



Università degli Studi di Napoli Federico II

Scuola di Dottorato in Ingegneria Industriale

Dottorato di Ricerca in

Ingegneria dei Sistemi Meccanici

XXVIII Ciclo

Sviluppo di una procedura per la valutazione delle prestazioni di un motore termoacustico ad onda stazionaria basata sull'ottimizzazione delle proprietà fisico-strutturali di uno stack non convenzionale

Coordinatore della Scuola di Dottorato

Prof. Ing. Antonio Moccia

Coordinatore del Corso di Dottorato

Prof. Ing. Fabio Bozza

Relatori

Prof. Ing. Rosario Romano

Dott. Ing. Raffaele Dragonetti

Candidato

Sabato Di Filippo

Sommario

INTRODUZIONE	1
1. CAPITOLO 1: LA FENOMENOLOGIA TERMOACUSTICA	3
1.1 Introduzione all'effetto termoacustico.....	3
1.2 Cenni storici.....	4
1.3 Vantaggi dei dispositivi termoacustici.....	8
1.4 I dispositivi e i cicli termoacustici	8
1.5 Parametri chiave	16
1.6 Teoria di Rott e approssimazioni acustiche	17
1.6.1 L'equazione di continuità.....	17
1.6.2 L'equazione della conservazione della quantità di moto	18
1.6.3 La prima legge della termodinamica	19
1.6.4 Ipotesi della teoria di Rott	21
CAPITOLO 2: SIMULAZIONI NUMERICHE CON DELTAEC	25
2.1 Componenti di un motore termoacustico ad onda stazionaria.....	25
2.1.1 Il tubo risuonatore	25
2.1.2 Gli scambiatori di calore	26
2.1.3 Lo stack	27
2.1.4 Il fluido di lavoro.....	28
2.2 Il programma DeltaEC.....	28
2.3 Influenza delle caratteristiche costruttive e geometriche dello stack	32
2.4 Considerazioni su stack convenzionali a geometria regolare	36
CAPITOLO 3: MODELLAZIONE DELLE INTERAZIONI TERMICHE E VISCOSE NEI MATERIALI POROSI	39
3.1 La propagazione del suono nei mezzi porosi.....	39
3.2 Il modello di Johnson-Champoux-Allard	40

3.3	Formulazione delle funzioni termiche e viscosse	41
3.4	I parametri non acustici alla base del modello.....	44
3.5	Validazione della formulazione delle funzioni termiche e viscosse	46
3.6	Influenza della geometria sul calcolo dei parametri	48
CAPITOLO 4: SVILUPPO DI UNA PROCEDURA PER LA VALUTAZIONE DELLE PRESTAZIONI DI UN MOTORE TERMOACUSTICO AD ONDA STAZIONARIA.....		53
4.1	Sviluppo dell’algoritmo di calcolo	53
4.1.1	L’elemento “superficie”	55
4.1.2	Il condotto risonatore.....	55
4.1.3	Gli scambiatori di calore	57
4.1.4	Lo stack	58
4.1.5	Il fluido di lavoro e i materiali.....	59
4.2	Validazione numerica	60
4.3	Analisi energetica degli effetti della tortuosità.....	62
CAPITOLO 5: OTTIMIZZAZIONE DELLE PRESTAZIONI DI UN MOTORE TERMOACUSTICO AD ONDA STAZIONARIA		68
5.1	Applicazione dell’algoritmo di ottimizzazione su uno stack convenzionale.....	68
5.2	Applicazione dell’algoritmo di ottimizzazione su stack con pori a diversa complessità	74
5.3	Applicazione dell’algoritmo di ottimizzazione su stack non convenzionali	76
Risultati e conclusioni		79
Nomenclatura		80

INDICE DELLE TABELLE

Tabella 1: Ordine di grandezza delle oscillazioni di temperatura prodotte in aria da suoni di diverso livello di pressione sonora a temperatura e pressione ambiente.	3
Tabella 2: Parametri geometrici del motore termoacustico simulato in DeltaEC.....	31
Tabella 3: Parametri operativi del motore termoacustico simulato in DeltaEC.....	31
Tabella 4: Valori dei parametri non acustici relativi a pori con crescente valore dell'ampiezza di modulazione.....	52
Tabella 5: Parametri geometrici di input all'algoritmo di ottimizzazione	69
Tabella 6: Parametri operativi di input all'algoritmo di ottimizzazione	69
Tabella 7: Parametri non acustici individuati dalla procedura di ottimizzazione	78

INDICE DELLE FIGURE

Figura 1: Rappresentazione schematica della “fiamma suonante” di Byron Higgins.....	4
Figura 2: Rappresentazione schematica del “tubo di Soundhauss”	5
Figura 3: Rappresentazione schematica del “tubo di Rjike”	5
Figura 4: Schema di un motore termoacustico ad onda stazionaria	9
Figura 5: Schema di un refrigeratore termoacustico ad onda stazionaria	9
Figura 6: Oscillazione di pressione e di velocità in un’onda stazionaria	10
Figura 7: Un’onda stazionaria in istanti temporali successivi.....	10
Figura 8: Oscillazione di pressione e di velocità in un’onda viaggiante.....	11
Figura 9: Un’onda viaggiante in istanti temporali successive.....	11
Figura 10: Rappresentazione schematica di un dispositivo ad onda stazionaria.....	12
Figura 11: Rappresentazione schematica di un dispositivo ad onda viaggiante	12
Figura 12: Prima fase del ciclo termodinamico di un motore termoacustico ad onda stazionaria.	13
Figura 13: Seconda trasformazione del ciclo termodinamico di un motore termoacustico ad onda stazionaria.	14
Figura 14: Terza trasformazione del ciclo termodinamico di un motore termoacustico ad onda stazionaria.	14
Figura 15: Quarta trasformazione del ciclo termodinamico di un motore termoacustico ad onda stazionaria.	15
Figura 16: Ciclo termodinamico di un motore termoacustico ad onda stazionaria nel diagramma pressione volume specifico	15
Figura 17: Schema dell’analogia elettrica per il tubo risonatore.....	26
Figura 18: Scambiatore di calore a piastre parallele	27
Figura 19: Materiale poroso definito come: a)rigeneratore $rh \ll \delta k$ o b) stack $rh \sim \delta k$	28
Figura 20: Scherma del motore termoacustico elaborato in DeltaEC	30
Figura 21: Materiali scelti per lo stack: a)Mylar, b)Celcor e c) acciaio.....	32
Figura 22: Rendimento del motore al variare del raggio dei pori per diversi materiali	33
Figura 23: Geometrie convenzionali: a) piastre parallele, b) pori rettangolari e c) circolari.	34
Figura 24: Rendimento del motore per diverse forme dello stack	35
Figura 25: Struttura geometrica composta da piastre parallele	36
Figura 26: Struttura geometrica composta da pori circolari.....	37
Figura 27: Struttura geometrica composta da canali rettangolari.....	37
Figura 28: Struttura geometrica del tipo pin array	38

Figura 29: Andamento della funzione media spaziale per alcune geometrie regolari	38
Figura 30: Confronto degli andamenti a) della funzione viscosa e b) della funzione termica, calcolate con l'equazione (53) e con le equazioni (68) e (69)	47
Figura 31: Errore percentuale della differenza di calcolo a) della funzione viscosa e b) della funzione termica, tra l'equazione (53) e con le equazioni (68) e (69)	47
Figura 32: Profilo del poro tortuoso nel piano assial-simmetrico	48
Figura 33: Effetto della variazione del periodo di modulazione T su a) forma del poro b) Δk , Δv c) α^∞ e d) σ	49
Figura 34: Effetto della variazione della fase iniziale φ su a) forma del poro b) Δk , Δv c) α^∞ e d) σ	50
Figura 35: Effetto della variazione dell'ampiezza di modulazione Sp su a) forma del poro b) Δk , Δv c) α^∞ e d) σ	50
Figura 36: Vista tridimensionale dei pori tortuosi al variare dell'ampiezza di modulazione	52
Figura 37: Schema della procedura implementata in matlab	54
Figura 38: Confronto dell'andamento di pressione tra valori ottenuti con il DeltaEC e quelli con il codice matlab.	61
Figura 39: Confronto dell'andamento della velocità di volume tra valori ottenuti con il DeltaEC e quelli con il codice matlab.	61
Figura 40: Confronto dell'andamento della temperatura media del fluido tra valori ottenuti con il DeltaEC e quelli con il codice matlab.	62
Figura 41: Andamento in frequenza del termine di dissipazione viscosa per pori con crescente grado di tortuosità	64
Figura 42: Andamento in frequenza del termine di dissipazione termica per pori con crescente grado di tortuosità fino a 400 Hz	64
Figura 43: Andamento in frequenza del termine di dissipazione termica per pori con crescente grado di tortuosità oltre i 400 Hz	65
Figura 44: Andamento in frequenza della parte reale del fattore di amplificazione per pori con crescente grado di complessità	65
Figura 45: Andamento in frequenza della parte immaginaria del fattore di amplificazione per pori con crescente grado di complessità	66
Figura 46: Andamento, all'interno di un infinitesimo dello stack, a) dell'intensità acustica dissipata in perdite viscosive e b) termiche, c) dell'intensità acustica sviluppata dalla conversione e d) dell'intensità acustica resa disponibile dal poro	66
Figura 47: Lunghezza ottimale dello stack al variare della lunghezza del condotto caldo	70

Figura 48: Temperatura del fluido in uscita dallo stack al variare della lunghezza del condotto caldo.....	70
Figura 49: Intensità acustica al variare della lunghezza del condotto caldo	71
Figura 50: Andamento dell'intensità acustica al variare della lunghezza dello stack nei casi $\Delta x = 0.0707 m$ e $\Delta x = 0.0904 m$	71
Figura 51: Andamento della temperatura in uscita dallo stack al variare della lunghezza dello stack nei casi $\Delta x = 0.0707 m$ e $\Delta x = 0.0904 m$	72
Figura 52: Andamento dell'intensità acustica in dx al variare della lunghezza dello stack nei casi $\Delta x = 0.0707 m$ e $\Delta x = 0.0904 m$	72
Figura 53: Grafico tridimensionale dell'intensità acustica	73
Figura 54: Potenza acustica e rendimento al variare del raggio.....	74
Figura 55: Andamento della lunghezza dello stack al variare della frequenza per pori tortuosi ..	75
Figura 56: Andamento della lunghezza del condotto caldo al variare della frequenza per pori tortuosi	75
Figura 57: Andamento dell'intensità acustica al variare della frequenza per pori tortuosi.....	75
Figura 58: Cella tetradecaedrica proposta da Doutres, Atalla, e Dong	76

INTRODUZIONE

La presente attività di ricerca è stata incentrata all'approfondimento e all'analisi di una tecnologia innovativa per l'utilizzo dell'energia basata sull'interazione termo-acustica. Tale tecnologia, presentando molteplici vantaggi, ha suscitato grande interesse sia per la comprensione degli effetti termoacustici sia per le sue potenzialità come tecnologia in grado di trovare sempre maggiore applicazione in futuro. Quando un'onda sonora viaggia attraverso l'aria libera o qualsiasi altro fluido comprimibile crea oscillazioni di pressione, di temperatura e di velocità. In altre parole, se un volumetto di gas subisce un aumento di pressione sufficientemente rapido come avviene per un'onda acustica, il calore non ha il tempo di trasferirsi ad un volumetto adiacente e la sua temperatura aumenta. Per la comprensione del fenomeno termoacustico sono necessarie conoscenze di termodinamica, dinamica dei fluidi e acustica, con le quali poter descrivere le interazioni che esistono tra calore e suono. Nelle giuste condizioni, queste interazioni possono essere sfruttate per convertire energia termica in energia sonora o viceversa. La differente direzione della conversione energetica permette di classificare i dispositivi termoacustici in macchine dirette o inverse. È possibile, inoltre, un'ulteriore classificazione basata sulla tipologia di onda che si instaura all'interno del dispositivo: onda stazionaria, se le oscillazioni di pressione e velocità sono sfasate di 90° , o onda viaggiante quando sono in fase. L'obiettivo di questo lavoro è stato quello di analizzare il funzionamento di un motore termoacustico ad onda stazionaria. Tale dispositivo è costituito dai seguenti componenti: un risuonatore, il trasduttore elettro-acustico, due scambiatori di calore e lo "stack" che rappresenta l'elemento centrale del dispositivo termoacustico ad onda stazionaria. Lo "stack" è un materiale poroso interposto tra i due scambiatori di calore, in cui avviene la conversione di energia termica in sonora in seguito alle interazioni termiche e viscosive tra la superficie solida e le particelle oscillanti del fluido comprimibile. L'efficienza della conversione energetica all'interno dello stack termoacustico dipende da numerosi fattori: il materiale di cui è costituito, la geometria dei pori, la lunghezza, la posizione che occupa nel dispositivo termoacustico, la forma e la porosità. Solitamente gli stack sono realizzati con geometrie regolari come ad esempio stack a piastre parallele, caratterizzati da sottili piatti equamente distanziati all'interno della sezione trasversale del tubo risuonatore, o stack con pori circolari o rettangolari.

L'attività di ricerca ed i risultati conseguiti hanno riguardato principalmente lo sviluppo e la validazione numerica di una procedura di calcolo, sviluppata in ambiente matlab, per la modellazione e la simulazione delle prestazioni di un motore termoacustico ad onda stazionaria che presenta uno "stack" caratterizzato da una conformazione geometrica non convenzionale.

Il lavoro svolto è suddiviso come segue:

- nel primo capitolo si presenta un'ampia introduzione della fenomenologia termoacustica basata sulla ricerca bibliografica della letteratura scientifica con particolare attenzione alle equazioni fondamentali alla base della teoria termoacustica;
- nel secondo capitolo si illustra il funzionamento del programma DeltaEC, i componenti con i quali è possibile schematizzare un motore termoacustico ad onda stazionaria e l'analisi dell'influenza delle caratteristiche dello "stack" sulle prestazioni del dispositivo termoacustico;
- nel terzo capitolo si fornisce una panoramica sui modelli atti a descrivere la propagazione sonora nei materiali porosi, riformulando le funzioni termiche e viscosive richieste nella valutazione dell'interazione termoacustica a partire dal modello di Johnson - Champoux - Allard;
- nel quarto capitolo si descrive l'algoritmo sviluppato in ambiente matlab per la risoluzione delle equazioni differenziali termoacustiche esaminando le prestazioni energetiche derivanti dall'uso di stack con pori tortuosi;
- nel quinto capitolo si riportano i risultati di una procedura di ottimizzazione delle proprietà fisico-strutturali dello stack al fine di individuare quelle combinazioni in grado di migliorare le prestazioni del motore termoacustico ad onda stazionaria.

1. CAPITOLO 1: LA FENOMENOLOGIA TERMOACUSTICA

1.1 Introduzione all'effetto termoacustico

Un'onda sonora in aria dà luogo a una variazione (oscillazione), nello spazio e nel tempo, della pressione e della velocità delle particelle dell'aria. Come conseguenza di queste fluttuazioni di pressione si verificano nell'aria anche delle fluttuazioni di temperatura. La Tabella 1 mostra l'intensità di suoni generalmente percepiti dall'essere umano in condizioni ordinarie di pressione e temperatura. Nell'aria libera gli ordini di grandezza delle oscillazioni di temperatura sono molto contenuti e, pertanto, considerata anche la diffusività dell'aria e la frequenza dei suoni udibili, i singoli volumetti di aria si comprimeranno e si espanderanno adiabaticamente, cioè senza che si abbia una significativa interazione termica tra essi.

Tabella 1: Ordine di grandezza delle oscillazioni di temperatura prodotte in aria da suoni di diverso livello di pressione sonora a temperatura e pressione ambiente.

	Livello di pressione sonora [dB]	Ordine di grandezza dell'oscillazione di temperatura [°C]
Fruscio	30	10^{-7}
Voce alta	70	10^{-5}
Martello pneumatico	90	10^{-4}
Decollo di un aereo	120	10^{-2}

Tuttavia, quando l'aria è posta in contatto con un solido, si instaura un significativo trasferimento di calore tra il solido ed il fluido e, pertanto, si possono verificare un'ampia gamma di fenomeni termoacustici. In opportune condizioni operative questi fenomeni termoacustici possono essere utilizzati per dar luogo a due dispositivi termoacustici: la macchina frigorifera, che utilizza energia sonora per sottrarre energia termica ad un ambiente a bassa temperatura, e la macchina termica che converte calore in energia meccanica e, in particolare, acustica.

In questo capitolo sono discussi i concetti alla base dei dispositivi termoacustici, come si sono sviluppati e le equazioni che governano il fenomeno.

1.2 Cenni storici

Il fenomeno termoacustico fu inizialmente osservato dai soffiatori di vetro quando avvicinando un tubolare di vetro a temperatura ambiente ad una massa di vetro fuso udivano l'emissione di alcuni suoni.

Putnam e Dennis nel 1956 [1] affermano che l'inizio dell'attività scientifica si dovesse far risalire al 1777, anno in cui Byron Higgins condusse i suoi esperimenti [2]. L'apparato sperimentale di Higgins noto come "fiamma suonante", la cui rappresentazione schematica è mostrata in Figura 1, consisteva nel posizionare una fiamma di idrogeno all'interno di un tubo di vetro posto in posizione verticale. Quando la fiamma era collocata nella metà inferiore del tubo si potevano ascoltare emissioni sonore.

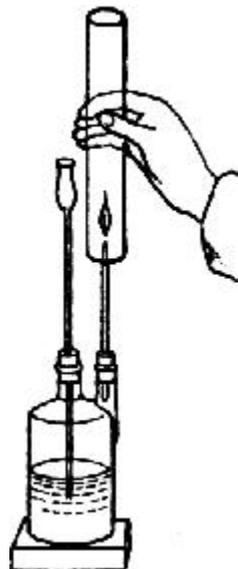


Figura 1: Rappresentazione schematica della "fiamma suonante" di Byron Higgins

Durante la metà del XIX secolo furono condotti svariati esperimenti ispirandosi a quello che da secoli osservavano i soffiatori di vetro. Soundhauss fu uno dei primi ad investigare sperimentalmente il fenomeno. Il tubo di Soundhauss, mostrato in Figura 2, fu realizzato nel 1850 e consisteva in un lungo tubo di vetro aperto ad un'estremità e chiuso da un bulbo di vetro all'altra estremità. Soundhauss notò che, riscaldando con una fiamma esterna il bulbo, si producevano oscillazioni acustiche e che la frequenza del suono prodotto era funzione delle dimensioni fisiche dell'apparato sperimentale. In particolare Soundhauss condusse esperimenti con tubi di diverso

diametro, lunghezza e volume del bulbo, notando, inoltre, che all'aumentare dell'energia termica fornita aumentava il volume delle oscillazioni acustiche prodotte [3].

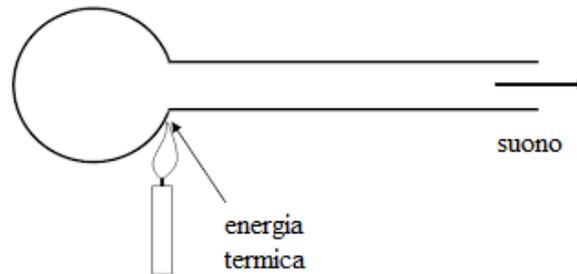


Figura 2: Rappresentazione schematica del “tubo di Soundhauss”

Negli stessi anni il professore olandese Rjke studiò l'emissione di onde acustiche generate da un tubo cilindrico aperto alle due estremità. Diversamente da Higgins, all'interno del tubo era installata una rete metallica mentre la fiamma alimentata da idrogeno era posta nella parte bassa esternamente al tubo. Rjke notò che onde acustiche si producevano solo se l'elemento riscaldante era posto nella metà inferiore del condotto, in particolare si potevano udire suoni di ampiezza maggiore quando l'elemento era posto a un quarto della lunghezza del condotto. Osservò, inoltre, che chiudendo una delle due estremità la generazione del suono si arrestava: la presenza di un flusso ascensionale era una condizione necessaria al fenomeno [4].

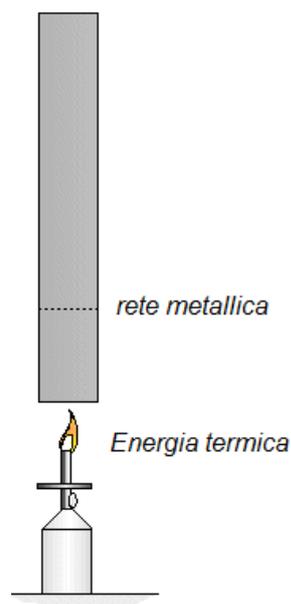


Figura 3: Rappresentazione schematica del “tubo di Rjke”

Nel 1868 Kirckhoff studiò l'attenuazione acustica in un condotto a sezione circolare causata da un oscillatorio trasferimento di calore e dalle perdite viscosse tra le pareti solide del condotto e il gas al suo interno [5].

Era il 1896 quando il fisico britannico John W. Strutt, Lord Rayleigh, fornì una spiegazione qualitativa del fenomeno osservato da Sondhauss. [6]

Nel suo famoso libro "The theory of sound", egli affermò che se del calore è fornito all'aria al momento della massima compressione, o è prelevato al momento della massima rarefazione, la vibrazione è incoraggiata. Di contro se del calore è fornito nel momento di massima rarefazione o sottratto nel momento di massima condensazione, la vibrazione è scoraggiata. La rapidità di queste trasformazioni può individuare due casi estremi: quando non c'è sufficiente tempo per trasferire calore la propagazione del suono segue la teoria di Laplace e le trasformazioni sono adiabatiche; quando invece la temperatura rimane pressoché costante i processi sono isotermi così come descritti dalla teoria della velocità del suono di Newton.

Sebbene gli effetti termoacustici siano stati scoperti nella seconda metà del diciottesimo secolo, non ricevettero molta attenzione come potenziale tecnologia per la conversione di energia fino alla metà del ventesimo secolo.

Molti ricercatori, all'inizio del ventesimo secolo, durante esperimenti volti alla liquefazione dei gas ebbero modo di osservare il fenomeno termoacustico con la conseguente produzione di energia sonora. Nello specifico ciò accadeva quando un tubo veniva a contatto con l'elio contenuto nei recipienti criogenici: l'enorme differenza di temperatura che si creava lungo il tubo dava origine a oscillazioni sonore spontanee. Queste oscillazioni in ambito criogenico presero il nome di "oscillazioni di Taconis" [7].

I primi studi teorici sul fenomeno termoacustico iniziarono nel 1949 quando Kramers esaminando le oscillazioni di Taconis, generalizzò la teoria di Kirchoff sull'attenuazione delle onde sonore a temperatura ambiente descrivendo anche i casi di attenuazione in presenza di un gradiente di temperatura [8].

Nicolas Rott intorno al 1960 introdusse per la prima volta il termine "termoacustica". Pubblicò una serie di lavori [9] [10] [11] [12] [13] creando una raccolta di informazioni teoriche e una descrizione quantitativa unificata dell'effetto termoacustico. Descrisse in maniera appropriata sia l'esperienza di Taconis sia quella di Sondhauss. Introdusse i concetti di profondità di penetrazione termica e viscosa per valutare la dimensione in cui queste interazioni tra solido e gas avvenivano. Grazie a questa teoria di carattere lineare e generale inizia l'attività di analisi e progettazione dei dispositivi termoacustici.

Nel 1962 Carter installò all'interno del tubo di Soundhauss differenti materiali. Gli esperimenti mostrarono come l'aggiunta del materiale poroso, elemento in seguito definito "stack", facilitava lo scambio termico con il gas di lavoro. Feldman ampliò il lavoro di Carter riuscendo a produrre 28 Watt di potenza acustica partendo da 600 Watt di potenza termica in ingresso [14].

Nel 1979 Peter Ceperly si accorse che il rendimento dei dispositivi termoacustici poteva essere ulteriormente migliorato utilizzando una geometria toroidale, passando in questo modo da un'onda stazionaria a una viaggiante [15].

I primi brevetti risalgono al 1950 quando il Bell Telephone Laboratories brevettò l'uso di dispositivi termoacustici per la conversione di energia. Altri brevetti furono realizzati a partire dal 1980 presso il laboratorio nazionale di Los Alamos dove furono sviluppati prototipi e risuonatori termoacustici.

Un primo prototipo di motore termoacustico ad onda stazionaria fu sviluppato da Wheatley e Swift nel 1988 [16].

Il tubo risuonatore lungo mezzo metro fu chiamato "refrigeratore di birra". Era composto principalmente da due parti: un motore e una pompa di calore. All'interno c'erano i due blocchi di materiale poroso e quattro scambiatori di calore. Il fluido di lavoro era elio pressurizzato a 3 bar. Il materiale poroso, o stack, e gli scambiatori di calore, avevano una configurazione a piatti paralleli con spaziatura costante. Il funzionamento era il seguente: si forniva dell'energia termica allo scambiatore caldo, parte di questa energia diveniva onda acustica, il resto attraversava lo scambiatore freddo posto a temperatura ambiente. L'onda acustica generata affluiva nella zona della pompa di calore dove realizzava un trasferimento di energia termica tra lo scambiatore freddo e quello caldo a temperatura ambiente. Con 350 W di calore fornito ad una temperatura di 390°C, il sistema risuonava a circa 585 Hz e realizzava una temperatura di 0°C.

Spiegazioni dettagliate di motori termoacustici ad onda stazionaria possono essere reperite nelle pubblicazioni di G.W.Swift [17].

Negli anni successivi sono state sviluppate molte varietà di applicazioni. Garrett nel 1992 costruì un refrigeratore termoacustico che fu installato su una navicella spaziale [18].

Questi dispositivi ad onda stazionaria raggiungevano rendimenti del 20%. Successivamente furono realizzati dispositivi ad onda viaggiante che sembrano più promettenti offrendo rendimenti maggiori rispetto ai dispositivi ad onda stazionaria.

Attualmente rendimenti del 32% sono stati raggiunti da Tijiani e Spoelstra [19].

1.3 Vantaggi dei dispositivi termoacustici

I dispositivi termoacustici mostrano considerevoli vantaggi se comparati con le tecnologie di conversione energetica convenzionali. Punto di forza è la loro forma semplice e la possibilità di essere realizzati con materiali comuni riducendo notevolmente i costi iniziali del dispositivo. Un altro significativo vantaggio è individuato dalla presenza di pochi organi meccanici in movimento, motivo per cui si riducono i costi di manutenzione a livelli molto bassi e si incrementa la loro vita operativa. I sistemi tradizionali comportano costi di manutenzione elevati perché richiedono una regolare lubrificazione e la sostituzione di parti meccaniche usurate. L'unica parte in movimento all'interno dei dispositivi termoacustici, ma che presenta comunque una vita operativa decisamente lunga, è il trasduttore elettromeccanico, componente impiegato per generare onde sonore nei refrigeratori termoacustici o per convertire energia sonora in elettrica nei motori termoacustici. Il fluido di lavoro in questi dispositivi può essere aria, azoto, un gas nobile o una miscela di questi; questo significa che il rischio per l'ambiente in caso di fuoriuscita accidentale del gas di lavoro è trascurabile.

I dispositivi termoacustici sono molto flessibili in termini di alimentazione energetica in quanto la fonte di energia termica esterna al dispositivo può provenire, ad esempio, da sorgenti rinnovabili come quella solare o dal recupero del calore di scarto di un processo industriale.

1.4 I dispositivi e i cicli termoacustici

Per dispositivi termoacustici si intendono quei sistemi in grado di convertire energia termica in energia acustica e viceversa. La direzione della conversione dell'energia dipende dal tipo di sistema. In Figura 4 si mostra lo schema di un dispositivo che converte energia termica in energia acustica, comunemente noto come motore termoacustico.

