PENENTU DAN PENGGUNAANNYA

Oleh

LIM YEW SI

Projek diserahkan untuk memenuhi
sebahagian keperluan bagi
Ijazah Sarjana Sains Matematik Pengajaran

Jun 2008

PENGHARGAAN

Saya rasa bersyukur kerana dapat menyempurnakan laporan projek ini. Semasa menyediakan projek ini, saya telah mendapat bantuan, bimbingan dan dorongan daripada pelbagai pihak. Jadi, saya ingin mengambil kesempatan ini untuk mengucapkan rasa penghargaan dan ucapan terima kasih kepada semua pihak yang terlibat.

Pertama sekali, saya ingin merakamkan setinggi-tinggi penghargaan dan terima kasih kepada penyelia projek saya, iaitu Puan Ena bt Jamal yang telah banyak memberi bimbingan dan dorongan kepada saya sepanjang proses penyediaan laporan ini. Selain itu, saya juga ingin mengucap terima kasih kepada kakitangan Pusat Pengajian Sains Matematik, terutamanya Puan Faridah yang sentiasa bersedia untuk membantu saya.

Ucapan penghargaan dan terima kasih juga ditujukan kepada rakan-rakan dan keluarga saya atas sokongan moral dan keyakinan yang diberi oleh mereka agar saya dapat menyempurnakan laporan ini.

JADUAL KANDUNGAN

SENARAI RAJAH

ABSTRAK

Objektif projek ini ialah untuk memberi kefahaman yang lebih menyeluruh tentang penentu, projek ini dimulakan dengan sejarah penentu serta takrifannya yang dikaitkan dengan konsep pilihatur. Selain itu, teorem-teorem berkaitan dengannya turut dibincangkan.

Kaedah-kaedah yang boleh digunakan untuk mengira penentu termasuklah Petua Sarrus, Kaedah Kofaktor dan Kaedah Penurunan Baris.

Projek ini akan membincangkan beberapa aplikasi penentu. Antaranya ialah ia boleh digunakan untuk mencari penyelesaian sistem persamaan linear dan menyemak kewujudan sesuatu matriks songsang. Dengan menggabungkan konsep penentu dan sistem persamaan homogen, kita dapat membina persamaan garis lurus, persamaan lengkung dan persamaan satah secara tersirat. Penentu juga boleh digunakan untuk mengira luas segiempat selari, luas segitiga, isipadu tetrahedron dan isipadu paralelepiped. Selain itu, ia juga digunakan untuk menghitung nilai eigen sesuatu matriks dan mencari Jacobian.

DETERMINANTS AND ITS APPLICATIONS

ABSTRACT

The objective of this project is to give understanding that is holistic concerning determinant. This project will introduce the history of determinant as well as its definition with reference to permutations concept. Besides this, related theorems will also be discussed.

The approaches used to calculate determinants are Sarrus' Rule, Cofactor Expansion and Row Reduction.

This project will discuss various applications of determinant. Some of these are to find the solution of linear equation system and to verify the existence of Inverse Matrix. By combining the determinant concept and homogeneous equation system, equation of a straight line, equation of curve and equation of plane can be found implicitly. Determinant can be used to calculate area of parallelogram, area of triangle, volume of tetrahedron and volume of parallelepiped. In addition to this, it is also used to calculate the eigen value of certain matrix and Jacobian.

BAB 1

PENGENALAN

Projek ini adalah berkaitan dengan konsep penentu. Jadi untuk mendapat gambaran yang jelas tentang konsep ini, maka kita akan memulakan perbincangan dengan meneliti sejarah ringkas penentu dan takrifannya. Selain itu, teorem-teorem yang melibatkan penentu juga akan dibincangkan. Untuk mengira penentu sesuatu matriks, laporan ini telah mengutarakan pelbagai kaedah yang dikaitkan dengan saiz matriks dan jenis matriks.

Untuk menjawab soalan "kenapa kita perlu belajar konsep penentu?",beberapa penggunaannya dalam bidang algebra linear dan kalkulus akan dibincangkan. Penentu bukan sahaja boleh digunakan untuk menentukan kewujudan matriks songsang dan menyelesaikan sistem persamaan linear, ia juga berguna dalam mengira luas sesuatu poligon dan isipadu sesuatu pepejal, membina persamaan keratan kon dan persamaan satah. Selain itu, konsep penentu juga digunakan untuk mencari nilai eigen semasa menyelesai masalah vektor eigen. Untuk mengira kamiran berganda yang rumit, kaedah penukaran pembolehubah yang menggunakan Jacobian digunakan.

