



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Présentée et soutenue par :
Antoine RIOLS-FONCLARE

Le jeudi 2 octobre 2014

Titre :

Effet dynamo et turbulence magnétohydrodynamique sous-critiques
dans les disques d'accrétion

ED SDU2E : Astrophysique, Sciences de l'Espace, Planétologie

Unité de recherche :

Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie (UMR 5277)

Directeur(s) de Thèse :

François Rincon (Chargé de recherche)
Carlo Cossu (Directeur de recherche)

Rapporteurs :

Sébastien Fromang (CEA)
Emmanuel Dormy (Directeur de recherche)

Autre(s) membre(s) du jury :

Michel Rieutord (Professeur et Président du Jury)
Richard Kerswell (Professeur)
Thierry Passot (Directeur de recherche)

Résumé

L'un des défis majeurs de la théorie des disques d'accrétion en astrophysique est de pouvoir identifier des mécanismes efficaces de transport de moment cinétique au sein de ces objets. Le scénario le plus crédible aujourd'hui est que ce transport est lié à l'existence de turbulence magnétohydrodynamique (MHD), initiée par une instabilité dite "magnétorotationnelle" (MRI), nécessitant la présence d'un champ magnétique. Ce problème soulève la question de l'origine et de l'entretien de ce champ au sein du disque. Un mécanisme de dynamo sous-critique non-linéaire, s'appuyant sur la MRI, pourrait permettre d'expliquer conjointement l'entretien de la turbulence MHD et du champ magnétique dans l'écoulement cisailé képlérien. Des mécanismes similaires basés sur d'autres instabilités MHD pourraient également être à l'œuvre dans les intérieurs stellaires. Les conditions physiques d'excitation de cette dynamo sont cependant mal comprises. Des travaux numériques ont suggéré que celle-ci pourrait ne pas être entretenue à petit nombre de Prandtl magnétique (ratio entre viscosité et diffusivité magnétique), un régime assez commun dans les disques d'accrétion. Le but de cette thèse a été de mieux comprendre les conditions d'entretien de cette dynamo et le rôle joué par les effets dissipatifs dans la transition vers une turbulence MHD auto-entretenu. Pour cela, nous avons étudié en détail la nature de la transition et le rôle particulier des solutions périodiques non-linéaires tridimensionnelles. Nous avons d'abord montré que l'émergence d'activité chaotique associée à cette dynamo était due à la présence de bifurcations globales de tels cycles. Nous avons ensuite tenté d'élucider l'origine physique de la dépendance en Pm de la transition. Grâce à une analyse énergétique des cycles, nous avons mis en évidence qu'une forme de diffusion magnétique "turbulente" rend l'excitation de la dynamo plus difficile à petit Pm . Cet effet très générique pourrait s'opposer à l'activation de la dynamo dans les disques mais aussi limiter l'efficacité du transport de moment cinétique associé à la turbulence MRI à bas Pm .

Mots-clés : disques d'accrétion – dynamos – turbulence MHD – dynamique non-linéaire

Abstract

One of the main challenges of accretion disk theory in astrophysics is to identify efficient angular momentum transport mechanisms in disks. The most popular scenario is that this transport is due to the magnetohydrodynamic (MHD) turbulence triggered by the magnetorotational instability (MRI), which requires the existence of a magnetic field. This raises the question of the origin and sustainment of such a field in disks. A subcritical nonlinear dynamo process, involving the MRI, may be responsible for the joint excitation of MHD turbulence and magnetic fields in Keplerian shear flow. Similar dynamos driven by other MHD instabilities may also be active in stellar interiors. However, the detailed mechanisms underlying the excitation of the MRI dynamo are not well understood. Numerical results suggest that this mechanism may not be sustained at low magnetic Prandtl number (ratio between viscosity and magnetic diffusivity), a common dissipation regime in accretion disks. The purpose of this thesis has been to understand the physical conditions of excitation of this dynamo and the role of dissipative effects on the transition to self-sustained MHD turbulence. For this purpose, we investigated in detail the nature of the transition and the role of tridimensional nonlinear periodic solutions in this problem. First, we showed that the emergence of chaotic dynamo action is primarily associated with global bifurcations involving such cycles. We then attempted to elucidate the physical origin of the Pm dependence of the transition. Using a detailed energy analysis of several dynamo cycles, we found that "turbulent" diffusion makes the excitation of the dynamo increasingly difficult for decreasing Pm . This very generic effect could be an important determinant of MRI dynamo excitation in disks, and may also limit the efficiency of angular momentum transport by MRI turbulence at low Pm .

Keywords: accretion disks – dynamos – MHD turbulence – nonlinear dynamics

Remerciements

Je commencerais par remercier mes deux directeurs de thèse, François Rincon et Carlo Cossu, qui ont été constamment impliqués dans mon projet de thèse et qui ont su m'aiguiller dans la bonne direction, tout en me laissant acquérir une grande autonomie. Je pense qu'ils ont profondément changé ma vision du travail de recherche que je me faisais en sortant d'école d'ingénieur. J'ai notamment développé un sens de la rigueur que je ne possédais pas avant. Je tiens en particulier à remercier François pour sa patience, ses nombreux conseils et son investissement en temps (et en stylos rouges!) pour parfaire la rédaction de ce manuscrit et de mes publications scientifiques. Je tiens également à remercier chaleureusement mes deux rapporteurs de thèse, Sébastien Fromang et Emmanuel Dormy pour les commentaires et les remarques pertinentes qu'ils m'ont adressés au sujet du manuscrit et du travail réalisé. Je remercie également Michel Rieutord pour avoir présidé mon jury de thèse, Thierry Passot et Richard Kerswell pour avoir accepté d'être examinateurs.

Je souhaiterais également adresser mes remerciements aux personnes qui ont collaboré de près ou de loin à mon projet de thèse et aux chercheurs de mon équipe. Tout d'abord, un grand merci à Geoffroy Lesur (IPAG) et Gordon Ogilvie (DAMTP) avec qui j'ai eu plusieurs discussions scientifiques et qui m'ont éclairé sur de nombreux aspects théoriques ou numériques. Je remercie en particulier Gordon pour m'avoir invité à un séminaire au DAMTP à la fin de ma thèse et Geoffroy pour son inestimable contribution numérique (je pense naturellement au code SNOOPY sans lequel je ne serais pas allé très loin). Dans l'équipe Physique du Soleil et des Étoiles (PSE) de l'IRAP, j'ai une pensée pour François Lignières, qui a toujours su me donner de bons conseils et Frédéric Paletou qui a éveillé, ou plutôt réveillé mon goût pour le judo. Je remercie également Katia Ferrière, Sylvie Vauclair, Thierry Roudier pour leur gentillesse et leur enthousiasme quotidiens, qui m'ont permis à certains moments de reprendre confiance en moi. Je n'oublierai pas non plus Clément Baruteau pour ses conseils « Cambridgiens », Laurène Jouve pour son dynamisme et sa bonne humeur, Jérôme Ballot pour son soutien et l'animation des Journal Club durant lesquels j'ai pu parfaire ma culture scientifique.

Je n'oublie pas non plus les nombreuses personnes, chercheurs, professeurs ou ingénieurs qui auront marqué mon esprit durant mes études. Je pense notamment à Nuno Loureiro durant mon stage de Master qui m'a fait découvrir la reconnexion magnétique (sans oublier les spécialités portugaises). Grâce à lui, j'ai eu la chance d'aller visiter le Jet à Culham (près d'Oxford) et rencontrer de grands noms de la fusion nucléaire ou de la physique des plasmas; certaines figures d'Oxford m'auront marqué comme Alex Schekochihin ou Steven Cowley. J'adresse également mes remerciements aux gens de VKS (Von Karman Sodium) qui ont su éveiller ma curiosité pour les expériences de dynamo, et notamment à J.Hérault qui a contribué en partie, durant son stage de Master, à mon projet de thèse. Un grand merci aussi à mes professeurs de Master Recherche et à David Mimoun de l'ISAE/Supaéro pour nous avoir permis de suivre ce Master en parallèle de notre troisième année d'ingénieur. Durant mon stage long de 2^{ème} année à Thalès IS, j'ai eu également la chance de travailler pendant un an avec Sébastien Trilles sur la mise à poste de satellites autour des points de Lagrange. Ce stage m'a permis d'acquérir de nombreuses connaissances sur la théorie des systèmes dynamique, qui ont été très utiles pour mon travail de thèse.