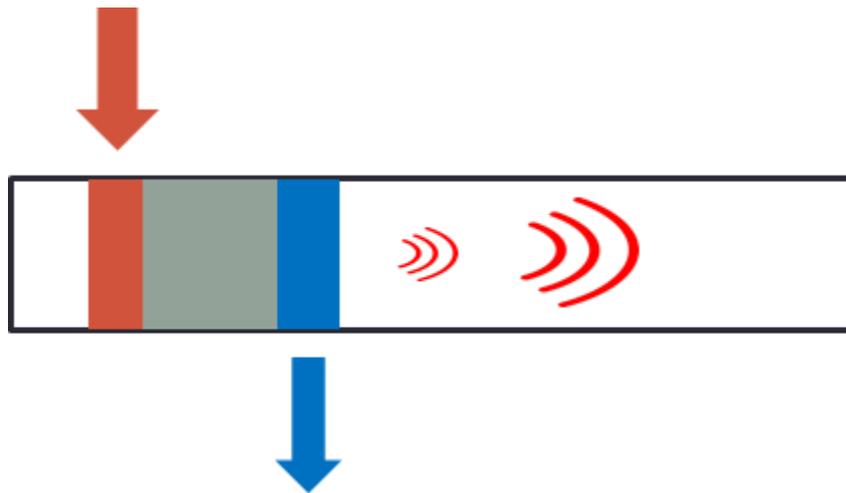


Figura 4: Schema di un motore termoacustico ad onda stazionaria

La conversione avviene principalmente all'interno del materiale poroso situato tra i due scambiatori di calore. I due scambiatori di calore realizzano un gradiente di temperatura tra le estremità del materiale poroso, componente indispensabile per sostenere e amplificare l'onda acustica che si genera.

In Figura 5 è riportato lo schema di un refrigeratore termoacustico ad onda stazionaria.

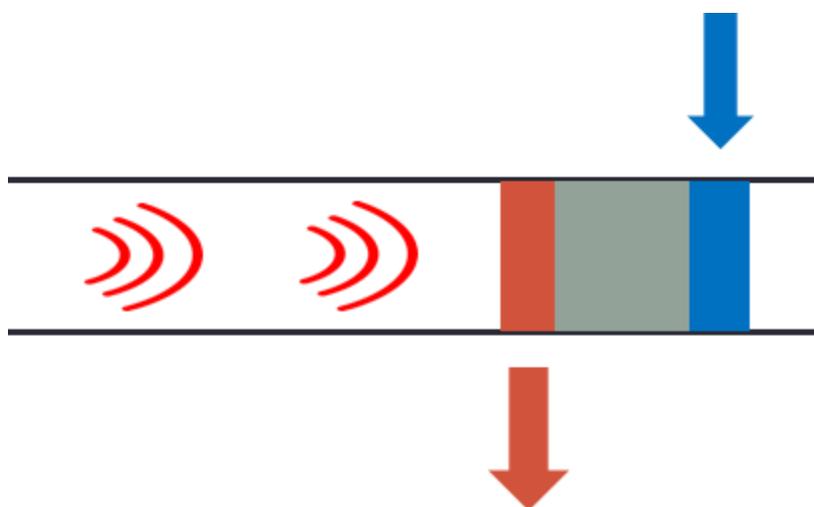


Figura 5: Schema di un refrigeratore termoacustico ad onda stazionaria

In un refrigeratore termoacustico si utilizza l'energia acustica per creare un flusso di energia termica dallo scambiatore a temperatura inferiore a quello a temperatura ambiente.

Ci si riferisce generalmente al materiale poroso col termine “stack” nei dispositivi termoacustici ad onda stazionaria, dove la differenza di fase tra pressione e velocità è di circa 90° , come mostra una generica istantanea in Figura 6.

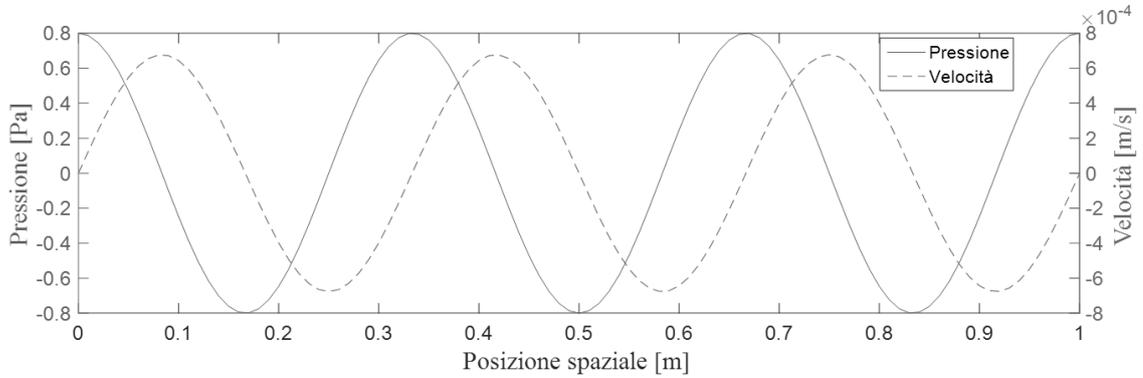


Figura 6: Oscillazione di pressione e di velocità in un'onda stazionaria

All'interno di un tubo chiuso ad un'estremità, la sovrapposizione dell'onda incidente e dell'onda riflessa, ovvero l'interferenza di due onde aventi la medesima ampiezza massima, frequenza e direzione ma verso opposto di propagazione, porta alla formazione di un'onda stazionaria, così chiamata perché sembra non propagarsi. Questa interferenza, infatti, determina la formazione di particolari punti dello spazio: punti che hanno sempre ampiezza nulla, detti nodi, e punti che hanno sempre la massima ampiezza, detti antinodi. Per chiarire questa affermazione si osservi la Figura 7 in cui è rappresentata un'onda stazionaria fotografata in istanti temporali successivi t_0, t_1, t_2 .

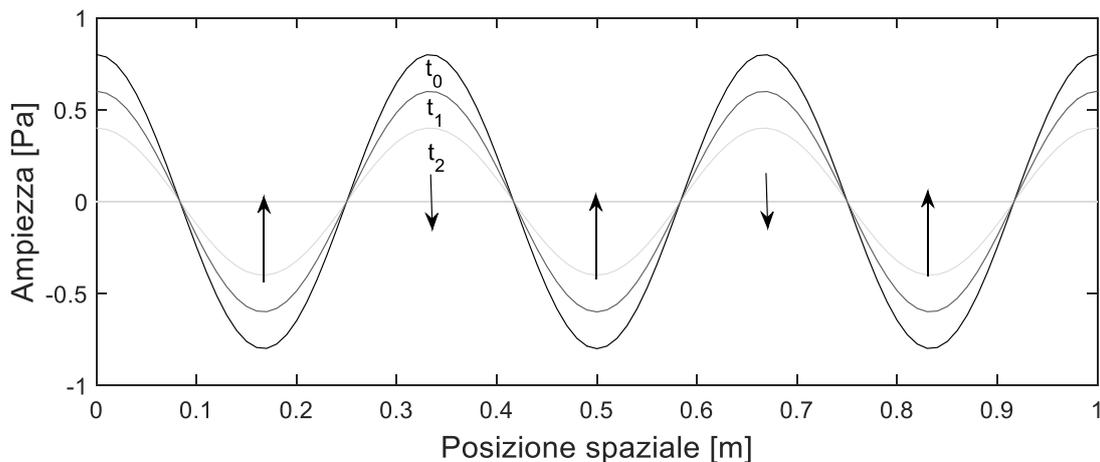


Figura 7: Un'onda stazionaria in istanti temporali successivi

Con il termine “rigeneratore”, invece, ci si riferisce al materiale poroso all’interno dei dispositivi ad onda viaggiante, dove pressione e velocità sono in fase tra di loro, come mostra la Figura 8.

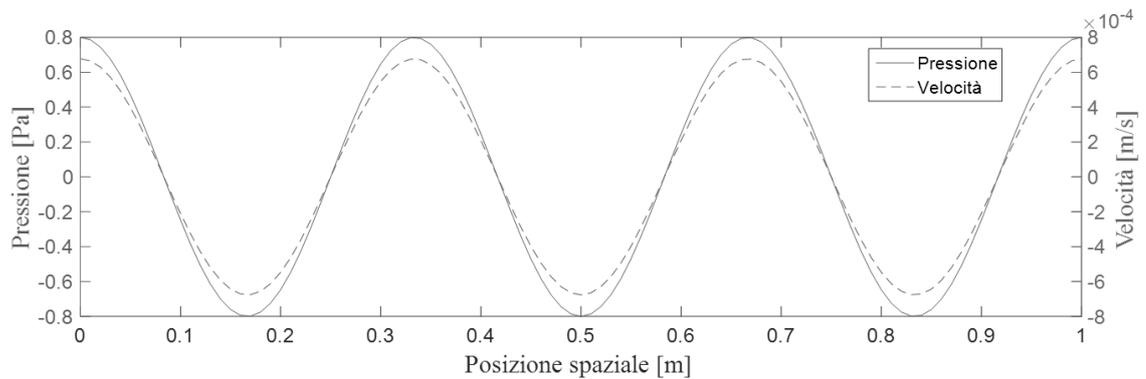


Figura 8: Oscillazione di pressione e di velocità in un’onda viaggiante

Un’onda viaggiante si sposta nel mezzo in modo che tutti i punti siano sottoposti periodicamente ad una oscillazione completa. I punti nello spazio, assumono di volta in volta tutti i possibili valori di ampiezza di oscillazione dell’onda.

In Figura 9 si riporta l’andamento spaziale di un’onda viaggiante in istanti temporali successivi.

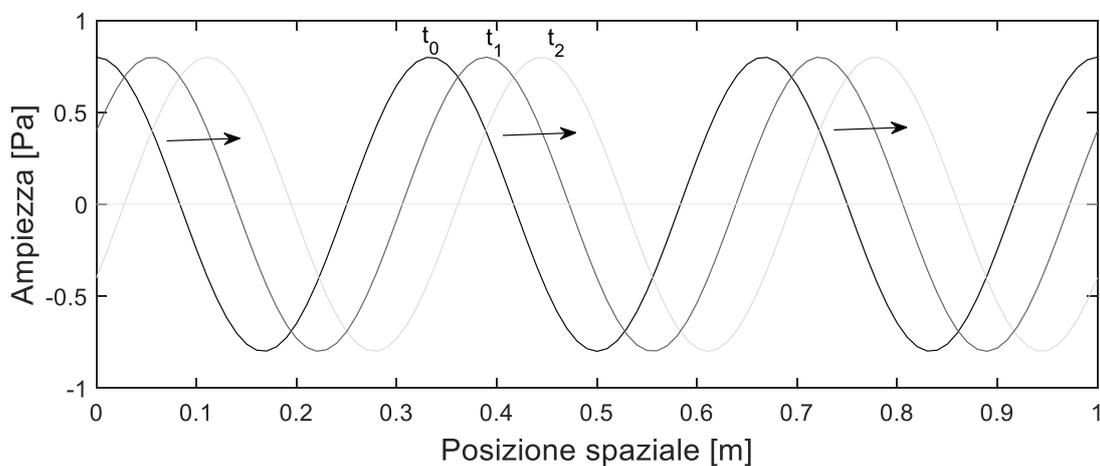


Figura 9: Un’onda viaggiante in istanti temporali successive

Queste differenze di fase regolano i tempi di compressione e di espansione delle particelle del fluido all’interno del materiale poroso. Nella pratica l’onda non è mai un’onda stazionaria pura o un’onda viaggiante pura così come definite sopra, ma presenta una piccola deviazione da queste tipologie ideali. L’oscillazione acustica è essenzialmente adiabatica ma la presenza di un materiale

poroso nel campo acustico comporta la formazione di strati termici e viscosi in prossimità della superficie di contatto. All'interno di questi strati avviene il trasferimento di energia termica tra le particelle oscillanti del gas e la superficie solida.

Una rappresentazione schematica di un dispositivo termoacustico ad onda stazionaria ed uno ad onda viaggiante è riportata rispettivamente nella Figura 10 e nella Figura 11.

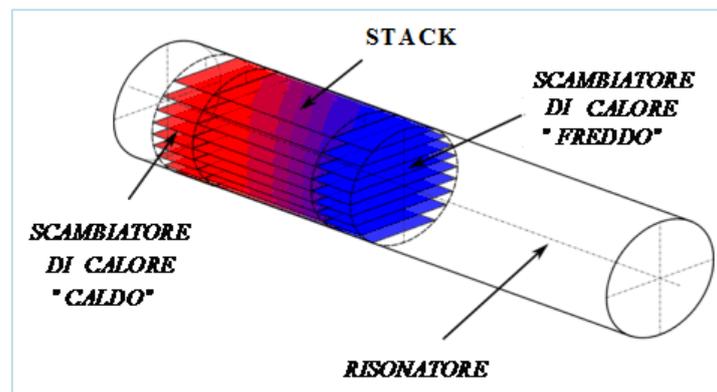


Figura 10: Rappresentazione schematica di un dispositivo ad onda stazionaria

I dispositivi ad onda stazionaria sono i più semplici da realizzare e rendere operativi. Sono, infatti, costituiti da un tubo risonatore all'interno del quale sono posizionati lo stack e i due scambiatori di calore.

I dispositivi ad onda viaggiante sono, in generale, più complessi nella progettazione. Uno schema, tra i tanti che sono stati proposti e testati nella letteratura scientifica, è riportato in Figura 11.

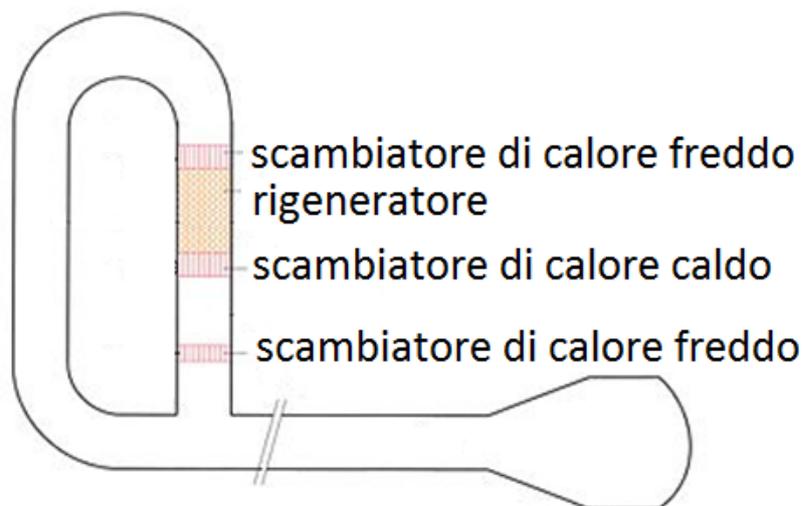


Figura 11: Rappresentazione schematica di un dispositivo ad onda viaggiante

Per chiarire meglio l'effetto termoacustico, si consideri uno stack composto da piastre parallele e si immagini per semplicità di poter estrapolare il movimento di una singola particella in un piano bidimensionale. L'oscillazione spontanea ha luogo quando si sviluppa, grazie agli scambiatori di calore posti alle estremità dello stack, un gradiente di temperatura medio superiore ad un determinato valore, chiamato gradiente critico. Il ciclo termodinamico che compie la particella all'interno del motore termoacustico ad onda stazionaria si compone di quattro trasformazioni, di seguito spiegate in dettaglio.

- Nella prima trasformazione la particella di gas, riceve energia termica dalle pareti solide dello stack e si riscalda. L'aumento di temperatura provoca un'espansione termica. La Figura 12 mostra il flusso termico che si trasferisce dal solido alla particella di gas.

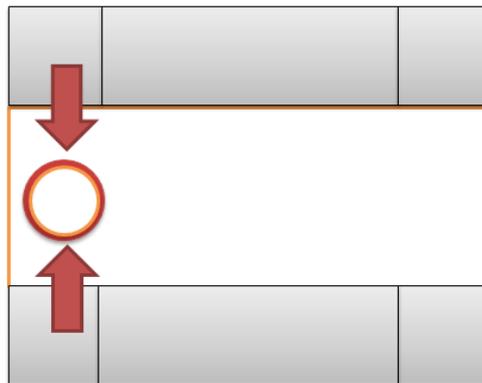


Figura 12: Prima fase del ciclo termodinamico di un motore termoacustico ad onda stazionaria.

- Nella seconda trasformazione, mostrata in Figura 13, la particella di gas si sposta verso una zona a temperatura inferiore espandendosi. Il processo è adiabatico e la temperatura diminuisce. Al termine dell'espansione il gas avrà comunque una temperatura maggiore delle pareti del solido.

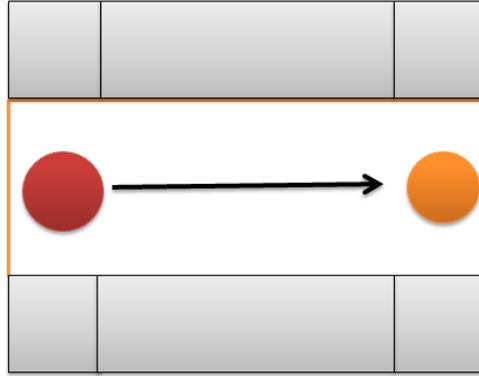


Figura 13: Seconda trasformazione del ciclo termodinamico di un motore termoacustico ad onda stazionaria.

- Nella terza trasformazione la particella di gas cede calore alle pareti del solido, raffreddandosi. La Figura 14 mostra il flusso termico che si trasferisce dalla particella di gas al solido.

-

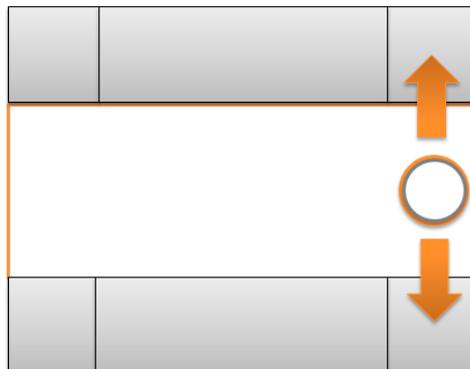


Figura 14: Terza trasformazione del ciclo termodinamico di un motore termoacustico ad onda stazionaria.

- Nella quarta trasformazione, riportata in Figura 15, la particella di gas si sposta a causa della fase compressione. Anche questa trasformazione, come la seconda, è adiabatica per cui la temperatura della particella di gas aumenta in risposta alla compressione. Al termine della quarta trasformazione la particella di gas ritorna al suo stato iniziale.

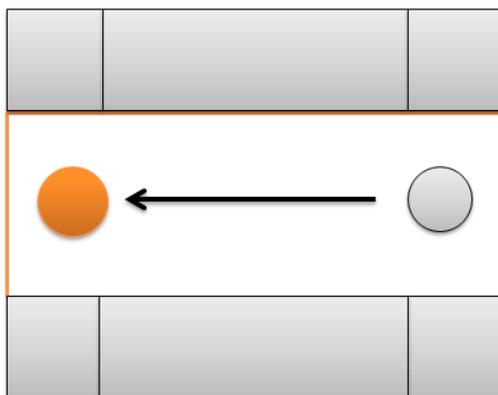


Figura 15: Quarta trasformazione del ciclo termodinamico di un motore termoacustico ad onda stazionaria.

Sebbene la massa di gas ritorna alle sue condizioni di partenza ad ogni ciclo, lo scambio di lavoro netto verso l'esterno è diverso da zero cioè $\int p dV > 0$. Infatti, l'espansione termica avviene a pressione più alta producendo un quantità di lavoro maggiore di quello richiesto dalla compressione del gas. In Figura 16 si riporta il ciclo termodinamico di un motore termoacustico ad onda stazionaria nel diagramma pressione volume specifico.

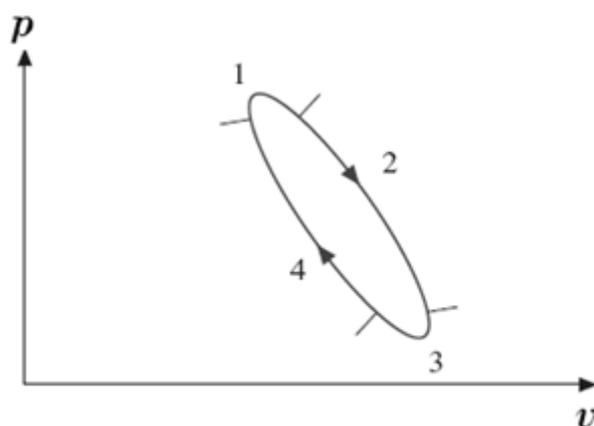


Figura 16: Ciclo termodinamico di un motore termoacustico ad onda stazionaria nel diagramma pressione volume specifico

È importante sottolineare che le particelle di gas all'interno del materiale poroso non partecipano in modo uguale allo scambio termico. Le particelle che sono molto distanti non sono in contatto termico con le pareti. Le particelle che sono troppo vicine hanno un buon contatto termico ma anche degli effetti viscosi significativi.

Una distanza ottimale delle particelle del gas dovrebbe essere tale da ridurre al minimo gli effetti viscosi e massimizzare il contatto termico con la parete per lo scambio termico. È possibile legare questa distanza a due termini che saranno successivamente discussi: le profondità di penetrazione termica e viscosa.

1.5 Parametri chiave

Prima di fornire maggiori dettagli è essenziale definire alcuni parametri importanti per l'operatività dei dispositivi termoacustici.

L'operatività dei dispositivi termoacustici è influenzata sia dalle caratteristiche geometriche dei suoi componenti, quali risuonatore, scambiatori di calore e stack; sia dalle proprietà termofisiche del fluido di lavoro. Queste proprietà, quali la densità, la conducibilità termica, il numero di Prandtl e i calori specifici, variano con la temperatura e la pressione di esercizio. La lunghezza d'onda e la frequenza sono i principali parametri che determinano la lunghezza totale del dispositivo. Per un'onda sonora vale la seguente relazione:

$$c = \lambda f \quad (1)$$

dove λ è la lunghezza d'onda, c la velocità del suono e f la frequenza di oscillazione.

La lunghezza dei dispositivi termoacustici ad onda stazionaria è circa la metà o un quarto della lunghezza d'onda. Per quelli ad onda viaggiante la lunghezza del dispositivo non è inferiore alla lunghezza d'onda.

Un altro parametro importante è lo spostamento della particella di gas il cui modulo è espresso come:

$$\xi = |u|/\omega \quad (2)$$

Dove u è l'ampiezza di velocità del gas, ω la frequenza angolare pari a $2\pi f$. Il massimo spostamento, nella direzione di propagazione dell'onda, che subisce la particella di gas per ogni ciclo oscillatorio, è pari a 2ξ . Lo spostamento delle particelle del gas è usualmente molto più grande della profondità di penetrazione viscosa e termica e molto più piccolo della lunghezza d'onda del fenomeno oscillatorio.

$$\delta_v, \delta_k \ll \xi \ll \lambda \quad (3)$$

Le due lunghezze caratteristiche nella termoacustica, perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda, sono la profondità di penetrazione viscosa e termica, definite rispettivamente:

$$\begin{aligned} \delta_v &= \sqrt{2k/\omega\rho c_p} = \sqrt{2\kappa/\omega} \\ \delta_k &= \sqrt{2\eta/\omega\rho} = \sqrt{2\mu/\omega} \end{aligned} \quad (4)$$

Dove η e μ sono la viscosità dinamica e cinematica del fluido di lavoro, k e κ sono la conducibilità termica e la diffusività del gas, c_p il calore specifico a pressione costante e ρ la densità del fluido. Queste dimensioni indicano la profondità dello spessore limite all'interno del quale avvengono le interazioni viscoso e termiche. La radice del rapporto tra la profondità di penetrazione viscosa e termica prende il nome di numero di Prandtl:

$$P_r = \left(\frac{\delta_v}{\delta_k} \right) \quad (5)$$

Il numero adimensionale di Prandtl è prossimo all'unità per i gas più comuni.

1.6 Teoria di Rott e approssimazioni acustiche

Per descrivere i processi di flusso del fluido e di trasferimento del calore che prendono luogo nel materiale poroso dei dispositivi termoacustici, la teoria di Rott si basa sulla linearizzazione dell'equazione di continuità, della conservazione della quantità di moto e della prima legge della termodinamica.

1.6.1 L'equazione di continuità

L'equazione di continuità esprime il principio di conservazione della massa contenuta in un volume di fluido infinitesimo. La massa all'interno di un volume di controllo infinitesimo di forma cubica e lati $dx dy dz$ può cambiare solo come risultato di un flusso netto in ingresso o in uscita attraverso le sei facce del cubo. Se $\rho dx dy dz$ è la massa contenuta nel cubetto elementare, la legge di conservazione della massa può essere espressa come:

$$d\rho dx dy dz = \sum dm \quad (6)$$

in cui la sommatoria è estesa a tutte le facce del cubetto.

Dividendo l'equazione (6) per dt , al secondo membro si ottiene $\sum dm/dt$ ovvero la somma di sei flussi di massa. Al centro del cubetto elementare il flusso di massa è dato dal prodotto tra la densità ρ e il vettore velocità \vec{v} . Se $\rho\vec{v}$ è uniforme nello spazio, allora non c'è accumulo di massa nel microscopico volume di controllo.

Utilizzando l'espansione in serie di Taylor intorno al baricentro del cubo è possibile ricavare il flusso di massa che attraversa ciascuna faccia. Ad esempio il flusso di massa che attraversa la faccia di normale x è:

$$\left[\rho u - \frac{d}{dx}(\rho u) \frac{dx}{2} \right] dy dz \quad (7)$$

dove u è la componente lungo x della velocità \vec{v} .

Sommando i flussi che attraversano tutte le facce del cubetto elementare, dividendo per $dx dy dz$ ed esprimendo il risultato in forma vettoriale si ottiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = 0 \quad (8)$$

che esprime il principio di conservazione della massa in un fluido.

1.6.2 L'equazione della conservazione della quantità di moto

L'equazione della conservazione della quantità di moto afferma che la quantità di moto di un sistema rimane costante nel tempo quando la risultante delle forze esterne è nulla. Si consideri come sistema un volumetto infinitesimo di massa $\rho dx dy dz$. L'equazione della conservazione della quantità di moto esprime una delle leggi di Newton: il prodotto della massa per la sua accelerazione è uguale alla somma delle forze che agiscono sul sistema. In termini matematici significa:

$$(\rho dx dy dz) \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \sum \vec{F}_{pressione} + \sum \vec{F}_{viscose} \quad (9)$$

L'accelerazione è espressa matematicamente come somma di due contributi: l'accelerazione locale $\partial\vec{v}/\partial t$ e l'accelerazione convettiva $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$. Le forze esterne presenti al secondo membro dell'equazione (9) sono riportate come somma delle forze di pressione e delle forze viscosse.

Utilizzando anche per l'equazione (9) l'espansione in serie di Taylor, l'equazione della conservazione della quantità di moto può essere scritta come:

$$\rho \left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \right] = -\nabla p + \nabla\Phi \quad (10)$$

dove Φ è il tensore degli sforzi viscosi a nove componenti, usualmente indicato come:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Si riporta, a titolo esemplificativo, la formulazione di uno degli sforzi normali e uno di taglio:

$$\sigma_{xx} = \eta \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla\vec{v} \right) + \zeta \nabla\vec{v} \quad (12)$$

$$\sigma_{xy} = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (13)$$

dove ξ è la seconda viscosità. Gli altri componenti del tensore degli sforzi possono essere ottenuti dalle equazioni (12) e (13) considerando le opportune coordinate e componenti di velocità.

Trascurando i termini col gradiente nella formulazione degli sforzi, l'equazione della conservazione della quantità di moto può essere riscritta come:

$$\rho \left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \right] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} \quad (14)$$

1.6.3 La prima legge della termodinamica

La prima legge della termodinamica esprime il concetto di conservazione dell'energia: essa non si crea né si distrugge. L'energia può, ovviamente, essere trasferita da un sistema ad un altro e

convertita da una forma all'altra. La prima legge della termodinamica per un sistema chiuso è matematicamente formulata come segue:

$$dE = \delta Q - \delta L \quad (15)$$

Dove dE rappresenta la variazione di energia del sistema, dQ l'energia termica fornita al sistema e dL l'energia meccanica eseguita dal sistema. Per un sistema aperto, in condizioni non stazionarie, la prima legge della termodinamica è usualmente scritta come:

$$dE = \delta Q - \delta L - d \left[m \left(h + \frac{|\vec{v}|^2}{2} + gz \right) \right] \quad (16)$$

dove h è l'entalpia del fluido, g è l'accelerazione di gravità e z la quota del fluido.