1.1 Sejarah Penentu

Penentu ialah suatu fungsi nombor nyata yang dikaitkan dengan matriks. Konsep penentu telah diperkenalkan lebih awal berbanding konsep matriks. Pada asalnya, sesuatu penentu dirujuk sebagai suatu sifat yang ada pada suatu sistem persamaan linear. Ia digunakan untuk menentukan sama ada sesuatu sistem itu mempunyai penyelesaian unik, banyak penyelesaian atau tiada penyelesaian.

Kali pertama penentu digunakan ialah pada kurun ke-3 Sebelum Masihi dalam sebuah buku teks Matematik China iaitu *The Nine Chapter in the Mathematical Art*. Di Eropah, penentu 2×2 telah diberi perhatian oleh ahli Matematik Itali Gerolamo Cardano pada hujung kurun ke-16 manakala penentu bagi peringkat yang lebih tinggi telah diberi perhatian oleh ahli Matematik Jepun , Seki Kowa pada tahun 1683 dan ahli Matematik Jerman Gottfried Leibniz pada tahun 1693.

Pada zaman purba negeri China, batang-batang buluh telah disusunkan di atas suatu papan kira berdasarkan *Rules of Thumb* untuk menyelesai sistem persamaan linear. Seki telah memanipulasikan idea ini dan menggunakan konsep penentu untuk menyelesaikannya. Walaupun Gottfried juga menggunakan konsep penentu untuk menyelesai sistem persamaan linear tetapi beliau hanya menumpu kepada sistem yang terdiri daripda tiga persamaan linear dan tiga anu sahaja. Sebaliknya Seki telah berjaya menemui kaedah umum untuk menyelesai sistem yang terdiri daripada n persamaan linear dan n anu. Walau bagaimanpun penemuan mereka tidak dipandang berat pada ketika itu.

Penentu mula dipandang berat semula pada sekitar tahun 1750 dan 1900. Sebelum itu, penentu hanya merupakan alat yang digunakan untuk menganalisis dan menyelesai sistem persamaan linear. Pada tahun 1750, ahli Matematik Switzerland Gabriel Cramer dalam artikelnya "*Introduction to the Analysis of Algebraic Curves*" menyatakan bahawa penentu juga berguna dalam Geometri Analisis. Dalam artikel itu, Cramer telah menggunakan penentu untuk membina persamaan sesuatu lengkung dalam satah-xy. Selain itu, beliau juga memperkenalkan Petua Cramer iaitu kaedah penentu untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear $n \times n$.

Pada tahun 1772, Pierre-Simon Laplace telah memperkenalkan kaedah untuk mengungkap penentu dalam sebutan minor iaitu Kaedah Kofaktor. Pada tahun 1773, Lagrange telah membuktikan bahawa isipadu tetrahedron yang terbentuk daripada titik asalan dan tiga titik lain $M(x, y, z), M'(x', y', z')$ dan $M''(x'', y'', z'')$ ialah

$$\frac{1}{6}[z(x'y''-y'x'')+z'(yx''-xy'')+z''(xy'-yx')].$$

Pada 30 November 1812, Augustin-Louis Cauchy telah memperkenalkan istilah '*determinant*' yang membawa maksud yang sama dengan konsep penentu masa ini dalam karyanya "*Memoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs egales et des signes contraires par suite des transpositions operees entre les variables qu'elles renferment*". Beliau juga telah berjaya membuktikan Teorem Pendaraban bagi penentu dan memperkenalkan rumus isipadu bagi beberapa jenis pepejal polihedron (*solid polyhedra*) dalam bentuk penentu.

Simbol piawai untuk menulis penentu iaitu dua garis tegak telah diperkenalkan oleh Arthur Cayley pada tahun 1841. Beliau juga telah menyatakan matriks songsangan dalam sebutan penentu.

Selain itu, konsep penentu juga digunakan dalam penukaran pembolehubah, iaitu mengira Jacobian. Walaupun Cauchy merupakan ahli matematik yang mula-mula menggunakan penentu unik ini melibatkan terbitan separa tetapi ahli Matematik Jerman Carl Gustav Jacob Jacobi telah memperkembangkannya menjadi satu kaedah untuk mengira kamiran berganda.