Je vais remonter encore un peu dans le temps et exprimer toute ma reconnaissance à Mme Colin, ex-professeur de Physique en MP au lycée Hoche à Versailles, qui m'a réellement donné goût à la Physique et au monde de la recherche.

Je souhaiterais enfin adresser mes remerciements à tous les doctorants (à l'heure où j'écris, postdoc pour certains) que j'ai cotoyés durant ces trois années. Tout d'abord Vincent Prat, mon collègue de bureau pendant mes deux premières années, sans lequel les mots «LD_LIBRA_RY_PATH» ou «.bashrc» me terrifieraient toujours. Je n'oublierai pas les longues discussions scientifiques, philosophiques ou personnelles que l'on a pu avoir ensemble. Impossible également d'oublier mes deux autres camarades du bureau P16, Simon Nicolas et Michael Pasek (Zik et Bic pour les intimes), sans lesquels les vendredis soir à l'IRAP seraient restés bien moroses. Durant ma première année, j'ai fait également la connaissance d'un certain Nicolas Laporte, qui est devenu par la suite mon « cousin » (si si, les raisons sont très sérieuses, cela vient de la branche des Trémoudier d'Auvergne, enfin c'est plus compliqué que ça...). Il a tenté de me redshifter plusieurs fois mais cela n'a pas marché, au moins il aura réussi à me convertir à l'ASM, à l'aligot et à sa passion des observations. Je n'oublierai jamais les soirées au Pic du Midi et la visite du GTC sur la Palma! J'ai eu également la chance de partager mon bureau avec Delphine Hypolite durant mes deux dernières années. Ce fut un plaisir de travailler ensemble et de s'entraider (mais aussi de s'« entre-spoiler » certaines séries TV). Enfin je tiens à remercier Matthieu Gaurat, pour avoir éveillé mon intérêt pour la pause café (j'ai presque failli me laisser tenter par un café), Jessie Mayor pour son humour, sa gentillesse, Thomas Breton pour avoir tenté de m'initier au côté obscur de la chimie, et enfin Giovanni Mirouh pour son 45^{ème} degré. Je n'oublie pas Benjamin Cambon, que j'ai rencontré à l'école des Houches et avec qui ce fut un plaisir de parler sciences entre deux parties de ping-pong.

Un immense merci à tous mes amis pour leur soutien quotidien : Ramzi Idoughi sans lequel je n'aurais probablement pas été aussi motivé pour commencer ma thèse, Clément, Steven, Romain, Raja, Nathalie, Michela, les doctorants de l'ONERA, et bien d'autres. J'ai une pensée également pour Romain Lobady et Elise Barbier qui m'ont accompagné lors de mes voyages au Vietnam puis en Nouvelle Zélande (2012), et pour Marc Neveu, ex président du Club d'Astronomie de Supaéro, qui m'a initié à l'astronomie amateur. Pour finir, je remercie de tout mon cœur mes parents, mon frère et mes quatre grands-parents, qui m'ont toujours soutenu et qui m'ont permis, en grande partie, de réaliser ce beau projet.

Sommaire

Introduction générale	1
I Problématique scientifique	5
1 Contexte astrophysique	7
1.1 Accrétion et problème du transport de moment cinétique	7
1.1.1 Généralités sur les disques d'accrétion astrophysiques	7
i) Les différents types de disques	7
ii) Structure	9
iii) Évolution et accrétion d'un disque	11
iv) Contraintes observationnelles	13
1.1.2 Problème du transport de moment cinétique	14
i) Problème de la viscosité moléculaire	15
ii) Turbulence et modèle de disque α (Shakura et Sunyaev, 1973)	15
1.1.3 Mécanismes de transport turbulents	16
i) Instabilité sous critique hydrodynamique	17
ii) Instabilité de convection thermique	17
iii) Instabilité barocline	18
iv) Instabilité gravitationnelle	18
v) Instabilité magnétorotationnelle	19
1.1.4 Mécanismes de transport non turbulents	19
i) Ondes globales	19
ii) Vent magnétohydrodynamique	20
1.2 Génération de champ magnétique en astrophysique et dans les disques	21
1.2.1 Théories de la dynamo	21
i) Dynamos en astrophysique	21
ii) Dynamo cinématique et théorie de champ moyen	22
iii) Dynamos non-linéaires s'appuyant sur des instabilités MHD	23
1.2.2 Origine du champ magnétique dans les disques	24
i) Champ résiduel ou source externe	24
ii) Effet dynamo au sein du disque	25
2 Instabilité, turbulence et dynamo magnétorotationnelles	27
2.1 Magnétohydrodynamique (MHD) dans les disques d'accrétion	27
2.1.1 Approximation de la MHD	27
2.1.2 Équations de Maxwell	28
2.1.3 Loi d'Ohm et MHD non-idéale dans les disques	29

2.1.4	Equations de la MHD résistive et incompressible dans un écoulement en rotation	31
2.1.5	Modèle de la couche de cisaillement et cas képlérien	32
2.1.6	Transport de moment cinétique	33
2.2	Modèle numérique de la "shearing box"	34
2.3	Instabilité magnérorotationnelle linéaire	34
2.3.1	Principe de l'instabilité	35
2.3.2	Propriétés de l'instabilité dans un champ magnétique uniforme et constant	36
	i) Linéarisation des équations	36
	ii) Perturbations axisymétriques	36
	iii) Cas d'un champ toroidal : perturbations non-axisymétriques . .	38
2.3.3	Effet de la dissipation sur l'instabilité linéaire	39
2.4	Turbulence magnérorotationnelle en champ magnétique imposé à flux net	40
2.4.1	Évolution non-linéaire et transition vers la turbulence	41
2.4.2	Effet de la dissipation et implications pour la physique des disques.	42
2.5	Turbulence et dynamo magnérorotationnelles	43
2.5.1	Simulations de l'instabilité MRI en flux magnétique nul	44
2.5.2	Influence du Prandtl magnétique sur la transition dynamo	45
2.6	Conclusions	47
3	La dynamo magnérorotationnelle, une transition fluide sous-critique	49
3.1	Transition dans les écoulements hydrodynamiques cisillés non-tournants	49
3.1.1	Introduction au problème	49
3.1.2	Caractéristiques de la frontière laminaire/turbulent	51
3.1.3	Processus d'auto-entretien (PAE)	53
3.1.4	Structures invariantes	55
3.1.5	Structures invariantes et répulseur chaotique	57
	i) Le "edge"	57
	ii) Rôle des structures invariantes et des cycles dans la transition .	58
3.2	Lien avec la transition dans le problème de la dynamo magnérorotationnelle . . .	60
3.2.1	Une frontière de transition de géométrie fractale?	60
3.2.2	La dynamo MRI : un processus auto-entretenu non-linéaire	61
	i) Mécanisme d'auto-entretien du champ axisymétrique et des per-	
	turbations	61
	ii) Analogie avec le problème hydrodynamique	62
3.2.3	Recherche de structures cohérentes invariantes	63
	i) Les premières structures découvertes	63
	ii) Cycle limite de Herault et al. (2011)	63
	Objectifs détaillés du travail de thèse	69
II	Résultats	71
4	Exploration numérique de la transition dynamo	73
4.1	Modèle et méthodes numériques	73