L'equazione (16) evidenzia che lo scambio energetico all'interno di un volume di controllo dipende dai flussi di calore, di lavoro e di massa.

Applicando l'equazione (16) al volume di controllo rappresentato dal cubetto infinitesimo di dimensioni $dx dy dz$, la variazione di energia del fluido è data da:

$$d \left(\rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho |\vec{v}|^2 \right) dx dy dz \quad (17)$$

dove ϵ è l'energia interna per unità di massa.

Il secondo membro dell'equazione (16), trascurando i termini gravitazionali, diventa:

$$\sum \delta Q - \sum \delta L - \sum d \left[m \left(h + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \right] \quad (18)$$

dove le sommatorie sono composte da sei termini, uno per ogni faccia del cubetto elementare.

Il gradiente di ciascuno dei sei termini che compongono l'energia termica, definito dal prodotto $-k\nabla T$, è responsabile del calore netto ceduto al volume di controllo. I termini della sommatoria possono essere riscritti con l'espansione in serie di Taylor e sommati. La velocità con cui l'energia termica fluisce nel volume di controllo è:

$$\sum \frac{\delta Q}{dt} = \nabla(k\nabla T) dx dy dz \quad (19)$$

Considerazioni simili possono essere fatte per le altre due sommatorie presenti nell'equazione (16). Il flusso di massa dm è esprimibile come $\rho\vec{v}$. Il termine di lavoro δL è dovuto solo alle forze di taglio viscoso sulle facce del cubo, poiché il lavoro delle forze di pressione è considerato nel termine hdm . Con tali considerazioni, combinando l'equazione (17) e (18) si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}|^2 \right) = -\nabla \left[-k\nabla T - \vec{v}\Phi - \left(\rho h + \rho \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \vec{v} \right] \quad (20)$$

in cui la quantità tra parentesi quadre al secondo membro è la densità del flusso di energia.

1.6.4 Ipotesi della teoria di Rott

In questo paragrafo saranno riscritte le equazioni che governano il fenomeno termoacustico in una forma semplificata basata sulle assunzioni e approssimazioni acustiche alla base della teoria lineare di Rott. Innanzitutto, la propagazione dell'onda sonora è considerata monodimensionale lungo la direzione di propagazione x e il mezzo di propagazione è considerato un gas ideale.

Alcune variabili, quali temperatura e densità, espresse nell'equazione (21), hanno una componente media funzione solo della coordinata di propagazione dell'onda, indicata col pedice m , e una componente oscillatoria sinusoidale, indicata col pedice 1.

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) &= T_m(x) + Re[T_1(x, y, z)e^{i\omega t}] \\ \rho(x, y, z, t) &= \rho_m(x) + Re[\rho_1(x, y, z)e^{i\omega t}] \end{aligned} \quad (21)$$

Il fatto che il valore medio dipenda solo da x indica che le oscillazioni non causano gradienti perpendicolari alla direzione dell'oscillazione.

Un'altra assunzione è che i prodotti del secondo ordine di alcune variabili in gioco si possono trascurare; ad esempio nell'equazione (14) il termine $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ è di solito trascurato rispetto al termine $\partial\vec{v}/\partial t$.

La pressione media è uniforme nello spazio, e quindi indipendente da x , y e z , mentre le oscillazioni sinusoidali inducono variazioni della pressione solo lungo la direzione di propagazione dell'onda. Si può scrivere per la pressione la seguente relazione:

$$p(x, y, z, t) = p_m + \text{Re}[p_1(x)e^{i\omega t}] \quad (22)$$

Altre variabili presentano solo una delle due componenti come nel caso della velocità di flusso, della velocità delle particelle, della viscosità dinamica, della diffusività α e della conducibilità termica k .

$$\begin{aligned} U &= \text{Re}[U_1(x)e^{i\omega t}] \\ u &= \text{Re}[u_1(x, y, z)e^{i\omega t}] \\ \eta &= \eta(x) \quad \alpha = \alpha(x) \quad k = k(x) \end{aligned} \quad (23)$$

Inoltre, l'ampiezza delle oscillazioni è sempre considerata più piccola rispetto al valore medio della variabile:

$$\begin{aligned} |p_1| &\ll p_m \\ |T_1| &\ll T_m \\ |\rho_1| &\ll \rho_m \end{aligned} \quad (24)$$

Con queste approssimazioni si riscrivono le equazioni alla base della teoria di Rott.

L'equazione (8) di continuità, si riscrive come:

$$i\omega\rho_1 + \nabla(\rho_m u_1) = 0 \quad (25)$$

L'equazione (14) della conservazione della quantità di moto diventa:

$$i\omega\rho_m u_1 = -\frac{dp_1}{dx} + \eta\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right) \quad (26)$$

L'equazione (20) relativa alla prima legge della termodinamica si modifica in:

$$\rho_m c_p \left(i\omega T_1 + u_1 \frac{dT_m}{dx} \right) - i\omega p_1 = k \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \right) \quad (27)$$

Le derivate parziali nelle direzioni perpendicolari a quella di propagazione dell'onda rappresentano le interazioni termiche e viscosi con le pareti solide. Se si considera la propagazione all'interno di un condotto di area A e si trascurano le perdite viscosi e termiche, l'equazione di continuità e di conservazione della quantità di moto si semplificano in:

$$\frac{dp_1}{dx} = -\frac{i\omega\rho_m}{A} U_1 \quad (28)$$

$$\frac{dU_1}{dx} = -\frac{i\omega A}{\rho_m c^2} p_1 \quad (29)$$

Nel caso in cui, come avviene all'interno del materiale poroso nei dispositivi termoacustici, non è possibile trascurare gli effetti termici e viscosi, le equazioni differenziali sono risolte, in termini di velocità, pressione e temperatura, come di seguito illustrato.

L'equazione (26) è un'equazione differenziale per $u_1(y, z)$. È risolta ponendo $u_1 = 0$ come condizione al contorno alla superficie solida, per cui la soluzione è:

$$u_1 = \frac{i}{\omega\rho_m} (1 - h_v(y, z)) \frac{dp_1}{dx} \quad (30)$$

La funzione complessa $h_v(y, z)$ dipende strettamente dalla geometria del canale di passaggio del fluido all'interno del materiale poroso. Integrando h_v rispetto alle coordinate y e z , ortogonali alla direzione di propagazione dell'onda, si ricava una funzione media spaziale f_v , e risolvendo per dp_1 si ottiene:

$$dp_1 = -\frac{i\omega\rho_m dx U_1}{A(1 - f_v)} \quad (31)$$

Considerazioni simili si applicano all'equazione (27) il cui sviluppo delle derivate parziali fornisce la seguente espressione per l'oscillazione di temperatura:

$$T_1 = \frac{p_1}{\rho_m c_p} (1 - h_k) - \frac{1}{i\omega A} \frac{dT_m}{dx} \frac{(1 - h_k) - P_r(1 - h_k)}{(1 - h_v)(1 - P_r)} U_1 \quad (32)$$

Mediando spazialmente l'equazione (32) nella sezione trasversale del canale si ottiene:

$$\langle T_1 \rangle = \frac{p_1}{\rho_m c_p} (1 - f_k) - \frac{1}{i\omega A} \frac{dT_m}{dx} \frac{(1 - f_k) - P_r(1 - f_k)}{(1 - f_v)(1 - P_r)} U_1 \quad (33)$$

Risolvendo, infine, l'equazione (25) si ricava:

$$dU_1 = -\frac{i\omega A dx}{\gamma p_m} p_1 (1 + (\gamma - 1)f_k) + \frac{(f_k - f_v)}{(1 - f_v)(1 - P_r)} \frac{dT_m}{T_m} U_1 \quad (34)$$

dove γ il rapporto tra il calore specifico a pressione costante e il calore specifico a volume costante.

Combinando le equazioni (31) e (34) ed eliminando U_1 , si ottiene un'equazione differenziale del secondo ordine in p_1 , chiamata anche equazione delle onde di Rott:

$$(1 + (\gamma - 1)f_k)p_1 + \frac{\rho_m c^2}{\omega^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1 - f_v}{\rho_m} \frac{dp_1}{dx} \right) - \beta \frac{c^2}{\omega^2} \frac{(f_k - f_v)}{(1 - P_r)} \frac{dT_m}{dx} \frac{dp_1}{dx} = 0 \quad (35)$$

dove β è il coefficiente di espansione termica [K^{-1}].

Il termine dT_m/dx relativo al gradiente di temperatura si ricava dall'equazione (33) ed assume la seguente formulazione:

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{\dot{Q} - \frac{1}{2} Re \left[p \tilde{U}_1 \left(1 - \frac{T_m \beta (f_k - \tilde{f}_v)}{(1 + P_r)(1 - \tilde{f}_v)} \right) \right]}{\frac{\rho_m c_p |U_1|^2}{2\omega A_f (1 + P_r) |1 - f_v|^2} Im \left[\tilde{f}_v + \frac{(f_k - \tilde{f}_v)(1 + f_v/f_k)}{(1 + P_r)} \right] - A_f k_f - A_s k_s} \quad (36)$$

dove la tilde \sim denota il coniugato complesso, A_f è l'area della sezione trasversale utile al passaggio del gas, A_s l'area della sezione trasversale appartenente al material poroso, k_f e k_s le conducibilità termiche del fluido e del solido rispettivamente e \dot{Q} la potenza termica fornita.

CAPITOLO 2: SIMULAZIONI NUMERICHE CON DELTAEC

2.1 Componenti di un motore termoacustico ad onda stazionaria

Al fine di approfondire il funzionamento di un motore termoacustico ad onda stazionaria è stato condotto uno studio numerico con il programma DeltaEC. Prima di illustrare il funzionamento del programma sono riportati e discussi sia i componenti con i quali è stato possibile schematizzare un motore termoacustico ad onda stazionaria: il tubo risonatore, gli scambiatori di calore, lo stack sia il mezzo di propagazione all'interno del quale avviene si sviluppa l'onda sonora.

2.1.1 Il tubo risonatore

Il condotto risonatore è un cilindro regolare senza interruzioni e disallineamenti, il cui compito è quello di contenere lo stack e gli scambiatore di calore del motore termoacustico. Le sue caratteristiche quali lunghezza, peso e forma, devono soddisfare i requisiti di compattezza, leggerezza e resistenza. La forma e la lunghezza influenzano le dissipazioni di potenza acustica e determinano la frequenza dell'intero sistema. Nel caso di un condotto chiuso alle estremità la lunghezza d'onda è prossima a circa metà della lunghezza del risonatore.

Con riferimento alla modellistica per una preliminare trattazione della propagazione dell'onda all'interno del tubo risonatore è stato utilizzato un modello a parametri concentrati, basato sull'analogia elettro-acustica. Per il tubo risonatore valgono le equazioni 28 e 29 essendo l'area della sezione trasversale del tubo risonatore molto più grande delle profondità di penetrazione termica e viscosa. L'equazione di continuità è ridefinita come:

$$p_1 = -\frac{1}{i\omega C} \Delta U_1 \quad (37)$$

dove $C = V/\gamma p_m$ indica la capacità del canale definita come il prodotto del volume del canale e la comprimibilità del fluido. Quindi grandi volumi o fluidi facilmente comprimibili possiedono una grande capacità.

Dall'equazione (29) di conservazione della quantità di moto si riscrive come:

$$\Delta p_1 = -i\omega L U_1 \quad (38)$$

dove $L = \rho_m \Delta x / A$ indica l'induttanza del canale definita come il prodotto della densità del gas per la lunghezza del canale, il tutto diviso per la sezione trasversale dello stesso.

Il tubo risonatore può essere schematizzato da un punto di vista acustico come un doppio risonatore di Helmholtz, ovvero due bulbi connessi da un sottile collo. Considerando un doppio risonatore ideale, per l'analogia elettrica corrisponde a due capacità connesse da un'induttanza, come riportato in Figura 17.

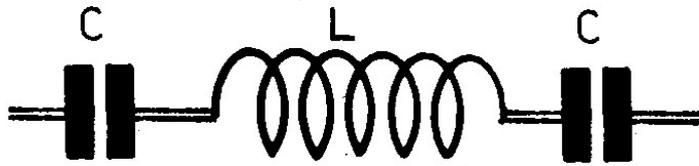


Figura 17: Schema dell'analogia elettrica per il tubo risonatore

Per un sistema ideale di questo tipo, combinando le equazioni 37 e 38, è possibile scrivere:

$$i\omega L + 2/i\omega C = 0 \quad (39)$$

da cui la frequenza di risonanza del doppio risonatore di Helmholtz è data da:

$$(2\pi f)^2 = \omega^2 = \frac{2}{LC} = 2 \frac{\gamma p_m}{\rho_m} \frac{A}{V \Delta x} = c^2 \frac{2A}{V \Delta x} \quad (40)$$

2.1.2 Gli scambiatori di calore

Gli scambiatori di calore all'interno di un motore termoacustico hanno il compito di fornire e di prelevare energia termica dal dispositivo al fine di mantenere costante un gradiente di temperatura alle estremità dello stack sufficientemente grande da sviluppare l'oscillazione spontanea. In Figura 18 si mostra uno scambiatore di calore a piastre parallele.

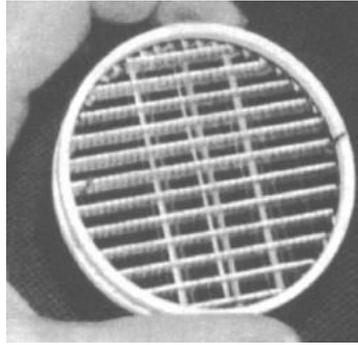


Figura 18: Scambiatore di calore a piastre parallele

La spaziatura tra le piastre è generalmente dello stesso ordine di grandezza della profondità di penetrazione termica del fluido. La dimensione dello scambiatore di calore nella direzione di propagazione dell'onda è tipicamente scelta dell'ordine della distanza picco picco di oscillazione della particella.

2.1.3 Lo stack

Lo stack non è altro che un solido poroso che, solitamente, è realizzato con materiali ferrosi o ceramici. I pori dello stack, all'interno dei quali è contenuto il fluido di lavoro, hanno una dimensione caratteristica quantificata dal raggio idraulico (rapporto tra il volume del fluido di lavoro contenuto nello stack e la superficie di quest'ultimo a contatto con il fluido di lavoro). Tale parametro determina la tipologia di flusso che si instaura nei canali dello stack e la corrispondente caduta di pressione. Il parametro caratterizzante il trasferimento di calore durante l'oscillazione acustica tra il fluido di lavoro e lo scheletro solido del mezzo poroso è la profondità di penetrazione termica. Tale parametro è direttamente proporzionale alla conducibilità termica del fluido di lavoro ed inversamente proporzionale alla sua densità, al calore specifico ed alla frequenza dell'oscillazione acustica. Un mezzo poroso è classificato come stack o come rigeneratore dal numero adimensionale di Lautrec N_L , definito come il rapporto tra il raggio idraulico r_h e la lunghezza di penetrazione termica δ_k .

$$N_L = \frac{r_h}{\delta_k} \quad (41)$$

Nello stack il numero di Lautrec è superiore all'unità quindi la trasformazione del fluido di lavoro ha un comportamento intermedio tra una trasformazione perfettamente isoterma, nella zona

di contatto tra lo scheletro solido dello stack ed il fluido di lavoro e all'incirca adiabatica a distanze superiori alla lunghezza di penetrazione termica. Figura 19 riporta due immagini di materiali porosi: per determinate condizioni operative il primo materiale presenta un raggio idraulico minore della profondità di penetrazione termica per cui viene definito rigeneratore e richiesto per i dispositivi ad onda viaggiante, il secondo presenta un raggio idraulico dello stesso ordine di grandezza della profondità di penetrazione termica per cui è definito stack e richiesto per i dispositivi ad onda stazionaria.

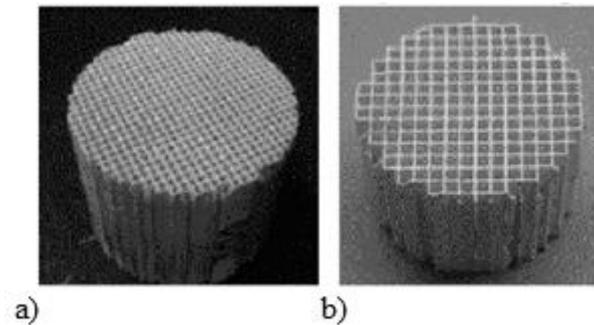


Figura 19: Materiale poroso definito come: a) rigeneratore $r_h \ll \delta_k$ o b) stack $r_h \sim \delta_k$

2.1.4 Il fluido di lavoro

La scelta del fluido di lavoro per un motore termoacustico è un aspetto importante poiché le proprietà del fluido determinano la qualità dello scambio termico con la superficie solida. Al fluido di lavoro è richiesto un basso numero di Prandtl in modo da avere una profondità di penetrazione termica maggiore di quella viscosa. Per questo motivo sono da preferire gas nobili come l'elio, l'argon o una loro miscela. Essendo questo studio rivolto esclusivamente a valutare l'influenza della geometria dello stack sulle prestazioni del motore termoacustico, in questa analisi la scelta del fluido di lavoro è ricaduta sull'aria, in quanto, sebbene consapevoli della minor potenza acustica ottenibile nell'utilizzare questo fluido, consentirebbe, al fine di validare i risultati di questo lavoro, una più facile realizzazione dell'apparecchiatura sperimentale.

2.2 Il programma DeltaEC

DeltaEC (Design Environment for Low-Amplitude ThermoAcoustic Engine) è un programma sviluppato da un gruppo di ricercatori del Laboratorio Nazionale di Los Alamos. Questo programma risolve equazioni d'onda monodimensionali basate sull'approssimazione acustica della bassa ampiezza. Tale semplificazione rende le elaborazioni numeriche veloci fornendo risultati in

accordo con numerose sperimentazioni condotte in diversi laboratori. Il programma può predire come un dato dispositivo termoacustico lavorerà, o può permettere all'utente di disegnare un dispositivo per raggiungere gli obiettivi desiderati. DeltaEC è uno strumento utile per i ricercatori nella fisica acustica, specialmente nella termoacustica. È capace di trattare configurazioni geometriche complesse e include elementi acustici specializzati come risuonatori, condotti di connessione e motori termoacustici completi. Nello studio dei dispositivi termoacustici il programma DeltaEC è particolarmente utile nel calcolare la dipendenza spaziale della velocità e della pressione acustica. Il programma è disponibile gratuitamente sul sito internet del gruppo di ricerca settore termoacustica del Laboratorio Nazionale di Los Alamos. [20]

L'integrazione numerica avviene in una geometria definita dall'utente per mezzo di una sequenza di componenti quali ad esempio condotti, trasduttori, stack etc. DeltaEC assume, per tutte le variabili oscillatorie, una dipendenza temporale del tipo $e^{i\omega t}$. Le variabili di interesse quali l'ampiezza di pressione complessa $p_1(x)$ e l'ampiezza del flusso di velocità complesso $U_1(x)$ sono individuate risolvendo all'interno di ogni componente la coppia di equazioni differenziali del primo ordine che governano il fenomeno.

Le equazioni sono integrate numericamente e contemporaneamente nella coordinata monodimensionale x . Per un determinato dx le variazioni dell'oscillazione di pressione, dell'oscillazione di velocità di volume e le variazioni della temperatura media del fluido, espresse dalle equazioni (31), (34) e (36), sono sinteticamente riportate in funzione sia del valore delle variabili locali quali: l'oscillazione di pressione, l'oscillazione della velocità di volume e la temperatura media del fluido, sia delle variabili globali come la potenza termica fornita, la pressione media del fluido, la frequenza operativa, le proprietà del gas, etc.

$$\frac{dp_1}{dx} = f(p_1, U_1, T_m, \dot{Q}, p_m, \omega, \text{geometria, proprietà del gas, etc}) \quad (42)$$

$$\frac{dU_1}{dx} = f(p_1, U_1, T_m, \dot{Q}, p_m, \omega, \text{geometria, proprietà del gas, etc}) \quad (43)$$

$$\frac{dT_m}{dx} = f(p_1, U_1, T_m, \dot{Q}, p_m, \omega, \text{geometria, proprietà del gas, etc}) \quad (44)$$

La soluzione di $T_m(x)$, $p_1(x)$ e $U_1(x)$ è individuata univocamente imponendo cinque condizioni al contorno, essendo le variabili $p_1(x)$ e $U_1(x)$ entrambe di natura complessa. Il programma risolve il sistema di equazioni verificando per ogni segmento la continuità di $T_m(x)$,

$p_1(x)$ e $U_1(x)$. Per gli scambiatori di calore è necessario il calcolo della potenza termica trasferita \dot{Q} , ottenibile dall'equazione (36), e anch'essa funzione delle variabili locali e globali viste sopra.

$$\dot{Q} = f(p_1, U_1, T_m, Q, p_m, \omega, \text{geometria, proprietà del gas, etc}) \quad (45)$$

Il termine di potenza termica \dot{Q} è assunto indipendente dalla coordinata x all'interno dello stack considerando le pareti esterne di quest'ultimo come adiabatiche.

Tramite opportune condizioni al contorno il programma ricerca, mediante un processo iterativo, la terna di variabili $p_1(x)$, $U_1(x)$ e $T_m(x)$ che in ogni componente del dispositivo termoacustico soddisfi le equazioni sopra riportate e le relative condizioni al contorno.

E' evidente che la complessità del problema cresce con il numero di componenti che si aggiungono al dispositivo. La terna di soluzioni è tanto più attendibile quanto più adeguate sono le condizioni al contorno imposte. E' possibile inoltre introdurre una serie di ulteriori limitazioni, o di condizioni al contorno, aggiungendo ad esempio vincoli derivanti da osservazioni sperimentali.

In questa prima analisi il programma è stato utilizzato per schematizzare un motore termoacustico ad onda stazionaria, verificarne le condizioni operative e analizzare l'incidenza sulle sue prestazioni da parte delle caratteristiche geometriche e costruttive dello stack.

In Figura 20 è riportato uno schema del motore termoacustico ad onda stazionaria implementato all'interno del programma DeltaEC.



Figura 20: Scherma del motore termoacustico elaborato in DeltaEC

I parametri di input del programma sono riportati in due gruppi: parametri geometrici e operativi riportati rispettivamente in e in Tabella 3.

Tabella 2: Parametri geometrici del motore termoacustico simulato in DeltaEC

Parametro	Descrizione	Valore
A	Area trasversale	0,011 m^2
L_c	Lunghezza condotto “caldo”	0.023 m
L_f	Lunghezza condotto “freddo”	0.983 m
L_{sc}	Lunghezza scambiatore di calore “caldo”	0.019 m
L_{sf}	Lunghezza scambiatore di calore “freddo”	0.022 m
L_d	Lunghezza totale motore	1.124 m
ϕ_{sc}	Porosità scambiatori di calore	0,68
ϕ_{stk}	Porosità stack	0,83

Tabella 3: Parametri operativi del motore termoacustico simulato in DeltaEC

Parametro	Descrizione	Valore
p_m	Pressione statica	1 atm
f	Frequenza	307 Hz
T_c	Temperatura fluido scambiatore caldo	900 K
T_f	Temperatura fluido scambiatore freddo	300 K

La scelta dell’aria come fluido di lavoro e la scelta di lavorare a pressione atmosferica sono dettate dal fatto di voler analizzare un dispositivo che sia da un punto di vista costruttivo quanto più semplice possibile.

Una volta messo a punto il modello si è deciso di bloccare alcune delle caratteristiche del motore quali la porosità dello stack e degli scambiatori di calore, la lunghezza di questi ultimi e del tubo risonante e, inoltre, la posizione dello stack. Ben consci che anche queste caratteristiche influenzino le prestazioni dell’intero sistema, ci si è dedicati ai parametri costruttivi dello stack per evidenziare

alcune caratteristiche salienti che possono valere a prescindere dalla lunghezza del tubo e dalla posizione dello stack.

I parametri principali che sono stati determinati dal programma, oltre ovviamente a pressione, velocità di volume e temperatura, sono stati la potenza acustica ottenuta e la potenza termica fornita al dispositivo. Dalla conoscenza della potenza acustica ottenuta e la potenza termica fornita, si ricava il rendimento termodinamico del ciclo:

$$\eta = \frac{\dot{E}}{\dot{Q}} \quad (46)$$

dove \dot{Q} è la potenza termica netta fornita al sistema, \dot{E} l'energia acustica valutata come il prodotto delle variabili di primo ordine p_1 e U_1 :

$$\dot{E} = \frac{\omega}{2\pi} \oint Re[p_1(x)e^{i\omega t}] Re[U_1(x)e^{i\omega t}] dt = \frac{1}{2} Re[p_1 \tilde{U}_1] = \frac{1}{2} Re[\tilde{p}_1 U_1] = \frac{1}{2} |p_1| |U_1| \cos \phi_{pU} \quad (47)$$

dove ϕ_{pU} è l'angolo di fase tra p_1 e U_1 .

2.3 Influenza delle caratteristiche costruttive e geometriche dello stack

I materiali con cui è realizzato lo stack sono numerosi: dall'acciaio ai materiali plastici e ceramici. I materiali scelti per l'analisi sono: il Celcor, il Mylar e l'acciaio. Il primo è un materiale ceramico mentre il secondo è un materiale plastico derivato dalla resina di polietilene teptalato. I materiali considerati sono economici e commercialmente disponibili.

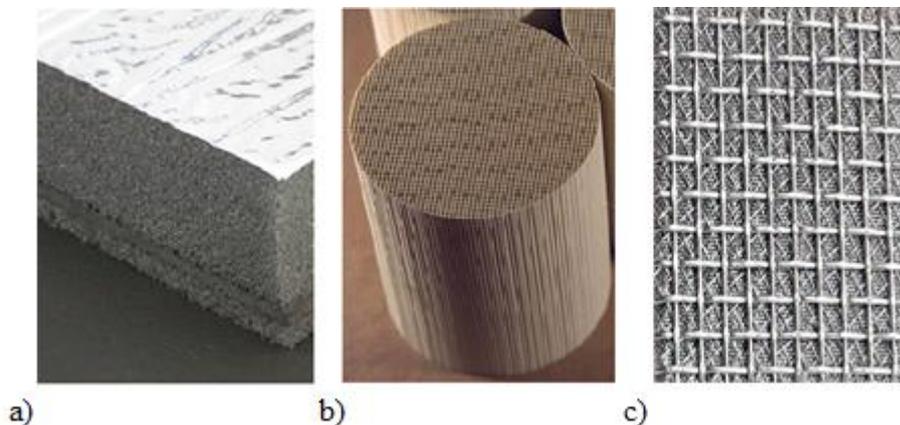


Figura 21: Materiali scelti per lo stack: a)Mylar, b)Celcor e c) acciaio

Per tutti i materiali la forma dei pori è cilindrica, la lunghezza del mezzo poroso pari a 0.05 m e il gradiente di temperatura alle estremità pari a 600 K .

Il raggio dei pori è stato fatto variare in un intervallo che va da $0.3 \cdot 10^{-3}\text{ m}$ a $1 \cdot 10^{-3}\text{ m}$ al fine di paragonare, in termini di rendimento, le prestazioni dei materiali selezionati. Nelle simulazioni numeriche è stata considerata costante la porosità dello stack.

E' bene precisare che ogni punto della Figura 22 riporta il risultato di successive iterazioni in cui le variabili definite guess sono diverse per ogni soluzione visualizzata.