Banyak kajian juga dilakukan untuk mencari penentu bagi matriks-matriks khas. Di antaranya ialah James Joseph Sylvester, belaiu telah berminat untuk mencari penentu bagi Matriks Simetri, Matriks Pencong, *Persymmetric*, *Pfaffian* dan *Hessians*. Catalan, Spottiswoode, Glaisher dan Scott pula berminat untuk mencari penentu bagi Circulants manakala Trudi berminat dengan penentu bagi *Symmetric Gauche*.

BAB 2

PENENTU SESUATU MATRIKS

Takrifan bagi penentu sesuatu matriks boleh dikaitkan dengan konsep pilihatur, jadi perbincangan kita akan dimulakan dengan konsep pilihatur yang berkaitan dengan set integer terlebih dahulu.

2.1 Pilihatur

Takrif 2.1.1

Katakan $S = \{1,2,3,\ldots,n\}$ ialah set integer dari 1 hingga n.

Suatu fungsi satu-ke- satu dari S ke seluruh S dikenali sebagai suatu pilihatur bagi S. Sesuatu pilihatur adalah suatu penyusunan semula bagi unsur-unsur dari S tanpa ulangan. Pilihatur sebegini boleh diwakili dengan

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{bmatrix}$$

di mana j_1 ialah nombor pertama dalam pilihatur, j_2 ialah nombor kedua dalam pilihatur dan sebagainya.

Secara amnya, set $\{1,2,3,\ldots,n\}$ mempunyai $n(n-1)(n-2)\ldots 2.1 = n!$ pilihatur yang berlainan.

Misalnya, $S = \{1,2,,3\}$ mempunyai 3! atau 6 pilihatur. Pilihatur bagi set S ialah

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.1.1 Penyongsangan

Suatu pilihatur $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{bmatrix}$ dari $S = \{1,2,3,\dots,n\}$ dikatakan mempunyai satu penyongsangan (*inversion*) jika terdapat $j_s > j_r$ bagi $s < r$.

Jumlah penyongsangan yang berlaku dalam sesuatu pilihatur boleh diperolehi dengan langkah-langkah berikut:

i. Pertimbangkan j_1, tentukan bilangan integer selepas j_1 yang kurang daripadanya.

ii. Ulangi langkah di atas dengan mempertimbangkan kes $j_2, j_3, \dots$ dan j_{n-1}.

iii. Bilangan penyongsangan ialah hasil tambah bilangan yang diperoleh dari langkah-langkah di atas.

Suatu pilihatur dikatakan genap jika bilangan penyongsangan di dalam pilihatur itu adalah genap dan dikatakan ganjil jika bilangan penyongsangan adalah ganjil.

Misalnya,

a) pilihatur $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ tiada penyongsangan kerana $1 < 2$, $1 < 3$ dan $2 < 3$. Maka ia merupakan pilihatur genap.

b) Pilihatur $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ mempunyai penyongsangan kerana $3 > 2$, $3 > 1$ dan $2 > 1$.

Jadi, bilangan penyongsangan = 3. Maka ia merupakan pilihatur ganjil.

c) Pilihatur $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ mempunyai penyongsangan kerana $2 > 1$ dan $3 > 1$

Jadi, bilangan penyongsangan = 2, dengan ini ia merupakan pilihatur genap.

2.1.2 Hasil Darab Permulaan

Hasil darab permulaan (*elementary product*) bagi suatu matriks segiempat sama $n \times n$, $A = [a_{ij}]$, merupakan sebarang hasil darab n pemasukan dari A dimana tiada dua pemasukan yang berasal dari baris yang sama atau lajur yang sama.

Misalnya,

a) Pertimbangkan matriks 2×2 berikut

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Hasil darab permulaannya ialah $a_{11}a_{22}$ dan $a_{12}a_{21}$.

b) Pertimbangkan matriks 3×3 berikut

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Hasil darab permulaannya ialah

$a_{11}a_{22}a_{33}$ $\quad$ $a_{12}a_{23}a_{31}$

$a_{11}a_{23}a_{32}$ $\quad$ $a_{13}a_{21}a_{32}$

$a_{12}a_{21}a_{33}$ $\quad$ $a_{13}a_{22}a_{31}$

Secara amnya, hasil darab permulaan boleh ditulis dalam bentuk

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\ldots a_{nj_n}$$

di mana $j_1j_2j_3\ldots j_n$ ialah pilihatur set $S=\{1,2,3,\ldots,n\}$.