4.2	Cartographie de la transition	74
4.2.1	Procédure de cartographie	74
4.2.2	Etude de la frontière en Pm	75
4.2.3	Etude de la structure de la frontière de transition dans l'espace des phases	78
4.2.4	Ilots de turbulence et relation avec les solutions cycliques	81
4.2.5	Effet du nombre de Reynolds et du rapport d'aspect	84
4.3	Nature du "edge state" et cycles identifiés	85
4.3.1	Méthodes d'identification	85
4.3.2	Le cycle de Herault et al. (2011) et sa "upper branch"	86
4.3.3	Autres cycles de type nœud-col de période fondamentale T_0 en boîte longue	87
	i) Dans l'espace des symétries \mathcal{A}_1	87
	ii) Sans les symétries	91
4.3.4	Cycles de périodes différentes en boîte longue	92
4.3.5	Cycles dans des boîtes à plus petit rapport d'aspect	93
4.4	Conclusions	94
5	Lien entre transition et cycles de dynamo	97
5.1	Cadre de l'étude	97
5.2	Bifurcation locales de cycles de dynamo MRI	98
5.2.1	Diagramme de bifurcations de SN_1	98
5.2.2	Diagramme de bifurcations de SN_2	100
5.2.3	Mise en défaut d'une route purement sous-harmonique vers le chaos	101
5.3	Bifurcations globales de cycles	102
5.3.1	Technique de visualisation des variétés	102
5.3.2	Treillis homoclines et hétéroclines identifiés	103
	i) Treillis impliquant LB_1	103
	ii) Treillis homoclines de UB_1	103
	iii) Autres treillis hétéroclines	104
5.3.3	Calcul d'orbites homoclines et hétéroclines	104
5.4	Conséquence des bifurcations globales sur la dynamique	107
5.4.1	Dynamique de type "fer à cheval"	107
5.4.2	Émergence du chaos et lien avec les cartes de transition	110
5.5	Conclusions	112
6	Recherche de l'origine physique de la dépendance en Pm à partir de cycles	115
6.1	Etude paramétrique des cycles en boîte longue	115
6.1.1	Continuation en Re et Rm	115
6.1.2	Frontière d'existence des cycles	117
6.2	Étude énergétique et rôle des processus dissipatifs	119
6.2.1	Bilan énergétique des cycles et rôle de la diffusion turbulente	119
6.2.2	Extinction de la dynamo et dépendance en Rm	123
6.2.3	Conclusion intermédiaire	126
6.3	Autres mécanismes physiques étudiés en boîte longue	126
6.3.1	Dynamique inertielle des ondes non-axisymétriques	126
	i) Oscillations de la force électromotrice à grand Re	127
	ii) Origine physique des oscillations d'EMF	128

iii)	Dépendance des oscillations à la dissipation	131
iv)	Conclusions	132
6.3.2	Instabilité des cycles	134
i)	Différentes sources d'instabilités secondaires ou "parasites" . . .	134
ii)	Etude d'un mode propre instable du cycle SN_1	135
iii)	Dépendance à la dissipation	138
iv)	Conclusions	138
6.4	Extension de l'étude à des rapports d'aspect plus petits	138
6.4.1	Continuations et frontières d'existence	139
i)	Continuations de SN_1 à plus petits L_y	139
ii)	Continuations de SN_{2m} dans la boîte de dimensions $(0.5, 2, 1)$.	141
6.4.2	Etude énergétique des simulations à plus petits rapports d'aspect	141
i)	Bilan sur le champ $\bar{\mathbf{B}}_0$	143
ii)	Multiplicité des ondes	143
iii)	Nombre de modes actifs	144
iv)	Bilan global d'énergie de SN_{2m}	145
v)	Diffusion turbulente dans des simulations plus génériques	147
6.5	Conclusions	148
Bibliographie		153
Annexes		169
A Méthodes numériques		171
A.1	Techniques de DNS : code SNOOPY et shearing box	171
A.1.1	Shear-périodicité	171
A.1.2	Représentation spectrale des solutions	171
A.1.3	Procédure de remapping	172
A.1.4	Intégration en temps	173
A.1.5	Symétries	174
A.2	Solveur de Newton-Krylov - PEANUTS	174
A.2.1	Comptage de modes	175
A.2.2	Reduction de variables	175
A.2.3	Algorithme de Newton, contraintes de phases et shear-périodicité	175
A.2.4	Exemple de convergence d'un cycle	177
A.3	Méthode numérique pour le calcul des bifurcations globales	180
A.3.1	Visualisation de variétés instables	180
A.3.2	Calcul et continuation des orbites homoclines	181
i)	Calcul des orbites homoclines	181
ii)	Continuation des orbites homoclines en fonction d'un paramètre	182
B Brève introduction à la théorie des systèmes dynamiques		185
B.1	Formalisme	185
B.2	Analyse de stabilité et bifurcations locales	186
B.3	Quelques routes vers le chaos	187

B.3.1	Cascade sous harmonique (doublements de période)	187
B.3.2	Intermittence	188
B.3.3	Bifurcations globales de type crises	188
B.3.4	Bifurcations globales de type "homoclines" ou "hétéroclines"	189
C	Modèle quasi-linéaire de la dynamique non-axisymétrique dans la dynamo magnétorotationnelle	193
C.1	Equations du modèle réduit quasilinéaire	193
C.2	Exemple de simulation réalisée avec ce modèle	195
C.3	Évolution des perturbations non-axisymétriques pour $\omega_A \ll \kappa$	195
C.4	Etude numérique des oscillations d'EMF	198
D	Statistiques turbulentes, transport et cycles	201
D.1	Dualité entre dynamique des cycles et propriétés globales de l'écoulement	201
D.1.1	Cadre de l'étude et définitions	202
i)	Définition d'une observable	202
ii)	Définition des moyennes	202
iii)	Opérateur d'évolution	203
D.1.2	Lien entre la moyenne globale d'une observable et l'opérateur d'évolution	203
D.1.3	Formule trace	204
D.1.4	Hypothèse d'hyperbolicité et formule asymptotique	205
D.2	Fonction zeta et calcul de la plus grande valeur propre de l'opérateur \mathcal{A}	205
D.2.1	Calcul de la moyenne de l'observable	207
	Publications	209

Introduction générale

Avec la détection toujours plus nombreuses d'exoplanètes, notre système Solaire apparaît aujourd'hui comme le fruit d'un processus astrophysique commun dont la compréhension a largement évolué depuis les premières ébauches de Kant (1755) et de Laplace (1796). Bien qu'il nous échappe encore partiellement, il ne fait en effet plus aucun doute que la formation des systèmes stellaires résulte de l'accrétion d'un disque de gaz et de poussières présent au moment de la naissance de l'étoile centrale et pouvant abriter de jeunes planètes. Les observations de ces dernières décennies ont révélé que ces disques possédaient une dynamique très riche allant de la chute de matière sur l'étoile centrale, à de puissants jets magnétiques expulsant la matière très loin du disque. L'intérêt porté à ces phénomènes s'étend à d'autres objets astrophysiques plus exotiques comme les disques de binaires, ou l'accrétion autour de trous noirs galactiques, qui comptent parmi les réservoirs énergétiques les plus importants de l'Univers.

La compréhension de la dynamique des disques d'accrétion est essentielle car elle nous renseigne sur des problèmes astrophysiques de premier plan tels que l'évolution des systèmes stellaires, planétaires, binaires ou des galaxies. Elle permet en parallèle de faire progresser nos connaissances de processus physiques fondamentaux comme la turbulence en mécanique des fluides, la dynamique du champ magnétique, et les processus thermiques, radiatifs ou physico-chimiques rencontrés dans l'Univers. Aujourd'hui de nombreuses questions fondamentales relatives à la dynamique des disques se posent encore aux astrophysiciens. Parmi celles-ci, nous en formulerons deux qui ont été au cœur du travail de cette thèse :

- Tout d'abord, comment les processus d'accrétion opèrent-ils à l'échelle locale et globale ? Comment en quelques millions ou dizaines de millions d'années, la quasi-totalité de la matière des disques est-elle accrétée ?
- Quelle est l'origine du champ magnétique dans les disques, donnant lieu aux phénomènes puissants observés, comme les jets ou l'accrétion ? Comment se maintient-il tout le long de la vie du disque ?

En réalité ces questions sont très liées. Dans les années 1990, est en effet apparue l'idée que l'accrétion dans les disques serait liée à une instabilité dite "instabilité magnétorotationnelle" (MRI) (Balbus et Hawley, 1991) reposant sur l'existence d'un champ magnétique. Celle-ci permettrait le développement de turbulence magnétohydrodynamique (MHD) au sein des disques, et dont la propriété principale serait d'évacuer efficacement le moment cinétique du disque (Balbus et Hawley, 1998), permettant ainsi la chute de matière sur l'astre central. L'éjection de matière observée dans les jets serait également due à la présence d'un champ magnétique.

Comprendre l'origine de ce champ est par conséquent crucial pour répondre à ces différentes problématiques. Notons que ces processus et les questions qu'ils soulèvent sont également au cœur des modèles de systèmes planétaires ; en effet, la combinaison du champ magnétique et du phénomène d'accrétion à l'échelle globale des disques protoplanétaires pourrait affecter profondément la formation et l'évolution des jeunes planètes.