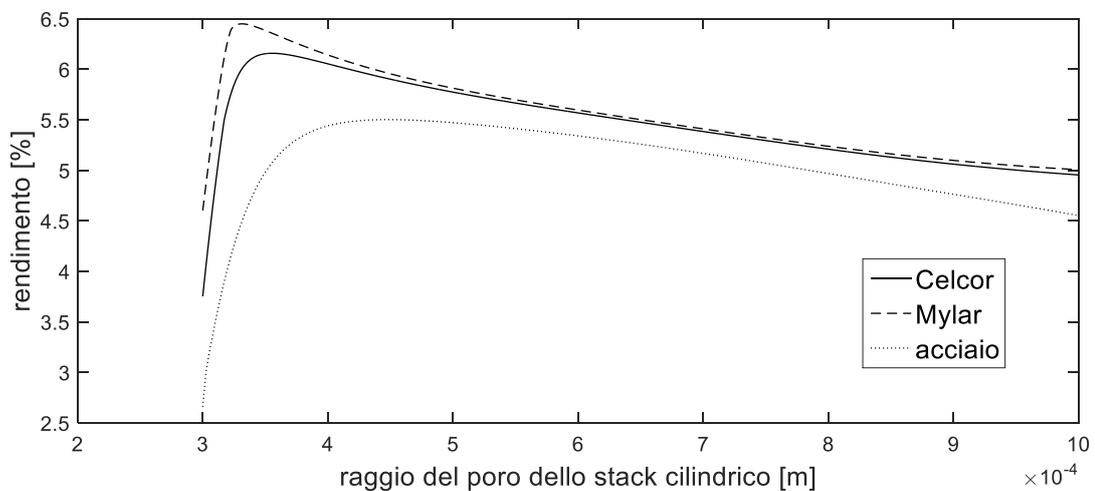


Figura 22: Rendimento del motore al variare del raggio dei pori per diversi materiali

Dai risultati si evince che il Mylar fornisce un rendimento del motore maggiore rispetto al Celcor e all'acciaio. Ciò può essere teoricamente giustificato dalla più bassa conducibilità termica del Mylar. Il massimo rendimento ottenuto col Mylar è del 6,44% con un raggio dei pori di $0.335 \cdot 10^{-3}\text{ m}$ mentre col Celcor del 6,14% con un raggio di $0.37 \cdot 10^{-3}\text{ m}$. Tali rendimenti appaiono molto contenuti se confrontati con altri dispositivi di conversione dell'energia. Si tenga però presente che in questo caso il dispositivo è realizzato con fluido di lavoro aria a pressione ambiente.

Sebbene l'efficienza del motore con uno stack in Mylar sia superiore agli altri materiali, c'è tuttavia un inconveniente: ha un punto di fusione molto basso, intorno ai 500 K , temperatura non adatta per il dispositivo oggetto di studio. Il Celcor può raggiungere alte temperature di lavoro (fino a circa 1870 K). In caso di gradienti di temperatura più contenuti, è possibile preferire il Mylar. Anche la forma dello stack rappresenta un fattore molto importante nel processo di miglioramento della potenza acustica e del rendimento termodinamico del ciclo.

Al fine di poter confrontare diverse tipologie di geometrie convenzionali, lo stack è stato organizzato in modo da mantenere costante la porosità nelle forme illustrate in Figura 23: piastre parallele, pori rettangolari e circolari.

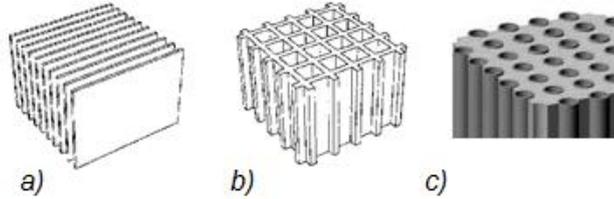


Figura 23: Geometrie convenzionali: a) piastre parallele, b) pori rettangolari e c) circolari.

Il materiale che costituisce lo stack nelle simulazioni è il Celcor e la lunghezza dello stack è pari a 0.05 m . Il confronto dell'efficienza del motore termoacustico è ottenuto al variare del raggio dei pori ϕ , in modo analogo, la spaziatura delle piastre in un intervallo da $0.3 \cdot 10^{-3}\text{ m}$ a $1 \cdot 10^{-3}\text{ m}$.

Per quanto riguarda lo stack dotato di piastre parallele, la porosità è espressa come:

$$\varphi = \frac{A_f}{A_{tot}} = \frac{y_0}{y_0 + l} \quad (48)$$

dove y_0 è la metà della spaziatura delle piastre, l la metà dello spessore delle piastre e l'area totale A_{tot} è data dalla somma $A_f + A_s$. Pertanto, considerando costante la porosità e facendo variare y_0 , si ricava il valore dello spessore l per ogni spaziatura.

Per lo stack con pori rettangolari, la porosità è definita:

$$\varphi = \frac{A_f}{A_{tot}} = \frac{ab}{ab + al + bl + l^2} \quad (49)$$

dove l è metà spessore della piastra, a e b sono relative alla metà delle dimensioni del poro rettangolare. Queste dimensioni geometriche sono chiarite in Figura 27. Anche in questo caso considerando costante la porosità ed imponendo $l = 0.1 * a$ si ricava il valore di b .

Nel caso di pori circolari la porosità è stata espressa come:

$$\varphi = \frac{A_f}{A_{tot}} = \frac{\pi R^2}{(R + h)^2} \quad (50)$$

dove R è il raggio del poro e h la metà dello spessore solido che separa due pori adiacenti.

La procedura di iterazione e valutazione dei risultati mediante il programma DeltaEC è simile a quella esposta nell'analisi precedente riguardante il confronto tra i diversi materiali. I risultati ottenuti sono riportati in Figura 24.

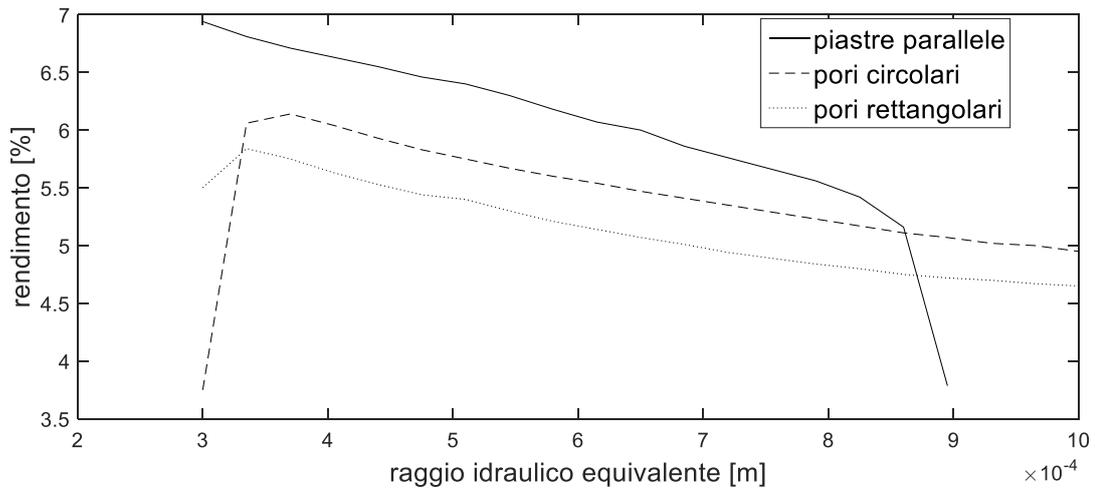


Figura 24: Rendimento del motore per diverse forme dello stack

Figura 24 mostra chiaramente che lo stack dotato di piastre parallele fornisce un rendimento maggiore rispetto alle altre forme dei pori, consentendo di ottenere un'efficienza del 6,94 % per una spaziatura di $0.3 \cdot 10^{-3} m$.

Se si osserva la curva che si riferisce allo stack dotato di piastre parallele, si nota che il programma non fornisce risultati per spaziature superiori a $0.9 \cdot 10^{-3} m$. Questo dipende dalle condizioni al contorno imposte, relative ad esempio alla scelta del gradiente di temperatura; aumentando anche solo di poco questo valore il programma fornirebbe risultati attendibili.

Questa osservazione mostra come nella progettazione di un dispositivo termoacustico bisogna porre particolare attenzione nell'individuare opportune condizioni al contorno per la ricerca del punto di funzionamento del dispositivo.

2.4 Considerazioni su stack convenzionali a geometria regolare

Le interazioni termiche e viscoso tra il fluido e il solido sono matematicamente formulate nelle equazioni 26 e 27 tramite le derivate parziali dell'oscillazione di temperatura e di velocità nelle coordinate perpendicolari alla propagazione dell'onda. Le derivate parziali, $\partial^2 T_1 / \partial y^2$ e $\partial^2 T_1 / \partial z^2$ riguardanti l'oscillazione di temperatura e $\partial^2 u_1 / \partial y^2$ e $\partial^2 u_1 / \partial z^2$ riguardanti l'oscillazione di velocità sono risolte da una funzione $h(y, z)$ e dalla sua media spaziale $f = \langle h \rangle$.

Queste funzioni sono note in forma analitica per alcune geometrie semplici comunemente utilizzate nei dispositivi termoacustici quali: piastre parallele, pori rettangolari, pori circolari e pin array. Queste formulazioni sono valide sia per le interazioni termiche che viscoso per cui usualmente sono denotate col pedice k quelle termiche e col pedice v quelle viscoso.

Per canali di sezione trasversale molto ampia, definito il punto di coordinata $y = 0$ alla parete, si ha:

$$h = e^{-i(1+i)y/\delta}$$

$$f = \frac{(1-i)y/\delta}{2r_h}$$
(51)

Se si definisce $y = 0$ il centro tra due piastre parallele separate da una distanza di $2y_0$, come mostrato in Figura 25, le funzioni h ed f si valutano come:

$$h = \frac{\cosh[(1+i)y/\delta]}{\cosh[(1+i)y_0/\delta]}$$

$$f = \frac{\tanh[(1+i)y_0/\delta]}{(1+i)y_0/\delta}$$
(52)

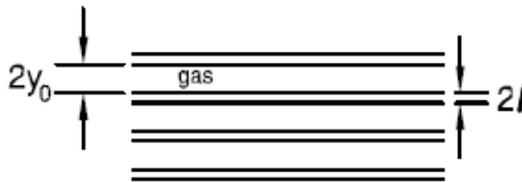


Figura 25: Struttura geometrica composta da piastre parallele

Per pori circolari di raggio R pari a $2r_h$, come mostrato in Figura 26, le funzioni si esprimono come:

$$h = \frac{J_0[(i-1)r/\delta]}{J_0[(i-1)R/\delta]} \quad (53)$$

$$f = \frac{2J_1[(i-1)R/\delta]}{J_0[(i-1)R/\delta] (i-1)R/\delta}$$

nelle quali $r = \sqrt{y^2 + z^2}$.

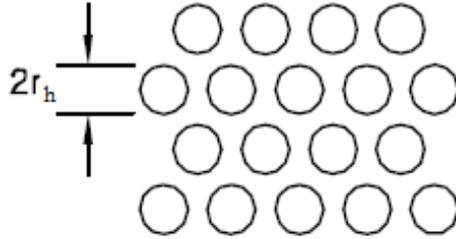


Figura 26: Struttura geometrica composta da pori circolari

Per canali rettangolari riportati in Figura 27, di dimensioni $2a \times 2b$, le funzioni h e f assumo la seguente formulazione [21]:

$$h = 1 - \frac{16}{\pi^2} \sum_{m,n \text{ odd}} \frac{\text{sen}(m\pi y/2a)\text{sen}(n\pi z/2b)}{mn \left(1 - i \frac{\pi^2 \delta}{8a^2 b^2} (b^2 m^2 + a^2 n^2)\right)} \quad (54)$$

$$f = 1 - \frac{64}{\pi^4} \sum_{m,n \text{ odd}} \frac{1}{m^2 n^2 \left(1 - i \frac{\pi^2 \delta}{8a^2 b^2} (b^2 m^2 + a^2 n^2)\right)}$$

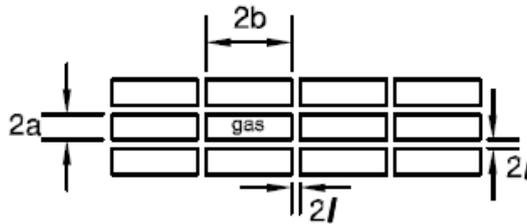


Figura 27: Struttura geometrica composta da canali rettangolari

Per geometria del tipo di pin array, riportata in Figura 28, gli elementi possono essere disposti secondo diverse configurazioni lungo la direzione di propagazione dell'onda. Le funzioni h ed f assumono una formulazione analitica ma notevolmente complicata per cui si rimanda alla bibliografia allegata [22].



Figura 28: Struttura geometrica del tipo pin array

L'andamento delle funzioni medie spaziali espresse dalle equazioni 51, 52, 53 e 54 sono riportate in Figura 29.

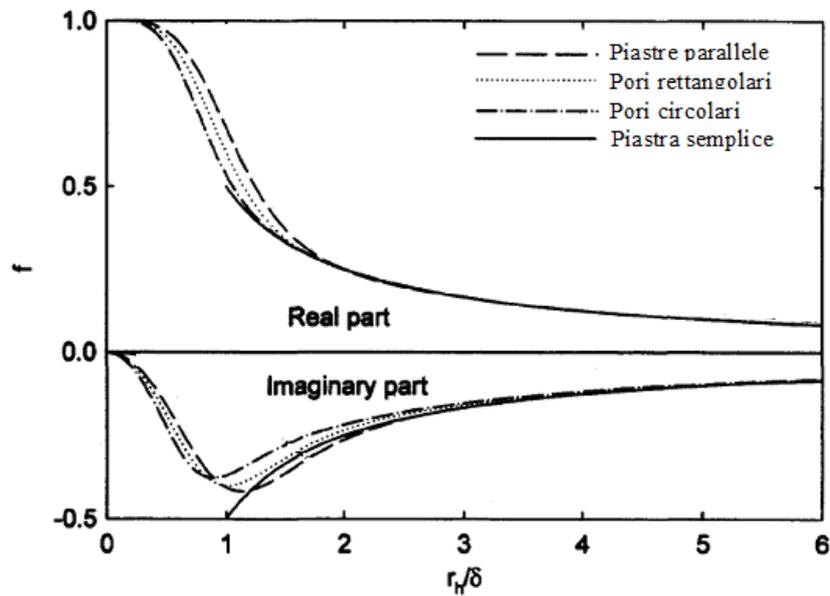


Figura 29: Andamento della funzione media spaziale per alcune geometrie regolari

Sull'asse orizzontale è presente il termine r_h/δ , con $\delta = \delta_v$ nel caso della funzione viscosa f_v e $\delta = \delta_k$ nel caso della funzione termica f_k .

Queste funzioni dipendono sia dalle caratteristiche geometriche dei pori che compongono lo stack sia tramite le profondità di penetrazione dalle caratteristiche termiche e viscosi alle caratteristiche operative del sistema.

CAPITOLO 3: MODELLAZIONE DELLE INTERAZIONI TERMICHE E VISCOSE NEI MATERIALI POROSI

Le interazioni tra l'onda sonora che si propaga nel fluido e il solido, determinate dalla forma geometrica dei pori, sono tenute in conto all'interno delle equazioni termoacustiche tramite le funzioni viscoso e termiche definite nella teoria di Rott. Queste funzioni hanno una soluzione in forma chiusa solo se i pori che compongono lo stack hanno una forma geometrica semplice e una sezione trasversale uniforme. Al fine di poter esaminare l'influenza di stack non convenzionali, ovvero la cui geometria del poro può presentare sezioni trasversali complesse e tortuose, le funzioni termiche e viscoso sono state riformulate sulla base di alcuni parametri non acustici quali la resistività al flusso d'aria, la tortuosità, le lunghezze caratteristiche termiche e viscoso.

Stack realizzati con materiali a struttura complessa quali reticolati di carbonio vitreo sono stati proposti ed utilizzati all'interno di dispositivi termoacustici [23]. Altre strutture non regolari come reti metalliche in acciaio inossidabile sono state indagate da Swift e Backhaus [24].

Roh [25], nel 2007, estende la teoria termoacustica a materiali porosi a struttura complessa introducendo nelle equazioni termoacustiche un fattore di tortuosità e due fattori dinamici di forma, relativi rispettivamente agli effetti termici e viscosi, derivati dagli studi di Champoux e Stinson [26]. Jaworski ha esaminato il ruolo della resistività al flusso d'aria del materiale poroso sulla potenza acustica sviluppato da un motore termoacustico [27]. Altri materiali a struttura complessa realizzati in acciaio sono stati utilizzati per realizzare dispositivi termoacustici a basso costo [28]. Nel 2015 Guedra propone un metodo inverso, basato su misure acustiche, per la caratterizzazione delle proprietà geometriche e termiche di materiali porosi a celle aperte [29].

Questo lavoro si propone di fornire una generalizzazione degli studio sopra menzionati. In particolare i parametri non acustici che saranno introdotti possono essere misurati o stimati direttamente senza dover richiedere fattori di adattamento.

In questo capitolo si presentano alcuni modelli atti allo studio della propagazione del suono nei mezzi porosi e la derivazione delle funzioni termiche e viscoso richieste dalla teoria di Rott a partire dal modello di Johnson-Champoux-Allard.

3.1 La propagazione del suono nei mezzi porosi

I materiali porosi sono comunemente utilizzati nelle applicazioni di controllo del rumore in giacché sono facili da installare e sono caratterizzati dall'aver un eccellente assorbimento alle medie e alte frequenze. L'assorbimento di energia sonora che avviene all'interno di un materiale

poroso a fase solida rigida e che presenta pori tortuosi ed interconnessi, è alquanto complesso da prevedere. Esso avviene a causa di fenomeni di natura termica e viscosa. Questi due contributi a loro volta variano al variare della struttura dello scheletro solido del materiale poroso, della frequenza dell'onda sonora e dallo sfasamento temporale tra la pressione sonora e la velocità delle particelle dell'aria.

I primi studi effettuati su forme di poro semplici (i.e. sezione circolare e rettilinei) hanno evidenziato che i fenomeni di natura termica e viscosa possono essere trattati separatamente [30], considerando due nuovi parametri, il modulo di comprimibilità complesso e la densità complessa, rispettivamente.

Numerosi studi hanno indagato come questi due parametri, il modulo di comprimibilità complesso e la densità complessa, potessero essere spiegati con grandezze non prettamente acustiche. I primi modelli, tuttora in uso, sono stati ottenuti in conformità alle numerose osservazioni sperimentali. Tra questi è possibile citare il modello empirico di Delany-Bazley [31], che permette di prevedere il modulo di comprimibilità complesso e la densità complessa in funzione della frequenza dalla conoscenza di un solo parametro, la resistività al flusso d'aria, misurabile tramite la norma UNI EN 29053.

Benché tale modello sia di facile utilizzo, la sua applicazione è limitata solo ai materiali fibrosi, la cui fibra è in vetro o in roccia. Tale tipologia di materiale oggi è limitata a ristrette applicazioni perché, nel tempo o a seguito di sollecitazioni meccaniche, disperde parte delle fibre di cui è composto. Per le nuove tipologie di materiali, quali ad esempio le schiume di poliuretano a celle aperte, tale modello è stato inapplicabile. Pertanto è stata necessaria una modellazione più accurata che, partendo da un'analisi microstrutturale del poro, fosse in grado di descrivere il comportamento acustico anche di questi materiali.

Il modello ad oggi più utilizzato è dovuto agli studi di Johnson [32] per la previsione della densità complessa, e di Champoux [33] per la previsione della densità complessa. Esso è comunemente chiamato modello di Johnson-Champoux-Allard e sarà descritto in dettaglio nel prossimo paragrafo.

3.2 Il modello di Johnson-Champoux-Allard

Questo modello assume che il materiale poroso abbia uno scheletro rigido e possa essere descritto come un "fluido equivalente". Per il calcolo della densità complessa e del modulo di comprimibilità complesso è necessaria la conoscenza di cinque parametri non acustici [34]: porosità ϕ , resistività al flusso d'aria σ , tortuosità α_∞ , lunghezza caratteristica termica Λ_k e lunghezza caratteristica viscosa Λ_v .

La densità complessa ρ , che dipende principalmente dalle interazioni viscosse tra l'aria all'interno dei pori e lo scheletro solido del materiale poroso, è espressa come:

$$\rho = \rho_m \alpha_\infty \left(1 + \frac{\phi \sigma}{j \omega \rho_m \alpha_\infty} \sqrt{1 + j \frac{4 \alpha_\infty^2 \eta \rho_m \omega}{\phi^2 \sigma^2 \Lambda_v^2}} \right) \quad (55)$$

dove ρ_m indica la densità media del fluido, η la viscosità dinamica, j l'unità immaginaria, ω la frequenza angolare.

Il modulo di comprimibilità complesso \tilde{K} , che dipende principalmente dalle interazioni termiche, è definito come:

$$K = \gamma p_m \left(\gamma - \frac{(\gamma - 1)}{1 + \frac{8\eta}{j \Lambda_k^2 P_r \omega \rho_m} \sqrt{1 + j \frac{\Lambda_k^2 \rho_m P_r \omega}{16\eta}}} \right)^{-1} \quad (56)$$

dove p_m indica la pressione media del fluido, η la viscosità dinamica, γ il rapporto tra il calore specifico a pressione costante e il calore specifico a volume costante, P_r il numero di Prandtl.

3.3 Formulazione delle funzioni termiche e viscosse

Partendo dalle definizioni della densità complessa e del modulo di comprimibilità complesso sono state derivate le funzioni termiche e viscosse richieste dalla risoluzione delle equazioni termoacustiche. Il modulo di comprimibilità complesso fornisce una misura della resistenza alla compressione uniforme. È definito nell'equazione (57) come rapporto tra un incremento infinitesimo di pressione risultante da una riduzione infinitesima relativa di volume.

$$K = -V \frac{dP}{dV} = \frac{\rho_m p_1}{\langle \rho_1 \rangle} \quad (57)$$

Si elabora una formulazione di $\langle \rho_1 \rangle$ da sostituire nell'equazione (57). La legge di stato dei gas al primo ordine afferma che:

$$\frac{p_1}{p_m} = \frac{T_1}{T_m} + \frac{\rho_1}{\rho_m} \quad (58)$$

Mediando spazialmente l'equazione (58), si ottiene:

$$\langle \rho_1 \rangle = -\frac{\rho_m}{T_m} \langle T_1 \rangle + \frac{\rho_m}{p_m} p_1 \quad (59)$$

L'oscillazione di temperatura è costante nella sezione trasversale del poro eccetto che per quella regione in prossimità dello strato limite termico. Il suo valore medio nella sezione è definito come:

$$\langle T_1 \rangle = \frac{1}{\rho_m c_p} (1 - f_k) p_1 \quad (60)$$

Sostituendo nell'equazione (57) la formulazione dell'oscillazione media di densità espressa dall'equazione (59) in cui il termine $\langle T_1 \rangle$ è definito dall'equazione (60), si ottiene:

$$\langle \rho_1 \rangle = -\frac{\rho_m}{T_m} \left[\frac{1}{\rho_m c_p} (1 - f_k) p_1 \right] + \frac{\rho_m}{p_m} p_1 = \rho_m p_1 \left[\frac{1}{p_m} - \frac{1}{T_m} \left[\frac{1}{\rho_m c_p} (1 - f_k) \right] \right] \quad (61)$$

Sostituendo ora questa formulazione di $\langle \rho_1 \rangle$ nella definizione 57 del modulo di comprimibilità complesso si ha:

$$K = \frac{1}{\left[\frac{1}{p_m} - \frac{1}{T_m} \left[\frac{1}{\rho_m c_p} (1 - f_k) \right] \right]} \quad (62)$$

Moltiplicando e dividendo per il rapporto dei calori specifici γ e portando fuori dalle parentesi quadre la pressione media del fluido, si ottiene:

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\gamma p_m} \left[\gamma - \frac{\gamma p_m}{T_m} \left[\frac{1}{\rho_m c_p} (1 - f_k) \right] \right]} \quad (63)$$

Sapendo che:

$$\frac{p_m}{T_m \rho_m} \frac{1}{c_p} \gamma = R \frac{1}{c_p} \gamma = \frac{c_p - c_v}{c_p} \gamma = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \gamma = \gamma - 1 \quad (64)$$

Sostituendo quanto ottenuto con l'equazione (64) nell'equazione (63), si ottiene infine una formulazione che lega il modulo di comprimibilità alla funzione termica.

$$K = \frac{\gamma p_m}{[\gamma - (\gamma - 1)(1 - f_k)]} = \frac{\gamma p_m}{1 + (\gamma - 1)f_k} \quad (65)$$

Per quanto riguarda la densità complessa, essa è definita come:

$$\rho = -\frac{dp_1}{dx} \frac{1}{i\omega u_1} \quad (66)$$

Combinando le equazioni (55) e (66) si ottiene una formulazione della densità complessa legata alla funzione viscosa:

$$\rho = \frac{\rho_m}{1 - f_v} \quad (67)$$

Combinando, infine, le equazioni (55) e (56) formulate nella teoria di Johnson-Champoux-Allard con le equazioni (65) e (67) è possibile esprimere f_v e f_k in funzione dei parametri non acustici:

$$f_v = 1 - \frac{1}{\alpha_\infty \left(1 + \frac{\sigma}{j\omega \rho_m \alpha_\infty} \sqrt{1 + j \frac{4\alpha_\infty^2 \eta \rho_m \omega}{\sigma^2 \lambda_v^2}} \right)} \quad (68)$$

$$f_k = 1 - \frac{1}{1 + \frac{8\eta}{j\lambda_k^2 P_r \omega} \sqrt{1 + j \frac{\lambda_k^2 \rho_m P_r \omega}{16\eta}}} \quad (69)$$

Si può notare che la funzione media viscosa espressa dall'equazione (68) e la funzione media termica espressa dall'equazione (69) dipendono da un numero più ampio di parametri atti a descrivere la geometria del materiale poroso diversamente dalle loro formulazioni per geometrie convenzionali espresse dalle equazioni (52) – (53) – (54).

3.4 I parametri non acustici alla base del modello

In questo paragrafo è definito in modo dettagliato il significato fisico e la formulazione matematica dei cinque parametri non acustici ($\phi, \alpha_\infty, \sigma, \Lambda_v, \Lambda_k$) sui quali si fonda il modello di Johnson-Champoux-Allard e che sono alla base delle funzioni termiche e viscosive individuate per generici materiali porosi.

La porosità si riferisce al volume che il fluido occupa rispetto al volume totale del materiale poroso:

$$\phi = \frac{V_f}{V_{tot}} \quad (70)$$

La tortuosità α_∞ è una proprietà intrinseca dello scheletro solido del materiale poroso. Fornisce una misura della complessità del percorso dell'onda acustica all'interno del materiale rappresentando un aumento apparente della densità dovuto agli ostacoli e alle restrizioni che il fluido incontra durante la propagazione all'interno del materiale. È definita come:

$$\alpha_\infty = \frac{\frac{1}{V} \int_V |u_1^2| dV}{\left(\frac{1}{V} \int_V |u_1| dV\right)^2} \quad (71)$$

dove sia il numeratore sia il denominatore dipendono dalla media volumetrica della velocità. Può essere misurato direttamente mediante tecniche agli ultrasuoni [35] o indirettamente mediante metodi acustici [36].

La resistività al flusso d'aria σ caratterizza la difficoltà che il fluido incontra quando deve attraversare il materiale. È definito come:

$$\sigma = \frac{\Delta P}{d\phi \int_V u_1 dV} = \frac{\Delta P}{du_m} \quad (72)$$

dove ΔP è la differenza di pressione alle estremità del materiale, d è il suo spessore e u_m è la velocità media che può essere stimata all'esterno del materiale. Per pori cilindrici a sezione

trasversale costante la resistività al flusso d'aria è direttamente collegata al raggio del poro dalla relazione:

$$\sigma = \frac{8\eta}{\phi R^2} \quad (73)$$

L'equazione (73) mostra chiaramente che la resistività al flusso d'aria dipende dalla viscosità dinamica e quindi dalle proprietà del fluido che variano con la temperatura. Per superare questa limitazione si introduce la permeabilità viscosa $q_o = \eta/\sigma$ come parametro intrinseco che dipende esclusivamente dalla geometria dello scheletro solido. La resistività al flusso d'aria può essere misurata direttamente con metodi standard [37] o indirettamente mediante metodi acustici [38].

L'ultimo parametro che influenza le interazioni viscosse all'interno del materiale poroso è la lunghezza caratteristica viscosa Λ_v , definita da Johnson con la seguente espressione:

$$\Lambda_v = 2 \frac{\int_V u_1^2 dV}{\int_{\Pi} u_1^2 d\Pi} \quad (74)$$

dove Π è la superficie perimetrale e V il volume del poro elementare rappresentativo della struttura. Tale parametro tiene conto delle perdite viscosse che avvengono principalmente nelle aree più strette del poro tortuoso attraversato dal fluido. La lunghezza caratteristica viscosa può essere misurata direttamente con metodi ad ultrasuoni [39] o indirettamente mediante metodi acustici [40].