Jika $j_1j_2j_3\ldots j_n$ merupakan pilihatur genap, maka kita akan darab hasil darab permulaannya dengan $+1$ manakala kita akan darabnya dengan -1 sekiranya $j_1j_2j_3\ldots j_n$ adalah pilihatur ganjil. Hasilnya dikenali sebagai hasil darab permulaan bertanda (*signed elementary product*).

2.2 Takrif Penentu

Takrif 2.2.1

Suatu matriks $m\times n$ A ialah suatu susunan nombor dalam bentuk segiempat tepat dengan m baris dan n lajur seperti berikut:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$

Nombor nyata a_{ij} dalam matriks disebut unsur atau pemasukan matriks.

Sekiranya sesuatu matriks itu mempunyai bilangan baris dan bilangan lajur yang sama maka ia dikenali matriks segiempat sama. Misalnya

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 9 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 9 & -10 \end{bmatrix}$$

Matriks 2×2 Matriks 4×4

Takrif 2.2.2

Katakan $A = [\ a_{ij}\ ]$ merupakan matriks segiempat sama $n \times n$, maka penentu A boleh

dituliskan sebagai $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ atau det(A).

Ianya boleh ditakrifkan sebagai hasil tambah semua hasil darab permulaan bertanda.

$$\det(A) = \sum \pm a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \ldots a_{nj_n}$$

Penentu hanya tertakrif bagi matriks segiempat sama.

Berikut ditunjukkan contoh-contoh rumus penentu sesuatu matriks segiempat sama yang diterbit secara takrifan.

i) Penentu matriks 2×2

Pertimbangkan $P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Hasil darab permulaan	Pilihatur yang berkaitan	Bilangan songsangan	Jenis pilihatur (genap/ganjil)	Hasil darab permulaan bertanda
$a_{11}a_{22}$	(1,2)	0	Genap	$+a_{11}a_{22}$
$a_{12}a_{21}$	(2,1)	1	Ganjil	$-a_{12}a_{21}$

Jadi, $|P| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

ii) Penentu matriks 3×3

Pertimbangkan $Q = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Hasil darab permulaan	Pilihatur yang berkaitan	Bilangan songsangan	Jenis pilihatur (genap/ganjil)	Hasil darab permulaan bertanda
$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1, 2, 3)	0	Genap	$+a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1, 3, 2)	1	Ganjil	$-a_{11}a_{23}a_{32}$

$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2,1, 3)	1	Ganjil	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2, 3, 1)	2	Genap	$+a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3, 1, 2)	2	Genap	$+a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3, 2, 1)	3	Ganjil	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Jadi, det $(Q) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

Walau bagaimanapun, menghitung penentu dengan kaedah takrifan adalah tidak sesuai digunakan untuk matriks yang berperingkat tinggi iaitu lebih daripada 3×3 kerana ia merumitkan. Oleh itu terdapat beberapa kaedah alternatif yang boleh digunakan untuk menghitung penentu sesuatu matriks bergantung kepada saiz matriks dan jenis matriks.

2.3 Teorem Penentu

Takrif 2.3.1

Dua matriks A dan B dikatakan matriks serupa jika dan hanya jika

(a) kedua-dua matriks A dan B mempunyai bilangan baris dan lajur yang sama,dan

(b) setiap pemasukan yang bersepadan tempat mesti sama.

