadora acrescenta também que o pensamento algébrico não precisa necessariamente de incluir factos e técnicas, referindo a este propósito uma citação de Hee Chan Lew, “A Álgebra é muito mais do que um conjunto de factos e técnicas, é um modo de pensamento” (Kieran, 2007b, p. 22).

Deste modo, pensar algebricamente, envolve conhecer várias formas de representação, nomeadamente simbólicas. Implica também flexibilidade na mudança entre modos de representação, bem como a capacidade de operar com símbolos, em contexto e quando adequado (Schoenfeld, 2008). No pensamento algébrico dá-se atenção a objetos concretos e às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações de modo geral e abstrato (NCTM, 2000). Este modo de pensamento contempla também o trabalho com estruturas matemáticas e o uso de símbolos na resolução de problemas, devendo incluir o sentido do símbolo, entendido como a capacidade de interpretar e usar de forma criativa símbolos matemáticos (Arcavi, 2006).

Para Arcavi (2006) é complicado definir o pensamento algébrico encarando-o como uma noção muito profunda e abrangente. Este investigador prefere falar em "sentido do símbolo" (*symbol sense*), uma vez que os símbolos são os principais instrumentos da Álgebra. Acrescenta ainda, que o sentido do símbolo é um caso particular da noção geral de "dar sentido" (*sense making*) – e não somente na Álgebra. Considera a rutura entre significados e o formalismo uma das grandes dificuldades dos alunos em Matemática. No entanto, sublinha que *pensamento algébrico* e *sentido do símbolo* não são exatamente a mesma coisa, intersetam-se apenas, sendo que o foco do pensamento algébrico consiste em utilizar símbolos para representar um problema de forma geral, aplicar procedimentos formais para obter um resultado e poder interpretar esse resultado. Por sua vez, ter sentido do símbolo implica compreender os símbolos (quando e como devem ser usados para exibir relações, por exemplo); ter capacidade tanto de manipular como de compreender expressões simbólicas; ser capaz de selecionar e fazer uma representação simbólica adequada para uma determinada situação; ter consciência de que os símbolos podem desempenhar diferentes papéis em diferentes contextos e ter o sentido intuitivo dessas diferenças; selecionar uma possível representação simbólica e, por vezes, reconhecer a insatisfação com essa escolha e procurar outra mais adequada, tendo a consciência da necessidade de rever os significados dos símbolos durante a aplicação de um procedimento para resolver um problema ou na comparação dos resultados esperados com os obtidos.

Arcavi (2006) apresenta assim as componentes mais importantes do sentido do símbolo:

i) a simpatia pelos símbolos inclui a compreensão dos símbolos e o sentido das suas potencialidades. Saber quando e como os símbolos podem ser utilizados com o objetivo de exibir relações, generalizações e demonstrações que de outra forma não conseguiriam ser expressas;

ii) a capacidade de manipular e compreender, no global, as expressões algébricas como dois aspetos complementares na resolução e problemas;

iii) a consciência de que qualquer um pode escrever corretamente relações simbólicas que expressam certa informação (verbal ou gráfica) dada ou pedida;

iv) A capacidade de selecionar uma representação simbólica possível (decidir e eleger a variável que vai atribuir um símbolo) e em certos casos reconhecer a própria insatisfação com essa escolha e tentar uma melhor;

v) A consciência da necessidade de rever os significados dos símbolos durante a aplicação de um procedimento, na resolução de um problema ou durante a inspiração de um resultado e comparar com as suas intuições acerca dos resultados esperados e com a própria situação do problema;

vi) A consciência de que os símbolos podem desempenhar papéis distintos em diferentes contextos e desenvolver um sentido intuitivo dessas diferenças (pp. 30-34).

Arcavi (2006) levanta diversas questões acerca do desenvolvimento do sentido do símbolo, uma das quais em relação ao conhecimento necessário para desenvolver esse sentido. Questiona o papel da manipulação simbólica e se a prática repetitiva precede, é paralela ou impede o seu desenvolvimento. Este autor considera que o desenvolvimento do sentido do símbolo está fortemente relacionado com a cultura de sala de aula, dependendo do facto do professor o incentivar ou suprimir, não sendo, portanto, uma questão de ter ou não habilidade matemática. Acrescenta que desenvolver o sentido do símbolo e o sentido dos significados em geral vai mais além do puramente cognitivo e está relacionado com aquilo que se espera que o aluno produza, com o que é valorizado na sala de aula e com o que é aceite como regras do jogo e da manipulação simbólica. O sentido do símbolo é, para este autor, algo que deve ser cultivado na sala de aula.

Arcavi (2006) alerta para o facto de que o desenvolvimento do sentido do símbolo, em vez de estar apenas ligado a capacidades cognitivas, está também fortemente relacionado com as nossas atitudes para com o conhecimento e a aprendizagem. Em determinados momentos temos apenas uma compreensão parcial e, por vezes, os significados emergem daquilo que em determinado momento não tinha significado como a prática repetitiva. Esta compreensão parcial pode perdurar algum tempo até que os significados se liguem tornando possível o surgimento de uma visão global. Por isso, no trabalho, em sala de aula, o professor deve reconhecer o potencial das situações relacionadas com o sentido do símbolo, reservar um momento de discussão e estimular o desenvolvimento de ideias parcialmente desenvolvidas anteriormente.

Como referi anteriormente, a natureza do pensamento algébrico depende do desenvolvimento da experiência matemática dos alunos. Assim, do pré-escolar até ao final do 8.º ano os alunos devem desenvolver vários aspetos inerentes a esta forma de pensamento. A partir do 9.º ano pretende-se que os alunos tenham oportunidade de enriquecer as experiências anteriores e aprofundar o seu conhecimento sobre relações, funções e desenvolver um melhor conhecimento das estruturas e abstração matemáticas.

A escrita simbólica de relações numéricas tem privilegiado a utilização de letras, em vez da linguagem natural, permitindo aos alunos lidarem com expressões mais complicadas e mais facilmente encontrarem padrões. No entanto, a utilização de ferramentas tecnológicas permite outras representações para essas relações, bem como novas formas de exploração, que podem ser vistas como análogas às atividades de geração e de transformação da Álgebra. Deste modo, parece apropriado que essas novas representações das relações numéricas, assim como o pensamento que lhes está associado, sejam incluídos no domínio da Álgebra (Kieran, 1996). Ou seja, o pensamento algébrico é uma forma de pensamento que se exprime através de representações que não têm, necessariamente, de incluir a utilização de letras.

Zazkis e Liljedahl (2002) afirmam que quando o termo "Álgebra" é utilizado engloba dois aspetos distintos: pensamento algébrico e simbolismo algébrico. Salientam que existe discordância entre diversos investigadores entre a relação que existe entre esses dois aspetos. Alguns encaram o simbolismo algébrico como uma componente necessária do pensamento algébrico, enquanto outros consideram-no como um resultado ou como uma ferramenta de comunicação. Estes autores afirmam que atualmente há uma tendência para separar o simbolismo algébrico do pensamento algébrico, sendo esta separação fomentada por dois fatores: (i) reconhecimento da possibilidade de manipulação simbólica sem sentido e (ii) um maior foco na estrutura do que nos cálculos nos primeiros anos. Num estudo acerca de generalização de padrões estes autores verificaram que quando os alunos manifestavam formas de pensamento algébrico ao mesmo tempo que utilizavam notação algébrica (simbolismo) não entendiam a correspondência entre ambos. Assim, a presença de simbolismo algébrico deve ser encarada como um indicador de pensamento algébrico, no entanto a não utilização da notação algébrica não deve ser julgado como uma incapacidade para pensar algebricamente. Também Radford (2000) tem uma posição semelhante ao afirmar que “os alunos já estão a pensar algebricamente quando lidam com a produção de uma mensagem escrita, mesmo sem usarem o simbolismo algébrico” (p. 258). Uma outra definição surge de Kaput e Blanton (2005) que consideram:

> O raciocínio algébrico é um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de um discurso argumentativo, e expressam-nas de uma forma cada vez mais formal e adequada à sua idade (p. 99)

Ainda em consonância com esta definição Van de Walle, Karp e Bay-Williams (2011), afirmam que

> O pensamento ou raciocínio algébrico envolve a construção de generalizações a partir de experiências com números e cálculos, a formalização dessas ideias utilizando um sistema significativo de símbolos e a exploração dos conceitos de padrão e função. (p. 262)

Em suma, o pensamento algébrico consiste na generalização de ideias matemáticas e na identificação de estruturas matemáticas. A Álgebra pode ainda ser entendida como uma linguagem que nos ajuda a expressar essas generalizações. A fórmula da área de um triângulo $A = \frac{b \times h}{2}$ é exemplo de uma generalização.

Mason (1996) considera que a generalização é comparável à pulsação da Matemática e que esta pode surgir de diversas formas. Segundo este autor, se os professores não tiverem consciência da sua presença e não tiverem o hábito de levar os alunos a trabalhar na expressão das suas próprias generalizações, então o pensamento matemático estará ausente.

Um trabalho feito desde cedo no sentido do desenvolvimento do pensamento algébrico dá mais oportunidades aos alunos no estudo da Matemática nos anos mais avançados bem como na escolha de uma carreira. Para além disso, pode servir para apoiar a transição para a Álgebra formal dos anos mais avançados em que a investigação tem mostrado que a maioria dos alunos tem muitas dificuldades (Kieran, 1992).

No 3.º ciclo e no ensino secundário os alunos pensam algebricamente quando identificam conexões entre representações algébricas e gráficas de transformações de funções. O pensamento algébrico ajuda a operar com quantidades desconhecidas em contraste com o pensamento aritmético que envolve operações com quantidades conhecidas. O foco da Álgebra está no estudo das relações ente quantidades (designadas por variáveis) e na habilidade para representar essas diferentes relações.

Existem diferentes abordagens ao desenvolvimento do pensamento algébrico, sendo duas delas a aritmética generalizada e outra o pensamento funcional, segundo Blanton e Kaput (2005). Ambas são importantes no desenvolvimento desta forma de pensamento. Estas categorias, definidas por Blanton e Kaput (2005), não são necessariamente disjuntas, em determinado contexto poderão estar intrinsecamente relacionadas. O pensamento algébrico é importante porque leva os alunos à compreensão da Matemática para além dos resultados específicos de cálculos e o uso de procedimentos na aplicação de fórmulas. No entanto os alunos necessitam de tempo para explorar uma variedade de exemplos que permitam desenvolver flexibilidade na aprendizagem e aplicação dos seus conhecimentos. Neste estudo assumo uma perspetiva inclusiva de pensamento algébrico e considero não só o simbolismo algébrico como modo de expressão deste tipo de pensamento, mas também outras formas de expressão que envolvam palavras ou apenas relações gerais entre números.

2.2.2. O pensamento algébrico como aritmética generalizada

De acordo com Carpenter, Franke e Levi (2003) o pensamento algébrico envolve as operações e as propriedades associadas aos números. Vai para além dos cálculos com números específicos, pois dá lugar a um pensamento acerca da estrutura da aritmética e permite identificar padrões. Os alunos podem desenvolver o pensamento algébrico de diferentes formas através da generalização da Aritmética: explorando propriedades e relações; explorando a igualdade como uma relação entre quantidades e utilizando símbolos como letras e variáveis.

Segundo Blanton e Kaput (2005), a Aritmética generalizada é uma categoria que envolve processos de exploração de propriedades das operações com números inteiros, em particular generalizações acerca da soma e dos produtos de números pares e ímpares, propriedades como o resultado da subtração de um número por si próprio "$a-a=0$" (p. 420), decomposição de números inteiros em diferentes somas possíveis e análise da estrutura dessas somas e propriedades do valor posicional de um algarismo.

Uma abordagem algébrica aos números inclui o estudo de propriedades da adição de números com diferentes paridades ($par + par = par$; $ímpar + ímpar = par$; $par + ímpar = ímpar$; $ímpar + par = ímpar$), a propriedade comutativa da adição ($a + b = b + a$) ou a propriedade comutativa da multiplicação ($a \times b = b \times a$). É importante que os alunos analisem várias situações que os levem à generalização, ou seja, ao encontro das propriedades gerais dos números ao invés de memorizarem essas propriedades (Beatty & Bruce, 2012).

Nesta perspetiva, o foco da aprendizagem deixa de estar nos cálculos individuais para estar na compreensão das propriedades das operações com números. Isto permite aos alunos estenderem a sua compreensão para outros sistemas de números como as frações, decimais e inteiros e, ainda, para as expressões algébricas. Mais tarde, os alunos contactam com expressões algébricas mais complexas como $y = mx + b$, sendo capazes de relacionar as suas experiências anteriores com os números, expandindo as suas aprendizagens. Por outro lado, é igualmente importante a exploração da igualdade como relação entre quantidades. Por exemplo, através do estudo de igualdades numéricas, como $4 + 1 = 3 + 2$. Neste caso não é pedido aos alunos para efetuarem cálculos, mas para determinarem a veracidade da igualdade.

Em Álgebra, quando os alunos trabalham com equações, é fundamental que reconheçam o sinal de igual como uma relação entre quantidades e não como um símbolo que implica um cálculo. Os alunos que desenvolvem essa compreensão podem comparar situações como: $5x + 6 = 14$ e $5x + 6 - 2 = 14 - 2$, sem necessitar de efetuar cálculos, focando-se apenas na equivalência das duas equações. Neste caso, recorrem a um pensamento mais geral (pensamento algébrico), em vez de compararem as duas respostas (pensamento aritmético). Os alunos que desenvolvem a compreensão do sinal de igual entendem que o valor da incógnita é o mesmo nas duas equações e que, por exemplo, adicionando -2 em ambos os membros de uma equação o valor da incógnita não se altera.

Deste modo, o uso de símbolos tais como letras no papel de variáveis é um dos aspetos que deve ser desenvolvido desde os primeiros anos, com os alunos. Numa primeira fase estes podem usar os seus próprios símbolos, como: $\nabla + 1 = 4, \nabla = 3$. A utilização deste tipo de simbologia leva os alunos a um nível de pensamento mais geral, que lhes permite construir e compreender as propriedades fundamentais das operações bem como das relações entre operações. Mais tarde, os alunos iniciam-se no uso de letras (*x*, *y*, *z*, …) no lugar dos seus próprios símbolos. Estas letras podem representar incógnitas, por exemplo, em $4 + x = 9$ ou um conjunto de valores no caso de $x + y = 9$. As variáveis podem ainda ser utilizadas para representar propriedades, como $0 + x = x$, ou representar uma propriedade dos números como a soma de números consecutivos: $x + (x + 1) = 2x + 1$. Nestes casos, x pode ser substituído por qualquer número.

Deste modo, é importante que em sala de aula o professor promova a compreensão da diferença entre estas duas situações. Quando os alunos entendem o uso das variáveis em diversas situações eles são capazes de perceber como podem manipulá-las. Podem também perceber como o valor associado a uma variável em particular num dado problema pode ser diferente noutro problema, pois não existe conexão entre a variável e um valor específico.

2.2.3. O pensamento algébrico como pensamento funcional

Segundo Blanton e Kaput (2005), o pensamento funcional abarca situações relativas a relações funcionais, por exemplo, através de processos de generalização de padrões numéricos e geométricos. Estes processos de generalização envolvem a ideia de função. Aqui o foco é na utilização da simbologia na resolução de problemas e no trabalho com expressões algébricas ou na modelação de uma determinada situação. Também consideram a representação gráfica de dados e aspetos que envolvem generalização e justificação relativos a relações funcionais.

O pensamento funcional envolve a análise de padrões (numéricos e geométricos) para identificar a variação e reconhecer a relação entre dois conjuntos de números (Beatty & Bruce, 2012). Esta abordagem envolve explorar como certas quantidades relacionadas que ou variam ou são transformadas noutras quantidades. O pensamento funcional é uma forma de generalizar, onde os alunos podem desenvolver este tipo de pensamento de diferentes formas, nomeadamente através da generalização de padrões e do uso de operações inversas. Os alunos aprendem acerca das relações entre as operações e as suas inversas através de factos que lhes são familiares. Subtração é a operação inversa da adição e vice-versa, assim como a divisão é a operação inversa da multiplicação e vice-versa. Quando se resolvem problemas com quantidades desconhecidas, a compreensão das operações inversas ajuda os alunos na seleção e estratégias apropriadas. No entanto muitos alunos têm dificuldades em conseguir esta compreensão que apoia aprendizagens posteriores.

O pensamento funcional pode ser desenvolvido recorrendo, por exemplo, a uma máquina de funções onde os alunos escolhem o *input* numérico que depois é transformado através de uma determinada regra para gerar o *output*. Este tipo de tarefa leva os alunos a pensarem acerca da relação que existe entre os pares *input* e o *output*. Os alunos podem ainda relacionar as representações visuais com as simbólicas, permitindo-lhes explorar as propriedades das funções incluindo as operações inversas. O trabalho com padrões é favorável ao desenvolvimento do pensamento funcional, sendo útil distinguir entre padrões repetitivos e crescentes.

A repetição de padrões é propícia para os alunos encontrarem generalizações com um padrão, por exemplo, encontrando o que vem a seguir ou a parte que se repete (pensamento recursivo). Este tipo de pensamento é fundamental para desenvolver a compreensão da estrutura matemática e apoia o desenvolvimento do pensamento aditivo. O trabalho desenvolvido com padrões repetitivos (Figura 2.3) pode ajudar os alunos a compreender a relação entre o número de quadrados (variável dependente) e a posição (variável independente) permitindo assim prever o número de quadrados que é necessário para chegar a qualquer posição no padrão.

Figura 2.3: Exemplo de padrão repetitivo.

Os padrões crescentes permitem que os alunos encontrem a generalizações entre dois conjuntos de números. O trabalho com estes padrões promove o desenvolvimento do pensamento multiplicativo e ajuda os alunos a predizer valores para qualquer termo do padrão.

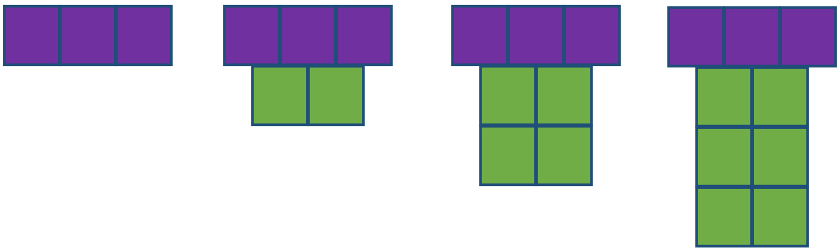


Figura 2.4: Exemplo de padrão de crescimento.

No exemplo da figura 2.4 os alunos podem focar-se inicialmente no facto de que o número de quadrados verdes cresce duas unidades a cada nova figura, o que pode ser expresso em linguagem natural dizendo “adicionar dois quadrados verdes à figura seguinte”. Este pensamento recursivo destaca as mudanças numéricas dentro de um conjunto de números, os quadrados, mas não a relação entre os dois conjuntos de números – a ordem do termo do padrão e o número de quadrados em cada termo. Este raciocínio pode trazer algumas limitações para perguntas do tipo: qual é o número de quadrados do termo 100? E, certamente o mesmo acontece para encontrar o termo geral. Por outro lado, o foco no pensamento funcional enfatiza as relações entre a ordem do termo e o número de quadrados em cada termo: assim como um conjunto de números muda o outro também muda. De um modo previsível, estes dois conjuntos de números covariam. Quando os alunos constroem padrões e refletem sobre as regularidades observadas, reconhecem esta relação funcional. Quando constroem o padrão da figura 2.4 podem reparar que juntam dois quadrados verdes de cada vez e que os roxos se mantêm os 3 alinhados.

Os padrões visuais ajudam os alunos a identificar as quantidades que variam e as que permanecem constantes e qual a relação funcional intrínseca. No caso da figura 2.4 a relação funcional pode ser descrita como a multiplicação da ordem por dois (o número de quadrados que cresce) e mais três (os que permanecem iguais). Os alunos podem ainda descrever no papel, recorrendo, por exemplo, a esquemas com setas, como é que esta relação funcional está relacionada com a regra “vezes 2, mais 3”. Os alunos podem depois generalizar esta compreensão a outras relações como as quadráticas e fazer várias conexões entre representações.

O trabalho com padrões pode oferecer um modo cativante de trabalhar com quantidades que vai para além de respostas aritméticas, podendo levar os alunos a discutir múltiplas estratégias, ajudar a pensar sobre a estrutura matemática e, ainda incentivar a criação de conjeturas e a justificação do seu pensamento. A expressão geral de um padrão surge sempre de uma previsão a partir de valores ou figuras específicas. Os alunos podem começar por calcular termos próximos, depois termos distantes e, finalmente, tentar a generalização. Estes *saltos* são passos que levam os alunos à compreensão de uma expressão geral.

O recurso a tabelas numéricas é também importante para o desenvolvimento do pensamento algébrico, em particular do pensamento funcional. Contudo, o recurso a tabelas com números ordenados pode incentivar os alunos a um raciocínio recursivo ao invés de um raciocínio funcional (Watson, 2010), como no exemplo da figura 2.5.

x	***y***
4	13
1	7
3	11
5	15

$y=2x+1$

x	***y***	
1	7	
		+2
2	9	
		+2
3	11	
		+2
4	13	

Figura 2.5: Exemplos de tabelas numéricas.

A apresentação de uma tabela desordenada, como a da esquerda na figura 2.5, assegura que os alunos observam através das colunas para estabelecerem uma relação entre dois conjuntos de números, permitindo desenvolver o seu pensamento funcional. A tabela do lado direito (Figura 2.5), já ordenada pode não permitir o desenvolvimento o pensamento funcional (Watson, 2010). Nas tabelas ordenadas os alunos podem olhar simplesmente para os valores da coluna da direita e dizer apenas que é sempre mais 2.

2.3. A simbologia na aprendizagem da Álgebra

Ao longo dos diferentes ciclos de ensino os alunos vão alargando os seus conhecimentos de Álgebra e recorrendo a um simbolismo algébrico cada vez mais sofisticado. Contudo, Hiebert e Carpenter (1992) consideram que os alunos que usam métodos e representações formais devem ser envolvidos em experiências de aprendizagem planeadas para relacionar as suas conceções de Álgebra anteriores com o ensino mais formal. Segundo estes autores, o foco em múltiplas representações assegura que a introdução dos símbolos e das regras para resolver equações faz sentido. Deste modo os alunos que não têm oportunidade de explorar outras representações, para além das simbólicas, podem desenvolver uma compreensão incompleta. Para estes autores a aprendizagem de qualquer procedimento matemático deve estar relacionado com o conhecimento conceptual para levar a uma compreensão mais profunda e completa. Numa perspetiva semelhante, Ponte e Quaresma (2014) consideram que um raciocínio formal com compreensão deve basear-se num raciocínio informal, apoiado em representações intuitivas.

No 3.º ciclo, o estudo da Álgebra reveste-se de um forte simbolismo e são várias as dificuldades dos alunos quando se deparam com esta escrita simbólica pelo facto de as letras assumirem diferentes papéis em situações distintas. Esta diversidade de formas de utilização de letras causa frequentemente confusão aos alunos e dificuldade aos professores em tornar clara a distinção entre cada uma das situações. Mason, Graham e Johnston-Wilder (2005) destacam que uma das grandes dificuldades na aprendizagem inicial da Álgebra (*early algebra*) reside na distinção entre o uso da letra como unidade de medida e como variável. Apresentam, como exemplo, o uso de 3*m* para designar 3 metros e a expressão 3*m* para o triplo de um determinado número. Também Usiskin (1988) identifica cinco equações que têm em comum a estrutura (o produto de dois números igual a um terceiro) mas que são utilizadas em situações distintas.

(1) $A = LW$ (fórmula)

(2) $40 = 5x$ (equação)

(3) $\sin x = \cos x \tan x$ (identidade)

(4) $1 = n\dfrac{1}{n}$ (propriedade)

(5) $y = kx$ (expressão analítica de uma função)

As diferentes designações dadas às igualdades anteriores refletem as diferentes facetas que uma variável pode assumir. Por exemplo, em (1) *A*, *L* e *W* representam quantidades: área, comprimento e altura; em (2) pensamos em *x* como um número desconhecido; em (3) *x* é o argumento de uma função; em (4) temos a generalização de um padrão da aritmética, onde *n* identifica um termo do padrão; em (5) *x* é o argumento de uma função, sendo *k* uma constante ou parâmetro. O termo variável surge apenas nesta última situação. No entanto, Usiskin (1988) afirma que pode haver discórdia nestas situações e que os símbolos, eventualmente, podem ser encarados de outra forma. Portanto, o simbolismo assume várias facetas, de acordo com o contexto em que é utilizado.

Schoenfeld e Arcavi (1988) argumentam que "o significado matemático de uma condição é determinado pelo seu contexto" (p. 424) e o que "o significado do termo variável é variável" (p. 425). Chazan e Yerushalmy (2003) apresentam vários exemplos das diferenças que podem existir entre expressões, equações, desigualdades e relações, que podem provocar confusões, hesitações e levar os alunos a cometer erros: (i) na resolução da equação $9x^2 + 6x + 3 = 0$ podemos dividir os coeficientes por 3, no entanto, não podemos dividir os coeficientes da $f(x) = 9x^2 + 6x + 3$ por 3. Isto pode levantar dúvidas aos alunos acerca das diferenças entre a equivalência nas equações e a equivalência nas funções; (ii) se algumas equações com duas variáveis são funções, como $5x + y = 6$ é uma função implícita por que é que $x^2 + y^2 = 1$ não é função? (iii) podemos escrever $4(x+2) = 4x + 8$ como uma equação para resolver e é diferente de simplificar a expressão $4(x+2)$ e escrever $4(x+2)=4x+8$. Os alunos podem sentir dificuldade em distinguir estas duas situações em que o sinal de igual assume significados diferentes; (iv) se $2x+3y=7$ é uma relação entre duas variáveis, ao isolar *y*, obtemos $y=\frac{7-2x}{3}$ que representa uma função de uma variável. Será que $2x+3y=7$ representa de antemão uma função? Se assim for, podemos escrever $2x+3f(x)=7$? Quando é que se pode usar a notação de função? (v) quais são as diferenças e semelhanças da solução do sistema $x^2+y^2=1$ e $2x+y=3$ da solução de $y=3-2x$? Como é a solução para o sistema é diferente da solução para $x^2+(3-2x)^2=1$?

Estas situações raramente são discutidas na sala de aula, o que levanta bastantes dúvidas e hesitações aos alunos, quando se deparam com elas. Deste modo, os alunos necessitam de ser encorajados a colocar este tipo de questões e a discuti-las em sala de aula.

Arcavi (2006) salienta que em sala de aula é importante a procura dos significados dos símbolos, em paralelo com a resolução de problemas. O autor recomenda que, antes de proceder à aplicação de regras, deve-se cultivar a paciência para a aprendizagem geral e, mais especificamente, para aceitar compreensões parciais e cultivar o sentido do propósito do uso de símbolos e o poder do seu uso numa variedade de situações.

2.4. A compreensão dos conceitos algébricos

Atualmente existem vários recursos que facilitam a aprendizagem da Álgebra, nomeadamente balanças e outros objetos. Apesar da sua utilidade estes materiais, por si só, não fornecem a compreensão do significado dos conceitos algébricos. Foster (2007) refere que o conhecimento físico é o conhecimento dos objetos observáveis na realidade (externa) enquanto o conhecimento matemático é construído através das relações que ocorrem, a nível interno, no cérebro. Este investigador acrescenta que os alunos precisam de lidar com os conceitos algébricos para desenvolver a sua compreensão acerca destes conceitos, pois se são apresentados como ideias abstratas, sem significado, não serão compreendidos. Deste modo, ao longo do 3.º ciclo, os alunos devem desenvolver a compreensão dos vários conceitos algébricos abordados.

O conceito de variável é muito importante em Álgebra. Muitas vezes, o primeiro contacto com este objeto algébrico surge no trabalho com equações, onde a variável surge no papel de incógnita. Na equação $3x+4=19$ existe apenas um valor de x que torna a igualdade verdadeira, 5. Embora em situações como esta, x é frequentemente designado por variável da equação mesmo sem o seu valor variar. "É importante que os alunos perceberem a noção de variável como algo que varia" (Foster, 2007, p. 165).

O conceito de variável deve ser trabalhado ao longo dos diferentes ciclos de ensino. Diofanto (250 A.C.) introduziu abreviaturas para representar incógnitas, por exemplo, nas expressões algébricas e nas equações. Estas abreviaturas foram evoluindo até às atuais notações. O termo variável é atualmente um conceito multifacetado e as dificuldades com este conceito arrastam-se, por vezes, até ao ensino superior, como concluíram Trigueros e Ursini (2003) num estudo realizado com alunos do 1.º ano de vários cursos de uma universidade mexicana.

Küchemann (1981) a partir de um estudo realizado em Inglaterra, de 1974 a 1979, com alunos entre os 13 e os 15 anos, identificou seis significados diferentes atribuídos às letras: 1. L*etra avaliada*, numa expressão como por exemplo $3x+2$ o aluno pode substituir x por qualquer valor, sendo a resposta determinada pelo valor selecionado; 2. *Letra ignorada*, as letras não são consideradas, não lhes é atribuído qualquer significado. Por exemplo numa situação como "$a + b = 3, a + b + 4 = ?$". Nestes casos os alunos não têm em consideração as letras e podem cometer erros do tipo $2x+3y=5xy$; 3. *Letra como objeto*, as letras são vistas como objetos concretos, passando o seu significado para algo mais concreto. Frequentemente são usadas como etiquetas, por exemplo, os alunos podem considerar a expressão $2c+3d$ como a soma de duas cerejas com três damascos, quando a sua tradução deve ser efetivamente "duas vezes o número de cerejas mais três vezes o número de damascos"; 4. *Letra como incógnita*, a letra representa um número desconhecido, por exemplo x numa equação do tipo $2x+1=5$; 5. *Letra como número generalizado*, a letra pode ser substituída por mais do que um número, por exemplo em situações do tipo "se $c+d=10$ e se $c<d$,

o que podes dizer de *c*?"; 6. *Letra como variável*, a letra é representante de um conjunto de números e normalmente surge em relações entre dois ou mais conjuntos, por exemplo $y = 2x$ – a variável *y* pode remeter para uma quantidade infinita de valores, dependendo do valor de *x*. Os três primeiros casos revelam um fraco entendimento do conceito de variável, enquanto os restantes demonstram já alguma compreensão e são essenciais para todo o trabalho desenvolvido no âmbito da Matemática. O autor agrupou estas interpretações em quatro níveis de compreensão: *Nível 1*, os alunos compreendem e interpretam variáveis usando a letra avaliada, a letra ignorada ou a letra como um objeto; *Nível 2*, os alunos conseguem resolver alguns problemas mais complexos, embora sem conseguirem lidar, de forma consistente, com incógnitas, números generalizados ou variáveis; *Nível 3*, os alunos conseguem resolver a maior parte das questões que envolvem a variável no papel de incógnita; e *Nível 4*, os alunos são capazes de interpretar e lidar adequadamente com variáveis, em diversos contextos.

É igualmente indispensável que os alunos desenvolvam a compreensão do significado de equação. Frequentemente, os alunos começam por encarar as equações como a descrição de um processo aritmético, isto é, como uma operação e não as compreendem. Os alunos que entendem o sinal de igual como uma implicação de um cálculo até podem ser capazes de compreender o significado de equações como $2x+3=11$ mas têm dificuldades em equações onde a variável surge nos dois membros, como por exemplo, $2x+3=x+4$ (Kieran, 1981).

Pelo seu lado, o conceito de função pode ser compreendido como uma relação entre duas variáveis. Os alunos podem começar a entendê-lo a partir de situações concretas do dia-a-dia. Por exemplo, a altura de uma criança varia com a sua idade e a distância percorrida por um atleta varia com a velocidade, são exemplos que fazem sentido para os alunos e que os ajudam a compreender o conceito de função. Outros exemplos como refere Foster (2007) podem ser: a altura máxima que uma bola atinge varia com a força de impulso; a pressão atmosférica varia com a altitude, etc. É fundamental que estas relações façam sentido para os alunos pois estes "beneficiam ao desenvolverem conexões entre experiências concretas e conceitos abstratos importantes para a Álgebra" (Foster, 2007, p. 165).

2.5. A aprendizagem de métodos formais algébricos

No final do 9.º ano os alunos deverão fazer algumas escolhas que podem ser decisivas em termos de progressão de estudos e carreira profissional. Neste último ano do ensino básico, vários tópicos de Álgebra são abordados com alguma profundidade, numa perspetiva funcional uma vez que os alunos já os abordaram em anos anteriores, como é o caso do estudo da proporcionalidade direta e da função afim.

Ao intensificar-se o estudo na Álgebra, a transversalidade dos conhecimentos a outros temas torna-se cada vez mais evidente. A utilização de equações do 1.º e do 2.º grau é bastante frequente para resolver uma variedade de situações nos mais variados temas do currículo. Os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* afirmam ser importante que os alunos desenvolvam

> a compreensão sobre as propriedades algébricas que regem a manipulação dos símbolos nas expressões, nas equações e nas inequações. Os alunos deverão tornar-se hábeis na execução dessas manipulações, recorrendo aos meios apropriados – mentalmente, com papel e lápis ou com tecnologia (NCTM, 2000, p. 353).

Referem igualmente que

> Estas ferramentas matemáticas podem ajudá-los a desenvolver uma compreensão mais profunda sobre fenómenos do mundo real. Simultaneamente, o trabalho em contextos reais poderá auxiliar os alunos a dar sentido aos conceitos matemáticos subjacentes e fomentar a sua valorização” (NCTM, 2000, p. 353).

Portanto, a aprendizagem de métodos formais algébricos constitui um marco fundamental para o progresso na aprendizagem da Matemática.

Também em Portugal, o *Currículo Nacional do Ensino Básico* (ME-DEB, 2001) apela à prática compreensiva de procedimentos, salientando que o domínio de algoritmos, a utilização de fórmulas, a resolução de equações, entre outros devem ser adquiridos com prática desde que não seja descurada a sua compreensão e a sua integração em experiências matemáticas significativas.

Os métodos formais são eficazes para resolver variados problemas, levando os alunos rapidamente à solução e libertando-os de procurar estratégias alternativas. No entanto, a passagem do informal ao formal não é fácil para a maioria dos alunos. O pouco tempo despendido na fase informal e a rápida esquematização é responsável por estas dificuldades. Na maior parte das vezes, as estratégias são rapidamente automatizadas e uma vez adquiridos os procedimentos algébricos e tornados rotineiros, há uma grande tendência para os alunos cometerem erros que não são capazes de identificar e/ou corrigir (Wagner, 1983). Acresce ainda que os alunos que habitualmente apresentam uma elevada performance na aplicação de procedimentos formais revelam frequentemente uma compreensão limitada do seu significado e não sabem lidar com situações problemáticas diferentes das habituais. Estes alunos revelam uma fraca flexibilidade matemática para adaptar procedimentos da resolução de problemas a situações novas, a menos que sejam capazes de relacioná-las com procedimentos informais (Küchemann, 1981). Estes aspetos vêm reforçar que a aprendizagem da Álgebra provoca muitas tensões entre uma abordagem informal e a formal, uma vez que o desenvolvimento de procedimentos formais acarreta muitos riscos, apesar de ser uma ferramenta bastante útil, pela sua eficiência.

As dificuldades que surgem com a aplicação dos métodos formais podem estar relacionadas com o ritmo a que os tópicos são estudados, bem como à abordagem predominantemente formal com que são apresentados (Herscovics & Lincheviski, 1994). Para facilitar a aprendizagem é importante envolver os alunos em experiências informais antes da manipulação algébrica formal, nomeadamente através da resolução de problemas.

De acordo com Freudenthal (1983) ser competente na Álgebra escolar e em particular na aplicação de métodos formais implica, entre outras coisas, adiar o dar sentido e significado, a favor de uma rápida aplicação de um procedimento, mas por outro lado, quando necessário, parar e proceder à interpretação dessa rotina automática com o objetivo de se questionar, refletir, conectar ideias, tirar conclusões e construir novos significados para descobrir a sua origem e o seu propósito (p. 469). Por seu lado, Skemp (1976) considera que se torna mais fácil os alunos obterem uma compreensão instrumental do que uma compreensão relacional na medida em que a compreensão instrumental requer menos conhecimento e permite obter uma resposta correta mais rapidamente. Contudo, este tipo de compreensão requer memorização e sem a compreensão relacional a aprendizagem não pode ser adaptada a novas tarefas e os alunos não conseguem fundamentar as suas respostas. Deste modo, é fundamental dar especial atenção ao modo como os novos conceitos ou procedimentos são introduzidos de modo a reduzir a possibilidade da aprendizagem se restringir à memorização de regras. Sempre que possível devem ser proporcionadas experiências que promovam a compreensão do significado dos processos utilizados.

O estudo dos métodos formais abarca o trabalho com várias representações como a algébrica e a gráfica. Este trabalho com múltiplas representações matemáticas continua a ser um objetivo na aprendizagem da matemática (NCTM, 2000) e destaca-se pela sua grande utilidade na resolução de problemas (Kaput 1992; Yerushalmy, 2006).

No Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), no estudo do tópico sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas está previsto o ensino do método de substituição e de resolução gráfica, podendo ainda ser trabalhado o método da adição ordenada. O *método de substituição* assenta no uso da linguagem algébrica, estando a ideia de substituição sempre presente. Filloy, Rojano & Solares (2004) mostram que certos alunos têm dificuldades em resolver problemas com duas incógnitas e manifestam dificuldades na aplicação da "transitividade do sinal de igual" quando se depararam com duas equações do tipo: $4x-3=y$ e $6x+7=y$. Raramente reconhecem a transitividade para obter, por exemplo, $4x-3=6x+7$. Uma explicação para esta dificuldade pode residir no facto de os alunos considerarem os y's como sendo diferentes. No *método gráfico* predomina a representação gráfica, podendo também estar envolvidas a representação tabelar e/ou algébrica. O *método da adição ordenada* apoia-se numa linguagem predominantemente algébrica, envolvendo ainda a ideia de substituição.

No estudo do tópico "Proporcionalidade inversa" o método formal associado é o uso da expressão algébrica que define a relação entre as duas grandezas. No entanto, o raciocínio proporcional não é fácil de entender para a maioria dos alunos. Cordel e Mason (2000) são da opinião que o raciocínio que envolve relações proporcionais é um processo complexo que se desenvolve por um período de tempo prolongado e que são necessárias várias experiências físicas para desenvolver uma compreensão do que é uma relação proporcional e depois mais tempo para lidar com essa relação de forma abstrata.

Na resolução de equações do 2.º grau completas os alunos devem aprender a utilizar a fórmula resolvente. Contudo, previamente aprendem a noção de raiz quadrada para resolver equações do tipo $ax^2 = b$, técnicas de factorização e a lei do anulamento do produto para equações incompletas. Lima e Tall (2010) relatam que no estudo das equações do 2.º grau, os professores ensinam métodos de factorização, mas rapidamente passam para o uso da fórmula resolvente, convictos de que a sua utilização permite aos alunos resolver qualquer equação do 2.º grau que possa surgir num teste.

2.6. O papel da folha de cálculo no desenvolvimento do pensamento algébrico

2.6.1. A folha de cálculo como recurso pedagógico

A folha de cálculo é um recurso amplamente conhecido que, tendo sido concebido para as áreas financeiras, tem sido muito utilizado no ensino da Matemática. De facto, quer o *Currículo Nacional do Ensino Básico* (ME-DEB, 2001) como o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), apelam à sua utilização, em particular, no estudo da Álgebra. Esta ferramenta tem-se revelado um recurso pedagógico com grande potencial para a construção de conceitos algébricos, nomeadamente, para o estabelecimento de relações funcionais, representação de sequências ou de procedimentos de natureza recursiva usados na resolução de problemas de Matemática. O vocabulário utilizado neste ambiente é distante daquele que é habitual em Matemática – "o utilizador tem de ser ele próprio a criar uma linguagem, pois não existe uma tradução oficial para o ajudar" (Haspekian, 2003, p. 123). Quando esta função é colocada ao professor de Matemática, ele tem de procurar construir este vocabulário com os seus alunos: o que representa uma célula, uma coluna, uma fórmula, o que significa arrastar para baixo a alça de uma célula com uma fórmula, o feedback numérico devolvido pelo computador, etc.

A folha de cálculo pode conter várias folhas e a aparência de cada uma delas é o de uma grelha composta por retângulos, como mostra a figura 2.6. Cada um destes retângulos é designado por "célula". Cada uma das células pode ser designada pelo respetivo endereço, ou seja, pelas suas coordenadas, habitualmente a referência da coluna seguida da linha.

Uma célula pode conter texto, um número, uma ou mais operações com números ou uma fórmula. Em todos os casos, à exceção do texto, a aparência da célula é a de número. Para verificação da natureza desse número (se é efetivamente apenas um número, se é o resultado de um cálculo ou de uma fórmula) basta ativar a respetiva célula e observar a barra de fórmulas ou utilizar a tecla F-2. Na opção "mostrar fórmulas" obtemos na folha de cálculo, em todas as células, as fórmulas inseridas (Figura 2.6). Na folha de cálculo o utilizador pode escrever fórmulas de acordo com os cálculos que pretende efetuar ou pode recorrer às predefinidas. Ao arrastar a alça de uma célula podemos obter o mesmo valor introduzido ou uma sequência numérica como ilustra a figura 2.7. Na folha de cálculo o arrastamento da alça de uma célula com um determinado *input* produz um conjunto de células com o mesmo *input*. Em simultâneo, à simulação do arrastamento podemos observar o *feedback* da folha de cálculo, ou seja, os valores que vamos obter depois de concluirmos esse procedimento.

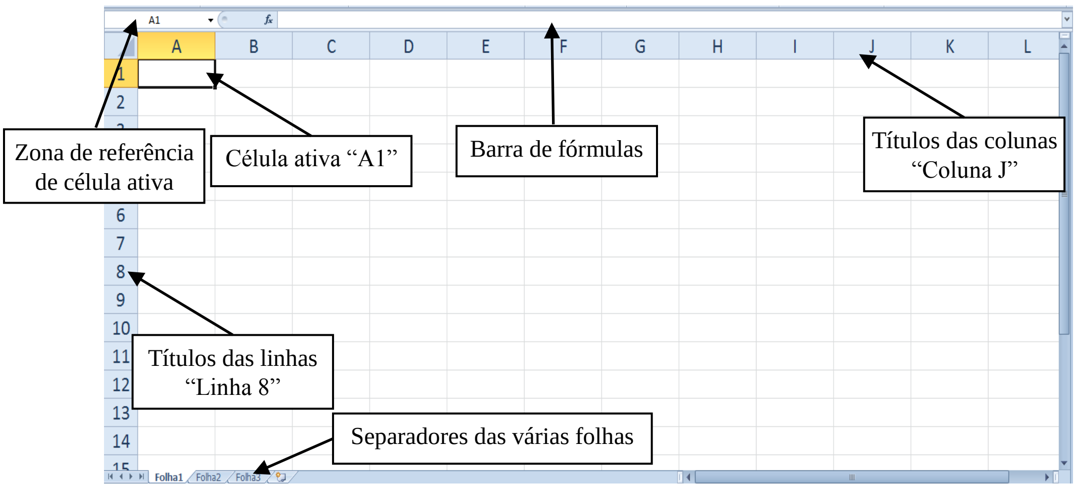


Figura 2.6: Apresentação da folha de cálculo.

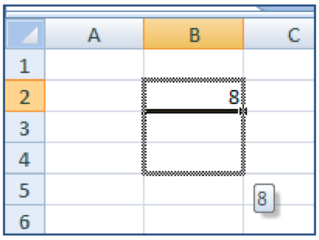


Figura 2.7: Arrastamento da alça de uma célula que contém um número.

Se selecionarmos mais do que um valor a folha de cálculo gera uma sequência numérica, como se pode observar na figura 2.8.

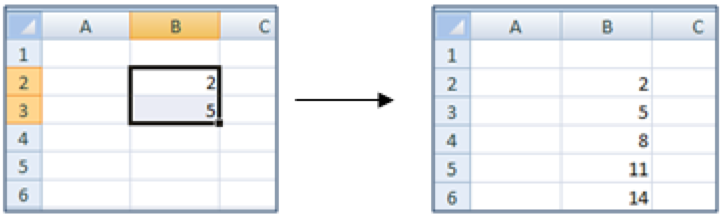


Figura 2.8: Sequência numérica obtida por arrastamento da alça de um conjunto de células com inputs numéricos.

Na folha de cálculo, quando a alça de uma célula que contém uma fórmula é arrastada, essa fórmula é copiada para as células seguintes. Um exemplo, do recurso a essa potencialidade, pode ser observado na figura 2.9 na situação de resolução de um problema.

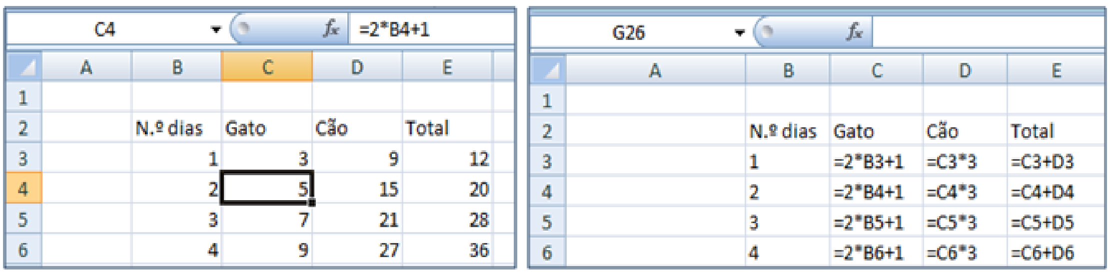


Figura 2.9: Exemplo da utilização de fórmulas na folha de cálculo.

Na coluna C o *output* é o resultado da soma do dobro do *input* (n.º de dias) com uma unidade. A folha de cálculo tem a potencialidade de, em breves instantes, efetuar numerosos cálculos. Assim, podemos alterar os valores dos *inputs* e instantaneamente obtemos os *outputs*. As fórmulas pré-definidas na folha de cálculo encontram-se separadas por categorias como: Lógica, Matemática e Trigonometria, Estatística e Trigonometria. Na figura 2.10 mostro um exemplo do recurso a uma função pré-definida, a função Resto. Os *outputs* desta fórmula correspondem aos restos da divisão dos *inputs* na coluna B por 7. No recurso a este tipo de fórmulas, a folha de cálculo dispõe de janelas que auxiliam o utilizador na introdução dos dados que pretende.

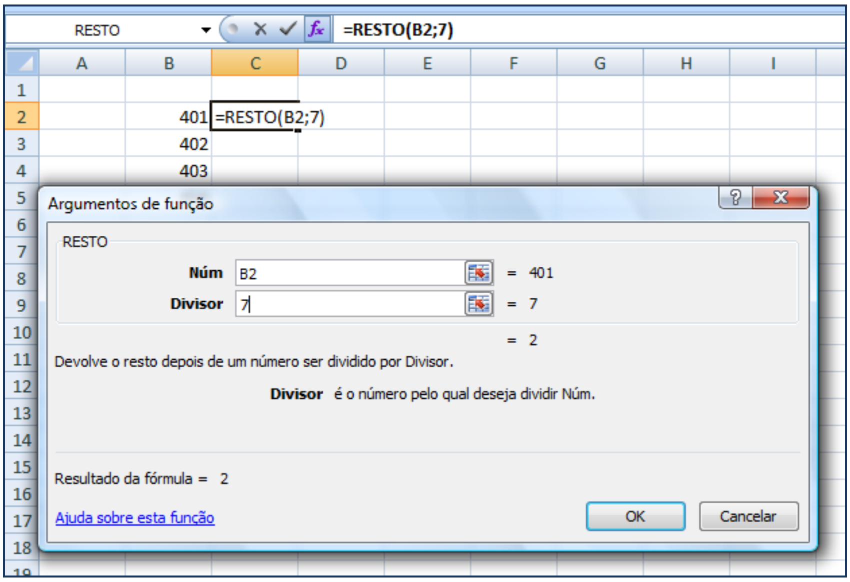


Figura 2.10: Exemplo do recurso a uma função pré-definida (Função Resto).

A construção de tabelas de dupla entrada também é uma das funcionalidades da folha de cálculo. Rapidamente se podem construir tabelas de dupla entrada tendo em conta uma determinada relação entre as linhas e as colunas. Na construção de uma tabela de dupla entrada através de uma fórmula é necessário acrescentar o símbolo “$” antes da referência da primeira célula que surge na fórmula e o mesmo símbolo entre o endereço da coluna e da linha da segunda célula que surge na fórmula. O símbolo “$” fixa os valores sombreados a amarelo. Matematicamente, a construção de uma tabela de dupla entrada, como a da figura 2.11 pode ser bastante útil na resolução de problemas que envolvam funções com duas variáveis.

C3 fx =2*$B3+3*C$2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2			1	2	3	4	5	6
3		1	5	8	11	14	17	20
4		2	7	10	13	16	19	22
5		3	9	12	15	18	21	24
6		4	11	14	17	20	23	26
7		5	13	16	19	22	25	28
8		6	15	18	21	24	27	30

Figura 2.11: Tabela de dupla entrada.

A folha de cálculo tem o potencial de gerar rapidamente grandes conjuntos numéricos (Tabach, Hershkowitz & Arcavi, 2008), que pode levar os alunos a compreenderem a necessidade de generalizar e, inclusivamente, de apreciar o poder do simbolismo (Tabach & Friedlander, 2004). Por outro lado, neste ambiente, os alunos podem ser desafiados a resolver extensões de alguns problemas e investigar o que acontece quando se fazem certas variações.

2.6.2. O uso da folha de cálculo e o desenvolvimento do pensamento algébrico

No projeto AnA (Sutherland, 1993) foram estudados dois grupos de alunos, de 10-11 e de 14-15 anos na resolução de tarefas com a folha de cálculo, ao longo de um ano. Os resultados mostram que, no trabalho com a folha de cálculo, os alunos aprendem a entender um símbolo como a representação de um número geral, confirmando os resultados de estudos anteriores. A interação dos alunos com o computador em atividades algébricas apoiou o desenvolvimento do pensamento em termos específicos para um pensamento em termos gerais de objetos.

O projeto *Purposeful Algebraic Activity* (Ainley, Bills & Wilson, 2005), realizado entre 2001 e 2004, teve como principais finalidades explorar o potencial da folha de cálculo como uma ferramenta na introdução da Álgebra e do pensamento algébrico, estabelecendo conexões entre o ensino aprendizagem da Aritmética e o desenvolvimento do ensino da Álgebra, tentando, em particular, perceber como é que os alunos constroem o significado para as incógnitas, variáveis algébricas e respetiva notação. Este trabalho implicou o seguimento de alunos entre 11 e 13 anos e foram envolvidos professores de diferentes ciclos de ensino na conceção das tarefas e no acompanhamento da sua aplicação. Foi utilizada uma variedade de métodos de recolha de dados que foram utilizados para descrever o desenvolvimento dos alunos: observação de aulas de Álgebra, entrevistas com grupos de alunos, grupos de discussão e entrevistas individuais com professores e análise dos trabalhos dos alunos. No âmbito deste projeto foi concebida uma sequência de tarefas tendo em conta as atividades algébrica sugeridas por Kieran (2004), e procurando corrigir o desequilíbrio entre estes três tipos de atividade. Durante o primeiro ano do projeto, foi desenvolvido um programa com seis tarefas na folha de cálculo, diversificadas no que respeita à atividade algébrica. Uma das conclusões deste estudo é que o uso da folha de cálculo tem um efeito imediato na produção de algum tipo de resultado. Duas das tarefas (atividades de transformação) foram concebidas de modo a que os alunos não utilizassem exclusivamente o computador e usassem a notação algébrica para explicar os seus resultados. Uma característica importante no trabalho com a folha de cálculo é que os alunos tendem a utilizar a Álgebra com base em células de referência, para expressar o seu raciocínio durante as atividades, formando uma ponte entre a linguagem natural e a notação algébrica. Os alunos tiveram oportunidade de apreciar as ideias algébricas, como a linguagem simbólica e as potencialidades (*affordances*) da folha de cálculo que são cuidadosamente combinadas com essas ideias algébricas, à medida que vão sendo introduzidas. As conclusões indicam que as perceções que os alunos têm acerca de uma tarefa afetam o modo como a folha de cálculo é utilizada e evidenciam a forma como esse ambiente digital se vai tornando transparente para os alunos (Ainley, Bills & Wilson, 2005). Foi dada a oportunidade aos alunos para se movimentarem entre a Aritmética e estruturas algébricas, utilizando a linguagem natural e notações informais, a notação da folha de cálculo e a notação algébrica formal. A sequência de tarefas propostas pretendia combinar estes elementos com diferentes focos em atividades algébricas progressivamente mais complexas. Atendendo a que foram vários professores a aplicar a mesma tarefa, os investigadores observaram a existência de algumas diferenças, ainda que subtis, na ênfase dada a determinado aspetos e na forma como as tarefas são entendidas pelos seus alunos (Ainley, Bills, & Wilson, 2004).

Num outro projeto, Neves, Monteiro, Rocha, Silva e Ponte (2006) desenvolveram uma experiência com alunos do 3.º ciclo, em duas turmas, onde propuseram a realização de tarefas envolvendo a exploração de conceitos algébricos com a utilização da folha de cálculo. Os autores observaram que os alunos sentiam maior necessidade de explicar o raciocínio seguido quando utilizavam a folha de cálculo. Deste estudo, foram apresentadas algumas potencialidades educacionais do uso da folha e de cálculo e da tecnologia, em geral: (i) Libertar o aluno dos cálculos numéricos e das manipulações algébricas repetitivas, permitindo maior concentração no desenvolvimento conceptual; (ii) Possibilitar a expansão dos domínios conceptuais da Álgebra que podem ser adquiridos em cada nível; (iii) Criar uma interface natural entre o mundo dos números e o da Álgebra; (iv) Possibilitar representações gráficas reais; e (v) Proporcionar ambientes de trabalho em que a utilização da Álgebra surja como um procedimento normal, e não como uma exigência arbitrária na resolução de problemas significativos (p. 331).

Usiskin (2004) afirma que muitas pessoas que diariamente utilizam uma folha de cálculo estão a utilizar a Álgebra embora sem se aperceberem por não fazerem a ligação com a Álgebra escolar. Trabalhar na folha de cálculo é usar a Álgebra, com as variáveis $A1, A2, A3, \dots, B1, B2, B3,$ …. Por exemplo, ao escrever "$= A1 + B1$" na célula $C1$, a folha de cálculo dá-nos o resultado e de cada vez que copiamos uma fórmula para outra célula estamos a criar uma função. A folha de cálculo permite a construção de gráficos e com o gráfico ou por aproximação sucessiva podemos resolver muitas equações.

Na folha de cálculo, a célula representa um número geral, alguns alunos pensam no código de referência da célula e outros pensam no número que aparece na célula. Isto sugere que os alunos pensam nos objetos que manipulam diretamente. Os alunos, ao escreverem fórmulas que relacionem algumas células entre si podem ver os resultados numéricos no computador. Este *feedback* é importante para a sua atividade, pois pode ser suficiente para os incentivar a uma reconstrução das fórmulas utilizadas, o que soluciona o problema encontrado e não apenas para um caso em particular. Este é um aspeto que reforça o facto de a folha de cálculo ser um impulsionador da generalização em Matemática. A visualização do *output* da folha de cálculo suscita uma nova reflexão acerca do problema em causa e, em particular, da fórmula introduzida. Tal facto estimula a evolução do pensamento matemático, permitindo aos alunos realizar trabalho de investigação (Calder, 2009).

Vários autores reconhecem a folha de cálculo como uma ferramenta bastante útil na resolução de problemas e, em particular, no desenvolvimento do pensamento algébrico (e.g., Ainley, Bills & Wilson, 2004; Dettori et al., 2001; Rojano, 2002). A representação simbólica na folha de cálculo das relações presentes num problema é iniciada através da nomeação de colunas e da escrita de fórmulas. Este recurso proporciona um ambiente de trabalho estimulante que favorece uma maior compreensão das relações de dependência entre as variáveis e estimula os alunos a apresentarem gradualmente resoluções algébricas em detrimento de métodos aritméticos (Rojano, 2002). Para além disso, esta ferramenta contribui para que os alunos utilizem a Álgebra com base nas referências das células para expressar o seu raciocínio durante a realização das atividades, criando uma ponte entre a linguagem natural e a notação algébrica (Ainley et al., 2004).

Um procedimento usual na folha de cálculo é a nomeação de colunas que permite identificar as variáveis presentes nos problemas. A nomeação de colunas permite identificar um conjunto de números com um único nome, dando uma ideia da noção de variável. Deste modo fornece um importante suporte para a atividade com papel e lápis, sendo uma ação que leva os alunos a refletir, permitindo-lhes compreender o significado matemático de variável (Wilson, 2007).

A folha de cálculo, na medida em que é híbrida e coabita num mundo de alternância/transição entre a Aritmética e a Álgebra (Haspehkian, 2005), é uma boa ferramenta de mediação semiótica. Constitui, assim, uma opção didática para ajudar os alunos na transição da Aritmética para a Álgebra (Kieran, 1996; Rojano & Sutherland, 1997). Friedlander (1998) afirma que "a folha de cálculo constrói uma ponte ideal entre a aritmética e a álgebra e permite aos alunos a livre circulação entre os dois mundos. Os alunos procuram padrões, constroem expressões algébricas, generalizam conceitos, justificam conjeturas, e estabelecem a equivalência de dois modelos conforme as necessidades intrínsecas e significativas e não como exigências arbitrárias colocadas pelo professor" (p. 383). No entanto, continua por investigar o alcance da contribuição da folha de cálculo para uma compreensão mais ampla dos fundamentos dos métodos formais, em particular de resolução de sistemas de equações.

A interação dos alunos com o computador em atividades algébricas suporta o desenvolvimento do pensamento em termos específicos para um pensamento em termos gerais de objetos. Na folha de cálculo, os alunos ao escreverem fórmulas que relacionem algumas células podem ver os resultados numéricos no computador. Este *feedback* é importante para a atividade matemática dos alunos, pois pode ser suficiente para os incentivar a uma reconstrução das fórmulas utilizadas, o que soluciona o problema encontrado e não apenas para um caso particular. Este aspeto reforça o facto de a folha de cálculo ser um impulsionador da generalização em Matemática. A visualização do *output* da folha de cálculo suscita uma nova reflexão acerca do problema em causa e, em particular, da fórmula introduzida, o que estimula a evolução do pensamento matemático, permitindo aos alunos realizar trabalho de investigação (Calder, 2009). Para Beare (1993) o uso da folha de cálculo apresenta um vasto número de benefícios para a aprendizagem e permite uma variedade de abordagens pedagógicas, tais como, questões abertas, de resolução de problemas, de carácter investigativo, de descoberta, ativas e centradas no aluno. O autor destaca ainda o facto: de ser iterativa; de proporcionar um *feedback* imediato decorrente da alteração de dados ou fórmulas; de permitir que dados, tabelas e gráficos surjam em simultâneo, dando aos alunos um grande controlo e domínio sobre a sua aprendizagem. Uma outra vantagem relevante advém da sua capacidade de efetuar cálculos que permitem resolver problemas complexos e lidar com grandes quantidades de dados sem a necessidade de programação.

A natureza interativa e a diversidade de representações acessíveis através da folha de cálculo, associada com uma intervenção adequada do professor, permite aos alunos, não só explorarem uma grande variedade de problemas, mas também estabelecerem ligações entre diferentes conteúdos e proporciona a modelação matemática de uma forma dinâmica e reflexiva (Borba & Villarreal, 2005; Zbiek, 1998). Este ambiente digital incentiva o processo de experimentação, dando espaço aos alunos para a exploração das relações (Calder, 2002). Esta exploração pode ser estimulada pelo *feedback* recebido levando a um pensamento mais profundo e conhecedor que é fundamental no processo de aprendizagem. Quando este *feedback* constitui uma surpresa ou traz algo de inesperado para o aluno, a sua imaginação é estimulada na procura de uma explicação que dê sentido ao sucedido (Mason, 2005).

De acordo com Kieran e Yerushalmy (2004) as novas tecnologias, em particular a folha de cálculo, dão a oportunidade de explorar e coordenar múltiplas representações de conceitos matemáticos, no próprio ambiente digital e entre esse ambiente e o trabalho com papel e lápis. Partilho estas ideias e acredito que o recurso à folha de cálculo com tarefas adequadas pode facilitar a aprendizagem da Álgebra e em particular dos métodos formais algébricos permitindo ao mesmo tempo o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

CAPÍTULO 3

Representações matemáticas

Neste capítulo começo por abordar o conceito de representação matemática e discutir a sua importância na aprendizagem da Álgebra, em particular, no desenvolvimento do pensamento algébrico. Exponho, por fim, a perspetiva adotada neste estudo e explico a forma como as representações são utilizadas neste trabalho.

3.1. Representações

O termo representação pode ser definido como uma configuração de carateres, imagens ou objetos concretos que podem servir para simbolizar ou representar algo mais: "Uma representação é uma configuração que pode representar outra coisa de alguma maneira" (Goldin, 2002, p. 208). No contexto de aprendizagem em Matemática, Tripathi (2008), define representação como um constructo mental ou físico que descreve aspetos da estrutura inerente do conceito e as inter-relações entre o conceito e outras ideias. Acrescenta que uma representação pode incluir componentes concretos, verbais, numéricos, gráficos, contextuais, pictóricos ou simbólicos que retratam aspetos do conceito. Deste modo, uma representação é a expressão de uma ideia que nos ajuda a interpretar, comunicar e discutir a ideia com outros. A autora apresenta o exemplo da representação de uma reta, que pode ser descrita como um conjunto de pontos colocados lado a lado que se estendem infinitamente em ambas as direções (representação verbal) ou apresentada através de um segmento no quadro (uma representação gráfica ou pictórica dependendo dos detalhes indicados), que se pode obter dispondo os alunos lado a lado de modo a modelar a reta (representação concreta) ou através de uma equação (representação algébrica). Cada uma destas representações realça determinados aspetos da reta em detrimento de outros.

São vários os autores que defendem que as representações são ferramentas poderosas de aprendizagem (por exemplo: Bruner, 1966; Dufour-Janvier, Bednarz & Belanger, 1987; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; NCTM, 2000) e que possibilitam a comunicação matemática. Segundo Kaput (1989) as representações e os sistemas de símbolos são fundamentais para a Matemática como disciplina, uma vez que a Matemática é "inerentemente representacional nas suas intenções e métodos" (p. 169). Bruner (1966) descreve o poder de uma representação, para os alunos, como a capacidade que esta tem de relacionar assuntos que à primeira vista pareceriam desligados. Este poder reveste-se de grande importância na Matemática.

As representações têm vindo a tomar especial relevo no ensino e aprendizagem da Matemática bem como na investigação. De acordo com o NCTM (2000), o modo como as ideias matemáticas são representadas é fundamental para a forma como os alunos as entendem. É importante perceber a natureza das representações matemáticas e a sua utilização no ensino e aprendizagem desta disciplina e, em particular, no tema Álgebra.

Os autores que estudam as representações matemáticas justificam a sua relevância pelo facto de estas permitirem exprimir e compreender a Matemática. Para Kilpatrick, Swafford & Findell (2001) a natureza abstrata da Matemática requer o uso de representações de modo a que os alunos possam aceder e compreender as ideias. Na resolução de tarefas matemáticas é fundamental a capacidade de registo e de organização da informação, a clareza na expressão de ideias e a construção de uma argumentação sólida e coerente. As representações constituem um excelente meio para ajudar a clarificar e exprimir o conhecimento matemático. Em sala de aula, os alunos devem ter oportunidade para trabalhar com diversos tipos de representação de modo a interiorizarem o seu significado e as suas potencialidades. No caso da aprendizagem da Álgebra, é fundamental que os alunos percebam, por exemplo: o significado de uma expressão em determinado contexto; uma ou mais equações que traduzem uma situação problemática; a relação que existe entre uma representação gráfica e a equação correspondente. Os alunos devem, ainda, reconhecer que a equação de uma reta e a respetiva representação gráfica são representações distintas para o mesmo objeto matemático e que o recurso a uma ou outra, não é independente da situação em que estão a trabalhar. Em determinadas situações o recurso à representação gráfica pode ser mais adequado do que a equação e vice-versa. Associada a esta ideia, surge a importância da passagem de uma representação para outra, que ocorre por exemplo, na construção de conceitos matemáticos, na aprendizagem de métodos formais ou para determinar as soluções de problemas.

A literatura apresenta tradicionalmente duas categorias de representações: "internas" e "externas". No primeiro caso, encontram-se as imagens mentais que correspondem às formulações internas construídas pelo indivíduo sobre uma dada realidade. No segundo, trata-se das organizações simbólicas externas (símbolos, figuras, diagramas, gráficos, etc.) que têm por objetivo representar ou codificar uma determinada "realidade matemática" (Dufour-Janvier et al., 1987; Goldin, 2008; Goldin & Kaput, 1996). As representações internas não são diretamente observáveis. Como professores ou investigadores podemos simplesmente inferi-las, pelo comportamento observável dos indivíduos ou através das suas interações com as representações externas (Goldin, 2008; Goldin & Kaput, 1996).

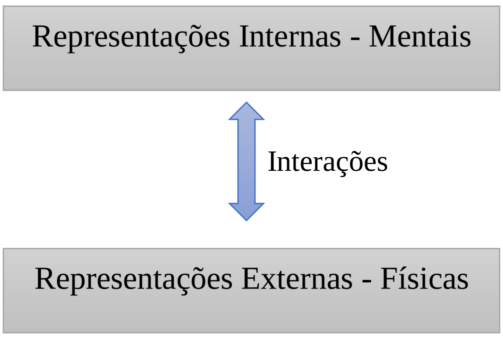


Figura 3.1: Representações internas versus externas (Goldin & Kaput, 1996, p. 399).

Contudo, Goldin & Kaput (1996) consideram importante distinguir entre as representações internas e as externas e apresentam o esquema da figura 3.1 que reforça a ideia de que entre estes dois tipos de representação são estabelecidas permanentemente interações. Estes investigadores recorrem ao termo "representações externas" para se referirem a configurações observáveis, como palavras, gráficos, tabelas, equações ou objetos construídos no computador. Salientam que as representações externas são, normalmente, observáveis por qualquer pessoa, mas a sua interpretação não é única, dependendo das representações internas do indivíduo que as interpreta. A dualidade entre as representações internas e externas é bastante importante para todo o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. É útil considerar que o externo representa o interno e vice-versa. Por exemplo, um conceito matemático aprendido só pode ser aplicado na medida em que uma variedade de representações internas adequadas foram desenvolvidas (Godino & Font, 2010).

Por seu turno Mason (1987), em vez de representação, prefere falar de diferentes "modos de representação" de ideias matemáticas. Na sua perspetiva, a atividade de construir significado ou dar sentido a uma ideia decorre do circuito que se estabelece entre a "manipulação" e a "expressão". Na manipulação está incluída a utilização de objetos físicos, a criação de figuras e diagramas, no papel ou mentalmente, bem como a utilização de símbolos. Por seu turno, a expressão envolve a procura de articulação de uma experiência mental que pode ser confusa, vaga ou mal definida. A expressão implica ser capaz de "dizer" algo e ser capaz de "registar" no papel o sentido do que se diz, através de figuras, diagramas, símbolos ou palavras, isto é, usando diversos modos de representação. Os modos de representação podem ser usados simultaneamente como objetos de manipulação e como meios de expressão.

Tendo presente o papel chave das representações, é importante que, perante uma situação, o aluno tenha capacidade para optar por um certo sistema de representação e tirar dele todas as potencialidades. Para isso, deve ter oportunidade para avaliar a eficácia dos modos de representação e de interiorizar o seu significado. Como afirmam Dufour-Janvier et al. (1987) "As representações são úteis para o aluno, desde que ele as consiga usar eficazmente" (p. 121). Porém, os sistemas de representação podem ser *transparentes* ou *opacos*. Esta distinção, feita por Lesh, Behr e Post (1987), significa que as representações podem estar mais ou menos próximas das ideias que pretendem ilustrar, podem destacar ou desvanecer alguns aspetos dessas ideias. Esta transparência/opacidade dos sistemas representacionais tem vindo a ser aprofundada por Zazkis e Liljedahl (2004) que consideram existir um certo grau de opacidade em qualquer representação.

A escolha de uma representação adequada não é tarefa fácil para a maioria dos alunos. Algumas representações são mais poderosas do que outras e é importante perceber qual a representação que pode ser usada de modo a permitir com maior eficácia a resolução das tarefas propostas, nomeadamente na resolução de problemas (Pape & Tchoshanov, 2001). No entanto, uma representação só pode ser útil na medida em que ela tenha sido apreendida (*grasped*) pelo aluno (Dufour-Janvier et al., 1987).

3.2. Diferentes classificações das representações

Na literatura encontramos uma variedade de classificações ou categorias para as representações matemáticas, propostas por diversos autores e que apresento de seguida. Por exemplo, Bruner (1966) considera que as pessoas desenvolvem representações para interpretar e relembrar as suas experiências no sentido de compreender o mundo. Este autor encontrou três modos distintos das pessoas representarem o mundo: (i) através de ação (representações inativas), (ii) através de imagens visuais (representações icónicas) e (iii) através de palavras e da linguagem (representações simbólicas).

Lesh, Post e Behr (1987) sugerem uma classificação das representações matemáticas como: concretas (manipuláveis), linguagem, simbolismo (notação), semi-concretas (pictóricas) e contextuais (situações do mundo real). Esta classificação ajuda a diferenciar as diferentes formas de abordar conceitos matemáticos e dá algumas indicações das capacidades específicas de cada uma das formas de representação que devemos ajudar os alunos a desenvolver durante a compreensão dos conceitos.

Também Lesh, Landau e Hamilton (1983) apresentam cinco categorias de representações que afirmam ser úteis à compreensão da Matemática: (i) experiências da vida real, (ii) modelos manipuláveis, (iii) imagens ou diagramas, (iv) palavras faladas, e (v) símbolos escritos. As experiências da vida real e os modelos manipuláveis são representações inativas, imagens e diagramas são representações icónicas e palavras faladas e símbolos escritos são representações simbólicas. Estas categorias podem ser consideradas uma expansão das três categorias de Bruner.

Outros investigadores optam por distinguir as representações de outro modo. É o caso de Clark e Paivio (1991) que distinguem as representações verbais das visuais.

Esta distinção também é feita por outros autores, embora como outras designações: linguísticas e não linguísticas (Marzano, 2004; Marzano, Pickering, & Pollock, 2001).

3.3. As representações matemáticas no ensino

Apesar da relevância das representações, estas não devem ser ensinadas como um fim em si mesmo mas como ferramentas de comunicação que auxiliam na resolução de problemas. No trabalho com as representações os alunos devem ter oportunidade para identificar as vantagens e desvantagens das representações na resolução de determinado problema. Este tipo de atividade potencia a sua flexibilidade e destreza na resolução de problemas. Os alunos aprendem frequentemente a construir gráficos e a interpretar tabelas com o objetivo de saber reproduzir este conhecimento nos testes e exames e assim obter boas classificações. No entanto, as representações devem ser utilizadas como ferramentas de trabalho para resolver problemas, comunicar e justificar as opções tomadas (Greeno & Hall, 1997). Abrahamson (2006) também alerta para o facto de os alunos poderem utilizar as representações como procedimentos sem o entendimento do que estão a fazer. Este autor sugere que as discussões em sala de aula podem ajudar os alunos a perceber as ideias matemáticas que estão associadas às sucessivas representações.

Na aprendizagem da Álgebra, o uso de representações mais elementares como representações pictóricas, numéricas e em linguagem natural é particularmente útil na ajuda à resolução de problemas algébricos simples (Koedinger, Alibali, & Nathan, 2008). Esta prática pode revelar-se facilitadora na transição para um pensamento mais abstrato, necessário, por exemplo, para compreender equações (Koedinger & Nathan, 2004).

Clements (1999) refere que o trabalho com vários tipos de representação em simultâneo facilita a aprendizagem, na medida em que os alunos, ao relacionarem representações concretas, pictóricas e simbólicas a tornam a sua aprendizagem mais consistente. Acrescenta ainda a importância de os alunos perceberem qual a representação mais adequada a cada situação.

Na aprendizagem da Álgebra, assim como em outros temas, os conceitos podem ser abordados através de representações informais, pré-formais e formais (Webb, Boswinkel & Dekker, 2008). Na utilização de representações informais os conceitos são abordados de forma concreta e num contexto familiar, na utilização de representações pré-formais surgem aspetos progressivamente mais abstratos e na utilização de representações formais surge o simbolismo próprio da Matemática convencional; no caso da Álgebra envolve, por exemplo, a escrita de equações e a sua resolução.

No estudo dos diferentes temas e tópicos matemáticos é muito comum encontrar alunos que recorrem a representações com um forte cunho visual, tais como esquemas, gráficos e tabelas, para expressar o seu pensamento matemático. Este tipo de representação é útil aos alunos para comunicarem o seu raciocínio acerca de conceitos ou ideias matemáticas (Greeno & Hall, 1997). Também Presmeg (1986) destaca a importância da utilização das representações visuais afirmando que podem apresentar vantagens mnemónicas e podem auxiliar os alunos na prontidão de encontrar uma estratégia para resolver um problema. Larkin e Simon (1987) defendem que o recurso a figuras facilita a organização da informação e ajuda a tornar explícita a informação implícita nos problemas.

Em sala de aula, encontramos uma diversidade de alunos com as mais variadas caraterísticas e habilidades. Para uns, é mais fácil interpretar um enunciado em linguagem natural, para outros a visualização de um diagrama, esquema ou figura pode revelar-se mais útil. No entanto, se o enunciado de um problema inclui os dois tipos de representação um número considerável de alunos tende a não considerar a informação nos diagramas (Diezmann & English, 2001). O uso de diagramas pode ser útil para alunos com grande capacidade de visualização, mas não o é para todos (Pyke, 2003). O uso de diagramas pode ajudar na organização espacial e no agrupamento de aspetos relacionados, permitindo aos alunos reconhecer as partes mais relevantes e fazer inferências acerca da informação representada (Larkin & Simon, 1987). Por outro lado, o recurso a diagramas pode ainda promover o uso de autoexplicações com base nos seus conhecimentos o que é benéfico para a aprendizagem por desenvolver uma compreensão mais profunda do que se está a estudar (Ainsworth & Loizou, 2003).

Diezmann e English (2001) referem que o uso de diagramas apresenta benefícios para a aprendizagem dos alunos, mas defendem que estes devem presenciar momentos que os ajudem a movimentar-se desse tipo de representação para outras mais estruturais e sofisticadas, como a linguagem algébrica, para representar a informação de um problema e resolvê-lo.

Deste modo, é importante que o trabalho em sala de aula não se limite ao uso de representações de forma isolada, mas promova o recurso a múltiplas representações de modo a ajudar os alunos a desenvolver uma melhor compreensão da Matemática (Tripathi, 2008; Goldin, 2002). O uso de uma única representação destaca apenas um aspeto do conceito matemático em causa. Assim Tripathi (2008, p. 438) destaca que "recorrer a uma única representação matemática é abordar um conceito de olhos vendados". Esta autora defende que uma imagem global do conceito começa a emergir apenas quando o objeto é observado de diferentes perspetivas. Assim, o uso de diferentes representações pode ser entendido como uma variedade de lentes que fornecem diferentes perspetivas e que tornam a compreensão de um conceito mais ampla e profunda. Quanto maior for o número de perspetivas, melhor será a perceção do conceito em causa (Tripathi, 2008). De acordo com esta autora, existem evidências de que os alunos compreendem melhor os conceitos através de uma variedade de perspetivas e desenvolvem uma melhor flexibilidade na mudança entre as representações.

De acordo com o NCTM (2000), "uma compreensão dos significados e dos usos das variáveis desenvolve-se gradualmente à medida que os alunos criam e usam expressões simbólicas e as relacionam com representações verbais, tabulares e gráficas" (p. 225). Tripathi (2008) corrobora esta ideia e afirma que as representações dos alunos e a capacidade de transferirem ideias de uma representação para outra são indicadores de compreensão.

O discurso que ocorre na sala de aula, em situações de uso de múltiplas representações, pode enriquecer a cultura da aula e ajudar os alunos a ser participantes ativos no processo de aprendizagem. Tripathi (2008) considera que este envolvimento e entusiasmado dos alunos são reveladores do valor da tarefa para a sua aprendizagem. Em suma, abordar diferentes perspetivas envolvendo múltiplas representações de um conceito parece ser o caminho mais apropriado no ensino da Matemática. Contudo, ensinar Matemática utilizando múltiplas representações e incentivar os alunos a representar as suas ideias matemáticas utilizando diferentes representações é um grande desafio para os professores.

Diversos autores, nomeadamente Arcavi (2003) e Ajose (1999), destacam o papel das representações visuais por as considerarem importantes em todo o processo de aprendizagem da Matemática como componentes essenciais do raciocínio. Segundo Arcavi (2003), a visualização não está relacionada apenas com propósitos ilustrativos, mas é também reconhecida como uma componente-chave na resolução de problemas e até na demonstração. Para Ajose (1999) as representações visuais desempenham três papéis na aprendizagem da Matemática: apoiam e ilustram resultados que são essencialmente simbólicos (por exemplo, o recurso a Diagramas de Venn para ilustrar a reunião e a intersecção de conjuntos), dão a possibilidade de encontrar formas de resolver conflitos entre soluções corretas e intuições incorretas (por exemplo, recorrer a uma reta vertical para testar se uma determinada representação gráfica representa ou não uma função) e são ainda uma forma de ajudar os alunos a recuperarem conhecimentos que podem passar despercebidos em resoluções mais formais. Estes papéis apresentam razões suficientemente fortes para encorajarmos os alunos a usar representações visuais. Deste modo, pode ser útil para os alunos passarem para o caderno um gráfico que observaram no GeoGebra ou numa calculadora gráfica. Pode igualmente ser útil solicitar aos alunos para legendar gráficos e incluir detalhes (como escalas e legendas para as quantidades representadas em cada eixo e as respetivas unidades). Estas atividades podem ser importantes para o estabelecimento de conexões entre aquilo que eles podem observar no computador ou no ecrã da calculadora e na resolução do problema em causa (Tripathi, 2008).

Um diagrama é uma representação visual que apresenta a informação com uma certa disposição (Diezmann & English, 2001). Na resolução de problemas, um diagrama pode representar a sua estrutura e ser um meio que permite ao aluno obter a solução. De certa forma a adequação de um diagrama para obter a solução depende do quão bem o diagrama representa a estrutura do problema. No entanto, os diagramas podem não ser úteis para alguns alunos, pois pode acontecer que estes não consigam ver a estrutura de um problema através de diagramas e/ou não estar familiarizados com este tipo de representação (Booth & Thomas, 2000). Quando os alunos constroem os seus próprios diagramas para a resolução de um problema, a sua atenção pode ser direcionada para os aspetos ainda não resolvidos do problema e aquilo que é desconhecido pode ser gerado através da associação que à partida não existia (Cox, 1999).

Na resolução de um problema, as representações externas produzidas, como a linguagem natural, cálculos, imagens ou diagramas desempenham um papel muito importante na expressão das ideias dos alunos. Neste processo, os diagramas podem ser considerados como parte da estratégia. Tanto Pólya (1945) como Schoenfeld (1985) consideram que as representações visuais, tais como as figuras e diagramas são elementos essenciais no processo de resolução de problemas e aconselham os alunos a usar estas representações nas diversas etapas.

De acordo com Diezmann & English, (2001) e Diezmann (2005) o uso de diagramas é uma ferramenta poderosa do pensamento matemático e da resolução de problemas. Diezmann (2005) destaca três vantagens na utilização de diagramas na resolução de problemas: (i) contribuem para a conceptualização da estrutura do problema que é um passo fundamental para o sucesso na resolução do problema. Esta estrutura é composta pelos elementos que o aluno identifica na situação e as relações que estabelece entre eles e o significado que atribui a essas relações. Assim, o diagrama deve mostrar a estratégia de resolução do aluno. A eficiência do diagrama depende da sua adequação à situação proposta; (ii) atribuem a capacidade de gerar conhecimento. Alguns diagramas podem ser construídos com base noutros problemas resolvidos pelos alunos; e (iii) apoiam o raciocínio visual que é complementar, mas diferente do raciocínio linguístico (Diezmann, 2005). Depois de os alunos desenvolverem uma compreensão das relações que podem estar representadas por diagramas, podem utilizá-los de forma eficiente na resolução de problemas e tornar-se capazes de resolver novos problemas.

As ideias matemáticas, as relações e os princípios podem ser expressos através de múltiplas representações incluindo representações visuais (diagramas, figuras, gráficos…), verbais (linguagem oral e escrita) e simbólicas (números e letras). Cada tipo de representação articula diferentes significados dos conceitos matemáticos (Panasuk, 2010). Panasuk (2010) coloca como explicação para os alunos não demonstrarem compreensão conceptual, o facto de não terem sido expostos a um ensino da Álgebra envolvendo o recurso a múltiplas representações. Considera ainda pouco provável que os alunos desenvolvam uma compreensão conceptual sem terem sido estimulados a olhar de diferentes perspetivas para os aspetos, significados e subtilezas dos conceitos, sem reconhecerem e sem usarem múltiplas representações. A autora acrescenta ainda que cada representação tem as suas vantagens assim como as suas limitações.

Um estudo realizado por Panasuk (2010) mostra que as representações em linguagem natural associadas à resolução de problemas verbais requer que os alunos tenham uma capacidade linguistica desenvolvida de modo a conseguirem interpretar os enunciados, em muitos casos, ambíguos. As representações pictóricas, os diagramas ou outras representações visuais, podem tanto assumir-se como confusas como poderosas, dependendo do à-vontade que os alunos revelam ao lidar com estes tipos de representação.

De um modo geral, os alunos dão a preferência a representações em que utilizam apenas números em detrimento de outras representações em que fazem uso de letras, como incógnitas, no caso da escrita de equações (Kieran, 1992). A necessidade de os alunos recorrerem constantemente a representações em que usam apenas números e operações elementares em vez de recorrerem, por exemplo, a uma equação do 1.º grau, significa que este tipo de representação ainda não foi por eles interiorizado e ainda não está integrado nas suas estruturas mentais ao invés das representações numéricas, as quais já usam como ferramenta de comunicação (Janvier, 1987; Lesh, Post & Behr, 1987). Neste caso, os alunos até podem saber resolver uma equação do 1.º grau aplicando um conjunto de regras, no entanto, quando são confrontados com situações novas preferem recorrer a representações com as quais se sentem mais seguros. Estes alunos podem não ter ainda desenvolvido uma compreensão conceptual de uma equação do 1.º grau com um a incógnita.

A linguagem algébrica proporciona um caminho para expressar princípios, conceitos e ideias de uma forma geral. Panasuk (2010) afirma que "é o único sistema que dá oportunidade de investigar logicamente, justificar, generalizar e provar hipóteses matemáticas" (p. 253). No entanto, este tipo de representação revela-se, por vezes, dificil para a maioria dos alunos. Kieran e Chalouh (1993) afirmam que escrever uma equação algébrica requer um modo de pensar analítico completamente diferente de resolver um problema aritmeticamente.

Panasuk (2010) considera que os professores devem estimular nos alunos o uso de múltiplas representações de forma a que eles as possam integrar nas suas estruturas cognitivas e utilizar como ferramentas de comunicação. Desta forma estão a desenvolver a compreensão conceptual, uma vez que abordam os conceitos envolvidos de diferentes perspetivas estudando diferentes aspetos.

O modelo apresentado na figura 3.2 é adaptado de um outro proposto por Lesh, Post e Behr (1987) tendo por base projetos em que os investigadores participaram. Neste modelo são identificados cinco tipos de sistema de representação distintos que ocorrem na resolução de problemas de Matemática: (1) o conhecimento é alicerçado em torno de situações do quotidiano, são contextos que proporcionam a interpretação e a resolução de outros problemas; (2) o recurso a materiais manipuláveis é importante para dar significado às relações e operações; (3) o recurso a imagens ou diagramas, que à semelhança dos materiais manipuláveis, auxiliam na compreensão; (4) a simbologia utlizada pode ser variada e em diferentes idiomas, e (5) inclui todas as explicações e justificações na atividades dos alunos. Lesh, Post & Behr (1987) dão ênfase não à importância isolada de cada um destes sistemas de representação, mas às traduções entre eles assim como às transformações que ocorrem dentro de cada um deles.

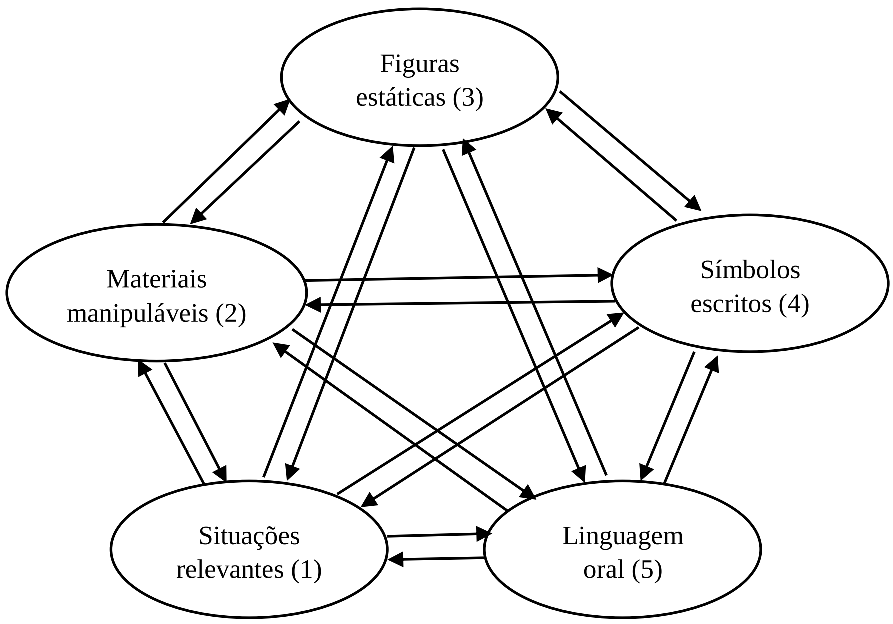


Figura 3.2: Conexões entre representações (adaptado de Lesh, Post & Behr, 1987).

No seu estudo Lesh, Post e Behr (1987) evidenciam que a falta de capacidade para efetuar as traduções para os diferentes sistemas de representação são fatores que influenciam o desempenho na resolução de problemas e a aprendizagem da Matemática, em geral. Estes autores salientam ainda que bons resolvedores de problemas têm uma tendência a ser flexíveis na utilização de uma grande variedade de sistemas representacionais e que instintivamente mudam para representações mais convenientes para enfatizar determinado aspeto em qualquer parte do processo de resolução do problema.

3.4. As representações semióticas

Duval é outro autor que também se debruça sobre as representações matemáticas. Para este investigador, a maior dificuldade no ensino da Matemática é fazer com que os alunos se adaptem ao modo de pensar e de trabalhar próprio da Matemática que é diferente das outras áreas do conhecimento. De acordo com Duval (2014) esta é a condição cognitiva para compreender a Matemática e saber como aplicar os conhecimentos adquiridos a situações do quotidiano. Acrescenta ainda que, em sala de aula, não se deve perder de vista o reconhecimento de um mesmo objeto em diferentes representações e, apresenta a teoria dos registos de representação semiótica como uma forma de analisar o modo de pensar e de trabalhar em Matemática.

Duval (2011) considera que a atividade matemática apresenta duas facetas, uma em que se assume o ponto de vista matemático e outra onde se assume o ponto de vista cognitivo. Para se descrever a forma como se pensa e trabalha em Matemática é necessário considerar que todo o objeto possibilita um leque de representações diferentes e diferentes sistemas podem ser utilizados para produzir as representações desse objeto. Destaca ainda que um objeto não deve ser confundido com as suas possíveis representações.

Um registo de representação semiótica é um sistema semiótico que se carateriza pelas operações cognitivas que permite efetuar. Os registos são sistemas semióticos cognitivamente produtores e é a produção de representações novas que permite descobrir novos objetos (Duval, 2011). Um sistema semiótico deve cumprir duas condições para ser encarado como um registo: (i) produzir representações que permitam ter acesso a objetos inacessíveis (percetivelmente ou instrumentalmente); (ii) abrir um campo de operações específicas que permitam transformar as representações produzidas em novas representações.

Duval (2014) considera que em Matemática, a escolha de um sistema semiótico depende das possibilidades de transformação das representações produzidas noutras representações do mesmo sistema. Para este autor os objetos matemáticos apenas são acessíveis através da sua representação, em registos adequados "A única forma de aceder e lidar com eles é usando sinais (signos) e representações semióticas" (Duval, 2006, p. 17). Para Duval (1993), as representações semióticas são um meio que o indivíduo dispõe para exteriorizar as suas representações mentais. O autor define representações semióticas como "produções constituídas pela utilização de signos pertencentes a um sistema de representações, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e funcionamento" (p. 39). Por sua vez, o signo tem a função de representar o objeto produzindo na mente do intérprete uma ideia que se relaciona com o objeto.

Existem três modelos de análise dos signos que fundamentaram a semiótica, devidos a Pierce, Frege e Saussure (Duval, 2011). Estes modelos são distintos e fundam-se em problemas diferentes. No modelo de Pierce (figura 3.3) o indivíduo interpreta o signo de acordo com as suas vivências, os seus conhecimentos.

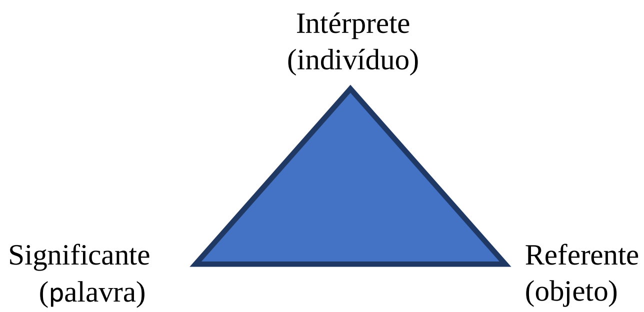


Figura 3.3: Modelo do signo segundo Pierce.

Como indicam Arzarello, Bazzini e Chiappini (2001), muitos alunos apresentam dificuldades na aprendizagem da Álgebra, nomeadamente uma fraca capacidade para compreender o significado de expressões simbólicas, desconhecendo o significado correto das fórmulas e conceitos e atribuindo-lhes outros significados, sendo difícil convencê-los de que a sua interpretação não está correta. É importante que os alunos compreendam o significado dos símbolos e dos conceitos algébricos de forma a poderem utilizá-los nas mais variadas situações. Estes conhecimentos são fundamentais para o alargamento e aprofundamento dos estudos no domínio da Álgebra nos ensinos secundário e superior. Estes autores apresentam uma análise teórica baseada nas ideias de Frege, acerca do significado das expressões simbólicas na Álgebra como uma ferramenta para descrever os processos algébricos.

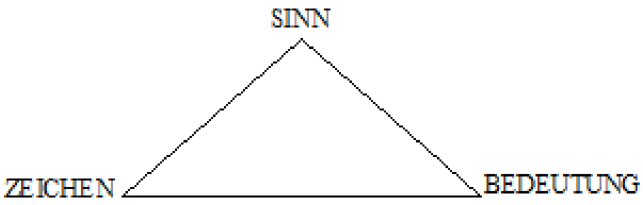


Figura 3.4: O triângulo de Frege.

Frege (1971) apresenta a distinção entre sentido (SINN) e referência, denotação ou significado (BEDEUTUNG) de uma expressão (ZEICHEN) (figura 3.4). A título de exemplo apresenta duas expressões com diferentes sentidos, mas com a mesma denotação, que é o planeta Vénus: *Esperus, the night's star e Phosphorus, the morning's star*. Em Matemática deparamo-nos frequentemente com situações análogas, onde podemos encontrar expressões com a mesma denotação, mas com diferentes significados. Por exemplo, as expressões $3x+3$ e $3(x+1)$ desempenham um papel diferente, no entanto se as considerarmos como expressões analíticas de uma função, denotam a representação da mesma função. Também as equações do 2.º grau $(x+3)^2=2x$ e $x^2+4x+2=0$ representam o mesmo objeto mas têm diferentes sentidos (Arzarello, Bazzini & Chiappini, 2001). Segundo estes autores, a Álgebra elementar, em particular a atividade de resolução de problemas, pode ser encarada como um jogo de interpretação. O enunciado de um problema, em linguagem natural, pode ser alterado para outra linguagem, sendo traduzido por uma equação ou por uma expressão algébrica. A solução para um problema algébrico é uma interpretação e o resultado de algumas transformações do texto de acordo com o que se pretende. Dada uma determinada expressão E, esta pode ter várias interpretações, embora possa ter a mesma denotação. Se pensarmos no triângulo de Frege podemos ter um conjunto de triângulos, deste tipo, com um vértice comum (a expressão). Neste conjunto de triângulos para cada diferente notação existirá um grupo (*cluster*) de triângulos que dizem respeito apenas a sentidos diferentes (figura 3.5).

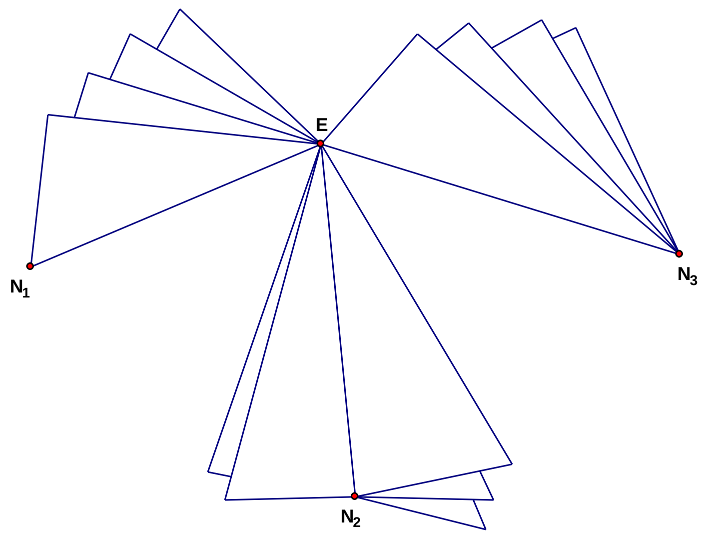


Figura 3.5: *Clusters* de triângulos (Arzarello, Bazzini & Chiappini, 2001).

Arzarello, Bazzini e Chiappini (2001) afirmam que a cadeia de intérpretes que podem ser construídos é bastante útil para a aprendizagem da Álgebra, na medida em que as representações mentais dos estudantes emergem das interpretações que fazem. O professor tem um papel decisivo na compreensão dos conceitos por parte dos alunos, promovendo diferentes formas de interação, nomeadamente a utilização de determinadas ferramentas como *software* específico. A folha de cálculo pode ser apresentada como um exemplo facilitador no estabelecimento de conexões entre a prática na Aritmética e as fórmulas algébricas. Os processos de generalização associados ao Excel surgem como uma Aritmética generalizada, na linha do que é defendido por Kaput (1999), como um entendimento da Álgebra fora do habitual.

O modelo de Saussure (1973) assenta em dois aspetos: (i) os signos não têm realidade material e são os invariantes de ocorrências que mudam sensivelmente; e (ii) os signos são constituídos por suas relações de oposição aos outros, no interior de um sistema. Duval (2011) considera que este modelo é limitado, no sentido de eliminar a diversidade de enunciados que a língua permite produzir, assim como as operações discursivas que essa operação requer. Para Duval (2011), as representações não se devem confundir com os próprios objetos, mas a sua diversidade é necessária para que seja possível aceder ao objeto, uma vez que "elas estão no "lugar dos" objetos ou os "evocam", quando esses não são imediatamente acessíveis" (p. 23).

Relativamente à classificação clássica de diferentes tipos de representação, Duval (2009) propõe a distinção entre representações internas/externas bem como conscientes/não-conscientes. No que respeita ao par consciente/não-consciente, este autor refere a oposição entre aquilo que um sujeito perceciona e aquilo que ele não perceciona nem pode percecionar. A passagem do não-consciente ao consciente corresponde a uma tomada de consciência por parte do indivíduo, à objetivação, ou seja, a descoberta pelo próprio sujeito de algo que não percecionava, mesmo que alguém lhe tivesse explicado. O autor acrescenta ainda que as representações conscientes são aquelas que têm um caráter intencional e que completam uma função de objetivação.

Por outro lado, a oposição internas/externas é aquilo que é diretamente observável e o que, pelo contrário, não o é. Segundo Duval (2009) as representações internas são aquelas que não são comunicadas. As representações externas apenas podem ser produzidas através da operacionalização de um sistema semiótico e estão associadas a um estado de desenvolvimento e de domínio desse sistema semiótico. Estas representações estão acessíveis a todos os indivíduos que conhecem o sistema semiótico utilizado, elas cumprem a função de comunicação e outras duas funções cognitivas: a função de objetivação e a função de tratamento. As representações externas são essenciais ao tratamento e dependem do sistema de representação adotado. A escolha de um sistema de representação para efetuar determinado tratamento é um aspeto fundamental que deve ter em conta as potencialidades e os propósitos do aluno. Por exemplo, efetuar um cálculo numérico complexo utilizando linguagem natural é uma tarefa complexa e, por vezes, impossível, uma vez que as capacidades de tratamento do aluno podem ficar de imediato saturadas. Neste caso, é necessário um registo simbólico de representação numérica para efetuar o cálculo.

Duval (2009) afirma que uma representação interna pode ser ou não consciente, enquanto uma representação consciente pode ou não ser exteriorizada. Este facto permite distinguir três grandes tipos de representação conforme apresento na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Tipos e funções das representações (Duval, 2009, p. 43).

	Interna	Externa
Consciente	Mental Função de objetivação	Semiótica Função de objetivação Função de expressão Função de tratamento intencional.
Não consciente	Computacional Função de tratamento automático ou quase instantâneo.	

Assim, as representações semióticas são, em simultâneo, conscientes e externas. Os sistemas semióticos foram desenvolvidos para transmitir informação, para comunicar. Isto vem reforçar a ideia da oposição entre representações mentais e representações semióticas (Duval, 2011).

Segundo Duval (2011), uma representação semiótica só é importante na medida em que ela se pode transformar noutra representação. Este autor defende que as representações semióticas não são úteis apenas para trabalhar com os objetos matemáticos e ainda que se queremos descrever a maneira própria de trabalhar em Matemática são as transformações de representações semióticas que devemos analisar.

Duval (2009) define *semiósis* como a apreensão ou a produção de uma representação semiótica e *noésis* como atos cognitivos como a apreensão conceptual de um objeto. Duval salienta que a *noésis* é inseparável da *semiósis* e que “não há *noésis* sem *semiósis*, é a *semiósis* que determina as condições de possibilidade e de exercício da *noésis*” (p. 17). Ainda de acordo com Duval (2009), a formação e as transformações como tratamentos e conversões são atividades cognitivas fundamentais da *semiósis*.

3.4.1. Formação

A formação de uma representação semiótica é o ato de construção dessa representação e corresponde ao processo de codificação de certas relações ou propriedades de acordo com o objetivo dessa ação num dado registo como linguagem natural escrita, elaboração de um esquema, escrita de uma expressão numérica, ou escrita de uma equação. A formação implica a seleção de relações e de dados a representar. No processo de formação é importante que se respeitem as regras de produção para que as representações sejam compreensíveis, possam ser identificadas e reconhecidas e, por outro lado, se torne possível a utilização dos meios de tratamento que o sistema semiótico possibilita.

3.4.2. Tratamento

Duval (2003) explica que “os tratamentos são transformações de representações dentro do mesmo registo, por exemplo: efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou representação” (p. 16). Um tratamento constitui uma transformação de uma representação interna num dado registo de representação. O cálculo numérico ou algébrico são exemplos de tratamentos internos ao registo da escrita simbólica, numérica e algébrica, respetivamente. Nestes casos novas expressões substituem as anteriores, mas sempre no mesmo registo. No trabalho em Álgebra, um exemplo de tratamento pode ser a simplificação de uma expressão algébrica como apresento na figura 3.6.

$$2x - 1 + 4x + 5 = 6x + 4$$

Figura 3.6: Exemplo de tratamento-simplificação de expressão algébrica.

3.4.3. Conversão

Duval (2003) apresenta as conversões como "transformações de representações que consistem em mudança de registo conservando os mesmos objetos denotados, por exemplo: reconhecer a escrita algébrica de uma equação na sua representação gráfica" (p. 16). Assim, uma conversão é uma transformação de uma representação noutro registo, é uma transformação externa em relação ao registo de representação inicial. Em sala de aula, para designar conversão utilizam-se, por vezes, termos como "tradução" ou "ilustração". Estas operações fazem corresponder representações em diferentes registos. No caso da ilustração é a colocação em correspondência de uma palavra, uma frase ou um enunciado com uma figura. A passagem inversa pode ser uma descrição ou interpretação. Na resolução de problemas é muito frequente a passagem de um enunciado a uma equação, neste caso estamos perante a conversão de registos em linguagem natural para registos no sistema de notação algébrica. Uma conversão requer que se perceba a diferença entre aquilo que Frege chama de sentido e a referência do símbolo ou entre o conteúdo e aquilo que este representa. Sem a perceção desta diferença a atividade de conversão é incompreensível ou até impossível. A mudança de uma expressão analítica de uma função para a respetiva representação gráfica, constitui um exemplo de uma conversão na Álgebra, como apresento na figura 3.7.

$y = 2x + 1$

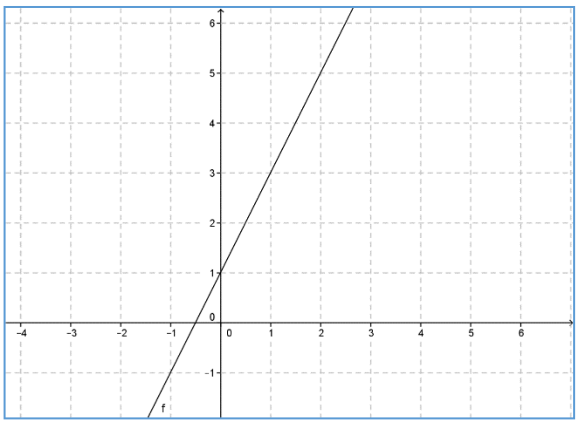


Figura 3.7: Exemplo de conversão de uma expressão analítica para representação gráfica.

Segundo Duval (2003) é a conversão das várias representações sobre um objeto matemático que possibilita a construção do conhecimento. O autor afirma que “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de, pelo menos, dois registos de representação, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registo de representação” (p. 14).

A conversão de representações é uma atividade que é muito trabalhada e incentivada pelos professores de Matemática, em particular, no estudo da Álgebra. Porém, esta atividade não é simples nem imediata para todos os alunos. O procedimento de correspondência entre duas representações pertencentes a registos diferentes pode ser estabelecido através de uma correspondência entre unidades significantes de cada um dos dois registos. Duval (2009) apresenta como exemplos: em linguagem natural “o dobro de um número” e a sua conversão para um registo em notação algébrica “$2x$”.

Neste caso estamos perante uma situação em que podemos fazer correspondência, termo a termo, entre as unidades significantes respetivas, onde a conversão inversa permite reencontrar a expressão do registo de partida, em linguagem natural. Por exemplo: em linguagem natural “um número positivo” pode ser traduzido por “$x > 0$”.

Esta conversão distingue-se da anterior pois na escrita no registo em linguagem algébrica falta a unidade significante correspondente a “positivo”, foi preciso recorrer aquilo a que se chama perífrase “> 0” uma combinação de duas unidades significantes para colmatar essa lacuna. Noutras situações a dificuldade pode ainda ser maior.

Duval (2011) destaca que o reconhecimento de um mesmo objeto matemático em duas representações distintas “repousa sobre a correspondência das unidades de sentido de duas representações” (p. 49). O investigador afirma que a dificuldade vem do facto de duas representações diferentes apresentarem aspetos distintos do objeto que representam. Para se reconhecer um objeto em duas representações diferentes é necessário colocar em correspondência as unidades de sentido (dados ou informações matematicamente pertinentes) próprias de cada representação. Este autor questiona-se ainda acerca da forma como se podem discriminar as unidades de sentido numa grande diversidade de representações semióticas que se mobilizam em Matemática. Por outro lado, coloca ainda o foco na tomada de consciência no estabelecimento de correspondência das unidades de sentido. Para Duval (2011), a discriminação das unidades de sentido pertinentes nas diferentes representações é uma condição para a aquisição de conceitos e não uma consequência dessa aquisição de conceitos. Da mesma forma, acrescenta que a escolha de uma boa representação, ou até mesmo várias, são "apenas ajudas enganosas" (p. 49), pois, tal como foi referido anteriormente, uma representação não deve ser confundida com o objeto que representa. A única maneira de aceder aos objetos matemáticos passa por colocar em correspondência as diferentes representações semióticas.

Duval (2011) alerta para o facto de não se poder isolar diretamente as unidades de sentido que formam o conteúdo de uma representação e que existem diferentes maneiras para discriminar as unidades de sentido. Por outro lado, alerta também para o facto de algumas representações semióticas serem mistas, por resultarem da fusão de dois tipos de representação (por exemplo: a reta numérica, a reta real). Estas representações levam a confundir o contínuo visual com o contínuo matemático. Outro aspeto também salientado pelo autor é a necessidade de distinguir a transformação de partida e a transformação de chegada. Quando a transformação se realiza entre duas representações de um mesmo objeto, é importante saber se a transformação inversa é cognitivamente equivalente à transformação direta, ou seja, se existe ou não reversibilidade.

Segundo Duval (2011) as operações próprias de cada registo são operações cognitivas, o que significa que o aluno deve ter consciência para poder cumpri-las intencionalmente e espontaneamente. Esta é a condição para que o registo cumpra as três funções cognitivas: produção de representações, objetivação e a transformação de representações (conversão ou tratamento).

O ato de pensar matematicamente mobiliza sempre, pelo menos, dois registos. Ainda que de um ponto de vista matemático o trabalho pareça utilizar apenas um único registo, a compreensão necessária para prosseguir o trabalho exige a mobilização, mesmo que implícita, de um segundo registo, assim como a sua coordenação. Por exemplo, na resolução de um problema numérico são mobilizados, pelo menos, dois registos como a linguagem, a escrita de números e a elaboração de esquemas.

A mobilização de um segundo registo é necessária para poder discernir e reconhecer as unidades de sentido que são pertinentes no conteúdo do primeiro registo:

"Não é suficiente justapor representações de registos diferentes para que os alunos vejam as correspondências entre as unidades de sentido matematicamente pertinentes das diferentes representações justapostas" (Duval, 2011, p. 100). Para o autor, a conversão de representações é o primeiro limiar da compreensão em Matemática e é também através desta transformação que os alunos tomam consciência do funcionamento próprio de cada registo.

As representações semióticas, segundo Duval (2011), são "transparentes ao que elas representam" quando funcionam como representações semióticas para quem as produz, as compreende e as transforma. Elas dizem-se transparentes quando existe reconhecimento imediato e espontâneo do que elas representam. Por exemplo, um gráfico cartesiano tem um duplo propósito no ensino e mostra a diferença entre código e registo. No ensino os gráficos são introduzidos como uma técnica de codificação, no entanto utilizamo-los como registos de representação. O gráfico mostra o tipo de representação que queremos privilegiar por motivos didáticos ou matemáticos e deve ser analisado por um par de registos: aquele ao qual pertencem essas representações e um segundo tomado como registo revelador, como a escrita algébrica correspondente.

As produções orais e escritas assumem papéis distintos na tomada de consciência, por parte dos alunos, das operações específicas de cada registo e das unidades de sentido matematicamente pertinente numa representação. A contribuição dos computadores nas primeiras aprendizagens deve ser analisada segundo esta perspetiva.

A atividade matemática não se limita à utilização de um único registo. Durante a resolução de uma tarefa matemática, quer seja para antecipar os tratamentos a realizar, ou seja, escolher o registo de tratamento, ou para controlar os tratamentos efetuados no registo escolhido. Esta mobilização pode ser feita explicitamente e, em simultâneo, para a produção de uma representação como no caso da Geometria e da Análise, mas muitas vezes fica implícita. Geralmente, quando os alunos constroem uma resolução, não recorrem exclusivamente a um único registo, pelo contrário, pensam em vários simultaneamente, embora haja um determinado registo que se evidencia em relação aos restantes. Este facto requer uma atividade contínua de conversões que acabam muitas vezes, por ficar implícitas, mas que são espontâneas. A tabela 3.2 apresenta a classificação dos diferentes registos semióticos segundo Duval (2011).

Tabela 3.2: Classificação dos tipos de registo semiótico (Duval, 2011, p. 118).

	REGISTOS DISCURSIVOS *Linearidade fundamentada na sucessão* Para a produção, apreensão e organização das expressões.	REGISTOS NÃO DISCURSIVOS *Apreensão simultânea de uma organização bidimensional*
REGISTOS MULTIFUNCIONAIS Os tratamentos não são algoritmizáveis		ICÓNICA: produção à mão livre, conservação interna das relações topológicas das caraterísticas das partes do objeto. CONFIGURAÇÃO GEOMÉTRICA: três operações independentes (construção instrumental, divisão e reconfiguração merológicas, desconstrução dimensional das formas).
	Representações auxiliares transitórias para as operações livres ou externas	
REGISTOS MONOFUNCIONAIS As transformações de expressões são algoritmizáveis	AS ESCRITAS SIMBÓLICAS para as operações de substituições ilimitadas (sistema de numeração, escrita algébrica, línguas formais) Uma modalidade de produção: escrita	Junção entre os pontos ou nós, e orientação marcada por flechas GRÁFICOS CARTESIANOS: operação de zoom, interpolação, mudança de eixos ESQUEMAS

Duval (2011) defende que nos estudos, em sala de aula, que envolvem a análise de produções dos alunos, é necessário recorrer a uma análise em três perspetivas distintas: i) uma análise matemática em termos de validade e sucesso dos alunos; ii) uma análise da compreensão e iii) uma análise dos motivos quer seja de sucesso quer seja das dificuldades manifestadas. O autor alerta ainda para o facto de a linguagem natural constituir o primeiro registo de representação semiótica para o funcionamento do pensamento. No entanto, habitualmente não é assim considerada no ensino da Matemática sendo reduzida à função de comunicação.

3.5. Representações no ensino e aprendizagem da Álgebra

De acordo com Duval (2006), há dois tipos de transformação das representações semióticas: os tratamentos e as conversões. As conversões de várias representações dos objetos matemáticos possibilitam a produção de conhecimento. Neste estudo são analisadas as representações que os alunos utilizam com papel e lápis e outras que são produzidas no computador com a folha de cálculo.

3.5.1. Representações com papel e lápis

No trabalho em sala de aula, dou especial atenção às representações em diferentes registos semióticos, como na linguagem natural, assim como representações em sistemas de notação numérico e algébrico, representações gráficas e representações pictóricas. Neste estudo adoto ainda a notação e a linguagem de Duval para o estudo das representações. No trabalho com papel e lápis, considero as representações apresentadas na tabela 3.3.

Tabela 3.3: Representações com papel e lápis.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="4">Linguagem natural</td><td>Dados do enunciado</td></tr>
<tr><td>Identificação de incógnitas</td></tr>
<tr><td>Explicação de procedimentos</td></tr>
<tr><td>Resposta</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Sistemas de notação</td><td rowspan="3">Numérico</td><td>Cálculos por substituição</td></tr>
<tr><td>Cálculos por operações inversas</td></tr>
<tr><td>Outros</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Algébrico</td><td>Escrita de expressões algébricas</td></tr>
<tr><td>Simplificação de expressões algébricas</td></tr>
<tr><td>Recurso a fórmulas</td></tr>
<tr><td>Escrita de equações</td></tr>
<tr><td>Resolução de equações</td></tr>
<tr><td>Outros</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pictóricas</td><td>Desenhos, outros</td></tr>
<tr><td colspan="2">Gráficas</td><td>Representações gráficas</td></tr>
</table>

3.5.2. Representações na folha de cálculo

A utilização das tecnologias, na sala de aula, trouxe novas formas de encarar o ensino e a aprendizagem. A utilização da tecnologia oferece aos alunos a oportunidade de aceder a novas formas de representar e permite aceder, em simultâneo, a múltiplas representações (Kaput, 1986), estas alterações provocam uma mudança do significado de aprender e utilizar a Matemática.

No caso da folha de cálculo, a sua linguagem suporta conexões entre diferentes registos (numéricos, relacionais, gráficos) o que pode ajudar os alunos a encontrar relações entre as variáveis presentes num dado problema. Para além disso, fornece meios de controlo com base no *feedback* numérico instantâneo e constante, que permite fazer experiências, estabelecer conjeturas e até encontrar possíveis erros. A folha de cálculo permite ainda "colar" representações construídas com outras ferramentas digitais, por exemplo, um editor de imagens. Uma célula da folha de cálculo pode assumir diversos significados como ilustro no exemplo da figura 3.8.

	A	B
1		
2	8	=A2+3

Figura 3.8: Argumento de uma célula.

No caso apresentado na figura 3.8, A2 é o argumento da célula e B2 calcula a soma do valor de A2 com 3. A célula A2 pode ser encarada como apresento na figura 3.9, ou seja, como:

- *Referência abstrata geral*: representa uma variável (a fórmula refere-se a A2 fazendo-a desempenhar o papel de variável);
- *Referência concreta e particular*: o número introduzido (8);
- *Referência geográfica*: localização, coluna A, linha 2;
- *Referência material*: um compartimento da grelha, que alguns alunos encaram como uma caixa.

Os três primeiros significados não encontram correspondência no trabalho com papel e lápis.

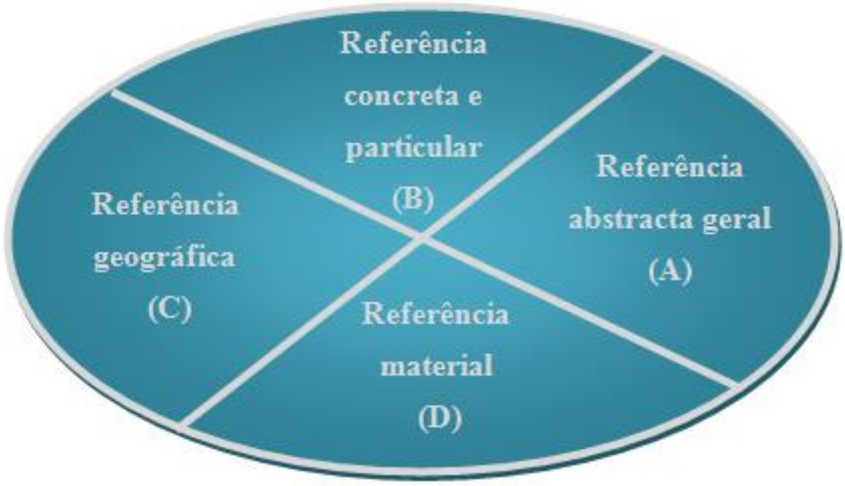


Figura 3.9: A "variável – célula".

A célula B2 pode assumir um duplo papel. Na figura 3.8, B2 refere-se a uma fórmula, mas pode desempenhar o papel de variável para uma fórmula noutra célula. Uma das funções que torna mais distinta esta ferramenta é o arrastamento, ao longo de uma coluna, da alça de uma célula que contém uma fórmula gerando uma "variável-coluna".

Os números presentes nas células da folha de cálculo podem ter uma natureza diversa. Um número pode ser um *input* numérico, um *output* de uma fórmula, ou ainda um *output* de uma sequência numérica linear com incremento gerada automaticamente pelo Excel. No caso em que o número é um *output* de uma fórmula, a aparência corrente da célula é a de um número. No entanto, a célula pode mostrar temporariamente a sua aparência de fórmula – quer no momento em que se introduz essa fórmula ou, posteriormente, quando o cursor é colocado sobre célula e se observa a barra de fórmulas. Assim, uma característica importante da folha de cálculo é a de encobrir as fórmulas (ou seja, a parte algébrica), mantendo sempre visível a parte numérica (Haspekian, 2003).

No ambiente computacional providenciado pela folha de cálculo são vários os tipos de representação: a linguagem natural, os valores numéricos, as fórmulas, gráficos e ferramentas de formatação, como o realce com cor de células específicas (Haspekian, 2005).

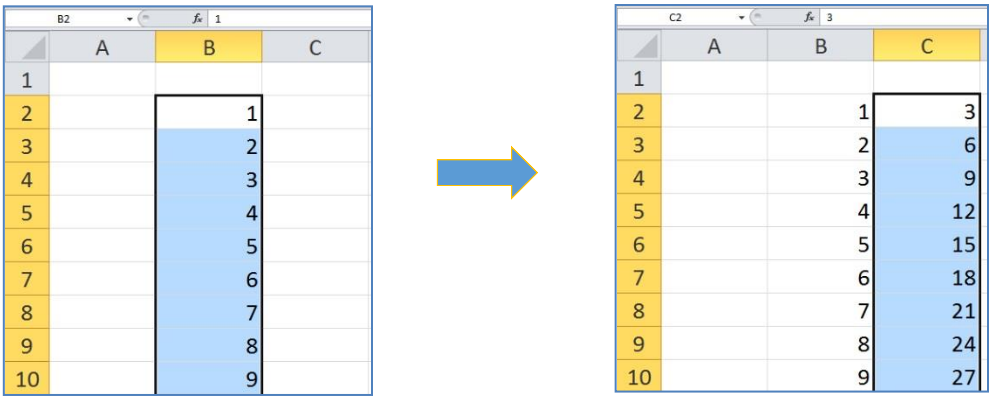
- Linguagem natural – é possível introduzir e editar um texto em qualquer célula, em particular para a nomeação de colunas;
- Introdução de fórmulas – é possível realizar automaticamente operações que envolvem as células que contêm dados do problema ou que resultam de outros cálculos;
- Construção de gráficos – a construção de gráficos dinâmicos, a partir de dados numéricos já inseridos;
- Registo “variável-numérica” – é uma funcionalidade específica da folha de cálculo que diz respeito ao registo numérico que apela, em simultâneo, à noção de variável. Permite a variação de valores numéricos, por exemplo, para resolver problemas através da tentativa-e-erro. Esta funcionalidade pode comparar-se à criação de um parâmetro que se pretende estudar.

No trabalho com a folha de cálculo neste estudo considero as representações apresentadas na tabela 3.4.

Tabela 3.4: Representações na folha de cálculo.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="4">Linguagem natural</td><td>Dados do enunciado</td></tr>
<tr><td>Nomeação de colunas</td></tr>
<tr><td>Explicação de procedimentos</td></tr>
<tr><td>Resposta</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Registo numérico</td><td rowspan="2">Sequências</td><td>Com incremento constante</td></tr>
<tr><td>Com incremento nulo</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Registo de fórmulas</td><td>Variável célula</td></tr>
<tr><td>Variável coluna</td></tr>
<tr><td colspan="2">Gráficos</td><td>Gráfico de dispersão</td></tr>
<tr><td colspan="2">Formatação Condicional/Realçar células</td><td>Identificar a resposta</td></tr>
</table>

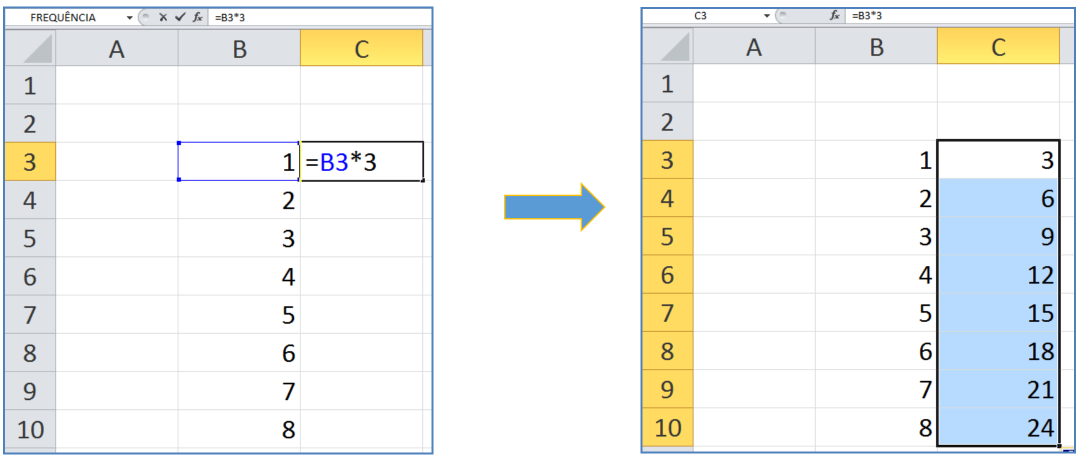
No estudo das representações no ambiente da folha de cálculo recorro às noções de conversão e tratamento de Duval que também podem ser estendidas às representações criadas neste ambiente. São exemplos de tratamentos na folha de cálculo: a construção de uma sequência numérica utilizando uma fórmula ou não.



a) Construção de sequência numérica

b) Construção de sequência estabelecendo relação (não explicita) com a anterior

Figura 3.10: Tratamentos não explícitos na folha de cálculo.



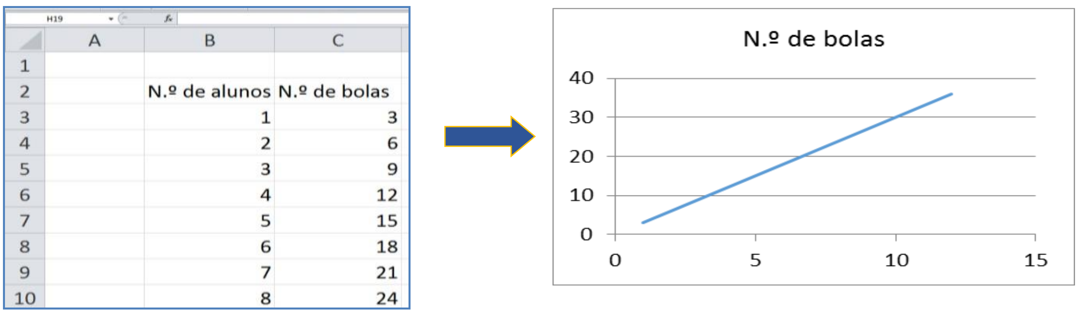
a) Escrita de fórmula para estabelecer relação

b) Construção de sequência estabelecendo explicitamente a relação entre as duas colunas

Figura 3.11: Tratamento explícito na folha de cálculo.

A sequência numérica apresentada na figura 3.10 foi construída através do arrastamento da alça um conjunto de duas células. A folha de cálculo tem essa potencialidade de produzir sequências lineares de incremento constante ou nulo de acordo com os valores previamente introduzidos. A mesma sequência pode ser produzida através da introdução de uma fórmula que estabelece a relação entre as duas colunas, como apresento na figura 3.11. Neste caso, a introdução desta fórmula deixa explicita a relação que se pretende estabelecer entre as duas colunas. O mesmo não acontece na primeira situação (figura 3.10) em que não existe o estabelecimento de relação entre as colunas através de uma fórmula e neste caso é preciso memorizar a relação estabelecida. No último caso apresentado, a segunda coluna varia de acordo com os valores introduzidos na primeira, o que não acontece quando a relação estabelecida é implícita.

A folha de cálculo permite ainda converter tabelas numéricas para representações gráficas, como no exemplo da figura 3.12. Estas representações gráficas podem assumir diferentes tipologias, de acordo com a opção selecionada, como gráficos de barras, circulares, de pontos ou de linhas. Neste ambiente a conversão no sentido inverso, ou seja, de uma representação gráfica para uma tabela numérica não é possível.



	A	B	C
1			
2		N.º de alunos	N.º de bolas
3		1	3
4		2	6
5		3	9
6		4	12
7		5	15
8		6	18
9		7	21
10		8	24

Figura 3.12: Conversão na folha de cálculo (tabela numérica para gráfico).

Zazkis e Liljedahl (2004) consideram existir um certo grau de opacidade em qualquer representação. No caso do sistema de representações da folha de cálculo, o primeiro contacto em ambiente educacional sugere uma grande opacidade que se vai desfazendo, à medida que os alunos vão ganhando familiaridade com a linguagem específica do Excel e maior destreza em manter uma conexão entre o pensamento algébrico e as operações realizadas *com* e *pelo* Excel.

3.6. A fluência representacional e a compreensão matemática

A palavra compreensão é utilizada, frequentemente, com diferentes significados. Alguns professores utilizam-na para se referirem ao facto de os alunos conhecerem e aplicarem determinadas regras, ou seja, identificam compreensão com aquilo a que Skemp (1976) designa por compreensão instrumental e descreve como *rules without reasons*. Por outro lado, Skemp (1976) apresenta a compreensão relacional como um tipo de compreensão que implica a construção da estrutura conceptual a partir da qual o aluno pode utilizar estratégias diversificadas tendo em conta os seus propósitos e que vão para além do recurso a regras.

Por vezes, os alunos procuram apenas aprender regras que lhes permitam resolver as tarefas propostas pelo professor sem mostrar qualquer interesse pelas razões que os levam a esses procedimentos (Skemp, 1976). No entanto, quando os professores colocam questões que exigem mais do que a aplicação de regras ou em que a sua utilização não é imediata, os alunos, muitas vezes, não conseguem alcançar uma resposta correta.

Skemp (1976) considera que é mais fácil para os alunos obterem uma compreensão instrumental do que uma compreensão relacional. Uma compreensão instrumental baseia-se na memorização, requer menos conhecimento e permite obter uma resposta correta mais rapidamente. Contudo, sem a compreensão relacional a aprendizagem não pode ser adaptada a novas tarefas e os alunos não conseguem fundamentar as suas respostas.

Vários autores, nomeadamente Herscovics (1996); Herscovics & Linchevski (1994); Hiebert & Carpenter (1992) e Kieran (1992) estão em sintonia com Skemp (1976) que considera que alguns alunos fluentes no uso de determinada representação, são capazes de aplicar um procedimento, no entanto esta ação nem sempre é acompanhada por um entendimento conceptual. Por seu lado, Panasuk (2010) argumenta que quando os alunos demonstram capacidade para reconhecer que a estrutura matemática de duas representações é a mesma, sendo as relações ou os conceitos apresentados de diferentes formas (como linguagem natural escrita, simbologia, diagramas) é uma evidência do desenvolvimento de compreensão conceptual da relação ou conceito que vai além da aplicação de procedimentos. A aquisição da compreensão conceptual permite ao aluno o uso de regras e procedimentos atribuindo-lhe sentido e fornece uma base sólida para a resolução e problemas (Dreyfus & Eisenberg, 1996).

Em Álgebra, a compreensão conceptual é caraterizada pela capacidade de reconhecer relações funcionais entre aquilo que é conhecido como as incógnitas, variáveis dependentes e independentes, e distinguir e interpretar diferentes representações dos conceitos algébricos. Esta compreensão pode ser manifestada na leitura, escrita e manipulação de símbolos. Os alunos que revelam uma compreensão conceptual compreendem o significado dos conceitos e podem discernir, interpretar, comparar ideias relacionadas numa variedade de situações. Por outro lado, a fluência no uso da linguagem algébrica pode ser demonstrada pelo uso seguro da sua simbologia e significa flexibilidade nas operações sobre as propriedades e convenções matemáticas, sendo também indicadores de compreensão conceptual em Álgebra (Panasuk, 2010).

Kieran (2013) refere que durante muitos anos, em educação matemática, se deu demasiada importância à dicotomia entre conceitos e procedimentos, entre conceitos e habilidades (*skills*), e entre *saber que (knowing that)* e *saber como (knowing how)*. Para esta autora, o tema Álgebra foi o mais prejudicado com esta dicotomia. Na década passada foram feitos inúmeros esforços tornar a aprendizagem da Álgebra com significado, baseando-a na resolução de problemas do quotidiano e as suas várias representações, no entanto, por vezes, ficou omitido o estudo da parte simbólica da Álgebra, ou seja, os aspetos conceptuais e que estão integrados nos procedimentos algébricos.

Em certos momentos as técnicas assumem-se como uma rotina necessária, mas esse não é o seu único papel na aprendizagem. Kieran (2013) argumenta que uma técnica nem sempre se assume como uma pura manipulação simbólica (*manipulative skill*) e que as técnicas não devem ser apenas consideradas no seu aspeto rotineiro. Segundo Lagrange (2003) as técnicas desempenham um papel importante na aprendizagem uma vez que contribuem para a compreensão dos objetos que manipulam e proporcionam uma reflexão acerca dos conceitos quando comparadas com outras e quando discutidas tendo em conta a sua consistência. Por outro lado, Donald (2001) afirma que grande parte da arquitetura da mente madura é feita de hierarquias automatizadas que são construídas e frequentemente revisitadas e que o novo conhecimento pode ser utilizado para atualizar e integrar o conhecimento antigo.

Kieran (2013) inspirada nestes dois investigadores de áreas distintas, Jean-Baptiste Lagrange, da didática da Matemática e Merlin Donald, neurocientista cognitivo, afirma que a tradicional dicotomia, ente compreensão conceptual e compreensão instrumental, mascara dois aspetos importantes acerca dos procedimentos: (i) no período de elaboração dos procedimentos a sua essência por natureza é conceptual e (ii) os procedimentos mesmo quando automatizados, são frequentemente revisitados, atualizados e alargados através de elementos conceptuais. Desta forma, defende que esta distinção não tem sentido.

Deste modo, Kieran (2013) defende a necessidade de alterar a maneira como se pensa e se ensina a Álgebra. A sua perspetiva, foi anteriormente defendida, por autores como Carpenter (1986), que argumenta sobre a falsidade da dicotomia entre compreensão conceptual e a habilidade nos procedimentos, afirmando que a compreensão conceptual precede a aprendizagem de procedimentos ou que a precisão e a fluência na execução dos procedimentos são ambos necessários para adquirir e comunicar a compreensão conceptual (Wu, 1999). Contudo, tanto Carpenter como Wu parecem manter um discurso em defesa desta dicotomia. Kieran (2013) defende uma co emergência, tanto da técnica como dos aspetos conceptuais, argumentando a sua articulação e interação. Esta investigadora alerta para o facto de durante anos se ter considerado a Álgebra como um campo em que se valorizava amplamente os procedimentos e onde o ensino da Álgebra, como um conjunto de conceitos e procedimentos, provocou o aparecimento de inúmeras dificuldades aos alunos no final do ensino básico. Reformas recentes têm levado o ensino deste tema, em particular nos anos iniciais, a apoiar-se na resolução de problemas e, simultaneamente, no uso de múltiplas representações. No entanto, as dificuldades dos alunos parecem permanecer pois quando confrontados com atividades de transformação com uma forte componente simbólica, a clivagem entre os procedimentos e a aprendizagem conceptual reaparecem, uma vez que o ensino de procedimentos algébricos é abordado basicamente a partir de regras onde a compreensão conceptual é esquecida.

Artigue (2008) defende a falsidade da oposição entre as técnicas e os conceitos, defendendo que estes não só são complementares como num ambiente de aprendizagem apropriado, as técnicas e os conceitos podem emergir, em simultâneo, e suportarem-se mutuamente. Artigue (2008) considera ainda que a compreensão conceptual das técnicas algébricas inclui: (i) ser hábil para ver uma certa forma nas expressões algébricas e equações, tanto nas lineares como nas quadráticas; (ii) ser capaz de encontrar relações, como a equivalência entre expressões fatorizadas e não fatorizadas; (iii) ser capaz de ver através de transformações algébricas as alterações subjacentes na forma do objeto algébrico e ser capaz de justificar essas mudanças. Esta autora apresenta o exemplo de compreensão conceptual em Álgebra, o facto de ser capaz de distinguir variáveis de parâmetros, identidades de equações e o conhecimento dos objetos matemáticos a que a linguagem algébrica se refere.

Em sintonia com as ideias defendidas por Kieran (2013), considero que é fundamental dar especial atenção ao modo como os novos conceitos ou procedimentos são introduzidos, de modo a reduzir a possibilidade de os alunos aprenderem apenas por memorização de regras. Assim sendo, considero importante proporcionar aos alunos experiências que os ajudem na compreensão do significado dos processos utilizados.

CAPÍTULO 4

Tarefas matemáticas

Este capítulo é dedicado às tarefas matemáticas no ensino e aprendizagem da Álgebra. Apresento a caracterização de diferentes tipologias de tarefas e a importância da sua diversidade. Seguidamente, abordo a resolução de tarefas no computador, onde destaco a resolução de problemas com recurso à folha de cálculo e a interação dos alunos com o computador (coação). Exponho ainda a perspetiva adotada neste estudo acerca das tarefas na aprendizagem da Álgebra que suporta o desenho da experiência de ensino.

4.1. Tarefas no ensino e aprendizagem da Álgebra

Num ensino que valorize o papel ativo do aluno na aprendizagem, as tarefas desempenham um papel crucial, "uma vez que as tarefas são o elemento organizador da atividade de quem aprende" (Ponte, 2014, p. 14). As tarefas matemáticas propostas aos alunos, em sala de aula, são decisivas para o seu envolvimento e para a aprendizagem.

O recurso a uma grande variedade de tarefas tem a vantagem de oferecer aos alunos uma perspetiva ampla da Matemática e das várias formas de aprender (Sullivan, Clarke & Clarke, 2013). Contudo, as tarefas não devem ser propostas de forma isolada, devem ser criteriosamente selecionadas e preparadas em sequências devidamente organizadas tendo em conta os objetivos. As tarefas devem proporcionar um percurso de aprendizagem coerente, permitindo aos alunos a construção de conceitos, a compreensão de procedimentos bem como o conhecimento de diferentes representações e das conexões entre os conceitos matemáticos e com outros domínios (Ponte, 2005).

4.1.1. Diferentes tipos de tarefa

Ponte (2014) destaca que a escolha das tarefas deve ter em conta os diferentes propósitos envolvidos. Existem tarefas cuja finalidade é apoiar a aprendizagem, outras que procuram avaliar as aprendizagens dos alunos e outras ainda de investigação que servem para compreender de modo aprofundado as capacidades, processos de pensamento e dificuldades dos alunos (p.14). Tendo presente esta diversidade de funções no processo de ensino e aprendizagem, é fundamental que o professor recorra a uma diversidade de tarefas na construção da sua planificação.

Anthony e Walshaw (2009) argumentam que o papel das tarefas matemáticas e das ferramentas são aspetos centrais no ensino e aprendizagem, afirmado que é "através de tarefas, mais do que de outra forma, que as oportunidades de aprender são disponibilizadas aos alunos" (p. 96). Neste trabalho assumo igualmente a perspetiva de que a escolha das tarefas e a pedagogia associada são aspetos fulcrais no ensino e na aprendizagem da Matemática e, em particular, no tema Álgebra.

As tarefas devem ter complexidade e serem formuladas em contextos apropriados aos alunos a quem são propostas, pois é através delas que é estimulado o pensamento matemático, a criatividade e a reflexão. Sullivan, Clarke e Clarke (2013) argumentam que a escolha e o uso de tarefas são aspetos centrais para a eficácia do ensino da Matemática e a natureza da aprendizagem está relacionada com as caraterísticas das tarefas. Os autores apontam algumas caraterísticas chave que as tarefas devem possuir: (i) incentivar os alunos a fazer Matemática relevante, promovendo a construção de significados, a compreensão e conexões com outros aspetos da Matemática; (ii) constituir um desafio para a maioria dos alunos, com um percurso para a solução que não seja óbvia para eles; (iii) requerer aos alunos que pensem, tomem decisões e comuniquem com os colegas; (iv) promover pensamento rápido e reflexão; e (v) usar contextos ou situações familiares de modo a que os alunos vejam neles conexões e potencialidades para a sua vida (p. 21). Os autores salientam, no entanto, que são poucas tarefas que têm todas estas caraterísticas e que o desafio para os professores é conseguirem encontrar o equilíbrio.

No projeto *Task Types in Mathematics Learning* (TTML) Sullivan, Clarke e Clarke (2013) focaram-se em três tipos de tarefas (*Propuseful representational tasks*): tarefas que envolvem um modelo, exemplo ou explicação que elabora ou exemplifica os conceitos matemáticos; tarefas contextuais em que a Matemática surge num problema contextualizado; e ainda as tarefas abertas (*open-ended*) com foco num conteúdo específico da Matemática.

Stein e Smith (1998) apresentam uma tipologia sobre as tarefas usadas na aula como base da aprendizagem dos alunos. Para estas autoras as tarefas distinguem-se pelo nível de exigência cognitiva, sendo consideradas de baixo nível cognitivo aquelas que envolvem apenas a memorização e a utilização de procedimentos sem conexões. Em contrapartida, nas tarefas com alto nível de exigência cognitiva distinguem entre procedimentos com conexões e fazendo Matemática.

Por seu lado, Ponte (2005) considera que duas das dimensões fundamentais das tarefas são o grau de desafio matemático e o seu grau de estrutura. O grau de desafio está relacionado com a dificuldade da questão colocada, enquanto o grau de estrutura está relacionado com a abertura da questão. Este autor apresenta um quadro organizador dos diferentes tipos de tarefas. Neste quadro, as tarefas são distinguidas, pelo grau de desafio e abertura, em problemas, exercícios, explorações e investigações (Figura 4.1).

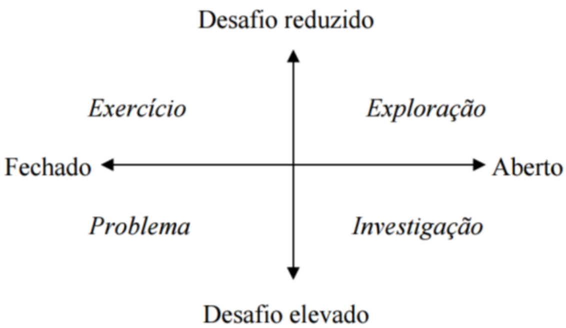


Figura 4.1: Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura. (Ponte, 2005, p. 17).

Assim no 2.º quadrante encontramos os exercícios, tarefas fechadas e de desafio reduzido; no 3.º quadrante surgem os problemas, tarefas fechadas, mas com desafio elevado; no 4.º quadrante as investigações, tarefas abertas e que têm um grau de desafio elevado e no 1.º quadrante as explorações, tarefas abertas e com desafio reduzido.

Ponte (2014) considera que o professor deve recorrer a diversos tipos de tarefa no seu trabalho de planificação. Para este autor, a diversificação é necessária tendo em conta que cada tipo de tarefa desempenha o seu papel relativamente à aprendizagem. As tarefas de natureza mais fechada, como os exercícios e os problemas são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos, uma vez que este raciocínio se baseia numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados. Para este autor as tarefas de natureza mais acessível, como os exercícios, são igualmente importantes porque podem proporcionar a quase todos os alunos um elevado grau de sucesso, contribuindo para o desenvolvimento da sua autoconfiança. Por outro lado, as tarefas de natureza mais desafiante, como os problemas, são indispensáveis para que os alunos tenham uma efetiva experiência matemática. No entanto, convém sublinhar que não existe uma linha de demarcação rígida entre os diferentes tipos de tarefa.

Neste trabalho, adoto o referencial apresentado por Ponte (2005) para a classificação de tarefas por considerar que este se adequa à experiência de ensino realizada. Contudo, é importante notar que, independentemente do referencial adotado, existem limitações que devem ser consideradas. Um aspeto a ter em atenção é a dificuldade em delimitar cada um destes quatro quadrantes, sendo que o conhecimento dos alunos é fundamental para determinar esta fronteira, assim como as experiências que estes já viveram e a própria forma como são apresentadas e exploradas as tarefas em sala de aula. Existem tarefas que podem ser consensualmente classificadas como exercícios, problemas, explorações ou tarefas de investigação. Contudo, outras podem suscitar dúvidas e ser ambíguas. Para além disso, em determinados momentos as tarefas podem assumir diferentes classificações, ao longo do ano letivo.

Ponte (2014) defende que os alunos podem realizar uma tarefa mesmo que não tenham sido ensinados diretamente a resolvê-la, o que indica que estes aprendem fora da escola e muitos desses conhecimentos podem ser mobilizados para a aula de Matemática. A resolução de problemas nos Campeonatos de Matemática Sub12 e Sub14 é uma evidência clara desta afirmação. As resoluções propostas pelos participantes nestes campeonatos mostram a (re)descoberta pelos alunos de métodos próprios para resolver os problemas (Amado, Carreira; Nobre & Ponte, 2010), sendo esta, muitas vezes a melhor forma de aprender (Ponte, 2014).

No caso particular do ensino da Álgebra, em especial, se a intenção do professor é o desenvolvimento do pensamento algébrico, Blanton e Kaput (2008) referem que as tarefas matemáticas devem ser promover uma perspetiva algébrica. Por exemplo, a partir de problemas aritméticos de resposta única os alunos podem ser incentivados para o estabelecimento de conjeturas, a construção de regularidades, sua generalização e justificação.

Ainley e Pratt (2005), assumindo que as tarefas são um elemento crucial na aprendizagem, sublinham que o papel do professor não pode ser descurado pois este é igualmente crucial, em particular, no modo como conduz a realização da tarefa por parte dos alunos, bem como a sua discussão. Na verdade, como refere Adler (2000), o professor é o recurso mais importante em sala de aula, pois cabe-lhe tomar todas as decisões, em particular, a de selecionar as tarefas a propor em sala de aula. Assim, o sucesso de uma tarefa está na forma como o professor conduz a sua realização. Também Kieran (2007a) refere que não basta uma boa tarefa para promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, é necessário ter em conta as questões que o professor coloca ao longo da sua exploração, de forma a focar a atenção dos alunos em aspetos fundamentais, como a generalização. O papel do professor é essencial para que os alunos desenvolvam uma compreensão conceptual da Álgebra, inclusivamente das técnicas, como a simplificação ou a factorização de expressões ou resolução de equações. Ou seja, não só as tarefas são decisivas, mas a atuação do professor também é fundamental.

No trabalho com tecnologias é o modo como o professor conduz o trabalho em sala de aula é o que dá origem à conceptualização da técnica. O professor é fundamental pois é ele que incentiva os alunos, lhes coloca questões nos momentos apropriados e que os ajuda a ampliar o seu conhecimento (Kieran, 2008). Em sala de aula, o professor deve promover momentos de discussão, que constituem oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e para a construção de novo conhecimento (Ponte, 2005).

Em suma, uma tarefa pode dar lugar a atividades diversas, dependendo da forma como esta é proposta aos alunos, da forma como o trabalho é organizado, do ambiente de aprendizagem e da sua experiência anterior. É através da atividade e da reflexão sobre essa atividade que o aluno aprende. Ponte (2014) destaca a necessidade de ter presente que a atividade depende de dois aspetos importantes, a tarefa proposta e a situação didática criada pelo professor. Portanto, mais do que selecionar diversas tarefas isoladamente, o professor deve organizar criteriosamente a sequência como as apresenta aos alunos, de modo a que estes possam atingir os objetivos de aprendizagem previstos.

Na elaboração das três sequências de tarefas propostas neste estudo tive em conta as recomendações anteriores, criando um percurso de aprendizagem que considero coerente, que permite aos alunos a construção dos conceitos, a compreensão dos procedimentos, o conhecimento das formas de representação relevantes e das conexões entre conceitos dentro da Matemática e com outros domínios (Ponte, 2014).

Ponte (2005) destaca ainda duas outras dimensões: a duração e os contextos das tarefas. Uma tarefa pode ter uma duração mais longa ou curta, pode demorar poucos minutos a resolver ou semanas ou meses. As tarefas propostas nesta experiência têm uma duração média ou curta pois são habitualmente resolvidas numa aula. Contudo, procuro dar particular atenção aos contextos das tarefas, propondo igualmente tarefas num contexto próximo da realidade e outras em termos puramente matemáticos, seguindo as recomendações do NCTM (2000), no sentido de que as tarefas em contexto real sejam apresentadas sem artificialidade e mobilizem o conhecimento prévio dos alunos. Por outro lado, procuro que os contextos sejam adequados às realidades e vivências dos alunos não criando situações que dificultem a resolução das tarefas, como é recomendado no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007).

4.1.2. Resolução de problemas

A resolução de problemas constitui um contexto fundamental de aprendizagem que deve estar sempre associada ao raciocínio e à comunicação. Trata-se de uma das várias abordagens que têm vindo a ser propostas no estudo da Álgebra por facilitar o desenvolvimento de processos algébricos (NCTM, 2000).

Em muitas situações, nas respostas dos alunos a problemas de Matemática, é possível identificar conhecimentos algébricos, tanto do ponto de vista conceptual como do ponto de vista simbólico. O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) dá grande ênfase ao estudo da Álgebra desde os primeiros anos e sugere a realização de tarefas que privilegiem a resolução de problemas. Para além disso, a resolução de problemas surge como uma capacidade transversal, a ser desenvolvida ao longo de toda a aprendizagem, a par do raciocínio matemático e da comunicação. Este tipo de proposta pretende desenvolver nos alunos processos, nomeadamente algébricos, fundamentais na formação matemática de todos os indivíduos (Ponte, 2006a).

As *Normas e Princípios para a Matemática Escolar* (NCTM, 2000) apresentam a resolução de problemas a partir do 9.º ano com uma dupla finalidade. Por um lado, é um bom veículo para a aprendizagem de conteúdos matemáticos e, por outro, proporciona aos alunos a aquisição de ferramentas que lhes permitem formular e resolver outros problemas. A resolução de problemas é igualmente importante para uma melhor compreensão e aquisição de conhecimentos matemáticos, auxiliando os alunos a estabelecer conexões entre conceitos de diversas áreas.

Neste campo a Álgebra tem-se revelado uma ferramenta poderosa, nomeadamente, pela possibilidade que nos faculta de se recorrer ao simbolismo para expressar as ideias matemáticas contidas nos problemas. Brenner, Brar, Duran, Mayer, Moseley, Smith e Webb (1995) referem que os alunos beneficiam da introdução da Álgebra com a resolução de problemas como atividade, dando ênfase a todas as fases da resolução de problemas e destacando também as diferentes representações utilizadas. Num estudo, em que colaborei, acerca do pensamento algébrico manifestado durante a resolução de problemas (Nobre, Amado & Carreira, 2009), por alunos dos 7.º e 8.º anos, os raciocínios apresentados evidenciavam estádios diferentes de desenvolvimento do pensamento algébrico. No problema apresentado, embora se possa admitir que os alunos podiam resolvê-lo utilizando linguagem algébrica, muitos preferiram utilizar argumentos aritméticos ou um misto destas duas formas de pensamento. Relativamente à resolução de equações, os alunos podem resolvê-las de diversas maneiras, nomeadamente, utilizando as regras ou substituindo a incógnita por experimentação. O facto de os alunos utilizarem um ou outro método, nada permite concluir acerca da sua capacidade de operar a um nível simbólico. Muitas vezes, o que acontece é que se prendem à utilização de um único método, mesmo quando uma equação pode ser facilmente resolvida por outro, até mais simples. É frequente que os alunos aprendam a resolver equações, sem perceber o verdadeiro significado das operações que estão a realizar. Uma estratégia de resolução bastante utilizada é a transposição – "muda de membro, muda de sinal". Isto leva-nos a crer que os alunos não se apropriam de imediato desta forma de pensamento. Este facto é corroborado por Matos (2007) que concluiu no seu trabalho que a compreensão dos conceitos algébricos fundamentais é um processo lento, que deve ser trabalhado continuamente ao longo do tempo.

Windsor (2010) destaca a resolução de problemas como uma oportunidade para enriquecer e transformar o pensamento dos alunos e que o professor através de um discurso adequado pode incentivar os alunos a pensar algebricamente ao invés de influenciá-los simplesmente a recorrerem a uma determinada estratégia ou procedimento. Salienta ainda que é através da discussão durante e decorrente do processo de resolução que as ideias relativas ao pensamento algébrico e a uma perspetiva algébrica da Matemática podem ser desenvolvidas, acrescentando que é fundamental que os alunos reflitam acerca das suas estratégias e partilhem as suas experiências, desenvolvendo assim diferentes formas de entender e abordar os problemas.

Kieran (2006) afirma que na resolução de problemas verbais algébricos, os alunos preferem frequentemente recorrer a métodos aritméticos, mostrando dificuldade em utilizar, por exemplo, equações. Embora à primeira vista o pensamento aritmético possa parecer um obstáculo para o desenvolvimento do pensamento algébrico, a verdade é que ele também pode ser visto como uma via para esse desenvolvimento. Entre os processos aritméticos mais utilizados neste tipo de problemas, destacam-se as estratégias de tentativa e erro e de desfazer (*unwind*). Outra estratégia possível consiste em atribuir um valor a uma quantidade desconhecida e verificar a sua exatidão, usando raciocínio funcional, isto é, reconhecendo a relação existente entre as variáveis, mesmo que essa relação não seja expressa através de linguagem algébrica formal (Johanning, 2004).

No desenvolvimento do pensamento algébrico, os alunos inicialmente têm melhor desempenho na resolução de problemas verbais do que na resolução de equações (Koedinger, Alibali, & Nathan, 2008). Os problemas ajudam os alunos a utilizar o seu raciocínio com quantidades, números, baseado nos seus conhecimentos sem a preocupação de memorizar como manipular os símbolos.

Os alunos trabalham com variáveis em expressões ou em equações durante a resolução de tarefas, como exercícios. Muito deste trabalho é desenvolvido num ambiente desprovido de contexto real, não existindo efetivamente um significado que os alunos possam associar a essas variáveis ou expressões. Segundo Gay e Jones (2008), quando os professores propõem essas tarefas aos alunos, em contextos do mundo real, ajudam os alunos não só a desenvolver habilidades e proficiência na manipulação das expressões, mas também os ajudam a avaliar se essas expressões fazem ou não sentido. O contexto é também decisivo para a avaliação da razoabilidade das conclusões. Durante a resolução dos problemas é notório que o contexto afeta a predisposição dos alunos para a sua resolução (Amit & Klass-Tsirulnikov, 2005).

Vários autores classificam os problemas de acordo com o grau de desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos dos alunos e ainda de acordo com os propósitos da sua aplicação (Palhares, 1997). Este autor considera sete tipos de problemas: (i) *Problemas de Processo* – requerem a utilização de estratégias de resolução, ou seja, não há um algoritmo ou um conteúdo anteriormente aprendido que possa ser aplicado; (ii) *Problemas de Conteúdo* – exigem o uso de conhecimentos matemáticos há muito pouco tempo adquiridos ou que ainda não foram totalmente adquiridos; (iii) *Problemas de Capacidades* – requerem a utilização de capacidades de cálculo mental e estimativa; (iv) *Problemas tipo puzzle* – requerem o alargamento do pensamento e do espaço de resolução; (v) *Problemas de aplicação* – necessitam de uma recolha e tratamento de informação, sendo por vezes necessário a utilização de uma ou mais estratégias de resolução; (vi) *Problemas abertos* – têm várias abordagens, o que exige uma escolha prudente na escolha dos caminhos possíveis e (vii) *Problemas de aparato experimental* – suscitam a utilização de métodos de investigação próprios das ciências experimentais, requerem a utilização de esquemas investigativos, permitindo desenvolver capacidades e competências que outros problemas não permitem.