Cette thèse s'inscrit dans ce contexte et vise plus particulièrement à comprendre le lien étroit entre l'accrétion, entretenue par la turbulence MHD associée à la MRI, et la génération de champ magnétique dans les disques. Dans la continuité des travaux de Balbus et Hawley (1991), il est apparu que cette instabilité, combinée au cisaillement, pourrait en fait permettre de générer simultanément du champ magnétique et de la turbulence MHD par un effet non-linéaire appelé "dynamo magnétorotationnelle". Ce processus, plutôt original, pourrait en réalité faire partie d'une classe plus vaste de dynamos non-linéaires sous-critiques à l'œuvre dans d'autres environnements astrophysiques (étoiles, galaxies), si bien que son étude est pertinente bien au-delà du contexte des disques d'accrétion. Ce type de dynamos pourrait notamment être une alternative aux mécanismes de dynamos de champ moyen de type $\alpha\Omega$, invoqués généralement pour expliquer la génération de champ à grande échelle dans les écoulements turbulents et cisailés en astrophysique. Cependant, la physique de cette dynamo MRI est loin d'être comprise. Les simulations numériques de ces dernières années ont notamment montré que son excitation, et la turbulence qu'elle entretient, sont très dépendants du régime de dissipation au sein du fluide. Lorsque la viscosité est faible devant la diffusivité magnétique, l'excitation de la dynamo MRI s'avère très difficile voire impossible (Fromang et al., 2007). Ce résultat, plutôt contre-intuitif, suggère qu'une transition vers un régime turbulent n'est possible que pour des valeurs de Prandtl magnétique (Pm), ratio entre viscosité et diffusivité magnétique, supérieures à 1. Cela pose un problème astrophysique important dans la mesure où $Pm \ll 1$ dans la plupart des disques d'accrétion, au moins dans certaines régions. Ce problème est en réalité plus général, puisque les simulations de MRI montrent également une dépendance forte du transport turbulent de moment cinétique en Pm .

Notre objectif au cours de cette thèse a été de mieux comprendre les mécanismes non-linéaires d'excitation de la dynamo magnétorotationnelle et en particulier les raisons, aujourd'hui indéterminées, de la transition observée numériquement autour de $Pm = 1$. Pour aborder cette problématique, nous nous sommes inspirés des travaux sur la transition hydrodynamique à la turbulence dans les écoulements cisailés non-tournants, comme ceux de Couette plan ou Poiseuille, qui partage de nombreuses caractéristiques avec celle de la dynamo MRI. Les recherches dans ce domaine ont montré que l'excitation de la turbulence repose sur un processus auto-entretenu non-linéaire, très différent des mécanismes à l'œuvre dans les problèmes de transition super-critiques (comme celui de la convection thermique). Les briques élémentaires de ce processus transitionnel sont des structures cohérentes à grande échelle présentant une certaine régularité dans le temps (point fixes, cycles, ondes progressives). Ces solutions invariantes des équations de Navier-Stokes ont été abondamment étudiées expérimentalement, numériquement et théoriquement. Nous nous sommes alors appuyés sur les travaux théoriques récents (Rincon et al., 2007b) pointant l'existence d'un processus auto-entretenu similaire dans le problème de la dynamo MRI et sur la découverte de solutions non-linéaires périodiques de dynamo (Herault et al., 2011), afin de comprendre les conditions d'excitation de cette dynamo et sa dépendance au régime de dissipation.

Ce travail, basé sur une approche fortement pluridisciplinaire, a mêlé des simulations numériques locales de MHD en écoulement képlérien dans la "shearing box" ainsi que le développement et l'utilisation d'outils d'analyse non-linéaire, empruntés à la théorie du chaos et des systèmes dynamiques. Ces derniers ont permis en particulier d'étudier la dynamique très riche des cycles de dynamo MRI. Deux résultats principaux ont été obtenus :

- La transition vers un état chaotique "pré-turbulent" de dynamo MRI peut être expliquée par des bifurcations globales de cycles de dynamo.
- L'excitation de la dynamo à $Pm < 1$ est rendue difficile par un effet de diffusion magnétique turbulente.

Tout au long de ce travail, nous nous sommes efforcés de vérifier le caractère générique des résultats, en comparant différents rapports d'aspect des simulations, différentes conditions initiales, et différents cycles identifiés.

L'exposé de cette thèse est divisé en deux grandes parties : la première est consacrée à la présentation du contexte astrophysique général du travail (chapitre 1) et à celle du problème de l'excitation de la turbulence MHD et de la dynamo MRI dans les disques (chapitre 2). Un chapitre entier est ensuite dédié à la présentation de la nature particulière du problème de la transition à la dynamo MRI (chapitre 3), dans lequel nous exposons notamment ses relations étroites avec celui de la transition à la turbulence dans les écoulements hydrodynamiques cisailés non-tournants. Ce chapitre permet de bien comprendre les motivations qui nous ont poussé à regarder ce problème de la dynamo MRI sous un angle différent de celui couramment utilisé dans la communauté astrophysique. La deuxième partie est centrée sur les résultats obtenus durant la thèse. Dans un premier temps (chapitre 4), nous présentons une étude phénoménologique et une exploration numérique détaillées de la transition, visant à mettre en évidence ses caractéristiques fondamentales et à identifier de nouvelles solutions périodiques non-linéaires en régime transitionnel. Puis, dans le chapitre 5, nous exposons les résultats d'une analyse beaucoup plus technique visant à éclairer les mécanismes de bifurcations et le rôle des cycles de dynamo MRI dans la transition. Finalement, nous présentons au chapitre 6 une étude paramétrique de ces cycles en fonction du régime de dissipation, visant à apporter un éclairage nouveau sur l'origine physique de la difficulté à exciter une telle dynamo dans le régime de bas Pm . Les principales conclusions du travail sont finalement résumées et discutées, puis mises en perspective à la suite de ce dernier chapitre de résultats.

I

Problématique scientifique

Contexte astrophysique

1.1 Accrétion et problème du transport de moment cinétique

1.1.1 Généralités sur les disques d'accrétion astrophysiques

Les disques d'accrétion sont des structures astrophysiques formées d'un mélange de gaz (ionisé ou non) et de poussières en orbite autour d'un objet massif central, qui peut être une jeune étoile, une proto-étoile, une naine blanche, une étoile à neutrons ou éventuellement un trou noir. Au sein du disque, les particules fluides sont approximativement en équilibre entre la gravité et la force centrifuge induite par la rotation. En réalité la physique des disques est bien plus complexe que ce simple équilibre puisque le disque accrète : la matière ne reste pas éternellement en orbite autour de l'objet central mais une large partie finit par tomber en "spirale" au centre. Le processus d'accrétion est un mécanisme très puissant qui convertit l'énergie gravitationnelle en énergie thermique (ou rayonnante).

i) Les différents types de disques

Les disques d'accrétion occupent une place importante dans la physique de l'évolution de l'Univers et sont impliqués dans de nombreux problèmes astrophysiques. On les sépare généralement en trois catégories :

- les disques proto-stellaires formés autour d'une étoile jeune dont le stade d'évolution ultime est le disque protoplanétaire, berceau de nouvelles planètes.
- les disques de système binaire, formés par le transfert de masse depuis une étoile vers un compagnon plus massif (qui peut être un objet compact)
- les disques d'AGN (Active Galactic Nuclei) associés aux trous noirs super massifs de galaxies.

Les disques proto-stellaires sont associés à la formation d'une jeune étoile. Lors de sa contraction gravitationnelle, le nuage de gaz constituant la nébuleuse primordiale peut voir sa taille se réduire d'un facteur χ de l'ordre de 10^3 à 10^6 si bien que par conservation du moment cinétique globale, une faible rotation initiale du système peut être amplifiée par un facteur χ^2 . Au cours de la formation stellaire, le nuage peut alors prendre la forme d'un disque sous l'effet de la rotation (Laplace, 1796). Ce mécanisme a notamment été imaginé par Lynden-Bell et Pringle (1974) pour expliquer les propriétés des T-Tauri, une classe de jeunes étoiles peu massives. Plusieurs simulations numériques ont confirmé qu'un disque pouvait être formé durant la phase d'effondrement gravitationnel (Terebey et al., 1984). Par ailleurs, les observations en infra-rouge ont permis de



FIGURE 1.1 – Vue d’artiste d’un disque protoplanétaire



FIGURE 1.2 – A gauche : vue d’artiste d’un disque de binaire X autour d’un trou noir. A droite : image composite de Centaurus A contenant un AGN. L’image montre les jets et les lobes qui émanent du centre de la galaxie (Credits : ESO).

détecter l’existence de bandes sombres masquant la visibilité de certaines proto-étoiles, aujourd’hui interprétées comme les cocons de poussières d’un disque accrétant.