Teorem 2.3.1

Jika matriks A dan B adalah matriks serupa (*similar matrices*), maka

$$|A| = |B|$$

Teorem 2.3.2

Jika A adalah suatu matriks $n\times n$ dan k adalah suatu pemalar, maka

$$|kA| = k^n|A|$$

Misalnya,

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & -3 & 15 \\ -9 & 3 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3(1) & 3(2) & 3(3) \\ 3(4) & 3(-1) & 3(5) \\ 3(-3) & 3(1) & 3(6) \end{vmatrix}$$

$$= 3^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Teorem 2.3.3

Katakan matriks A dan matriks B adalah matriks $n \times n$, maka

$$|AB| = |A||B|$$

Katakan A dan B adalah matriks $n \times n$, secara umumnya $|A+B| \neq |A| + |B|$

Misalnya,

Diberi $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, maka

$|A| = 7 - 15 = -8$, $\quad |B| = 8 + 9 = 17$

$\therefore \quad |A| + |B| = -8 + 17 = 9$

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad |A+B| = 45 - 12 = 33$

$\therefore \quad |A+B| \neq |A| + |B|$

Teorem 2.3.4

Katakan A, B dan C adalah matriks-matriks $n \times n$ yang hanya berbeza antara satu sama lain pada satu baris(lajur) sahaja, dan baris(lajur) ke-r pada C merupakan hasil tambah pemasukan bersepadan pada baris (lajur) ke-r dari matriks A dan B, maka

$$|C| = |A| + |B|$$

Misalnya,

Katakan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Perhatikan bahawa matriks C boleh dituliskan sebagai

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2+2 & 5+3 & 6+1 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$|A| = -36 \qquad |B| = -18 \qquad |C| = -54 = (-36) + (-18) = |A| + |B|$

Takrif 2.3.2

Jika A ialah matriks $m \times n$, matriks transposisi A yang ditandai A^T ialah suatu matriks $n \times m$ yang terhasil daripada saling menukar baris dan lajur dalam matriks A. Perhatikan bahawa lajur pertama A^T adalah baris pertama A, lajur kedua A^T merupakan baris kedua A dan sebagainya. Selain itu, pemasukan pada baris i dan lajur j dari A^T merupakan pemasukan pada baris j dan lajur i matriks A.

Misalnya,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Teorem 2.3.5

Katakan A adalah suatu matriks $n \times n$, maka

$$|A| = |A^T|$$

Teorem 2.3.6

Katakan A adalah suatu matriks $n \times n$ dan B adalah suatu matriks yang diperolehi dari A dengan Operasi Baris Permulaan.

i) Jika B terhasil daripada saling tukar dua baris pada A.

$$A \xrightarrow{R_j^i} B$$

maka $|B| = -|A|$ atau $|A| = -|B|$

ii) Jika B terhasil daripada pendaraban semua pemasukan dalam suatu baris pada A dengan skalar $k \neq 0$,

$$A \xrightarrow{R_i(k)} B\text{, dimana } k \neq 0$$

maka $|B| = k|A|$ atau $|A| = \frac{1}{k}|B|$

iii) Jika B terhasil daripada gandaan semua pemasukan dalam suatu baris pada A dan ditambahkan kepada suatu baris lain pada A.

$$A \xrightarrow{R_j^i(k)} B \quad \text{, dimana } k \neq 0$$

maka $|B| = |A|$

Teorem 2.3.7

Katakan A adalah suatu matriks $n \times n$

i) Jika matriks A mempunyai satu baris (lajur) sifar, maka

$$|A| = 0$$

ii) Jika matriks A mempunyai dua baris(lajur) yang sama, maka

$$|A| = 0$$

Teorem 2.3.8

Jika A adalah suatu matriks segiempat sama dengan dua baris (lajur) yang berkadaran , iaitu semua pemasukan pada salah satu baris (lajur) dalam A ialah gandaan pemasukan-pemasukan pada baris yang lain dalam A, maka $|A| = 0$.

BAB 3

KAEDAH MENCARI PENENTU SESUATU MATRIKS

Dalam bab ini, kita akan membincangkan beberapa kaedah untuk mencari penentu sesuatu matriks. Antaranya ialah Kaedah Kofaktor dan Kaedah Penurunan Baris Permulaan.

3.1 Matriks Berperingkat 1×1

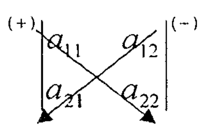
Penentu matriks 1×1, $A = [a_{11}]$ ialah skalar a_{11}.

$$|A| = |a_{11}| = a_{11}.$$

Misalnya, $|3| = 3$ $\qquad |-10| = -10$

3.2 Matriks Berperingkat 2×2

Katakan $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Penentu B boleh dikira kaedah berikut:



Penentu matriks ini dapat dikira dengan menolak hasil darab unsur-unsur sepanjang anak panah (–) daripada hasil darab unsur-unsur sepanjang anak panah (+).