4.1.3. Resolução de exercícios

A resolução de exercícios durante o estudo dos diferentes tópicos algébricos no final do 3.º ciclo incide maioritariamente na manipulação simbólica. A investigação nos últimos tempos tem dado pouca importância à manipulação simbólica, em particular pela introdução de calculadoras com capacidade de cálculo simbólico. No entanto, continua a ser importante que os alunos desenvolvam a sua capacidade de cálculo simbólico. Desta forma os alunos conseguem desenvolver uma compreensão mais profunda dos objetos matemáticos com que estão a trabalhar (Artigue, 2002; Kieran, 2004). A resolução de exercícios é fundamental para a aprendizagem em sala de aula. Contudo, o trabalho em sala de aula não se pode reduzir a este tipo de tarefa "Reduzir o ensino da Matemática à resolução de exercícios comporta grandes riscos de empobrecimento nos desafios propostos e de desmotivação dos alunos" (Ponte, 2005, p. 14). Assim, os exercícios devem ser cuidadosamente selecionados para que contribuam efetivamente para a aprendizagem e para a consolidação de conhecimentos.

4.1.4. Explorações e tarefas de investigação

As explorações são tarefas abertas de desafio reduzido. Estas tarefas são muitas vezes de resolução relativamente rápida pelos alunos. A separação entre as tarefas de exploração e os exercícios nem sempre é muito nítida, pois uma tarefa pode corresponder a uma tarefa de exploração ou a um exercício de acordo com os conhecimentos prévios dos alunos (Ponte, 2005).

Pelo seu lado, as tarefas de investigação são tarefas abertas e com desafio elevado. São tarefas exigentes que implicam um envolvimento contínuo por parte dos alunos, desde a fase inicial da formulação de questões. Este tipo de tarefa pode surgir num contexto real ou puramente matemático (Ponte, 2005).

4.2. Tarefas matemáticas com o computador

4.2.1. A Resolução de problemas com a folha de cálculo

Algumas ferramentas tecnológicas como a folha de cálculo são úteis e eficazes na resolução de problemas, uma vez que tornam a gestão e a manipulação de dados mais rápidas e eficazes (Clayton, 2005; Jonassen, 2007; NCTM, 2000). Por outro lado, essas ferramentas permitem criar ambientes matemáticos estimulantes, através de um vasto conjunto de procedimentos que possibilitam a ilustração de conceitos matemáticos, a descoberta, o reconhecimento de padrões e o desenvolvimento do espírito crítico e investigativo, oferecendo oportunidades para explorar grandes conjuntos de dados de uma forma que não é viável manualmente (Bakker & Frederickson, 2005). Podem ainda ser usados como ferramentas informáticas de raciocínio e compreensão matemática e como ferramentas de modelação e de simulação (Jonassen, 2007).

Neves, Monteiro, Rocha, Silva e Ponte (2006) concluíram que a folha de cálculo liberta os alunos de tarefas rotineiras permitindo uma maior concentração no desenvolvimento conceptual. Para além disso, esta ferramenta cria uma interface natural entre os campos dos Números e da Álgebra, proporcionando ambientes de trabalho em que a utilização da Álgebra surge como um procedimento normal e não como uma exigência arbitrária na resolução de problemas. O reconhecimento dos elementos envolvidos num problema e o estabelecimento de relações entre eles constitui um passo fundamental para utilizar a Álgebra na sua resolução. Trata-se de um processo que pode ser facilitado pela folha de cálculo, como referem Dettori et al. (2001). Estes autores consideram a folha de cálculo bastante útil para a introdução da Álgebra, podendo ser um novo meio a integrar na resolução de problemas e ajudar a compreender o que significa resolver uma equação mesmo antes da aprendizagem formal da resolução de equações. Pode ainda facilitar o raciocínio perante um problema, contribuindo para selecionar a informação relevante, e funcionar de forma a introduzir as capacidades de generalização, abstração e síntese, fundamentais na Matemática.

A utilização da folha de cálculo na resolução de problemas acentua a necessidade de identificar todas as variáveis relevantes e, além disso, estimula a procura de relações de dependência entre as variáveis. A definição de relações intermédias entre as diversas variáveis, por meio de fórmulas, isto é, a decomposição de uma relação de dependência em sucessivas relações mais simples é um dos aspetos a salientar nesta ferramenta, com consequências decisivas no processo de resolução de problemas (Carreira, 1992; Haspekian, 2005). A folha de cálculo permite ainda dar uma organização algébrica a uma resolução aparentemente aritmética (Haspekian, 2005).

No entanto, o recurso à folha de cálculo, sem orientação do professor pode levar os alunos a resolverem apenas os problemas através da tentativa e erro. É importante que o professor leve os alunos a tomar consciência que neste ambiente digital estão perante um novo processo de modelação. Os alunos podem resolver e entender o significado de resolver uma equação mesmo antes de lidarem com equações e podem raciocinar acerca das condições de um problema a fim de diminuir o número de ensaios necessários para alcançar a solução. Os alunos podem assim chegar à generalização e abstração. Todos estes aspetos são fundamentais para o desenvolvimento das capacidades cognitivas necessárias para que os alunos se tornem conscientes da natureza da Álgebra (Dettori et al, 2001).

Morishita, Iwata, Yoshida e Yoshida (2001) afirmam que a folha de cálculo permite criar um ambiente que é relativamente fácil para os alunos, ao invés de ambientes de linguagem de programação como o BASIC ou Pascal, onde os alunos manifestam mais dificuldades. Neuwirth e Arganbright (2004) têm um ponto de vista similar, assim como Steward (1994) que sugere que ambos são possíveis, no entanto os alunos consideram ser mais fácil usar a folha de cálculo do que escrever um programa no computador. Para além disso, a escrita de um programa pode, muitas vezes, mascarar a Matemática que se pretende representar, enquanto na folha de cálculo o processo está constantemente exposto.

Um estudo realizado por Sutherland e Rojano (1993) destaca o potencial da folha de cálculo na promoção da compreensão dos conceitos algébricos. Sutherland (2007) usou o ambiente da folha de cálculo para ajudar alunos do ensino secundário a desenvolverem conceitos básicos de dependência algébrica. Uma vez que os alunos têm problemas com a natureza abstrata da Álgebra a folha de cálculo é usada para desenvolver relações com apontar e clicar (*point-and-click*) (Sutherland, 2007). O apontar do rato torna-se uma forma de apoiar os alunos na expressão de relações que, de um modo geral, são representadas automaticamente na linguagem própria da folha de cálculo. Desta forma, a Álgebra na folha de cálculo, aprende-se sem esforço, sem o seu ensino explícito. Os alunos utilizam os cálculos específicos de folha de cálculo para ajudar na construção de regras gerais e frequentemente verificam a sua regra geral, com referência específica aos números. Desta forma são estabelecidas ligações entre os símbolos e números gerais. Comentários semelhantes são feitos por Abramovich (1998), referindo-se a um modelo de folha de cálculo para apoiar uma prova indutiva, este autor afirma que o modelo permite a visualização de uma prova e cognitivamente apoia uma transição de computação para uma linguagem formal da Matemática.

Assim, provavelmente, um dos benefícios dos mais profundos da utilização da folha de cálculo é na economia de tempo. O tempo ganho pode ser gasto na investigação de propriedades dos objetos matemáticos criados no ambiente da folha de cálculo.

4.2.2. A coação entre o aluno e a folha de cálculo

Moreno-Armella, Hegedus e Kaput (2008) e Moreno-Armella e Hegedus (2009), sugerem que a resolução de um problema algébrico e a comunicação matemática envolvida são fruto de uma "coação" permanente do indivíduo e da folha de cálculo. Num estudo realizado acerca da comunicação matemática presente na resolução de problemas com a folha de cálculo (Amado, Nobre, Carreira & Ponte, 2010) chegámos a uma conclusão semelhante. A referida "coação" começa pela necessidade de estruturação das condições do problema em colunas, passa pela introdução de dados numéricos e pela análise do *feedback* imediato proporcionado pela folha de cálculo nas diversas células da tabela e inclui a tradução, em fórmulas ou em números, das relações de dependência entre as variáveis para as células da folha de cálculo. Por fim, o aluno escolhe a solução que lhe surge confirmada pelos resultados exibidos na folha de cálculo. Até certo ponto, as representações proporcionadas pelo Excel constituem, também, um meio de verificação da solução do problema.

A introdução do termo coação é assim incentivada pelas mudanças que a utilização da tecnologia digital trouxe para a atividade matemática dos alunos. Esta ideia está relacionada com o facto de os alunos guiarem e ao mesmo serem guiados por ambientes dinâmicos, como acontece com folha de cálculo. Moreno-Armella e Hegedus (2009) referem que "o aluno e o meio reagem um ao outro e a interação neste processo é o que chamamos de coação entre o aluno e o meio" (p. 510). As produções são assim o resultado de um trabalho colaborativo entre os alunos e a ferramenta tecnológica.

A folha de cálculo proporciona um ambiente de aprendizagem em que a resolução de problemas pode ser explorada de forma dinâmica e não estática como acontece com papel e lápis. A transição da inserção de símbolos de um ambiente estático para ambientes dinâmicos faz emergir novas formas de pensamento simbólico. Neste sentido, Moreno-Armella, Hegedus e Kaput (2008) apresentam cinco fases distintas de desenvolvimento: as duas primeiras dizem respeito a estádios estáticos em ambientes não computacionais; a terceira corresponde a um estádio em que as representações são estáticas mas proveem de um ambiente computacional, como uma calculadora; a quarta fase designada por "dinâmica discreta" tem como exemplo a folha de cálculo onde é possível criar uma lista ou um gráfico e onde a coação pode existir; a quinta e última fase, designada por "dinâmico contínuo" é baseada na anterior, sendo muito sensível às ações do utilizador, arrastando ou movendo objetos de modo a conhecer as suas propriedades matemáticas, reorientando permanentemente as perspetivas do aluno acerca do que está a acontecer.

O trabalho com a folha de cálculo transforma o tipo de interações que o aluno tem com as representações matemáticas que agora surgem integradas num meio com características específicas. A resolução de um problema na folha de cálculo surge da colaboração permanente do aluno com a ferramenta. Tanto ele como a folha de cálculo agem e reagem, um ao outro, durante toda a atividade (Moreno-Armella & Hegedus, 2009). Este tipo de trabalho traz consequências para a expressão do pensamento matemático dos alunos, particularmente do pensamento algébrico, durante a atividade de resolução de problemas.

A coação na folha de cálculo na atividade de resolução de problemas inicia-se com a necessidade de estruturação das condições do problema em colunas. Este procedimento permite identificar um conjunto de números com um único nome o que dá uma imagem da variável. Trata-se de uma ação que faz refletir os alunos e lhes permite compreender o seu significado matemático (Wilson, 2007). Seguidamente, os alunos passam para a introdução de dados numéricos nas diversas células da tabela o que pode incluir ou não a introdução de fórmulas no estabelecimento das relações presentes no enunciado. Nesta fase os alunos podem analisar o *feedback* imediato proporcionado pela folha de cálculo e reorientar as suas ações num fluxo permanente de interações com e pela folha de cálculo. Este trabalho baseado em relações funcionais permite dar uma organização algébrica a uma resolução aparentemente aritmética (Haspekian, 2005). Os alunos escolhem depois a solução que lhe surge confirmada pelos resultados exibidos na folha de cálculo. A resolução de problemas na folha de cálculo e a coação envolvida proporciona um ambiente de trabalho estimulante que favorece uma maior compreensão das relações de dependência entre as variáveis e estimula os alunos a apresentarem gradualmente resoluções algébricas em detrimento de métodos aritméticos (Rojano, 2002).

Com a folha de cálculo, assim como outras ferramentas de natureza interativa como o Geogebra, através de um simples comando temos acesso à forma como o aluno interage com a ferramenta. Em particular, podemos ver como as relações entre as células, colunas ou linhas foram concebidas e quais foram as fórmulas introduzidas para estabelecer essas relações. No caso de serem definidas relações intermédias temos acesso à ordem em que foram concebidas. Este aspeto na folha de cálculo é muito importante para a análise de resoluções em que a construção não foi observada. É assim possível ter acesso a evidências da coação que pode ter existido durante a atividade do aluno com a ferramenta.

Quando os alunos trabalham com ferramentas digitais, o *output* visual e as suas caraterísticas conduzem a uma interpretação de natureza particular (Calder, 2009). Ao trabalharem num ambiente digital, como a folha de cálculo, quando os alunos inserem um *input* é produzido instantaneamente um *feedback* visual o que os pode levar a uma nova reflexão acerca da sua atividade. Isto leva a um reposicionamento da sua perspetiva. Os alunos reconciliam a sua interpretação da tarefa com o seu novo entendimento e encontram a solução ou encetam um processo iterativo oscilando entre a tarefa e a sua compreensão emergente. No entanto, quando surge um *output* que não é o esperado pelos alunos surgem tensões. Este hiato entre o *output* esperado e obtido é o que Calder (2009) designa por "perturbação visual". Quando o *output* gerado difere do esperado, uma sensação de mal-estar é evidente. Esta tensão causa distúrbios nas perceções dos alunos acerca das situações e leva-os a olhar para a tarefa com uma perspetiva diferente. Isto influencia a sua interpretação e as suas decisões, alterando a sua trajetória de aprendizagem. A sua compreensão evolui de forma distinta tendo em conta as perturbações visuais que ocorreram ao longo da sua atividade.

É esta tensão visual que pode incentivar ou servir de andaime para uma reflexão mais aprofundada que pode levar à reformulação da perspetiva do aluno, gerando conjeturas informais e raciocínio matemático da forma como interpretam algo inesperado. Este raciocínio matemático intuitivo pode ser de natureza visual. Lin (2005) afirma que levantar e refutar conjeturas pode mesmo ser considerada uma estratégia de aprendizagem. Calder (2009) considera que nas aprendizagens realizadas através de um meio digital, onde as conjeturas dos alunos estão enraizadas nesse ambiente, a compreensão surge igualmente com uma natureza distinta. Este autor considera que as perturbações visuais instigam e influenciam a natureza das interações dos alunos no trabalho com a resolução de problemas na folha de cálculo. Por outro lado, as perturbações visuais podem levar os alunos a refletir nas suas conjeturas iniciais e reposicionar a sua perspetiva, estimulando o pensamento matemático na medida em que eles reconciliam a diferença entre aquilo que esperavam e o *output* atual. Esta nova generalização é expressa em termos visuais, referindo-se ao tipo e à posição dos dígitos.

Na folha de cálculo, os alunos ao escreverem fórmulas que relacionem algumas células podem ver os resultados numéricos no computador. Este *feedback* é importante para a atividade dos alunos, pois pode ser suficiente para os incentivar a uma reconstrução das fórmulas utilizadas, o que soluciona o problema encontrado e não apenas para um caso em particular. Isto é um aspeto que reforça o facto de a folha de cálculo ser um impulsionador da generalização em Matemática. A visualização do *output* da folha de cálculo suscita uma nova reflexão acerca do problema em causa e, em particular, da fórmula introduzida. Isto estimula a evolução do pensamento matemático, permitindo aos alunos realizar trabalho de investigação (Calder, 2009).

4.3. Tarefas matemáticas e representações matemáticas

Para além das razões elencadas para a seleção das tarefas, Ponte (2014) destaca ainda, outro aspeto que reforça a relevância que estas assumem na aprendizagem da Matemática:

> Um aspeto especialmente importante das tarefas são as representações que lhes estão associadas, sendo necessário perceber como articular diferentes tipos de representações (p.14).

Deste modo, o professor na seleção de tarefas deve dar particular atenção às representações que lhe estão associadas, quer as que estão presentes nos enunciados, quer as que podem surgir por iniciativa do aluno ou incentivadas pelo próprio professor. A antecipação das diferentes representações que podem emergir da parte dos alunos é um aspeto importante de modo a promover novos conhecimentos e a relacioná-los com outros já adquiridos.

O trabalho com tarefas ricas e promotoras de diversas representações, em sala de aula, tem uma grande influência no ambiente e na riqueza das experiências de aprendizagem (Ponte, 2014).

Neste estudo, ao longo do processo de construção das tarefas são usados vários contextos de modo a promover o recurso a diferentes representações, tornando assim os alunos mais flexíveis nas suas estratégias de resolução. O recurso a várias representações é uma recomendação presente no programa de matemática para o ensino básico (ME, 2007).

O recurso à tecnologia, em particular à folha de cálculo, tem como um dos propósitos facilitar e potenciar o trabalho com representações que de outra forma torna-se inviável em sala de aula com um tempo limitado. O recurso à folha de cálculo pode constituir uma mais-valia ao permitir várias representações, em simultâneo, num ambiente dinâmico. No estudo de qualquer um dos tópicos em análise será uma mais-valia ao proporcionar rapidamente, aos alunos, uma representação gráfica.

O uso de diferentes representações na exploração de uma tarefa estimula a flexibilidade na escolha das representações para resolver essa tarefa e proporciona segurança para o seu uso posterior pelos alunos. Na resolução de uma tarefa se os alunos têm conhecimento de diferentes representações a conversão entre representações surge naturalmente (Friedland & Tabach, 2001). A flexibilidade na conversão entre diversas representações constitui um aspeto fundamental no desenvolvimento do pensamento algébrico, como refere Schoenfeld (2008).

CAPÍTULO 5

A experiência de ensino

Neste capítulo começo por descrever a experiência piloto que teve lugar numa turma e que motiva a realização da experiência de ensino, na aula de Matemática, que sustenta este estudo. Em seguida, apresento as ideias que estão subjacentes à construção da experiência de ensino e apresento a planificação dos três tópicos que a constituem.

5.1. A experiência prévia com a turma

Durante o ano letivo de 2008/2009, enquanto professora de Matemática da turma em estudo, no 7.º ano, procurei diversificar as tarefas de modo a promover o sucesso dos meus alunos. Ao longo desse ano letivo, proporcionei aos alunos novas experiências, em sala de aula, nomeadamente a utilização das tecnologias para apoiar a resolução de problemas. O recurso à utilização da folha de cálculo foi a opção que se revelou mais adequada naquele momento, embora os meus conhecimentos relativamente à utilização desta ferramenta fossem ainda reduzidos. O recurso sistemático e continuado à resolução de problemas, fez emergir diversos raciocínios e estratégias bastante originais e reveladoras da criatividade dos alunos, que de outro modo nunca teria sido possível identificar. De um modo geral, os alunos mostraram apreciar a resolução de problemas e a estratégia desenvolvida mostrou ter contribuído significativamente para melhorar o sucesso de alguns deles nesta disciplina.

A potencialidade da resolução de problemas revelou-se nos diferentes tipos de problemas propostos, fossem de conteúdo, de capacidades ou de processo (Palhares, 1997) como é descrito em Amado, Nobre & Carreira (2009).

Nos problemas de conteúdos e de capacidades emergem algumas dificuldades provocadas pela necessidade de ativação de conceitos matemáticos escolares. Nos problemas de processo, que implicam sobretudo a conceção e realização de uma estratégia que gere um modelo da situação descrita, regista-se uma grande diversidade de estratégias de resolução e um maior envolvimento dos alunos. Esta experiência permite-me concluir sobre a importância do recurso, em sala de aula, a estes dois tipos de problemas, quer para promover uma aprendizagem mais sólida dos conteúdos matemáticos, quer para motivar e envolver ativamente os alunos na resolução de problemas, levando-os a acreditar na sua capacidade para aprender matemática.

No ano letivo de 2009/10 dei continuidade ao trabalho iniciado no ano anterior com esta turma. Neste ano letivo, em pleno período de vigência do Plano da Matemática II, tive a oportunidade de usufruir das aulas de Estudo Acompanhado, um espaço privilegiado para o desenvolvimento da competência matemática e para continuar a desenvolver este trabalho na resolução de problemas numéricos e/ou algébricos com recurso à folha de cálculo. Atendendo ao número reduzido de computadores existentes na sala e à atividade desenvolvida, foi privilegiado o trabalho em pares. O grau de dificuldade dos problemas foi aumentando gradualmente e os alunos foram sempre estimulados a justificar os procedimentos realizados.

Numa primeira fase, foi necessário incentivar os alunos, durante a resolução dos problemas, a recorrer à folha de cálculo. Algumas das resoluções foram, em parte, guiadas para que os alunos começassem a contactar e a entender as funcionalidades desta ferramenta.

Em simultâneo e, em estreita colaboração com a organização do Campeonato de Matemática Sub14, que decorreu entre janeiro e junho de 2010, foram lançados alguns problemas de cariz numérico e/ou algébrico que foram trabalhados nas aulas de Estudo Acompanhado.

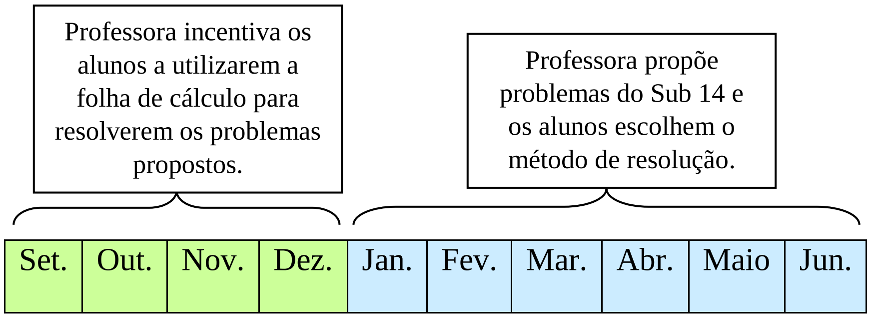


Figura 5.1: Cronograma (simplificado) do trabalho efetuado no estudo prévio.

Neste período foram utilizados diversos instrumentos tendo em vista obter dados que descrevessem com pormenor as estratégias usadas (Tabela 5.1). Assim, para a recolha de dados procedi à recolha das produções de outros alunos (ficheiros *xls*) e fiz gravações: dos ficheiros de Excel produzidos pelos alunos, dos diálogos de dois pares de alunos em áudio e da sequência de *frames* criados no Excel. Para efetuar o registo detalhado dos processos dos alunos, em sala de aula, recorri à utilização do *software Camtasia Studio* da *TechSmith*, versão 6.0. Este *software* permitiu-me recolher, em simultâneo, os diálogos dos alunos e a sequência de ecrãs no computador que demonstram todas as ações que os alunos realizaram. Estes registos permitiram-me analisar os diálogos dos alunos ao mesmo tempo que observei as suas operações na folha de cálculo, tais como movimentar o rato, selecionar uma célula ou de um conjunto de células, introduzir fórmulas ou recorrer ao menu para executar determinado comando. Esta análise, com base nos protocolos de resolução em computador, é recomendada na investigação, em particular, por possibilitar a descrição em tempo real das ações no computador (Weigand & Weller, 2001).

Tabela 5.1: Recolha de dados durante o estudo prévio.

		Ambiente
Ano letivo 2009/10	Tarefas de diagnóstico	Aula de Estudo Acompanhado
	Gravação dos ficheiros em Excel produzidos pelos alunos	
	Gravação do ecrã do computador e dos diálogos de dois pares de alunos numa turma e de um par e outro aluno que trabalhou individualmente.	
	Notas de campo	
	Entrevistas clínicas	

A observação participante revelou-se muito importante neste trabalho ao permitir uma proximidade continuada com o fenómeno em estudo e, em simultâneo, efetuar o registo de notas de campo. Em dois momentos distintos, foram aplicadas tarefas de diagnóstico que consistiram na apresentação de um problema numérico/algébrico acompanhado de uma proposta de resolução elaborada com recurso à folha de cálculo, mas sem que os alunos tivessem acesso às fórmulas introduzidas. Foram colocadas várias questões ao nível conceptual e, por fim, uma questão que procurou conhecer os saberes técnicos dos alunos para encontrar uma resolução no Excel. No final do ano letivo realizei entrevistas clínicas a alguns pares de alunos, onde pedi a resolução de um problema, com recurso à folha de cálculo.

Na tabela 5.2 sintetizo as tarefas propostas em sala de aula. Um estudo de Amado, Nobre, Carreira e Ponte (2010) mostra como a resolução de um problema e a comunicação matemática envolvida são fruto de uma coação entre o aluno e a folha de cálculo. Esta coação começa pela necessidade de estruturação das condições do problema em colunas, passa pela introdução de dados numéricos e pela análise do *feedback* proporcionado pela folha de cálculo nas diversas células da tabela e inclui a tradução, em fórmulas ou números, das relações de dependência entre as variáveis para as células. Por fim, o aluno escolhe a solução que lhe surge confirmada pelos resultados exibidos na folha de cálculo. Até certo ponto, as representações proporcionadas pelo Excel constituem também um meio de verificação da solução do problema.

Este estudo piloto permitiu-me observar as potencialidades da resolução de problemas no desenvolvimento do pensamento algébrico. O progresso dos alunos resultou das estratégias usadas na resolução de problemas na folha de cálculo que lhes permitiu identificar variáveis e relações entre essas variáveis cuja exploração os conduzia à(s) solução(ões) dos problemas.

Tabela 5.2: Tarefas propostas no estudo prévio.

	Tarefas propostas
Iniciais	O que eu sei fazer no Excel
	Problema: Carrinhos de supermercado
	Problema: Ovos na capoeira
	Problema: Saltos e saltinhos
	Problema: Puxa um banco ou uma cadeira
Problemas do Campeonato Sub 14	Promoção de ano novo
	O tesouro do Rei Edgar
	Canteiros no jardim municipal
	Losangos com triângulos
	A colheita de maracujás do Sr. Tomás
	A inauguração do restaurante “Sombrero Style”

Os resultados deste estudo preliminar foram bastante encorajadores e estimulantes para a minha de decisão de realizar uma experiência de ensino, no ano letivo de 2010/11, na aula de Matemática, envolvendo atividades de resolução de problemas com a folha de cálculo, na abordagem de tópicos de Álgebra que descrevo a seguir.

5.2. Aspetos gerais da experiência de ensino

A Educação Matemática Realística (RME) é uma perspetiva que assenta na ideia defendida por Freudenthal de que a Matemática é uma atividade humana. Neste sentido o professor, em vez de tentar fazer conexões com a Matemática “pronta”, procura ajudar os alunos a construir a Matemática de uma forma mais fundamentada, através da *reinvenção guiada* (Gravemeijer, 2005). Assim, dado um problema contextualizado, os alunos devem ter oportunidade de o modelar através de desenhos, diagramas ou tabelas, notações informais ou notações matemáticas mais formais. O trabalho com estes modelos ajuda-os a reinventar a Matemática formal que se pretende atingir. Numa primeira fase, os modelos referem-se a situações concretas que são experiências reais para os alunos, pelo que devem permitir o recurso a estratégias informais. Numa fase posterior, quando o aluno se depara com problemas semelhantes, os modelos tornam-se mais objetivos e importantes como base para o raciocínio matemático, em lugar de constituírem apenas uma forma de representar um problema contextualizado. Assim, regista-se uma mudança nas características do modelo que passa de um modelo de uma situação específica para um modelo mais geral e formal. Isto significa que há uma transferência do raciocínio acerca da modelação da situação contextualizada para o raciocínio acerca das relações matemáticas. Esta abordagem é importante pois através da resolução de problemas os alunos evoluem para níveis de compreensão mais concretos.

Gravemeijer (1997) considera que os manuais escolares disponíveis são, geralmente, pobres em atividades que promovam esta abordagem, na medida em que propõem essencialmente exercícios de aplicação e raramente apresentam situações da vida real dos alunos que permitam uma abordagem da matemática de acordo com a perspetiva da RME.

Um relatório de avaliação de manuais escolares do 9.º ano, da autoria de Ponte, Oliveira, Pires, Nunes e Janeiro (2007) apresenta uma posição semelhante à referida por Gravemeijer, ao considerar que o manual "nem sempre trata os temas matemáticos com a profundidade adequada" (p. 25) e que "não promove uma aprendizagem integrada dos conhecimentos, dado que dá ênfase à apresentação de conhecimentos isolados, ao domínio de regras e procedimentos e, relaciona de forma insatisfatória, o conhecimento matemático novo com o trabalhado anteriormente. A falta de articulação e a superficialidade na apresentação de certos conhecimentos são consequência, em grande parte, de uma divisão rígida dos subtemas em teoria e prática" (p. 26).

O manual escolar adotado na escola para o 9.º ano apresenta um número insuficiente de propostas desafiadoras que contribuam para o desenvolvimento das capacidades transversais. A maioria das propostas são tarefas simples e de aplicação direta dos conhecimentos. Deste modo, torna-se necessário propor aos alunos tarefas mais ricas, que promovam o raciocínio dedutivo e indutivo e que os ajudem a compreender a ideia de generalização. No que concerne ao desenvolvimento da comunicação matemática são escassas as tarefas que envolvem a interpretação, justificação ou argumentação escrita de ideias matemáticas.

Neste contexto e tendo presente a importância que as tarefas desempenham na aprendizagem da Matemática (NCTM, 2000), considero indispensável a criação de tarefas que promovam tais objetivos e uma prática compreensiva de procedimentos. O recurso ao manual é, do meu ponto de vista, manifestamente insuficiente, uma vez que o recurso apenas aos exercícios rotineiros apresentados, dificilmente promove as aprendizagens desejadas. Os manuais escolares, raramente apresentam tarefas de exploração e investigação ou jogos educativos. Acresce ainda uma quase inexistência de propostas que promovam a utilização de *software* educativo. Contudo, o manual escolar por ser o principal recurso de que o aluno dispõe, deve ser utilizado, dentro e fora da sala de aula, para a resolução de algumas tarefas na sua forma original, com extensões ou alterações.

5.3. Conjetura de ensino-aprendizagem

A revisão da literatura acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico, assim como o trabalho que realizo, em particular, com recurso à folha de cálculo no estudo piloto e ao longo da minha experiência como professora desta turma levam-me a formular uma conjetura de ensino-aprendizagem.

A conjetura que formulo assenta no pressuposto de que os alunos desenvolvem melhor o seu pensamento algébrico, em particular no que respeita à aprendizagem de métodos formais algébricos, se o trabalho em sala de aula privilegiar a resolução de problemas, nomeadamente, com recurso à folha de cálculo e em articulação com o papel e lápis. Para tal, reveste-se da maior importância a construção de uma sequência de tarefas variadas. Estas devem ser criteriosamente selecionadas de modo a promover uma diversidade de representações, desde as mais informais até às mais formais (algébricas), permitindo aos alunos uma progressiva formalização algébrica, com compreensão.

A experiência de ensino decorre no ano letivo de 2010/11, nas aulas de Matemática de uma turma do 9.º ano de escolaridade, nos tópicos: (i) Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas; (ii) Proporcionalidade inversa. Representações gráficas; e (iii) Equações do 2.º grau a uma incógnita.

Esta intervenção pedagógica contempla tarefas diversas onde a resolução de problemas assume um papel privilegiado, no entanto são também incluídos outro tipo de tarefas tais como exercícios. Em determinadas tarefas, a folha de cálculo é apresentada como ferramenta de suporte para a sua resolução. O trabalho, em sala de aula, combina momentos de trabalho individual, em pares, em pequenos grupos e em grande grupo quando o objetivo é promover a discussão e elaborar sínteses.

Antes do início do estudo de cada tópico é realizada uma avaliação de diagnóstico, de modo a garantir uma melhor gestão do processo de ensino e aprendizagem (Santos, 2008). A realização de uma ficha de diagnóstico tem como o objetivo obter dados sobre o conhecimento dos alunos de modo a ajustar a sequência de tarefas a propor e a forma de as abordar. Tal como Santos (2008), também Cortesão (2002) sublinha a importância deste tipo de avaliação na medida em que "pode fornecer ao professor elementos que lhe permitem adequar o tipo de trabalhos que vai desenvolver às características e conhecimentos dos alunos com que irá trabalhar" (p. 39). Tenho consciência de que esta avaliação diagnóstica tem um carácter temporário pois, como indica a autora:

> Os dados fornecidos pela avaliação diagnóstica não podem ser tomados como um 'rótulo' que se 'cola' para sempre ao aluno, mas sim como um conjunto de indicações que caracterizam o nível a partir do qual o aluno e professor, em conjunto, conseguiam um progresso na aprendizagem. (Cortesão, 2002, p. 39).

As tarefas propostas aos alunos incluem a resolução de problemas numéricos e/ou algébricos, no Excel, nos tópicos em estudo numa perspetiva de RME. Em sala de aula, os alunos dispõem de computadores para a resolução das tarefas e é privilegiado o trabalho em pares. Este tipo de trabalho é importante na aprendizagem da linguagem simbólica algébrica, uma vez que quando os alunos trabalham juntos o seu discurso começa progressivamente a conter linguagem formal (Healy, Pozzi & Sutherland, 1997).

Nesta fase procuro que a folha de cálculo sirva de suporte para a aprendizagem formal da Álgebra, nos temas referidos anteriormente. Deste modo, em cada um dos tópicos em estudo, as tarefas inicias, são problemas suscetíveis de resoluções formais do ponto de vista algébrico. Numa primeira fase, é proposta a sua exploração na folha de cálculo. Nos vários momentos de resolução das tarefas há sempre um período dedicado à discussão e síntese, de modo a criar oportunidades de construção de ligações entre o trabalho realizado na folha de cálculo e o trabalho com papel e lápis, utilizando o simbolismo algébrico.

Na experiência de ensino, as representações assumem, desde o primeiro momento, um papel fundamental. O contacto dos alunos com uma diversidade de representações serve de suporte para a construção dos conceitos e favorece o estabelecimento de conexões. O recurso a diferentes representações promove a análise de conceitos através de diferentes perspetivas, o que permite enriquecer e aprofundar o conhecimento que os alunos têm acerca desses conceitos.

Em cada um dos tópicos, numa fase inicial, os alunos resolvem as diversas tarefas utilizando os seus próprios métodos. Normalmente incluem representações no sistema de notação numérico (com recurso a operações elementares e à estratégia de *unwind*), pictóricas e outras possibilitadas pela folha de cálculo, como nomeação de colunas, construção de variáveis-coluna e a escrita de relações entre células. Posteriormente, procuro levar os alunos a recorrer a outro tipo de representação como a algébrica e a gráfica. Em todos os tópicos em estudo os alunos contactam com representações gráficas e com expressões algébricas, uma vez que os gráficos transmitem uma informação visual diferente da que é obtida apenas através das expressões.

No cronograma da figura 5.2 apresento a calendarização, as tarefas e o número de aulas dedicado a cada tópico em estudo. O primeiro tópico a estudar no 9.º ano é Estatística e Probabilidades. Neste tema surgem novos conceitos que permitem estabelecer algumas conexões com a Álgebra, por exemplo, situações em que podem ser utilizadas equações.

As orientações curriculares para o ensino da Álgebra alertam para o facto de que o trabalho com equações, sistemas de equações e inequações pode levar os alunos à mecanização de procedimentos sem conhecimento ou compreensão da atividade que estão a desenvolver. Numa tentativa de dar sentido à aprendizagem da Álgebra, procuro proporcionar aos alunos experiências informais simples, mas significativas, antes de lhes apresentar situações que envolvem resoluções formais algébricas e mais complexas.

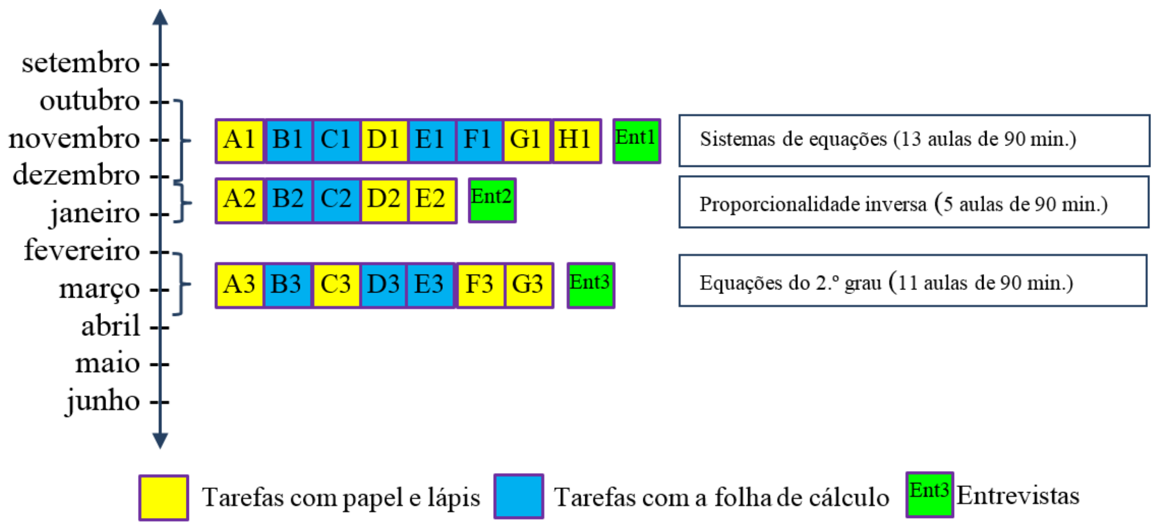


Figura 5.2: Cronograma da experiência de ensino.

5.4. Planificação do tópico "Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas"

A planificação deste tópico segue as recomendações curriculares recentes, em particular, as que constam no *Programa de Matemática* para o Ensino Básico de 2007. Na tabela 5.3 apresento os objetivos definidos no programa para este tópico.

Tabela 5.3: Objetivos do estudo do tópico "Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas" (ME, 2007, p. 57).

Objetivos específicos	**Notas**
Interpretar graficamente as soluções de um sistema de equações.	Na interpretação gráfica de sistemas de equações, tratar os casos de sistemas possíveis (determinados e indeterminados) e impossíveis.
Resolver sistemas de equações pelo método de substituição.	
Resolver e formular problemas envolvendo equações e sistemas de equações.	

Antes de iniciar o estudo deste tópico, apresento aos alunos a uma ficha de diagnóstico. Nesta ficha procuro abranger aspetos gerais relacionados com o tema Álgebra, de modo a conhecer as suas dificuldades neste tema. A extensão da ficha deve-se à intenção de obter uma visão o mais global possível dos conhecimentos dos alunos e detetar melhor as suas dificuldades. Esta primeira tarefa permite também que os alunos recordem alguns conteúdos trabalhados no ano letivo anterior.

Nas tarefas seguintes são propostos problemas, alguns dos quais exigem o recurso à folha de cálculo. Após este trabalho são formalizados os métodos de resolução gráfico e de substituição. No anexo 6 apresento uma planificação com os objetivos e os recursos a utilizar nas aulas. Os enunciados das tarefas propostas para o estudo deste tópico podem ser consultados nos anexos 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14.

Um sistema de equações pode ser resolvido através de diferentes processos, como os métodos de substituição, resolução gráfica, adição ordenada e utilização de matrizes. O Programa de Matemática do Ensino Básico, anterior a 2007, prevê o estudo do método de substituição e de resolução gráfica, no 9.º ano. No entanto, as tarefas que proponho têm um objetivo mais amplo, procurando também desenvolver nos alunos a compreensão do método de adição ordenada, levando-os a recorrerem a este método sempre que considerem conveniente.

A folha de cálculo é utilizada no estudo deste tópico com vários propósitos, em especial, como suporte para a formalização do método de substituição. Em cada momento em que surge a necessidade de uma formalização em linguagem algébrica, é proposta uma tarefa com a folha de cálculo com o intuito de servir de ponte para a linguagem formal algébrica, como mostro na tabela 5.4.

Tabela 5.4: Propósito de utilização da folha de cálculo no estudo do tópico "Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas".

Tarefas	Propósito de utilização da folha de cálculo
A-1: Diagnóstico	…………………………
B-1: Adivinhar o dia de aniversário	Formalizar a escrita de equação com duas incógnitas.
C-1: O Peso das 3 irmãs	Formalizar da escrita de um sistema de equações.
D-1: O Valor dos animais	…………………………
E-1: Corrida de cavalos	Resolver graficamente de sistemas de equações. Classificar de sistemas.
F-1: Galinhas e coelhos	Formalizar o método de substituição de resolução de sistemas de equações.
G-1: Miscelânea	…………………………
H-1: Tarefa de investigação	…………………………

5.5. Planificação do tópico "Proporcionalidade Inversa. Representações gráficas"

Para o tópico da "Proporcionalidade inversa e Representações gráficas", o programa aponta os objetivos indicados na tabela 5.5.

Desde cedo que as crianças são confrontadas no dia-a-dia com situações de proporcionalidade direta e inversa e outras em que não existe qualquer tipo de proporcionalidade. Uma situação muito comum é a seguinte: "quanto mais dinheiro tenho mais voltas posso dar no carrossel" ou "quanto mais depressa eu for menos tempo demoro". O estudo da proporcionalidade inversa, como uma função surge no 9.º ano. Neste tópico, os alunos são, muitas vezes, confrontados com uma grande variedade de situações problemáticas que envolvem proporcionalidade direta e outras onde não existe proporcionalidade. Assim, pretendo proporcionar aos alunos o contacto com representações gráficas e que distingam as que representem situações de proporcionalidade (direta e inversa) de outras. Para além disso, os alunos devem ainda conseguir interpretar gráficos variados e associar uma representação gráfica a uma determinada situação, como enchimento de recipientes, passeios, corridas, etc. No anexo 16, apresento a planificação para o estudo deste tópico. As tarefas constam dos anexos 17 ao 21.

Tabela 5.5: Objetivos do estudo do tópico "Proporcionalidade inversa" (ME, 2007, p. 57).

Objetivos específicos	**Notas**
Analisar situações de proporcionalidade inversa como função do tipo $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$.	Propor a análise de gráficos que traduzam casos de proporcionalidade inversa em contextos da vida real.
Representar graficamente situações de proporcionalidade inversa.	

A folha de cálculo também é utlizada para a resolução de problemas no estudo deste tópico, em diferentes momentos e com diferentes propósitos, como mostro na tabela 5.6.

Tabela 5.6: Propósitos de utilização da folha de cálculo no estudo do tópico "Proporcionalidade Inversa. Representações gráficas".

Tarefas	**Propósito de utilização da folha de cálculo**
A-2: Diagnóstico	…………………………
B-2: Os canteiros da horta do Sr. Tomás	Formalizar a escrita da expressão algébrica de uma situação de proporcionalidade inversa. Representar graficamente funções do tipo $y = \frac{k}{x}$ (em IR^+, $k > 0$).
C-2: Produtos fixos	Representar graficamente funções do tipo $y = \frac{k}{x}$ (em IR).
D-2: Miscelânea	…………………………
E-2: Representações gráficas	…………………………

5.6. Planificação do tópico “Equações do 2º grau a uma incógnita”

Neste tópico pretende-se que os alunos resolvam equações do 2.º grau completas e incompletas. Os objetivos curriculares para este tópico estão presentes na tabela 5.7. Sempre que possível, as equações são trabalhadas em paralelo com a representação gráfica da função correspondente. Em particular, alguns problemas propostos para resolver na folha de cálculo incluem o esboço do gráfico para uma melhor compreensão por parte dos alunos do significado de uma função quadrática e das suas soluções. Vaiyavutjamai e Clements (2006) explicam que as dificuldades dos alunos nas equações do 2.º grau surgem muitas vezes associadas ao conceito de incógnita neste tipo de equações. Os alunos até conseguem obter as soluções de uma equação do tipo $(x-a)(x-b)=0$ mas não sabem o que elas representam, não conseguem interpretar o seu significado. Didiş (2011) corrobora as ideias destes autores afirmando que os alunos têm dificuldades em compreender o significado dos símbolos nas equações do 2.º grau e acrescenta que um aspeto que pode melhorar a compreensão é variar a forma de apresentar as equações, não usando apenas na forma canónica, mas recorrer também a outras formas, salientando que este aspeto pode ainda promover um melhor entendimento de técnicas de factorização. Por outro lado, este autor salienta que se o professor encorajar os alunos a utilizar diferentes técnicas na resolução de equações do 2.º grau pode melhorar a compreensão que os alunos têm dessas equações. Estes aspetos são também tidos em consideração na planificação deste tópico. No anexo 23 apresento a planificação e do anexo 24 ao anexo 30, as tarefas.

À semelhança dos outros tópicos, também no estudo deste, a folha de cálculo é utilizada com diferentes propósitos como sintetizo na tabela 5.8.

Tabela 5.7: Objetivos do estudo do tópico “Equações do 2.º grau a uma incógnita”. (ME, 2007, p. 57).

Objetivos específicos	**Notas**
Resolver equações do 2.º grau a uma incógnita	Propor a adição algébrica e a multiplicação de polinómios como i) $2x-1$ e $3x+2$ ii) $x+2$ e x^2-3x+2 Os alunos devem utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios tanto no cálculo numérico como na factorização de polinómios. Por exemplo, $87^2=(80+7)^2=80^2+2\times 80\times 7+7^2$ $(x-3)^2-4=(x-3)^2-2^2=(x+5)(x+1)$ Começar a resolução de equações do 2.º grau pelas equações incompletas. Utilizar a noção de raiz quadrada, a decomposição em fatores e lei do anulamento do produto e a fórmula resolvente. O estudo deste tema é uma boa oportunidade para os alunos com melhor desempenho matemático demonstrarem algebricamente a fórmula resolvente.

Tabela 5.8: Propósitos de utilização da folha de cálculo no estudo do tópico “Equações do 2.º grau a uma incógnita”.

Tarefas	**Propósito de utilização da folha de cálculo**
A-3: Diagnóstico	…………………………
B-3: As idades dos irmãos	Deduzir a fórmula da diferença de quadrados.
C-3: Factorização	…………………………
D-3: A bola saltitona	Calcular zeros de funções e o máximo de funções do tipo $y=ax^2+bx$, $a<0$ e interpretar o seu significado no contexto; Fazer a representação gráfica de funções do tipo $y=ax^2+bx$, $a<0$.
E-3: A experiência no laboratório	Fazer a representação gráfica de uma função do tipo $y=ax^2+bx+c$, $a>0$. Calcular imagens e interpretar o seu significado no contexto.
F-3: A fórmula resolvente	…………………………
G-3:Resolução de problemas	…………………………

5.7. A sala de aula

A sala de aula proporciona aos alunos um ambiente favorável para a aprendizagem, centrado na sua atividade. Nesta experiência de ensino a organização das aulas privilegia três ou quatro momentos distintos tal como é sugerido por Canavarro, Oliveira e Menezes (2014) e Stein, Engle, Smith e Hughes (2008). Num primeiro momento, a tarefa é apresentada, seguindo-se alguns esclarecimentos aos alunos se tal se mostrar necessário. O segundo momento é dedicado ao trabalho dos alunos, preferencialmente em pares; havendo, contudo, alguns momentos em que pode ocorrer em pequenos grupos. Dependendo da natureza da tarefa ou de algumas dificuldades manifestadas, podem surgir momentos de discussão intercalados pelo trabalho dos alunos. A discussão é o momento em que alunos partilham o trabalho desenvolvido com os colegas. Este é o momento oportuno para promover o diálogo entre alunos e entre alunos e professora. Após a conclusão da discussão segue-se a síntese das ideias e/ou conceitos tratados. Nesta última fase os alunos são também convidados a participar.

5.8. Avaliação das aprendizagens

A planificação de uma experiência de ensino deve integrar a avaliação dos alunos. Neste trabalho são tidos em conta os critérios de avaliação definidos no Departamento Curricular de Matemática e Ciências Experimentais da escola onde leciono, assim como os documentos nacionais de referência no domínio da avaliação. Os critérios de avaliação preveem a realização de testes escritos globais, fichas de trabalho temáticas, apresentações orais, observação direta, questionamento oral, o caderno diário e trabalho de casa. Como refere Santos (2011), um mesmo instrumento de avaliação pode servir propósitos distintos. Para esta investigadora o importante reside na interpretação que fazemos da informação recolhida e a consequente ação que daí decorre. Desta forma, tenho sempre presente a importância e a necessidade de uma avaliação ao serviço das aprendizagens dos alunos procurando que os resultados obtidos sirvam acima de tudo para fomentar a aprendizagem da Matemática.

A informação que recolho diariamente permite-me avaliar o progresso dos alunos no que se refere ao desenvolvimento do pensamento algébrico nos três tópicos que me proponho estudar: (i) sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, (ii) proporcionalidade inversa, representações gráficas e (iii) equações do 2º grau a uma incógnita. A análise das resoluções escritas das tarefas, dos trabalhos na folha de cálculo e da interação entre os alunos e alunos-professora na sala de aula, permite-me observar e compreender o desenvolvimento das aprendizagens e reformular a planificação sempre que necessário.

No decorrer das aulas a avaliação formativa tem como propósito identificar as dificuldades dos alunos, com o objetivo de melhorar as suas aprendizagens, estando sempre presente a intencionalidade de valorizar o que os alunos mostram conhecer para promover novas aprendizagens. Numa perspetiva de avaliação reguladora, o erro é entendido como inerente ao processo de aprendizagem e é rentabilizado para a promoção das aprendizagens (Santos et al., 2010).

O clima de trabalho existente na sala de aula tem sido construído desde o 7.º ano, deste modo os alunos estão habituados a colocar as suas dúvidas sem medo ou receio de repercussões negativas na sua classificação. Os alunos estão igualmente habituados ao trabalho em pares, a discutir as ideias entre si, com respeito e de acordo com as regras estabelecidas. O meu papel como professora é de questionar os alunos de modo a traçarem o seu caminho para alcançar a resposta. No desenvolvimento das aulas são cumpridas as normas legalmente estabelecidas assim como as orientações curriculares, em particular as contidas no Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2007).

CAPÍTULO 6

Metodologia de investigação

Neste capítulo começo por expor alguns aspetos que considero relevantes a propósito deste estudo que tem como contexto de investigação a minha sala de aula e no qual assumo o duplo papel de professora e investigadora. Fundamento, em seguida, a opção por uma metodologia qualitativa. Por fim, apresento e descrevo os procedimentos de recolha e de análise dos dados.

6.1. A realização de estudos em sala de aula

Num primeiro momento, o termo investigação pode parecer intimidante para os principiantes, no entanto, é algo que faz parte do nosso dia-a-dia (Burton & Bartlett, 2005). Tradicionalmente, para estudar um acontecimento ou para melhor se compreender determinados fenómenos, nos mais diversos contextos em que estes ocorrem, observamos, procuramos ouvir com atenção os envolvidos, questionamos diferentes pessoas, fazemos pesquisas em livros, revistas e na Internet, entre outros.

Na sala de aula, professores e alunos estão constantemente a interpretar o que se está a passar em seu redor, observando-se mutuamente, embora com propósitos muitas vezes distintos. “Eles ouvem atentamente, observam e esperam, por respostas, para ações específicas” (Burton & Bartlett, 2005, p. 13). Este processo de recolha de dados pode ser mais ou menos informal, dependendo do objetivo que o professor tem em mente. Burton e Bartlett são de opinião que os professores são investigadores e que isso é essencial para o seu desenvolvimento profissional no sentido de desenvolverem uma abordagem crítica ao seu próprio trabalho. Ponte (2002) refere ainda que este “é um processo privilegiado de construção do conhecimento” (p. 6) que não passa apenas por uma forma de desenvolvimento profissional do professor, mas que ao mesmo tempo beneficia a escola a que ele pertence permitindo a reformulação “das formas de trabalho, a sua cultura institucional, o seu relacionamento com o exterior e até os seus próprios objetivos” (p. 6). Contudo, parece ainda persistir um grande fosso entre a investigação em educação matemática e as práticas letivas. Kieran, Krainer e Shaughnessy (2013) analisam a tendência crescente da investigação em educação matemática no sentido de colmatar esta lacuna entre a investigação e as práticas letivas, defendendo um maior envolvimento dos professores no processo de investigação. Estes autores são de opinião que, apesar da importância do professor-investigador, na maioria das situações, os professores são apenas vistos como meros informantes de dados/informação, em vez de serem tidos como produtores de conhecimento ou investigadores. Neste sentido, defendem a necessidade de a comunidade científica se esforçar por promover o potencial papel dos professores na investigação, bem como valorizar os seus benefícios quer para os professores quer para os investigadores desse tipo de trabalho. Kieran et al. (2013) consideram que os professores são parte interessada nesse processo, quando são participantes ativos na investigação, beneficiando quer ao nível do desenvolvimento profissional, quer ao nível de novo conhecimento científico.

Enquanto professora, uma das minhas preocupações constantes tem sido a de entender as razões das dificuldades dos alunos na disciplina de Matemática. Deste modo, ao longo da minha carreira tenho procurado modificar a minha prática profissional de modo a contribuir para a melhoria da qualidade das aprendizagens dos meus alunos e, em simultâneo, para a melhoria dos seus resultados escolares. A realização deste estudo surge como uma oportunidade de realizar uma investigação, na minha prática letiva, de modo mais aprofundado, guiada por questões de investigação específicas e uma metodologia delineada com rigor. Perante esta investigação assumo, em simultâneo, o papel de professora e investigadora o que constitui uma opção metodológica central neste estudo. Estou consciente de que é através da interação continuada com os alunos que emerge o conhecimento que pretendo alcançar; deste modo o meu duplo papel pode constituir uma mais-valia em todo o processo de recolha de dados. Como investigadora procuro compreender e interpretar os fenómenos relacionados com a aprendizagem dos métodos formais algébricos que ocorrem em sala de aula, tendo em conta tanto as ações dos alunos e as minhas, enquanto professora da turma.

6.2. Abordagem e *design*

6.2.1. A abordagem

Em qualquer investigação, a abordagem metodológica seguida pelo investigador constitui um passo decisivo para o desenvolvimento de todo o trabalho. É fundamental estar-se consciente das vantagens e desvantagens das opções tomadas e assumi-las como pontos fortes e fracos, respetivamente, em todo o processo de investigação. A seleção destas opções deve ser feita de acordo com o objetivo e as questões a que se pretende responder (Matos & Carreira, 1994).

A metodologia quantitativa tem sido bastante utilizada em educação. Neste tipo de investigação pretende-se explicar, predizer e controlar os fenómenos, procurando regularidades e leis, através da objetividade dos procedimentos e da quantificação das medidas (Almeida & Freire, 2000). Neste caso, o trabalho é orientado para a quantificação e a causa dos fenómenos. São utilizados métodos controlados e a objetividade é procurada através de um distanciamento em relação aos dados (perspetiva de *outsider*).

A investigação quantitativa, embora tenha permitido avanços significativos no que respeita ao ensino e à aprendizagem, apresenta algumas limitações, na medida em que o investigador, ao lidar com seres humanos, tem dificuldade na manipulação e o controle de variáveis, como é referido por Almeida e Freire (2000):

> Vários fenómenos são difíceis de estudar sem serem afetados, muitas situações são irrepetíveis, muitos resultados obtidos são imbuídos de algum artificialismo pouco condicente com a complexidade, a dinâmica e a natureza interativa dos fenómenos psicológicos (p. 27).

A ausência de problematização do papel social do investigador, e dos efeitos sociais investigação é outra crítica frequente à metodologia quantitativa. Para além disso, o facto de, frequentemente, não se ter em conta a perspetiva dos participantes torna a investigação ambígua quanto àquilo que é medido. Pelo seu lado, os estudos qualitativos tendem a assumir cinco características, indicadas por Bogdan e Biklen (1994): (i) a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal de recolha de dados; (ii) os dados recolhidos são essencialmente descritivos; (iii) o investigador está mais interessado no processo do que simplesmente nos resultados ou produtos; (iv) a análise dos dados é feita de forma indutiva e (v) o investigador interessa-se fundamentalmente por compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências. Estas características podem não estar todas igualmente presentes, no entanto, determinam o tipo de investigação a realizar.

A investigação qualitativa requer assim a recolha de materiais que descrevam momentos da vida dos indivíduos – descrições ricas do mundo social – que são interpretados na tentativa de aumentar a compreensão sobre o alvo de estudo (Denzin & Lincoln, 1994). A opção metodológica por um estudo qualitativo é enquadrada por um interesse na complexidade, descrição e compreensão de um processo, mais do que nos seus resultados ou produtos.

A investigação qualitativa abarca uma multiplicidade de métodos e envolve uma abordagem interpretativa e naturalista à realidade em estudo. Isto significa que os investigadores qualitativos estudam fenómenos no seu ambiente natural, tentando atribuir-lhes sentido ou interpretando-os em termos dos significados que as pessoas lhes atribuem. (Denzin & Lincoln, 1994, p. 2).

Segundo Erickson (1986) esta metodologia surge associada à observação participante onde o interesse se centra no significado atribuído pelos atores a acontecimentos particulares nos quais estão envolvidos. Nela prevalece a análise de comportamentos, do ponto de vista do investigador, que habitualmente recorre à observação naturalista. São estudos subjetivos onde o investigador tem uma grande proximidade com os sujeitos (perspetiva de dentro, *insider*), são exploratórios, descritivos e indutivos, onde se assume uma realidade dinâmica. Para além disso, são holísticos e não generalizáveis. O principal objetivo dos estudos desta natureza é conhecer os processos e não os resultados ou produtos (Denzin & Lincoln, 1994; Merriam, 1988a).

Os estudos qualitativos, segundo Patton (1980) podem ser utilizados quer para estudar algo que está a acontecer, como também para dar continuidade a outros estudos no sentido de ampliar o conhecimento sobre determinado assunto. Esta segunda hipótese implica o regresso ao campo empírico do estudo para avaliar em que medida a análise do fenómeno serve para explicar o que foi observado.

Por seu lado, Hesse-Biber e Leavy (2006) afirmam que a metodologia qualitativa é "verdadeiramente única no conteúdo, no foco e na forma" (p. 5) e atribuem-lhe grande valor e riqueza, nomeadamente, por possibilitar múltiplas técnicas para o estudo de determinado fenómeno. Acresce ainda que, este tipo de investigação, mais do que um conceito ou uma série de técnicas que podem ser utilizadas, é uma arte intelectual, criativa e rigorosa, onde não só o investigador aprende, mas que também, ele próprio desenvolve.

Em oposição à metodologia quantitativa, em que prevalecem os processos de medição sistemática e os testes de hipóteses rigorosos, a investigação qualitativa associa-se a métodos de observação naturalista, a estudos de caso, à etnografia, ou seja, a métodos que conduzem à obtenção de dados de tipo narrativo em que o investigador é geralmente o principal "instrumento de medida" do estudo e em que o objetivo da pesquisa é o de conseguir uma visão holística do fenómeno em estudo (Denzin & Lincoln, 1994). Deste modo, a investigação qualitativa distingue-se da investigação quantitativa por permitir alcançar outros objetivos, em particular, uma nova forma de pensar acerca da realidade social (Hesse-Biber & Leavy, 2006). As principais características da investigação quantitativa e qualitativa encontram-se sintetizadas na tabela 6.1.

Estas duas perspetivas apresentam propósitos distintos e recorrem a técnicas e a métodos diferentes (tabela 6.1), no entanto, podem complementar-se e são ambos úteis para o progresso da investigação (Biddle & Andreson, 1986). Alguns estudos, por envolverem características híbridas ou por não se integrarem exclusivamente em qualquer uma das categorias anteriores, podem ser designados por estudos mistos. Ambos os tipos de metodologia apresentam as suas vantagens e desvantagens, pelo que a recolha de dados qualitativos e quantitativos é, por vezes, vantajosa no processo de procura de uma resposta ao mesmo problema. Morais e Neves (2007) apontam a metodologia mista como uma opção a considerar na realização de estudos, em particular, em educação.

Nesta investigação, uma vez que pretendo analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9.º ano, de uma turma, a opção por uma metodologia qualitativa apresenta-se como a mais adequada. Por outro lado, a decisão de selecionar dois alunos da turma, prende-se com o propósito de despontar diferenças, essencialmente nos modos de representação e nos ritmos de aprendizagem. Dada a natureza deste estudo, a metodologia segue o paradigma interpretativo uma vez que que pretendo estudar o fenómeno em toda a sua complexidade e no seu contexto natural (Bogdan & Biklen, 1994).

Esta investigação tem na sua génese uma experiência de ensino e tem como objetivo analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos na aprendizagem dos métodos formais algébricos. Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer e Schauble (2003) identificam cinco características nas experiências de ensino: (i) o objetivo é desenvolver teorias sobre a aprendizagem; (ii) envolvem uma intervenção, ou a introdução de uma nova técnica de ensino (iii) investigadores tentam desenvolver novas perspetivas teóricas, mas também testar e refinar suas teorias ao longo de todo o processo de investigação (iv) têm projetos iterativos, como teorias de mudança durante o estudo, a conceção do estudo deve ser revisto e alterado em conformidade e (v) as teorias que são desenvolvidos devem afetar o ensino no futuro.

Tabela 6.1: Metodologias: qualitativa e quantitativa de investigação (adaptado de Gall, Borg & Gall, 1996, p. 30).

Metodologia quantitativa	Metodologia qualitativa
Considera uma realidade social objetiva.	Considera que a realidade social é construída pelos participantes e portanto subjetiva.
Assume que a realidade social é relativamente constante ao longo do tempo e dos diferentes ambientes.	Assume que a realidade social é construída continuamente através de diferentes situações.
Tem em vista relações entre os fenómenos sociais a partir de uma perspetiva mecanicista.	Atribui um papel importante às intenções humanas na explicação dos fenómenos.
O papel do investigador deve ser, tanto quanto possível, de afastamento.	O investigador está envolvido com os outros participantes na investigação.
Estudam comportamentos e outros fenómenos observáveis.	Estudam os significados que os indivíduos constroem.
Analisa a realidade social através de variáveis.	Fazem observações holísticas ao contexto na sua totalidade onde ações sociais ocorrem.
Utilizam conceitos preconcebidos e teorias para determinar que dados vão ser recolhidos.	Descobrem conceitos e teorias depois dos dados terem sido recolhidos.
Geram dados numéricos para representar ambientes sociais.	Geram dados verbais e pictóricos para representar o ambiente social.
Os métodos e técnicas mais utilizados são: experimental, questionários e entrevistas estruturadas.	Os métodos mais utilizados são a observação participante, análise documental e entrevistas abertas (semiestruturadas, conversas informais, não estruturadas)
Recorrem à inferência estatística para generalizar resultados de uma amostra para uma dada população.	Generalizam os resultados dos casos a partir de vários casos similares.
Preparação impessoal, relatórios objetivos dos resultados da investigação.	Preparam relatórios interpretativos que refletem as construções dos investigadores dos dados e uma sensibilização aos leitores para eles construírem as suas próprias ideias a partir daquilo que foi descrito.

6.2.2. O estudo de caso

Um estudo de caso visa conhecer em profundidade o "como" e o "porquê" de uma dada realidade. Em situações em que o controlo sobre os acontecimentos reais é escasso ou mesmo inexistente, e quando o campo de investigação se concentra num fenómeno natural, os estudos de caso revelam-se uma boa opção (Yin, 1994). Acresce ainda a importância de se tratar de uma investigação empírica "de um fenómeno contemporâneo no seu contexto natural, especialmente quando as fronteiras entre o fenómeno e o contexto não são claramente evidentes" (p.13).

De acordo com Yin (1994), o recurso a um estudo de caso tem como objetivo explorar, descrever ou explicar. Fidel (1992) afirma que o objetivo é compreender o fenómeno em estudo e ao mesmo tempo desenvolver teorias mais genéricas a respeito do fenómeno observado. Segundo Guba & Lincoln (1994) o objetivo é relatar os factos como sucederam, descrever situações ou factos, proporcionar conhecimento acerca do fenómeno estudado e comprovar ou contrastar efeitos e relações presentes no caso. Por seu lado, Gomez, Flores & Jimenez (1996), referem que o objetivo geral de um estudo de caso é: explorar, descrever, explicar, avaliar e/ou transformar.

Segundo Ponte (2006b):

> É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspetos, procurando descobrir a que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse (p. 2).

Neste estudo, a metodologia de investigação, tem um forte cunho descritivo, não é experimental e é de natureza empírica. Esta investigação tem como campo empírico uma experiência de ensino na qual assumo o duplo papel de professora e investigadora, é naturalmente uma investigação sobre a minha prática profissional, onde pretendo descrever a realidade que ocorre em sala de aula. O estudo de caso adequa-se particularmente a este tipo de investigação que possibilita a compreensão de questões complexas e o conhecimento produzido pode ser agregado a outro proveniente de outras investigações já realizadas (Ponte, 2006b), por ser um método de investigação que implica a observação detalhada de um fenómeno no seu contexto real (Bogdan & Biklen, 1994; Merriam, 1988b) e por permitir um estudo holístico e significativo de um acontecimento ou fenómeno contemporâneo dentro do contexto em que se produz (Yin, 1989).

Stake (1995, 2000) diferencia três tipos de estudo de caso, de acordo com as suas finalidades: i) *intrínseco*, quando o investigador pretende uma melhor compreensão de um caso particular que contém em si mesmo o interesse da investigação; ii) *instrumental*, quando um caso é examinado para facilitar a compreensão de um assunto, mais amplo, sobre algo que não é exclusivamente o caso em si; o estudo do caso funciona como um instrumento para compreender outros fenómenos; ou, por outro lado, serve para contestar uma generalização amplamente aceite, apresentando um ‘contraexemplo’; e iii) *coletivo*, quando o caso instrumental se estende a vários casos, para possibilitar, pela comparação, um conhecimento mais profundo sobre o fenómeno, população ou condição. Na presente investigação, opto pelo estudo de caso instrumental de modo a acrescentar mais evidência, mais abrangência e uma maior diversidade de informação.

6.3. A turma e os casos

Este estudo baseia-se numa experiência de ensino realizada numa escola do litoral algarvio, com uma turma do 9.º ano, da qual sou professora de Matemática. A turma é constituída por 24 alunos, dos quais 16 são raparigas e 8 são rapazes, com idades compreendidas entre os 14 e os 18 anos. Dois dos alunos têm necessidades educativas especiais pelo que não frequentam a disciplina de Matemática, integrando o Núcleo de Transição. Nove alunos registaram retenções em anos anteriores, alguns deles mais do que uma vez. Todos os alunos da turma, à exceção de dois, que se encontram a repetir o 9.º ano, são meus alunos desde o 7.º ano de escolaridade, o que me permite um conhecimento substancial de algumas características individuais de cada um deles. A escolha desta turma para realizar o estudo deve-se, não só ao meu conhecimento dos alunos, mas também à heterogeneidade existente no que respeita ao desempenho na disciplina de Matemática e, ainda, à disponibilidade e interesse manifestados pelos alunos em colaborar nesta investigação.

As duas alunas - casos

De forma a obter um conhecimento mais profundo, relativamente às questões de investigação, opto por estudar de forma mais pormenorizada, duas alunas. Segundo Stake (1995) o primeiro critério a ter em consideração na escolha dos casos é "maximizar aquilo que queremos aprender" (p. 4). A investigação qualitativa sendo assumidamente particularista "pode examinar uma instância particular, mas iluminar um problema geral" (Merriam, 1988b, p. 13). A observação continuada dos alunos selecionados permite-me aprofundar a visão geral que tenho de toda a turma.

O objeto de estudo consiste nas aprendizagens dos alunos no contexto de uma experiência de ensino, em três tópicos de álgebra do 9.º ano. Mais precisamente, pretendo compreender o contributo da experiência de ensino na evolução do pensamento algébrico dos alunos, em particular, nos aspetos já indicados no capítulo 1. Assim, no contexto de trabalho de todos os alunos da turma, opto pela seleção de duas alunas – os casos, para um estudo mais aprofundado.

Em qualquer investigação a seleção dos casos é um passo bastante importante e decisivo no processo de investigação. É nesta fase que o investigador estabelece um fio condutor lógico e racional para guiar todo o processo de recolha de dados (Creswell, 1994). Para a seleção dos casos foram considerados os seguintes critérios: i) diferentes desempenhos na disciplina de Matemática; ii) diversidade de estratégias e/ou representações, habitualmente, utilizadas na resolução de tarefas; iii) diferentes perspetivas em relação ao prosseguimento de estudos; iv) disponibilidade e interesse dos alunos em participar no estudo. Com base nestes critérios foram selecionadas duas alunas a que atribuo os nomes fictícios de Carolina e Gabriela. Apresento em seguida uma breve caracterização de cada uma destas alunas.

Carolina: é uma aluna com 16 anos, com um percurso escolar marcado por duas retenções, uma no 7.º e outra no 8.º ano. Esta aluna manifesta um interesse e um envolvimento irregular nas aulas, que reflete, por vezes, a sua vida familiar. Como consequência, surgem algumas dificuldades na mobilização de conhecimentos. Esta aluna pretende tirar um curso profissional no ensino secundário e não tenciona prosseguir estudos no ensino superior;

Gabriela: é uma aluna com 14 anos, é interessada e participativa, não manifesta habitualmente qualquer dificuldade na disciplina de Matemática. O prosseguimento dos estudos é encarado por esta aluna como natural, nem colocando a possibilidade de tal não acontecer. O seu desejo é ingressar num curso superior na área da Matemática.

6.4. Questões éticas

Nos trabalhos de investigação, em particular, no domínio das ciências sociais e humanas, as preocupações de natureza ética devem ser cuidadosamente consideradas. Segundo Christians (2000), uma vez que estes trabalhos têm como objeto de estudo o comportamento de seres humanos, devemos ter em conta que o envolvimento dos sujeitos "pode dificultar, prejudicar, perturbar, tornar-se enganoso, ou afetar, de qualquer outro modo, negativamente, a vida dos que nele participam" (Tuckman, 2000, p. 19). Deste modo é indispensável assegurar a integridade dos participantes garantindo os seus direitos. Nesta investigação é garantido o respeito pelos direitos de todos intervenientes, nomeadamente no que se refere: (i) à privacidade ou não-participação; (ii) ao anonimato; (iii) à confidencialidade; (iv) ao sentido de responsabilidade do investigador de agir de modo a garantir que os participantes não sejam prejudicados (Tuckman, 2000). Assim, é minha preocupação garantir que a privacidade dos intervenientes no estudo seja integralmente respeitada, evitando questões pessoais desnecessárias e respeitando a não participação. O anonimato dos alunos é também garantido, atribuindo pseudónimos a todos os alunos. Além disso, os dados recolhidos não serão utilizados para outros fins que não sejam os da presente investigação.

Inerente às diretrizes de ética em investigação está a informação clara e completa aos intervenientes no estudo - neste caso os alunos, bem como aos seus encarregados de educação. Assim, no início do ano letivo dei a conhecer aos pais e encarregados de educação dos alunos desta turma a minha intenção e solicitei, formalmente, autorização aos encarregados de educação. Junto da direção da escola expliquei os objetivos do estudo, os procedimentos de recolha de dados, garanti a confidencialidade da informação recolhida e solicitei autorização para a realização deste estudo, tal como à Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular como é exigido (os pedidos encontram-se nos anexos de 1 a 3). Dois dos encarregados de educação não autorizaram a gravação vídeo, pelo que não recorro a esse instrumento para registar dados. Todos os restantes pedidos foram autorizados. Na comunidade escolar dei também conhecimento ao Departamento Curricular de Matemática e Ciências Experimentais e à Diretora de Turma da referida turma.

6.5. Recolha de dados

Os estudos de caso caracterizam-se pelo recurso a vários métodos de recolha de dados, nomeadamente entrevistas, observação participante, gravações áudio e vídeo, documentos, entre outros (Creswell, 2007; Hamel, Dufour & Fortin., 1993). Desta forma, são utilizados diversos instrumentos de recolha tendo em vista obter dados que descrevam com pormenor as situações em estudo. Existem três grandes grupos de métodos de recolha de dados que se podem utilizar como fontes de informação nas investigações qualitativas: (i) a observação; (ii) o inquérito que pode ser oral – entrevista ou escrito – questionário e (iii) a análise de documentos (Bogdan & Biklen, 1994; Tuckman, 2002; Quivy & Campenhoudt, 2003). Estes métodos de recolha não se restringem apenas às investigações qualitativas, todos eles podem estar presentes em investigações quantitativas.

O recurso a diferentes métodos para a recolha de dados constitui uma forma de obtenção de dados de diferentes tipos - informações de diferente natureza, conseguindo diferentes perspetivas sobre uma mesma situação. As comparações entre as diversas informações permitem a triangulação da informação recolhida. Contudo, é fundamental ter sempre presente os objetivos da investigação pois os métodos de recolha de informações devem ser escolhidos de acordo com a tarefa a ser cumprida. Neste estudo recorro a múltiplas fontes de evidência por permitir, por um lado, assegurar as diferentes perspetivas dos participantes e por outro, obter várias "medidas" do mesmo fenómeno, criando condições para uma triangulação dos dados, durante a fase de análise dos mesmos. Segundo Yin (1994), a utilização de múltiplas fontes de dados na construção de um estudo de caso, permite-nos considerar um conjunto mais diversificado de tópicos de análise e, em simultâneo, permite corroborar o mesmo fenómeno. Este autor aponta ainda três princípios para a recolha de dados: (i) o recurso a várias fontes de evidência; (ii) a criação de uma base de dados e (iii) manter uma cadeia de evidências.

Neste estudo, a recolha de dados decorre no ano letivo de 2010/11, mais precisamente, ao longo dos meses de outubro, novembro, dezembro, fevereiro e março, conforme apresento na tabela 6.2.

Tabela 6.2: Calendarização da realização da experiência de ensino.

Mês /Semana	**1.ª**	**2.ª**	**3.ª**	**4.ª**
Outubro				
Novembro				
Dezembro				
Janeiro				
Fevereiro				
Março				

Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas.

Proporcionalidade inversa. Representações gráficas.

Equações do 2.º grau a uma incógnita.

Este trabalho inclui a recolha de dados relativos ao trabalho dos alunos em tarefas com recurso ao computador e outras apenas ao papel e lápis. Para além disso realizo entrevistas clínicas semiestruturadas, no final do estudo de cada tópico matemático. Na tabela 6.3 apresento alguns dos procedimentos na recolha de dados.

Tabela 6.3: Procedimentos na recolha de dados dos casos.

	Procedimentos na recolha de dados		Ambiente/ Local
Tarefas	Tarefas com recurso ao computador	Gravação dos ficheiros em Excel produzidos pelos alunos; Captura do ecrã do computador e dos diálogos dos alunos.	Sala de aula
	Tarefas sem recurso ao computador	Gravação áudio dos diálogos dos alunos.	Sala de aula
Entrevistas	Entrevistas clínicas semiestruturadas	Gravação áudio da entrevista; Gravação do ecrã do computador, no caso os alunos optem por este recurso; Produções escritas dos alunos; Notas de campo.	Sala – Espaço Matemática

A figura 6.1 apresenta um cronograma simplificado do processo de recolha de dados durante a experiência de ensino no estudo de três tópicos do tema Álgebra.

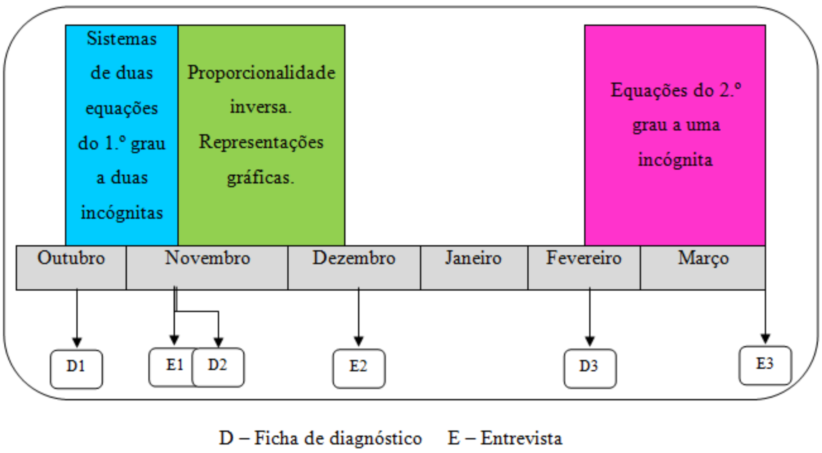


Figura 6.1: Cronograma do processo de recolha de dados.

6.5.1. Recolha documental

Na maioria dos estudos em educação, a análise documental pode ser utilizada segundo duas perspetivas: (i) servir para complementar a informação obtida por outros métodos, esperando encontrar-se nos documentos informações úteis para o objeto de estudo e (ii) ser o método de pesquisa central, ou mesmo exclusivo, de um projeto e, neste caso, os documentos são alvo de estudo por si próprios (Bell, 1993).

Neste estudo, a recolha documental ocupa um lugar de grande relevo, pois constitui uma fonte privilegiada para a obtenção de informação imprescindível à realização do trabalho. Assim, os trabalhos escritos dos alunos, produzidos em sala de aula, são recolhidos para posterior análise. No decurso da experiência de ensino, os trabalhos recolhidos são fotocopiados/digitalizados e devolvidos aos alunos. No que respeita aos trabalhos realizados no computador, na folha de cálculo, estes são também recolhidos, no seu formato original, em todas as aulas.

6.5.2. Gravação áudio e das *frames* no computador

Durante a realização das tarefas com recurso ao Excel, procedo à captura do ecrã do computador através do *software Camtasia Studio* da *TechSmith*, versão 6.0. Este *software* permite recolher dados acerca de todas as ações que os alunos realizam na folha de cálculo como os movimentos do rato, selecionar uma célula ou um conjunto de células, introduzir fórmulas ou recorrer ao menu para executar determinado comando. A recolha de dados relativos ao trabalho com o computador com base em *softwares* como descrito anteriormente é recomendada na investigação, em particular, por possibilitar a descrição em tempo real das ações no computador (Weigand & Weller, 2001). Em simultâneo, são gravados em áudio os diálogos que ocorrem durante a realização das tarefas.

6.5.3. Gravação áudio das aulas

Uma vez que não obtive permissão para efetuar gravações vídeo das aulas, opto pela realização das gravações áudio, que são acompanhadas de notas de campo, que ajudam a compreender melhor as intervenções dos alunos, no decurso das aulas, em particular, nos momentos de discussão e síntese das tarefas.

6.5.4. Entrevistas clínicas

O objetivo da realização das entrevistas é a obtenção de dados específicos acerca dos participantes para desenvolver uma ideia intuitiva sobre a forma como veem, interpretam e descrevem vários aspetos relacionados com as questões do estudo (Patton, 1980; Tuckman, 2000). Como refere Patton (1980), as entrevistas são um meio para se conseguir obter informações acerca do que não se consegue observar diretamente.

O facto de esta investigação se debruçar sobre uma experiência de ensino com os meus próprios alunos oferece algumas vantagens, nomeadamente, o conhecimento prévio dos alunos a entrevistar. Este conhecimento pode facilitar o processo de recolha de dados durante as entrevistas que se assemelham mais a uma conversa com os alunos (Bogdan & Biklen, 1994) visando obter informação de acordo com os objetivos previamente definidos.

Neste estudo são realizadas entrevistas semiestruturadas a cada uma das alunas que constituem os casos. Este tipo de entrevista caracteriza-se pela existência de um guião previamente preparado que serve de eixo orientador ao desenvolvimento da conversa onde se pretende garantir que os participantes respondam a um conjunto de perguntas, não exigindo uma ordem rígida na sua sequência. O desenvolvimento da entrevista vai-se adaptando ao entrevistado e mantém um elevado grau de flexibilidade na exploração das questões. A linguagem a utilizar nas entrevistas é adequada e acessível aos alunos, tendo sempre em vista objetivos em estudo.

Durante a entrevista, nas situações em que considero pertinente, registo algumas notas que me ajudam a formular novas questões, por exemplo para confirmar algo que o aluno disse anteriormente. Ainda, durante e após a realização de cada uma das entrevistas, procuro registar notas, que a memória me permita, nomeadamente no que respeita a comportamentos não-verbais das alunas ou de outros aspetos que não sendo registados, se revelem importantes para o estudo.

Cada uma das entrevistas clínicas inclui a proposta de resolução de tarefas acerca do respetivo tópico estudado. Este método de recolha de dados surge como mais uma oportunidade de recolher informações acerca de desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Em sala de aula, a atividade de cada aluno é fruto de uma vasta interação com os colegas e comigo, professora da turma. Desde modo, os dados recolhidos em sala de aula, quer sejam na forma de documentos escritos ou de gravações áudio não são exclusivos de cada aluno, mas são o resultado de um vasto conjunto de interações e contribuições. Deste modo, as entrevistas a cada um dos 'alunos-caso' revelam-se da maior importância para este estudo, constituindo uma oportunidade para analisar a forma como cada aluna, individualmente, resolve as tarefas e as explica. Por outro lado, permite-me esclarecer algumas questões relacionadas com episódios de sala de aula, num ambiente mais privado, entre mim e cada uma das alunas. Estas entrevistas incluem dois momentos distintos. Num primeiro momento apresento à aluna a cópia de cada uma das tarefas por ela realizadas ao longo do tópico em estudo, permitindo-lhe assim revisitar o trabalho realizado enquanto lhe coloco questões acerca de aspetos que pretendo esclarecer. Num segundo momento são propostas novas tarefas para resolver o que me permite questionar as alunas, durante a resolução das tarefas, acerca dos seus procedimentos.

Cada uma das três entrevistas é marcada previamente com as alunas de acordo com a sua disponibilidade. Como local para a realização das entrevistas escolhi o - Espaço Matemática - sala localizada junto da biblioteca da escola, por se tratar de local acolhedor, que garante privacidade às entrevistadas e a realização das tarefas num ambiente silencioso. A duração das entrevistas é variável; entre cerca de sessenta minutos a cem minutos, tendo em conta a natureza das tarefas propostas e as características de cada uma das alunas. As tarefas propostas nas entrevistas encontram-se nos anexos 15, 22 e 31.

6.5.5. Observação

A observação participante é uma técnica de recolha de dados onde a professora/investigadora é o principal instrumento de observação, o facto de eu estar inserida no grupo observado, permite-me ter acesso às perspetivas dos participantes. Este método, típico da investigação qualitativa, é fundamental durante todo o processo de recolha de dados e é traduzido em notas de campo.

Os registos que o investigador efetua são essenciais para uma melhor compreensão dos fenómenos em análise "o resultado bem-sucedido de um estudo de observação participante, …, baseia-se em notas de campo detalhadas, precisas e extensivas" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 150). Em cada aula, procuro estar atenta aos vários aspetos envolventes. Na elaboração do guião para as notas de campo, considerei duas partes, como é sugerido por Bogdan e Biklen (1994). Na primeira parte é feita uma descrição detalhada do que ocorre durante a aula e na segunda, registo algumas ideias e reflexões acerca do que aconteceu na aula. As notas de campo são elaboradas num processador de texto por ser mais rápido. No anexo 5 apresento um guião para as notas de campo.

6.6. Análise de dados

Num estudo de caso os dados provêm habitualmente de várias fontes, como acontece na presente investigação, tendo em vista responder às três questões de investigação, conforme apresento na tabela 6.4.

Tabela 6.4: Métodos de recolha de dados e questões de investigação.

Métodos	**Questão 1**	**Questão 2**	**Questão 3**
Produções das alunas em papel	x		
Produções das alunas na folha de cálculo	x		x
Gravação áudio/vídeo folha de cálculo	x	x	x
Observação participante	x	x	x
Entrevistas	x	x	x

No processo de recolha de dados procedo à digitalização das produções efetuadas pelas alunas no trabalho em papel e lápis. Em relação aos trabalhos realizados na folha de cálculo, procedo à gravação dos ficheiros produzidos pelas alunas no computador, assim como à gravação em áudio dos diálogos que ocorrem durante as sessões de trabalho, bem como as gravações dos ecrãs. Todos estes ficheiros são organizados em pastas digitais e os que reportam a cada um dos casos são separados individualmente. Diariamente, como resultado da minha observação participante das aulas, registo um conjunto de notas de campo (NC), em formato digital, onde realço alguns aspetos que eventualmente possam não estar registados nas gravações e que se revelam importantes para os propósitos desta investigação.

Em simultâneo, procedo à transcrição das gravações áudio das aulas, das gravações das *frames* do computador e das entrevistas. Neste procedimento tenho o cuidado de criar um sistema de símbolos, por exemplo para mostrar os momentos de pausa ou quando há diálogos simultâneos. Seguidamente, procedo depois à leitura das transcrições, bem como das notas de campo elaboradas, escrevendo alguns comentários que me ajudam na organização dos dados, por tópicos, de acordo com os objetivos do estudo, como é sugerido por Patton (1980).

6.6.1. Processo de análise de dados

Tendo em conta que a investigação decorre num cenário de experiência de ensino, a análise de dados acompanha todo o período da sua implementação, ainda que de uma forma pouco profunda. Esta análise inicial permite-me efetuar alguns ajustes, por exemplo, relativamente a aspetos em que os alunos têm dificuldades e que necessitam de ser abordados com maior ênfase, revisitando a conjetura de ensino aprendizagem (Cobb et al., 2003).

A fase mais aprofundada de análise de dados tem lugar após o término da experiência de ensino. Numa primeira fase começo por categorizar, contabilizar e converter para percentagem as representações matemáticas que cada uma das alunas utiliza, na resolução das diferentes tarefas, ao longo do estudo dos três tópicos da experiência de ensino e nas entrevistas, separando-as pelos dois ambientes envolvidos. No ambiente de papel e lápis identifico o recurso às representações: linguagem natural, no sistema de notação numérico-SNN, no sistema de notação algébrico-SNA, pictóricas e gráficas. Na folha de cálculo, as alunas recorrem à linguagem natural, à inserção de valores numéricos, a variáveis-célula, a variáveis-coluna e procedem à formatação de células, em particular, quando encontram a(s) solução(ões). Para além de identificar as representações matemáticas, identifico o seu propósito de utilização (tabela 6.5), bem como os métodos (MI- métodos informais, MT- métodos transitórios e MF- métodos formais) que estão associados a esta utilização.

Tabela 6.5: Excerto da tabela utilizada para o registo das representações matemáticas e seus propósitos de utilização nas tarefas realizadas no estudo do tópico "Equações do 2.º grau a uma incógnita" e na entrevista.

Tarefas (Papel e lápis/ folha de cálculo)				TA3 …	Métodos (MI/MT/MF)
Representações com papel e lápis	**Linguagem natural**		Dados do enunciado	%	
			Identificação de incógnitas	%	
			Explicação de procedimentos	%	
			Resposta	%	
			Outros	%	
	Sistemas de notação	**Numérico**	Cálculos por substituição	%	
			Cálculos por operações inversas	%	
			Outros	%	
		Algébrico	Escrita de expressões algébricas	%	
			Simplificação de expressões	%	
			Recurso a fórmulas	%	
			Escrita de equações do 1.º grau	%	
			Resolução de equações do 1.º grau	%	
			Casos notáveis da multiplicação	%	
			Escrita de equações do 2.º grau	%	
			Resolução de equações do 2.º grau (Raiz quadrada)	%	
			Resolução de equações do 2.º grau (Lei do anulamento prod.)	%	
			Resolução de equações do 2.º grau (Fórmula resolvente)	%	
			Resolução eq. Grau 4 (fact. dada) (Lei do anulamento prod.)	%	
			Factorização	%	
			Outros	%	
	Pictóricas			%	
	Gráficas			%	
Representações na folha de cálculo	**Linguagem natural**		Dados do enunciado	%	
			Nomeação de colunas	%	
			Explicação de procedimentos	%	
			Resposta	%	
	Registo numérico	**Sequências**	Com incremento constante	%	
			Com incremento nulo	%	
	Registo de fórmulas		Variável-célula	%	
			Variável-coluna	%	
	Gráficos		Gráfico de dispersão	%	
	Form. cond. /Realçar células		Identificar a resposta	%	

A categorização para as produções em cada tarefa dos diferentes tópicos e para cada aluna encontra-se organizada e registada nas tabelas 7.1, 7.2, 7.3, 8.1, 8.2 e 8.3 dos anexos 32, 33, 34, 35, 36 e 37, respetivamente. Esta primeira incursão nos dados permite-me obter uma ideia geral da forma como as alunas evoluem ao longo do estudo de cada tópico, no que respeita à utilização de diferentes representações, aos seus propósitos e à evolução nos métodos utilizados. Estas primeiras intuições são fundamentais e servem de pilares para o delineamento dos procedimentos subsequentes na análise dos dados. Contudo esta primeira fase de análise não contempla o registo da transformação das representações que é um dos meus propósitos de investigação. Por outro lado, também não contempla a tipologia de tarefa – um aspeto fundamental a ter em conta, pois diferentes tipos de tarefa podem fazer emergir diferentes representações bem como transformações distintas. Assim, na fase seguinte avanço para uma análise mais aprofundada em que começo por categorizar cada questão de cada tarefa de cada um dos tópicos por tipologia, tendo em conta o referencial de Ponte (2005). De seguida, procedo à identificação das transformações das representações, sempre que possível pela ordem cronológica em que foram realizadas. Identifico ainda os métodos formais e/ou objetos algébricos (expressões algébricas, equações, sistemas de equações, …) que as alunas utilizam bem como os momentos em que foi feita determinada formalização. Esta análise detalhada encontra-se organizada por tópicos e por tarefas em tabelas nos anexos de 32 a 37. Na tabela 6.6 exemplifico o modo como organizo e faço esta análise.

Tabela 6.6: Excerto de tabela utilizada para o registo da transformação das representações e métodos formais utilizados e/ou formalizados por questão de cada tarefa.

Tarefa													
	Papel e lápis				Folha cálculo				Transformações das representações			Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica				
Q1					X				Conversão (LN-Tab FC)	Tratamentos (seq. numéricas)	Tratamentos (var. coluna) estabelecimento de relações	Formatação	Noção e escrita de sistema de equações (discussão/síntese)
										Construção das variáveis	Atividade de geração	Identificação da solução	
Legenda: P- problema, Ex- exercício, Ep- exploração, TI- tarefa de investigação.													

Apesar de não fazer parte do meu objetivo inicial de investigação, desta análise e através da organização destas tabelas, emergiu o facto de poder associar às conversões para o SNA e aos tratamentos, definidos por Duval (2003), as atividades de geração e transformação definidas por Kieran (2004). Esta autora define as atividades de geração como a escrita de expressões algébricas, equações, ente outros e este tipo de atividade surge nos momentos de conversão para o SNA. As atividades de transformação englobam a simplificação de expressões e a resolução de equações e é um tipo de atividade que pode ser associada aos tratamentos no SNA. No ambiente da folha de cálculo quando ocorre o uso fórmulas, posso considerar que são atividades de geração nesse ambiente digital uma vez que as alunas estão a escrever *expressões algébricas* utilizando a *Álgebra* específica da folha de cálculo. Por outro lado, a geração de variáveis-coluna e o tipo de trabalho realizado pela própria folha de cálculo, como ferramenta, pode associar-se às atividades de transformação descritas por Kieran (2004). Contudo, estas transformações não são explícitas pelo que não são se encontram registadas nestas tabelas. Assim, para cada questão, registo ainda as atividades de geração e transformação envolvidas nas produções das alunas.

Após o registo da análise de dados nestas tabelas elaboro uma tabela (tabela 6.7) para cada tópico e por aluna (ver tabelas finais dos anexos 32 a 37) com as súmulas das conversões das representações em percentagem.

Tabela 6.7: Exemplo de um excerto de uma tabela súmula das conversões das representações da aluna A no tópico "Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas".

Conversão das representações matemáticas- Sistemas de equações									
		LN-SNA	SNN-SNA	Fig. geom./R. pict - SNA	SNA-SNN	Fig. geom./R. pict – SNN	SNN-R.Gráfica	LN-Tab.(FC)	Tab.(FC)-Rep. Gráfica(FC)
TA-1	P	%	%	%	%	%	%	%	%
	Exe	%	%	%	%	%	%	%	%
	Exp	%	%	%	%	%	%	%	%
TB-1	P	%	%	%	%	%	%	%	%

Estas tabelas permitem-me obter uma imagem global acerca da evolução da conversão das representações a que as alunas recorrem ao longo do estudo de cada tópico, por tipologia de tarefa e por ambiente (papel e lápis e/ou folha de cálculo). Para uma melhor perceção, apresento ainda, alguns gráficos com a informação contida nas tabelas referidas anteriormente. Uma vez que é minha intenção perceber a forma como as alunas evoluem na aprendizagem dos métodos formais interessa-me, particularmente, perceber como evoluem na conversão para o SNA e para o SNN. Como alguns métodos incluem representações gráficas construo ainda tabelas para cada tópico e por aluna, a partir das anteriores, onde contabilizo apenas as conversões para o SNA, para o SNN e para representação gráfica quer com papel e lápis que na folha de cálculo. A informação destas tabelas é depois convertida para gráficos para uma melhor perceção da evolução das alunas.

Para sintetizar a análise do tratamento das representações construo igualmente tabelas (tabela 6.8) por tópico e por aluna, para cada tarefa, onde considero os tratamentos no SNA, no SNN assim como na folha de cálculo na geração de sequências numéricas e na geração de variáveis-coluna.

Tabela 6.8: Exemplo de excerto de súmula dos tratamentos das representações da aluna A no tópico "Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas".

Tratamentos das representações matemáticas – Sistemas de equações					
		SNA	SNN	Geração Sequência	Geração Var - Coluna
TA-1	P	%	%	%	%
	Exe	%	%	%	%
	Exp	%	%	%	%
TB-1	P	%	%	%	%

A informação destas tabelas é também convertida para gráficos de modo a permitir uma melhor compreensão dos momentos em que este tipo de atividade mais se verifica.

Todas estas tabelas foram construídas na folha de cálculo, o que me permitiu facilmente num único ficheiro agrupar toda esta informação separada por aluna e tópico, assim como converter automaticamente a informação das tabelas para representações gráficas.

Esta tarefa de análise em todas as tabelas atrás referidas não é um trabalho isolado; em paralelo, leio atentamente as transcrições das entrevistas, das gravações áudio das aulas, dos registos da sequência de *frames* na folha de cálculo, com os diálogos que ocorrem em simultâneo e as notas de campo. Procedo à codificação deste material digital, nos quais faço recortes em unidades de contexto e de registo.

Todo o processo de codificação decorre de forma dinâmica e fluída (Strauss & Corbin, 1998), sempre que considero necessário crio novos códigos e adiciono-os aos já existentes ou altero alguns já definidos.

Na fase seguinte, passo ao tratamento dos resultados, ou seja, à sua interpretação, às inferências e à sua sistematização. Todo este trabalho é fundamental e suporta a redação da narrativa para cada um dos casos, assim como as sínteses que elaboro para cada um deles. Desta forma a análise de dados envolve, essencialmente, análise de conteúdo, onde efetuei uma definição indutiva de categorias. Durante o processo de análise de dados tive em consideração a diversidade que encontrei nos dados, que são indicadores úteis para o estudo da variabilidade do fenómeno (Fernandes & Maia, 2001). Sempre que possível estabeleço conexões simultâneas entre diferentes bases de dados, como as produções das alunas, as transcrições das aulas e do trabalho na folha de cálculo, as transcrições das entrevistas e as notas de campo. Assim o trabalho de análise permite-me perceber a singularidade de cada caso e, ao mesmo tempo, efetuar uma análise cruzada dos dois casos em estudo.

Neste estudo, em certa medida, faço ainda uma análise de discurso. Este é um método qualitativo que se apresenta como uma forma de compreender as interações sociais. Ao analisar o discurso, os investigadores analisam a linguagem em contexto, dando especial atenção aos aspetos sociais, políticos e culturais. Estes estudos podem envolver linguagem de humor, conversa entre um médico e os pacientes, discurso de políticos, discursos com ironia ou metáfora e discurso jurídico. Estas investigações têm ajudado a perceber como é que as pessoas quando falam ou escrevem, organizam o seu discurso para indicar as suas intenções, bem como sobre a forma como os ouvintes/leitores interpretam o que ouvem ou leem, contribuindo para responder a questões importantes que levam, por exemplo, a identificar as capacidades cognitivas envolvidas no uso de símbolos ou sistemas semióticos, o estudo da variação e da mudança, ou com a descrição de alguns aspetos do processo de aquisição da linguagem. Nestas análises, os investigadores trabalham com textos que constituem o *corpus* de um determinado estudo, o que pode consistir na transcrição de uma conversa gravada ou um documento escrito (Alba-Juez, 2009). Nesta investigação a análise de discurso permite-me dar uma maior profundidade aos resultados, procuro identificar o sentido que as alunas dão às representações que utilizam e os métodos formais que lhes associam e, ainda, o sentido que dão ao trabalho com a folha de cálculo assim como as perceções que mostram acerca do seu papel na aprendizagem dos métodos formais algébricos. Para esta análise recorro a excertos das transcrições das aulas, das entrevistas e do trabalho realizado com a folha de cálculo, onde tento interpretar o que as alunas referem e as ideias que estão subjacentes às suas afirmações.

Na análise dos dados um aspeto fundamental a ter em conta é a triangulação, esta tem sido considerada como um processo em que se recorre a múltiplas perceções para clarificar significados, verificando a repetibilidade de uma observação ou interpretação (Stake, 2000). No entanto, tenho em conta que nem tudo se consegue reproduzir, no formato original, assim através da triangulação é possível identificar diferentes situações em que determinado fenómeno é observado. Neste estudo a triangulação é feita com base na diversidade de fontes que considero para a análise de dados relativamente a cada uma das questões de investigação.

CAPÍTULO 7

Gabriela

Neste capítulo descrevo e analiso o processo de aprendizagem de Gabriela na realização das diferentes tarefas ao longo dos três tópicos em estudo. Após uma breve caracterização da aluna, apresento uma descrição detalhada da atividade desenvolvida ao longo da intervenção pedagógica. Concluo com uma síntese centrada nos objetivos do estudo.

7.1. Apresentação

Gabriela tem 14 anos, vive com os pais e a irmã de 11 anos, frequentou o ensino pré-escolar e tem um percurso escolar sem retenções. É uma jovem muito simpática e desde o primeiro momento mostrou interesse e disponibilidade para participar neste estudo. Integra um conjunto de alunos que desde o infantário frequenta a mesma turma, o que se reflete numa grande amizade e cumplicidade entre eles. É filha de professores e reconhece na mãe um grande pilar no acompanhamento permanente dos seus estudos. A Matemática é a sua disciplina preferida e desde o 2.º ciclo mantém o nível 5 ao longo dos vários períodos letivos. Na primeira entrevista (E1), confessa que sentiu uma grande mudança nesta disciplina na transição do 1.º para o 2.º ciclo, referindo "do 4.º para o 5.º ano é uma diferença muito grande professora! Aprende-se assim mais Matemática a sério". Quando questionada acerca do significado de *Matemática a sério,* a aluna explica que

> Na primária… aprendemos a multiplicar, a somar, mas é… Coisas fáceis e quando a gente chega ao 5.º ano, começamos a dar as expressões numéricas e é aí que se nota uma diferença ao nível da Matemática…. É quando os alunos se podem começar a perder… (E1)

A aluna considera que o aumento do insucesso nesta disciplina está relacionado com o progressivo grau de dificuldade dos conteúdos que se acentuam particularmente nas mudanças de ciclo. Relativamente às expressões numéricas, Gabriela acrescenta "Não professora, não é só as expressões numéricas, é os triângulos e isso tudo… É um bocadinho diferente… Aqui parece que é… Aí professora, não sei muito bem explicar porque é … diferente, não é?... É mais a sério… É mais para contar". A expressão "seriedade" e "é mais para contar" estão relacionadas com a sua preocupação com a avaliação externa, o recurso a estas expressões serve para reforçar ou justificar a importância que atribui aos exames e, em geral, à avaliação. A aluna mostra estar consciente da importância dos resultados escolares para o seu futuro.

Em relação aos seus métodos de trabalho em Matemática, Gabriela explica as suas principais estratégias, na resolução de problemas:

> Este ano tenho usado mais o Excel, mas nos outros anos a principal estratégia podia ser com erro. A técnica do erro … mesmo demorando mais tempo a chegar ao resultado, eu vou ter a certeza que está certa. Por exemplo, se for um problema eu posso fazer tentativa e erro, mas posso utilizar um sistema de equações, mas não sei se o sistema está bem ou não está e se me vai dar o valor certo. Então, se eu fizer com tentativa e erro dá sempre certo porque bate com as condições todas do problema…

As palavras de Gabriela, no momento desta entrevista que ocorreu no final do estudo dos sistemas, revelam alguma insegurança em relação aos métodos formais de resolução de sistemas de equações e uma especial segurança no método de tentativa e erro. A aluna apresenta normalmente uma descrição detalhada dos processos envolvidos na resolução das tarefas, explicando que "em Matemática… fazer contas não esclarece as pessoas, por isso, eu gosto mais de escrever, passo a passo, tudo o que eu vou fazendo… só as contas… parece que o trabalho fica sozinho… Não tem assunto… Assim as palavras vão…”. Para Gabriela acompanhar os cálculos de uma descrição detalhada contribui para ajudar os outros a compreenderem o seu trabalho. Acrescenta que este hábito foi incentivado pela sua professora de Matemática do 5.º ano que pedia habitualmente aos alunos para explicarem através de “cálculos, imagens ou palavras”. A aluna confessa que “eu gostava e para mim as palavras era o mais fácil, depois há os cálculos, mas a gente nos cálculos … é como um meio específico para mim… Com as palavras eu sabia que qualquer pessoa podia sempre perceber…”. A aluna mostra atribuir importância às várias representações como meio para a expressar as suas ideias de modo que estas possam ser compreendidas por qualquer pessoa. Como mostram estas palavras, a aluna valoriza bastante a linguagem natural como uma representação que sustenta e clarifica as restantes. Nas atividades letivas, Gabriela é uma aluna bastante participativa, faz intervenções interessantes e colabora de forma positiva no desenvolvimento das aulas.

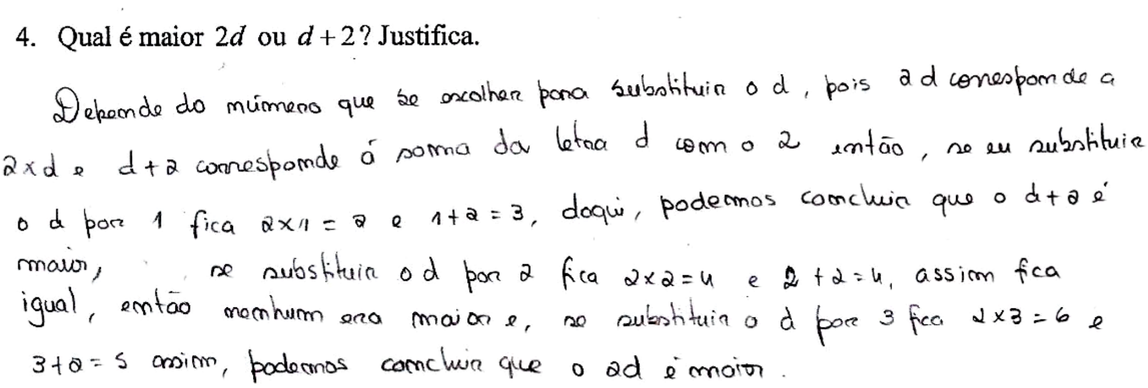
7.2. O desenvolvimento do pensamento algébrico

7.2.1. Aprendizagens no tópico “Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas”

Em seguida, descrevo o contributo de cada tarefa na evolução do pensamento algébrico desta aluna, nomeadamente, na sua atividade algébrica. É dado especial destaque às representações matemáticas utilizadas por esta aluna e pela forma como ela as coordena, em particular, na aprendizagem de métodos formais. A evolução, de Gabriela, ao nível das representações e da aprendizagem dos métodos formais encontra-se sintetizada na tabela 7.1 e nos quadros de análise (Anexo 32).

Na tarefa inicial de diagnóstico (A-1) (Anexo 7), a aluna recorre essencialmente a representações no SNN. Por exemplo, para testar a veracidade de igualdades e desigualdades entre expressões algébricas e para verificar soluções de equações, efetua cálculos por substituição. No recurso ao SNA, mostra compreender o significado dos símbolos presentes tanto em expressões algébricas como em equações e simplifica-as sem dificuldade. Para além disso, sempre que necessário recorre a fórmulas para exprimir o perímetro e a área que envolvem a escrita e a simplificação de expressões algébricas, determina termos próximos e distantes numa sequência, bem como o seu termo geral. No que respeita às dificuldades manifestadas pela aluna, estas surgem na identificação de erros na resolução de equações, respondendo apenas a uma destas propostas; outras na escrita de uma expressão algébrica de uma função afim a partir de uma tabela de valores e na identificação da respetiva representação gráfica.

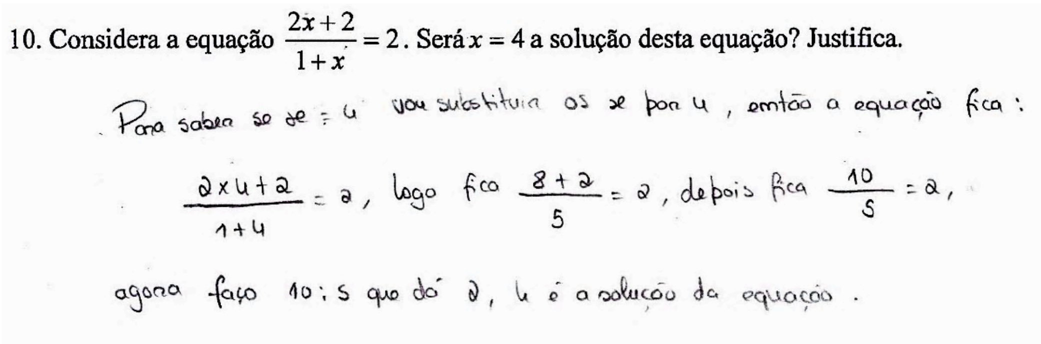
Na resolução da tarefa exploratória apresentada na figura 7.1.1, Gabriela interpreta corretamente o significado das expressões apresentadas. Para avaliar sua a grandeza, a aluna efetua conversões do SNA para o SNN, através de substituições por valores numéricos inteiros e positivos. Esta transformação das representações apoia a sua conclusão, de que a grandeza das expressões depende do valor de *d*.


4. Qual é maior $2d$ ou $d+2$? Justifica.

Depende do número que se escolher para substituir o d, pois 2d corresponde a 2×d e d+2 corresponde à soma da letra d com o 2 então, se eu substituir o d por 1 fica 2×1 = 2 e 1+2 = 3, daqui, podemos concluir que o d+2 é maior, se substituir o d por 2 fica 2×2=4 e 2+2=4, assim fica igual, então nenhum era maior e, se substituir o d por 3 fica 2×3=6 e 3+2=5 assim, podemos concluir que o 2d é maior.

Figura 7.1.1: Produção de Gabriela, TA1-Q4.

Na resolução do exercício 10 (Fig. 7.1.2), Gabriela interpreta a equação e recorre essencialmente ao SNN para responder à questão. Começa por efetuar uma conversão do SNA para o SNN, substituindo a incógnita apresentada na equação por um valor numérico. Após a substituição, efetua tratamentos no SNN para obter o valor da expressão. Ao longo da sua resolução a aluna recorre à linguagem natural para explicar os seus procedimentos.



10. Considera a equação $\frac{2x+2}{1+x} = 2$. Será $x = 4$ a solução desta equação? Justifica.

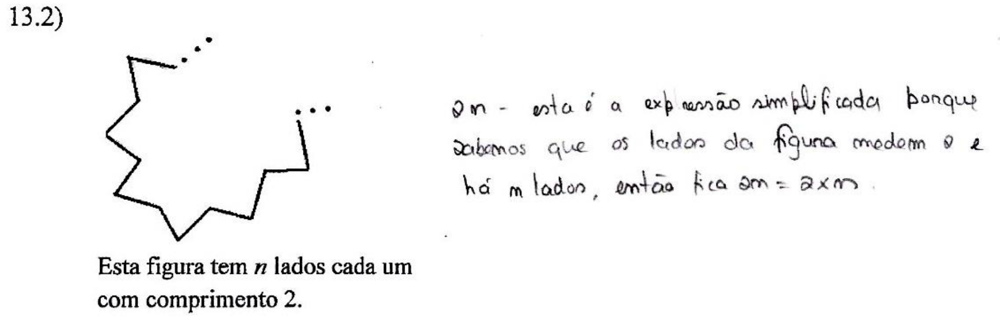
Para saber se $x = 4$ vou substituir os x por 4, então a equação fica:

$\frac{2\times4+2}{1+4} = 2$, logo fica $\frac{8+2}{5} = 2$, depois fica $\frac{10}{5} = 2$,

agora faço 10 : 5 que dá 2, 4 é a solução da equação.

Figura 7.1.2: Produção de Gabriela, TA1-Q10.

Na resolução do exercício (Fig. 7.1.3) é solicitada a escrita de uma expressão simplificada para o perímetro de figuras, Gabriela recorre ao SNA e escreve corretamente a expressão algébrica pedida e explica como a obteve.



13.2)

Esta figura tem *n* lados cada um com comprimento 2.

$2n$ - esta é a expressão simplificada porque sabemos que os lados da figura medem 2 e há n lados, então fica $2n = 2\times n$.

Figura 7.1.3: Produção de Gabriela, TA1-Q13.2.

Ao responder a esta questão, a aluna envolve-se numa atividade de geração, neste caso de uma expressão algébrica, apoiado numa figura geométrica. Esta tarefa, do ponto de vista algébrico, incentiva a generalização, um aspeto fulcral no pensamento algébrico.

Na resolução de um problema (Fig. 7.1.4), Gabriela traduz o enunciado através de representações no SNN. Em seguida, efetua tratamentos nesse sistema de notação de forma a obter a resposta.

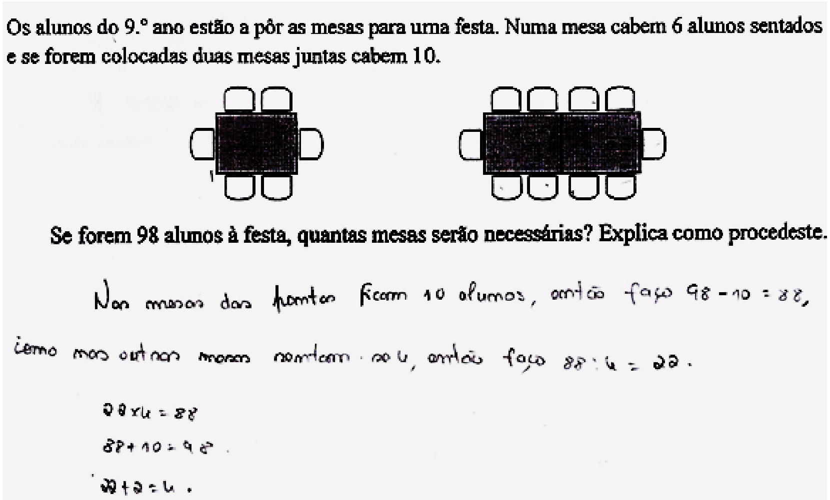


Figura 7.1.4: Produção de Gabriela, TA1-Q14.5.

A aluna poderia ter recorrido à escrita de uma equação, mas optou por não o fazer, recorrendo, em alternativa, a uma estratégia de desfazer (*unwind*) apoiada em operações aritméticas. Na realidade o método usado por Gabriela pode ser traduzido algebricamente pela resolução da equação $m = \frac{a-10}{4} + 2$, sendo *m* o número de mesas e *a* o número de alunos. A resolução da aluna mostra que o método utilizado, embora informal, é suportado por operações análogas às que seriam utilizadas na resolução formal da equação indicada.

De um modo geral, na resolução desta tarefa, Gabriela recorre a representações maioritariamente no SNN, sempre apoiadas pela linguagem natural. Relativamente à forma como Gabriela articula as representações matemáticas quanto aos tratamentos, dentro do SNA, estes são evidentes em diversas situações, nomeadamente na simplificação de expressões algébricas e na resolução de equações, embora não resolva todas as equações propostas. No que respeita aos tratamentos, no SNN, estes ocorrem aquando da substituição numérica em variáveis, na avaliação de uma grandeza e na comparação de igualdades entre expressões algébricas, também por substituição numérica. No que se refere às conversões, Gabriela efetua este tipo de procedimento da linguagem natural para os SNN e SNA e ainda para representações pictóricas; do SNN para o SNA e vice-versa, e ainda de representações pictóricas para o SSN.

A análise das respostas da aluna evidencia um grande apego às representações no SNN, efetuando frequentemente a conversão de outros sistemas de representação para o SNN. Na resolução desta tarefa, a atividade algébrica de Gabriela centrou-se em atividades de geração, na escrita de expressões para o perímetro e área de figuras e, por vezes, na escrita de expressões gerais apoiadas em representações pictóricas e figuras geométricas. Esporadicamente, envolve-se em atividades de transformação para a simplificação de expressões algébrica e a resolução de equações.

No que respeita à atividade algébrica, o trabalho da aluna envolve alguma geração de expressões algébricas, em particular em situações que envolvem a fórmulas de áreas e perímetros. As atividades de transformação estão associadas à simplificação de expressões algébricas e à resolução de equações.

Relativamente aos métodos formais algébricos, Gabriela revela saber escrever e simplificar expressões algébricas. A aluna apenas resolve equações do 1.º grau do tipo $ax = b$, confessando, na entrevista, não se recordar de como resolver as outras (com parêntesis e denominadores), também não utiliza corretamente a escrita algébrica da relação entre duas variáveis, em todas as situações. Recorre particularmente a métodos informais, apoiados por representações no SNN. Em situações pontuais, recorre a métodos transitórios, realizando cálculos através de operações inversas, como na resolução da Q14.5.

Na Tarefa B-1 (Anexo 8), é proposto um problema para resolver na folha de cálculo em trabalho a pares, Gabriela e a sua colega organizam os dados em colunas, conforme apresento na figura 7.1.5. As alunas nomeiam a coluna C como “dia do nascimento” e constroem uma coluna de números entre 1 e 31, através do arrastamento. Na coluna D apresentam o produto dos valores da coluna C por 12, conforme a condição do enunciado. Seguidamente, as alunas iniciam um processo para determinar o produto dos diferentes meses por 30 e as respetivas somas com o valor obtido na coluna D.

C	D	E	F	G	H	I	J	K
dia do nascimento		mês do meu nascimento/Janeiro		Soma		Fevereiro		Soma
1	12	1	30	42		2	60	72
2	24	1	30	54		2	60	84
3	36	1	30	66		2	60	96
4	48	1	30	78		2	60	108
5	60	1	30	90		2	60	120

C	D	E	F	G	H	I	J	K
dia do nascimento		mês do meu nascimento/Janeiro		Soma		Fevereiro		Soma
1	=1*12	1	=1*30	=D3+F3		2	60	=60+D3
2	=2*12	1	=1*30	=F4+D4		2	60	=J4+D4
3	=3*12	1	=1*30	=F5+D5		2	60	=J5+D5
4	=4*12	1	=1*30	=F6+D6		2	60	=60+D6
5	=5*12	1	=1*30	=F7+D7		2	60	=60+D7

Figura 7.1.5: Produção de Gabriela, TB1.

No que se refere às representações na folha de cálculo, as alunas recorrem às funcionalidades desta ferramenta para gerar sequências numéricas (com incremento constante e /ou nulo) assim como a fórmulas para estabelecer as relações gerando variáveis-coluna. Gabriela e a colega manifestam dificuldades em dar continuidade à atividade de conversão do enunciado para a folha de cálculo. A falta de confiança na eficácia do procedimento escolhido leva as alunas a desistirem da resolução da tarefa, aguardando pela discussão na turma. Durante a discussão surge a ideia de uma tabela de dupla entrada e a respetiva fórmula para a obter:

> **Professora:** Será que nós aqui conseguíamos escrever uma relação entre o 582 e o dia e o mês de aniversário?
> **Carolina**: Então é a fórmula! [da folha de cálculo]
> […]
> **Professora:** Então, vamos lá ver… Vamos supor assim…Vamos pensar que o dia em que ela faz anos é *d* e que *m* é o mês [escrevo a legenda no quadro]
> **Tatiana**: Então é dia vezes 12… E mês vezes 30.
> **Carolina**: Mais.
> **Professora:** Está aqui a Carolina a acrescentar "mais".
> **Tatiana**: Mês vezes 30.
> **Professora:** E depois?
> **Alguns alunos**: Igual a 582.
> **Professora:** Olhem lá, isto [a expressão algébrica] que nós temos aqui, isto é o quê?
> **Tatiana**: É a fórmula.
> **Maria Inês**: É aquela função… Expressão...
> **Professora:** Pode ser considerada a expressão analítica… É a condição que traduz o enunciado do problema. E esta condição tem quantas soluções?
> **Filipe**: 3.

Na discussão surgem três datas possíveis para o aniversário de Ana, mas não se consegue determinar o dia ao certo. A discussão incentiva os alunos a uma atividade algébrica de geração, na escrita da relação entre o dia e o mês, $12d + 30m = 582$, no SNA. Por fim, é feita a verificação das soluções encontradas.

Esta tarefa destaca-se na aprendizagem de métodos formais, por proporcionar a resolução de um problema que permite o estabelecimento de relações entre variáveis na folha de cálculo e, posteriormente, em linguagem algébrica. Os alunos são levados a compreender o significado das letras numa equação literal e que estas equações podem admitir várias soluções, dependendo do contexto.

Na tarefa C-1 (Anexo 9), um problema proposto também para resolver com recurso à folha de cálculo, Gabriela e a colega recorrem à linguagem natural para apresentar os dados e para tirar algumas elações iniciais, conforme mostro na figura 7.1.6.

Elas pesaram-se duas a duas, então eu consigo tirar algumas conclusões
A Alice é a mais levezinha, pois quando ela se pesa com a Célia e com a
Beta, ela fica sempre por volta dos 130 e picos kg.
A Célia é a mais pesada, pois, quando se pesa com a Beta o valor aumenta
bastante. Com isto podemos concluir que a Beta está entra ambas.

Figura 7.1.6: Produção de Gabriela, TC1.

As alunas organizam os dados em colunas de modo a obter a solução para o problema. Neste processo começam por nomear colunas, por D a coluna correspondente ao peso da Alice, por E a coluna que representa o peso da Beta, por F a coluna que representa o peso da Célia e a coluna G representa o peso da Célia e da Alice, como mostra a figura 7.1.7.

Alice	Beta	Célia	Célia e Alice
1	131	20	21
2	130	21	23
3	129	22	25
4	128	23	27
5	127	24	29
6	126	25	31
7	125	26	33
8	124	27	35

Alice	Beta	Célia	Célia e Alice
1	=132-D9	=151-E9	=F9+D9
2	=132-D10	=151-E10	=F10+D10
3	=132-D11	=151-E11	=F11+D11
4	=132-D12	=151-E12	=F12+D12
5	=132-D13	=151-E13	=F13+D13
6	=132-D14	=151-E14	=F14+D14
7	=132-D15	=151-E15	=F15+D15
8	=132-D16	=151-E16	=F16+D16

57	75	76	133
58	74	77	135
59	73	78	137
60	72	79	139
61	71	80	141

57	=132-D65	=151-E65	=F65+D65
58	=132-D66	=151-E66	=F66+D66
59	=132-D67	=151-E67	=F67+D67
60	=132-D68	=151-E68	=F68+D68
61	=132-D69	=151-E69	=F69+D69

Figura 7.1.7: Resolução de Gabriela, TC1.

No processo de nomeação das colunas, as alunas seleccionam o peso da Alice como variável independente e recorrem a fórmulas para escrever as relações entre os pesos das irmãs. Utilizam o peso conjunto das irmãs Célia e Alice como dispositivo de regulação para encontrar a solução. Por fim, respondem ao problema, explicando os procedimentos efetuados na folha de cálculo, como apresento na figura 7.1.8.

Resposta:	O peso da Alice é 59 kg, o da Beta 73 kg e o da célia 78 kg.
	Para resolver este problema, eu fui fazer uma coluna para
	a Alice, com valores até132 pois era o peso dela em conjunto
	com a Beta, depois, fiz uma coluna com a Beta e subtrai os
	valores da coluna 1 a 132, depois fiz uma coluna com a Célia
	e fiz 151 que é o peso da beta e da célia em conjunto e
	subtrai pelos valores da coluna da Beta, depois, por ultimo,
	fui somar os valores da coluna da Alice com os da Coluna
	da Célia, até obter 137 e depois, consegui obter os pesos das irmãs.

Figura 7.1.8: Produção de Gabriela, TC1.

Gabriela refere que sentiu alguma dificuldade na resolução deste problema: “Ao princípio foi um bocado complicado, mas depois começámos a associar qual era a mais pesada, qual devia ser a mais leve e começou-se a tornar claro…” (E1).

Na discussão em grande grupo, apelo à escrita simbólica das relações presentes no problema e escrevo-as no quadro (figura 7.1.9), à medida que os alunos expressam as equações.

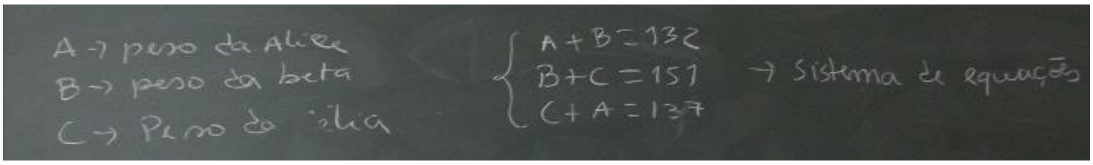


Figura 7.1.9: Escrita de sistema no quadro, TC1.

Esta discussão serve de ponte para levar os alunos à escrita das três equações com recurso à linguagem algébrica e permite-me formalizar o conceito de “sistema de equações”:

> O que está escrito no quadro são as três condições que têm de ser cumpridas neste problema… E têm de ser cumpridas, em simultâneo. A este conjunto de equações nós chamamos um sistema de equações. Neste caso, temos um sistema de três equações com três incógnitas.

Questionada acerca das aprendizagens realizadas com os dois problemas, Gabriela responde: “Eu aprendi a usar melhor o Excel, aprendi formas mais claras de mostrar o raciocínio, por exemplo, naquele [problema] do aniversário não era preciso ter feito aquelas colunas todas, havia uma fórmula e eu aprendi essa fórmula…” (E1). Estas afirmações mostram o contributo da folha de cálculo na expressão do raciocínio da aluna. A resolução deste problema conduz a aluna ao estabelecimento de relações entre as variáveis presentes no problema de forma a encontrar a solução. A conversão para o SNA, das representações na folha de cálculo, leva à escrita de três condições que me permitem formalizar o conceito de “sistema de equações”.

Na tarefa D-1 (Anexo 10), composta por quatro problemas, Gabriela recorre a diversas representações: em linguagem natural, no SNA e no SNN. A aluna enceta a resolução com uma atividade de geração, escrevendo as equações que representam as relações apresentadas em cada situação. No entanto, não faz uso dessas representações no SNA. Questionada (E1) acerca o recurso a esta representação, diz:

> **Professora**: Nesta questão foste logo também escrevendo equações…
> **Gabriela**: Pois, eu ainda não sabia o que estava a fazer…

A aluna, apesar de ter escrito as equações, parece ainda não se ter apropriado da sua importância na resolução dos problemas apresentados. No primeiro problema Gabriela utiliza estratégias de desfazer recorrendo a representações no SNN que a conduzem à resposta que apresento na figura 7.1.10.

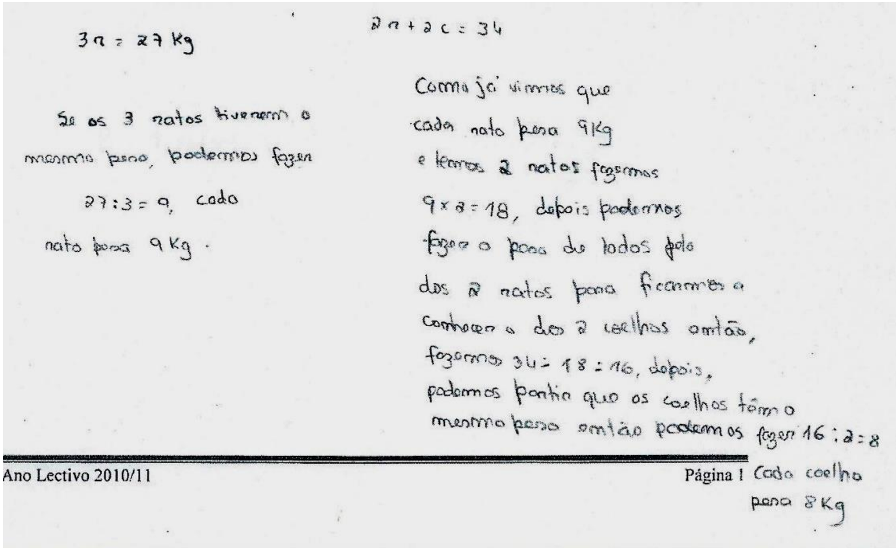
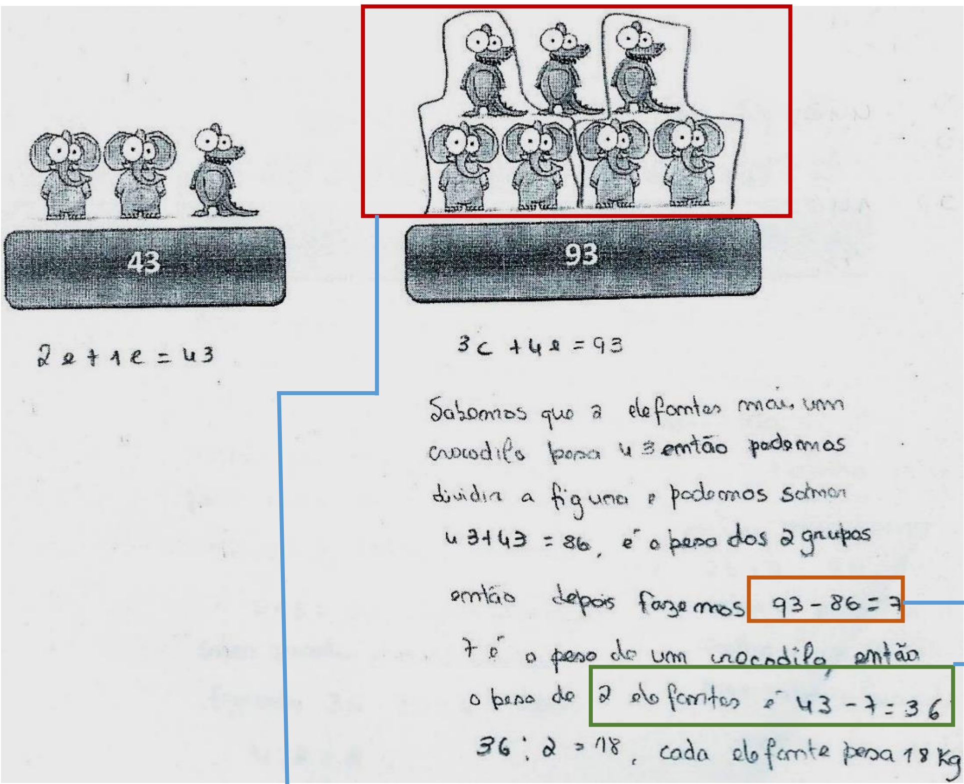


Figura 7.1.10: Produção de Gabriela, TD1-P1.

Nos problemas (2 e 3) seguintes Gabriela recorre à delimitação dos grupos de animais. Neste procedimento, utiliza a informação de uma das imagens e forma conjuntos na outra, o que lhe permite descobrir o valor de uma das incógnitas, para depois obter a solução. O processo utilizado pela aluna mostra claramente a ideia de substituição, fundamental na resolução de sistemas de equações. Gabriela recorre a métodos informais, ainda que transitórios, para a resolução dos três primeiros problemas. No segundo problema (Fig. 7.1.11) pode observar-se a estratégia seguida pela aluna, rodeando dois conjuntos de animais e, em seguida, substituindo esses conjuntos pelo valor dado pela primeira imagem. É possível fazer a correspondência desta produção com a resolução formal de um sistema pelo método de substituição. Apesar de Gabriela recorrer apenas a representações no SNN e não utilizar um método formal, os seus procedimentos, apoiados em conversões no SNN, são análogos à utilização do método de substituição, conforme mostro na figura 7.1.11.



$$\begin{cases} 2e + c = 43 \\ 3c + 4e = 93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e + c = 43 \\ \boxed{43 + 43 + c = 93} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e + c = 43 \\ \boxed{c = 93 - 86} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e + c = 43 \\ c = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2e = 43 - 7 \\ c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 36:2 \\ \boxed{c = 7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 18 \\ c = 7 \end{cases}$$

Figura 7.1.11: Correspondência ente resolução de Gabriela, TD1-P2 e uma resolução formal do sistema correspondente.

Por fim, no último problema proposto, Gabriela recorre à tentativa e erro por não encontrar o estabelecimento de relações entre as informações presentes nas imagens.

Questionada na entrevista (E1) acerca desta tarefa, refere:

Gabriela: …Essa foi fácil [problema 1] porque utilizei apenas números … Neste aqui [problema 2] já foi por conjuntos… E na 3, acho que determinámos também por conjuntos.
Professora: E na 4?
Gabriela: A 4? Foi mesmo ao calhas professora…
Professora: Dizes aqui [na resposta no enunciado] foi por tentativas, foste experimentado… esta 4 era do mesmo género das anteriores?

> **Gabriela**: Era, mas nestas aqui conhecíamos a relação, só tínhamos um animal e nas outras dá para fazer conjuntos e obter o mesmo valor que estes… E no 4 já não dá porque como temos 3 macacos e 1 gato e aqui só tenho um gato e não tenho 3 macacos e estão ao contrário... Isto aqui dá para fazer com... Aquela soma 4 macacos e 4 gatos é igual a… 26 mais 22 que dá 48, depois… Um gato e um macaco, dá 48 a dividir por 4 e depois o valor que me dava era de 1 gato e de 1 macaco e como aqui podemos obter que um macaco é mais pesado do que um gato porque quando temos mais um gato na balança a balança aumenta então depois eu dividia os valores, se desse por exemplo 10 podia ser 5, 5 como podia ser 6 para os macacos e 4 para os gatos ou 3 para os gatos e 7 para os macacos…

Na discussão do problema 4, outra aluna da turma propõe uma resolução que suscita a formalização do método da adição ordenada, referido por Gabriela no excerto anterior.

> **Professora**: O que é que aprendeste com esta tarefa?
> **Gabriela**: A partir daí aprendi sistemas de equação que foi… Que vão ser importantes na resolução de exercícios… De resto, acho que não aprendi mais nada… Porque eu com a forma como fiz é uma forma mais antiga de resolução …
> **Professora**: Uma forma mais antiga de resolução?!
> **Gabriela**: Sim…

Este excerto evidencia a importância destes problemas para Gabriela começar a resolver sistemas de equações pelo método formal de substituição. Como a aluna refere "A partir daí aprendi sistemas de equações", não propriamente pelo método de resolução ser uma forma mais "antiga de resolução", um método informal, mas certamente pela discussão realizada e pelas ideias que foram partilhadas por outros colegas de turma.

Na resolução dos problemas desta tarefa, Gabriela recorre a um método de transição, nas três primeiras situações, usando também representações pictóricas que envolvem a ideia de substituição. Na entrevista a aluna refere ainda que podia recorrer ao método da adição ordenada para resolver o último problema.

Na tarefa E-1 (Anexo 11), proponho a resolução do problema "Corrida de cavalos" num ambiente combinado da folha de cálculo com papel e lápis. Gabriela, para explicitar as relações entre o tempo e a distância percorrida por cada um dos cavalos, organiza os dados em três colunas, uma para o tempo (variável independente) e outras duas (variáveis dependentes) para a distância percorrida por cada um dos cavalos, conforme mostro na figura 7.1.12. A aluna não recorre à escrita de fórmulas para estabelecer as relações na folha de cálculo, usufruindo da função de geração de sequências numéricas, com incremento fixo, permitida por esta ferramenta.

tempo (s)	Relinchão	Russo
0	0	140
1	14	151
2	28	162
3	42	173
4	56	184
5	70	195

168	2352	1988
169	2366	1999
170	2380	2010
171	2394	2021
172	2408	2032
173	2422	2043

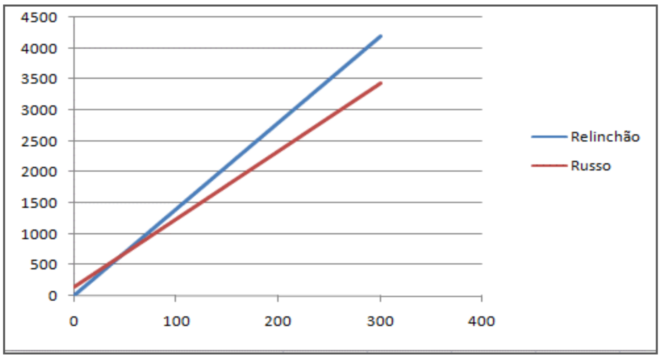


Figura 7.1.12: Produção de Gabriela, TE1-S1.

Tal como é solicitado noutra questão, Gabriela faz a conversão da tabela na folha de cálculo, para a representação gráfica relacionando o tempo e a distância percorrida por cada um dos cavalos, no mesmo referencial. Opta pelo mesmo processo nas duas situações seguintes, em que os cavalos correm à mesma velocidade, mas agora continuando o Russo com um avanço e, por fim, sem qualquer avanço, como se pode observar nas figuras 7.1.13 e 7.1.14.

tempo	Relinchão	Russo
0	14	140
1	28	154
2	42	168
3	56	182
4	70	196
5	84	210
6	98	224
7	112	238
8	126	252
9	140	266
10	154	280

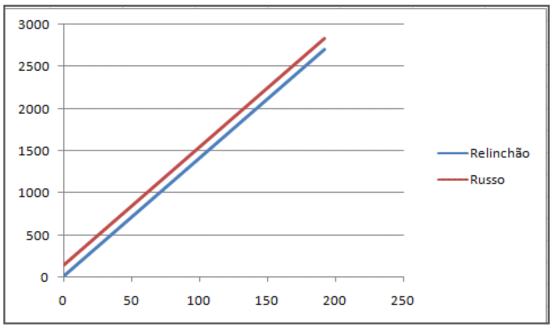


Figura 7.1.13: Produção de Gabriela, TE1-S2.

tempo	Relinchão	Russo
0	0	0
1	14	14
2	28	28
3	42	42
4	56	56
5	70	70
6	84	84
7	98	98
8	112	112
9	126	126
10	140	140

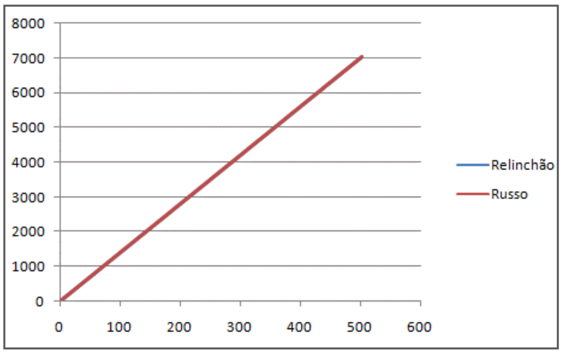


Figura 7.1.14: Produção de Gabriela, TE1-S3.

Após a resolução da tarefa, dou início à apresentação e discussão, analisando situação após situação. Por fim, peço aos alunos para escreverem a equação que representa a distância percorrida por cada um dos cavalos, ou seja, a escrita do sistema de equações em cada uma das três situações. Para além da interpretação gráfica da resolução de um sistema de equações, estas três situações distintas têm como objetivo a classificação de sistemas. Na entrevista, Gabriela reconhece a importância desta tarefa para a aprendizagem da resolução de sistemas pelo método gráfico "… foi daí que obtivemos os gráficos para aprender a resolver sistemas graficamente" (E1) e volta a fazer corretamente a interpretação gráfica das suas produções na folha de cálculo.

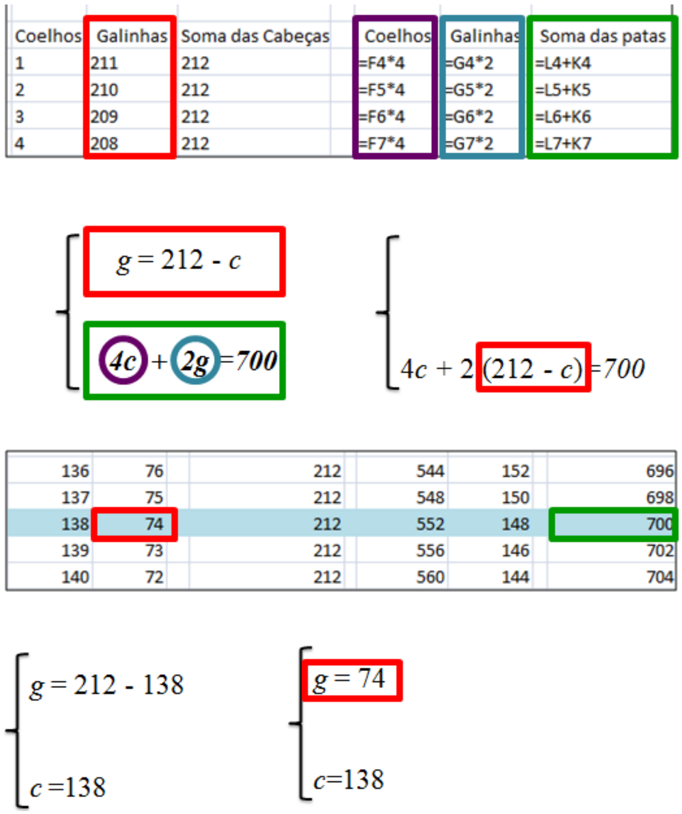
A tarefa F-1 (Anexo 12) "Galinhas e coelhos" é proposta para explorar na folha de cálculo. Gabriela começa por escolher a variável independente (número de coelhos) e estabelece, em seguida, as relações entre essa variável e as restantes. A variável dependente "Soma das patas" serve como dispositivo de regulação para encontrar a solução, figura 7.1.15.

Coelhos	Galinhas	Soma das Cabeças	Coelhos	Galinhas	Soma das patas
1	211	212	4	422	426
2	210	212	8	420	428
3	209	212	12	418	430
4	208	212	16	416	432
5	207	212	20	414	434
6	206	212	24	412	436
136	76	212	544	152	696
137	75	212	548	150	698
138	74	212	552	148	700
139	73	212	556	146	702
140	72	212	560	144	704

Coelhos	Galinhas	Soma das Cabeças	Coelhos	Galinhas	Soma das patas
1	211	212	=F4*4	=G4*2	=L4+K4
2	210	212	=F5*4	=G5*2	=L5+K5
3	209	212	=F6*4	=G6*2	=L6+K6
4	208	212	=F7*4	=G7*2	=L7+K7
5	207	212	=F8*4	=G8*2	=L8+K8
6	206	212	=F9*4	=G9*2	=L9+K9
136	76	212	=F139*4	=G139*2	=L139+K139
137	75	212	=F140*4	=G140*2	=L140+K140
138	74	212	=F141*4	=G141*2	=L141+K141
139	73	212	=F142*4	=G142*2	=L142+K142
140	72	212	=F143*4	=G143*2	=L143+K143

Figura 7.1.15: Produção de Gabriela, TF1.

Na discussão da tarefa é feita a conversão do trabalho realizado na folha de cálculo para o papel e lápis, no SNA, através do questionamento aos alunos. Nesta fase o objetivo é estabelecer a relação entre o trabalho realizado na folha de cálculo e o método de substituição de resolução de sistemas, como apresento na figura 7.1.16.



Coelhos	Galinhas	Soma das Cabeças	Coelhos	Galinhas	Soma das patas
1	211	212	=F4*4	=G4*2	=L4+K4
2	210	212	=F5*4	=G5*2	=L5+K5
3	209	212	=F6*4	=G6*2	=L6+K6
4	208	212	=F7*4	=G7*2	=L7+K7

$$\begin{cases} g = 212 - c \\ 4c + 2g = 700 \end{cases} \qquad \begin{cases} \\ 4c + 2(212 - c) = 700 \end{cases}$$

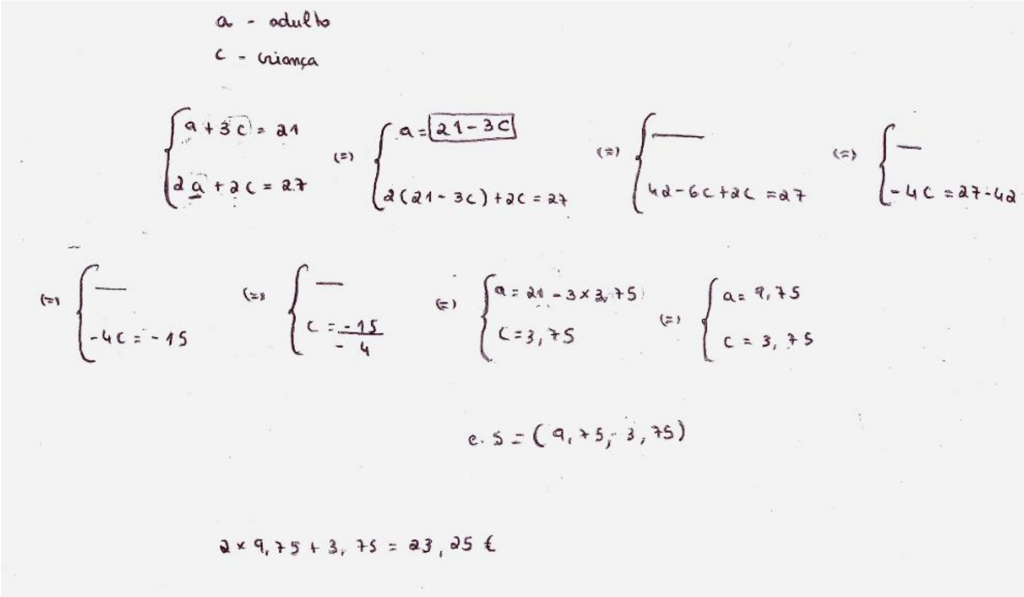
136	76	212	544	152	696
137	75	212	548	150	698
138	74	212	552	148	700
139	73	212	556	146	702
140	72	212	560	144	704

$$\begin{cases} g = 212 - 138 \\ c = 138 \end{cases} \qquad \begin{cases} g = 74 \\ c = 138 \end{cases}$$

Figura 7.1.16: Correspondência entre a resolução de Gabriela na folha de cálculo e a resolução pelo método formal de substituição.

A primeira coluna nomeada com a designação de “Coelhos” corresponde à variável independente e a segunda coluna “Galinhas” é uma variável dependente. Gabriela constrói-a através de uma sequência numérica com incremento fixo (-1). No trabalho com papel e lápis, a letra g designa o número de galinhas e a c de coelhos, $g = 212 - c$. A quarta coluna “Coelhos” (corresponde ao número de patas dos coelhos) e a quinta “Galinhas” (corresponde ao número de patas das galinhas) surgem como dependentes das duas primeiras, respetivamente. A sexta coluna (corresponde ao total de patas dos animais) surge, das duas anteriores, como outra relação de dependência. A esta última coluna cabe o papel de dispositivo de regulação para a procura da solução, ou seja no trabalho com papel e lápis procuramos os valores de *g* e *c*, onde *c* representa o número de coelhos, tais que $4c+2g=700$. Obtemos assim as duas equações que constituem o sistema. A folha de cálculo, através do arrastamento, efetua automaticamente os cálculos que correspondem à substituição dos valores correspondentes em cada célula, de acordo com a fórmula inserida, levando assim à solução. Este trabalho de conversão, da folha de cálculo para o SNA, é fundamental para que os alunos se apropriem do significado de cada coluna construída na folha de cálculo e tenham oportunidade de compreender a correspondência que existe entre os procedimentos habituais na folha de cálculo e o método de substituição na resolução de sistemas de equações.

Noutra aula proponho a tarefa G-1 (Anexo 13) que envolve a resolução de problemas, de exercícios, de sistemas pelos métodos estudados, a escrita de sistemas na forma canónica, a verificação de soluções de um sistema, a classificação de sistemas sem efetuar cálculos e, ainda, a escrita do enunciado de um problema. Na resolução desta tarefa, Gabriela utiliza apenas representações no SNN para verificar soluções através de cálculos por substituição. Nas restantes situações, recorre a representações no SNA conjugadas com a linguagem natural para responder às questões bem como para explicar os seus procedimentos. De um modo geral, recorre essencialmente a métodos formais para obter as respostas, como na resolução de um problema que apresento na figura 7.1.17. A aluna começa por identificar as incógnitas, converte as condições do enunciado em linguagem natural para o SNA, um sistema de duas equações que resolve pelo método de substituição (tratamentos no SNA). Por fim, verifica a validade da solução encontrada para uma equação do sistema através de uma conversão do SNA para o SNN, efetuando cálculos por substituição. Na resolução deste problema, no que respeita à atividade algébrica, envolve-se numa atividade de geração e depois numa atividade de transformação.



a - adulto
c - criança

$\begin{cases} a+3c=21 \\ 2a+2c=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\boxed{21-3c} \\ 2(21-3c)+2c=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ 42-6c+2c=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ -4c=27-42 \end{cases}$

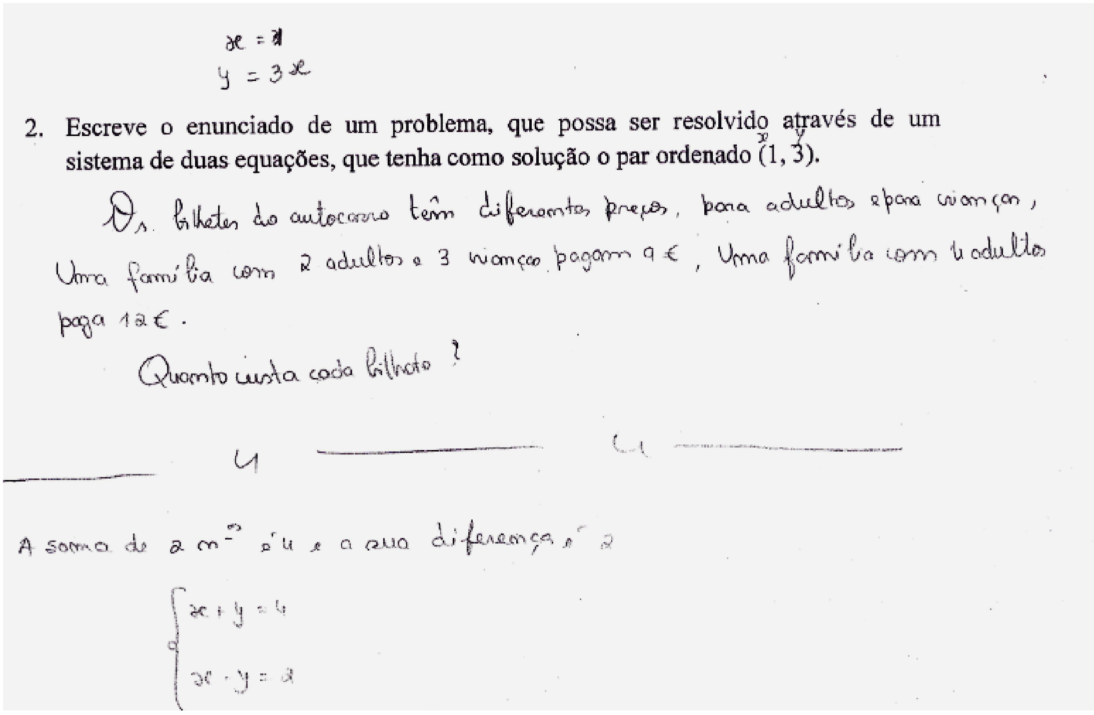
$\Leftrightarrow \begin{cases} — \\ -4c=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ c=\frac{-15}{-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=21-3\times 3,75 \\ c=3,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9,75 \\ c=3,75 \end{cases}$

C.S = (9,75; 3,75)

$2\times 9,75+3,75=23,25$ €

Figura 7.1.17: Produção de Gabriela, G1-Q1.

Na escrita do enunciado de um problema dada a sua solução, Gabriela apresenta a resposta, como mostro na figura 7.1.18.



$x = 1$
$y = 3x$

2. Escreve o enunciado de um problema, que possa ser resolvido através de um sistema de duas equações, que tenha como solução o par ordenado $(1, 3)$.

Os bilhetes do autocarro têm diferentes preços, para adultos e para crianças, Uma família com 2 adultos e 3 crianças pagam 9 €, Uma família com 4 adultos paga 12 €.

Quanto custa cada bilhete?

4 ——— 4 ———

A soma de 2 nº é 4 e a sua diferença é 2

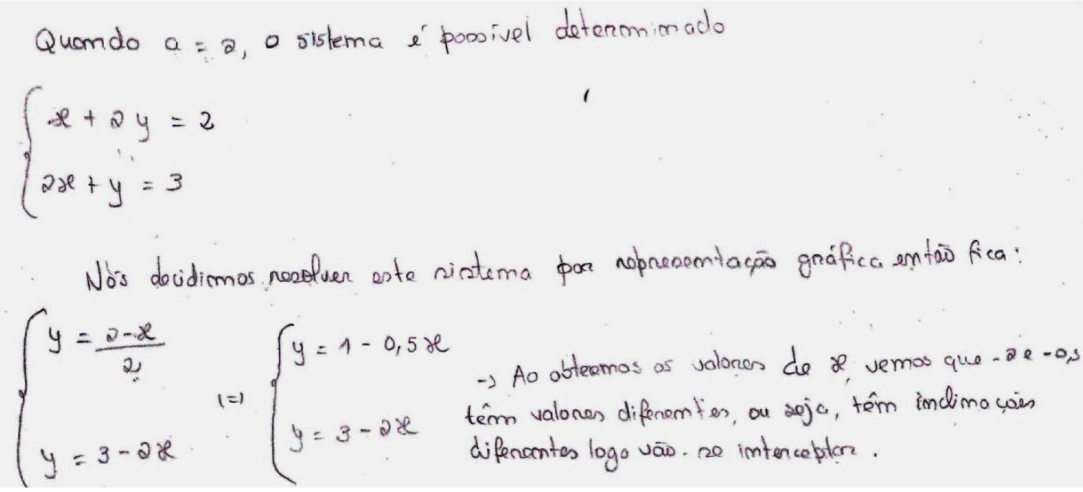
$\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$

Figura 7.1.18: Produção de Gabriela, G1-Q2.

Gabriela apresenta o enunciado de um problema, bem como a sua representação no SNA. Nesta atividade recorre ao contexto apresentado no problema anterior alterando apenas os dados de acordo com a solução indicada. Durante a discussão surgem e são escritos no quadro, vários enunciados distintos. A aluna seleciona o que envolve um contexto de operações com números e regista-o na sua ficha de trabalho. Nas restantes questões, centra-se em atividades de transformação na resolução de sistemas de equações pelos métodos formais, assim como na sua escrita na forma canónica. Noutras situações, a aluna recorre à linguagem natural para a classificação dos sistemas e sua justificação, bem como para enunciar um problema conhecida a sua classificação. Na entrevista, reconhece a importância da realização desta tarefa: "foi muito importante professora, porque quando eu comecei a resolver esta ficha eu não conseguia resolver sistemas com fluência…". Questionada acerca do significado que atribui à palavra fluência, Gabriela explica: "É saber resolver. Sabe? Assim rápido, sem pensar e demorar muito tempo".