La lunghezza caratteristica termica è un parametro utilizzato per descrivere gli effetti termici che hanno luogo all'interno del poro. Introdotto da Champoux e Allard, è definito come:

$$\Lambda_k = 2 \frac{\int_V dV}{\int_{\Pi} d\Pi} \quad (75)$$

Anche la lunghezza caratteristica termica può essere valutata con misure ad ultrasuoni [41] o indirettamente tramite metodi acustici [42]

3.5 Validazione della formulazione delle funzioni termiche e viscosive

Per il calcolo dei parametri non acustici è stato scelto di risolvere numericamente il campo fluidodinamico che si instaura all'interno del singolo poro del materiale poroso. Le simulazioni numeriche sono state eseguite con il metodo agli elementi finiti (FEM) usando un risolutore stazionario linearizzato basato su un algoritmo parallelo di tipo MUMPS (MULTifrontal Massively Parallel sparse direct Solver) nel dominio della frequenza. Per il dominio numerico considerato è stata definita una rete di punti con almeno dieci gradi di libertà per lunghezza d'onda. Inoltre questa rete è stata infittita in prossimità del bordo del dominio: dieci gradi di libertà per definire correttamente la profondità di penetrazione viscosa. Per il calcolo della tortuosità α_∞ e della lunghezza caratteristica viscosa Λ_v , entrambi valutati da un punto di vista sperimentale con metodi ad ultrasuoni ovvero frequenze così alte da richiedere una mesh decisamente troppo fitta e tempi di calcolo eccessivi, è stato scelto di risolvere il campo fluidodinamico considerando un fluido essenzialmente privo di viscosità mentre per il calcolo della resistività al flusso d'aria σ è stato considerato un fluido viscoso ad una frequenza molto bassa. Per il calcolo della lunghezza caratteristica termica Λ_k , essendo nota analiticamente la funzione del profilo solido che delimita il fluido all'interno del poro, non è richiesto l'utilizzo del risolutore numerico. Una prima validazione, che ha riguardato il calcolo dei parametri non acustici del modello di Johnson-Champoux-Allard, è stata eseguita confrontando i risultati ottenuti dalle simulazioni numeriche con i valori che, nel caso di un poro cilindrico di raggio R , sono analiticamente noti, ovvero: $\Lambda_v = R$; $\Lambda_k = R$; $\sigma = 8\eta/R^2$; $\alpha_\infty = 1$. Successivamente la seconda validazione ha riguardato il confronto in frequenza dell'andamento delle funzioni termiche e viscosive calcolate con la formulazioni analitica (53) quelle derivate dalle equazioni (68) e (69) ricavate dal modello JCA. In particolare la Figura 30 e Figura 31 si riferiscono ad un poro cilindro di raggio $100 \mu\text{m}$ con temperatura del fluido di 300 K .

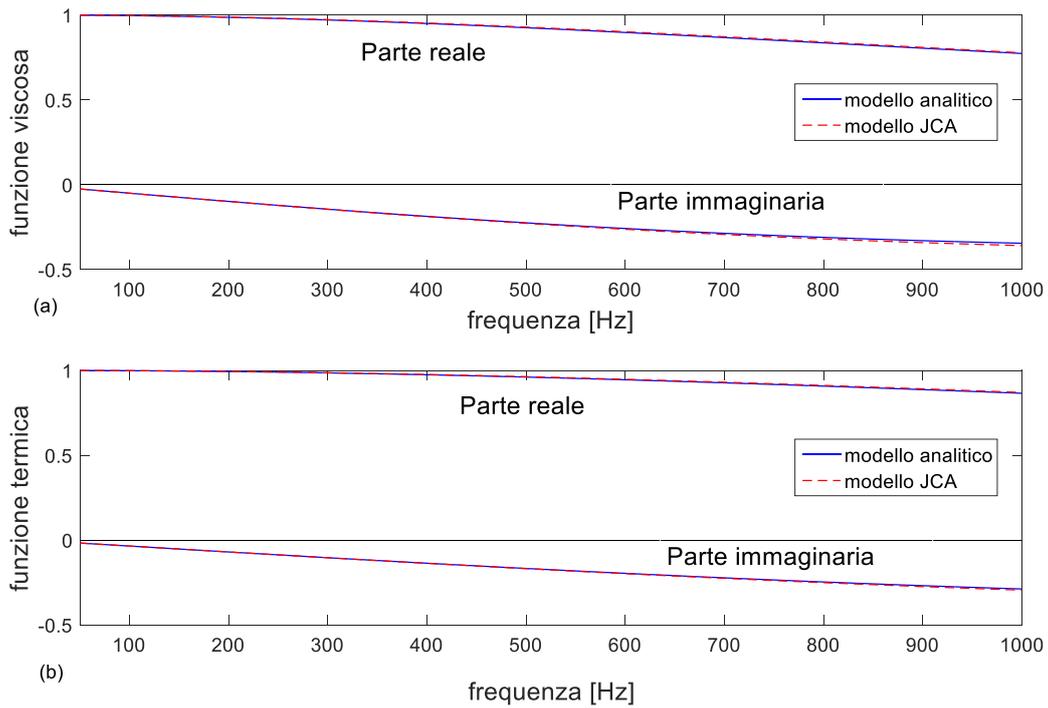


Figura 30: Confronto degli andamenti a) della funzione viscosa e b) della funzione termica, calcolate con l'equazione (53) e con le equazioni (68) e (69)

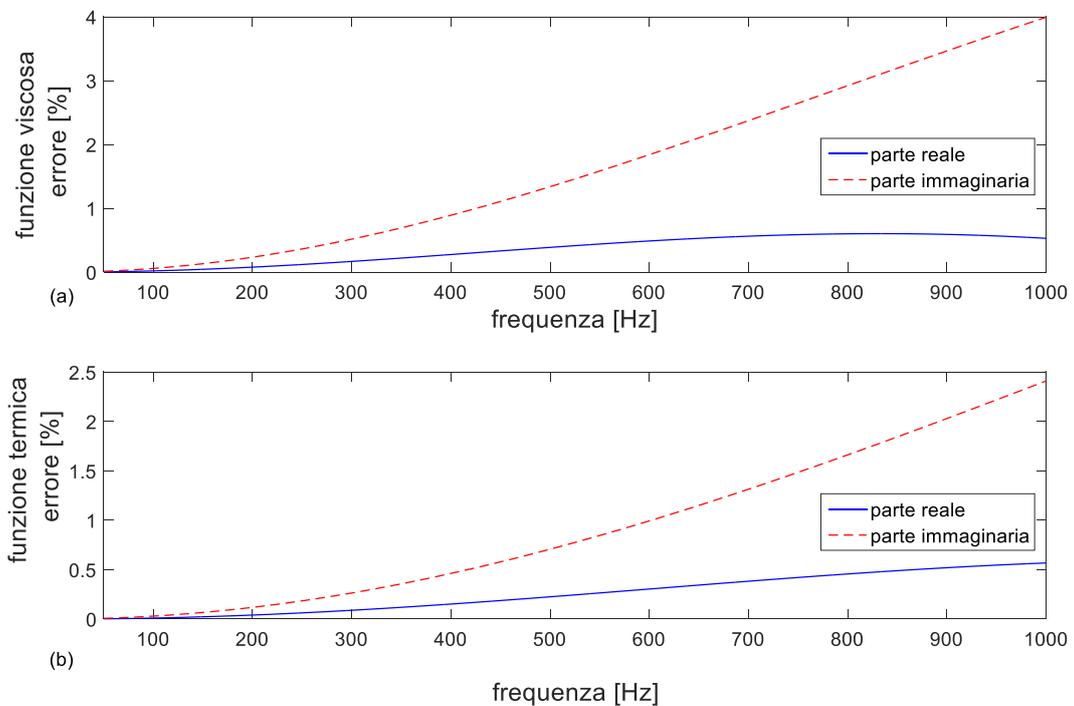


Figura 31: Errore percentuale della differenza di calcolo a) della funzione viscosa e b) della funzione termica, tra l'equazione (53) e con le equazioni (68) e (69)

Figura 30 e Figura 31 mostrano che l'andamento delle funzioni calcolate con le equazioni (68) e (69) derivate dal modello JCA è in accordo con l'andamento analitico espresso dall'equazione (53). Osservando i valori dell'errore percentuale in Figura 31, si può affermare che le nuove formulazioni delle funzioni termiche e viscosive, nell'intervallo di frequenze di interesse, forniscono valori affidabili sia per la parte reale che per la parte immaginaria.

3.6 Influenza della geometria sul calcolo dei parametri

Al fine di analizzare l'influenza dei parametri non acustici ($\phi, \alpha_{\infty}, \sigma, \Lambda_v, \Lambda_k$), che controllano le interazioni termiche e viscosive all'interno dello stack, è stato considerato un poro cilindrico di raggio $400 \mu m$ da cui si sono derivate alcune forme geometriche tortuose. La curva, rappresentata nel piano assial-simmetrico in Figura 32, che delimita il profilo del poro è modellata dalla seguente equazione analitica:

$$S = R + S_p \sin(2\pi d/T + \varphi) \quad (76)$$

Dove S_p è l'ampiezza di modulazione del profilo sinusoidale del poro, T il periodo di modulazione, φ la fase iniziale, R il raggio del poro e d la coordinata spaziale nella direzione della lunghezza dello stack.

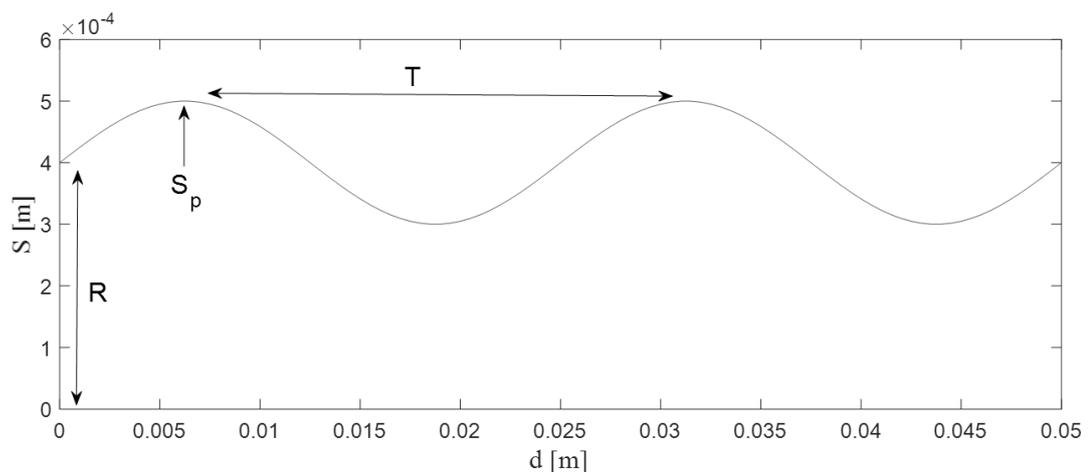


Figura 32: Profilo del poro tortuoso nel piano assial-simmetrico

L'analisi è stata condotta andando a variare ognuno dei tre parametri che determinano il profilo sinusoidale in uno specifico intervallo: il periodo di modulazione T nell'intervallo $[0,01 \ 0,1] \text{ m}$, la fase iniziale φ nell'intervallo $[0 \ 2\pi] \text{ rad}$ e l'ampiezza di modulazione S_p nell'intervallo $[0 \ R/3]$.

Figura 33, Figura 34 e Figura 35 si riferiscono rispettivamente al periodo di modulazione T , alla fase iniziale φ e all'ampiezza di modulazione S_p .

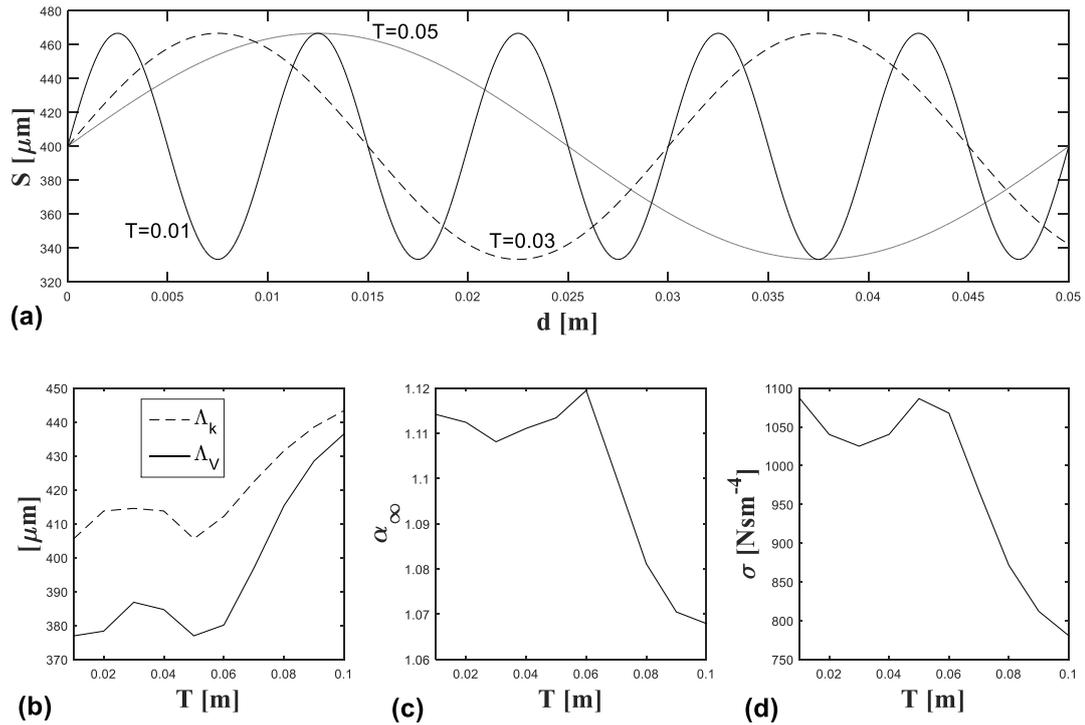


Figura 33: Effetto della variazione del periodo di modulazione T su a) forma del poro b) Δ_k , Δ_v c) α_∞ e d) σ

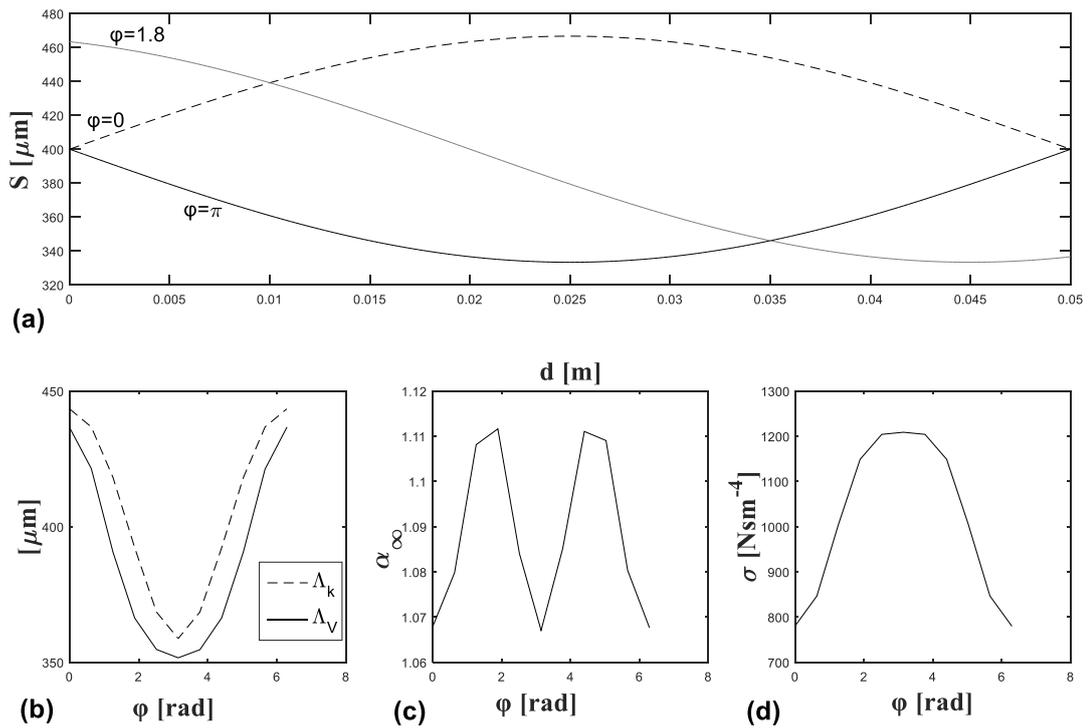


Figura 34: Effetto della variazione della fase iniziale φ su a) forma del poro b) Λ_k , Λ_v c) α_∞ e d) σ

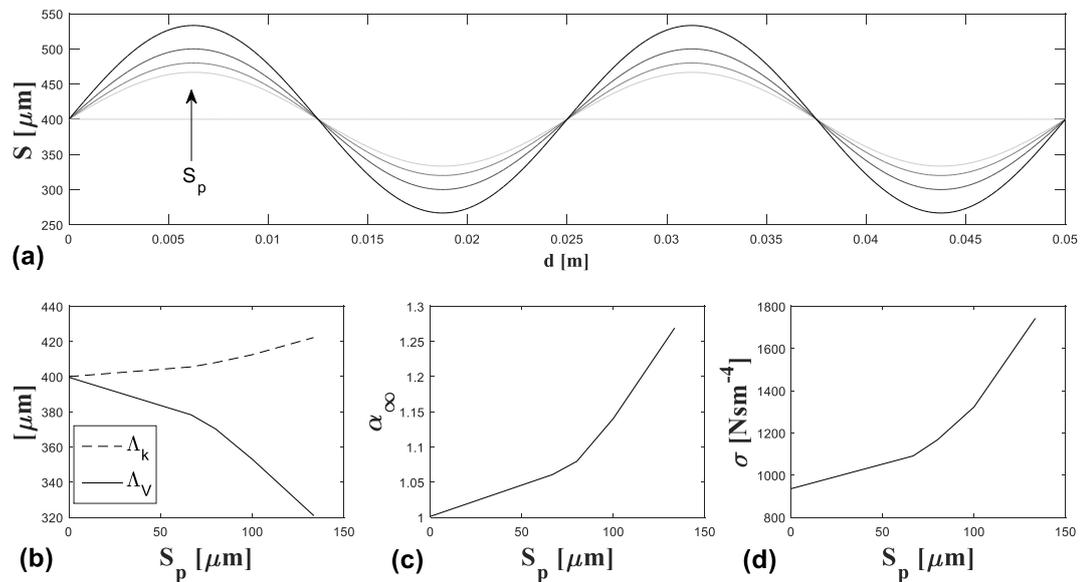
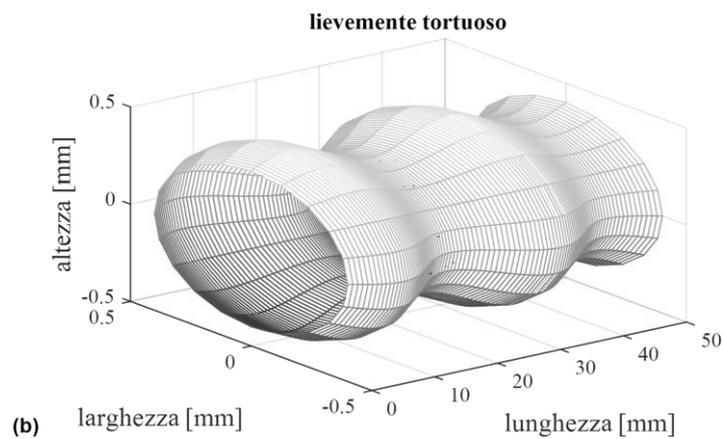
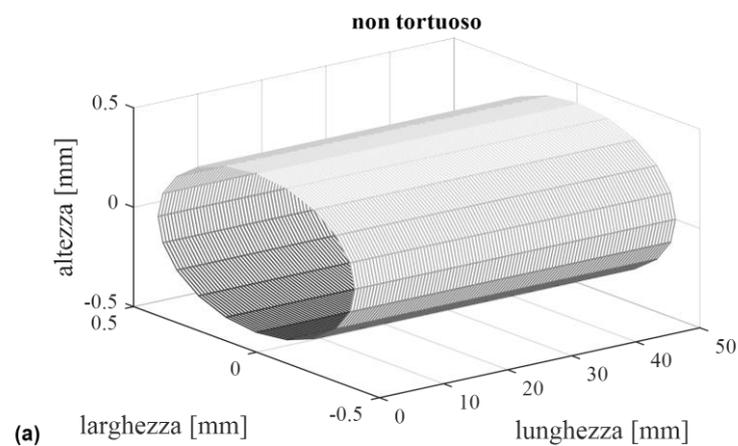


Figura 35: Effetto della variazione dell'ampiezza di modulazione S_p su a) forma del poro b) Λ_k , Λ_v c) α_∞ e d) σ

Figura 33 mostra come incrementando il periodo della forma d'onda, la tortuosità e la resistività al flusso d'aria tendono a ridursi mentre Figura 34 mostra come variando opportunamente la fase iniziale del poro tortuoso sia possibile ridurre la resistività al flusso d'aria. Figura 35 evidenzia come incrementando l'ampiezza della forma d'onda si incrementa la tortuosità, la resistività al flusso d'aria e la lunghezza caratteristica termica, mentre la lunghezza caratteristica viscosa si riduce.

Il cambiamento del profilo della forma del poro, dovuto alla variazione dell'ampiezza di modulazione, è riportata nella Figura 36 (a) (b) (c) (d). I pori sono stati etichettati in base al loro grado relativo di tortuosità.



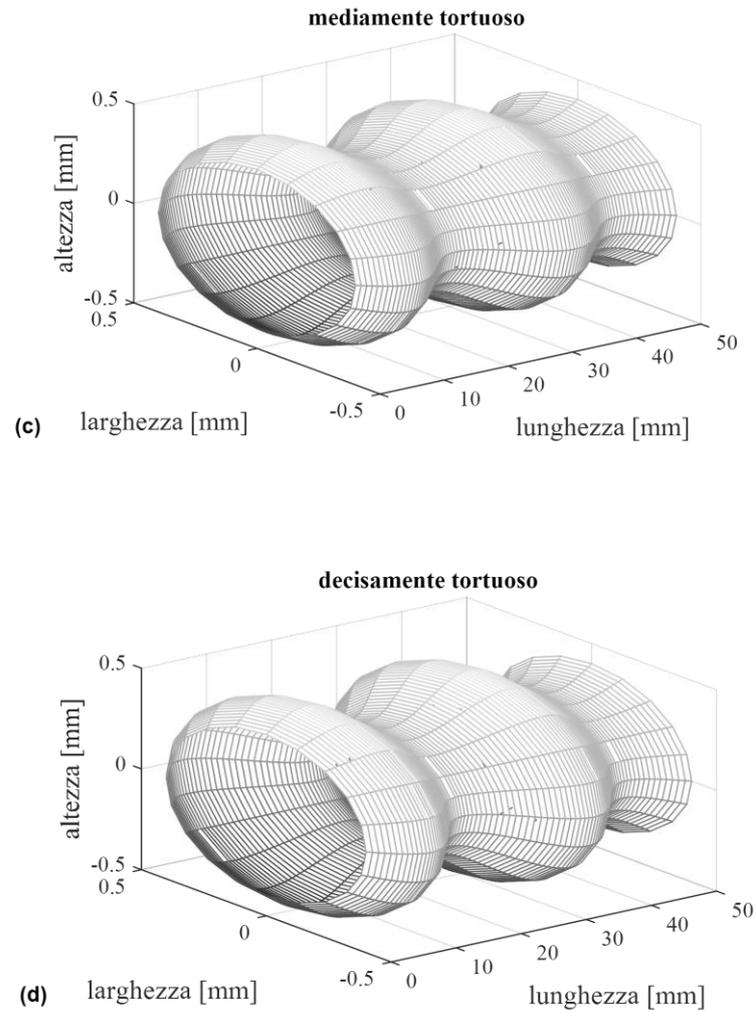


Figura 36: Vista tridimensionale dei pori tortuosi al variare dell'ampiezza di modulazione

Con riferimento ai pori mostrati in Figura 36 (a) (b) (c) (d), si riportano in Tabella 4 i corrispondenti parametri non acustici calcolati con le equazioni (71) (72) (75) (74).

Tabella 4: Valori dei parametri non acustici relativi a pori con crescente valore dell'ampiezza di modulazione

	$S_p [\mu m]$	$\Lambda_k [\mu m]$	$\Lambda_v [\mu m]$	$\sigma [Nsm^{-4}]$	α_∞
<i>Non tortuoso</i>	0	400	400	930	1
<i>Lievemente tortuoso</i>	$R/6$	405	375	1167	1,08
<i>Mediamente tortuoso</i>	$R/4$	412	346	1320	1,14
<i>Decisamente tortuoso</i>	$R/3$	422	318	2841	1,4

CAPITOLO 4: SVILUPPO DI UNA PROCEDURA PER LA VALUTAZIONE DELLE PRESTAZIONI DI UN MOTORE TERMOACUSTICO AD ONDA STAZIONARIA

Le prime analisi condotte con il programma DeltaEC, mostrate nel secondo capitolo di questa tesi, hanno evidenziato come le caratteristiche geometriche microstrutturali dello stack influenzano le prestazioni energetiche di un motore termoacustico ad onda stazionaria. Le geometrie considerate sono state essenzialmente regolari: piastre parallele, circolare o rettangolari. Al fine di poter valutare l'influenza sulle prestazioni di questi dispositivi utilizzando uno stack a geometria non convenzionale sono state individuate opportune funzioni termiche e viscosive grazie al modello di Johnson – Champoux - Allard. Non potendo rielaborare l'algoritmo del programma utilizzato in quanto non è reso disponibile, è stata implementata l'intera procedura di calcolo in MATLAB (MATrix LABoratory), un ambiente di programmazione di alto livello.

4.1 Sviluppo dell'algoritmo di calcolo

Le equazioni da implementare sono quelle introdotte nel primo capitolo riguardanti la teoria di Rott. Oltre alle equazioni differenziali (31) e (34) in p_1 e U_1 , per rendere determinato il problema, è necessario formulare l'equazione (36) in modo da fornire l'andamento della potenza termica lungo x :

$$\begin{aligned} \dot{Q}(x) = \frac{1}{2} Re \left[p_1 \tilde{U}_1 \left(1 - \frac{f_k - \tilde{f}_v}{(1 + \varepsilon_s)(1 + P_r)(1 - \tilde{f}_v)} \right) \right] \\ + \frac{\rho_m c_p |U_1|^2}{2\omega A_f (1 - P_r) |1 - f_v|^2} \frac{dT_m}{dx} Im \left[\tilde{f}_v + \frac{(f_k - \tilde{f}_v)(1 + \varepsilon_s f_v / f_k)}{(1 + \varepsilon_s)(1 + P_r)} \right] \\ - (A_f k_f + A_s k_s) \frac{dT_m}{dx} \end{aligned} \quad (77)$$

Questa formulazione è valida all'interno degli scambiatori di calore mentre il flusso di potenza termica è assunto indipendente da x nello stack. Negli scambiatori di calore, il flusso di potenza termica cambia ed in particolare risulta essere uguale alla potenza fornita o sottratta a seconda se si tratti di scambiatore di calore caldo o freddo.

Il secondo termine dell'equazione (77) dipende implicitamente dal valore medio di temperatura locale perché le proprietà del gas e del solido così come la velocità del suono dipendono da essa ed i termini, presenti in esso, relativi a pressione, velocità di volume e temperatura sono valori medi nel tratto Δx considerato.

Le equazioni differenziali all'interno dell'algoritmo sono state risolte grazie ad alcune librerie già presenti in matlab. Questi risolutori prendono il nome di ordinary differential equations, in sigla ode. La ricerca del punto di funzionamento del motore termoacustico rimane tuttavia un problema iterativo. Figura 37 riporta lo schema di funzionamento dell'algoritmo implementato.