Jadi $\qquad |B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Contoh 3.2.1

Carikan penentu bagi matriks

(a) $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $F = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

Penyelesaian

(a) $|G| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1(4) - 5(0)$

$= 4$

(b) $|F| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -2(5) - 3(7)$

$= -31$

3.3 Matriks Berperingkat 3×3

Untuk menghitung penentu matriks 3×3, kita boleh menggunakan Petua Sarrus (*Sarrus's Rule*).

Pertimbangkan sebarang matriks berperingkat 3×3, $A = [a_{ij}]$, rumus penentu bagi matriks ini boleh diperolehi dengan langkah berikut:

1. Salin unsur-unsur dalam lajur pertama dan kedua untuk diletakkan di belakang matriks asal supaya dijadikan lajur keempat dan kelima masing-masing.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

2. Hitungkan hasil darab unsur-unsur sepanjang setiap anak panah. Kemudian jumlahkan hasil darab unsur-unsur sepanjang anak panah bertanda (+) dan tolak jumlah hasil darab unsur-unsur sepanjang anak panah bertanda $(-)$.

(+) (−)

$$\left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right]\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \qquad \left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right]\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Maka

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Petua Sarrus hanya boleh digunakan untuk menghitung penentu matriks 3×3 sahaja.

Contoh 3.3.1

Katakan $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, cari penentu matriks B.

Penyelesaian

(+) (−)

$$\left[\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 3 & 2 \\ -4 & 6 \\ 2 & -1 \end{matrix}$$

$$|B| = 3(6)(4) + 2(2)(2) + 1(-4)(-1) - 1(6)(2) - 3(2)(-1) - 2(-4)(4)$$

$$= 110$$

Kaedah ini juga boleh dilakukan dengan cara menyalin baris pertama dan kedua diletakkan di bawah matriks asal.

3.4 Matriks Khas

3.4.1 Matriks Nol

Matriks nol (matriks sifar) ialah matriks yang semua pemasukannya adalah sifar. Ia boleh ditanda dengan $\tilde{0}$.

Misalnya,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorem 3.4.1

Jika A adalah matriks nol berperingkat $n \times n$, maka $|A| = 0$.

3.4.2 Matriks Identiti

Matriks segiempat sama berperingkat $n \times n$ dikenali sebagai matriks identiti jika pemasukan pada pepenjuru utamanya ialah 1 dan pemasukan lain ialah 0. Ia ditanda sebagai I_n dan kadang-kadang juga dikenali sebagai matriks unit.

Misalnya,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorem 3.4.2

Katakan I_n adalah matriks identiti, maka $|I_n| = 1$

3.4.3 Matriks Segitiga

Terdapat dua jenis matriks segitiga iaitu

i) Matriks Segitiga Atas

Suatu matriks segiempat sama $A = [\ a_{ij}\ ]$ dikenali sebagai matriks segitiga atas jika semua pemasukan di bahagian bawah pepenjuru utama adalah sifar , iaitu

$a_{ij} = 0 \quad , i > j$.

Misalnya,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

ii) Matriks Segitiga Bawah

Suatu matriks segiempat sama $A = [\ a_{ij}\ ]$ dikenali sebagai matriks segitiga bawah jika semua pemasukan di bahagian atas pepenjuru utama adalah sifar , iaitu

$a_{ij} = 0 \quad , i < j$

Misalnya,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorem 3.4.3

Jika A adalah suatu matriks segitiga yang berperingkat $n \times n$, maka

$|A|$ = hasil darab unsur-unsur pada pepenjuru utama matriks A

$= a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$

Contoh 3.4.1

Cari penentu bagi matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian

Oleh kerana A ialah matriks segitiga atas, maka

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \times 2 \times (-5) \times (-7) \\ &= 70 \end{aligned}$$

3.4.4 Matriks Pepenjuru

Suatu matriks segiempat sama $D = [d_{ij}]$ dikenali sebagai matriks pepenjuru jika semua pemasukannya adalah sifar kecuali pemasukan pada pepenjuru utama. Ia boleh ditandakan sebagai

$$D = \text{diag }(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$$

Misalnya,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorem 3.4.4

Jika A adalah suatu matriks pepenjuru yang berperingkat $n \times n$, maka

$$\begin{aligned} |A| &= \text{hasil darab unsur-unsur pada pepenjuru utama matriks } A \\ &= a_{11} a_{22} \ldots a_{nn} \end{aligned}$$

Contoh 3.4.2

Katakan $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, carikan penentunya.