Ao longo da resolução desta tarefa verifico que quando é dada liberdade para escolher um método de resolução, Gabriela opta pelo método de substituição. No caso em que é dado um sistema onde uma das equações é indeterminada ou impossível, consegue de imediato classificar esse sistema. O mesmo sucede quando lhe é apresentada a representação gráfica.

Na tarefa H-1 (Anexo 14), resolvida em grupo, Gabriela e os restantes colegas começam por fazer a substituição do parâmetro por valores numéricos inteiros e optam por analisar os sistemas obtidos do ponto de vista gráfico, como mostro na figura 7.1.19.



Quando a = 2, o sistema é possível determinado

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Nós decidimos resolver este sistema por representação gráfica então fica:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2-x}{2} \\ y = 3-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 0,5x \\ y = 3 - 2x \end{cases}$$

-> Ao obtermos os valores de x, vemos que -2 e -0,5 têm valores diferentes, ou seja, têm inclinações diferentes logo vão-se intercetar.

Figura 7.1.19: Produção de Gabriela, TH1.

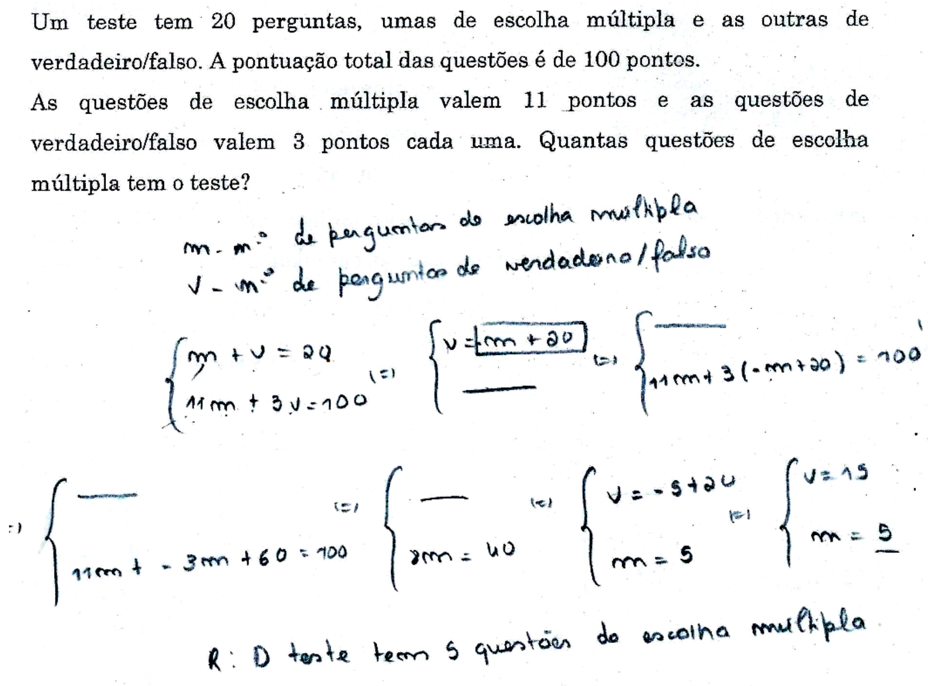
Através de tratamentos no SNA, os alunos resolvem cada uma das equações em ordem a *y* e Gabriela consegue relacionar de imediato esta representação algébrica com a representação gráfica, afirmando que as retas têm inclinações diferentes e, como tal intersectam-se, sendo o respetivo sistema possível e determinado. A aluna não necessita de efetuar a representação gráfica para tirar estas conclusões, o que constitui uma evidência da compreensão da *equivalência* entre estes dois tipos de representação.

Gabriela, em conjunto com os colegas, recorre essencialmente a representações no SNA em conjugação com a linguagem natural para explicar os procedimentos e dar as respostas. A representação gráfica também está presente, embora de forma implícita.

Na entrevista (E1) realizada após o estudo deste tópico são propostas algumas tarefas. A figura 7.1.20 ilustra a resolução de um problema onde Gabriela identifica as incógnitas, traduz o problema para o SNA, através de um sistema de duas equações e resolve-o pelo método de substituição. A aluna explica assim a sua resolução:

> Quando eu li o enunciado achei que como tínhamos duas incógnitas e como elas se relacionavam entre si de duas formas podia obter duas equações e a partir daí fazer um sistema.

Neste excerto mostra que Gabriela reconhece as situações em que pode utilizar um sistema de equações para resolver um problema.



Um teste tem 20 perguntas, umas de escolha múltipla e as outras de verdadeiro/falso. A pontuação total das questões é de 100 pontos.
As questões de escolha múltipla valem 11 pontos e as questões de verdadeiro/falso valem 3 pontos cada uma. Quantas questões de escolha múltipla tem o teste?

m - n.º de perguntas de escolha múltipla
v - n.º de perguntas de verdadeiro/falso

$$\begin{cases} m + v = 20 \\ 11m + 3v = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \boxed{-m + 20} \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 11m + 3(-m+20) = 100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 11m - 3m + 60 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 8m = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -5 + 20 \\ m = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 15 \\ m = \underline{5} \end{cases}$$

R: O teste tem 5 questões de escolha múltipla

Figura 7.1.20: Produção de Gabriela, E1-Q1.

O contexto do problema proposto na figura 7.1.21 é do agrado de Gabriela – um cruzeiro para os finalistas do 9.º ano. A aluna, após a leitura do enunciado, exclama: “Isso é que era mesmo bom!” Em relação ao método de resolução adotado, refere “Aqui eles já me dão a equação e aqui: Será que existe algum local comum às rotas dos dois cruzeiros? Em caso afirmativo, indica as coordenadas…” E acrescenta, em seguida:

> Quando eu li isto… Algum local comum, eu pensei logo num gráfico… comum… Sistema possível determinado e como já tinha as equações, quando eu li coordenadas, coordenadas, … associei a um mapa e então fui tentar fazer um gráfico.

Nesta explicação, o método gráfico surge como a forma mais adequada para resolver o sistema.

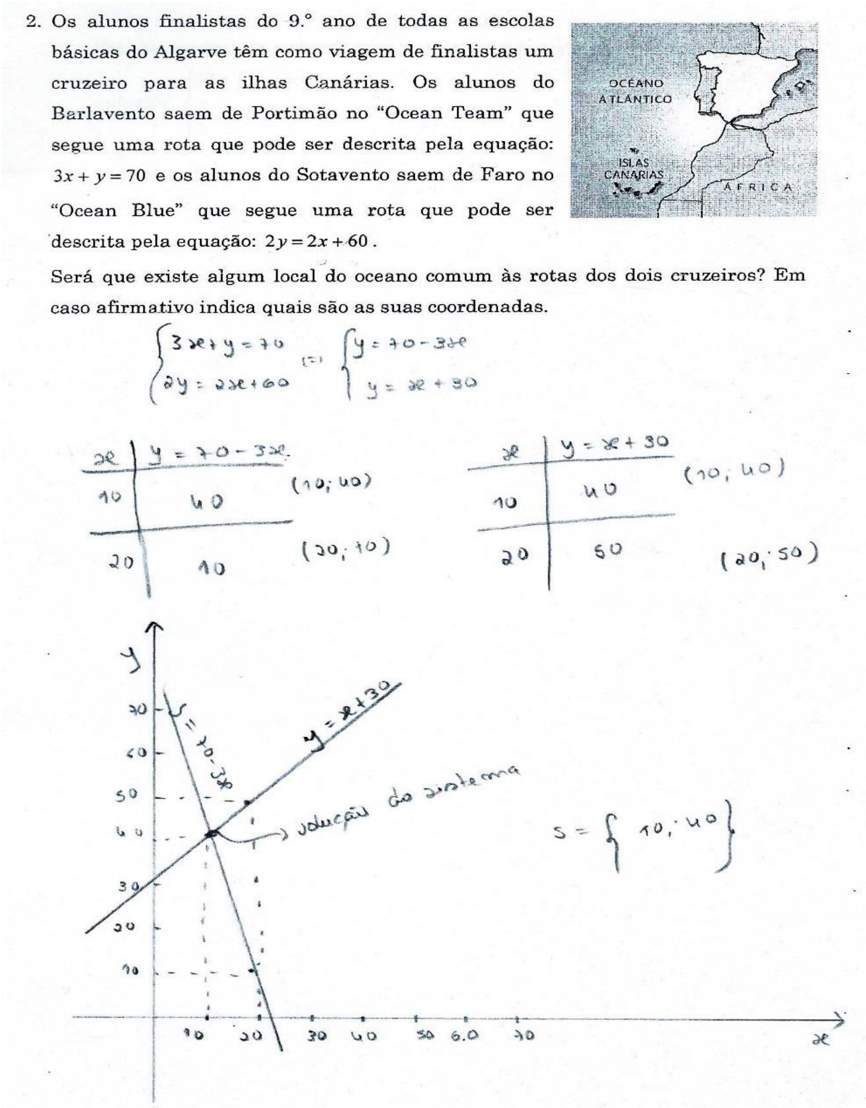


Figura 7.1.21: Produção de Gabriela, E1-Q2.

A aluna constrói tabelas e atribui valores a x, obtendo os respetivos valores para y e, em seguida, constrói gráfico. Uma vez que obtém dois pontos com as mesmas coordenadas, antes de concluir afirma:

> **Gabriela**: São iguais, por isso vão se intersetar … logo pela inclinação das retas [a aluna referia-se ao declive] via-se que se intersetam.
> **Gabriela**: É no ponto (10, 40) … já está!
> **Professora**: Tu decidiste então resolver graficamente, porquê?
> **Gabriela**: Oh professora! Quando eu comecei a ler isto aqui pareceu-me difícil, mas depois como já vi as equações também achei um pouco complicado, depois quando eu li "será que existe algum local do oceano comum" eu pensei … comum… sistema

possível determinado e como já tinha as equações e quando eu li coordenadas, coordenadas associei a um mapa e então fui tentar fazer um gráfico.
Professora: E será que não podias fazer de outra maneira?
Gabriela: Se calhar até podia… podia ser no Excel, com um gráfico no Excel…
Professora: Mas sem utilizar gráficos? …
Gabriela: Resolver o sistema?! [referia-se ao método de substituição]
Professora: Resolver o sistema … Encontravas a mesma solução, ou não?
Gabriela: Sim, se estiver correta esta solução, encontrava.
Professora: É difícil resolver sistemas de equações pelo método gráfico?
Gabriela: Não, eu acho que não, pelo menos, …
Professora: Mas aqui parece que entre o primeiro e o segundo problema, houve qualquer coisa que fez com que tu… já explicaste porquê, fosses utilizar o método gráfico enquanto no outro preferiste o método de substituição. No outro também podias ter utilizado o método gráfico ou não?
Gabriela: Sim, podia… era, por exemplo, pôr estas [a aluna vira a página e aponta para as equações do sistema] aqui não tenho *x* e *y* mas optar por resolver em ordem a *v* e depois optar pelo método gráfico. Depois, por exemplo, se o *v* é o *y*, o *v* iria estar neste eixo e o *x* neste, que neste caso é o *m*. Depois obtinha aqui 5 e aqui 15 e então saberia o número de perguntas.

Na questão seguinte são dadas as representações gráficas e é pedido a classificação dos sistemas correspondentes, bem como a respetiva solução. A aluna responde rapidamente, não tendo apresentado qualquer dificuldade. Em seguida, peço que escreva um sistema, dada uma determinada solução e a aluna elabora a resolução apresentada na figura 7.1.22.

Gabriela: Um sistema com solução 3 e -2, então 3 é o *x* e -2 o *y* [a aluna anota as letras ao lado de cima dos números] então isto aqui pode ser assim $x+y=1$ e agora $x-y=5$ e já está!

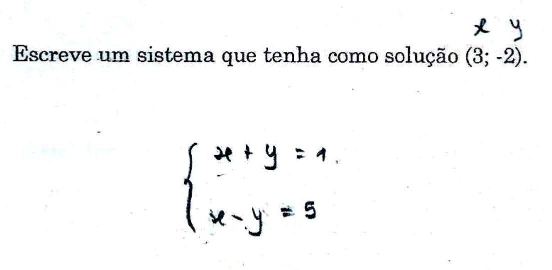


Figura 7.1.22: Produção de Gabriela, E1-Q4.

Professora: Como é que tu sabes se aquela é a solução?!

Gabriela: Então?! Para já, porque podemos ir substituir. E se eu fizer 3 + (-2) irá dar 1 e 3 – (-2) irá dar 5, o sinal de menos vai passar para mais e depois é por isto que eu sei.

A aluna verifica que o par ordenado é solução do sistema, no entanto, não se certifica de que o sistema é, ou não, determinado.

Na última questão, peço para elaborarem um enunciado para um problema do qual é conhecida uma solução. Gabriela, após a leitura da questão, começa por fazer a correspondência entre o par ordenado e as variáveis *x* e *y* do problema que pretende escrever, como mostra o seguinte excerto:

Gabriela: O 8 é múltiplo de 4, o 3 pode ser… Isto aqui é o *x* e isto é o *y*, então pode ser a soma dos meus algarismos é 11 e a diferença é 5. Não é?… Ou então a multiplicação de 8 vezes 3, dezoito, não? Posso escrever isto? …
Professora: Escreve aquilo que tu achas que possa ser um problema…

A aluna escreve o enunciado do problema, figura 7.1.23, e o sistema de duas equações correspondente.

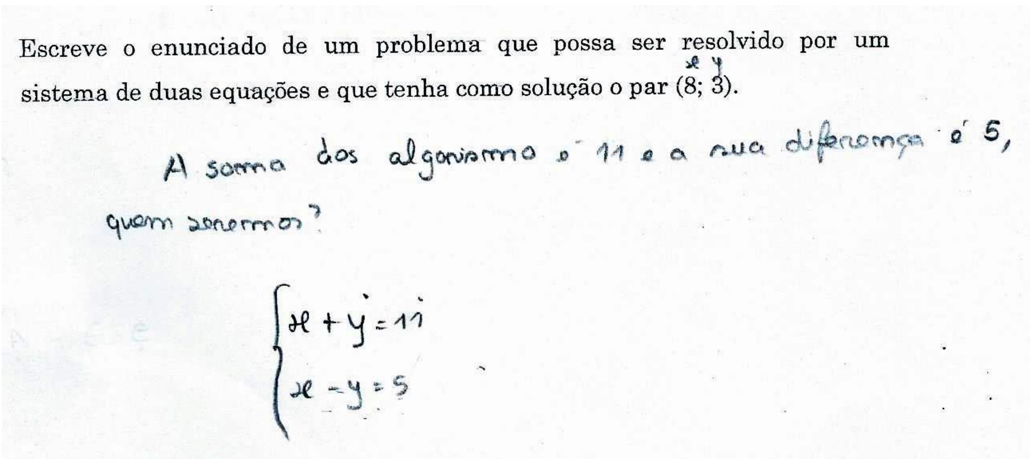


Figura 7.1.23: Produção de Gabriela, E1-Q5.

Para confirmar a validade da sua resposta afirma:

Gabriela: Depois iria resolver… Ou substituir…
Professora: Foi difícil?
Gabriela: Não… Tenho mais dificuldade em escrever problemas, quando me dão para resolver é mais fácil.

Gabriela confessa assim sentir mais dificuldade na escrita do enunciado do que na resolução de um problema, possivelmente por ser uma atividade pouco comum em sala de aula.

Ao longo de toda a entrevista, Gabriela recorre maioritariamente a representações no SNA conjugando com a linguagem natural. As representações no SNN ocorrem apenas para verificar ou para efetuar cálculos por substituição. Também recorre uma vez a representações gráficas na resolução de um problema. No final da entrevista, questionada acerca da utilidade do estudo de sistemas de equações, a aluna hesita, pensa um pouco e responde:

> Para que é que isto serve?… Para quando temos… Eu acho que isto na vida não me é muito útil… eu não percebo a utilidade no dia-a-dia, mas por exemplo, para resolver problemas de Matemática, quando temos duas igualdades com duas incógnitas e precisamos de saber o valor das incógnitas talvez os sistemas sejam interessantes para ajudar a resolver. Os gráficos, por exemplo, para os sistemas, aprendemos, sem resolver, quando é que há solução, sabemos identificá-los como possível, impossível…, mas para o dia-a-dia não vejo onde podemos utilizar.

Apesar de afirmar que não compreende a utilidade deste tópico para o seu quotidiano, a aluna mostra saber em que situações pode recorrer a um sistema de equações para resolver problemas.

Síntese

Representações utilizadas e transformações das representações na aprendizagem de métodos formais.

As tarefas propostas ao longo do estudo deste tópico pelas suas caraterísticas distintas e de acordo com os seus propósitos, impulsionam o aparecimento de uma diversidade de representações e conduzem à evolução do pensamento algébrico de Gabriela. A linguagem natural, em conjugação com outros tipos de representação, está sempre presente no trabalho desta aluna, independentemente do método de resolução de sistemas a que recorre. Na atividade realizada com papel e lápis, a linguagem natural é utilizada para explicar os procedimentos de resolução e para apresentar a resposta às questões. No trabalho na folha de cálculo a linguagem natural está presente para a nomeação de colunas – um procedimento intrínseco à lógica de funcionamento desta ferramenta.

Inicialmente, no trabalho com papel e lápis, as representações no SNN, são as mais expressivas para Gabriela e ela utilizava-as frequentemente para efetuar cálculos por substituição, para verificar uma solução ou para justificar procedimentos e obter a resposta. Os cálculos por operações inversas são também fundamentais e de certo modo são um marco na sua progressão para representações no SNA, por constituírem uma alternativa à escrita e resolução de equações. No trabalho com a folha de cálculo nas diferentes tarefas propostas, Gabriela recorre sempre ao registo numérico ou, em alternativa, ao registo de fórmulas. Em ambas as situações estes procedimentos correspondem à geração de sequências em que a aluna estabelece relações entre as variáveis presentes nos enunciados. As discussões, em sala de aula, possibilitam o estabelecimento da conversão entre o trabalho realizado na folha de cálculo e as representações no SNA, como a escrita de equações e de sistemas de equações. Contudo, importa referir que nem sempre os alunos mostram intenção de recorrer a essas representações sendo necessário, através de questionamento, provocá-los para o recurso às representações.

Gabriela apenas recorre às representações gráficas quando é solicitado, mesmo que esteja a trabalhar no ambiente da folha de cálculo, onde o recurso a esta representação é imediato. Contudo, na entrevista realizada após o estudo deste tópico, recorre ao método gráfico na resolução de um dos problemas, considerando-o um método muito eficiente e adequado à situação. As representações pictóricas apesar de surgirem apenas nas duas primeiras tarefas, revelam-se muito importantes para os alunos se apropriarem da ideia de substituição. Em particular, na tarefa D-1, as representações pictóricas parecem ser determinantes para ajudar a expressar com bastante clareza a ideia de substituição. No trabalho com a folha de cálculo, a formatação condicional ou realçar células, mostra-se particularmente útil para procurar e assinalar, num conjunto de células, a resposta às questões colocadas. Numa fase inicial Gabriela opta por recorrer maioritariamente a representações no SNN, mas estas vão progressivamente dando lugar a representações no SNA, como se pode constatar no final do estudo, em particular, na entrevista.

Relativamente à conversão de representações, o gráfico 7.1.1 sintetiza a evolução da aluna ao longo do estudo deste tópico. Na resolução de problemas a aluna utiliza maioritariamente conversões para o SNA, em detrimento das conversões para o SNN, à exceção da tarefa D-1. Na resolução de exercícios deste tópico, Gabriela recorre maioritariamente a conversões para o SNN. No entanto, na entrevista a aluna efetua apenas conversões para o SNA dada a natureza das questões. Na resolução de explorações, que apenas ocorreu na tarefa de diagnóstico, apenas efetua conversões para o SNN, como uma forma de atribuir significado e avaliar expressões algébricas. Na tarefa de investigação, tarefa H-1, apesar de apenas surgirem conversões para o SNN, no trabalho com os seus colegas, a aluna efetua também conversões para a representação gráfica ainda que de forma implícita para avaliar a posição relativa das retas que cada equação representa. Nas tarefas realizadas na folha de cálculo, quando é solicitado, converte as tabelas para representações gráficas e deste ambiente para o de papel e lápis, as conversões ocorrem essencialmente ao longo das discussões conjuntas.

No que respeita aos tratamentos, o gráfico 7.1.2 sintetiza o trabalho de Gabriela ao longo das diferentes tarefas e de acordo com a sua tipologia. Na resolução de problemas, com papel e lápis, a aluna inicialmente privilegia os tratamentos no SNN, no entanto, a partir da tarefa G-1 começa a registar-se uma mudança para os tratamentos no SNA. Esta alteração prende-se com o facto de a aluna começar a utilizar métodos formais, como o método de substituição na resolução e sistemas de equações. Na resolução de exercícios, inicialmente realiza opta por tratamentos no SNN, no entanto a partir da tarefa G-1 começa a realizá-los maioritariamente no SNA. A utilização progressiva de métodos formais, tanto na resolução de problemas como na resolução de exercícios, justifica esta mudança nos tratamentos. Nas explorações a aluna realiza apenas tratamentos no SNN e na tarefa de investigação apenas tratamentos no SNA. O trabalho na folha de cálculo, ao longo do estudo deste tópico, segue o padrão habitual que se inicia com a identificação das variáveis, passando à geração de colunas para construir sequências numéricas, com ou sem recurso a fórmulas e ao estabelecimento das relações necessárias para obter a solução.

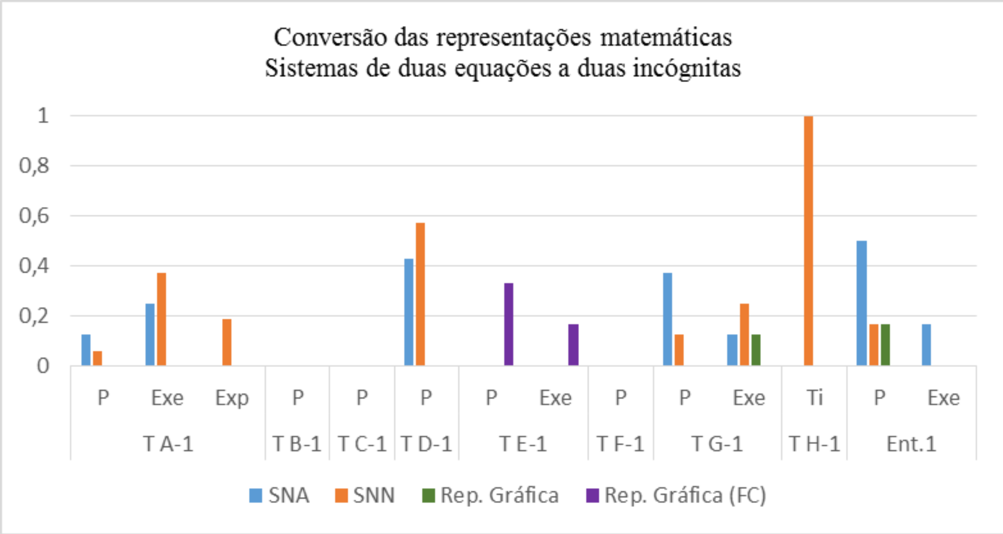


Gráfico 7.1.1: Conversão das representações no estudo do tópico “Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas”.

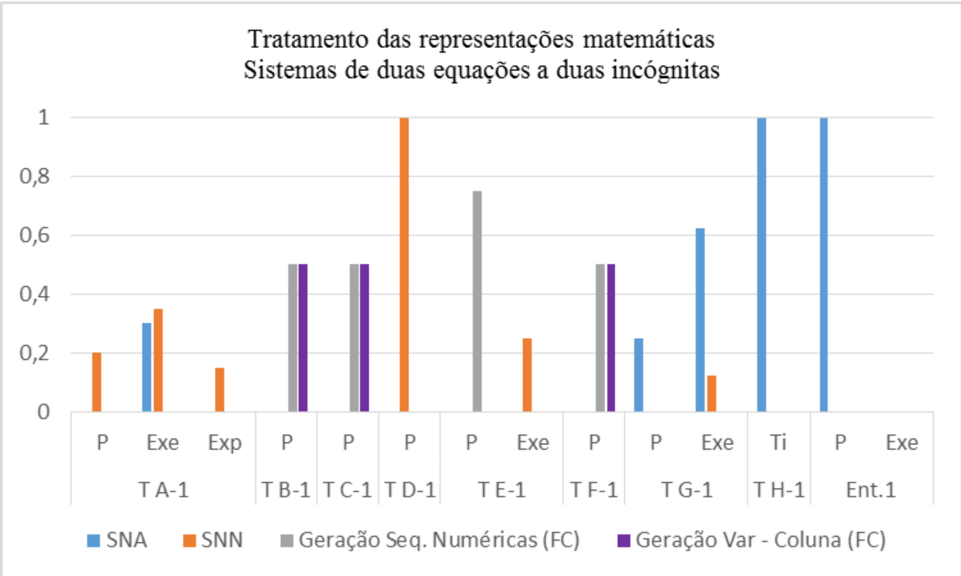


Gráfico 7.1.2: Tratamento das representações no estudo do tópico “Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas”.

As tarefas propostas permitem a Gabriela uma transição progressiva para a aprendizagem de métodos formais a partir de experiências informais. Apesar da aluna nem sempre recorrer à linguagem algébrica formal, tal como a escrita e utilização de equações, ela não deixou de desenvolver o pensamento algébrico. A folha de cálculo, para além de se revelar uma ferramenta muito útil na resolução de problemas ao proporcionar um ambiente sem o constrangimento da utilização do simbolismo algébrico, desempenha ainda um papel de relevo no desenvolvimento do pensamento algébrico, contribuindo para ajudar a transição entre os métodos informais e os métodos formais.

Na aprendizagem do método de substituição, Gabriela começa por desenvolver a compreensão da escrita de relações, recorrendo primeiro a uma linguagem essencialmente aritmética, como mostra a tarefa A-1. Em seguida, já no ambiente híbrido da folha de cálculo (B-1 e C-1), estabelece relações na linguagem específica desta ferramenta, o que lhe possibilita uma melhor compreensão da escrita das relações em linguagem algébrica. Neste processo, o questionamento e a discussão promovidos por mim, são determinantes para a formalização da noção de sistema de equações. Posteriormente, a noção de substituição surge de forma natural, sendo formalizada na articulação entre o trabalho na folha de cálculo e com papel e lápis. Para a aprendizagem do método gráfico de resolução de sistemas, o trabalho na folha de cálculo foi particularmente importante, ao proporcionar de imediato uma representação gráfica que permite a comparação entre as diferentes situações. O método da adição ordenada foi o menos trabalhado ao longo da experiência de ensino, mas na entrevista a aluna dá evidências de o compreender na sua aplicação a uma situação específica.

Os momentos de discussão e síntese são cruciais em todo este processo, servindo de suporte para Gabriela desenvolver uma perspetiva algébrica dos métodos de resolução de sistemas, refletindo acerca das suas estratégias e de diferentes formas de abordar os problemas. Assim, trabalha aspetos essenciais dos métodos formais, tais como a noção de substituição de uma incógnita por uma expressão equivalente, o significado da representação gráfica de funções e ideia da adição ordenada de termos semelhantes, em duas equações, todas elas geradoras de sentido na aprendizagem dos métodos formais.

O tempo despendido na fase informal é determinante para a aprendizagem dos métodos formais. Gabriela desenvolve a compreensão das diferentes representações e dos vários métodos formais. Por outro lado, durante as aulas procuro estabelecer uma relação entre os métodos informais e formais, proporcionando flexibilidade matemática na resolução de situações novas. Para além de mostrar ter aprendido os métodos formais de resolução de sistemas de equações, a aluna consegue ainda ser capaz de optar pelo método mais eficaz de acordo com as situações problemáticas propostas. Os dados apresentados permitem verificar que a aluna desenvolve o sentido dos métodos e o pensamento algébrico ao longo da experiência de ensino. No final do estudo deste tema, Gabriela passa a optar essencialmente pelos métodos formais para resolver as situações propostas, mostrando preferência pelo método de substituição, embora usando, quando lhe parece mais adequado, o método gráfico.

Em suma, da análise do desenvolvimento do pensamento algébrico de Gabriela, constato que a aprendizagem dos métodos formais conduz a alterações nas representações utilizadas pela aluna e na forma como as articula entre si. Inicialmente, na resolução de exercícios simples, efetua predominantemente os procedimentos da figura 7.1.24. No entanto, para os casos mais complexos, recorre ao SNA, como mostra o esquema da figura 7.1.25. Na resolução de problemas, a aluna é incentivada a efetuar conversões para o SNA, mas nem sempre as utiliza e, em alternativa, opta por conversões para o SNN (figura 7.1.26).

Figura 7.1.24: Atividade de Gabriela, na resolução de exercícios simples antes da aprendizagem dos métodos formais.

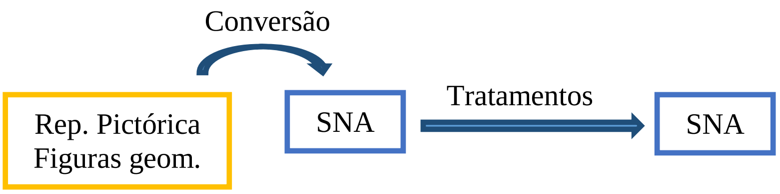


Figura 7.1.25: Atividade de Gabriela, na resolução de exercícios mais complexos, antes da aprendizagem dos métodos formais.

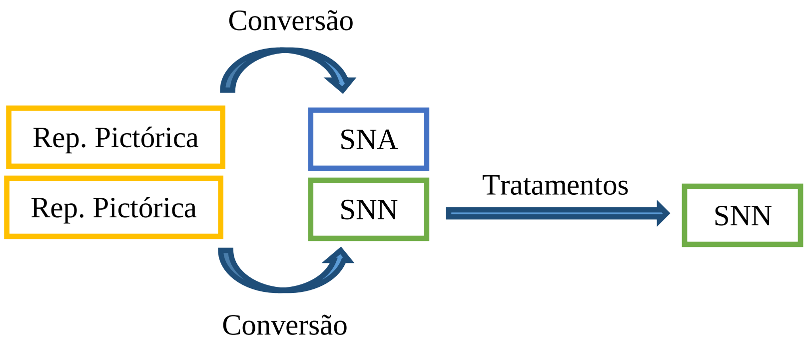


Figura 7.1.26: Atividade de Gabriela, na resolução de problemas antes da aprendizagem dos métodos formais.

A partir do momento em que aprende os métodos formais de resolução de sistemas, é possível observar uma alteração na atividade da aluna, na predominância das representações utilizadas e na forma como coordena as suas transformações. Na resolução de exercícios, dependendo do que é solicitado, privilegia as conversões para o SNA e opta por tratamentos no SNA, como fazia anteriormente, mas recorrendo agora aos métodos formais, em especial, o de substituição, que parece ser o seu método preferido para resolver sistemas. Na resolução de problemas, utiliza maioritariamente conversões para o SNA a que se seguem tratamentos neste mesmo sistema (figura 7.1.27). Por vezes, recorre a conversões para o SNN para a atribuição de significado, como para a verificação das soluções encontradas ou para a construção de tabelas, no caso do método gráfico segue para a representação gráfica. A resolução de problemas, com recurso a métodos formais, é uma atividade muito exigente no respeita à utilização de transformações de representações e sua coordenação. Contudo, a aluna sente-se mais segura com estes métodos que lhe oferecem também maior rapidez na obtenção da solução, o que a leva a sentir necessidade de ter fluência na sua utilização.

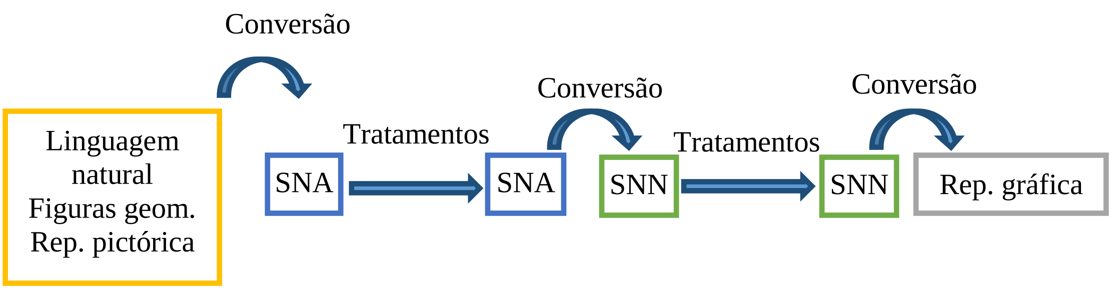


Figura 7.1.27: Atividade de Gabriela, na resolução de problemas depois da aprendizagem dos métodos formais.

O estabelecimento da conexão entre o trabalho desenvolvido na folha de cálculo e a notação algébrica com papel e lápis.

O estabelecimento da conexão entre o trabalho desenvolvido pela aluna, na folha de cálculo e a notação algébrica, acontece principalmente nos momentos de discussão das tarefas e são evidenciadas na escrita no SNA de equações com duas variáveis e na escrita de sistemas de equações. A conversão é efetuada em grande grupo com a intervenção de vários alunos. Numa fase inicial são convertidos apenas as fórmulas inseridas na folha de cálculo, no entanto para a formalização do método de substituição são também convertidos os procedimentos da própria ferramenta para o SNA.

Contribuição da conexão entre os dois ambientes (folha de cálculo e papel e lápis) na aprendizagem dos métodos formais.

As conversões da folha de cálculo para o papel e lápis são fundamentais para Gabriela no sentido em que permitem a formalização e atribuição de significado às equações com duas variáveis, assim como a escrita dos sistemas de equações. Por outro lado, servem também de suporte à formalização dos métodos gráfico e de substituição de resolução de sistemas.

7.2.2. Aprendizagens no tópico “Proporcionalidade Inversa. Representações gráficas”

No estudo deste tópico são propostas cinco tarefas, duas para serem trabalhadas num ambiente combinado de papel e lápis e folha de cálculo e as restantes apenas com recursos ao papel e lápis. Este tópico inclui o estudo da proporcionalidade inversa e ainda uma breve análise de representações gráficas de outras situações onde não existe a proporcionalidade inversa.

A evolução da aluna ao nível da utilização de representações matemáticas, da sua coordenação e aprendizagem de métodos formais, encontra-se sintetizada na tabela 7.2 e quadros de análise (Anexo 33).

No início do estudo deste tópico é proposta a resolução de uma ficha de diagnóstico, tarefa A-2 (Anexo 17), composta por situações problemáticas de natureza variada, que envolvem, ou não, raciocínio proporcional, mas que são suscetíveis de gerar, nos alunos, alguma incerteza quanto à escolha de uma estratégia de resolução. Gabriela recorre maioritariamente à linguagem natural para retirar dados dos enunciados, identificar as incógnitas e dar as respostas, utilizando recorrentemente operações elementares no SNN para obter os resultados.

Na resolução do primeiro problema, Gabriela tem dúvidas quanto ao resultado obtido e solicita o meu apoio:

> **Gabriela**: Oh professora, isto… Isto é tipo uma regra de três simples…. E dá isto!? [aponta para a folha].
> **Professora**: Se achas, tudo bem… [afasto-me]
> **Gabriela**: Tatiana, quanto é que te deu o [ ] do pão? … 29,9 …. Pois, foi o que me deu a mim… Eu pensava que podia estar mal… 29, 9…

Uma vez que eu não confirmo a resposta, Gabriela questiona uma colega para confirmar o resultado. Na resolução Gabriela começa por fazer uma disposição vertical/tabelar dos dados, identificando a incógnita. Em seguida, recorre à regra de três simples para obter o valor pretendido e apresenta a resposta, como mostro na figura 7.2.1.

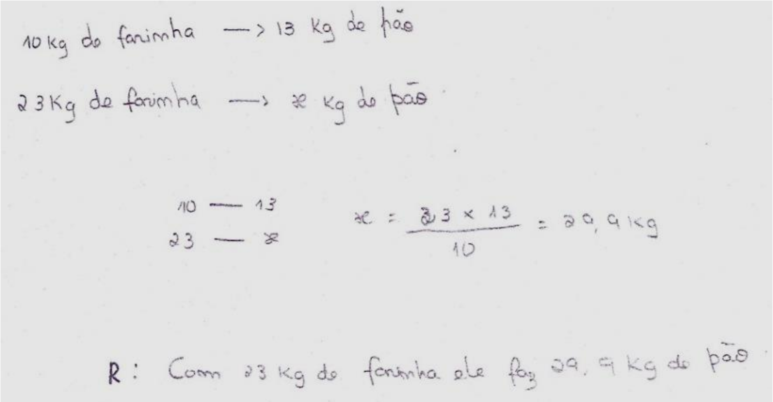


Figura 7.2.1: Produção de Gabriela, TA2-P1.

A segunda situação proposta não envolve qualquer tipo de proporcionalidade, mas Gabriela começa por retirar os dados do enunciado e organiza-os numa disposição vertical/tabelar, como mostro na figura 7.2.2.

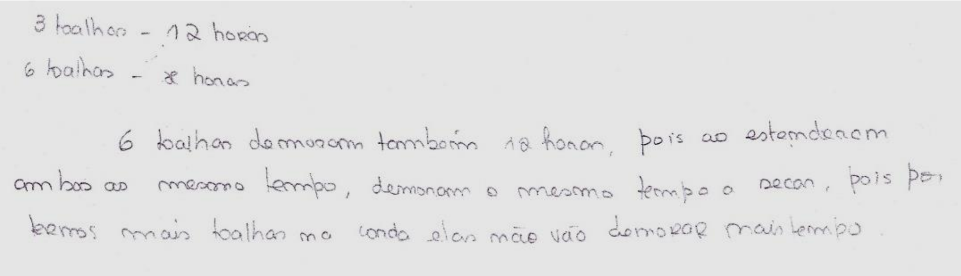


Figura 7.2.2: Produção de Gabriela, TA2-P2.

A aluna solicita a minha presença para lhe confirmar o resultado e, enquanto espera pelo meu apoio, vai comparando o seu trabalho com o de outra colega.

> **Gabriela**: Oh, professora… Patrícia, o que é que puseste na 2?
> **Gabriela**: … Isso não impede nada…. Então? Estendo uma ou estendo 10, é sempre ao mesmo tempo…
> **Vanessa**: É igual.
> **Gabriela**: Não, vão estar umas em cima das outras…. Só se chover.
> **[**…]
> **Professora**: Estão a conseguir fazer?
> **Gabriela**: Sim…. Oh professora, eu acho que isto está tudo mal … Isto é muito fácil…
> **Professora**: Está mal porquê?
> **Gabriela**: Isto é muito fácil…

Gabriela apesar de ter organizado os dados numa disposição tabelar, propícia à aplicação de uma regra de três simples, associa o contexto do problema à sua experiência pessoal do dia-a-dia e considera que não pode existir qualquer relação entre o número de toalhas estendidas ao sol e o tempo que estas demoram a secar. Apesar de considerar que é uma questão fácil, Gabriela não se mostra muito segura do trabalho que está a desenvolver. A situação parece-lhe demasiado fácil e questiona constantemente os colegas acerca dos resultados obtidos, procurando ver se encontra algo que a ajude a confirmar a sua conjetura.

Desta tarefa destaco ainda dois problemas que envolvem um raciocínio inversamente proporcional. No primeiro, Gabriela retira os dados do enunciado e coloca-os numa disposição tabelar, como tinha feito em outras situações, mas hesita quanto aos procedimentos a executar para obter a resposta.

Gabriela: Oh, professora … Agora como é que eu justifico aqui? É assim: "6 homens pintam uma casa em 3 dias" então em 2 dias é 4 homens e num dia são 2 homens…
Professora: Ai é?
Gabriela: Então?….
Professora: 6 homens pintam em 3 dias… Se queremos diminuir os dias…
Gabriela: Temos de aumentar os homens.
Vanessa: Metes mais 6 homens e pintam em 1 dia… Não? … Mais?
Gabriela: Não. Porque se tu fores diminuindo a relação entre isto é 2, 6 a dividir por 3 é 2. Se for aumentar 6 mais 2 dá 8 e aqui tens 2 dias mais 2, 8 mais 2 dá 10, 8 mais 2 dá 10, pintam num dia.
Professora: Será?
Gabriela: Acho que não…
Professora: Vamos lá pensar [afasto-me]
Vanessa: A gente aumenta mais 2 e fica 2, a gente aumenta mais 2 e fica 1… 6, 7, 8, 9, 10… 10 homens é 1 dia… Professora, venha lá aqui… Eu fiz assim: 6 a dividir por 3 é igual a 2, isto quer dizer que, 2 homens pintam a casa…
Gabriela: 2 homens, 6 dias.
Vanessa: 2 homens, 1 dia, vá.
Professora: Mas como é que pode ser 2 homens 1 dia?
Vanessa: Não. Espere aí professora… Assim dá 6 homens em 3 dias…
Professora: 6 homens em 3 dias…
Vanessa: Então agora eu quero baixar este número então aumento mais dois, aumento mais 2, fica 2, olhe fica 2 dias.
Professora: E será assim? Pensem lá melhor…
Vanessa: Eu não sei, eu já não sei. … Agora já não encontro mais nenhuma maneira.
Gabriela: Pois… [afasto-me]
Vanessa: Olha, não vou fazer, vou passar à frente.

Gabriela e a sua colega Vanessa não estão a encontrar um caminho que as leve à resposta. Algum tempo depois aproximo-me das alunas e questiono-as.

Professora: Então? E aqui já chegaram a alguma conclusão acerca do problema dos homens?

Gabriela apresenta a sua produção (figura 7.2.3) e explica como a obteve.

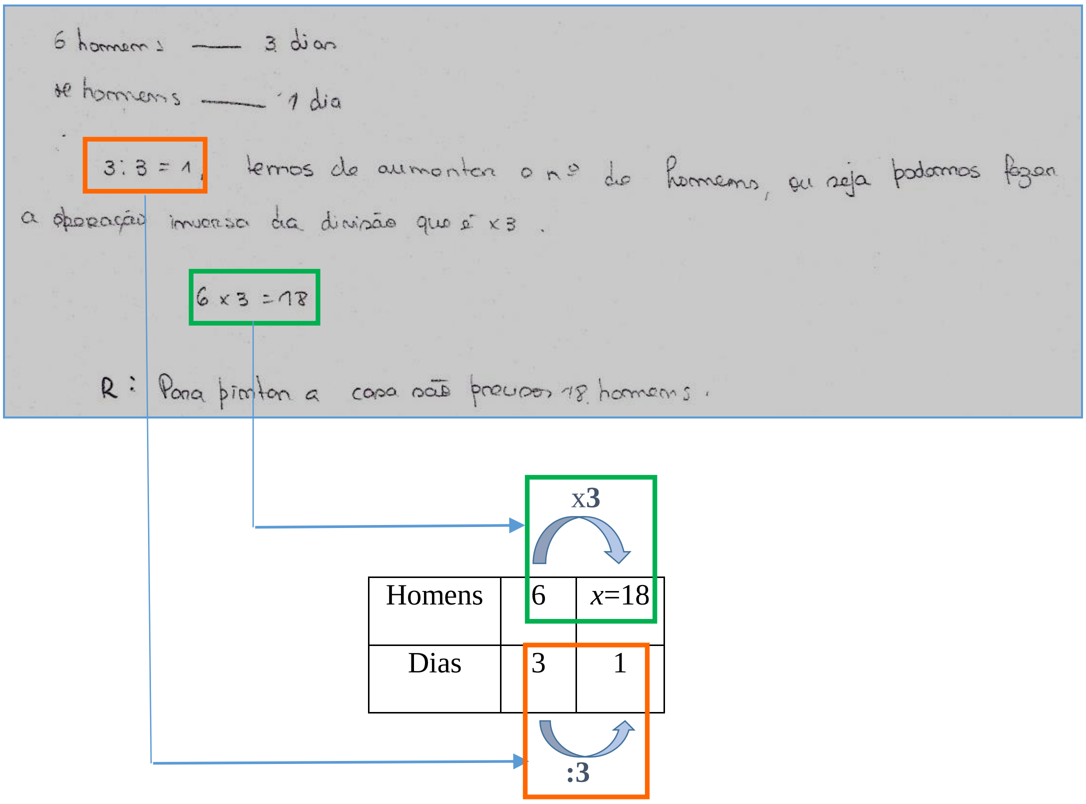


Figura 7.2.3: Produção e esquematização da produção de Gabriela, TA2-P4.

Gabriela: Eu fiz 3 a dividir por 3 dá 1 dia.
Professora: Hummm?
Gabriela: Eu fiz 3 a dividir por 3 dá 1 dia.
Professora: Exatamente!
Gabriela: E depois como eu tenho aqui 3 vou ter que multiplicar por 3.
Professora: E então?
Vanessa: Se pudéssemos fazer uma regra de três simples …
Gabriela: Mas eu tenho de fazer vezes 3 porque quando eu diminuo aqui tenho de aumentar aqui e dá 18.
Professora: Confirmas? Estás segura? Ou não? … Não? Então vá, vamos pensar mais um bocadinho.

Gabriela consegue obter a resposta correta, embora tenha iniciado a resolução do problema com um raciocínio aditivo. Depois de perceber que aquele raciocínio não lhe permitia chegar ao resultado, mostra-se um pouco insegura, mas aos poucos parece entender intuitivamente que, se o número de dias diminuir o número de homens tem de aumentar na mesma proporção, como se pode concluir do seu discurso “eu tenho de fazer vezes 3 porque quando eu diminuo aqui tenho de aumentar aqui”. Ou seja, a aluna começa a perceber que este aumentar e diminuir não se pode traduzir através de um raciocínio aditivo. A produção de Gabriela está esquematizada na figura 7.2.3. Na realidade, os procedimentos da aluna correspondem a uma abordagem formal de situações de grandezas inversamente proporcionais.

Num outro problema Gabriela já não aparenta dificuldades na sua resolução. A aluna multiplica valores correspondentes das duas grandezas envolvidas e atribuí-lhe o respetivo significado, neste problema, o preço do livro. Depois divide esse valor pelo preço a pagar por cada um e obtém o número de pessoas que devem participar, como é pretendido (Fig. 7.2.4).

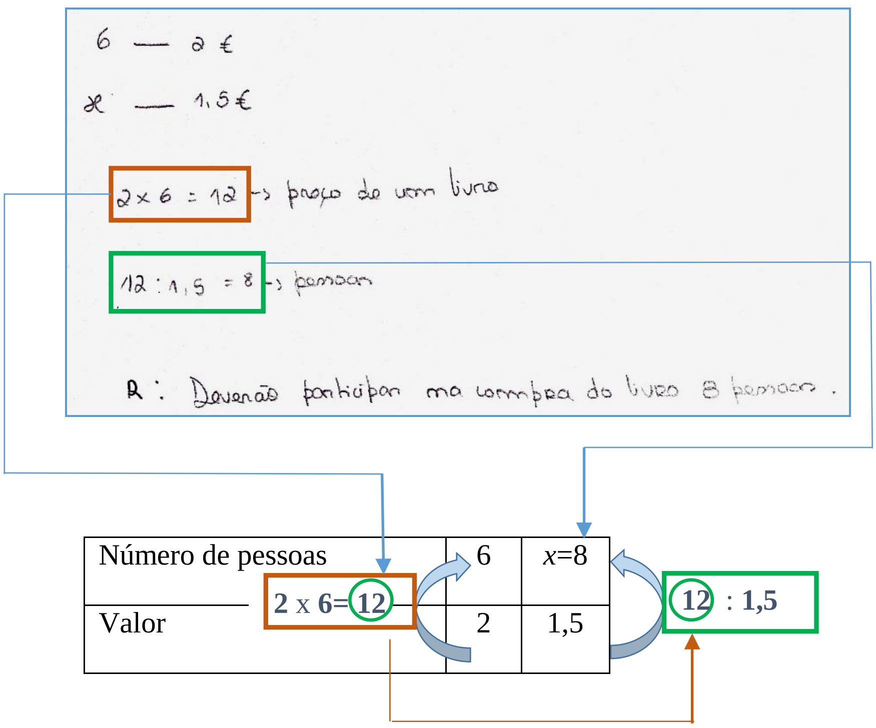


Figura 7.2.4: Produção e esquematização da produção de Gabriela, TA2-P8.

Uma aluna vai ao quadro resolver a questão e, em simultâneo, explica o seu processo:

> **Adriana**: Fiz 6 vezes 2 para saber o preço do livro e depois fiz 1,5 vezes 8, por tentativas.

Professora: E o 8 foi por tentativas?… E este 8 é o quê?
Alguns alunos: É o número de amigos.
Gabriela: Mas podíamos fazer 12 a dividir por 1,5 e vai dar logo o número.

Alguns alunos chegam ao número de amigos através de tentativas tal como Adriana. No entanto, Gabriela opta por recorrer logo à divisão, como mostra na sua intervenção ao referir: "foi quando a gente viu que podia existir proporcionalidade inversa. Foi a primeira ficha que nos deu a entender que além da proporcionalidade direta podemos também ter proporcionalidade inversa …" (E2). Questionada acerca do outro tipo de problemas a aluna acrescenta:

> Havia problemas sem ser de proporcionalidade inversa nem direta como, por exemplo, o das toalhas. Esse é o que eu me lembro mais, que ele estendeu 3 toalhas e demoraram 12 horas e se ele estendesse 6 toalhas quanto tempo demorava? Podia induzir em erro e podíamos fazer regra de três simples. (E2)

Gabriela considera que esta ficha foi "muito acessível" (E2) e que gostou de a resolver. Quanto aos métodos formais na resolução de situações de proporcionalidade inversa, Gabriela não escreve expressões algébricas que evidenciem a sua utilização. Contudo, nos dois problemas propostos utiliza procedimentos que correspondem aos métodos formais, nomeadamente a multiplicação de duas grandezas.

Na tarefa B-2 (Anexo 18), os canteiros da horta do Sr. Tomás, resolvida num ambiente combinado de papel e lápis e a folha de cálculo, Gabriela recorre a uma variedade de representações dada a natureza das questões colocadas. Na primeira questão, começa por preencher a tabela com bastante facilidade e rapidamente percebe a relação entre a base e a altura de um canteiro quando a área é fixa, explicando como se deve proceder no caso de o comprimento duplicar ou triplicar, como mostro na figura 7.2.5.

1. A tabela ao lado apresenta algumas das primeiras experiências efectuadas pelo Sr. Tomás. Completa-a.

1.1. Tendo em conta os valores obtidos na tabela explica o que acontece à medida do comprimento da altura se duplicarmos a medida do comprimento da base? E se triplicarmos?

Se duplicarmos o comprimento da base, o comprimento da altura fica metade, dividimos por 2, o mesmo acontece quando triplicarmos o comprimento da base, dividimos por 3.

Base (b)	Altura (a)	Área
10	12	120
2	60	120
3	40	120
60	2	120
80	1,5	120
1	120	120

Figura 7.2.5: Produção de Gabriela, TB2-Q1.1.

Na folha de cálculo, Gabriela constrói a tabela e obtém os valores para a altura com recurso a uma fórmula (área a dividir pela base) e a geração de uma variável coluna, como mostro na figura 7.2.6.

Base (b)	Altura (a)	Área
1	120	120
1,5	80	120
2	60	120
2,5	48	120
3	40	120
3,5	34,28571	120
4	30	120

Base (b)	Altura (a)	Área
1	=E6/C6	120
1,5	=E7/C7	120
2	=E8/C8	120
2,5	=E9/C9	120
3	=E10/C10	120
3,5	=E11/C11	120
4	=E12/C12	120

119	1,008403	120
119,5	1,004184	120
120	1	120

119	=E242/C242	120
119,5	=E243/C243	120
120	=E244/C244	120

Figura 7.2.6: Produção de Gabriela, TB2-Q 2.1.

Na entrevista, Gabriela ainda se recorda dos procedimentos efetuados no Excel para obter a altura “sim, fiz a área a dividir pela base” (E2) com uma fórmula “pus igual área, cliquei sobre a área, sinal de dividir sobre a base mais enter” (E2). A aluna destaca a vantagem da utilização da folha de cálculo na construção da tabela, em especial pela rapidez com que consegue obter todos os valores necessários:

> O Excel serviu muito, pois como vemos no exercício 2 ele apresenta-nos reticências, ou seja, números com vírgulas até 120. Se nós fossemos construir esta tabela à mão ia demorar muito tempo, enquanto com o Excel, com a técnica de arrastar, é muito mais fácil de resolver. (E2)

Numa outra questão é solicitada a expressão algébrica e Gabriela converte a fórmula da folha de cálculo para o SNA sem mostrar qualquer dificuldade e afirma "foi igual ao que estava lá porque eu fiz a área total a dividir pela base para saber a altura, por isso foi como ali atrás", referindo-se ao trabalho anterior feito com a folha de cálculo. Deste modo, Gabriela mostra reconhecer a equivalência entre o trabalho efetuado na folha de cálculo e com papel e lápis, fazendo a transferência entre o trabalho realizado na folha de cálculo para o papel e lápis, sem que a semântica específica de cada um destes ambientes lhe acarrete qualquer dificuldade.

Nesta tarefa solicito a representação gráfica de uma situação em que as grandezas são inversamente proporcionais. Assim, na folha de cálculo, a conversão da tabela para a representação gráfica, surge rapidamente, dando aos alunos a oportunidade de observarem pela primeira vez, uma hipérbole (figura 7.2.7). Na entrevista Gabriela recorda que com esta tarefa "percebemos que este era o gráfico da proporcionalidade inversa. Nesta ficha ficámos também a conhecer a expressão algébrica" (E2).

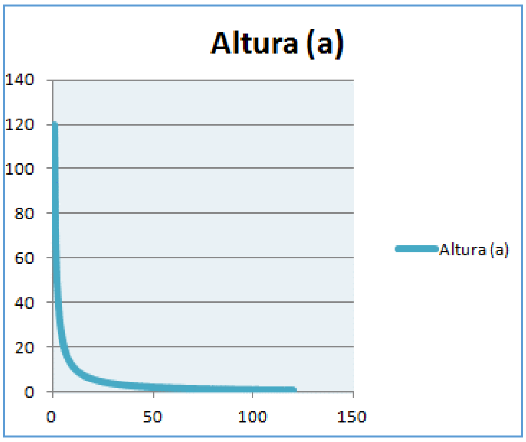


Figura 7.2.7: Produção de Gabriela, TB2, Q-2.3.

Nesta questão Gabriela reconhece a utilidade da folha de cálculo na construção de gráficos, afirmando que "… o Excel é mais preciso na construção" (E2). A aluna considera que esta tarefa serve "para iniciarmos, mais aprofundadamente, o estudo da proporcionalidade inversa, foi quando começámos a aprender a construir tabelas e gráficos da hipérbole" (E2).

Na segunda parte da tarefa é proposta uma situação relacionada com o perímetro dos canteiros. Gabriela reconhece quase de imediato que não existe qualquer tipo de proporcionalidade. Na entrevista Gabriela confessa que:

> Com esta ficha aprendi a proporcionalidade inversa e consegui perceber que podemos traduzi-la em 3 passos, por exemplo: a tabela, o gráfico e a expressão algébrica. Aprendi também que o gráfico é a hipérbole, como é que se constrói e também que podemos ter 3 formas diferentes da expressão algébrica, ela pode ser representada de três formas diferentes. (E2)

A aluna consegue identificar as três representações estudadas para a proporcionalidade inversa, assim como as três formas de escrever a expressão algébrica recordando as diferentes formas para a situação desta tarefa "para este caso seria base vezes altura igual 120, 120 era a constante. Podia ser também base é igual a 120, a constante, a dividir pela altura ou altura é igual a 120 a dividir pela base" (E2).

Tanto na entrevista como em sala de aula, Gabriela mostra as aprendizagens realizadas com esta tarefa, nomeadamente ao nível das representações, em particular na escrita da expressão algébrica – o método formal algébrico para lidar com situações de proporcionalidade inversa.

O principal objetivo da tarefa C-2 (Anexo 19), produtos fixos, é proporcionar aos alunos o contacto com situações em que a constante de proporcionalidade inversa é um número negativo e com a representação gráfica da hipérbole em IR. Gabriela na resposta à primeira questão apresenta uma disposição tabelar para a organização dos valores, no entanto, na escrita dos pares ordenados troca o valor da abcissa com o da ordenada. Na folha de cálculo a aluna constrói a tabela com vários valores, sugiro aos alunos que considerem valores positivos e negativos de modo a poderem observar a representação gráfica no primeiro e terceiro quadrantes. Gabriela escreve a coluna relativa aos valores de *y* como uma relação de dependência das outras duas, tendo em conta a condição dada (Fig. 7.2.8). Gabriela tal como a maioria dos alunos da turma ao gerar a variável coluna consideram o valor 0 para *x*, fazendo surgir uma representação gráfica incorreta. Os alunos não se apercebem do erro pelo que é necessário questioná-los de modo a tomarem consciência do que acontece naquele caso.

x	y	Total
-8	-0,5	4
-7	-0,57143	4
-6	-0,66667	4
-5	-0,8	4
-4	-1	4
-3	-1,33333	4
-2	-2	4
-1	-4	4
0		4
1	4	4
2	2	4
3	1,333333	4
4	1	4
5	0,8	4
6	0,666667	4
7	0,571429	4
8	0,5	4

x	y	Total
-8	=E3/C3	4
-7	=E4/C4	4
-6	=E5/C5	4
-5	=E6/C6	4
-4	=E7/C7	4
-3	=E8/C8	4
-2	=E9/C9	4
-1	=E10/C10	4
0		4
1	=E12/C12	4
2	=E13/C13	4
3	=E14/C14	4
4	=E15/C15	4
5	=E16/C16	4
6	=E17/C17	4
7	=E18/C18	4
8	=E19/C19	4

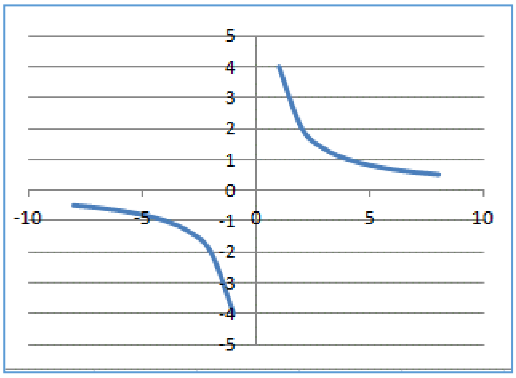


Figura 7.2.8: Produção de Gabriela, TC2, Q1.1.

Na escrita da expressão algébrica (figura 7.2.9), reforço a importância de acrescentar que *x* não pode tomar o valor 0, levando os alunos à escrita do domínio quando explicitam a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade inversa.

1.2. Escreve a expressão algébrica, *y* em função de *x*, que traduza a relação entre os números.

$y = 4/x \quad x \neq 0$

Figura 7.2.9: Produção de Gabriela, TC2-Q1.2.

Na segunda questão, em que produto de *x* por *y* é -4, Gabriela procede de forma análoga, nos dois ambientes, papel e lápis e folha de cálculo, mais uma vez sem revelar qualquer dificuldade (figura 7.2.10).

x	y	Total
-8	0,5	-4
-7	0,571429	-4
-6	0,666667	-4
-5	0,8	-4
-4	1	-4
-3	1,333333	-4
-2	2	-4
-1	4	-4
0		-4
1	-4	-4
2	-2	-4
3	-1,33333	-4
4	-1	-4
5	-0,8	-4
6	-0,66667	-4
7	-0,57143	-4
8	-0,5	-4

x	y	Total
-8	=O3/M3	-4
-7	=O4/M4	-4
-6	=O5/M5	-4
-5	=O6/M6	-4
-4	=O7/M7	-4
-3	=O8/M8	-4
-2	=O9/M9	-4
-1	=O10/M10	-4
0		-4
1	=O12/M12	-4
2	=O13/M13	-4
3	=O14/M14	-4
4	=O15/M15	-4
5	=O16/M16	-4
6	=O17/M17	-4
7	=O18/M18	-4
8	=O19/M19	-4

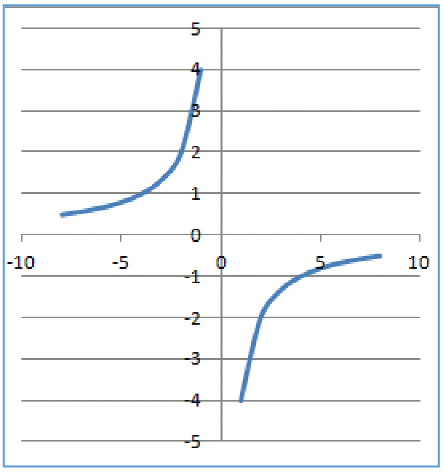


Figura 7.2.10: Produção de Gabriela, TC2-Q2.

Na questão em que solicito uma síntese do que tinha aprendido, Gabriela reconhece a aprendizagem do nome da representação gráfica nas situações abordadas - hipérbole e que a mudança no sinal da constante corresponde a uma representação gráfica em quadrantes diferentes, conforme mostro na figura 7.2.11.

3. Depois de teres realizado as duas questões anteriores faz uma síntese do que aprendeste.

Aprendi, em relação à prop. inversa que quando duplicamos ou triplicamos um valor, o outro passa para metade ou para a terça parte, aprendi também um gráfico novo, a hipérbole e reparei que ao trocarmos um sinal no valor, como no quadro, os resultados das tabelas são iguais mas, o sinal altera-se e a representação gráfica muda, para o 2.º e o 4.º quadrante.

Figura 7.2.11: Produção de Gabriela, T C2-Q3.

Na entrevista, Gabriela refere que esta foi a tarefa de que menos gostou de realizar neste tópico. Acrescentando "não sei professora, realmente não sei o que responder, mas eu acho que era um bocado chata" (E2) argumentando em seguida "As outras que tínhamos resolvido antes eram mais problemas, dava para resolver mais sem olharmos muito para o Excel, esta aqui já era mais relacionada com o Excel" (E2). Insisto com a aluna para me explicar o que pretendia dizer, ao que Gabriela acrescentou "Podíamos resolver de outras formas, pareciam mais… Esta aqui, a forma como ela aparecia… pareciam mais sérias… As outras pareciam mais de brincar" (E2). Gabriela dá a entender que o contexto puramente matemático torna a questão mais séria e, como consequência, menos agradável de resolver, criando menor envolvimento do que as situações cujo contexto se aproximava mais da vida real. Contudo, Gabriela reconhece a importância destas últimas tarefas, referindo

> Esta ficha foi uma das mais importantes pois foi a que nos fez ver diferenças entre números que podem parecer semelhantes, mas que alteram muito, como vimos na hipérbole que mudou logo de quadrantes e foi o que serviu para aprofundarmos mais o nosso conhecimento sobre proporcionalidade inversa e foi a partir desta ficha que começámos a perceber melhor e a resolver exercícios com mais fluência (E2).

Embora Gabriela não tenha apresentado dificuldade na escrita da expressão algébrica de uma função de proporcionalidade inversa, isto é, na utilização dos métodos formais, esta tarefa parece ter contribuído para compreender de forma mais clara o significado do domínio da variável independente e a importância de escrever a condição correspondente. Relativamente à tarefa D-2 (Anexo 20), Gabriela considera que

> Foi fácil de resolver pois já percebia, já sabia ver as diferenças entre a proporcionalidade inversa e a proporcionalidade direta e entre outros casos em que se podia também representar através de um gráfico mas que não era proporcionalidade… As funções, nesta ficha aparecem duas funções afins porque têm duas variáveis e outro resultado e esta ficha deu para perceber várias diferenças entre eles. (E2).

Gabriela resolve a ficha em parceria com a colega e vai explicando à colega como deve proceder. O excerto seguinte mostra o diálogo entre as duas alunas:

Vanessa: Eu não percebo nada disto.

Gabriela: [aponta para a expressão y=2x]. Aqui, por exemplo, se o x for 1 o y é 2, dá 2.
Vanessa: hum, hum…
Gabriela: 2 vezes 2, 4. O y é 4 e depois assim consigo ver qual é… Este é este…

Durante a resolução da primeira questão Gabriela solicita a minha presença.

Gabriela: Oh professora, aqui nestes gráficos, eu estou a fazer isto com a inclinação da reta, como é negativo tem de ser aqui, porque é o quadrante dos negativos … Mas isto depois não me dá!
Professora: Então, vamos lá ver, vamos experimentar atribuir valores a x.
Gabriela: Se o x é 1, é -1.
Professora: Menos 1 menos 1, quanto dá?
Gabriela: 1, não dá 2?…
Vanessa: Dá menos 2.
Gabriela: Ah!
Professora: Dá -2 como diz a Vanessa, logo o ponto de coordenadas (1,-2) tem de pertencer ao gráfico.
Gabriela: Então é o gráfico 1.
Professora: Devem ver também para mais pontos.

Gabriela apoia-se no conhecimento que tem acerca do coeficiente de x para descartar logo algumas hipóteses. A aluna continua sempre empenhada em ajudar a colega para que esta acompanhe e perceba a resolução da questão, passando depois a procurar as representações gráficas das situações de proporcionalidade inversa.

Gabriela: Agora vamos às de proporcionalidade inversa, tens de escrever a constante…
Vanessa: Mas, o que é isso a constante?
Gabriela: Olha, a constante é o número que aparece quando tens proporcionalidade direta, a constante é esta, inversa é esta, é o número.
Vanessa: Então, mas eu tenho de pôr os números?
Gabriela: Sim!
Vanessa: Ah, neste é o 2…. Aqui é o -3.

Gabriela espera que a colega termine e solicita a minha presença para me justificar oralmente que na questão 2, as grandezas são inversamente proporcionais, pedindo-me para confirmar se a sua resposta relativamente à expressão algébrica está correta (figura 7.2.12).

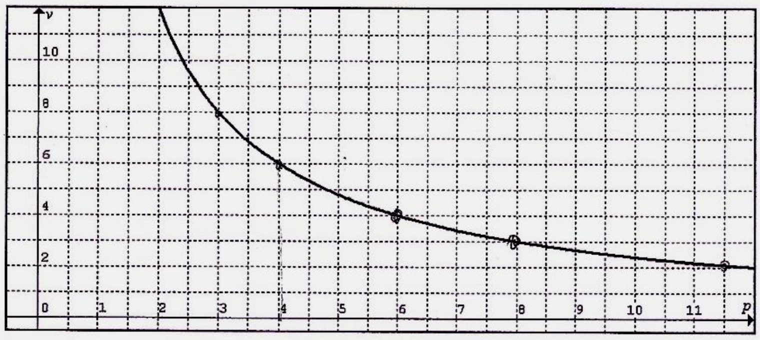


Figura 2: Representação gráfica

2.1. As duas grandezas, volume e pressão do gás, são inversamente proporcionais. Justifica esta afirmação.

Sim, são inversamente proporcionais, pois quando o volume aumenta a pressão diminui proporcionalmente, e quando a pressão aumenta o volume diminui proporcionalmente

2.2. Qual é a constante de proporcionalidade?

K = 24

2.3. Escreve a expressão algébrica que define o volume (*v*) em função de *(p)*.

$V = \frac{24}{p}$

Figura 7.2.12: Produção de Gabriela, TD2-Q2.

Gabriela continua a explicar à colega como deve proceder, nomeadamente para encontrar a constante.

> **Gabriela**: A constante é tipo isto aqui, quando tu tens que tocar num ponto, depois tens de coordenada 8 e 3, olha tens aqui 4 e 6, 6 e 4 …. Estás a ver? Então tu vais ter de multiplicar este número e este que é o que corresponde ao *y* vezes o *x* que vai dar o *k* que é a constante.
> **Vanessa**: Então, um vezes o outro tem de dar sempre 24?
> **Gabriela**: Tem! [risos]

Gabriela ao mesmo tempo que fala com a colega, assinala na representação gráfica os pontos que está a considerar para tomar uma decisão acerca da situação de proporcionalidade inversa, como mostro na figura 7.2.12. Avança para a questão seguinte, mas repara que a colega ainda não respondeu à alínea 3 da questão anterior e continua a ajudá-la.

> **Gabriela**: Aqui o volume *v* é o *y*, por exemplo, tu para saberes o valor do *y* tens de dividir a constante pelos números da pressão…

Gabriela mostra compreender o significado da constante de proporcionalidade e destreza na escrita da expressão algébrica de uma função de proporcionalidade inversa. Relativamente à questão seguinte, ao observar a tabela reconhece de imediato que se trata de uma situação de proporcionalidade inversa e responde, sem qualquer dificuldade, às questões como mostro na figura 7.2.13.

> **Gabriela**: Aqui existe proporcionalidade inversa, pois se o tempo diminui a velocidade média aumenta e se a velocidade aumenta …
> **Professora**: Se aumenta proporcionalmente… Não pode ser de qualquer maneira.

3.1. Qual é a distância percorrida em cada viagem realizada pela Carlota?

$d = v \times t = 40 \times 4 = 160$ Km $64 \times 2,5 = 160$ Km $100 \times 1,6 = 160$ km

$50 \times 3,2 = 160$ Km $80 \times 2 = 160$ Km

3.2. Justifica que existe proporcionalidade entre as grandezas ***v*** e ***t***.

Existe proporcionalidade inversa, porque, quando a velocidade média aumenta, o tempo diminui proporcionalmente.

3.3. Indica qual é a constante de proporcionalidade e o seu significado neste contexto.

$d = v \times t = 160$

$K = 160$, a constante representa a distância que separa as casas.

3.4. Escreve a expressão algébrica que define a velocidade (*v*) em função do tempo (*t*).

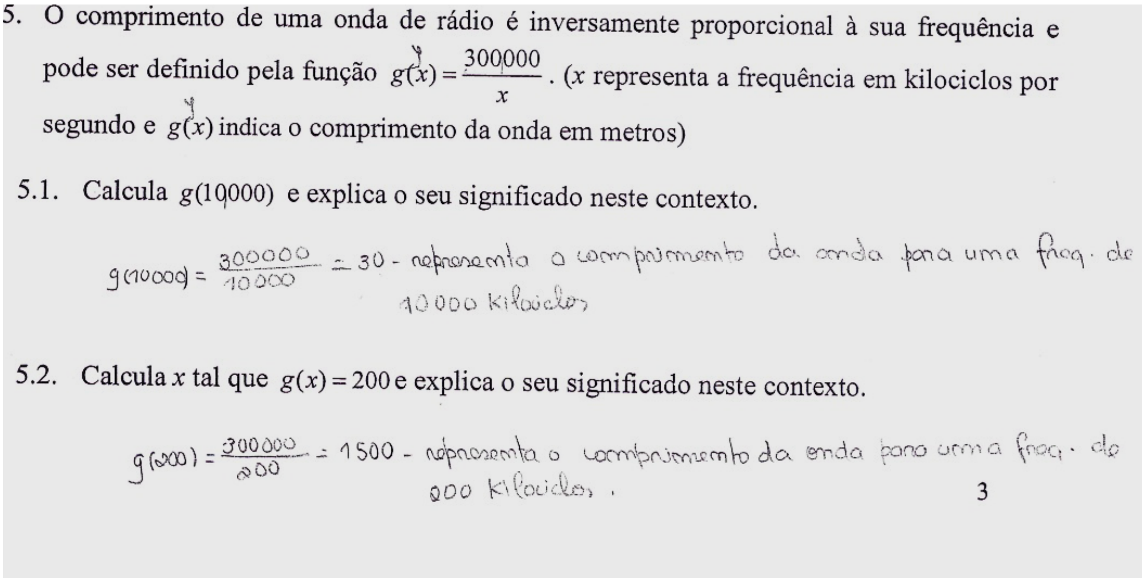
$v = \frac{160}{t}$

Figura 7.2.13: Produção de Gabriela, TD2-Q3.

Gabriela não revela qualquer dificuldade na situação seguinte, afirmando que “Também foi fácil. Esta forma que utilizámos já vinha de físico-química, então podemos aplicá-la na resolução deste problema. Assim foi mais fácil de resolver” (E2).

Na resolução desta tarefa, a aluna mostra apenas ter tido dificuldades na resolução da questão 5, no entanto, não solicita a minha ajuda. A aluna explica:

> Acho que foi por aparecer *x* e não aparecer *y* a leitura é muito mais complicada e depois ao aparecer aqui aquele *g* (1000) começou a complicar bastante. Depois, a gente tinha aqui g (1000) = 3000 e depois a dividir já me baralhou um pouco e foi preciso pedir ajuda. Para explicar o significado também foi um pouco difícil (E2).



5. O comprimento de uma onda de rádio é inversamente proporcional à sua frequência e pode ser definido pela função $\overset{y}{g(x)} = \frac{300000}{x}$. ($x$ representa a frequência em kilociclos por segundo e $\overset{y}{g(x)}$ indica o comprimento da onda em metros)

5.1. Calcula $g(10000)$ e explica o seu significado neste contexto.

$g(10000) = \frac{300000}{10000} = 30$ - representa o comprimento da onda para uma freq. de 10000 kilociclos

5.2. Calcula x tal que $g(x) = 200$ e explica o seu significado neste contexto.

$g(200) = \frac{300000}{200} = 1500$ - representa o comprimento da onda para uma freq. de 200 kilociclos.

3

Figura 7.2.14: Produção de Gabriela, TD2-Q5.

Na figura 7.2.14 a aluna escreve um *y* por cima de *g*(*x*), aparentemente esta é uma forma mais simples de entender a condição do enunciado. Para a questão 5.1 a aluna efetua uma conversão do SNA para o SNN por substituição numérica. Na questão 5.2, Gabriela confunde a variável *x* com *y*, substituindo o *x* por 200, em vez de averiguar qual o valor de *x* que torna a expressão igual a 200 (figura 7.2.14). Esta dificuldade da aluna pode ter resultado da incompreensão do contexto que a impediu de atribuir o devido significado a cada uma das variáveis *x* e *y* e, por consequência, da condição dada.

Relativamente a esta tarefa Gabriela, considera que "Foi um apanhado geral sobre os tipos de proporcionalidade que conhecemos e podemos utilizar as funções que já podiam estar esquecidas e que deu para relembrar… E deu para perceber o que sabemos e não… E essas coisas…” (E2).

A tarefa E-2 (Anexo 21) refere-se à parte do tópico que integra o estudo das representações gráficas, Gabriela afirma ter gostado muito de a resolver por a considerar muito fácil. Na resolução desta tarefa, a aluna interpreta os gráficos recorrendo, predominantemente, à linguagem natural para apresentar as suas respostas e justificações. Gabriela resolve as primeiras duas questões sem apresentar qualquer dúvida. Solicita a minha presença quando resolve a alínea 3 da questão 3. Para a ajudar, optei por ler a questão, em voz alta, para toda a turma. Gabriela após a minha leitura comentou:

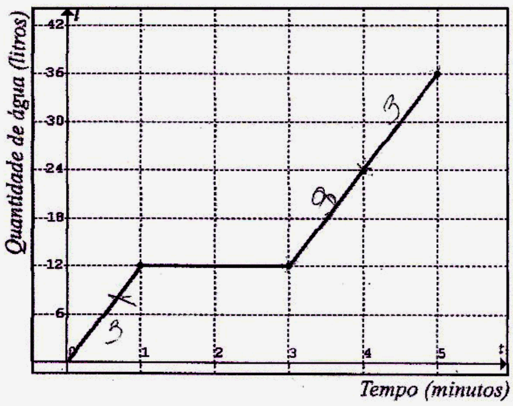
> **Gabriela**: Então, aqui é 12. Faço 12 menos 9, não é? 12 menos 9 e vai dar 3, depois…
> **Professora**: Depois explica tudo como pede, justifica a tua resposta.

Na entrevista Gabriela relembra a resolução desta tarefa:

> Estes primeiros gráficos eram fáceis. Este o 3, a 3.1 e a 3.2 não digo [figura 7.2.15], mas a 3.3. [figura 7.2.16] que era a do caudal pode ter causado mais confusão…. Pois o enunciado era…. Percebia-se, não é, mas podia confundir um pouco pois… O caudal da torneira diminuir… Não são termos que usemos no dia-a-dia, então pode causar um bocado de confusão … E essas coisas…. De resto era fácil (E2).

3. Ontem à noite, o Nuno tomou um duche. A função *f* dá, para cada instante do duche, a quantidade de água, em litros, gasta até esse instante.

Podes observar a representação gráfica de *f* na imagem seguinte.



3.1. Calcula o valor de $f(5)-f(3)$ e explica o seu significado neste contexto.

f(5) - f(3) = 36 - 12 = 24

24 representa a quantidade gasta de água entre 3 e 5 minutos.

3.2. Determina *t*, de modo que $f(t)=24$ e explica o seu significado.

f(t) = 24

t = 4 min, 4 min. representa o momento em que ele gastou 24 litros de água.

3

Figura 7.2.15: Produção de Gabriela, TE2-Q3.

3.3. Para poupar água, uma das medidas sugeridas aos consumidores é optarem por torneiras com caudal mais reduzido. (O caudal de uma torneira é o volume de água que sai dessa torneira, durante uma unidade de tempo. Pode ser medido, por exemplo, em litros por minuto.) Quantos litros de água teria poupado o Nuno neste duche se, sempre que a torneira do chuveiro estivesse aberta, o seu caudal fosse constante e igual a 9 litros por minuto? Justifica a tua resposta.

É 9, pois em cada minuto o caudal da torneira é 12, e nós temos 3 minutos em que a torneira está aberta, então fazemos 12×3=36. O plano de poupança de água tem caudal 9 então faço 9×3 = 27, logo é só fazer a diferença. 36 - 27 = 9.

R: O Nuno teria poupado 9 litros de água.

Figura 7.2.16: Produção de Gabriela, TE2-Q3.3.

Gabriela confessa não ter sentido qualquer dificuldade na resolução desta tarefa e acrescenta "Deu para vermos que tipos de gráficos podem aparecer e os diferentes casos que podem aparecer e também … Porque é que apenas um dava para representar aquele recipiente" (E2).

Na entrevista (Anexo 22) são propostas alguma tarefas para Gabriela resolver. Nas primeiras cinco situações questiono a aluna acerca da existência de proporcionalidade entre duas variáveis. Caso considere existir proporcionalidade, a aluna deve ainda identificar se é direta ou inversa, justificando.

Em relação à questão que relaciona a medida do lado de um quadrado com o respetivo perímetro, Gabriela rapidamente conclui "esta aqui, acho que é proporcionalidade direta" (E2) argumentando:

> O quadrado tem os lados todos iguais, então podemos pensar que o quadrado tem de lado 2 então 2 *cm*, então um lado corresponde a 2 *cm*, 4 lados correspondem a x e ao irmos resolver sabemos que o perímetro é a soma de todos os lados, então podemos saber que 2+2+2+2 é 8, então fazemos regra de três simples, fazemos 4 vezes 2, oito, oito a dividir por 1, 8 e a regra de três simples costuma-se utilizar muito para a proporcionalidade direta…. (E2)

A segunda situação relaciona o número de trabalhadores que colaboram numa obra com o tempo necessário para a executar. Gabriela lê o enunciado e responde:

> É proporcionalidade inversa… Pois este exercício apareceu… Não, não, não é proporcionalidade…. É proporcionalidade… Ai não!… Estou mesmo baralhada... Espere aí, deixe-me pensar… [a aluna fica a pensar durante cerca de 10 segundos] O número de trabalhadores, ao ser menor, demoramos mais tempo, e ao serem menos trabalhadores demoramos mais tempo, então é… Porque diminuiu… Por exemplo, se diminuir a terça parte vai aumentar o triplo, que é para os tempos de trabalho de cada trabalhador e o tempo que iremos demorar ser constante… É proporcionalidade inversa" (E2).

A terceira situação tem a ver com a quantidade de gasóleo abastecido e o preço total a pagar, Gabriela responde de imediato:

> É proporcionalidade direta, pois ao construirmos uma tabela, ao pagarmos menos iremos obter menos gasóleo abastecido, então ao aumentarmos o preço a pagar ou o gasóleo abastecido o outro irá aumentar também proporcionalmente quantidades iguais em preços iguais (E2)

A quarta situação relaciona a velocidade média de um carro e o tempo gasto num percurso com um comprimento fixo. Gabriela responde de imediato:

> Proporcionalidade inversa, isto está numa ficha que nós resolvemos, aquela de Boyle-Mariotti e a constante é o comprimento fixo, e se a velocidade média aumentar o tempo gasto irá diminuir pois vamos mais rápido chegamos mais rápido ao local, se diminuir o tempo irá aumentar (E2).

Gabriela estabelece uma associação entre os exercícios ou problemas com as mesmas características e identifica-os como sendo, ou não, de proporcionalidade direta, inversa ou casos em que não existe proporcionalidade. A aluna procurar assim estabelecer tipologias ou classes de exercícios ou problemas, procurando encontrar nos novos uma relação com algo anteriormente estudado.

Na quinta situação: "Qual o valor a pagar a uma banda de rock e o número de horas de trabalho dessa banda, sabendo que cobram uma taxa fixa de 200€ acrescida de 100€ por hora" (E2), Gabriela fica um pouco confusa relativamente à existência, ou não, de proporcionalidade e começa por afirmar que não existe proporcionalidade.

> **Gabriela**: Pois, por exemplo, eles trabalham uma hora, cobram 200€ … [silêncio]
> **Professora**: A taxa fixa é 200€ e depois é mais 100€ por cada hora…
> **Gabriela**: Ah! Então eles para irem tocar pagam logo 200€ se tocarem 1 hora pagam 300, 2 pagam 400, 3… quando aumenta uma hora, aumenta mais 100€ então há proporcionalidade direta.
> **Professora**: Sim?
> **Gabriela**: Sim, temos 0 horas 200 euros … [a aluna constrói uma tabela] aumenta 100€, fica 300€, …, 400 duas horas e assim sucessivamente. Então podemos observar que daqui até aqui é mais 100 e daqui aqui são mais 100 e aqui é mais 1 e aqui novamente mais 1, então o tempo aumenta em quantidades iguais e o preço também aumenta em quantidades iguais, ou seja, aumenta proporcionalmente em relação ao tempo...

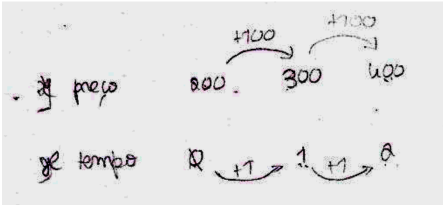


Figura 7.2.17: Produção de Gabriela, E2-Q1.5.

Gabriela desenvolve um raciocínio aditivo para concluir que existe proporcionalidade direta entre o tempo de atuação e o valor a pagar à banda.

> **Professora**: Então? Há proporcionalidade direta? Segundo o que tu dizes… [silêncio] Qual é a constante de proporcionalidade?
> **Gabriela**: Não há proporcionalidade, porque não conseguimos, não temos constante… A constante … Esta é a dividir, não é? E ao dividirmos 200 por 0, não podemos dividir números por 0; 300 a dividir por 1 dá 300, 400 a dividir por 2 vai dar 200. Então a constante tem que se manter em todos os valores correspondentes e aqui não há pois logo o primeiro não se pode dividir, logo não tem… Ao dividirmos o segundo irá dar 300 e o terceiro irá dar 200… E a constante alterou, então não há proporcionalidade nenhuma.

A minha pergunta acerca da constante de proporcionalidade leva a aluna a refletir e a aluna olhar de novo para a tabela construída, ao efetuar mentalmente sucessivas divisões, conclui que não existe qualquer tipo de proporcionalidade. Na sequência deste diálogo, solicito à aluna a representação gráfica desta situação. “Imagina lá que fazias a representação gráfica, o que é que tu irias obter?” (E2). A aluna faz a representação gráfica (Fig. 7.2.18) e acrescenta.

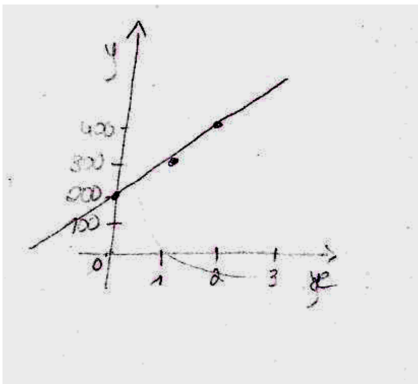


Figura 7.2.18: Produção de Gabriela, E2-Q1.5.

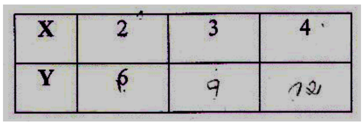
> **Gabriela**: Íamos obter um gráfico que corta o eixo das ordenadas no 200, ou seja, é quando não temos tempo [tempo=0] e é o que temos que pagar para a banda vir tocar.
> **Professora**: Pela representação gráfica…
> **Gabriela**: Não é nenhuma proporcionalidade. Para ser proporcionalidade direta tem que passar no zero e para ser inversa tinha que fazer assim a hipérbole.

Gabriela reconhece assim que esta não é uma situação de proporcionalidade. Relativamente à segunda questão, Gabriela começa por preencher a tabela imaginando logo tratar-se de um caso de proporcionalidade inversa.

> **Gabriela**: 6 vezes 2, 12, 12 a dividir por 3 dá 4… Aqui irá ser 3.
> **Professora**: Porquê?
> **Gabriela**: Pois usei proporcionalidade. O que utilizei foi proporcionalidade inversa pois para obter a constante, achar os outros resultados fiz 6 vezes 2 que é uma das expressões para a proporcionalidade inversa e dá-me 12, depois para saber qual é o *y*, *y* é igual a 12 a dividir por *x*, ou seja, 12 a dividir por 3 e vai dar 4, depois podemos alterar as letras e passar *y* igual a 12 a dividir por 4 e irá dar 3…

Gabriela fica na dúvida e opta por ler novamente o enunciado. Ao retomar o trabalho (figura 7.2.19) afirma

> **Gabriela**: Ah!… *x* e *y* diretamente proporcionais… [a aluna apaga o que tinha feito]. Então tem de ser aqui, vai aumentando 1, …, estou-me a baralhar…aumentou 1 e para elas serem diretamente proporcionais tem o *x* de aumentar em quantidades iguais e o *y* também. …
> **Professora**: Qual é a constante?
> **Gabriela**: 2 a dividir por 6, 6 a dividir por 2… 6 a dividir por 2 dá 3, então a constante será 3.
> **Professora**: E como irias completar?
> **Gabriela**: Aqui seria 9, pois 9 a dividir por 3 irá dar 3 e aqui seria 12, 12 a dividir por 3 dá 4 então aqui iríamos ter de 3 em 3, mais 3, aqui mais 1 mais 1.



X	2	3	4
Y	6	9	12

Figura 7.2.19: Produção de Gabriela, E2-Q2.

Peço a Gabriela para escrever a expressão algébrica que define a grandeza *y* em função de *x*.

> **Gabriela**: *y* é igual, não *x* é igual ao *y* a dividir por 3, pois 2 é igual a 6 a dividir por 3.
> **Professora**: Lê com atenção… Escreve a expressão algébrica que define a grandeza *y* em função de *x*…
> **Gabriela**: Ai não!…*y* é igual a *x* vezes 3.

Gabriela faz depois a descrição da representação gráfica da função definida pela tabela. Na questão seguinte solicito que preencha a tabela considerando que as grandezas são inversamente proporcionais.

> **Gabriela**: Aqui já é inversamente proporcionais… Era como eu estava a resolver há pouco. 6 vezes 2, 12…. Aqui é o 4 e aqui é o 3.
> **Professora**: Para serem inversamente proporcionais, como que é que tu pensaste?
> **Gabriela**: Temos de saber a constante obtida da multiplicação e depois fazermos a constante a dividir pelo *x* que nos dá vai dar o valor de *y*, ou a constante a dividir por *x* que nos irá dar o valor de *y*.
> **Professora**: Neste caso qual era a constante?
> **Gabriela**: Era 12… A expressão é 12 a dividir por *x* e *x* é diferente de 0.

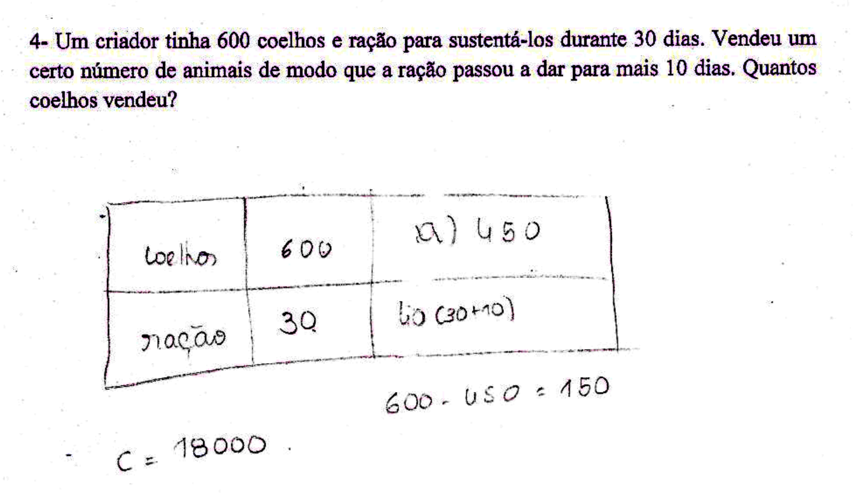
Gabriela explicou como teria de proceder para construir a representação gráfica referente a esta situação.

> **Gabriela**: A representação gráfica seria uma hipérbole em que o ponto 2 do *x* iria coincidir com o 6 do *y*, o ponto 3 iria coincidir com 4 e o ponto 4 com o 3. Ao unirmos estes pontos iríamos obter a hipérbole.

Gabriela preenche as tabelas tendo em conta a natureza da proporcionalidade existente entre as duas grandezas. Sem mostrar qualquer dificuldade escreve as expressões algébricas correspondentes e mostra saber construir as respetivas representações gráficas. À semelhança do que aconteceu em episódios anteriores, Gabriela associa esta nova questão a um caso que já tinha resolvido.

> **Gabriela**: 600 vezes 30 dá 18000... Já está!
> **Professora**: Então, explica-me lá tudo o que tu fizeste.
> **Gabriela**: Primeiro ao ler o enunciado… Este enunciado é parecido a um exercício que já tinha visto no nosso livro, então fui optar por uma tabela em que pus os coelhos e a ração.

Gabriela escolhe uma tabela como representação de suporte para organizar a informação do problema (figura 7.2.20) e através de tratamentos no SNN encontra o que é pedido.



4- Um criador tinha 600 coelhos e ração para sustentá-los durante 30 dias. Vendeu um certo número de animais de modo que a ração passou a dar para mais 10 dias. Quantos coelhos vendeu?

coelhos	600	a) 450
ração	30	40 (30+10)

600 - 450 = 150

C = 18000

Figura 7.2.20: Produção de Gabriela, E2-Q4.

Questiono a aluna acerca da escolha das grandezas.

> **Professora**: Porque é que tu escolheste os coelhos e a ração?
>
> **Gabriela**: Porque sabemos que o criador tinha 600 coelhos e tinha ração para 30 dias, então se ele vendesse alguns coelhos a ração iria aumentar se os coelhos diminuíssem ou iria diminuir se os coelhos aumentassem. Ao princípio enganei-me, pois não li bem, e em vez de ter posto para mais 2 dias pus só para 10 dias, e então e assim ele teria de ter adquirido mais coelhos, mas ele ao contrário disso vendeu, então depois somei mais 2 dias e foi-me dar 40. Obtive o valor da constante multiplicando 600 por 30 que me deu 18000, depois fui fazer 18000 a dividir por 40 e foi-me dar 450 que foi os coelhos que ele passou a ter, ao dividir 600 por… Ao subtrair 600 por 450 foi-me dar 150 que é o número de coelhos que o criador vendeu.

A aluna explica que são essas grandezas que variam no problema e explica também como procede para chegar à solução. De seguida é proposto o problema 5, acerca da variação da altura de uma vela que está a arder. Gabriela começa por observar a tabela do enunciado.

> **Gabriela**: A manter a mesma relação existe proporcionalidade inversa pois ao fazermos a constante ela dá-nos sempre 450, pois 30 vezes 15, e 15 vezes 30 e 10 vezes 45 dá-nos 450. Existe proporcionalidade inversa.
>
> **Professora**: Ao fim de uma hora e meia, qual é a altura da vela?
>
> **Gabriela**: Então uma hora e meia corresponde a 90 minutos.
>
> **Professora**: Podes escrever Gabriela?
>
> **Gabriela**: Ao fim de 90 minutos a vela terá 5 cm de comprimento
>
> **Professora**: Porquê? Como fizeste?
>
> **Gabriela**: Então? Eu fui passar uma hora e meia para 90 minutos depois na tabela temos minutos, depois fui calcular, tinha calculado anteriormente, fui buscar a

> constante e fui fazer a expressão da altura em função do tempo, em que a altura é igual à constante a dividir pelo tempo que sabemos que era 90 minutos então fazemos a constante a dividir pelo tempo e ela dá-nos 5 *cm* que é a altura da vela.

Gabriela utiliza a noção de constante de proporcionalidade para verificar a existência de proporcionalidade inversa. Na questão seguinte é pedida a altura da vela passado determinado tempo. Gabriela encontra a resposta qualquer dificuldade (figura 7.2.21).

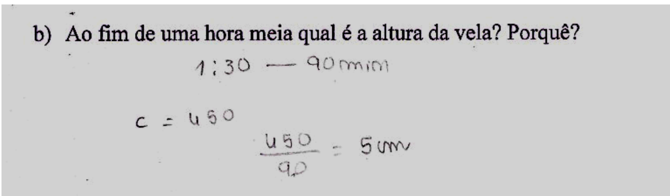


Figura 7.2.21: Produção de Gabriela, E2-Q5.b).

Na questão seguinte, a aluna opta por efetuar algumas experiências.

> **Professora**: Diz-me o que estás a fazer para eu depois saber… estavas a experimentar?... Estavas a fazer uma experiência, era o quê? Diz lá Gabriela.
> **Gabriela**: Era…então aqui podemos ver que o tempo aumenta de 15 em 15 minutos então a altura irá diminuir e podemos ver que 30 para 15… a altura diminui para metade, enquanto aqui aumenta o dobro, aqui também aumenta o dobro… não aqui aumenta mais 15 e neste salto de 15 para 10 vai ser menos 5 e aqui tínhamos menos 15, então como ao fim de 90 minutos a vela tinha 5 *cm* eu… ao olharmos para esta relação 15 menos 5 dá 10 e aumenta aqui 15, então quando aumentou aqui 15 deu 90 e aqui diminuiu 5 para termos 5 *cm*…

Gabriela tenta descobrir uma relação que lhe permita chegar a uma resposta, mas parece deparar-se com alguma dificuldade.

> **Professora**: E se pergunta fosse, em vez de inferior a 1 *cm* igual a 1 *cm*?
> **Gabriela**: Eu iria pôr 1 *cm* na altura e irá fazer 450… Então ao fim de 450 minutos a vela iria ter apenas 1 *cm*. Para ela ter menos de 1 *cm* irá ser depois de 450 minutos.
> **Professora**: Ao fim de quanto tempo da vela ter sido acesa o seu comprimento é inferior a 1 *cm*?
> **Gabriela**: A partir de 450 minutos… A altura vai diminuindo e o tempo vai aumentando.
> **Professora**: E esses 450 minutos, tens ideia de quantas horas podem ser?

> **Gabriela**: Podemos fazer 60 minutos corresponde a uma hora, 450 minutos corresponde a x … 7,5 … Sete horas e meia então a vela vai ter menos de 1 cm a partir de 7 horas e meia de estar acesa.

Gabriela para obter o tempo em horas, recorre a uma regra de três simples, utilizada em situações de proporcionalidade direta como é o caso e apresenta, sem dificuldade, a expressão algébrica que relaciona a altura da vela com o tempo que ela está acesa. No final da resolução das quatro alíneas, Gabriela confessa ter sentido dificuldades na alínea c) "Pois nós ao lermos como o comprimento é inferior a 1 *cm* nós não vamos pensar que podemos obter a partir do valor igual a 1 *cm* então foi o que custou um pouco mais" (E2).

Para resolver a última alínea, Gabriela começa por observar as representações gráficas.

> **Gabriela**: Ao princípio podem ser todos [os gráficos], porque são todos [os gráficos], hipérboles. Mas aqui, altura... 15… 30… 45… Sim pode ser o gráfico B.
> **Professora**: Porquê?
> **Gabriela**: Ao olharmos para a tabela podemos ir à procura dos pontos no gráfico. Sabemos que o x é o tempo pois aparece aqui nos números é fácil de perceber e o y é a altura, então ao irmos à procura do tempo aos 15 minutos temos de ter a altura de 30, o que acontece no gráfico B, ao vermos, temos 30, vemos que a hipérbole passa entre 20 e 10 então podemos pensar que é 15, mas para termos a certeza vamos olhar para o próximo ponto porque sabemos que vai ter de nos dar o valor exato 10 e dá-nos porque passa em cima do valor 10.

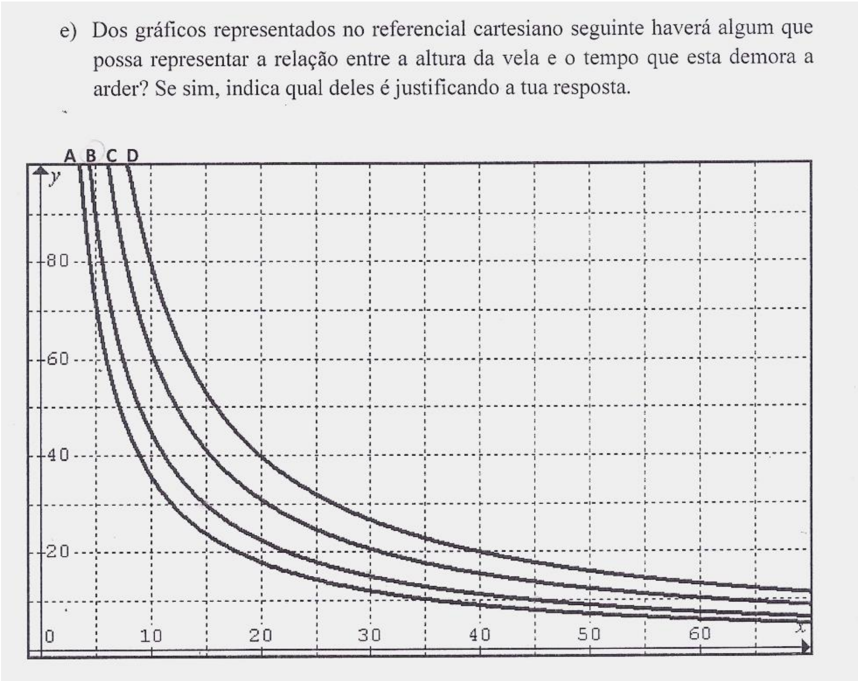


Figura 7.2.22: Produção de Gabriela, E2-Q5.e).

A identificação dos pontos da tabela com as coordenadas no referencial cartesiano foi determinante para Gabriela optar pelo gráfico B (figura 7.2.22). A última questão da entrevista diz respeito à parte do tópico acerca das representações gráficas (figura 7.2.23).

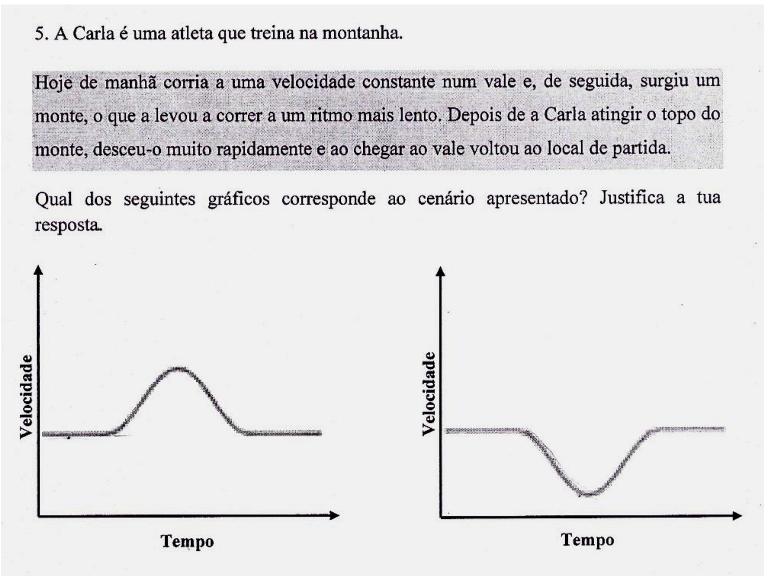


Figura 7.2.23: Produção de Gabriela, E2-Q5.

Gabriela observa as duas representações gráficas e responde rapidamente à questão colocada.

> **Gabriela**: Ahh!... É o primeiro gráfico.
> **Professora**: Porquê?
> **Gabriela**: Então! Porque aqui o valor é constante enquanto ela corre dentro do vale depois ao obtermos o número… O vale é assim, a montanha vai surgir assim então esta parte é quando ela corre [a aluna ao mesmo tempo que explica traceja com o lápis a representação gráfica], ela ao obter o topo volta a descer e vai encontrar-se novamente no vale onde continua a correr a uma distância constante. Neste gráfico aqui, ela aqui vai a correr no vale e a montanha sobe sempre para cima e não para baixo…então ela não pode voltar e aqui ela não está a subir pois está a descer … Ela aqui continua a descer... [silêncio durante alguns segundos]
> Não! Não! Enganei-me. O gráfico é este! [aponta para o segundo gráfico] porque aqui é quando ela demora mais tempo… Não porque aqui a velocidade diminui porque é o tempo em que ela sobe e aqui volta a subir até atingir constante… Este gráfico é velocidade tempo e eu estava a relacionar com a montanha e a montanha aqui subia mas é este pois aqui a velocidade dela vai diminuir e depois vai voltar a aumentar quando ela está a descer a montanha e depois vai continuar até e volta ao local da partida a velocidade constante.

Inicialmente, Gabriela não tem em conta a variável velocidade e começa por escolher o primeiro gráfico associando a representação gráfica à forma geométrica, quer da montanha quer do vale como ela refere "o vale é assim, a montanha vai surgir assim" e "a montanha sobe sempre para cima e não para baixo" [a aluna enquanto descreve traça com o lápis a representação gráfica]. Perante o meu silêncio e falta de confirmação, a aluna começa a fazer uma nova análise da situação e a observar que num dos gráficos, uma das variáveis é a velocidade e admite que a sua escolha inicial não está correta. De imediato encontra a resposta correta justificando a sua escolha.

Síntese

Representações e transformações das representações na aprendizagem de métodos formais.

No trabalho com papel e lápis, a linguagem natural surge em praticamente todas as produções de Gabriela, em alguns casos para a identificação de incógnitas, como suporte aos seus procedimentos e para dar as respostas. No início do estudo deste tópico, a aluna recorre muitas vezes a uma disposição tabelar para organizar a informação dos enunciados. Utiliza, particularmente representações no SNN, fazendo operações inversas como a multiplicação e a divisão para obter as repostas. Neste procedimento a aluna presente um raciocínio inversamente proporcional. Relativamente às representações pictóricas, a aluna apenas recorre a uma representação deste tipo. As representações no SNA surgem apenas na utilização da regra de três simples.

A escrita da expressão algébrica de situações de proporcionalidade inversa, no SNA, surge na segunda tarefa e a partir do trabalho realizado na folha de cálculo. É também nesta tarefa que surge, pela primeira vez, a representação gráfica – hipérbole, a partir da conversão da tabela para este tipo de representação no próprio ambiente digital da folha de cálculo. A partir deste momento, as representações gráficas passam a estar presentes ao longo do estudo deste tópico, surgindo no trabalho realizado em paralelo com papel e lápis e a folha de cálculo e durante a realização das tarefas propostas na entrevista.

Relativamente às representações na folha de cálculo, a aluna procede à identificação de variáveis através da nomeação de colunas e, em seguida, gera sequências utilizando variáveis coluna. Nestas tarefas a aluna recorre à representação gráfica como solicitado.

Ao longo do estudo deste tópico, a atividade de conversão entre representações é variável. Inicialmente, as conversões surgem na resolução de problemas e apenas para o SNA. A utilização de incógnitas na aplicação da regra de três-simples é aqui considerada como uma conversão para o SNA. Na resolução das restantes tarefas surgem sempre conversões para o SNA como mostro no gráfico 7.2.1.

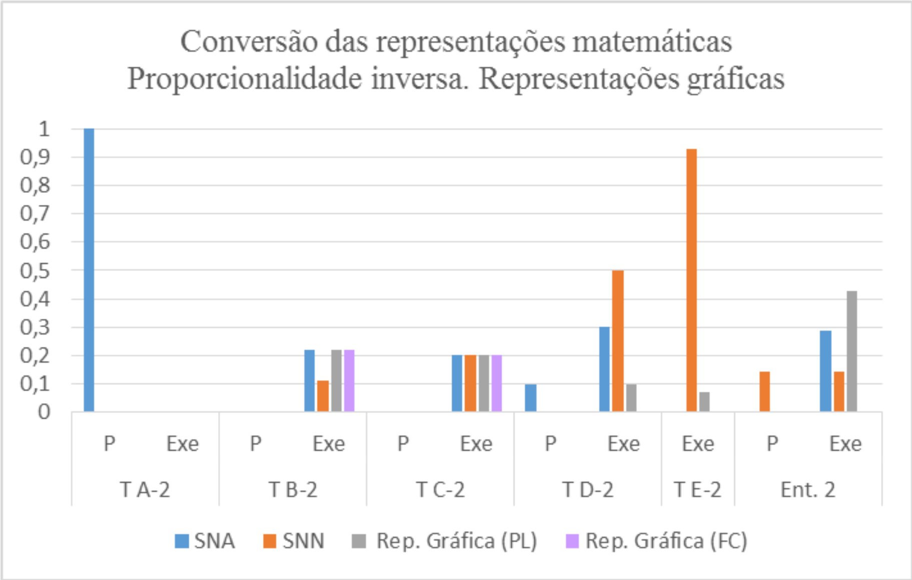


Gráfico 7.2.1: Conversão das representações no estudo do tópico "Proporcionalidade inversa. Representações gráficas".

As conversões para o SNN surgem essencialmente na resolução de exercícios, muitas vezes, na construção de tabelas e nos cálculos por substituição de valores numéricos. Relativamente às conversões para representações gráfica, a partir da segunda tarefa, momento que marca o surgimento desta representação na sala de aula, esta passa estar sempre presente na atividade da aluna.

No estudo deste tópico é bastante visível a importância entre a conversão das representações, conforme mostro na figura 7.2.24.

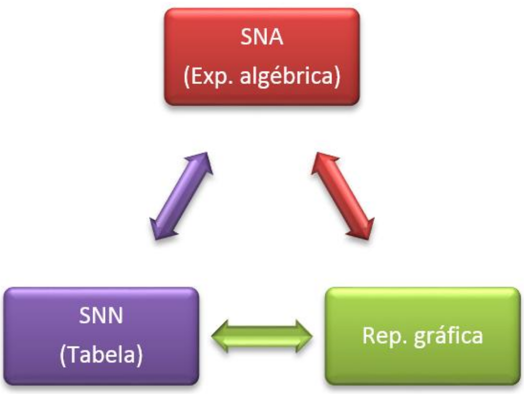


Figura 7.2.24: Atividade de conversão das representações matemáticas.

A conversão entre representações surge, muitas vezes, num trio que serve de dispositivo para Gabriela reconhecer e aplicar nas diversas situações, quer sejam de proporcionalidade direta ou inversa. Gabriela para se sentir mais segura nas suas opções, procura converter a informação transmitida num determinado tipo de representação para outra representação e confronta-as, de forma a tirar conclusões.

Os tratamentos das representações matemáticas que Gabriela realiza na resolução das diferentes tarefas encontram-se sintetizados no gráfico 7.2.2. Os tratamentos das representações, com papel e lápis, surgem essencialmente no SNN. Na folha de cálculo, a aluna efetua tratamentos ao gerar sequências numéricas e variáveis coluna para resolver as tarefas propostas.

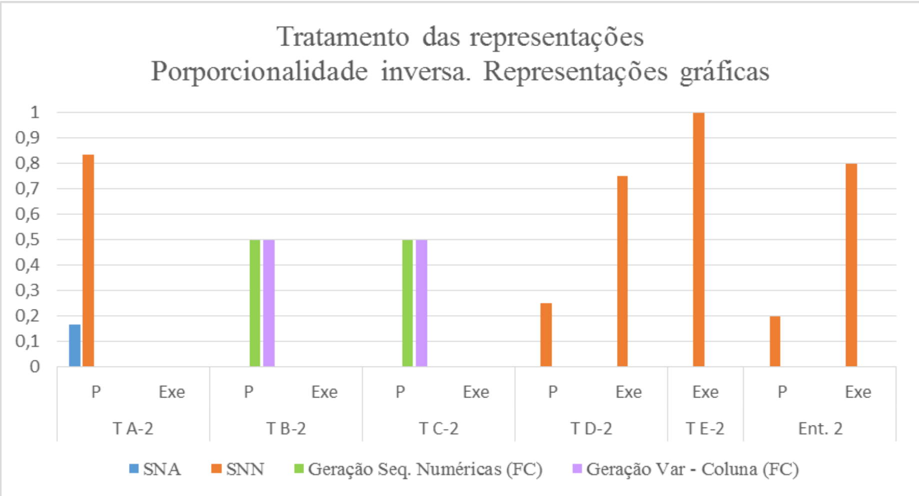


Gráfico 7.2.2: Tratamento das representações no estudo do tópico “Proporcionalidade inversa. Representações gráficas”.

Relativamente aos métodos formais, Gabriela começa por resolver as situações que envolvem proporcionalidade inversa de forma intuitiva, recorrendo à divisão entre duas grandezas. O contexto das situações apresentadas parece favorecer a escolha da estratégia a seguir pela aluna.

Na tarefa B-2, a aluna é levada a escrever a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade inversa a partir do trabalho na folha de cálculo. A partir desse momento, Gabriela escreve a expressão para resolver as situações de proporcionalidade inversa. Por outro lado, recorre também a essa expressão para *controle*, isto é, para identificar se em determinada situação existe, ou não, proporcionalidade inversa. Embora, nem sempre escreva de imediato a expressão, é com base nessa relação que parece elaborar e suportar as suas resoluções e responder às questões.

Na entrevista, a aluna mostra saber em que situação pode recorrer a este método formal e utiliza-o frequentemente com bastante segurança. Na maior parte dos casos, a expressão algébrica não surge de forma isolada, mas em conjunto com tabelas e/ou gráficos. Em qualquer dos casos, Gabriela mantém a relação entre as variáveis muito presente e é com base nela que toma as suas decisões.

No final do estudo do tópico, na resolução de problemas, a aluna recorre, predominantemente, à organização da informação em tabelas, seguidamente verifica se existe algum tipo de proporcionalidade através da testagem com expressões algébricas. Por fim, pode, caso lhe pareça adequado, recorrer a representações gráficas como esquematizo na figura 7.2.25.

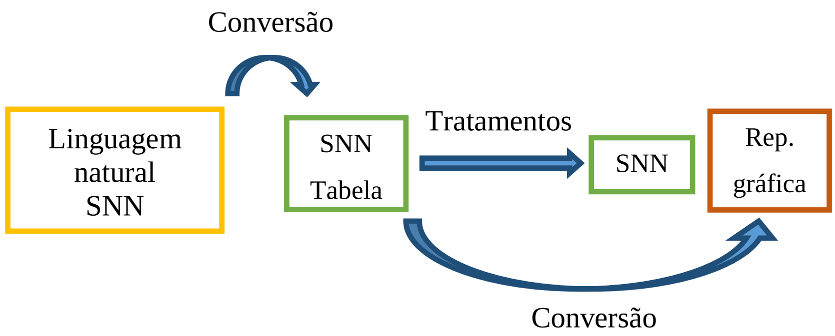


Figura 7.2.25: Esquema da atividade de Gabriela, na resolução de problemas depois da aprendizagem dos métodos formais.

Na resolução de problemas a aluna procura estabelecer associações entre os novos problemas e outros que resolveu anteriormente, tentando criar classes de problemas de acordo com o contexto e a situação de proporcionalidade (direta ou inversa) envolvidas.

Na resolução de exercícios, quando os dados surgem organizados em tabelas, a aluna recorre à noção de constante de proporcionalidade para testar a existência, ou não, de proporcionalidade. Quando lhe é pedido que selecione um gráfico para uma situação deste tipo, a aluna confronta os pontos da representação gráfica com os valores da tabela de modo a poder fazer a sua escolha.

Em suma, ao longo do estudo deste tópico a aprendizagem de novas representações matemáticas e da sua transformação, permite a Gabriela o desenvolvimento do seu pensamento algébrico. A aprendizagem da escrita da expressão algébrica, assim como da representação gráfica de situações de proporcionalidade inversa, permite a Gabriela resolver outros exercícios e problemas com maior fluência.

Estabelecimento da conexão entre o trabalho desenvolvido na folha de cálculo e a notação algébrica com papel e lápis.

A conexão entre o trabalho desenvolvido na folha de cálculo e a notação algébrica é feita pela própria aluna no enunciado da tarefa e surge da conversão da fórmula utilizada para gerar variáveis coluna. Gabriela tem facilidade em efetuar essa conversão. No caso do trabalho realizado no estudo de situações de proporcionalidade inversa em IR, Gabriela para além de converter a fórmula da folha de cálculo para o SNA, tem ainda o cuidado de indicar o domínio, tal como foi sublinhado por mim no momento de discussão e síntese da tarefa.

Contribuição da conexão entre os dois ambientes (folha de cálculo e papel e lápis) na aprendizagem dos métodos formais.

É a partir da conversão da folha de cálculo para o papel e lápis que é formalizada a escrita da expressão analítica de uma função de proporcionalidade inversa. Gabriela relaciona, na folha de cálculo, uma das grandezas com a constante e a partir dai escreve a relação que a leva a obter a outra grandeza. O contexto das situações propostas assume a maior relevância nesta aprendizagem, é a partir dos contextos que a aluna compreende a variabilidade das grandezas e melhor entender a sua relação. Para além disso, a representação gráfica construída na folha de cálculo, permite à aluna a sua comparação com os valores na tabela dando uma ideia geral da forma como se relacionam as duas grandezas.

7.2.3. Aprendizagens no tópico "Equações do 2.º grau a uma incógnita"

Para o estudo deste tópico são propostas sete tarefas, três das quais são para explorar com papel e lápis e as restantes para trabalhar num ambiente combinado da folha de cálculo e de papel e lápis. O trabalho, nestes dois ambientes, visa particularmente levar os alunos a descreverem e justificarem as relações observadas na folha de cálculo e à realização de conversões para linguagem algébrica (SNA).

A análise detalhada da evolução de Gabriela na utilização das representações matemáticas, da forma como as coordenadas entre si e dos métodos formais que utiliza, encontra-se sintetizada na tabela 7.3 e nos quadros de análise (Anexo 34).

Gabriela, como é o seu hábito, recorre à linguagem natural como suporte e elo de ligação entre as outras representações. Logo no início do estudo do tópico, as representações no SNA surgem destacadas em detrimento das representações no SNN, a que a aluna só recorre para efetuar alguns cálculos auxiliares, para identificar e/ou verificar soluções de equações.

Tal como nos tópicos anteriores, é proposta inicialmente uma ficha de diagnóstico. Na Tarefa A-3 (Anexo 24), Gabriela determina os termos próximos e distantes e o termo geral de uma sequência cuja expressão geradora é um polinómio do 2.º grau. Através da substituição numérica, a aluna verifica, com facilidade, quais os números que são solução de uma equação do 2.º grau, a partir de um conjunto dado. Escreve e simplifica expressões algébricas para o perímetro e área de retângulos, utilizando a propriedade distributiva para multiplicar dois binómios e recorre à noção de raiz quadrada para resolver equações do 2.º grau do tipo $ax^2 + b = 0$. A linguagem natural continua a ser um grande suporte para Gabriela, tanto para apresentar as suas respostas como para explicar os procedimentos utilizados. No SNN a aluna efetua essencialmente cálculos através das operações elementares e por substituição. No SNA, recorre a alguns dos conhecimentos adquiridos nos anos anteriores, no entanto, na resolução das tarefas de diagnóstico parece não se recordar da lei do anulamento do produto. Na resolução de um problema que envolve uma relação entre números, a aluna escreve uma equação do 2.º grau e resolve-a por tentativa e erro. Gabriela afirma ter apreciado esta tarefa, afirmando que "era diferente e era interessante" (E3) e reconhece que serviu para "Introduzirmos as equações do 2.º grau, termos uma ideia do que íamos começar a trabalhar e abordarmos outros temas que já tínhamos falado antes. Porque no 8.º ano demos um bocadinho das equações do 2.º grau.” (E3).

Desta tarefa destaco a primeira situação que envolve sequências, onde os termos gerais são polinómios do 2.º grau.

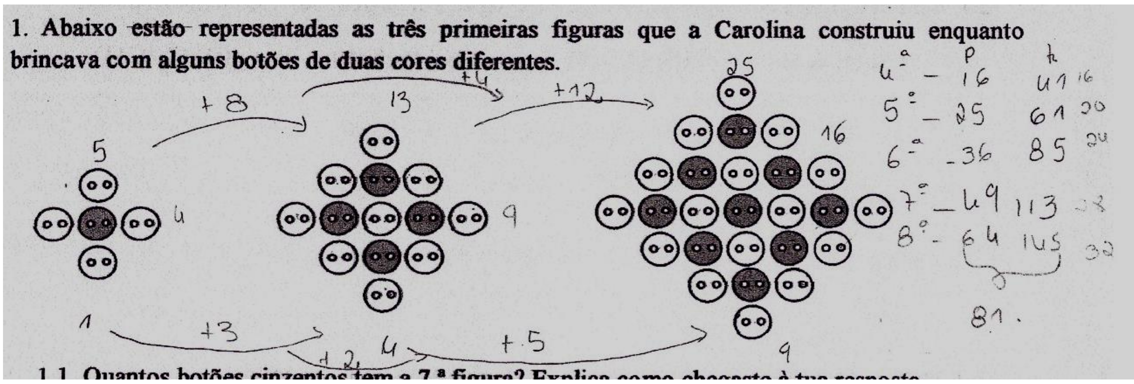
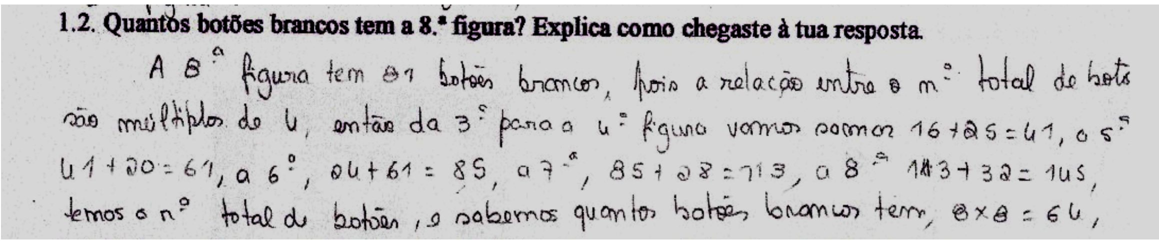


Figura 7.3.1: Produção de Gabriela, TA3-Q1.

Gabriela começa por elaborar um esquema com setas entre os termos consecutivos da sequência apresentados no enunciado (Fig. 7.3.1). Nesse esquema, a aluna relaciona o número de botões cinzentos, com o número total de botões, entre cada dois termos consecutivos, apresentando as primeiras e segundas diferenças entre os termos. Com o apoio desta representação e da conversão das representações pictóricas para o SNN, Gabriela desenvolve os cálculos necessários e apresenta, em disposição tabelar, o número de botões cinzentos e o total de botões, até ao 8.º termo.

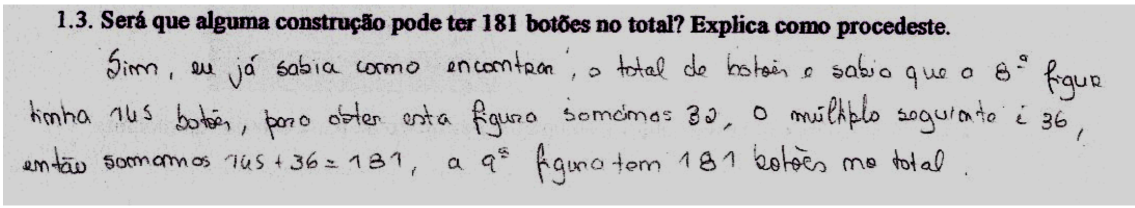
Numa das alíneas seguintes, relativamente ao número de botões brancos, a aluna explica como os determina, para um termo próximo, utilizando um procedimento recursivo no SNN, como se pode ver na figura 7.3.2.


1.2. Quantos botões brancos tem a 8.ª figura? Explica como chegaste à tua resposta.

A 8.ª figura tem 81 botões brancos, pois a relação entre o n.º total de botões são múltiplos de 4, então da 3.ª para a 4.ª figura vamos somar 16+25=41, a 5.ª 41+20=61, a 6.º, 24+61=85, a 7.ª, 85+28=113, a 8.ª 113+32=145, temos o n.º total de botões, e sabemos quantos botões brancos tem, 8×8=64,

Figura 7.3.2: Produção de Gabriela, TA3-Q1.2

Noutra alínea onde questiono a existência de um termo, a aluna repete o procedimento anterior para obter a resposta (Fig. 7.3.3).



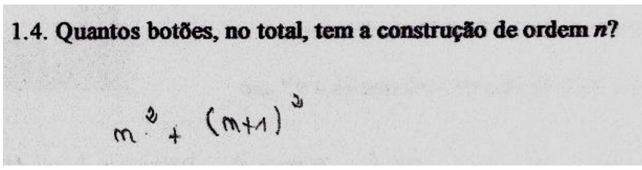
1.3. Será que alguma construção pode ter 181 botões no total? Explica como procedeste.

Sim, eu já sabia como encontrar, o total de botões e sabia que a 8.ª figura tinha 145 botões, para obter esta figura somamos 32, o múltiplo seguinte é 36, então somamos 145 + 36 = 181, a 9.ª figura tem 181 botões no total.

Figura 7.3.3: Produção de Gabriela, TA3-Q1.3.

Para responder a estas duas últimas questões, Gabriela conjuga a linguagem natural com cálculos no SNN.

A questão que gerou mais dificuldade para a maioria dos alunos foi o pedido do termo geral da sequência. Gabriela começa por generalizar o número de botões cinzentos, seguido do número de botões brancos e escreve o termo geral pedido como a soma dos dois anteriores (figura 7.3.4).

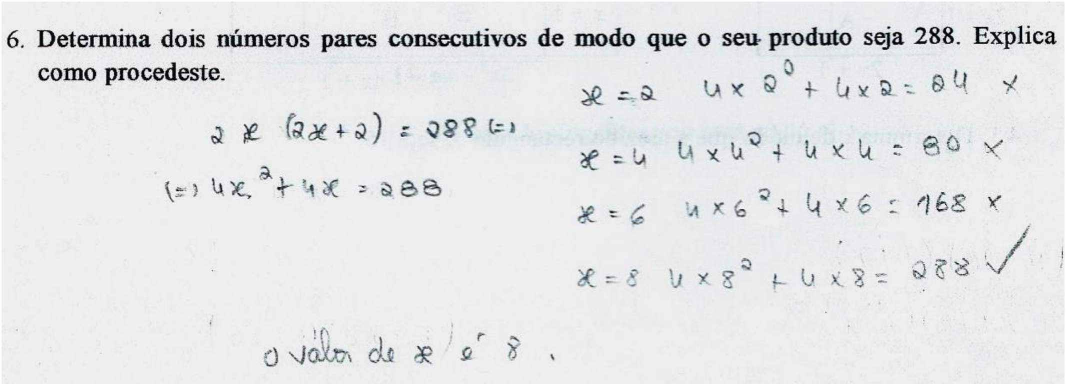


1.4. Quantos botões, no total, tem a construção de ordem *n*?

$n^2 + (n+1)^2$

Figura 7.3.4: Produção de Gabriela, TA3-Q1.4.

Num problema que relaciona números, figura 7.3.5, Gabriela converte a informação do enunciado para o SNA através de uma equação e, em seguida, desembaraça de parêntesis efetuando tratamentos no SNA. Por se tratar de uma equação do 2.º grau completa para a qual ainda não dispõe de métodos formais para a resolução, Gabriela recorre à tentativa e erro. Começa por efetuar conversões do SNA para o SNN e vai atribuindo valores à incógnita até obter um valor que satisfaça a condição e deste modo obtém uma solução para a equação.


6. **Determina dois números pares consecutivos de modo que o seu produto seja 288.** Explica **como procedeste.**

$2x\,(2x+2) = 288 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x = 288$

$x = 2 \quad 4 \times 2^2 + 4 \times 2 = 24 \;\times$

$x = 4 \quad 4 \times 4^2 + 4 \times 4 = 80 \;\times$

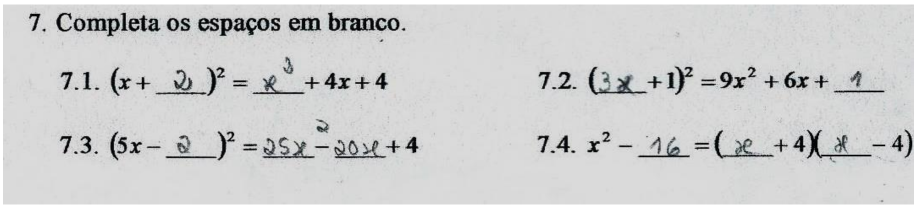
$x = 6 \quad 4 \times 6^2 + 4 \times 6 = 168 \;\times$

$x = 8 \quad 4 \times 8^2 + 4 \times 8 = 288 \;\checkmark$

o valor de x é 8.

Figura 7.3.5: Produção de Gabriela, TA3-Q6.

Numa questão relacionada com os casos notáveis da multiplicação, estudados no 8.º ano, peço para completar espaços em branco de modo a obter expressões equivalentes. Gabriela, aparentemente, não mostra dificuldades em responder, apresentando todas as respostas corretas, conforme apresento na figura 7.3.6.


7. Completa os espaços em branco.

7.1. $(x + \underline{2})^2 = \underline{x^2} + 4x + 4$

7.2. $(\underline{3x} + 1)^2 = 9x^2 + 6x + \underline{1}$

7.3. $(5x - \underline{2})^2 = \underline{25x^2} - \underline{20x} + 4$

7.4. $x^2 - \underline{16} = (\underline{x} + 4)(\underline{x} - 4)$

Figura 7.3.6: Produção de Gabriela, TA3-Q7.

A maioria dos alunos da turma não se recorda dos casos notáveis e por esta razão não responde à questão 7. Uma vez que os alunos manifestam dificuldade quer nos casos notáveis da multiplicação, quer na resolução de equações do 2.º grau incompletas, decidi propor novas tarefas que lhes possibilitassem recordar e compreender esses conteúdos, antes de avançar para a resolução das equações do 2.º grau completas.

Na tarefa de diagnóstico, Gabriela mostra saber escrever e efetuar tratamentos no SNA com polinómios do 2.º grau, bem como resolver equações do 2.º grau incompletas do tipo $ax^2 + b = 0$. A aluna mostra recordar-se de alguns métodos formais de resolução destas equações do 2.º grau, estudados no ano anterior.

A tarefa B-3 (Anexo 25) para explorar na folha de cálculo em paralelo com papel e lápis, envolve a diferença de quadrados, que Gabriela tinha mostrado reconhecer na ficha de diagnóstico. Na resolução desta tarefa, como é habitual, Gabriela privilegia o uso da linguagem natural, nomeadamente para identificar incógnitas, explicar os procedimentos e dar as respostas. Recorre ao SNN para efetuar cálculos por substituição e ao SNA para a escrita de expressões algébricas e de equações do 2.º grau. No trabalho com a folha de cálculo, através do registo numérico, constrói sequências com incremento constante e procede ao registo de fórmulas para a geração de variáveis-coluna.

A sua atividade inicia-se com a leitura do enunciado e, em seguida, regista na folha de cálculo as primeiras conclusões "Ao lermos o enunciado, reparamos que o irmão mais novo é Carlos, Ricardo é o mais velho e Ana é a irmã do 'meio". A aluna procede depois à nomeação de colunas, uma para a idade de Ana e outras duas para as idades dos irmãos. Seleciona a idade de Ana como variável independente, que gera através do arrastamento, obtendo uma sequência numérica com os valores possíveis das idades. Para as idades dos irmãos, a aluna cria relações de dependência recorrendo à escrita de fórmulas e à geração de variáveis-coluna. Posteriormente, nomeia mais duas colunas, uma para o "produto das idades dos irmãos" e outra para o "quadrado da idade de Ana" procedendo também à geração de variáveis-coluna, como mostra a figura 7.3.7.

Carlos	Ana	Ricardo		Produto das idades dos irmãos		quadrado da idade da Ana
-1	0	1		-1		0
0	1	2		0		1
1	2	3		3		4
2	3	4		8		9
3	4	5		15		16
4	5	6		24		25
5	6	7		35		36
6	7	8		48		49
7	8	9		63		64
8	9	10		80		81
9	10	11		99		100
10	11	12		120		121

Carlos	Ana	Ricardo	Produto das idades dos irmãos		quadrado da idade da Ana
=E5-1	0	=E5+1	=F5*D5		=E5*E5
=E6-1	1	=E6+1	=F6*D6		=E6*E6
=E7-1	2	=E7+1	=F7*D7		=E7*E7
=E8-1	3	=E8+1	=F8*D8		=E8*E8

Figura 7.3.7: Produção de Gabriela, TB3.

Após arrastar as alças das células compara os valores da tabela, descobre a relação entre as idades dos irmãos e efetua o registo (figura 7.3.8).

A ana ao fazer o produto das idades dos irmãos e fazendo o quadrado da sua idade verificou que se somarmos um ao produto das idades do irmão, obtemos a idade da Ana.

Figura 7.3.8: Produção de Gabriela, TB3-Q1.1.

No entanto, a aluna revela alguma insegurança para retirar conclusões do seu trabalho, como se pode constatar no diálogo seguinte:

Gabriela: Eu fiz isto…
Professora: Isso é válido para qualquer idade?
Gabriela: Sim … [Com o rato, na folha de cálculo, começa a apontar e a comparar os valores das colunas “Produto das idades dos irmãos” e “quadrado da idade de Ana”] -1, 0; 0,1; 3, 4; 8, 9; 15, 16 … Acho que não é isto!
Professora: Mas, porque não?
Gabriela: É um bocado esquisito…

Na questão seguinte é solicitada a explicação algébrica do resultado obtido na alínea anterior. Gabriela e os colegas revelam dificuldade em perceber o que se pretende, como se pode depreender do diálogo.

Patrícia: Explica algebricamente? É para fazer uma expressão, não é?
Carolina: Professora, já fiz.
Gabriela: Explica algebricamente o que verificaste…
Professora: O que é que será algebricamente?
Gabriela: É tipo em forma de *n-ésima*, não é? Mas, isto aqui é que eu não percebo… entre o produto das idades dos irmãos e o quadrado da idade da Ana ou se é por cada irmão.

Professora: É em relação à alínea anterior, portanto esta conclusão… Esta descoberta que a Ana fez como é que a gente poderá justificá-la algebricamente.
Gabriela: Posso fazer a idade da Ana com *n*, tipo depois 1 vezes 1 … É *n* ao quadrado, fica *n* ao quadrado menos 1. Porque 1 vezes 1 dá 1 e se ela tirar 1 dá 0 que é igual ao produto das idades dos irmãos.

Este excerto revela a importância que as representações na folha de cálculo têm para Gabriela iniciar um processo de generalização com notação algébrica. Para a aluna a explicação algébrica é "Em forma de *n-ésima*" o que nos dá evidências de que é um processo de generalização como habitualmente é solicitado na escrita do n-ésimo termo de uma sequência, neste caso de uma sequência numérica. Gabriela explica que o *n* emerge dos valores numéricos da folha de cálculo "Posso fazer a idade da Gabriela com *n*, tipo depois 1 vezes 1 … é *n* ao quadrado".

Verifico que existe proximidade de significados na conversão da tabela da folha de cálculo para o papel e lápis (Fig. 7.3.9), em particular, na identificação da variável independente "idade da Ana" que a aluna designa por *n*. Contudo, Gabriela não apresenta de forma explícita a relação que existe entre as idades dos três irmãos, uma vez que não contempla a diferença de idades entre eles.

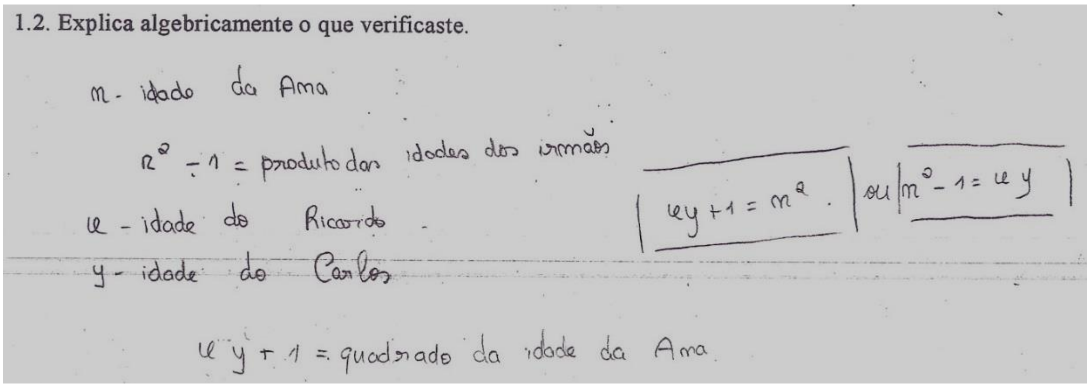


Figura 7.3.9: Produção de Gabriela, TB3-Q1.2.

Na conversão da tabela da folha de cálculo, Gabriela apresenta uma legenda com o significado das variáveis e de início escreve igualdades que apresentam um misto de linguagem natural e expressões algébricas. Por fim, apresenta duas equações equivalentes como resposta à questão. Este foi o tipo de resolução mais comum entre os alunos, mas nenhum aluno apresenta a relação antecipada por mim. Assim, recorro a uma nova estratégia para levar os alunos a chegarem à igualdade pretendida. Solicito a Carolina que apresente no quadro a sua resolução e a partir do trabalho da aluna promovo a discussão.

Carolina: Como a gente viu que a Ana descobriu aquilo …[$r \times c + 1 = a^2$]
Gabriela: Sabemos também que $a^2 - 1 = r \times c$…

Os alunos estão convictos de que a questão já está resolvida.

Professora: Vocês conhecem, neste caso, a relação entre as idades deles, não conhecem?
Patrícia: Um tem mais um ano e o outro tem menos um ano.
Professora: Um tem mais um ano e o outro tem menos um ano. Então vamos lá olhar aqui para a legenda da Carolina e vamos lá tentar escrever aquela relação de uma forma diferente. … *a* é a idade da Ana …. Será que podemos expressar a idade do Carlos em relação, em função de *a*?
Patrícia: Então é *a*-1. O Carlos é igual à idade da Ana menos um ano.
Gabriela: a^2 menos 1 é igual ao produto das idades dos irmãos…
Professora: Calma, calma…Gabriela… O que eu estou a perguntar é: Será que não posso expressar as idades dos irmãos em função de *a*?... O que é que eu quero dizer com isto? …. Será que eu não posso usar também a letra *a* para designar as idades dos irmãos?
Tatiana: Pode …. Pode pôr *a*-1 e *a*+1!
Professora: *a*-1 seria a idade…
Patrícia: É o Carlos
Professora: *a*-1 seria a idade do Carlos e…
Alguns alunos: *a*+1 a idade do Ricardo.
Professora: Assim sendo como será que eu vou escrever a relação entre as idades deles? Como é que fica agora a relação entre as idades deles?
Patrícia: *a*-1 vezes *a*+1
Professora: É igual a quê?
Alguns alunos: a^2
Professora: É assim?
Gabriela: Sim … Não!
Carolina: a^2-1! [fala muito alto]
Patrícia: Mas também pode ser o mais daquele lado.

Assim, os alunos chegam a uma igualdade que eu escrevo no quadro, $(a-1)(a+1) = a^2 - 1$. E, em seguida, questiono a turma acerca da igualdade registada.

Professora: Ao olharem para ali não reconhecem esta igualdade?
Patrícia: É uma equação do 2.º grau.
Carolina: Conhecemos, conhecemos… É uma coisa… Que…

> **Gabriela**: Lei do anulamento do produto…
> **Carolina**: É aquilo que a professora deu…
> **Gabriela**: É a lei do anulamento do produto! $a^2 - 1 = a - 1$ ou $a^2 - 1 = a + 1$.
> **Patrícia**: Isto é a lei do anulamento do produto?! É do quadrado do binómio!
> **Carolina**: Oh pá, eu já disse isso!… Eu não sei nada disso do quadrado do binómio!
> **Gabriela**: Não, não! Isso aí é outra coisa… A diferença de quadrados!
> **Professora**: É a diferença de quadrados? Será?
> **Gabriela**: É sim, por causa que… A professora até deu isso no exemplo no ano passado… Eu lembro-me um pouco disso, por causa do teste intermédio.

Este excerto do diálogo retrata a confusão que existe no reconhecimento desta igualdade. É interessante notar que Gabriela é uma das alunas que não a reconhece, mas na ficha de diagnóstico não evidenciou qualquer dificuldade na sua identificação. Gabriela recorda-se deste exemplo do ano anterior, em particular, no momento em que se realizaram revisões para o teste intermédio, mas não se recorda de a ter visto dias antes na ficha de diagnóstico e da sua correção na aula.

Na questão seguinte, Gabriela não mostra dificuldade no recurso ao resultado obtido anterior para calcular produtos do tipo 29×31, 79×81, 99×101, 999×1001.

Para resolver a situação em que os irmãos têm 5 anos de diferença, Gabriela decide recorrer à folha de cálculo e descobre que agora a diferença é 25, tal como a maioria dos colegas. No entanto, uma aluna antecipa-se à discussão e faz a generalização, em voz alta, para toda a turma: "É sempre a diferença ao quadrado!" Os alunos efetuam os procedimentos algébricos para explicar algebricamente a validade da igualdade e avançam para o cálculo dos produtos do tipo 35×45.

Por fim, para responder ao facto de *k* ser a diferença das idades entre os irmãos, os alunos já não recorrem à folha de cálculo.

> **Professora**: Se a diferença entre as idades deles, em vez de ser 1, em vez de ser 5, for *k*, o que é que acontecerá?
> **Gabriela e Carolina**: $a^2 - k^2$ [resposta em simultâneo].
> […]
> **Alguns alunos**: $a - k$ vezes $a + k$ é igual a $a^2 - k^2$.
> **Patrícia**: É só substituir o 5 pelo *k*!

A turma já não mostra dificuldade em obter a generalização da condição encontrada. Esta tarefa permitiu aos alunos, resolver um problema na folha de cálculo que envolve idades e deduzir a fórmula da diferença de quadrados onde tinham mostrado dificuldade na ficha de diagnóstico. Por outro lado, apresenta ainda a vantagem de permitir que os alunos realizem cálculos mentais com maior facilidade.

Esta tarefa mostra como a identificação de reconhecimento de um caso notável da multiplicação uma situação puramente matemática não significa um sólido conhecimento do mesmo. Gabriela completou sem dificuldade, o caso notável, no exercício apresentado na tarefa de diagnóstico, mas na aplicação deste mesmo caso notável, num problema concreto, a aluna mostrou alguma dificuldade. Este resultado torna-se muito importante para tomar consciência de qua a simples utilização de fórmulas e regras não significa um conhecimento sólido da sua utilidade em casos concretos. Acredito que o trabalho realizado na resolução desta tarefa, tenha contribuído para ampliar os conhecimentos desta aluna acerca deste caso notável da multiplicação.

A tarefa C-3 (Anexo 26), para realizar num ambiente de papel e lápis, tem como principal objetivo recorrer à lei do anulamento do produto para resolver equações do 2.º grau. Esta tarefa permite ainda relembrar a factorização de um polinómio em fatores do 1.º grau. Neste trabalho, Gabriela recorre maioritariamente a representações no SNA, em particular, na resolução das equações. Antes de os alunos iniciarem a resolução da primeira questão, refiro:

> Essas equações que vocês têm na ficha, podem ser resolvidas por outro método que não a lei do anulamento do produto. Mas eu agora quero, estou a impor o método, vocês devem resolvê-las aplicando a lei do anulamento do produto. Têm uma equação têm de fatorizá-la, isto é, escrevê-la como um produto de dois fatores e de seguida aplicam a lei do anulamento do produto e encontram as soluções.

As equações apresentam um grau de complexidade crescente. Gabriela resolve as primeiras, sem mostrar dificuldade, mas solicita o meio apoio ao iniciar a quarta (figura 7.3.10).

> **Gabriela**: Esta aqui está elevada ao quadrado, $x+3$, $x+3$ depois é para multiplicar…
> **Professora**: Tu até podes fazer assim, mas o meu objetivo é que vocês utilizem a lei do anulamento do produto.
> [A aluna não responde nem reage à minha sugestão]

Professora: Pensa como se isto fosse um *y*. Se tu tivesses assim: $y^2 - 25$. Como é que tu fatorizavas esta?
Gabriela: $y-5$ vezes $y+5$.
Professora: E agora o teu *y* é o quê?
Gabriela: $x+3$.

Após este diálogo Gabriela resolve a equação, fatorizando sem dificuldade. O facto de *x+3* estar elevado ao quadrado levanta, inicialmente, algumas dúvidas na factorização.

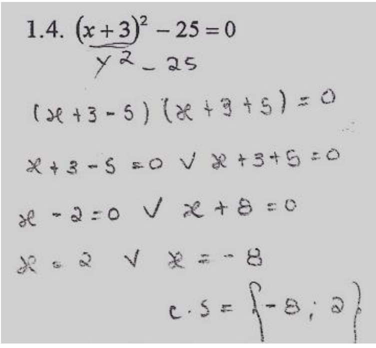


Figura 7.3.10: Produção de Gabriela, TC3-Q1.4.

Gabriela resolve a equação recorrendo à lei do anulamento do produto como previsto. No entanto, volta a mostrar dificuldade em decompor em fatores, na resolução da equação $1-(x-2)^2=0$, pelo que lhe coloco algumas questões:

Professora: Qual é agora o teu *y*?
Gabriela: É isto … *x*-2.
Professora: Então lembra-te do que tens de fazer…
Gabriela: Sim…
Professora: Repara que o teu *y* agora é…
Gabriela: *x*-2… Mas não sei como vou pôr isso …

Gabriela continua assim a apresentar dúvidas em relação à factorização, não conseguindo relacionar o que é apresentado nesta equação com o caso notável que acabou de ver. Esta situação é uma evidência de que a aluna ainda não se apropriou na íntegra dos procedimentos envolvidos. Vários alunos revelam a mesma dificuldade pelo opto por me dirigir a toda a turma, colocando questões que os levem a chegar à factorização pretendida.

A questão seguinte aborda um exemplo tradicional para o estudo do quadrado de uma soma, a partir da área de um quadrado, dividido em 4 retângulos. A partir da representação pictórica os alunos escrevem a área do quadrado como o produto de $(a+b)$ por $(a+b)$ e como a soma das áreas dos retângulos, obtendo assim o caso notável da multiplicação $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Questiono os alunos acerca dos resultados obtidos para a alínea 2.2, figura 7.3.11.

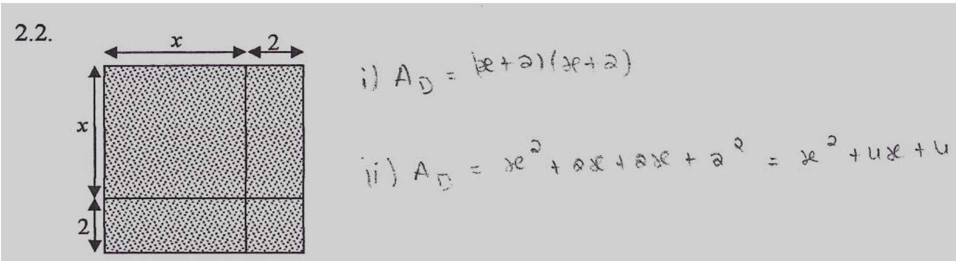


Figura 7.3.11: Produção de Gabriela, TC3-Q2.2.

Professora: Isto não vos diz nada?
Gabriela: É o resultado que dava no primeiro.
Carolina: É a área do grande.
Gabriela: Oh pá… É aquela coisa que é o quadrado, aquela coisa dos parenteses.
Professora: Como é que isso se chama?
Gabriela: Quadrado do binómio.

Gabriela facilmente percebe o que se pretende nesta tarefa, embora não se recorde imediato do conceito envolvido. Na terceira questão, os alunos utilizam o resultado da alínea anterior para calcular o valor do quadrado de alguns números.

Quando começo a apresentar a quarta questão, Gabriela interrompe-me espontaneamente.

Professora: Estas são equações do 2.º grau completas…
Gabriela: Isto dá para fazer aquela coisa do anulamento do produto! Podemos fazer?

Professora: Dá para fazer com o anulamento do produto, diz a Gabriela… Como é que a gente vai fazer?
Gabriela: *x* abre parenteses…
Filipe: Fórmula resolvente!
Professora: Fórmula resolvente ainda não.
Gabriela: *x* abre parenteses, *x* mais … Não!
Professora: Isto está relacionado com o que vimos atrás… Será que isto não é a área de um quadrado?
Gabriela: É!
Professora: Quais serão as dimensões deste quadrado?
Gabriela: 3 aqui em baixo.
Professora: E aqui?
Alguns alunos: *x*.
Professora: Têm de ver se bate certo.
[…]
Professora: Então como é que eu posso escrever isto?
Gabriela: *x* mais 3 entre parenteses, abre parenteses *x* mais 3, igual a zero.

Gabriela mostra grande facilidade na factorização e rapidamente resolve a equação. A aluna recorre de novo a este processo para resolver a equação seguinte. O exemplo da decomposição da área do quadrado parece ter sido um excelente recurso para Gabriela compreender e atribuir significado a este caso notável da multiplicação. Rapidamente obtém a factorização e resolve a equação aplicando a lei do anulamento do produto, como mostro na figura 7.3.12.

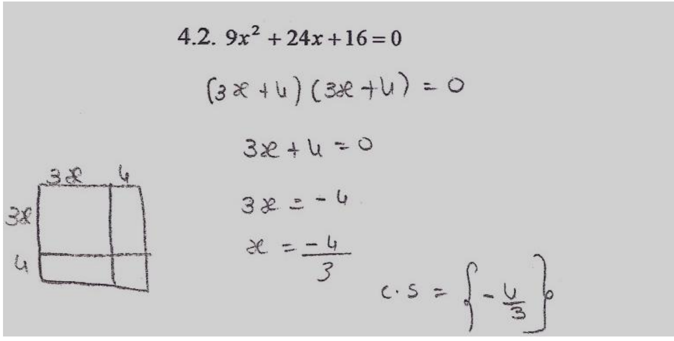


Figura 7.3.12: Produção de Gabriela, TC3-Q4.2.

Nas duas questões seguintes, os alunos aplicam a lei do anulamento do produto a polinómios de grau superior a dois, conhecendo a sua factorização.

> **Professora**: Vocês este ano vão aprender uma técnica que serve para resolver qualquer equação do 2.º grau e essa técnica é a fórmula resolvente mas logo aprendem numa aula mais à frente … Mas não vão aprender nenhuma fórmula específica para resolver uma equação de grau superior ao 2… No entanto, se vocês tiverem a factorização dessas equações vocês conseguem resolvê-las.

A questão 7 diz respeito às raízes de uma equação do 2.º grau em equações escritas nas formas $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ e $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$. Na primeira situação solicito aos alunos que resolvam a equação $(x-\alpha)(x-\beta)=0$, acrescento ainda que, α e β são dois números reais quaisquer e que devem determinar o valor de x que satisfaz a condição dada.

> **Professora**: Como será que se resolve aquela equação?
> **Gabriela**: Com o α e o β.

Gabriela já tinha resolvido corretamente a equação obtendo os valores α e β e peço a uma aluna para ir ao quadro resolver a equação.

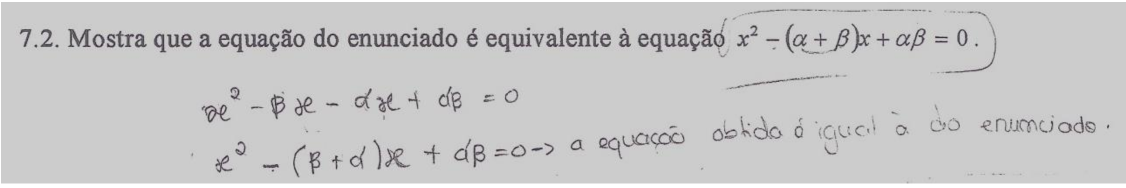
> **Professora**: Isto aqui agora já envolve muita abstração, é necessário muita atenção.
> […]
> **Professora**: Há aqui uma coisa que eu quero que vocês reparem… Olhem lá, quais são as soluções desta equação?
> **Alguns alunos**: α e β!
> **Professora**: As soluções desta equação são α e β. Olhem lá à forma como elas aparecem aqui escritos… x menos α, x menos β.

Gabriela já tinha percebido que as soluções surgem destacadas quando temos a factorização da equação na forma $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ e no diálogo avança para resultados da segunda alínea da questão 7.

> **Professora**: E agora para que isto fique mais sólido, há a questão 7.2.

Leio o enunciado da questão 7.2 e questiono os alunos acerca de como é que podem mostrar a equivalência entre as duas equações. Uma aluna responde “Podemos desembaraçar de parenteses” e acrescenta que se obtêm uma equação “Muito diferente”, ao que lhe peço para ir ao quadro explicar a toda a turma. Na parte final, a aluna necessita de ajuda para efetuar uma factorização. Gabriela, que já tinha resolvido esta questão, apenas intervém neste diálogo com a turma, para fazer uma explicação acerca do sinal de menos.

> **Gabriela**: O menos troca os sinais todos do que está dentro de parenteses, passa para o simétrico.



7.2. Mostra que a equação do enunciado é equivalente à equação $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$.

$x^2 - \beta x - \alpha x + \alpha\beta = 0$

$x^2 - (\beta+\alpha)x + \alpha\beta = 0$ -> a equação obtido é igual à do enunciado.

Figura 7.3.13: Produção de Gabriela, TC3-Q7.2.

Após chegarem à equivalência entre as duas equações, sublinho a importância do resultado obtido.