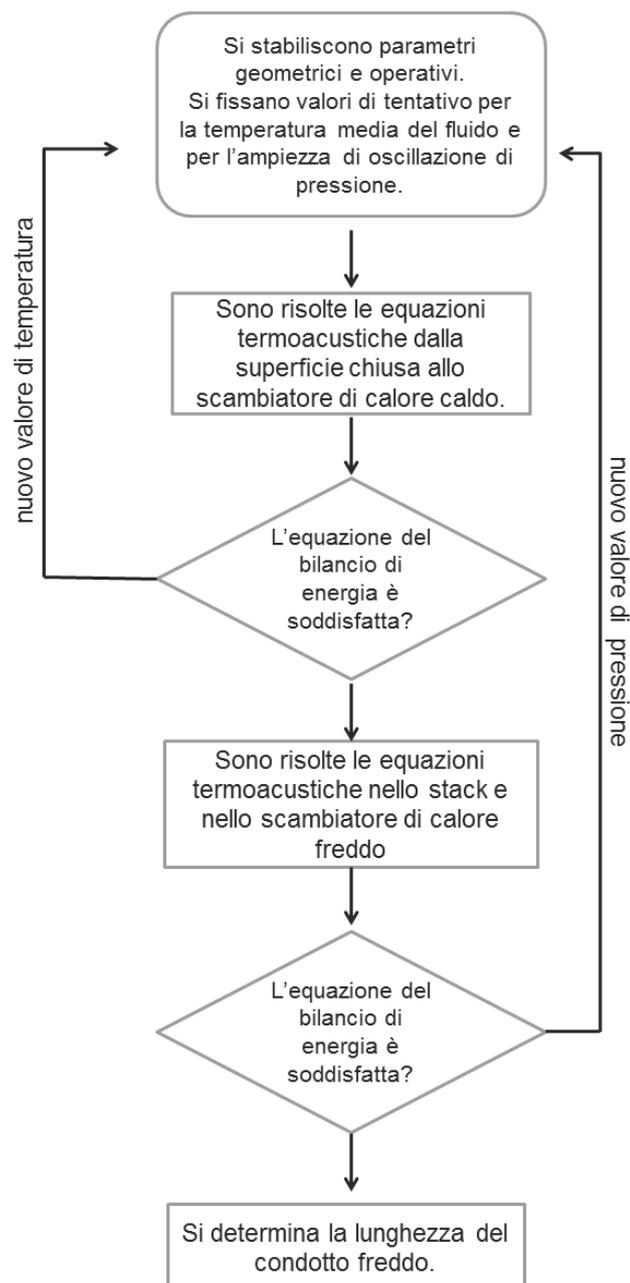


Figura 37: Schema della procedura implementata in matlab

Si sceglie una frequenza di esercizio, si ipotizza un'ampiezza massima di oscillazione di pressione e una temperatura del fluido caldo, si risolvono le equazioni differenziali all'interno dell'elemento "superficie", dei componenti condotto caldo e scambiatore di calore caldo, si verifica a diversi step i valori ipotizzati. Se non verificati il ciclo si ripete; re-itera finché non converge. Le operazioni di verifica sono definite da vincoli operativi o energetici.

Le equazioni di Rott possono essere semplificate in funzione del componente in cui vengono applicate. Si riporta di seguito le equazioni alla base di ogni singolo componente considerato nel motore termoacustico.

4.1.1 L'elemento "superficie"

L'elemento "superficie" è posto all'estremità del tubo risonatore per tenere in conto della dissipazione per isteresi termica. Questo elemento non ha alcun effetto sulla temperatura e sulla pressione, mentre la variazione della velocità di volume segue la legge:

$$\Delta U_1 = -\frac{i\omega A}{\rho_m c^2} \left(\frac{\gamma - 1}{1 + \varepsilon_s} \right) \frac{\delta_k}{2} p_1 \quad (78)$$

con:

$$\varepsilon_s = \sqrt{\frac{k\rho_m c_p}{k_s \rho_s c_s}} \quad (79)$$

dove al numeratore compaiono le proprietà del fluido di lavoro e al denominatore quelle del solido da cui è costituita.

4.1.2 Il condotto risonatore

I condotti utilizzati sono tipicamente di forma circolare con diametri sufficientemente grandi tali da verificare che $r_h \gg \delta_v, \delta_k$. Nei condotti non è presente un gradiente di temperatura, cioè la temperatura media è indipendente dalla coordinata di propagazione dell'onda sonora. In questo caso la propagazione sonora si sviluppa solo in termini di velocità e pressione. Le equazioni (31) e (34) si semplificano come segue:

$$\frac{dU_1}{dx} = -\frac{i\omega A}{\rho_m c^2} \left(1 + \frac{(\gamma - 1)f_k}{1 + \varepsilon_s} \right) p_1 \quad (80)$$

$$\frac{dp_1}{dx} = -\frac{i\omega\rho_m}{A(1 - f_v)} U_1 \quad (81)$$

dove A in m^2 è l'area della sezione trasversale interna del condotto e ε_s è un fattore di correzione adimensionale che tiene conto del fatto che il solido è caratterizzato da una capacità termica finita.

Le equazioni (80) e (81) possono essere combinate e riscritte in modo equivalente come:

$$\left(1 + \frac{(\gamma - 1)f_k}{1 + \varepsilon_s} \right) p_1 + \frac{c^2}{\omega^2} (1 - f_v) \frac{d^2 p_1}{dx^2} = 0 \quad (82)$$

Per un tubo di lunghezza Δx , le equazioni differenziali (80) e (81) in U_1 e p_1 si possono scrivere come:

$$\begin{aligned} U_{1,out} &= U_{1,in} \cos(k\Delta x) - \frac{iA(1 - f_v)k}{\omega\rho_m} p_{1,in} \sin(k\Delta x) \\ p_{1,out} &= p_{1,in} \cos(k\Delta x) - \frac{i\omega\rho_m}{A(1 - f_v)k} U_{1,in} \sin(k\Delta x) \end{aligned} \quad (83)$$

dove k , il numero d'onda complesso, è dato da:

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{1 + (\gamma - 1)f_k/(1 + \varepsilon_s)}{1 - f_v}} \quad (84)$$

Per il condotto risonatore, le funzioni f_j assumono un'espressione del tipo:

$$f_j = \frac{(1 - i)\Pi\delta_j}{2A} \quad j = k, v \quad (85)$$

dove Π è il perimetro interno del condotto.

4.1.3 Gli scambiatori di calore

Gli scambiatori di calore sono utilizzati per fornire o rimuovere calore dal sistema. Essi sono dotati necessariamente di un'elevata superficie di contatto così da presentare sia dissipazioni viscosse che termiche per quanto riguarda la potenza acustica. Per la propagazione dell'onda le equazioni (31) e (34) si riscrivono come:

$$\frac{dU_1}{dx} = -\frac{i\omega A_f}{\rho_m c^2} \left(1 + \frac{(\gamma - 1)f_k}{1 + \varepsilon_s}\right) p_1 \quad (86)$$

$$\frac{dp_1}{dx} = -\frac{i\omega \rho_m}{A_f(1 - f_v)} U_1 \quad (87)$$

dove A_f indica l'area della sezione trasversale utile al passaggio del gas data dalla differenza tra l'area complessiva e quella occupata dal solido.

All'interno degli scambiatori di calore il gradiente di temperatura media del fluido è considerato nullo. Inoltre gli scambiatori di calore sono stati considerati ideali, quindi costituiti da un materiale avente conducibilità termica, densità e capacità termica infinita. Con le suddette semplificazioni, $dT_m/dx = 0$ e $\varepsilon_s = 0$, le equazioni (86) e (87) si riducono a:

$$\frac{dU_1}{dx} = -\frac{i\omega A_f}{\rho_m c^2} (1 + (\gamma - 1)f_k) p_1 \quad (88)$$

$$\frac{dp_1}{dx} = -\frac{i\omega \rho_m}{A_f(1 - f_v)} U_1 \quad (89)$$

La temperatura del gas, del solido e la potenza termica sono legate dalla seguente relazione:

$$T_s = T_m + \frac{\dot{Q}}{hA_f x_{eff}/r_h} \quad (90)$$

dove:

- $x_{eff} = \min[2|\xi|, \Delta x]$;
- $\xi = |U|/\omega A_f$ è lo spostamento delle particelle di gas nella direzione del moto.

- $h = k/y_{eff}$ è il coefficiente di trasferimento del calore;
- $y_{eff} = \min[\delta_k, y_0]$;
- y_0 è la metà della spaziatura tra le piastre dello scambiatore di calore essendo caratterizzato da una geometria a piastre parallele.

L'equazione (90) è utilizzata per determinare la temperatura che il gas raggiunge in seguito al passaggio attraverso lo scambiatore di calore caldo, nota la potenza fornita e la temperatura del solido. La stessa equazione (90) permette di valutare la potenza da sottrarre in corrispondenza dello scambiatore di calore freddo tale per cui la temperatura del solido sia pari a quella impostata come temperatura fredda e la temperatura del gas sia pari a quella raggiunta all'uscita dello stack.

4.1.4 Lo stack

Nel componente stack le equazioni relative al campo di moto e di pressione non subiscono alcuna modifica o semplificazione per cui bisogna considerare le equazioni (31) e (34) nella loro forma completa in p_1 e U_1 , tenendo conto del fatto che il solido è caratterizzato da una capacità termica finita. Le equazioni implementate sono:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dx} &= -\frac{i\omega\rho_m}{A_f(1-f_v)}U_1 \\ \frac{dU_1}{dx} &= -\frac{i\omega A_f}{\rho_m c^2} \left(1 + \frac{(\gamma-1)f_k}{1+\varepsilon_s}\right) p_1 + \frac{(f_k-f_v)}{(1-f_v)(1-P_r)(1+\varepsilon_s)} \beta \frac{dT_m}{dx} U_1 \end{aligned} \quad (91)$$

All'interno dello stack si assume che il flusso di potenza termica non vari nella direzione di propagazione dell'onda sonora. È possibile ricavare il campo di temperatura che si determina all'interno dello stack applicando anche per l'equazione (36) la correzione relativa al solido di capacità termica finita.

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{\dot{Q} - \frac{1}{2} Re \left[p \tilde{U}_1 \left(1 - \frac{T_m \beta (f_k - \tilde{f}_v)}{(1+\varepsilon_s)(1+P_r)(1-\tilde{f}_v)} \right) \right]}{2\omega A_f (1-P_r) |1-f_v|^2 Im \left[\tilde{f}_v + \frac{(f_k - \tilde{f}_v)(1+\varepsilon_s f_v/f_k)}{(1+\varepsilon_s)(1+P_r)} \right] - A_f k - A_s k_s} \quad (92)$$

Per poter ottenere il campo di pressione, velocità e temperatura, le equazioni (91) e (92) devono essere integrate lungo x . È possibile linearizzare tali equazioni, sostituendo il differenziale con una

differenza finita e risolvendo per Δx molto piccoli. I valori in uscita per ogni Δx risolto rappresentano i valori in ingresso al Δx successivo.

4.1.5 Il fluido di lavoro e i materiali

Le proprietà del fluido di lavoro così come quelle dei materiali sono funzione della temperatura media, che si realizza all'interno del dispositivo, secondo dei coefficienti sperimentali.

In particolare, per quanto riguarda il fluido di lavoro scelto, le proprietà dell'aria: il coefficiente di conduttività termica, la viscosità dinamica e il coefficiente di espansione termica, possono essere ricavati con le seguenti espressioni:

- il coefficiente di conduttività termica [W/mK]:

$$k = 2,624e^{-2(T_m/300)^{1,5}} (523,8606 / (T_m + 245,4e^{-27,6/T_m})) \quad (93)$$

- la viscosità dinamica [kg/ms]:

$$\eta = 1,846e^{-5(T_m/300)^{1,5}} (410,4 / (T_m + 110,4)) \quad (94)$$

- il coefficiente di espansione termica [K^{-1}]:

$$\beta = \sqrt{(\gamma - 1)c_p / T_m c^2} \quad (95)$$

Il calore specifico c_p [J/kgK] e il rapporto tra calori specifici γ sono ritenuti costanti e pari rispettivamente a 1004,7 e 1,4. La densità ρ_m è valutata attraverso la legge di stato dei gas.

I materiali, invece, di cui sono costituite le diverse parti del motore preso in esame sono: l'acciaio per il tubo risonatore e il Celcor per lo stack avendo considerato ideale quello costituente i due scambiatori di calore.

Il Celcor è costituito da una densità $\rho_s = 2510 \text{ kg}/m^3$ e da una conduttività termica $k_s = 25 \text{ W}/mK$ entrambe costanti, mentre la sua capacità termica è funzione della temperatura e può essere valutata come:

$$c_s = 262,5 + 1,864T_m - 0,001011T_m^2 \quad (96)$$

Per quanto riguarda l'acciaio, esso è caratterizzato da una densità, una conduttività termica e da una capacità termica pari rispettivamente a:

$$\rho_s = 8274,55 - 1055,23e^{-(((T_m-273,15)-2171,05)/2058,08)^2} \quad (97)$$

$$k_s = (266800T_m^{-5,2} + 0,21416T_m^{-1,6})^{-0,25} \quad (98)$$

$$c_s = (1,7054e^{-6T_m^{-0,88962}} + 23324/T_m^6)^{-1/3} + 15/T_m \quad (99)$$

dove T_m è la temperatura media espressa in Kelvin.

4.2 Validazione numerica

La prima operazione è stata quella di analizzare le diverse parti del dispositivo impostando come dati di input quelli derivati dall'utilizzo del software DeltaEC per poter verificare che le equazioni riportate in Matlab restituissero valori attendibili.

Figura 38,

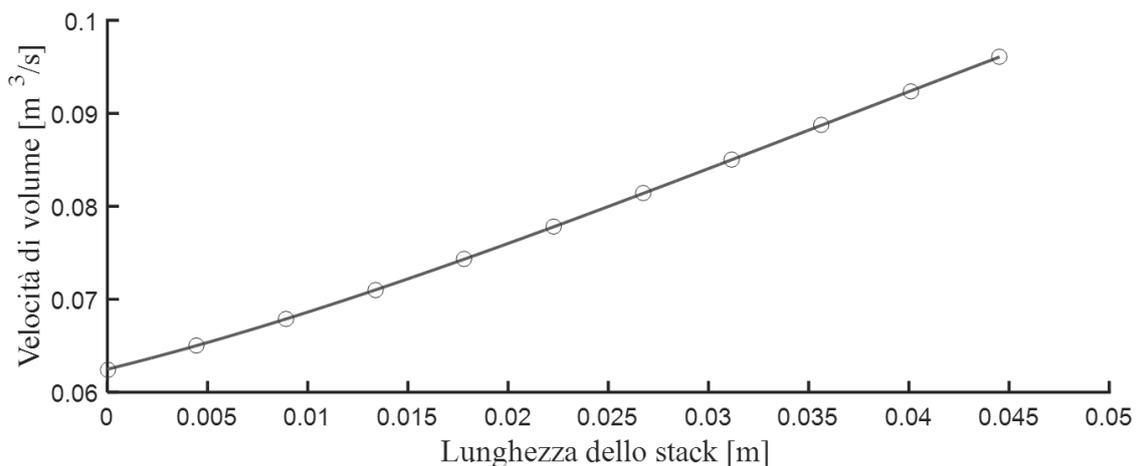


Figura 39 e Figura 40 ripotano gli andamenti, all'interno dello stack, delle variabili p_1 , U_1 e T_m calcolati sia con il DeltaEC sia con la procedura in matlab dove sono state integrate le nuove funzioni termiche e viscosive derivate dal modello di Johnson-Champoux-Allard.

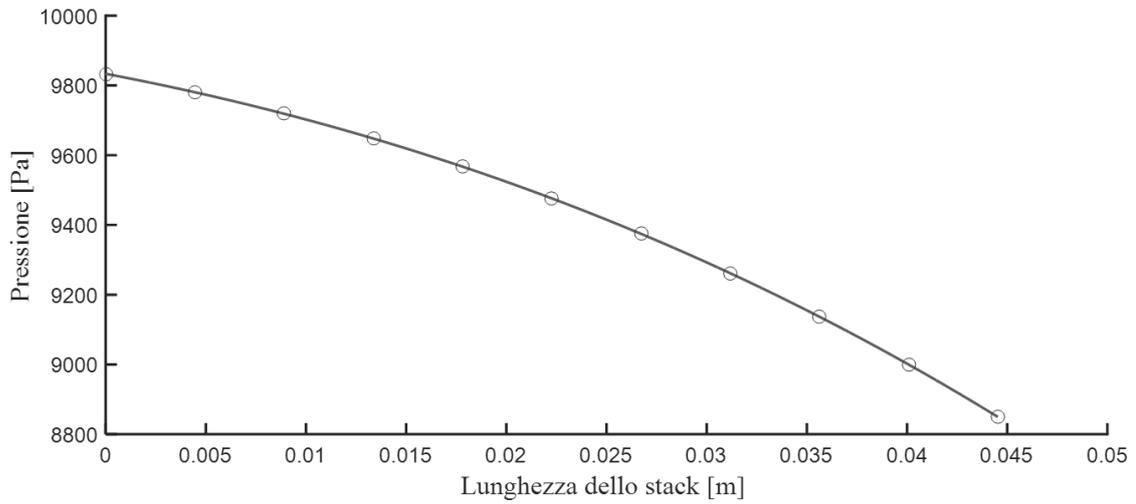


Figura 38: Confronto dell'andamento di pressione tra valori ottenuti con il DeltaEC e quelli con il codice matlab.

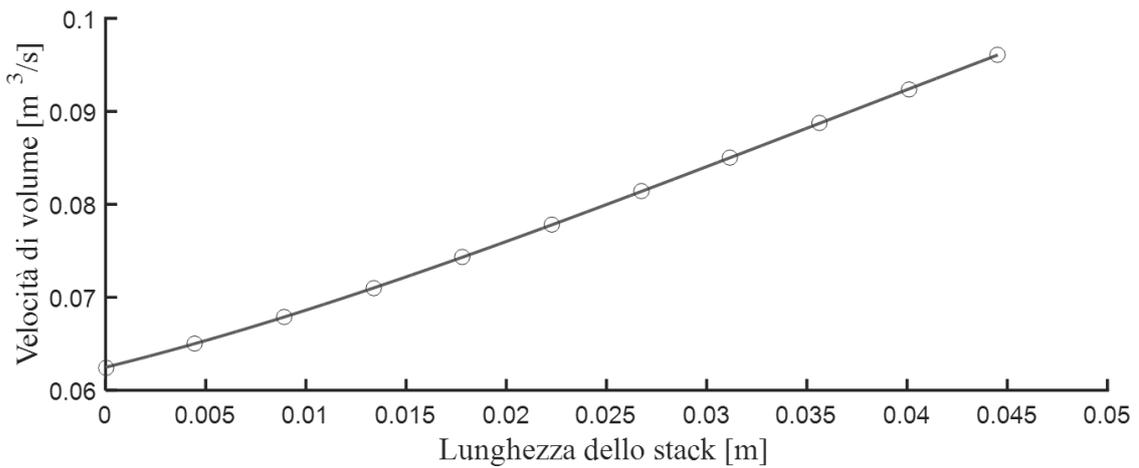


Figura 39: Confronto dell'andamento della velocità di volume tra valori ottenuti con il DeltaEC e quelli con il codice matlab.

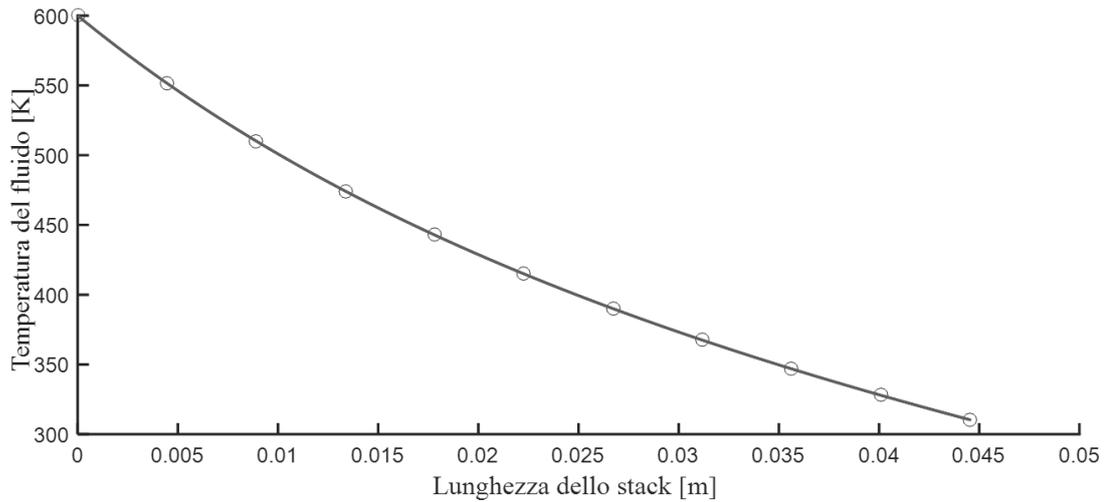


Figura 40: Confronto dell'andamento della temperatura media del fluido tra valori ottenuti con il DeltaEC e quelli con il codice matlab.

Il confronto mostra una buona corrispondenza tra i valori forniti dal DeltaEC e quelli dell'algoritmo in matlab. Sarebbe possibile, ma non necessario, migliorare ulteriormente la risoluzione dell'andamento delle variabili scegliendo un passo di integrazione diverso.

4.3 Analisi energetica degli effetti della tortuosità

La potenza acustica che si sviluppa all'interno del motore termoacustico si esprime, in notazione complessa, come:

$$\frac{d\dot{E}}{dx} = \frac{1}{2} A_f Re \left[\langle \tilde{u}_1 \rangle \frac{dp}{dx} + \tilde{p}_1 \frac{d\langle u_1 \rangle}{dx} \right]. \quad (100)$$

Per poter separare gli effetti che compongono tale espressione riscriviamo l'equazione di conservazione della quantità di moto e di continuità in una nuova forma.

l'equazione di conservazione della quantità di moto (31) può essere riscritta come:

$$\frac{dp_1}{dx} = -(j\omega l + r_v) \langle u_1 \rangle, \quad (101)$$

Dove l e r_v sono l'induttanza e la resistenza viscosa per unità di lunghezza del poro espressa da:

$$l = \rho_m \frac{1 - \text{Re}(f_v)}{|1 - f_v|^2} \quad (102)$$

$$r_v = \omega \rho_m \frac{-\text{Im}(f_v)}{|1 - f_v|^2} \quad (103)$$

L'equazione (34) di continuità, per unità di area, può essere espressa come:

$$\frac{d\langle u_1 \rangle}{dx} = - \left(j\omega c + \frac{1}{r_k} \right) p_1 + g\langle u_1 \rangle \quad (104)$$

dove c e r_k sono la capacità e la resistenza di rilassamento termico per unità di lunghezza del poro, dati da:

$$c = \frac{1}{\gamma p_m} [1 + (\gamma - 1)\text{Re}(f_k)], \quad (105)$$

$$\frac{1}{r_k} = -\text{Im}(f_k) \frac{\omega(\gamma - 1)}{\gamma p_m}. \quad (106)$$

Sostituendo le espressioni (101) e (104) nell'equazione (100) dell'energia acustica si ha:

$$\frac{d\dot{E}}{A_f dx} = -\frac{r_v}{2} |\langle u_1 \rangle|^2 - \frac{1}{2r_k} |p_1|^2 + \frac{1}{2} \text{Re}[g\tilde{p}_1 \langle u_1 \rangle], \quad (107)$$

Il termine sulla sinistra dell'equazione rappresenta la potenza acustica per unità di area, o intensità acustica, prodotta per unità di lunghezza dello stack. Sul lato destro dell'equazione (107) il primo termine rappresenta le dissipazioni viscosi, il secondo le dissipazioni dovute al rilassamento termico e il terzo termine rappresenta l'energia acustica sviluppata dalla conversione termoacustica.

Il fattore g nel terzo termine rappresenta il fattore di amplificazione:

$$g = \frac{(f_k - f_v)}{(1 - f_v)(1 - P_r)} \frac{dT_m}{dx} \frac{1}{T_m} \quad (108)$$

Tale fattore è di difficile interpretazione per la presenza nella sua espressione delle funzioni f_k ed f_v .

Figura 41 riporta l'andamento della resistenza viscosa per unità di lunghezza calcolata per i pori a differente grado di complessità riportati in Tabella 4.

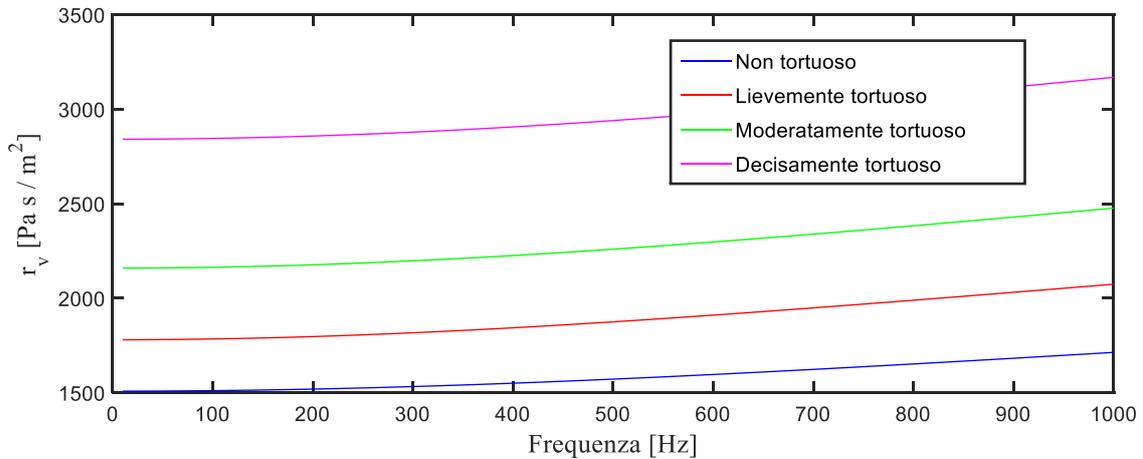


Figura 41: Andamento in frequenza del termine di dissipazione viscosa per pori con crescente grado di tortuosità

Le perdite viscosse aumentano all'aumentare del grado di tortuosità del poro, aumento dovuto all'incremento di α_∞ e di σ ed una contemporanea riduzione di Λ_p . Al fine di limitare questo tipo di perdite è importante avere un materiale tortuoso che abbia una resistività al flusso d'aria quanto più piccola possibile.

Figura 42 e Figura 43 mostrano l'andamento della resistenza di rilassamento termico rispettivamente nell'intervallo di frequenze [10 400] Hz e [400 1000] Hz.