Penyelesaian:

Oleh kerana matriks B merupakan matriks pepenjuru, maka

$$\begin{aligned} |B| &= 2 \times (-6) \times 5 \times (-3) \times (-1) \\ &= -180 \end{aligned}$$

3.4.5 Matriks Simetri -Pencong

Suatu matriks B yang berperingkat $n \times n$ merupakan matriks simetri-pencong jika $B = -B^T$, iaitu $b_{ij} = -b_{ji}$ dan pemasukan pada pepenjuru merupakan unsur sifar kerana $b_{ii} = -b_{ii}$.

Misalnya,

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & -5 \\ -6 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 7 & -12 \\ 5 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 12 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorem 3.4.5

Katakan P adalah suatu matriks simetri-pencong yang berperingkat $n \times n$ dan n adalah nombor ganjil, maka $|P| = 0$.

Bukti:

Diberi P adalah suatu matriks simetri-pencong, maka

$$\begin{aligned} & P && = -P^T \\ \Rightarrow \quad & |P| && = |-P^T| \\ & && = (-1)^n |P^T| \\ & && = -(1)^n |P| \end{aligned}$$

Apabila n adalah nombor ganjil,

$|P| = -|P|$

Dengan ini $|P| = 0$

Contoh 3.4.3

Carikan penentu bagi matriks $C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & -5 \\ -6 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian

Oleh kerana C ialah suatu matriks simetri-pencong dan berperingkat 3×3 (n ganjil), maka $|C| = 0$.

3.4.6 Matriks Blok

Submatriks bagi matriks A ialah suatu matriks yang diperolehi daripada A dengan menggugurkan baris-baris atau lajur-lajur tertentu matriks A. Dengan menggunakan garisan mendatar dan garisan menegak kita dapat memetakkan sesuatu matriks A kepada beberapa submatriks yang digelar blok.

Pertimbangkan matriks berikut:

$$A = \left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]$$

kita telah menggunakan garis berputus-putus untuk membahagikannya kepada 4 blok. Katakan kita mewakilkan setiap blok seperti berikut

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad A_{22} = \begin{bmatrix} a_{34} \end{bmatrix}$$

Maka, kita boleh menulis matriks A sebagai

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

dan ianya dikenali sebagai matriks blok.

Secara umumnya, matriks blok boleh ditanda sebagai $[A_{ij}]$.

Takrif 3.4.1

Katakan M adalah suatu matriks blok. M disebut matriks blok segiempat sama (*square block matrix*) jika semua syarat berikut dipenuhi

i) M adalah suatu matriks segiempat sama.

ii) Blok-blok itu membentuk suatu matriks segiempat sama.

iii) Semua blok pepenjuru juga merupakan matriks segiempat sama.

Misalnya

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ -2 & 4 & -5 & 6 & 8 \\ \hline 11 & 10 & 9 & 8 & 7 \\ \hline 3 & 4 & 5 & 0 & 7 \\ 4 & 6 & 8 & 12 & 14 \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ -2 & 4 & -5 & 6 & 8 \\ \hline 11 & 10 & 9 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 7 \\ \hline 4 & 6 & 8 & 12 & 14 \end{array}\right]$$

Matriks blok A bukan matriks blok segiempat sama kerana tidak memenuhi syarat (iii), manakala B merupakan matriks blok segiempat sama.

Takrif 3.4.2

Katakan $M = [A_{ij}]$ adalah suatu matriks blok segiempat sama.

i) **Matriks Blok Pepenjuru**

Jika semua bloknya merupakan matriks sifar kecuali blok pepenjuru, iaitu $A_{ij} = 0$ apabila $i \neq j$, maka M dikenali sebagai matriks blok pepenjuru (*block diagonal matriks*). Misalnya,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 17 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

ii) **Matriks Blok Segitiga Atas** (*upper triangular block matriks*)

Jika semua pemasukan di bahagian bawah blok pepenjuru utamanya adalah sifar, iaitu $A_{ij} = 0$, $i > j$, maka M dikenali sebagai matriks blok segitiga atas.