> **Professora**: Isto a que vocês chegaram é algo muito importante e o que eu pergunto na questão 7.3 é como é que vocês interpretam este resultado… Olhem lá quais são as soluções aqui da equação?
> **Gabriela**: α e β, α e β!
> **Professora**: Se o α fosse 1 e o β fosse 2, as soluções eram…
> **Gabriela e outros alunos**: 1 e 2.
> **Professora**: Eram 1 e 2… Então agora olhem lá para esta equação [$x^2-(\beta+\alpha)x+\alpha\beta=0$], o que será que isto quer dizer?
> **Carolina**: Os que estão entre parenteses … Não, não, não!
> **[**…]
> **Professora**: Olhem lá para aqui, se o α fosse 1 e o β fosse 2, aqui [$(x-\alpha)(x-\beta)=0$] iriamos ter as soluções 1 e 2 e o que é que iria aparecer aqui [$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$]?
> **Gabriela**: 2 mais 1
> **Professora**: E aqui?
> **Gabriela**: 1 vezes 2.
> **Professora**: Conseguem perceber a relação que existe entre uma equação como a que está escrita como na 7.1 e a que está escrita na 7.2?
> **Gabriela**: Como assim? Repita lá a pergunta.
> **Professora**: Estas duas equações são equivalentes e há uma relação entre elas...
> **Gabriela**: Sim.
> **Professora**: Essa relação pode ser estabelecida em termos das suas soluções. Qual é essa relação?
> **[**…]
> **Professora**: Vocês sabem que as soluções são α e β e aqui nesta equação onde é que aparecem o α e o β?

Gabriela: Dentro de parenteses, a somar e depois a multiplicar.
Carolina: E a multiplicar.
Professora: E em que posição é que aparece a somar e onde é que aparece a multiplicar?
Tatiana: A somar aparece α mais β e a multiplicar α vezes β.

Volto ao exemplo onde $\alpha = 1$ e $\beta = 2$ e escrevo $(x-1)(x-2) = 0$. Questiono os alunos acerca de como se pode escrever esta equação recorrendo à outra expressão, ao que me respondem rapidamente $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Professora: O que nós temos aqui não é a soma das raízes?
Alguns alunos: Sim.
Professora: E aqui?
Gabriela e outros: A multiplicação.
[…]
Professora: Como é que podemos utilizar este conhecimento?
Carolina: É sempre uma raiz mais a outra.
Professora: É sempre uma raiz mais a outra
Carolina: Mais o termo, o termo.
Professora: Independente que é… o produto, não é?

Solicito aos alunos para, antes de responderem à questão 7.3, observarem a questão 7.4 e questiono-os acerca de como obter a equação. Os alunos respondem utilizando esta última propriedade. Gabriela já tinha resolvido a questão 7.4 recorrendo à primeira propriedade e considera que aquilo que os colegas estavam a dizer era muito confuso.

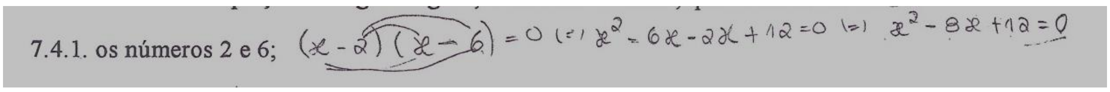
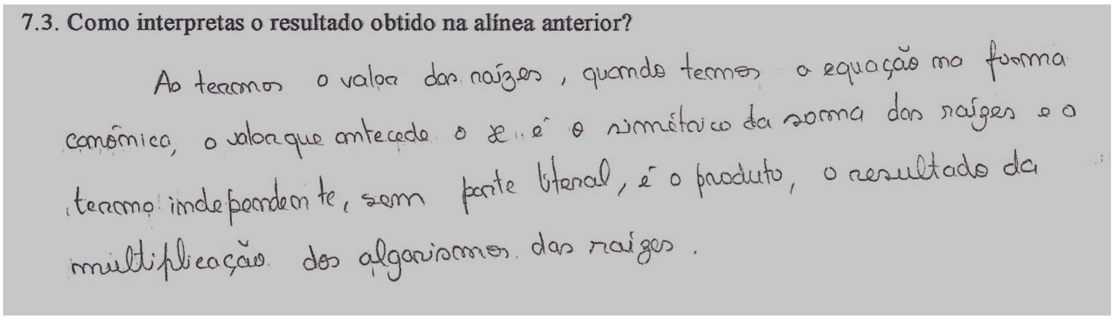


Figura 7.3.14: Produção de Gabriela, TC3-Q7.4.1.

Gabriela: Grande confusão! Cheguei a esse resultado de uma forma mais simples!
Carolina: Não! Temos é que decorar bem aquela coisa.
Professora: Decorar não! Eu quero que vocês compreendam!

Volto a destacar o que tinha referido acerca da escrita de uma equação na forma canónica, quando são conhecidas as raízes. Gabriela mesmo assim pede-me para eu escrever no quadro a resposta à questão 7.3 de modo a confirmar a sua resolução.

> **Gabriela**: Escreva lá o 7.3 para nós sabermos!
> **Professora**: Vocês é que interpretam…


7.3. Como interpretas o resultado obtido na alínea anterior?

Ao termos o valor das raízes, quando temos a equação na forma canónica, o valor que antecede o x, é o simétrico da soma das raízes e o termo independente, sem parte literal, é o produto, o resultado da multiplicação dos algarismos das raízes.

Figura 7.3.15: Produção de Gabriela, TC3-Q7.3.

Gabriela escreve a sua interpretação e solicita a minha presença para esclarecer uma dúvida relacionada com a questão 7.4.

> **Gabriela**: O problema é que eu fiz assim…
> **Professora**: E depois?
> **Gabriela**: Não está naquela forma…
> **Professora**: Sim, então não está na forma canónica?
> **Gabriela**: Sim, mas eu não utilizei aquela coisa.

A aluna chega à resposta correta pelo seu próprio processo, sem recorrer ao resultado que tinha acabado de ser registado no quadro, pelo que solicita a minha presença para confirmar o seu resultado.

Esta tarefa foi determinante para Gabriela utilizar métodos formais na resolução de equações do 2.º grau – a lei do anulamento do produto. Na entrevista, a aluna confessa que, naquele momento, este era o seu método preferido para resolver as equações do 2.º grau "Não sei professora, eu não sei explicar … Mas, a lei do anulamento do produto era a forma que eu mais gostava de resolver equações do 2.º grau, antes de aprender a fórmula resolvente" (E3).

A tarefa D-3 (Anexo 27) é proposta para trabalhar em paralelo na folha de cálculo e com papel e lápis. Na primeira questão pede-se a simulação do 1.º salto de uma bola na folha de cálculo e a respetiva representação gráfica. Gabriela começa por inserir os dados na folha de cálculo para obter a altura da bola, sem manifestar qualquer dificuldade na substituição da variável pelo respetivo valor numérico.

> **Gabriela**: Primeiro temos de pôr o tempo.
> **Professora**: E depois como sabem a altura?
> **Gabriela**: Então, onde está *t* vamos substituir pelo tempo.

Na coluna relativa à altura, começa por inserir para o instante 0 o cálculo "=-20*0^2+160*0", para o instante 1 "=-20*1^2+120*1", para o instante 2 "=-20*2^2+80*2" e para o instante 3 "=-20*3^2+40*3".

A representação da aluna na folha de cálculo revela uma compreensão ainda pouco nítida do enunciado, pois é pedida a simulação do primeiro salto e a aluna recorre também às expressões algébricas das funções que definem os restantes saltos. Após a minha intervenção, Gabriela recorre corretamente às expressões para os diferentes saltos.

Depois de introduzir corretamente os dados na folha de cálculo, Gabriela recorre a uma fórmula, obtendo em seguida a representação gráfica, figura 7.3.16.

Tempo	Altura
0	0
1	140
2	240
3	300
4	320
5	300
6	240
7	140
8	0

Tempo	Altura
0	=-20*D4^2+160*D4
1	=-20*D5^2+160*D5
2	=-20*D6^2+160*D6
3	=-20*D7^2+160*D7
4	=-20*D8^2+160*D8
5	=-20*D9^2+160*D9
6	=-20*D10^2+160*D10
7	=-20*D11^2+160*D11
8	=-20*D12^2+160*D12

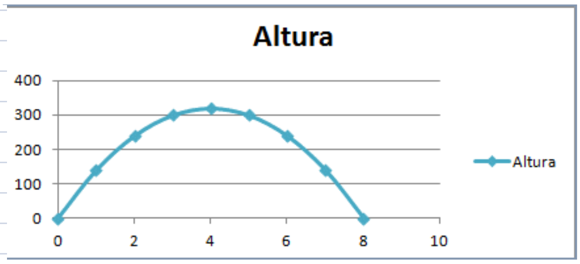


Figura 7.3.16: Produção de Gabriela, TD3-Q1.

Nas questões seguintes, a articulação do trabalho realizado na folha de cálculo com os registos no papel e lápis, foram determinantes para indicar a altura máxima que a bola atinge e o instante em que tal ocorre, figura 7.3.17.

1.2. Qual é a altura máxima que a bola atingiu? Em que instante a bola atingiu essa altura?

A altura máxima que a bola atingiu foi 320, ela atingiu aquela altura aos 4 segundos.

Figura 7.3.17: Produção de Gabriela, TD3-Q1.2.

Na resposta à questão 1.3 Gabriela não mostra qualquer dificuldade e apresenta a sua resposta, figura 7.3.18.

1.3. Ao fim de quanto tempo a bola embateu de novo no chão? Justifica a tua resposta.

A bola embateu de novo no chão ao fim de 8 segundos, devido a ela ter atingido a altura máxima ela vai para de subir, sentido ascente, vai começar a descer, sentido descendente, até que volta a ter altura ∅.

Figura 7.3.18: Produção de Gabriela, TD3-Q1.3.

Com a questão 1.4 pretendo que os alunos interpretem uma condição no contexto do problema dado. Gabriela responde sem dificuldade apresentando os valores 0 e 8, mas a sua explicação não está totalmente correta na medida em que a bola não para como refere a aluna (Fig. 7.3.19).

1.4. Indica para que valores de t se verifica a condição $A(t)=0$. Explica o seu significado no contexto do problema.

Os valores de t são 0 e 8, o seu significado no contexto do problema são a primeira vez que bate no chão, para conseguir atingir a altura máxima, e quando não tem mais altura e para.

Figura 7.3.19: Produção de Gabriela, TD3-Q1.4.

Na discussão em sala de aula da questão 1.4, solicito aos alunos para justificarem algebricamente os valores de *t*. Contrariamente à maioria dos colegas, Gabriela resolve rapidamente a equação recorrendo corretamente à lei do anulamento do produto, figura 7.3.20.

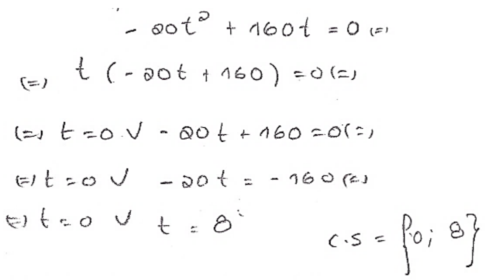
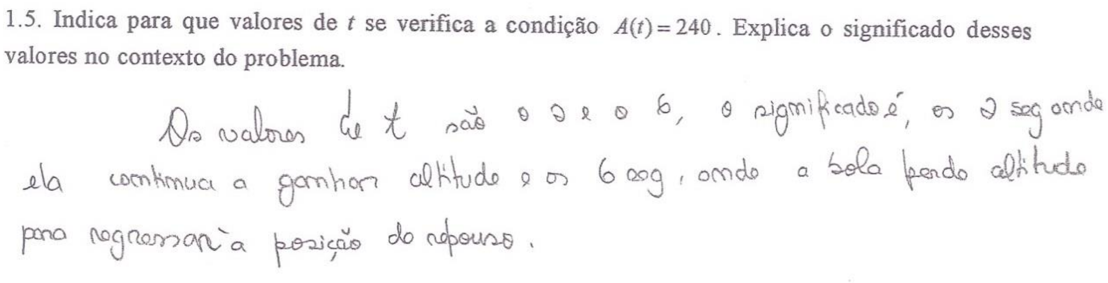

$-20t^2 + 160t = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t(-20t + 160) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t = 0 \vee -20t + 160 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t = 0 \vee -20t = -160 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 8$ $\quad C.S = \{0; 8\}$

Figura 7.3.20: Produção de Gabriela, TD3-Q1.4.

De modo a contribuir para uma melhor compreensão do significado da solução desta equação destaco a conexão entre as diferentes representações presentes nesta resolução (dados da tabela, representação gráfica e algébrica).

> **Professora**: Vocês já tinham respondido a esta questão observando a tabela e observando o gráfico. Agora têm uma resolução algébrica… No gráfico quando é que a parábola intersecta o eixo dos *xx*?
> **Turma**: No 0 e 8.
> **Professora**: Portanto, isso significa que 0 e 8 são as raízes ou as soluções daquela equação que ali está.

Na resposta à questão 1.5, Gabriela indica corretamente os valores de *t* que satisfazem a condição, mas revela alguma dificuldade em explicar o significado dos valores encontrados (Figura 7.3.21). No entanto, após a discussão com toda a turma, as dificuldades parecem dissipar-se.


1.5. Indica para que valores de t se verifica a condição $A(t) = 240$. Explica o significado desses valores no contexto do problema.

Os valores de t são o 2 e o 6, o significado é, os 2 seg onde ela continua a ganhar altitude e os 6 seg, onde a bola perde altitude para regressar à posição de repouso.

Figura 7.3.21: Produção de Gabriela, TD3-Q1.5.

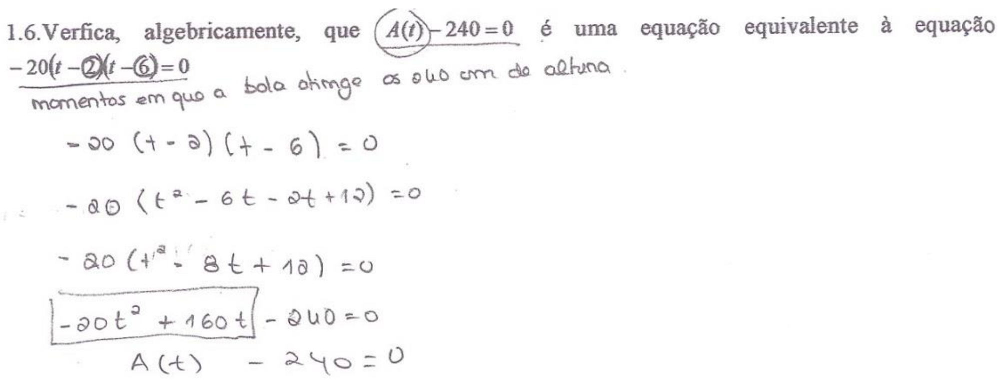


Figura 7.3.22: Produção de Gabriela, TD3-Q1.6.

A maioria dos alunos revela dificuldade na resolução da questão 1.6, alguns nem a resolvem. Gabriela consegue resolver até ao penúltimo passo. Dadas as dificuldades da maioria dos alunos e uma vez que alguns já tinham conseguido resolver a questão, solicito a uma aluna para ir ao quadro apresentar a sua resolução e explicar como procedeu. Para terminar, explico que é possível escrever uma equação do segundo grau como um produto de fatores, se conhecermos as suas soluções, ou seja, na forma $c(x-r_1)(x-r_2)=0$, onde c é uma constante e r_1 e r_2 são as raízes da equação.

Na tarefa E-3 "A experiência no laboratório" (Anexo 28) para explorar num ambiente combinado de folha de cálculo e papel e lápis, é proposto um problema que envolve uma função quadrática. Os alunos após construírem a tabela, no Excel, obtêm pela primeira vez, a representação gráfica uma parábola com a concavidade virada para cima, que não interseta o eixo das abcissas. Tal como na tarefa anterior, solicito o cálculo de algumas imagens dado o objeto e, vice-versa, bem como a respetiva interpretação no contexto do problema.

horas	Temperatura
0	11
1	6
2	3
3	2
4	3
5	6
6	11

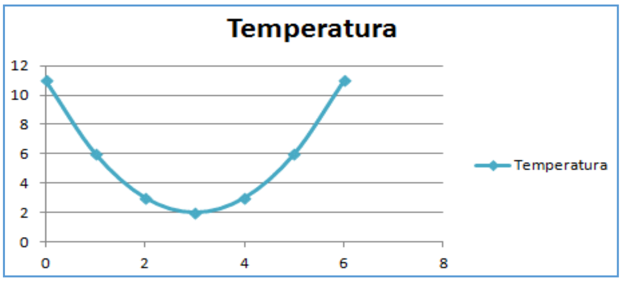


Figura 7.3.23: Produção de Gabriela, TE3.

Gabriela utiliza preferencialmente a linguagem natural para explicar os seus procedimentos, para dar as respostas e para a nomeação de colunas na folha de cálculo. A aluna utiliza ainda um procedimento idêntico, na folha de cálculo, ao que tinha usado na tarefa D-3 (Fig. 7.3.23) e revela que com esta tarefa "Foi onde ficámos a conhecer o outro gráfico, a outra parábola …" (E3), referindo-se à parábola com concavidade virada para cima, pois a parábola com a concavidade voltada para baixo tinha surgido na tarefa anterior. Acrescentou ainda que "Com esta tarefa não … Não se aprendeu muita coisa, foi mais para conseguirmos trabalhar melhor com uma parábola que já tinha sido abordada na ficha anterior" (E3).

São colocadas algumas questões sobre o valor da temperatura inicial e final da substância para os alunos interpretarem os valores da tabela e/ou do gráfico construídos na folha de cálculo. Gabriela não tem dificuldade em responder às questões e, posteriormente, na entrevista confessa que, de todas as tarefas propostas, esta foi a que menos gostou de resolver porque "Era um bocado repetitiva como a da bola saltitona … É a mesma expressão, é quase a mesma coisa, depois era para substituir e essas coisas, depois tínhamos também de fazer a parábola … Era quase a mesma coisa, depois … Não gostei muito." (E3).

Na aula em que os alunos resolvem a tarefa F-3 (Anexo 29) recorro ao GeoGebra para mostrar a influência dos parâmetros *a*, *b* e *c* na representação gráfica de uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$. Em simultâneo, questiono os alunos de modo a levá-los a concluir acerca das transformações que ocorrem no gráfico com a variação dos parâmetros. Esta pequena introdução serve para iniciar a dedução da fórmula resolvente.

A partir da resolução da equação $x^2 + 3x + 2 = 0$ aproveito para explicar que $\Delta = b^2 - 4ac$ se designa por binómio discriminante. Nesta tarefa, para além da resolução das equações do 2.º grau utilizando a fórmula resolvente, discuto ainda a classificação quanto ao número de soluções e solicito aos alunos para esboçarem a respetiva representação gráfica. Gabriela inicialmente mostra alguma insegurança nas substituições dos valores na fórmula resolvente solicitando, por vezes, a minha ajuda.

Na entrevista, Gabriela confessa que "No princípio, esta ficha começou por ser um bocado complicada, principalmente pôr o esboço do gráfico, foi onde eu tive dificuldades…". E explica:

> Era difícil ainda perceber como é que íamos fazer… Porque nós tínhamos de olhar para o lado para ver o valor [referia-se ao coeficiente do termo em x^2] e depois tínhamos de olhar para as soluções e, por vezes, eu não tinha ainda a tendência de olhar para lá e ia só ver às soluções então foi aí que me baralhou um pouco mais (E3).

Gabriela reconhece que as suas dificuldades foram diminuindo "Depois de fazer a primeira, com a fórmula resolvente, parece que aquilo já era instintivo". Quando lhe pergunto porquê, a aluna diz "Aquilo… Isso eu não sei explicar muito bem… Agora é rápido… É esquisito explicar… É muito fácil".

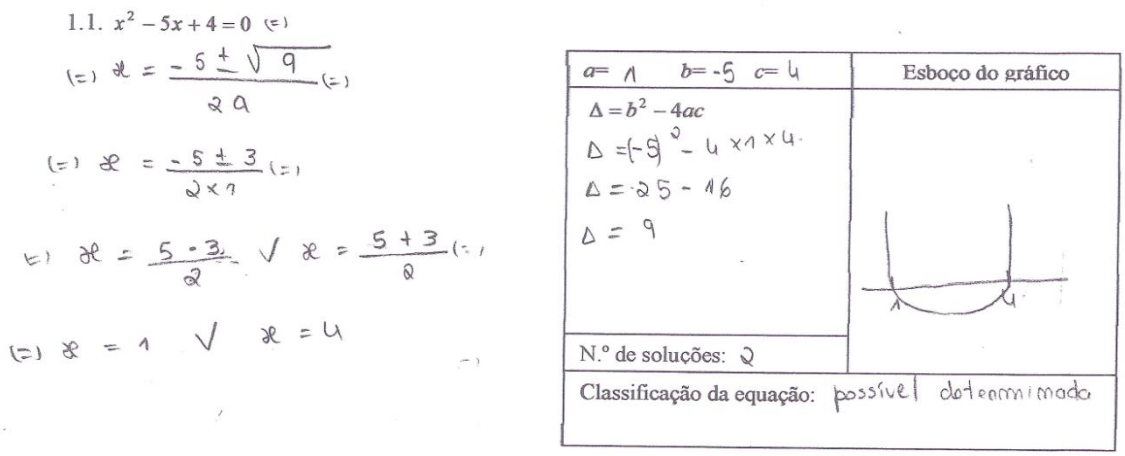


Figura 7.3.24: Produção de Gabriela, TF3-Q1.1.

Aproveito a resolução da questão 1 para discutir a influência do binómio discriminante no número de soluções de uma equação do 2.º grau (Fig. 7.3.24). A aluna consegue descrever corretamente o significado do valor positivo, negativo ou nulo, do binómio discriminante. Desta tarefa destaco ainda a última questão, um problema num contexto puramente matemático, em que peço aos alunos para encontrarem valores de x

que satisfazem a condição $\left(x^2 - 5x + 5\right)^{x^2 - 9x + 20} = 1$. Leio o enunciado para toda a turma e começo por tentar perceber se os alunos entendem a proposta.

> **Gabriela, Carolina e outros alunos**: É uma equação elevada a outra!
> **Professora**: É uma equação elevada a outra?
> […]
> **Gabriela**: Qualquer número elevado a zero é 1.
> **Patrícia**: Aquilo tem de ser zero.
> **Carolina:** Então temos de fazer $x^2 - 9x + 20 = 0$ [disse em voz baixa]
> **Gabriela**: Pois é, porque qualquer número elevado a zero é 1.

Inicialmente os alunos mostram-se muito surpreendidos com a condição apresentada, mas aos poucos, vão estabelecendo relações entre a expressão e as potências e Gabriela lembra que qualquer número elevado a zero é 1. Nenhum outro aluno manifesta a sua opinião ou questiona a afirmação da colega. Perante a ausência de comentários, Gabriela avança para a resolução da equação $x^2 - 9x + 20 = 0$.

Após a resolução desta primeira equação, sinto necessidade de incentivar os alunos a procurarem outras situações em que a igualdade seja válida. Gabriela assume uma postura mais passiva nesta segunda parte como se pode constatar no excerto seguinte.

> **Professora**: Eu sei que isto é uma potência como vocês disseram e que o expoente tem de ser zero para que o resultado seja igual a 1. Mas será que é só nesta situação? Só quando o expoente é zero é que é igual a 1?
> **Gabriela**: Não!
> **Professora**: É única? Será que não existem outras situações?
> [Silêncio]
> **Professora**: Pensem lá agora na base.
> **Carolina**: 1, tem de ser 1.
> **Professora**: Pensem lá.
> **Tatiana**: 1 pode ser elevado a 1000 que dá 1.
> **Professora**: Se a nossa base for 1 interessa o valor do expoente?
> **Vários alunos**: Não!

Após escutar algumas intervenções dos colegas, Gabriela volta a assumir uma participação mais ativa relativamente aos procedimentos de resolução da equação, nomeadamente, na escrita da equação na forma canónica. Depois da resolução desta segunda equação, chamo a atenção dos alunos para o que se pretende com a situação proposta no enunciado.

Professora: Então, agora vamos repensar no global tendo em conta isto…

Peço ainda que justifiquem a resposta no enunciado.

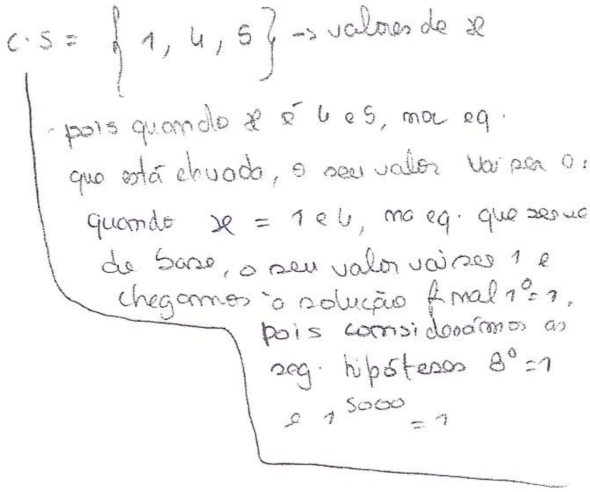

C.S = {1, 4, 5} -> valores de x
pois quando x é 4 e 5, na eq. que está elevado, o seu valor vai para 0; quando x = 1 e 4, na eq. que resulta de base, o seu valor vai ser 1 e chegamos à solução final $1^0 = 1$, pois consideramos as seg. hipóteses $8^0 = 1$ e $1^{5000} = 1$

Figura 7.3.25: Produção de Gabriela, TF3-Q 3 [excerto].

Gabriela começa por apresentar a soluções encontradas através da resolução das duas equações referidas e reforça a sua resposta apresentando exemplos concretos para quando a base é 1 ou quando o expoente é 0. No entanto, não efetua a verificação com os valores obtidos, apresentando as seguintes situações

$$1^0 = 1$$

$$8^0 = 1$$

$$1^{5000} = 1$$

A aluna e os restantes colegas nunca consideram a possibilidade de a base tomar o valor 0, nem consideram a possibilidade de existirem mais respostas.

Por fim, faço referência à importância do estabelecimento de conexões entre diversos conhecimentos matemáticos, como neste caso, onde uma questão que envolve potências requer a resolução de uma equação do 2.º grau completa e da utilização da fórmula resolvente, como ferramenta indispensável para obter a resposta.

> Ora estão a ver, isto é um exemplo de uma aplicação da fórmula resolvente que vai para além daquilo que se tem apenas e exclusivamente com a fórmula resolvente. Portanto aqui tinham de relacionar aquilo que vocês sabem da aplicação da fórmula resolvente com as potências. Portanto a fórmula resolvente é digamos que um escape para resolver estas situações, para encontrar zeros destas equações.

Na entrevista, Gabriela confessa que este problema

> Foi um bocadinho complicado… Por causa desta equação aqui …. É muito …. Assustava quando a gente a via. Mas depois de a gente ter pensado como é com um número … Quando é elevado a zero ou é 1 o que obtemos é zero… E a partir daí foi mais fácil conseguir …(E3)

Este excerto mostra a dificuldade que Gabriela sente inicialmente ao observar esta equação. A "densidade" de notação algébrica pode ter sido um obstáculo inicial para a aluna, no entanto, após alguma discussão Gabriela encontra uma forma de começar a abordar a situação, sendo capaz de estabelecer uma relação entre a equação dada e as potências, isto é, estabelece uma analogia entre o SNA e o SNN e, de novo, regressa ao SNA. Mais uma vez, o SNN ajuda a aluna a atribuir significado ao problema.

Gabriela elege esta tarefa como "A que mais gostei [a aluna folheia as tarefas] … gostei desta dos problemas, … Gostei desta da factorização… Mas a que eu gostei mais foi esta [tarefa F-3]" (E3). Quando a questiono acerca da razão pela qual gosta da tarefa F3, a aluna argumenta que "… é tão fácil resolver equações do 2.º grau com a fórmula resolvente … aquilo nem parece ser difícil com a fórmula resolvente" (E3). Esta tarefa parece ter sido muito importante para Gabriela, pois a partir da sua resolução, a aluna ganha confiança na resolução de equações do 2.º grau completas, recorrendo à fórmula resolvente.

A tarefa G-3 (Anexo 30) é composta de problemas, sendo o primeiro iniciado na aula, mas como a aula está a terminar solicito aos alunos que o concluam em casa e faço algumas recomendações.

Professora: Aqui na resolução dos problemas que vocês estão a iniciar agora, primeiro passo: têm de ler com muita atenção, segundo passo: ver o que se pretende e arranjar uma incógnita para aquilo que desconhecemos… Aqui neste primeiro problema, qual é o nosso objetivo, o que é que se pretende descobrir?
Alguns alunos: A idade da Joana.
Professora: Então, olhem lá, aqui o que é que vocês podem e devem fazer?
Gabriela e outros alunos: x … é a idade da Joana.
Professora: Temos de definir em primeiro lugar a nossa incógnita [escrevo no quadro x -idade da Joana] E agora?
Gabriela e outros alunos: $x^2 + 3x - 30 = 2x$.

Gabriela escreve e resolve a equação com muita facilidade. Na parte final chamo à atenção dos alunos para as soluções obtidas.

Professora: Obtivemos 5 e -6…
Carolina: Só pode ser 5.
Professora: Aqui na resolução do problema é preciso ter muita atenção à solução e verificar se faz sentido no contexto que estamos a trabalhar. Imaginem que dava $x = 5$ ou $x = 12$ vocês podiam dizer que a Joana ou tem 5 ou tem 12 anos. Neste caso …
Gabriela e outros alunos: Só pode ser 5.

Relativamente aos problemas, Gabriela refere que “Os primeiros eram fáceis, agora os últimos eram mais complicados … O 9 e o 10” (E3). Quando lhe pergunto porquê a aluna explica que “A forma como estavam escritos confundia… Acho que foi por causa da imagem com medidas, nós ficámos baralhados, pois a gente quando resolveu na aula também … Aquilo foi uma confusão, não é? … Mas depois fiquei a perceber”.

Dois dos três últimos problemas propostos envolvem conhecimentos de geometria estudados em anos anteriores, mas Gabriela não os resolve, em casa, por não saber como o que fazer. Na aula seguinte, na resolução do problema 8 leio o seu enunciado e esboço no quadro, um triângulo com as respetivas medidas dos lados. Inicialmente, os alunos propõem que recorra ao teorema de Pitágoras, para resolver o problema, como mostra o excerto seguinte.

Professora: O raio é 5 metros e então?... O nosso objetivo é determinar o comprimento do segmento FE. Já temos $\overline{FC}$, só falta $\overline{CE}$. O que é que podemos fazer?
Patrícia: Se aquilo fosse um triângulo dava para fazer com o teorema de Pitágoras!
Professora: Se isto fosse um triângulo dava para usarmos o teorema de Pitágoras …

Patrícia: Então, já sabemos um lado, um cateto, …
Carolina: Mas não sabes a hipotenusa…
Tatiana: A gente faz ali uma linha imaginária … eu dizia para a gente traçar uma linha imaginária e depois ficava um triângulo.
Patrícia: Mas não sabias o valor da hipotenusa, não conseguias fazer nada.
Carolina: Dahhhhhhh.
Tatiana: Mas há uma forma do teorema de Pitágoras que dá para calcular.
Gabriela: Tinhas de saber os dois catetos, pelo menos, ou um cateto e a hipotenusa.

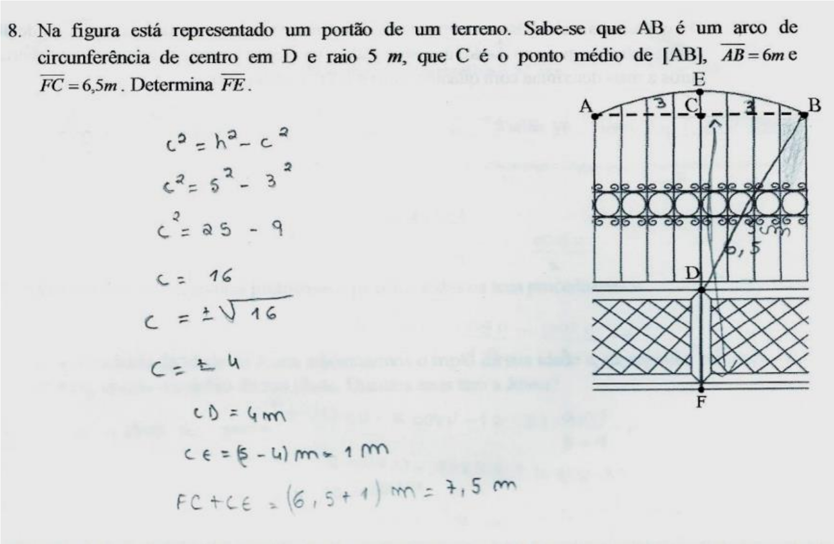
Gabriela também não sabe como pode resolver o problema. A discussão prossegue e alguns alunos procuram fazer outras construções na figura, como um quadrado a partir de [DF], afastando-se do objetivo da proposta de trabalho. Perante esta situação opto por intervir.

Professora: Tentem apoiar-se no que têm, nas medidas que já têm para conseguirem calcular aquilo que se pretende.
Tatiana: Já sei! Um retângulo!
Patrícia: Não dava…
Gabriela: O que é que nos vai dar a hipotenusa, qual era?
Maria Inês: Pois…

Gabriela continua atenta à discussão e vai analisando as várias tentativas que os colegas vão apresentando, rejeitando algumas delas.

Professora: Mais uma informação. Este problema poderia ter sido colocado no 8.º ano.
Alguns alunos: Eh!
Tatiana: Regra de três simples?
[…]
Professora: Então? Olhem lá… A distância de D a B não é também 5? [DB] não é um raio?
[…]
Tatiana: A gente complica aquilo que é simples!

A partir do momento em que coloco esta questão os alunos identificam a hipotenusa de um triângulo retângulo e a aplicação do Teorema de Pitágoras torna-se imediata. Gabriela continua atenta à discussão, mas não intervém e resolve o problema como se pode observar na figura 7.3.26.


8. Na figura está representado um portão de um terreno. Sabe-se que AB é um arco de circunferência de centro em D e raio 5 *m*, que C é o ponto médio de [AB], $\overline{AB}=6m$ e $\overline{FC}=6{,}5m$. Determina $\overline{FE}$.

$c^2 = h^2 - c^2$

$c^2 = 5^2 - 3^2$

$c^2 = 25 - 9$

$c = 16$

$c = \pm\sqrt{16}$

$c = \pm 4$

$cD = 4m$

$cE = (5-4)\,m = 1\,m$

$FC + CE = (6{,}5 + 1)\,m = 7{,}5\,m$

Figura 7.3.26: Produção de Gabriela, TG3-P8.

Na entrevista Gabriela reconhece que os problemas não eram difíceis e que "… Este [problema 8], por exemplo, se a gente pensasse nas áreas sem pensar em equações do 2.º grau era fácil, mas como estávamos a trabalhar as equações do 2.º grau estávamos a ser levados para tentar fazer uma equação do 2.º grau …". Este excerto dá evidências de que Gabriela se sente condicionada a utilizar equações 2.º grau, na medida em que é o tópico em estudo.

Relativamente ao último problema, opto por ler o enunciado e os alunos influenciados pelo contexto começam a falar dos prémios que algumas pessoas suas conhecidas tinham ganho.

Gabriela: *x* é o número de amigos [escrevo no quadro]
Professora: *x* é o número de amigos que participaram na sociedade.
Gabriela: *x*-6
Professora: *x*-6, é o quê?
Alguns alunos: Número de amigos menos 6 jogadores.
Professora: E agora?
Gabriela: Agora temos de estudar…
Professora: E agora como é que a gente vai equacionar este problema… isto no Excel era uma maravilha! Foi isto que eu vos disse quando mandei para casa… se não conseguirem fazer, façam no Excel. … O que é que a gente sabe? … Se ele tivesse distribuído o dinheiro por estes amigos, …, cada um recebia mais 40 euros … olhem como é que a gente sabe o dinheiro que ele dá a cada amigo? … Como é que eu posso escrever a expressão do dinheiro que fica para cada amigo?
Patrícia: É a dividir!

Carolina: 4800 a dividir por *x*.
Professora: 4800 a dividir por *x*, isto era o dinheiro que cada um recebia se tivessem participado *x* amigos…
Carolina: Igual a *x* -6…
Professora: Igual a quê?
Tatiana: 4800 a dividir por *x*-6
Professora: Explica lá Tatiana porque é que é 4800 a dividir por *x*-6.
Tatiana: Por causa, que é o mesmo prémio a dividir por menos 6 amigos.
Professora: E o que é falta ali?
Alguns alunos: Mais 40.

Gabriela mostra dificuldades na conversão da linguagem natural para o SNA – uma equação, como ela refere na entrevista

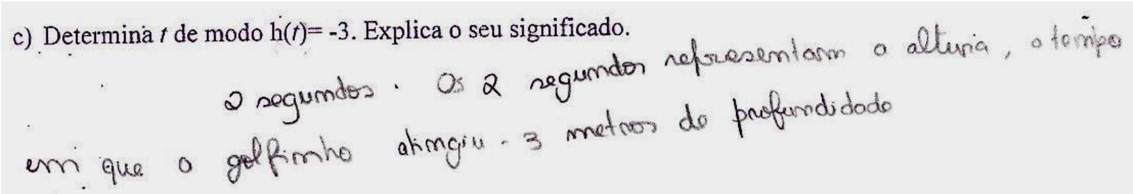
> Depois percebi, acho que foi por causa de: se o Joaquim tivesse jogado com menos 6 amigos cada um receberia 40 euros a mais, esta foi a parte mais complicada, depois tínhamos de utilizar a divisão e no problema não estava a pensar utilizar a divisão, então…. (E3)

No final da resolução do problema questiono os alunos acerca da solução.

Professora: O que é que concluem do problema?
Gabriela: 30.
Professora: 30, portanto foram 30 amigos que jogaram, se tivessem jogado 24 teriam recebido mais 40 euros cada um.

Gabriela aponta a solução que corresponde a um número positivo e conclui assim a resolução do problema.

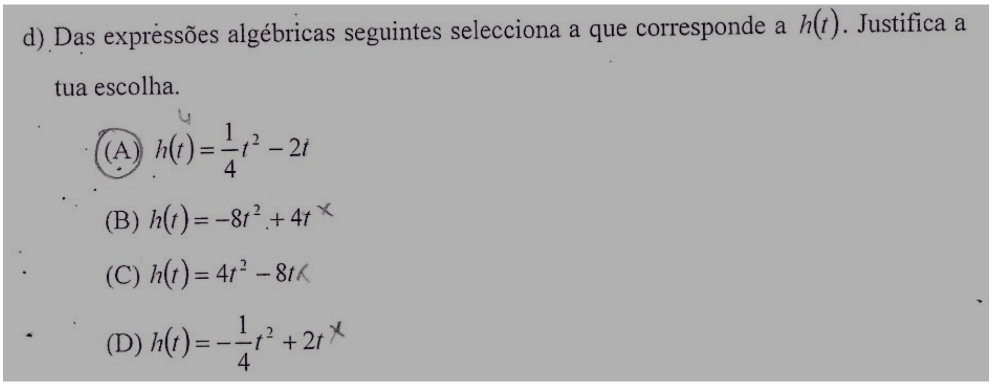
Na entrevista (Anexo 31), realizada após o estudo deste tópico, proponho-lhe algumas tarefas. A aluna interpreta corretamente a representação gráfica de uma função quadrática, que relaciona o tempo de mergulho como a profundidade máxima atingida por um golfinho no mergulho.


c) Determina t de modo h(t)= -3. Explica o seu significado.

2 segundos. Os 2 segundos representam a altura, o tempo em que o golfinho atingiu -3 metros de profundidade

Figura 7.3.27: Produção de Gabriela, E3-Q 1c.

Gabriela reconhece o significado da condição $h(t) = -3$, como mostra a figura 7.3.27, identificando corretamente o instante em que o golfinho atinge os 3 metros de profundidade. Quando questionada acerca da expressão algébrica que corresponde a $h(t)$, Gabriela efetua conversões do SNA para o SNN substituindo *t* por 4 e concluindo que a opção correta é A, figura 7.3.28.


d) Das expressões algébricas seguintes selecciona a que corresponde a $h(t)$. Justifica a tua escolha.

(A) $h(t) = \frac{1}{4}t^2 - 2t$

(B) $h(t) = -8t^2 + 4t$ ×

(C) $h(t) = 4t^2 - 8t$ ×

(D) $h(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 2t$ ×

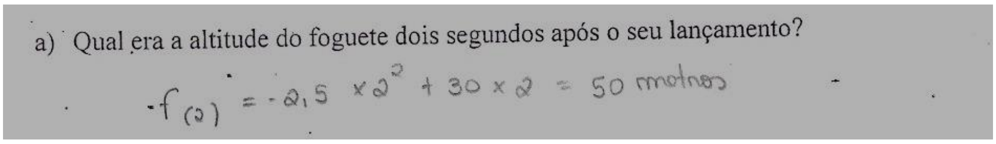
Figura 7.3.28: Produção de Gabriela, E3-Q1d.

Na questão 2, em que é dada a expressão algébrica de uma função quadrática, Gabriela entusiasma-se logo com o contexto e considera que é propício para a utilização da folha de cálculo.

> **Gabriela**: Eh lá! … O festival do marisco em Olhão …. Os foguetes… [a aluna lê o enunciado em voz baixa] Este era bom no Excel!

Na questão em que é pedida a altitude do foguete dois segundos após o seu lançamento, Gabriela explica como procede e responde corretamente, figura 7.3.29.

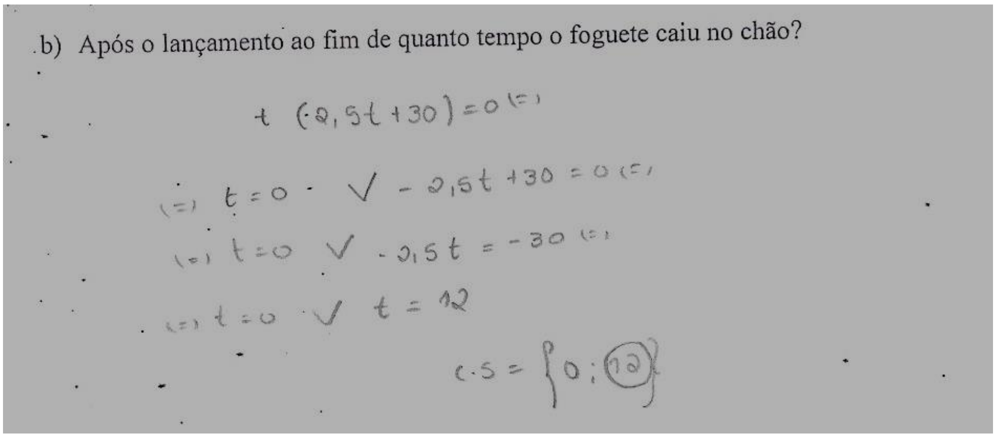
Gabriela: Então aqui vamos substituir o *t* por 2 porque é 2 segundos. [a aluna resolve em voz alta ao mesmo tempo que escreve] *f* de 2 é igual e vamos substituir o *t* na equação por 2…. 50 metros.
Professora: Portanto…?
Gabriela: A altitude do foguete 2 segundos após o seu lançamento é de 50 metros.


a) Qual era a altitude do foguete dois segundos após o seu lançamento?

$f(2) = -2,5 \times 2^2 + 30 \times 2 = 50$ metros

Figura 7.3.29: Produção de Gabriela, E3-Q2a.

Relativamente ao tempo que o foguete leva até chegar ao chão após ser lançado, Gabriela começa logo por resolver a equação $f(t)=0$ recorrendo à lei do anulamento do produto (Fig. 7.3.30) e explica oralmente como procede:


b) Após o lançamento ao fim de quanto tempo o foguete caiu no chão?

$t(-2,5t+30)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=0 \vee -2,5t+30=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=0 \vee -2,5t=-30 \Leftrightarrow$

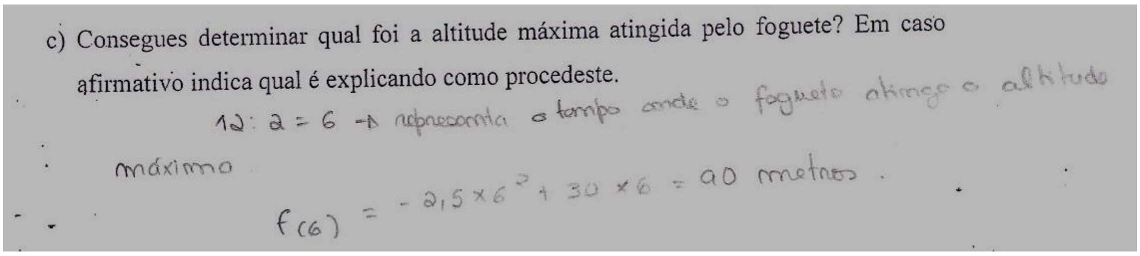
$\Leftrightarrow t=0 \vee t=12$

$C.S=\{0;12\}$

Figura 7.3.30: Produção de Gabriela, E3-Q 2b.

Gabriela: Porque nós precisamos de saber quanto tempo é que o foguete levou no ar até cair no chão, então podemos pôr o *t* em evidencia e ir substituir o *t* … [a aluna resolve na folha] … O foguete cai no chão ao fim de 12 segundo pois 0 é o momento em que o lançámos, ao fim de 12 segundos ele cai no chão e acaba…

Quanto à altura máxima que o foguete atinge, Gabriela calcula o valor do ponto médio entre os dois zeros da função e substitui na função como se pode ver na figura 7.3.31.


c) Consegues determinar qual foi a altitude máxima atingida pelo foguete? Em caso afirmativo indica qual é explicando como procedeste.

12 : 2 = 6 → representa o tempo onde o foguete atinge a altitude máximo

f(6) = - 2,5 × 6² + 30 × 6 = 90 metros.

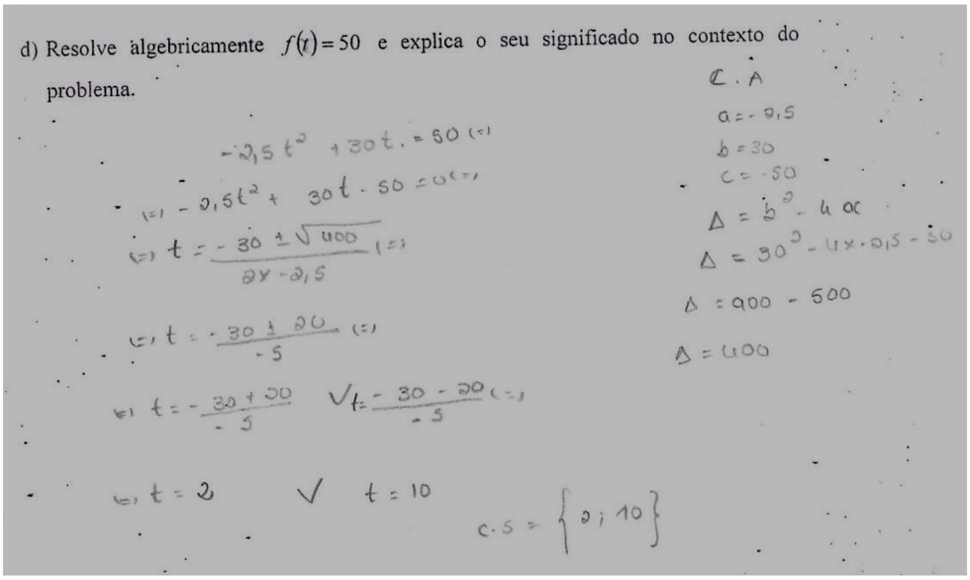
Figura 7.3.31: Produção de Gabriela, E3-Q2c.

Gabriela recorre ao seu conhecimento acerca da simetria da parábola e usa-o para saber o instante em que o foguete atinge a altitude máxima.

Gabriela: A altitude máxima atingida pelo foguete foi aos 6 segundos.
Professora: Como é que sabes?
Gabriela: Porque em todos os casos que nós já vimos, este aqui estamos a trabalhar com uma equação do 2.º grau então vamos obter uma parábola que é um gráfico que atinge sempre uma altitude máxima e nós reparamos que a altitude máxima é sempre a meio do valor que encontramos no conjunto de solução para o tempo, a meio do tempo. Temos o mesmo valor de subida, neste caso do foguete e o mesmo valor de descida, então como está de 0 para 12, o meio era 6, se fizermos 12 a dividir por 2 irá dar 6. Depois como já vimos, podemos obter a altitude do foguete substituindo o tempo, sabemos que a altitude máxima é aos 6 segundos, então temos que substituir na equação por 6 e fazer.

Gabriela lê o enunciado seguinte que pede a resolução de uma equação.

Gabriela: Resolve algebricamente *f* de *t* igual … Algebricamente?
Professora: Algebricamente é o quê?
Gabriela: É com letras… Assim nesta forma, por exemplo, aqui pusemos *t* em evidência, é não é?


d) Resolve algebricamente $f(t)=50$ e explica o seu significado no contexto do problema.

$-2,5t^2+30t=50 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2,5t^2+30t-50=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\frac{-30\pm\sqrt{400}}{2\times -2,5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\frac{-30\pm 20}{-5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\frac{-30+20}{-5} \vee t=\frac{-30-20}{-5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=2 \vee t=10$

C.A

$a=-2,5$

$b=30$

$c=-50$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=30^2-4\times -2,5-50$

$\Delta=900-500$

$\Delta=400$

C.S $=\{2;10\}$

Figura 7.3.32: Produção de Gabriela, E3-Q2d.

Professora: Vamos fazer… O que é que estás a pensar? Diz, diz.
Gabriela: É assim, aqui sabemos que *x*, o tempo é igual a 50, 50 foi o tempo…
Professora: Mas, o tempo é que é igual a 50?
Gabriela: Não, a altura em que o foguete atinge 50 metros… Então posso pôr $-2{,}5t^2+30t$, porque o $f(t)$ representa isto, é igual a 50 e depois posso passar o 50 para este lado, depois vou obter uma equação do 2.º grau e depois faço com a fórmula resolvente [aluna muito sorridente].
Professora: Sabes de cor a fórmula?
Gabriela: Não, não sei.

Relativamente ao esboço gráfico, Gabriela não revela muitas dificuldades, figura 7.3.33.

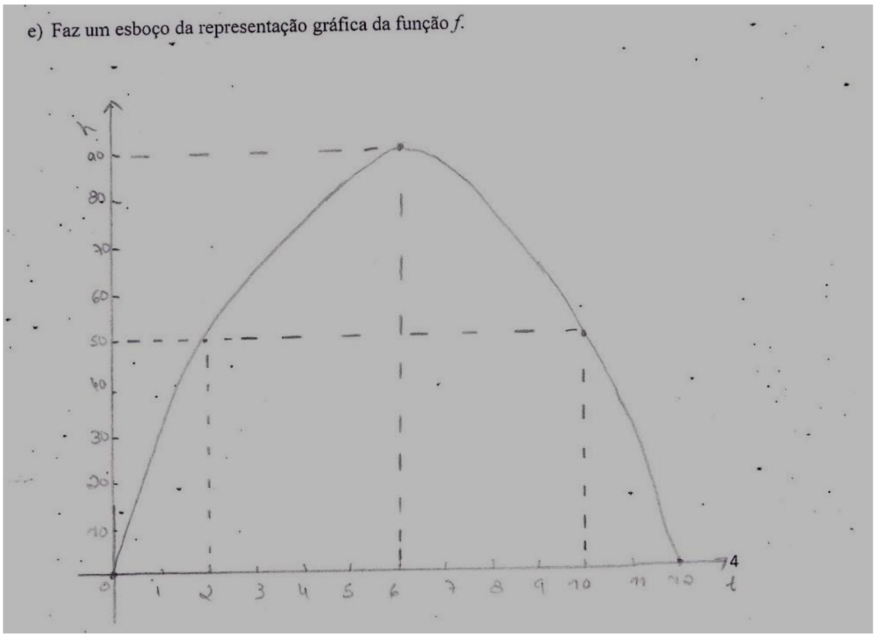


Figura 7.3.33: Produção de Gabriela, E3-Q2e.

> **Gabriela**: Vai ser assim, porque o *a* é… O termo que está elevado ao quadrado é negativo… tem de ser com a concavidade virada para baixo [a aluna continua a construir o gráfico]
> …. Agora no tempo vou pôr de 10 em 10, a altura máxima é de 90 metros … Agora sabemos os zeros, ele está aqui e aos 12 também. Sabemos que no 2 e no 10 tem 50 … aqui aos 6 atingiu os 90 … Já está.

Gabriela acrescenta que não é difícil construir a representação gráfica e "até é interessante construir estes gráficos".

Na questão seguinte são apresentadas três equações, peço que Gabriela as resolva pelo processo que considerar mais conveniente e que faça um esboço da representação gráfica em cada situação.

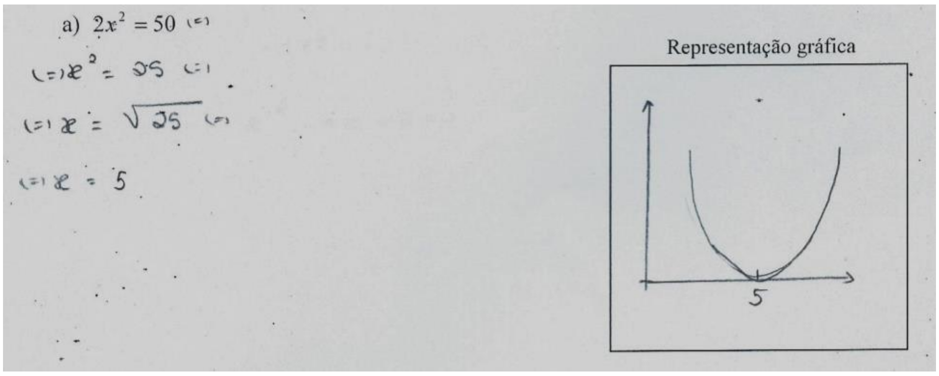


Figura 7.3.34: Produção de Gabriela, E3-Q3a.

No primeiro caso, Gabriela opta por recorrer à noção de raiz quadrada para resolver a equação, explicando que “Temos aqui x^2, depois temos um valor sem parte literal e como temos positivo e sei que 50 a dividir por 2 dá 25 e é positivo e a raiz quadrada só se pode utilizar em números positivos, então achei que era conveniente” (E3). A aluna revela grande facilidade em efetuar os cálculos mentalmente o que é fundamental para a sua tomada de decisão. No entanto, verifico que Gabriela não apresenta a solução negativa -5 e por isso esboça a representação gráfica como se pode ver na figura 7.3.34.

> **Professora**: Como será a representação gráfica?
> **Gabriela**: Isso agora …. O termo em x^2 é positivo, então a parábola vai ser assim e ele só toca um ponto no eixo dos xx, que é o 5, então vai ser apenas assim...

Na segunda situação (Fig. 7.3.35) Gabriela parece indecisa antes de escolher o procedimento que lhe parece mais adequado.

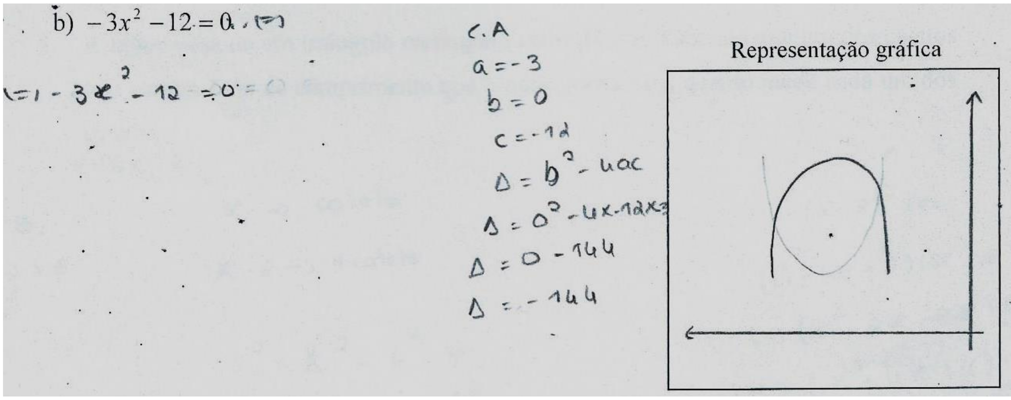


Figura 7.3.35: Produção de Gabriela, E3-Q 3b.

Gabriela: Vou utilizar o *x* em evi … Não! …? … Não podemos usar.
Professora: Porquê?
Gabriela: Porque temos que passar o 12 para este membro, vai ficar positivo e 12 a dividir por -3 vai dar -4 e não podemos fazer a raiz quadrada de números negativos. … *x* em evidência também não porque íamos pôr *x* a multiplicar por 3*x* e o 12 não tem nenhum *x*, então só pode ser com a lei do anulamento do produto.
Professora: E como é que tu vais utilizar a lei do anulamento do produto?
Gabriela: Pois… Isso agora… Lei do anulamento do produto tem de ser estes valores iguais? …. Pois, também não é lei do anulamento do produto…
[…]
Gabriela: Posso usar a fórmula resolvente, o problema é que este 0 vai passar para aqui, vai ser menos 0.
Professora: E depois?
Gabriela: Ah! Pois é, porque depois vai ser uma equação, depois o binómio discriminante, o valor a multiplicar por menos 4 vai ser 0, porque qualquer número a multiplicar por 0 é 0…. É igual a 0.

Gabriela calcula o valor do binómio discriminante e tira conclusões de imediato.

Gabriela: Esta equação é impossível, não podemos fazer raiz quadrada deste número, de números negativos.

E apresenta uma representação gráfica, para a situação apresentada, que não é a correta.

Professora: Porque é que desenhaste assim a parábola?
Gabriela: Porque a parábola não toca em nenhum valor de… Acho que está mal…
Professora: Porquê?
Gabriela: Porque o *a* é negativo e porque não temos valor de *x* para a parábola tocar, então a parábola fica ali …

A aluna considera esta questão como a mais difícil de todas as questões colocadas na entrevista. Na última situação, onde é apresentada uma equação completa, a aluna não hesita na escolha de um método para a resolver.

> **Gabriela**: Aqui vou pôr todos com o mesmo denominador, aqui fica 5*x*, aqui fica igual … -2x^2 … -2. Agora vou passar 2x^2 mais 5*x* mais 2 é igual a 0. Agora vou pôr o *a* corresponde a 2, o *b* corresponde a 5 e o *c* corresponde a 2 …. Delta é igual a 9 …

A aluna conclui a resolução e eu procuro saber o que motivou a sua escolha.

> **Professora**: Porque é que tu aqui nesta decidiste aplicar a fórmula resolvente?
> **Gabriela**: Então? Vi que tinha um membro com *x*, outro com x^2 e um isolado, então tinha uma equação do 2.º grau completa.

Gabriela refere que pelo facto de ter uma equação do 2.º grau completa, recorre à fórmula resolvente e, neste caso, não mostra qualquer dificuldade em efetuar a representação gráfica (figura 7.3.36).

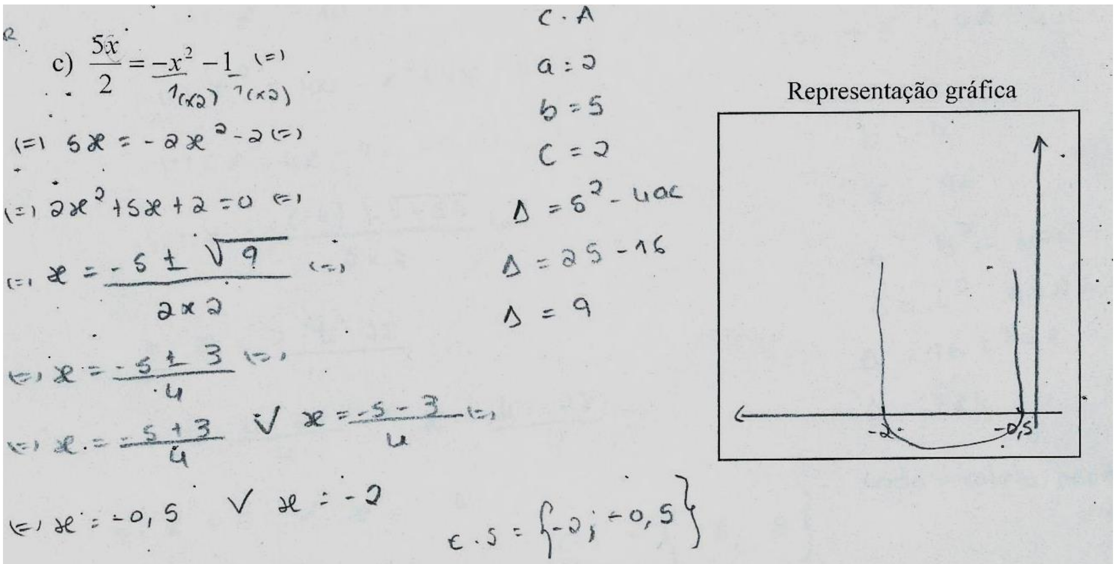
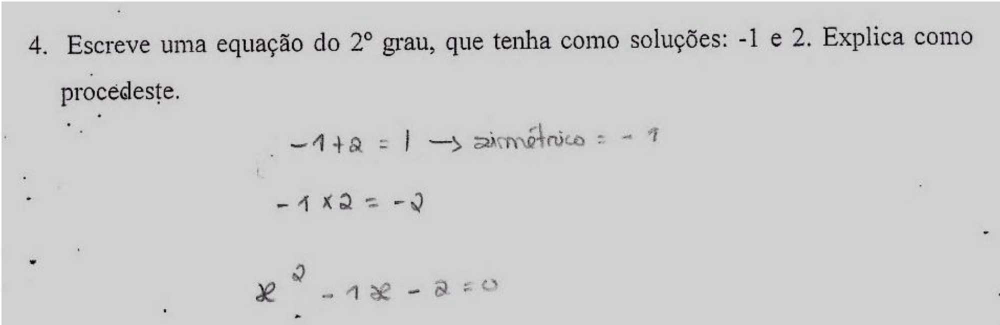


Figura 7.3.36: Produção de Gabriela, E3-Q3c.

Na quarta questão, Gabriela apresenta a resolução (figura 7.3.37) sem manifestar dificuldade, questiono-a acerca dos seus procedimentos.



4. Escreve uma equação do 2º grau, que tenha como soluções: -1 e 2. Explica como procedeste.

$-1+2 = 1 \rightarrow$ simétrico $= -1$

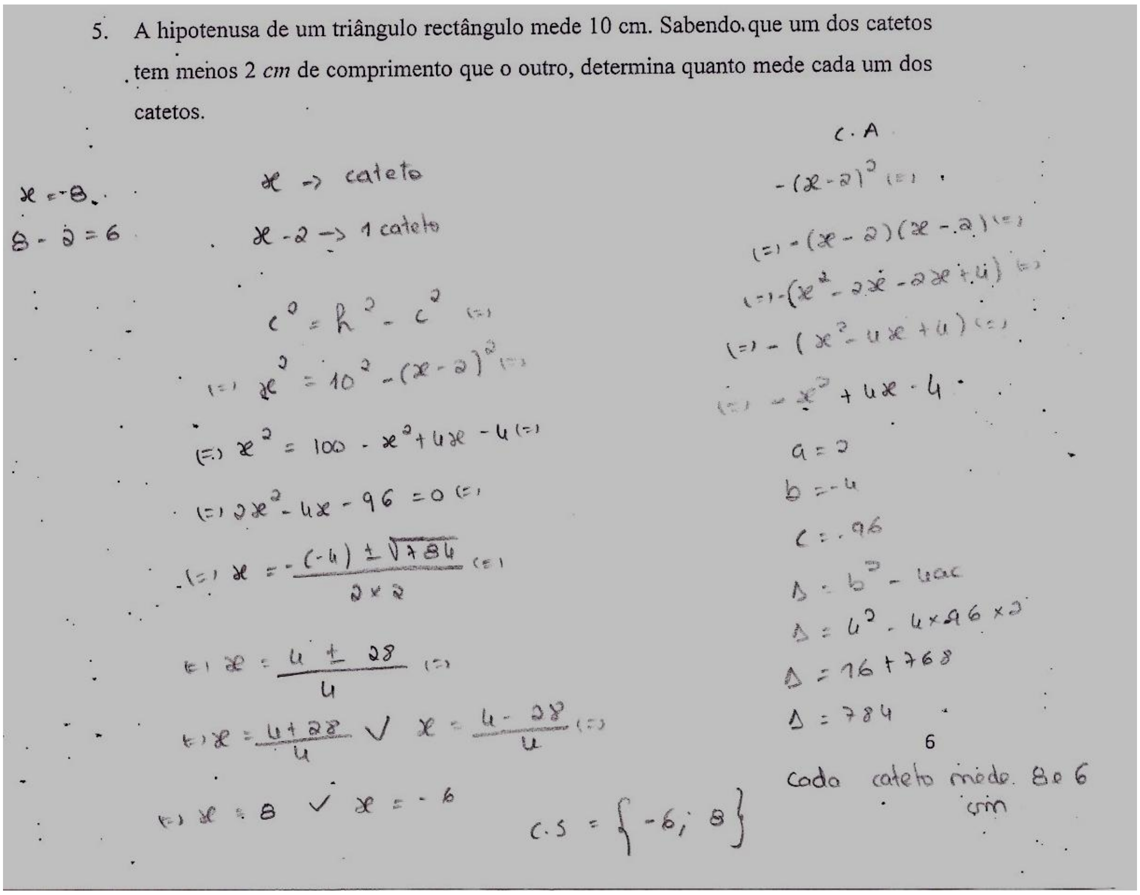
$-1 \times 2 = -2$

$x^2 - 1x - 2 = 0$

Figura 7.3.37: Produção de Gabriela, E3-Q4.

Professora: Então, explica-me lá como… O que é que tu pensaste para escrever esta equação?
Gabriela: Eu tenho as soluções e através das soluções posso construir uma equação do 2.º grau, pois ao somar as soluções obtenho 1, esse podia ser o valor de *x* mas tem de ser o seu simétrico, o simétrico de 1 é -1 então vai ser o termo que vai acompanhar o *x*. Depois ao multiplicar dá-me -2 e essa multiplicação vai ser o valor do termo independente, o termo sem parte literal, x^2, como é uma equação do 2.º grau tem de ter algum valor elevado a 2 e será 1 para podermos colocá-lo na equação.
Professora: O coeficiente …

Por fim, para terminar a entrevista, apresento um problema que Gabriela resolve sem dificuldade (figura 7.3.38).



5. A hipotenusa de um triângulo rectângulo mede 10 cm. Sabendo que um dos catetos tem menos 2 *cm* de comprimento que o outro, determina quanto mede cada um dos catetos.

$x = 8$
$8 - 2 = 6$

$x \rightarrow$ cateto
$x - 2 \rightarrow$ 1 cateto

$c^2 = h^2 - c^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 = 10^2 - (x-2)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 = 100 - x^2 + 4x - 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 96 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{784}}{2 \times 2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 28}{4} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{4+28}{4} \vee x = \frac{4-28}{4} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 8 \vee x = -6$

$C.S = \{-6; 8\}$

C.A
$-(x-2)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -(x-2)(x-2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -(x^2 - 2x - 2x + 4) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -(x^2 - 4x + 4) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 4$

$a = 2$
$b = -4$
$c = -96$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = 4^2 - 4 \times 96 \times 2$
$\Delta = 16 + 768$
$\Delta = 784$

Cada cateto mede 8 e 6 cm

Figura 7.3.38: Produção de Gabriela, E3-Q5.

> **Gabriela**: *x* é o cateto, um cateto é $x - 2$ e agora queremos saber a medida do cateto. Cateto ao quadrado é igual a hipotenusa ao quadrado menos cateto ao quadrado. … x^2 é igual a 10 ao quadrado menos $x - 2$ ao quadrado.

Gabriela resolve a equação e conclui que:

> Só vamos poder usar o 8, porque no contexto do problema não podemos utilizar catetos com medidas negativas, então sabemos que *x* é igual a 8, é a medida de um cateto, depois temos 8 menos 2 que é igual a 6, a medida do outro cateto. (E3)

A aluna conclui assim a resolução do problema, acrescentando que foi fácil de resolver:

> Primeiro pus na forma que me era mais conveniente utilizar e que foi mais fácil para montar, depois isto tem em base o teorema de Pitágoras que é uma fórmula mais simples de nós sabermos como fazer. (E3)

Quando a questiono acerca dos motivos que a levaram a recorrer ao teorema de Pitágoras, explica:

> Porque fala-nos de uma hipotenusa e de 2 catetos e ao ouvirmos estes termos associamos logo ao teorema de Pitágoras. (E3)

No final da entrevista ainda a questiono acerca da necessidade de alunos do 9.º ano aprenderem este tema, ao que a aluna responde: "Acho que é importante. Isto é uma ferramenta boa para nós quando queremos saber um valor e temos outro [refere-se às raízes], podemos recorrer à equação do 2.º grau". Insisto mais uma vez e a aluna acaba por referir que o estudo deste tema é importante "Para o exame". Há assim evidências de que Gabriela, para além da situação indicada, não vê grande utilidade prática do que aprendeu neste tema, mas considera que é importante saber para o exame.

Síntese

Representações e transformações das representações na aprendizagem de métodos formais.

Ao longo da realização das diferentes tarefas deste tópico, Gabriela recorre a uma variedade de representações para expressar o seu pensamento matemático. Como é referido na análise do trabalho desenvolvido por Gabriela nos tópicos anteriores, a linguagem natural é um tipo de representação sempre presente no seu trabalho. A aluna, no trabalho com papel e lápis, utiliza-a essencialmente para explicar os procedimentos que efetua e para dar a resposta. Na folha de cálculo, Gabriela usa a linguagem natural para nomear as colunas e explicar procedimentos.

No trabalho com papel e lápis, as representações no SNA e no SNN complementam-se, havendo uma oscilação entre o tipo de representação mais predominante de acordo com a natureza da tarefa. Contudo, registo que na última parte do estudo do tópico, assim como na entrevista, Gabriela mostra privilegiar o SNA para resolver as situações propostas.

As representações pictóricas surgem apenas na tarefa C-3 quando a aluna desenha quadrados como suporte para chegar ao processo de factorização de polinómios.

As representações na folha de cálculo seguem habitualmente o mesmo padrão. Gabriela começa por nomear colunas, identificando as variáveis e, a partir daí, estabelece relações de dependência entre elas. Para o estabelecimento dessas relações, a aluna usa o registo numérico para gerar sequência de incremento constante e/ou ao registo de fórmulas para gerar varáveis coluna. Neste trabalho, há evidências de que a aluna assume uma grande proximidade de significados entre a folha de cálculo e papel e lápis, em particular, Gabriela aproxima o significado das variáveis na folha de cálculo das variáveis com as que usa no trabalho com papel e lápis, o que lhe proporciona maior segurança para efetuar algumas deduções algébricas.

A folha de cálculo permite, à aluna, um primeiro contato com a representação gráfica de uma função quadrática. Este trabalho, em articulação com papel e lápis, proporciona a compreensão do significado de factorização de uma equação do 2.º grau, a partir das suas raízes. Por outro lado, parece igualmente favorecer a compreensão do significado de resolver uma equação do 2.º grau mesmo antes da aprendizagem formal da fórmula resolvente. As representações gráficas surgem, frequentemente, no trabalho da aluna, tanto em papel e lápis como na folha de cálculo, associadas à representação gráfica da parábola quando resolve equações do 2.º grau assim como em outras situações problemáticas. No entanto, no final do estudo, Gabriela parece não se ter apropriado na íntegra de todas as caraterísticas da representação gráfica da parábola e, por vezes, revela dificuldade em traçá-la.

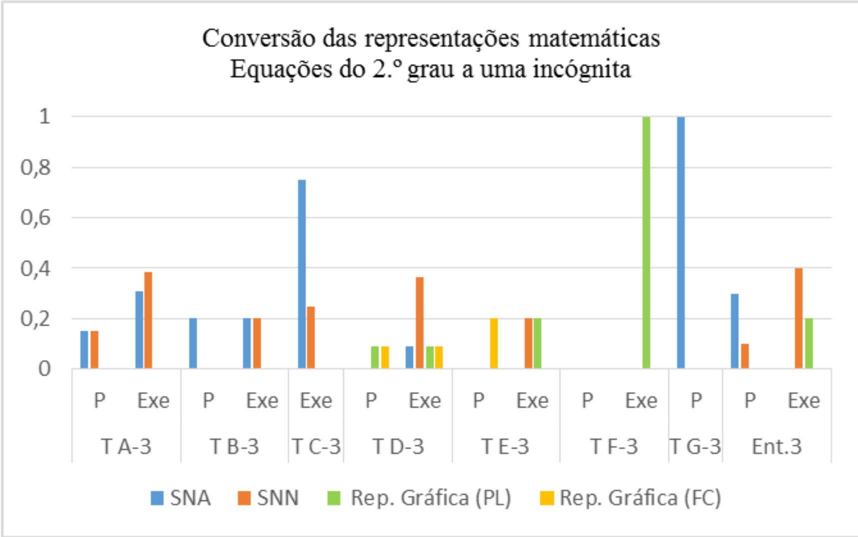


Gráfico 7.3.1: Conversão das representações de Gabriela no estudo do tópico "Equações do 2.º grau a uma incógnita".

Ao longo do estudo deste tópico, a atividade de conversão entre representações é variável, como mostro no gráfico 7.3.1. As conversões para o SNA ocorrem frequentemente, tanto na resolução de problemas, como na resolução de exercícios. Da mesma forma, as conversões para o SNN estão também presentes ao longo do estudo deste tópico, com uma tendência crescente na resolução de exercícios e decrescente na resolução de problemas. As conversões para representação gráfica apenas surgem quando solicitadas.

Quanto ao tratamento de representações, a informação encontra-se sintetizada no gráfico 7.3.2.

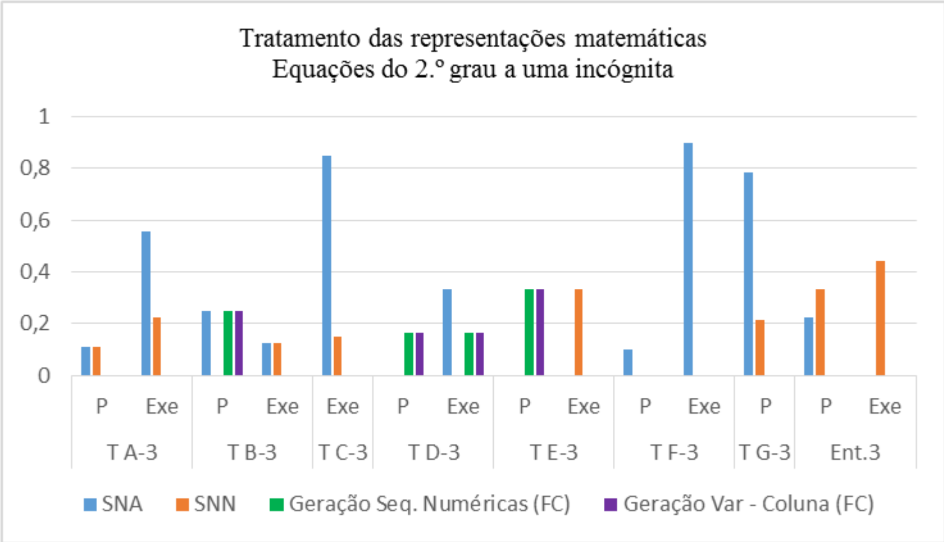


Gráfico 7.3.2: Tratamento das representações de Gabriela no estudo do tópico "Equações do 2.º grau a uma incógnita".

Ao longo do estudo do tópico, verifico que Gabriela efetua tratamentos no SNA tanto a resolução e exercícios como na resolução de problemas. A tarefa C-3 destaca-se nos tratamentos no SNA por ser uma tarefa em que a atividade da aluna se centra, particularmente, na factorização de polinómios, assim como a aplicação da lei do anulamento do produto. A partir da tarefa F-3 esses tratamentos prendem-se, essencialmente, com a aplicação da fórmula resolvente, independentemente da tipologia da tarefa.

Os tratamentos no SNN também surgem, com frequência, para efetuar cálculos elementares, muito deles depois de uma conversão do SNA para o SNN. Na folha de cálculo, as resoluções continuam a seguir o mesmo padrão e a aluna procede à geração de sequências e de variáveis-coluna, de acordo com o que é solicitado.

As tarefas propostas permitem a Gabriela aprender os métodos formais de resolução de equações do 2.º grau, a partir dos conhecimentos adquiridos nos anos anteriores. Por outro lado, permitem experiências informais antes da aprendizagem formal levando a aluna a explorar e compreender propriedades de uma função quadrática, como a sua representação gráfica e, em especial, o significado dos zeros, antes da aprendizagem da fórmula resolvente.

Gabriela, inicialmente, dá evidências de saber resolver equações do tipo $ax^2 + b = 0$, recorrendo à noção de raiz quadrada. Posteriormente, ao recordar a decomposição de um produto em fatores e a lei do anulamento do produto, este passa a ser o método preferido para resolver equações do 2.º grau.

As situações problemáticas, muitas vezes informais, foram importantes para Gabriela começar a perceber outras propriedades da função quadrática, tal como a sua representação gráfica e o significado dos seus zeros, em contextos diversos (muitas destas aprendizagens apenas são requeridas no 10.º ano). A fórmula resolvente surge mais tarde. Gabriela inicialmente sente alguma dificuldade em utilizar a fórmula resolvente, mas rapidamente se apropria dela e passa a recorrer preferencialmente a esta ferramenta para resolver equações do 2.º grau completas.

Nas situações problemáticas propostas, Gabriela tenta usar métodos formais para as traduzir e resolver, em particular, recorre a equações do 2.º grau para depois usar a fórmula resolvente. No caso dos problemas propostos no final do estudo do tópico, Gabriela sente-se impelida a utilizar equações do 2.º grau para os resolver, nas situações em que não consegue fazer esta tradução não os resolve. A aluna mostra valorizar bastante os métodos formais e depois de os aprender procura aplicá-los nas situações propostas. No caso particular deste tópico, a aluna mostra preocupação com a realização do exame final de 9.º ano, onde habitualmente surgem questões para aplicação destes métodos formais estudados, em particular, equações do 2.º grau completas que apelam à utilização da fórmula resolvente.

Em suma, à semelhança do que acontece no estudo dos tópicos anteriores, a aprendizagem dos métodos formais mostra-se determinante para levar a aluna à utilização de novas representações com uma diferente articulação. A partir o momento que a aluna recorda (noção de raiz quadrada, factorização e lei do anulamento do produto) ou aprende métodos novos (fórmula resolvente), ela procura utilizá-los nas diferentes situações propostas. A aluna mostra grande empenho em aplicar os conhecimentos que estão a ser estudados na aula e procura ser bastante fluente na aplicação desses métodos, o que torna evidente o desenvolvimento do pensamento algébrico de Gabriela.

O estabelecimento da conexão entre o trabalho desenvolvido na folha de cálculo e a notação algébrica com papel e lápis.

No primeiro problema proposto para resolver na folha de cálculo, Gabriela converte a informação do enunciado, em linguagem natural, para uma tabela na folha de cálculo onde nomeia uma coluna para variável independente e a partir da qual estabelece relações de acordo com o que é solicitado. Posteriormente, Gabriela ao observar duas colunas estabelece entre elas uma relação que converte para linguagem natural e para o SNA. A relação que a aluna estabelece não está explicita na folha de cálculo, mas surge da comparação entre duas variáveis-coluna e da observação da sua variação linha após linha. A aluna generaliza esta relação e converte-a para linguagem natural e, posteriormente, para o SNA. Embora a conversão no SNA não seja a desejada por mim, através do questionamento levo a aluna à escrita da relação pretendida.

Na resolução dos outros dois problemas propostos, a atividade de Gabriela inicia-se com a identificação da variável independente e a nomeação e construção e coluna na folha de cálculo. A aluna passa depois à conversão da expressão analítica da função, no SNA, para uma fórmula na folha de cálculo, construindo de seguida uma variável-coluna. A aluna converte depois a tabela para uma representação gráfica como solicito. As questões no ambiente de papel e lápis levam a aluna a atribuir significado aos zeros de uma função quadrática, representação gráfica associada e respetiva equação. Por outro lado, são propostas questões que conduzem a aluna a lidar com conceitos como máximos e mínimos. Estas tarefas levam ainda a aluna a compreender que uma que é possível escrever uma equação do 2.º grau como um produto de fatores, na forma $c(x-r_1)(x-r_2)=0$, onde c é uma constante e r_1 e r_2 são as raízes.

Contribuição da conexão entre os dois ambientes (folha de cálculo e papel e lápis) na aprendizagem dos métodos formais.

O estabelecimento de conexões, no primeiro problema, resolvido no ambiente digital leva a aluna à noção de diferença de quadrados, um aspeto onde aparentemente no diagnóstico não revela dificuldades. A compreensão desta igualdade é fundamental para utilizar na factorização de polinómios. Os dois últimos problemas levam a aluna a compreender algumas propriedades da função quadrática, como os seus zeros e a sua relação com a representação gráfica, a factorização de uma equação do 2.º grau, a partir das suas raízes, assim como o significado algébrico da resolução de uma equação do 2.º grau completa, mesmo antes da aprendizagem formal da fórmula resolvente.

CAPÍTULO 8

Carolina

Neste capítulo apresento a análise das aprendizagens da Carolina na realização das diferentes tarefas ao longo dos três tópicos em estudo. Faço primeiramente uma breve caracterização da aluna para depois, de modo mais detalhado, descrever o desenvolvimento do seu pensamento algébrico no que respeita ao trabalho com representações e à aprendizagem de métodos formais algébricos. Por fim, faço uma síntese da análise apresentada.

8.1. Apresentação

Carolina é uma jovem de 16 anos, que regista duas retenções, a primeira no 7.º ano e a segunda no 8.º ano. A aluna vive com a mãe, o padrasto e um irmão, num bairro vizinho da escola, fazendo diariamente o percurso entre a escola e casa a pé.

No questionário realizado no início do ano letivo, para a definição do projeto curricular de turma, a aluna refere que se deita habitualmente entre as 23h e as 24h e um dos seus *hobbies* preferidos é estudar. A disciplina favorita é a Educação Física e Francês aquela em que manifesta mais dificuldades.

Carolina considera-se uma boa aluna a Matemática, mas reconhece que o seu percurso escolar nesta disciplina não regista qualquer acontecimento de destaque. Considera que a Matemática:

> Não é nada difícil, temos é de raciocinar e acompanhar sempre, se a gente deixa escapar alguma coisa, olha torna-se uma bola de neve…, mas é fácil é por isso que eu gosto. (E1)

No decorrer da primeira entrevista apercebo-me de que a aluna não sabe a tabuada, ao que ela confessa que

> Na primária odiava, odiava isso. A minha professora punha a gente todos em fila no quadro e perguntava ao calhas e depois iam saindo [os que não sabiam] … Eu saia logo! Não gosto da tabuada nem por nada…. Iam sempre ficando… Sempre, sempre, sempre, para a professora ver quem é que sabia mais a tabuada. A professora mandava sempre fazer a tabuada mil vezes para casa, mas eu não gostava de fazer a tabuada… Assim muito de cor, não sei!... Odeio tabuadas…. Odeio tabuadas … (E1)

Carolina recorda assim a experiência no 1.º ciclo com as tabuadas e, em particular, pelo trabalho repetitivo que lhe era exigido. Relativamente ao tipo de aulas, a aluna diz preferir as expositivas. Quanto ao trabalho em sala de aula, a aluna confessa que

> Às vezes é bom trabalhar sozinhos…. Às vezes os outros não fazem nada, ou baralham a gente, a gente está com a ideia certa e eles vêm com a ideia errada. É bom trabalhar sozinho, mas é bom também trabalhar em par, para a gente discutir as opiniões…(E1)

A aluna diz preferir trabalhar sozinha, mas admite que, por vezes, também é bom trabalhar com outro colega com quem possa discutir ideias e opiniões. Carolina afirma gostar de realizar todo o tipo de tarefas em Matemática, reconhecendo que atualmente as suas respostas são mais completas do que eram em anos anteriores.

> Antes a professora X dizia sempre para a gente apontar todas as coisas, sempre que fossemos lendo, fossemos apontando, mas agora eu explico mais o meu raciocínio, antes também não me preocupava tanto com isso (E1)

A aluna refere que habitualmente apenas retirava a informação dos enunciados e apresentava a respetiva resolução, no entanto reconhece a importância da explicação do que ela considera ser o seu raciocínio. Carolina explica a importância da explicação "Às vezes pode não estar muito explicito as nossas contas e assim as pessoas percebem mais" (E1). Acrescenta ainda que, dependendo da situação, utiliza a linguagem natural escrita, diagramas, tabelas ou outras representações.

A aluna tem alguns problemas familiares que, por vezes, interferem na sua vida escolar levando-a a chegar atrasada às aulas e ocasionalmente a faltar. No decurso deste estudo, em particular, ao longo do segundo e terceiro tópicos, mostra-se menos trabalhadora e empenhada na atividade escolar, o que se reflete na qualidade das suas aprendizagens. Acresce ainda o facto de a aluna estar a viver um período afetivo próprio da adolescência que a faz dispersar-se e reduz a sua atenção nas atividades letivas. No entanto, em sala de aula a aluna colabora regularmente no desenvolvimento das tarefas propostas, apresenta um humor bastante peculiar, é divertida e espontânea nas suas intervenções, mas também muito conversadora como ela própria reconhece: "Sou boa aluna, só que sou muito faladora" (E1).

8.2. O desenvolvimento do pensamento algébrico

8.2.1. Aprendizagens no tópico "Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas"

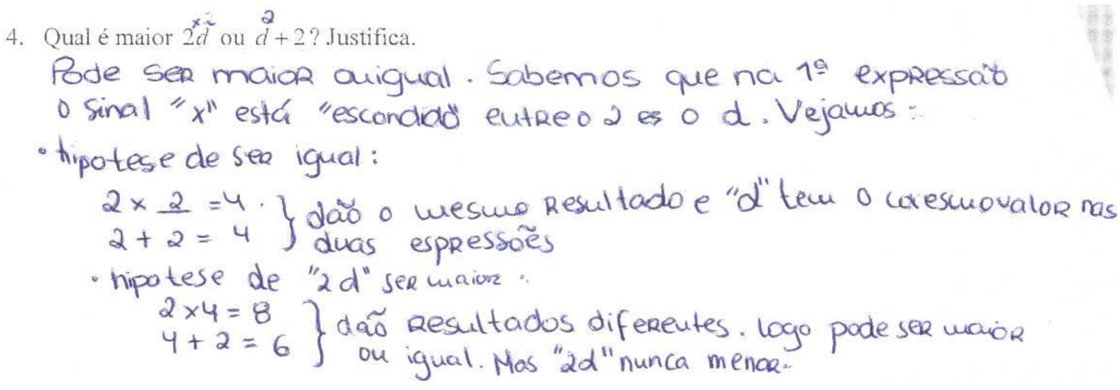
Analiso o contributo das tarefas no desenvolvimento do pensamento algébrico de Carolina, dando especial destaque ao trabalho da aluna com as representações matemáticas e na forma como as coordena, em especial, na aprendizagem de métodos formais.

A evolução da aluna ao nível das representações matemáticas e aprendizagem dos métodos formais nas tarefas resolvidas quer com papel e lápis quer na folha de cálculo é apresentada, na tabela 8.1 e nos quadros de análise (Anexo 35).

Na resolução da tarefa A-1, de diagnóstico (Anexo 7), Carolina recorre frequentemente à linguagem natural, em articulação com o SNN, para explicar os procedimentos e dar respostas às questões. No SNN a aluna efetua cálculos por substituição, para avaliar a veracidade de igualdades ou a grandeza de expressões, e nessas substituições a aluna opta apenas por valores inteiros e positivos. O SNA é utilizado na escrita e simplificação de expressões algébricas e ainda para a resolução de equações do 1.º grau. A aluna consegue também associar uma tabela com valores numéricos à respetiva representação gráfica.

Quanto aos métodos formais, Carolina apresenta algumas dificuldades na resolução de equações do 1.º grau, nomeadamente na transposição de um termo para outro membro, assim como na resolução de equações com denominadores e com parênteses.

Nesta tarefa inicial, Carolina manifesta um grande apego a representações no SNN e privilegia as conversões para este sistema de notação a partir do SNA, por exemplo, para avaliar a grandeza de expressões algébricas, como mostro na figura 8.1.1.


4. Qual é maior $2d$ ou $d+2$? Justifica.

Pode ser maior ou igual. Sabemos que na 1ª expressão o sinal "x" está "escondido" entre o 2 e o d. Vejamos:

• hipotese de ser igual:

$2 \times 2 = 4$
$2 + 2 = 4$ } dão o mesmo resultado e "d" tem o mesmo valor nas duas espressões

• hipotese de "2d" ser maior:

$2 \times 4 = 8$
$4 + 2 = 6$ } dão resultados diferentes. logo pode ser maior ou igual. Mas "2d" nunca menor.

Figura 8.1.1: Produção de Carolina, TA1-Q4.

A aluna converte as expressões do SNA para o SNN, efetuando corretamente as substituições nas duas expressões algébricas. No entanto, utiliza sempre números naturais, o que faz com que nunca obtenha para $2d$ um valor inferior a d+2. À semelhança desta situação, noutras questões, Carolina opta sempre por substituições com números naturais. Na entrevista justifica-se dizendo que “eu não estava a lembra-me desses números [negativos]” (E1).

Na resolução desta tarefa Carolina apresenta dificuldades relacionadas com o entendimento da letra como variável. Esta sua dificuldade é detetada, em particular, na resolução da questão 5 da tarefa, que apresento na figura 8.1.2.

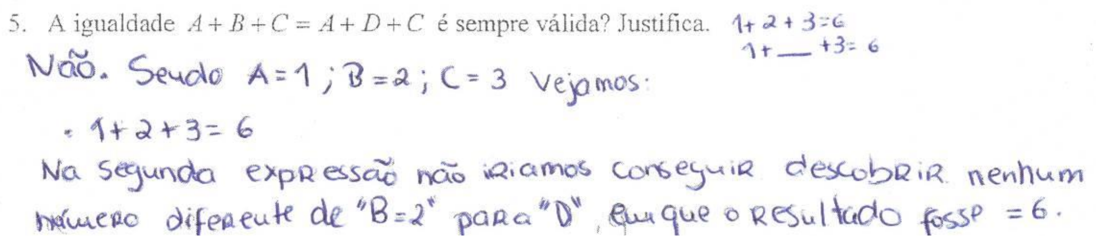

5. A igualdade $A+B+C=A+D+C$ é sempre válida? Justifica. $1+2+3=6$
$1+\_\_\_+3=6$
Não. Sendo A=1; B=2; C=3 Vejamos:
• 1+2+3=6
Na segunda expressão não iríamos conseguir descobrir nenhum número diferente de “B=2” para “D”, que que o resultado fosse =6.

Figura 8.1.2: Produção de Carolina T A1-Q5.

Na discussão, em sala de aula, após a leitura do enunciado, vários alunos pronunciam-se, em simultâneo.

> **Tatiana**: Pode ser igual ou não. À partida são expressões diferentes.
> **Gabriela**: Pode ser válido se atribuirmos o mesmo valor ao B e ao D. Se atribuirmos, 1 ao A, 2 ao B e 3 ao C vai dar 6 e 4 ao D vai ser 8, já não é válida. Mas se eles tiverem o mesmo valor é valida. Não se sabe se o B e o D não podem ter o mesmo valor.
> **Carolina**: Não pode Gabriela!!! […] Não pode ser! O B e o D têm de ser diferentes, senão as letras eram iguais!

Carolina não está de acordo com os colegas e afirma que as letras não podem tomar todas o mesmo valor. Na entrevista Carolina explica que “Não sabia que duas letras diferentes podiam ter o mesmo valor” (E1) e destaca que esta foi uma das principais aprendizagens que fez com a resolução desta tarefa.

Na resolução desta tarefa, o SNA destaca-se para a escrita de expressões algébricas, simplificação de expressões e resolução de equações do 1.º grau. A aluna recorre ainda às representações pictóricas numa situação em que lhe é solicitado que encontre um termo próximo e outro mais distante de uma sequência.

Inicialmente, a aluna parece não saber resolver qualquer equação do 1.º grau, com ou sem denominadores e com ou sem parênteses. Embora dê ideia de desconhecer os métodos formais de resolução de equações, nas questões seguintes a aluna não mostra dificuldades. Pelo contrário, consegue identificar os erros que estão na resolução de equações que lhes foram dadas para analisar e resolve uma equação bastante mais complexa do que a inicial.

Na questão 13.2 é pedido o perímetro de uma figura com *n* lados de igual comprimento. Carolina dá uma resposta aparentemente descontextualizada, conforme apresento na figura 8.1.3.

Figura 8.1.3: Produção de Carolina TA1-Q13.2.

Na entrevista questiono a aluna acerca da sua resposta.

Carolina: Tem *n* lados …
Professora: Cada um com comprimento 2…
Carolina: $2+x$, porque é que eu pus isto? $2+x$ porquê? Ah, … já sei porquê! Então porque isto acrescenta… isto já tem estes *x*, estes *x* lados, não é? … Ah, então eu devia ter contado os lados, não é? Acho que este *x* quer dizer 1, 2, 3, … 12, 12, 12 + 2 não dá *n* ou dá? Não… Parva! Eu não sei porque fiz isso, professora… Mas acho que era…. Vai sempre acrescentando 2 lados… Não sei… Eu não percebi estes coisos [as reticências].

Como se pode constatar pelo diálogo, Carolina parece estar confusa e não se lembra, nem consegue perceber a resposta que deu à questão. A aluna mostra não ter compreendido o enunciado, como se pode inferir pelas suas palavras, ao afirmar "não percebi estes coisos", referindo-se às reticências que indicam a continuidade da representação da figura.

Na entrevista (E1) questiono-a para um número crescente de lados como mostro no excerto seguinte.

Professora: Quer dizer que continuava… Se eu te dissesse assim: A figura tem 4 lados, como é que tu calculavas o perímetro sabendo que cada lado mede 2?
Carolina: 4 vezes 2.

Professora: E se tivesse 50 lados?
Carolina: 50 vezes 2.
Professora: Se tivesse 100?
Carolina: 100 vezes 2.
Professora: Se tivesse *n*?
Carolina: *n* vezes 4! Não! … Ah mede 2, 2*n*!

A aluna tendo como suporte o meu questionamento consegue generalizar e obter a resposta para a questão. Relativamente à questão 14, Carolina apenas responde às duas primeiras alíneas, recorrendo a representações pictóricas para obter as respostas às questões, como mostro na figura 8.1.4.

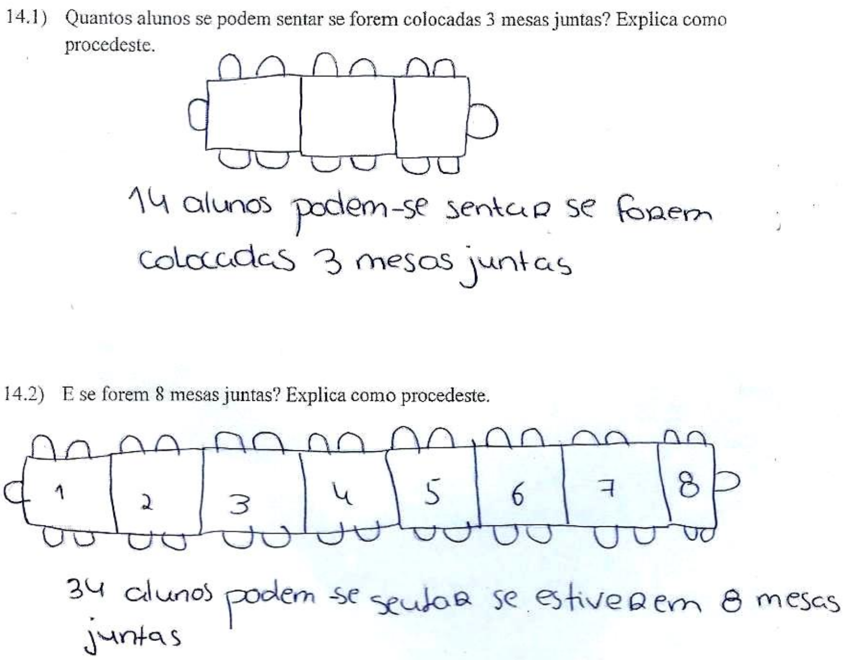


Figura 8.1.4: Produção de Carolina, TA1, Q14.

Na primeira alínea, Carolina representa as três mesas e dispõe as cadeiras em seu redor, de acordo com a informação do enunciado. Em seguida, procede à contagem e dá a resposta. Na alínea seguinte, para um maior número de mesas, a aluna segue o mesmo procedimento. No decurso da aula, a propósito desta questão, diz-me “Aqui a professora quer a expressão geradora, mas eu não encontrei... Então fiz como os burros!... Sim, fiz como aqueles que não sabem…”. A aluna tem consciência de que pode encontrar uma expressão geral, que facilita a resolução do problema, por isso desvaloriza o método que utiliza.

No entanto, na questão 15, num contexto puramente matemático, em que surge uma tabela com o estabelecimento de uma relação numérica entre duas variáveis, a aluna consegue quase de imediato converter a tabela numérica para o SNA, apresentando a expressão geral, como mostro na figura 8.1.5.

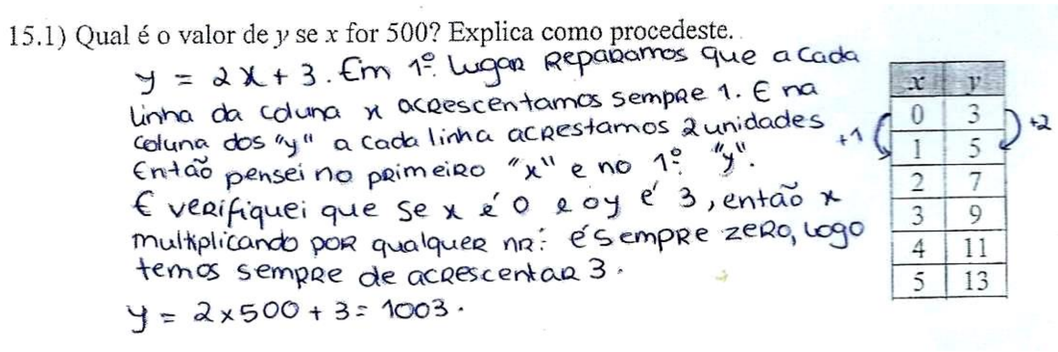
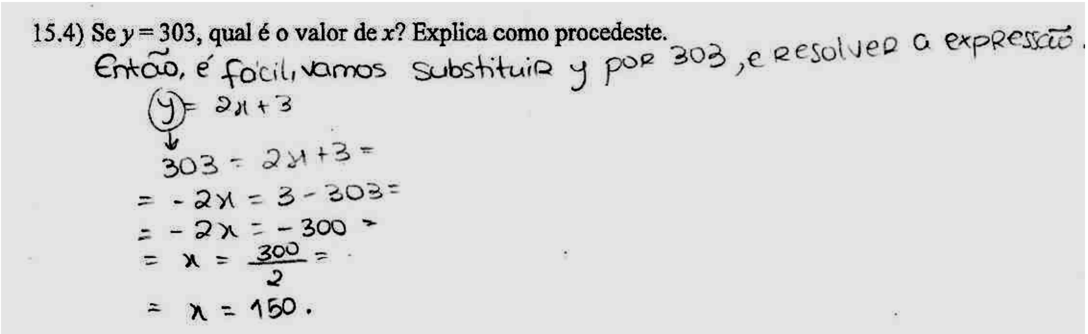


Figura 8.1.5: Produção de Carolina, TA1, Q15.1.

Carolina começa por relacionar as variáveis entre linhas consecutivas com um raciocínio aditivo. De seguida, explica como obtém o "+3" na expressão geral. No entanto, não chega a esclarecer como obtém o "2*x*". Na discussão, em sala de aula, quando a questiono acerca expressão geral, é Gabriela quem explica o significado de 2*x* na condição.

> **Professora**: Como é que descobriste o 2?
> **Gabriela**: Então se substituirmos o *x* por 5 dá, 2 vezes 5 mais 3 dá 13!
> **Professora**: E dá para todos?
> **Gabriela**: Dá [a aluna verbaliza a substituição para todos o valores da tabela verificando que obtém o valor esperado e que esta é a expressão correta].

Na alínea seguinte é dado um valor para *y* e pretende-se saber o valor de *x*. Carolina não mostra dificuldades na resolução, como mostro na figura 8.1.6.



15.4) Se $y = 303$, qual é o valor de x? Explica como procedeste.

Então, é fácil, vamos substituir y por 303, e resolver a expressão.

$y = 2x + 3$

$303 = 2x + 3 =$

$= -2x = 3 - 303 =$

$= -2x = -300 =$

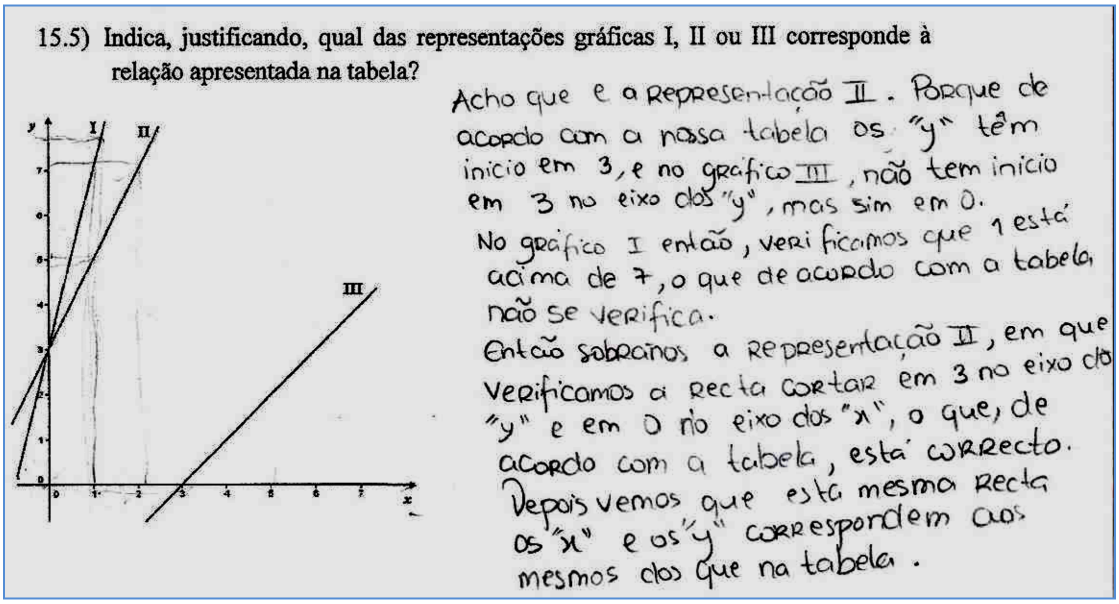
$= x = \frac{300}{2} =$

$= x = 150.$

Figura 8.1.6: Produção de Carolina, TA1-Q15.4.

A aluna mostra agilidade nos tratamentos efetuados no SNA aquando da resolução da equação, a que chama “expressão”.

Na resolução da questão 15.5, na figura 8.1.7, Carolina confronta os valores das variáveis na tabela com as representações gráficas, o que determina a sua escolha sem apresentar dificuldades.



15.5) Indica, justificando, qual das representações gráficas I, II ou III corresponde à relação apresentada na tabela?

Acho que é a representação II. Porque de acordo com a nossa tabela os "y" têm inicio em 3, e no gráfico III, não tem inicio em 3 no eixo dos "y", mas sim em 0.
No gráfico I então, verificamos que 1 está acima de 7, o que de acordo com a tabela não se verifica.
Então sobramos a representação II, em que verificamos a recta cortar em 3 no eixo dos "y" e em 0 no eixo dos "x", o que, de acordo com a tabela, está correcto.
Depois vemos que esta mesma recta os "x" e os "y" correspondem aos mesmos dos que na tabela.

Figura 8.1.7: Produção de Carolina, TA1-Q15.5.

Na entrevista, questiono a aluna acerca das aprendizagens realizadas com esta tarefa. Carolina considera que as suas aprendizagens se resumem com o significado das variáveis e com a(s) solução(ões) de uma equação.

> **Carolina**: O que é que eu aprendi… Primeiro não sabia que duas letras diferentes podiam ter valores iguais.
> **Professora**: Sim, isso foi a nossa grande discussão … Na questão 5 lembras-te?
> **Carolina**: Sim.
> **Professora**: Mas agora concordas ou não?
> **Carolina**: Sim… E também que expressões diferentes podem ter valores iguais, podem ser iguais.
> **Professora**: Quando tu dizes expressões diferentes que significado lhe estás a dar?
> **Carolina**: Eu digo sempre expressões mas é equações, $a+b=3$ é equações? Ou como é que se chama?… Eu chamo expressões, eu chamo a tudo expressões.

Nesta primeira tarefa, Carolina reconhece que tem dificuldades em alguns conceitos matemáticos e que usa o termo "expressão algébrica" também para se referir a uma equação.

Na tarefa B-1 (Anexo 8), um problema proposto para resolver na folha de cálculo, Carolina trabalha sozinha. Enquanto leio o enunciado da tarefa à turma, a aluna começa por nomear duas colunas "mês" e "dia" e aguarda que eu termine a leitura da tarefa para solicitar a minha ajuda. Apaga a nomeação de colunas e nomeia agora uma coluna "dias" e escreve a sequência dos números naturais até 31 após selecionar as primeiras células e arrastar a alça da última. Volta a ler o enunciado e na 2.ª coluna introduz uma variável célula com a fórmula "$=b3*12$", obtendo 12.

> **Carolina**: Pomos mês 1, mês 2, mês 3, mês 4 e por aí…?

A aluna nomeia depois a coluna "mês" e escreve sequência de números naturais até 12, como mostro na figura 8.1.8.

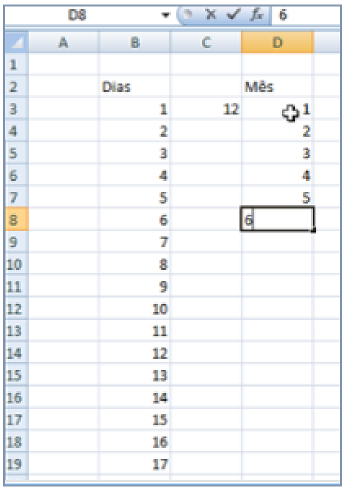


Figura 8.1.8: Tentativa 1 de Carolina, TB1.

Carolina: Depois temos de multiplicar por quantos? Por 30? …

A aluna não continua a sequência e questiona-me:

Carolina: Então se eu puser aqui… Depois fizer até… Depois já não vou conseguir juntar os resultados…
Professora: Então diz me lá o que é que pretendes fazer?
Carolina: Então isto é os dias, isto é os dias que o mês tem [apontando com o rato para a respetiva coluna] até 31 e depois temos vezes o 12 [aponta para a coluna a seguir onde só tem ainda o 12] fazemos aqui vezes 12.
Professora: Vezes 12…
Carolina: Depois temos os meses…
Professora: Sim.
Carolina: Temos 12 meses no ano.
Professora: Exatamente.
Carolina: Mas depois sobram os dias do mês.

A aluna refere-se ao facto de não conseguir relacionar cada um dos dias com cada um dos meses, pois as duas sequências ocupam um número diferente de linhas. Insisto para que a aluna volte a ler o problema e veja se é possível encontrar uma melhor forma para organizar os dados.

Carolina: Tenho de apagar tudo…

Carolina seleciona e apaga tudo à exceção da nomeação e colunas e volta a ler o enunciado, insere novamente os dias de 1 a 31 e voltou a apagar tudo deixando a folha sem qualquer dado inserido. A aluna seleciona depois várias células na folha de cálculo como mostro na figura 8.1.9.

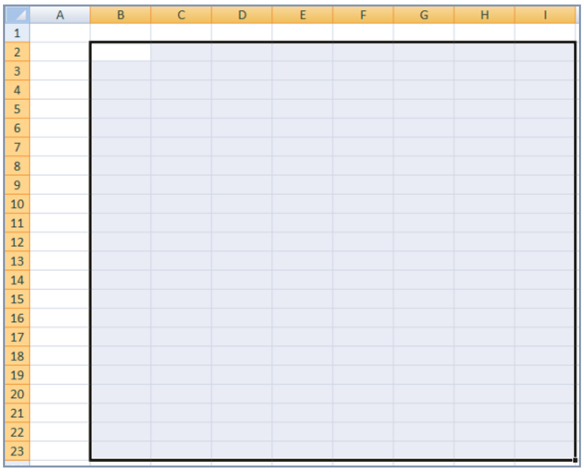


Figura 8.1.9: Tentativa 2 de Carolina, TB1.

Ao efetuar esta experiência, Carolina exclama:

Carolina: Professora, acho que descobri uma forma!

Verifico que vários alunos na turma estão com dificuldades na resolução do problema pelo que volto a ler o enunciado. Ainda não tinha terminado de ler e a Carolina interrompe, muito espontaneamente, dizendo bem alto.

Carolina: Já descobri! Sou um génio!

A aluna rapidamente insere uma nova coluna com os dias até 31 e uma linha com os meses até 12, hesita um pouco, mostrando-se indecisa, questiona-me acerca do seu procedimento.

Carolina: Oh professora, mas não podemos fazer uma tabela?
Professora: Podemos Carolina.
Carolina: Mas agora como é que eu vou fazer a tabela? Uma para os dias e outra para os meses?

Professora: Essa tem muito bom aspeto!... Lembras-te da fórmula que se coloca, que estava naquela ficha dos dados?

A aluna tenta multiplicar os números da coluna pelos da linha sem recorrer ao cifrão. De repente lembra-se que tem de colocar o cifrão, mas não se recorda ao certo da sintaxe que deve utilizar, pelo que a ajudo.

Professora: Mas está aqui a faltar um pormenor…
Carolina: Que é multiplicar por 12 e por 30. [A aluna coloca os números e soma os dois resultados] depois arrasto e vejo onde é que fica o 582.

Carolina arrasta a alça da célula com a fórmula completando a tabela e procede à formatação dos valores como mostro na figura 8.1.10.

Carolina: Agora vamos à procura do 582 [a aluna quer recorrer à formatação condicional] Professora onde é que está a formatação destas coisas?
Professora: Formatação automática, formatação condicional.
Carolina: E agora realçar regras? Ahhhhhhhh igual a 582. Já descobri, já descobri!

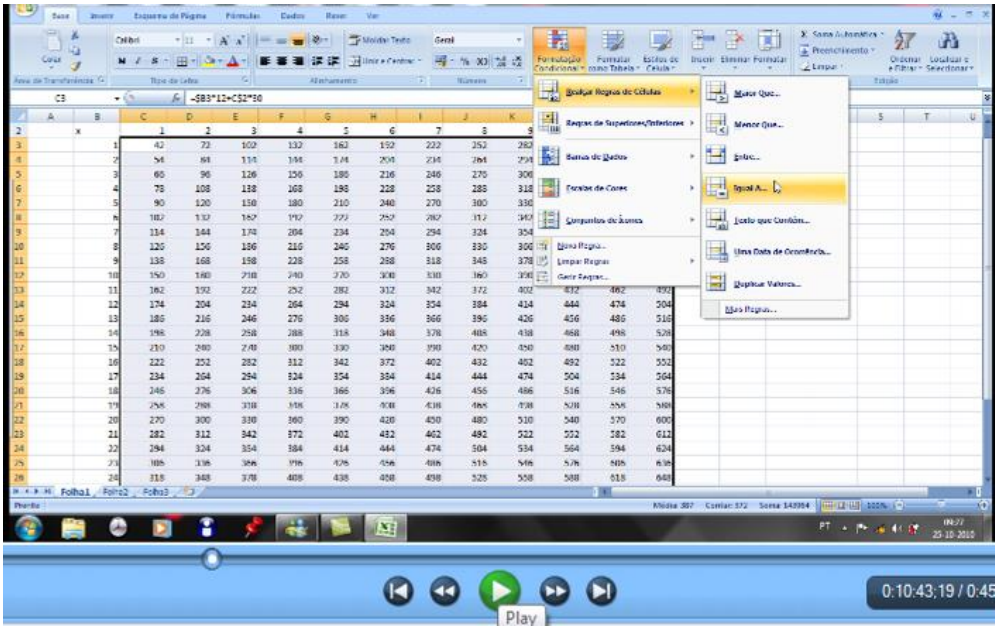


Figura 8.1.10: Formatação utilizada por Carolina, TB1.

Em seguida, a aluna vai colorir na tabela a célula corresponde o dia e o mês para cada valor 582, como mostro na figura 8.1.11.

Carolina: A amarelo, para se ver bem!

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		DIAS												
2	MÊS	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3		1	42	72	102	132	162	192	222	252	282	312	342	372
4		2	54	84	114	144	174	204	234	264	294	324	354	384
5		3	66	96	126	156	186	216	246	276	306	336	366	396
6		4	78	108	138	168	198	228	258	288	318	348	378	408
7		5	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360	390	420
8		6	102	132	162	192	222	252	282	312	342	372	402	432
9		7	114	144	174	204	234	264	294	324	354	384	414	444
10		8	126	156	186	216	246	276	306	336	366	396	426	456
11		9	138	168	198	228	258	288	318	348	378	408	438	468
12		10	150	180	210	240	270	300	330	360	390	420	450	480
13		11	162	192	222	252	282	312	342	372	402	432	462	492
14		12	174	204	234	264	294	324	354	384	414	444	474	504
15		13	186	216	246	276	306	336	366	396	426	456	486	516
16		14	198	228	258	288	318	348	378	408	438	468	498	528
17		15	210	240	270	300	330	360	390	420	450	480	510	540
18		16	222	252	282	312	342	372	402	432	462	492	522	552
19		17	234	264	294	324	354	384	414	444	474	504	534	564
20		18	246	276	306	336	366	396	426	456	486	516	546	576
21		19	258	288	318	348	378	408	438	468	498	528	558	588
22		20	270	300	330	360	390	420	450	480	510	540	570	600
23		21	282	312	342	372	402	432	462	492	522	552	582	612
24		22	294	324	354	384	414	444	474	504	534	564	594	624
25		23	306	336	366	396	426	456	486	516	546	576	606	636
26		24	318	348	378	408	438	468	498	528	558	588	618	648
27		25	330	360	390	420	450	480	510	540	570	600	630	660
28		26	342	372	402	432	462	492	522	552	582	612	642	672
29		27	354	384	414	444	474	504	534	564	594	624	654	684
30		28	366	396	426	456	486	516	546	576	606	636	666	696
31		29	378	408	438	468	498	528	558	588	618	648	678	708
32		30	390	420	450	480	510	540	570	600	630	660	690	720
33		31	402	432	462	492	522	552	582	612	642	672	702	732

	A	B	C	D	E	F
1		DIAS				
2	MÊS	x	1	2	3	4
3		1	=$B3*12+C$2*30	=$B3*12+D$2*30	=$B3*12+E$2*30	=$B3*12+F$2*30
4		2	=$B4*12+C$2*30	=$B4*12+D$2*30	=$B4*12+E$2*30	=$B4*12+F$2*30
5		3	=$B5*12+C$2*30	=$B5*12+D$2*30	=$B5*12+E$2*30	=$B5*12+F$2*30
6		4	=$B6*12+C$2*30	=$B6*12+D$2*30	=$B6*12+E$2*30	=$B6*12+F$2*30
7		5	=$B7*12+C$2*30	=$B7*12+D$2*30	=$B7*12+E$2*30	=$B7*12+F$2*30
8		6	=$B8*12+C$2*30	=$B8*12+D$2*30	=$B8*12+E$2*30	=$B8*12+F$2*30

Figura 8.1.11: Produção final de Carolina, TB1.

Na folha do enunciado, Carolina apresenta o significado das incógnitas, bem como a equação e as respetivas soluções. Na folha de cálculo a aluna explica o seu raciocínio, como mostro na figura 8.1.12.

! RACIOCINIO !
Temos várias hipoteses de resposta, de acordo com o meu
raciocinio expresso ao lado.
Enão na coluna na vertical, coloquei os dias do mês, logo
só temos até dia 31. Na linha na horizontal, coloquei o numero
dos meses do ano, que são apenas 12, logo só temos
numeros até 12.
Depois como a Sofia diz que temos de multiplicar o dia
pelo nrº 12 e o mês pelo nrº 30, vamos por isso mesmo
na fórmula em que ao mesmo tempo colocamos a soma
do resultado dessas multiplicações citadas no enunciado.
Depois dos possiveis rsultados, verificamos que temos
3 hipóteses de resposta. Sendo elas:
> Dia 21 de Novembro;
> Dia 26 de Setembro;
> Dia 31 de Julho.
Logo não descobrimos qual o dia em que a Sofia faz anos !

Figura 8.1.12: Explicação de Carolina na folha de cálculo, TB1.

A análise desta resolução na folha de cálculo mostra a presença da coação permanente da aluna com a folha de cálculo que a leva à construção da tabela de dupla entrada para obter a solução do problema. Esta tabela revela-se uma representação bastante eficaz para a resolução deste tipo de problema, contudo é uma representação complexa na medida é necessário ter em conta as duas variáveis em domínios distintos. Carolina mostrou alguma indecisão na sua elaboração o que advém da complexidade da relação entre as duas variáveis. No entanto, a tabela dá uma ideia muito clara da forma como a relação entre as duas variáveis varia e das várias soluções para o problema.

No momento de discussão Carolina apresenta a sua resolução e eu apelo à conversão da fórmula inserida na folha de cálculo para o SNA e à verificação das soluções possíveis no contexto do problema através da substituição numérica na condição no SNA, $12d + 30m = 582$. Por fim, formalizo e explico aos alunos a importância deste tipo de equações e a possibilidade de se obter mais do que uma solução, dado o contexto da situação. A conversão da fórmula inserida na folha de cálculo revela-se fundamental para a compreensão das equações com duas variáveis.

Na entrevista questiono a aluna acerca deste problema, mas Carolina já não tem presente a atividade envolvida, recordando apenas que sentiu inicialmente dificuldades na organização dos dados e na conclusão, afirmando que “Não sabíamos ao certo quando ela fazia anos, ela dizia o resultado 582 e havia muitos resultados 582” (E1). Quando a questiono acerca do que aprendeu com esta tarefa, Carolina responde “Como é que eu hei-de explicar? Que para, como é que se diz, é tipo a outra que para uma maneira diferente de dizer as coisas podemos ter vários resultados, várias hipóteses de resposta” (E1), referindo-se a um problema com várias soluções. Tento depois relembrá-la da formalização que foi feita.

> **Professora**: Nós depois até formalizamos com a equação correspondente…
> **Carolina**: Já não me lembro meu!
> **Professora**: Sim? E essa equação tinha essas 3 soluções possíveis. $12d + 30m = 582$ e então tínhamos diferentes valores para o dia e para o mês que davam este resultado.
> **Carolina**: Eu não me lembro muito disso…
> **Professora**: Foi a parte final, foi a conclusão da tarefa.
> **Carolina**: E depois deu muitas coisas diferentes, como?
> **Professora**: Deram estes 3. Lembras-te que dava 3 datas possíveis?
> **Carolina**: Ah dava pares ordenados!
> **Professora**: Exatamente!
> **Carolina**: Já me lembro…
> **Professora**: Ou seja se aqui o dia for 21 e o mês for 11 é uma solução possível.
> **Carolina**: Introdução aos sistemas de equações…

Carolina reconhece que esta tarefa serve de introdução ao estudo dos sistemas de equações.

A tarefa C-1 (Anexo 9) é um problema proposto para resolver com a folha de cálculo. Após ler o enunciado, Carolina converte a informação do enunciado para a folha de cálculo. Começa por nomear três colunas, que designa por: “Alice”, “Beta” e “Célia”; procedimento que corresponde à identificação das variáveis. De seguida, faz algumas experiências como mostro na figura 8.1.13.

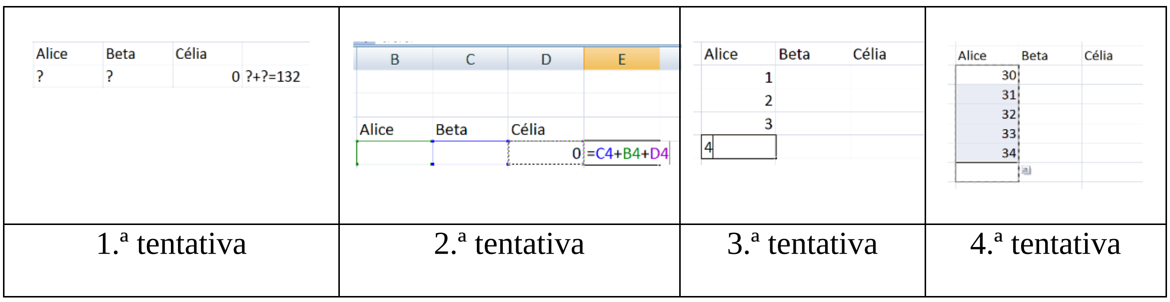


Figura 8.1.13: Experiências realizadas por Carolina, TC1.

Após a primeira tentativa, Carolina apaga tudo o que tinha feito, talvez pelo facto do feedback recebido do computador não ser satisfatório. Na realidade tal decorre do facto de a aluna inserir os “?” que não podem ser indexados como variáveis-células, sendo assumidos pela folha de cálculo como símbolos sem qualquer valor atribuído. Na segunda tentativa, já insere uma variável-célula o que lhe permite fazer experiências com os pesos das irmãs. Contudo, parece não ficar satisfeita com o que obtém e apaga de novo. Na terceira tentativa inicia a construção da sequência de números naturais na coluna “Alice”, neste procedimento a aluna assume esta coluna como uma variável. No seguimento da sua resolução, continua a refinar os seus procedimentos e decide começar a sequência a partir de 30, justificando “é óbvio que nenhuma delas pesaria menos de 30 kg”, na figura 8.1.14. A aluna começa também a dar atenção ao contexto do problema, percebendo assim que valores inferiores a 30 não fazem sentido para os pesos. De seguida a aluna, através de variáveis-coluna, estabelece uma relação de dependência entre peso da Alice e o peso Beta, bem como entre o peso da Beta e da Célia. Por fim, na coluna seguinte escreve a soma do peso da Célia e da Alice. Esta última coluna serve de controlo para encontrar a solução conforme Carolina explica na sua resolução, na figura 8.1.14.

Alice	Beta	Célia	Célia e Alice
30	102	49	79
31	101	50	81
32	100	51	83
33	99	52	85
34	98	53	87
57	75	76	133
58	74	77	135
59	73	78	137
60	72	79	139

Alice	Beta	Célia	Célia e Alice
30	=132-C4	=151-D4	=E4+C4
31	=132-C5	=151-D5	=E5+C5
32	=132-C6	=151-D6	=E6+C6
33	=132-C7	=151-D7	=E7+C7
34	=132-C8	=151-D8	=E8+C8
57	=132-C31	=151-D31	=E31+C31
58	=132-C32	=151-D32	=E32+C32
59	=132-C33	=151-D33	=E33+C33
60	=132-C34	=151-D34	=E34+C34

Resposta	A Alice pesa 59kgs, a Beta pesa 73 kgs e a Célia pesa 78kgs.
Racíocinio	A primeira colkuna representa o peso da alice. Com os numeros normais, acima de 30, porque é obvio que nenhuma
	delas pesaria menos de 30kgs.
	Na segunda coluna o peso da Beta está dependente do peso da Alice, pois no enunciad só nos dãoo os pesos são das 2 juntas.
	Então, coloquei os 132 kgs, menos o peso da Alice.
	Na terceira coluna o pesoda Alice está relacionado também com o peso da Beta. Pois no enunciado só nos dão
	os pesos das 2 irmãs juntas, pesando elas 151.
	Então, coloquei os 151 kgs menos o peso da Beta.
	Na quarta coluna e por fim coloquei os pesos da Célia e da Alice somados, e procurei os 137kgs, que nos dão no enunciado como
	sendo o peso das 2 irmãs.
	Foi então que encontrei por fim os pesos das três irmãs.

Figura 8.1.14: Produção final de Carolina, TC1.

Na entrevista retomo este problema e Carolina refere que “Este foi um bocadinho mais difícil, um bocadinho puxado” (E1). Quando procuro as razões dessa dificuldade, a aluna responde “Cada vez temos de fazer coisas mais difíceis, não é?” e consegue interpretar a sua resolução. Na discussão em grande grupo apelo à escrita no SNA das relações presentes no problema e, à medida que os alunos as vão enunciando, escrevo-as no quadro. Por fim, formalizo o termo “sistema de equações”. A resolução deste problema leva a aluna a estabelecer relações na folha de cálculo entre as variáveis presentes no enunciado do problema e, por fim, a converter essas representações para o SNA.

Na tarefa D-1 (Anexo 10) é composta por quatro situações, a aluna assim que recebe o enunciado começa a resolver a primeira. Durante a resolução da proposta, Carolina solicita uma calculadora para efetuar os cálculos. Na conversão da informação do enunciado para o SNA, Carolina designa duas letras como incógnitas e escreve duas equações do 1.º grau. Resolve a primeira equação e utiliza o valor descoberto, substituindo-o na segunda equação que resolve de seguida, conforme apresento na figura 8.1.15. Na resolução da equação $18+2s=34$ efetua as transformações no SNA: $18+2s=34 \Leftrightarrow s=34-18-2$.

A aluna, ao ouvir o resultado que os colegas estão a obter, solicita a minha presença pois o seu resultado é diferente daquele que os colegas obtiveram.

Carolina: *s* é igual a 34 menos 18 menos 2…
Professora: De onde é que foste tirar 2, este 2?
Carolina: Então o 2… Dos 2 coelhos…
Professora: Eu não percebo é porque é que fica a subtrair…
Carolina: Ah é a dividir, não é?

A aluna apaga e corrige, no entanto, mas não o faz corretamente.

Carolina: Então dá mal! [A aluna tinha escrito $18+2s=34 \Leftrightarrow s=\frac{34}{2}-18$]
Professora: Dá mal porquê?
Carolina: Ah tem de ser o 2 a dividir por estes todos [referindo-se a 34 - 18]
Professora: Quais são os passos que fazes nesta equação [$18+2s=34$]? O que é que tens de fazer?
Carolina: É pôr o 18 a subtrair.
Professora: E depois é que…
Carolina: Divido…

A aluna corrige novamente e obtém finalmente o valor correto. Carolina faz uso recorrentemente da calculadora para efetuar os cálculos evidenciando assim as suas dificuldades ao nível do cálculo. O excerto seguinte permite observar algumas dificuldades da aluna na resolução de equações, ao nível dos tratamentos no SNA.

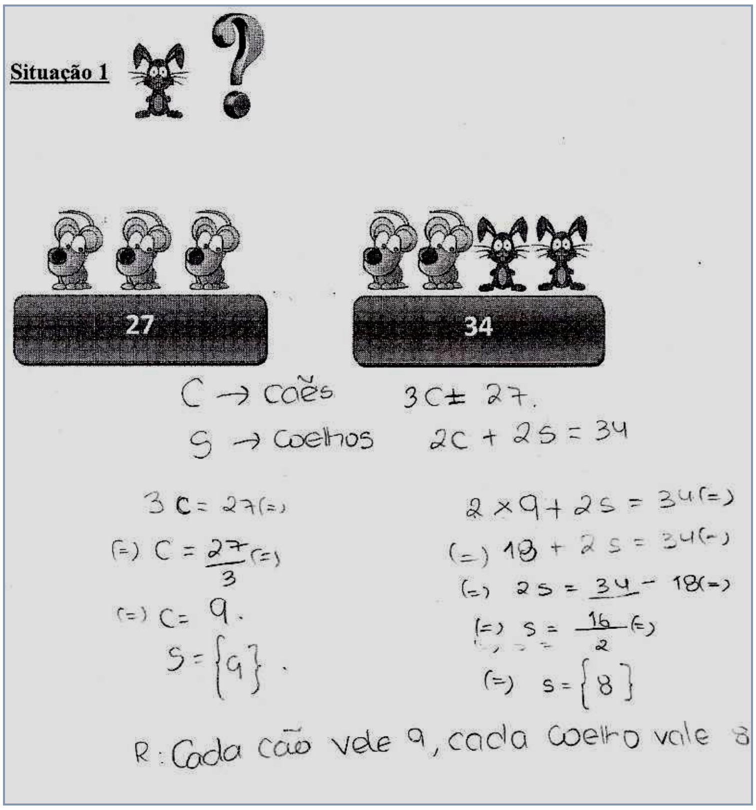


Figura 8.1.15: Produção final de Carolina, TD1-P1.

A aluna ao iniciar a resolução da segunda situação, segue um procedimento idêntico ao anterior, figura 8.1.16, começa por designar as incógnitas por *c* e *e* as escreve as duas equações, mas não continua a resolução parecendo não saber o que fazer em seguida.

Carolina: Este, é preciso um sistema de equações.

A aluna percebe que está perante um sistema e, em seguida, parece descobrir uma estratégia para obter a solução. Rapidamente delimita os dois conjuntos de animais e entusiasmada com o que acaba de descobrir, diz para Gabriela.

> **Carolina**: Gabriela, olha! Estes os três é 43, 43 mais 43 e depois 93 menos estes, vai dar o crocodilo! Vês como eu sou esperta! Já sou mais esperta do que tu!

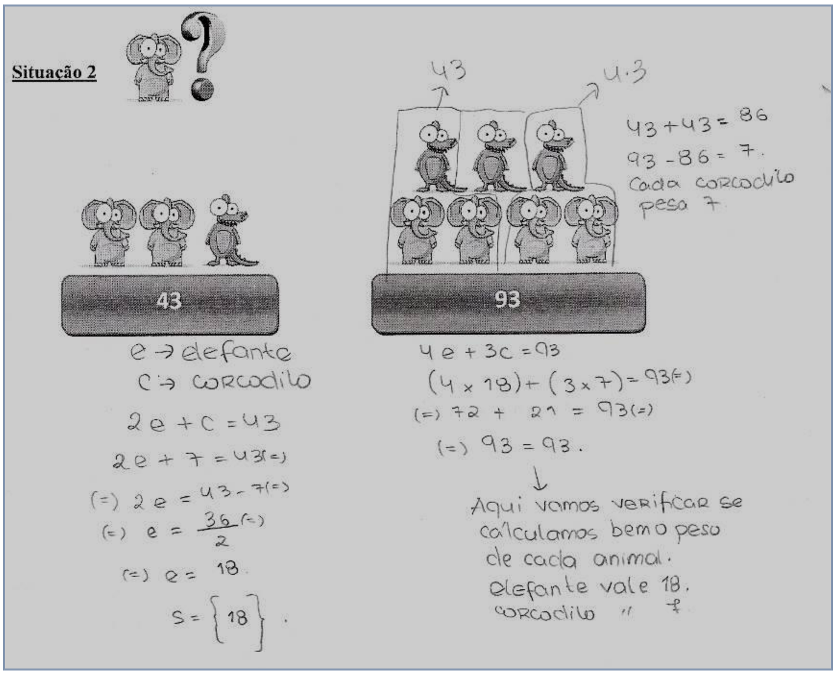


Figura 8.1.16: Produção final de Carolina para a TD1-P2.

A aluna descobre o valor do crocodilo na segunda imagem e substitui esse valor na equação da primeira imagem e resolve-a. Carolina decide ainda verificar se os valores encontrados estão corretos substituindo-os na segunda equação, como explica na resolução apresentada. Depois da rapidez e do sucesso na resolução desta situação, Carolina fica entusiasmada e avança de imediato para a terceira situação, procedendo da mesma forma, delineia na segunda e terceiras figuras um conjunto de animais idêntico ao da primeira figura. Designa as incógnitas e escreve as equações para cada uma das imagens. Através de um cálculo auxiliar, encontra o valor de uma lagarta substituindo o valor do grupo de animais. Em seguida, substitui o valor encontrado na equação relativa à primeira figura e obtém o valor de uma abelha. Segue para a terceira equação, recorrendo à mesma estratégia, substitui o valor da lagarta e da abelha para obter o valor do inseto. Por fim, verifica que a segunda equação é válida para os valores encontrados da lagarta e da abelha, como mostro na figura 8.1.17.

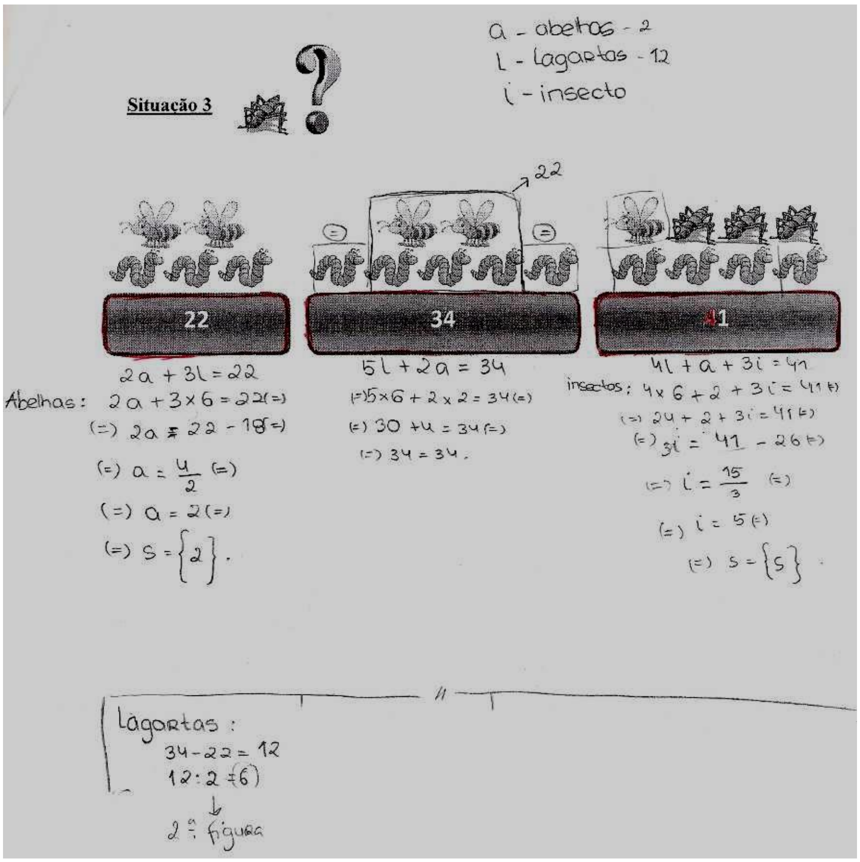


Figura 8.1.17: Produção final de Carolina para a TD1-P3.

Na quarta situação, resolvida na aula seguinte, a aluna já não consegue com a mesma rapidez estabelecer a relação entre os valores dos animais, pelo que utiliza uma estratégia diferente da utilizada nos casos anteriores, como mostro na figura 8.1.18.

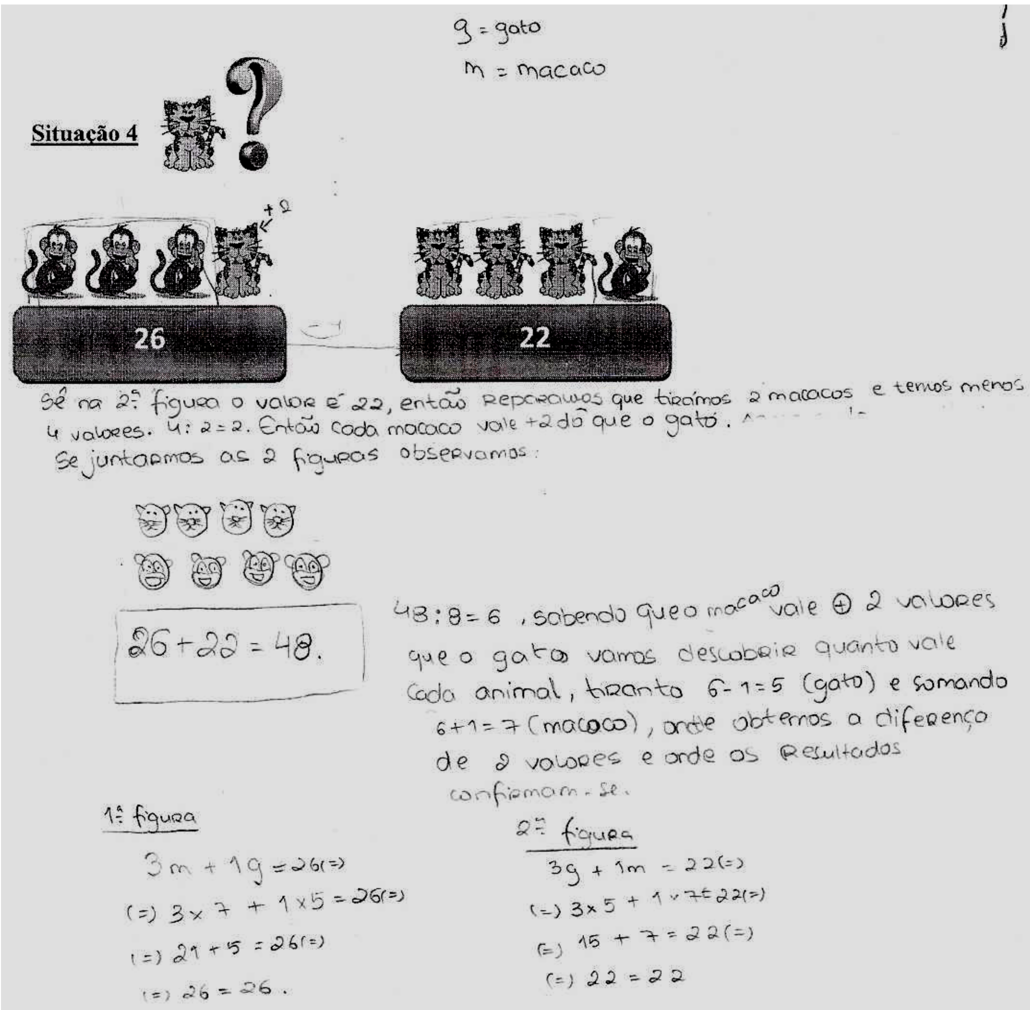


Figura 8.1.18: Produção final de Carolina para a TD1-P4.

Na discussão da tarefa, procuro que sejam apresentadas e discutidas diferentes resoluções, partindo das mais simples para as mais complexas em termos de utilização da linguagem algébrica. Carolina é uma aluna que privilegia as representações no SNA e a única que resolve a última situação de uma forma distinta dos seus colegas. A aluna começa por verificar que a diferença entre o valor de cada macaco e o valor de cada gato é de 2 unidades. Depois, soma o valor dos dois grupos de animais obtendo 48 para o valor de quatro gatos e de quatro macacos. Divide, em seguida, por 8 obtendo o valor médio de cada animal. Dado que a diferença é 2, a aluna soma e subtrai uma unidade ao valor médio obtendo o valor do macaco e o valor do gato. Por fim, escreve as duas equações no SNA correspondentes a cada uma das imagens apresentadas e verifica a validade da solução encontrada.

Na aula, Carolina apresenta aos colegas a sua resolução e explica todos os procedimentos efetuados (Fig. 8.1.19).

> **Carolina**: Aqui temos 3 macacos e aqui temos 3 gatos e um macaco. Aqui tirámos estes macacos mas ficámos com este, não é? Não é?
> **Vários alunos**: Sim.
> **Carolina**: Então quer dizer que aqui está uma diferença de 4, então quer dizer que cada macaquinho é mais 2 do que os gatos.
> **Patrícia**: Ya.
> **Professora**: E depois a partir daí? Já chegámos à conclusão que o macaco tem que valer mais 2 do que o gato. E a partir daqui como fizeste?
> **Carolina**: Estes são os gatos… estes são os macacos.
> **Tatiana**: Eles todos juntos pesam o quê?
> **Carolina**: Pesam os 26 mais os 22 que é 48.
> **Tatiana**: Ya!
> **Carolina**: Então eu depois dividi os 48 pelos 8 animais, não é?… que dá 6, quer dizer se eles fossem, valessem todos a mesma coisa, valiam 6 cada um mas como a gente sabe os macacos pesam mais 2 então tiramos 1 dos 6 que é o valor dos gatos e fica 5 e somamos 1 aos 6 que é os macacos e fica 7 que é aquilo que vocês já disseram no início e depois a gente vai escrever as expressões… As….
> **Gabriela**: O sistema de equações!
> **Carolina**: O sistema de equações e verificamos que a resposta está certa.

Figura 8.1.19: Carolina a explicar aos colegas.

A explicação de Carolina é decisiva para a maioria dos alunos compreenderem o método que ela utiliza. Aproveitei a explicação da aluna como suporte para a formalização do método de adição ordenada, com recurso a representações no SNA.

> **Professora**: A estratégia que a Carolina usou é uma estratégia muito interessante, vocês reparem que ela juntou tudo, ela juntou os macacos e os gatos todos, então no fundo o que é que ela fez com estas duas equações?
> **Alguns alunos**: Juntou.
> **Professora**: Se eu juntar estas duas equações o que vai acontecer?
> **Carolina**: Dá 4*g* mais 4*m*.

Escrevo no quadro $\begin{array}{l} 3m+g=26 \\ \underline{3g+m=22} \end{array}$.

Tatiana: Isso foi o que a Carolina fez!
Alguns alunos: 4*g* mais 4*m*.
Gabriela: 48.
Tatiana: É igual ao que a Carolina fez!

Este excerto da discussão permite identificar a correspondência que Tatiana estabelece entre a resolução apresentada pela Carolina, sem recurso às equações, e o que eu escrevo no quadro. A partir deste momento, os alunos chegam facilmente à soma do valor de um gato e de um macaco e através da substituição numa das equações encontraram o valor pedido.

Professora: Isto que acabámos de fazer tem um nome, este método em que se somam equações chama-se método da adição ordenada.

A aluna na entrevista (E1) confessa que esta foi a tarefa que mais gostou de resolver no estudo do tópico.

Professora: Gostaste desta tarefa?
Carolina: Sim, porque esta foi engraçada.
Professora: Porquê?
Carolina: Porque era com animais, foi das mais engraçadas e eu não estava a perceber muito.
Professora: O que é que não estavas a perceber muito?
Carolina: O que é que a professora queria, isto parecia ser da primária… Estas coisas, mas depois era os sistemas! Eu fiz logo! Consegui… A última é que deu mais trabalho.
Professora: Lembras-te da última?
Carolina: Pois é, eu pus tudo junto, mas agora já sei como é que é…
Professora: Mas o teres feito tudo junto facilitou-te para tirares a conclusão.
Carolina: Sim.
Professora: Depois até foste explicar ao quadro aos teus colegas, lembras-te?
Carolina: Lembro, lembro. Eu vi que aqui estava 3 gatos e aqui estava 3 macacos e depois aqui estava um macaco e aqui um gato e depois se a gente juntasse todos ficávamos com igual e depois fazíamos este mais este. Este foi bué fixe. Mas ao princípio não estava a ver…
Professora: Para que é que serviu esta ficha?
Carolina: Para a professora ver se a gente conseguia fazer sozinhos mesmo sem a professora explicar os sis… Não é bem sistemas…Era para fazermos as duas equações…
Professora: Tu aqui ainda fizeste… Digamos em separado.
Carolina: Pois a gente ainda não sabia que era para pôr as chavetas [risos] que era a mesma coisa.
Professora: Mas isto que tu fizeste já era em si um sistema mesmo que tenhas resolvido as equações em separado.

Esta foi uma tarefa marcante para a aluna que ela reconhece como muito importante para a aprendizagem do método de substituição para a resolução de sistemas de equações. Acresce ainda o facto de esta tarefa constituir um importante suporte para a formalização do método de adição ordenada, num momento em que não estava previsto ser trabalhado e formalizado.

Na tarefa E-1 (Anexo 11), Carolina usa o mesmo ficheiro de Excel com três folhas, uma para cada situação. Em todas as situações, a aluna converte a informação do enunciado para a folha de cálculo, nomeando várias colunas, uma para o tempo e outras duas para as distâncias percorridas pelos cavalos. Recorre à construção de sequências numéricas com incremento constante e à geração de variáveis-coluna. A aluna converte depois a tabela para a representação gráfica na folha de cálculo. Para a primeira situação a aluna efetua as produções que mostro nas figuras 8.1.20 e 8.1.21.

Tempo (s)	Russo	Relinchão
1	140	0
2	151	14
3	162	28
4	173	42
5	184	56
6	195	70
47	646	644
48	657	658
49	668	672
50	679	686

Tem	Russo	Relinchã
1	140	0
2	=B3+11	=C3+14
3	=B4+11	=C4+14
4	=B5+11	=C5+14
5	=B6+11	=C6+14
6	=B7+11	=C7+14
47	=B48+11	=C48+14
48	=B49+11	=C49+14
49	=B50+11	=C50+14
50	=B51+11	=C51+14

Figura 8.1.20: Produção de Carolina, TE1-S1.

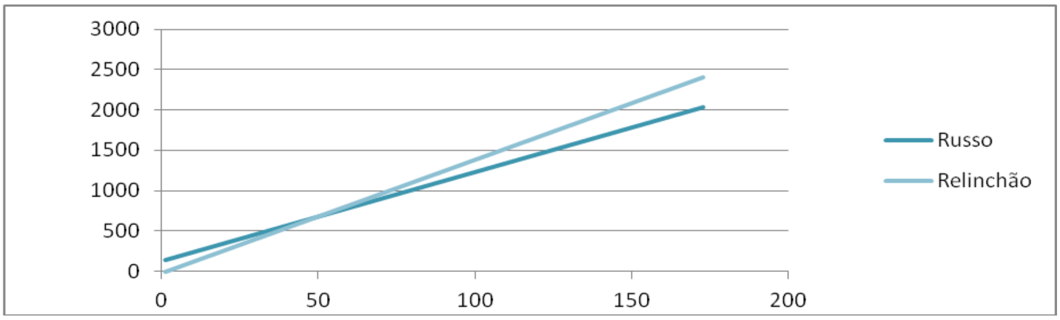


Figura 8.1.21: Representação gráfica de Carolina, TE1-S1.

Relativamente a esta tarefa a aluna na entrevista (E1) revê o trabalho que realizou.

> **Carolina**: Este é o tempo, não é? E este é os metros que os cavalos percorrem, este é o Relinchão e este é o Russo. O Russo vai… Isto é os metros, não é?… O Russo começa sempre do… Do quantos? Dos 140, dos 140…. Então isto é os 140 e o Relinchão começa do zero, mas o Relinchão como corre mais ainda consegue passar à frente do Russo, mesmo o Russo tendo um bónus de vantagem.

A aluna consegue assim fazer a interpretação da situação analisada em primeiro lugar na sala de aula. Relativamente à segunda situação, Carolina apresenta as produções que mostro nas figuras 8.1.22 e 8.1.23.

Tempo	Russo	Relinchão
1	140	0
2	154	14
3	168	28
4	182	42
5	196	56
160	2366	2226
161	2380	2240
162	2394	2254
163	2408	2268

Tempo	Russo	Relinchão
1	140	0
2	=B3+14	=C3+14
3	=B4+14	=C4+14
4	=B5+14	=C5+14
5	=B6+14	=C6+14
160	=B161+14	=C161+14
161	=B162+14	=C162+14
162	=B163+14	=C163+14
163	=B164+14	=C164+14

Figura 8.1.22: Produção de Carolina, TE1-S2.

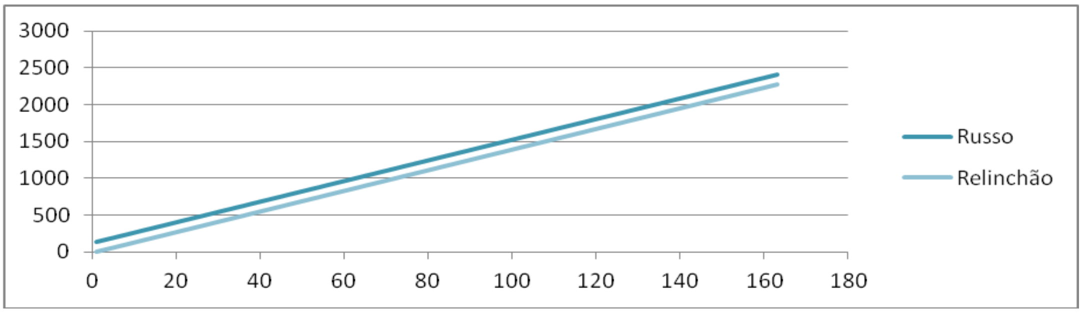


Figura 8.1.23: Representação gráfica de Carolina, TE1-S2.

À semelhança da primeira situação, procuro na entrevista que a aluna faça novamente a interpretação das suas produções.

> **Carolina**: Se eles corressem sempre à mesma velocidade, que o Russo ia sempre à frente porque já tinha aquele bónus em avanço de 140 metros do Relinchão.
> **Professora**: E então o graficamente o que se obtinha era…
> **Carolina**: Um sistema indeterminado.

Por último, na terceira situação, a aluna apresenta as produções que mostro nas figuras 8.1.24 e 8.1.25.

Tempo	Russo	Relinchão
1	0	0
2	11	11
3	22	22
4	33	33
5	44	44
216	2365	2365
217	2376	2376
218	2387	2387
219	2398	2398
220	2409	2409

Temp	Russo	Relinchã
1	0	0
2	=C3+11	=D3+11
3	=C4+11	=D4+11
4	=C5+11	=D5+11
5	=C6+11	=D6+11
216	=C217+11	=D217+11
217	=C218+11	=D218+11
218	=C219+11	=D219+11
219	=C220+11	=D220+11
220	=C221+11	=D221+11

Figura 8.1.24: Produção de Carolina, TE1-S3.

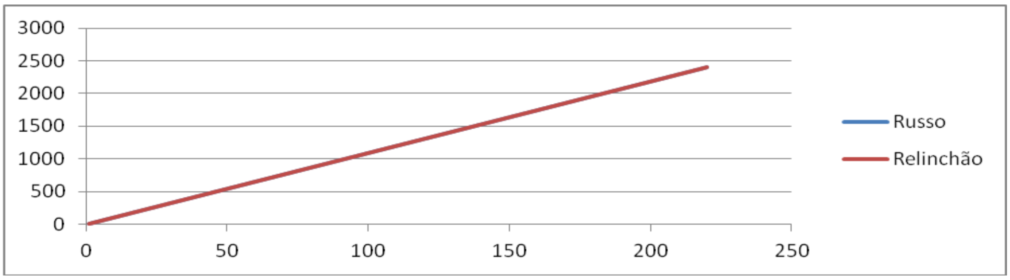


Figura 8.1.25: Representação gráfica de Carolina, TE1-S3.

Na entrevista quando apresento estas imagens das produções, Carolina antes de fazer a respetiva interpretação, com a espontaneidade que a caracteriza afirma que na aula não percebeu o propósito da tarefa.