Les disques de binaires résultent de l’accrétion de la matière d’une étoile (dite secondaire) par un objet compagnon massif (dit objet primaire). On distingue en particulier les binaires X (formées d’un couple objet compact/étoile) et les variables cataclysmiques (formées de deux étoiles, la primaire étant souvent une naine blanche). Ces systèmes sont en général très variables, avec de courtes périodes. Pour qu’un transfert de masse soit possible, l’intersection des lobes de Roche des deux objets doit être non-nulle, autrement dit la matière de l’étoile secondaire doit être liée gravitationnellement à l’objet primaire. Les disques de binaires sont indirectement détectés grâce à l’observation Doppler dans l’émission de Balmer et à l’émission de rayons X, signatures de l’accrétion (Robinson, 1976). Dans certains cas, l’objet secondaire éclipse le disque en formation, rendant possible l’analyse des propriétés locales de ce disque (Young et Schneider, 1981; Lin et Papaloizou, 1996).

Enfin les AGN sont l'une des sources de radiations les plus lumineuses de l'Univers, dépassant parfois la luminosité d'Eddington ¹. Dans certains cas, le trou noir central peut atteindre une masse de 10^{10} masses solaires avec une luminosité qui dépasse les 10^{41} erg/s (Pellegrini et al., 2003; Narayan et Quataert, 2005). Ils forment des disques très chauds, entièrement ionisés et très conducteurs. Le champ magnétique joue un rôle important dans leur dynamique. Jaffe et al. (1993) ont été les premiers à observer avec le télescope Hubble une structure semblable à un disque d'accrétion entourant le cœur de la galaxie NGC 4261. Le spectre électromagnétique de ces objets est très étalé, du fait de la diversité de phénomènes physiques entrant en jeu dans leur évolution (Peterson, 1997). L'accrétion du disque par le trou noir se traduit par une émission dans l'ultraviolet et la lumière visible. Une couronne de matériaux chauds se forme généralement au dessus du disque et peut être la source d'un rayonnement X et gamma, provoqué par la diffusion des électrons sur les photons (diffusion Compton inverse). Les poussières et le gaz froid se trouvant à la périphérie du disque absorbent le rayonnement du centre et le réémettent sous forme infrarouge.

ii) Structure

De nombreux disques d'accrétion observés dans l'Univers sont aplatis et possèdent une géométrie cylindrique. Dans les systèmes tournants, cette forme est engendrée par la combinaison de la force gravitationnelle (dirigée dans la direction de l'objet central) et de la force centrifuge (orthogonale à l'axe de rotation du gaz). Dans le cas des disques d'étoiles jeunes (objets YSO de classe I à II), cette forme apparait quelques centaines de milliers d'années après la phase d'effondrement gravitationnel de la proto-étoile (Hartmann et al., 1998; Alecian, 2013).

L'état d'équilibre du gaz orbitant autour de l'objet central est obtenu grâce aux solutions stationnaires de l'équation de Navier Stokes (pour la vitesse) et de Poisson (pour le potentiel gravitationnel). L'hypothèse qui est généralement formulée est que les trajectoires des particules fluides sont circulaires et que la masse du disque M_{acc} est très faible devant la masse M_* de l'objet central (typiquement $M_{acc} < 0.1M_*$) de telle sorte que l'on puisse négliger le potentiel gravitationnel propre du disque (Armitage, 2010). Les disques que nous étudions sont supposés minces : leur épaisseur caractéristique H est très petite devant leur rayon R . Cela suppose que les transferts radiatifs vers l'extérieur du disque sont suffisamment efficaces pour refroidir rapidement le gaz. Le gradient de pression est alors faible devant la gravité et la force centrifuge, qui combinées, ont tendance à aplatir le disque. Notons que certains disques, épais et chauds comme les disques "RIAF" (Radiatively Inefficient Accretion Flow) sont observés dans l'Univers (Ichimaru, 1977; Rees et al., 1982; Narayan et Yi, 1994). Ces derniers ne sont pas à l'équilibre car la chaleur produite par l'accrétion n'est pas efficacement évacuée sous forme de rayonnement. Ils prennent la forme d'un tore autour de l'objet central et sont généralement associés aux disques gravitant près des trous noirs. Ce type de disques ne sera pas traité dans cette thèse.

Nous commencerons par décrire la structure verticale des disques minces. La composante verticale de la force gravitationnelle, exercée par l'astre attracteur de masse M_* , s'appliquant à un élément fluide du disque de masse δm , situé à un rayon r et une hauteur z par rapport au

¹Luminosité limite théorique au delà duquel la pression de radiation d'un objet céleste dépasse la gravité à sa surface. Au delà de cette limite, le corps peut alors perdre une grande partie de sa masse.

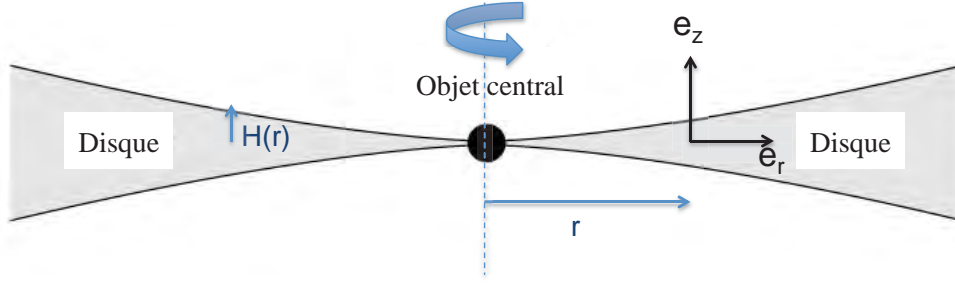


FIGURE 1.3 – Coupe transversale d'un disque mince dont la hauteur $h(r)$ caractéristique augmente avec le rayon.

plan médian du disque, s'écrit :

$$\mathbf{f}_g = -\frac{GM_\star \delta m z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z, \quad (1.1)$$

où \mathbf{e}_z est le vecteur unitaire pointant dans la direction verticale (orthogonale au plan du disque, voir Fig. 1.3). Cette force équilibre la force de pression qui s'exprime :

$$\mathbf{f}_p = -\frac{\delta m}{\rho} \frac{dP}{dz} \mathbf{e}_z, \quad (1.2)$$

où ρ est la densité moyenne du gaz au rayon r et à l'altitude z . Pour simplifier l'analyse, nous supposons que le gaz est isotherme dans la direction verticale. Une des conditions (non suffisante) pour faire cette approximation est que le disque est irradié de la même façon par l'étoile centrale sur ses deux faces. Les simulations globales de disques, incluant les transferts radiatifs, tendent à montrer que le profil vertical de température est isotherme (Flock et al., 2013). En faisant également l'hypothèse du gaz parfait, la pression du gaz s'exprime $P = \rho c_s^2$, avec c_s la vitesse du son, et l'équilibre vertical du disque donne :

$$c_s^2 \frac{d\rho}{dz} = -\frac{GM_\star z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \rho = -\frac{GM_\star z}{r^3} \rho + O(z^2/r^2). \quad (1.3)$$

La solution de cette équation nous donne le profil de densité du disque en fonction de r et de z :

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{GM_\star z^2}{2r^3 c_s^2}\right), \quad (1.4)$$

où ρ_0 est la densité du gaz dans le plan du disque, fonction de r . A partir de cette expression de la densité, on peut définir une hauteur caractéristique

$$H(r) = \sqrt{r^3 c_s^2 / GM_\star} \quad (1.5)$$

de variation de la densité du disque. Cette hauteur, fonction de r , peut être considérée comme une limite verticale du disque. En supposant que la température, directement proportionnelle à c_s^2 , est en r^β avec $\beta > -1$, alors le rapport H/r est une fonction croissante du rayon, donnant au disque une forme évasée en forme de bol (Fig. 1.3). Cette forme est très importante pour l'équilibre radiatif du disque car dans le cas d'un profil évasé, les rayons de la source centrale seront interceptés par la totalité du disque. Les modèles radiatifs de disques prévoient des

températures de surface avec un β pouvant évoluer entre $-3/4$ et $-1/2$ selon la précision du modèle (Frank et al., 2002), indiquant donc que les disques sont généralement évasés.