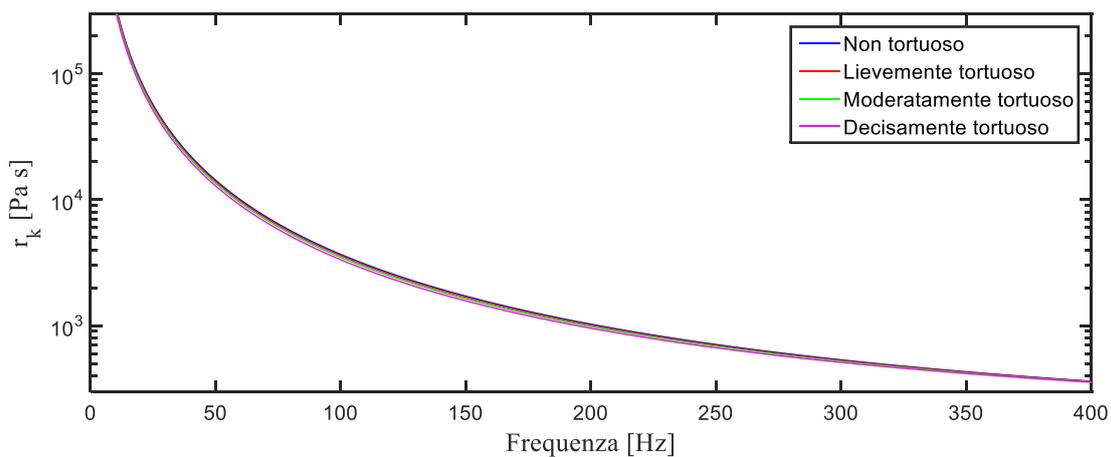


Figura 42: Andamento in frequenza del termine di dissipazione termica per pori con crescente grado di tortuosità fino a 400 Hz

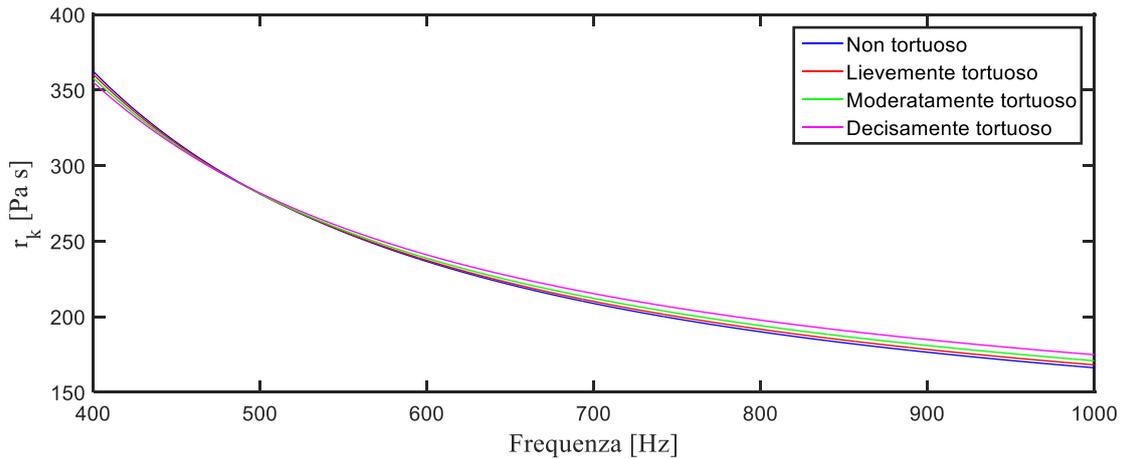


Figura 43: Andamento in frequenza del termine di dissipazione termica per pori con crescente grado di tortuosità oltre i 400 Hz

Le perdite termiche sono influenzate solamente da Λ_t , in particolare alle basse frequenze, dove lo scambio termico tende ad essere isoterma, le perdite termiche per un poro tortuoso sono più piccole di quelle di un poro circolare a sezione costante; alle alte frequenze risultano invece maggiori. Le differenze tra i pori a diverso grado di complessità sono inferiori rispetto alle differenze evidenziati in Figura 41 per le perdite viscosive.

L'andamento del fattore di amplificazione g , espresso dall'equazione (108), è mostrato in Figura 44 per la parte reale e Figura 45 per la parte immaginaria.

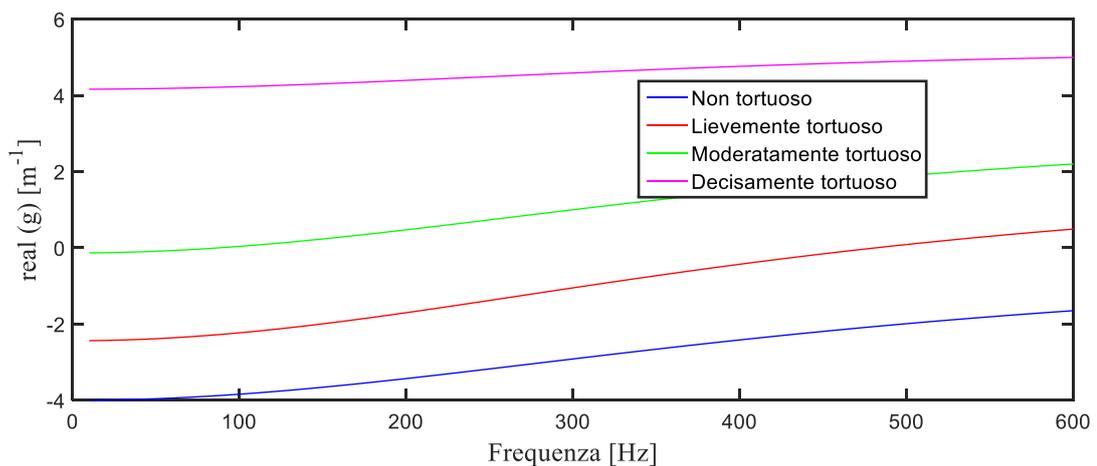


Figura 44: Andamento in frequenza della parte reale del fattore di amplificazione per pori con crescente grado di complessità

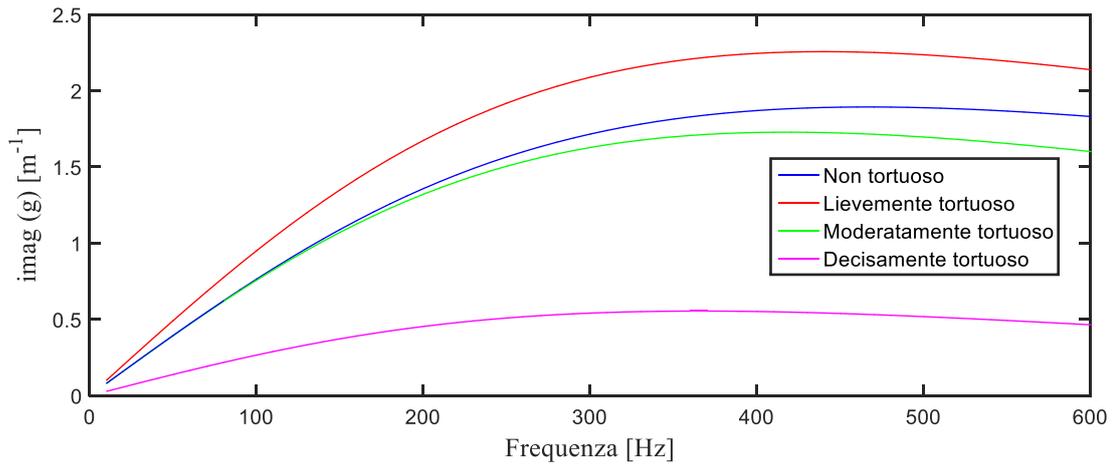


Figura 45: Andamento in frequenza della parte immaginaria del fattore di amplificazione per pori con crescente grado di complessità

Il fattore di amplificazione g assume valori maggiori, sia in termini di parte reale che immaginaria, per il poro “lievemente tortuoso”, identificato da una linea rossa in Figura 44 e Figura 45, rispetto al poro “non tortuoso”, identificato da una linea di colore blu.

Figura 46 mostra l’andamento di per ciascun termine energetico che compongono l’equazione (107) dell’energia acustica. Per questa analisi la lunghezza del condotto caldo è fissata pari ad un centesimo della lunghezza d’onda della frequenza di esercizio.

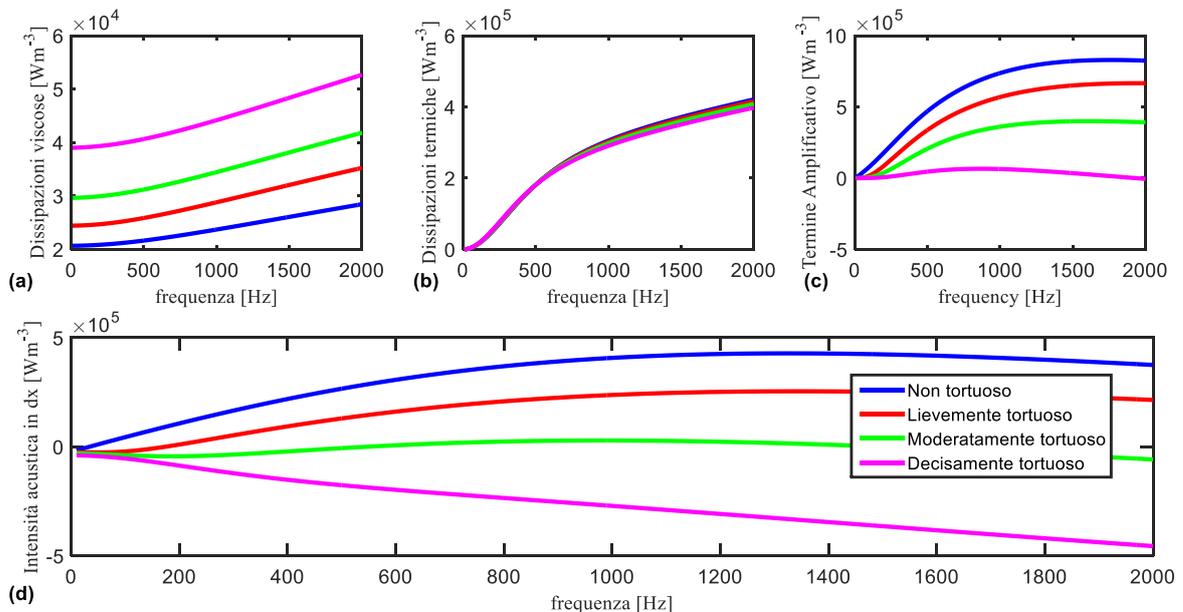


Figura 46: Andamento, all’interno di un infinitesimo dello stack, a) dell’intensità acustica dissipata in perdite viscosi e b) termiche, c) dell’intensità acustica sviluppata dalla conversione e d) dell’intensità acustica resa disponibile dal poro

Si può notare in Figura 46 che la potenza acustica specifica per il poro etichettato come “decisamente tortuoso” non assume mai valori positivi nell’intero campo di frequenze investigato. L’intensità acustica ottenuta dall’equazione (107), mostrata in Figura 46(d), è, per un poro cilindrico sempre maggiore di quella prodotta dai pori a maggiore complessità geometrica, differenza da imputare essenzialmente alle maggiori dissipazioni viscosse mostrata in Figura 46(a). Il massimo valore dell’intensità acustica è raggiunto da ogni poro ad una frequenza diversa. Condizioni iniziali diverse possono portare a differenti risultati: ad esempio se la lunghezza del condotto fosse fissata a un settantesimo il massimo valore del poro cilindrico e dei pori tortuosi sarebbe traslato verso frequenze più alte. I valori di p_1 , u_1 e T_m ottenuti in questo primo infinitesimo dello stack confluiranno nel secondo infinitesimo e i contenuti energetici saranno diversi dall’analisi del primo infinitesimo.

CAPITOLO 5: OTTIMIZZAZIONE DELLE PRESTAZIONI DI UN MOTORE TERMOACUSTICO AD ONDA STAZIONARIA

Una delle maggiori difficoltà che si incontra nella progettazione dei dispositivi termoacustici è la scelta della frequenza operativa, della lunghezza e della posizione dello stack all'interno del motore termoacustico. In questo capitolo sono riportati i risultati di una procedura di ottimizzazione, valida sia per stack a geometria regolare che non convenzionali, tesa a migliorare il rendimento di un motore termoacustico ad onda stazionaria.

5.1 Applicazione dell'algoritmo di ottimizzazione su uno stack convenzionale

L'algoritmo di ottimizzazione, sviluppato anch'esso in ambiente matlab, permette per stack a geometria regolare di individuare la coppia di parametri, lunghezza e posizione dello stack, secondo specifici criteri. La lunghezza deve essere tale da permettere alla temperatura media del fluido di raggiungere in termini ideali la temperatura imposta allo scambiatore ambiente scelta pari a 300 K. Può accadere, comunque, che, fissata la geometria dello stack e le condizioni al contorno, non sia necessario incrementare la lunghezza dello stack perché il termine $dT_m/(T_m dx)$ che si riferisce al gradiente residuo relativo non è più in grado di convertire sufficiente energia o di convertirla affatto. In questi casi è preferibile avere uno stack di lunghezza inferiore così da evitare ulteriori dissipazioni di potenza acustica anche qualora il fluido non abbia raggiunto la temperatura preventivata di uscita dallo stack. Ovviamente la temperatura del fluido in uscita dallo stack sarà sempre maggiore di quella dello scambiatore ambiente. La posizione dello stack è individuata dalla somma delle lunghezze del condotto caldo e dello scambiatore di calore caldo.

I parametri di input all'algoritmo di ottimizzazione, divisi in geometrici e operativi, sono riportati rispettivamente in Tabella 5 e Tabella 6.

Tabella 5: Parametri geometrici di input all'algorithmo di ottimizzazione

Parametro	Descrizione	Valore
A	Area trasversale del condotto	$0,011 \text{ m}^2$
L_c	Lunghezza condotto "caldo"	0.023 m
L_{sc}	Lunghezza scambiatore di calore "caldo"	0.019 m
ϕ_{sc}	Porosità scambiatori di calore	$0,68$
ϕ_{stk}	Porosità stack	$0,7$
R	Raggio del poro circolare	$0,4 \text{ mm}$

Tabella 6: Parametri operativi di input all'algorithmo di ottimizzazione

Parametro	Descrizione	Valore
p_m	Pressione statica	1 atm
f	Frequenza	100 Hz
T_c	Temperatura fluido scambiatore caldo	600 K
T_f	Temperatura fluido scambiatore freddo	300 K
Q_{in}	Energia termica in ingresso	$500W$

Le simulazioni sono state condotte fissando alcuni parametri come la temperatura del fluido nel condotto caldo, la lunghezza dello scambiatore di calore caldo, il flusso termico fornito allo scambiatore caldo, il materiale e la geometria dello stack. Lo stack è composto da una geometria a pori cilindrici di raggio pari a $400 \mu\text{m}$ realizzato in Kapton.

Al variare della lunghezza del condotto caldo si riporta l'andamento della lunghezza ottimale dello stack in Figura 47, l'andamento della temperatura in uscita dallo stack in Figura 48 e dell'intensità acustica sviluppata in Figura 49.

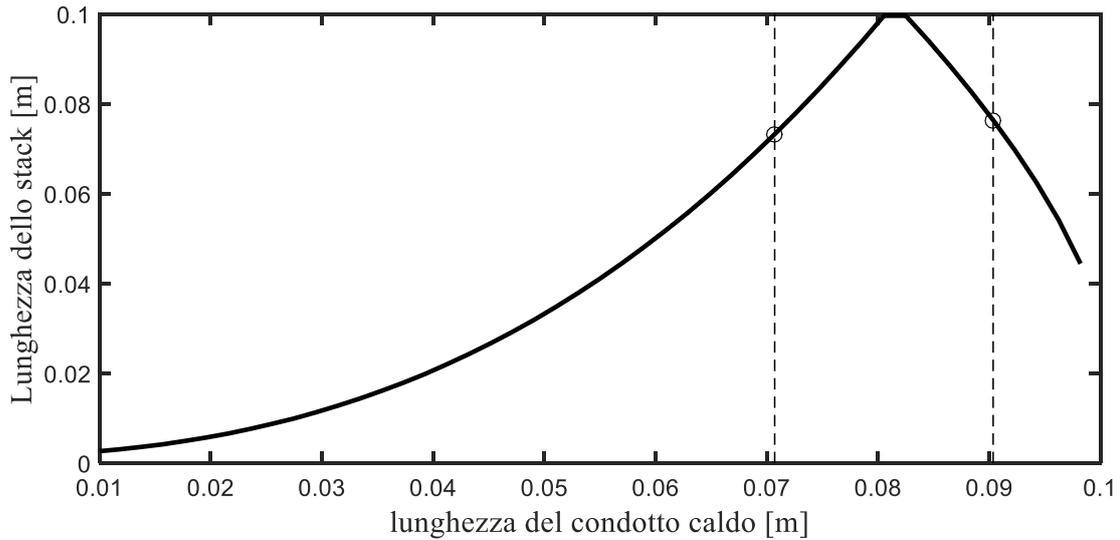


Figura 47: Lunghezza ottimale dello stack al variare della lunghezza del condotto caldo

In Figura 47 sono evidenziati due punti di ascissa 0.0707 e 0.0904 che saranno successivamente definiti in dettaglio.

Figura 48 mostra come la temperatura che il fluido raggiunge in uscita dallo stack non è sempre la stessa. Quando raggiunge circa i 300 K significa che tutto gradiente di temperatura imposto alle estremità dello stack contribuisce a sviluppare la potenza acustica.

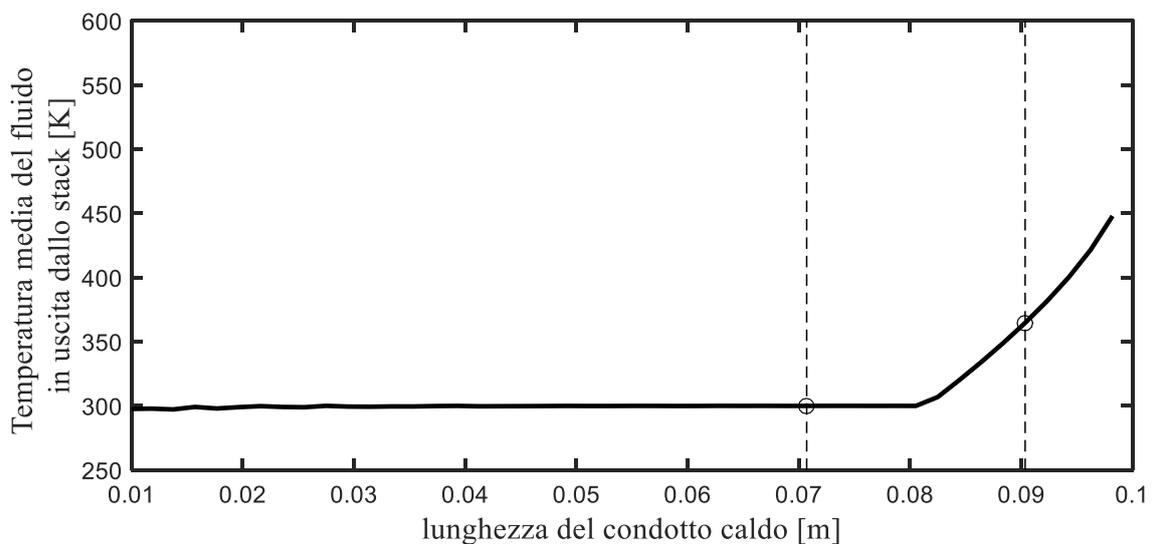


Figura 48: Temperatura del fluido in uscita dallo stack al variare della lunghezza del condotto caldo

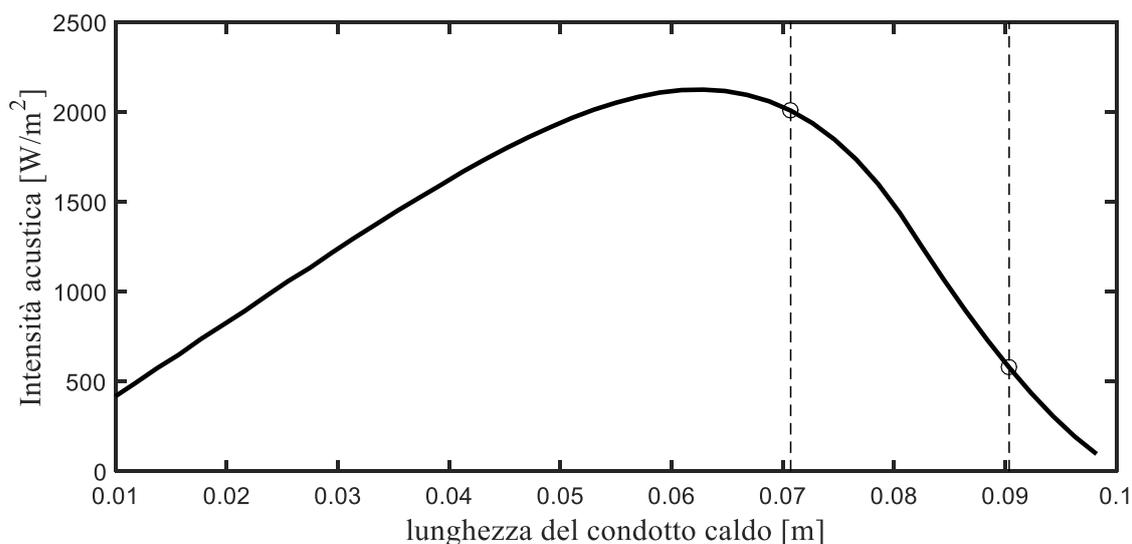


Figura 49: Intensità acustica al variare della lunghezza del condotto caldo

Figura 49 evidenzia che, fissata la frequenza di esercizio, c'è un solo valore della lunghezza del condotto caldo che massimizza l'intensità acustica prodotta nello stack.

Il significato dei valori di lunghezza del condotto caldo evidenziati con due cerchi in Figura 47, Figura 48 e Figura 49, d'ora in poi identificati come $\Delta x = 0.0707 \text{ m}$ e $\Delta x = 0.0904 \text{ m}$, è ora discusso. Nel caso $\Delta x = 0.0707 \text{ m}$, linea tratteggiata in Figura 50, Figura 51 e Figura 52, è possibile notare che l'intensità acustica raggiunge il massimo valore ma il processo si interrompe perché la temperatura ha raggiunto il minimo valore possibile $\sim 300 \text{ K}$ come si può vedere in Figura 51.

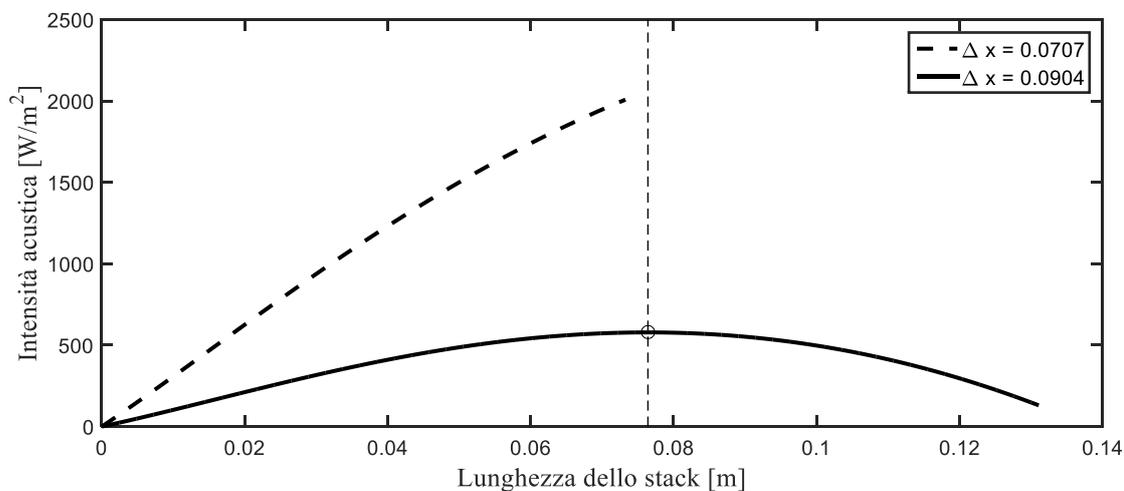


Figura 50: Andamento dell'intensità acustica al variare della lunghezza dello stack nei casi $\Delta x = 0.0707 \text{ m}$ e $\Delta x = 0.0904 \text{ m}$

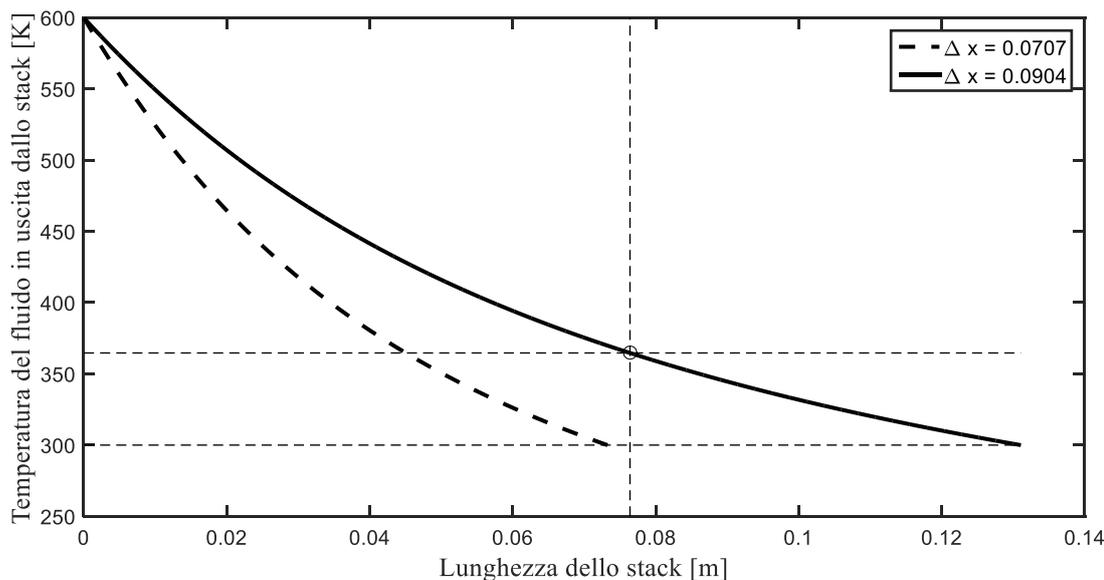


Figura 51: Andamento della temperatura in uscita dallo stack al variare della lunghezza dello stack nei casi $\Delta x = 0.0707$ m e $\Delta x = 0.0904$ m

Nel caso $\Delta x = 0.0904$ m, linea continua in Figura 50, Figura 51 e Figura 52, l'intensità acustica raggiunge il suo massimo prima che la temperatura raggiunge i 300 K.

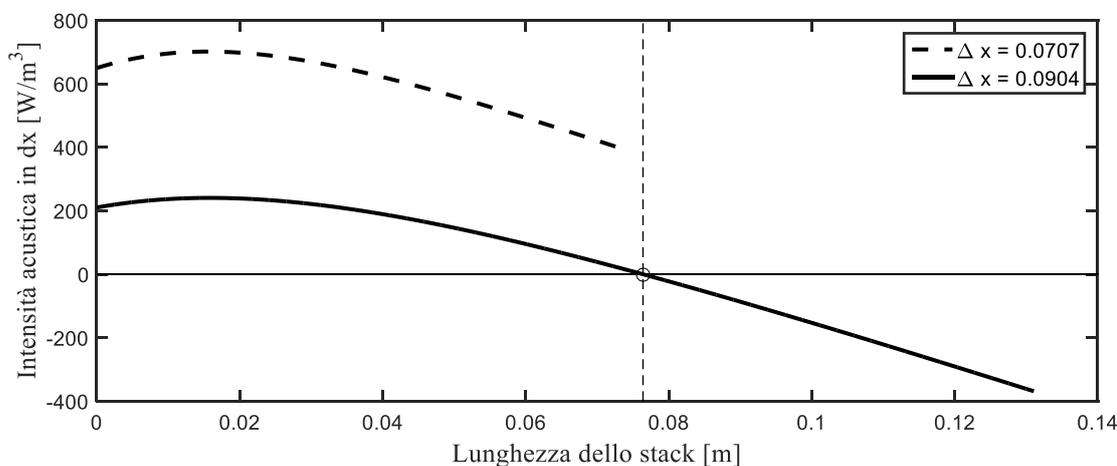


Figura 52: Andamento dell'intensità acustica in dx al variare della lunghezza dello stack nei casi $\Delta x = 0.0707$ m e $\Delta x = 0.0904$ m

Il valore della lunghezza dello stack che massimizza l'intensità acustica è di 0.0764 m e la corrispondente temperatura del fluido in uscita di 365 K. Continuando ad estendere lo stack per sfruttare appieno il gradiente di temperatura si dissiperebbe solo energia in quanto l'intensità acustica, per unità di lunghezza del materiale poroso, assume valori negativi.

Individuare il punto di funzionamento del motore termoacustico, che sviluppa la massima intensità acustica significa, individuare la geometria ottimale dello stack in termini di posizione, lunghezza e dimensione dei pori. Figura 53 mostra un grafico tridimensionale dell'intensità acustica. Sugli assi sono presenti la posizione e il raggio del poro. Ad ogni coppia di queste coordinate corrisponde un valore della lunghezza dello stack ottimizzato secondo gli specifici criteri finora esposti.