Carolina: Agora é que eu estou a perceber porque é que a professora fez isto! … Este é que é o impossível, este é o indeterminado, eles vão sempre ao mesmo nível e cortaram a meta juntos e tudo!
Professora: Estavas-me a dizer… Agora é que eu estou a perceber, explica-me lá essa tua afirmação.
Carolina: Porque isto é os 3 sistemas!
Professora: Quais 3 sistemas?
Carolina: Que a professora ensinou, mesmo sem a gente saber, agora é que eu vi... Já não me lembrava disto, isto é o determinado porque… Isto é o ponto em que eles se cruzam, aqui as coordenadas, este é o indeterminado porque as retas nunca se cruzam, não! Este é o impossível porque as retas nunca se cruzam e este é o indeterminado porque todos os pontos da reta são soluções da equação.
Professora: Mas, quando a gente fez aqui esta tarefa, no final da aula, a síntese da tarefa foi precisamente isso, não foi?
Carolina: Eu não me lembrava professora, já não me lembro!
Professora: Não tomaste muita atenção?
Carolina: Não professora, já não me lembro.
Professora: Mas tu agora ao veres isto associaste à classificação de sistemas e na atura se calhar…
Carolina: Eu não me lembro, mas agora é que eu estou me a lembrar mais ou menos, sim que a professora sim tinha dito.

Por fim questiono a aluna acerca das aprendizagens que fez com esta tarefa.

Carolina: Aprendemos gráficos [risos] que representam as diferentes equações, os diferentes… como é que se diz? … Tipos de sistemas de equações.

Na entrevista, a aluna consegue voltar a descrever as três situações. No entanto, é apenas durante a entrevista que a aluna percebe qual foi a minha intenção ao propor esta tarefa. Reconhecendo que era levar os alunos a compreenderem a classificação de sistemas.

Relativamente à Tarefa F-1 (Anexo 12), Carolina não a resolve, apenas assiste ao trabalho dos seus colegas, mostrando-se pouco participativa na discussão e síntese na aula, figura 8.1.26.

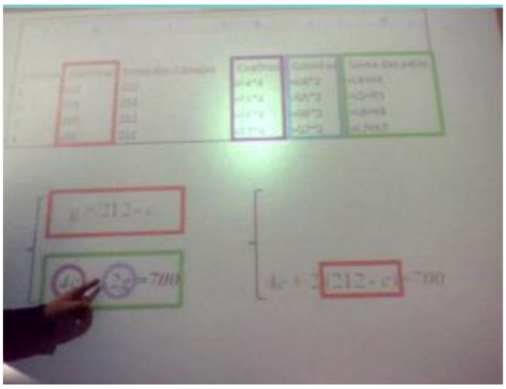


Figura 8.1.26: Conversão da folha de cálculo para o SNA.

Ao retomar esta questão, na entrevista, mostro-lhe a resolução de Gabriela, uma das que foi discutida na sala de aula. A aluna tenta interpretar a resolução de Gabriela.

> **Carolina**: Sim, sim porque se a soma das cabeças é 212… Ela não precisava de ter feito isto aqui… Se a soma das cabeças é 212 então os coelhos é 1, 2, 3, 4, 5, nan nana nam … e as galinhas é os 212 menos os coelhos, não é? Mas já nas patas… Se as galinhas têm 2 os coelhos têm 4 patas, por isso ela começou pelo 4, 8, 12, 16, 20… E as galinhas têm 2 então é os 426 menos 2, não é? 426 menos os 4... Coelhos…

Carolina interpreta corretamente a resolução de Gabriela, mas refere que teria seguido um procedimento um pouco diferente.

> **Professora**: Mas ela aqui nas galinhas pôs *estas* vezes 2, não é? Ela tem aqui o número de animais e aqui tem o respetivo número de patas.
> **Carolina**: Ah, sim! Mas se fosse eu, acho que relacionava as duas colunas também outra vez.
> **Professora**: É indiferente… aqui era o total…
> **Carolina**: Ah sim!
> **Professora**: Percebeste?
> **Carolina**: Sim.

Procuro perceber se a aluna compreendeu a relação entre o trabalho realizado na folha de cálculo e a escrita do sistema de equações.

> **Professora**: Depois eu tentei levar-vos à tradução deste trabalho que a Gabriela fez no Excel para o sistema. Consegues identificar o que está feito no Excel com o sistema de equações?
> **Carolina**: Então é as fórmulas que a gente mete no Excel!
> **Professora**: Esta coluna das galinhas tal como tu tinhas dito ainda há pouco, como é que ela pode calcular o número de galinhas?
> **Carolina**: 212 menos o número de coelhos.
> **Professora**: Corresponde a esta equação, isto é claro para ti?
> **Carolina**: Sim.
> **Professora**: E a questão das patas?
> **Carolina**: 4 c mais… 4 c, porquê 4 vezes? É sempre vezes 4 … Porque os coelhos têm 4 patas mais 2 patas das galinhas e são 700, sim.
> **Professora**: Percebes? Portanto esta condição é este trabalho aqui…. Portanto 4 c é a coluna das patas dos coelhos, 2 g a coluna.
> **Carolina**: Das patas das galinhas.
> **Professora**: E o total que se procura nessa coluna, seja igual a 700 não é? Quando é que encontram o 700?... Encontram neste caso o número de galinhas e depois o número de coelhos.
> **Carolina**: Sim.

A aluna dá assim evidências de compreender a correspondência que faz entre as colunas na folha de cálculo e as equações que estão escritas no sistema de equações.

> **Professora**: Tu na sala de aula percebeste esta relação que existe entre o, neste caso a resolução deste problema e o respetivo sistema de equações?
> **Carolina**: Sim, na altura percebi.
> **Professora**: Isto foi a primeira aula em que nós fizemos a resolução e sistemas pelo método de substituição, lembras-te?
> **Carolina**: Sim.
> **Professora**: E percebeste logo o método de substituição?
> **Carolina**: Não foi difícil, eu não tive foi com muita atenção a essa aula, foi por isso, mas depois com dedicação tudo se faz.
> **Professora**: Achas que foi útil ter explicado a partir do Excel a resolução de sistemas pelo método de substituição? Ou não? Seria indiferente ter explicado de outra maneira?
> **Carolina**: Eu entendo de todas as maneiras mas não sei, eu entendo…

Na resolução do primeiro problema da tarefa G-1 (Anexo 13), Carolina não mostra dificuldades na conversão do enunciado para o SNA (escrita de sistema de equações) e colabora na resolução do sistema no quadro, dizendo em simultâneo com os restantes colegas quais os procedimentos a adotar. Após a resolução deste primeiro problema alerto os alunos para o facto de ser necessário ter alguma fluência na utilização do método de substituição e que o tempo de aula não é suficiente.

> **Professora**: A resolução dos sistemas pelo método de substituição é muito importante e requer algum treino, como não temos tempo nas aulas, parte deste treino tem de ser feito em casa.

Como alguns alunos ainda revelam dificuldades na resolução dos sistemas pelo método de substituição, interrompo a resolução da tarefa e proponho a resolução de um sistema mais simples $\begin{cases} x - y = 1 \\ y + x = 6 \end{cases}$ referindo que este é um dos "mais simples, mais elementares". Relembro depois aos alunos alguns aspetos a ter em conta.

> **Professora**: Aqui são vocês quem escolhe a equação por onde vão começar a resolver o sistema… A equação e a incógnita. É óbvio que devem escolher de tal forma que essa escolha vos vá facilitar na resolução do sistema.
> **Carolina e Vitória**: x=1+y
> **Professora**: E agora?
> **Alguns alunos**: Vamos substituir.
> **Professora**: Como é isto [apontando para a equação x=1+y] que vamos substituir, habitualmente coloco aqui um retângulo para não me perder porque depois vou voltar aqui para substituir o valor do y que encontrei. Isto também serve de orientação para o professor que está a corrigir saber o que é que o aluno substituiu.

Os alunos vão dizendo os passos seguintes até chegar ao valor de y.

> **Professora**: Sei que o y é 2,5 e agora já sei onde tenho de ir. Às vezes há sistemas que são muito longos e a gente perde-se ali um bocadinho à procura …. Vou onde tenho o retângulo.
> **Carolina**: x é 3,5.
> **Professora**: No último passo do sistema deve vir sempre a solução, o valor das duas incógnitas. Neste caso a solução era qual?
> **Gabriela**: (3,5; 2,5).
> **Professora**: Já sabem que este é dos mais simples, mas o grau de complexidade vai aumentando.

Proponho depois a resolução de outro sistema e alerto os alunos que, por vezes, é necessário escolher convenientemente por qual das equações e incógnita devemos iniciar a resolução do sistema.

> **Professora**: Nos sistemas que resolvemos anteriormente no das galinhas e coelhos e no de ainda agora havia coeficientes das incógnitas que eram 1, então era fácil nós isolarmos uma das incógnitas numa das equações. Aqui temos como incógnitas x e y. É óbvio que só podemos substituir na outra equação quando tivermos x ou y isolado. Aqui

> temos coeficiente, 4, e 2 e aqui 2 e 5. Nós podemos escolher qualquer uma das equações e começar. Mas eu devo ser perspicaz na minha escolha e escolher a que me dá mais jeito. Reparem que esta equação tem os coeficientes pares. Se eu escolher a primeira equação para começar a trabalhar e escolher a incógnita *y* eu já sei que vou ter qualquer coisa a dividir por 2, pois 2 é o coeficiente do *y*. Então vou escolher esta equação e resolvo-a em ordem a *y*, vou isolar o *y* num dos membros, tanto faz ser no primeiro ou no segundo membro.

Esta interrupção na resolução da tarefa é necessária para alertar os alunos para alguns aspetos importantes que podem facilitar a utilização do método de substituição. A continuação da resolução da tarefa é intercalada pela discussão das várias questões. Uma das questões a que Carolina não responde é a 6.2 que tem como objetivo verificar se um dado par ordenado é, ou não, solução de um sistema. Na entrevista questiono-a acerca deste tipo de exercício.

> **Carolina**: Podemos verificar o par ordenado resolvendo a equação, o sistema.
> **Professora**: Poder podes mas não é preciso, é mais difícil!
> **Carolina**: Não acho! … Ah pois também podemos logo substituir e ver.

Acerca das aprendizagens que Carolina fez com esta tarefa, a aluna refere que "Já sabia isso praticamente, para mim foi mais treinar as equações [sistemas] que é preciso treinar muito, mas já é fácil, muito fácil!". Questiono a aluna se é necessário muito treino para aprender a resolver os sistemas e a aluna refere "eu não fiz muito treino, mas é, se a gente compreender e tomar atenção é fácil". Durante a resolução desta tarefa verifico que Carolina tem preferência pelo método de substituição em detrimento do método gráfico de resolução de sistemas a que só recorre se for pedido. Relativamente à classificação de sistemas, a aluna consegue fazê-lo a partir das suas equações ou da representação gráfica.

Na tarefa H-1 (Anexo 14), resolvida em grupo, Carolina e as suas colegas começam por fazer a substituição do parâmetro por valores numéricos inteiros e apresentam a resposta da figura 8.1.27.

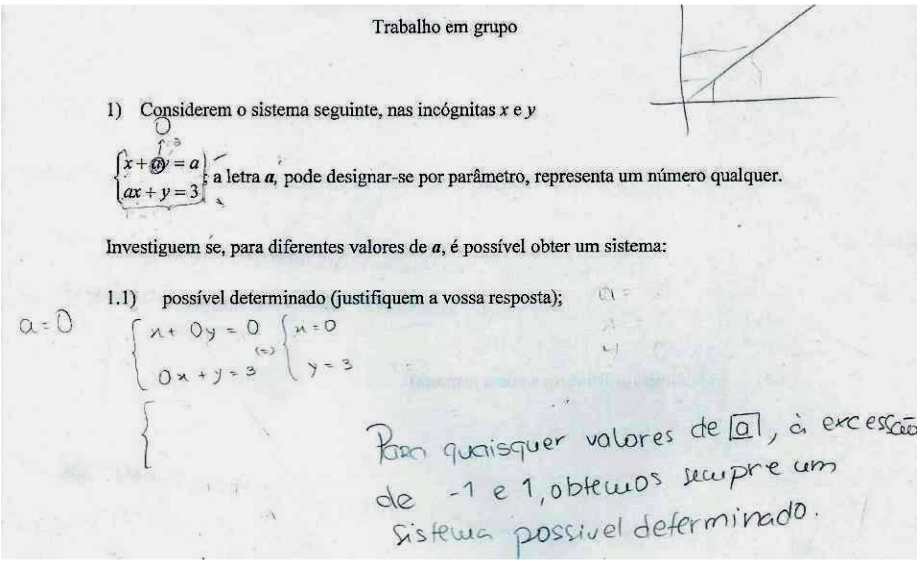
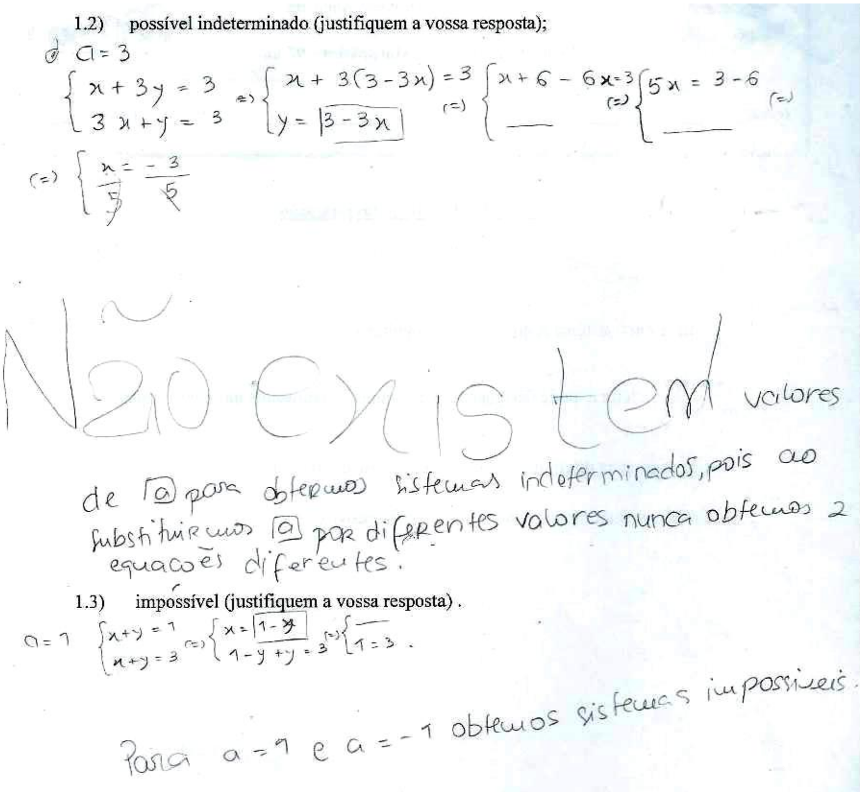


Figura 8.1.27: Produção de Carolina, TH1-Q1.1.

As alunas recorrem maioritariamente a representações no SNA e a tratamentos neste sistema de notação para tirarem conclusões. Carolina faz um esboço de uma representação gráfica, aparentemente para simular a representação gráfica de alguma das equações. Na entrevista retomo esta tarefa que a aluna confessa que teve dificuldade em a resolver.

Carolina: Esta foi um bocado difícil.
Professora: Porquê?
Carolina: Sei lá porque a gente estava a fazer com o 1, com o 2, com o 3, com o 4, ai mãe…,
Professora: Estavam a resolver cada um destes sistemas não era?
Carolina: Cada um? Era sempre o mesmo sistema.
Professora: Sim mas quando tu substituis por 1, por 2, por 3, por 4 vais obtendo sistemas diferentes porque vai mudando ali aquele número [parâmetro].
Carolina: São diferentes… Sim mas sempre com a mesma maneira de representar… Então e fizemos com esse sistema conseguimos fazer os vários sistemas.
Professora: Foi difícil porquê?
Carolina: Foi um bocado... Porque há tantos números, havia muitos números para o possível determinado, à exceção de -1 e 1.

Relativamente à segunda parte da tarefa, Carolina e suas colegas apresentam a produção da figura 8.1.28.



1.2) possível indeterminado (justifiquem a vossa resposta);

$a = 3$

$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3(3-3x) = 3 \\ y = \boxed{3-3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 6 - 6x = 3 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 3 - 6 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{-3}{5} \end{cases}$

Não existem valores de $\boxed{a}$ para obtermos sistemas indeterminados, pois ao substituirmos $\boxed{a}$ por diferentes valores nunca obtemos 2 equações diferentes.

1.3) impossível (justifiquem a vossa resposta).

$a = 1 \quad \begin{cases} x+y = 1 \\ x+y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \boxed{1-y} \\ 1-y+y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 1 = 3 \end{cases}.$

Para $a = 1$ e $a = -1$ obtemos sistemas impossíveis.

Figura 8.1.28: Produção de Carolina, TH1-Q1.2 e Q1.3.

As alunas recorrem maioritariamente a tratamentos no SNA e à linguagem natural para apresentarem as suas repostas.

Relativamente às aprendizagens com esta tarefa, Carolina refere que “Se calhar num sistema pode haver vários tipos… Podemos substituir e ver vários tipos”. Referindo-se à substituição do parâmetro para encontrar sistemas com diferentes classificações.

Na segunda parte entrevista realizada (E1) realizada após o estudo do tópico proponho a resolução de algumas tarefas. Ao ler o enunciado do primeiro problema Carolina sorri

> **Carolina**: Ai mãe!… Tem 20 perguntas…. Vou ver se consigo fazer…. Vou ver se consigo fazer primeiro aqui …

A aluna está a referir-se à folha de cálculo e a sua reação é fazer a primeira tentativa de resolução na folha de cálculo. Assim, começa por abrir uma folha e nomeia duas colunas "Multipla" e "verd falso". Este procedimento corresponde à identificação das variáveis presentes no problema.

Carolina: Agora vou pôr as pontuações, é melhor! Ai mãe… As múltiplas valem 11…

Carolina insere depois os múltiplos de 11 na coluna "Multipla", através da seleção e arrastamento da alça de uma célula, deste modo o número de questões de escolha múltipla surge como variável independente, embora a aluna não explicite a sua ideia. Em seguida procura preencher a coluna "verd falso" mas mostra alguma hesitação.

Carolina: Esta agora é igual [insere "="] a 100 menos… não pode ser 100 menos 11… Não pode, espere aí…
Professora: Porque é que não pode?
Carolina: Se for 100 menos 11 [insere "100-B3"] dá 89, então tínhamos 89 pontos ao total de verdadeiro ou falso …. É?
Professora: Tu é que tens de saber…
Carolina: Não, isto não está bem, isto não está bem…. Só…. Ai, ai…

Opta por arrastar a célula com a fórmula "=100- B3" e observa os valores que mostro na figura 8.1.29.

Multipla	Verd/Fal
11	89
22	78
33	67
44	56
55	45
66	34
77	23
88	12
99	1
110	-10
121	-21
132	-32
143	-43
154	-54
165	-65
176	-76
187	-87
198	-98
209	-109
220	-120

Figura 8.1.29: Produção de Carolina, E1-P1.

Carolina ao observar números negativos apaga os valores correspondentes nas duas colunas onde isso acontece.

Carolina: Então só se nós depois fizéssemos 89 a dividir por 3.
Professora: Para quê?
Carolina: Para ver quantas de verdadeiro falso havia…

Na célula ao lado a aluna insere "=c3/3", obtendo um número não inteiro.

Carolina: [risos] Isto está mal… Isto está mal…

Apesar de mostrar alguma desconfiança em relação ao processo que está a seguir, não desiste e prossegue arrastando a alça da célula com a fórmula e obtém alguns valores inteiros, como mostro na figura 8.1.30.

Multipla	Verd/Fal	
11	89	29,66667
22	78	26
33	67	22,33333
44	56	18,66667
55	45	15
66	34	11,33333
77	23	7,666667
88	12	4
99	1	0,333333

Figura 8.1.30: Produção de Carolina, E1-P1.

Carolina: Só estes é que são. … E depois?

A aluna volta a ler o enunciado e introduz na coluna A, uma sequência de números naturais até 9 e acrescenta uma nova coluna como mostra a figura 8.1.31.

	Multipla	Verd/Fal	
1	11	89	29,66667
2	22	78	26
3	33	67	22,33333
4	44	56	18,66667
5	55	45	15
6	66	34	11,33333
7	77	23	7,666667
8	88	12	4
9	99	1	0,333333

Figura 8.1.31: Produção de Carolina, E1-P1.

Carolina: 1, 2, 3, 4, 5… Faz de conta que isto é as perguntas da escolha múltipla, não é? .... Aqui dá 5 de verdadeiro falso e aqui dá 15 …. Dá 20! É assim professora? [risos]
Professora: Tens de confiar ou não na tua resposta…
Carolina: Ai, meu Deus do céu, mas isto é os pontos… Não é? Não tem nada a ver com as perguntas… Já me estou a confundir…
Professora: Calma… Quais são as condições do problema?

A aluna volta a ler mais uma vez o enunciado do problema procurando encontrar mais alguma pista.

Carolina: Múltiplas eram 5 e de verdadeiro falso eram 15… 20… A pontuação total das questões é sempre 100 pontos.
Professora: 100 pontos…
Carolina: 55 mais 45 dá 100…. Então está bem! [risos]
Professora: Estás convicta?
Carolina: Estou!

A aluna utilizando o realce de células, assinala a amarelo a linha onde se encontrar a solução e acrescenta: “para se ver bem” (figura 8.1.32).

	Multipla	Verd./Fal.	
1	11	89	29,66667
2	22	78	26
3	33	67	22,33333
4	44	56	18,66667
5	55	45	15
6	66	34	11,33333
7	77	23	7,666667
8	88	12	4
9	99	1	0,333333

	Multipla	Verd./Fal.	
1	11	=100-B3	=C3/3
2	22	=100-B4	=C4/3
3	33	=100-B5	=C5/3
4	44	=100-B6	=C6/3
5	55	=100-B7	=C7/3
6	66	=100-B8	=C8/3
7	77	=100-B9	=C9/3
8	88	=100-B10	=C10/3
9	99	=100-B11	=C11/3

Figura 8.1.32 : Produção final de Carolina, E1-P1.

Concluída a resolução questiono a aluna acerca dos motivos que a levaram a recorrer à folha de cálculo.

Carolina: Ai mãe… No teste é que vai ser bonito, não tenho… Se tivéssemos o Excel em todo o lado…
Professora: Mas tu podes ter aqueles números no teste, podes seguir aquele raciocínio…
Carolina: Olhe. Porque, já é mais fácil e já estou mais habituada ao Excel.
Professora: Porquê?
Carolina: Porque ele pensa por mim, inspira-me…
Professora: Porquê?
Carolina: Sei lá porquê, porque é mais fácil, não é preciso a gente estar a ir à calculadora... Sei lá! É inspiração professora!

Na resposta de Carolina encontro alguns argumentos que sustentam a sua preferência pela folha de cálculo. Esta é, sem dúvida, a sua ferramenta de eleição para a resolução de problemas em detrimento do papel e lápis porque, como refere, a ajuda a *inspirar* e a liberta de cálculos. A aluna mostra não gostar de efetuar cálculos, eventualmente, porque sente alguma dificuldade, mas parece acima de tudo considerar um desperdício de tempo estar a fazer algo que uma calculadora pode fazer por ela. Peço ainda à aluna para pensar no sistema de equações.

Carolina: O teste tem 20 perguntas…. Espere aí… Ai, para fazer um sistema… Eu não consigo professora… Um teste tem 20 perguntas …Tantas perguntas de verdadeiro falso mais tantas de escolha múltipla [escreve a primeira equação “$v+m=20$”]. Tantas perguntas com 3 pontos mais tantas perguntas com 11 pontos é igual a 100 [escreve a segunda equação “$v3+m11=100$”].
Professora: O que é isso do $v3$ e o $m11$?
Carolina: O *v* representa as perguntas de verdadeiro falso e o *m* representa as de escolha múltipla.
Professora: E escreves assim $v3$, $m11$?
Carolina: Então? Tantas perguntas de verdadeiro ou falso que valem 3 pontos, mais tantas perguntas de escolha múltipla que valem 11, dá 100 pontos.
Professora: Qual é a operação? Ou $v3$ é…
Carolina: Pode ser 3*v*! Se eu pusesse assim estava mal? …. Fica mais lindo, não é? .... É mais matemático!

A aluna consegue converter a informação do enunciado para o SNA, demonstrando pouco rigor na identificação das incógnitas e com as convenções matemáticas como a escrita dos coeficientes antes das incógnitas. Carolina começa a resolver o sistema e seleciona a primeira equação, escrevendo-a em ordem a *m* e delimitando o segundo membro com um retângulo. Questiono a aluna acerca dos seus procedimentos.

> **Professora**: Agora o que é que tu fizeste?
> **Carolina**: Fiz aquilo que a professora ensinou…
> **Professora**: Aquilo que a professora ensinou e isso que a professora ensinou é o quê?
> **Carolina**: [referia-se ao retângulo] Isto é para a gente quando estivermos perdidos e já descobrirmos aqui o valor do *v* virmos aqui e substituirmos para descobrirmos o valor do *m*… A gente assim não se perde, não é professora? Não é verdade?

Durante a resolução a aluna questiona-me por diversas vezes para que eu confirme os cálculos que vai fazendo mentalmente. No final, a aluna reconhece que foi fácil resolver o problema.

> **Carolina**: Foi fácil, foi fácil e ali [no Excel] não sei como é que eu fiz aquilo ali…
> **Professora**: Então?
> **Carolina**: Sei lá, às vezes parece que não sou eu que penso.

A aluna refere-se ainda à resolução que fez com a folha de cálculo, reforçando o forte auxilio que esta ferramenta lhe prestou para obter a solução.

Na resolução do segundo problema a aluna pede-me esclarecimentos acerca do significado da palavra "rota", após a clarificação do significado da palavra rota, Carolina escreve o sistema e começa a resolvê-lo.

> **Carolina**: Então a gente faz assim um coiso, um sistema, não é? E se … Como é que se diz? Se der possível determinado é que há, eles cruzam-se, não é? Os barcos cruzam-se, não é?

A aluna escreve o sistema e começa a resolver pelo método de substituição e diz que a solução é o ponto de coordenadas (40,10) e eu questiono-a porquê.

> **Carolina**: Porque é os… Eu fui parva podia ter feito… resolvido em ordem a y…. É verdade! [estava a lembrar-se do método gráfico]. Fui mesmo parva!
> **Professora**: Diz-me lá, quais são… as coordenadas do ponto…
> **Carolina**: 10, 40 … Porque o *x* vem antes do *y*.
> **Professora**: Estavas a falar em ordem a *y*, era o quê?
> **Carolina**: Era para fazer o gráfico e depois no gráfico a gente fazia as tabelas… Quer que eu faça?
> **Professora**: Quero, que é para eu perceber melhor o que tu estás a explicar…
> **Carolina**: A professora está a perceber…

A aluna prontificou-se de imediato a resolver o problema pelo método gráfico, mas continua a mostra-se insegura nos seus procedimentos e está constantemente a solicitar a minha provação de modo a ganhar segurança para continuar a resolução.

> **Carolina**: Era por isso que a professora me estava perguntar porque é que eu comecei pelo *y*…[risos] Sou mesmo parva, nunca lembro [continua a resolver em ordem a *y*] fica $y = x + 30$, não é?

A aluna constrói as tabelas e, a cada passo, pergunta-me o resultado dos cálculos que pretende efetuar, afirmando "Olhe é que eu não sei fazer contas…[risos]". Atribuiu os valores 0 e 1 a *x* e desta forma os pontos vão ficar muito próximos o que torna mais difícil a marcação dos pontos dados que não dispõe de papel quadriculado. Em seguida, atribuiu depois os valores 5 e 10 a *x*, o que lhe permite melhorar a representação gráfica pretendida, como mostro na figura 8.1.33. Carolina apercebe-se das dificuldades em traçar uma representação gráfica quando não dispõe de uma folha quadriculada e questiona-me.

> **Carolina**: Nos testes intermédios eles não dão o quadriculado? ... Não se esqueçam de dar nomes às retas [ironia da aluna de acordo com o que eu digo nas aulas]
> **Professora**: E então? Qual é a solução que tu encontraste?
> **Carolina**: 40, 10, mas aqui está 10, 40, 10, 40!

A aluna engana-se na ordem das coordenadas do ponto e conclui afirmando que as retas se intersetam nesse ponto (10,40).

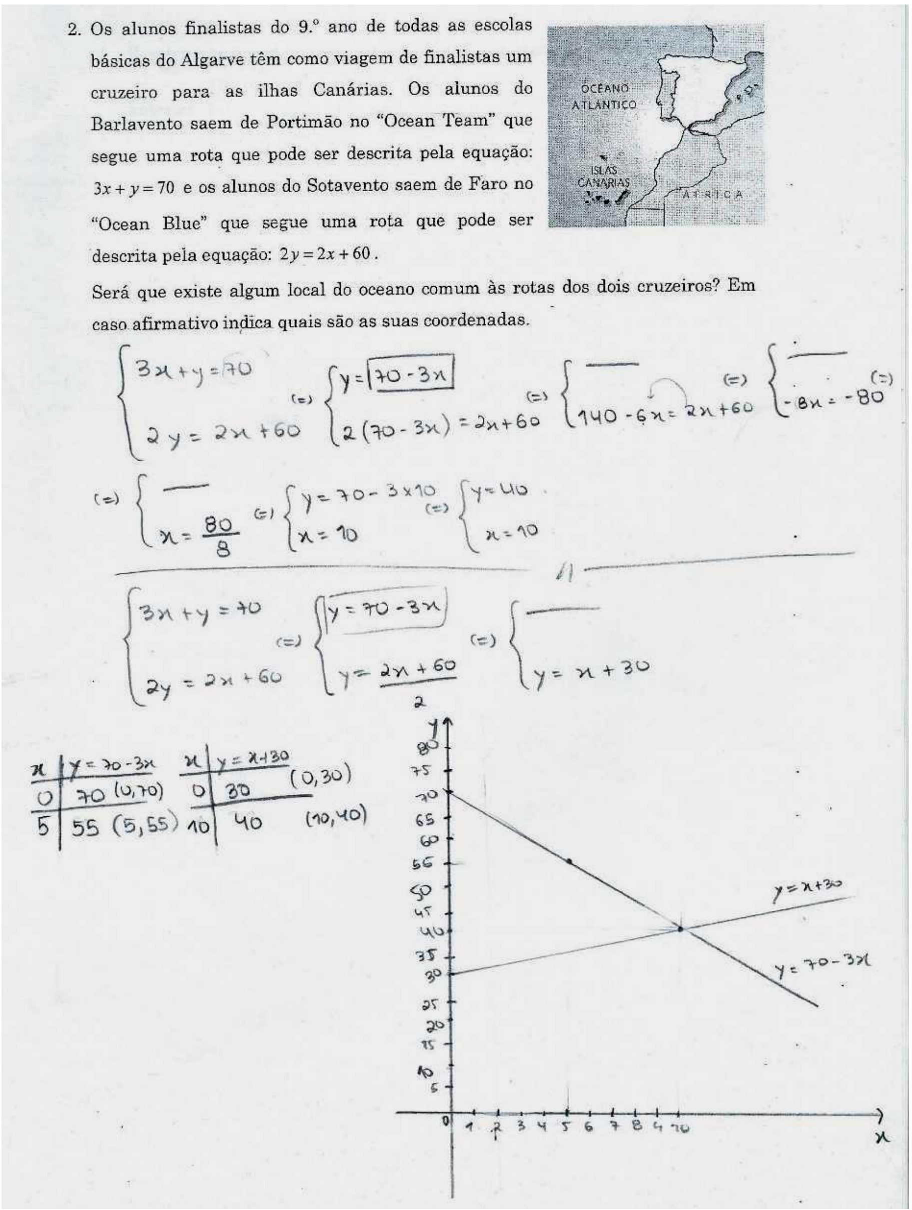


Figura 8.1.33: Produção de Carolina, E1-P2.

Questiono Carolina acerca das razões que a levaram a optar pelo método de substituição nesta resolução e, em seguida, pelo método gráfico.

> **Carolina**: Porque já nos testes eu penso sempre assim, sempre. Depois é que eu vi que era mais fácil e resolvia-se em menos passos, mas também tinha de fazer o gráfico eh…
> **Professora**: Mas são equivalentes os dois métodos? Ou não?
> **Carolina**: Se são equivalentes… Dão o mesmo resultado, sim.
> **Professora**: Tens preferência por algum deles?
> **Carolina**: Não tenho preferências, tenho é…. Sei lá vem-me sempre à cabeça aquele [o método de substituição].

Professora: Foi difícil?
Carolina: Não.
Professora: Para verificares se estava certa a tua resposta o que é tu poderias fazer?
Carolina: Substituir o 40 no *y* e o 10 no *x* nas equações.
Professora: E está certo?
Carolina: Ai mãe, queres ver que agora está tudo mal? Professora, não me diga uma coisa dessas!

A aluna, como é seu hábito, faz as substituições mentalmente, começando por fazê-lo apenas para a primeira equação, ao que eu recomendo que o faça também na segunda. A primeira reação de Carolina foi pensar que a minha sugestão significava que ela tinha errado, mas rapidamente concluí que o seu resultado está correto e replica.

Carolina: Ah! Queria-me assustar!

A aluna passa depois para a questão seguinte que lê duas vezes, manifestando dificuldade em compreender o enunciado e diz-me que não entende o que é pedido nesta questão.

Professora: Olhando para as representações gráficas… Tens aqui três sistemas… O primeiro com estas duas equações, … classifica-o tendo em conta a representação gráfica…
Carolina: Ah, mas a professora pôs… Ahhhh … estou a perceber, eu estava a pensar que isto eram equações diferentes, a professora misturou… Este é indeterminado [referindo-se ao terceiro]
Professora: É indeterminado porquê?
Carolina: Mesmo sem olhar, este está de caras!
Professora: Mas porquê?
Carolina: Tá igual, é igualzinho, tá igual por isso têm soluções iguais por isso [risos]… Ai não! Espere [fica insegura] então, mas se está igual vai sempre em cima um do outro. Ah, então é indeterminado, pois se está igual vai sempre por cima um do outro, todos os pontos da reta hummm.
Professora: E então qual é a solução, eu peço a classificação e a solução…
Carolina: Ah, a solução… A solução disto? Isto não tem solução!
Professora: Então, tem ou não tem?
Carolina: A solução é todos os pontos da reta.
[…]
Professora: É difícil classificar sistemas?
Carolina: Ah! Como estes aqui, não!

Depois desta troca de palavras, a aluna escreve facilmente a resposta. Nas duas alíneas seguintes, Carolina não tem dificuldades e apenas troca a ordem das coordenadas da solução do sistema determinado. Na questão seguinte peço à aluna que escreva um sistema dada uma determinada solução.

> **Carolina**: Ah, esta a professora já me ensinou! Este é o *x*, este é o *y* [referindo-se às coordenadas indicadas no enunciado]. Vamos multiplicar 2 vezes 3 menos… 6, espere aí professora, espere aí…. Podemos fazer assim?

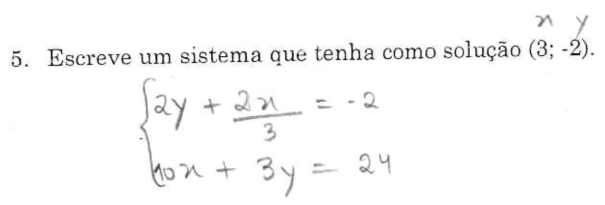
Carolina vai fazendo os cálculos mentalmente, em voz alta e escreve um sistema, mas não fica satisfeita com o resultado que obtém.

> **Carolina**: Ah! Pois, mas eu queria fazer mais complicado para a professora ficar contente.
> **Professora**: Eu só pedi um sistema. Eu não pedi um sistema complicado para eu ficar contente!

Ainda assim a aluna continua a tentar escrever um sistema "mais complicado" procurando mostrar-me que consegue escrever algo mais elaborado.

> **Carolina**: 2*x*.
> **Professora**: Mas porque é que colocaste agora 2?
> **Carolina**: Porque é mais fixe… Espere, 2 vezes 3, seis, seis a dividir por 3, 3, não! Quanto é que é 6 a dividir por 3? [risos] 2, ah viu? Eu já sabia antes de dar! Então dá 2, … dá zero, não é?
> **Professora**: Não sei…
> **Carolina**: Ai mãe, que baralhação! Então isto…

A aluna acaba mesmo por ficar confusa e apaga tudo o que tinha feito. Escreve então um novo sistema que mostro na figura 8.1.34.


x y
5. Escreve um sistema que tenha como solução (3; -2).

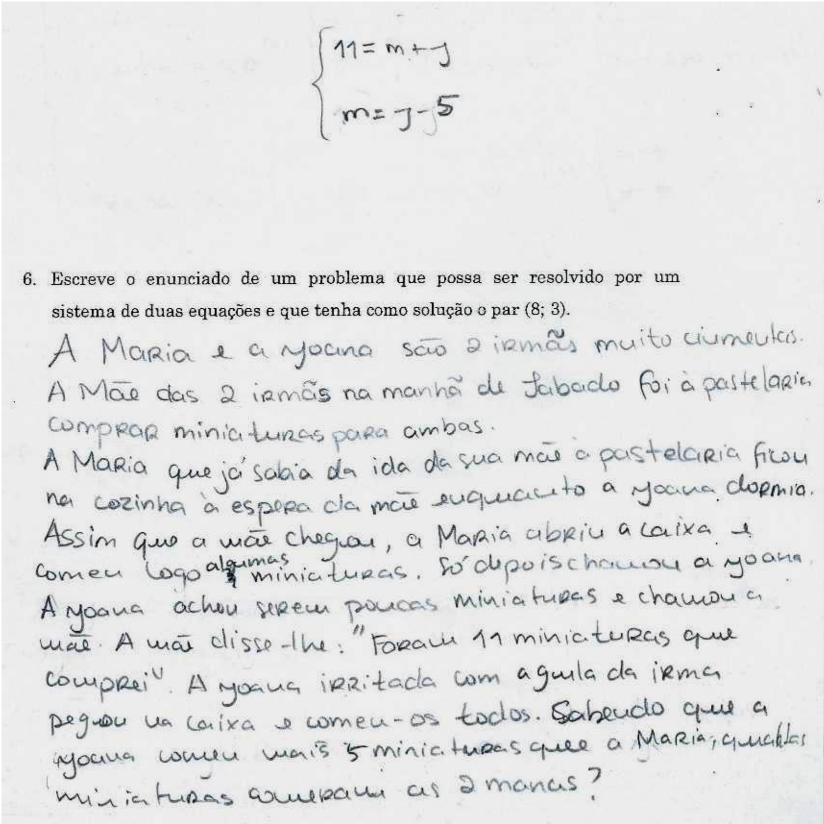
$$\begin{cases} 2y + \frac{2x}{3} = -2 \\ 10x + 3y = 24 \end{cases}$$

Figura 8.1.34: Produção de Carolina E1-Q5.

De seguida, peço-lhe que escreva um enunciado de um problema que se possa traduzir num sistema de duas equações e que admita a solução (8;3). A aluna começa por pensar num contexto para o problema e opta por escrever um problema que envolve a divisão de bolos miniatura ente duas irmãs.

> **Carolina**: A Maria abriu a caixa e comeu logo 3 miniaturas. Isto aqui é um coiso muito grande [muito texto] … Não se elas dividiram não pode ser… Dividiram os bolos igualmente… 9, 10, 11, a outra comeu 3 ficaram só com 8… Assim já estou a dar a resposta anhhhhhhhhhhhhhh… Espere aí professora... [a aluna apaga]. Só depois chamou a Joana…. Só estava a contar com aquele…. Sou mesmo parva!
> **Professora**: Se tu agora fosses passar isto para um sistema como é que fazias? Como é que escreverias o teu sistema?
> **Carolina**: Não, assim eu estou logo a dar a resposta, não tem graça… A Maria comeu logo algumas miniaturas, não é? E depois punha assim…. Sabendo que a Joana comeu mais 3 miniaturas, mais 3 não! 3, 4, 5, 6, 7, 8 mais 5 que a Joana… Ah já me estou a confundir toda…
> **Professora**: Agora se tu fosses colocar, em sistema, como é que farias?
> **Carolina**: Escrevi um problema pra mim própria! Já viu?

A aluna apresenta muitas dificuldades na resposta a esta questão e como ela própria refere a conversão do enunciado para o SNA é um problema para ela própria. Após várias tentativas Carolina apresenta o enunciado da figura 8.1.35.



$$\begin{cases} 11 = m + j \\ m = j - 5 \end{cases}$$

6. Escreve o enunciado de um problema que possa ser resolvido por um sistema de duas equações e que tenha como solução o par (8; 3).

A Maria e a Joana são 2 irmãs muito ciumentas.
A Mãe das 2 irmãs na manhã de Sábado foi à pastelaria comprar miniaturas para ambas.
A Maria que já sabia da ida da sua mãe à pastelaria ficou na cozinha à espera da mãe enquanto a Joana dormia.
Assim que a mãe chegou, a Maria abriu a caixa e comeu logo algumas miniaturas. Só depois chamou a Joana.
A Joana achou serem poucas miniaturas e chamou a mãe. A mãe disse-lhe: "Foram 11 miniaturas que comprei". A Joana irritada com a gula da irmã pegou na caixa e comeu-os todos. Sabendo que a Joana comeu mais 5 miniaturas que a Maria, quantas miniaturas comeram as 2 manas?

Figura 8.1.35: Produção de Carolina, E1-Q6.

O enunciado envolve uma situação do quotidiano e as duas condições podem ser traduzidas pelas equações que a aluna apresenta. Contudo, a questão que a aluna coloca, "Quantas miniaturas comeram as duas irmãs?", é de resposta imediata, não sendo necessário recorrer a um sistema para a obter. Carolina converte também o seu enunciado para o SNA como lhe solicito e verifica ainda se a solução dada é a solução do sistema que escreve. Por fim, questiono-a acerca da dificuldade desta questão ao que ela responde, com o seu habitual bom humor "Foi difícil resolver o meu problema, foi! [risos]".

No final da entrevista, questiono-a quanto à utilidade dos sistemas de equações. De acordo com a sua resposta, Carolina entende-os como suportes para a descoberta de incógnitas a que chama de "coisas".

> **Carolina**: Para associarmos dados que nos dão no enunciado, para descobrirmos quanto é que vale cada coisa.
> **Professora**: Quando é que tu decides se num problema se pode usar ou não, um sistema de equações? Como é que decides?

> **Carolina**: Quando umas coisas estão relacionadas com outras, não é? Quando temos uma igualdade e as coisas estão relacionadas umas com as outras…

Durante a entrevista a aluna recorre a representações com papel e lápis e na folha de cálculo para resolver as diversas propostas que lhe apresento. No trabalho com papel e lápis, Carolina recorre essencialmente a representações no SNA, em particular para a escrita de equações e para a sua resolução. As suas produções são sempre acompanhadas pela explicação dos procedimentos e pela resposta, em linguagem natural, pelo que este tipo de representação tem uma grande expressividade no seu trabalho. O método de resolução gráfica surge ainda na resolução de um problema.

Síntese

Representações utilizadas e transformações das representações na aprendizagem de métodos formais.

Carolina ao longo do estudo deste tópico recorre a uma grande variedade de representações. A natureza das tarefas propostas incentiva a aluna numa fase inicial a utilizar representações mais informais, mas progressivamente começa a utilizar representações mais formais, o que de certa forma mostra como a aluna desenvolve o seu pensamento algébrico.

No trabalho com papel e lápis, Carolina recorre à linguagem natural para a identificação de incógnitas, para a explicação de procedimentos e justificação das respostas. A aluna recorre a representações no SNN maioritariamente para efetuar cálculos, por substituição, por exemplo para avaliar a grandeza de expressões ou para verificar soluções. As representações no SNA são utilizadas para a escrita de expressões e respetiva simplificação, para a escrita de equações do 1.º grau, bem como de sistemas de equações e sua resolução. As representações pictóricas são, por vezes, utilizadas como alternativas quando a aluna não consegue utilizar outras, em particular, no SNA ou ainda com o papel de auxiliares ou dar suporte a outras representações. As representações gráficas surgem especialmente quando são solicitadas.

No trabalho com a folha de cálculo a resolução das tarefas segue o seguinte padrão: a aluna começa por nomear colunas (identificação das incógnitas), de seguida procede à construção de sequências através da geração automática ou de variáveis-coluna (estabelecimento de relações), depois procura a(s) solução(ões) recorrendo ao realce de células ou à formatação condicional. Neste ambiente as representações gráficas apenas surgem quando são solicitadas.

Ao longo do estudo deste tópico, Carolina efetua uma variedade de transformações das representações. No gráfico 8.1.1 apresento uma síntese da conversão das representações efetuada pela aluna e que sintetiza a sua evolução.

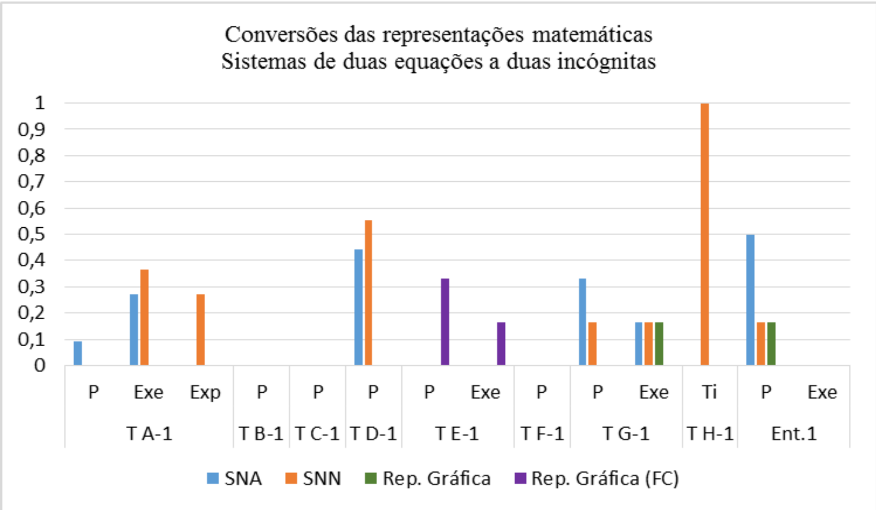


Gráfico 8.1.1: Conversão das representações no estudo do tópico "Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas".

Na resolução de problemas, a aluna privilegia as conversões para o SNA. Por vezes, também efetua conversões para o SNN onde utiliza estratégias alternativas ou efetua alguns cálculos que a conduzem à solução, como acontece na Tarefa D-1. Na resolução de exercícios a escolha das conversões depende da natureza das propostas. Deste modo, na tarefa A-1 utiliza maioritariamente conversões para o SNN, enquanto na tarefa G-1 há um equilíbrio entre as conversões para o SNA, para o SNN e para representação gráfica. Nas tarefas realizadas na folha de cálculo, quando é solicitado, Carolina converte as tabelas para representações gráficas.

Um aspeto importante a salientar diz respeito às discussões em sala de aula, embora esse trabalho não esteja expresso no gráfico 8.1.1. é nesses momentos que são feitas maioritariamente as conversões para o SNA, por exemplo nas tarefas: B-1, C-1e F-1 que são propostas para explorar na folha de cálculo.

No gráfico 8.1.2 apresento uma síntese dos tratamentos das representações matemática efetuados por Carolina na resolução das diferentes tarefas.

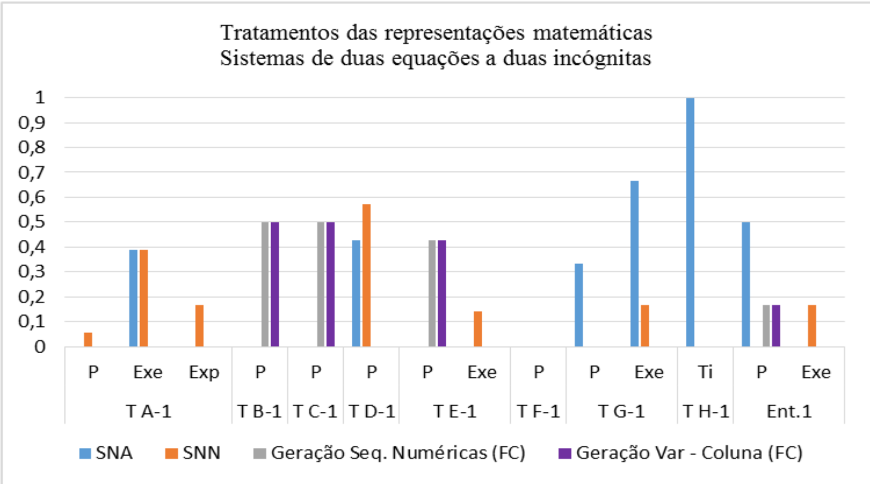


Gráfico 8.1.2 : Tratamento das representações no estudo do tópico "Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas".

Na resolução de problemas, com papel e lápis, Carolina inicialmente privilegia os tratamentos no SNN, no entanto a partir da tarefa D-1 começa a recorrer a tratamentos no SNA e no final do estudo do tópico recorre exclusivamente a tratamentos nesse sistema de notação.

Na resolução de exercícios, o recurso a tratamentos no SNN e SNA alterna de acordo com a natureza das propostas. A tarefa G-1 destaca-se pelo facto de ser marcada essencialmente por tratamentos no SNA, uma tarefa em que os alunos começaram a utilizar *obrigatoriamente* métodos formais.

Na resolução de explorações Carolina apenas efetua tratamentos no SNN e na tarefa de investigação recorre apenas a tratamentos no SNA.

Na resolução das tarefas, na folha de cálculo, a aluna opta sempre por estabelecer as relações presentes nos enunciados através da construção de sequências numéricas com recurso ou não a variáveis-coluna.

O recurso a tarefas diversificadas proporciona a Carolina uma aprendizagem progressiva dos métodos formais tendo como suporte algumas experiências informais. A aluna tem a oportunidade de recorrer a representações alternativas ao SNA que a ajudam a uma crescente formalização dos métodos e ao desenvolvimento do seu pensamento algébrico.

A folha de cálculo é a ferramenta de eleição para Carolina para a resolução de problemas. A aluna mostra ter nesta ferramenta um grande apoio para efetuar os cálculos, um aspeto em que a aluna revela bastantes dificuldades, mas é ainda uma ferramenta que a *inspira*, que a ajuda tanto a identificar as incógnitas presentes num problema, como a estabelecer as relações e a encontrar a solução. Carolina recorre à folha de cálculo com alguma destreza e utiliza representações complexas, tal como a tabela de dupla entrada que se revela bastante eficaz na resolução de um dos problemas propostos.

Na aprendizagem do método de substituição, as tarefas propostas permitem que a aluna comece inicialmente pela escrita de relações entre duas variáveis, logo na tarefa A-1, em particular, a partir de uma representação gráfica. A tarefa B-1 resolvida na folha de cálculo revela-se importante pela conversão para o SNA de uma equação com duas variáveis onde é possível verificar a existência de mais do que uma solução. A tarefa C-1, também resolvida na folha de cálculo, permite a formalização do termo *sistema de equações*. A resolução da tarefa D-1, Carolina faz emergir um procedimento em tudo idêntico ao método formal de substituição no SNA. Na resolução desta tarefa, a aluna só não coloca as habituais chavetas no sistema. Começa por escrever as equações em separado, resolve uma delas e substitui o valor encontrado na outra, obtendo assim a solução do sistema. As produções de Carolina são importantes, não só para a sua própria aprendizagem, mas são igualmente um importante contributo no momento de discussão, a partilha das suas produções permite aos restantes alunos observarem e compreenderem diferentes representações para as resoluções dos mesmos problemas.

O método gráfico estudado a partir da resolução da Tarefa E-1, na folha de cálculo, não é o método preferido desta aluna, que mesmo no final do estudo deste tópico revela dificuldades, particularmente na construção da representação gráfica.

O método da adição ordenada surge, em sala de aula, de forma natural pelas mãos de Carolina, é a sua resolução a uma proposta na Tarefa D-1 que a faz aparecer. Este foi o método encontrado pela aluna como uma alternativa quando não consegue estabelecer uma relação entre as variáveis envolvidas na situação. A aluna recorre a representações pictóricas e no SNN e apresenta a sua resolução aos colegas no momento de discussão. Através do questionamento levo os alunos à escrita no SNA dos procedimentos de Carolina, ou seja, à utilização do método da adição ordenada para aquela situação. A resolução apresentada por esta aluna proporcionou assim formalização do método da adição ordenada.

O trabalho de Carolina nas diferentes tarefas que resolve é importante para a aprendizagem dos métodos. Os momentos de discussão e síntese, em sala de aula, são igualmente fundamentais para que os alunos possam desenvolver uma perspetiva algébrica das suas produções e dos diferentes métodos de resolução de sistemas. Inicialmente, é dada liberdade à aluna para utilizar uma variedade de representações, em particular, as pictóricas e no SNN que são importantes e servem de suporte para a formalização dos métodos. É igualmente relevante, o meu papel enquanto professora, para promover uma articulação entre os métodos informais e os formais.

Carolina apresenta alguma fluência no uso do método de substituição. Contudo, na resolução de problemas, apresenta algumas dificuldades, não no uso do método propriamente dito, mas na conversão do enunciado para o SNA, como constato na entrevista. A aluna prefere, sempre que possível, recorrer à folha de cálculo para resolver os problemas.

Relativamente aos três métodos estudados, a aluna mostra uma clara preferência pelo método de substituição em detrimento dos outros. O método da adição ordenada, embora tenha surgido a partir do trabalho desta aluna, apenas foi utilizado na resolução de uma situação.

A aprendizagem dos métodos formais constitui um marco no desenvolvimento do pensamento algébrico da aluna. Carolina a partir do momento que aprende os métodos formais, em particular o método de substituição, procura utilizá-lo nas diferentes tarefas propostas, o que provoca alterações nas representações que a aluna utiliza e na forma como as coordena.

O trabalho da aluna na tarefa inicial, com papel e lápis, pode ser esquematizado como apresento na figura 8.1.36.

Figura 8.1.36: Esquema da atividade de Carolina, na resolução de exercícios antes da aprendizagem dos métodos formais.

No caso de uma sequência, a aluna não consegue encontrar a expressão geradora e recorre apenas a tratamentos de representações pictóricas. No entanto, noutra situação em que é dada uma representação gráfica, a aluna consegue encontrar a equação da reta correspondente e através de conversões para o SNN obter a resposta, como mostra a figura 8.1.37.

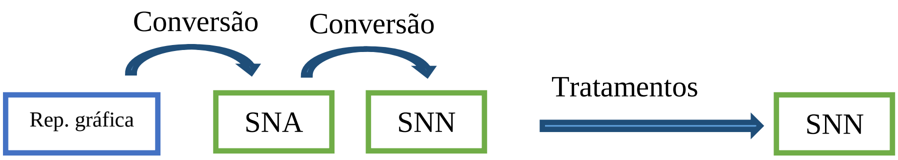


Figura 8.1.37: Esquema da atividade de Carolina, na resolução de exercícios antes da aprendizagem dos métodos formais.

Na resolução de problemas, Carolina converte a informação para o SNA onde efetua tratamentos ou, em alternativa, recorre ao SNN, como esquematizo na figura 8.1.38.

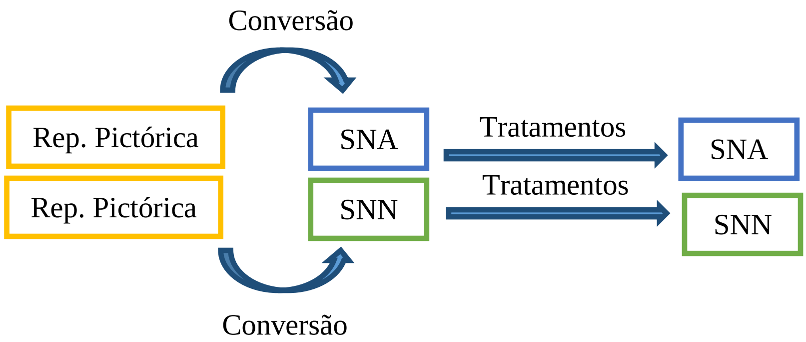


Figura 8.1.38: Esquema da atividade de Carolina, na resolução de problemas antes da aprendizagem dos métodos formais.

Na resolução da tarefa D-1 as produções da aluna mostram o método de substituição no SNA. Ela começa a utilizá-lo com maior fluência a partir da tarefa G-1, em particular, na resolução de exercícios. Na resolução de problemas a aluna mostra, por vezes, alguma hesitação na conversão do enunciado para o SNA o que a leva a procurar um método alternativo. Neste caso, sempre que tem disponível a folha de cálculo, a aluna opta pela sua utilização, como acontece na entrevista. A atividade de Carolina, na resolução e problemas depois da aprendizagem dos métodos formais encontra-se esquematizada na figura 8.1.39.

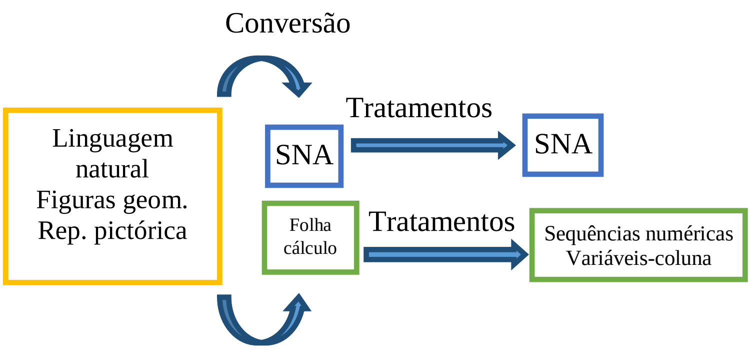


Figura 8.1.39: Esquema da atividade de Carolina, na resolução de problemas depois da aprendizagem dos métodos formais.

O método gráfico apenas é utilizado por Carolina quando solicitado, mesmo na resolução de problemas que apelam à sua utilização, como acontece na entrevista. Esta situação pode ser explicada pelas dificuldades manifestadas na tradução para uma representação gráfica com papel e lápis.

Ao longo deste percurso a aluna mostra uma alteração no tipo de representações, inicialmente apoia-se em representações no SNN e vai progressivamente mudando para representações no SNA, tanto na resolução de exercícios como na resolução de problemas. No entanto, a aluna apresenta ainda algumas dificuldades como se pode ver aquando da escrita de um enunciado de um problema dada a sua solução.

O estabelecimento da conexão entre o trabalho desenvolvido na folha de cálculo e a notação algébrica com papel e lápis.

As conexões entre o trabalho desenvolvido por esta aluna na folha de cálculo e com a notação algébrica acontecem especialmente nos momentos de discussão das tarefas. No estudo deste tópico, as conexões consistem na conversão das relações estabelecidas na folha de cálculo para o SNA, esta conversão é feita de uma forma linear, tendo em conta as condições escritas pela aluna, ou seja, as fórmulas expressas na sintaxe própria da folha de cálculo são convertidas para o SNA. Na Tarefa F-1, a aluna assiste à sua discussão, não só as relações escritas na folha de cálculo foram convertidas para o SNA, mas também os procedimentos da própria ferramenta.

Contribuição da conexão entre os dois ambientes (folha de cálculo e papel e lápis) na aprendizagem dos métodos formais.

A conexão entre estes dois ambientes é determinante para a formalização dos conceitos algébricos: equação com duas variáveis e sistemas de equações. Esta formalização é feita tendo como suporte a resolução de problemas específicos, onde Carolina tem a oportunidade de atribuir significados às equações e às variáveis presentes. Posteriormente, a conversão do ambiente da folha de cálculo para o papel e lápis, permite a formalização do método gráfico de resolução de sistemas bem como do método de substituição.

8.2.2. Aprendizagens no tópico "Proporcionalidade Inversa. Representações gráficas"

Nesta secção descrevo, de forma sucinta, o contributo que cada tarefa tem na evolução do pensamento algébrico de Carolina, abordando as representações e a sua transformação na aprendizagem de métodos formais, onde destaco o importante papel da folha de cálculo.

O trabalho da aluna com as representações matemáticas e a sua evolução encontra-se sintetizado na tabela 8.2 e quadros de análise (Anexo 36).

Na resolução da tarefa A-2 (Anexo 17), de diagnóstico, composta por situações problemáticas de natureza variada, Carolina consegue resolver situações que envolvem raciocínio proporcional (proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa) e ainda outras situações que não envolvem proporcionalidade.

Nas suas repostas a aluna recorre essencialmente à linguagem natural para retirar os dados dos enunciados, explicar os seus procedimentos e dar as respostas, utiliza em simultâneo, cálculos elementares no SNN para resolver as situações propostas. No caso das situações de proporcionalidade direta, a aluna utiliza a regra de três simples, como no problema 1, que apresento na figura 8.2.1.

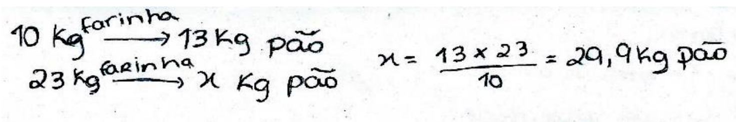


Figura 8.2.1: Produção de Carolina, TA2-P1.

Num problema que envolve raciocínio proporcional, Carolina começa por converter a informação do enunciado para uma representação pictórica, como apresento na figura 8.2.2.

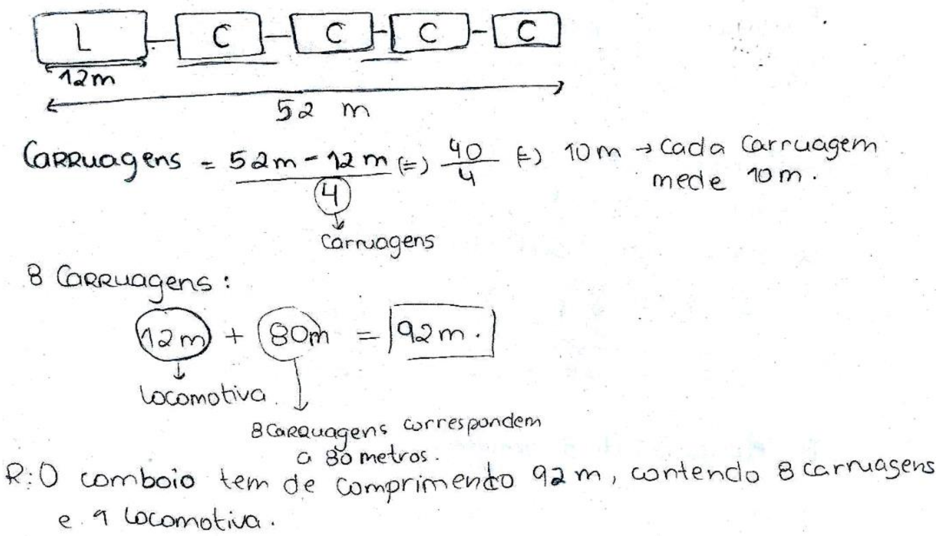


Figura 8.2.2: Produção de Carolina, T A2-P3.

Na sua representação pictórica, Carolina apresenta as iniciais das palavras locomotiva e de carruagem para as identificar na sua construção e acrescenta depois as dimensões da locomotiva e do comboio. A aluna efetua depois tratamentos no SNN. Para obter o comprimento de cada carruagem a aluna divide por quatro (o número de carruagens) a diferença entre os comprimentos do comboio e da locomotiva. Por fim, confirma o resultado obtido através da soma dos comprimentos da locomotiva com o das oito carruagens.

Nas situações que envolvem proporcionalidade inversa, Carolina já faz uso do raciocínio inversamente proporcional, como apresento na figura 8.2.3.

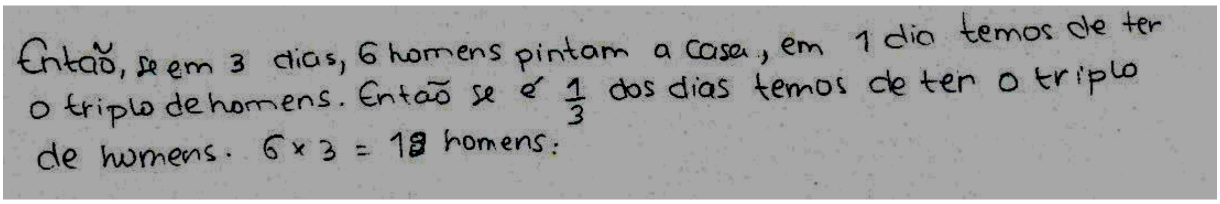


Figura 8.2.3: Produção de Carolina, T A2-P4.

A aluna, na sua produção, afirma que "se é 1/3 dos dias temos de ter o triplo dos homens" o que mostra clareza na expressão do raciocínio inversamente proporcional para resolver a situação proposta.

Na resolução do problema 8, na figura 8.2.4, a aluna serve-se de uma representação pictórica dos amigos para mostrar que é necessário colocar oito pessoas, para se obter o total de 12 euros que corresponde ao custo do livro.

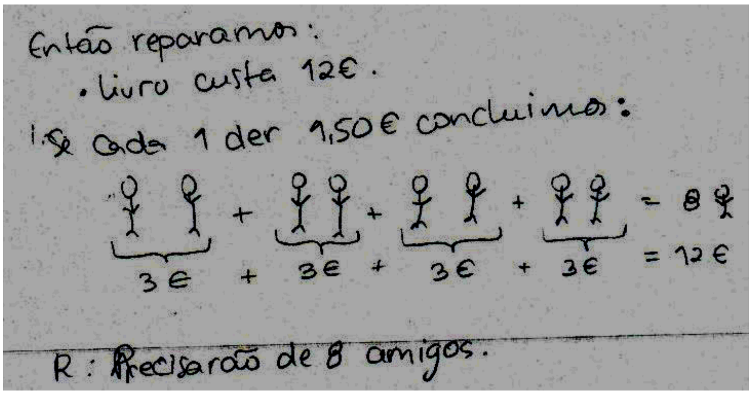


Figura 8.2.4: Produção de Carolina, T A2-P8.

No entanto, numa outra situação onde não está presente qualquer tipo de proporcionalidade, a aluna não responde corretamente, procedendo como apresento na figura 8.2.5.

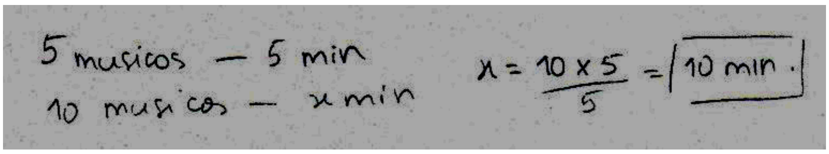


Figura 8.2.5: Produção de Carolina, TA2-P7.

Carolina utiliza incorretamente a regra de três simples. Na entrevista, a aluna recorda-se que este foi um problema difícil. "Foi o 7, o 7 foi difícil" (E2), quando a questiono acerca das dificuldades que sentiu, a aluna mostra alguma hesitação "Eu pensava que era, como… Eu pensava que este era de direta, mas não é, quanto…. Quanto mais músicos, menos minutos, não é?". Não respondo, aguardo uns momentos e leio o enunciado, ao que a aluna diz "Ah, é o mesmo, é, os mesmos minutos, não é? Não interessa, … Ah sim!". Apesar de ter sido discutida, na aula, uma situação análoga, a aluna parece não se recordar e, na entrevista, precipita-se na resposta ao problema, apenas depois de ouvir a minha leitura do enunciado, responde corretamente.

Numa questão que já tinha sido resolvida, anteriormente, numa ficha na aula e que não envolve proporcionalidade, a aluna responde corretamente, como mostro na figura 8.2.6.

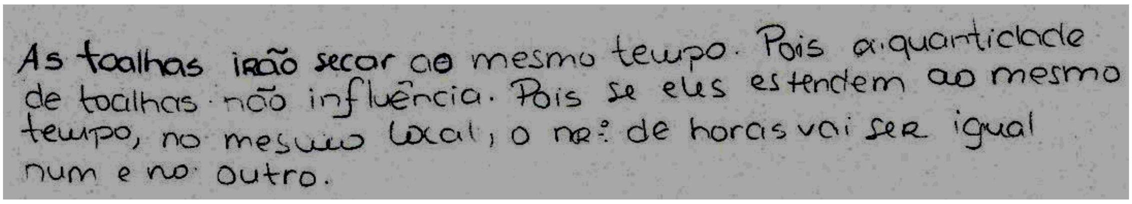

As toalhas irão secar ao mesmo tempo. Pois a quantidade de toalhas não influência. Pois se eles estendem ao mesmo tempo, no mesmo local, o nº de horas vai ser igual num e no outro.

Figura 8.2.6: Produção de Carolina, T A2-P2.

Esta tarefa inicial mostra que Carolina resolve corretamente situações simples que envolvem proporcionalidade direta e inversa. No entanto, manifesta ainda algumas dificuldades em situações em que não existe qualquer tipo de proporcionalidade. Em relação aos métodos formais, a aluna já apresenta formas de raciocínio inversamente proporcional com quantidades inteiras.

A tarefa B-2 (Anexo 18), os canteiros da horta do Sr. Tomás, é trabalhada num ambiente combinado de papel e lápis e a folha de cálculo e Carolina começa por a resolver em conjunto com duas colegas. As alunas demonstraram algumas dificuldades no preenchimento da tabela da primeira questão.

> **Carolina**: Isto é sempre, sempre, sempre, sempre 120…Não é verdade? Como a gente ainda agora fez, dá sempre 120, depois daqui para aqui é a dividir, … 12 a dividir por 10 é o quê? 60 a dividir por 120? Não pode ser, não é verdade?… Pois é… O carteiro, o carteiro…[a aluna está distraída a cantarolar].
> **Professora**: E então, está a ir tudo bem?
> **Carolina**: Não!
> **Professora**: Qual é a dificuldade?
> **Carolina**: Aqui, daqui para aqui faz-se a dividir.
> **Professora**: A dividir porquê?
> **M. Inês**: Isso é que a gente não sabe!

Professora: Então vamos lá ver, qual é que é o vosso objetivo? …. Nalgumas colunas vocês têm altura, nalguns retângulos, noutros têm a base como é que vocês vão fazer?
Carolina: Aqui a gente faz… [refere-se à última linha]
Elyelma: Tem de valer zero.
Carolina: 1, 1!
M. Inês: Tem de ser 1.
Professora: 1 vezes 120 para dar 120 e depois?
Carolina: Então é sempre vezes … E agora meninas? 2! 2 vezes 60, 120…
Elyelma: Mas, não é um número muito pequeno?
Carolina: Não!... 5 vezes 40, 120.
Elyelma: O quê?
Carolina: Não! 4, 4!
Elyelma: Dá 160.
M. Inês: 3! 3 vezes 40, 120.
Elyelma: Pois 60 é 2, 3 é 40.
Carolina: E 80 deve ser 4! Olha … 80 vezes 8, 8 mais 8, 16… [está a tentar fazer 80 vezes 2]

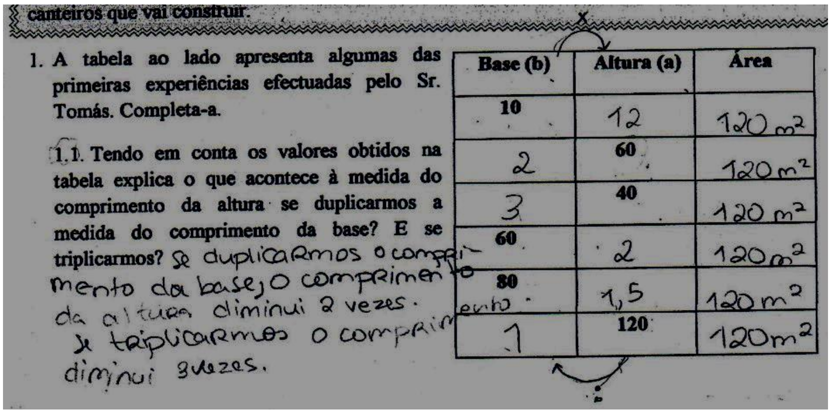
As alunas mostram alguma dificuldade em fazer os cálculos de forma a obter o resultado esperado. Quando avanço para o quadro para iniciar a discussão e questionar os alunos, constato que as alunas ainda não tinham terminado o seu trabalho.

Professora: Para completar a tabela, alguém tem alguma dificuldade?
Carolina: Eu!

Leio o enunciado e tento explicar o que pretendo com este enunciado.

Professora: Duplicar é multiplicar o comprimento por 2, então a minha pergunta é o que é que acontece à altura se eu multiplicar por dois a base?
Alguns alunos: Divide por 2 [a Carolina e as colegas de trabalho não respondem]
Professora: E depois o que é que acontece se eu em vez de multiplicar por 2, multiplicar por 3?
Carolina: O carteiro, o carteiro… [a aluna continua a cantarolar].

Carolina mostra-se pouca atenta ao trabalho da aula, contudo parece entender o que pretendo e acaba por completar a tabela, explicando corretamente a relação que existe entre a base e a altura dos canteiros com uma área fixa de 120 m^2. Para além de preencher a tabela, Carolina ainda acrescenta duas setas que constituem um suporte para a generalização da relação, entre a base a altura dos canteiros, como mostro na figura 8.2.7.


canteiros que vai construir.

1. A tabela ao lado apresenta algumas das primeiras experiências efectuadas pelo Sr. Tomás. Completa-a.

1.1. Tendo em conta os valores obtidos na tabela explica o que acontece à medida do comprimento da altura se duplicarmos a medida do comprimento da base? E se triplicarmos? Se duplicarmos o comprimento da base, o comprimento da altura diminui 2 vezes. Se triplicarmos o comprimento diminui 3 vezes.

Base (b)	Altura (a)	Área
10	12	120 m²
2	60	120 m²
3	40	120 m²
60	2	120 m²
80	1,5	120 m²
1	120	120 m²

Figura 8.2.7: Produção de Carolina, TB2-Q 1.1.

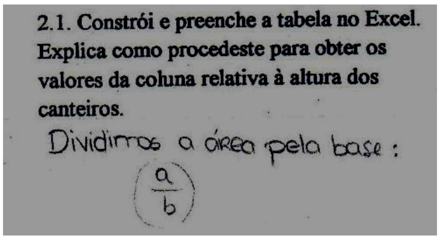
Para responderem à segunda questão, Carolina e as suas colegas constroem, na folha de cálculo, a tabela que apresento na figura 8.2.8. Na entrevista, a aluna recorda a fórmula que inseriu na folha de cálculo para obter a altura "dividimos a área pela base …a altura é igual à área a dividir pela base" (E2).

Base (b)	Altura (a)	Área
1	120	120
1,5	80	120
2	60	120
2,5	48	120
3	40	120
3,5	34,28571429	120
4	30	120
119	1,008403361	120
119,5	1,0041841	120
120	1	120

Base (b)	Altura (a)	Área
1	=D3/B3	120
1,5	=D4/B4	120
2	=D5/B5	120
2,5	=D6/B6	120
3	=D7/B7	120
3,5	=D8/B8	120
4	=D9/B9	120
119	=D239/B239	120
119,5	=D240/B240	120
120	=D241/B241	120

Figura 8.2 8: Produção de Carolina, TB2-Q1.2.

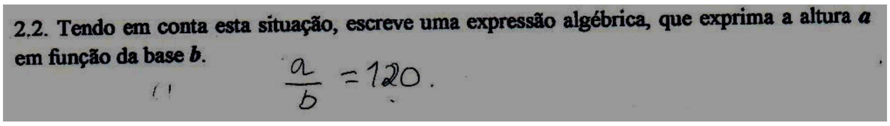
Carolina e as suas colegas expressam, posteriormente, a forma como construíram a coluna relativa à altura dos canteiros como mostro na figura 8.2.9.


2.1. Constrói e preenche a tabela no Excel. Explica como procedeste para obter os valores da coluna relativa à altura dos canteiros.

Dividimos a área pela base: $\left(\frac{a}{b}\right)$

Figura 8.2.9: Produção de Carolina, TB2-2.1.

Apesar de a aluna ter apresentado uma explicação correta, no SNA, de como procede na folha de cálculo, não apresenta a expressão algébrica correta, que exprime a altura em função da base, como mostro na figura 8.2.10.


2.2. Tendo em conta esta situação, escreve uma expressão algébrica, que exprima a altura ***a*** em função da base ***b***.

$\frac{a}{b} = 120.$

Figura 8.2.10: Produção de Carolina, TB2-Q2.2.

Na entrevista peço à aluna que me explique o significado da expressão apresentada, levando a aluna a analisar a sua resposta.

> **Carolina**: Essa expressão está bem? ... Não devia de ser igual a 120 a dividir por *b*? Não devia de ser? Mas quando é inversa tem de ser sempre a igual a constante a dividir pelo … Como é?... Devia ser a igual a 120 a dividir por *b*.

Carolina identifica o seu erro tendo como suporte o conhecimento da expressão algébrica de uma função de proporcionalidade inversa. Para dar resposta à questão seguinte, Carolina na folha de cálculo, elabora a representação gráfica da função, como apresento na figura 8.2.11.

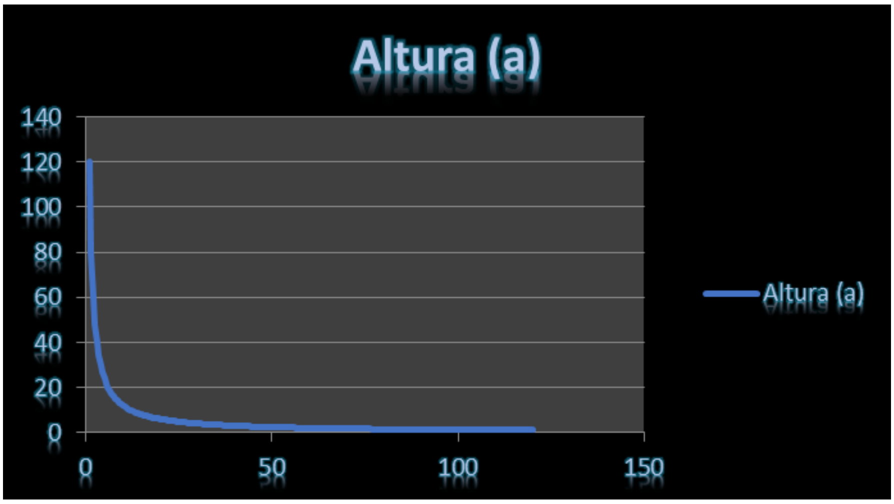


Figura 8.2.11: Produção gráfica de Carolina na folha de cálculo, TB2-Q2.3.

No enunciado da tarefa é pedido aos alunos um esboço da representação gráfica elaborada na folha de cálculo. Carolina copia de uma forma pouco rigorosa, com um traçado a grosso, a representação gráfica, como mostro na imagem 8.2.12.

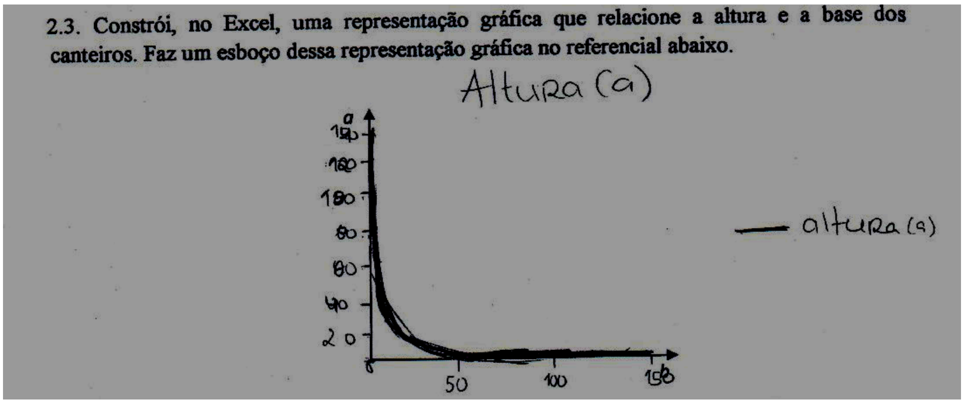


Figura 8.2.12: Representação gráfica de Carolina, TB2-Q2.3.

Nesta tarefa Carolina recorre a representações tanto com papel e lápis assim como na folha de cálculo. Começa por preencher uma tabela com papel e lápis, posteriormente converte essa representação para a folha de cálculo onde utiliza uma fórmula para expressar a altura dos canteiros em função do valor da área, fixo. De seguida, converte a informação na tabela para uma representação gráfica, sendo este o primeiro contacto da aluna com a hipérbole.

Com a tarefa C-2 (Anexo 19) pretendo que os alunos analisem e trabalhem com a representação gráfica de uma função de proporcionalidade inversa em situações em que a constante assume também valores menores do que zero. Esta tarefa assume um contexto puramente matemático. Começo por pedir aos alunos que atribuam valores a *x* e a *y* de modo a que o seu produto seja 4 e, em seguida, solicito que construam uma tabela na folha de cálculo com vários valores para *x* e *y*. Carolina começa por converter esta informação para a folha de cálculo onde constrói uma tabela com as colunas *x* e *y* e reserva outra para o total. Na coluna *x* faz variar os valores de 1 até 5 com incremento 0,1. Na coluna *y* recorre a uma variável coluna e na coluna do total constrói uma sequência de valores 4 por arrastamento. Alerto os alunos para que considerem também números negativos. A aluna apaga o que tinha feito e constrói uma nova tabela que apresento na figura 8.2.13, onde continua a utilizar uma variável coluna para a geração da coluna *y*.

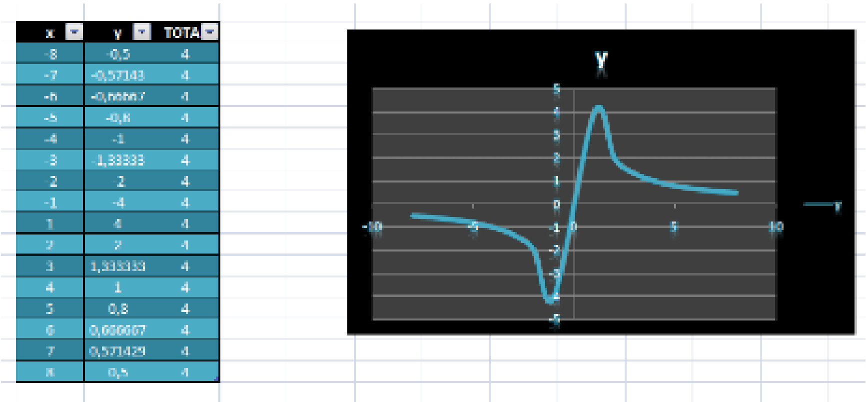
Relativamente à expressão algébrica de *y* em função de *x*, a aluna escreve $y = \frac{4}{x}$ sem dificuldade, omitindo o facto de *x* não poder tomar o valor zero. Durante a resolução questão questiono os alunos acerca da grandeza *x* tomar o valor zero.

Professora: O que acontece quando *x* é zero?
Alguns alunos: É impossível!

Confirmo a resposta dada, de que *x* não pode tomar o valor zero e digo aos alunos que, neste caso, devem apagar a linha da tabela da folha de cálculo que contém esse valor e continuo a questionar os alunos agora acerca da representação gráfica.

Professora: E agora vejam lá o que acontece no gráfico.
Carolina: Faz uma linha bué da esquisita meu!
Tatiana: Faz duas!
Carolina: Não, não! [A aluna vê a representação gráfica dos colegas] Anh? O meu não está nada assim!
Patrícia: Colocaste números negativos?
Carolina: Pus sim, mó…

A aluna chama-me para ver o seu gráfico que mostro na figura 8.2.13.



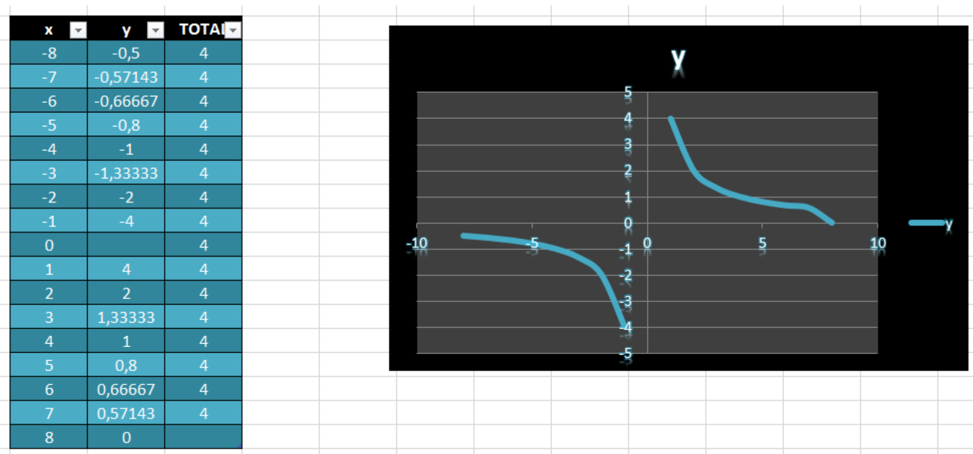
x	y	TOTAL
-8	-0,5	4
-7	-0,57143	4
-6	-0,66667	4
-5	-0,8	4
-4	-1	4
-3	-1,33333	4
-2	-2	4
-1	-4	4
1	4	4
2	2	4
3	1,333333	4
4	1	4
5	0,8	4
6	0,666667	4
7	0,571429	4
8	0,5	4

Figura 8.2.13: Produção de Carolina, TC2-Q1.3.

O gráfico obtido por Carolina está incorreto, pois a aluna apesar de ter apagado a linha em que a grandeza *x* admite o valor zero, arrastou as células a partir dessa linha (de $x = 1$ a $x = 8$). Ajudo a aluna a alterar a sua produção na folha de cálculo e volto a questionar os alunos.

Professora: O que é que acontece ao gráfico?
Carolina: Dá duas hipérboles! [exclama a aluna admirada]

A aluna volta a arrastar as alças da coluna *x* até ao valor 8 fazendo surgir novamente o valor zero e apaga o resto dessa linha. Uma vez que não tem o valor 4 na coluna total, surge o valor zero na coluna *y*, o que a faz obter o gráfico que mostro na figura 8.2.14.



x	y	TOTAL
-8	-0,5	4
-7	-0,57143	4
-6	-0,66667	4
-5	-0,8	4
-4	-1	4
-3	-1,33333	4
-2	-2	4
-1	-4	4
0		4
1	4	4
2	2	4
3	1,33333	4
4	1	4
5	0,8	4
6	0,66667	4
7	0,57143	4
8	0	

Figura 8.2.14: Produção de Carolina, TC2-Q 1.3.

Com base no gráfico obtido na folha de cálculo, a aluna esboça incorretamente a representação gráfica da função no ambiente de papel e lápis, como mostro na figura 8.2.15.

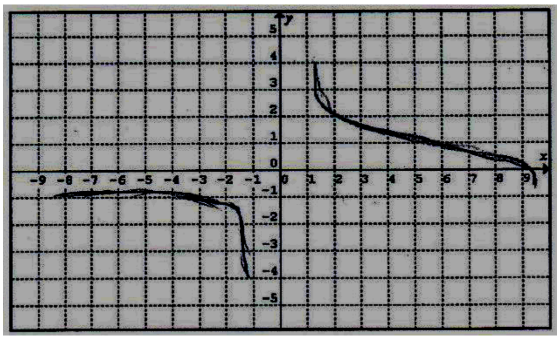


Figura 8.2.15: Esboço gráfico de Carolina, TC2-Q1.3.

A próxima questão intenta que os alunos obtenham a representação gráfica de uma situação de proporcionalidade inversa em que a constante é um número negativo.

Após ter escrito alguns pares ordenados cujo produto é um valor negativo, Carolina constrói uma tabela e a representação gráfica correspondente na folha de cálculo, como mostro na figura 8.2.16.

x	y	TOTA
-8	0,5	-4
-7	0,571429	-4
-6	0,666667	-4
-5	0,8	-4
-4	1	-4
-3	1,333333	-4
-2	2	-4
-1	4	-4
0		-4
1	-4	-4
2	-2	-4
3	-1,33333	-4
4	-1	-4
5	-0,8	-4
6	-0,66667	-4
7	-0,57143	-4
8	-0,5	-4
9	-0,44444	-4
10	-0,4	-4

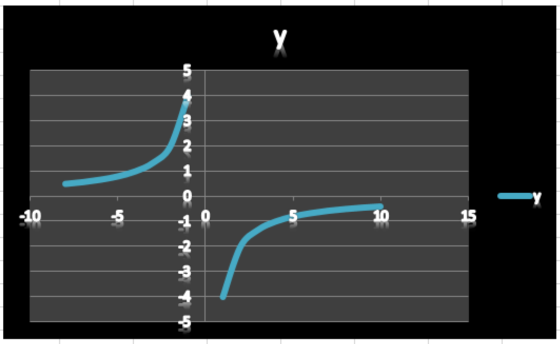


Figura 8.2.16: Produção de Carolina na folha de cálculo TC2-Q2.3.

A aluna copia depois o esboço da representação gráfica para o enunciado da tarefa, como apresento na figura 8.2.17. Desta vez, a aluna procura que a representação gráfica seja mais aproximada da representação correta do que na situação anterior.

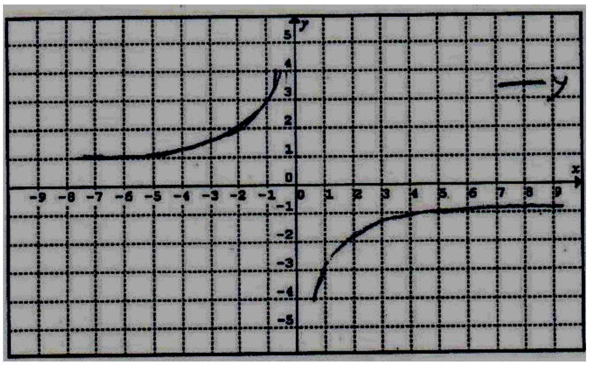
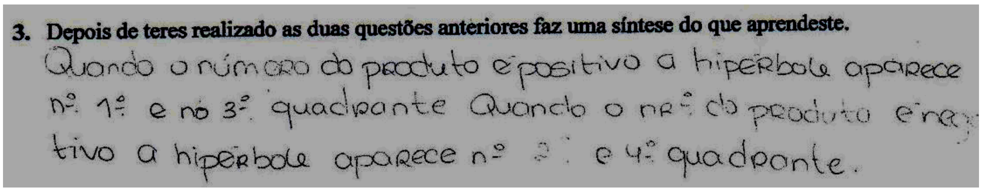


Figura 8.2.17: Esboço gráfico de Carolina, TC2-Q2.3.

Na questão 3, solicito que façam uma síntese das aprendizagens realizadas com as duas questões anteriores, a aluna apresenta a seguinte resposta, na figura 8.2.18.


3. Depois de teres realizado as duas questões anteriores faz uma síntese do que aprendeste.

Quando o número do produto é positivo a hipérbole aparece nº 1º e nó 3º quadrante Quando o nº do produto é neg-tivo a hipérbole aparece nº 2º e 4º quadrante.

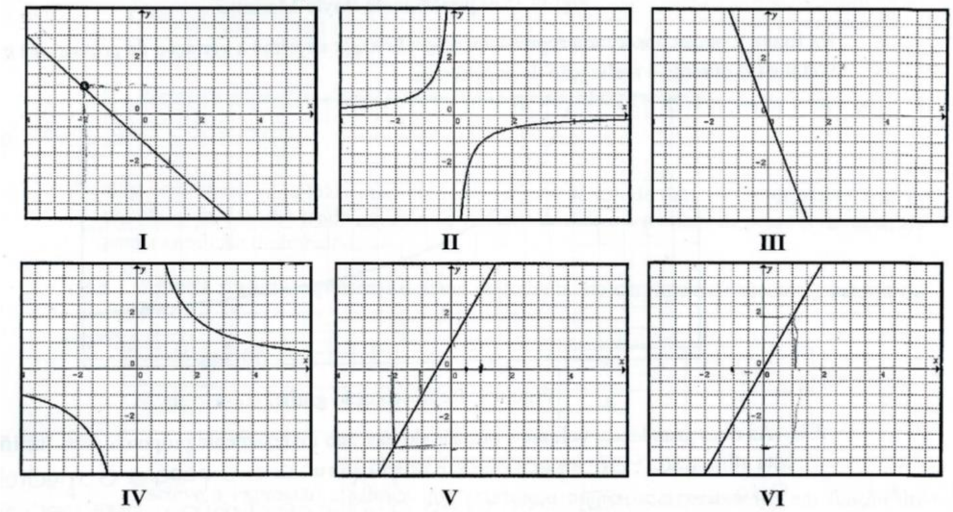
Figura 8.2.18: Produção de Carolina, TC2-Q 3.

Carolina faz uma generalização sem sentir necessidade de fazer mais experiências na folha de cálculo, por exemplo, para outros valores positivos e negativos. Na entrevista a aluna recorda que esta tarefa serviu para “A gente ir começando a praticar as fórmulas que é sempre um número igual à constante a dividir por o outro número… Aqui já fizemos os dois”, referindo-se ao facto da representação gráfica surgir em dois quadrantes. Relativamente às duas situações que a tarefa aborda, onde as constantes de proporcionalidade são números simétricos, Carolina diz que diferem “É ao contrário… Faz que as hipérboles rodem, rodem…”. Questionada acerca da “grande conclusão” que pode retirar desta tarefa, Carolina afirma “Então dependendo do *x* e do *y*, as hipérboles vão aparecer em sítios… Em quadrantes vá diferentes, do gráfico". A aluna destaca ainda a importância da utilização da folha de cálculo na construção das representações gráficas, reconhecendo que de outro modo teria sido muito difícil obter esta representação.

No final da aula em que foi resolvida esta tarefa, em conjunto com os alunos apresento uma síntese da proporcionalidade inversa e da proporcionalidade direta tendo escrito no quadro o tipo de expressão algébrica, bem como a respetiva representação gráfica associada.

Relativamente à tarefa D-2 (Anexo 20), Carolina afirma não ter sentido dificuldades. Na primeira questão, onde peço que a aluna associe cada uma das representações gráficas com a respetiva expressão algébrica, Carolina atribui valores a *x* de modo a obter o valor de *y* verifica, em simultâneo, se o ponto com essas coordenadas pertence ou não às representações gráficas possíveis para essa situação, como mostro na figura 8.2.19.

1. Considera as seguintes representações gráficas.



1.1. Preenche a tabela seguinte indicando o gráfico correspondente a cada uma das expressões algébricas.

Expressão algébrica	$y = 2x$	$y = \frac{4}{x}$	$y = -\frac{1}{x}$	$y = -3x$	$y = -x - 1$	$y = 2x + 1$
Gráfico	VI	II	IV	III	$-(-2)-1 = 2-1 = 1$ I	V

Figura 8.2.19: Produção de Carolina, TD2-Q1.1.

Em seguida, solicito que identifiquem quais as situações de proporcionalidade (direta ou inversa) e para cada caso, peço que indiquem a constante de proporcionalidade. Carolina não consegue associar corretamente as representações gráficas II e IV e fica triste, no momento da discussão verifica que trocou as representações e afirma que não sabe a razão desta troca. Na entrevista Carolina recorda esta primeira questão afirmando "Este foi fácil, sim esta ficha foi fácil […] é só substituir aqui os números e depois víamos os pontos [na representação gráfica] …" (E2).

Na questão seguinte acerca da experiência de Boyle-Mariotte, Carolina não mostra dificuldades. A aluna apoia-se na representação gráfica, de onde retira algumas coordenadas de pontos e efetua a sua multiplicação, verificando assim que o resultado é sempre constante (figura 8.2.20).

2. Na figura 1 podes observar um recipiente, em três momentos distintos, onde alguns pesos exercem pressão sobre um êmbolo que comprime o gás nele contido. Esta é conhecida como a experiência de Boyle-Mariotte.

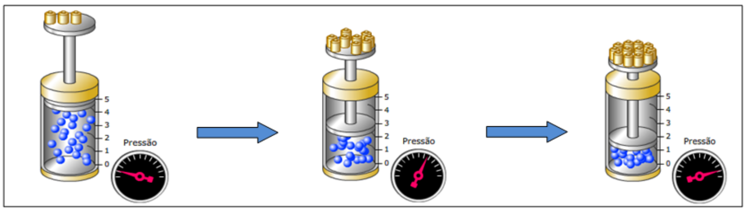


Figura 1: Experiência de Boyle-Mariotte

Na figura 2 podes observar a representação gráfica que exprime a variação da pressão (*p*) e do volume (*v*) durante a realização da experiência.

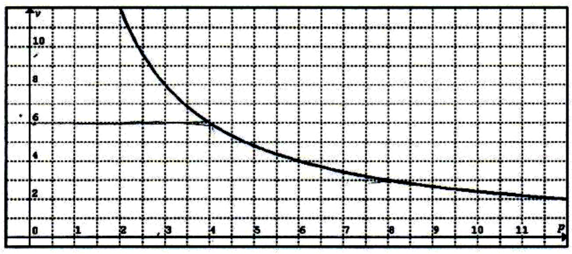


Figura 2: Representação gráfica

2.1. As duas grandezas, volume e pressão do gás, são inversamente proporcionais. Justifica esta afirmação. São inveresamente proporcionais porque à medida que a pressão aumento o volume diminui proporcionalmente

2.2. Qual é a constante de proporcionalidade?
A constante de porpocionalidade é 24.

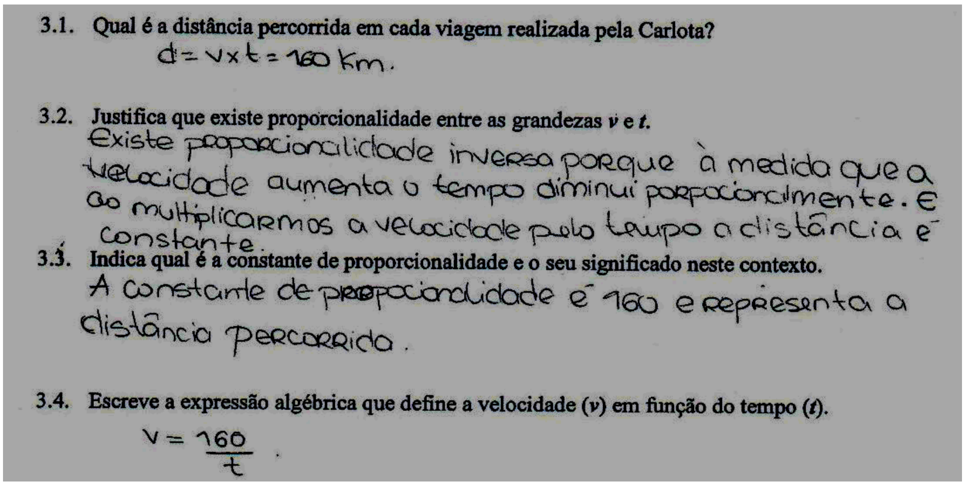
2.3. Escreve a expressão algébrica que define o volume (*v*) em função de (*p*).

$V = \frac{24}{p}$

Figura 8.2.20: Produção de Carolina, TD2-Q2.

A aluna justifica que as grandezas são inversamente proporcionais, indicando a respetiva constante de proporcionalidade bem como a expressão algébrica do volume em função da pressão, onde omite que a pressão nunca pode ser nula.

Relativamente à questão 3, uma situação que envolve a velocidade e o tempo que demorado a percorrer um determinado percurso. Carolina apenas me chama para confirmar que a distância percorrida se pode calcular através do produto entre a velocidade e o tempo despendido e responde às questões colocadas como mostro na figura 8.2.21.


3.1. Qual é a distância percorrida em cada viagem realizada pela Carlota?

$d = v \times t = 160$ km.

3.2. Justifica que existe proporcionalidade entre as grandezas *v* e *t*.

Existe proporcionalidade inversa porque à medida que a velocidade aumenta o tempo diminui porporcionalmente. E ao multiplicarmos a velocidade pelo tempo a distância é constante.

3.3. Indica qual é a constante de proporcionalidade e o seu significado neste contexto.

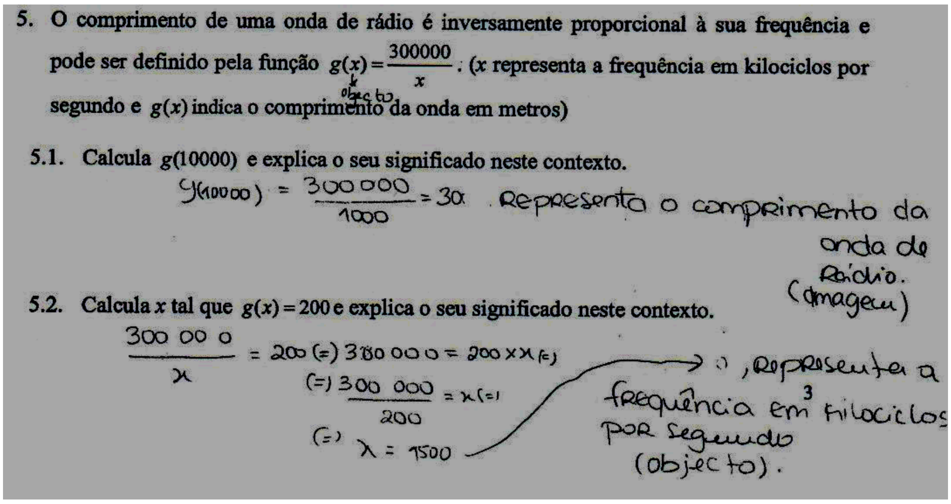
A constante de proporcionalidade é 160 e representa a distância percorrida.

3.4. Escreve a expressão algébrica que define a velocidade (*v*) em função do tempo (*t*).

$v = \frac{160}{t}$.

Figura 8.2.21: Produção de Carolina, TD2-Q3.

A questão 5, aborda o comprimento de uma onda de rádio, uma situação pouco conhecida por parte dos alunos. Nesta situação, as dificuldades da aluna prendem-se apenas com o contexto da proposta (8.2.22).


5. O comprimento de uma onda de rádio é inversamente proporcional à sua frequência e pode ser definido pela função $g(x) = \frac{300000}{x}$; (*x* representa a frequência em kilociclos por segundo e $g(x)$ indica o comprimento da onda em metros)

5.1. Calcula $g(10000)$ e explica o seu significado neste contexto.

$g(10000) = \frac{300\,000}{1000} = 30$. Representa o comprimento da onda de rádio. (imagem)

5.2. Calcula *x* tal que $g(x) = 200$ e explica o seu significado neste contexto.

$\frac{300\,00\,0}{x} = 200 \Leftrightarrow 300\,000 = 200 \times x \Leftrightarrow \frac{300\,000}{200} = x \Leftrightarrow x = 1500$ → , representa a frequência em kilociclos por segundo (objecto).

Figura 8.2.22: Produção de Carolina, TD2-Q5.

A aluna na questão 5.1, por lapso, omite um dos zeros do número do que se encontra no denominador escrevendo 1000 em lugar de 10000, o que obviamente altera o resultado. Questionada, na entrevista, acerca do propósito desta tarefa, a aluna refere que serve “Para a gente identificar os vários gráficos […] de proporcionalidade inversa ou direta ou nem um nem outro. Às vezes não é nem um nem outro” (E2).

A tarefa E-2 (Anexo 21) refere-se à parte do tópico que aborda o estudo das representações gráficas. Carolina apresenta algumas dificuldades na abordagem à primeira questão, em particular, na interpretação do gráfico, "…. Esse gráfico é um bocado, … Às vezes a gente confunde por causa dos pontinhos, às vezes parece que é num mês, mas é no outro mês" (E2). A aluna esboça alguns traços no gráfico de modo a encontrar as respostas às questões, como o saldo inicial, os meses em que não há depósitos, entre outras (figura 8.2.23). Estes traçados auxiliam a aluna na leitura dos gráficos, em particular, na identificação dos meses, bem como da respetiva quantia.

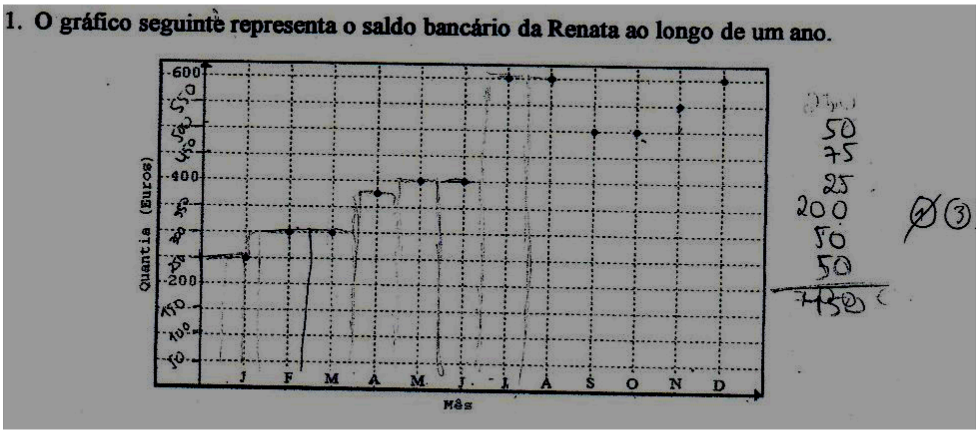
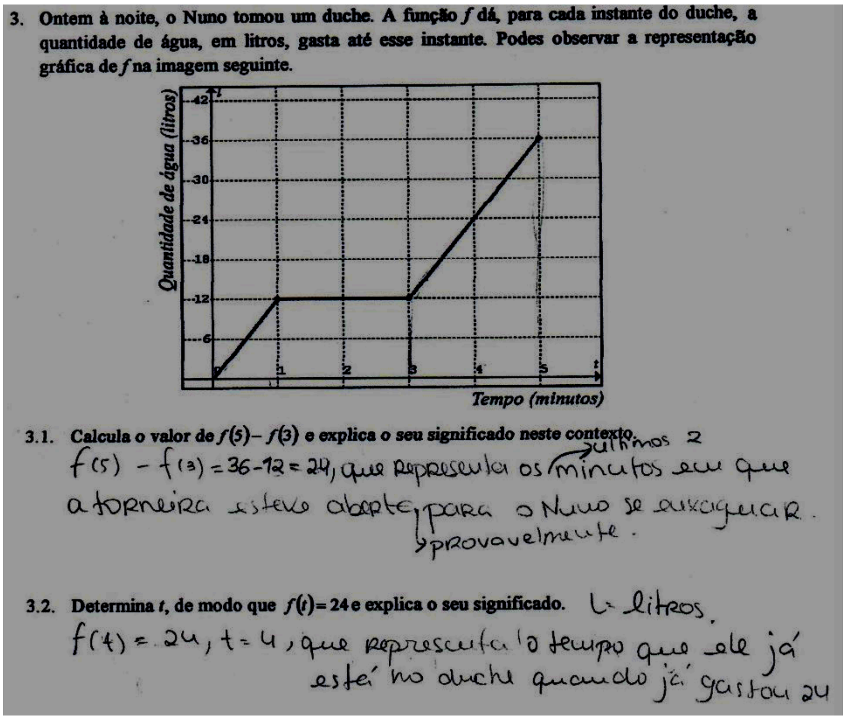


Figura 8.2.23: Anotações de Carolina na representação gráfica, TE2-Q1.

Nas restantes questões da tarefa, a aluna não apresenta dificuldades, como se pode observar pelas respostas apresentadas na figura 8.2.24.



3. Ontem à noite, o Nuno tomou um duche. A função *f* dá, para cada instante do duche, a quantidade de água, em litros, gasta até esse instante. Podes observar a representação gráfica de *f* na imagem seguinte.

3.1. Calcula o valor de $f(5)-f(3)$ e explica o seu significado neste contexto.

$f(5)-f(3)=36-12=24$, que representa os últimos 2 minutos em que a torneira esteve aberta, provavelmente para o Nuno se enxaguar.

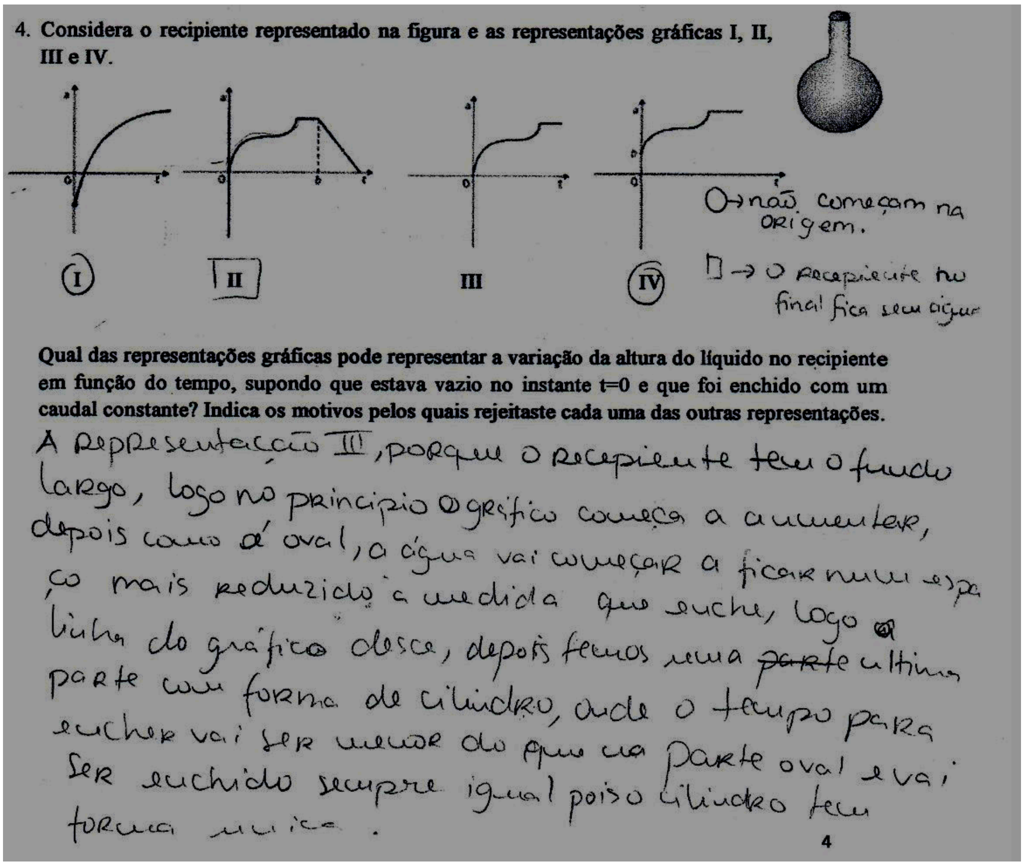
3.2. Determina *t*, de modo que $f(t)=24$ e explica o seu significado. L = litros.

$f(t)=24$, $t=4$, que representa o tempo que ele já está no duche quando já gastou 24 L

Figura 8.2.24: Produção de Carolina, TE2-Q3.

Na entrevista, a aluna recorda a sua produção, em particular na questão 3.1 “lembro-me f(5) menos f(3) … já não me lembro como é que fiz isto…f(5) é 36, não é? Sim, também é fácil é só ver… Ah, igual a 4, 24, é fácil!” (E2)

Relativamente à última questão, que apresento na figura 8.2.25 a aluna afirma “Então começa, este não é muito difícil, estes gráficos assim… É a 3, começa por encher muito, depois enche menos e depois, … Isto não é difícil” (E2).


4. Considera o recipiente representado na figura e as representações gráficas I, II, III e IV.

I II III IV

O → não começam na origem.

II → o recipiente no final fica sem água

Qual das representações gráficas pode representar a variação da altura do líquido no recipiente em função do tempo, supondo que estava vazio no instante t=0 e que foi enchido com um caudal constante? Indica os motivos pelos quais rejeitaste cada uma das outras representações.

A representação III, porque o recipiente tem o fundo largo, logo no princípio o gráfico começa a aumentar, depois como é oval, a água vai começar a ficar num espaço mais reduzido à medida que enche, logo a linha do gráfico desce, depois temos uma ~~parte~~ última parte com forma de cilindro, onde o tempo para encher vai ser menor do que na parte oval e vai ser enchido sempre igual pois o cilindro tem forma única.

4

Figura 8.2.25: Produção de Carolina TE-2, Q4.

Na entrevista (E2) (Anexo 22) para além de serem revisitadas as tarefas resolvidas por Carolina são colocadas outras propostas. A aluna ao ler o enunciado da primeira situação, afirma de imediato que se trata de uma situação de proporcionalidade direta.

> **Carolina**: Então aqui é direta, quanto maior for, quanto maior for o lado do quadrado, maior é o seu perímetro, não é?
> **Professora**: Tu é que sabes Carolina. Será?

Perante a minha resposta, Carolina sente necessidade de concretizar para quadrados específicos, como mostra o diálogo seguinte.

> **Carolina**: Sim, atão, … [desenha um quadrado com lado 2] este tem 2, o perímetro aqui é 6.
> **Professora**: Porquê?
> **Carolina**: Ah, não é nada 6!… 2, 4, 6, 8, é 8, não é? [desenha depois outro quadrado com lado 5] E aqui é 5, 5, 10, 15, 20 veja, quanto maior for o lado, maior é o seu perímetro.

Professora: Como é que eu sei? Isso aumenta proporcionalmente? De certeza?
Carolina: Hummmm 2 está para 8, assim como 5 está para *x*, não é? Ah é!
Professora: Como é que chegas à conclusão de que é uma situação de proporcionalidade direta?
Carolina: Então?! Se nós fizermos uma regra de três simples e verificarmos que coincide, é direta, não é?

Carolina, recorre à regra de três simples para confirmar a sua intuição acerca da existência de proporcionalidade direta, entre a medida do lado e o perímetro de um quadrado. O recurso à regra de três simples é a ferramenta de verificação do resultado, como mostro na figura 8.2.26.

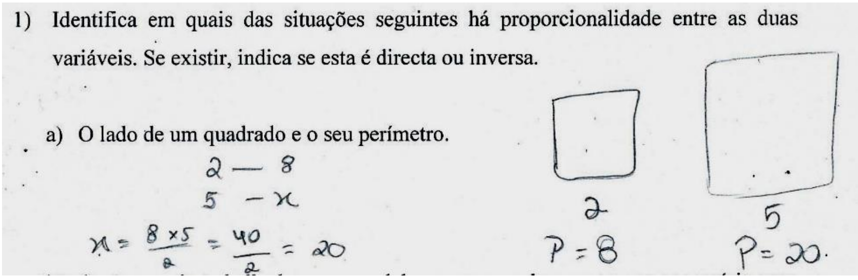


Figura 8.2.26: Produção de Carolina, E2-Q1.a).

Na situação seguinte, figura 8.2.27, Carolina afirma logo ser de proporcionalidade inversa.

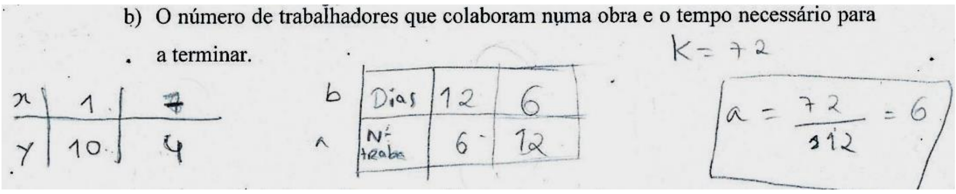


Figura 8.2.27: Produção de Carolina, E2-Q1. b).

Na sequência da sua resposta, questiono-a.

Professora: Porquê?
Carolina: [A aluna constrói uma tabela] Dias… Número de trabalhadores… Mas agora não posso fazer asneira, não é? Então vá … Por exemplo se forem 12 dias, 6 trabalhadores, se forem 6 dias é 3 trabalhadores, não é?

Professora: Não sei…
Carolina: Ai, não é nada! Então estou parva!?
Professora: O que é que aconteceu?
Carolina: Se forem 6 dias é 12 trabalhadores.
Professora: Porquê?
Carolina: Porque se queremos fazer as coisas mais rápido, em menos tempo, têm de ser mais pessoas, então se os dias diminuem, os trabalhadores têm de aumentar.
Professora: E são 12 e porque não são 13 ou 11? Também aumentava…
Carolina: Então fazemos assim: 12 a dividir por 6, não! Inversa é a multiplicar! 6 vezes 12…. Quanto é que é professora?

Ajudo a aluna a chegar ao resultado do cálculo.

Carolina: Então a constante é 72. Este é o *a* e este é o *b*. O *a* é igual a 72 a dividir por aiiiii, por 12, não é?
Professora: Tu é que sabes Carolina.
Carolina: É 72 a dividir por 12 é 6, não é? Tem de ser, não é? [Risos]. Então e aqui está proporcionalidade inversa [referindo-se à formula que ao mesmo tempo desenha em volta um retângulo a destacar].

A aluna, mais uma vez, mostra que possui uma forma que lhe permite efetuar a verificação de existência, ou não, de proporcionalidade inversa.

Professora: O que eu te estava a perguntar era: tu dizias ah se o número de dias diminui o número de trabalhadores tem de aumentar, mas não pode…
Carolina: Ser ao calhas. Então aqui se diminui 6 dias, espere, se diminui 6 dias aumenta 6 trabalhadores.
Professora: E é sempre assim?
Carolina: Não, não, mas porque…. Oh professora eu não sei explicar…
Professora: Aqui diminui 6 dias e aumentou 6 trabalhadores, eu concordo plenamente. Agora eu pergunto se é assim em qualquer situação de proporcionalidade inversa?
Carolina: Não, não só aqui. Eu é que quis pôr números fáceis, não é?... Isto está bem não está?
Professora: Não sei […]. Tu consegues perceber quando é que é situação de proporcionalidade inversa ou não?
Carolina: Sim.
Professora: Como fazes?
Carolina: Multiplico e vejo se dá sempre igual, a constante. Se não der, não é.
Professora: Esta questão da diminuição como tu estavas a fazer podes aplicar noutras situações de proporcionalidade inversa? […]. Aqui diminui 6, aqui aumentou 6 então é situação de proporcionalidade inversa…
Carolina: Sim. Não, às vezes não! Só se a constante der igual!

Carolina explica desta forma que multiplica os valores das grandezas de modo a confirmar a existência, ou não, de proporcionalidade inversa, sendo o resultado dessa multiplicação a constante de proporcionalidade.

Numa situação em que não existe proporcionalidade, Carolina começa a ler o enunciado e estabelecemos o seguinte diálogo:

> **Carolina**: O valor a pagar a uma banda de rock?…. Espere! Este é também é de…. Direta.
> **Professora**: Porquê?
> **Carolina:** Porque quanto mais tempo eles tocam mais dinheiro vão ganhar.
> **Professora:** Sim é um facto, é normal…
> **Carolina**: Vamos lá ver, se eles tocam 1h, 2h, 3h, 4h, 5h [a aluna constrói uma representação gráfica] Uma taxa fixa de 200 euros… Ai não… Então é direta, porque… Não sei porquê…

A aluna procura na representação gráfica, que mostro na figura 8.2.28, um suporte para a ajudar a dar a encontrar resposta à situação apresentada e concluir se está, ou não, perante uma situação de proporcionalidade, direta ou não.

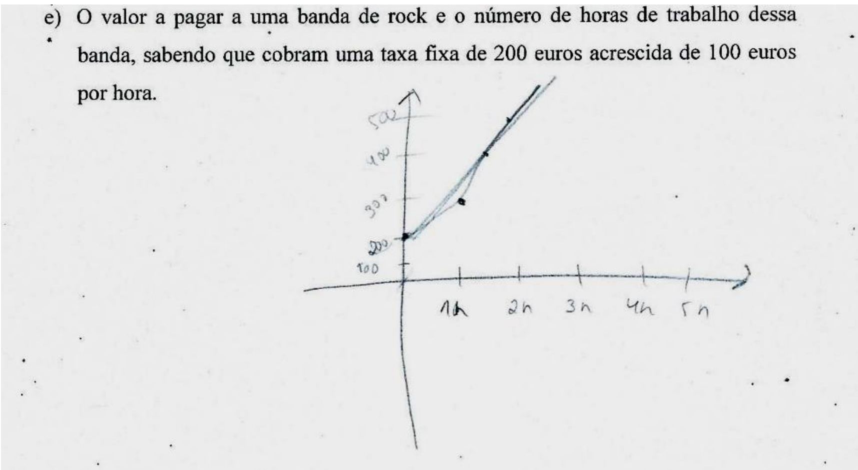


Figura 8.2.28: Produção de Carolina, E2-Q1. e).

Perante uma certa indecisão da aluna, continuo a questioná-la acerca da representação gráfica.

> **Professora**: Porque é que tu aqui colocaste de 100 em 100? [no gráfico]
> **Carolina**: Porque aqui aumenta 100 euros… Ele já tem isto garantido [referindo-se aos 200 euros], não é?
> **Professora**: Ao fim de 1 hora o que é que vai receber?

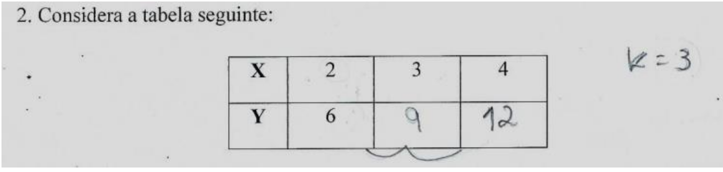
Carolina: 200 euros, não! Então eles já recebem 200 euros, mas podem não tocar 1 hora.
Professora: O que eu estou a perguntar é: ao fim de 1 hora quanto e que vai receber?
Carolina: 300 euros, não é?
Professora: Ao fim de 2h?
Carolina: 400, 500… Isto [representação gráfica] não está muito direito, mas não faz mal, era para estar assim [reta a passar na origem] … E isto não é…Não é proporcionalidade inversa por causa que … quando a gente começa por um número, se a gente já tem um número, oh pá, eu percebo, mas não sei explicar.
Professora: Então vá, explica lá Carolina que tu consegues.
Carolina: Mas pelo gráfico eu sei… A gente começa aqui pelo 200, se eles não tivessem uma taxa fixa, eles começavam pelo zero, ao fim de 1 h recebiam 100 euros, ao fim de 2 horas recebiam 200 e assim sucessivamente, mas como eles já tinham uma taxa fixa de 200 euros. A reta corta o eixo dos y no 200… E assim já não pode ser de proporcionalidade inversa.
Professora: E se cortasse na origem era inversa?
Carolina: Proporcionalidade direta! … Não é direta nem inversa.

Neste diálogo a aluna verbaliza o seu entendimento acerca da proporcionalidade direta. A conversão da informação do enunciado para uma representação gráfica serve para a aluna melhor visualizar o que acontece para diferentes valores das variáveis envolvidas e tomar a decisão relativamente à existência ou não de proporcionalidade.

Noutra questão, peço para à aluna para completar uma tabela, de modo que as grandezas sejam inversamente proporcionais. Carolina lê o enunciado e começa a resolver.

Carolina: Ah direta…. Pode ser 6 a dividir por 2 ou 2 a dividir por 6?
Professora: Tu é que sabes.
Carolina: 6 a dividir por 2, então a constante é 3…. Então aqui tem de ser 3 vezes…. Então, mas assim não… 3 vezes 3 dá 6 e 3 vezes 2 também dá 6, não este tem de ser, não, não é? Estou a dizer bem: 2 vezes 3 é 6 e se eu fizer aqui também dá 6, não é? O que é que eu estou a fazer? Diretamente proporcionais…. Então tem de ser 3 vezes 3, 9, não é?
Professora: Pois, não sei, vai tentando, vai fazendo…
Carolina: 6,7, 8, 9,10,11,12, aqui acrescenta 3, aqui acrescenta 1, não é?
Professora: E então? Estás confiante na tua resolução ou não?
Carolina: Estou muito confiante!
Professora: Porquê?
Carolina: Então, porque a constante ahhhhhhhhhh… porque é que eu estava a fazer 3 vezes 2? Às vezes, sou parva… Porque primeiro dividi o 6 pelo 2, dá 3 descobrimos que a constante é 3. Então para descobrirmos o *y* temos de fazer 3 vezes 3, dá 9 e aqui o 4 é 4 vezes 3 que dá 12.

A aluna consegue assim completar a tabela como mostro na figura 8.2.29.



2. Considera a tabela seguinte:

X	2	3	4
Y	6	9	12

k = 3

Figura 8.2.29: Produção de Carolina, E2-Q2.1.

Por fim, questiono-a acerca dos seus procedimentos.

Professora: E então porque é que tu dividiste e não multiplicaste?
Carolina: Porque multiplicar é para a inversa e dividir é para a direta [a aluna acentua a sílaba *di* de dividir e *di* de direta]. Só decorei assim, sabia?
Professora: Decoraste foi isso da multiplicação e divisão?
Carolina: Sim decorei, não conseguia saber.

Nesta última parte do diálogo, Carolina assume que decora os termos estabelecendo associações entre as palavras, em especial, para distinguir as situações de proporcionalidade direta e inversa. Ainda na resolução da mesma questão, a aluna não mostra qualquer dificuldade em encontrar a constante de proporcionalidade assim como em escrever a expressão algébrica.

Carolina: *y* é igual a 3*x*.
Professora: Porquê?
Carolina: Atão, é sempre *este*, vezes, *a constante*.

Na última alínea desta questão é peço que a aluna descreva a representação gráfica desta função.

Carolina: A reta corta o eixo, no eixo dos *yy*, no zero, não é? Começa pelo zero, não é? Tem de ser. E depois vai aumentando 3, 3 coisinhos, de 3 em 3, vai de 3 em 3 porque a constante é 3.

Na questão seguinte, figura 8.2.30, é dada a mesma tabela para completar, considerando agora que as grandezas são inversamente proporcionais.

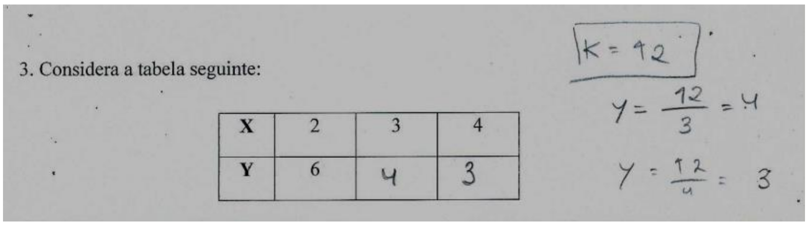


Figura 8.2.30: Produção de Carolina, E2-Q3.1.

Carolina resolve a proposta em constante diálogo comigo:

Carolina: Hummm, 3 vezes 12, professora? … Não, não é 3 vezes 12, calma, não é professora, não é! É assim: este é diferente, este é *y* é igual a 12 a dividir por 3, não é? 12 a dividir por 3 é 6, 4 [risos] aqui é 4, aqui é 12 a dividir por 4, 12 a dividir por 4? 3, agora é que é 3!
Professora: Então vá, explica-me lá como é que tu completaste a tabela.
Carolina: Então, descobri a constante e multipliquei o 2 pelo 6 ou 6 pelo 2, dá 12, então descobrimos que a constante é 12. Depois temos sempre uma fórmula para a proporcionalidade inversa que é o *y* igual à constante a dividir pelo *x* e depois assim descobrimos o valor de *y*.

Em seguida, peço à aluna para me indicar a expressão algébrica, ao que Carolina responde corretamente.

Professora: E este *x* pode tomar qualquer valor?
Carolina: Pode… Sim, não é? Pode sim.
Professora: E se fosse zero?
Carolina: Ah! Tem de ser diferente de zero.
Professora: Porquê?
Carolina: Porque senão não faz uma hipérbole [risos]… Faz uma coisa esquisita, senão vai cortar no zero, no… Naquilo, o coiso… Aquele no gráfico, não é?
Professora: Lembraste da tarefa B-2, aquela dos produtos fixos? O que é que nós tivemos de fazer ao zero?
Carolina: No Excel não foi? Tivemos que apagar o zero.
Professora: O que é que acontecia ao gráfico?
Carolina: Quando a gente não apagava... Eu já não me lembro… Ah! Fazia o Raio X [eletrocardiograma].

Por fim, solicito a Carolina que apresente a representação gráfica da função definida na tabela.

Carolina: Ai, isso é que eu não sei.
Professora: Como é que vai ser a representação gráfica?
Carolina: Então, vai ser assim… vai ser uma hipérbole, não é verdade?
Professora: Uma hipérbole… em que quadrante?

Carolina: No … este é o primeiro, não é? Este é o 2.º, este é o 3.º e este é o 4.º…1.º, 2.º, 3.º 4.º.... então é no 1.º.

Apresento um novo problema que a aluna lê em voz alta e, rapidamente, opta por construir uma tabela como mostro na figura 8.2.31.

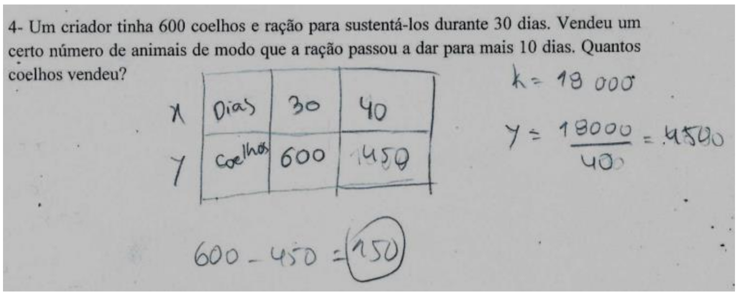


Figura 8.2.31: Produção de Carolina para E2-P4.

Carolina: 600 coelhos, 30 dias quanto menos coelhos, quanto menos coelhos mais dá para mais dias, não é? Atão podemos fazer … A inversa é a multiplicar, não é? … Fogo isto dá uma coisa muito grande, não é? Vá 10 dias, a constante é …. É, não é professora? Então para descobrir *y* fazemos… ai *x* por 10, dá assim… Tão quantos coelhos vendeu? Ai, então, mas ele aqui ficou com mais coelhos?! Ai parva, então aqui é, dá para mais dias então aqui fica 40.
Professora: E agora quantos são os coelhos?
Carolina: Então aqui tem de ser a dividir por 40…. Então fazemos 600 menos 450 que dá 150, não é? Atão isto foi o que ele vendeu, vendeu 150 coelhos.

A aluna recorre a uma tabela para organizar a informação do enunciado, calcula de seguida a constante de proporcionalidade, o que lhe permite calcular o valor em falta.

Por fim, questiono a aluna procurando saber por razão optou pela construção da tabela.

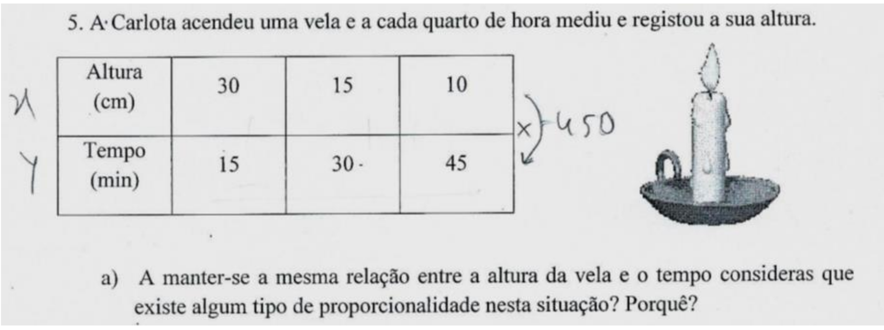
Professora: Porque é que tu fizeste uma tabela para resolveres este problema?
Carolina: Porque é mais fácil a gente organizar as coisas na nossa cabeça, porque vemos logo, sei lá… Assim é mais fácil e a professora diz sempre para a gente meter os dados numa tabelinha!

A aluna reconhece as potencialidades do uso da tabela na organização da informação, o que parece facilitar o relacionamento entre as grandezas envolvidas no problema. Destaca ainda, a minha recomendação habitual no sentido de levar os alunos a organizarem os dados de modo a facilitar a sua análise.

Relativamente, ao problema 5, a aluna após ler o enunciado e começa a analisar se existe alguma relação entre as variáveis, tempo e altura, da vela.

> **Carolina**: Hummm, não sei. Mas acho que sim, sim porque então, porque espere, vou ver…30 a dividir por 15, 2, 15 a dividir por 30, não dá 2. Não pode ser direta, claro que não pode ser direta!
> **Professora**: Porque disseste isso agora "claro que não pode ser direta"?
> **Carolina**: Porque se aqui diminui, aqui tinha de diminuir, se aqui aumenta aqui tinha de aumentar… 30 vezes 15, vou ver quanto é… Ah, é de inversa!
> **Professora**: Porquê?
> **Carolina**: Porque se a gente dividir, …, multiplicar este por este, dá 450, não é? E aqui dá 450, sempre, sempre…

A aluna conclui assim que se trata de uma situação de proporcionalidade inversa e assinala a constante de proporcionalidade, no enunciado, como um produto constante dos valores correspondentes nas duas linhas, como mostro na figura 8.2.32.



5. A Carlota acendeu uma vela e a cada quarto de hora mediu e registou a sua altura.

x	Altura (cm)	30	15	10
y	Tempo (min)	15	30	45

x → 450

a) A manter-se a mesma relação entre a altura da vela e o tempo consideras que existe algum tipo de proporcionalidade nesta situação? Porquê?

Figura 8.2.32: Produção de Carolina, E2-Q5.a).

Carolina não mostra qualquer dificuldade em calcular a altura da vela, ao fim de uma hora e meia de estar acesa, como mostro na figura 8.2.33.

> **Carolina**: Ah, pois *x* é igual a 450 a dividir por 90, 5 é 5 cm porque isto é a conta que a gente faz para a proporcionalidade inversa… Esta é a constante este é o *y* que é os 90 minutos e o *x* é a altura que está aqui.

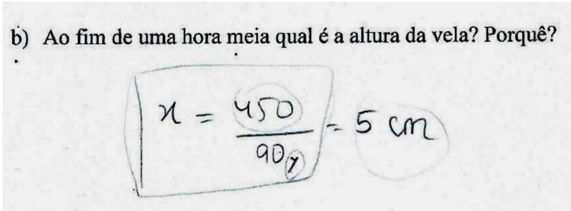


Figura 8.2.33: Produção de Carolina para E2-Q5. b).

A análise do discurso de Carolina permite concluir que a aluna recorre à expressão algébrica de uma situação de proporcionalidade inversa, que designa por “a conta que a gente faz para a proporcionalidade inversa” como uma grandeza sendo igual à constante de proporcionalidade a dividir pela outra grandeza, neste caso *y*, como assinala no denominador.

Na questão seguinte Carolina mostra dificuldade em saber como deve proceder, pelo facto de se pretender saber quanto há tempo arde a vela, de modo a que a sua altura seja inferior a 1 *cm*. A dificuldade parece estar no “ser inferior a…” em vez de ser um valor exato.

Carolina: Então agora é ao contrário? *y* igual a 450 a dividir por 1, é, não é? É inferior, menos ou igual, professora… Mas, isto é 450… Minutos, não é? Então agora queremos saber o *y*, o *y* é os minutos e temos … Ou senão é menos, a partir de 449 minutos, não 451! Então porque é inferior a 1, então tem de ser menos do que 1 cm, então tem de arder mais tempo, tem de ser pelo menos 451 minutos.
Professora: Mas porquê 451?
Carolina: 450,1?
Professora: Já chega ou não?
Carolina: Chega!
Professora: Chega e então como é que poderás responder a esta questão?
Carolina: Ahhhhhhhhh que ao fim de … Não…. Oh, ... não sei professora, eu podia só por a resposta: ao fim de 450,1 a vela já terá menos do que 1 *cm* porque aos 450 ela terá 1*cm*, não é?
Professora: Mas tu sabes que há décimos de segundo, milésimos de segundo, esses intervalos de tempo podem ser muito, muito pequeninos…
Carolina: Ah … A partir dos 450!

Depois deste diálogo, a aluna prossegue para o cálculo e responde à questão. Por fim, na última questão deste problema, peço-lhe que identifique a representação gráfica que corresponde à situação do enunciado. Carolina lê atentamente o problema e coloca a tabela do enunciado ao lado das representações gráficas, procurando relacionar pontos das diferentes representações gráficas com a situação do enunciado.

Carolina: 450 a dividir por 5 é …. É quanto? 90. Este [A] não pode ser devia estar no 90 e está no 65, não é?
Professora: No 65?
Carolina: No 70, tá no 70 e não pode, o A não pode pois não?

A aluna elimina assim a representação A.

Carolina: O B, qual é que é o B? Aqui é 5 outra vez, não é? É…Ah é este, aqui já está no 90…. Vou deixar para trás…

A aluna pensa ser o B, mas volta a analisar outras representações gráficas antes de tomar a sua decisão.

Carolina: Agora aqui este é o C, 40…Este é daqui, vá 30… Este corta aqui no 20, sim. No 20 então também não pode ser…

Em seguida, elimina a representação gráfica C e testa a representação D.

Carolina: Vou fazer o 40, aqui dá 20 por isso não pode ser. Então é este [B]!
Professora: De certeza absoluta?
Carolina: Sintética e analítica!
Professora: Verificaste? Verificando com um ponto apenas achas que é o suficiente para vermos que é esse o gráfico?
Carolina: Olhe só, basta ver que os outros não são!
Professora: Mas aqui eu pergunto se dos gráficos representados haverá algum?
Carolina: Pois é 450 a dividir por 5, é o B…Onde é que está? Cruza aqui outro…. Aqui, aqui é 15, não é? 450 a dividir por 15, 15, 30 tá bem, viu professora? A professora gosta de confundir-me…

A aluna seleciona assim a representação gráfica B como mostro na figura 8.2.34.

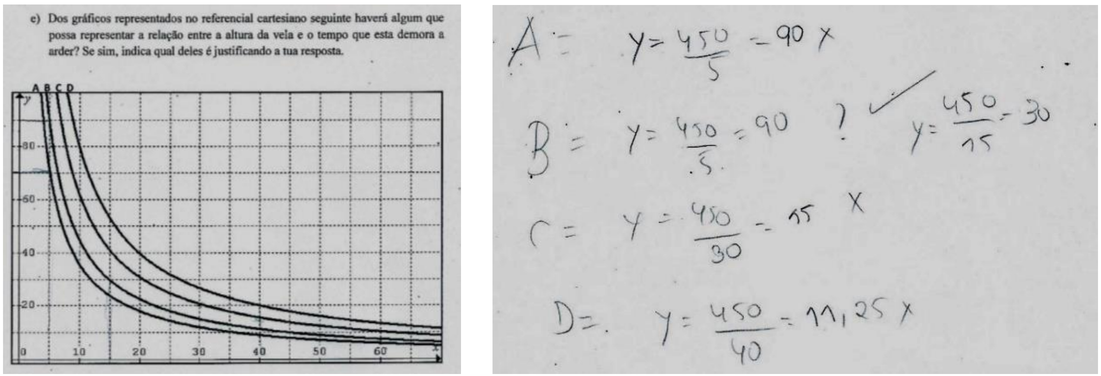


Figura 8.2.34: Seleção da representação gráfica por Carolina.E2-Q5. d).

Por fim, peço à aluna que associe à situação descrita no enunciado (Fig. 8.2.35) a uma das duas representações gráficas que relacionam o tempo com a velocidade.

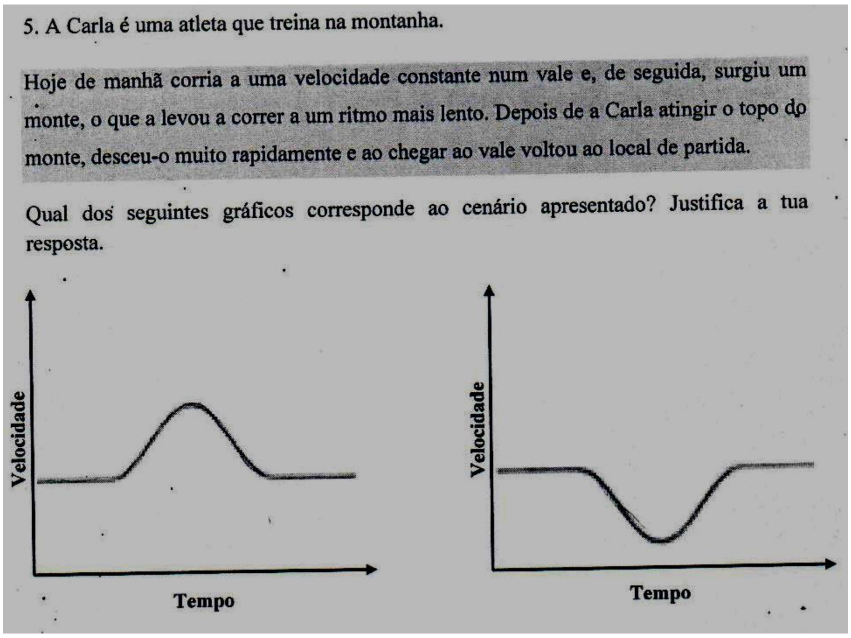


Figura 8.2.35: Seleção da representação gráfica por Carolina, E2-Q6.

A aluna lê o enunciado, observa as duas representações gráficas e de imediato afirma que é a segunda.

Carolina: Então é este, então é este [2.ª representação gráfica]!
Professora: Porquê?
Carolina: Então, porque ela ia constante e aqui é como se ela corresse mais depressa e voltasse a diminuir, é como se ela estivesse a descer uma montanha e depois a subir e não a descer e depois a subir.

Professora: Então, explica-me lá melhor…
Carolina: Este, o 2.º porque, porque aqui o valor, o valor da, isto não é uma reta, isto é o quê? Vai diminui e aqui também diz que o monte logo ela a subir correu mais devagar então a velocidade vai diminuir e depois atingiu o topo desceu rapidamente, então a velocidade vai aumentar e depois vai constante e este é ao contrário, aqui aumentava a velocidade e depois diminuía e aqui diz que ela vai mais lenta e não mais rápido.

Carolina interpreta corretamente a situação e associa-a ao respetivo gráfico. No final da entrevista questiono-a acerca da importância das tarefas propostas para o estudo do tópico. A aluna afirma ter gostado mais de resolver as tarefas que eram dirigidas para a folha de cálculo: "Estas do Excel foram fixes, ele faz tudo pela gente… É mais fácil, é muito mais fácil… A gente gosta mais". A aluna acrescenta ainda: "Não é preciso a gente estar a fazer contas, nunca mais saímos dai" e eu pergunto-lhe se ela acha que o Excel influencia a maneira como resolvem as situações propostas, ao que a aluna responde "Assim, a lápis não podemos fazer o que o Excel faz, nem… Se eu vir que tenho o computador à frente é claro que vou ao Excel, mas se não, olha... Não posso fazer como o Excel faz…".

Quanto à tarefa que menos gostou de resolver Carolina diz ter sido a primeira, a tarefa A-2, "Foi a mais aborrecida, tínhamos muitos de seguida para fazer".

Questiono a aluna acerca da dificuldade das questões colocadas na entrevista, ao que ela responde "Não, isso é básico". Relativamente à importância de estudar a proporcionalidade inversa, Carolina considera ser importante. "Claro que sim!" porque vai fazer falta para o ensino secundário e que: "Se calhar já muitas vezes nos deparamos com situações de proporcionalidade inversa e não sabíamos", sendo assim uma oportunidade para alargar os seus conhecimentos.

Síntese

Representações e transformações das representações utilizadas na aprendizagem de métodos formais.

No trabalho com papel e lápis, a linguagem natural, surge ao longo da resolução das diferentes tarefas. Na primeira tarefa a linguagem natural tem uma grande expressão e é utilizada para retirar dados dos enunciados, para a identificação de incógnitas, para as respostas e respetivas justificações. Nas restantes tarefas é usada, essencialmente, para dar a reposta.

Carolina utiliza representações no SNN ao longo de todo o tópico para efetuar cálculos, alguns por substituição. É de destacar que na primeira tarefa a aluna recorre a este sistema de notação para efetuar cálculos com quantidades inversas como operadores para o estabelecimento de relações numa situação de proporcionalidade inversa, o que é relevador que a aluna possui noções deste tipo de raciocínio. Numa outra situação a aluna recorre ainda a representações pictóricas. No entanto, num caso em que não existe proporcionalidade a aluna, erradamente, faz uso de uma regra de três simples.

As representações no SNA surgem na primeira tarefa através da utilização da regra de três simples. Este tipo de representação começa a ser maioritariamente utilizada para a escrita da expressão algébrica de proporcionalidade inversa, a partir da segunda tarefa.

A aluna recorre a representações pictóricas, maioritariamente na tarefa inicial, sempre que precisa de simular uma situação num determinado contexto. Associadas a estas representações, surgem outras no SNN que lhe permitem obter as respostas para as questões colocadas.

As representações gráficas surgem ao longo do estudo do tópico, a partir da segunda tarefa, no trabalho realizado, em paralelo com papel e lápis e a folha de cálculo e, ainda, na entrevista.

Na primeira tarefa, para resolver no ambiente combinado de folha de cálculo e papel e lápis, a aluna mostra dificuldades no preenchimento da tabela inicial devido às suas dificuldades de cálculo, ou seja, nos tratamentos no SNN. Na folha de cálculo apresenta, a aluna mostra facilidade na nomeação de colunas e na definição de uma variável-coluna que determina os valores para a grandeza desconhecida. Contudo, apesar de a aluna explicar corretamente, no SNA, o seu procedimento não escreve corretamente a expressão algébrica que exprime a altura em função da base. Esta dificuldade pode, eventualmente, estar relacionada com o facto de Carolina não estar muito atenta durante a aula. É ainda na mesma aula que os alunos contactam, pela primeira vez, com a hipérbole. Na outra tarefa resolvida com o apoio do ambiente digital da folha de cálculo, os procedimentos da aluna são análogos ao da tarefa anterior, mas aluna manifesta algumas dificuldades em obter a representação gráfica por considerar o valor zero no domínio da função. Desta vez, a aluna converte corretamente a fórmula da folha de cálculo para o SNA, contudo é pouco rigorosa, ignorando o domínio da função, como eu recomendei, diversas vezes, para toda a turma.

Verifico que Carolina a partir do momento em que formalizo a expressão algébrica de uma situação de proporcionalidade inversa, assim como a respetiva representação gráfica, em oposição a situações de proporcionalidade direta, estabelece conexões entre essas representações e utiliza-as para testar a existência de algum tipo de proporcionalidade. Esta é uma evidência do desenvolvimento do pensamento algébrico da aluna.

Ao longo do estudo deste tópico, Carolina articula várias representações para resolver as propostas de trabalho. Como mostram os dados apresentados, tarefas de diferente natureza incentivam diferentes representações e é diferente a forma como essas representações contribuem para as produções da aluna. No gráfico 8.2.1 apresento uma síntese da conversão das representações que a aluna faz na resolução das diferentes tarefas, de acordo com a natureza das questões.

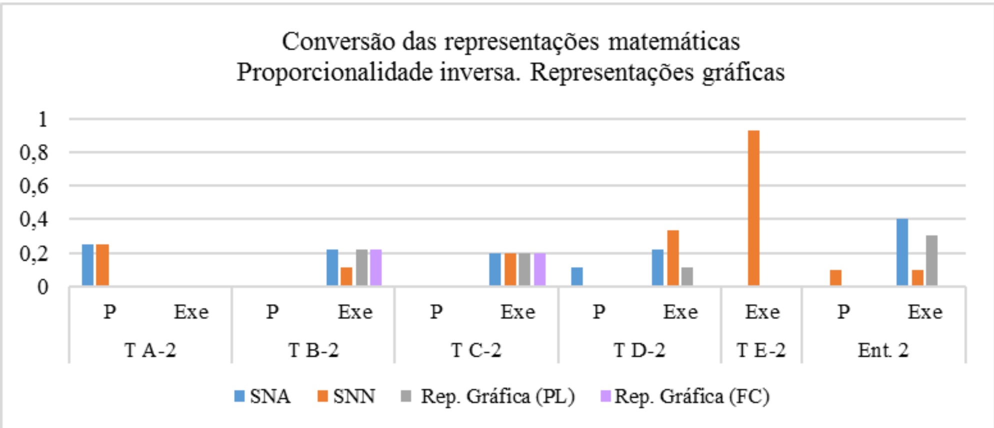


Gráfico 8.2.1: Conversão das representações no estudo do tópico "Proporcionalidade inversa. Representações gráficas".

A atividade de conversão de representações está presente ao longo do estudo deste tópico. Embora nesta representação gráfica apenas considere a conversão para

SNN, SNA e representação gráfica, a aluna também efetua conversões para representações pictóricas e outras (ver Anexo 36). Inicialmente, a conversão de representações surge na resolução de problemas para o SNN e para o SNA. A utilização de incógnitas na aplicação da regra de três-simples é aqui considerada como uma conversão para o SNA. A tarefa E-2 aborda apenas, parte das representações gráficas e não inclui a proporcionalidade. O trabalho da aluna baseia-se essencialmente na análise e interpretação das representações gráficas em determinado contexto, pelo que as conversões acontecem apenas para o SNN. Na resolução das duas tarefas na folha de cálculo, em articulação com o papel e lápis, as conversões surgem para o SNN, SNA e para representações gráficas. É a partir da resolução da tarefa B-2 que a aluna converte dados organizados em tabelas para o SNA (escrita da expressão algébrica de proporcionalidade inversa) bem como para a respetiva representação gráfica (hipérbole). Nas tarefas seguintes, a aluna utiliza recorre a estes conhecimentos para resolver novas propostas de trabalho e sempre que se depara com situações de proporcionalidade, ela testa-as através destes diferentes tipos de representação e da conversão entre eles.

Relativamente ao tratamento de representações, no ambiente de papel e lápis Carolina realiza-os maioritariamente no SNN, embora, muitas vezes, esses tratamentos tenham por base a expressão algébrica de uma situação de proporcionalidade (direta ou inversa) que a aluna não regista. Na folha de cálculo, a aluna realiza os tratamentos habituais no estabelecimento de relações entre as variáveis que correspondem à geração de sequências numéricas ou a geração de variáveis-coluna. A síntese do tratamento das representações encontra-se no gráfico 8.2.2.

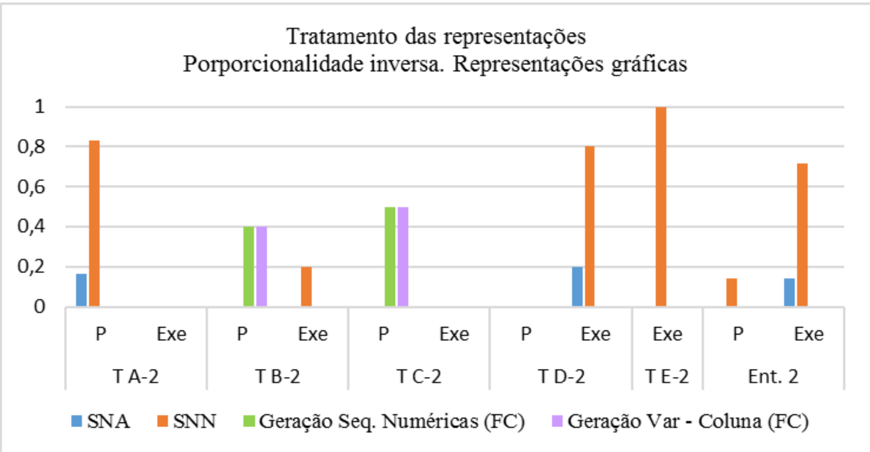


Gráfico 8.2.2: Tratamento das representações no estudo do tópico "Proporcionalidade inversa. Representações gráficas".