On s'intéresse désormais à l'équilibre radial du disque dans le plan médian ($z = 0$). La force de gravité s'exerçant sur une particule fluide de masse δm et située à un rayon r s'écrit : $\mathbf{f}_g = -GM_\star \delta m / r^2 \mathbf{e}_r$ où \mathbf{e}_r est le vecteur unitaire dans la direction radiale. Dans le référentiel tournant, la particule subit une force centrifuge égale à $\mathbf{f}_c = \delta m r \Omega^2(r) \mathbf{e}_r$ où $\Omega(r)$ est la vitesse angulaire à laquelle la particule tourne autour de l'objet central. A ces deux forces s'ajoutent également la force de pression radiale $\mathbf{f}_p = -\frac{\delta m}{\rho} \frac{dP}{dr} \mathbf{e}_r$.

En supposant le gradient de pression de l'ordre de $\rho c_s^2 / r$, l'équilibre entre ces trois forces permet de calculer le profil de rotation du disque :

$$\Omega^2(r) \simeq \frac{GM_\star}{r^3} \left(1 - \frac{H(r)}{r} \right). \quad (1.6)$$

Si $r \gg H(r)$ (disque mince), hypothèse que nous retiendrons dans le cadre de cette thèse, le profil de rotation peut être considéré comme képlérien avec

$$\Omega(r) = \sqrt{GM_\star / r^3}. \quad (1.7)$$

On notera alors que $H(r) = c_s / \Omega(r)$. La correction due à la pression est négligeable pour la dynamique du gaz mais elle peut être très importante pour le mouvement des poussières, qui vont aller légèrement plus vite que le gaz et donc ressentir une force aérodynamique de traînée (Armitage, 2010).

iii) Évolution et accrétion d'un disque

Les disques d'accrétion sont des structures dynamiques à grandes comme à petite échelle. Les phénomènes physiques qui s'y produisent sont généralement violents et ont des conséquences importantes sur leur stabilité. Les observations de disques proto-stellaires de ces 50 dernières années s'appuient en particulier sur les excès infrarouges (Mendoza V., 1966) qui permettent de mesurer la quantité de poussières au sein des disques et les émissions UV ou H α dont les largeurs de bande mesurées indiquent la signature de l'accrétion du gaz sur l'objet central. Autrement dit la matière qui s'y trouve finit par tomber inéluctablement au centre. Des observations complémentaires dans les amas de jeunes étoiles ont permis de montrer que les disques d'accrétion autour de ces étoiles ont une durée de vie de l'ordre de 3 à 10 millions d'années, très faible en comparaison avec l'âge de l'astre central (Strom et al., 1989; Haisch et al., 2001; Armitage, 2010). Par ailleurs les émissions X observées dans les étoiles binaires (comme Sco X-1) sont interprétées comme l'accrétion d'une étoile sur une autre (Shklovsky, 1967). La chute de matière sur le corps central est un processus dissipatif qui libère une très grande quantité d'énergie par échauffement, expulsée ensuite du disque par rayonnement (Zel'dovich, 1964). Le théorème du Viriel permet de relier simplement la luminosité du disque et son taux d'accrétion \dot{M} moyen :

$$L = \frac{G\dot{M}M_\star}{2R}, \quad (1.8)$$

où R est le rayon du disque et \dot{M} est définie formellement comme la masse accrétée par unité de temps et moyennée sur le disque.

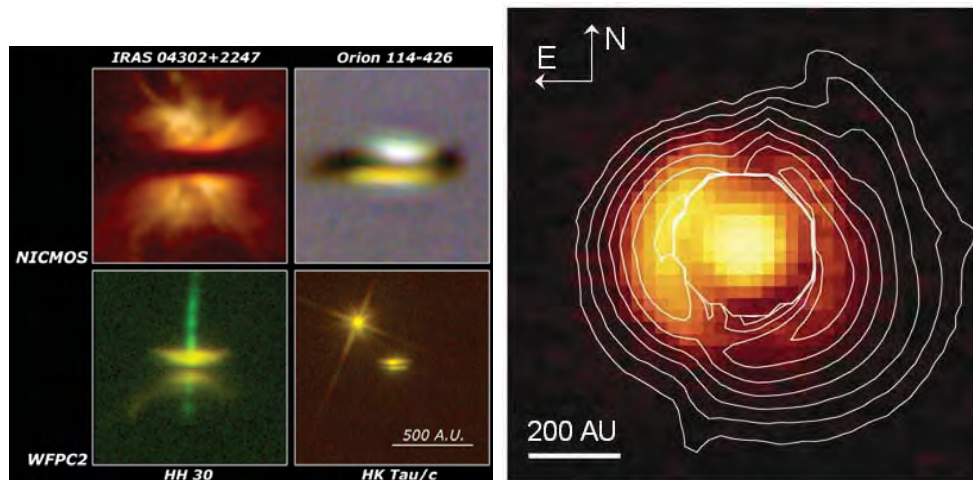


FIGURE 1.4 – A gauche : images de disques proto-planétaires observés en infrarouge par le télescope Hubble (Credits : NASA). Les disques d’accrétion forment des bandes sombres de poussières autour de l’étoile centrale et sont parfois accompagnés de jets de matière. A droite : observation COMICS du disque protoplanétaire HD142527 en $24.5 \mu\text{m}$ avec isocontours de la luminance infrarouge (Fukagawa et al., 2006).

L’accrétion régit dans l’évolution des disques. Depuis plusieurs décennies, d’importants moyens de recherche, tant d’un point de vue théorique qu’observationnel, sont employés pour comprendre les mécanismes physiques à l’origine de ce phénomène. La première explication invoquée pour expliquer le transport radial de matière fut la friction entre les couches du disque, rendue possible par la rotation différentielle (Lynden-Bell et Pringle, 1974). Cependant, la seule viscosité moléculaire du fluide n’est pas suffisante pour expliquer les transferts observés, alimentant le débat sur l’origine de cette friction. Les équations globales d’évolution du disque, incluant l’effet d’une friction additionnelle dont l’origine physique sera discutée en section 1.1.2 et 1.1.3, permettent de rendre compte d’un transfert de matière vers le centre et de la redistribution du moment cinétique. L’efficacité du transport (ou de la friction associée) est caractérisé par un coefficient α variant entre 0 et 1, initialement introduit par Shakura et Sunyaev (1973) (cf paragraphe 1.1.2 ii).

Les disques d’accrétion peuvent également être la source de jets très puissants de matière. Dans les disques protostellaires, les jets observés peuvent avoir des vitesses de 100 km/s et une taille typique de l’ordre du parsec. Dans les disques de binaires, comme les microquasars, des jets collimatés par le champ magnétique ont également été détectés (Livio, 1999). Les jets que l’on trouve dans les AGN sont beaucoup plus intenses et peuvent avoisiner la vitesse de la lumière sur des distances de plusieurs millions de parsecs (Uchiyama et al., 2006). Ces jets sont la plupart du temps orientés perpendiculairement au disque et sont issus du centre chaud. Des observations ont suggéré que jets et accrétion puissent être intimement liés et notamment que le taux d’accrétion soit directement relié à l’intensité des jets observés (Cabrit, 2002). De même, des simulations numériques semblent indiquer que les jets participent activement au phénomène d’accrétion et qu’ils n’en sont pas la simple conséquence (voir paragraphe 1.1.4).

L’accrétion peut également être hétérogène et sporadique, notamment dans les disques de

binaires où la luminosité observée varie fortement, par "bouffées". De nombreux modèles sont à l'étude pour tenter d'expliquer ces variations (Cannizzo, 1993; Latter et Balbus, 2012). Enfin, les observations récentes en imagerie directe montrent que la structure des disques protoplanétaires peut être fortement impactée lors de leur évolution. Des bras spiraux ou des grandes structures en forme de bananes (voir Fig. 1.4) sont produites au terme d'évènements violents, comme la rencontre avec une autre étoile, ou l'action d'instabilités gravitationnelles fragmentant le disque et conduisant potentiellement à la formation de planètes.

iv) Contraintes observationnelles

Les observations, grâce à la photométrie, à la spectroscopie ou l'imagerie directe, ont permis de mieux contraindre la physique et la structure des disques d'accrétion. La puissance des télescopes terrestres et spatiaux (comme Spitzer) a permis d'accroître significativement la sensibilité en longueur d'onde dans les domaines infrarouges proche et moyen. Bientôt le réseau de télescope ALMA effectuera des observations en interférométrie dans le domaine millimétrique pour mieux sonder l'intérieur des disques protoplanétaires et les zones externes.