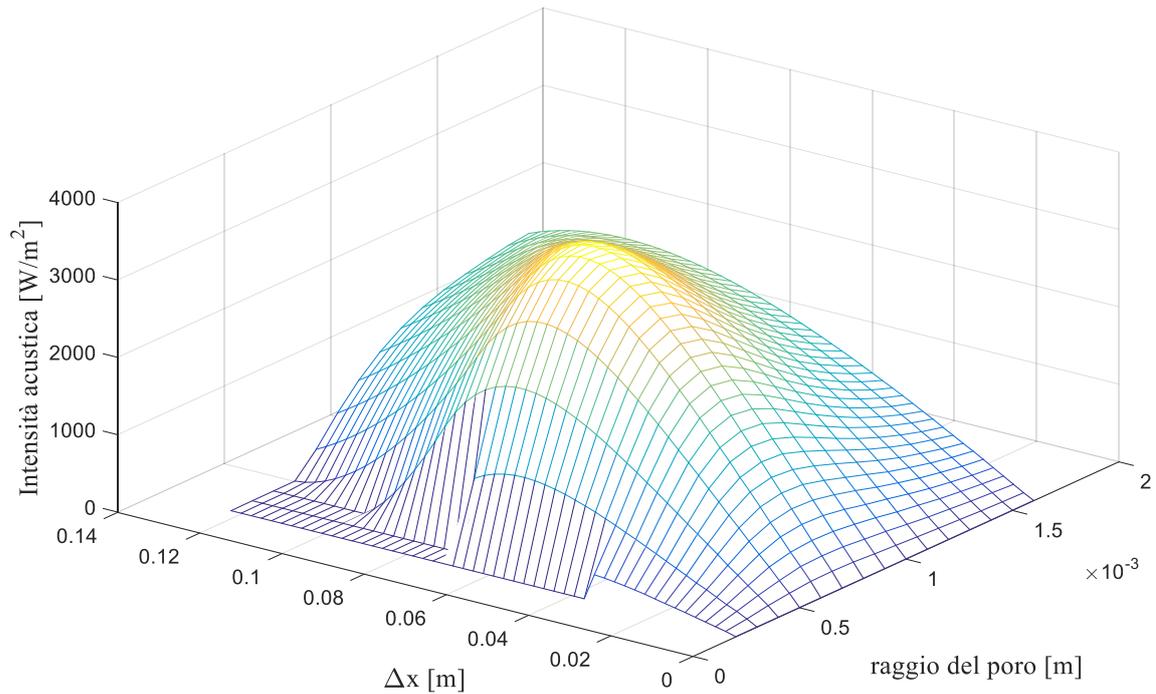


Figura 53: Grafico tridimensionale dell'intensità acustica

Come risultato della procedura di ottimizzazione applicata al motore termoacustico, i cui parametri geometrici e operativi sono riportati in

Tabella 5 e Tabella 6, si riporta in Figura 54 l'andamento della massima potenza ottenibile e del corrispondente rendimento al variare del raggio del poro dello stack.

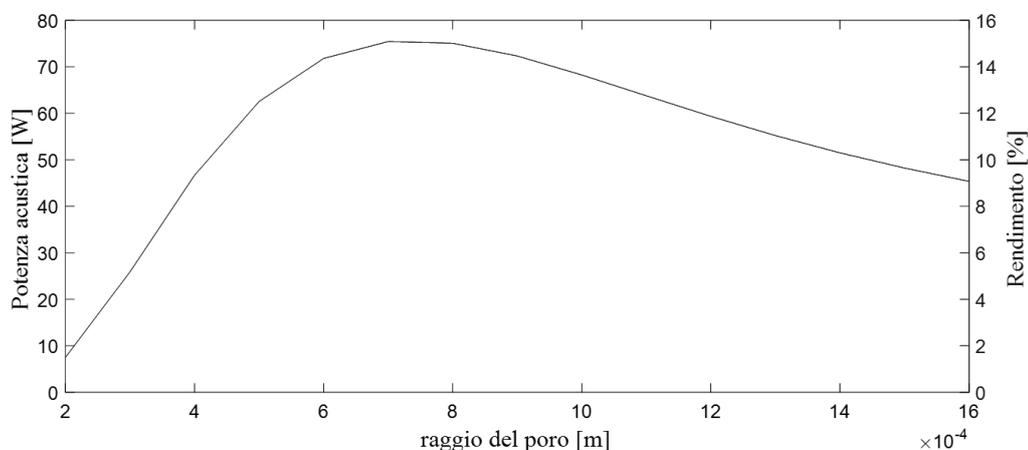


Figura 54: Potenza acustica e rendimento al variare del raggio

L'algoritmo implementato è applicabile a qualsiasi geometria di stack e qualsiasi materiale.

È possibile ripetere la stessa procedura di analisi ad ogni frequenza al fine di ottenere la massima intensità acustica individuata dalla coppia di valori ottimizzati di lunghezza e posizione dello stack.

5.2 Applicazione dell'algoritmo di ottimizzazione su stack con pori a diversa complessità

L'algoritmo di ottimizzazione è stato applicato anche nel caso in cui lo stack del motore termoacustico in esame presenti una geometria con i pori caratterizzati dai parametri non acustici riportati in Tabella 4.

Figura 55, Figura 56 e Figura 57 mostrano l'andamento della lunghezza dello stack, della lunghezza del condotto caldo Δx e dell'intensità acustica come risultato della procedura di ottimizzazione al variare della frequenza.

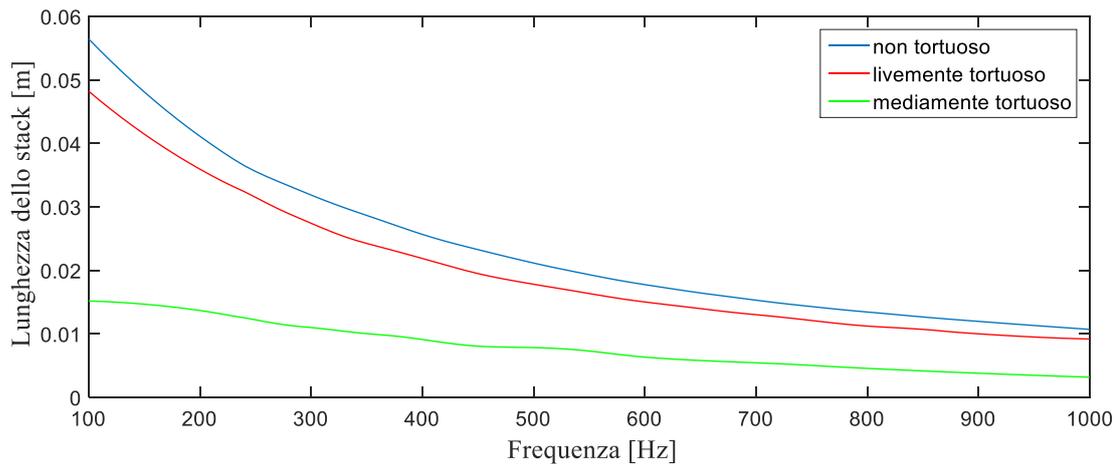


Figura 55: Andamento della lunghezza dello stack al variare della frequenza per pori tortuosi

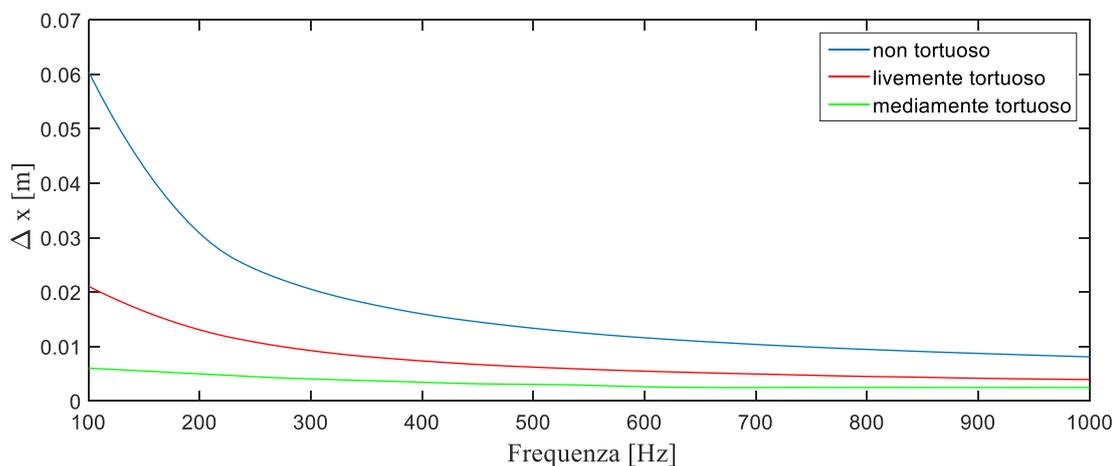


Figura 56: Andamento della lunghezza del condotto caldo al variare della frequenza per pori tortuosi

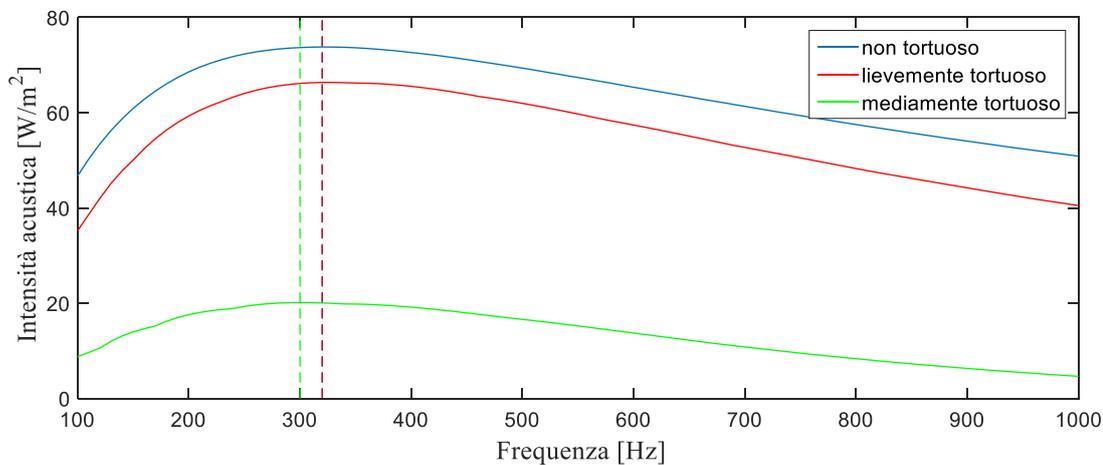


Figura 57: Andamento dell'intensità acustica al variare della frequenza per pori tortuosi

Il massimo valore di intensità acustica, individuato dalle linee verticali tratteggiate in Figura 57, si verifica in un intervallo relativamente stretto di frequenze. La lunghezza dello stack e del condotto caldo variano, invece, in modo anche significativo.

5.3 Applicazione dell’algoritmo di ottimizzazione su stack non convenzionali

Per uno stack la cui complessità geometrica può essere acusticamente spiegata dai 5 parametri non acustici alla base del modello JCA, è stata implementata una procedura di ottimizzazione multi-parametrica. Inoltre i 5 parametri non acustici sono stati ulteriormente relazionati, per una schiuma a celle aperte, ad alcune grandezze micro-geometriche.

I legami, tra i parametri non acustici e le grandezze micro-geometriche, sono stati sviluppati nei recenti lavori di Doutres, Atalla, e Dong [43] . In questi lavori, basandosi sulla caratterizzazione di schiume di poliuretano, hanno elaborato delle formulazioni analitiche tra i parametri non acustici e le proprietà microstrutturali della cella rappresentativa del materiale poroso. Tramite opportune scansioni al microscopio elettronico hanno elaborato una geometria della cella di tipo tetradecaedrica come mostrata in Figura 58.

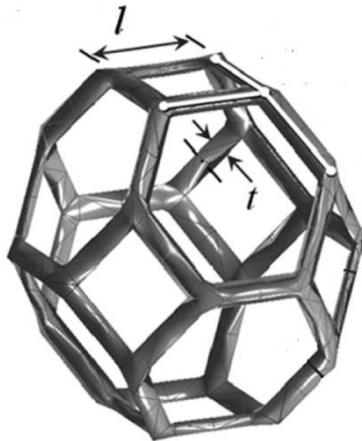


Figura 58: Cella tetradecaedrica proposta da Doutres, Atalla, e Dong

Per la geometria considerata, la porosità è stata definita come:

$$\phi = \frac{V_f}{V_t} = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_s} = 1 - \rho_r \quad (109)$$

dove ρ_1 è la densità della schiuma, ρ_s la densità del materiale che compone la struttura e ρ_r la densità relativa che è espressa in funzione dello spessore e della lunghezza del lato della cella nella seguente relazione:

$$\rho_r = C^{\rho} \left(\frac{t}{l} \right)^2 \quad (110)$$

dove C^{ρ} è una costante che dipende dalle proprietà geometriche microstrutturali della schiuma, t è lo spessore della struttura ed l la lunghezza dei lati della struttura.

La lunghezza caratteristica termica è definita come:

$$\Lambda_k = 2 \frac{V_f}{A_t} = 2 \frac{V_f}{A_s - (1 - R_w)A_w} \quad (111)$$

dove A_s è la superficie della struttura, A_w la superficie totale dei pori, R_w tiene conto della quantità di reticolo presente nella cella. Ad esempio $R_w = 1$ indica un materiale completamente reticolato ovvero un materiale che presenta una completa interconnessione tra tutte le celle. Il termine R_w fornisce il seguente legame tra le due lunghezze caratteristiche:

$$\frac{\Lambda_k}{\Lambda_v} = 1,55 \left(\frac{1}{R_w} \right)^{0,676} \quad (112)$$

La resistività al flusso d'aria è un parametro che tiene conto della presenza delle sottili membrane che chiudono le celle dei pori ed è definito da:

$$\sigma = \sigma' \left(\frac{1}{R_w} \right)^{1,116} \quad (113)$$

dove σ' è un fattore di scala.

La tortuosità cresce all'aumentare della chiusura della cella ed è fornita dalla relazione:

$$\alpha_{\infty} = 1,05 \left(\frac{1}{R_w} \right)^{0,38} \quad (114)$$

In

Tabella 7 sono riportati i 5 parametri non acustici e la potenza acustica sviluppata dal motore termoacustico. I valori presenti nella prima riga mostrano il risultato della procedura di ottimizzazione eseguita esclusivamente da un punto di vista matematico mentre i valori presenti nella seconda riga sono stati ottenuti inglobando nell’algoritmo le relazioni sopra esposte per un materiale composto da schiume a celle aperte.

Tabella 7: Parametri non acustici individuati dalla procedura di ottimizzazione

ϕ	$\Lambda_k[\mu m]$	$\Lambda_v[\mu m]$	$\sigma[Nsm^{-4}]$	α_∞	Potenza acustica sviluppata \dot{E}
0,95	100	50	5000	1	160 W
0,99	106	54	4918	1,2	144 W

I valori di energia acustica sviluppata, riportati in

Tabella 7, sono decisamente superiori a quelli ottenibili dalla procedura di ottimizzazione applicata ad uno stack di tipo convenzionale composto da pori cilindrici, il cui valore massimo di potenza acustica ottenuta, deducibile dalla Figura 54, è pari a 75 W.

Risultati e conclusioni

In questo lavoro di tesi è stata sviluppata una procedura per la valutazione delle prestazioni di un motore termoacustico ad onda stazionaria basata sull'ottimizzazione delle proprietà fisico-strutturali di uno stack non convenzionale.

In una fase iniziale si è utilizzato il programma DeltaEC per integrare numericamente le equazioni termoacustiche e per analizzare la funzione dello “stack” valutando come le sue caratteristiche influenzano le prestazioni di un motore termoacustico ad onda stazionaria.

Avendo evidenziato mediante le suddette analisi che la struttura geometrica dello “stack” influenza in modo significativo le prestazioni di tale dispositivo, si è analizzata la possibilità di utilizzare come “stack” materiali porosi di struttura geometrica non regolare.

L'utilizzo del modello di Johnson – Champoux – Allard ha consentito di determinare le espressioni per la valutazione delle funzioni termiche e viscosive valide anche per “stack” a struttura geometrica complessa.

In ambiente matlab è stato sviluppato e validato un algoritmo per risolvere le equazioni termoacustiche implementando le nuove formulazioni delle funzioni termiche e viscosive.

Con questo programma è stato possibile valutare e confrontare le prestazioni di motori termoacustici ad onda stazionaria in cui lo “stack” avesse una geometria composta da pori con differente grado di tortuosità.

Infine, una procedura di ottimizzazione delle proprietà fisico-strutturali ha consentito di individuare quelle combinazioni di parametri geometrici, nel caso di “stack” a struttura regolare, o di parametri non acustici, nel caso di “stack” non convenzionali, tali da migliorare le prestazioni del motore termoacustico ad onda stazionaria.

Questa attività di ricerca rappresenta una solida base teorico-computazionale per le future attività sperimentali finalizzate alla realizzazione del materiale poroso con i valori dei parametri fisico-strutturali ottimizzati, alla validazione dei parametri fisico-strutturali effettivamente conseguiti mediante misure acustiche nonché all'allestimento di un'apparecchiatura per la verifica sperimentale delle capacità predittive della procedura sviluppata in ambiente matlab.

Nomenclatura

Minuscole	Descrizione	Unità di misura
c	Velocità del suono	m/s
c_p	Calore specifico a pressione costante	J/kgK
c_v	Calore specifico a volume costante	J/kgK
d	Spessore	m
d	Differenziale	m
f	Frequenza	Hz
f_j	Funzione media spaziale $j = v, k$	–
j	Unità immaginaria $\sqrt{-1}$	–
l	Lunghezza dei lati della microstruttura	m
k	Conducibilità termica	W/mK
p	Pressione	Pa
P_r	Numero di Prandtl	–
q_0	Permeabilità viscosa	m^2
t	Tempo	s
t	Spessore della microstruttura	m
q	Permeabilità viscosa	m/s
u	Componente x della velocità delle particelle	m/s
x	Coordinata della propagazione sonora	–

Maiuscole	Descrizione	Unità di misura
T	Temperatura	K
T	Periodo di modulazione del poro	m
V	Volume	m^3
U	Velocità di volume	m^3/s
R	Raggio	m
R	Costante dell'aria	J/kgK
K	Modulo di comprimibilità dinamico	Pa
S	Profilo	–
S_p	Modulazione in ampiezza	m

A	Area della sezione trasversale	m^2
J	Funzione di Bessel	–
C	Capacità acustica	m^3/Pa
L	Induttanza acustica	kg/m^4
L	Energia meccanica	W
Q	Energia termica	W
C^p	Costante microstrutturale della schiuma	–
R_w	Entità del reticolo	–

Alfabeto greco	Descrizione	Unità di misura
α	Tortuosità	–
ε	Scabrosità	m
η	Viscosità dinamica	kgm/s
λ	Lunghezza d'onda	m
μ	Viscosità cinematica	m^2/s
γ	Rapporto calori specifici	–
ξ	Spostamento delle particelle	m
κ	Diffusività del gas	m^2/s
π	Costante Pi greco	–
ρ	Densità	kg/m^3
σ	Resistività al flusso d'aria	Nsm^{-4}
ν	Viscosità cinematica η/ρ	m^2/s
φ	Fase	rad
ϕ	Porosità	–
ω	Frequenza angolare	rad/s
Δ	Differenza finita	–
Λ	Lunghezza caratteristica	m
Π	Superficie bagnata dal fluido	m^2

Pedice	Descrizione
v	Viscosa
k	Termica
m	Media
∞	Limite alle alte frequenze
0	Di ordine zero
1	Di ordine primo, usualmente complesso
f	Fluido
tot	Totale
s	Solido

Apice	Descrizione
\sim	Coniugato complesso

Acronimi	Descrizione
DeltaEC	Design Environment for Low-amplitude ThermoAcoustic Energy Conversion
JCA	Johnson-Champoux-Allard
FEM	Metodo degli elementi finiti
MUMPS	MULTifrontal Massively Parallel sparse direct Solver

Altri simboli	Descrizione
$Im()$	Parte immaginaria di
$Re()$	Parte reale di
$\langle \rangle$	Media spaziale perpendicolare a x

Bibliografia

- [1] A. Putnam e W. Dennis, Survey of organ-pipe oscillations in combustion systems, vol. 28, *J Acoust Soc Am*, 1956, pp. 246-259.
- [2] B. Higgins. cited by W. Nicholson, On the sound produced by a current of hydrogen gas passing through a tube. With a letter from Dr. Higgins, respecting the time of its discovery. *J. Nat. Phil., Chem., and the Arts* , 1:129–131, 1802.
- [3] C. Sondhuss, Uber die schallschwingungen der luft in erhitzten glashren und in gedeckten pfeifen von ungleicher weite, *Annalen der Physik* 79, 1850, p. 1–34.
- [4] R. P.L., Notiz über eine neue Art, die in einer an beiden enden offenen Röhre enthaltene Luft in Schwingungen zu versetzen, vol. 107, *Ann Phys*, 1859, pp. 339-43.
- [5] K. G, Ueber den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung, 6 a cura di, vol. 134, *Annalen der Physik*, 1868, pp. 177-93.
- [6] J. W. Strutt, *The Theory of Sound*, 2nd ed. Vol II (Macmillan, reprinted by Dover Publications), 1896.
- [7] Taconis, Beenakker, Nier e Aldrich, Measurements concerning the vapor-liquid equilibrium of solutions of He3 in He4 below 2.19°K, vol. 15, *physica*, 1949, pp. 733-9.
- [8] H. Kramers, Vibrations of a gas column, 11-12 a cura di, vol. 15, *Physica*, 1949, pp. 971-84.
- [9] N. Rott, Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes, vol. 20, *Z angew Math Phys*, 1969, pp. 230-43.
- [10] N. Rott, Thermally driven acoustic oscillations. Part II: stability limit for helium, vol. 24, *Z angew Math Phys*, 1973, pp. 54-73.
- [11] N. Rott, Thermally driven acoustic oscillations. Part III: second-order heat flux, vol. 26, *Z angew Math Phys*, 1975, pp. 43-49.
- [12] N. Rott, Thermally driven acoustic oscillations. Part IV: tubes with variable cross-section, vol. 27, *Z angew Math Phys*, 1976, pp. 197-224.
- [13] N. Rott, Thermally driven acoustic oscillations. Part VI: excitation and power, vol. 34, *Z angew Math Phys*, 1983, pp. 609-26.
- [14] T. Feldman, H. Hirsch e Carter, Experiments on the Sondhauss thermoacoustical phenomenon, 6 a cura di, vol. 39, *Journal of the Acoustical Society of America*, 1996, pp.

1236-1236.

- [15] P. H. Ceperley, A pistonless Stirling engine traveling wave heat engine, vol. 66, J. Acoust. Soc. Am, 1979, p. 1508–1513.
- [16] S. G.W., Thermoacoustic engines, vol. 84, Journal of the Acoustical Society of America, 1988, p. 1145–1180.
- [17] G. W. Swift, Analysis and performance of a large thermoacoustic engine, vol. 92, Journal of the Acoustical Society of America, 1992, p. 1551–1563 .
- [18] S. L. Garret, J. A. Adeff e T. J. Hofler, Thermoacoustic refrigerator for space applications, vol. 7, J. Thermophysics and Heat Transfer, 1993, p. 595.
- [19] S. Garret, J. Adeff e H. T.J., Thermoacoustic refrigerator for space applications, vol. 7, J. Thermophysics and Heat Transfer, 1993, p. 595.
- [20] <http://www.lanl.gov/thermoacoustics/DeltaEC.html>.
- [21] W. P. Arnott, H. E. Bass e R. Raspet, General formulation of thermoacoustics for stacks having arbitrarily shaped pore cross sections, vol. 90, J. Acoust. Soc. Am., 1991, pp. 3228-3237.
- [22] R. Keolian e G. W. Swift, Thermoacoustics in pin-array stacks, J. Acoust. Soc. Am. 94, 1993, pp. 941-943.
- [23] J. A. Adeff, T. J. Hofler, A. A. Atchley e W. C. Moss, Measurements with reticulated vitreous carbon stacks in thermoacoustic prime movers and refrigerators, vol. 104, J. Acoustic. Soc. Am, 1998, pp. 32-38.
- [24] S. Backhaus e G. Swift, A thermoacoustic Stirling heat engine, vol. 399, Nature, 1999, pp. 335-38.
- [25] H. Roh, R. Raspet e H. E. Bass, Parallel capillary-tube-based extension of thermoacoustic theory for random porous media, vol. 121, J. Acoust. Soc. Am., 2007, pp. 1413-1422.
- [26] Y. Champoux e M. R. Stinson, On acoustical models for sound propagation in rigid frame porous materials and the influence of shape factors, vol. 92, J. Acoust. Soc. Am., 1992, p. 1120–1131.
- [27] Z. Yu e A. J. Javorski, Impact of acoustic impedance and flow resistance on the power output capacity of the regenerators in travelling-wave thermoacoustic engine, vol. 51, Energy Conversion and Management, 2010, pp. 350-59.
- [28] A. S. Abduljalil, Z. Yu e A. J. Jaworski, Selection and experimental evaluation of low-

- cost porous materials for regenerator applications in thermoacoustic engines, vol. 32, *Materials and Design*, 2011, p. 217–28.
- [29] M. Guedra, F. C. Bannwart e P. L. G. Penelet, Parameter estimation for the characterization of thermoacoustic stacks and regenerators, vol. 80, *Applied Thermal Engineering*, 2015, pp. 229-37.
- [30] C. Zwikker e C. Wi. Kosten, *Sound Absorbing Materials*, New York: Elsevier, 1949.
- [31] N. Delany e E. Bazley, Acoustical properties of fibrous absorbent materials, *Applied Acoustics* 3, 1970, pp. 105-116.
- [32] D. L. Johnson, J. Koplik e R. Dashen, Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media, *J. Fluid Mech* 176, 1987, pp. 379-402.
- [33] Y. Champoux e J. Allard, Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media, vol. 70, *J. Appl. Phys*, 1991, pp. 1975-79.
- [34] J. F. Allard, *Propagation of Sound in Porous Media: Modelling Sound Absorbing Materials*, London, 2009.
- [35] P. Leclaire, L. Kelders, W. Lauriks, M. Melon, N. Brown e B. Castagnède, Determination of the viscous and thermal characteristic lengths of plastic foams by ultrasonic measurements in helium and air, vol. 80, *J. Appl. Phys*, 2009.
- [36] R. Olny e P. X., Acoustical determination of the parameters governing viscous dissipation in porous media, vol. 119, *J. Acoust. Soc. Am.*, 2006, pp. 2027-40.
- [37] *Airflow Resistance of Acoustical Materials*, ASTM, 2003.
- [38] R. Dragonetti, C. Ianniello e R. Romano, Measurement of the resistivity of porous materials with an alternating air-flow method, vol. 129, *J. Acoust. Soc. Am*, 2011, pp. 753-64.
- [39] R. Olny e X. Panneton, Acoustical determination of the parameters governing viscous dissipation in porous media, vol. 119, *J. Acoust. Soc. Am.*, 2006, pp. 2027-40.
- [40] P. Leclaire, L. Kelders, W. Lauriks, M. Melon, N. Brown e B. Castagnède, Determination of the viscous and thermal characteristic lengths of plastic foams by ultrasonic measurements in helium and air, vol. 80, *J. Appl. Phys*, 2009.
- [41] P. Leclaire, L. Kelders, W. Lauriks, M. Melon, N. Brown e B. Castagnède, Determination of the viscous and thermal characteristic lengths of plastic foams by ultrasonic measurements in helium and air, vol. 80, *J. Appl. Phys*, 2009.
- [42] X. Olny e R. Panneton, Acoustical determination of the parameters governing thermal

dissipation in porous media, vol. 123, JASA, 2008, p. 814–24.

- [43] O. Doutres, N. Atalla e K. Dong, Effect of the microstructure closed pore content on the acoustic behavior of polyurethane foams, vol. 110, J. Appl. Phys, 2011.