Relativamente à aprendizagem do método formal (a expressão algébrica), Carolina no início do estudo deste tópico utiliza noções intuitivas de proporcionalidade inversa, tal como a divisão numa situação concreta, no entanto, numa outra situação recorre a representações pictóricas para poder analisar a situação no contexto. Na segunda tarefa, a aluna obtém a expressão algébrica de uma situação de proporcionalidade inversa e a partir deste momento começa a utilizá-la. A aluna não utiliza este método de forma isolada para resolver as situações propostas, mas em articulação com tabelas e representações gráficas. Embora, por vezes, Carolina não registe a expressão algébrica, é com base nela que efetua os tratamentos no SNN, muitas vezes organizados em tabelas, para decidir se está, ou não, perante uma situação de proporcionalidade inversa.

Na entrevista, a aluna dá evidências de compreender em que situação pode recorrer a este método formal e utiliza-o recorrentemente. Contudo hesita, muitas vezes, na sua resposta, em particular quando o contexto não faz parte do seu quotidiano. A aluna confessa que recorre a artifícios para decorar e identificar as situações em que duas grandezas são, diretamente ou inversamente, proporcionais o que se pode verificar pelas suas incertezas na tomada de decisão.

Após a aprendizagem da escrita da expressão algébrica, quando um enunciado contém uma representação gráfica, a aluna constrói uma tabela e verifica se a multiplicação das duas grandezas é constante, para decidir se está, ou não, perante uma situação de proporcionalidade inversa. Na resolução de problemas, quando os enunciados contêm a informação em linguagem natural associada a representações no SNN, Carolina habitualmente organiza a informação, em tabelas, para em seguida testar a existência de proporcionalidade inversa, através da multiplicação das grandezas. A organização dos dados em tabelas é uma representação que tem grande expressão na atividade da aluna. Embora a expressão algébrica não surja de forma explícita no trabalho da aluna, é com base nela que toma as suas decisões.

O trabalho de Carolina com as representações e sua transformação pode ser esquematizado como mostro na figura 8.2.36.

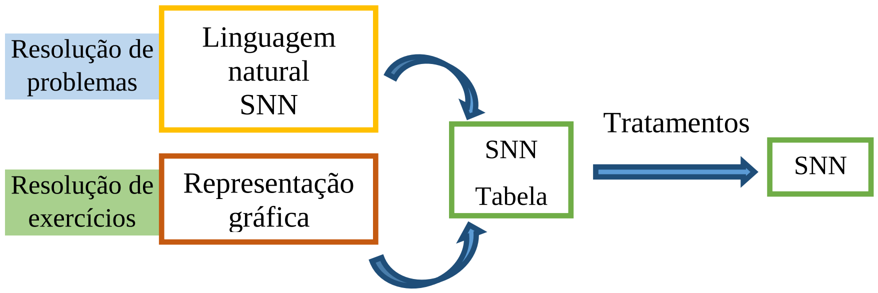


Figura 8.2.36: Trabalho de Carolina, na resolução de problemas e na resolução de exercícios depois da aprendizagem do método formal.

Embora Carolina não mostre um sólido conhecimento, neste tópico, da proporcionalidade inversa, a aprendizagem de novas representações, como a representação gráfica e em articulação com a tabular e a sua transformação, permitem o desenvolvimento do seu pensamento algébrico e permitem-lhe aplicar esses conhecimentos a situações novas como as propostas na entrevista.

O estabelecimento da conexão entre o trabalho desenvolvido na folha de cálculo e a notação algébrica com papel e lápis.

A conexão entre o trabalho feito com a folha de cálculo e a notação algébrica é feito, numa fase inicial, pela própria aluna. Na primeira tarefa realizada a aluna não faz corretamente a conversão da fórmula escrita na folha de cálculo para o SNA, com papel e lápis. No momento de discussão essa conversão é feita novamente e com a participação dos alunos. Na segunda tarefa realizada neste ambiente combinado, a aluna converte acertadamente a fórmula que utiliza na folha de cálculo, contudo omite o domínio da função como lhe recomendei, por diversas vezes. Em ambas as situações a conversão da fórmula na folha de cálculo para o SNA, com papel e lápis é feita de forma linear, termo após termo.

Contribuição da conexão entre os dois ambientes (folha de cálculo e papel e lápis) na aprendizagem dos métodos formais.

A conexão entre os dois ambientes permite a formalização da escrita da expressão algébrica de uma função de proporcionalidade inversa. Carolina após a realização destas duas tarefas onde é feita a formalização e o aprofundamento do estudo da função de proporcionalidade inversa, mostra utilizar corretamente a expressão algébrica, contudo demonstra alguma falta de rigor e nas tarefas propostas não tem o cuidado de indicar que a grandeza do denominador não pode tomar o valor zero.

8.2.3 Aprendizagens no tópico "Equações do 2.º grau a uma incógnita"

Para o estudo deste tópico são propostas sete tarefas, três para explorar com papel e lápis e as restantes para trabalhar num ambiente combinado da folha de cálculo e de papel e lápis.

A análise detalhada da evolução de Carolina na utilização das representações matemáticas, a forma como as coordenadas e os métodos formais que utiliza, encontra-se sintetizada na tabela 8.3 e nos quadros de análise (Anexo 37).

Na Tarefa A-3 (Anexo 24) de diagnóstico, realizada no início do estudo do tópico, a aluna recorre a conversões para o SNN para efetuar cálculos, assim como para o SNA para escrever expressões algébricas para a área e perímetro de retângulos que depois simplifica. Quanto aos métodos formais, na resolução de equações a aluna utiliza a noção de raiz quadrada, mas não consegue resolver equações do tipo ax^2+bx=0, por não se recordar da lei do anulamento do produto, estudada no 8.º ano.

Apresento de seguida alguns excertos do seu trabalho que evidenciam a forma como utiliza as representações matemáticas na expressão do seu pensamento matemático.

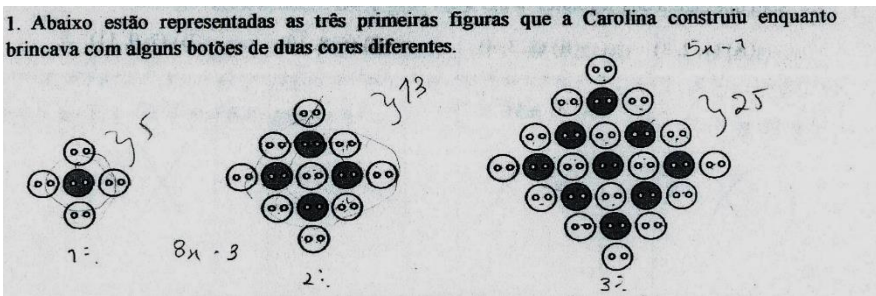
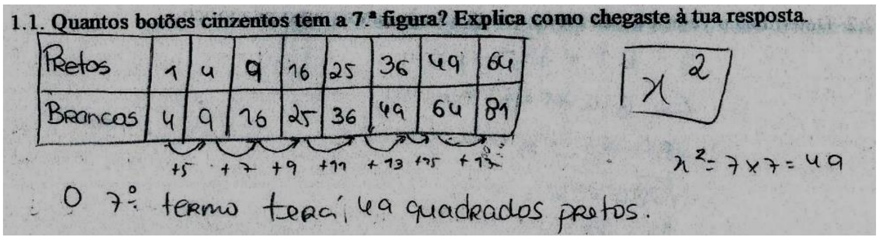


Figura 8.3.1: Produção de Carolina, T A3-Q1.

Carolina conta e anota o número total de botões em cada uma das figuras da sequência (figura 8.3.1). Apresenta algumas expressões algébricas que correspondem a tentativas de encontrar a expressão geradora (“5*x*-1” para a sequência de botões brancos e “8*x*-3” para o total de botões) que, no entanto, se revelam infrutíferas. Em seguida, organiza uma tabela onde insere os primeiros termos das sequências do número de botões pretos e dos brancos (figura 8.3.2) e, deste modo, consegue ainda obter a expressão geradora para esta sequência, apresentando a resposta à primeira questão, substituindo a variável pelo número 7.



1.1. Quantos botões cinzentos tem a 7.ª figura? Explica como chegaste à tua resposta.

Pretos	1	4	9	16	25	36	49	64
Brancos	4	9	16	25	36	49	64	81

+5 +7 +9 +11 +13 +15 +17

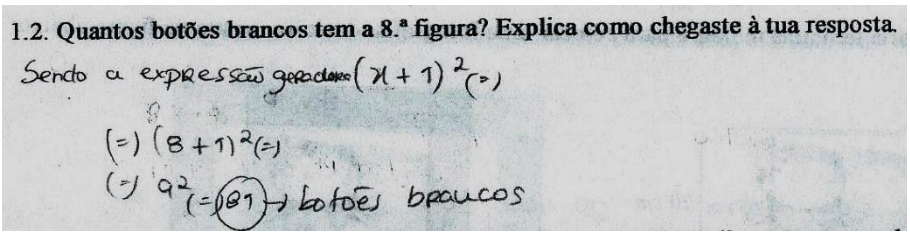
$\boxed{x^2}$

$x^2 = 7 \times 7 = 49$

O 7.º termo terá 49 quadrados pretos.

Figura 8.3.2: Produção de Carolina, T A3-Q1.1.

Através de um esquema com setas, Carolina apresenta os incrementos entre os termos da sequência do número de botões brancos (figura 8.3.2). Apesar de ter encontrado o termo pedido através de um processo recursivo, a aluna utiliza recorre à expressão geradora para indicar o número de botões brancos (figura 8.3.3), convertendo-a para o SNN por substituição numérica.



1.2. Quantos botões brancos tem a 8.ª figura? Explica como chegaste à tua resposta.

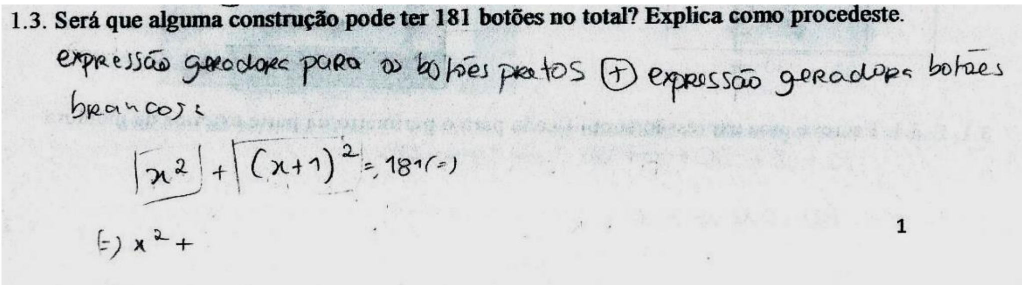
Sendo a expressão geradora $(x+1)^2$ (=)

(=) $(8+1)^2$ (=)

(=) 9^2 (=) 81 → botões brancos

Figura 8.3.3: Produção de Carolina, T A3-Q1.2.

Na questão seguinte que envolve o número total de botões, Carolina escreve uma equação que corresponde à igualdade entre a expressão geradora (a soma das duas expressões apresentadas) e 181, um possível número total de botões, como mostro na figura 8.3.4. No entanto, não consegue resolver a equação, provavelmente por ser um tipo de equação que não se enquadra nos dois tipos já estudados e, assim, não apresenta a resposta à questão.


1.3. Será que alguma construção pode ter 181 botões no total? Explica como procedeste.

expressão geradora para os botões pretos + expressão geradora botões brancos:

$x^2 + (x+1)^2 = 181 \Leftrightarrow$

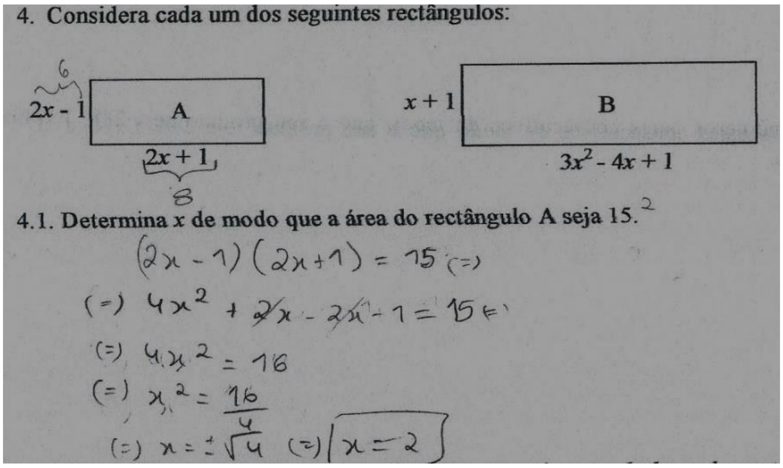
$\Leftrightarrow x^2 +$

1

Figura 8.3.4: Produção de Carolina, T A3-Q1.2.

A aluna podia ter optado pela continuação da construção da tabela usada nas duas alíneas anteriores para chegar à resposta pretendida, no entanto, optou pela expressão geral e obteve uma equação do 2-º grau completa que não conseguiu resolver. Neste caso, a escrita antecipada da expressão geradora associada ao desconhecimento dos tratamentos no SNA adequados para a resolver provavelmente, limitaram a atividade da aluna na resolução da questão.

Numa outra questão, Carolina começa por escrever com facilidade a equação, em seguida recorre à propriedade distributiva para simplificar a expressão e, por fim, utiliza a noção de raiz quadrada para obter a solução (figura 8.3.5).



4. Considera cada um dos seguintes rectângulos:

4.1. Determina x de modo que a área do rectângulo A seja 15.

$(2x-1)(2x+1) = 15$ (=)

(=) $4x^2 + \cancel{2x} - \cancel{2x} - 1 = 15$ (=)

(=) $4x^2 = 16$

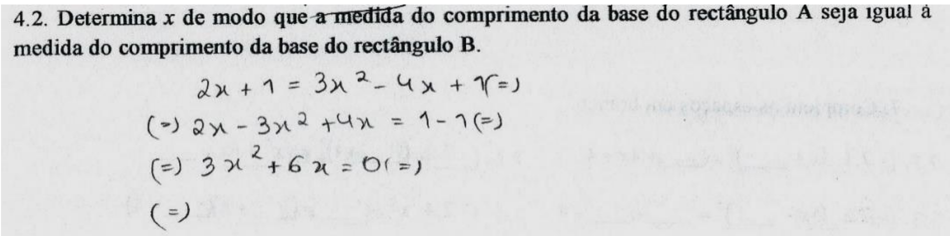
(=) $x^2 = \frac{16}{4}$

(=) $x = \pm\sqrt{4}$ (=) $\boxed{x = 2}$

Figura 8.3.5: Produção de Carolina, T A3-Q4.1.

A aluna podia ter recorrido aos casos notáveis da multiplicação, já estudados para obter a expressão simplificada, contudo parece não se recordar e não o faz.

Na alínea seguinte, a aluna equaciona o problema, procede à simplificação da equação e obtém uma equação do tipo $ax^2 + bx = 0$, que pode resolver através da lei do anulamento do produto, no entanto a aluna não prossegue (figura 8.3.6).



4.2. Determina x de modo que a ~~medida~~ do comprimento da base do rectângulo A seja igual à medida do comprimento da base do rectângulo B.

$2x + 1 = 3x^2 - 4x + 1$ (=)

(=) $2x - 3x^2 + 4x = 1 - 1$ (=)

(=) $3x^2 + 6x = 0$ (=)

(=)

Figura 8.3.6: Produção de Carolina, T A3-Q4.2.

Relativamente a esta primeira tarefa Carolina, confirma que serviu para "… Iniciar o estudo às equações do 2.º grau, para a gente fazer como sabemos fazer" (E3), o que não aconteceu e afirma que foi fácil resolver. A aluna não resolveu a última parte da ficha porque chegou atrasada à aula.

A Tarefa B-3 (Anexo 25) envolve a resolução de um problema, na folha de cálculo. Carolina após a leitura do enunciado, converte a informação em linguagem natural para a folha de cálculo. Começa por nomear três colunas, cada uma delas com um dos nomes dos irmãos, onde constrói sequências numéricas através do arrastamento, tendo em conta a relação entre as idades deles. Seguidamente, constrói duas novas colunas que designa por: "Produto das idades dos rapazes" e "Idade Ana ao quadrado", onde insere as fórmulas e através da geração de variáveis-coluna obtém as relações descritas no enunciado, como mostro na figura 8.3.7.

B	C	D	E	F
Carlos	Ana	Ricardo	Produto das idades dos rapazes	Idade Ana ao quadrado
9	10	11	99	100
10	11	12	120	121
11	12	13	143	144
12	13	14	168	169
13	14	15	195	196
14	15	16	224	225

Carlos	Ana	Ricardo	Produto das idades dos rapazes	Idade Ana ao quadrado
9	10	11	=B2*D2	=C2^2
10	11	12	=B3*D3	=C3^2
11	12	13	=B4*D4	=C4^2

Figura 8.3.7: Produção de Carolina, TB3-P1.

Carolina concluiu a resolução da ficha na folha de cálculo com bastante rapidez, não ultrapassando os 10 minutos e afirma bem alto: "Já descobri a coisa interessante!". A maioria dos alunos da turma ainda não tinha terminado a resolução da tarefa pelo que peço a Carolina que aguarde e não divulgue o resultado. A aluna apresenta como resposta "A Ana descobriu que ao fazer o quadrado da sua idade e o produto dos irmãos (idades) o quadrado da idade dela é sempre maior 1 unidade". Neste procedimento faz a conversão do trabalho na folha de cálculo para a linguagem natural.

Em seguida, é pedido aos alunos para explicarem algebricamente o resultado obtido. Carolina, antes de iniciar a sua resolução, questiona-me acerca do significado de explicar algebricamente, mas não lhe dou uma resposta ao que ela, muito espontaneamente, exclama…

> **Carolina**: Ah, pode ser para o Carlos damos um *c* para a Ana damos um *a* e para a idade do Ricardo damos um *r* … [A aluna escreve a relação]. Já fiz professora! … [Alguns colegas pedem-lhe ajuda] Eu não posso ajudar, isto é fácil!

Vários outros alunos mostram ter a mesma dúvida, mostrando desconhecer o significado da explicação algébrica, pelo que questiono a turma.

> **Professora**: O que será explicar algebricamente?
> **Tatiana**: É o *n-ésimo* termo.
> **Carolina**: É escrever com letras em vez de números.
> **Professora**: É escrever com letras em vez de números, ou seja, é generalizar.

Carolina apesar de não ter obtido resposta para a sua pergunta, rapidamente percebeu que devia designar por uma letra a idade de cada um dos irmãos e, assim, escreve a relação pedida no SNA, como mostro na figura 8.3.8. A aluna, contudo não contempla as diferenças entre as idades dos irmãos, à semelhança da sua resposta em linguagem natural.

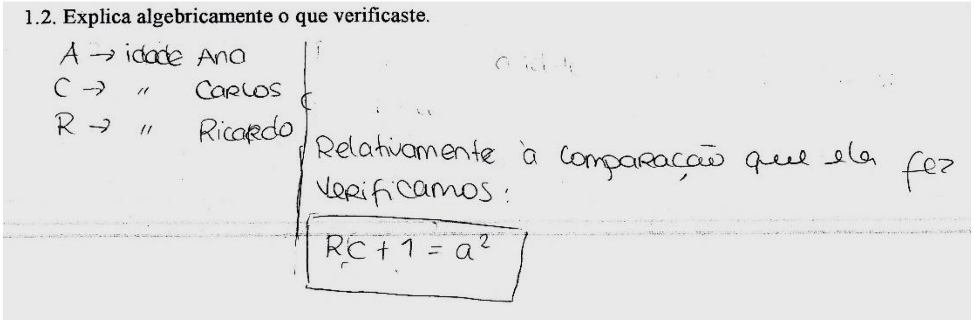


Figura 8.3.8: Produção de Carolina, TB3-Q1.2.

Na discussão, Carolina vai ao quadro e apresenta a sua resolução. Neste momento, penso que todos os alunos estão esclarecidos e aproveito para perguntar se que alguém tem uma resolução diferente.

> **Alexandre**: Não!
> **Tatiana**: Eu pus mais ou menos igual à Carolina.
> **Patrícia**: Eu fiz da mesma maneira, só com letras diferentes. Usei um x e um y …
> **Gabriela**: Eu um n … foi como eu.
> **Carolina**: Vocês habituam-se sempre às mesmas letras e depois olha…

Uma vez que os alunos não escrevem a relação que eu pretendo, continuo a questioná-los.

> **Professora**: Vocês conhecem, neste caso, a relação entre as idades deles, não conhecem?

Patrícia: Um tem mais um ano e o outro tem menos um ano.
Professora: …. Então vamos lá olhar aqui para a legenda da Carolina e vamos lá tentar escrever aquela relação de uma forma diferente … *a* é a idade da Ana …. Será que podemos expressar a idade do Carlos, em relação, em função de *a*?
Patrícia: Então é a-1. O Carlos é igual à idade da Ana menos um ano.
Gabriela: a^2 menos 1 é igual ao produto das idades dos irmãos…
[…]
Tatiana: Pode …. Pode pôr a-1 e a+1.
Professora: a-1 seria a idade…
Patrícia: É o Carlos!
Professora: a-1 seria a idade do Carlos e…
Alguns alunos: a+1 a idade do Ricardo.
Professora: Assim sendo, como será que eu vou escrever a relação entre as idades deles? Como é que fica agora a relação entre as idades deles?
Patrícia: a-1 vezes a+1
Professora: É igual a quê?
Alguns alunos: a^2
Professora: É assim?
Gabriela: Sim … Não!
Carolina: a^2-1! [fala muito alto]

Conduzo assim os alunos à escrita da relação pretendida. No entanto, continuo a questioná-los de modo a que os alunos se recordem do conceito envolvido.

Professora: Ao olharem para ali não reconhecem esta igualdade?
Patrícia: É uma equação do 2.º grau.
Professora: É uma equação do 2.º grau …
Carolina: Conhecemos, conhecemos… É uma coisa… Que…
Gabriela: Lei do anulamento do produto…
Carolina: É aquilo que a professora deu…
Gabriela: É a lei do anulamento do produto! a^2-1= a-1 ou a^2-1= a+1.
Patrícia: Isto é a lei do anulamento do produto? É do quadrado do binómio!
Carolina: Oh pá, eu já disse isso!… Eu não sei nada disso do quadrado do binómio!
Gabriela: Não, não! Isso aí é outra coisa… A diferença de quadrados!
Professora: É a diferença de quadrados? Será?
Gabriela: É sim, por causa que… A professora até deu isso no exemplo no ano passado. Eu lembro-me um pouco disso, por causa do teste intermédio.

Os alunos são assim levados à associação do conceito da diferença de quadrados com a igualdade escrita anteriormente. Tal como podemos verificar na discussão, Carolina refere que não se lembra desta matéria, que já foi trabalhada no 8.º ano. Mas a aluna não revela dificuldade em recorrer ao resultado obtido na questão anterior para calcular produtos do tipo $29 \times 31, 79 \times 81, 99 \times 101, 999 \times 1001$.

Numa questão adiante, questiono a relação entre o quadrado da idade da Ana e o produto das idades dos irmãos sabendo que, neste caso, a diferença é de 5 anos. Carolina rapidamente converte a informação do enunciado e constrói a tabela no Excel, selecionando uma coluna para a idade de Ana como variável independente e nas restantes utiliza fórmulas para as idades dos irmãos, bem como para estabelecer as outras relações. Para encontrar a relação pedida no enunciado, Carolina efetua os cálculos na calculadora do Office, como mostro na figura 8.3.9.

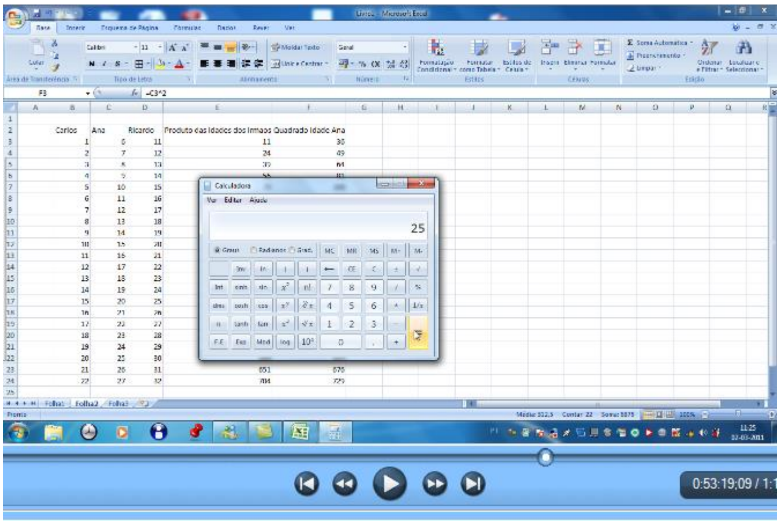


Figura 8.3.9: Produção de Carolina, TB3-Q1.2.

A aluna calcula as diferenças entre o produto das idades dos irmãos e o quadrado da idade da Ana, para algumas linhas e afirma: “Eh, eh, eh, este menos este, dá sempre 25!”. Questiono a aluna acerca do resultado, ao que me responde “5 vezes 5 dá 25!”. Na discussão, Carolina intervém dizendo a diferença para esta situação e para qual quer situação.

Carolina: 25 …. É sempre a diferença ao quadrado.
Professora: Explica lá isso melhor Carolina.
Carolina: Porque se a Ana tem 5 anos de diferença dos irmãos o produto, a diferença entre eles vai dar sempre 5 ao quadrado. Vai dar sempre ao quadrado a coisa [a diferença]
Professora: Chegaram a alguma conclusão diferente?
Gabriela: Não, igual à Carolina.
Outros alunos: 25 de diferença.
Professora: Como é que a gente pode explicar isso algebricamente?

Patrícia: Oh, professora então agora fazemos tipo aquilo [o que está no quadro, relativo à diferença de 1 ano].

Facilmente (quase) todos respondem $a - 5$ e $a + 5$ para as idades dos irmãos, designado por *a* a idade da Ana.

Professora: Agora o que vamos mostrar algebricamente?
Vários alunos: $a - 5$ vezes $a + 5$
Carolina: É igual a $a^2 - 5^2$!

Efetuo a simplificação no quadro com a ajuda dos alunos, que me vão indicando os passos a seguir até obter $a^2 - 25$. Carolina, no final, refere "Isso não é muito difícil de ver professora!".

Os alunos avançam depois para o cálculo dos produtos do tipo 35×45, à semelhança do que tinha sido efetuado para a diferença de 1 unidade. Para terminar, questiono os alunos acerca de uma diferença de *k* anos entre as idades dos irmãos.

Professora: Se a diferença entre as idades deles, em vez de ser 1, em vez de ser 5, for *k*, o que é que acontecerá?

Carolina começa logo a responder no enunciado.

Carolina e Gabriela: $a^2 - k^2$ [resposta em simultâneo].
Professora: Eu só ouvi duas alunas a responderem. O que é que acontece quando as diferenças das idades é *k*?
Alguns alunos: $a - k$ vezes $a + k$ é igual a $a^2 - k^2$.
Patrícia: É só substituir o 5 pelo *k*.

Esta tarefa permite aos alunos resolver um problema com a folha de cálculo, dando-lhes a oportunidade de expressarem as variáveis bem como as relações entre elas de acordo com as condições do enunciado neste ambiente e, em seguida, converter esse trabalho para o SNA, com papel e lápis. Permite ainda o envolvimento dos alunos num processo que os leva à generalização da expressão.

Na entrevista, Carolina afirma que esta tarefa foi muito fácil de resolver e que serviu "Também para a gente descobrir que se temos 3 números consecutivos, o do meio ao quadrado, dá sempre mais uma unidade do que o produto do número antes e o número depois e aqui [expressão da diferença de quadrados] foi aquela para a gente por sempre um mais, um menos, é igual $a - k$… era para a gente chegar a esta fórmula" (E3).

A tarefa C-3 (Anexo 26), é proposta para resolver com papel e lápis e tem como principal objetivo resolver equações do 2.º grau, aplicando a lei do anulamento do produto. Esta tarefa permite ainda relembrar processos de factorização de um polinómio em fatores do 1.º grau. Carolina recorre maioritariamente a representações no SNA, em particular, para efetuar tratamentos, na resolução das equações. Antes de entregar os enunciados aos alunos escrevo no quadro a seguinte a equação $25x^2 - 100 = 0$ e solicito que escrevam o 1.º membro como um produto de fatores. Uma aluna responde de imediato que os fatores são: $5x - 10$ e $5x + 10$. Em seguida, peço que me expliquem como a podemos resolver, ao que alguns alunos respondem devemos utilizar a lei do anulamento do produto e vão-me indicando os passos, que registo no quadro.

Distribuo os enunciados e, antes dos alunos iniciarem a resolução das equações, informo que:

> Essas equações que vocês têm na ficha, podem ser resolvidas por outro método que não a lei do anulamento do produto. Mas eu agora quero, estou a impor o método, vocês devem resolvê-las aplicando a lei do anulamento do produto. Têm uma equação têm de fatorizá-la, isto é, escrevê-la como um produto de dois fatores e de seguida aplicam a lei do anulamento do produto e encontram as soluções.

As equações apresentam um grau de complexidade crescente. Durante a sua resolução Carolina solicita a minha presença para lhe confirmar a factorização dos polinómios, pois não confia nos seus cálculos.

Na questão 1.4 a aluna começa por desenvolver o quadrado da soma em cálculo auxiliar e afirma que não consegue efetuar a factorização. O mesmo acontece com outros alunos, pelo que decido intervir.

> **Professora**: Aqui na 1.4 temos isto [escrevo a equação no quadro]. A Carolina começou por resolver esta equação como?
> **Carolina**: Fazemos… Eu não sei explicar…

Professora: O que a Carolina fez foi desenvolver o quadrado da soma. Mas o que eu quero e que vocês devem ter sempre presente é que aqui temos de utilizar a lei do anulamento do produto. Então, como podemos pensar?
Gabriela: Que aquilo [$x + 3$] é um y^2… O que está entre parenteses é y^2.
Professora: Nós aqui temos sempre algo ao quadrado menos outro ao quadrado… Então o que é que está aqui ao quadrado?
Alguns alunos: $x + 3$
Professora: É o $x + 3$, isto aqui funciona como se fosse um y^2. Como é que vai ficar a factorização?
Maria Inês: $(x + 3 - 5)$ e $(x + 3 + 5)$.
Professora: Estão a ver está aqui $y - 5$ e $y + 5$. Isto é exatamente a mesma coisa que vocês já faziam ainda agora, só que agora o que está aqui ao quadrado é constituído por dois termos.

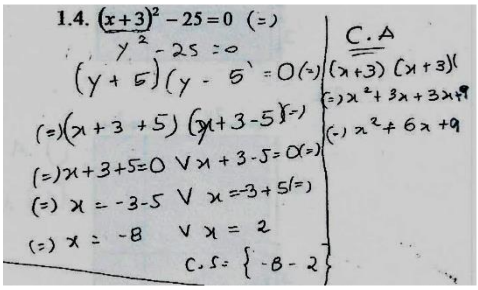


Figura 8.3.10: Produção de Carolina, T C3-Q1.4.

A aluna efetua de imediato a factorização e resolve a equação aplicando a lei do anulamento do produto. Num dos passos da sua resolução, a aluna esquece-se de igualar a expressão a zero, mas retoma-o nos passos seguintes. A resolução destas equações mostra que a aluna tem algumas dificuldades na realização de tratamentos no SNA.

Carolina solicita novamente a minha presença durante a resolução da equação $1 - (x-2)^2 = 0$, mostrando mais uma vez, dúvidas na factorização. Volto ao quadro e questiono os alunos.

Professora: Qual é o nosso y agora?
Alguns alunos: $x - 2$.
Professora: Então, como faço a factorização?
Alguns alunos: 1 menos…
Carolina: Abre parenteses.
Professora: Abre parênteses pois temos aqui este sinal de menos e o y é constituído por dois termos…

Este pequeno diálogo ajuda os alunos a chegarem à factorização e à resolução da equação. A aluna acaba por resolver a última equação sem revelar dificuldades. Avanço depois para a leitura do enunciado de uma questão que envolve o estudo do quadrado de uma soma, a partir da área de um quadrado, dividido em 4 retângulos. Pretendo que os alunos escrevam a área do quadrado, com lado $a + b$, como o produto de $(a+b)$ por $(a+b)$ e como a soma das áreas dos retângulos, concluíndo assim o caso notável da multiplicação $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Relativamente à questão 2.2, Carolina apresenta a resolução da figura 8.3.11.

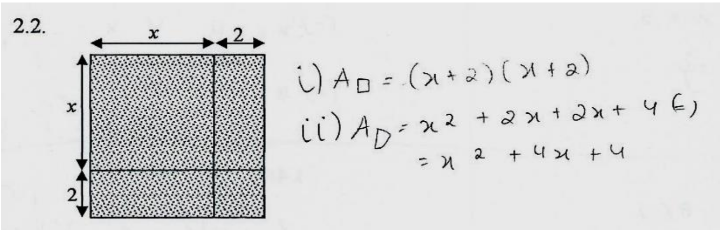


Figura 8.3.11: Produção de Carolina, T C3-Q2.2.

No momento da discussão desta questão solicito aos alunos que comparem os resultados obtidos pelos dois processos e questiono-os acerca da identificação da expressão encontrada.

Professora: Isto não vos diz nada?
Gabriela: É o resultado que dava no primeiro.
Carolina: É a área do grande.
Gabriela: Oh pá… É aquela coisa que é o quadrado, aquela coisa dos parenteses.
Professora: Como é que isso se chama?
Gabriela: Quadrado do binómio.

A intervenção de uma aluna leva os colegas a relembrar o conceito de quadrado do binómio estudado no 8.º ano. No final da resolução deste exercício, reforço a importância de terem presente este resultado.

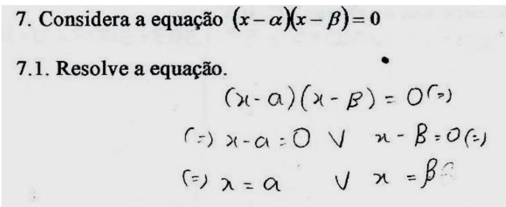
> Aqui normalmente os alunos erram porque se esquecem aqui do $2ab$, acontece muitas vezes. Eu espero que com este pequeno exercício vocês não se esqueçam das áreas daqueles dois retângulos que estão ali ao lado que é por isso que aparece aqui o dobro de ab.

Os alunos utilizam depois este resultado para calcular o valor de quadrados de números na questão 3, onde Carolina não manifesta dificuldades. Na quarta questão são apresentadas equações do 2.º grau completas, que facilmente se podem fatorizar. Uma aluna intervém dizendo que se pode utilizar a lei do anulamento do produto depois de fatorizar. Na quinta e sexta questão, proponho aos alunos a resolução de equações de grau quatro, dada a sua factorização. Carolina não apresenta dificuldades na sua resolução e vai ao quadro apresentar a resolução da questão 5, outra aluna apresenta a 6.

Antes de avançar comento:

> Vocês este ano vão aprender uma técnica que serve para resolver qualquer equação do 2.º grau e essa técnica é a fórmula resolvente, mas logo aprendem numa aula mais à frente… Mas não vão aprender nenhuma fórmula específica para resolver uma equação de grau superior ao 2… No entanto, se vocês tiverem a factorização dessas equações vocês conseguem resolvê-las.

Na última parte da tarefa, na questão 7, tento que os alunos relacionem equações do 2.º grau escritas nas formas $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ e $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ com as suas raízes. Carolina resolve a questão 7.1 sem dúvidas, como mostro na figura 8.3.12.



7. Considera a equação $(x-\alpha)(x-\beta)=0$

7.1. Resolve a equação.

$(x-a)(x-\beta)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-a=0 \vee x-\beta=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=a \vee x=\beta$

Figura 8.3.12: Produção de Carolina, T C3-Q7.1.

Uma aluna vai ao quadro e resolve a equação utilizando a lei do anulamento do produto, tal como Carolina. Eu volto a destacar a forma como a equação está escrita.

Professora: Quais são as soluções desta equação?
Carolina e outros alunos: α e β!
Professora: …. Olhem lá a forma como eles aparecem aqui escritos: $x\ menos\ \alpha$, $x\ menos\ \beta$.
Patrícia: Já no 5 foi a mesma coisa…
Professora: Se calhar há aqui alguma coisa que se pode relacionar entre as raízes e os fatores…

Carolina vai ao quadro resolver a questão 7.2 (figura 8.3.13), parte da equação anterior (do enunciado) e obtém a outra equação depois de desembaraçar de parenteses e colocar o *x* em evidência. Relativamente a esta questão, a aluna afirma que é uma forma de escrever a equação de maneira diferente.

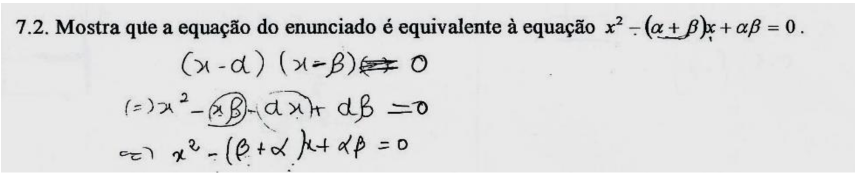


Figura 8.3.13: Produção de Carolina, TC3-Q7.2.

Carolina: Isto é uma forma diferente de resolver a equação. Eles puseram dentro dos parenteses o α e $o\ \beta$ e depois o x porque os dois estavam a multiplicar pelo *x*.

Procuro depois levar os alunos a relacionarem estas duas equações com as raízes α e β, pelo que prossigo com o questionamento.

Professora: Isto a que vocês chegaram é algo muito importante e o que eu pergunto na questão 7.3 é como e que vocês interpretam este resultado tendo em conta aquilo que já viram…
Carolina: como uma simplificação…
[…]
Professora: Quais são as soluções da 1.ª equação?
Alguns alunos: α e β.
Professora: E aqui [2.ª equação] onde é que aparece o α e o β?
Carolina: Dentro dos parenteses e no fim.
Professora: Se o α fosse 1 e o β fosse 2, as soluções eram…
Gabriela e outros alunos: 1 e 2.
Professora: Como posso escrever esta equação naquela forma?
Patrícia e Tatiana: x^2-3x+2=0…
Carolina: Menos 3*x* onde é que está o 3*x*?

> **Professora**: Não é a soma das raízes da equação?... E aqui é o quê?
> **Carolina**: A multiplicação…. Mas não estou a ver a relação com o que está acima.
> **Professora**: Quais são as raízes?
> **Carolina**: 1 e 2.
> **Professora**: Como podemos agora escrever nesta forma?
> **Carolina**: Então é sempre uma raiz mais a outra mais o …
> **Professora**: Termo independente que é o produto.

Na figura 8.3.14, pode ler-se a resposta de Carolina à questão 7.3, que mostra que a aluna não compreende o que foi discutido.

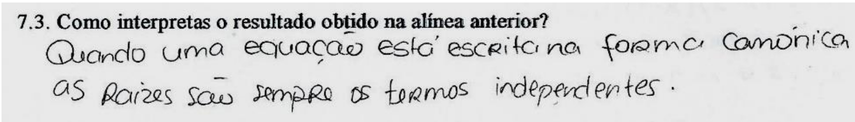

7.3. Como interpretas o resultado obtido na alínea anterior?
Quando uma equação está escrita na forma canónica as Raizes são sempre os termos independentes.

Figura 8.3.14: Produção de Carolina, T C3-Q7.3.

Tomo consciência de que uma parte dos alunos ainda não percebe o significado da equação e da forma como as raízes surgem escritas quando a equação está escrita na forma na canónica. No entanto, peço-lhes para avançarem para a questão seguinte que envolve a escrita de uma equação, na forma canónica, dadas as suas raízes, para casos particulares.

> **Professora**: Como vai ficar a primeira?
> **Carolina**:$x^2 - (2+6)x + 2 \times 6 = 0$ … então os números que estão lá em cima, é as raízes.

Carolina responde, corretamente à minha questão, observado a equação geral no quadro.

> **Gabriela**: Que grande confusão! Cheguei a esse resultado de uma forma mais simples!
> **Carolina**: Não! Temos é de decorar bem aquela coisa.
> **Professora**: Decorar não, eu quero que vocês compreendam! Vocês têm as raízes e eu quero que escrevam a equação na forma canónica. Temos de somar as raízes e o simétrico da soma das raízes é o coeficiente do termo em *x* e o produto das raízes é o termo independente.
>
> **Carolina**: Então, mas tem de ser sempre aquela coisa?! É isso que eu estava a dizer que temos de decorar que é para saber.

Relativamente a esta tarefa, Carolina afirma que "Foi quando a gente aprendeu a fazer… Aprendeu, a gente já sabia fazer, não é? Só que não nos lembrávamos…. Da lei do anulamento do produto e estivemos a rever, para ficar mais claro…" (E3). A aluna revela ainda que sentiu mais dificuldades na resolução das equações 1.5 e 1.6. Relativamente à escrita de equações dadas as suas raízes, Carolina confessa que já não se recordar, mas refere ainda que esta tarefa serviu para "Treinar um bocadinho" referindo-se à primeira questão, que considerou um pouco difícil e para não se esquecerem do quadrado do binómio associado ao cálculo de áreas como a soma de áreas dos retângulos que o compõem.

A Tarefa D-3 (Anexo 27) é proposta para resolver num ambiente combinado de folha de cálculo e papel e lápis. Numa fase inicial peço a simulação do primeiro salto da bola na folha de cálculo. Carolina converte a informação do enunciado para uma tabela na folha de cálculo depois de nomear uma coluna para o tempo e outra para a altura, não tendo mostrando dificuldade na substituição da variável pelo respetivo valor numérico. Converte, em seguida, a tabela para a representação gráfica no ambiente da folha de cálculo, como mostro na figura 8.3.15.

Tempo	Altura
0	0
1	140
2	240
3	300
4	320
5	300
6	240
7	140
8	0

Tempo	Altura
0	=-20*B3^2+169*B3
1	=-20*B4^2+160*B4
2	=-20*B5^2+160*B5
3	=-20*B6^2+160*B6
4	=-20*B7^2+160*B7
5	=-20*B8^2+160*B8
6	=-20*B9^2+160*B9
7	=-20*B10^2+160*B1
8	=-20*B11^2+160*B1

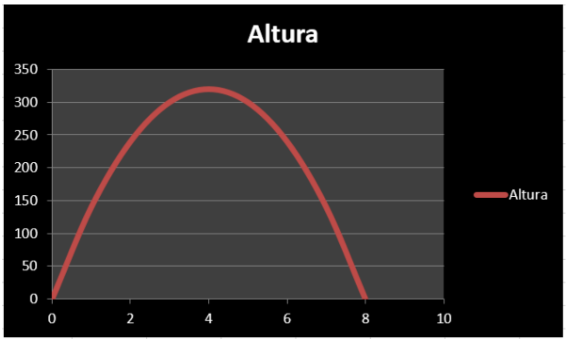
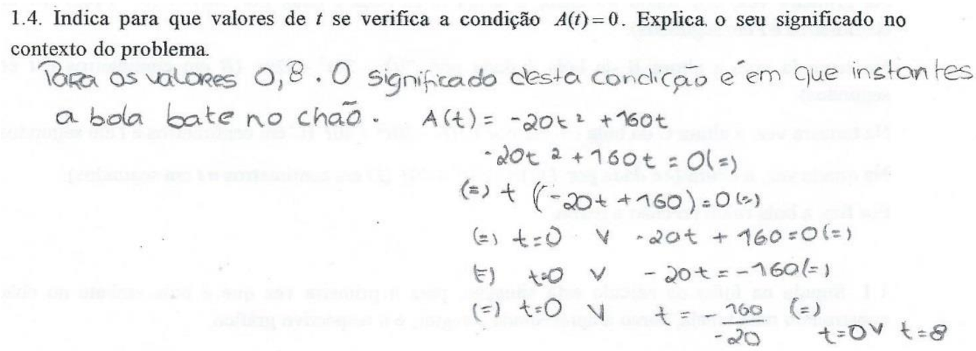


Figura 8.3.15: Produção de Carolina, TD3-P1.

A conversão da tabela da folha de cálculo para a representação gráfica, permite o primeiro contacto visual com o gráfico da função quadrática – a parábola. A aluna relaciona assim os valores da tabela com a representação gráfica. Carolina consegue identificar, sem dificuldade, a altura máxima que a bola atinge, bem como o instante em que tal acontece e quanto tempo a bola demora até bater novamente no chão.

Numa outra questão pretende-se obter os valores de t que satisfazem a condição $A(t)=0$ e qual o significado desses valores no contexto do problema. Carolina não mostra dificuldades na interpretação da condição. Durante a discussão peço aos alunos para justificarem algebricamente os valores de t obtidos. Carolina resolve a equação e aplica corretamente a lei do anulamento do produto, conforme mostro na figura 8.3.16.


1.4. Indica para que valores de t se verifica a condição $A(t)=0$. Explica o seu significado no contexto do problema.

Para os valores 0,8. O significado desta condição é em que instantes a bola bate no chão. $A(t) = -20t^2 + 160t$

$-20t^2 + 160t = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t(-20t + 160) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=0 \vee -20t + 160 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=0 \vee -20t = -160 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=0 \vee t = -\frac{160}{-20} \Leftrightarrow t=0 \vee t=8$

Figura 8.3.16: Produção de Carolina, TD3-Q1.4.

Reforço depois a conexão entre as representações que os alunos têm presentes (dados da tabela, representação gráfica e algébrica) para uma ampliação da compreensão do significado da solução da equação.

> **Professora**: Vocês já tinham respondido a esta questão observando a tabela e observando o gráfico. Agora têm uma resolução algébrica… No vosso gráfico quando é que a parábola intersecta o eixo dos xx?
>
> **Turma**: No 0 e 8.
>
> **Professora**: Portanto, significa que 0 e 8 são as raízes ou as soluções daquela equação que ali está.

Por fim, noutra questão os alunos verificam que $A(t) - 240 = 0$ é uma equação equivalente a $-20(t-2)(t-6) = 0$. A partir da discussão desta questão explico que também é possível escrever uma equação do 2.º grau como um produto de fatores, deixando visíveis as suas soluções, ou seja, na forma $c(x-r_1)(x-r_2)=0$, onde c é uma constante e r_1 e r_2 são as raízes.

Noutra questão peço a simulação dos restantes saltos da bola na folha de cálculo. Carolina simula os outros saltos da bola, usando uma folha para cada salto onde constroi uma tabela e a respetiva representação gráfica. Por fim, descreve em linguagem natural o que aconteceu à bola enquanto esteve a saltar.

Na entrevista Carolina recorda que é com esta tarefa que aprendeu a representação gráfica de uma função quadrática, contudo parece não se recordar ao certo da sua designação e vai avançando com várias hipotese à espera que eu aprove: “Hipérbole? … Parábola!!! Eu confundo com a parábola!” Revela ainda que aprendeu a interpretar este tipo de gráfico, no contexto do problema, ao mesmo tempo que fazia também a interpretação da tabela.

A tarefa E-3 “A experiência no laboratório” (Anexo 28) proposta para resolver na folha de cálculo em articulação com o papel e lápis, envolve uma função quadrática cuja representação gráfica é uma parábola com concavidade virada para cima e sem raízes. Carolina facilmente constrói a tabela na folha de cálculo bem como a respetiva representação gráfica que apresento na figura 8.3.17.

Tempo(h)	Temperatura
0	11
1	6
2	3
3	2
4	3
5	6
6	11

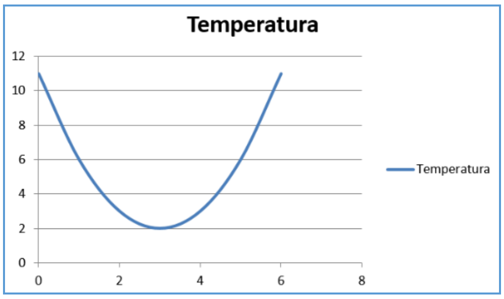
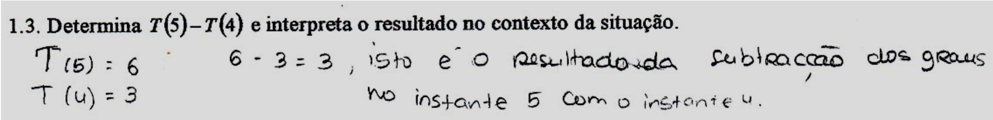


Figura 8.3.17: Produção de Carolina, T E3-P1.

A aluna identifica corretamente a temperatura inicial da substância bem como a temperatura no final da experiência. A aluna consegue ainda identificar o valor de uma expressão e explicar o seu significado no contexto da situação, como mostro na figura 8.3.18.



1.3. **Determina $T(5)-T(4)$ e interpreta o resultado no contexto da situação.**

$T(5) = 6$ $6 - 3 = 3$, isto é o resultado da subtracção dos graus

$T(4) = 3$ no instante 5 com o instante 4.

Figura 8.3.18: Produção de Carolina, T E3-Q1.3.

Relativamente a esta tarefa, na entrevista, Carolina afirma que serve para estudar "A parábola ao contrário … E que a gente viu que quando as soluções são negativas a parábola tem a concavidade virada para baixo, não é? Ou quando o antes [coeficiente] do x^2é que é? Quando tá o x^2 ela está virada para baixo e quando está positivo, ela está assim [virada para cima] … Para a gente distinguir uma parábola virada para cima da outra virada para baixo". Este excerto é revelador de alguma confusão que ainda persiste relativamente ao sentido da concavidade de uma parábola.

Na aula em que proponho a tarefa F-3 (Anexo 29) utilizo o GeoGebra para mostrar a influência dos parâmetros *a*, *b* e *c* na representação gráfica de uma função do tipo $f(x)=ax^2+bx+c$. Carolina antes de eu começar a simulação para diferentes valores para os parâmetros, diz para toda a turma:

> **Carolina**: Eu já decorei, assim [faz o gesto do *smile* feliz com o braço] está contente é positivo e assim [faz o gesto do *smile* triste com o braço] está triste é negativo.

Começo a fazer a simulação e ao mesmo tempo questiono os alunos de modo a levá-los a concluir acerca das transformações que ocorrem no gráfico com a variação dos parâmetros. Faço variar o valor de *c* ao que os alunos concluem "Sobe e desce", de seguida, faço variar o *b* e, por fim, o *a*. Carolina diz "É este, é o do x^2 que faz mudar [fazendo o gesto dos *smiles* com o braço]". Escrevo no quadro esta conclusão acerca do sentido da concavidade e os alunos registam-na no caderno.

Faço uma pequena introdução histórica da descoberta da fórmula resolvente e apresento a sua dedução. Recorro a um exemplo de uma equação do 2.º grau, $x^2+3x+2=0$, para explicar como se utiliza a fórmula resolvente, explico que $\Delta=b^2-4ac$ se designa por binómio discriminante. Por fim, peço aos alunos o esboço do gráfico, alertando-os para o sentido da concavidade e para os zeros descobertos através da fórmula resolvente. Realço ainda o facto de que a fórmula só deve ser utilizada depois da equação do 2.º grau estar escrita a forma canónica.

Na resolução da primeira questão, após a resolução das equações do 2.º grau utilizando a fórmula resolvente, discutimos a existência, ou não, de soluções e a sua classificação, peço ainda aos alunos que esbocem uma representação gráfica ilustrativa de cada uma das situações descritas

Carolina começa a resolver as equações com bastante destreza e, em simultâneo, vai explicando à colega. A figura 8.3.19 mostra a resolução de uma das equações, pela aluna, que foi apresentada, pela própria, à turma no quadro.

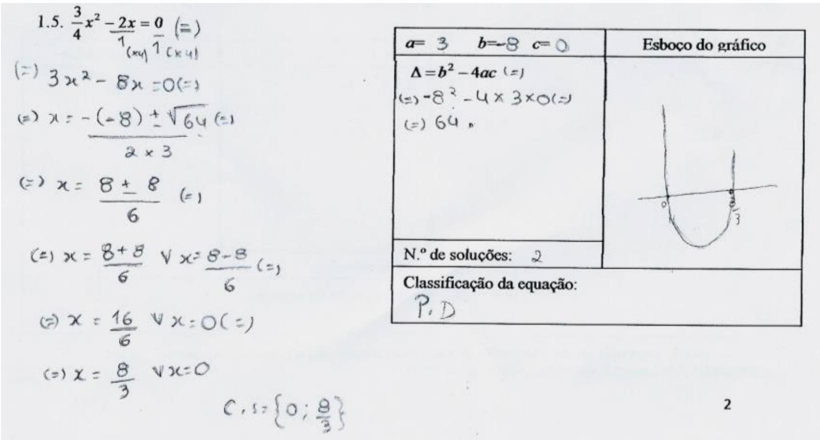


Figura 8.3.19: Produção de Carolina, TF3-Q1.5.

Após a resolução destas seis equações, é feita uma síntese, em colaboração com os alunos, acerca do binómio discriminante em associação com o número de soluções de uma equação do 2.º grau.

> **Professora**: Vocês viram várias equações com diferentes valores para o delta. Será que vocês conseguem relacionar o valor do delta com o número de soluções de uma equação do 2.º grau?
>
> **Gabriela**: Se for positivo tem duas soluções, quando é igual a zero temos uma solução e quando é negativo não há soluções.

Peço depois aos alunos para verificarem o que aconteceu em cada uma das diferentes equações propostas na questão 1. Por fim, sintetizo no quadro para que todos os alunos registem nos seus cadernos.

$\Delta=0$ – uma solução (raiz dupla)
$\Delta>0$ – duas soluções distintas
$\Delta<0$ – não tem solução

Na resolução das questões seguintes Carolina também não manifestou dificuldades.

Apresento, na figura 8.3.20, a resolução da questão 2.2 onde se pretende saber para que valores de *k*, a que a equação admite duas soluções.

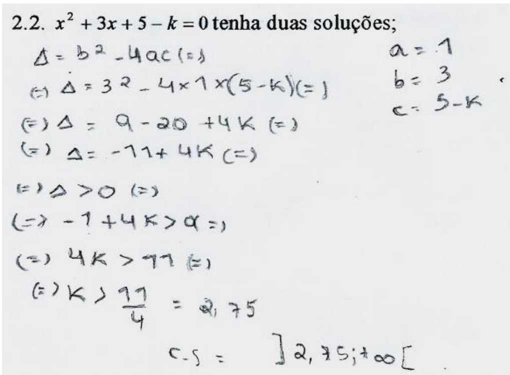


Figura 8.3.20: Produção de Carolina, T F3-Q2.2.

No final reforço o estabelecimento de conexões entre tópicos matemáticos.

Professora: Aqui temos um exemplo das conexões matemáticas que temos de fazer. Reparem que nós estamos a trabalhar com equações do 2.º grau e isto é o quê?

Alguns alunos: Inequação.

Professora: Isto é uma inequação… reparem que agora temos infinitos números como solução.

Na entrevista Carolina recorda que esta tarefa "foi quando a gente descobriu, começamos a fazer com a fórmula resolvente" (E3), acrescentando que assim é "muito mais fácil". Procurei que a aluna me explicasse porque razão é mais fácil, mas a aluna limita-se a dizer: "porque… sei lá, porque acho que é [risos]" (E3). Pergunto à aluna se percebeu os esboços dos gráficos e ela responde que "as soluções é onde a parábola toca no eixo dos xx" e que esta ficha serviu "para a gente aprender a fazer com a fórmula resolvente e ver como é que ficavam os gráficos".

A tarefa G-3 (Anexo 30), apresenta vários problemas sem serem dadas quaisquer sugestões para a sua resolução. Carolina começa a resolver o primeiro problema.

> **Professora**: Aqui na resolução dos problemas que vocês estão a iniciar agora, primeiro passo: têm de ler com muita atenção, segundo passo: ver o que se pretende e arranjar uma incógnita para aquilo que desconhecemos… Aqui neste primeiro problema, qual é o nosso objetivo, o que é que se pretende descobrir?
> **Alguns alunos**: A idade da Joana.
> **Professora**: Então olhem lá, aqui o que é que vocês podem e devem começar por fazer?
> **Gabriela e outros alunos**: x … é a idade da Joana.
> **Professora**: Temos de definir em primeiro lugar a nossa incógnita [escrevo no quadro x -idade da Joana]. E agora?
> **Carolina, Gabriela e outros alunos**: $x^2+3x-30=2x$.
> **Carolina**: A gente vai logo escrevendo à medida que lemos o enunciado.

Esta intervenção de Carolina revela a forma como a aluna converte este enunciado, em linguagem natural, para o SNA. Cada condição em linguagem natural tem um correspondente no SNA. Carolina mostra saber aplicar a fórmula resolvente, mas solicita frequentemente o meu apoio para lhe confirmar os resultados dos cálculos no SNN. Na parte final chamo à atenção dos alunos para as soluções obtidas.

> **Professora**: Obtivemos 5 e -6…
> **Carolina**: Só pode ser 5.
> **Professora**: Aqui na resolução de problemas contextualizados é preciso ter muita atenção à solução e verificar se faz sentido no contexto em que estamos a trabalhar.

Os alunos apresentam dificuldades na resolução de problemas que estabelecem conexões com a geometria, como é o caso do problema 8 que dá origem a uma longa discussão.

Carolina: Aquilo é meia circunferência [$\overset{\frown}{AB}$] professora?
Professora: Não, é apenas um arco.

A determinada altura uma aluna intervém.

Patrícia: Se isso fosse um triângulo dava para usarmos o teorema de Pitágoras.
Carolina: Não, não, não.
Tatiana: A gente faz ali uma linha imaginária.

O diálogo entre estas duas alunas leva os restantes alunos a tentarem encontrar um triângulo de forma a utilizarem o teorema de Pitágoras. Carolina não intervém durante algum tempo na discussão e limita-se a ouvir os colegas.

Carolina: Do A ao B não são 6? E do B até lá em baixo são 6,5. E depois une-se e faz-se o teorema de Pitágoras.
Tatiana: Ou BD.
Professora: Então? Olhem lá… a distância de D a B não é também 5? [DB] não é um raio?

Carolina prossegue assim para a aplicação do teorema de Pitágoras como mostro na figura 8.3.21.

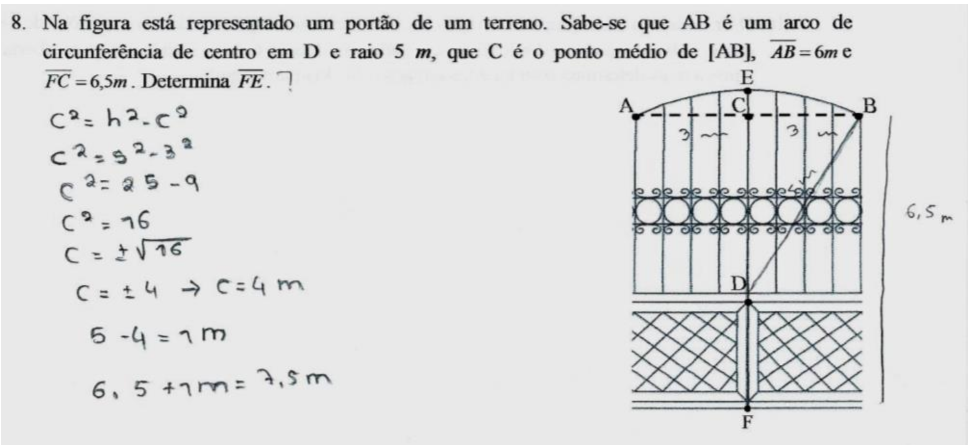


Figura 8.3 21: Produção de Carolina, TG3-P8.

Leio o enunciado do último problema, que envolve o Euro milhões e os alunos influenciados pelo contexto começam a falar dos prémios que pessoas suas conhecidas já ganharam. Carolina colabora na conversão do enunciado para o SNA.

Gabriela: x é o número de amigos [escrevo no quadro]

Professora: *x* é o número de amigos que participaram na sociedade.
Gabriela: $x-6$
Professora: $x-6$, é o quê?
Alguns alunos: Número de amigos menos 6 jogadores.
Professora: E agora?
Gabriela: Agora temos de estudar…
Professora: E agora como é que a gente vai equacionar este problema… Isto no Excel era uma maravilha! Foi isto que eu vos disse quando mandei para casa… Se não conseguirem fazer, façam no Excel. … O que é que a gente sabe? … Se ele tivesse distribuído o dinheiro por estes amigos… Cada um recebia mais 40 euros …. Olhem como é que a gente sabe o dinheiro que ele dá a cada amigo? … Como é que eu posso escrever a expressão do dinheiro que fica para cada amigo?
Patrícia: É a dividir!
Carolina: 4800 a dividir por *x*.
Professora: 4800 a dividir por *x*, isto era o dinheiro que cada um recebia se tivessem participado *x* amigos…
Carolina: Igual a $x\ -6$…
Professora: Igual a quê?
Tatiana: 4800 a dividir por $x-6$
Professora: Explica lá Tatiana porque é que é 4800 a dividir por $x-6$.
Tatiana: Por causa, que é o mesmo prémio a dividir por menos 6 amigos.
Professora: E o que é falta ali?
Alguns alunos: Mais 40.

Carolina resolve a equação e obtém duas soluções, uma negativa e outra positiva, optando pela positiva, dado o contexto do problema.

Na entrevista 3 (Anexo 31), numa fase inicial revisitamos as tarefas resolvidas por Carolina e, seguidamente, são propostas novas tarefas.

A primeira situação envolve a representação gráfica de uma função quadrática, no contexto do mergulho de um golfinho, Carolina consegue identificar a duração do mergulho e a profundidade máxima atingida. A aluna consegue determinar *t* de modo que $h(t)=-3$ e explica "porque os... isto é, isto, isto é, espere [risos] eu percebo, mas não sei muito bem explicar, isto é o tempo, isto é o tempo em que o golfinho esteve a menos 3 metros. Ele esteve a menos 3 metros aos 2 e aos 6, é uma curva depois vai para cima." Questiono a aluna acerca de qual será a expressão que corresponde à função h, representada graficamente, no enunciado. Carolina começa logo por referir:

Carolina: …. Faz-me isto logo com um coiso que eu não gosto nada!
Professora: Do que é que não gostas?

Carolina: Frações [risos]

Carolina mostra alguma aversão ao trabalho com número representados na forma de fração. A aluna observa as expressões algébricas, risca as opções A e C e diz que não podem ser.

Carolina: Não… acho que não…. Espere estou a confundir!... Quando é menos está virada para baixo, quando é mais está virada para cima, então esta é que não pode ser, não é? …. Então está virada… Ah pois esta é que pode ser! Então esta é a única que pode se… Já estou confundida! [risos]
Professora: Carolina, vamos lá então ver.
Carolina: Então como a parábola está virada para cima, o número que está antes do [termo] ao quadrado tem de ser positivo, então este é negativo… Ah! Então já está! Então este [B] não pode ser e este [D] não pode.

A aluna está agora indecisa entre a escolha da opção A ou C.

Professora: E não tens maneira de confirmar se é ou não?
Carolina: Eu agora já não me estou a lembrar… Vá, por exemplo, vá *t* pode ser 4.

A aluna substitui na expressão C o *t* por 4 e engana-se no cálculo 8×4, no enanto prossegue com os cálculos até ao final e explica o resultado no contexto, confrontando o resultado numérico com a representação gráfica da função *h*.

Carolina: Agora quer dizer que … Que…. Espere… Como é que é aquilo? $h(t)$, quer dizer que aos 4, aos 4 segundos ele tinha de estar no -8. Mas não, está no -4… [risos]. Então este não é…

A aluna elimina assim a opção C e prossegue para a substituição na expressão algébrica da opção A e mais uma vez manifesta dificuldades nos cálculos.

Carolina: … Aqui fica $4 \times 4, 16, 16 \times 1, 16,$ não é?
Professora: Então e o 4? Este aqui? [denominador]
Carolina: Então e agora faço assim?... 8x4? 32! [fez na calculadora]
Professora: E eliminaste os denominadores…pode-se eliminar os denominadores?
Carolina: Pode-se!
Professora: Sim?
Carolina: Não se pode?
Professora: Não sei…. Achas que se pode?
Carolina: Não! Só quando é uma igualdade!... Ah então tenho de dividir este por este e este por este? Ah pois, a professora fez isto que é para dar para dividir, não é? Sou mesmo burra [risos] …. É este.

A aluna seleciona assim a opção A como correta, como mostro na figura 8.3.22. Mas continuo a questioná-la.

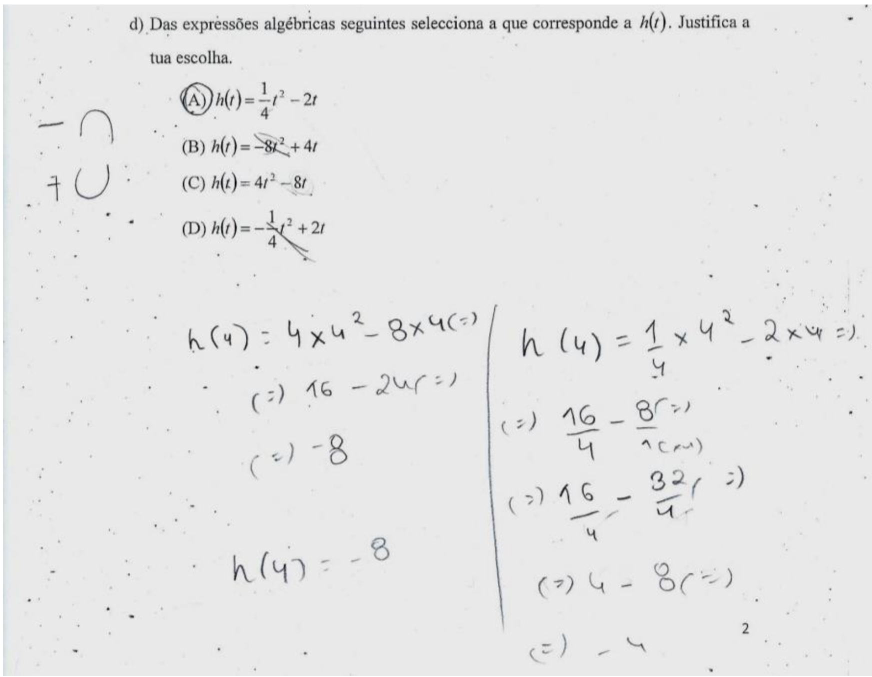


Figura 8.3.22: Produção de Carolina, E3-P1.d).

Professora: Pronto, então agora assim de um modo geral, explica lá o que é que tu pensaste para chegar à conclusão que era o A.
Carolina: Primeiro fui ver que como a concava, a concava está virada para cima ... não é concava [risos]?
Professora: A concavidade!
Carolina: Como a concavidade está virada para cima o número que está antes do t o ao quadrado tem de ser positivo, logo estes dois eliminamos [B e D] e depois fomos substituir o t por um tempo qualquer até aos 8 segundos e vimos que só dava este [A].

A tarefa seguinte intitulada “Festival do Marisco” envolve a expressão algébrica de uma função quadrática que indica a altura de um foguete lançado na festa. A primeira questão pede a altitude do foguete 2 segundos após o seu lançamento, Carolina substitui corretamente o valor na expressão, com a ajuda da calculadora chega ao resultado e dá a resposta. A questão seguinte pergunta ao fim de quanto tempo o foguete cai no chão. A aluna sente falta de outra representação, como a gráfica, que a possa levar facilmente à resposta.

Carolina: Espere que eu sei esta [lê de novo a questão] … Oh pá eu fiz esta no teste, acho eu… Mostre lá uma coisa…Então não tinha… Não, este não…. Estava a ver se havia alguma relação… Com o gráfico…. Espere… [lê de novo a questão] …. Hum, hum …. Então temos que fazer isto no Excel!
Professora: No Excel conseguias fazer?
Carolina: Sim.
Professora: O que é que tu fazias?
Carolina: Metia… então metia a expressão …Fazia uma tabela com o tempo e com os metros … [explica as substituições que faria] … e depois via e depois fazia o gráfico e encontrava.

A aluna avança assim para uma simulação com papel e lápis de uma tabela (figura 8.3.23), embora refira que "dá mais trabalho" por estar a fazer neste ambiente e não propriamente na folha de cálculo.

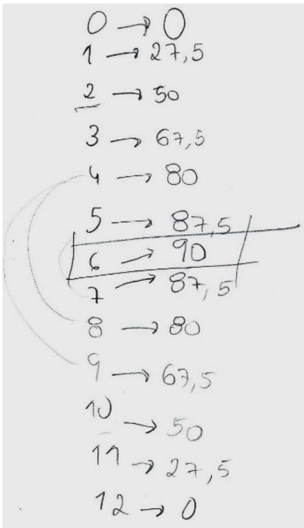


Figura 8.3.23: Produção de Carolina, E3-Q 2.c).

Carolina utiliza a calculadora para efetuar os cálculos e à medida que vai obtendo os valores para a altura, anseia para que os valores comecem a diminuir. "…. Isto não para de subir… Ele não vai parar de subir?.... É agora! …. Estou confiante que é agora!". A construção da tabela ajuda a aluna a saber ao fim de quanto tempo o foguete cai no chão e a indicar a altitude máxima que o foguete atinge. A aluna podia ter optado por resolver a equação, utilizando a lei do anulamento do produto, no entanto prefere uma representação numérica, neste caso com ajuda da tabela.

Na questão seguinte peço para a aluna resolva algebricamente $f(t) = 50$ e que explique o seu significado no contexto do problema.

> **Carolina**: Isto foi aos tempos em que o foguete atingiu os 50 metros. Foi aos 2 e aos 10 segundos.

A aluna confirma que estes valores foram encontrados na tabela que elaborou figura 8.3.23. Chamo à atenção para o facto de ter de resolver algebricamente. Ao que a aluna mostra algum desconforto, retorquindo: “Ai mãe!” Carolina começa por escrever a equação na forma canónica e pede-me a fórmula resolvente, que lhe escrevo no caderno. A aluna aplica corretamente a fórmula resolvente e obtém os valores esperados, como mostro na figura 8.3.24.

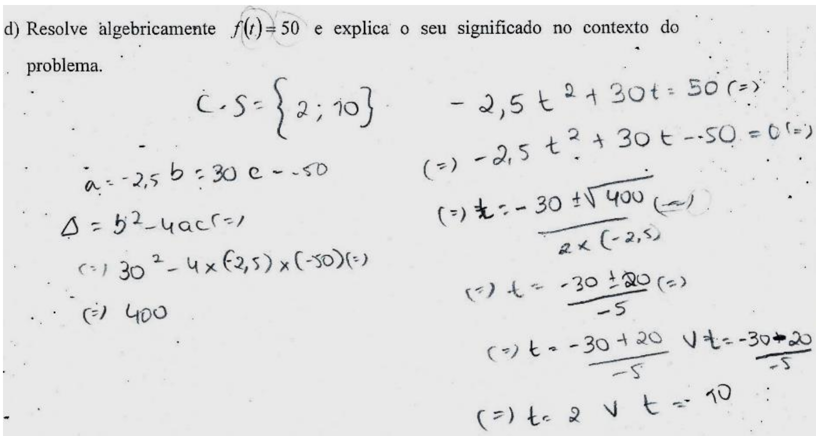


Figura 8.3.24: Produção de Carolina, E3-Q 2.d).

Questiono a aluna acerca das razões que a levaram à escolha da fórmula resolvente, ao que me responde: “É mais fácil”. De seguida, solicito um esboço da representação gráfica da função f. A aluna com uma régua desenha o referencial e ao observar a expressão algébrica afirma:

> **Carolina**: … Fogo isto é só números com vírgulas professora… Ah, mas é o esboço…Posso fazer sem muitos pormenores…

A aluna recorre aos valores da tabela para construir o esboço do gráfico, como mostro na figura 8.3.25 afirmando, no entanto que esta não é uma tarefa fácil.

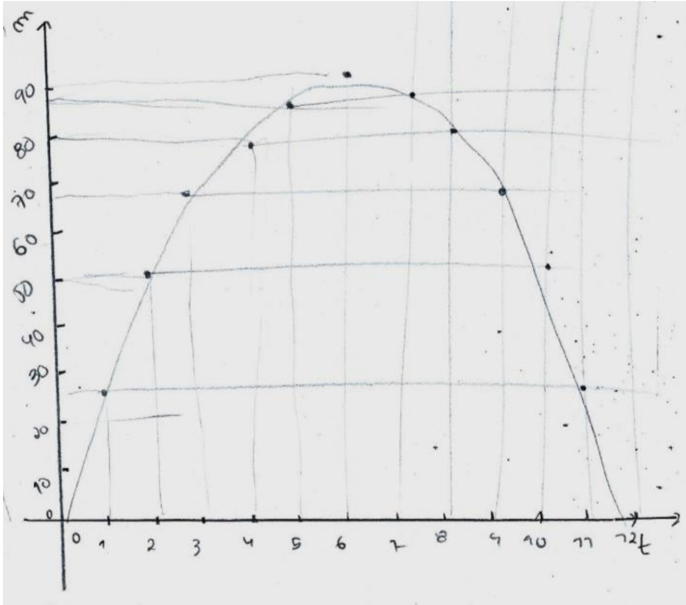


Figura 8.3.25: Produção de Carolina, E3-Q 2e).

De seguida, proponho uma tarefa que envolve a resolução de três equações, onde peço também um esboço da representação gráfica associada. Na resolução da segunda equação, Carolina começa por colocar -3 em evidência e depois aplica a lei do anulamento do produto, seguida da noção de raiz quadrada para obter as soluções. A aluna reconhece que $x^2 + 4 = 0$ é uma equação impossível, em IR, continua a sua resolução e não coloca o sinal *de menos* no 4. Parte depois para o esboço da representação gráfica e assinala como zeros os números -4 e 4, como mostro na figura 8.3.26.

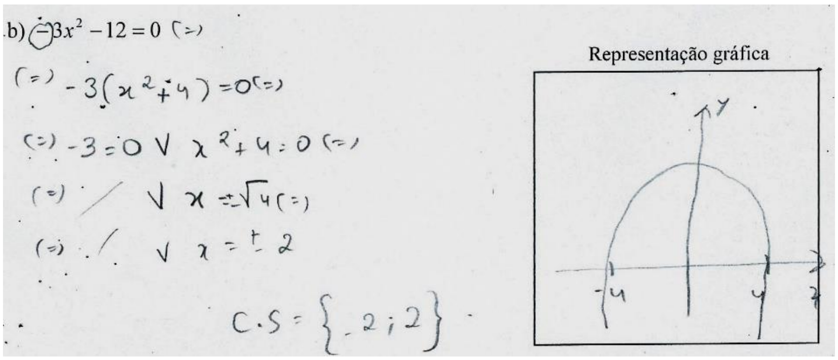


Figura 8.3.26: Produção de Carolina, E3-Q 3b).

Questiono-a acerca do sentido da concavidade da parábola, ao que ela me responde: “porque tenho aqui menos [sinal do coeficiente do termo x^2]”. Relativamente à última equação, Carolina começa logo por dizer:

> **Carolina**: Não gosto disto …desta fração… não se pode dividir! Vou dividir, mas depois fico com vírgulas…

A aluna escreve a equação na forma canónica e decide avançar com o uso da fórmula resolvente, embora se mostre desconfiada dos resultados que obtém pelo facto de não serem números inteiros (figura 8.3.27).

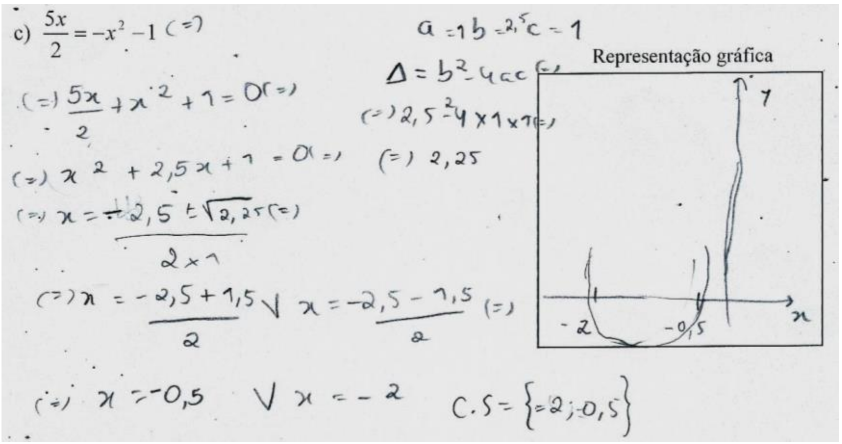


Figura 8.3.27: Produção de Carolina, E3-Q 3c).

Por fim, elabora o esboço da representação gráfica como pedido. Na quarta questão, peço que me escreva uma equação do 2.º grau dadas as suas soluções, Carolina tenta responder à questão e lembra-se da ficha em que esta propriedade foi trabalhada, mas acaba por desistir afirmando que não se lembra.

Na última questão proponho um problema que envolve o teorema de Pitágoras. A aluna lê o enunciado em voz alta e começa por designar a incógnita.

> **Carolina**: …. Então um cateto é *x*, o outro cateto é $x - 2$. A hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos catetos ao quadrado.

A aluna escreve a equação e começa por desenvolver o caso notável da multiplicação $(x - 2)^2$ num cálculo auxiliar ao lado da resolução. De seguida, efetua simplificações, juntando os termos semelhantes, embora mostre alguma insegurança nesses procedimentos.

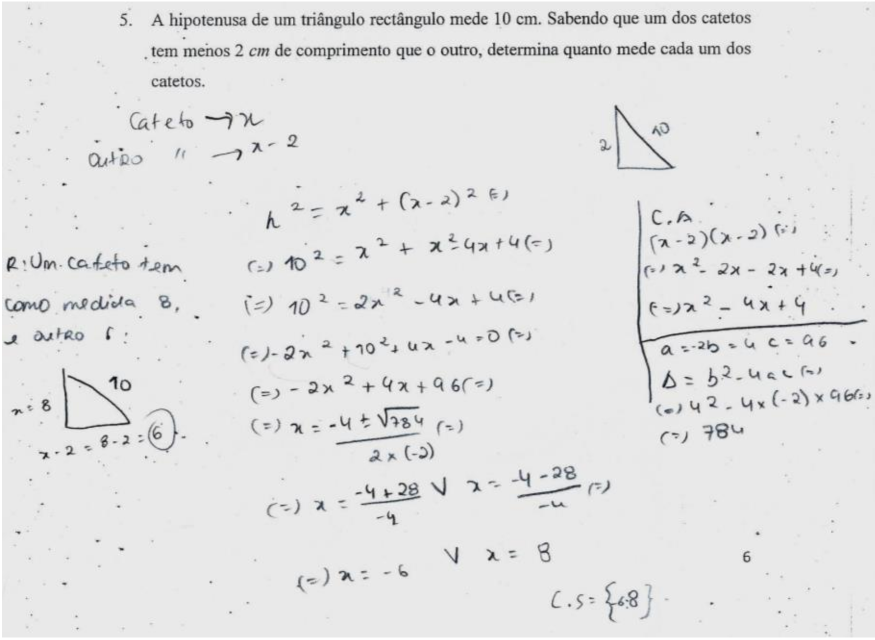
> **Carolina**: … dá para juntar estes dois [$2x^2$ e 10^2]? Não?
> **Professora**: Queres juntar $2x^2$ e 10^2?
> **Carolina**: Sim.
> **Professora**: Achas que dá?
> **Carolina**: Não! Porque não tem *x*…

A minha pergunta leva a aluna a repensar como deve proceder na soma de termos semelhantes. De seguida, prossegue para o cálculo do binómio discriminante.

> **Professora**: Agora vais fazer o quê?
> **Carolina**: O coiso [binómio] discriminante…

Por fim, chega à solução da equação, que apresento na figura 8.3.28, mas questiono-a acerca das medidas dos catetos ao que me responde.

> **Carolina**: Um cateto vale 8 e outro vale 6.



5. A hipotenusa de um triângulo rectângulo mede 10 cm. Sabendo que um dos catetos tem menos 2 *cm* de comprimento que o outro, determina quanto mede cada um dos catetos.

Cateto → x
outro " → $x-2$

$h^2 = x^2 + (x-2)^2$ (=)
(=) $10^2 = x^2 + x^2 - 4x + 4$ (=)
(=) $10^2 = 2x^2 - 4x + 4$ (=)
(=) $-2x^2 + 10^2 + 4x - 4 = 0$ (=)
(=) $-2x^2 + 4x + 96$ (=)
(=) $x = \frac{-4 \pm \sqrt{784}}{2 \times (-2)}$ (=)
(=) $x = \frac{-4+28}{-4} \vee x = \frac{-4-28}{-4}$ (=)
(=) $x = -6 \vee x = 8$

C.A
$(x-2)(x-2)$ (=)
(=) $x^2 - 2x - 2x + 4$ (=)
(=) $x^2 - 4x + 4$
$a = -2$ $b = 4$ $c = 96$
$\Delta = b^2 - 4ac$ (=)
(=) $4^2 - 4 \times (-2) \times 96$ (=)
(=) 784

R: Um cateto tem como medida 8, e outro 6:

$x = 8$, 10
$x - 2 = 8 - 2 = 6$

C.S $= \{6; 8\}$

Figura 8.3.28: Produção de Carolina, E3-P5.

No final, questiono a aluna acerca da sua compreensão da resolução deste problema. Carolina afirma que compreendeu, mas que o considera difícil. Esta dificuldade que a aluna refere deve-se ao facto de a resolução envolver vários passos, pela sua extensão e, provavelmente, pela densidade simbólica da fórmula resolvente.

> **Carolina**: …. Foi um bocado difícil… Isto é um bocado grande … A fórmula resolvente.

Relativamente às tarefas propostas na entrevista Carolina, considera-as fáceis, destacando a do golfinho como a mais fácil. No final da entrevista questiono ainda a sua opinião acerca da aprendizagem das equações do 2.º grau por alunos do 9.º ano e a sua utilidade.

> **Carolina**: Não sei…
> **Professora**: Achas que pode ser útil?
> **Carolina**: Olhe acho que, por exemplo, isto do foguete podemos ter de saber ao fim de quanto tempo podemos lançar outro foguete…

A aluna atribui a utilidade deste tópico na resolução de problemas como o dos foguetes que provavelmente, é algo que aprecia na vida real, não fazendo referência a outro contexto.

Síntese

Representações e transformações das representações utilizadas na aprendizagem de métodos formais.

Carolina recorre a várias de representações ao longo do estudo deste tópico. No trabalho com papel e lápis, a aluna utiliza a linguagem natural para identificar incógnitas, explicar os seus procedimentos, justificar e dar as suas repostas. As representações no SNN surgem sempre durante a resolução das diferentes tarefas, em especial, para efetuar cálculos por substituição e cálculos elementares. A aluna vai progressivamente utilizando representações no SNA, havendo algumas oscilações relacionadas com a natureza das tarefas. No final do estudo do tópico e, em particular, na entrevista a aluna recorre, predominantemente, a representações no SNA.

As representações pictóricas surgem apenas na Tarefa C-3 para a aluna desenhar figuras que a auxiliam no cálculo de áreas e que lhe permitem compreender o quadrado da soma, a sua expansão e correspondente factorização.

As representações gráficas de uma função quadrática surgem várias vezes, a partir da tarefa D-3, a aluna recorre a este tipo de representação sempre que lhe é solicitado.

As representações na folha de cálculo surgem em três tarefas. A aluna começa por nomear colunas, recorre à geração de sequências numéricas e à geração de variáveis coluna para estabelecer as relações descritas, nos enunciados, e dar a resposta ao que lhe é pedido. É na folha de cálculo que a aluna tem o primeiro contacto com a parábola, este ambiente permite o relacionamento entre os valores da tabela e as coordenadas dos respetivos pontos na representação gráfica. Carolina é uma grande entusiasta da utilização da folha de cálculo e sempre que não lhe ocorre uma ideia para resolver a proposta, recorre de imediato à utilização da folha de cálculo, como acontece na entrevista.

Durante a resolução das tarefas Carolina recorre frequentemente a transformações das representações. Relativamente, à conversão apresento o gráfico 8.3.1 com uma síntese da conversão das representações para o SNA, SNN e para representações gráficas que a aluna produz, tendo em conta a natureza das diferentes questões.

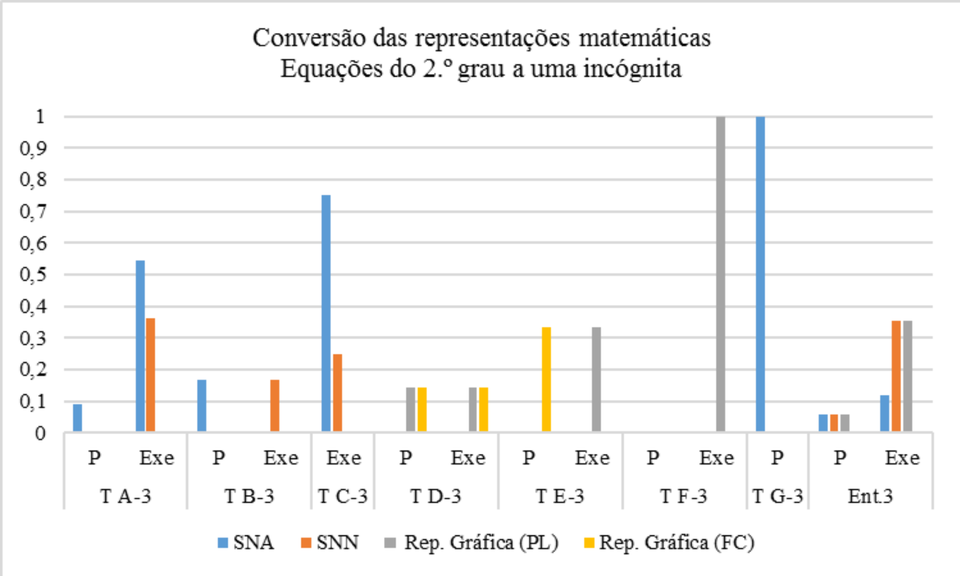


Gráfico 8.3.1: Conversão das representações de Carolina no estudo do tópico “Equações do 2.ºgrau a uma incógnita”.

A conversão das representações para o SNA surge sempre na resolução de problemas ao longo do estudo deste tópico. Está igualmente presente, na resolução de alguns exercícios, numa fase inicial até à tarefa C-3 e depois surge na tarefa G-3, bem como na entrevista. A conversão para o SNN ocorre na resolução de algumas tarefas, em especial, na resolução de exercícios. A aluna serve-se deste tipo de conversão essencialmente efetuar cálculos, por substituição, e avaliar expressões algébricas.

Relativamente ao tratamento das representações, a informação da atividade de Carolina encontra-se sintetizada no gráfico 8.3.2.

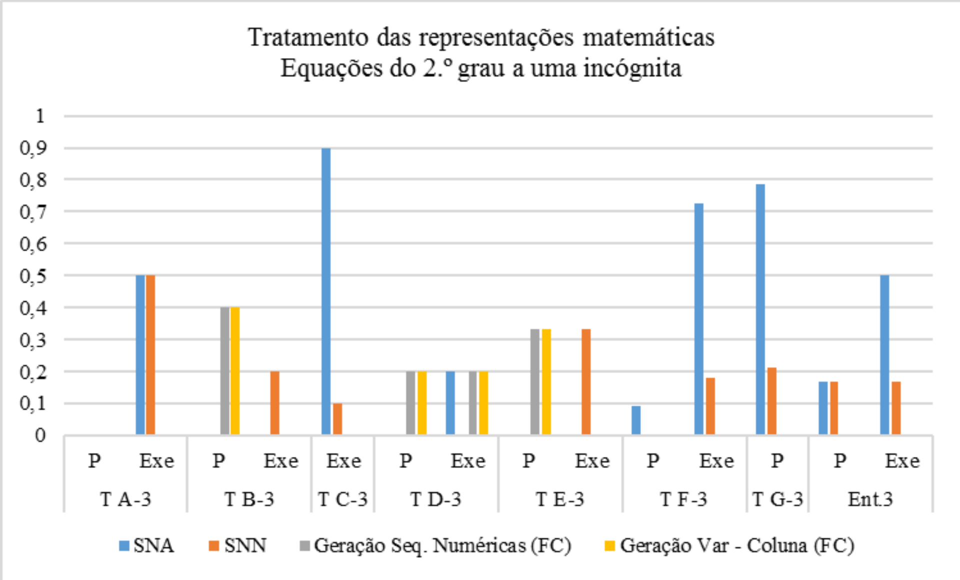


Gráfico 8.3.2: Tratamento das representações de Carolina no estudo do tópico "Equações do 2.ºgrau a uma incógnita".

Ao longo do estudo do tópico Carolina recorre frequentemente ao tratamento das representações. Inicialmente, a aluna recorre ao tratamento das representações tanto no SNN como no SNA, particularmente na resolução de exercícios. O trabalho na folha de cálculo pela sua natureza incentiva ao tratamento e a aluna recorre à geração de sequências numéricas e/ou à geração de variáveis-coluna. Na tarefa C-3 destacam-se os tratamentos no SNA que estão associados à factorização e aplicação da lei do anulamento do produto e a partir da tarefa F-3 estes tratamentos voltam a destacar-se, com o resultado da utilização da fórmula resolvente.

Ao longo do estudo deste tópico, as tarefas propostas incentivam Carolina na utilização de métodos formais algébricos, como a noção de raiz quadrada, a lei do anulamento do produto e a fórmula resolvente, na resolução de equações do 2.ºgrau. Em paralelo a aluna tem oportunidade de estudar várias propriedades da função quadrática. As tarefas iniciais têm um papel fundamental neste processo de aprendizagem. Por exemplo, na tarefa inicial, a aluna a partir de uma sequência pictórica escreve a sua expressão geradora (polinómio de grau 2) e atribui sentido assim à natureza deste tipo de expressão algébrica. Nesta tarefa a aluna dá evidências de saber utilizar a noção de raiz quadrada, na resolução de equações do 2.º grau do tipo $ax^2 + b = 0$, contudo as dificuldades na factorização e na aplicação da lei do anulamento do produto, dificultam a resolução de equações do tipo $ax^2 + bx = 0$.

O trabalho na folha de cálculo leva Carolina a perceber algumas propriedades das funções quadráticas. O caso da diferença de quadrados permite perceber a factorização que depois é trabalhada na tarefa C-3 levando a aluna à compreensão e aplicação da lei do anulamento do produto. As tarefas D-3 e E-3 contribuem para o estudo e compreensão de outras propriedades da função quadrática, tais como os seus zeros e a representação gráfica (parábola). Só posteriormente, na tarefa F-3 é apresentada a fórmula resolvente que a aluna facilmente utiliza. Carolina é uma aluna que no final do estudo do tópico não sabe a fórmula resolvente, contudo consegue aplicá-la e tenta aplicar os métodos estudados na resolução das tarefas propostas.

Carolina aprende os métodos formais para a resolução de equações do 2.º grau, no entanto, a aluna ainda revela algumas fragilidades na sua aplicação, por vezes, relacionadas com as dificuldades que denota nos tratamentos, tanto no SNA, como no SNN.

Em suma, a aprendizagem dos métodos formais é um marco na forma como a aluna utiliza e articula as diferentes representações. A partir do momento em que a aluna começa a aplicar a noção de raiz quadrada e, posteriormente, a lei do anulamento do produto, começa a privilegiar a utilização destes métodos. Posteriormente quando aprende a fórmula resolvente, a aluna procura utilizá-la nas diferentes situações propostas.

O estabelecimento da conexão entre o trabalho desenvolvido na folha de cálculo e a notação algébrica com papel e lápis.

No estudo deste tópico, a folha de cálculo é utilizada para explorar problemas de natureza distintas e com intenções diferenciadas. Na resolução do primeiro problema a atividade de Carolina com as representações matemáticas pode ser esquematizada como mostro na figura 8.3.29.

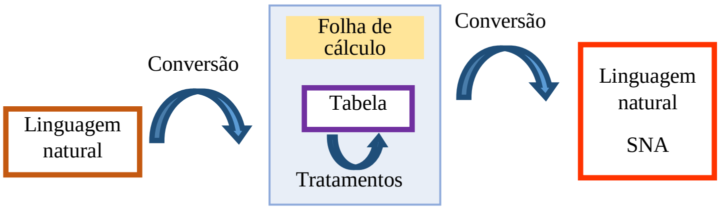


Figura 8.3.29: Atividade de Carolina na transformação das representações, TB-3.

A aluna, inicialmente, começa por traduzir o enunciado de linguagem natural para a tabela na folha de cálculo onde através de tratamentos estabelece as relações indicadas no problema de modo a obter a solução. Em seguida, Carolina converte o resultado a que chegou para linguagem natural e para o SNA. Embora numa fase inicial esta conversão não tenha contemplado o resultado obtido na íntegra de forma explícita, a discussão estabelecida em sala de aula leva ao refinamento da escrita da condição no SNA. Na resolução dos outros dois problemas propostos, a atividade de Carolina pode ser esquematizada como apresento na figura 8.3.30.

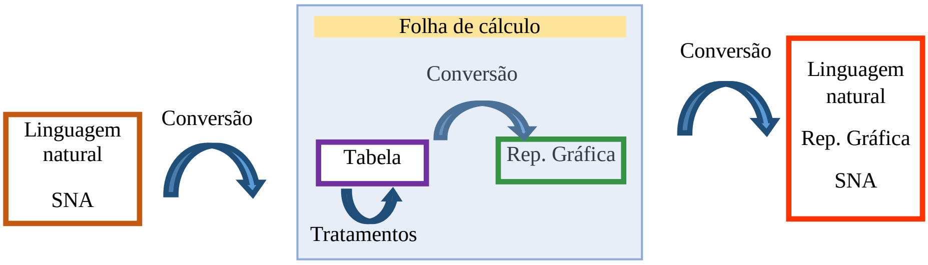


Figura 8.3.30: Atividade de Carolina na transformação das representações, TD-3 e TE-3.

Na resolução destes dois problemas, Carolina começa por identificar e representar a variável independente em cada uma das situações através da nomeação de uma coluna na folha de cálculo. De seguida, converte a expressão analítica da função dada no enunciado para uma fórmula no ambiente digital onde constrói uma variável-coluna. Posteriormente, converte a tabela para representação gráfica onde observa as parábolas obtidas. No ambiente de papel e lápis, a aluna serve-se da informação da tabela e da representação gráfica para atribuir sentido a noções relacionadas com os conceitos de máximos, mínimos e zeros das funções associadas, deste modo atribui significado a expressões algébricas como $A(t)=0$, $A(t)-240=0$ Por fim, noutra questão verifica que $A(t)-240=0$ é uma equação equivalente a $-20(t-2)(t-6)=0$. A partir da discussão desta questão explico que é possível escrever uma equação do 2.º grau como um produto de fatores, na forma $c(x-r_1)(x-r_2)=0$, onde c é uma constante e r_1 e r_2 são as raízes.

Contribuição da conexão entre os dois ambientes (folha de cálculo e papel e lápis) na aprendizagem dos métodos formais.

A conexão entre estes dois ambientes é fundamental. O primeiro problema leva Carolina à dedução da fórmula da diferença de quadrados, fundamental na resolução de equações, em particular para a factorização e posterior aplicação da lei do anulamento do produto. Os problemas seguintes conduzem a aluna à análise de propriedades da função quadrática, como os seus zeros e a sua relação com a representação gráfica, a factorização de uma equação do 2.º grau a partir das suas raízes, assim como o significado algébrico da resolução de uma equação do 2.º grau completa, mesmo antes da aprendizagem formal da fórmula resolvente.

CAPÍTULO 9

CONCLUSÕES

Neste capítulo apresento uma síntese do estudo, seguida das principais conclusões e de uma reflexão pessoal acerca da investigação realizada. São ainda apresentadas implicações, tanto para a prática do professor, em sala de aula, como para a investigação sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra.

9.1. Síntese do estudo

Este estudo incide sobre a aprendizagem de métodos formais algébricos, assumindo uma perspetiva de desenvolvimento do pensamento algébrico, tendo por base a implementação de uma experiência de ensino numa turma do 9.º ano. Neste trabalho dou especial ênfase ao estudo das representações matemáticas, em particular na aprendizagem dos métodos formais que surgem em cada um dos três tópicos matemáticos escolhidos. A folha de cálculo é utilizada ao longo da experiência de ensino como uma ferramenta com a qual procuro estabelecer pontes que permitam a ligação à Álgebra a partir da linguagem natural e/ou da Aritmética.

O objetivo do estudo é analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos na aprendizagem dos métodos formais algébricos tratados em três tópicos curriculares: i) sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas; ii) proporcionalidade inversa; representações gráficas e iii) equações do 2.º grau a uma incógnita. Deste objetivo decorrem três questões de investigação:

i) Como evoluem as representações utilizadas pelos alunos e como são transformadas ao longo da resolução das tarefas propostas com vista à aprendizagem de métodos formais algébricos?

ii) De que modo é estabelecida a conexão entre o trabalho desenvolvido com a folha de cálculo e o uso da notação algébrica com papel e lápis?

iii) De que forma este trabalho de conexão entre os dois ambientes contribui para a aprendizagem dos métodos formais algébricos?

O quadro teórico deste estudo assenta na aprendizagem da Álgebra e no desenvolvimento do pensamento algébrico, focando-se, em particular, na aprendizagem de métodos formais. As representações matemáticas construídas (com papel e lápis ou com a folha de cálculo) e as tarefas propostas aos alunos constituem as potenciais fontes de aprendizagem dos métodos formais algébricos nesta experiência. A resolução de problemas é a atividade privilegiada na experiência de ensino, onde alguns dos problemas propostos requerem o recurso à folha de cálculo – uma ferramenta reconhecida como facilitadora de transição entre o pensamento aritmético e o algébrico. A resolução de problemas é complementada por tarefas de diferentes tipos, nomeadamente, pela resolução de exercícios, à luz do que é proposto por Ponte (2005) acerca do valor das tarefas diversificadas e das suas potencialidades para a aprendizagem. O processo de resolução de cada tarefa envolve várias fases distintas, onde os momentos de discussão e de síntese são particularmente relevantes para promover uma ponte entre o trabalho dos alunos com papel e lápis ou na folha de cálculo e o uso convencional do simbolismo e dos processos algébricos.

Este estudo segue uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo, tendo como *design* de investigação o desenvolvimento de uma experiência de ensino relativamente à qual foram elaborados dois estudos de caso. No decurso da investigação assumo o duplo papel de professora da turma e de investigadora. No âmbito dos casos estudados, analiso o trabalho de duas alunas com caraterísticas e percursos escolares distintos. Carolina tem 16 anos, um percurso escolar marcado por duas retenções no 3.º ciclo, um desempenho irregular na disciplina de Matemática e pretende apenas concluir o ensino secundário. Gabriela é uma jovem com 14 anos, com um percurso escolar de sucesso, em particular, na disciplina de Matemática. O ingresso no ensino superior é encarado como uma fase natural da sua formação. A recolha de dados é conduzida através de: observação participante, complementada por registo áudio das aulas; produções das alunas no ambiente de papel e lápis e na folha de cálculo (neste caso com gravação áudio e vídeo do trabalho das alunas no computador) e três entrevistas clínicas realizadas no final do estudo de cada um dos tópicos. A análise de dados corresponde à análise de conteúdo das produções escritas das alunas, das transcrições das gravações áudio de episódios das aulas, da sequência de *frames* da folha de cálculo e das entrevistas realizadas, que de forma estruturada levou à construção dos dois casos apresentados.

9.2. Conclusões do estudo

As conclusões deste estudo estão organizadas em torno das questões de investigação formuladas. Na primeira questão analiso a evolução das alunas na utilização de representações matemáticas e na sua transformação. Nas outras duas questões procuro compreender o papel da folha de cálculo na aprendizagem dos métodos formais algébricos, considerando, em especial, as situações que promoveram as conversões para o SNA com papel e lápis.

A análise de dados permite afirmar que a experiência de ensino contribuiu para o desenvolvimento do pensamento algébrico das duas alunas. Carolina e Gabriela evoluem nas representações utilizadas, isto é, passam a utilizar progressivamente representações no SNA. Progridem também na transformação de representações, passando a efetuar frequentemente, conversões para o SNA, assim como tratamentos no SNA. O trabalho realizado com a folha de cálculo revelou-se determinante na aprendizagem dos métodos formais estudados, bem como na aprendizagem de propriedades importantes que permitem dar sentido a esses métodos.

9.2.1. Utilização de representações e suas transformações

Nesta secção analiso a evolução da utilização das representações e suas transformações em cada um dos tópicos estudados.

Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas

No início da experiência de ensino ambas as alunas mostram privilegiar a linguagem natural, tanto para explicar procedimentos como para apresentar respostas às questões de natureza algébrica. Usam fundamentalmente representações no SNN, muitas vezes apoiadas por representações pictóricas; sabem, apesar de tudo, escrever algumas expressões algébricas simples. No que respeita às transformações, as alunas efetuam conversões maioritariamente do SNA para o SNN, mostrando conseguir efetuar alguns tratamentos simples no SNA. Algumas dificuldades são detetadas a propósito do conceito de equação, tal como outros estudos relatam (Kuchemann, 1981; Kieran, 1981).

A noção de equações do 1.º grau

As tarefas propostas procuraram contribuir para a construção da noção de equação e para a supressão de algumas dificuldades relacionadas com o significado de variável e o uso de letras para a designação das variáveis. O recurso à folha de cálculo veio contribuir de forma significativa para a construção da ideia de variável e para a compreensão de relações de dependência entre diferentes variáveis envolvidas num problema. Um aspeto a salientar refere-se à conversão das representações próprias da folha de cálculo para o SNA, com papel e lápis, de tal modo que os alunos identificaram as fórmulas introduzidas nas células da folha de cálculo com a escrita de equações do 1.º grau envolvendo uma ou mais variáveis.

A noção de sistema de equações

A resolução de problemas surge como uma oportunidade para exprimir as condições entre diferentes variáveis com recurso à folha de cálculo. A estrutura de composição de relações funcionais, própria da folha de cálculo, apoia a tradução das condições e a ideia de verificação simultânea das mesmas. Da conversão das representações na folha de cálculo resultou a escrita de sistemas de equações do 1.º grau e a formalização deste conceito, acentuando a importância de que a solução do sistema deve satisfazer as várias equações em simultâneo.

A ideia de substituição (folha de cálculo e papel e lápis)

No estudo dos sistemas de equações os alunos precisam de desenvolver a noção de substituição onde habitualmente revelam dificuldade (Filloy, Rojano & Solares, 2004). A ideia de substituição que as alunas revelam no SNA baseia-se numa conversão para o SNN, ou seja, corresponde a substituir variáveis por valores numéricos específicos. No ambiente da folha de cálculo a ideia de substituição está igualmente associada à atribuição de valores numéricos, mas traduz-se na geração de variáveis-coluna, isto é, cada célula da coluna é o resultado da substituição de valor(es) de outra(s) célula(s), o que dá ideia da substituição por um número geral e não apenas por um caso particular, como acontece com o papel e lápis.

O método gráfico

A primeira abordagem ao método gráfico revela-se importante ao permitir que as alunas observem, em simultâneo, a variação numérica nas tabelas e a representação gráfica, facto que ajuda à compreensão da classificação dos sistemas. O recurso ao método gráfico, no ambiente de papel e lápis, exige uma construção rigorosa o que, por vezes, se revela difícil e moroso. Neste sentido, o recurso à folha de cálculo surge como um meio facilitador deste trabalho de representação. Carolina mostra dificuldades na utilização deste método, em particular, na escolha e na marcação de pontos para a representação gráfica assim como no estabelecimento de uma escala adequada para os eixos do referencial cartesiano. A abordagem com a folha de cálculo é importante, em particular para dar sentido à classificação de sistemas. Contudo torna-se insuficiente para Carolina na aprendizagem deste método, no ambiente de papel e lápis, por ser necessário construir as representações gráficas manualmente.

De um modo geral, a sequência de representações e conversões realizadas no ambiente combinado de folha de cálculo e papel e lápis, segue o esquema apresentado na figura 9.1.

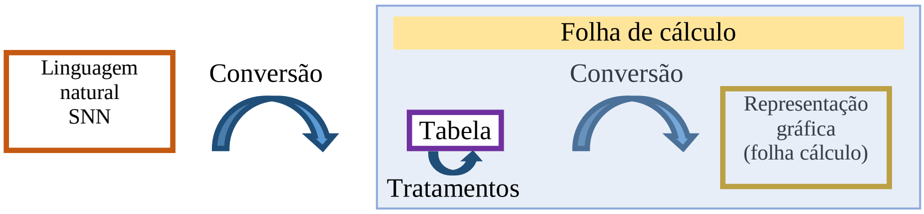


Figura 9.1: Utilização do método gráfico na resolução de problemas na folha de cálculo.

Quando as tarefas são pensadas para o trabalho com papel e lápis, os enunciados contêm já as relações algébricas escritas no SNA. Neste caso, as alunas começam por efetuar tratamentos neste sistema de notação de modo a escreverem equações em ordem a uma das variáveis e, em seguida, constroem tabelas, recorrendo a conversões do SNA para o SNN através da substituição de valores numéricos. Posteriormente, desenham o referencial e convertem a informação para uma representação gráfica, pois têm conhecimento que o gráfico irá exibir duas retas. Estas transformações podem ser esquematizadas como mostro na figura 9.2.

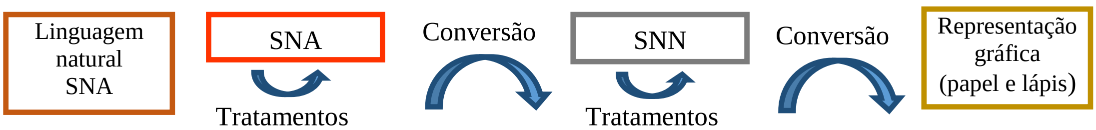


Figura 9.2: Utilização do método gráfico no ambiente de papel e lápis.

O método gráfico não é o preferencialmente escolhido pelas alunas na resolução de problemas, mesmo quando reconhecem que este pode ser a melhor opção. Em certos casos, o contexto do problema (encontrar as coordenadas de um ponto) é a principal motivação para a escolha deste método.

O método de substituição

Um dos objetivos das tarefas propostas foi o de permitir estabelecer a ponte entre o trabalho feito com a folha de cálculo e a notação algébrica. Assim, foi incentivada a resolução de problemas com a folha de cálculo, de modo a levar os alunos a analisarem os procedimentos algébricos envolvidos, evidenciando que coincidem com o método de substituição assente em tratamentos no SNA. Nestas conversões, da folha de cálculo para o SNA, as alunas tomam consciência de que os procedimentos efetuados na folha de cálculo são equiparáveis às operações correspondentes no SNA. Contudo, apesar de estarem habituadas a resolver problemas com a folha de cálculo, as alunas nem sempre estabelecem conexões com o SNA.

A maior parte das tarefas propostas para a utilização do método de substituição são apresentadas em linguagem natural, acompanhadas, por vezes, de outras representações no SNN. Deste modo, a conversão das relações da linguagem natural para o SNA é uma etapa indispensável na resolução de problemas. Tal como refere Duval (2011), a conversão é uma transformação que não é imediata para os alunos. Há ainda a acrescentar que devido às dificuldades inerentes ao trabalho no SNA, as conversões para este sistema de notação também se tornam menos apelativas. Contudo, a resolução de problemas com recurso à folha de cálculo, a par do trabalho no SNN e/ou com representações pictóricas é uma atividade que mostra incentivar as alunas na transição para um pensamento mais abstrato (Koedinger & Nathan, 2004), desenvolvendo assim, uma perspetiva algébrica das resoluções (Windsor, 2010) e promovendo as conversões para o SNA (Nobre, Amado & Ponte, 2015). A discussão em grande grupo deste trabalho revela-se também da maior importância neste processo.

Em determinadas situações, à semelhança do que sucede com Carolina e Gabriela, os restantes alunos não conseguem realizar a conversão do enunciado para o SNA, procurando neste caso métodos alternativos. Gabriela, por exemplo, opta pela tentativa e erro através de tratamentos no SNN. Em contrapartida, Carolina opta pela folha de cálculo, mostrando confiança neste ambiente digital para efetuar as suas experiências, estabelecer relações entre as variáveis presentes no enunciado e, assim, obter uma solução. Este facto vem ao encontro do que é defendido por Ainley et al. (2004), Dettori et al. (2001), Rojano (2002) e Tabach et al. (2008) relativamente à rapidez de geração de grandes conjuntos numéricos na folha de cálculo, num curto espaço de tempo. Acresce ainda, o facto de este ambiente de trabalho ser estimulante, na medida em que favorece uma maior compreensão das relações de dependência entre as variáveis e estimula os alunos a apresentarem gradualmente resoluções algébricas em detrimento de métodos aritméticos.

Na figura 9.3 apresento um esquema onde identifico as transformações das representações matemáticas utilizadas habitualmente na resolução de problemas com o método de substituição (ao centro) e as transformações a que as alunas recorrem quando usam métodos alternativos.

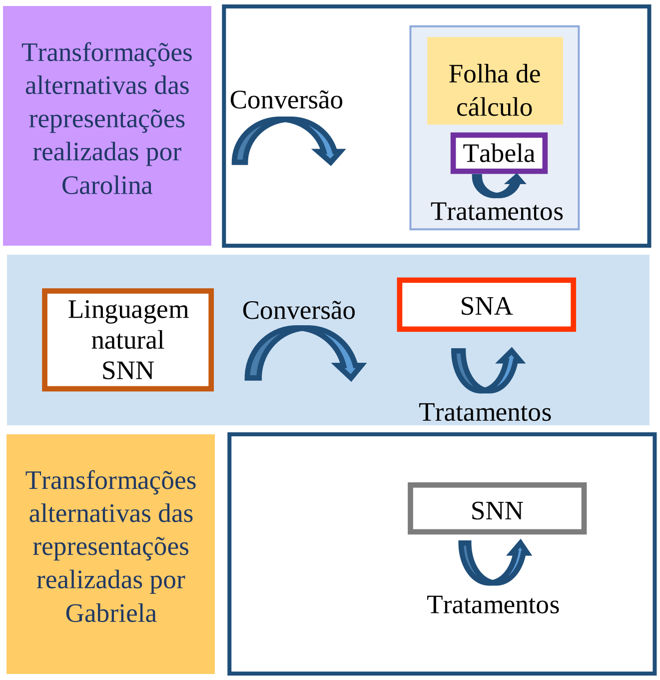


Figura 9.3: Utilização do método de substituição na resolução de problemas e transformações alternativas utilizadas por Carolina e Gabriela.

Na resolução de exercícios, ambas as alunas aplicam corretamente o método de substituição que, neste caso, se resume apenas a tratamentos no SNA. Contudo, quando surgem equações mais complexas, isto é, que envolvem expressões com parêntesis e denominadores, Carolina, por vezes, revela alguma hesitação na escolha dos procedimentos a seguir. Esta situação pode estar relacionada com a sua dificuldade em efetuar cálculos no SNN que se repercutem na realização de cálculos simples no SNA. O método de substituição revela-se o método formal eleito pelas duas alunas para a resolução de sistemas de equações.

O método da adição ordenada

Este método surge espontaneamente a partir da abordagem a um problema feita por Carolina. Este é o último problema de um conjunto de quatro tarefas onde a aluna recorre essencialmente a representações no SNA para resolver as primeiras propostas. As caraterísticas desta última proposta levam-na a recorrer a representações pictóricas em conjugação com outras no SNN e que fazem sentido para a aluna no contexto apresentado. Na discussão, a aluna apresenta a sua abordagem informal à turma e, com base neste trabalho, prossigo para a formalização deste método, através de representações no SNA e de tratamentos neste mesmo sistema. Este facto está em consonância com o que é mencionado por vários autores, tais como Hiebert e Carpenter (1992) e Ponte e Quaresma (2014), no sentido de que as aprendizagens formais devem apoiar-se em representações intuitivas. Gabriela opta pelo método de tentativa e erro, apoiado em representações no SNN, para resolver o mesmo problema. As transformações das representações utilizadas neste método estão esquematizadas na figura 9.4.

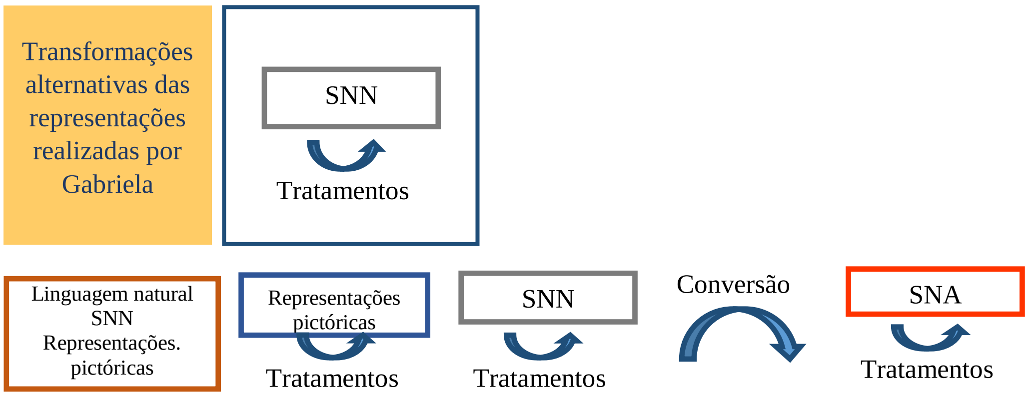


Figura 9.4: Utilização do método da adição ordenada na resolução de problemas.

Este é o método menos trabalhado em sala de aula no estudo dos sistemas. No entanto, na entrevista, tanto Carolina como Gabriela dão evidências de se recordarem da sua utilização na resolução do referido problema. Relativamente ao estudo deste tópico e dos métodos formais que lhe estão associados, ambas as alunas revelam compreensão dos métodos ainda que, por vezes, em momentos distintos.

Aspetos genéricos

No final do estudo deste tópico, durante a resolução de problemas, Carolina e Gabriela, mostram saber em que condições podem escrever um sistema de equações. Relativamente ao método formal, as alunas mostram preferir o método de substituição em detrimento dos restantes. Na realidade, este foi o método mais trabalhado em sala de aula. Ambas as alunas mostram saber utilizar o método gráfico, mas a morosidade que requer uma representação gráfica rigorosa sem recurso às tecnologias torna este método pouco usado. Carolina revela algumas dificuldades na utilização deste método mesmo após a conclusão do estudo do tópico.

Dadas as dificuldades apresentadas pelos alunos, parte do trabalho no estudo deste tópico incidiu sobre os tratamentos no SNA. Contudo, sempre que possível foram estabelecidas conexões entre as representações no SNA, representações gráficas, linguagem natural e outras, no SNN, bem como representações pictóricas. Estou consciente de que, em determinados momentos, as alunas revelaram apenas uma compreensão parcial dos métodos formais. Contudo, essa compreensão vai-se desenvolvendo progressivamente, tendo como suporte as tarefas propostas na sala de aula, os momentos de discussão e as sínteses assentes nas conexões entre representações.

De um modo geral, a resolução de problemas, revela-se da maior importância, não só para a introdução ao estudo dos sistemas, mas contribuindo também para dar sentido à aprendizagem dos métodos formais. Esta tipologia de tarefa incentiva as conversões da linguagem natural para o SNA, essenciais ao desenvolvimento do pensamento algébrico. A resolução de exercícios serve ainda outros propósitos igualmente relevantes, como promover a destreza na manipulação simbólica, ou seja, dos tratamentos no SNA, o que contribui para aumentar a fluência na utilização dos métodos, como é reconhecido por uma das alunas. Este tipo de tarefa leva ainda os alunos a refletir, por exemplo, acerca do significado algébrico de um ponto ser solução de um sistema de equações. Em suma, a resolução de problemas, em articulação com a resolução de exercícios, são dois tipos de tarefas que se complementam na aprendizagem dos métodos formais.

Proporcionalidade inversa. Representações gráficas

No início do estudo deste tópico as alunas recorrem essencialmente à linguagem natural e a representações no SNN. Por vezes, para simularem as situações propostas, as alunas apoiam-se em representações pictóricas que as ajudam a atribuir significado ao problema.

A noção de proporcionalidade

Desde o início do estudo deste tópico que ambas as alunas mostram ser capazes de identificar as situações de proporcionalidade direta e de recorrer a uma regra de três simples para resolver as tarefas propostas. Perante situações em que não existe qualquer tipo de proporcionalidade, registam-se por vezes algumas hesitações e em certos casos há lugar a uma utilização imprópria da regra de três simples. No entanto, os contextos das tarefas propostas desempenham um papel determinante para ajudar a dar sentido às situações, como acontece no caso da variação do número de músicos e do tempo que demoram a tocar uma melodia ou do número de peças a secar ao sol e do tempo que levam a secar.

Nas situações que apresentam um raciocínio inversamente proporcional, as alunas efetuam essencialmente a conversão dos enunciados dos problemas, em linguagem natural, para o SNN e para representações pictóricas. Relativamente aos tratamentos, ambas privilegiam os tratamentos no SNN. No entanto, nem sempre dão evidência de utilizar este tipo de raciocínio.

A escrita da expressão algébrica

O método formal associado a este tópico é a utilização da expressão algébrica em situações de proporcionalidade inversa. A escrita desta expressão surge, pela primeira vez, a partir de uma tarefa realizada no ambiente digital da folha de cálculo. As alunas fazem a conversão da informação dada no problema para a folha de cálculo, o que as leva a obter corretamente a relação entre as duas grandezas e, posteriormente, a converter esta relação para o SNA, com papel e lápis.

O trabalho realizado na folha de cálculo permitiu também que as alunas procedessem facilmente à conversão de uma tabela para uma representação gráfica, neste ambiente, proporcionando assim um primeiro contacto com o gráfico de uma função de proporcionalidade inversa – uma hipérbole. Nos primeiros exemplos, a constante de proporcionalidade era um número positivo, razão pela qual o gráfico foi representado apenas no 1.º quadrante. As situações posteriores em que surgiram constantes negativas provocaram maiores dificuldades, sobretudo a uma das alunas, possivelmente devido ao facto de se afastarem mais de problemas contextualizados.

No final do estudo deste tópico, a partir de um determinado problema, ambas as alunas começam por converter a informação do enunciado para uma tabela e, em seguida, partem para a escrita da expressão algébrica e/ou para a representação gráfica. Estas transformações das representações podem ser esquematizadas como mostro na figura 9.5.

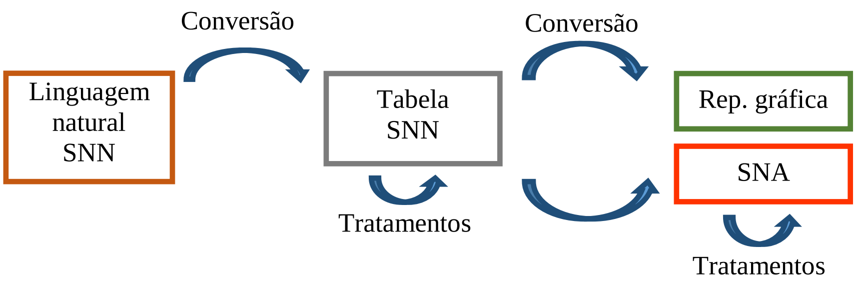


Figura 9.5: Transformação das representações matemáticas na resolução de problemas.

Por outro lado, quando lhes é dada uma representação gráfica, as alunas convertem a informação para o SNN onde efetuam alguns tratamentos e confrontam com uma possível expressão analítica, como esquematizo na figura 9.6.

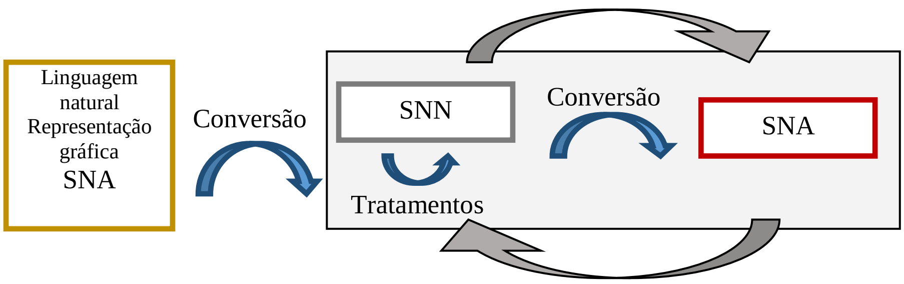


Figura 9.6: Tratamento das representações matemáticas na resolução de problemas.

No estudo deste tópico verifico que a aprendizagem da escrita da expressão algébrica de uma função de proporcionalidade inversa, bem como da representação gráfica são aspetos importantes na aprendizagem das alunas. A partir do momento em que as alunas integram esses tipos de representação nas outras que já conhecem, começam a utilizá-las de forma integrada e articulada.

Conexões entre representações

A resolução de problemas, revelou-se da maior importância no estudo deste tópico, em particular, por oferecer um contexto real que contribuiu para as alunas atribuírem significado às situações em estudo. Desta forma, ambas mostram frequentemente ser capazes de estabelecer conexões entre as diferentes representações: tabela, representação gráfica e expressão algébrica.

As alunas começam por testar a existência de proporcionalidade, em seguida convertem a informação dada através de diferentes sistemas de representação para averiguar o tipo de proporcionalidade existente, de acordo com aquilo que sabem acerca das funções de proporcionalidade (o tipo de representação gráfica, a constante de proporcionalidade e a expressão algébrica). Sempre que consideram necessário, as alunas recorrem a este tipo de teste, utilizando valores distintos, pelo que se pode identificar a existência de ciclos de conversões. Estes ciclos são apoiados por tratamentos no SNN e, ainda, pelo contexto da situação, que as ajuda a clarificar a existência ou não de proporcionalidade, e que são fundamentais na atividade de resolução de problemas, como apresento na figura 9.7.

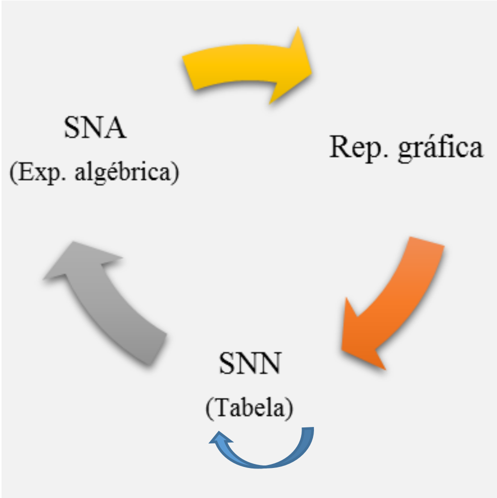


Figura 9.7: Ciclos de conversões na atividade de Carolina e Gabriela.

No final do estudo do tópico, Gabriela mostra fluência neste ciclo de conversões, o que lhe permite concluir, com alguma facilidade, acerca da existência ou não de proporcionalidade inversa entre duas grandezas. A escrita da expressão algébrica surge sem dificuldade e sempre que necessário a aluna estabelece conexões entre os vários tipos de representação.

Carolina, por seu turno, mostra compreender em que situações pode recorrer a este método formal e utiliza-o recorrentemente. Na maior parte dos casos, a expressão algébrica não surge de forma isolada, mas em conjunto com tabelas e/ou gráficos. A aluna revela algumas dificuldades nos tratamentos no SNN, o que lhe subtrai algum tempo para continuar fluentemente o ciclo de conversões. Para além disso, por vezes, mostra alguma hesitação que advém de não possuir um conhecimento sólido acerca das propriedades das funções de proporcionalidade inversa. Todavia, a aprendizagem de novas representações, como o gráfico e a sua articulação com a tabela, e a transformação entre elas, permitem o desenvolvimento do seu pensamento algébrico e a aplicação desses conhecimentos a situações novas.

Equações do 2.º grau a uma incógnita

No início do estudo deste tópico, as alunas mostram ter opções distintas relativamente ao uso de representações, embora ambas se apoiem fortemente na linguagem natural. Carolina prefere as representações no SNA, enquanto Gabriela usa com maior frequência o SNN, como mostram as resoluções apresentadas nos capítulos anteriores.

Ao longo da aprendizagem do tópico, ambas as alunas utilizam o SNA para escrever e simplificar expressões algébricas, utilizar a propriedade distributiva para multiplicar dois binómios, calcular ou exprimir a área e o perímetro de retângulos. Carolina efetua exclusivamente conversões para o SNA, quando executa tarefas de resolução de problemas; no caso da resolução de exercícios, a aluna continua a trabalhar predominantemente no SNA. Gabriela mostra facilidade em recorrer aos dois sistemas, SNN e SNA, tanto na resolução de problemas como na resolução de exercícios.

A factorização na resolução de equações do 2.º grau

Carolina e Gabriela mostram saber resolver equações do tipo $ax^2 + b = 0$ recorrendo à noção de raiz quadrada, logo no início do estudo do tópico. Este método foi estudado no ano letivo anterior e a raiz quadrada surge naturalmente como operação inversa do quadrado de um número. Este tipo de equações pode também ser resolvido recorrendo à decomposição do polinómio em fatores. Em particular, torna-se vantajoso conhecer a transformação da diferença de quadrados num produto de fatores (um dos casos notáveis da multiplicação). Atendendo às dificuldades reveladas pela maioria dos alunos na utilização dos casos notáveis da multiplicação, no contexto da resolução de equações o 2.º grau, foi necessário um trabalho adicional para levar os alunos a superarem essas dificuldades. Desta forma, a diferença de quadrados foi abordada em tarefas realizadas na folha de cálculo que levaram as alunas à conversão das relações estabelecidas na folha de cálculo para o SNA. Este trabalho de conversão foi importante para fazer emergir o reconhecimento de uma diferença de quadrados assim como a sua generalização como um produto de fatores, um aspeto essencial no desenvolvimento do pensamento algébrico (Kaput, 1999, 2008; Kaput, Blanton & Moreno, 2008; Kieran, 2004). Neste processo, as alunas efetuaram tratamentos na folha de cálculo e, posteriormente, conversões para o SNA, com papel e lápis, atribuindo significado à factorização de um polinómio de grau 2.

A representação gráfica na resolução de equações do 2.º grau

A utilização da folha de cálculo na resolução de problemas, quer nos casos em que foram dadas as expressões analíticas das funções no SNA quer no caso em que as alunas tiveram de efetuar a conversão dos dados do problema para a folha de cálculo através de fórmulas, foi da maior importância. A folha de cálculo proporcionou de forma imediata, a conversão de tabelas para uma representação gráfica. Esta representação foi determinante para a compreensão do tipo de gráfico associado a uma função quadrática. Neste ambiente, as alunas tiveram oportunidade de observar a variação e de estabelecer conexões entre os valores numéricos da tabela e as coordenadas dos pontos da representação gráfica. A partir da observação e da interpretação destas representações gráficas, as alunas conseguiram responder sem dificuldade às questões colocadas, tendo em conta o contexto do problema.

A fórmula resolvente

A fórmula resolvente surgiu após a resolução de vários problemas e exercícios que permitiram abordar técnicas de factorização de polinómios e outros conceitos (parábola, vértice, eixo de simetria, …) importantes para a compreensão do significado das soluções deste tipo de equações.

Na resolução de tarefas que envolviam equações do 2.º grau incompletas, a utilização da folha de cálculo revelou potencialidades para a aprendizagem dos métodos formais de resolução, permitindo não só dar sentido a esses métodos, mas inclusivamente realizar algumas aprendizagens que ultrapassam o programa de 9.º ano. Habitualmente, a aprendizagem da fórmula resolvente é feita de forma pouco articulada com a representação gráfica da função quadrática, que é deixada para o 10.º ano. Contudo, o recurso à representação gráfica parece desempenhar um papel muito importante na atribuição de significado às soluções de uma equação do 2.º grau. Assim, optei igualmente por promover o recurso à utilização da folha de cálculo para a resolução de equações do 2.º grau completas, partindo de tarefas de natureza diversa. O recurso sistemático ao esboço da representação gráfica da respetiva função, contribuiu, por exemplo, para atribuir significado aos zeros de uma função e à classificação das equações do 2.º grau.

Na resolução de problemas, as alunas começaram por identificar a incógnita, converteram a informação dada para o SNA e, posteriormente, efetuaram tratamentos no SNA, muitos deles envolvendo a fórmula resolvente. As alunas confrontaram as soluções obtidas com o contexto dos problemas e, por fim, apresentaram as repostas em linguagem natural. Ambas revelaram algumas dificuldades na conversão das condições do enunciado para o SNA em diversas situações, nomeadamente as que incluem construções geométricas e figuras.

De uma maneira geral, Carolina e Gabriela aprenderam facilmente a utilizar a fórmula resolvente, bem como algumas das suas propriedades associadas às equações do 2.º grau e à função quadrática, habitualmente tratadas, posteriormente, no 10.º ano.

Síntese

No início do estudo de cada um dos três tópicos abordados na experiência de ensino, foi realizada uma ficha de diagnóstico que permitiu identificar não só os conhecimentos e as dificuldades das alunas, mas ainda as representações a que recorriam e o tipo de transformações que realizavam. Esta informação foi bastante importante para me ajudar a definir e ajustar o trabalho, nomeadamente na seleção das tarefas a propor nas aulas seguintes. Nas tarefas de diagnóstico as alunas utilizaram maioritariamente representações informais tais como representações pictóricas e no SNN com as quais atribuíram sentido e significado aos processos de resolução. Relativamente às conversões, estas ocorreram muitas das vezes para representações no SNN e os tratamentos ocorreram sobretudo neste sistema. Contudo, as alunas também efetuaram alguns tratamentos no SNA, como a simplificação de expressões algébricas e a resolução de equações mais simples, no estudo dos sistemas de equações e das equações do 2.º grau.

A utilização da linguagem natural mostra-se muito importante em todos os momentos da experiência de ensino. É, muitas vezes, usada como um elo de ligação entre as diferentes representações, para apresentar as explicações e as respostas aos problemas, surgindo como um suporte fundamental na construção dos processos de resolução apresentado pelas alunas. Ambas as alunas valorizam este tipo de representação como parte integrante das suas resoluções, que sustenta os cálculos apresentados e é fundamental na expressão do pensamento matemático. Deste modo, a linguagem natural pode ser encarada como um poderoso recurso na aprendizagem da matemática (Duval, 2011).

No ambiente digital da folha de cálculo, as alunas têm oportunidade para utilizar representações próprias desse ambiente digital que apelam à identificação das variáveis nos problemas e à escrita de relações entre eles. Nos momentos de discussão foram feitas conversões do ambiente digital da folha de cálculo para o SNA. Como consequência dessas conversões, o momento da síntese permitiu a formalização do conhecimento matemático como métodos e/ou propriedades importantes.

No estudo dos três tópicos verifico que a partir do momento em que aprendem os métodos formais, as alunas começam a utilizá-los e efetuar mais conversões para o SNA assim como tratamentos nesse sistema de notação, como esquematizo na figura 9.8.

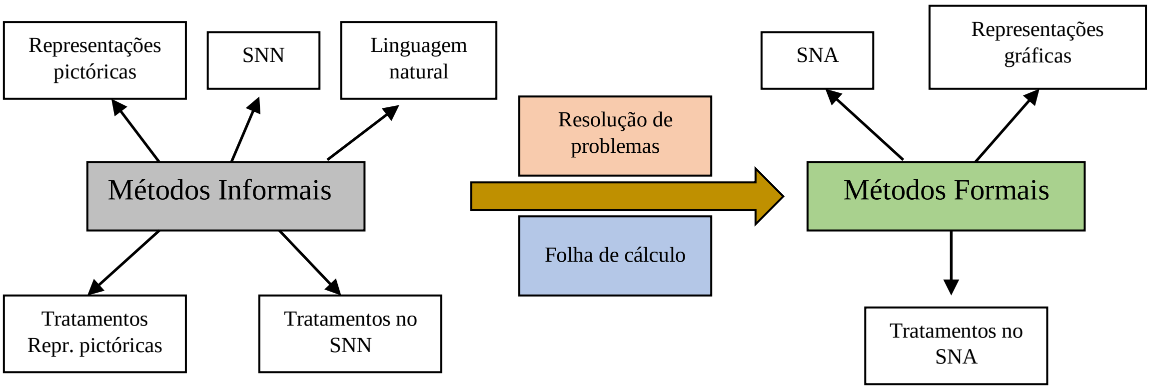


Figura 9.8: A aprendizagem de novos métodos e representações associadas.

Nos três tópicos estudados, registo inicialmente o recurso a métodos informais assentes na utilização de representações como a linguagem natural, o SNN e representações pictóricas, tratamentos no SNN e, em muitos casos, conversões para o SNN. A partir dos momentos de síntese, em que se formalizam os métodos algébricos relativos a cada um dos tópicos, as alunas começam a utilizá-los para resolver as tarefas propostas. Carolina confessa que, em muitos casos, opta por decorar os procedimentos no estudo da proporcionalidade e para o sentido da concavidade das parábolas.

O trabalho com a folha de cálculo, em particular na resolução de problemas, é uma atividade impulsionadora da aprendizagem dos métodos formais e serve de suporte para dar sentido à utilização desses métodos. Este tipo de trabalho com a folha de cálculo possibilita uma variedade de abordagens (tabela de dupla entrada, diferentes formas de estabelecer as relações entre as variáveis).

Ao longo do estudo dos tópicos a formalização dos métodos ocorre de forma progressiva tendo como suporte as representações utilizadas pelas alunas e outras incentivadas por mim durante a resolução das tarefas. No final de cada um dos tópicos, as alunas resolveram sempre exercícios e problemas de aplicação dos métodos formais estudados.

Gabriela de um modo geral aprendeu os métodos trabalhados. Carolina também aprendeu a utilizar os métodos formais, contudo revela algumas fragilidades nomeadamente nos tratamentos no SNA. Esta aluna, ao contrário de Gabriela nem sempre é rigorosa na utilização do simbolismo algébrico (por exemplo, omitindo sinais de equivalência na resolução de equações e o domínio da variável independente nas situações de proporcionalidade inversa), assim como na linguagem que utiliza (variáveis que designa por coisas, equações que designa por expressões, binómio discriminante que designa por coiso, confunde hipérbole com parábola). Gabriela, por seu lado, tenta estar atenta a todos os pormenores e ser o mais rigorosa possível, quer na utilização do simbolismo algébrico quer na utilização da terminologia estudada.

No início do estudo de cada tópico, há uma forte presença da linguagem natural, em particular quando ainda são desconhecidos os métodos formais. No final do ensino destas três unidades, Carolina e Gabriela mostram ter aprendido os métodos formais pois recorrem frequentemente a esses métodos e a representações no SNA; em contrapartida, nesta fase, a linguagem natural, mesmo na resolução de problemas, tem uma presença muito fraca. O uso dos métodos formais parece, portanto, substituir o recurso à linguagem natural que passa a ser utilizada essencialmente para designar as variáveis e para dar as respostas.

9.2.2. O estabelecimento da conexão entre o trabalho desenvolvido na folha de cálculo e a notação algébrica com papel e lápis

Os métodos formais associados a cada um dos três tópicos envolvidos neste estudo têm características distintas, o que se reflete no trabalho com a folha de cálculo. No estudo dos sistemas de equações, por exemplo, o recurso ao método de substituição implica um conhecimento sólido da escrita de equações, da sua resolução e da substituição de variáveis, pelo que foram propostos problemas específicos em etapas consideradas cruciais para uma melhor compreensão do método. No estudo da proporcionalidade inversa, o método formal é quase imediato, pelo que as tarefas propostas são em menor número. Quanto às equações do 2.º grau, de acordo com os vários tipos de equações, são propostos problemas para resolução na folha de cálculo que conduzem os alunos à compreensão do significado da diferença de quadrados, da factorização, da lei do anulamento do produto, dos zeros de uma função, máximo, mínimo e escrita de equações equivalentes, o que é fundamental para a aprendizagem da resolução da equação do 2.º grau e do significado das suas soluções. A fórmula resolvente não é diretamente trabalhada a partir dos problemas propostos na folha de cálculo, contudo estes revelam-se importantes e servem de base para uma melhor compreensão da aplicação deste método formal de resolução de equações do 2.º grau.

Na resolução das diferentes tarefas com a folha de cálculo procuro sempre estabelecer uma ponte com o trabalho com papel e lápis, ou seja, com a Matemática convencional, em especial com a linguagem algébrica. Desta forma pretendo sempre que os alunos atribuam significado às representações na folha de cálculo, de acordo com as condições do problema e, por outro lado, com a notação algébrica, como esquematizo na figura 9.9.

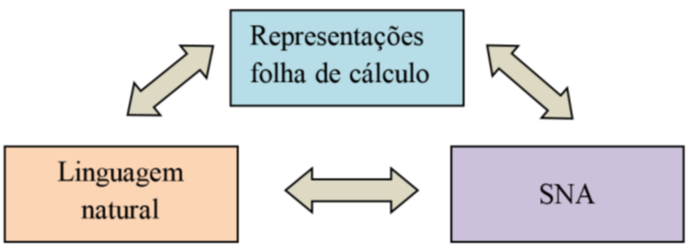


Figura 9.9: Estabelecimento de conexões entre representações de diferentes ambientes.

Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas

No estudo deste tópico, o estabelecimento de conexões entre as várias representações ocorre particularmente no momento de discussão e partilha de produções de alunos. Numa primeira fase, procuro que os alunos clarifiquem e expliquem o significado das suas representações na folha de cálculo, tendo em conta as condições do enunciado. Carolina e Gabriela, habitualmente, começam por identificar as variáveis presentes na situação proposta com as colunas que constroem na folha de cálculo. Os valores que utilizam na construção dessas colunas dependem do contexto dos problemas propostos, tal como as relações que traduzem as condições descritas nos problemas, dadas em linguagem natural. Esta atividade das alunas pode ser esquematizada como mostro na figura 9.10.

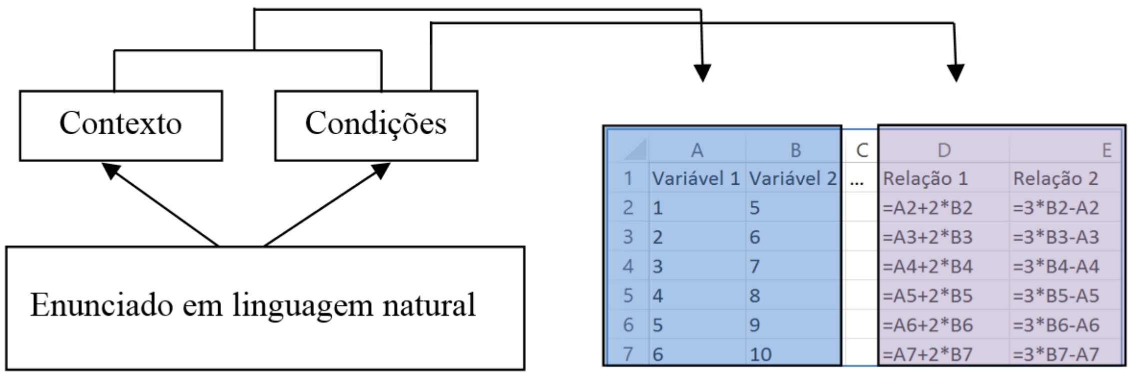


Figura 9.10: Conversão dos enunciados em linguagem natural para a folha de cálculo.

Estas conversões, da linguagem natural para a folha de cálculo, são fundamentais no processo de resolução das várias tarefas. A identificação das variáveis e a sua concretização através da construção de colunas, onde é possível observar a variação no seu domínio, é fundamental para o desenvolvimento do conceito de variável. Por outro lado, a escrita das relações entre as variáveis, no ambiente de papel e lápis, surge da conversão das condições que as alunas escreveram na folha de cálculo. Contudo, o estabelecimento de relações no ambiente digital da folha de cálculo pode ser feito de forma explícita ou implícita, caso a relação seja escrita ou apenas memorizada. No caso de a relação estar estabelecida de forma implícita, a conversão para o SNA surge a partir de uma representação interna ou externa e, neste caso, é apenas verbalizada oralmente. No outro caso, a conversão surge a partir da relação estabelecida na folha de cálculo com a sintaxe própria deste ambiente. As alunas não manifestam dificuldades nesta conversão. Apesar de se tratar de uma linguagem distinta, a conversão que as alunas efetuam é feita de forma direta, termo após termo, operação após operação, como no exemplo que esquematizo na figura 9.11.

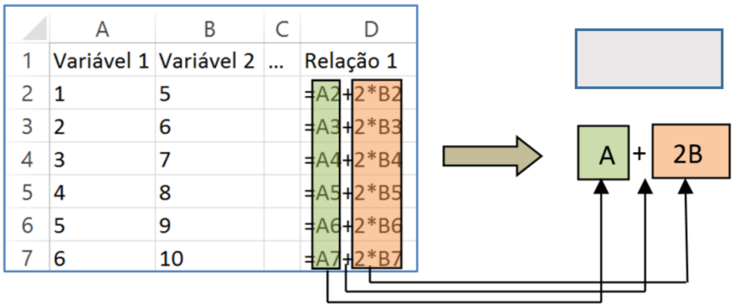


Figura 9.11: Conversão de uma relação da folha de cálculo para o SNA (papel e lápis).

O facto de a sintaxe própria da folha de cálculo permitir uma conversão intuitiva para o papel e lápis é importante para as alunas compreenderem a escrita de uma relação com duas variáveis. No estudo deste tópico, a resolução de um problema na folha de cálculo permite aos alunos a conversão para o SNA da relação escrita no ambiente digital. A conversão possibilita a atribuição de significado algébrico à tabela construída na folha de cálculo. Mais tarde, na resolução de outro problema as alunas convertem mais do que uma relação, chegando a um conjunto de condições que possibilita formalizar a noção de sistema de equações. Com a introdução das representações gráficas na folha de cálculo, as alunas para além de converterem as condições do enunciado em linguagem natural, realizam ainda conversões das tabelas para as respetivas representações gráficas, no próprio ambiente digital, como esquematizo na figura 9.12.

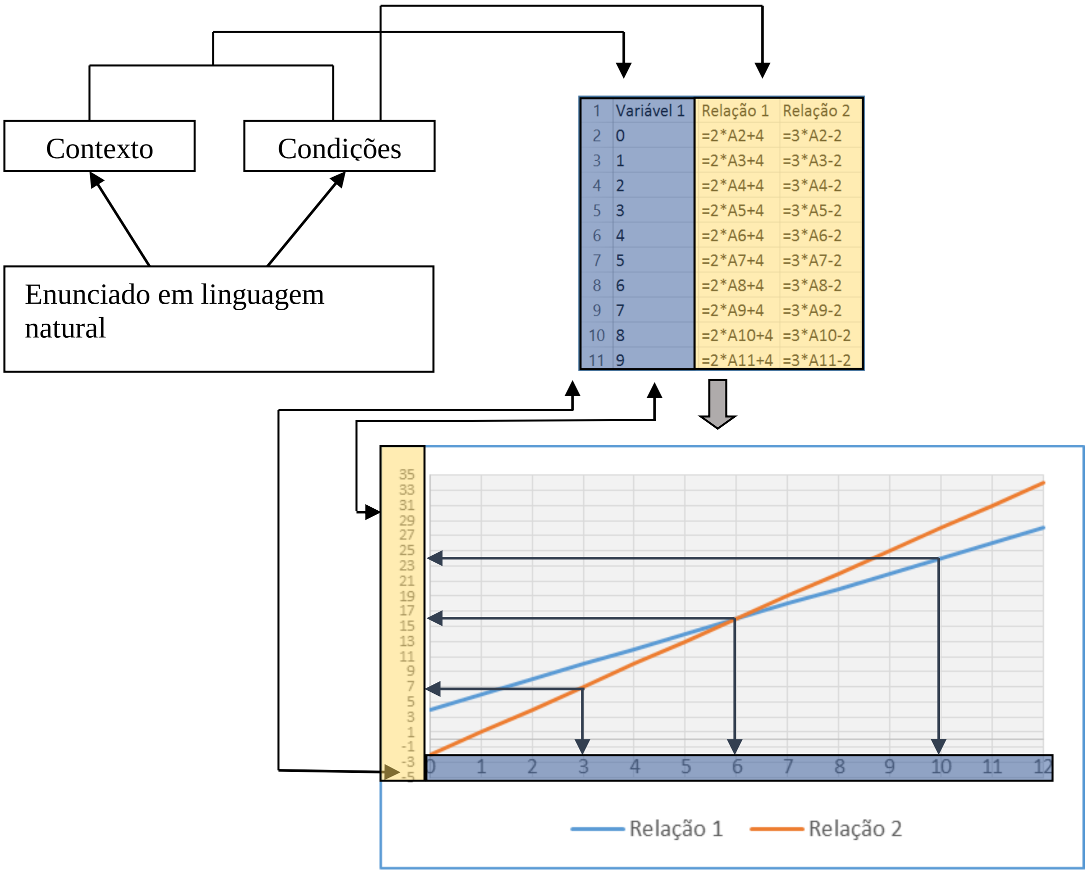


Figura 9.12: Conversões de condições nos ambientes da folha de cálculo para o SNA (papel e lápis).

A exploração das representações gráficas na folha de cálculo permitiu igualmente a formalização do método gráfico da resolução de sistemas e, ao mesmo tempo, a classificação dos sistemas. A representação gráfica e a respetiva tabela numérica da folha de cálculo também contribuíram para a compreensão do conceito de solução de um sistema de equações.

De um modo geral, as conversões da folha de cálculo para o ambiente de papel e lápis ocorrem maioritariamente nos momentos de discussão e correspondem à escrita de expressões algébricas ou equações que os alunos traduzem diretamente da folha de cálculo. Esta ferramenta foi assim verdadeiramente útil na aprendizagem do método de substituição e do método gráfico de resolução de sistemas.

Proporcionalidade Inversa

Os enunciados das tarefas propostas neste tópico são apresentados em linguagem natural e contêm uma condição que estabelece a relação entre duas grandezas.

Inicialmente as alunas convertem a informação do enunciado em linguagem natural para a tabela da folha de cálculo e depois através da escrita de uma relação (divisão entre a constante e a grandeza) obtêm a outra grandeza. Apenas Gabriela efetua a conversão para o SNA nas primeiras situações, mas ambas as alunas obtêm a representação gráfica na folha de cálculo. Esta atividade pode ser esquematizada como mostro na figura 9.13.

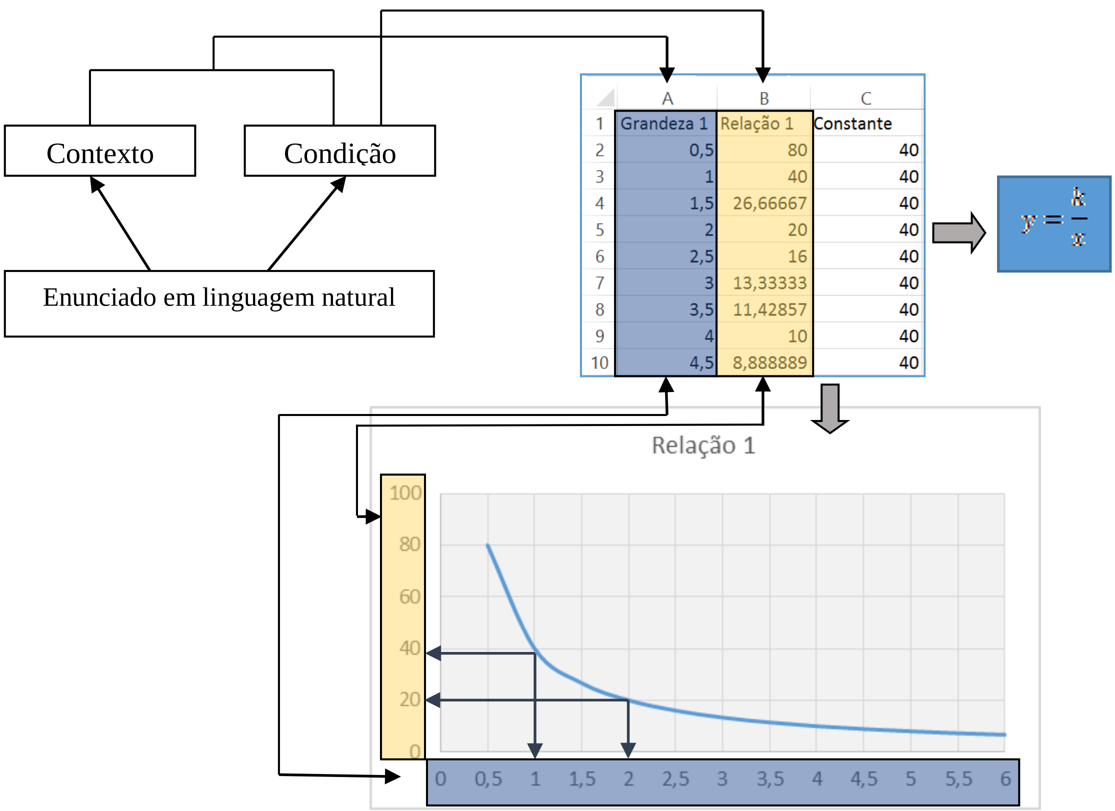


Figura 9.13: Conversões de condições nos ambientes da folha de cálculo para o SNA (papel e lápis).

Perante duas situações puramente matemáticas relativas ao estudo deste tipo de função de variável real para explorar na folha de cálculo, as alunas seguem um procedimento análogo ao exibido anteriormente e conseguem converter corretamente para o SNA a condição escrita na folha de cálculo. No estudo deste tópico as alunas efetuam as conversões para o SNA em momentos anteriores às discussões e sínteses, mostrando assim uma evolução na passagem para este sistema.

Equações do 2.º grau a uma incógnita

No estudo deste tópico o primeiro problema para explorar com a folha de cálculo prende-se com uma lacuna que identifico nos alunos ao nível dos casos notáveis da matemática. Na resolução deste problema cujo enunciado está em linguagem natural, as alunas identificam as variáveis e convertem as relações para a folha de cálculo. Posteriormente, efetuam corretamente essa conversão para o SNA, tendo sido possível discutir outras formas alternativas que permitiram explorar a “diferença de quadrados”.

Na exploração de outras situações na folha de cálculo, onde é dada a expressão analítica de uma função quadrática, as alunas nomeiam uma coluna para a variável independente e outra onde escrevem a relação dada. Após a conversão da informação na tabela obtêm a representação gráfica, o que as leva ao primeiro contacto com a parábola, como esquematizo na figura 9.14.