Les premières observations de disques, réalisées de façon indirecte, en mesurant l'excès infrarouge au sein de la matière circum-stellaire (Mendoza, 1968) ont permis d'identifier les gammes de température de la matière autour des étoiles de type T-Tauri, de l'ordre de 100 à quelques milliers de K (Hartmann et al., 1998). Weintraub et al. (1989) et Kenyon et Hartmann (1989) ont montré grâce à des observations à haute résolution spectrale et en analysant l'élargissement Doppler de certaines raies, que la matière était en rotation képlérienne autour des T Tauri. La mesure de la luminosité d'accrétion et de la température maximale du disque permet de contraindre le rayon du disque observé et son produit $M\dot{M}$. La masse de l'objet central peut être évaluée grâce à des mesures de vitesse rotationnelle, ce qui permet de remonter au taux d'accrétion (Hartmann (2009), p 200-201).

Des contraintes sur les mécanismes d'accrétion ont été également apportées par des données observationnelles et par la théorie. L'efficacité α du transport (voir définition en section 1.1.2) associé à l'accrétion ne peut pas être déduite directement des spectres et les observateurs ont alors recours à des méthodes indirectes reposant sur la variabilité des objets ou sur des principes statistiques (King et al., 2007). Dans le cas des binaires cataclysmiques ou des AGN, une des méthodes est de mesurer le temps caractéristique des phénomènes d'éruption ("outburst") grâce à l'analyse des émissions ultraviolettes ou des rayons X. Ces temps caractéristiques peuvent ensuite être reliés physiquement à l'efficacité du transport. Dans le cas des disques circum-stellaires, une méthode proposée par Hartmann et al. (1998) est d'évaluer l'âge moyen des disques en mesurant leurs occurrences autour d'étoiles d'âges différents. Cette valeur de l'âge moyen permet ensuite de contraindre les modèles de disque.

Les processus magnétiques pouvant être très importants dans l'évolution des disques (jets, vents MHD, instabilités), la mesure de leur champ magnétique donne de précieux renseignements sur la nature de ces processus. Les observations de champ magnétique sont cependant très difficiles à réaliser et donc peu nombreuses. De grandes incertitudes sont encore présentes sur leur intensité, leur structure et leur origine. Ces champs peuvent être notamment mesurés à l'aide d'un spectro-polarimètre, instrument composé d'un spectrographe et d'un polarimètre (l'un des instrument de ce type est NARVAL, installé sur le télescope Bernard Lyot au pic du

	Protoplanétaire	Binaire cataclysmique	AGN
Masse objet central (M_{\odot})	$\sim 0.1 - 100$	$\sim 0.1 - 100$	$\sim 10^6 - 10^9$
Rayon du disque (m)	$10^9 - 10^{13}$	$10^7 - 10^8$	$10^{10} - 10^{18}$
Rapport d'aspect	$\ll 1$	$\ll 1$	$\sim 10^{-2} - 1$
Gamme de température (K)	$10^2 - 10^3$	$10^3 - 10^5$	$10^2 - 10^7$
Luminosité (L_{edd})	$\ll 1$	$\ll 1$	$\gtrsim 1$
Densité moyenne (m^{-3})	$\sim 10^7$	$\sim 10^9$	$\sim 10^3$
Taux d'accrétion (kg/s)	$10^9 - 10^{11}$	$10^{12} - 10^{15}$	$10^{15} - 10^{21}$
Efficacité du transport (α)	~ 0.1	0.1 - 0.4	0.01 - 0.03
Champ magnétique maximal (Gauss)	$\sim 10^4$	$\sim 10^6$	$\sim 10^{10}$

TABLE 1.1 – Grandeurs physiques caractérisant les différents types de disques d'accrétion. Note : la forte intensité du champ magnétique indiquée pour les AGN a été mesurée par Zakharov et al. (2003) dans la galaxie Seyfert MCG-6-30-15 et correspond à une limite supérieure près de l'orbite marginale du trou noir. Elle ne reflète pas forcément la grande variété d'intensité de champ magnétique mesurée dans ces objets.

midi). La mesure de l'effet Zeeman et de la polarisation de la lumière permettent théoriquement de remonter à l'intensité du champ magnétique le long de la ligne de visée, et à sa topologie dans certains cas. On citera en particulier les observations de Zakharov et al. (2003); Modjaz et al. (2005) pour les disques d'AGN et celles de Hutawarakorn et Cohen (1999); Donati et al. (2005) pour les disques de jeunes étoiles. Les champs magnétiques mesurés s'étalent sur une gamme allant du ν Gauss au giga Gauss près des orbites marginales de disques de trous noirs. Les observations récentes de Donati et al. (2005) dans le disque protostellaire FU Orionis semblent attester de la présence d'un champ magnétique intrinsèque au disque. La géométrie du champ semble être globalement axisymétrique et toroidale. L'intensité du champ à la surface du disque et près du centre atteindrait les 1kG, valeur proche de l'équipartition entre pression magnétique et pression thermique. De plus le champ présenterait une structure en filaments : les tubes de champs baignent dans un plasma peu magnétisé qui occupe les 80% du disque.

Le tableau 1.1 récapitule les principales grandeurs physiques tirées des observations et de la littérature (Hartmann, 2009; Frank et al., 2002), pour les trois types de disques présentés en section 1.1.1.

1.1.2 Problème du transport de moment cinétique

Nous avons vu dans la partie précédente que la matière au sein des disques ne reste pas en équilibre mais qu'elle finit par tomber au centre : c'est le phénomène d'accrétion. Si une masse m est accrétée vers le centre, son moment cinétique $\mathcal{L} = m\Omega r^2 \mathbf{e}_z = mGM_{\star} r^{1/2} \mathbf{e}_z$ va alors diminuer. Comme le disque est à force centrale, le moment cinétique global est conservé et par conséquent le moment perdu par m est nécessairement transféré vers une orbite plus haute. L'accrétion requiert donc un mécanisme capable de transporter le moment cinétique vers l'extérieur du disque.

i) Problème de la viscosité moléculaire

Comme nous l'avons montré dans la section 1.1.1, le disque est en rotation képlérienne, ce qui implique que la vitesse angulaire dépend du rayon. L'écoulement au sein du disque est donc cisailé (on parle aussi de rotation différentielle) et la friction associée à la viscosité moléculaire ν exerce une force entre deux anneaux fluides voisins en rotation différentielle. L'anneau qui tourne le plus vite (sur l'orbite inférieure) est freiné par l'anneau qui tourne plus lentement (sur l'orbite supérieure), si bien que le moment cinétique est transféré vers l'extérieur. La viscosité moléculaire semble donc pouvoir en théorie résoudre simplement notre problème. Cependant, les choses ne sont pas aussi simples car la viscosité ν dans les disques est en réalité beaucoup trop faible pour rendre compte du phénomène d'accrétion. Le temps nécessaire pour transporter toute la matière sur une distance R par friction visqueuse est donné par :

$$t_\nu = \frac{R^2}{\nu}. \quad (1.9)$$

La viscosité moléculaire est en première approximation le produit de la vitesse thermique v_{th} et du libre parcours moyen des molécules λ (Spitzer). Ce résultat est obtenu en calculant la quantité de mouvement déposée par les molécules par unité de surface sur une distance égale au libre parcours moyen. La vitesse thermique d'une particule de masse m dans un milieu de température T est donnée par $1/2mv_{th}^2 = 3/2k_B T$. Pour des molécules d'hydrogène de masse $m_{H_2} = 3.4 \times 10^{-27}$ kg et pour une gamme de température de 100 – 1000 K, typique d'un disque protoplanétaire, on trouve une vitesse thermique de l'ordre de 1 km.s⁻¹.

Le libre parcours moyen λ est de l'ordre de $1/(n_{H_2}\sigma)$ où n_{H_2} est le nombre de molécules d'hydrogène par unité de volume et $\sigma = 3 \times 10^{-16}$ cm² la section efficace entre les molécules. La densité particulaire à 1 U.A. d'un disque varie en moyenne de 10^{13} à 10^{15} cm⁻³, ce qui nous donne un libre parcours moyen λ compris entre quelques centimètres et quelques mètres.