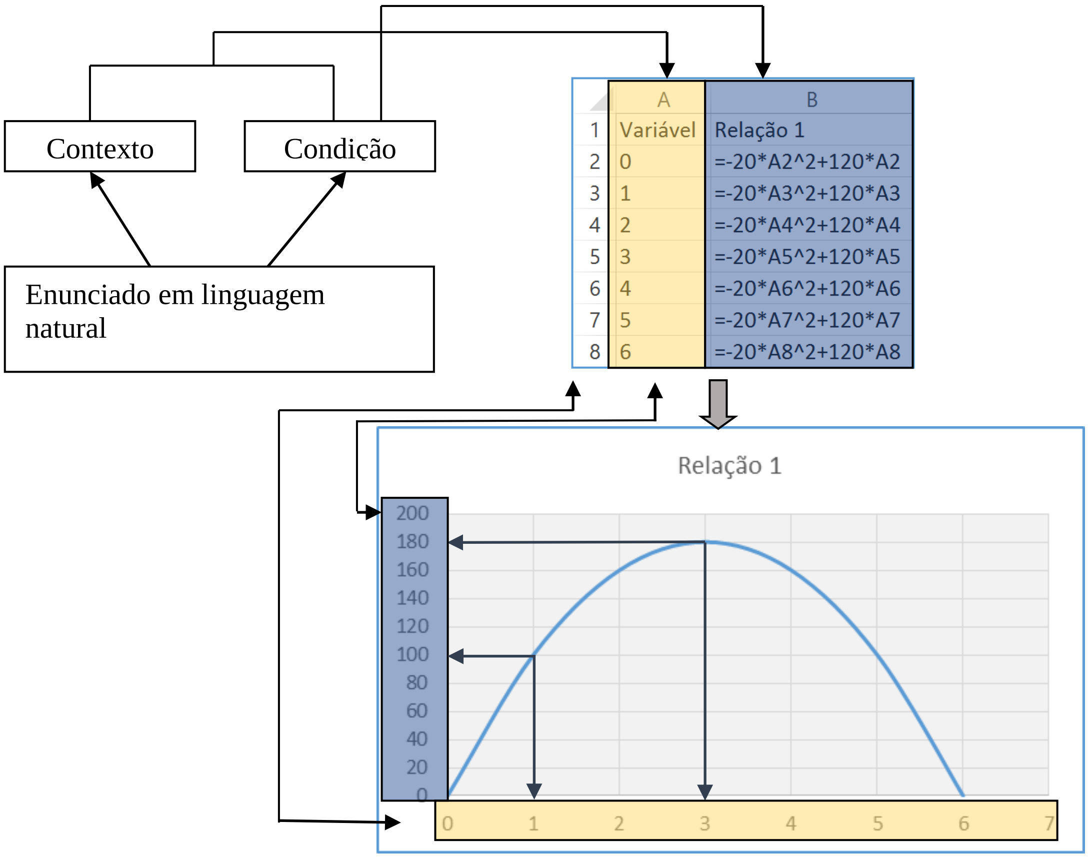


Figura 9.14: Conversões de condições nos ambientes da folha de cálculo para o SNA (papel e lápis).

A observação da variação numérica nas tabelas e das representações gráficas permitiram às alunas responder a diversas questões com papel e lápis que se prendem com conceitos de máximo, mínimo e zeros da função, sempre no contexto da situação. O trabalho com a folha de cálculo permite as conversões da folha de cálculo para o SNA e para a compreensão das propriedades das funções quadráticas.

Síntese

Em todos os tópicos as alunas são levadas a converter o trabalho realizado com a folha de cálculo para o SNA. No estudo dos sistemas de equações a conversão do ambiente digital da folha de cálculo ocorre habitualmente nas discussões. No estudo dos outros dois tópicos, proporcionalidade inversa e equações do 2.º grau, solicito nos enunciados e as alunas efetuam conversões para o SNA no seu trabalho individual/pares. A conversão da folha de cálculo para o SNA é feita, de um modo geral, como esquematizo na figura 9.11.

9.2.3. A contribuição da conexão entre os dois ambientes e a aprendizagem dos métodos formais

As tarefas exploradas com a folha de cálculo permitiram estabelecer conexões entre as representações do ambiente digital e do ambiente de papel e lápis.

Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas

No estudo deste tópico, da conversão das representações criadas com a folha de cálculo, surge a escrita de uma equação do 1.º grau com duas incógnitas. Posteriormente, continuando a discussão das relações estabelecidas na folha de cálculo é formalizada a noção de sistema de equações. Analogamente, o método gráfico e o método de substituição surgem a partir de relações entre os procedimentos executados na folha de cálculo e os procedimentos algébricos formais.

Ambas as alunas aprenderam a utilizar os métodos formais de resolução de sistemas de equações. Carolina manifesta algumas dificuldades na utilização do método gráfico devido à dificuldade na representação gráfica. Estas alunas, nos seus percursos de aprendizagem vão progressivamente dando maior atenção e destaque às representações no SNA com um simbolismo algébrico mais sofisticado e mais complexo. Tanto as duas alunas, como os restantes alunos da turma, foram envolvidos em experiências de aprendizagem planeadas para relacionar as aprendizagens anteriores com outras mais formais. O foco em múltiplas representações assegura que a introdução dos símbolos e das regras para efetuar tratamentos no SNA fazem sentido, como referem Hiebert e Carpenter (1992). Para estes autores, é importante proporcionar aos alunos uma oportunidade para explorar outras representações, para além das simbólicas, de modo a desenvolverem uma compreensão mais completa dos conceitos. Consideram ainda que a aprendizagem de qualquer procedimento matemático deve estar relacionada com o conhecimento conceptual de modo a levar a uma compreensão mais profunda e completa desse procedimento.

No ambiente digital da folha de cálculo as representações utilizadas pelas alunas seguem um padrão bastante semelhante, baseado na construção de colunas e no estabelecimento de relações entre elas. No processo de construção de uma coluna as alunas começam por inserir valores que se referem a números particulares. Contudo, esses números são inseridos de acordo com determinado critério. O arrastamento da alça de um conjunto de células conduz à geração de uma sequência numérica e assim a obter uma generalização da relação estabelecida inicialmente. Neste procedimento, as alunas têm a oportunidade de contactar com a noção de variável, uma vez que a relação entre os números é replicada para toda a sequência numérica e elas familiarizam-se com essa variação, como é descrito por Wilson (2007). Nesta perspetiva, a noção de variável é encarada como um conjunto de números gerados a partir de uma relação funcional que pode ser explícita ou não, caso as alunas utilizem fórmulas ou não.

A construção de uma coluna na folha de cálculo permite ainda que as alunas adquiram uma noção do padrão de crescimento, decrescimento ou constância dessa variável construída. Esta noção de variação é um aspeto importante para o conhecimento da variável em causa que é dificilmente captada no ambiente de papel e lápis. Estes aspetos são fundamentais no desenvolvimento do pensamento algébrico e quando é efetuada a conversão do ambiente digital da folha de cálculo para o papel e lápis, as alunas detêm um conhecimento ampliado dessas variáveis, agora no SNA.

A folha de cálculo é um ambiente que estimula o estabelecimento de relações entre as variáveis presentes nos enunciados; em particular, a notação neste ambiente digital fornece uma linguagem que possibilita a mediação entre a linguagem natural e a notação algébrica formal (Sutherland, 1993).

O suporte dado pela folha de cálculo através das representações gráficas, nomeadamente na resolução gráfica de sistemas, revela-se da maior importância na compreensão do significado da resolução de um sistema. No entanto, a construção dos gráficos com papel e lápis releva-se pouco prática, fazendo assim todo o sentido proporcionar aos alunos a oportunidade de utilizar um recurso tecnológico que facilite o acesso a esta representação.

Os resultados alcançados neste estudo mostram como o recurso à folha de cálculo promove as aprendizagens dos métodos formais algébricos por estas duas alunas. Em particular, para Carolina, o recurso à folha de cálculo foi determinante na aprendizagem dos métodos algébricos. Muitas das dificuldades evidenciadas por esta aluna foram diluídas e não inviabilizaram a aprendizagem dos tópicos estudados. A folha de cálculo permitiu-lhe, com segurança, aceder a aprendizagens que de outra forma seriam mais inacessíveis.

Proporcionalidade Inversa

No estudo deste tópico foram propostas situações problemáticas para explorar num ambiente combinado de folha de cálculo e papel e lápis. Ambas começam por nomear uma coluna, na folha de cálculo, com valores para uma das grandezas e, dada a constante, nomeiam outra coluna onde escrevem uma relação que as conduz a determinar os valores da outra grandeza. Em cada uma das situações as alunas convertem a relação para o SNA, o que as leva à escrita da expressão algébrica que é formalizada como método formal para resolver situações de proporcionalidade inversa. O trabalho na folha de cálculo é importante para que as alunas consigam observar a variabilidade das grandezas e a forma como a relação entre elas é estabelecida. Em paralelo, as alunas estabelecem conexões com as representações gráficas, atribuindo significado à relação entre as grandezas inversamente proporcionais.

Equações do 2.º grau a uma incógnita

No estudo deste tópico, as alunas começaram por converter o enunciado, em linguagem natural, para a folha de cálculo e, posteriormente, para uma condição no SNA. Esta conversão permite a formalização da escrita da diferença de quadrados como um produto de fatores e a compreensão da factorização de uma expressão algébrica na forma $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ que possibilita a aplicação da lei do anulamento do produto.

Nas várias situações propostas para resolver no ambiente combinado da folha de cálculo e papel e lápis, dadas as expressões analíticas das funções quadráticas, as alunas nomeiam uma coluna para a variável independente à qual atribuem, habitualmente, valores inteiros não negativos, dados os contextos das situações propostas. Em seguida, noutra coluna, convertem a expressão algébrica para uma fórmula da folha de cálculo e constroem uma variável a partir da qual podem observar a variação da variável dependente. As alunas convertem ainda estas tabelas para representações gráficas na folha de cálculo.

As conexões realizadas pelas alunas da folha de cálculo para o papel e lápis permitiram não só a aprendizagem dos métodos formais, como a fórmula resolvente, mas ainda a compreensão de propriedades que dão sentido à aplicação dos métodos formais, como o significado da resolução de uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$.

Síntese

De um modo geral, no início das resoluções, as conexões são estabelecidas pelas alunas no seu trabalho individual ou em pares. Posteriormente, nos momentos de discussão, o trabalho realizado na folha de cálculo é, habitualmente, convertido para o SNA. As alunas nestes momentos tomam consciência dos objetos algébricos assim como dos procedimentos algébricos envolvidos nas resoluções efetuadas no ambiente digital. Desta forma, as conversões para o SNA revelam a Álgebra que está oculta nas suas produções com a folha de cálculo. A existência desta conversão, em sala de aula, nos momentos de discussão, leva as alunas a uma aproximação entre estes dois ambientes distintos – folha de cálculo e papel e lápis – e à compreensão do significado algébrico das relações escritas, como esquematizo na figura 9.15.

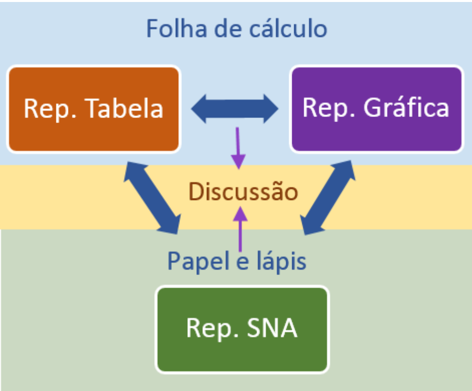


Figura 9.15: Aproximação dos ambientes da folha de cálculo e papel e lápis nos momentos de discussão.

Contudo é preciso notar que o trabalho com a folha de cálculo é diferente daquele que as alunas realizam com papel e lápis. Os objetos algébricos são distintos: na folha de cálculo as alunas trabalham com variáveis, ao passo que no papel e lápis trabalham com incógnitas. As resoluções neste ambiente digital são suportadas pelo estabelecimento de relações e comparação da variação de variáveis, por sucessivas aproximações, enquanto no papel e lápis as resoluções baseiam-se essencialmente na resolução de equações. Neste sentido, poderá afirmar-se que a matemática trabalhada pelas alunas na folha de cálculo tem um caráter experimental, contrariamente ao que acontece, na maior parte das vezes, com o papel e lápis.

Apesar de existir esta distância entre a Álgebra convencional e a Álgebra envolvida nas resoluções da folha de cálculo, as tarefas propostas no ambiente combinado da folha de cálculo e do papel e lápis, associadas às discussões realizadas em sala de aula, constituem um contexto de trabalho que incentivam as alunas a transformar as representações que é um aspeto essencial na construção do conhecimento (Duval, 2011; Kieran, 2013).

Como aspetos a destacar, reforço que esta experiência de ensino mostra que o desenvolvimento do pensamento algébrico é favorecido pelo recurso a tarefas de diversas tipologias e de um trabalho de articulação entre o ambiente de papel e lápis e o ambiente digital da folha de cálculo. Estes dois ambientes proporcionaram aos alunos a oportunidade de recorrerem a uma grande variedade de representações e estabelecerem conexões entre elas como é recomendado por Goldin (2002), NCTM (2000) e Tripathi (2008).

Um outro aspeto a destacar ao longo de toda a experiência de ensino, no estudo dos três tópicos, é o carater informal das tarefas iniciais que permite que as alunas construam os significados dos métodos através das suas próprias representações, sem a obrigatoriedade de utilizarem expressões algébricas ou resolverem equações. As alunas tiveram a liberdade de escolher as representações que fazem sentido para si e, deste modo, atribuir significado às suas resoluções.

Os momentos de partilha e de discussão em sala de aula proporcionaram às alunas a oportunidade de alargar o seu leque de representações e de transformações de representações. Por outro lado, permitiram ainda, de uma forma progressiva, desenvolver uma perspetiva algébrica acerca dos métodos formais abordados no estudo dos diferentes tópicos. As sínteses realizadas foram igualmente importantes, apoiando a formalização do conhecimento matemático, em particular dos métodos formais algébricos.

O trabalho com a folha de cálculo constituiu um ambiente informal onde as alunas tiveram liberdade de criar e utilizar as suas próprias representações. Tratar um objeto matemático através de vários registos significa dar oportunidade aos alunos para enriquecerem os seus próprios processos de pensamento a partir das ideias já desenvolvidas. Integrar as ideias e os conceitos significa favorecer a aprendizagem.

As tarefas propostas, ao longo do estudo dos três tópicos, foram determinantes para o progresso das alunas no desenvolvimento do pensamento algébrico, em particular da aprendizagem dos métodos formais. O facto de as tarefas combinarem sempre o trabalho no ambiente digital com o papel e lápis constituiu um suporte para a tomada de consciência dos objetos algébricos envolvidos nas resoluções, assim como do significado dos procedimentos algébricos, como é evidenciado por Carreira, Jones, Amado, Jacinto e Nobre (2016).

Recordo que Carolina e Gabriela são alunas com caraterísticas distintas a vários níveis. Carolina revela, desde o início, dificuldades ao nível do cálculo mental, que são notórias no trabalho com papel e lápis, tornam a resolução das tarefas morosas e, por vezes, fazem com que se disperse do foco da estratégia que pretende implementar. A folha de cálculo para esta aluna liberta-a dos cálculos, inspira-a e dá-lhe liberdade para as suas resoluções, como ela própria refere. Este resultado não coloca em causa a importância do cálculo mental, contudo posso sugerir que o facto da capacidade de cálculo mental não estar desenvolvida não inibe o desenvolvimento do pensamento algébrico, a construção de raciocínios complexos no estabelecimento de relações, em particular, na resolução de problemas, quando esta atividade é apoiada por recursos como a folha de cálculo. Em muitas situações, Carolina usa a folha de cálculo como recurso alternativo à utilização de métodos formais. Quando não tem acesso à folha de cálculo a aluna simula tabelas com papel e lápis como se estivesse a trabalhar no ambiente digital. Por seu lado, Gabriela é uma aluna que não manifesta dificuldades ao nível do cálculo mental e quando não consegue utilizar os métodos formais prefere recorrer à tentativa e erro, uma estratégia em que atribui um determinado valor a uma variável e através do estabelecimento de relações funcionais, verifica a sua validade.

Toda a atividade de transformação das representações por parte das alunas ao longo do estudo dos tópicos é fundamental para a sua evolução na aprendizagem dos métodos formais e para o desenvolvimento do seu pensamento algébrico. A atividade de conversão para o SNA tem subjacente a atividade algébrica de geração descrita por Kieran (2004). Carolina e Gabriela envolvem-se neste tipo de atividade, na geração de expressões algébricas, de equações, na escrita de sistemas de equações e em particular em situações que recorrem a fórmulas de áreas e perímetros. Por outro lado, os tratamentos no SNA podem ser associados às atividades de transformação descritas também por Kieran (2004) e que estão relacionadas com a simplificação de expressões algébricas, a resolução de equações, a factorização e a aplicação dos métodos formais algébricos de um modo geral.

Na folha de cálculo, o estabelecimento de relações entre as diferentes colunas está associado ao processo da definição de relações entre as variáveis de um problema e pode ser considerada uma atividade de geração nesse ambiente, pelas caraterísticas que evidencia. Por outro lado, os próprios tratamentos que a folha de cálculo, como ferramenta, permite realizar podem associar-se às atividades de transformação descritas por Kieran (2004). No trabalho das alunas no estudo dos tópicos é possível observar a coordenação que fazem destes dois tipos de atividade (geração e transformação) na resolução das tarefas propostas e a forma como evoluem.

Por outro lado, Kieran (2004) define ainda as atividades de caráter meta-global que incluem a resolução de problemas. Este foi um tipo de tarefa privilegiado durante a experiência de ensino, onde os alunos tiveram a oportunidade de analisar relações, foram incentivados à generalização de padrões e à análise de variação das funções envolvidas no estudo dos três tópicos. De acordo com a autora, estas atividades são essenciais para outro tipo de atividades algébricas, em especial para as de geração e para a atribuição de significado.

9.3. Reflexão final

9.3.1- Reflexão acerca do estudo realizado

Este estudo vem reforçar a legitimidade da conjetura que formulo acerca da aprendizagem dos métodos formais algébricos. De facto, na proposta didática composta por uma sequência de tarefas, construída de forma coerente com as recomendações e baseada na resolução de problemas, o recurso à folha de cálculo em articulação com o papel e lápis, mostra envolver ativamente os alunos na construção do seu conhecimento matemático. A metodologia de trabalho implementada dá liberdade aos alunos para escolherem as representações que consideram mais adequadas a cada situação; muitas delas são informais do ponto de vista algébrico, sendo suportadas pela folha de cálculo e/ou outras baseadas em cálculos aritméticos. Os momentos de discussão proporcionados, onde os alunos apresentam e discutem várias produções, incentivam um uso progressivo de representações em linguagem algébrica e levam à formalização métodos algébricos. Este tipo de trabalho em sala de aula reveste-se da maior importância, pois fez emergir, de forma natural, por parte dos alunos, grande parte os métodos formais. Para além disso os alunos mostram compreender os métodos e conseguem identificar as situações em que podem utilizá-los.

O trabalho dos alunos com as representações matemáticas, associado à sua transformação (conversão e tratamento), incentiva a atividade algébrica como mostram os resultados obtidos neste estudo. De facto, a atividade de geração surge associada às conversões para linguagem algébrica e acontece frequentemente na exploração das diferentes tarefas, em especial na resolução de problemas na tradução dos enunciados em linguagem natural. Este tipo de atividade é reconhecidamente difícil para a maioria dos alunos. No entanto, a atividade de resolução de problemas, em especial com a folha de cálculo, mostra ajudar os alunos a dar sentido às variáveis e às relações presentes nos enunciados incentivando-os à escrita, por exemplo, de expressões algébricas e de equações.

Por outro lado, a atividade de transformação está associada aos tratamentos. Neste estudo dou especial atenção aos tratamentos na linguagem algébrica, como a simplificação de expressões algébricas, a resolução de equações e a resolução de sistemas de equações. Nestes processos os alunos antes de assumirem a rotina dos métodos formais têm a oportunidade de dar sentido aos procedimentos, compreendendo os objetos algébricos envolvidos bem como a sua estrutura. Esta atribuição de significado emerge essencialmente da resolução de problemas e dos processos envolvidos nas diferentes produções dos alunos.

Por fim, quanto à atividade de carater meta-global, este estudo mostra a forma como os alunos são envolvidos na atividade de resolução de problemas cujos processos não têm necessariamente de envolver linguagem e técnicas algébricas. A resolução de problemas, em associação com tarefas de diferentes tipologias, evidencia a forma como os alunos se envolvem na descoberta das estruturas algébricas e na aprendizagem dos métodos formais.

De um modo geral, as tarefas propostas nesta experiência de ensino e as resoluções apresentadas pelos alunos evidenciam um equilíbrio entre estes três tipos de atividade algébrica (geração, transformação e carater meta-global), levando os alunos a uma progressiva formalização dos métodos, o que é fundamental para um desenvolvimento profícuo do seu pensamento algébrico.

O estudo das representações matemáticas surge, desde o início, como um aspeto enriquecedor tanto do trabalho de investigação como do meu trabalho como professora. Em sala de aula, é fundamental um trabalho em que sejam discutidas diferentes representações matemáticas e as respetivas conversões, em particular, entre as digitais da folha de cálculo para o SNA.

Um aspeto que considero igualmente relevante nesta investigação foi a construção das sequências de tarefas. A sua natureza distinta assim como o seu encadeamento demonstram a importância de combinar a resolução de problemas com a resolução de exercícios e destacam o papel que cada um deste tipo de tarefas assume na aprendizagem da Álgebra. Assim, os resultados deste estudo apontam para uma necessidade incontornável de recorrer à resolução de problemas no ensino da Álgebra. Por outro lado, a utilização da folha de cálculo mostra a sua relevância para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Outro aspeto que merece destaque é a organização do trabalho em sala de aula. Nesta experiência, a planificação do trabalho, em sala de aula, contemplou momentos para os alunos para trabalharem de forma autónoma, individualmente e/ou em pares, momentos de partilha/discussão entre toda a turma, assim como momentos de construção das sínteses finais que constituem fatores decisivos no desenvolvimento do seu pensamento algébrico dos alunos. O professor assume um papel decisivo, na organização desta metodologia de trabalho, cabendo-lhe a responsabilidade de criar oportunidades para que as tarefas promovam as aprendizagens desejadas. A minha experiência ao longo da realização deste trabalho, mostrou-me de forma clara a importância da minha intervenção, como professora da turma, para desbloquear algumas dificuldades dos alunos e conduzi-los de modo a chegarem aos resultados pretendidos.

Um dos aspetos marcantes nesta investigação foi o meu duplo papel, de investigadora e professora da turma que merece uma reflexão que articule estas duas vertentes, uma vez que elas se encontram intimamente interligadas. Como refiro no primeiro capítulo, esta investigação surge das minhas preocupações e inquietações, como professora de Matemática do ensino básico, em particular, em relação ao ensino da Álgebra – um dos temas onde os alunos revelam mais dificuldades na aprendizagem, em particular na aprendizagem dos métodos formais algébricos. Este trabalho veio reforçar algumas das minhas convicções relativamente à importância da resolução de problemas na aprendizagem da Álgebra, bem como acerca das potencialidades da utilização da folha de cálculo na exploração dos problemas.

Este trabalho leva-me ainda a refletir acerca do posicionamento do professor no desenvolvimento do trabalho dos alunos. Num contexto de aprendizagem em que se pretende que os alunos sejam participantes ativos no seu processo de aprendizagem, o meu papel como professora é bastante mais exigente e desafiador. Ao invés do professor transmissor de conhecimento, assumo o papel de facilitador da aprendizagem, partindo das ideias e resoluções dos alunos, coloco questões e desafio-os a refletirem para chegarem a uma solução.

Apesar de procurar que os alunos sejam participantes ativos no seu processo de aprendizagem, por vezes, surgem determinados aspetos em que eu como professora tenho de intervir, acrescentado algumas pistas, desafiando os alunos ou provocando-os para iniciarem uma resolução. Tal não significa resolver por eles ou apresentar a resolução de uma tarefa sem que os alunos se tenham debruçado sobre ela. Tenho consciência de que esta minha intervenção sendo indispensável, pode condicionar ou moldar a abordagem dos alunos o que influenciar o surgimento de algumas representações. De um modo geral, esta experiência em sala de aula com os meus próprios alunos tornou-me numa professora melhor observadora, mais atenta aos pormenores e mais ponderada nas minhas intervenções.

Em suma, este trabalho de investigação promoveu o meu desenvolvimento profissional, veio enriquecer e aprofundar o meu conhecimento acerca do ensino e da aprendizagem da Álgebra, em particular dos métodos formais algébricos. Vem dar resposta a algumas das minhas inquietações, como a importância da resolução de problemas, a utilidade da folha de cálculo na aprendizagem dos métodos formais algébricos e nos diferentes papeis que esta ferramenta pode assumir como suporte à aprendizagem da Álgebra. Espero, ainda, contribuir para que outros professores de Matemática, quer do ensino básico como do ensino secundário, encarem o recurso à resolução de problemas e à utilização do computador seja com a folha de cálculo ou com outro *software*, para explorar tarefas criteriosamente selecionadas, como uma mais-valia para a aprendizagem dos alunos.

9.3.2-Implicações

A aprendizagem da Álgebra não é fácil para a maioria dos alunos, dada a sua natureza, em especial pela complexidade que o próprio simbolismo algébrico envolve e, por vezes, pela dificuldade no estabelecimento de conexões com o quotidiano. Apesar de existir um vasto campo de investigação no domínio da aprendizagem da Álgebra, considero que subsistem muitas questões por estudar e aprofundar com vista a uma melhoria do ensino neste tema. Este trabalho de investigação mostra claramente a relevância do recurso à folha de cálculo no estudo de diversos conteúdos algébricos. As caraterísticas particulares da experiência de ensino realizada e das oportunidades oferecidas pelo ambiente digital, em articulação com o papel e lápis com as diferentes tipologias de tarefas, dá espaço para abordagens alternativas ao estudo dos tópicos. De um modo geral, os alunos mostram conhecimentos ao nível dos tópicos estudados que vão para além dos objetivos curriculares do programa de matemática do 9.º ano. Assim, o presente estudo vem aguçar a minha curiosidade acerca do impacto de uma investigação com caraterísticas semelhantes a esta, por um período de tempo mais longo, como num ciclo de três anos – ao longo do 3.º ciclo do ensino básico e envolvendo também outros tipos de *software* e aplicações (como *applets*), num maior número de tópicos algébricos.

Este trabalho mostra que é possível organizar uma sequência didática para o estudo de tópicos algébricos que privilegia o trabalho dos alunos, muitas vezes informal, e é tendo como suporte as suas aprendizagens que é instituído o novo conhecimento. Para além disso, evidencía algumas das potencialidades da combinação de diferentes tipologias de tarefas, a articulação entre os ambientes de papel e lápis e da folha de cálculo. Contudo, considero que a Álgebra escolar em determinadas situações se afigura desfasada da realidade. Este trabalho retrata de certa forma parte desse afastamento e leva-me a questionar a ênfase a dar aos conteúdos a estudar em cada tópico algébrico e a forma como são abordados. O exemplo das representações gráficas é um aspeto que merece ser repensado, nomeadamente com recurso a ambientes digitais, para que os alunos possam simular e estudar, de forma rápida determinadas características sem terem de recorrer a processos morosos de construções com papel e lápis obsoletos, que podem ser obtidos de forma rápida e imediata com um recurso tecnológico.

REFERÊNCIAS

Abrahamson, D. (2006). Mathematical representations as conceptual composites: Implications for design. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.2, pp. 464-466). Mérida: Universidad Pedagógica Nacional.

Abramovich, S. (1998). Manipulative and numerical spreadsheet templates for the study of discrete structures. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *29*, 233-252.

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *3*(3), 205-224.

Ainley, J., Bills, L., & Wilson, K. (2004). Constructing meanings and utilities within algebraic tasks. In M.J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 1-8). Bergen, Norway: PME.

Ainley, J., Bills, L., & Wilson, K. (2005). Purposeful task design and the emergence of Transparency. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 17-24). Melbourne: PME.

Ainley, J., & Pratt D. (2005). The significance of task design in mathematics education: Examples from proportional reasoning. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 93-122). Melbourne: PME.

Ainsworth, S. E., & Loizou, A.T. (2003). The effects of self-explaining when learning with text or diagrams. *Cognitive Science*, *27*, 669-681.

Ajose, S. A. (1999). *Discussant's comments: On the role of visual representations in the learning of mathematics*. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 81-96). Morelos, Mexico: PME.

Alba-Juez, L. (2009). *Perspectives on Discourse Analysis: Theory and Practice*. Newcastle (U.K.): Cambridge Scholars Publishing.

Almeida, L., & Freire, T. (2000). *Metodologia da investigação em psicologia e educação*. Braga: Psiquilíbrios.

Amado, N., Nobre, S., & Carreira, S. (2009). Conceitos e raciocínio matemático na resolução de problemas numéricos. In C. Costa, E. Mamede & F. Guimarães (Eds.), *Números e estatística: Refletindo o presente perspectivando o futuro*.

Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática. (Publicado em CD, ISBN: 978-972-8614-12-6.)

Amado, N., Carreira, S., Nobre, S., & Ponte, J. P. (2010). Representations in solving a word problem: the informal development of formal methods. *Proceedings of the 34st International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 72-79). Belo Horizonte: Universidade de Minas Gerais.

Amado, N., Nobre, S., Carreira, S. & Ponte, J. P. (2010). Comunicação matemática na resolução de problemas com a folha de cálculo. In J. Matos, A. Domingos, C. Carvalho e P. Teixeira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática - Comunicação no ensino e na aula de Matemática* (pp. 268-286). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Amit, M., & Klass-Tsirulnikov, B. (2005). Paving the way to algebraic problems using a nonalgebraic route. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *10*(6), 271-276.

Anthony, G., & Walshaw, M. (2009). Effective pedagogy in mathematics. *Educational Practices Series*, *19*. Brussels: International Academy of Education; Geneva: International Bureau of Education.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale et al. (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 29-48). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245–274.

Artigue, M. & Kilpatrick, J. (2008). What do we know? And how do we know it? (Two speakers with different viewpoints). In M. Santos-Trigo & Y. Shimizu (Eds.), *Proceedings of 11th International Congress on Mathematical Education*. Monterrey, México. (Acedido em 4 de outubro de 2010 em http://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Digital_Library/ICMEs/Plenary_1_MA_JK_final_01.pdf)

Arzarello F., Bazzini L. & Chiappini G. (2001). A model for analysing algebraic processes of thinking. In S. Rosamund, T. Rojano, A. Bishop & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 61-81). Dordrecht: Kluwer.

Bakker, A., & Frederickson, A. (2005). Comparing distributions and growing samples by hand and with a computer tool. In J. M. William & P. C. Elliot (Eds.), *Technology-supported mathematics learning environments: Sixty-seventh* *yearbook* (pp. 75-91). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Balacheff, N., & Kaput, J. J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, 469-501. Dordrecht: Kluwer.

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bassarear, T. (2008). *Mathematics for elementary school teachers*, 4th Edition. Pacific Grove, CA: Brooks Cole.

Bauer, M., & Gaskell, G. (2003). *Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som. Um manual prático* (2.ª ed.). Petróplolis: Vozes.

Beare, R. (1993). How spreadsheets can aid a variety of mathematical learning activities from primary to tertiary level. In B. Jaworski (Ed.), *Technology in Mathematics Teaching: A bridge between teaching and learning*. Bromley: Chartwell-Bratt.

Beatty, R., & Bruce, C. (2012). *From patterns to algebra: Lessons for exploring linear relationships*. Toronto, ON: Nelson Education.

Bell, A. (1996). Problem-solving approaches to algebra: Two aspects. In N. Berdnarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives to research and teaching* (pp. 167-187). Dordretch: Kluwer.

Bell, J. (1993). *Como realizar um projecto de investigação* (3.ª ed.). Lisboa. Gradiva.

Biddle, B., & Anderson, D. (1986). Theory, methods, knowledge, and research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd ed.) (pp. 230-252). New York, NY: Macmillan.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Blanton, M., & Kaput, J. (2008). Building district capacity for teacher development in algebraic reasoning. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Booth, R., & Thomas, M. (2000). Visualization in mathematics learning: Arithmetic problem solving and students difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, *18* (2), 169-190.

Borba, M. C., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer.

Brenner, M., Brar, T., Duran, R., Mayer, R., Moseley, B., Smith, B., & Webb, D. (1995). The role of multiple representations in learning algebra. ERIC *Documentation Reproduction Service* No. ED 391659.

Bruner, J. (1966). *Towards a theory of instruction*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Burton, D., & Bartlett, S. (2005). *Practitioner research for teachers*. London: Paul Chapman.

Calder, N. (2002). *Can the use of spreadsheets enhance the development of numeracy?* Tauranga, NZ: University of Waikato.

Calder, N. (2009). Visual tensions when mathematical tasks are encountered in a digital learning environment. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & C. Sakonidis (Eds.), *In search of theories in Mathematics Education, Proceedings of the 33rd annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Athens: PME.

Canavarro, A. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, *16*(2), 82-118.

Canavarro, A., Oliveira, H., Menezes, L. (2014). Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora. In J.P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp.217-233). Lisboa: Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

Carpenter, T. P. (1986). Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. P., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carreira, S. (1992). *A aprendizagem da Trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo.* (Tese de Mestrado). Lisboa: APM.

Carreira, S., Jones, K., Amado, N., Jacinto, H., & Nobre, S. (2016). *Youngsters solving mathematical problems with technology: The results and implications of the Problem@Web Project.* New York: Springer.

Chazan, D., & Yerushalmy, M (2003). On appreciating the cognitive complexity of school Algebra: Research on algebra learning and directions of curricular change. In J. Kilpatrick, D. Schifter & G: Martin (Eds.), *A research companion to the principles and standards for school mathematics* (pp. 123-135). Reston, VA: NCTM.

Christians, C. (2000). Ethics and politics in qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *The handbook of qualitative research* (pp. 133-155). Thousand Oaks, CA: Sage.

Clark, J. M., & Paivio, A. (1991). Dual coding theory and education. *Educational Psychology Review, 3*(3), 149-170.

Clayton, A. (2005). Curricula designed to meet 21st-century expectations. In D. Oblinger & J. Oblinger (Eds.), *Educating the net generation*. New York, NY: Educause.

Clements, D. H. (1999). 'Concrete' manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood, 1*(1), 45-60.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*, 9-13.

Cordel, B., & Mason, R. (2000). *Proportional reasoning*. Fresno, CA: Aims Education Foundation.

Cortesão, L. (2002). Formas de ensinar, formas de avaliar. Breve análise de práticas correntes de avaliação. In P. Abrantes & F. Araújo (Eds.), *Avaliação das aprendizagens: das concepções às práticas* (pp. 35-42). Lisboa: ME-DEB.

Cox, R. (1999). Representation construction, externalized cognition and individual differences. *Learning and Instruction, 9,* 343-363. doi:10.1016/S0959-4752(98)00051-6.

Crawford, A. (2001). Developing algebraic thinking: Past, present, and future. In H. Chick, K. Stacey, J. Vicent & J. Vicent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 192-193). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Creswell, J. (1994). *Research design: Qualitative and quantitative approaches.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Creswell, J. (2007). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five traditions* (2nd ed). Thousand Oaks, CA: Sage.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (Eds.) (1994). Introduction: Entering the field of qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-17). Thousand Oaks, CA: Sage.

Dettori, G., Garuti, R., & Lemut, E. (2001). From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. In S. Rosamund, T Rojano, A. Bishop & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 191-208). Dordrecht: Kluwer.

Diezmann, C. M., & English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A. A. Cuoco (Ed.), *2001 National Council of Teachers of Mathematics Yearbook: The role of representation in school mathematics* (pp. 77-89). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Diezmann, C. M. (2005). Assessing primary students' knowledge of networks, hierarchies and matrices using scenario-based tasks. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonagh, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual MERGA Conference* (pp. 289-296). MERGA: Sydney.

Didiş, M., Baş, S. & Erbaş, A. (2011). *Students' reasoning in quadratic equations with one unknown*. In M. Pitlak, T. Rowland & Eva Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 479-489). Rzeszów: University of Rzeszów.

Donald, M. (2001). *A mind so rare: The evolution of human consciousness*. London, England: W. Norton & Company.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking* (pp. 253-284). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*, 37-65.

Duval, R. (2003). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In S. D. A. Machado (Org.), *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica* (pp. 11-33). Campinas: Papirus.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Duval, R. (2009). *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a Matemática de outra forma: Entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas*. São Paulo: PROEM.

Duval, R. (2014). Comment analyser le problème crucial de la compréhension des mathématiques? *Revista Iberoamericana de Educácion Matemática, 37,* pp. 9-20.

English, L., Lesh, R. & Fennewald, T. (2008). Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development. In M. Santos-Trigo & Y. Shimizu (Eds.), *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education* (pp. 46-58). Monterrey, México.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock, *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). Nova Iorque: MacMillan.

Fernandes, E., & Maia, A. (2001). Grounded theory. In E. Fernandes e L. Almeida (Eds.), *Métodos e técnicas de avaliação: contributos para a prática e investigação psicológica* (pp. 49-76). Braga: Universidade do Minho.

Fidel, R. (1992). The case study method: a case study, In J. Glazier & R. Powell (Eds.), *Qualitative research in information management* (pp. 37-50). Englewood, CO: Libraries Unlimited.

Filloy, E., Rojano, T. & Solares, A. (2004). Arithmetic/algebraic problem solving and the representation of two unknown quantities. In M. Johnsen Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 391-398). Bergen University College.

Foster, D. (2007). Making meaning in Algebra examining students "understandings and misconceptions. *Assessing Mathematical Proficiency*. *53*, 163-176. (Acedido em 20 de Abril de 2009 em http://library.msri.org/books/Book53/files/12foster.pdf.)

Frege, G. (1971). *Ecrits logiques et philosophiques*. Paris: Seuil.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Riedel.

Friedlander, A. (1998). An EXCELlent bridge to algebra. *Mathematics Teacher*, *91*(50), 382-383.

Friendland, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representation in algebra. In Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

Gall, M., Borg, W., & Gall, J. (1996). *Educational research: An introduction* (6.ª ed.). White Plains. NY: Longman.

Gattegno, C. (1970) *What we owe children: the subordination of teaching to learning*. London: Routledge & Kegan Paul.

Gay, S. & Jones, A. (2008). Uncovering variables in the context of modeling activities. Greenes, C. & Rubenstein, R. (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics*: *Seventieth Yearbook* (pp. 211-221). Reston, VA: NCTM.

Godino, J.& Font, D. (2010). The theory of representations as viewed from the onto-semiotic approach to mathematics education. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 9(1), 189-210.

Goldin, G. & Kaput J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397-430). Hillsdale, NJ: Erlbaum Associates.

Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed.). New York, NY: Routledge.

Gomez, G., Flores, J. & Jimenèz, E, (1996). *Metodologia de la Investigacion Cualitativa*. Malaga: Ediciones Aljibe.

Gravemeijer, K. (1997). Instructional design for reform in mathematics education. In M. Beishuizen, K. Gravemeijer, E. van Lieshour (Eds.), *The role of contexts and models in the development of mathematics strategies and procedure* (pp. 55-77). Utrecht: CD-B Press / Freudenthal Institute.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 155-177.

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Greenes, C. & Rubenstein, R. (Eds.) (2008). *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: seventieth yearbook*. Reston, VA: NCTM.

Greeno, J. G., & Hall, R. P. (1997). Practicing representation. *Phi Delta Kappan, 78*(5), 361-368.

Guba, E. G., & Lincoln, Y. (1994). Competing paradigms in qualitative research. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 105-117). London: Sage.

Hamel, J., Dufour, S. & Fortin, D., (1993). *Case Study Methods*. Newbury Park, CA: Sage Publications.

Haspekian, M. (2003). Instrumental approach to understand the problems of the the spreadsheet integration. In T. Triandafillidis & K. Hatzikiriakou (Eds.), *Proceedings of the 6 th International Conference Technology in Mathematics Teaching* (pp. 118-124). Athens: New Technologies.

Haspekian, M. (2005). An ‘instrumental approach’ to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: The case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10*(2), 109-141.

Healy, L., Pozzi, S. & Sutherland, R. (1997). Reflecting on the role of the computer in developing algebraic understanding. In Sutherland, R., Rojano, T., Bell, A. & Lins, R. (Eds.), *Algebraic processes and structure*. Holland: Kluwer Academic Publishers.

Herscovics, N. (1996). The construction of conceptual schemes in mathematics. In L. Steffe (Ed.), *Theories of mathematical learning* (pp. 351-380). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(1), 59-78.

Hesse-Biber, S., & Levy, P. (2006). *The Practice of Qualitative Research*. Thousand Oak: Sage.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65–97). New York, NY: Macmillan.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Giving, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., et al. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study (NCES 2003-014 Revised)*. Washington, DC: National Center for Education Statistics.

Janvier, C. (1987). Representation and understanding: The notion of functions as an example. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 67-72). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Johanning, D. (2004). Supporting the development of algebraic thinking in middle school: a closer look at students' informal strategies. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*, 371-388.

Jonassen, D. (2007). *Computadores, ferramentas cognitivas: Desenvolver o pensamento crítico nas escolas*. Porto: Porto Editora.

Kaput, J. (1986). Information technology and mathematics: Opening new representational windows. *Journal of Mathematical Behavior*, *5*, 187-207.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the teaching and learning of algebra* (pp. 167-194). Reston, VA: NCTM.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York, NY: Macmillan.

Kaput, J. (1995). A research base supporting long term algebra reform? In D. T. Owens, M. K. Reed, & G. M. Millsaps (Eds.), *Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 71-94). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J., & Blanton, M. (2005). Algebrafying the elementary mathematics experience in a teacher-centered, systemic way. In T. Romberg & T. Carpenter (Eds.), *Understanding mathematics and science matters* (pp. 99-125). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Taylor & Francis Group.

Kaput, J., Blanton, M. & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-55). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kenderov, P., Rejali, A., Bussi, M., Pandelieva, V., Richter, K., Maschietto, M., Kadijevich, D., & Tayor, P. (2009). Challenges beyond the classroom – sources and organizational issues. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom*. *The 16th ICMI Study* (pp. 53-96). New York, NY: Springer.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics 12*, 317-326.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York, NY: Macmillan.

Kieran, C., & Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 179-198). New York: Macmillan.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. M. Alvares, B. Hodgson, C. Laborde & A. Pérez (Eds.), *International Congress on Mathematical Education 8: Selected lectures* (pp. 271-290). Seville: SAEM Thales.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. In K. Stacey et al (Eds.), *The Future of teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 21-34). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kieran, C., & Yerushalmy, M. (2004). Research on the role of technological environments in algebra learning and teaching. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 95-152). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Kieran, C. (2006) Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-50). Rotterdam: Sense.

Kieran, C. (2007a). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Charlotte, NC: Information Age.

Kieran, C. (2007b). Developing Algebraic reasoning: the role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, *16*(1), 5-26.

Kieran, C. (2008). Conceptualizing the learning of algebraic technique: Role of tasks and technology. In M. Santos-Trigo & Y. Shimizu (Eds.), *Proceedings of 11th International Congress on Mathematical Education* (pp. 106-128). Monterrey, México. (Acedido em 1 de outubro de 2010 em http://www.math.uqam.ca/~apte/Publications/ICME_11.pdf)

Kieran, C. (2013). The false dichotomy in mathematics education between conceptual understanding and procedural skills: An example from algebra. In K. Leatham (Ed.), *Vital directions in mathematics educations research* (pp. 153-171). New York: Springer.

Kieran, C., Krainer K., & Shaughnessy, J. M. (2013). Linking research to practice: Teachers as key stakeholders in mathematics education research. In K. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. Leung, (Eds.), *Third International Handbook of Research in Mathematics Education* (pp. 361-392). New York: Springer.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Koedinger, K. R., & Nathan, M. J. (2004). The real story behind story problems: Effects of representation on quantitative reasoning. *Journal of the Learning Sciences*, *13*, 129-164.

Koedinger, K. R., Alibali, M. W., & Nathan, M. J. (2008). Trade-offs between grounded and abstract representations: Evidence from algebra problem solving. *Cognitive Science*, *32*, 366-397.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics*, 102-119. London: John Murray.

Lagrange, J.-B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. In J. T. Fey (Ed.), *Computer Algebra Systems in secondary school mathematics education* (pp. 269-283). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics* (pp. 146-165). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Larkin, J. H., & Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science, 11*, 65-99.

Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models in applied mathematical problem solving research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 263-343). New York: Academic Press.

Lesh, R., Behr, M., & Post, T. (1987). Rational number relations and proportions. . In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lima, R.N. & Tall, D. (2010). An example of the fragility of a procedural approach to solving equations. (Acedido em http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2010x-limaquadratics-draft.pdf em 24 de setembro de 2013).

Lin, F. (2005). Modelling student´s learning in argumentation and mathematics proof. In H. Chick & J.L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-18). Melbourne: PME.

Lins, R &. Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. In K. Stacey et al (Eds.), *The Future of teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 47-70). Boston: Kluwer.

MacGregor, M. (2004). Goals and content of an algebra curriculum for the compulsory years of schooling. In K. Stacey., H. Chick, & M. Kendal, (Eds.), *The future of teaching and learning of algebra*: *The 12th ICMI Study* (pp. 313-328). Boston: Kluwer.

Marzano, R., Pickering, D. & Pollock, J. (2001). *Classroom instruction that works: Research-based strategies for increasing student achievement*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Marzano, R. J. (2004). *Building background knowledge for academic achievement: Research on what works in schools*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Mason, J. (1987). Representing representing: Notes following the conference. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 207-214). Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65–86). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. (2005). Mediating mathematical thinking with e-screens. In S. Johnston-Wilder & D. Pimm (Eds.), *Teaching Secondary Mathematics with ICT* (pp.81-100). Berkshire, UK: Open University Press.

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. London, England: Sage.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 57-94). New York: Erlbaum.

Matos, A. (2007) *Explorando relações funcionais no 8.º Ano – Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico* (Dissertação de Mestrado). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Matos, J., & Carreira, S. (1994). Estudos de caso em educação matemática: Problemas actuais. *Quadrante*, *3*(1), 19-53.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, *33* (1), 1-19.

ME-DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Merriam, S. (1998a). *Qualitative research and case study applications in education*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Merriam, S. (1988b). *Case study research in education – a qualitative approach*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Ministério da Educação (2007). Programa de Matemática do ensino básico. Lisboa: DGIDC. (Acedido em 18 de janeiro de 2008 de http://sitio.dgidc.minedu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf)

Morais, A. & Neves, I. (2007). Fazer investigação usando uma abordagem metodológica mista. *Revista Portuguesa de Educação*, *20*(2), pp.75-104.

Moreno-Armella, L., Hegedus, S., & Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *68*, 99-111.

Moreno-Armella, L., & Hegedus, S. (2009). Co-action with digital technologies. *ZDM: International Journal on Mathematics Education*, *41*(4), 505-519.

Morishita, E., Iwata, Y., Yoshida, K.Y. & Yoshida, H. (2001). Spreadsheet fluid dynamics for aeronautical course problems. *International Journal of Engineering Education*, *17*(3), 294–311.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (1998). *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum*. Washington: DC: National Academy Press.

NCTM (2000). *Princípios e normas para a matemática escolar. Lisboa: APM.*

Neuwirth, E. & Arganbright, D. (2004). *The active modeler: mathematical modeling with microsoft excel*. Brooks/Cole, Belmont (CA).

Neves, C., Monteiro, S., Rocha, G., Silva, A. & Ponte, J. P. (2006). A folha de cálculo e a aprendizagem da Álgebra. In I. Vale et. al. (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp.317-333). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática.

Nobre, S., Amado, N. & Carreira, S. (2009). Manifestações do pensamento algébrico na resolução de problemas. In J. Fernandes, M. Martinho & F. Viseu (Orgs.), *Actas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 321-338). Viana do Castelo: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Nobre, S., Amado, N. & Carreira, S. (2012). Solving a contextual problem with the spreadsheet as an environment for algebraic thinking development. *Teaching Mathematics and its Applications*, *31*, 11-19.

Nobre, S., Amado, N. & Ponte, J. P. (2015). Representações matemáticas e sua transformação na aprendizagem de métodos formais algébricos. M. Pires, R. Tomás Ferreira, A. Domingos, C. Martins, H. Martinho, I. Vale, N. Amado, S. Carreira, T. Pimentel e L. Santos. (Eds.), *Investigação em Educação Matemática 2015. Representações matemáticas* (pp.131-148). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Palhares, P. (1997). Histórias com problemas construídos por futuros professores de matemática. In D. Fernandes et al. (Coords.), *Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática* (pp. 159-188). Aveiro: GIRP.

Panasuk, R. (2010). Three-phase ranking framework for assessing conceptual understanding in algebra using multiple representations, *Education*, *131*(4), 235-257.

Pantziara, M., Gagatsis, A. and Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics* *72*(1), 39-60.

Pape, S. J. & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory into Practice*, *40*(2), 118-125.

Patton, M. (1980). *Qualitative evaluation methods*. Beverly Hills, CA: Sage Publications, Inc.

Pereira, M. & Saraiva, M. (2008). O sentido do símbolo na aprendizagem da álgebra em alunos do 7º ano de escolaridade. In R. González et al. (Eds.), *Investigation en education Matemática XII*. Badajoz: Sociedade Española de Investigation en Education Matemática, SPCE e APM.

Pyke, C. L. (2003). The use of symbols, words, and diagrams as indicators of mathematical cognition: A causal model. *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(5), 406-432.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, *3*(1), 3-18.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Pires, M. V., Nunes, C. & Janeiro, J. (2007). Avaliação de manuais de Matemática do 9.º ano. (Acedido em 12 Agosto de 2010 em http://sitio.dgidc.min-edu.pt/PressReleases/Paginas/relatorioavaliacaomanuais9ano.aspx)

Ponte, J. P. (2006a). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale et. al. (Orgs.). *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. (pp.5-27). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática.

Ponte, J. P. (2006b). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105-132.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). Álgebra no ensino básico. (Acedido em 10 de outubro de 2010 em http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/003_Brochura_Algebra_NPMEB_(Set2009).pdf).

Ponte, J. P., Matos, A. & Branco, N. (2009). *Sequências e funções. Materiais de apoio ao professor com tarefas para o 3.º ciclo-7.º ano*. ME-DGIDC. (Acedido a 20 outubro de 2010 em http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/045_sequencia_funcoeseequacoes_TP_3C_Julho2010.pdf .)

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In J.P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp.13-27). Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2014). Representações e processos de raciocínio na comparação e ordenação de números racionais numa abordagem exploratória. *Bolema, 28* (50), 1464-1484.

Presmeg. N. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics, 6* (3), 42-46.

Preston, R., & Garner, A. (2003). Representation as a vehicle for solving and communication. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *9*, 38-43.

Quivy, R. & Campenhoudt, L. (2003). *Manual de investigação em ciências sociais*. (3.ª Ed.). Lisboa: Gradiva.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42* (3), 237-268.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Saiz, & A. Mendez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.1, pp. 2-21). Merida, Mexico: Universidad Pedagogica Nacional.

Rojano, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school: Students' access to significant mathematical ideas. In L. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (Vol. 1, pp. 143-161). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Rojano, T., & Sutherland, R. (1997). Pupils' strategies and the cartesian method for solving problems: the role of spreadsheets. In J. Dossey, J. Swafford, M. Parmantie & A. Dossey (Eds.), *Proceedings of the 21st International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 72-79). Lathi: University of Helsinki.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes; L. Santos; H. Gomes & C. Rodrigues (Ed.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp.11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da SPCE.

Santos, L. (Org.) (2010). *Avaliar para aprender*. Lisboa: Porto Editora e IE.

Santos, L. (2011). Que critérios de qualidade para a avaliação formativa? In D. Fernandes (Org.), *Avaliação em educação: Dez olhares sobre uma prática social incontornável* (pp. 155-165). Curitiba: Editora Melo.

Saussure, F. (1973). *Cours de linguistique générale*. Paris. Payot.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic.

Schoenfeld, A. & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher*, *81*, 420-427.

Schoenfeld, A. (2008). Early algebra as mathematical sense making. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 479-510). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard, A. & Linchevsky, L. (1994). The gains and piftals of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191-228.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77, 20-26.*

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. & Hernández, J. (1989). *Iniciación al álgebra. Matemáticas: Cultura y Aprendizaje*, *23,* Madrid: Ed. Síntesis.

Stacey, K. &. Chick, H. (2004). Solving the problem with Algebra. In K. Stacey et al (Eds.), *The Future of teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 1-20). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Stake, R. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Stake, R. (2000). Case studies. In Denzin, N. & Y. Lincoln (Eds.), *The handbook of qualitative research* (2nd ed.) (pp. 435-454). Thousand Oaks, CA: Sage.

Stein, M., K. Engle, R. A., Smith, M. & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340.

Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for refection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*, 268-275.

Steward, A. (1994). Spreadsheets in mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *25*, 239.

Strauss, A. & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Streefland, L. (1991). Fractions, an integrated perspective. In L. Streefland (Ed.), *Realistic mathematics education in primary school* (pp. 93-118). Utrecht: Freudenthal Institute.

Sullivan, P. Clarke, D. M. & Clarke, B. A. (2013). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. New York: Springer.

Sutherland, R. (1993). *Project AnA – The gap between Arithmetic and Algebra (R000232132). Final report to ESRC*. Institute of Education, University of London.

Sutherland, R. (1994). The influence of teaching on the practice of school algebra: what can we learn from work with computers? *In Seminar Matematico del univestia I del politecnico de Torino* (Vol. 52 (3), 319-333). Torino: Univestia I del

Politecnico de Torino. (Acedido em 6 de agosto de 2010 em http://www.seminariomatematico.unito.it/rendiconti/cartaceo/52-3/309.pdf)

Sutherland, R. & Rojano, T. (1993). A spreadsheet approach to solving algebra problems. *Journal of Mathematical Behavior, 12*, 351–383.

Sutherland, R. A. (2007). Dramatic shift of attention: from arithmetic to algebraic thinking. In J. Kaput (Ed.), *Employing Children's Natural Powers to Build Algebraic Reasoning in the Content of Elementary Mathematics*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Tabach, M. & Friedlander, A. (2004). Levels of students' responses in a spreadsheet-based environment. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, 423-430.

Tabach, M. Hershkowitz, R. & Arcavi, A. (2008). Learning beginning Algebra with spreadsheets in a computer intensive environment. *The Journal of Mathematical Behavior, 27*, 48-63.

Trigueros, M. & Ursini, S. (2003). First-year undergraduates' difficulties in working with different uses of variable. In A. Selden, E. Dubinsky, G. Harel, & F. Hitt (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education* (Vol. 12, pp. 1-29). Providence, RI: American Mathematical Society.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 438–445.

Tuckman, B. (2000). *Manual de investigação em educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Tuckman, B. (2002). *Manual de investigação em educação- como conceber e realizar o processo de investigação em educação* (2.ª ed.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Usiskin (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A.P. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra* (pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

Usiskin, Z. (2004). *A significant amount of algebra*. (NAW 5/5 nr. 2 Junho de 2004) (Acedido em 8 de abril de 2009 em http://www.math.leidenuniv.nl/~naw/serie5/deel05/jun2004/pdf/usiskin.pdf).

Vaiyavutjamai, P., & Clements, M. A. (2006). Effects of classroom instruction on students' understanding of quadratic equations. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(1), 47-77.

Van de Walle, J. A., Karp, K., & Bay-Williams, J. (2011). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. Boston, MA: Allyn & Bacon.

Verikios, P. & Farmaki, V. (2006). Introducing algebraic thinking to 13 year-old students: the case of the inequality. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N.

Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 321-328). Prague: PME.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 5-28). Hove: Psychology Press.

Yerushalmy, M. (2006). Slower algebra students meet faster tools: Solving algebra word problems with graphing software. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*, 356-387.

Yin, R. (1989). *Case study research design and methods*. Sage, Newbury Park.

Yin, R. (1994). *Case study research: Design and methods* (2ª Ed) Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.

Wagner, S. (1983). What are these things called variables? *Mathematics Teacher*, *76*, 474-479.

Watson, A, & Sullivan, P. (2008). Teachers learning about tasks and lessons. In D. Tirosh, D. & T. Wood (Eds.), *Tools and resources in mathematics teacher education* (pp. 109-135). Rotterdam: Sense Publishers.

Watson, A. (2010). Key understandings in school mathematics: 2. *Mathematics Teaching*, *219*, 12–14.

Webb, D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg: Using representations to support student understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *14*(2), 110–113.

Weigand, H. & Weller, H. (2001). Changes in working styles in a computer algebra environment – The case of functions. *International Journal of Computers in Mathematical Learning*, *6*(1), 87-111.

Wilson, K. (2007) Naming a column on a spreadsheet. *Research in Mathematics Education*, *8*, 117-132.

Windsor. W., (2010). Algebraic thinking: A problem solving approach. In L. Sparrow, B. Kissane & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp.665-672). Fremantle, WA: MERGA.

Wu, H. (1999). Basic skills versus conceptual understanding A bogus dichotomy in mathematics education. *American Educato*r 1-7. (Acedido em 12 de outubro de 2013 em http://www.aft.org/pubs-reports/american_ educator/fall 1999).

Zazkis, R., & Liljedhal, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 379-402.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2004). Understanding primes: The role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(3), 164-186.

Zbiek, R. M. (1998). How might technology enhance algebraic reasoning? In F. Fennell (Ed.), *Proceedings of the national symposium on the nature and role of algebra in the k-14 curriculum* (pp. 35-36). Washington, DC: Mathematical Sciences Education Board.

ANEXOS

Anexo 1: Pedido de autorização à Diretora da escola

Exma. Sra. Directora da Escola

EB 2, 3 Professor Paula Nogueira

Eu, Sandra Guerreiro Gonçalves Nobre, PQND do grupo de recrutamento 500, venho solicitar autorização para realizar a recolha de dados para uma investigação nesta escola.

Encontro-me, neste momento, a frequentar o curso de Doutoramento em Educação na especialidade de Didáctica da Matemática no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Neste âmbito, estou a realizar a minha dissertação subordinada ao tema ***O desenvolvimento do pensamento algébrico: uma experiência de ensino com alunos do 9.º ano***. Esta investigação visa dar novos contributos sobre o modo como a resolução de problemas, em determinadas situações, com recurso à folha de cálculo, pode promover o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A concretização do estudo em causa implica a recolha de dados nas turmas A e B do 9º ano. A intervenção pedagógica decorrerá no presente ano lectivo, 2010/2011, nas aulas de Matemática.

Informo ainda que todos os participantes e respectivos encarregados de educação serão informados sobre os objectivos do estudo e será solicitada autorização para efectuar gravações (áudio e vídeo) e entrevistas. Será assegurado o anonimato a todos os participantes envolvidos no estudo, com os quais assumirei o compromisso de não utilizar os dados recolhidos para outro fim que não seja o da realização desta investigação.

Olhão, 4 de Outubro de 2010

Peço deferimento,

____

Sandra Guerreiro Gonçalves Nobre

Anexo 2:Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Ex.mo(a) Sr(a). Encarregado(a) de Educação:

No âmbito do curso de Doutoramento em Educação, na especialidade de Didáctica da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, estou a desenvolver um estudo subordinado ao tema: ***O desenvolvimento do pensamento algébrico: uma experiência de ensino com alunos do 9.º ano***. Este projecto de investigação visa dar novos contributos sobre o modo como o ensino da Matemática com incidência na resolução de problemas, em determinadas situações com recurso à folha de cálculo, pode promover o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A concretização do estudo em causa implica observação e a recolha de dados sobre o trabalho dos alunos nas aulas de Matemática. A recolha de dados basear-se-á na gravação em áudio dos diálogos de alunos durante a resolução de problemas e outras tarefas, na gravação vídeo das discussões e síntese das tarefas e na realização de entrevistas a alguns dos alunos. Com estes dados procuro compreender melhor as formas de raciocínio dos alunos, como eles interagem e como desenvolvem o pensamento algébrico no trabalho nalguns tópicos do Tema Álgebra. O estudo decorrerá durante o ano lectivo 2010/11.

Face ao exposto solicito autorização para proceder à recolha de dados, junto do seu educando, comprometendo-me a garantir o anonimato dos alunos e assumindo o compromisso de não utilizar os dados recolhidos para outro fim que não seja o da realização desta investigação.

Agradecendo desde já a atenção dispensada, apresento os meus melhores cumprimentos.

Olhão, 1 de Outubro de 2010

A professora

✂ --

Eu, ______________________________________, ☐ autorizo ☐ não autorizo o(a) meu (minha) educando (a) ____

nº ___ da turma ___ do 9º ano, a participar na recolha de dados dirigida pela professora Sandra Guerreiro Gonçalves Nobre, no âmbito da sua dissertação de Doutoramento.

Data: ____ / ____ /2010

Assinatura: ____

Anexo 3: Autorização da DGIDC

Monotorização de Inquéritos em Meio Escolar: Inquérito nº 0141500001 Entrada | X

mime-noreply@gepe.min-edu.pt para mim mostrar detalhes 08/10/10 Responder

Exmo(a)s. Sr(a)s.

O pedido de autorização do inquérito n.º 0141500001, com a designação *O desenvolvimento do pensamento algébrico: uma experiência de ensino com alunos do 9.º ano*, registado em 07-10-2010, foi aprovado.

Avaliação do inquérito:

Exmo(a). Senhor(a) Dr(a) Sandra Guerreiro Gonçalves Nobre

Venho por este meio informar que o pedido de realização de questionário em meio escolar é autorizado uma vez que, submetido a análise, cumpre os requisitos de qualidade técnica e metodológica para tal.

Com os melhores cumprimentos

Maria da Piedade Paes

Chefe da Divisão de Acompanhamento e Avaliação

DGIDC

Observações:

Sem observações

Pode consultar na Internet toda a informação referente a este pedido no endereço http://mime.gepe.min-edu.pt. Para tal terá de se autenticar fornecendo os dados de acesso da entidade.

Anexo 4: Expectativas no estuda da Álgebra do pré-escolar ao 12.º ano

Tabela 1: Expectativas no estudo da Álgebra do pré-escolar ao 12.º ano (NCTM, 2000, pp. 458-459)

Expectativas na compreensão de padrões, relações e funções			
Do pré-escolar ao 2.º ano	**Do 3.º ao 5.º ano**	**Do 6.º ao 8.º ano**	**Do 9.º ao 12.º ano**
• Agrupar, classificar e ordenar objectos por tamanho, número e outras propriedades; • Reconhecer, descrever e ampliar padrões, tais como sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples, e interpretá-los em diversas representações; • Analisar a forma como são gerados tanto os padrões de repetição como os de crescimento.	• Descrever, ampliar e fazer generalizações acerca de padrões geométricos e numéricos; • Representar e analisar padrões e funções, usando palavras, tabelas e gráficos.	• Representar, analisar e generalizar uma diversidade de padrões, através de tabelas, gráficos, palavras e, sempre que possível, expressões simbólicas; • Relacionar e comparar diferentes formas de representação de uma relação; • Identificar funções como lineares ou não lineares e diferenciar as suas propriedades, a partir de tabelas, gráficos ou equações.	• Generalizar padrões, usando funções explicita e recursivamente definidas; • Compreender relações e funções, e seleccionar, converter umas nas outras e usar várias representações; • Analisar funções de uma variável, investigando taxas de variação, intersecções, zeros, assímptotas e comportamento local e geral; • Compreender e efectuar transformações, como a combinação aritmética, a composição e a inversão de funções usando a tecnologia nas operações com expressões simbólicas mais complexas; • Compreender e comparar as propriedades de classes de funções, como as exponenciais, polinomiais, racionais, logarítmicas e periódicas; • Interpretar representações de funções de duas variáveis.
Expectativas na representação e análise de situações utilizando símbolos algébricos			
Do pré-escolar ao 2.º ano	**Do 3.º ao 5.º ano**	**Do 6.º ao 8.º ano**	**Do 9.º ao 12.º ano**
• Ilustrar os princípios e as propriedades gerais das operações, como a comutatividade, através da utilização de números específicos;	• Identificar propriedades, como a comutatividade, a associatividade e a distributividade, e aplicá-las ao cálculo com	• Desenvolver uma primeira compreensão conceptual das diferentes utilizações das variáveis; • Explorar relações entre expressões algébricas e gráficos de linhas, dando	• Compreender o significado de formas equivalentes de expressões, equações, desigualdades e relações; • Escrever formas equivalentes de equações, desigualdades e sistemas de equações, desigualdades e sistemas de equações, resolvendo com destreza – mentalmente ou papel e lápis, em casos simples, e usando a tecnologia em todos eles;

• Usar representações concretas, pictóricas e verbais, para desenvolver uma compreensão das notações simbólicas inventadas ou convencionais.	números inteiros; • Representar a noção de variável, enquanto quantidade desconhecida, através de uma letra ou de um símbolo; • Expressar relações matemáticas através de equações.	particular atenção ao significado de intersecção e declive; • Usar a álgebra simbólica para representar situações e resolver problemas, sobretudo aqueles que envolvam relações lineares; • Reconhecer e produzir formas equivalentes de expressões algébricas simples, e resolver equações lineares.	• Usar a álgebra simbólica para representar e explicar relações matemáticas; • Usar uma variedade de representações simbólicas para funções e relações, incluindo as equações recursivas e paramétricas; • Avaliar o significado, a utilidade e a plausabilidade dos resultados de manipulação simbólica.
Expectativas no uso de modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas			
Do pré-escolar ao 2.º ano	Do 3.º ao 5.º ano	Do 6.º ao 8.º ano	Do 9.º ao 12.º ano
• Modelar situações que envolvam a adição e a subtracção de números inteiros, através da utilização de objectos, figuras e símbolos.	• Modelar situações problemáticas, usando objectos, e recorrer a representações como gráficos, tabelas e equações para tirar conclusões.	• Modelar e resolver problemas inseridos num contexto, utilizando diversas representações, como gráficos, tabelas e equações.	• Identificar relações quantitativas essenciais numa situação, e determinar a classe ou classes de funções que as podem modelar; • Utilizar expressões simbólicas, incluindo formas iterativas ou recursivas, para representar as relações emergentes ou vários contextos; • Fazer inferências plausíveis sobre a situação que está a ser modelada.
Expectativas na análise de variação e diversos contextos			
Do pré-escolar ao 2.º ano	Do 3.º ao 5.º ano	Do 6.º ao 8.º ano	Do 9.º ao 12.º ano
• Descrever variações qualitativas, como o facto de um aluno ter crescido; • Descrever variações quantitativas, como o facto de um aluno ter	• Investigar a forma como a variação de uma variável se relaciona com a variação de uma segunda variável; • Identificar e descrever	• Usar gráficos para analisar a natureza das variações de quantidades em relações lineares.	• Aproximar e interpretar taxas de variação com base em dados gráficos e numéricos.

crescido 5 cm ao longo de um ano.	situações com taxas de variação constantes ou variáveis e compará-las.		

Anexo 5: Guião para as notas de campo

<table>
<tr><td colspan="2"><u>Notas de campo</u></td></tr>
<tr><td>Aulas nº ____________ Turma: ____ 9ºAno Data: ____ /____/ ____

Tarefas : ____</td><td>Tempo previsto: ______

Tempo dispendido: ______</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Momentos da aula</th><th>Principais aspectos a anotar</th></tr>
<tr><td>Apresentação das tarefas</td><td rowspan="4">Reacções dos alunos
Comentários dos alunos
Comentários da professora
Dúvidas dos alunos
Questões colocadas à professora
Questões colocadas pela professora
Esclarecimentos dados pela professora
Trabalho realizado pelos alunos
Observações</td></tr>
<tr><td>Trabalho dos alunos</td></tr>
<tr><td>Discussão/(ões)</td></tr>
<tr><td>Síntese/(s)</td></tr>
<tr><td>Reflexão</td><td>Aspectos a reflectir</td></tr>
</table>

Anexo 6: Planificação para o tópico "Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas"

Tabela 2: Tarefas e objectivos para o estudo do tópico "Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas"

Tarefas	Objectivos	Recursos
A-1 (diagnóstico)	Compreender o significado dos símbolos em expressões algébricas e equações; Simplificação de expressões algébricas; Compreender a noção de solução de equação; Recurso a fórmulas que envolvem o trabalho com expressões algébricas; Distinguir "expressão algébrica", "equação" e "fórmula"; Resolver equações do 1.º grau com parênteses e com denominadores; Determinar termos próximos e distantes numa sequência; Determinar termo geral de uma sequência; Escrever a expressão algébrica de uma função afim a partir de uma tabela de valores; Identificar a representação gráfica de uma função afim a partir de uma tabela de valores ou a partir da sua expressão algébrica.	Material de escrita Calculadora Ficha em suporte papel
B-1	Resolver problema que envolve relações entre duas quantidades com várias soluções; Estabelecer relações entre variáveis; Compreender o significado das letras numa equação literal; Compreender que uma equação literal pode ter várias soluções (dependendo do contexto).	Material de escrita Folha de cálculo Projector Ficha em suporte papel
C-1	Resolver problema que envolve várias condições; Estabelecer relações entre variáveis;	Material de escrita Folha de cálculo

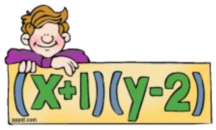
	Compreender a noção de sistema de equações;	Projector Ficha em suporte papel
D-1	Resolver problemas que envolve relações; Estabelecer relações entre variáveis; Compreender a noção de sistema de equações; Construir sistema de equações a partir dos dados;	Material de escrita Calculadora Ficha em suporte papel
E-1	Resolver problema que envolver relações entre tempo e velocidade; Compreender a noção de sistema de equações; Construir sistema de equações a partir dos dados; Classificar sistemas de equações a partir da sua resolução gráfica.	Material de escrita Folha de cálculo Projector Ficha em suporte papel
F-1	Resolver problema que envolve relações; Perceber a ligação entre o trabalho realizado no Excel e a resolução pelo método de substituição de um sistema de equações; Resolver sistemas pelo método de substituição.	Material de escrita Folha de cálculo Projector Ficha em suporte papel
G-1	Resolver problemas propícios para abordagem através de sistemas de equações; Escrever o enunciado de um problema que possa ser resolvido através de um sistema de equações, quando é conhecido o par ordenado que é solução; Resolver graficamente um sistema; Resolver sistemas pelo método de substituição; Verificar se um par ordenado é ou não solução de um sistema; Classificar sistemas a partir da sua formulação algébrica; Classificar sistemas a partir da sua representação gráfica;	Material de escrita Calculadora Ficha em suporte papel

	Escrever enunciado de problema dada a sua classificação.	
H-1	Estudar a influência de um parâmetro na classificação de um sistema de equações.	Material de escrita Calculadora Ficha em suporte papel

Anexo 7: Tarefa A-1 (Diagnóstico) do tópico “Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas”

Escola E. B. 2,3 XXXXXXXXXX

Ficha de Trabalho de Matemática – 9.º ano



Nome:____ Nº:____ Turma:____ Data: ____ / ____ / ____

Tarefa A-1 (Diagnóstico) [2]

Lê atentamente todas as questões e apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efectuar e todas as justificações necessárias.

1. Se $a+b=3$ a que é igual $a+b+4$? Justifica.

2. Se $f+g=3$ a que é igual $f+g+h$? Justifica.

3. Se $k-53=126$ a que é igual $k-54$? E k - 52? Justifica.

4. Qual é maior $2d$ ou $d+2$? Justifica.

5. Será que a igualdade $A+B+C=A+D+C$ é sempre válida? Justifica.

6. Sabendo que $p+q=10$ e que p é menor do que q, que valores poderá tomar p? Justifica.

---

[2] As questões 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 13 foram adaptadas de Socas et al. (1989). *Iniciación al álgebra. Matemáticas: Cultura y Aprendizaje*. Ed. Síntesis, nº 23. Madrid.
A questão 12 foi adaptada de uma proposta na brochura Funções e equações – 8.º ano, disponível em http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/045_sequencia_funcoeseequacoes_TP_3C_Julho2010.pdf .
A questão 14 foi adaptada de Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36 (5), 412-446.

7. Ordena as expressões: $t+3$, t, $t-4$, $t-1$e $t+10$ por ordem crescente. Justifica.

8. A tabela seguinte contém na primeira coluna uma expressão e na segunda a sua simplificação, com erros. Identifica os erros dando uma explicação e corrige-os.

Expressão	**Simplificação**	**Identificação e explicação do erro**	**Correcção**
$2x - x$	2		
$3x - 3$	X		
$2+5n$	$7n$		
$2a + 3b$	$5ab$		
$3(2x + 1)$	$6x + 1$		
$-2x + 6x$	$-8x$		

9. Explica como interpretas cada uma das seguintes condições e em que ocasiões poderão ser utilizadas.

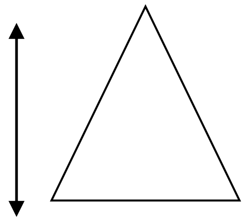
9.1) $1+3x=7$

9.2) $y=2x+3$

9.3) $P=2c+2l$

10. Considera a equação $\frac{2x+2}{1+x}=2$. Será $x=4$ a solução desta equação? Justifica.

11. Apresenta uma expressão simplificada para a área do triângulo.



12. A tabela seguinte contém na primeira coluna equações e uma resolução que não está correcta. Identifica e explica qual foi o erro cometido na resolução de cada uma das equações e corrige-o.

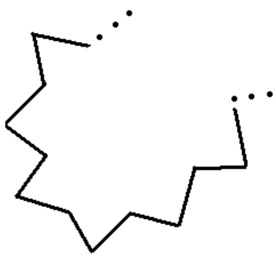
Equação e resolução	**Identificação e explicação do erro**	**Correcção**
$3x=12 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=12-3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=9$ $S=\{9\}$		
$2x-3x=4 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -x=4 \Leftrightarrow$ $S=\{4\}$		
$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=1+x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x+2x=1+x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4x=1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$ $S=\left\{\frac{1}{4}\right\}$		

$2\left(\dfrac{x-1}{3}\right)=7 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{2x-2}{6}=7 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x-2=42 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x=44 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=22$ $S=\{22\}$		

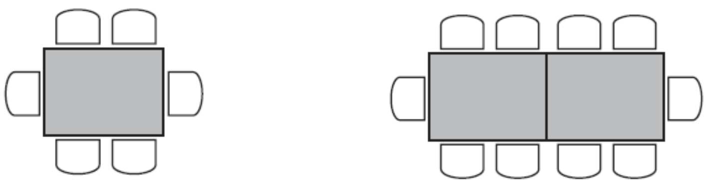
13. Apresenta uma expressão simplificada para o perímetro de cada uma das figuras seguintes:

13.1)

13.2)



14. Os alunos do 9.º ano estão a pôr as mesas para uma festa. Numa mesa cabem 6 alunos sentados e se forem colocadas duas mesas juntas cabem 10.



14.1) Quantos alunos se podem sentar se forem colocadas 3 mesas juntas? Explica como procedeste.

14.2) E se forem 8 mesas juntas? Explica como procedeste.

14.3) E se forem 150? Explica como procedeste.

14.4) E se forem *n*? Explica como procedeste.

14.5) Se forem 98 alunos à festa, quantas mesas serão necessárias? Explica como procedeste.

15. Observa os números na tabela:

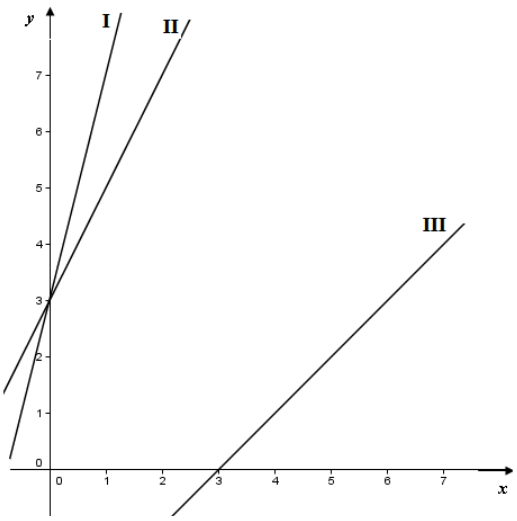
15.1) Qual é o valor de y se x for 500? Explica como procedeste.

15.2) Descreve, utilizando palavras, como podes obter o valor de y a partir do x.

15.3) Escreve algebricamente, isto é, utilizando a simbologia matemática, a relação entre x e y.

15.4) Se $y = 303$, qual é o valor de x? Explica como procedeste.

15.5) Indica, justificando, qual das representações gráficas I, II ou III corresponde à relação apresentada na tabela?



Anexo 8: Tarefa B-1 (Adivinhar o dia de aniversário) do tópico "Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas"

Escola E. B. 2, 3 XXXXXXXXXX

Ficha de Trabalho de Matemática – 9.º ano

Nome:_______________________________________ Nº:____ Turma:____ Data: ____ / ____ / ____

Tarefa B-1

Resolve o seguinte problema no Excel. Explica todo o teu raciocínio de forma clara, apresentando todas as justificações.

Problema: Adivinhar o dia de aniversário[3]

A Sofia gosta muito de colocar desafios aos colegas. Logo na primeira aula de Matemática, apresentou a seguinte proposta:

- Para descobrires o meu dia de aniversário basta multiplicares o dia do meu nascimento por 12 e o mês por 30 e adicionares os dois valores obtidos. Se o resultado for 582 é esse o dia e o mês do meu aniversário!

Consegues descobrir o dia do aniversário da Sofia?

[3] Adaptado de uma tarefa proposta em Faria & Azevedo (2006) *Matemática Dinâmica – Caderno de Actividades* (9.ºano). Porto Editora: Porto. (p. 16).

Anexo 9: Tarefa C-1 (O peso das 3 irmãs) do tópico "Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas"

Escola E. B. 2, 3 XXXXXXXXXX

Ficha de Trabalho de Matemática – 9.º ano

Nome:____ Nº:____ Turma:____ Data: ____ / ____ / ____

Tarefa C-1

Resolve o seguinte problema no Excel. Explica todo o teu raciocínio de forma clara, apresentando todas as justificações.

Problema: O peso das 3 irmãs[4]

O Sr. José tem três filhas muito gulosas: a Alice, a Beta e a Célia. Com a chegada do verão, elas ficaram muito preocupadas com a sua elegância, por causa da praia. Decidiram as três fazer uma dieta e pesar-se regularmente numa balança que o pai tinha no armazém. Quando começaram a dieta, as irmãs pesaram-se, duas a duas, na balança.

A Alice e a Beta pesavam juntas 132 Kg.

A Beta e a Célia pesavam juntas 151 Kg.

A Célia e a Alice pesavam juntas 137 kg.

Qual é o peso de cada uma das filhas do Sr. José?

[4] Problema da final do campeonato de matemática Sub 14 (edição 2007/2008)

Anexo 10: Tarefa D-1 do Tópico "Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas"

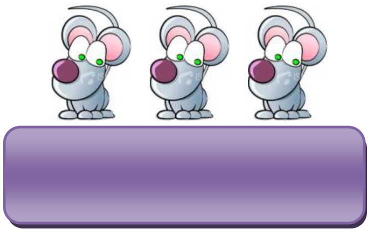
Escola E. B. 2,3 XXXXXXXXXX Ficha de Trabalho de Matemática – 9.º ano
Nome:____ Nº:____ Turma:____ Data: ____ / ____ / ____

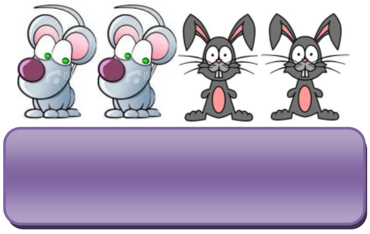
<u>Tarefa D-1</u>

Lê atentamente todas as questões e apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efectuar e todas as justificações necessárias.

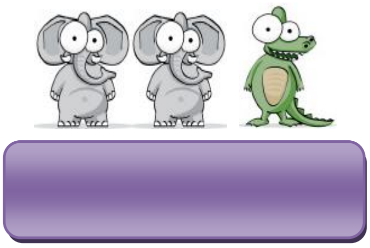
Para cada uma das situações seguintes determina o valor de cada animal pedido. Explica todos os procedimentos.

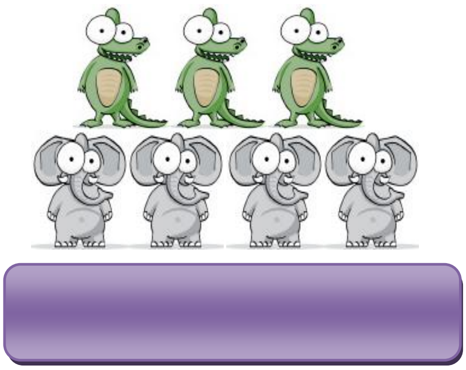
<u>Situação 1</u>



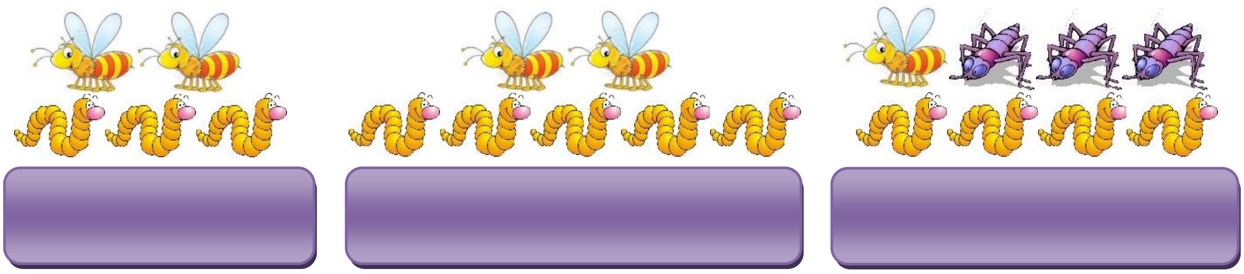


<u>Situação 2</u>

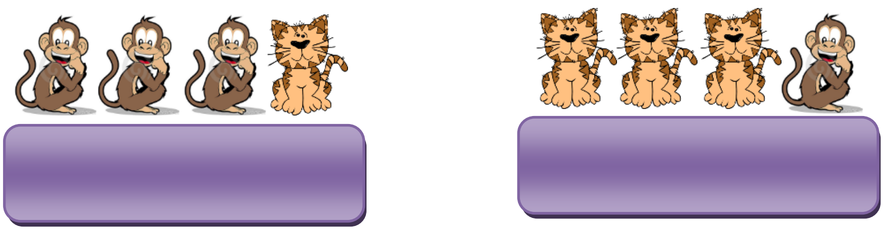




Situação 3 



Situação 4 



Anexo 11: Tarefa E-1 (Corrida de cavalos) do Tópico "Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas"

Escola E. B. 2, 3 XXXXXXXXXX

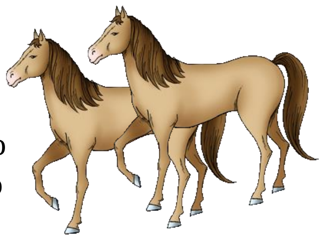
Ficha de Trabalho de Matemática – 9.º ano

Nome:_______________________________________ Nº:____ Turma:____ Data: ____ / ____ / ____

Tarefa E-1

Resolve o seguinte problema no Excel. Explica todo o teu raciocínio de forma clara, apresentando todas as justificações.

Problema: Corrida de cavalos



O Russo e o Relinchão são dois cavalos que participaram numa corrida de 2400 metros.

O Russo teve um bónus de 140 metros e partiu com esse avanço em relação ao Relinchão. O Russo correu a uma velocidade média de 11 m/s e o Relinchão a 14 m/s.

a) Qual dos dois cavalos ganhou a corrida?

b) Constrói, no Excel, uma representação gráfica com as relações entre o tempo e a distância percorrida pelos dois cavalos.

c) Elabora uma composição onde descrevas o que aconteceu durante o percurso da corrida.

d) No final da prova, quantos segundos de avanço tinha o cavalo vencedor em relação ao outro?

e) O que aconteceria se os dois cavalos corressem à mesma velocidade? (Simula essa situação no Excel e constrói o respectivo gráfico).

f) O que aconteceria se os dois cavalos partissem do mesmo local e com a mesma velocidade? (Simula essa situação no Excel e constrói o respectivo gráfico).

Anexo 12: Tarefa F-1 (Galinhas e coelhos) do Tópico "Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas"

Escola E. B. 2, 3 XXXXXXXXXX

Ficha de Trabalho de Matemática – 9.º ano

Nome:____ Nº:____ Turma:____ Data: ____ / ____ / ____

Tarefa F-1

Resolve o seguinte problema no Excel ou com lápis e papel. Explica todo o teu raciocínio de forma clara, apresentando todas as justificações.

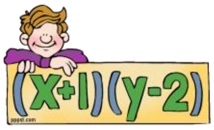
Problema: Galinhas e coelhos

1) Numa quinta há galinhas e coelhos. Ao todo são 212 cabeças e 700 patas. Quantas galinhas e quantos coelhos existem na quinta?

Anexo 13: Tarefa G-1 do Tópico "Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas"

Escola E. B. 2,3 XXXXXXXXXX

Ficha de Trabalho de Matemática – 9.º ano



Nome:____ Nº:____ Turma:____ Data: ____ / ____ / ____

<u>Tarefa G-1</u>

Lê atentamente todas as questões e apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Os bilhetes de entrada no circo têm dois preços diferentes. Há bilhetes para adultos, mais caros, e bilhetes para crianças, mais baratos.

   Um adulto e três crianças pagam 21 euros.

   Dois adultos e duas crianças pagam 27 euros.

   Por quanto custa a ida ao circo a um casal que leve um filho?

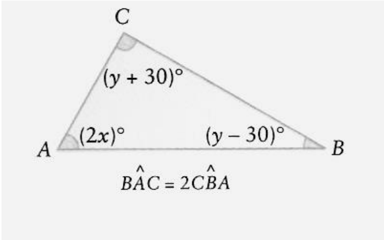
2. Escreve o enunciado de um problema, que possa ser resolvido através de um sistema de duas equações, que tenha como solução o par ordenado (1, 3).

3. O Sr. António, moleiro, distribuiu vários sacos de farinha pelos seus dois burros. O burro que ia à frente disse ao burro que ia atrás:

   "Se tu me deres um saco, ficamos ambos com o mesmo número de sacos; se eu te der dois sacos, ficarás com duas vezes mais sacos do que eu."

   Quantos sacos distribuiu o Sr. António pelos dois burros?

4. Considera o triângulo, com os dados acerca da amplitude de cada um dos seus ângulos internos.



4.1) Escreve um sistema de duas equações que te permita descobrir a amplitude de cada um dos ângulos.

4.2) Resolve esse sistema graficamente.

5. Resolve cada um dos seguintes sistemas pelo método que considerares mais adequado.

5.1) $\begin{cases} 2(x-1) = y \\ 3(x-2) = 3y \end{cases}$

5.2) $\begin{cases} 2x + 2y = 7 \\ \dfrac{x}{3} - y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

6. Considera o sistema de duas equações: $\begin{cases} y - \dfrac{3(x-1)}{4} = -1 \\ \dfrac{x}{8} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{y}{4} \end{cases}$.

6.1) Escreve o sistema na forma canónica, ou seja, na forma $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ (a, b, c, d, e e f são números).

6.2) Será o par ordenado (-1, 2) solução do sistema?

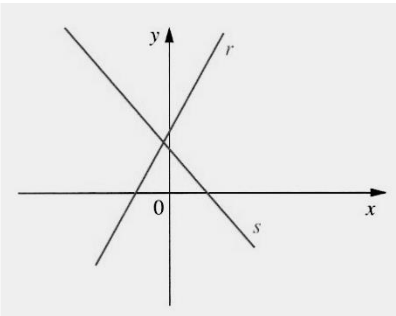
7. Classifica cada um dos seguintes sistemas, sem efetuar qualquer cálculo. Explica o teu raciocínio.

7.1) $\begin{cases} 0x = 5 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

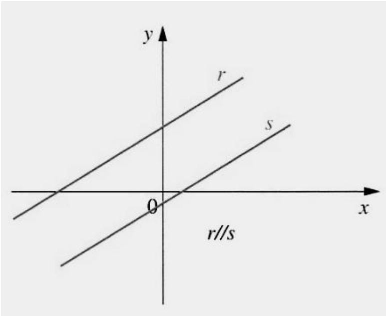
7.2) $\begin{cases} 0x = 0 \\ 0y = 2 \end{cases}$

7.3) $\begin{cases} 0x = 0 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

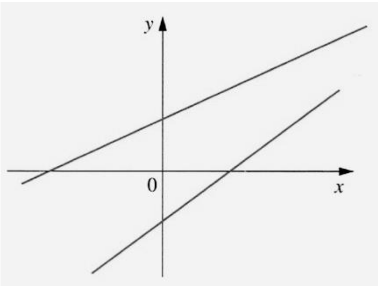
8. Em cada um dos referenciais cartesianos seguintes estão representadas graficamente as funções associadas às das duas equações de um sistema. Escreve ao lado de cada representação gráfica a classificação do sistema. Justifica.

8.1)


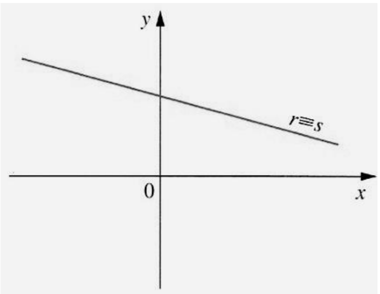
8.2)



8.3)



8.4)

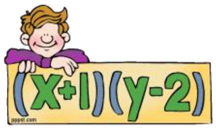


9. Escreve o enunciado de um problema, que possa ser resolvido através de um sistema de equações, que seja possível indeterminado.

Anexo 14: Tarefa H-1 (Tarefa de investigação) do Tópico "Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas"

Escola E. B. 2,3 XXXXXXXXXX

Ficha de Trabalho de Matemática – 9.º ano



Nome:____ Nº:____ Turma:____ Data: ____ / ____ / ____

Tarefa H-1 (Tarefa de investigação)

1) Considerem o sistema seguinte, nas incógnitas x e y

$\begin{cases} x + ay = a \\ ax + y = 3 \end{cases}$; a letra ***a***, pode designar-se por parâmetro, representa um número qualquer.

Investiguem se, para diferentes valores de ***a***, é possível obter um sistema:

1.1. possível e determinado (justifiquem a vossa resposta);

1.2. possível indeterminado (justifiquem a vossa resposta);

1.3. impossível (justifiquem a vossa resposta) .

Anexo 15: Tarefa da entrevista para Tópico "Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas"

Tarefa 1- Entrevista

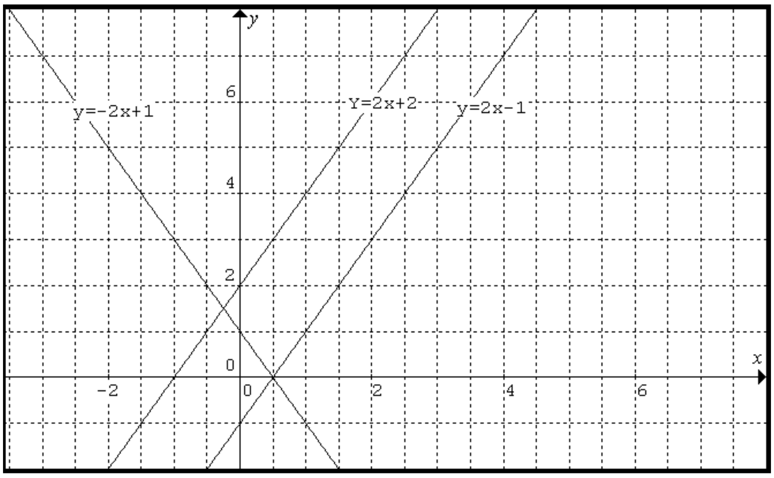
1. Resolve o seguinte problema:
   Um teste tem 20 perguntas, umas de escolha múltipla e as outras de verdadeiro/falso. A pontuação total das questões é de 100 pontos.
   As questões de escolha múltipla valem 11 pontos e as questões de verdadeiro/falso valem 3 pontos cada uma. Quantas questões de escolha múltipla tem o teste?

2. Os alunos finalistas do 9.º ano de todas as escolas básicas do Algarve têm como viagem de finalistas um cruzeiro para as ilhas Canárias. Os alunos do Barlavento saem de Portimão no "Ocean Team" que segue uma rota que pode ser descrita pela equação: $3x + y = 70$ e os alunos do Sotavento saem de Faro no "Ocean Blue" que segue uma rota que pode ser descrita pela equação: $2y = 2x + 60$.

   Será que existe algum local do oceano comum às rotas dos dois cruzeiros? Em caso afirmativo indica quais são as suas coordenadas.

3. Tendo em conta as representações gráficas indica para cada um dos seguintes sistemas a sua e classificação e a sua solução.



4.1) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$

4.2) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$

4.3) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

4. Escreve um sistema que tenha como solução (3; -2).

5. Escreve o enunciado de um problema que possa ser resolvido por um sistema de duas equações e que tenha como solução o par (8; 3).

Anexo 16: Planificação para o tópico "Proporcionalidade Inversa. Representações gráficas"

Tabela 3: Tarefas e objetivos para o estudo do tópico "Proporcionalidade inversa. Representações gráficas"

Tarefas	Objetivos	Recursos
A-2 (diagnóstico)	Resolver problemas que envolvem proporcionalidade directa, inversa e em que não existe qualquer tipo de proporcionalidade; Agrupar os problemas de acordo com o tipo de raciocínio.	Material de escrita Calculadora Ficha em suporte papel
B-2	Resolver problema que envolve situação de proporcionalidade inversa; Resolver problema que não envolve uma situação de proporcionalidade; Reconhecer situação de proporcionalidade inversa; Representar graficamente (no computador) e fazer esboço no papel de uma hipérbole; Escrita da expressão algébrica de uma função de proporcionalidade inversa.	Material de escrita Folha de cálculo Projector Ficha em suporte papel
C-2	Escrever a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade inversa; Representar graficamente (no computador) situações de proporcionalidade inversa com valores da constante de proporcionalidade positiva e negativa;	Material de escrita Folha de cálculo Projector Ficha em suporte papel
D-2	Resolver problemas que envolvem proporcionalidade inversa; Identificar representações gráficas de situações de proporcionalidade (directa e inversa) e outras com a respectiva expressão algébrica; Identificar a constante de proporcionalidade em	Material de escrita Calculadora Projector Ficha em suporte

	situações de proporcionalidade (directa e inversa); Explorar situações de proporcionalidade inversa, como a experiência de Boyle-Mariotte e outras que envolvem, por exemplo, velocidade e tempo; Calcular a imagem de um objecto e um objecto dada a sua imagem numa situação de proporcionalidade inversa a partir da respectiva expressão algébrica; Explicar o significado da imagem de um objecto e de um objecto dada a imagem numa situação de proporcionalidade inversa a partir da respectiva expressão algébrica.	papel
E-2	Interpretar representações gráficas, de acordo com o contexto; Associar uma representação gráfica a uma situação.	Material de escrita Projector Ficha em suporte papel

Anexo 17: Tarefa A-2 (Diagnóstico) do Tópico "Proporcionalidade Inversa. Representações gráficas"

Escola E. B. 2,3 XXXXXXXXXX

Ficha de Trabalho de Matemática – 9.º ano

Nome:_______________________________________ Nº:____ Turma:____ Data: ____ / ____ / ____

Tarefa A-2 (Diagnóstico) [5]

Lê atentamente todas as questões e apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efectuar e todas as justificações necessárias.

1. O Roberto trabalha numa padaria. Ele utiliza 10 kg de farinha para fabricar 13 kg de pão. Qual é a quantidade de pão, em kg, que o Roberto faz com 23 kg de farinha?

2. A Carlota estendeu 3 toalhas na corda. Passadas 12 horas as toalhas estavam secas. O Sr. António, vizinho do lado, também estendeu 6 toalhas no mesmo instante da Carlota. Determina quanto tempo demoraram as toalhas do Sr. António a secar.

3. A locomotiva de um comboio tem 12 *m* de comprimento. Se tiver 4 carruagens atreladas à locomotiva, o comboio tem 52 *m* de comprimento. Determina qual é o comprimento do comboio se tiver 8 carruagens.

4. Seis homens pintam uma casa em 3 dias. Quantos homens são necessários para pintar essa casa num dia?

---

[5] Tarefa adaptada de Ainley , J. & Pratt D. , 2005. The significance of task design in mathematics education: Examples from proportional reasoning. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 1, pp. 93-122). Melbourne: PME.

5. Hoje a Berta e a Lia fazem anos. A Berta faz 2 anos e a Lia faz 6 anos. Quando a Berta fizer 12 anos, quantos anos faz a Lia?

6. A Alice e a Sara fizeram uma corrida numa pista. Elas correm à mesma velocidade, mas a Alice começou mais tarde. Quando a Alice completou 5 voltas à pista a Sara já tinha dado 15 voltas. Quando a Sara completou 30 voltas quantas deu a Alice?

7. Um grupo de 5 músicos toca uma melodia em 5 minutos. Outro grupo de 10 músicos vai tocar a mesma melodia. Quanto tempo vai este grupo de músicos demorar?

8. Alguns amigos da Joana querem fazer-lhe uma surpresa e oferecer-lhe o seu livro preferido. Se forem 6 amigos, cada um deve participar com 2 €. Se cada amigo der menos 50 cêntimos quantos amigos deverão participar na compra do livro?

Agora depois de teres resolvido todos os problemas será que consegues agrupá-los de acordo com o tipo de raciocínio utilizado? Justifica a tua resposta.

Anexo 18: Tarefa B-2 (Os canteiros da horta do Sr. Tomás) do Tópico "Proporcionalidade Inversa. Representações gráficas"

Escola E. B. 2, 3 XXXXXXXXXX

Ficha de Trabalho de Matemática – 9.º ano

Nome:____ Nº:____ Turma:____ Data: ____ / ____ / ____

Tarefa B-2: Os canteiros da horta do Sr. Tomás

O Sr. Tomás tem uma horta e vai fazer canteiros rectangulares, todos com as mesmas dimensões, para plantar legumes. A sua intenção é que cada canteiro tenha 120 m^2 de área.

O Sr. Tomás quer fazer várias experiências antes de decidir as dimensões de cada um dos canteiros que vai construir.

1. A tabela ao lado apresenta algumas das primeiras experiências efectuadas pelo Sr. Tomás. Completa-a.

Base (b)	Altura (a)	Área
10		
	60	
	40	
60		
80		
	120	

1.1. Tendo em conta os valores obtidos na tabela explica o que acontece à medida do comprimento da altura se duplicarmos a medida do comprimento da base? E se triplicarmos?

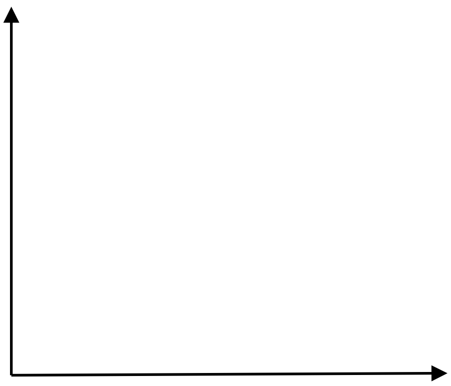
2. O Sr. Tomás quis fazer um maior número de experiências, para isso recorreu ao Excel e começou por construir uma tabela como a que está apresentada abaixo de modo a obter diferentes dimensões para os canteiros.

2.1. Constrói e preenche a tabela no Excel. Explica como procedeste para obter os valores da coluna relativa à altura dos canteiros.

Base (b)	**Altura (a)**	**Área**
1		
1,5		
2		
2,5		
. . .		
120		

2.2. Tendo em conta esta situação, escreve uma expressão algébrica, que exprima a altura ***a*** em função da base ***b***.

2.3. Constrói, no Excel, uma representação gráfica que relacione a altura e a base dos canteiros. Faz um esboço dessa representação gráfica no referencial abaixo.



A D. Francisca, mulher do Sr. Tomás, depois de observar o que o marido está a fazer não concorda com ele e diz-lhe:

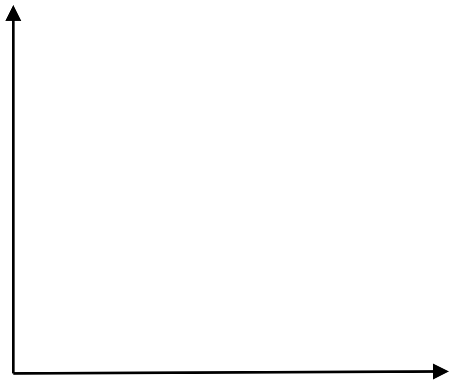
- Não me interessam os teus cálculos, eu quero que cada canteiro seja vedado com rede e quero gastar no máximo 50 metros rede com cada um. Quanto à área tanto faz!

3. A D. Francisca recorreu também ao Excel para construir uma tabela, como a seguinte, para a obter diferentes valores para as dimensões dos canteiros, tendo considerado 50 *m* para o perímetro de cada canteiro.

3.1. Constrói a tabela no Excel e preenche-a. Tendo em conta os valores obtidos na tabela explica o que acontece ao comprimento da altura se duplicarmos o comprimento da base? E se triplicarmos?

Base (b)	Altura (a)	Perímetro
1		
1,5		
2		
2,5		
. . .		
25		

3.2. Constrói, no Excel, uma representação gráfica que relacione a altura e a base dos canteiros. Faz um esboço dessa representação gráfica no referencial abaixo.



3.3. Será esta uma função de proporcionalidade inversa? Justifica.

3.4. Será uma função de proporcionalidade directa? Justifica.

3.5. Escreve a expressão algébrica que exprima a altura ***a*** em função da base ***b***.

3.6. Para o Sr. Tomás não ficar muito desanimado, a D. Francisca decidiu então optar por canteiros que tivessem uma área próxima da pretendida pelo Sr. Tomás. Tendo em conta os valores obtidos no Excel indica quais são as dimensões de cada canteiro.

Anexo 19: Tarefa C-2 (Produtos fixos) do Tópico "Proporcionalidade Inversa. Representações gráficas"

Escola E. B. 2, 3 XXXXXXXXXX

Ficha de Trabalho de Matemática – 9.º ano

Nome:____ Nº:____ Turma:____ Data: ____ / ____ / ____

.

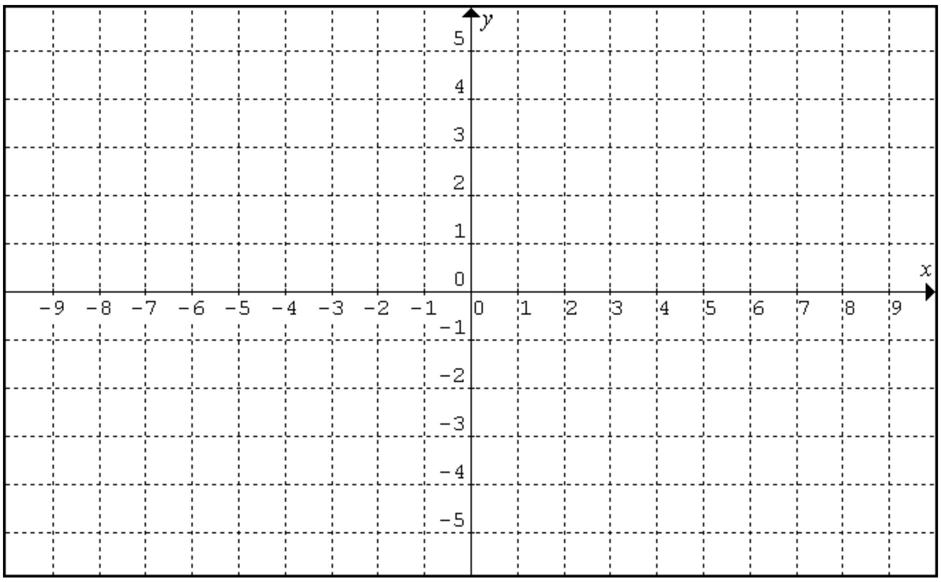
<u>Tarefa C-2</u>: Produtos fixos

1. O produto de dois números, x e y, é 4. Dá exemplos de quatro pares ordenados (x, y) que satisfaçam a condição.

1.1. Na folha de cálculo, constrói uma tabela com vários valores para x e y.

1.2. Escreve a expressão algébrica, y em função de x, que traduza a relação entre os números.

1.3. Constrói agora a representação gráfica da função no Excel. Faz um esboço dessa representação gráfica no referencial que se segue.

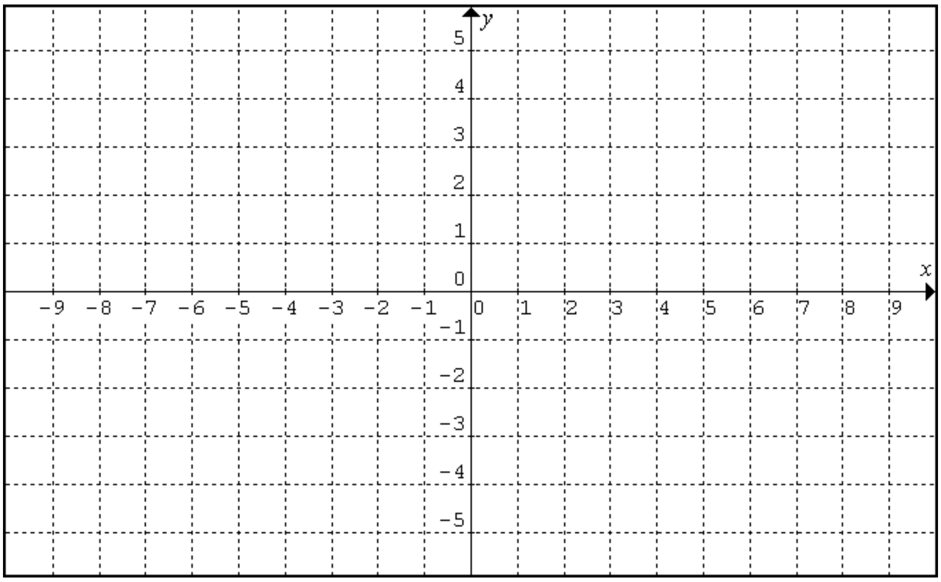


2. Considera agora que o produto de dois números é - 4. Dá exemplos de quatro pares ordenados (x, y) que satisfaçam a condição.

2.1. Na folha de cálculo, constrói uma tabela com vários valores para *x* e *y*.

2.2. Escreve a expressão algébrica, *y* em função de *x*, que traduza a relação entre os números.

2.3. Constrói a representação gráfica da função no Excel. Faz um esboço dessa representação gráfica no referencial que se segue.



3. Depois de teres realizado as duas questões anteriores faz uma síntese do que aprendeste.

4. Será que podes fazer alguma generalização para outras situações de produtos fixos? Justifica a tua resposta.

Anexo 20: Tarefa D-2 do Tópico “Proporcionalidade Inversa. Representações gráficas”

Escola E. B. 2,3 XXXXXXXXXX

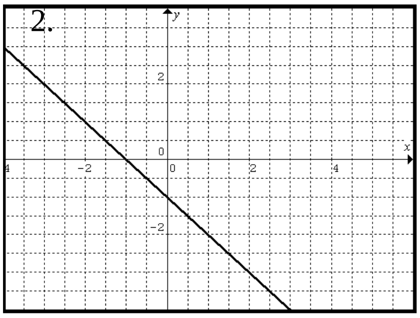
Ficha de Trabalho de Matemática – 9.º ano

Nome:____ Nº:____ Turma:____ Data: ____ / ____ / ____

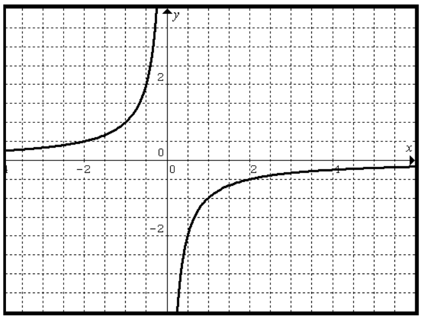
Tarefa D-2

Lê atentamente todas as questões e apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efectuar e todas as justificações necessárias.

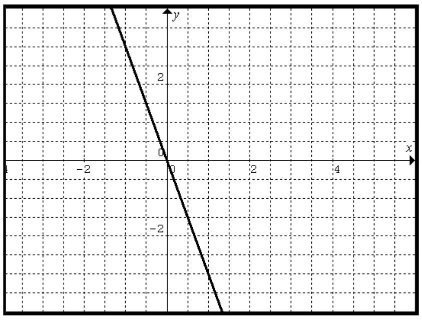
1. Considera as seguintes representações gráficas.



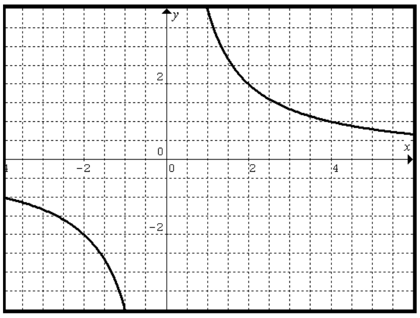
I



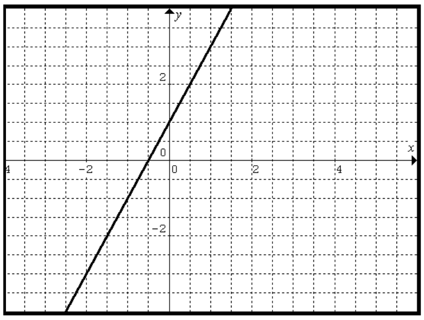
II



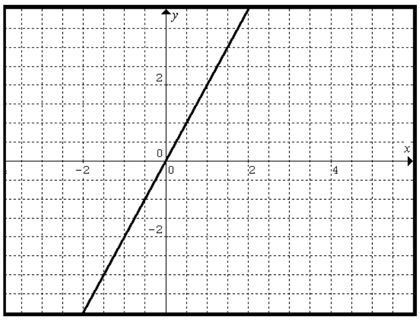
III



IV



V



VI

2.1. Preenche a tabela seguinte indicando o gráfico correspondente a cada uma das expressões algébricas.

Expressão algébrica	$y=2x$	$y=\frac{4}{x}$	$y=-\frac{1}{x}$	$y=-3x$	$y=-x-1$	$y=2x+1$
Gráfico						

2.2. Preenche a tabela seguinte assinalando com **X** os casos que se tratam de situações de proporcionalidade e indica a respectiva constante.

Gráfico	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**
Proporcionalidade directa						
Proporcionalidade inversa						
Constante (**k**)						

3. Na figura 1 podes observar um recipiente, em três momentos distintos, onde alguns pesos exercem pressão sobre um êmbolo que comprime o gás nele contido. Esta é conhecida como a experiência de Boyle-Mariotte.

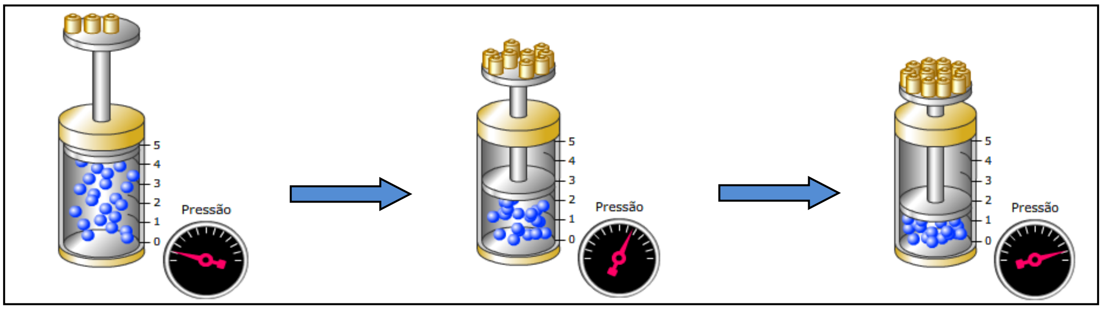


Figura 1: Experiência de Boyle-Mariotte

Na figura 2 podes observar a representação gráfica que exprime a variação da pressão (***p***) e do volume (***v***) durante a realização da experiência.

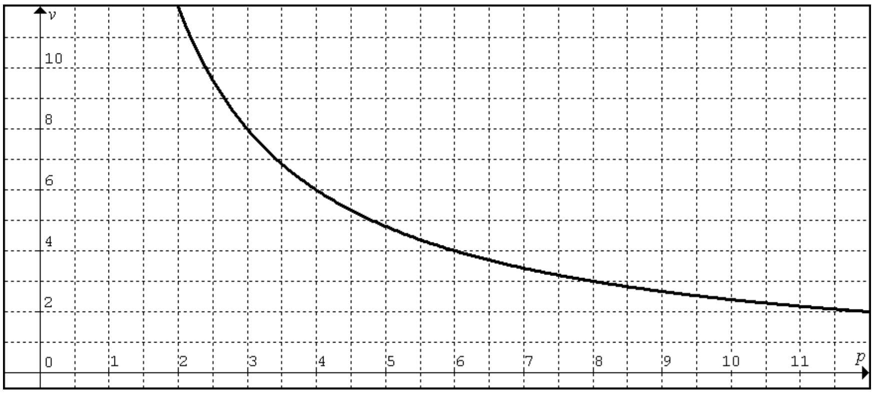


Figura 2: Representação gráfica

3.1. As duas grandezas, volume e pressão do gás, são inversamente proporcionais. Justifica esta afirmação.

3.2. Qual é a constante de proporcionalidade?

3.3. Escreve a expressão algébrica que define o volume (***v***) em função de ***(p)***.

4. A Carlota vai, uma vez por mês, passar o fim-de-semana com os avôs e desloca-se de automóvel com os seus pais. Durante um período de tempo, a Carlota fez alguns registos acerca da velocidade média e do tempo demorado nas viagens, como mostra a tabela seguinte.

Velocidade média (km/h) **v**	40	50	64	80	100
Tempo demorado (h) **t**	4	3,2	2,5	2	1,6

4.1. Qual é a distância percorrida em cada viagem realizada pela Carlota?

4.2. Justifica que existe proporcionalidade entre as grandezas ***v*** e ***t***.

4.3. Indica qual é a constante de proporcionalidade e o seu significado neste contexto.

4.4. Escreve a expressão algébrica que define a velocidade (***v***) em função do tempo (***t***).

5. Um carpinteiro vai a fazer mobiliário para a sala de estudo de uma escola e está a fazer um plano de trabalho tendo em conta o número de dias e o número de pessoas necessários para a execução do trabalho.

5.1. A tabela seguinte representa o plano de trabalho do carpinteiro. Calcula os valores de ***a***, ***b*** e ***c***.

N.º de dias (***d***)	2	***A***	8	***c***
N.º de pessoas (***p***)	12	6	***b***	1

5.2. Escreve a expressão algébrica que exprime o número de pessoas (***p***) em função do número de dias (***d***).

6. O comprimento de uma onda de rádio é inversamente proporcional à sua frequência e pode ser definido pela função $g(x) = \frac{300000}{x}$. (*x* representa a frequência em kilociclos por segundo e $g(x)$ indica o comprimento da onda em metros)

6.1. Calcula $g(10000)$ e explica o seu significado neste contexto.

6.2. Calcula $g(x) = 200$ e explica o seu significado neste contexto.

Anexo 21: Tarefa E-2 (Representações gráficas) do Tópico "Proporcionalidade Inversa. Representações gráficas"

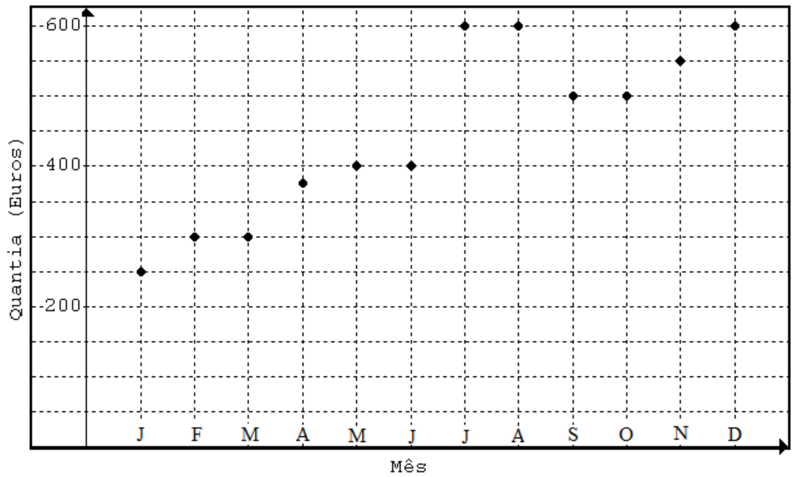
	Escola E. B. 2,3 XXXXXXXXXX **Ficha de Trabalho de Matemática – 9.º ano**	

Nome:____ Nº:____ Turma:____ Data: ____ / ____ / ____

<u>Tarefa E-2 (Representações gráficas)</u>

Lê atentamente todas as questões e apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efectuar e todas as justificações necessárias.

1. O gráfico seguinte representa o saldo bancário da Renata ao longo de um ano.



1.1. A Renata abriu uma conta em Janeiro. Com que quantia?

1.2. Em que meses do ano a Renata não fez depósitos?

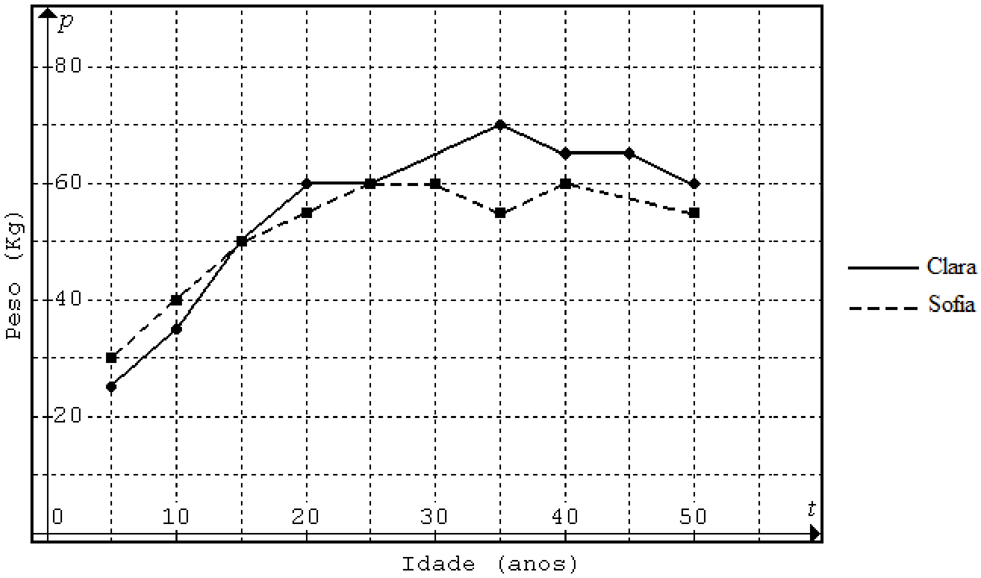
1.3. A Renata fez anos e recebeu 200€ que depositou de imediato na sua conta. Em que mês foi o aniversário da Renata?

1.4. Em que meses a Renata fez depósitos de 50€?

1.5. Em Setembro a Renata foi com a Rita às compras e precisou de levantar algum dinheiro. Quanto dinheiro levantou?

1.6. Quanto dinheiro a Renata depositou ao longo do ano, após o depósito inicial?

2. As representações gráficas seguintes mostram a evolução do peso de duas irmãs gémeas em função das suas idades, entre os 5 e os 50 anos.



2.1. Quanto pesava a Sofia aos 10 anos? E a Clara?

2.2. Com que idade a Clara atingiu os 60 kg?

2.3. Nalgum momento as duas irmãs tiveram o mesmo peso? Em caso afirmativo indica quando.

2.4. Qual foi o peso máximo que a Clara atingiu? Que idade tinha nessa altura?

2.5. Qual foi a maior diferença entre os pesos das irmãs? Que idade tinham nessa altura?

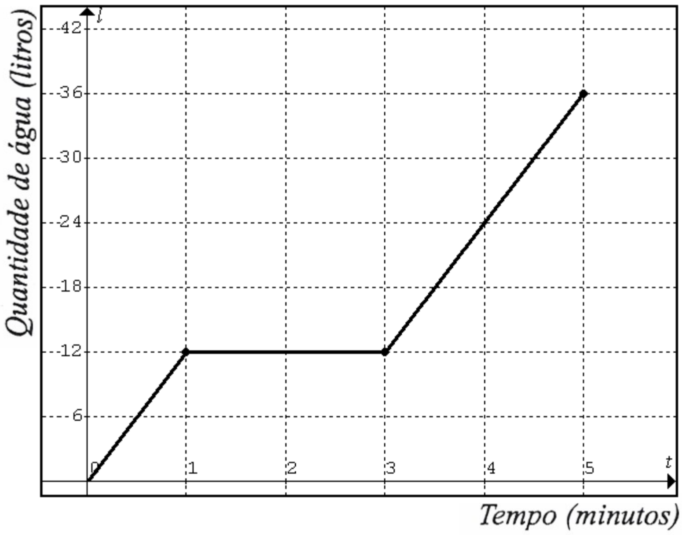
2.6. Entre que anos o peso da Sofia aumentou mais?

2.7. Houve algum período de tempo em que o peso das irmãs se manteve constante? Em caso afirmativo indica quando é que isso aconteceu.

2.8. Entre os 30 e os 50 anos qual foi o peso mínimo da Sofia? Com que idade a Sofia tinha esse peso?

2.9. Consideras que nalgum momento algumas das irmãs pode ter feito dieta para perder peso? Em caso afirmativo indica quando. Justifica a tua resposta.

Ontem à noite, o Nuno tomou um duche. A função *f* dá, para cada instante do duche, a quantidade de água, em litros, gasta até esse instante. Podes observar a representação gráfica de *f* na imagem seguinte.

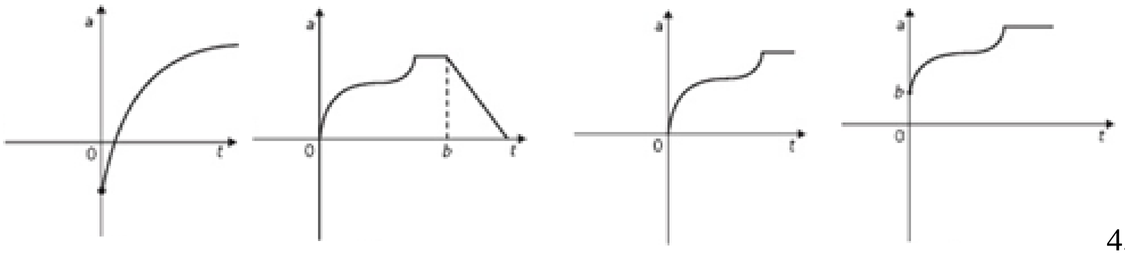


2.10. Calcula o valor de $f(5)-f(3)$ e explica o seu significado neste contexto.

2.11. Determina *t*, de modo que $f(t)=24$ e explica o seu significado.

2.12. Para poupar água, uma das medidas sugeridas aos consumidores é optarem por torneiras com caudal mais reduzido. (O caudal de uma torneira é o volume de água que sai dessa torneira, durante uma unidade de tempo. Pode ser medido, por exemplo, em litros por minuto.) Quantos litros de água teria poupado o Nuno neste duche se, sempre que a torneira do chuveiro estivesse aberta, o seu caudal fosse constante e igual a 9 litros por minuto? Justifica a tua resposta.

3. Considera o recipiente representado na figura e as representações gráficas I, II, III e IV.



I II III IV

4.

Qual das representações gráficas pode representar a variação da altura do líquido no recipiente em função do tempo, supondo que estava vazio no instante t=0 e que foi enchido com um caudal constante? Indica os motivos pelos quais rejeitaste cada uma das outras representações.

Anexo 22: Tarefa da entrevista para o tópico "Proporcionalidade inversa. Representações gráficas"

Tarefa 2 - Entrevista

1) Identifica em quais das situações seguintes há proporcionalidade entre as duas variáveis. Se existir, indica se esta é directa ou inversa.

   a) O lado de um quadrado e o seu perímetro.

   b) O número de trabalhadores que colaboram numa obra e o tempo necessário para a terminar.

   c) A quantidade de gasóleo abastecido e o preço total a pagar.

   d) A velocidade média de um carro e o tempo gasto num percurso com um comprimento fixo.

   e) O valor a pagar a uma banda de rock e o número de horas de trabalho dessa banda, sabendo que cobram uma taxa fixa de 200 euros acrescida de 100 euros por hora.

2. Considera a tabela seguinte:

X	2	3	4
Y	6		

a) Completa-a de forma que as grandezas x e y sejam directamente proporcionais. Justifica o teu raciocínio.

b) Qual é a constante de proporcionalidade?

c) Escreve a expressão algébrica que define a grandeza *y* em função de *x*.

c) Descreve a representação gráfica da função definida na tabela.

3. Considera a tabela seguinte:

X	2	3	4
Y	6		

a) Completa-a de forma que as grandezas x e y sejam inversamente proporcionais. Justifica o teu raciocínio.

b) Qual é a constante de proporcionalidade?

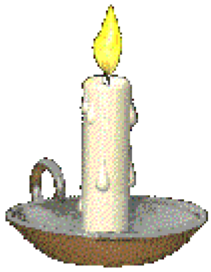
c) Escreve a expressão algébrica que define a grandeza *y* em função de *x*.

d) Descreve a representação gráfica da função definida na tabela.

4- Um criador tinha 600 coelhos e ração para sustentá-los durante 30 dias. Vendeu um certo número de animais de modo que a ração passou a dar para mais 10 dias. Quantos coelhos vendeu?

5. A Carlota acendeu uma vela e a cada quarto de hora mediu e registou a sua altura.

Altura (cm)	30	15	10
Tempo (min)	15	30	45



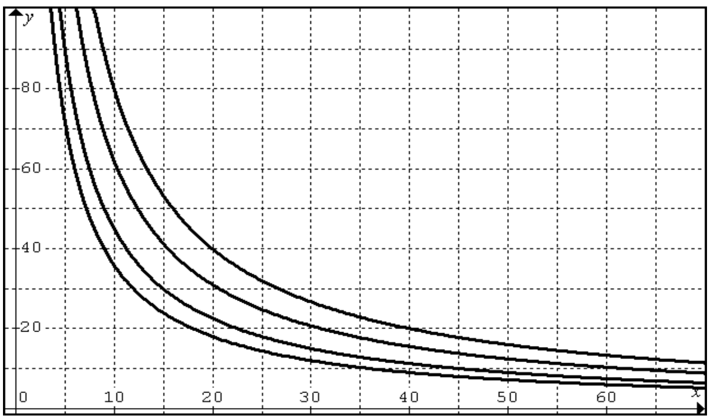
a) A manter-se a mesma relação entre a altura da vela e o tempo consideras que existe algum tipo de proporcionalidade nesta situação? Porquê?

b) Ao fim de uma hora meia qual é a altura da vela? Porquê?

c) Ao fim de quanto tempo da vela ter sido acesa o seu comprimento é inferior a 1 cm? Porquê?

d) Escreve uma expressão que relacione a altura da vela com o tempo.

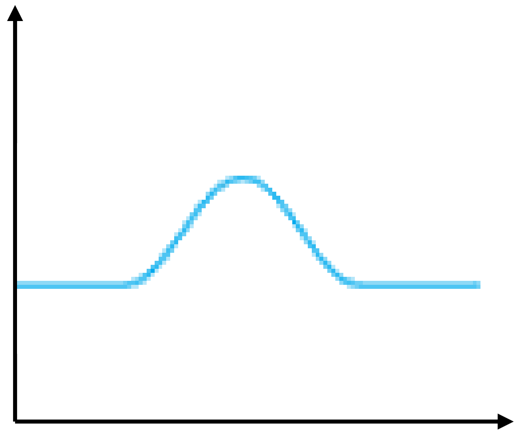
e) Dos gráficos representados no referencial cartesiano seguinte haverá algum que possa representar a relação entre a altura da vela e o tempo que esta demora a arder? Se sim, indica qual deles é justificando a tua resposta.

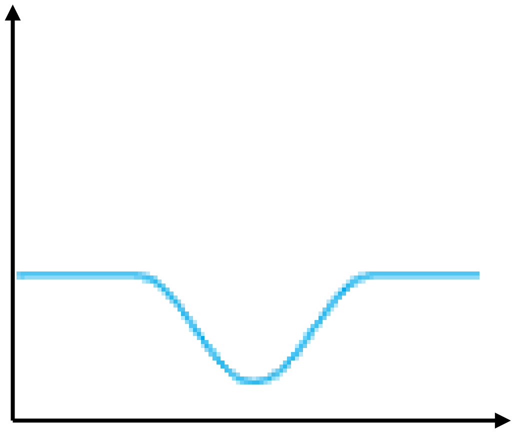


5. A Carla é uma atleta que treina na montanha. [6]

Hoje de manhã corria a uma velocidade constante num vale e, de seguida, surgiu um monte, o que a levou a correr a um ritmo mais lento. Depois de a Carla atingir o topo do monte, desceu-o muito rapidamente e ao chegar ao vale voltou ao local de partida.

Qual dos seguintes gráficos corresponde ao cenário apresentado? Justifica a tua resposta.





[6] Tarefa adaptada de Bassarear, T.(2008). *Mathematics for elementary school teachers*. , 4th Edition. Pacific Grove, CA: Brooks Cole.

Anexo 23: Planificação para o tópico 2Equações do 2.º grau a uma incógnita”

Tabela 4: Tarefas e objectivos para o estudo do tópico “Equações do 2.º grau a uma incógnita”

Tarefas	Objectivos	Recursos
A-3 (diagnóstico)	Determinar termos próximos, distantes e o termo geral de uma sequência em que expressão geradora é um polinómio do 2.º grau; Resolver equação do 2.º grau incompleta; Escrever expressão que envolve polinómio do 2.º grau; Resolver problemas que envolvem equações do 2.º grau incompletas; Verificar se algum número de um conjunto é ou não solução de uma equação do 2.º grau; Verificar se duas equações do 2.º grau são equivalentes; Resolver problema que envolve relação entre números; Completar espaços em branco: casos notáveis da multiplicação.	Material de escrita Projector Calculadora Ficha em suporte papel
B-3	Resolução de problema que envolve relações entre idades; Deduzir a fórmula da diferença de quadrados; Interpretar o significado da diferença de quadros e utilizá-la para calcular alguns produtos.	Material de escrita Folha de cálculo Projector Ficha em suporte papel
C-3	Utilizar a lei do anulamento do produto para resolver equações; Deduzir a fórmula do quadrado do binómio a partir de áreas; Utilizar o quadrado do binómio para calcular quadrados de números; Factorizar uma equação do 2.º grau completa;	Material de escrita Projector Calculadora Ficha em suporte papel

	Resolver equações de grau superior a 2 dada a sua decomposição em factores; Demonstrar que dada uma equação na forma $x^2 + bx + c = 0$, *-b* é a soma das raízes da equação e *c* é o produto das raízes. Escrever equação do 2.ºgrau na forma canónica dadas as suas raízes.	
D-3	Resolução de problema envolvendo função quadrática; Calcular zeros da função e interpretar o seu significado no contexto; Escrever equações equivalentes; Escrever uma composição; Fazer o esboço de parábolas.	Material de escrita Folha de cálculo Projector Ficha em suporte papel
E-3	Resolver problema que envolve função quadrática (sem raízes); Calcular imagens e interpretar o seu significado no contexto; Fazer o esboço do gráfico.	Material de escrita Folha de cálculo Projector Ficha em suporte papel
F-3	Resolver equações utilizando a fórmula resolvente; Identificar o número de soluções de uma equação do 2.º grau a partir do valor do binómio discriminante; Classificar equações;	Material de escrita Projector Calculadora Ficha em suporte papel
G-3	Resolver problemas em contextos variados (números, idades, geometria, velocidades)	Material de escrita Projector Calculadora Ficha em suporte papel

Anexo 24: Tarefa A-3 (Diagnóstico) do Tópico "Equações do 2.º grau a uma incógnita"

Escola E. B. 2,3 XXXXXXXXXX

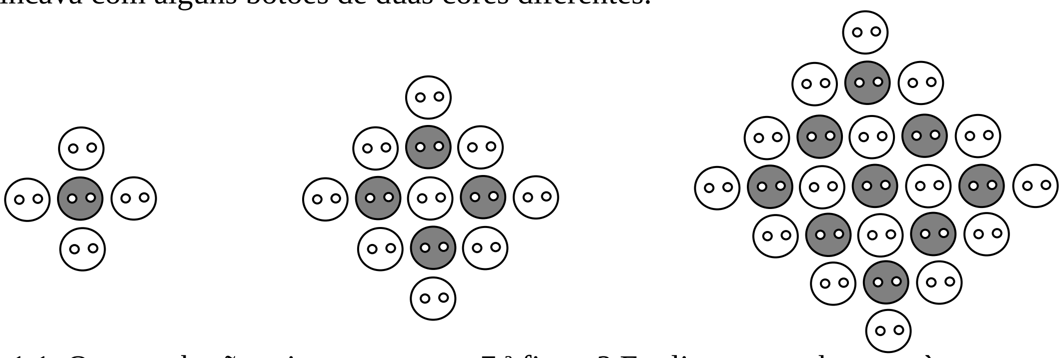
Ficha de Trabalho de Matemática – 9.º ano

Nome:____ Nº:____ Turma:____ Data: ____ / ____ / ____

<u>Tarefa A-3 (Diagnóstico)</u>

Lê atentamente todas as questões e apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efectuar e todas as justificações necessárias.

1. Abaixo estão representadas as três primeiras figuras que a Carolina construiu enquanto brincava com alguns botões de duas cores diferentes.



1.1. Quantos botões cinzentos tem a 7.ª figura? Explica como chegaste à tua resposta.

1.2. Quantos botões brancos tem a 8.ª figura? Explica como chegaste à tua resposta.

1.3. Será que alguma construção pode ter 145 botões no total? Explica como procedeste.

1.4. Quantos botões, no total, tem a construção de ordem *n*?

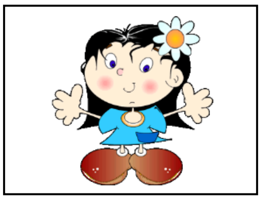
2. Um terno (x, y, z) diz-se pitagórico se $x^2 + y^2 = z^2$, sendo x, y e z números naturais. Por exemplo, (3, 4, 5) é um terno pitagórico porque $3^2 + 4^2 = 5^2$.

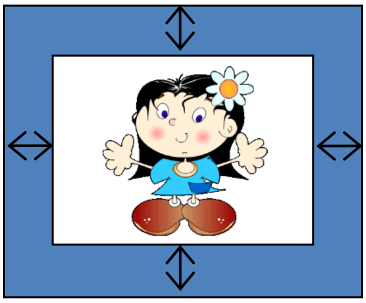
2.1. Será que algum dos seguintes ternos é um terno pitagórico? Justifica a tua resposta.

(A) (1, 2, 3) (B) (2, 3, 4) (C) (6, 8, 10) (D) (7, 9, 11)

2.2. Determina o valor de x de modo que $(8, 15, x)$ seja um terno pitagórico.

3. A Sofia tem uma moldura para colocar uma fotografia, como se mostra na figura abaixo:





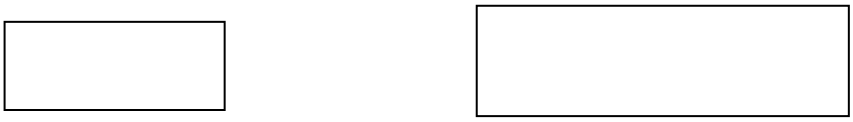
3.1. Escreve uma expressão simplificada para o perímetro da parte exterior da moldura.

3.2. Escreve uma expressão simplificada para a área da moldura (não inclui a fotografia).

3.3. A Sofia vai colar estrelinhas na moldura, uma estrelinha por cada 6 cm^2.

Considerando que a moldura tem 3 cm de largura, determina quantas estrelinhas vai a Sofia precisar.

4. Considera cada um dos seguintes rectângulos:



4.1. Determina x de modo que a área do rectângulo A seja 15.

4.2. Determina x de modo que a medida do comprimento da base do rectângulo A seja igual à medida do comprimento da base do rectângulo B.

5. Considera a equação: $x^2 + x - 2 = 0$ e o conjunto A={-2; 0; 1; 3}.

5.1. Identifica quais dos elementos do conjunto A são soluções da equação. Mostra como chegaste à tua resposta.

5.2. Qual das seguintes equações é equivalente à anterior? Justifica a tua resposta.

(A) $x(x+1) = -2$ (B) $(x+1)(x-1) - 2x = 0$ (C) $(x-1)(x+2) = 0$

6. Determina dois números pares consecutivos de modo que o seu produto seja 288. Explica como procedeste.

7. Completa os espaços em branco.

7.1. $(x + \_\_\_\_)^2 = \_\_\_\_ + 4x + 4$

7.2. $(\_\_\_\_ + 1)^2 = 9x^2 + 6x + \_\_\_\_$

7.3. $(5x - \_\_\_\_)^2 = \_\_\_\_ - \_\_\_\_ + 4$

7.4. $x^2 - \_\_\_\_ = (\_\_\_\_ + 4)(\_\_\_\_ - 4)$

Anexo 25: Tarefa B-3 (As idades dos irmãos) do Tópico “Equações do 2.º grau a uma incógnita”

Escola E. B. 2, 3 XXXXXXXXXX

Ficha de Trabalho de Matemática – 9.º ano

Nome:____ Nº:____ Turma:____ Data: ____ / ____ / ____

<u>Tarefa B-3: As idades dos irmãos</u>

Resolve o seguinte problema no Excel. Explica todo o teu raciocínio de forma clara, apresentando todas as justificações.

1. O Carlos, a Ana e o Ricardo são três irmãos. A Ana tem um ano a mais do que o Carlos e um ano a menos do que o Ricardo.

No outro dia a Ana estava a fazer operações com os números que correspondem às suas idades e disse para os irmãos:

- Comparei o produto das vossas idades com o quadrado da minha idade e descobri uma coisa muito interessante! Vejam se também conseguem descobrir!

1.1. O que poderá a Ana ter descoberto?

1.2. Explica algebricamente o que verificaste.

1.3. Explica como podes utilizar este resultado para calcular, facilmente, produtos como: 29×31, 79×81, 99×101, 999×1001, etc.

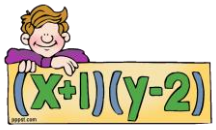
1.4. Considera agora que a Ana tem 5 anos de diferença dos irmãos, ou seja o Carlos tem menos 5 anos do que a Ana e o Ricardo tem mais 5 anos do que a Ana. Será que existe alguma relação entre o quadrado da idade da Ana e o produto das idades dos irmãos?

1.5. E se a Ana tiver k anos de diferença dos irmãos? Explica a tua resposta.

Anexo 26: Tarefa C-3 (Factorização) do Tópico "Equações do 2.º grau a uma incógnita"

Escola E. B. 2,3 XXXXXXXXXX

Ficha de Trabalho de Matemática – 9.º ano



Nome:____ Nº:____ Turma:____ Data: ____ / ____ / ____

Tarefa C-3 (Factorização)

Lê atentamente todas as questões e apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efectuar e todas as justificações necessárias.

1. Resolve cada uma das seguintes equações recorrendo à lei do anulamento do produto.

1.1. $x^2 - 9 = 0$

1.2. $16 - 4x^2 = 0$

1.3. $9x^2 - 64 = 0$

1.4. $(x+3)^2 - 25 = 0$

1.5. $1 - (x-2)^2 = 0$

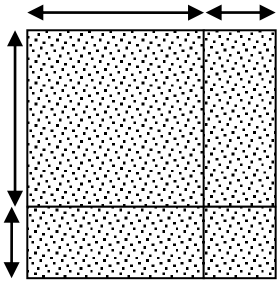
1.6. $(x+3)^2 - (2x-2)^2 = 0$

2. Cada figura está dividida em vários rectângulos. Obtém, para cada caso, a área da figura de duas formas diferentes:

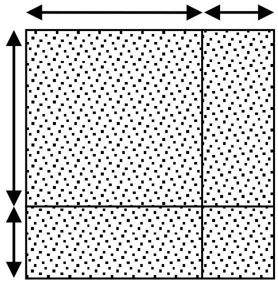
i) como um produto que represente a área da figura;

ii) como a soma das áreas dos rectângulos em que a figura está dividida (simplifica a expressão obtida).

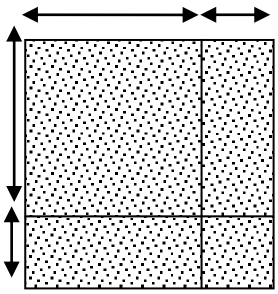
2.1.



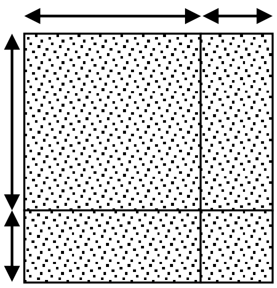
2.2.



2.3.



2.4.



3. Utiliza o resultado da questão anterior para calculares o valor de 87^2, 105^2 e 503^2.

4. Resolve as seguintes equações:

4.1. $x^2+6x+9=0$

4.2. $9x^2+24x+16=0$

5. Sabendo que a decomposição em factores do polinómio $x^4-x^3-19x^2-11x+30$ é $(x+3)(x+2)(x-1)(x-5)$ resolve a equação $x^4-x^3-19x^2-11x+30=0$.

6. Considera agora o polinómio x^4-5x^2+4 cuja decomposição é $(x^2-1)(x^2-4)$. Resolve a equação $x^4-5x^2+4=0$.

7. Considera a equação $(x-\alpha)(x-\beta)=0$

7.1. Resolve a equação.

7.2. Mostra que a equação do enunciado é equivalente à equação $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$.

7.3. Como interpretas o resultado obtido na alínea anterior?

7.4. Escreve uma equação do segundo grau, na forma canónica, que tenha como raízes:

7.4.1. os números 2 e 6;

7.4.2 os números -1 e 5;

7.4.3. os números -2 e -1.

Anexo 27: Tarefa D-3 (A bola saltitona) do Tópico "Equações do 2.º grau a uma incógnita"

Escola E. B. 2, 3 XXXXXXXXXX

Ficha de Trabalho de Matemática – 9.º ano

Nome:____ Nº:____ Turma:____ Data: ____ / ____ / ____

Tarefa D-3: A Bola saltitona

1. A Carlota atirou uma bola que embateu por diversas vezes no chão.

A bola a partir do momento que tocou no chão descreveu uma trajectória em que a sua altura, em cada instante *t*, é dada por uma função quadrática.

Na primeira vez, que tocou no chão, a altura *A* da bola é dada por $A(t) = -20t^2 + 160t$ (*A* em centímetros e *t* em segundos).

Na segunda vez, a altura *B* da bola é dada por $B(t) = -20t^2 + 120t$ (*B* em centímetros e *t* em segundos).

Na terceira vez, a altura *C* da bola é dada por $C(t) = -20t^2 + 80t$ (*C* em centímetros e *t* em segundos)

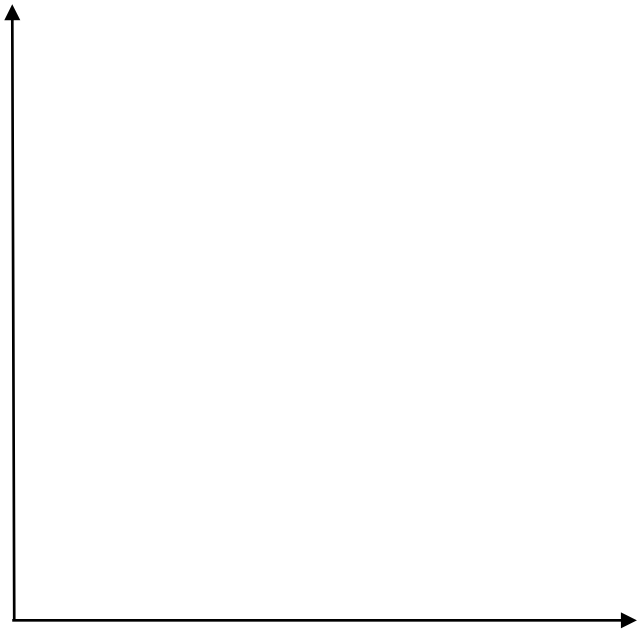
Na quarta vez, a altura *D* é dada por $D(t) = -20t^2 + 40t$ (*D* em centímetros e *t* em segundos).

Por fim, a bola rolou no chão e parou.

1.1. Simula na folha de cálculo esta situação, para a primeira vez que a bola embate no chão, construindo uma tabela, como a apresentada a seguir, e o respectivo gráfico.

Completa também a tabela abaixo e faz um esboço do gráfico que obtiveste na folha de cálculo.

Tempo	Altura



1.2. Qual é a altura máxima que a bola atingiu? Em que instante a bola atingiu essa altura?

1.3. Ao fim de quanto tempo a bola embateu de novo no chão? Justifica a tua resposta.

1.4. Indica para que valores de t se verifica a condição $A(t)=0$. Explica o seu significado no contexto do problema.

1.5. Indica para que valores de t se verifica a condição $A(t)=240$. Explica o significado desses valores no contexto do problema.

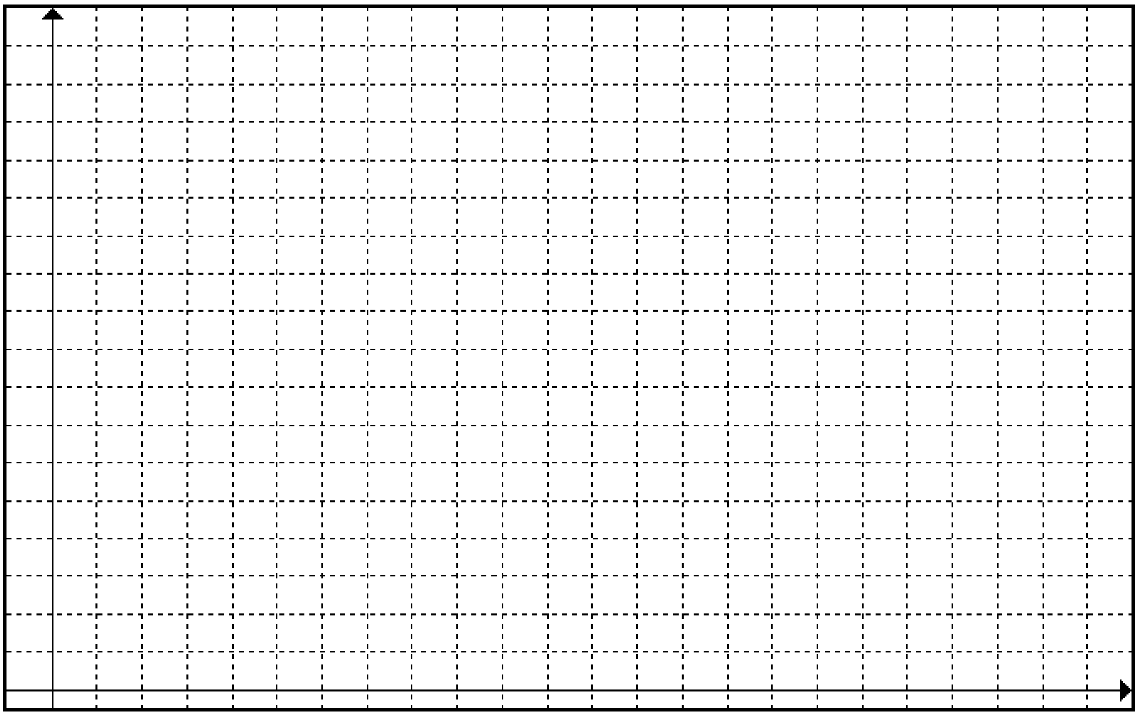
1.6.Verfica, algebricamente, que $A(t)-240=0$ é uma equação equivalente à equação $-20(t-2)(t-6)=0$.

1.7. Escreve uma equação equivalente a $A(t)-140=0$. Explica como procedeste.

1.8. À semelhança da alínea 1.1., simula na folha de cálculo cada uma das outras três trajectórias, construindo uma tabela e um gráfico para cada caso.

Escreve uma composição onde descrevas o que aconteceu enquanto a bola esteve a saltar.

1.9. No seguinte referencial faz um esboço da representação gráfica da função que dá altura da bola a cada instante, a partir do momento em que a bola toca o chão pela primeira vez e incluindo os quatros saltos.



Anexo 28: Tarefa E-3 (A experiência no laboratório) do Tópico "Equações do 2.º grau a uma incógnita"

Escola E. B. 2, 3 XXXXXXXXXX

Ficha de Trabalho de Matemática – 9.º ano

Nome:____ Nº:____ Turma:____ Data: ____ / ____ / ____

Tarefa E-3: A experiência no laboratório

Simula a seguinte experiência na folha de cálculo. Explica todo o teu raciocínio de forma clara, apresentando todas as justificações.

1. Na realização de uma experiência num laboratório, desenvolvida ao longo de 6 horas, mediu-se a temperatura de uma substância hora após hora e viu-se que é dada por $T(h) = h^2 - 6h + 11$, com T em graus centigrados e h em horas.

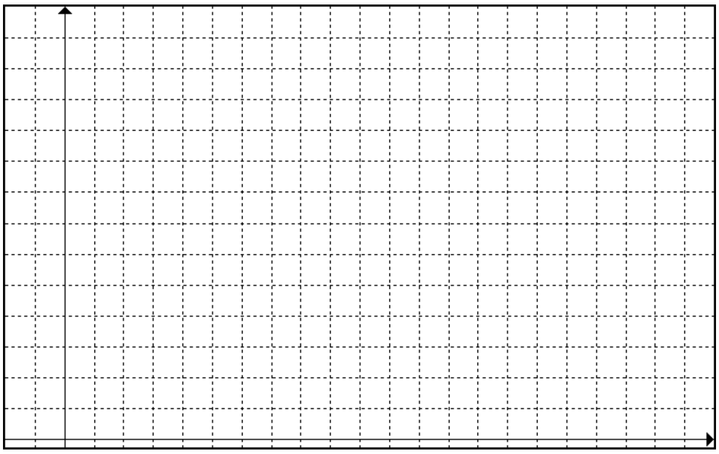
1.1. Qual era a temperatura a que se encontrava a substância no início da experiência?

1.2. Qual era a temperatura no instante em que terminou a da experiência?

1.3. Determina $T(5) - T(4)$ e interpreta o resultado no contexto da situação.

1.4. Nalgum momento a temperatura da substância foi de 0 graus centígrados? Justifica a tua resposta.

1.5 Faz um esboço do gráfico da função T, considerando $0 \leq h \leq 6$.



Anexo 29: Tarefa F-3 (Fórmula resolvente) do Tópico "Equações do 2.º grau a uma incógnita"

Escola E. B. 2,3 XXXXXXXXXX **Ficha de Trabalho de Matemática – 9.º ano**	
Nome:_______________________________________ Nº:____ Turma:____ Data: ____ / ____ / ____	

<u>Tarefa F-3: (Fórmula resolvente)</u> [7]

1. Resolve cada uma das seguintes equações do 2.º grau, aplicando a fórmula resolvente. Preenche a tabela ao lado

1.1. $x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$	

1.2. $-x^2 = 8 - 6x$

$\Delta = b^2 - 4ac$	

[7] A questão 3 foi retirada de NCTM (1994). Normas profissionais para o ensino da Matemática. Lisboa: APM e IIE (obra original em inglês, publicada em 1991)

1.3. $7x - 1 = 9x^2 - x$

$\Delta = b^2 - 4ac$	

1.4. $2\left(x^2 + 25\right) = -19x$

$\Delta = b^2 - 4ac$	

1.5. $\frac{3}{4}x^2 - 2x = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$	

1.6. $3x+5=-\dfrac{2}{x}$

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\Delta = b^2 - 4ac$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

2. Determina o valor de *k* de modo que a equação:

2.1. $x^2+(5-k)x+3=0$ seja incompleta;

2.2. $x^2+3x+5-k=0$ tenha duas soluções;

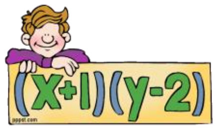
2.3. $kx^2-x+9=0$ tenha uma única solução.

3. Descobre todos os valores de x para os quais $\left(x^2-5x+5\right)^{x^2-9x+20}=1$. Explica todos os teus procedimentos.

Anexo 30: Tarefa G-3 do Tópico "Equações do 2.º grau a uma incógnita"

Escola E. B. 2,3 XXXXXXXXXX

Ficha de Trabalho de Matemática – 9.º ano



Nome:____ Nº:____ Turma:____ Data: ____ / ____ / ____

<u>Tarefa G</u>

Resolve cada um dos seguintes problemas e justifica todos os teus procedimentos.

1. Se ao quadrado da idade da Joana adicionarmos o triplo da sua idade e, de seguida, subtrairmos 30 anos, obtemos o dobro da sua idade. Quantos anos tem a Joana?

2. Qual é a idade da Rita se há 3 anos o quadrado da sua idade era igual ao quíntuplo da idade que terá daqui a sete anos?

3. Um terreno rectangular tem $875\,m^2$ de área. Se a largura mede menos 10 metros que o comprimento, quais as dimensões do terreno?

4. O Diogo vai na sua bicicleta para a escola a uma velocidade de x km/h e demora $x+15$ minutos a chegar lá. Sabendo que o Diogo vive a 5,4 km da escola determina quantos minutos demora na sua viagem.

5. Determina dois números ímpares consecutivos cujo produto é 2915.

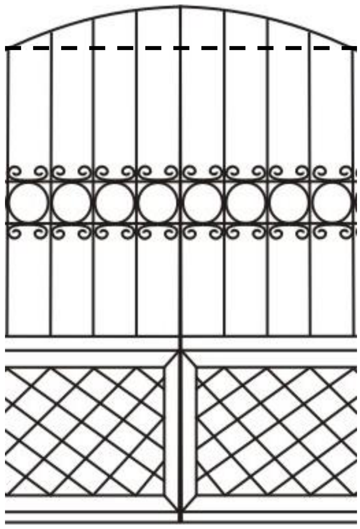
6. A soma dos quadrados de três números pares consecutivos é 596. Quais são os números?

7. O número de diagonais de um polígono convexo é dado pela expressão $\frac{n(n-3)}{2}$, onde n representa o número de lados do polígono.

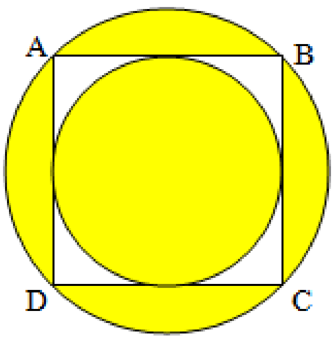
7.1. Sabendo que o número de diagonais de um polígono convexo é 35, determina quantos lados tem o polígono.

7.2. Será possível construir um polígono convexo com 45 diagonais? Justifica a tua resposta.

8. Na figura está representado um portão de um terreno. Sabe-se que AB é um arco de circunferência de centro em D e raio 5 m, que C é o ponto médio de [AB], $\overline{AB} = 6m$ e $\overline{FC} = 6{,}5m$. Determina $\overline{FE}$.



9. Observa a figura onde os dois círculos são concêntricos e [ABCD] é um quadrado inscrito no círculo de maior raio. Sabendo que a área do círculo maior é $100\pi\ m^2$ e que a área do quadrado é $200\,m^2$, determina a área da parte colorida.



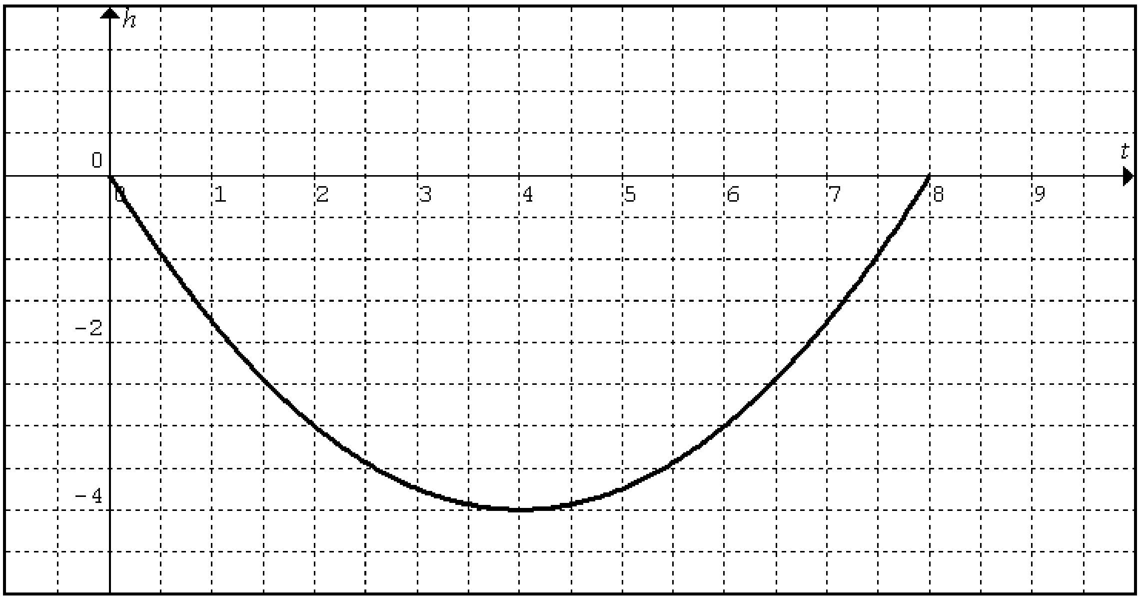
10. O Sr. Joaquim e um grupo de amigos dividem entre si um prémio do Euro milhões de 4800 euros. Sabendo que se o Sr. Joaquim tivesse jogado com menos 6 amigos cada amigo receberia 40 euros a mais determina com quantos amigos o Sr. Joaquim jogou.

Anexo 31: Tarefa da entrevista para o tópico "Equações do 2.º grau a uma incógnita"

<u>Tarefa 3</u>

O mergulho do golfinho

1. A representação gráfica seguinte corresponde a uma função quadrática *h*. Esta função relaciona o tempo (em segundos) e a distância (em metros) à superfície da água de um golfinho durante um mergulho.



a) Quanto tempo demorou o golfinho no mergulho?

b) Qual foi a profundidade máxima que o golfinho atingiu?

c) Determina *t* de modo h(*t*)= -3. Explica como procedeste.

d) Das expressões algébricas seguintes selecciona a que corresponde a $h(t)$. Justifica a tua escolha.

(A) $h(t) = \frac{1}{4}t^2 - 2t$

(B) $h(t) = -8t^2 + 4t$

(C) $h(t) = 4t^2 - 8t$

(D) $h(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 2t$

<u>Festival do Marisco</u>

2. Numa noite, no festival do marisco em Olhão foram lançados vários foguetes. Admite que a altitude a cada instante de um desses foguetes, após o seu lançamento, é dada por $f(t) = -2{,}5t^2 + 30t$.(*f* em metros e *t* em segundos).

a) Qual era a altitude do foguete dois segundos após o seu lançamento?

b) Após o lançamento ao fim de quanto tempo o foguete caiu no chão?

c) Consegues determinar qual foi a altitude máxima atingida pelo foguete? Em caso afirmativo indica qual é explicando como procedeste.

d) Resolve algebricamente $f(t) = 50$ e explica o seu significado no contexto do problema.

e) Faz um esboço da representação gráfica da função *f*.

Mais equações!

3. Resolve cada uma das equações seguintes pelo processo que te pareça mais conveniente. Faz também um esboço da representação gráfica correspondente a cada equação.

a) $2x^2 = 50$

b) $-x^2 - 1 = 0$

c) $x^2 = -\dfrac{5x}{2}$

4. Escreve uma equação do 2º grau, que tenha como soluções: -1 e 2. Explica como procedeste.

5. A hipotenusa de um triângulo rectângulo mede 10 cm. Sabendo que um dos catetos tem menos 2 *cm* de comprimento que o outro, determina quanto mede cada um dos catetos.

Anexo 32: Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas (Gabriela)

Tabela 7.1 – Distribuição das representações e métodos utilizados por Gabriela no estudo do tópico Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas (%)

Tarefas (Lápis e papel / folha de cálculo)				A-1		B-1		C-1		D-1		E-1		F-1		G-1		H-1		Ent. 1		Métodos
				P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	
Representações com lápis e papel	Linguagem natural		Dados do enunciado	0	55,5					0	40	0	25			0	56,25	0	71,43	0	53,33	MI
			Identificação de incógnitas	0						0		0				6,25		0		20		
			Explicação de procedimentos	36,1						20		0				18,75		28,57		0		
			Resposta	19,4						20		25				31,25		42,86		33,33		
	Sistemas de notação	Numérico	Cálculos por substituição	15,3	23,7					20	35	0	6,25			9,375	9,375	0	0	6,67	6,67	
			Cálculos por operações inversas	2,8						15		0				0		0		0		MT
			Outros	5,6						0		6,25				0		0		0		MI
		Algébrico	Escrita de expressões algébricas	8,3	18					0	15	0	0			0	31,25	0	28,57	0	33,34	MF
			Simplificação de expressões	6,9						0		0				0		0		0		
			Recurso a fórmulas	1,4						0		0				0		0		0		
			Escrita de equações do 1.º grau	0						15		0				0		0		0		
			Resolução de équa. do 1.º grau	1,4						0		0				0		0		0		
			Escrita de sistemas de eq.	0						0		0				12,5		0		20		
			Resolução de sistema de eq.	0						0		0				15,625		0		6,67		
			Outros	0						15		0				3,125		28,57		6,67		
	Pictóricas			2,8	2,8					10	10	0	0			0	0	0	0	0	0	MI
	Gráficas			0	0					0		0	0			3,125	3,125	0	0	6,67	6,67	MF
Representações na folha de cálculo	Linguagem natural		Dados do enunciado			0	25	14,3	57,2			0	25	14,3	42,9							MIFC
			Nomeação de colunas			25		14,3				18,75		14,3								
			Explicação de procedimentos			0		14,3				0		0								
			Resposta			0		14,3				6,25		14,3								
	Registo numérico	Sequências	Com incremento constante			25	50	14,3	14,3			18,75	18,75	14,3	28,6							MTFC
			Com incremento nulo			25		0				0		14,3								
	Registo de fórmulas		Variável célula			0	25	0	14,3			0	0	0	14,3							
			Variável coluna			25		14,3				0		14,3								

	Gráficos	Gráfico de dispersão		0	0	0	0		18,75	18,75	0	0				
	Form. cond. /Realçar células	Identificar a resposta		0	0	14,3	14,3		6,25	6,25	14,3	14,3				MIFC

Quadros de análise – Gabriela - Sistemas de duas equações a duas incógnitas

Legenda: P- Problema; Ex- Exercício; Ep- Exploração; TI- Tarefa de investigação; SNA-Sistema de Notação Algébrico; SNN-Sistema de Notação Numérico; LN-Linguagem Natural; R-resposta; Exp-Explicação; cps-cálculos por substituição; op inv- operações inversas.

Tarefa A1									
	Papel e lápis				Transformações das representações			Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica				
1		x			Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamento (SNN)		LN (R+Exp)	
					Interpretação (equação 1º grau) + Interpretação (exp. algébrica 1º grau)				
2		x			Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamento (SNN)		LN (R+Exp)	
					Interpretação (equação 1º grau) + Interpretação (exp. algébrica 1º grau)				
3		x			Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamento (SNN) op inv		LN (Exp)	
					Interpretação (equação 1º grau) + Interpretação (exp. algébrica 1º grau)				
4			x		Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamento (SNN)		LN (R+Exp)	
					Interpretação (exp. algébrica 1º grau)				
5			x		Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamento (SNN)		LN (R+Exp)	
					Interpretação (equação 1º grau)				
6			x		Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamento (SNN)		LN (R+Exp)	
					Interpretação (equação 1º grau)				
7		x			Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamento (SNN)		LN (R+Exp)	
					Interpretação (exp. algébrica 1º grau)				
8.1		x				Tratamento (SNA) (simplif exp. algébrica 1º grau)		LN (Exp)	
					Interpretação (exp. algébrica 1º grau e sua simplificação)	Atividade de transformação			
8.2		x						LN (Exp)	
					Interpretação (exp. algébrica 1º grau e sua simplificação)				
8.3		x						LN (Exp)	
					Interpretação (exp. algébrica 1º grau e sua simplificação)				
8.4		x						LN (Exp)	
					Interpretação (exp. algébrica 1º grau e sua simplificação)				
8.5		x				Tratamento (SNA) (simplif exp. algébrica 1.º grau)		LN (Exp)	Desembaraçar parênteses
					Interpretação (exp. algébrica 1º grau e sua simplificação)	Atividade de transformação			

8.6		x				Tratamento (SNA) (simplif exp. algébrica 1.º grau)		LN (Exp)	
					Interpretação (exp. algébrica 1º grau e sua simplificação)	Atividade de transformação			
9.1			x					LN (R+Exp)	
					Interpretação (equação 1º grau)				
9.2			x					LN (R+Exp)	
					Interpretação (equação 1º grau)				
9.3			x					LN (R+Exp)	
					Interpretação (equação 1º grau)				
10		x			Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamento (SNN)		LN (R+Exp)	
					Interpretação (equação 1º grau e sua solução)				
11		x			Conversão (Figura-SNA) recurso formula área triangulo	Tratamento SNA (simplif exp. algébrica grau 1)			
					Atividade de geração	Atividade de transformação			
12.1		x			Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamento (SNN)	Tratamento (SNA) (Resolução equação 1.º grau)	LN (R+Exp)	Resolução equação do tipo ax=b
					Interpretação (equação 1º grau e sua solução)		Atividade de transformação		
12.2		x			Não resolveu (-x=4)				
12.3		x			Não resolveu (equação com denominadores)				
12.4		x			Não resolveu (equação com parênteses e denominadores)				
13.1		x			Conversão (Figura-SNA) escrita perímetro	Tratamento SNA (simplif exp. algébrica grau 1)			
					Atividade de geração	Atividade de transformação			
13.2		x			Conversão (Figura-SNA) escrita perímetro	Tratamento SNA (simplif exp. algébrica grau 1)		LN (Exp)	
					Atividade de geração				
14.1		x			Tratamento (Rep. Pictorica)	Tratamento (SNN)		LN (R+Exp)	
								Rep. Pictórica	
14.2		x			Tratamento (Rep. Pictorica)			LN (R)	
								Rep. Pictórica	
14.3	x				Conversão (Rep. Pictórica-SNA) escrita exp. geral	Tratamentos (SNN)		LN (Exp)	
					Atividade de geração				
14.4	x				Conversão (Rep. Pictórica-SNA) escrita exp. geral			LN (Exp)	
					Atividade de geração				
14.5	x				Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamentos (SNN) op inv		LN (Exp)	

15.1	x					Tratamentos (SNN)			
15.2	x					Tratamentos (SNN)		LN (Exp)	
15.3		x			Conversão (SNN-SNA) escrita de exp. algébrica 1.º grau			LN (Exp)	
					Atividade de geração				
15.4		x			Não resolveu				
15.5		x						LN (R+Exp)	

Tarefa B1													
	Papel e lápis				Folha cálculo				Transformações das representações			Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica				
1					x				Conversão (LN-Tab FC)	Tratamentos (seq. numéricas)	Tratamentos (var. coluna) estabelecimento de relações		Escrita equação duas variáveis (discussão/síntese)
										Construção das variáveis	Atividade de geração	Resolução incompleta	

Tarefa C1													
	Papel e lápis				Folha cálculo				Transformações das representações			Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica				
1					x				Conversão (LN-Tab FC)	Tratamentos (seq. numéricas)	Tratamentos (var. coluna) estabelecimento de relações	Formatação	Noção e escrita de sistema de equações (discussão/síntese)
										Construção das variáveis	Atividade de geração	Identificação da solução	

Tarefa D1									
	Papel e lápis				Transformações das representações			Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica				
1	x				Conversão (Rep. Pictorica-SNA) escrita de equação 1.º grau Atividade de geração	Conversão (Rep. Pictorica-SNN)	Tratamento (SNN) op. Inv + cps	LN (R+Exp)	escrita de equação 1.º grau
2	x				Conversão (Rep. Pictorica-SNA) escrita de equação 1.º grau Atividade de geração	Conversão (Rep. Pictorica-SNN)	Tratamento (SNN) op. Inv + cps	LN (R+Exp) Rodeia grupo animais	escrita de equação 1.º grau
3	x				Conversão (Rep. Pictorica-SNA) escrita de equação 1.º grau Atividade de geração	Conversão (Rep. Pictorica-SNN)	Tratamento (SNN) op. Inv + cps	LN (R+Exp) Rodeia grupo animais	escrita de equação 1.º grau
4	x				Conversão (Rep. Pictorica-SNN)		Tratamento (SNN) cps	LN (R+Exp)	

Tarefa E1													
	Papel e lápis				Folha cálculo				Transformações das representações			Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica				
1.1					x				Conversão (LN-Tab FC)	Tratamentos (seq. numéricas) Construção das variáveis		Formatação Identificação	
1.2						X			Conversão (Tab FC - Rep. Gráfica FC) Construção gráfico na folha de cálculo				
1.3			x						LN.(R)				
1.4		x							Tratamento (SNN)	LN.(R)			
1.5					x				Conversão (LN-Tab FC)	Tratamentos (seq. numéricas) Construção das variáveis	Conversão (Tab FC - Rep. Gráfica FC) Construção gráfico na folha de cálculo	LN.(R) Papel e lápis	Escrita de sistema de equações para cada uma das situações Classificação sistemas (discussão/síntese)
1.6					x				Conversão (LN-Tab FC)	Tratamentos (seq. numéricas) Construção das variáveis	Conversão (Tab FC - Rep. Gráfica FC) Construção gráfico na folha de cálculo	LN.(R) Papel e lápis	

Anexo 32

Tarefa F1													
	Papel e lápis				Folha cálculo				Transformações das representações			Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica				
1					x				Conversão (LN-Tab FC)	Tratamentos (seq. numéricas)	Tratamentos (var. coluna) estabelecimento de relações	Formatação	Formalização do método de substituição
										Construção das variáveis	Atividade de geração	Identificação da solução	

Tarefa G1									
	Papel e lápis				Transformações das representações			Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica				
1	X				Conversão (LN-SNA) escrita sistema de duas equações	Tratamento (SNA) resolução do sistema	Conversão (SNA-SNN) cps	LN identificação incógnitas	Método substituição
					Atividade de geração	Atividade de transformação	Verificação da solução		
2	X				LN.(R)	Conversão (LN-SNA) escrita sistema de duas equações			
						Atividade de geração			
3	X				Conversão (LN-SNA) escrita sistema de duas equações	Tratamento (SNA) resolução do sistema		LN identificação incógnitas	Método substituição
					Atividade de geração	Atividade de transformação			
4.1		x			Conversão (Figura-SNA) escrita sistema de equações	Tratamento (SNA) resolução do sistema			Método substituição
					Atividade de geração	Atividade de transformação			
4.2		x			Tratamento (SNA) escrita das equações do sistema em ordem a y	Conversão (SNA-SNN) cps construção tabela	Conversão (SNN-Rep. Gráfica)		Método gráfico
					Atividade de transformação				
5.1		x			Tratamento (SNA) resolução do sistema				Método substituição
					Atividade de transformação				
5.2		x			Tratamento (SNA) resolução do sistema				Método substituição
					Atividade de transformação				
6.1		x			Tratamento (SNA) escrita sistema forma canónica				Escrever forma canónica
					Atividade de transformação				
6.2		x			Conversão (SNA-SNN) cps				
					Verificação solução sistema				
7.1		x			LN (R+Exp)				

Tipo	P	Ex	Ep	TI					
					Classificação sistema dadas as equações				
7.2		X			LN.(R)				
					Classificação sistema dadas as equações				
7.3		X			LN.(R)				
					Classificação sistema dadas as equações				
8.1		X			LN (R+Exp)				
					Classificação sistema dadas a rep. gráfica				
8.2		X			LN (R+Exp)				
					Classificação sistema dadas a rep. gráfica				
8.3		X			LN (R+Exp)				
					Classificação sistema dadas a rep. gráfica				
8.4		X			LN (R+Exp)				
					Classificação sistema dadas a rep. gráfica				
9	X				LN.(R)				
					Escrever enunciado problema				

Tarefa H1									
	Papel e lápis				Transformações das representações			Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica				
1.1				X	Tratamentos SNA (substituição parâmetro)	LN.(R+Exp)	Conversão (SNA-SNN) cps	Representação gráfica, declive das retas	
					Atividade de transformação		Verificação da solução		
1.2				X	LN.(R+ Exp)				
1.3				X	Tratamentos SNA (substituição parâmetro)	LN.(R)			
					Atividade de transformação				

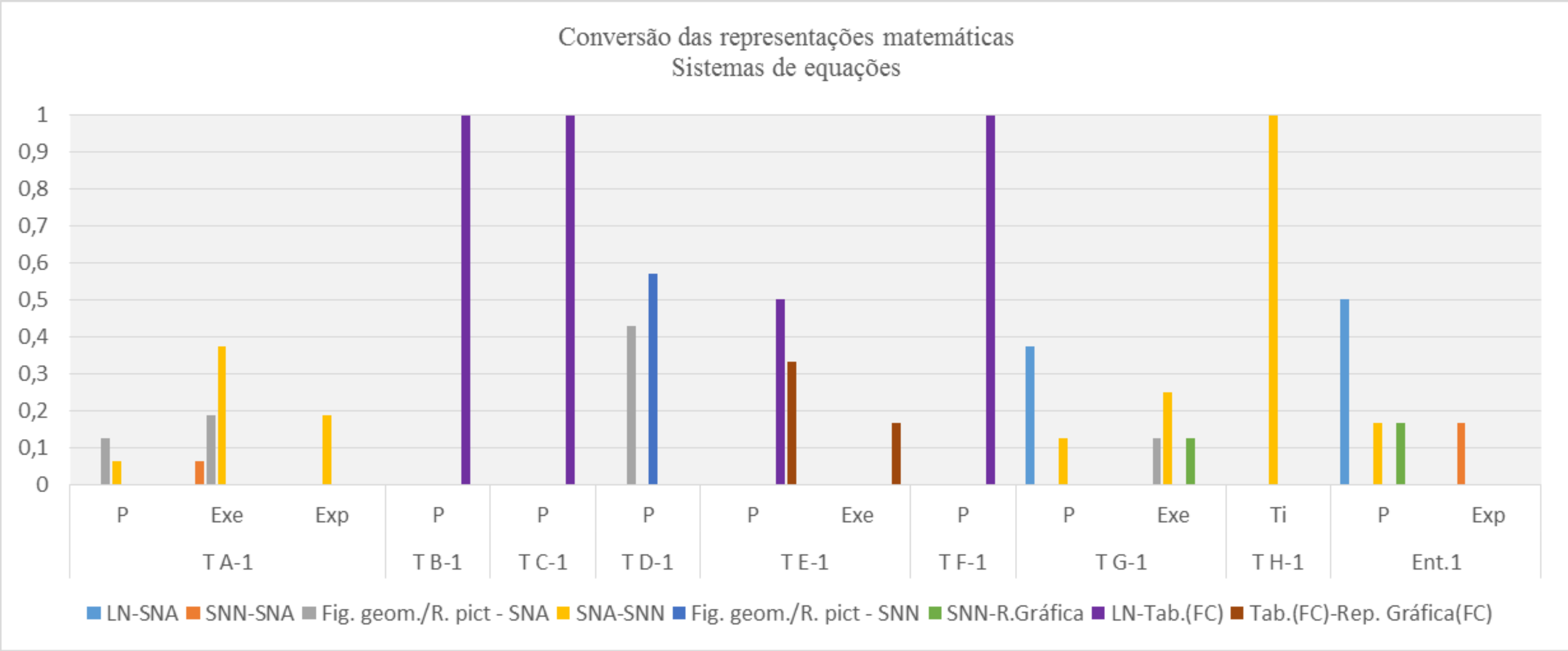
Anexo 32

Entrevista 1										
	Papel e lápis				Transformações das representações				Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica					
1	x				Conversão (LN-SNA) escrita sistema de duas equações	Tratamento (SNA) resolução do sistema			LN (Identificação incógnitas)	Método substituição
					Atividade de geração	Atividade de transformação			LN (Exp)	
2	x				Conversão (LN-SNA) escrita sistema de duas equações a partir das equações	Tratamento (SNA) escrita das equações do sistema em ordem a y	Conversão (SNA-SNN) cps construção tabela	Conversão (SNN-Rep. Gráfica)		Método gráfico
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
3.1		x			LN (R+Exp)					
					Classificação sistema dadas a rep. gráfica					
3.2		x			LN (R+Exp)					
					Classificação sistema dadas a rep. gráfica					
3.3		x			LN (R+Exp)					
					Classificação sistema dadas a rep. gráfica					
4			x		Conversão (SNN Ideia-SNA) escrita de sistema a partir de solução					
					Atividade de geração					
5	x				LN.(R)	Conversão (LN-SNA) escrita sistema de duas equações				
					Escrita de enunciado problema dada a solução do sistema	Atividade de geração				

Súmula das conversões das representações matemáticas- Sistemas de equações (freq. relativa)

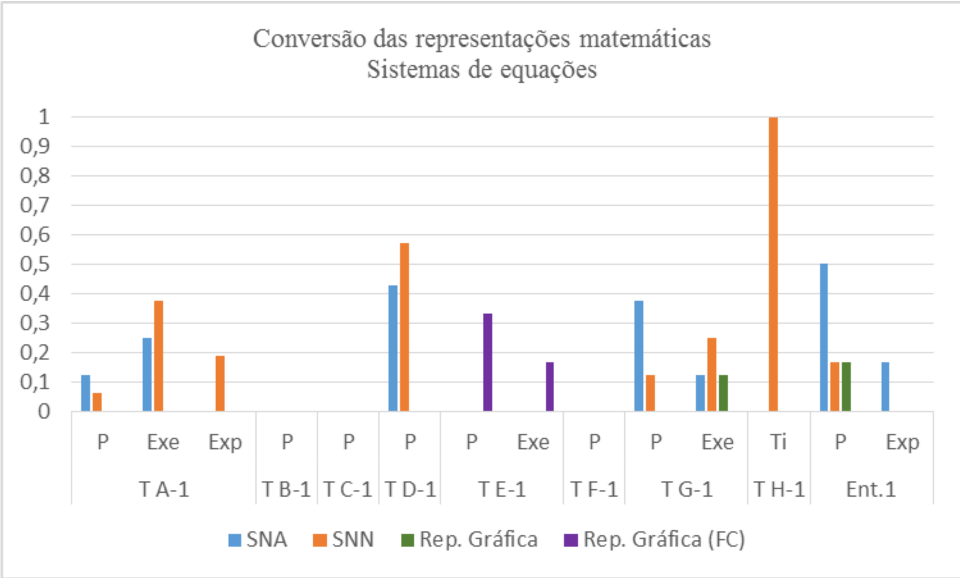
		Conversões das representações matemáticas							
		LN-SNA	SNN-SNA	Fig. geom./R. pict - SNA	SNA-SNN	Fig. geom./R. pict - SNN	SNN-R.Gráfica	LN-Tab.(FC)	Tab.(FC)-Rep. Gráfica(FC)
T A-1	P	0	0	0,125	0,0625	0	0	0	0
	Exe	0	0,0625	0,1875	0,375	0	0	0	0
	Exp	0	0	0	0,1875	0	0	0	0
T B-1	P	0	0	0	0	0	0	1	0
T C-1	P	0	0	0	0	0	0	1	0
T D-1	P	0	0	0,429	0	0,5714	0	0	0
T E-1	P	0	0	0	0	0	0	0,5	0,333
	Exe	0	0	0	0	0	0	0	0,167
T F-1	P	0	0	0	0	0	0	1	0
T G-1	P	0,375	0	0	0,125	0	0	0	0
	Exe	0	0	0,125	0,25	0	0,125	0	0
T H-1	Ti	0	0	0	1	0	0	0	0
Ent.1	P	0,5	0	0	0,167	0	0,167	0	0
	Exp	0	0,167	0	0	0	0	0	0

Anexo 32



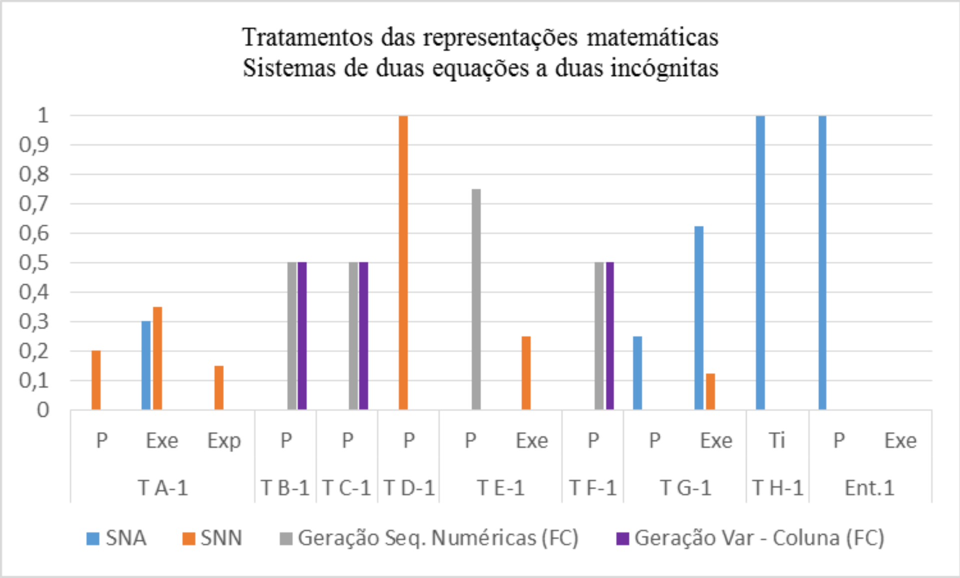
Conversão das representações matemáticas
Sistemas de equações
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
P
Exe
Exp
P
P
P
P
Exe
P
P
Exe
Ti
P
Exp
T A-1
T B-1
T C-1
T D-1
T E-1
T F-1
T G-1
T H-1
Ent.1
LN-SNA
SNN-SNA
Fig. geom./R. pict - SNA
SNA-SNN
Fig. geom./R. pict - SNN
SNN-R.Gráfica
LN-Tab.(FC)
Tab.(FC)-Rep. Gráfica(FC)

Conversão das representações matemáticas					
		SNA	SNN	Rep. Gráfica (PL)	Rep. Gráfica (FC)
T A-1	P	0,125	0,0625	0	0
	Exe	0,25	0,375	0	0
	Exp	0	0,1875	0	0
T B-1	P	0	0	0	0
T C-1	P	0	0	0	0
T D-1	P	0,429	0,571	0	0
T E-1	P	0	0	0	0,333
	Exe	0	0	0	0,167
T F-1	P	0	0	0	0
T G-1	P	0,375	0,125	0	0
	Exe	0,125	0,25	0,125	0
T H-1	Ti	0	1	0	0
Ent.1	P	0,5	0,167	0,167	0
	Exp	0,167	0	0	0



Anexo 32

Tratamentos das representações matemáticas					
		SNA	SN0N	Geração Seq. Numéricas (FC)	Geração Var - Coluna (FC)
T A-1	P	0	0,2	0	0
	Exe	0,3	0,35	0	0
	Exp	0	0,15	0	0
T B-1	P	0	0	0,5	0,5
T C-1	P	0	0	0,5	0,5
T D-1	P	0	1	0	0
T E-1	P	0	0	0,75	0
	Exe	0	0,25	0	0
T F-1	P	0	0	0,5	0,5
T G-1	P	0,25	0	0	0
	Exe	0,625	0,125	0	0
T H-1	Ti	1	0	0	0
Ent.1	P	1	0	0	0
	Exe	0	0	0	0



Anexo 33: Proporcionalidade Inversa. Representações gráficas (Gabriela)

Tabela 7.2 - Distribuição das representações e métodos utilizados por Gabriela no estudo do tópico Proporcionalidade Inversa. Representações gráficas (%)

Tarefas (Lápis e papel / folha de cálculo)				A-2		B-2		C-2		D-2		E-2		Ent. 2		Métodos
				P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	
Representações com lápis e papel	Linguagem natural		Dados do enunciado	22,58	74,19	0	23,81	0	11,11	0	38,89	0	72,73	0	62,51	MI
			Identificação de incógnitas	16,13		0		0		0		0		9,38		
			Explicação de procedimentos	6,45		0		0		0		0		0		
			Resposta	29,03		23,81		11,11		38,89		72,73		53,13		
			Outros	0		0	0	0	0	0	0	0	0	6,25	6,25	
	Sistemas de notação	Numérico	Cálculos por substituição	0	19,35	0	4,76	0	11,11	16,67	33,34	0	0	0	18,75	
			Cálculos por operações inversas	6,45		0		0		0		4,55		0		MT
			Outros	12,9		4,76		11,11		16,67		22,73		18,75		MI
		Algébrico	Escrita de expressões algébricas	0	3,23	4,26	9,52	0	11,11	0	27,78	0	27,28	0	9,38	MF
			Escrita de exp alg. Prop. Inversa	0		4,26		11,11		16,67		0		9,38		
			Recurso a fórmulas	0		0		0		11,11		0		0		
			Resolução de equações do 1.º grau	3,23		0		0		0		0		0		
			Outros	0		0		0		0		0		0		
	Pictóricas			3,23	3,23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	MI
	Gráficas			0	0	9,52	952	11,11	11,11	0	0	0	0	3,12	3,12	MF
Representações na folha de cálculo	Linguagem natural		Dados do enunciado			0	9,52	0	11,11							MIFC
			Nomeação de colunas			9,52		11,11								
			Explicação de procedimentos			0		0								
			Resposta			0		0								
	Registo numérico	Sequências	Com incremento constante			9,52	19,04	11,11	22,22							MTFC
			Com incremento nulo			9,52		11,11								
	Registo de fórmulas		Variável célula			0	9,52	0	11,11							
			Variável coluna			9,52		11,11								
	Gráficos		Gráfico de dispersão			9.52	9,52	11,11	11,11							
	Form. cond. /Realçar células		Identificar a resposta			4,76	4,76	0	0							MIFC

Tópico:

Proporcionalidade Inversa. Representações gráficas

Tarefa A2								
	Papel e lápis				Transformações das representações		Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica			
1	x				Conversão (LN-SNA)	Tratamento (SNA)	LN.(R)	
					Atividade de geração	Atividade de transformação	disposição tabular	Regra de três simples
2	x						LN.(R+Exp)	
3	x				Conversão (LN-Rep.pictorica)	Tratamento (SNN)	LN.(R+Exp)	
4	x				Conversão (LN-SNA)	Tratamento (SNN) op inv	LN.(R+Exp)	
					Atividade de geração		disposição tabular	
5	x					Tratamento (SNN)	LN.(R)	
6	x					Tratamento (SNN)	LN.(R)	
7	x						LN.(R+Exp)	
8	x				Conversão (LN-SNA)	Tratamento (SNN) op inv	LN.(R)	
					Atividade de geração		disposição tabular	
9		x					LN.(R+Exp)	

Tarefa B2													
	Papel e lápis				Folha cálculo				Transformações das representações			Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica				
1		x							Conversão (LN-SNN)				
1.1		x										LN.(R+Exp)	
2.1					x				Conversão (LN-Tab.FC)	Tratamentos (Seq. numéricas) Construção variáveis	Tratamentos (var. coluna) Estabelecimento de relações Atividade de geração	LN.(R)	
2.2		x							Conversão (Tab. FC-SNA) Escrita de expressão algébrica Atividade de geração				Escrita expressão algébrica proporcionalidade inversa
2.3		x				x			Conversão (Tab.FC- Rep. gráfica)	Conversão (Rep gráfica FC- Rep gráfica PL)			Hipérbole
3.1					x				Conversão LN-Tab. (fc)	Tratamentos (seq. numéricas) Construção das variáveis	Tratamentos (var. coluna) Estabelecimento de relações Atividade de geração	LN.(R)	
3.2		x				x			Conversão (Tab. FC- Repr gráfica FC)	Conversão (Rep gráfica FC- Rep gráfica PL)			
3.3		x										LN.(R)	
3.4		x										LN.(R)	
3.5		x							Conversão (Tab. FC-SNA) Escrita de expressão algébrica Atividade de geração				
3.6		x										LN.(R)	

Tarefa C2													
	Papel e lápis				Folha cálculo				Transformações das representações Atividade algébrica			Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	P	Ex	Ep	TI					
1		x							Conversão (LN-SNN)				
1.1					x				Conversão (LN-Tab.FC)	Tratamentos (Seq. numéricas) Construção variáveis	Tratamentos (var. coluna) Estabelecimento de relações Atividade de geração		
1.2		x							Conversão (Tab. FC-SNA) Escrita de expressão algébrica Atividade de geração				Escrita expressão algébrica proporcionalidade inversa
1.3		x				x			Conversão (Tab.FC- Rep. gráfica)	Conversão (Rep gráfica FC- Rep gráfica PL)			Hipérbole
2		x							Conversão (LN-SNN)				
2.1					x				Conversão LN-Tab. (fc)	Tratamentos (seq. numéricas) Construção das variáveis	Tratamentos (var. coluna) Estabelecimento de relações Atividade de geração		
2.2		x							Conversão (Tab. FC-SNA) Escrita de expressão algébrica Atividade de geração				Escrita expressão algébrica proporcionalidade inversa
2.3		x				x			Conversão (Tab.FC- Rep. gráfica)	Conversão (Rep gráfica FC- Rep gráfica PL)			Hipérbole
3		x										LN.(R+Exp)	
4		x										LN.(R+Exp)	

Tarefa D2									
	Papel e lápis				Transformações das representações			Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI					
1.1		X			Conversão (SNA<->Rep. Gráfica)			LN.(R) Correspondência entre rep. Gráfica e expressão algébrica	
1.2		X			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)			LN.(R) Interpretação tipo de proporcionalidade e indicação de constante	
2.1		X						LN.(R) Interpretação rep. gráfica	
2.2		X			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)			Indicação da constante proporcionalidade	
2.3		X			Conversão (Rep. gráfica-SNA) Atividade de geração		Tratamento (SNN)	LN.(R)	Escrita expressão algébrica
3.1	X				Conversão (LN-SNA) Recurso a formula d=vxt Atividade de geração	Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamento (SNN)	LN.(R)	
3.2		X						LN.(R) Interpretação tabela	
3.3		X			SNA Indicação fórmula			LN.(R)	
3.4		X			Conversão (tabela SNN-SNA) escrita exp. algébrica Atividade de geração				Escrita expressão algébrica proporcionalidade inversa
4.1		X			Tratamentos (SNN) Interpretação situação prop. Inversa				
4.2		X			Conversão (tabela SNN-SNA) escrita exp. algébrica Atividade de geração				
5.1		X			Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamento (SNN)		LN.(R)	
5.2		X			Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamento (SNN)		LN.(R)	Errado

Anexo 33

Tarefa E2								
	Papel e lápis				Transformações das representações		Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica			
1.1		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)		LN.(R) Interpretação rep. Gráfica	
1.2		x					LN.(R) Interpretação rep. Gráfica	
1.3		x					LN.(R) Interpretação rep. Gráfica	
1.4		x					LN.(R) Interpretação rep. Gráfica	
1.5		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)	Tratamento (SNN)	Interpretação rep. Gráfica	
1.6		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)	Tratamento (SNN)	LN.(R) Interpretação rep. Gráfica	
2.1		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)			
2.2		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)		LN.(R) Interpretação rep. Gráfica	
2.3		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)		LN.(R) Interpretação rep. Gráfica	
2.4		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)		Interpretação rep. Gráfica	
2.5		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)	Tratamento (SNN)	Interpretação rep. Gráfica	
2.6		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)		LN.(R) Interpretação rep. Gráfica	
2.7		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)		LN.(R) Interpretação rep. Gráfica	
2.8		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)		Interpretação rep. Gráfica	
2.9		x					LN.(R+Exp)	
3.1		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN) cps	Tratamento (SNN)	LN.(R+Exp)	

Tipo	P	Ex	Ep	TI	Transformações das representações		Outros	Métodos formais
3.2		x			Conversão (SNA-Rep.gráfica-SNN)		LN.(R+Exp)	
3.3		x			Tratamento (SNN)		LN.(R+Exp)	
4		x					LN.(R+Exp)	

Entrevista 2								
	Papel e lápis				Transformações das representações		Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI				
1.1		x					LN.(R)	
1.2		x					LN.(R+Exp)	
1.3		x					LN.(R+Exp)	
1.4		x					LN.(R+Exp)	
1.5		x			Conversão (LN-SNN)	Conversão (SNN-Rep. Gráfica)	LN.(R+Exp) Disposição tabular	
2.1		x			Tratamento (SNN)		LN.(R)	
2.2		x					LN.(R+Exp)	
2.3		x			Conversão (tabela SNN-SNA) escrita exp. algébrica Atividade de geração			Escrita expressão algébrica
2.4		x					LN.(R)	
3.1		x			Tratamentos (SNN)			
3.2		x					LN.(R)	

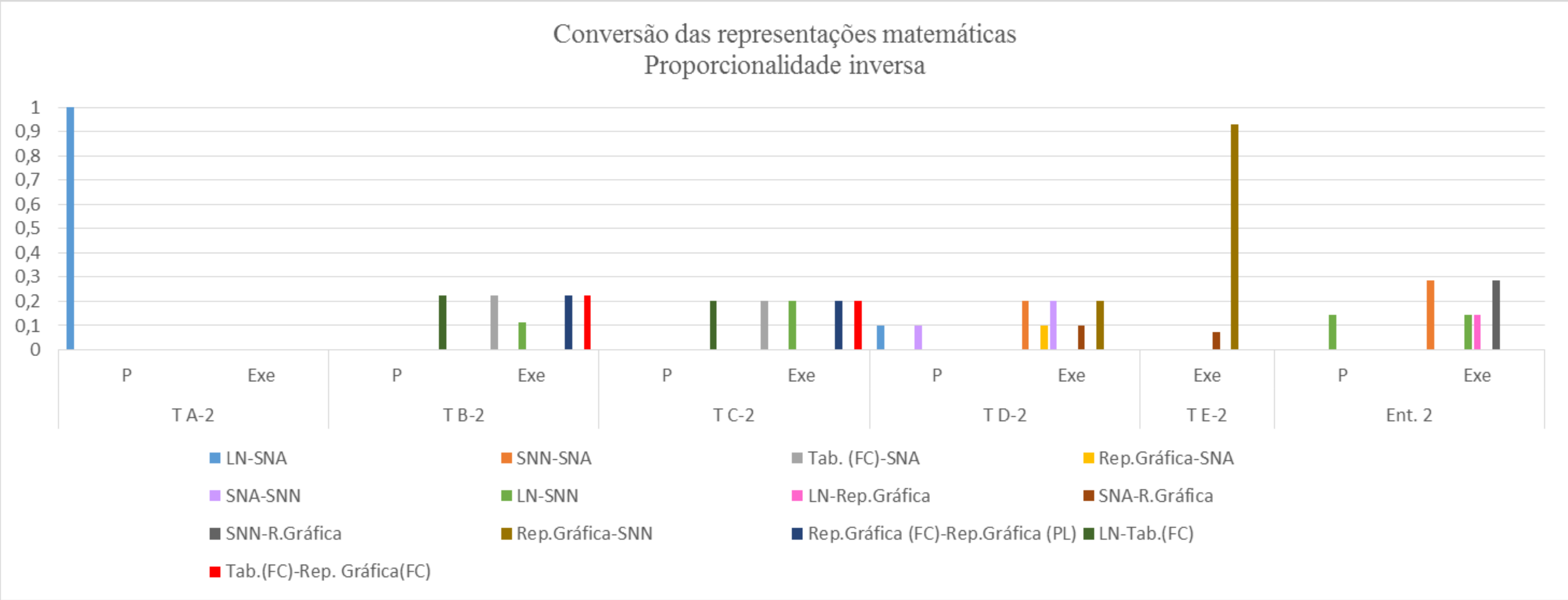
Anexo 33

3.3		x			Conversão (tabela SNN-SNA) escrita exp. algébrica			Escrita expressão algébrica
					Atividade de geração			
3.4		x					LN.(R)	
4	x				Conversão (LN-SNN)	Tratamento (SNN)	LN.(R)	
							construção tabela	
5.1		x					LN.(R+Exp)	
5.2		x			Tratamento (SNN)		LN.(R)	
5.3		x			Tratamento (SNN)		LN.(R)	
5.4		x			Conversão (tabela SNN-SNA) escrita exp. algébrica			Escrita expressão algébrica
					Atividade de geração			
5.5		x			Conversão (SNA<-> Rep.Gráfica)		LN.(R+Exp)	
							Interpretação de correspondencia ente rep. Gráfica e exp algébrica	
6		x			Conversão LN <-> R. Grafica		LN.(R+Exp)	
							Interpretação de correspondência ente rep. Gráfica e exp algébrica	

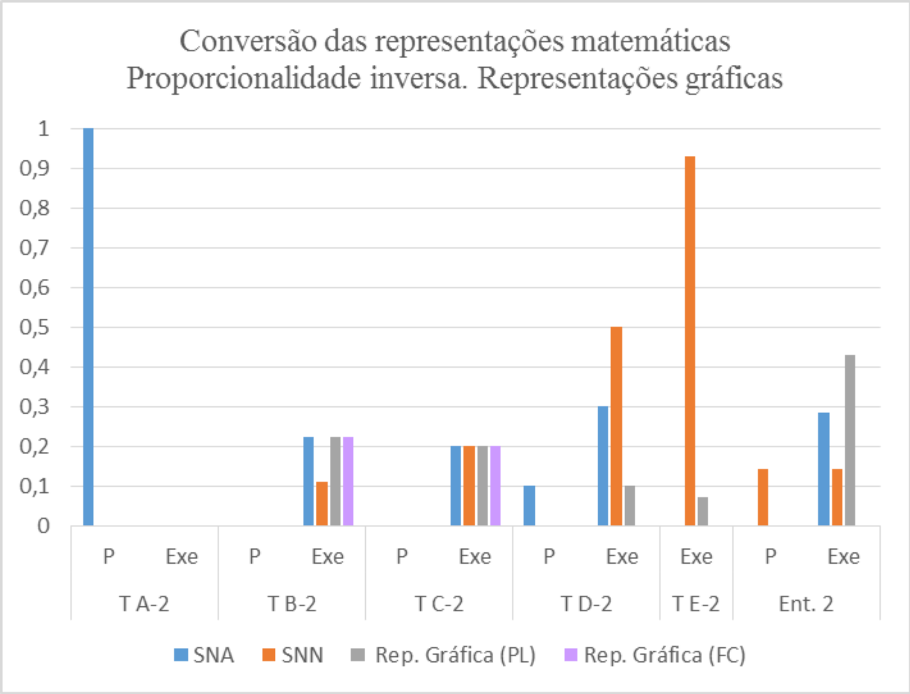
Súmula das conversões das representações matemáticas- Proporcionalidade inversa (freq.relativa)

		Conversão das representações matemáticas												
		LN-SNA	SNN-SNA	Tab. (FC)-SNA	Rep.Gráfica-SNA	SNA-SNN	LN-SNN	LN-Rep.Gráfica	SNA-R.Gráfica	SNN-R.Gráfica	Rep.Gráfica-SNN	Rep.Gráfica (FC)-Rep.Gráfica (PL)	LN-Tab.(FC)	Tab.(FC)-Rep. Gráfica(FC)
T A-2	P	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Exe	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T B-2	P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,222	0
	Exe	0	0	0,222	0	0	0,111	0	0	0	0	0,222	0	0,222
T C-2	P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,2	0
	Exe	0	0	0,2	0	0	0,2	0	0	0	0	0,2	0	0,2
T D-2	P	0,1	0	0	0	0,1	0	0	0	0	0	0	0	0
	Exe	0	0,2	0	0,1	0,2	0	0	0,1	0	0,2	0	0	0
T E-2	Exe	0	0	0	0	0	0	0	0,07	0	0,929	0	0	0
Ent. 2	P	0	0	0	0	0	0,143	0	0	0	0	0	0	0
	Exe	0	0,286	0	0	0	0,143	0,143	0	0,286	0	0	0	0

Anexo 33

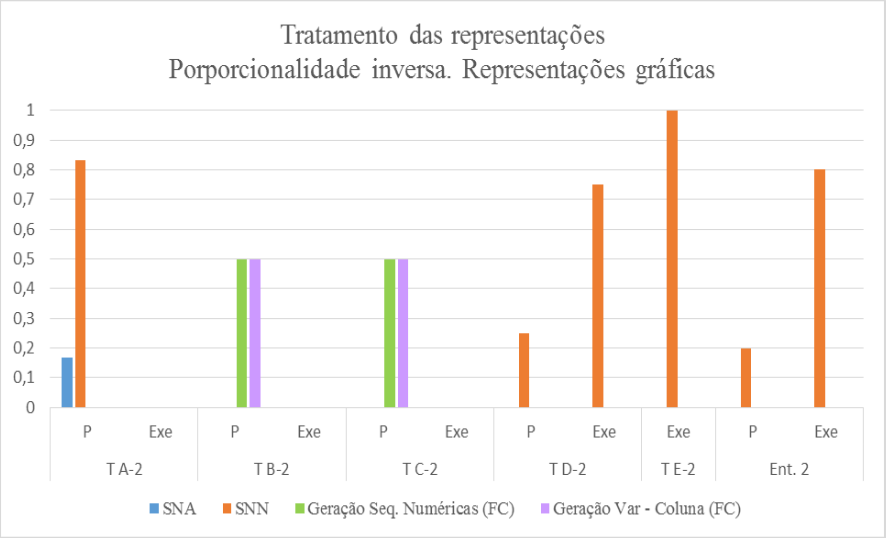

Conversão das representações matemáticas
Proporcionalidade inversa
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
P
Exe
T A-2
T B-2
T C-2
T D-2
T E-2
Ent. 2
LN-SNA
SNN-SNA
Tab. (FC)-SNA
Rep.Gráfica-SNA
SNA-SNN
LN-SNN
LN-Rep.Gráfica
SNA-R.Gráfica
SNN-R.Gráfica
Rep.Gráfica-SNN
Rep.Gráfica (FC)-Rep.Gráfica (PL)
LN-Tab.(FC)
Tab.(FC)-Rep. Gráfica(FC)

Conversão das representações matemáticas					
		SNA	SNN	Rep. Gráfica (PL)	Rep. Gráfica (FC)
T A-2	P	1	0	0	0
	Exe	0	0	0	0
T B-2	P	0	0	0	0
	Exe	0,222	0,111	0,222	0,222
T C-2	P	0	0	0	0
	Exe	0,2	0,2	0,2	0,2
T D-2	P	0,1	0	0	0
	Exe	0,3	0,5	0,1	0
T E-2	Exe	0	0,929	0,071	0
Ent. 2	P	0	0,143	0	0
	Exe	0,286	0,143	0,429	0



Anexo 33

Tratamento das representações matemáticas					
		SNA	SNN	Geração Seq. Numéricas (FC)	Geração Var - Coluna (FC)
T A-2	P	0,167	0,833	0	0
	Exe	0	0	0	0
T B-2	P	0	0	0,5	0,5
	Exe	0	0	0	0
T C-2	P	0	0	0,5	1
	Exe	0	0	0	0
T D-2	P	0	0,25	0	0
	Exe	0	0,75	0	0
T E-2	Exe	0	1	0	0
Ent. 2	P	0	0,2	0	0
	Exe	0	0,8	0	0



Anexo 34: Equações do 2.º grau a uma incógnita (Gabriela)

Tabela 7.3 - Distribuição das representações e métodos utilizados por Gabriela no estudo do tópico Equações do 2.º grau (%)

Tarefas (Lápis e papel / folha de cálculo)				A-3		B-3		C-3		D-3		E-3		F-3		G-3		Ent. 3		Métodos
				P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	
Representações com lápis e papel	Linguagem natural		Dados do enunciado	0	38,89	0	34,61	0	2,38	0	20,69	0	45,45	0	27,59	0	31,43	0	23,08	MI
			Identificação de incógnitas	0		7,69		0		0		0		0		11,43		3,85		
			Explicação de procedimentos	16,67		11,54		0		3,45		18,18		6,9		0		3,85		
			Resposta	22,22		15,38		2,38		17,24		27,27		0		20		15,38		
			Outros											20,69		0	0	7,69	7,69	
	Sistemas de notação	Numérico	Cálculos por substituição	11,11	27,78	3,85	3,85	2,38	7,14	0	3,45	0	9,1	3,45	3,45	8,57	11,43	11,54	19,23	
			Cálculos por operações inversas	0		0		0		0		0		0		0		0		MT
			Outros	16,67		0		4,76		3,45		9,1		0		2,86		7,69		MI
		Algébrico	Escrita de expressões algébricas	8,33	33,33	7,69	23,07	14,29	85,72	0	13,8	0	0	0	48,28	0	57,15	0	34,63	MF
			Simplificação de expressões	2,78		0		14,29		3,45		0p		0		0		0		
			Recurso a fórmulas	0		0		0		0		0		0		2,86		0		
			Escrita de equações do 1.º grau	0		0		0		0		0		6,9		0		0		
			Resolução de equações do 1.º grau	0		0		0		0		0		6,9		0		0		
			Casos notáveis da multiplicação	11,11		0		0		0		0		0		0		0		
			Escrita de equações do 2.º grau	8,33		15,38		7,14		3,45		0		6,9		28,57		11,54		
			R. de equações do 2.º grau R. Q.	2,78		0		4,76		0		0		0		2,86		3,85		
			R. de equações do 2.º grau L.A. P.	0		0		21,43		3,45		0		0		0		3,85		
			R. de equações do 2.º grau F. R.	0		0		0		0		0		27,58		22,86		11,54		
			R. eq. Grau 4 (fact. dada) L. A. P.	0		0		4,76		0		0		0		0		0		
			Factorização	0		0		19,05		3,45		0		0		0		3,85		
			Outros	0		0		0		0		0		0		0		0		
	Pictóricas			0	0	0	0	4,76	4,76	0	0	0	0	0	0	0	0	0		MI
	Gráficas			0	0	0	0	0	0	6,89	6,89	9,1	9,1	20,69	20,69	0	0	15,38	15,38	MF
es na folha de	Linguagem natural		Dados do enunciado			0	7,69			0	13,79	0	9,1							MIFC
			Nomeação de colunas			7,69				13,79		9,1								
			Explicação de procedimentos			0				0		0								
			Resposta			0				0		0								
	Registo numérico	Sequências	Com incremento constante			7,69	7,69			13,79	13,79	9,1	9,1							MTFC
			Com incremento nulo			0				0		0								

4.2

	Registo de fórmulas	Variável célula		0	23,08			0	13,79	0	9,1				
		Variável coluna		23,08				13,79		9,1					
	Gráficos	Gráfico de dispersão		0	0			13,79	13,79	9,1	9,1				
	Form. cond. /Realçar células	Identificar a resposta		0	0										MIFC

incompleta não aplicou l anul prod

Tópico: Equações do 2.º grau a uma incógnita

Tarefa A3										
	Papel e lápis				Transformações das representações				Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica					
1.1		x			Conversão (Rep. Pictorica-SNN)	Tratamentos (SNN)			LN (R+Exp) Usa esquema setas para indicar incremento	
1.2		x			Conversão (Rep. Pictorica-SNN)	Tratamentos (SNN)			LN (R+Exp) Usa esquema setas para indicar incremento	
1.3	x				Tratamentos (SNN)				LN (R+Exp)	
1.4	x				Conversão (Rep. Pict-SNN-SNA) Atividade de geração					Escrita expressão geral (grau 2)
2.1		x			Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamentos (SNN)			LN (R+Exp)	
2.2		x			Tratamentos (SNN) op inv				LN (R+Exp)	Noção de raiz quadrada
3.1		x			Conversão (Fig.geom-SNA) recurso formula perímetro Atividade de geração	Tratamentos (SNA) Atividade de transformação				Simplificação exp. grau 1
3.2		x			Conversão (Fig.geom-SNA) recurso formula área retangulo Atividade de geração	Tratamentos (SNA) Atividade de transformação				Desembaraçar parenteses e simplificação exp. grau 2
3.3		x			Conversão (SNA-SNN) cps				LN.(R)	
4.1		x			Conversão (Fig.geom-SNA) recurso formula área -escrita equação Atividade de geração	Tratamentos (SNA) Atividade de transformação				Resolução equação 2.º grau noção de raíz quadrada
4.2		x			Conversão (Fig.geom-SNA) escrita equação Atividade de geração	Tratamentos (SNA) Atividade de transformação			Incompleta (deveria usar lei do anulamento produto)	
5.1		x			Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamentos (SNN)			LN (R+Exp)	
5.2.1		x			Tratamentos (SNA)				LN (R+Exp)	Simplificação expressões em equação 2.º grau

					Atividade de transformação					
5.2.2	x				Tratamentos (SNA)				LN (R+Exp)	Simplificação expressões em equação 2.º grau
					Atividade de transformação					
5.2.3		x			Tratamentos (SNA)					Simplificação expressões em equação 2.º grau
					Atividade de transformação					
6	x				Conversão (LN-SNA) escrita equação	Tratamentos (SNA)	Conversão (SNA-SNN) cps	Tratmentos (SNN)	LN.(R)	Simplificação expressões em equação 2.º grau
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
7.1		x			Tratamentos (SNA) casos notáveis espacos					Quadrado da soma
					Atividade de transformação					
7.2		x			Tratamentos (SNA) casos notáveis espacos					Quadrado da soma
					Atividade de transformação					
7.3		x			Tratamentos (SNA) casos notáveis espacos					Quadrado da diferença
					Atividade de transformação					
7.4		x			Tratamentos (SNA) casos notáveis espacos					Diferença de quadrados
					Atividade de transformação					

Tarefa B3																
	Papel e lápis				Folha cálculo				Transformações das representações						Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica							
1.1					x				Conversão (LN-Tab.FC)	Tratamentos (seq. numéricas)			Tratamentos (var. coluna) Estabelecimento de relações		LN.(R)	
										Construção das variáveis			Atividade de geração			
1.2		x							Conversão (Tab. FC-SNA) Escrita de expressão algébrica 2.º grau	Tratamentos (SNA)					LN.(R)	Escrita expressão algébrica 2.º grau
									Atividade de geração	Atividade de transformação						
1.3		x							Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamentos (SNN)					LN.(R)	
1.4					x				Conversão (LN-Tab.FC)	Tratamentos (seq. numéricas)	Tratamentos (var. coluna) Estabelecimento de relações	Tratamentos (SNA) Simplificação	Conversão (Tab. FC-SNA)	Tratamentos (SNA) Simplificação expressões 2.º grau	LN.(R)	
										Construção das variáveis	Atividade de geração	Atividade de transformação	Atividade de geração	Atividade de transformação		
1.5	x								Conversão (LN-SNA)						LN (R+Exp)	

Anexo 34

Tarefa C3										
	Papel e lápis				Transformações das representações				Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica					
1.1		x			Tratamento (SNA) Res. Eq. 2.º grau					Fatorização
					Atividade de geração					Lei do anulamento do produto
1.2		x			Tratamento (SNA) Res. Eq. 2.º grau					Fatorização
					Atividade de geração					Lei do anulamento do produto
1.3		x			Tratamento (SNA) Res. Eq. 2.º grau					Fatorização
					Atividade de geração					Lei do anulamento do produto
1.4		x			Tratamento (SNA) Res. Eq. 2.º grau					Fatorização
					Atividade de geração					Lei do anulamento do produto
1.5		x			Tratamento (SNA) Res. Eq. 2.º grau					Fatorização
					Atividade de geração					Lei do anulamento do produto
1.6		x			Tratamento (SNA) Res. Eq. 2.º grau					Fatorização
					Atividade de geração					Lei do anulamento do produto
2.1		x			Conversão (Fig. Geom- SNN) área quadrado	Tratamentos SNN	Conversão (Fig. Geom- SNN) áreas retângulos	Tratamentos SNN		
2.2		x			Conversão (Fig. Geom- SNA) área quadrado		Conversão (Fig. Geom- SNA) áreas retângulos	Tratamentos SNA		
					Atividade de geração		Atividade de geração	Atividade transformação		
2.3		x			Conversão (Fig. Geom- SNA) área quadrado		Conversão (Fig. Geom- SNA) áreas retângulos	Tratamentos SNA		
					Atividade de geração		Atividade de geração	Atividade transformação		
2.4		x			Conversão (Fig. Geom- SNA) área quadrado		Conversão (Fig. Geom- SNA) áreas retângulos	Tratamentos SNA		
					Atividade de geração		Atividade de geração	Atividade transformação		
3		x			Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamentos (SNN)			Rep. Pictórica quadrado	
4.1		x			Tratamento (SNA) resolução eq. 2.º grau					Fatorização
					Atividade de transformação					Lei do anulamento do produto
4.2		x			Tratamento (SNA) resolução eq. 2.º grau				Rep. Pictórica quadrado	Fatorização

					Atividade de transformação					Lei do anulamento do produto
5		x			Tratamento (SNA) resolução eq. 4.º grau					Fatorização
					Atividade de transformação					Lei do anulamento do produto
6		x			Tratamento (SNA) resolução eq. 4.º grau					Fatorização
					Atividade de transformação					Lei do anulamento do produto + noção raiz quadrada
7.1		x			Tratamento (SNA) resolução eq. 2.º grau					
					Atividade de transformação					Lei do anulamento do produto
7.2		x			Não responde					
7.3		x							LN (R+Exp)	
7.4.1		x			Conversão (SNN-SNA)	Tratamento (SNA) simplificação-desembaraçar parenteses				Escrita de equação 2.º grau na forma canónica
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
7.4.2		x			Conversão (SNN-SNA)	Tratamento (SNA) simplificação-desembaraçar parenteses				Escrita de equação 2.º grau na forma canónica
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
7.4.3		x			Conversão (SNN-SNA)	Tratamento (SNA) simplificação-desembaraçar parenteses				Escrita de equação 2.º grau na forma canónica
					Atividade de geração	Atividade de transformação				

Anexo 34

Tarefa D3															
	Papel e lápis				Folha cálculo				Transformações das representações					Outros	Métodos formais
									Atividade algébrica						
Tipo	P	Ex	Ep	TI	P	Ex	Ep	TI							
1.1					x				Conversão (SNA-Tab. FC)	Tratamentos (Seq. Numéricas) Construção das variáveis	Tratamentos (Var-coluna) Estabelecimento de relações Atividade de geração	Conversão (Tab. FC-Rep. Gráfica FC)	Conversão (Rep. Gráfica FC- Rep. Gráfica PL)		
1.2		x							Conversão (Rep. Gráfica- SNN)					LN.(R)	
1.3		x							Conversão (Rep. Gráfica- SNN)					LN.(R)	
1.4		x							Conversão (Rep. Gráfica- SNN)	Tratamentos SNA Atividade de transformação				LN.(R)	Fatorização Lei anulamento
1.5		x							Conversão (Rep. Gráfica- SNN)					LN.(R)	
1.6		x							Tratamentos (SNA) Atividade de transformação						
1.7		x							Conversão (Tab. FC-SNA) Atividade de geração					LN (Exp)	
1.8		x												LN (R+Exp)	
1.9		x							Conversão (SNA-Tab. FC)	Tratamentos (Seq. Numéricas) Construção das variáveis	Tratamentos (Var-coluna) Estabelecimento de relações Atividade de geração	Conversão (Tab. FC-Rep. Gráfica FC)	Conversão (Rep. Gráfica FC- Rep. Gráfica PL)		

Tarefa E3														
	Papel e lápis				Folha cálculo				Transformações das representações				Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica					
1.1					x				Conversão (SNA-Tab.FC)	Tratamentos (Seq. Numéricas)	Tratamentos (Var. coluna) estabelecimento de relações	Conversão (Tab. FC- Rep. Gráfica	LN.(R)	
										Construção das variáveis	Atividade de geração			
1.2		x							Conversão (Tab.FC-SNN)				LN.(R)	
1.3		x							Conversão (Tab.FC-SNN)	Tratamentos (SNN)			LN.(R+Exp)	
1.4		x											LN.(R+Exp)	
1.5		x							Conversão (Rep. Gráfica FC- Rep. Gráfica PL)					

Tarefa F3										
	Papel e lápis				Transformações das representações				Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica					
1.1		x			Tratamento (SNA) Resolução eq. 2.º grau	Conversão (SNA-Rep.Gráfica)			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de transformação					
1.2		x			Tratamento (SNA) Resolução eq. 2.º grau	Conversão (SNA-Rep.Gráfica)			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de transformação					
1.3		x			Tratamento (SNA) Resolução eq. 2.º grau	Conversão (SNA-Rep.Gráfica)			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de transformação					
1.4		x			Tratamento (SNA) Resolução eq. 2.º grau	Conversão (SNA-Rep.Gráfica)			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de transformação					
1.5		x			Tratamento (SNA) Resolução eq. 2.º grau	Conversão (SNA-Rep.Gráfica)			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de transformação					
1.6		x			Tratamento (SNA) Resolução eq. 2.º grau	Conversão (SNA-Rep.Gráfica)			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de transformação					
2.1		x			Tratamento (SNA) Resolução eq. 2.º grau				LN.(R+Exp)	
					Atividade de transformação					
2.2		x			Tratamento (SNA) Resolução eq. 2.º grau				LN.(R+Exp)	
					Atividade de transformação					
2.3		x			Tratamento (SNA) Resolução eq. 2.º grau				LN.(R+Exp)	
					Atividade de transformação					
3	x				Tratamento (SNA) Resolução eq. 2.º grau				LN.(R+Exp)	Fórmula resolvente
					Atividade de transformação					

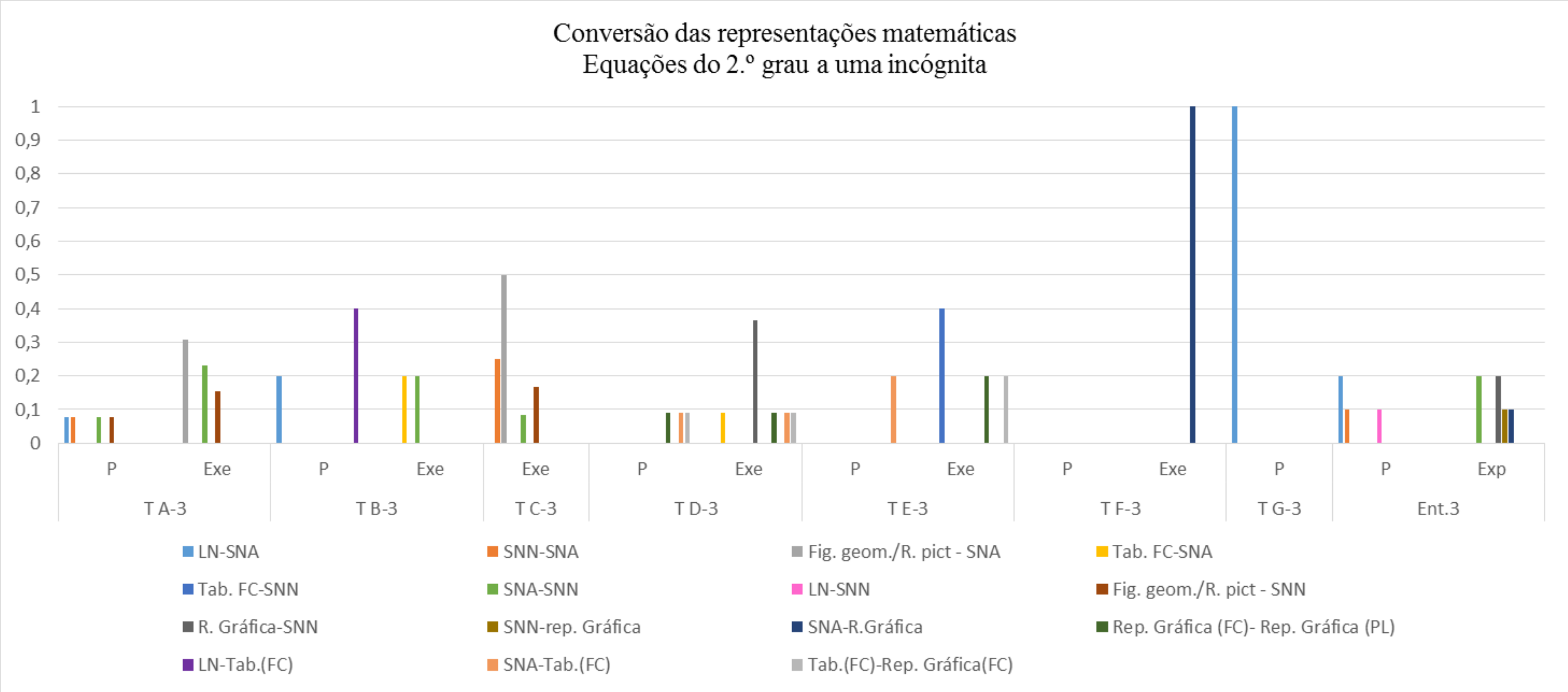
Tarefa G3										
	Papel e lápis				Transformações das representações				Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica					
1	x				Conversão (LN-SNA)	Tratamento (SNA) resolução equação 2.º grau			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
2	x				Conversão (LN-SNA)	Tratamento (SNA) simplificação e resolução equação 2.º grau			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
3	x				Conversão (LN-SNA) Fórmula	Tratamento (SNA) simplificação e resolução equação 2.º grau			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
4	x				Conversão (LN-SNA) Fórmula	Tratamento (SNA) simplificação e resolução equação 2.º grau			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
5	x				Conversão (LN-SNA)	Tratamento (SNA) simplificação e resolução equação 2.º grau	Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamentos SNN	LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
6	x				Conversão (LN-SNA)	Tratamento (SNA) simplificação e resolução equação 2.º grau	Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamentos SNN	LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
7.1	x				Conversão (LN-SNA)	Tratamento (SNA) simplificação e resolução equação 2.º grau			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
7.2	x				Conversão (LN-SNA)	Tratamento (SNA) simplificação			LN.(R)	
					Atividade de geração	Atividade de transformação			Raiz do delta não	
8	x				Conversão (LN-SNA) Teorema Pitágoras	Tratamento (SNA) simplificação e resolução equação 2.º grau	Tratamentos SNN			Noção raiz quadrada
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
9	x				Conversão (LN-SNA) Área círculo	Tratamento (SNA) simplificação e resolução equação 2.º grau				Noção raiz quadrada
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
10	x				Conversão (LN-SNA)	Tratamento (SNA) simplificação e resolução equação 2.º grau			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de geração	Atividade de transformação				

Ent. 3									
	Papel e lápis				Transformações das representações			Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica				
1.1		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)			LN.(R)	
1.2		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)			LN.(R)	
1.3		x			Conversão (SNA-Rep. Gráfica)	Conversão (Rep.Gráfica-SNN)		LN.(R)	
1.4		x			Conversão (SNA-SNN)	Conversão (SNN-Rep.Gráfica)		LN.(R)	
2.1		x			Conversão (SNA-SNN)	Tratamentos SNN		LN.(R)	
2.2	x				Conversão (LN-SNA) escrita de equação Atividade de geração	Tratamentos (SNA) resolução equação Atividade de transformação		LN.(R)	Lei do anulamento
2.3	x				Conversão (LN-SNN)	Tratamentos SNN		LN.(R)	
2.4		x			Tratamentos (SNA) resolução equação Atividade de transformação			LN.(R)	Fórmula resolvente
2.5		x			Conversão (SNN- Rep. Gráfica)				
3.1		x			Tratamentos (SNA) resolução equação Atividade de transformação				Noção Raiz
3.2		x						valor delta (negativo)	
3.3		x			Tratamentos (SNA) simplificação e resolução equação Atividade de transformação				Fórmula resolvente
4	x				Tratamentos (SNN)	Conversão (SNN-SNA) escrita de equação conhecidas as soluções Atividade de geração			
5	x				Conversão (LN-SNA) escrita equação teorema de Pitágoras Atividade de geração	Tratamentos (SNA) simplificação e resolução equação Atividade de transformação	Tratamentos SNN	LN.(R)	Fórmula resolvente

Súmula das conversões das representações matemáticas- Equações do 2.º grau a uma incógnita (freq. relativa)

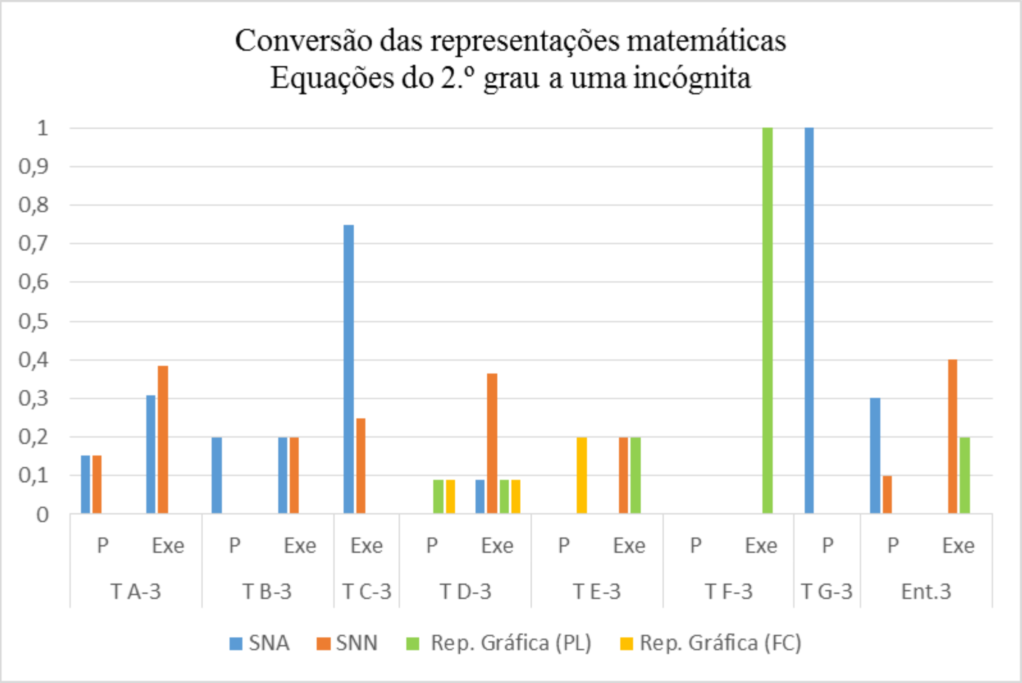
		Conversão das representações matemáticas														
		LN-SNA	SNN-SNA	Fig. geom./R. pict - SNA	Tab. FC-SNA	Tab. FC-SNN	SNA-SNN	LN-SNN	Fig. geom./R. pict - SNN	R. Gráfica-SNN	SNN-Rep. Gráfica	SNA-R.Gráfica	Rep. Gráfica (FC)- Rep. Gráfica (PL)	LN-Tab.(FC)	SNA-Tab.(FC)	Tab.(FC)-Rep. Gráfica(FC)
T A-3	P	0,077	0,077	0	0	0	0,077	0	0,077	0	0	0	0	0	0	0
	Exe	0	0	0,308	0	0	0,231	0	0,154	0	0	0	0	0	0	0
T B-3	P	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,4	0	0
	Exe	0	0	0	0,2	0	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T C-3	Exe	0	0,25	0,5	0	0	0,083	0	0,167	0	0	0	0	0	0	0
T D-3	P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,091	0	0,091	0,091
	Exe	0	0	0	0,091	0	0	0	0	0,364	0	0	0,091	0	0,091	0,091
T E-3	P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,2	0
	Exe	0	0	0	0	0,4	0	0	0	0	0	0	0,2	0	0	0,2
T F-3	P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Exe	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
T G-3	P	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ent.3	P	0,2	0,1	0	0	0	0	0,1	0	0	0	0	0	0	0	0
	Exp	0	0	0	0	0	0,2	0	0	0,2	0,1	0,1	0	0	0	0

Anexo 34



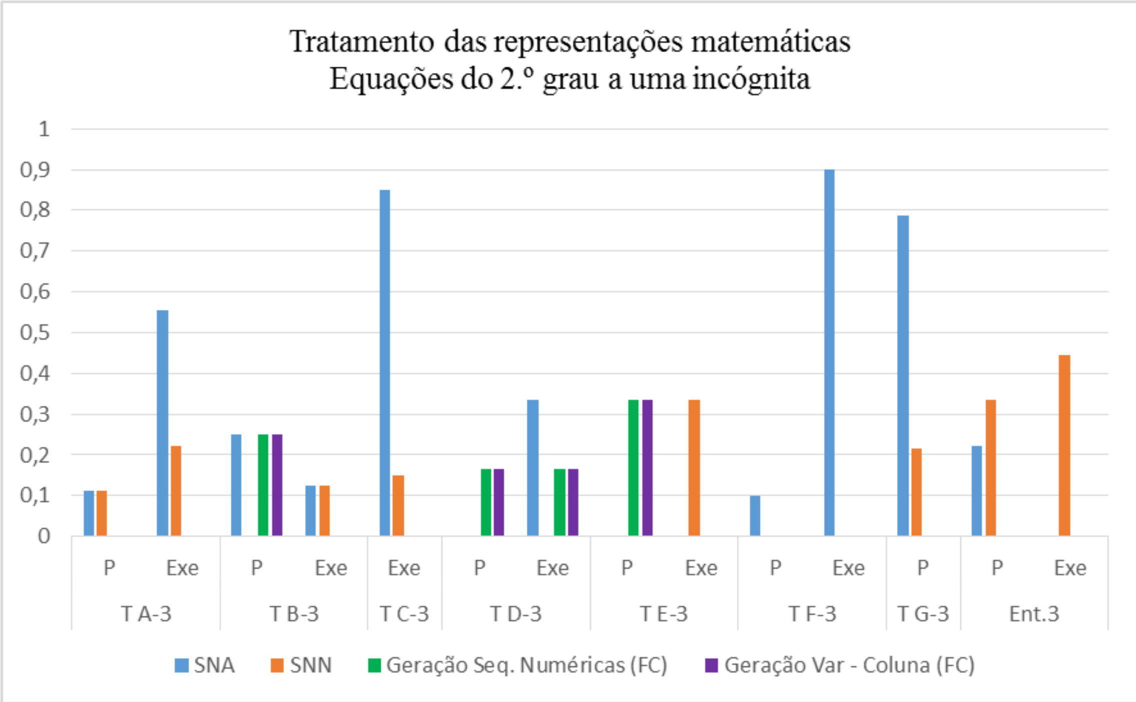
Conversão das representações matemáticas
Equações do 2.º grau a uma incógnita
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
P
Exe
T A-3
P
Exe
T B-3
Exe
T C-3
P
Exe
T D-3
P
Exe
T E-3
P
Exe
T F-3
P
T G-3
P
Exp
Ent.3
LN-SNA
SNN-SNA
Fig. geom./R. pict - SNA
Tab. FC-SNA
Tab. FC-SNN
SNA-SNN
LN-SNN
Fig. geom./R. pict - SNN
R. Gráfica-SNN
SNN-rep. Gráfica
SNA-R.Gráfica
Rep. Gráfica (FC)- Rep. Gráfica (PL)
LN-Tab.(FC)
SNA-Tab.(FC)
Tab.(FC)-Rep. Gráfica(FC)

Conversão das representações matemáticas					
		SNA	SNN	Rep. Gráfica (PL)	Rep. Gráfica (FC)
T A-3	P	0,154	0,154	0	0
	Exe	0,308	0,385	0	0
T B-3	P	0,2	0	0	0
	Exe	0,2	0,2	0	0
T C-3	Exe	0,75	0,25	0	0
T D-3	P	0	0	0,091	0,091
	Exe	0,091	0,364	0,091	0,091
T E-3	P	0	0	0	0,2
	Exe	0	0,2	0,2	0
T F-3	P	0	0	0	0
	Exe	0	0	1	0
T G-3	P	1	0	0	0
Ent.3	P	0,3	0,1	0	0
	Exe	0	0,4	0,2	0



Anexo 34

Tratamento das representações matemáticas					
		SNA	SNN	Geração Seq. Numéricas (FC)	Geração Var - Coluna (FC)
T A-3	P	0,111	0,111	0	0
	Exe	0,556	0,222	0	0
T B-3	P	0,25	0	0,25	0,25
	Exe	0,125	0,125	0	0
T C-3	Exe	0,85	0,15	0	0
T D-3	P	0	0	0,167	0,167
	Exe	0,333	0	0,167	0,167
T E-3	P	0	0	0,333	0,333
	Exe	0	0,333	0	0
T F-3	P	0,1	0	0	0
	Exe	0,9	0	0	0
T G-3	P	0,786	0,214	0	0
Ent.3	P	0,222	0,333	0	0
	Exe	0	0,444	0	0



Anexo 35: Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas (Carolina)

Tabela 8.1 - Distribuição das representações e métodos utilizados por Carolina no estudo do tópico Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas (%)

Tarefas (Lápis e papel / folha de cálculo)				A-1		B-1		C-1		D-1		E-1		F-1		G-1		H-1		Ent. 1		Métodos
				P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	
Representações com lápis e papel	Linguagem natural		Dados do enunciado	0	61,4	0	18,18			0	50	0	30				48	0	22,22	0	36,84	MI
			Identificação de incógnitas	0		9,1				20		0				6,45		0		5,26		
			Explicação de procedimentos	36,84		0				10		15				12,9		0		10,53		
			Resposta	24,56		9,1				20		15				29		22,22		21,05		
	Sistemas de notação	Numérico	Cálculos por substituição	14,04	14,04	0	0			5	5	0	5			12,9	13	0	0	5,26	5,26	
			Cálculos por operações inversas	0		0				0		0						0		0		MT
			Outros	0		0				0		5						0		0		MI
		Algébrico	Escrita de expressões algébricas	7,02	21,05	9,1	9,1			0	35	0	0				32	0	66,66	0	31,58	MF
			Simplificação de expressões	7,02		0				0		0				3,1		0		0		
			Recurso a fórmulas	0		0				0		0						0		0		
			Escrita de equações do 1.º grau	0		0				20		0						0		0		
			Resolução de équa. do 1.º grau	7,02		0				15		0				3,1		0		0		
			Escrita de sistemas de eq.	0		0				0		0				12,9		33,33		15,79		
			Resolução de sistema de eq.	0		0				0		0				12,9		33,33		10,53		
			Outros	0		0				0		0						0		5,26		
	Pictóricas			3,51	3,51	0				10	10	0						0		0	0	MI
	Gráficas			0	0	0				0	0	0				6,45	7	11,11	11,11	5,26	5,26	MF
Representações na folha de cálculo	Linguagem natural		Dados do enunciado			0	27,27	0	50			0	15							0	5,26	MIFC
			Nomeação de colunas			9,1		16,67				15								5,26		
			Explicação de procedimentos			9,1		16,67				0								0		
			Resposta			9,1		16,67				0								0		
	Registo numérico	Sequências	Com incremento constante			18,18	18,18	16,67	16,67			15	15							5,26	10,53	MTFC
			Com incremento nulo			0		0				0								0		
	Registo de fórmulas		Variável célula			9,1	18,18	0	16,67			0	15							0		
			Variável coluna			9,1		16,67				15								5,26		
	Gráficos		Gráfico de dispersão			0	9,1	0	16,67			15	15							0		

Anexo 35

	Form. Cond. /Realçar células	Identificar a resposta		9,1		16,67			5	5					5,26	5,26	MIFC
Total																	

Quadros de análise – Carolina

Tópico: Sistemas de duas equações a duas incógnitas

Legenda: P- Problema; Ex- Exercício; Ep- Exploração; TI- Tarefa de investigação; SNA-Sistema de Notação Algébrico; SNN-Sistema de Notação Numérico; LN-Linguagem Natural; R-resposta; Exp-Explicação; cps-cálculos por substituição; op inv- operações inversas.

Tarefa A1									
	Papel e lápis				Transformações das representações			Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica				
1		x			Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamento (SNN)		LN (R+Exp)	
					Interpretação (equação 1º grau) + Interpretação (exp. algébrica 1º grau)				
2		x			Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamento (SNN)		LN (R+Exp)	
					Interpretação (equação 1º grau) + Interpretação (exp. algébrica 1º grau)				errado
3		x			Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamento (SNN) op inv		LN (Exp)	
					Interpretação (equação 1º grau) + Interpretação (exp. algébrica 1º grau)				errado
4			x		Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamento (SNN)		LN (R+Exp)	
					Interpretação (exp. algébrica 1º grau)				incompleto
5			x		Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamento (SNN)		LN (R+Exp)	
					Interpretação (equação 1º grau)				
6			x		Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamento (SNN)		LN (R+Exp)	
					Interpretação (equação 1º grau)				
7		x						LN (R+Exp)	
					Interpretação (exp. algébrica 1º grau)				
8.1		x				Tratamento (SNA) (simplif exp. algébrica 1º grau)		LN (Exp)	

					Interpretação (exp. algébrica 1º grau e sua simplificação)	Atividade de transformação			
8.2		x						LN (Exp)	
					Interpretação (exp. algébrica 1º grau e sua simplificação)				
8.3		x						LN (Exp)	
					Interpretação (exp. algébrica 1º grau e sua simplificação)				
8.4		x						LN (Exp)	
					Interpretação (exp. algébrica 1º grau e sua simplificação)				
8.5		x				Tratamento (SNA) (simplif exp. algébrica 1.º grau)		LN (Exp)	Desembaraçar parênteses
					Interpretação (exp. algébrica 1º grau e sua simplificação)	Atividade de transformação			
8.6		x				Tratamento (SNA) (simplif exp. algébrica 1.º grau)		LN (Exp)	
					Interpretação (exp. algébrica 1º grau e sua simplificação)	Atividade de transformação			
9.1			x					LN (R+Exp)	
					Interpretação (equação 1º grau)				
9.2			x					LN (R+Exp)	
					Interpretação (equação 1º grau)				
9.3			x						Não responde
					Interpretação (equação 1º grau)				
10		x			Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamento (SNN)		LN (R+Exp)	
					Interpretação (equação 1º grau e sua solução)				
11		x			Conversão (Figura-SNA) recurso formula área triangulo	Tratamento SNA (simplif exp. algébrica grau 1)			
					Atividade de geração	Atividade de transformação			
12.1		x					Tratamento (SNA) (Resolução equação 1.º grau)	LN (R+Exp)	Resolução equação do tipo ax=b
					Interpretação (equação 1º grau e sua solução)		Atividade de transformação		
12.2		x					Tratamento (SNA) (Resolução equação 1.º grau)	LN (R+Exp)	
					Interpretação (equação 1º grau e sua solução)		Atividade de transformação		
12.3		x			Não resolveu (equação com denominadores)				
12.4		x			Não resolveu (equação com parênteses e denominadores)				
13.1		x			Conversão (Figura-SNA) escrita perímetro				
					Atividade de geração				

13.2		x							
									errado
14.1		x			Tratamento (Rep. Pictorica) Contagem (SNN)			LN (R)	
								Rep. Pictórica	
14.2		x			Tratamento (Rep. Pictorica) Contagem (SNN)			LN (R)	
								Rep. Pictórica	
14.3	x								Não responde
14.4	x								Não responde
14.5	x								Não responde
15.1	x				Conversão (Tabela SNN-SNA) escrita de exp. algébrica	Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamentos (SNN)	LN (Exp)	
					Atividade de geração				
15.2	x							LN (Exp)	
15.3		x			Conversão (SNN-SNA) escrita de exp. algébrica 1.º grau				
					Atividade de geração				
15.4		x			Tratamentos (SNA) resolução equação 1.º grau			LN (Exp)	
15.5		x			Comparação rep. Gráfica/tabela			LN (R+Exp)	

Tarefa B1													
	Papel e lápis				Folha cálculo				Transformações das representações			Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica				
1					X				Conversão (LN-Tab FC)	Tratamentos (seq. numéricas)	Tratamentos (var. coluna) estabelecimento de relacões		Escrita equação duas variáveis (discussão/síntese)
										Construção das variáveis	Atividade de geração	Tabela de dupla entrada	

Tarefa C1														
	Papel e lápis				Folha cálculo				Transformações das representações			Outros		Métodos formais
									Atividade algébrica					
Tipo	P	Ex	Ep	TI	P	Ex	Ep	TI						
1					X				Conversão (LN-Tab FC)	Tratamentos (seq. numéricas) Construção das variáveis	Tratamentos (var. coluna) estabelecimento de relações Atividade de geração	Formatação Identificação da solução	LN (R+Exp)	Noção e escrita de sistema de equações (discussão/síntese)

Tarefa D1									
	Papel e lápis				Transformações das representações			Outros	Métodos formais
					Atividade algébrica				
Tipo	P	Ex	Ep	TI					
1	X				Conversão (Rep. Pictorica-SNA) escrita de equação 1.º grau Atividade de geração	Tratamentos (SNA) resolução equação 1.º grau seguida de substituição e resolução de outra equação Atividade de transformação		LN (R)	escrita e resolução de equação 1.º grau Método substituição
2	X				Conversão (Rep. Pictorica-SNA) escrita de equação 1.º grau Atividade de geração	Conversão (Rep. Pictorica-SNN) + Tratamento (SNN) op. Inv Rodeia grupo animais	Conversão (SNA-SNN) cps para verificação da solução	Tratamentos (SNA) res. equação LN (R+Exp) Atividade de transformação	escrita e resolução de equação 1.º grau Método substituição
3	X				Conversão (Rep. Pictorica-SNA) escrita de equação 1.º grau Atividade de geração	Conversão (Rep. Pictorica-SNN) + Tratamento (SNN) op. Inv Rodeia grupo animais	Conversão (SNA-SNN) cps para verificação da solução	Tratamentos (SNA) res. equação LN (R+Exp) Atividade de transformação	escrita e resolução de equação 1.º grau Método substituição
4	X				Tratamento (SNN) Tratamento (rep pictór.)	Conversão (Rep. Pictorica-SNN) +Tratamento (SNN)	Conversão (Rep. Pictorica-SNA) escrita de equação 1.º grau Atividade de geração	Conversão (SNA-SNN) cps para verificação da solução LN (R+Exp)	Método próximo da adição ordenada

Tarefa E1													
	Papel e lápis				Folha cálculo				Transformações das representações			Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica				
1.1					X				Conversão (LN-Tab FC)	Tratamentos (seq. numéricas)	Tratamentos (var. coluna)	Formatação	
										Construção das variáveis	Atividade de geração	Identificação	
1.2						X			Conversão (Tab FC - Rep. Gráfica FC)				
									Construção gráfico na folha de cálculo				
1.3			X						LN.(R)				
1.4		X							Tratamento (SNN)	LN.(R)			
1.5					X				Conversão (LN-Tab FC)	Tratamentos (seq. numéricas) + Tratamentos (var. coluna)	Conversão (Tab FC - Rep. Gráfica FC)	LN.(R)	Escrita de sistema de equações para cada uma
										Construção das variáveis + Atividade de geração	Construção gráfico na folha de cálculo	Papel e lápis	Classificação sistemas (discussão/síntese)
1.6					X				Conversão (LN-Tab FC)	Tratamentos (seq. numéricas) + Tratamentos (var. coluna)	Conversão (Tab FC - Rep. Gráfica FC)	LN.(R)	
										Construção das variáveis + Atividade de geração	Construção gráfico na folha de cálculo		

Tarefa F1													
	Papel e lápis				Folha cálculo				Transformações das representações			Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica				
1					X								Não resolveu

Tarefa G1									
	Papel e lápis				Transformações das representações			Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica				
1	X				Conversão (LN-SNA) escrita sistema de duas equações	Tratamento (SNA) resolução do sistema	Conversão (SNA-SNN) cps	LN identificação incógnitas	Método substituição
					Atividade de geração	Atividade de transformação	Verificação da solução		
2	X				LN.(R)				
3	X				Conversão (LN-SNA) escrita sistema de duas equações	Tratamento (SNA) resolução do sistema		LN identificação incógnitas	Método substituição
					Atividade de geração	Atividade de transformação			
4.1		x			Conversão (Figura-SNA) escrita sistema de equações				
					Atividade de geração				
4.2		x			Tratamento (SNA) escrita das equações do sistema em ordem a y	Conversão (SNA-SNN) cps construção tabela Tratamentos SNN	Conversão (SNN-Rep. Gráfica)		Método gráfico
					Atividade de transformação				
5.1		x			Tratamento (SNA) resolução do sistema				Método substituição
					Atividade de transformação				
5.2		x			Tratamento (SNA) resolução do sistema				Método substituição
					Atividade de transformação				
6.1		x			Tratamento (SNA) escrita sistema forma canónica				Escrever forma canónica
					Atividade de transformação				
6.2		x							Não responde
7.1		x			LN (R)				
					Classificação sistema dadas as equações				
7.2		x			LN.(R)				
					Classificação sistema dadas as equações				
7.3		x			LN.(R)				
					Classificação sistema dadas as equações				
8.1		x			LN (R+Exp)				
					Classificação sistema dadas a rep. Gráfica				
8.2		x			LN (R+Exp)				
					Classificação sistema dadas a rep. Gráfica				
8.3		x			LN (R+Exp)				

					Classificação sistema dadas a rep. Gráfica				
8.4		x			LN (R+Exp)				
					Classificação sistema dadas a rep. gráfica				
9	X				LN.(R)				Errado
					Escrever enunciado problema				

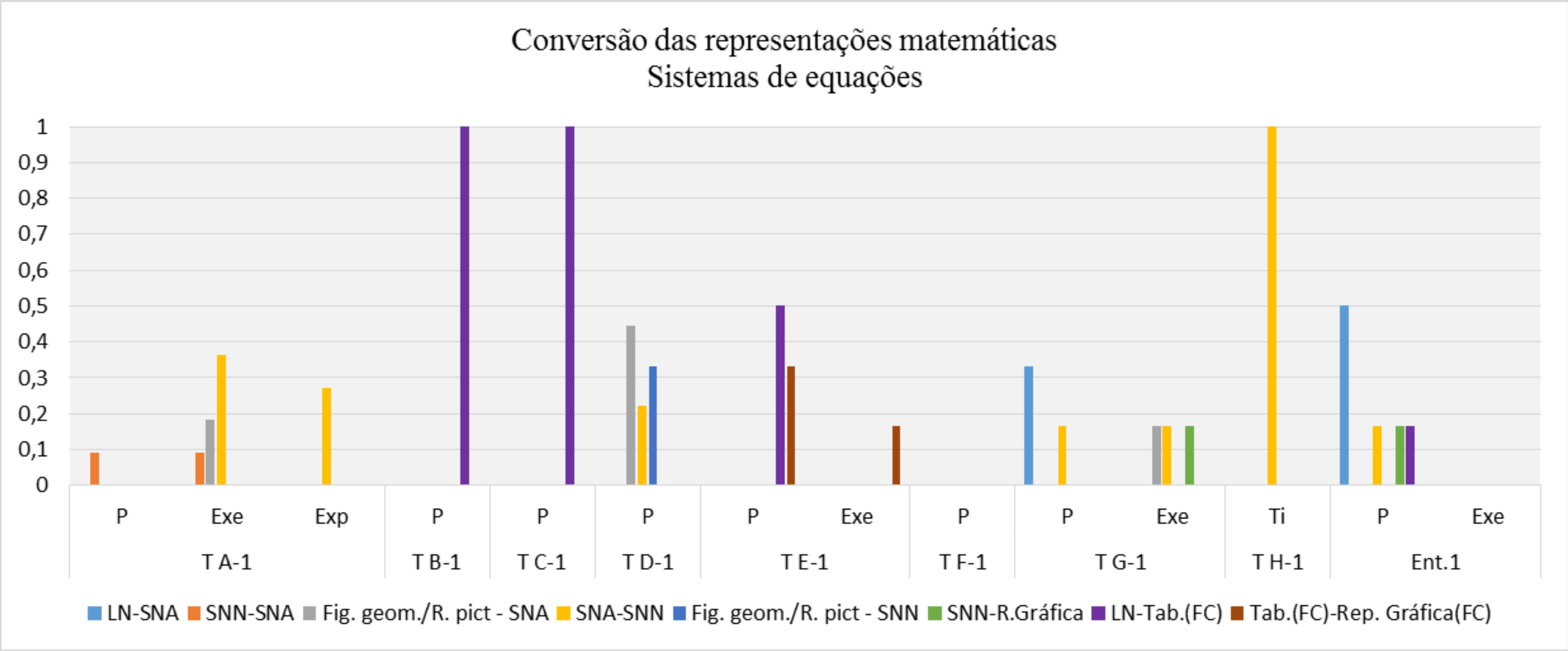
Tarefa H1									
	Papel e lápis				Transformações das representações			Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica				
1.1				x	Tratamentos SNA (substituição parâmetro)	LN.(R+Exp)	Conversão (SNA-SNN) cps	Representação gráfica incompleta	
					Atividade de transformação		Verificação da solução		
1.2				x	Tratamentos SNA (substituição parâmetro)	LN.(R+ Exp)			
					Atividade de transformação				
1.3				x	Tratamentos SNA (substituição parâmetro)	LN.(R)			
					Atividade de transformação				

Entrevista 1										
	Papel e lápis				Transformações das representações				Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica					
1	X				Conversão (LN-Tab FC)	Tratamentos (seq. Numéricas+ var coluna)	Conversão (LN-SNA) escrita sistema de duas	Tratamento (SNA) resolução do sistema	LN (Identificação incógnitas)	Método substituição
						Construção das variáveis + Atividade geração	Atividade de geração	Atividade de transformação	LN (Exp) Formatação (solução)	
2	X				Conversão (LN-SNA) escrita sistema de duas equações a partir das equações	Tratamento (SNA)	Tratamento (SNA) escrita das equações do sistema em ordem a y	Conversão (SNA-SNN) cps construção tabela Trat SNN	Conversão (SNN-Rep. Gráfica)	Método de substituição e Método gráfico
					Atividade de geração	Atividade de transformação	Atividade de			
3.1		x			LN (R+Exp)					
					Classificação sistema dadas a rep. gráfica					
3.2		x			LN (R+Exp)					
					Classificação sistema dadas a rep. gráfica					
3.3		x			LN (R+Exp)					
					Classificação sistema dadas a rep. gráfica					
4			x							Não responde
5	X				LN.(R)	Conversão (LN-SNA) escrita sistema de duas equações				
					Escrita de enunciado problema dada a solução do sistema	Atividade de geração				

Anexo 35

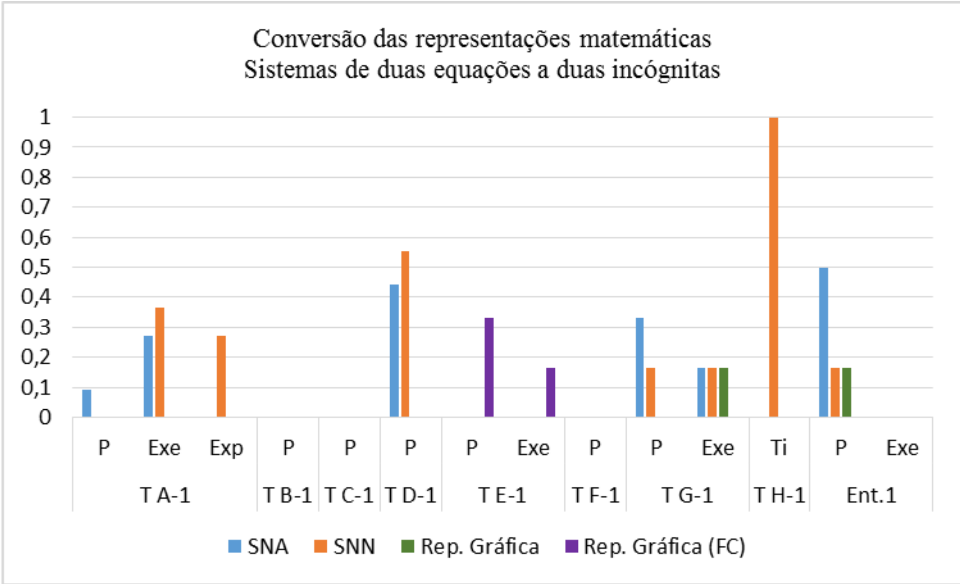
Súmula das conversões das representações matemáticas- Sistemas de duas equações a duas incógnitas (freq. relativa)

		Conversão das representações matemáticas							
		LN-SNA	SNN-SNA	Fig. geom./R. pict – SNA	SNA-SNN	Fig. geom./R. pict - SNN	SNN-R.Gráfica	LN-Tab.(FC)	Tab.(FC)-Rep. Gráfica(FC)
T A-1	P	0	0,0909	0	0	0	0	0	0
	Exe	0	0,0909	0,1818	0,3636	0	0	0	0
	Exp	0	0	0	0,2727	0	0	0	0
T B-1	P	0	0	0	0	0	0	1	0
T C-1	P	0	0	0	0	0	0	1	0
T D-1	P	0	0	0,44444	0,2222	0,3333	0	0	0
T E-1	P	0	0	0	0	0	0	0,5	0,3333
	Exe	0	0	0	0	0	0	0	0,1667
T F-1	P	0	0	0	0	0	0	0	0
T G-1	P	0,3333	0	0	0,1667	0	0	0	0
	Exe	0	0	0,1667	0,1667	0	0,1667	0	0
T H-1	Ti	0	0	0	1	0	0	0	0
Ent.1	P	0,5	0	0	0,1667	0	0,1667	0,1667	0
	Exe	0	0	0	0	0	0	0	0

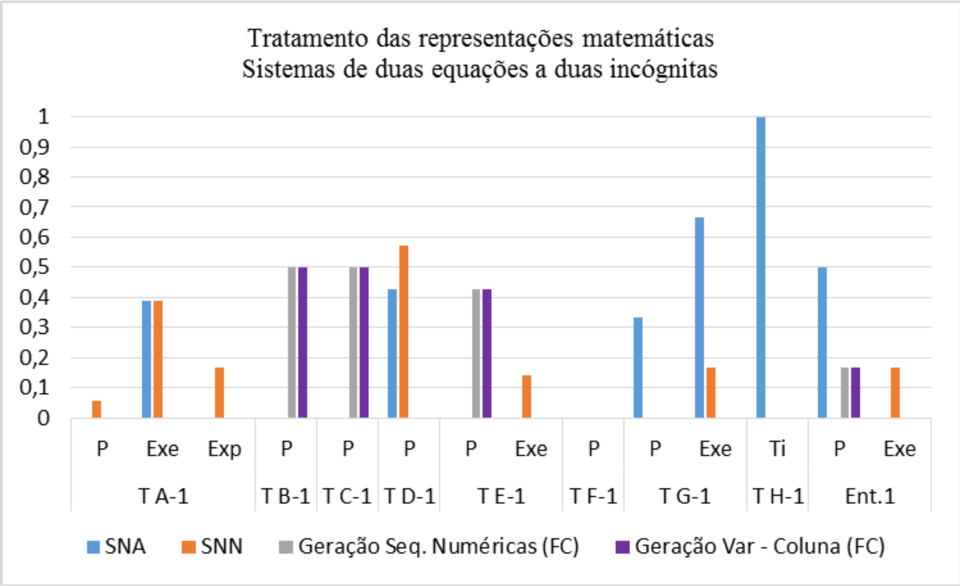

Conversão das representações matemáticas
Sistemas de equações
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
P
Exe
Exp
P
P
P
P
Exe
P
P
Exe
Ti
P
Exe
T A-1
T B-1
T C-1
T D-1
T E-1
T F-1
T G-1
T H-1
Ent.1
LN-SNA
SNN-SNA
Fig. geom./R. pict - SNA
SNA-SNN
Fig. geom./R. pict - SNN
SNN-R.Gráfica
LN-Tab.(FC)
Tab.(FC)-Rep. Gráfica(FC)

Anexo 35

Conversão das representações matemáticas					
		SNA	SNN	Rep. Gráfica (PL)	Rep. Gráfica (FC)
T A-1	P	0,0909	0	0	0
	Exe	0,2727	0,3636	0	0
	Exp	0	0,2727	0	0
T B-1	P	0	0	0	0
T C-1	P	0	0	0	0
T D-1	P	0,4444	0,5556	0	0
T E-1	P	0	0	0	0,3333
	Exe	0	0	0	0,1667
T F-1	P	0	0	0	0
T G-1	P	0,3333	0,1667	0	0
	Exe	0,1667	0,1667	0,1667	0
T H-1	Ti	0	1	0	0
Ent.1	P	0,5	0,1667	0,1667	0
	Exe	0	0	0	0



Tratamento das representações matemáticas					
		SNA	SNN	Geração Seq. Numéricas (FC)	Geração Var - Coluna (FC)
T A-1	P	0	0,0556	0	0
	Exe	0,3889	0,3889	0	0
	Exp	0	0,1667	0	0
T B-1	P	0	0	0,5	0,5
T C-1	P	0	0	0,5	0,5
T D-1	P	0,4286	0,5714	0	0
T E-1	P	0	0	0,4286	0,4286
	Exe	0	0,1429	0	0
T F-1	P	0	0	0	0
T G-1	P	0,3333	0	0	0
	Exe	0,6667	0,1667	0	0
T H-1	Ti	1	0	0	0
Ent.1	P	0,5	0	0,1667	0,1667
	Exp	0	0,1667	0	0



Anexo 36: Proporcionalidade Inversa. Representações gráficas (Carolina)

Tabela 8.2 - Distribuição das representações e métodos utilizados por Carolina no estudo do tópico Proporcionalidade inversa. Representações gráficas. (%)

Tarefas (Lápis e papel / folha de cálculo)				A-2		B-2		C-2		D-2		E-2		Ent. 2		Métodos
				P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	
Representações com lápis e papel	Linguagem natural		Dados do enunciado	20	68	0	20	0	5,6	0	44,4	0	0	0	51,7	MI
			Identificação de incógnitas	4		0		0		0		0		6,5		
			Explicação de procedimentos	16		0		0		0		0		0		
			Resposta	28		20		5,6		44,4		76		45,2		
			Outros	0		8	8	0	0	5,6	5,6	8	0	3,2	3,2	
	Sistemas de notação	Numérico	Cálculos por substituição	0	20	0	12	0	11,1	3	14,1	4	0	12,9	25,8	
			Cálculos por operações inversas	4		0		0		0		0		0		MT
			Outros	16		12		11,1		11,1		12		12,9		MI
		Algébrico	Escrita de expressões algébricas	0	4	8	12	0	16,7	0	22,3	0	0	3,2	12,9	MF
			Escrita de exp alg. Prop. Inversa	0		4		16,7		16,7		0		6,5		
			Recurso a fórmulas	0		0		0		5,6		0		0		
			Resolução de equações do 1.º grau	4		0		0		0		0		3,2		
			Outros	0		0		0		0		0		0		
	Pictóricas			8	8	0	0	0	0	0	0	0	0	3,2	3,2	MI
	Gráficas			0	0	8	8	11,1	11,1	0	0	0	0	3,2	3,2	MF
Representações na folha de cálculo	Linguagem natural		Dados do enunciado			0	8	0	11,1							MIFC
			Nomeação de colunas			8		11,1								
			Explicação de procedimentos			0		0								
			Resposta			0		0								
	Registo numérico	Sequências	Com incremento constante			8	16	11,1	22,2							MTFC
			Com incremento nulo			8		11,1								
	Registo de fórmulas		Variável célula			0	8	0	11,1							
			Variável coluna			8		11,1								
	Gráficos		Gráfico de dispersão			8	8	11,1	11,1							
	Form. cond. /Realçar células		Identificar a resposta			0	0	0	0							MIFC

Tarefa A2								
	Papel e lápis				Transformações das representações		Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica			
1	x				Conversão (LN-SNA)	Tratamento (SNA)	LN.(R)	
					Atividade de geração	Atividade de transformação	disposição tabular	Regra de três simples
2	x						LN.(R+Exp)	
3	x				Conversão (LN-Rep.pictorica)	Tratamento (SNN)	LN.(R+Exp)	
4	x				Conversão (LN-SNN)	Tratamento (SNN) op inv	LN.(R+Exp)	Operação inversa
5	x					Tratamento (SNN)	LN.(R)	
6	x					Tratamento (SNN)	LN.(R)	
7	x							Errado
								Regra de três simples
8	x				Conversão (LN-Rep. Pictóricas)	Tratamento (SNN)	LN.(R)	
9		x					LN.(R+Exp)	

Anexo 36

Tarefa B2													
	Papel e lápis				Folha cálculo				Transformações das representações Atividade algébrica			Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	P	Ex	Ep	TI					
1		x							Conversão (LN-SNN)	Tratamentos SNN			
1.1		x										LN.(R+Exp)	
2.1					x				Conversão (LN-Tab.FC)	Tratamentos (Seq. numéricas) Construção variáveis	Tratamentos (var. coluna) Estabelecimento de relações Atividade de geração	LN.(R)	
2.2		x							Conversão (Tab. FC-SNA) Escrita de expressão algébrica Atividade de geração				Escrita expressão algébrica proporcionalidade inversa errada
2.3		x				x			Conversão (Tab.FC- Rep. gráfica)	Conversão (Rep gráfica FC- Rep gráfica PL)			Hipérbole
3.1					x				Conversão LN-Tab. (fc)	Tratamentos (seq. numéricas) Construção das variáveis	Tratamentos (var. coluna) Estabelecimento de relações Atividade de geração	LN.(R)	
3.2		x				x			Conversão (Tab. FC- Repr gráfica FC)	Conversão (Rep gráfica FC- Rep gráfica PL)			
3.3		x										LN.(R)	
3.4		x										LN.(R)	
3.5		x							Conversão (Tab. FC-SNA) Escrita de expressão algébrica Atividade de geração				
3.6		x										LN.(R)	

Tarefa C2													
	Papel e lápis				Folha cálculo				Transformações das representações			Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica				
1		x							Conversão (LN-SNN)				
1.1					x				Conversão (LN-Tab.FC)	Tratamentos (Seq. numéricas) Construção variáveis	Tratamentos (var. coluna) Estabelecimento de relações Atividade de geração		
1.2		x							Conversão (Tab. FC-SNA) Escrita de expressão algébrica Atividade de geração				Escrita expressão algébrica proporcionalidade inversa
1.3		x				x			Conversão (Tab.FC- Rep. gráfica)	Conversão (Rep gráfica FC- Rep gráfica PL)			Erro em parte da representação gráfica
2		x							Conversão (LN-SNN)				
2.1					x				Conversão (LN-Tab. FC)	Tratamentos (seq. numéricas) Construção das variáveis	Tratamentos (var. coluna) Estabelecimento de relações Atividade de geração		
2.2		x							Conversão (Tab. FC-SNA) Escrita de expressão algébrica Atividade de geração				Escrita expressão algébrica proporcionalidade inversa
2.3		x				x			Conversão (Tab.FC- Rep. gráfica)	Conversão (Rep gráfica FC- Rep gráfica PL)			Hipérbole
3		x										LN.(R+Exp)	
4		x											Não responde

Anexo 36

Tarefa D2									
	Papel e lápis				Transformações das representações			Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI					
1.1		X			Conversão (SNA<->Rep. Gráfica)	Conversão (SNA-SNN)	Tratamentos SNN	LN.(R) Correspondência entre rep. Gráfica e expressão algébrica	Troca duas repr gráficas
1.2		X			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)			LN.(R) Interpretação tipo de proporcionalidade e indicação de constante	
2.1		X						LN.(R) Interpretação rep. Gráfica	
2.2		X			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)			Indicação da constante proporcionalidade	
2.3		X			Conversão (Rep. gráfica-SNA) Atividade de geração		Tratamento (SNN)	LN.(R)	Escrita expressão algébrica
3.1	X				Conversão (SNN-SNA) Recurso a formula d=vxt Atividade de geração				Escrita expressão algébrica
3.2		X						LN.(R+exp) Interpretação tabela	
3.3		X						LN.(R+exp)	
3.4		X			Tratamento SNA Atividade de Transformação				Escrita expressão algébrica proporcionalidade inversa
4.1		X							Não responde
4.2		X			Conversão (tabela SNN-SNA) escrita exp. algébrica Atividade de geração				
5.1		X			Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamento (SNN)		LN.(R)	
5.2		X			Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamento (SNN)		LN.(R)	

Tarefa E2								
	Papel e lápis				Transformações das representações		Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica			
1.1		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)		LN.(R)	
							Interpretação rep. Gráfica	
1.2		x					LN.(R)	
							Interpretação rep. Gráfica	
1.3		x					LN.(R)	
							Interpretação rep. Gráfica	
1.4		x					LN.(R)	
							Interpretação rep. Gráfica	
1.5		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)	Tratamento (SNN)		
							Interpretação rep. Gráfica	
1.6		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)	Tratamento (SNN)	LN.(R)	
							Interpretação rep. Gráfica	
2.1		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)			
2.2		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)		LN.(R)	
							Interpretação rep. Gráfica	
2.3		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)		LN.(R)	
							Interpretação rep. Gráfica	
2.4		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)			
							Interpretação rep. Gráfica	
2.5		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)	Tratamento (SNN)		
							Interpretação rep. Gráfica	
2.6		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)		LN.(R)	
							Interpretação rep. Gráfica	
2.7		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)		LN.(R)	
							Interpretação rep. Gráfica	
2.8		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)			
							Interpretação rep. Gráfica	
2.9		x					LN.(R+Exp)	
3.1		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN) cps	Tratamento (SNN)	LN.(R+Exp)	

Tipo	P	Ex	Ep	TI	Transformações das representações		Outros	Métodos formais
3.2		x			Conversão (SNA-Rep.gráfica-SNN)		LN.(R+Exp)	
3.3		x			Tratamento (SNN)		LN.(R+Exp)	
4		x					LN.(R+Exp)	

Entrevista 2

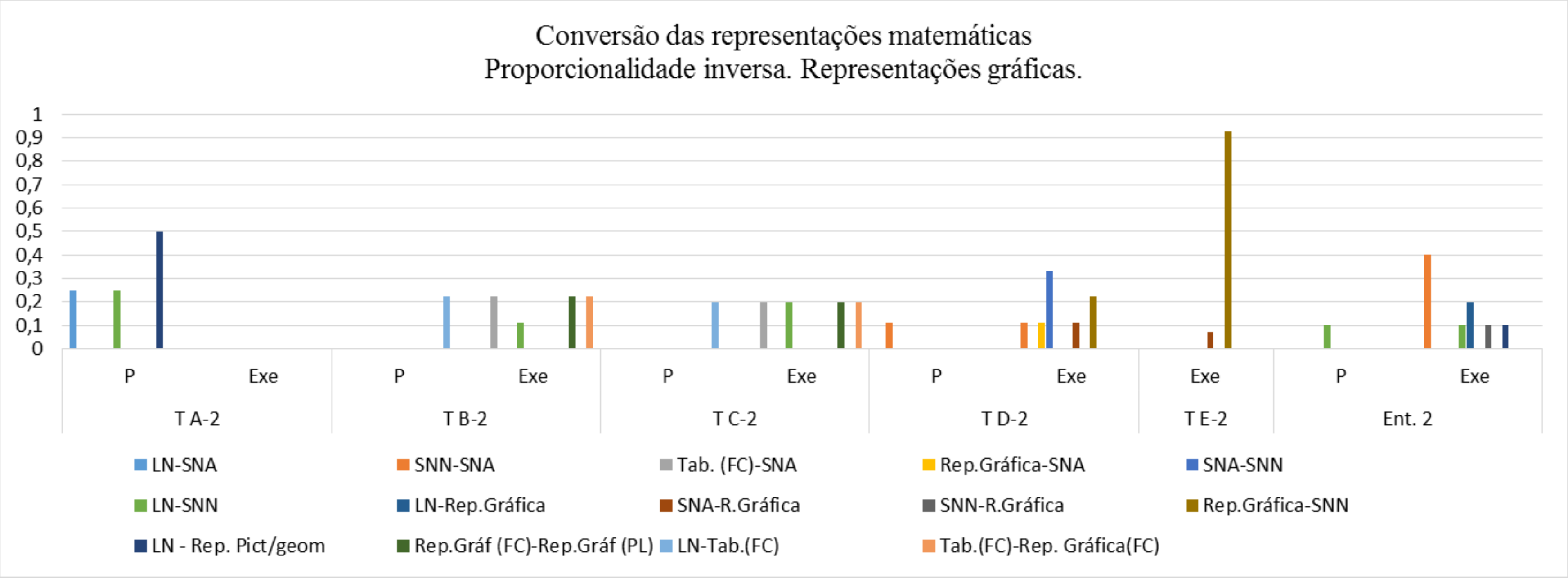
	Papel e lápis				Transformações das representações		Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI				
1.1		x			Conversão (LN-Rep.geom)	Conversão (SNN-SNA)	Tratamentos SNA LN.(R)	Regra de três simples
1.2		x			Conversão (LN-SNN)	Tratamentos SNN	LN.(R+Exp)	
1.3		x					LN.(R+Exp)	
1.4		x					LN.(R+Exp)	
1.5		x				Conversão (LN-Rep. Gráfica)	LN.(R+Exp)	
2.1		x			Tratamento (SNN)		LN.(R)	
2.2		x					LN.(R+Exp)	
2.3		x			Conversão (tabela SNN-SNA) escrita exp. algébrica Atividade de geração			Escrita expressão algébrica
2.4		x					LN.(R)	
3.1		x			Tratamentos (SNN)			
3.2		x					LN.(R)	

3.3		x			Conversão (tabela SNN-SNA) escrita exp. algébrica			Escrita expressão algébrica
					Atividade de geração			
3.4		x					LN.(R)	
4	x				Conversão (LN-SNN)	Tratamento (SNN)	LN.(R)	
							construção tabela	
5.1		x			Tratamento (SNN)		LN.(R+Exp)	
5.2		x			Tratamento (SNN)		LN.(R)	
5.3		x			Tratamento (SNN)		LN.(R)	
5.4		x			Conversão (tabela SNN-SNA) escrita exp. algébrica			Escrita expressão algébrica
					Atividade de geração			
5.5		x			Conversão (SNN<-> Rep.Gráfica)		LN.(R+Exp)	
							Interpretação de correspondencia ente rep. Gráfica e exp algébrica	
6		x			Conversão LN <-> R. Grafica		LN.(R+Exp)	
							Interpretação de correspondência ente rep. Gráfica e exp algébrica	

Anexo 36

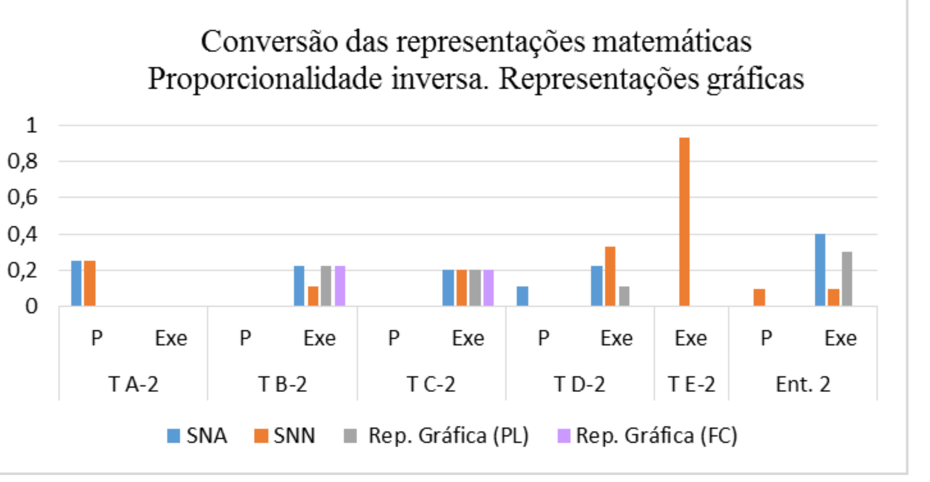
Súmula das conversões das representações matemáticas- Proporcionalidade inversa (freq. relativa)

		Conversão das representações matemáticas													
		LN-SNA	SNN-SNA	Tab. (FC)-SNA	Rep.Gráfica-SNA	SNA-SNN	LN-SNN	LN-Rep.Gráfica	SNA-R.Gráfica	SNN-R.Gráfica	Rep.Gráfica-SNN	LN - Rep. Pictorica/geometrica	Rep.Gráfica (FC)-Rep.Gráfica (PL)	LN-Tab.(FC)	Tab.(FC)-Rep. Gráfica(FC)
T A-2	P	0,25	0	0	0	0	0,25	0	0	0	0	0,5	0	0	0
	Exe	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T B-2	P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,2222	0
	Exe	0	0	0,2222	0	0	0,1111	0	0	0	0	0	0,2222	0	0,2222
T C-2	P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,2	0
	Exe	0	0	0,2	0	0	0,2	0	0	0	0	0	0,2	0	0,2
T D-2	P	0	0,1111	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Exe	0	0,1111	0	0,1111	0,3333	0	0	0,1111	0	0,2222	0	0	0	0
T E-	Exe	0	0	0	0	0	0	0	0,0714	0	0,9286	0	0	0	0
Ent. 2	P	0	0	0	0	0	0,1	0	0	0	0	0	0	0	0
	Exe	0	0,4	0	0	0	0,1	0,2	0	0,1	0	0,1	0	0	0

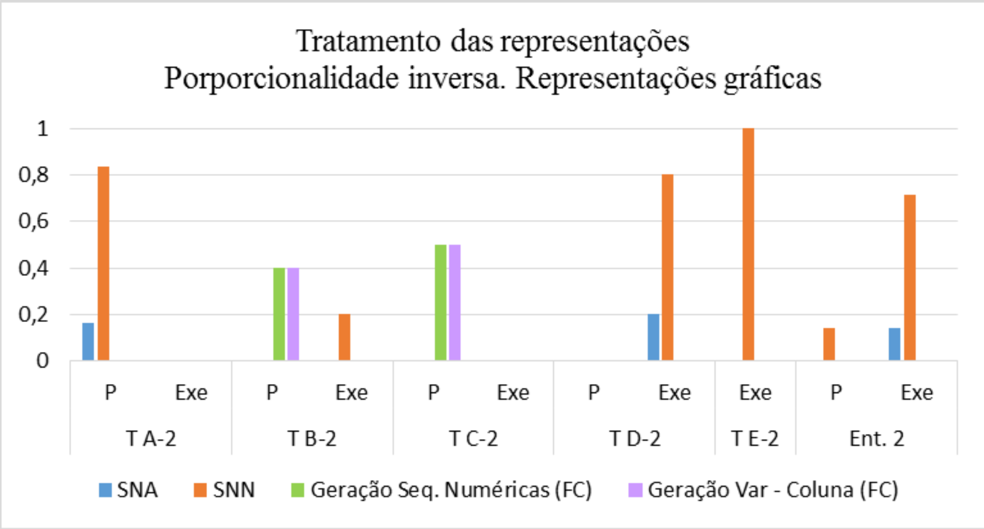

Conversão das representações matemáticas
Proporcionalidade inversa. Representações gráficas.
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
P
Exe
P
Exe
P
Exe
P
Exe
Exe
P
Exe
T A-2
T B-2
T C-2
T D-2
T E-2
Ent. 2
LN-SNA
SNN-SNA
Tab. (FC)-SNA
Rep.Gráfica-SNA
SNA-SNN
LN-SNN
LN-Rep.Gráfica
SNA-R.Gráfica
SNN-R.Gráfica
Rep.Gráfica-SNN
LN - Rep. Pict/geom
Rep.Gráf (FC)-Rep.Gráf (PL)
LN-Tab.(FC)
Tab.(FC)-Rep. Gráfica(FC)

Anexo 36

Conversão das representações matemáticas					
		SNA	SNN	Rep. Gráfica (PL)	Rep. Gráfica (FC)
T A-2	P	0,25	0,25	0	0
	Exe	0	0	0	0
T B-2	P	0	0	0	0
	Exe	0,2222	0,1111	0,2222	0,2222
T C-2	P	0	0	0	0
	Exe	0,2	0,2	0,2	0,2
T D-2	P	0,1111	0	0	0
	Exe	0,2222	0,3333	0,1111	0
T E-2	Exe	0	0,9286	0	0
Ent. 2	P	0	0,1	0	0
	Exe	0,4	0,1	0,3	0



Tratamento das representações matemáticas					
		SNA	SNN	Geração Seq. Numéricas (FC)	Geração Var - Coluna (FC)
T A-2	P	0,1667	0,8333	0	0
	Exe	0	0	0	0
T B-2	P	0	0	0,4	0,4
	Exe	0	0,2	0	0
T C-2	P	0	0	0,5	0,5
	Exe	0	0	0	0
T D-2	P	0	0	0	0
	Exe	0,2	0,8	0	0
T E-2	Exe	0	1	0	0
Ent. 2	P	0	0,1429	0	0
	Exe	0,1429	0,7143	0	0



Anexo 37: Equações do 2.º grau a uma incógnita (Carolina)

Tabela 8.3 - Distribuição das representações e métodos utilizados por Carolina no estudo do tópico Equações do 2.º grau a uma incógnita (%).

Tarefas (Lápis e papel / folha de cálculo)				A-3		B-3		C-3		D-3		E-3		F-3		G-3		Ent. 3		Métodos
				P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	
Representações com lápis e papel	Linguagem natural		Dados do enunciado	0	15,39	0	37,5	0	3,57	0	29,42	0	33,33	0	21,21	0	31,25	0	5,88	MI
			Identificação de incógnitas	3,85		12,5		0		0		0		0		12,5		5,88		
			Explicação de procedimentos	3,85		6,25		0		14,71		0		3,03		0		0		
			Resposta	7,69		18,75		3,57		14,71		33,33		18,18		18,75		0		
			Outros	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	
	Sistemas de notação	Numérico	Cálculos por substituição	26,92	30,77	6,25	6,25	14,29	14,29	2,94	5,88	16,67	25	9,09	24,24	9,38	9,38	23,53	47,06	
			Cálculos por operações inversas	0		0		0		0		0		0		0		0		MT
			Outros	3,85		0		0		2,94		8,33		15,15		0		23,53		MI
		Algébrico	Escrita de expressões algébricas	23,08	53,84	0	18,75	32,14	75	0	11,76	0	0	0	39,39	0	49,38	0	35,29	MF
			Simplificação de expressões	7,69		0		25		2,94		0		9,09		0		0		
			Recurso a fórmulas	0		0		0		0		0		0		0		0		
			Escrita de equações do 1.º grau	0		0		0		0		0		3,03		0		0		
			Resolução de equações do 1.º grau	0		0		0		0		0		0		0		0		
			Casos notáveis da multiplicação	0		0		0		0		0		0		0		0		
			Escrita de equações do 2.º grau	15,38		18,75		0		5,88		0		0		31,25		11,76		
			R. de equações do 2.º grau R. Q.	7,69		0		0		0		0		0		0		5,88		
			R. de equações do 2.º grau L.A. P.	0		0		17,86		2,94		0		0		0		0		
			R. de equações do 2.º grau F. R.	0		0		0		0		0		24,24		28,13		17,65		
			R. eq. Grau 4 (fact. dada) L. A. P.	0		0		0		0		0		0		0		0		
			Factorização	0		0		0		0		0		0		0		0		
			Outros	0		0		0		0		0		3,03		0		0		
	Pictóricas			0	0	0	0	7,14	7,14	0	0	00	0	0	0	0	0	0	0	MI
	Gráficas			0	0	0	0	0	0	5,88	5,88	8,33	8,33	15,15	15,15	0	0	11,76	11,76	MF
Representações na folha de cálculo	Linguagem natural		Dados do enunciado			0	12,5			0	11,76	0	8,33							MIFC
			Nomeação de colunas			12,5				11,76		8,33								
			Explicação de procedimentos			0				0		0								
			Resposta			0				0		0								
	Registo numérico	Sequências	Com incremento constante			12,5	12,5			11,76	11,76	8,33	8,33							MTFC
			Com incremento nulo			0				0		0								

	Registo de fórmulas	Variável célula		0	12,5			0	11,76	0	8,33				
		Variável coluna		12,5				11,76		8,33					
	Gráficos	Gráfico de dispersão		0	0			11,76	11,76	8,33	8,33				
	Form. cond. /Realçar células	Identificar a resposta		0	0	0	0	0	0	0	0				MIFC

Tópico: Equações do 2.º grau a uma incógnita

Tarefa A3										
	Papel e lápis				Transformações das representações				Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica					
1.1		x			Conversão (Rep. Pictorica-SNN)	Tratamentos (SNN)	Conversão (Pict ou SNN- SNA)		LN (R)	Escrita expressão geral (grau 2)
							Atividade de geração		Usa tabela	
1.2		x			Conversão (Rep. Pictorica-SNN)	Tratamentos (SNN)	Conversão (Pict ou SNN- SNA)		LN (R)	Escrita expressão geral (grau 2)
							Atividade de geração		Usa esquema setas para indicar incremento	
1.3	x									Escrita equação com expressão geral (grau 2)
										Incompleta
1.4	x				Conversão (Rep. Pict-SNN-SNA)					Escrita expressão geral (grau 2)
					Atividade de geração					
2.1		x			Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamentos (SNN)				
2.2		x			Tratamentos (SNA) op inv					Noção de raiz quadrada
					Atividade de transformação					
3.1		x			Conversão (Fig.geom-SNA) recurso formula perímetro	Tratamentos (SNA)				Simplificação exp. grau 1
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
3.2		x			Conversão (Fig.geom-SNA) recurso formula área retângulo	Tratamentos (SNA)				Desembaraçar parenteses e simplificação exp. grau 2
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
3.3		x			Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamentos (SNN)			LN.(R+Exp)	

4.1		x			Conversão (Fig.geom-SNA) recurso formula área -escrita equação	Tratamentos (SNA)				Resolução equação 2.º grau noção de raíz quadrada
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
4.2		x			Conversão (Fig.geom-SNA) escrita equação	Tratamentos (SNA)			Incompleta (deveria usar lei do anulamento produto)	
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
5.1		x								Não responde
5.2.1		x								Não responde
5.2.2	x									Não responde
5.2.3		x								Não responde
6	x									Não responde
7.1		x								Não responde
7.2		x								Não responde
7.3		x								Não responde
7.4		x								Não responde

Tarefa B3																
	Papel e lápis				Folha cálculo				Transformações das representações						Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica							
1.1					x				Conversão (LN-Tab.FC)	Tratamentos (seq. numéricas)			Tratamentos (var. coluna) Estabelecimento de relações		LN.(R)	
										Construção das variáveis			Atividade de geração			
1.2		x							Conversão (Tab. FC-SNA) Escrita de equação2.º grau						LN.(R)	Escrita equação 2.º grau
									Atividade de geração							
1.3		x							Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamentos (SNN)					LN.(R+Exp)	
1.4					x				Conversão (LN-Tab.FC)	Tratamentos (seq. numéricas)	Tratamentos (var. coluna) Estabelecimento de relações		Conversão (Tab. FC-SNA)		LN.(R)	Escrita equação 2.º grau
										Construção das variáveis	Atividade de geração		Atividade de geração			
1.5	x								Conversão (LN-SNA)						LN (R+Exp)	Escrita equação 2.º grau

Anexo 37

Tarefa C3										
	Papel e lápis				Transformações das representações				Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica					
1.1		x			Tratamento (SNA) Res. Eq. 2.º grau					Fatorização
					Atividade de geração					Lei do anulamento do produto
1.2		x			Tratamento (SNA) Res. Eq. 2.º grau					Fatorização
					Atividade de geração					Lei do anulamento do produto
1.3		x			Tratamento (SNA) Res. Eq. 2.º grau					Fatorização
					Atividade de geração					Lei do anulamento do produto
1.4		x			Tratamento (SNA) Res. Eq. 2.º grau					Fatorização
					Atividade de geração					Lei do anulamento do produto
1.5		x			Tratamento (SNA) Res. Eq. 2.º grau					Fatorização
					Atividade de geração					Lei do anulamento do produto
1.6		x			Tratamento (SNA) Res. Eq. 2.º grau					Fatorização
					Atividade de geração					Lei do anulamento do produto
2.1		x			Conversão (Fig. Geom- SNN) área quadrado	Tratamentos SNN	Conversão (Fig. Geom- SNN) áreas retangulos	Tratamentos SNN		
2.2		x			Conversão (Fig. Geom- SNA) área quadrado		Conversão (Fig. Geom- SNA) áreas retangulos	Tratamentos SNA		
					Atividade de geração		Atividade de geração	Atividade transformação		
2.3		x			Conversão (Fig. Geom- SNA) área quadrado		Conversão (Fig. Geom- SNA) áreas retangulos	Tratamentos SNA		
					Atividade de geração		Atividade de geração	Atividade transformação		
2.4		x			Conversão (Fig. Geom- SNA) área quadrado		Conversão (Fig. Geom- SNA) áreas retangulos	Tratamentos SNA		
					Atividade de geração		Atividade de geração	Atividade transformação		
3		x			Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamentos (SNN)				
4.1		x			Tratamento (SNA) resolução eq. 2.º grau				Rep. Pictórica quadrado	Fatorização
					Atividade de transformação					Lei do anulamento do produto
4.2		x			Tratamento (SNA) resolução eq. 2.º grau				Rep. Pictórica quadrado	Fatorização

					Atividade de transformação					Lei do anulamento do produto
5		x			Tratamento (SNA) resolução eq. 4.º grau					Fatorização
					Atividade de transformação					Lei do anulamento do produto
6		x			Tratamento (SNA) resolução eq. 4.º grau					Fatorização
					Atividade de transformação					Lei do anulamento do produto + noção raiz quadrada
7.1		x			Tratamento (SNA) resolução eq. 2.º grau					
					Atividade de transformação					Lei do anulamento do produto
7.2		x			Tratamento (SNA) resolução eq. 2.º grau					Fatorização
					Atividade de transformação					
7.3		x							LN (R+Exp)	Errado
7.4.1		x			Conversão (SNN-SNA)	Tratamento (SNA) simplificação-desembaraçar parenteses				Escrita de equação 2.º grau na forma canónica
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
7.4.2		x			Conversão (SNN-SNA)	Tratamento (SNA) simplificação-desembaraçar parenteses				Escrita de equação 2.º grau na forma canónica
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
7.4.3		x			Conversão (SNN-SNA)	Tratamento (SNA) simplificação-desembaraçar parenteses				Escrita de equação 2.º grau na forma canónica
					Atividade de geração	Atividade de transformação				

Anexo 37

Tarefa D3															
	Papel e lápis				Folha cálculo				Transformações das representações					Outros	Métodos formais
									Atividade algébrica						
Tipo	P	Ex	Ep	TI	P	Ex	Ep	TI							
1.1					x				Conversão (SNA-Tab. FC)	Tratamentos (Seq. Numéricas) Construção das variáveis	Tratamentos (Var-coluna) Estabelecimento de relações Atividade de geração	Conversão (Tab. FC-Rep. Gráfica FC)	Conversão (Rep. Gráfica FC- Rep. Gráfica PL)		
1.2		x												LN.(R)	
1.3		x												LN.(R)	
1.4		x								Tratamentos SNA Atividade de transformação				LN.(R)	Fatorização Lei anulamento
1.5		x												LN.(R)	
1.6		x							Tratamentos (SNA) Atividade de transformação						
1.7		x							Conversão (Tab. FC-SNA) Atividade de geração					LN (Exp)	
1.8		x												LN (R+Exp)	
1.9		x							Conversão (SNA-Tab. FC)	Tratamentos (Seq. Numéricas) Construção das variáveis	Tratamentos (Var-coluna) Estabelecimento de relações Atividade de geração	Conversão (Tab. FC-Rep. Gráfica FC)	Conversão (Rep. Gráfica FC- Rep. Gráfica PL)		

Tarefa E3														
	Papel e lápis				Folha cálculo				Transformações das representações				Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica					
1.1					x				Conversão (SNA-Tab.FC)	Tratamentos (Seq. Numéricas)	Tratamentos (Var. coluna) estabelecimento de relações	Conversão (Tab. FC- Rep. Gráfica	LN.(R)	
										Construção das variáveis	Atividade de geração			
1.2		x											LN.(R)	
1.3		x								Tratamentos (SNN)			LN.(R+Exp)	
1.4		x											LN.(R+Exp)	
1.5		x							Conversão (Rep. Gráfica FC- Rep. Gráfica PL)					

Anexo 37

Tarefa F3										
	Papel e lápis				Transformações das representações				Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica					
1.1		x			Tratamento (SNA) Resolução eq. 2.º grau	Conversão (SNA-Rep.Gráfica)			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de transformação					
1.2		x			Tratamento (SNA) Resolução eq. 2.º grau	Conversão (SNA-Rep.Gráfica)			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de transformação					
1.3		x			Tratamento (SNA) Resolução eq. 2.º grau	Conversão (SNA-Rep.Gráfica)			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de transformação					
1.4		x			Tratamento (SNA) Resolução eq. 2.º grau	Conversão (SNA-Rep.Gráfica)			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de transformação					
1.5		x			Tratamento (SNA) Resolução eq. 2.º grau	Conversão (SNA-Rep.Gráfica)			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de transformação					
1.6		x			Tratamento (SNA) Resolução eq. 2.º grau					Fórmula resolvente
					Atividade de transformação					
2.1		x			Tratamento (SNN)					
2.2		x			Tratamento (SNA) Resolução inequação	Tratamentos (SNN)				Resolução inequação
					Atividade de transformação					
2.3		x			Tratamento (SNA) Resolução eq. 1.º grau					
					Atividade de transformação					
3	x				Tratamento (SNA) Resolução eq. 2.º grau				LN.(R+Exp)	Fórmula resolvente
					Atividade de transformação					

Tarefa G3										
	Papel e lápis				Transformações das representações				Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica					
1	X				Conversão (LN-SNA)	Tratamento (SNA) resolução equação 2.º grau			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
2	X				Conversão (LN-SNA)	Tratamento (SNA) simplificação e resolução equação 2.º grau			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
3	X				Conversão (LN-SNA) Fórmula	Tratamento (SNA) simplificação e resolução equação 2.º grau			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
4	X				Conversão (LN-SNA) Fórmula	Tratamento (SNA) simplificação e resolução equação 2.º grau			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
5	X				Conversão (LN-SNA)	Tratamento (SNA) simplificação e resolução equação 2.º grau	Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamentos SNN	LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
6	X				Conversão (LN-SNA)	Tratamento (SNA) simplificação e resolução equação 2.º grau	Conversão (SNA-SNN) cps	Tratamentos SNN	LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
7.1	X				Conversão (LN-SNA)	Tratamento (SNA) simplificação e resolução equação 2.º grau			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
7.2	X				Conversão (LN-SNA)	Tratamento (SNA) simplificação			LN.(R)	
					Atividade de geração	Atividade de transformação			Raiz do delta não	
8	X				Conversão (LN-SNA) Teorema Pitágoras	Tratamento (SNA) simplificação e resolução equação 2.º grau	Tratamentos SNN			Noção raiz quadrada
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
9	X				Conversão (LN-SNA) Área círculo	Tratamento (SNA) simplificação e resolução equação 2.º grau				Noção raiz quadrada
					Atividade de geração	Atividade de transformação				
10	X				Conversão (LN-SNA)	Tratamento (SNA) simplificação e resolução equação 2.º grau			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de geração	Atividade de transformação				

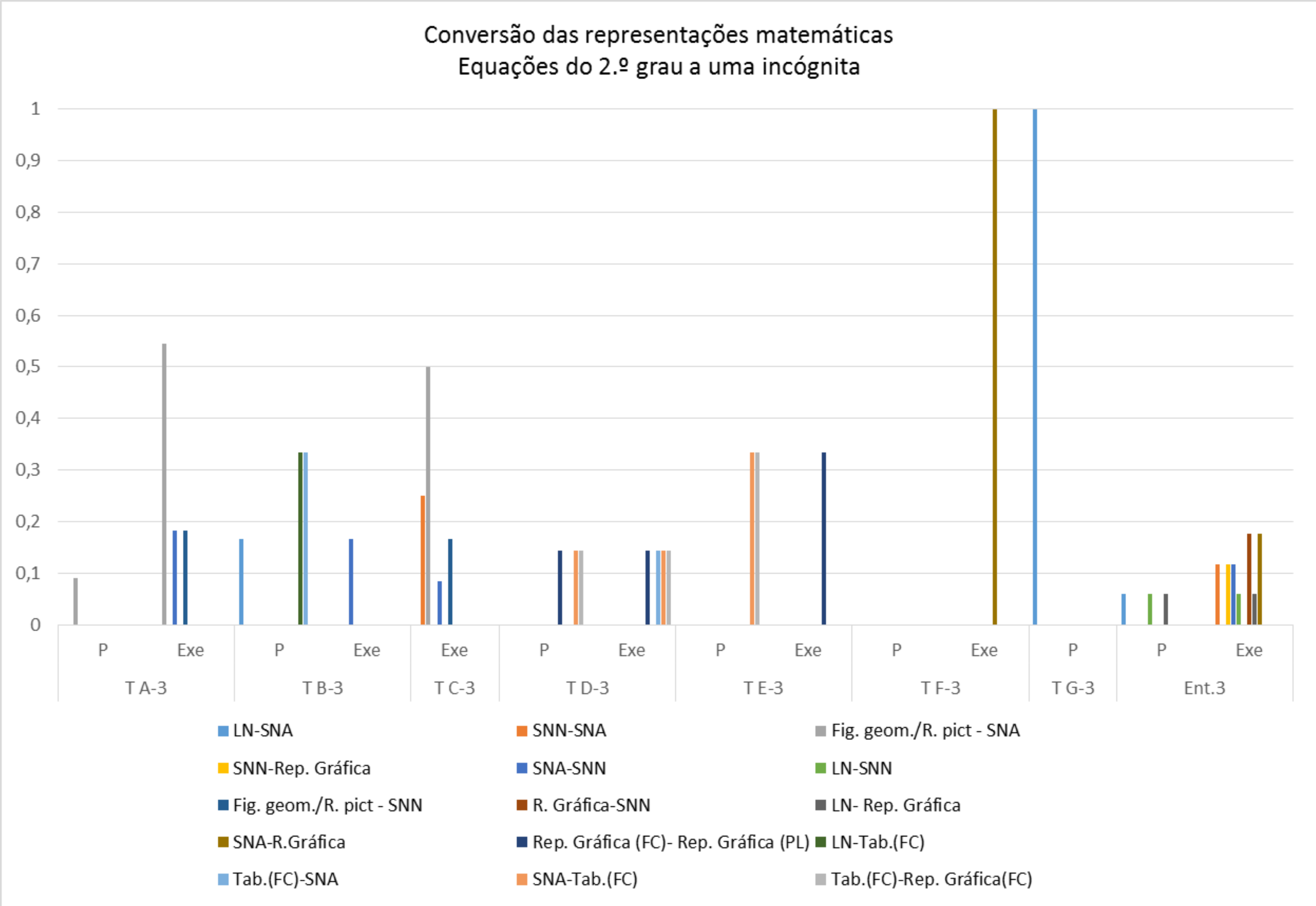
Anexo 37

Ent. 3									
	Papel e lápis				Transformações das representações			Outros	Métodos formais
Tipo	P	Ex	Ep	TI	Atividade algébrica				
1.1		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)			LN.(R)	
1.2		x			Conversão (Rep. Gráfica-SNN)			LN.(R)	
1.3		x			Conversão (SNA-Rep. Gráfica)	Conversão (Rep.Gráfica-SNN)		LN.(R)	
1.4		x			Conversão (SNA-SNN) cps Tratamentos SNN	Conversão (SNN-Rep.Gráfica)		LN.(R)	
2.1		x			Conversão (SNA-SNN)	Tratamentos SNN		LN.(R)	
2.2	x				Conversão (LN-Rep gráfica)	Conversão (Rep gráfica-LN)		LN.(R)	
2.3	x				Conversão (LN-tabela SNN)			LN.(R)	
2.4		x			Tratamentos (SNA) resolução equação			LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de transformação				
2.5		x			Conversão (SNN- Rep. Gráfica)				
3.1		x			Tratamentos (SNA) resolução equação	Conversão (SNN+ SNA-Rep. Gráfica)			Noção Raiz
					Atividade de transformação				
3.2		x							Errada
3.3		x			Tratamentos (SNA) simplificação e resolução equação	Conversão (SNN+ SNA-Rep. Gráfica)			Fórmula resolvente
					Atividade de transformação				
4	x								Não resolve
5	x				Conversão (LN-SNA) escrita equação teorema de Pitágoras	Tratamentos (SNA) simplificação e resolução equação	Tratamentos SNN	LN.(R)	Fórmula resolvente
					Atividade de geração	Atividade de transformação			

Súmula da conversão das representações matemáticas- Equações do 2.º grau a uma incógnita (freq. Relativa simples)

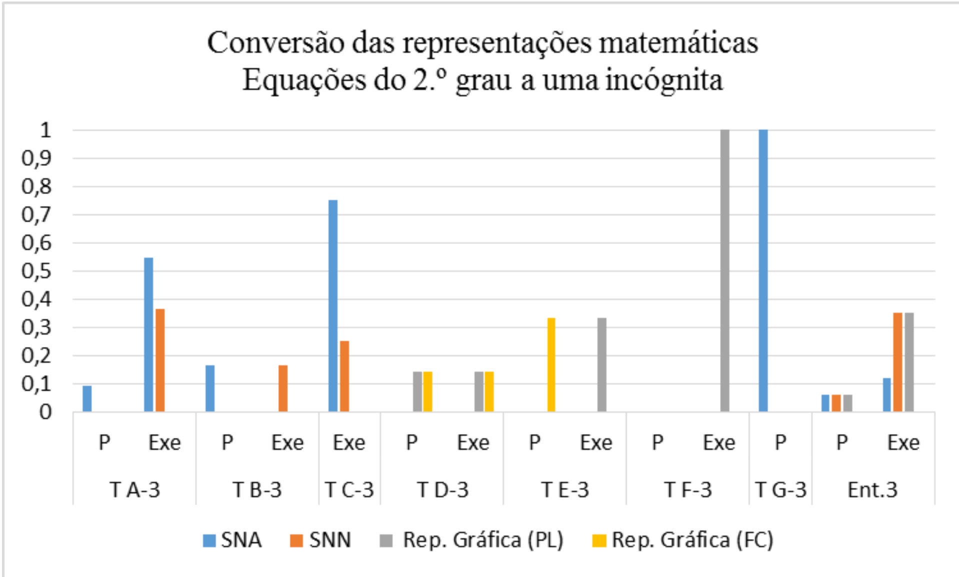
		Conversão das representações matemáticas														
		LN-SNA	SNN-SNA	Fig. geom./ R. pict - SNA	SNN-Rep. Gráfica	SNA-SNN	LN-SNN	Fig. geom./ R. pict - SNN	R. Gráfica-SNN	LN- Rep. Gráfica	SNA-R.Gráfica	Rep. Gráfica (FC)-Rep. Gráfica (PL)	LN-Tab.(FC)	Tab.(FC)-SNA	SNA-Tab.(FC)	Tab.(FC)-Rep. Gráfica(FC)
T A-3	P	0	0	0,0909	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Exe	0	0	0,5455	0	0,1818	0	0,1818	0	0	0	0	0	0	0	0
T B-3	P	0,166	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,3333	0,3333	0	0
	Exe	0	0	0	0	0,1667	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T C-3	Exe	0	0,25	0,5	0	0,0833	0	0,1667	0	0	0	0	0	0	0	0
T D-3	P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,1429	0	0	0,1429	0,1429
	Exe	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,1429	0	0,1429	0,1429	0,1429
T E-3	P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,3333	0,3333
	Exe	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,3333	0	0	0	0
T F-3	P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	Exe	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T G-3	P	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ent.3	P	0,058	0	0	0	0	0,0588	0	0	0,0588	0	0	0	0	0	0
	Exp	0	0,1176	0	0,1176	0,1176	0,0588	0	0,1765	0,0588	0,1765	0	0	0	0	0

Anexo 37



Conversão das representações matemáticas
Equações do 2.º grau a uma incógnita
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
P
Exe
T A-3
T B-3
T C-3
T D-3
T E-3
T F-3
T G-3
Ent.3
LN-SNA
SNN-SNA
Fig. geom./R. pict - SNA
SNN-Rep. Gráfica
SNA-SNN
LN-SNN
Fig. geom./R. pict - SNN
R. Gráfica-SNN
LN- Rep. Gráfica
SNA-R.Gráfica
Rep. Gráfica (FC)- Rep. Gráfica (PL)
LN-Tab.(FC)
Tab.(FC)-SNA
SNA-Tab.(FC)
Tab.(FC)-Rep. Gráfica(FC)

Conversão das representações matemáticas					
		SNA	SNN	Rep. Gráfica (PL)	Rep. Gráfica (FC)
T A-3	P	0,0909	0	0	0
	Exe	0,5455	0,3636	0	0
T B-3	P	0,1667	0	0	0
	Exe		0,1667	0	0
T C-3	Exe	0,75	0,25	0	0
T D-3	P	0	0	0,1429	0,1429
	Exe	0	0	0,1429	0,1429
T E-3	P	0	0	0	0,3333
	Exe	0	0	0,3333	0
T F-3	P	0	0	0	0
	Exe	0	0	1	0
T G-3	P	1	0	0	0
Ent.3	P	0,0588	0,0588	0,0588	0
	Exe	0,1176	0,3529	0,3529	0



Anexo 37

Tratamento das representações matemáticas					
		SNA	SNN	Geração Seq. Numéricas (FC)	Geração Var - Coluna (FC)
T A-3	P	0	0	0	0
	Exe	0,5	0,5	0	0
T B-3	P	0	0	0,4	0,4
	Exe	0	0,2	0	0
T C-3	Exe	0,9	0,1	0	0
T D-3	P	0	0	0,2	0,2
	Exe	0,2	0	0,2	0,2
T E-3	P	0	0	0,3333	0,3333
	Exe	0	0,3333	0	0
T F-3	P	0,0909	0	0	0
	Exe	0,7273	0,1818	0	0
T G-3	P	0,7857	0,2143	0	0
Ent.3	P	0,1667	0,1667	0	0
	Exe	0,5	0,1667	0	0