En combinant les deux grandeurs, on obtient une viscosité de l'ordre de 10 à 1000 m².s⁻¹. A 1 U.A. du centre, le temps caractéristique du transport par friction visqueuse est donc supérieur à 10¹¹ années, ce qui est largement supérieur à la durée de vie de l'Univers. Il est par conséquent clair qu'un autre mécanisme, plus efficace, doit exister pour pouvoir rendre compte des observations, qui estiment au maximum le temps typique d'accrétion d'un disque, comme nous l'avons vu, à quelques dizaines de millions d'années.

ii) Turbulence et modèle de disque α (Shakura et Sunyaev, 1973)

L'un des processus de transport les plus étudiés aujourd'hui est le transport turbulent. Shakura et Sunyaev (1973) ont proposé que la turbulence au sein du disque pouvait se comporter de manière effective comme un mécanisme de transport visqueux, la friction est engendrée par le contact des tourbillons turbulents dans le fluide. En première approximation la viscosité effective associée à la turbulence peut s'écrire

$$\nu_t \sim u_t l_t, \quad (1.10)$$

où u_t et l_t sont respectivement la vitesse et la taille typique des structures turbulentes. Les plus grands tourbillons turbulents pouvant se développer dans le disque ont une taille H (hauteur moyenne du disque) et une vitesse maximale égale à la vitesse du son $c_s \simeq \Omega H$. La viscosité turbulente dans un écoulement subsonique est donc égale au maximum à $\nu_t = \Omega H^2$. L'idée de

Shakura et Sunyaev (1973) a été d'introduire un paramètre α , pouvant varier de 0 à 1, dépendant uniquement des propriétés moyennes de la turbulence, de telle sorte que

$$\nu_t = \alpha c_s H \sim \alpha \Omega H^2. \quad (1.11)$$

Si la turbulence est supposée homogène dans tout le disque, α est un paramètre constant et uniforme, ne dépendant que des propriétés locales de la turbulence. Ainsi le modèle de Shakura-Sunyaev, couplé aux équations stationnaires de structure du disque, permet de calculer des lois d'échelles pour certaines grandeurs physiques, telles que la température, la densité et la hauteur H en fonction du rayon, de la masse de l'objet central et du paramètre α . Ces relations que l'on peut trouver dans Frank et al. (2002) se dérivent en résolvant les équations hydrostatiques (conservation du débit et du moment cinétique), et en imposant l'équilibre radiatif, ce qui suppose un disque mince.

Le paramètre α est également très important pour contraindre les modèles d'évolution temporelle des disques. La viscosité additionnelle apportée par la turbulence et dépendant directement de ce coefficient, joue un rôle de premier plan dans la redistribution du moment cinétique et l'évolution de la densité de surface du disque. Ces modèles permettent ainsi d'estimer pour une valeur de α donnée le taux d'accrétion moyen et donc l'âge d'un disque.

La question de l'origine de la turbulence dans les disques d'accrétion reste à l'heure actuelle un sujet de recherche très actif. L'apparition d'instabilités présentes dans le fluide est généralement associée à celle de la turbulence. Celles-ci peuvent être divisées en deux classes :

- les instabilités "linéaires" qui se manifestent lorsque l'écoulement d'équilibre à grande échelle n'est pas stable pour des perturbations d'amplitudes infiniment faibles. Ces dernières sont alors amplifiées de façon quasi-exponentielle à partir de l'énergie disponible (cisaillement, source de chaleur, courant électrique).
- les instabilités non-linéaires qui amplifient des perturbations initiales d'amplitudes finies (à partir d'un équilibre stable linéairement).

L'énergie injectée dans ces perturbations via ces instabilités cascade à petite échelle, aboutissant à un état de turbulence. Cependant l'existence d'une instabilité ne permet pas d'évaluer directement l'efficacité et notamment les propriétés de transport de la turbulence associée. Il est nécessaire d'étudier en détails la réponse non-linéaire du fluide à ces instabilités grâce aux simulations numériques ou aux expériences de laboratoires afin de pouvoir conclure sur l'efficacité du transport.

1.1.3 Mécanismes de transport turbulents

Nous allons détailler à présent les principales instabilités proposées jusqu'à ce jour pour expliquer l'origine de la turbulence et du transport de moment cinétique observé dans les disques.

i) Instabilité sous critique hydrodynamique

L'écoulement laminaire correspondant au profil képlérien est stable linéairement vis à vis de perturbations hydrodynamiques infinitésimales : c'est le critère de Rayleigh ($d \ln \Omega / d \ln r > -2$). Les expériences réalisées en laboratoire ont cependant montré que certains écoulements hydrodynamiques linéairement stables et non rotatifs, comme ceux de Couette plan ou les écoulements dans un tuyau ("pipe flow"), peuvent devenir turbulent lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment grand. Dans ces écoulements, la turbulence résulte en réalité d'une instabilité non-linéaire sous-critique, nécessitant l'introduction de perturbations d'amplitudes finies. Ces instabilités sont le résultat d'un mécanisme complexe d'auto-entretien dont nous reparlerons au chapitre 3, faisant intervenir le cisaillement, les effets linéaires de croissance transitoire et des effets non-linéaires rétroactifs.

L'idée qu'une instabilité hydrodynamique non-linéaire puisse être également active dans les écoulements en rotation képlérienne a été entre autres suggérée par Richard et Zahn (1999) sur la base de résultats expérimentaux. Cette idée a provoqué un vif débat dans la communauté astrophysique et hydrodynamique. Les résultats expérimentaux et numériques de ces dernières années tendent à montrer que la turbulence purement hydrodynamique dans ce type d'écoulement est impossible à entretenir. En particulier les simulations de Balbus et al. (1996); Hawley et al. (1999); Balbus (2003); Lesur et Longaretti (2005); Ostilla Mónico et al. (2014) indiquent que la turbulence a un temps de vie trop faible et qu'elle n'est pas efficace pour transporter le moment cinétique, même pour des régimes de grands Reynolds. Balbus et Hawley (2006); Shen et al. (2006) ont étudié la dynamique des ondes non-axisymétriques (dépendant de la coordonnée azimutale) et ont montré qu'elles pouvaient être l'objet d'instabilités secondaires de type Kelvin-Helmoltz, conduisant transitoirement à un état turbulent mais très bref. Enfin une tentative de continuer des solutions cohérentes non-linéaires obtenues dans le régime sans rotation vers le régime anti-cyclonique képlérien s'est révélée vaine (Rincon et al., 2007a).

Les expériences semblent également confirmer la stabilité non-linéaire hydrodynamique de l'écoulement képlérien (Ji et al., 2006; Scharfman et al., 2012; Edlund et Ji, 2014), malgré le résultat de Paoletti et al. (2012) observant un transport de moment significatif et relançant le débat sur le problème. Les phénomènes de circulation d'Ekman, causés par la taille finie des systèmes expérimentaux, pourraient notamment être à l'origine du transport mesuré dans cette dernière expérience (Avila, 2012)

ii) Instabilité de convection thermique

Si l'on suppose qu'il existe une source de chauffage interne au sein du disque, il est possible de donner naissance à de la convection thermique verticale, qui pourrait également contribuer au transport radial de moment cinétique (Lin et Papaloizou, 1980). L'étude de cette instabilité est notamment motivée par l'existence des "dead zones" au sein des disques, où l'instabilité magnétorotationnelle aujourd'hui considérée comme la plus efficace pour l'accrétion (voir fin de section et 2.4.2), n'est pas viable. Dans ce problème, on introduit un nombre sans dimension, le nombre de Rayleigh R_a , qui traduit la vigueur de la convection. A bas nombre de Rayleigh, le transport obtenu dans les simulations turbulentes convectives est dirigée vers l'intérieur du disque et donc incompatible avec l'accrétion (Cabot, 1996; Stone et al., 1996). Les travaux récents de Lesur et Ogilvie (2010) ont montré que l'augmentation de R_a permet d'obtenir un transport

de moment cinétique vers l'extérieur relativement faible ($\alpha \sim 10^{-3}$) mais qui reste compatible avec les observations. Cependant le transport de chaleur vertical associé à la convection doit être très important pour obtenir un tel transport. Cela nécessite un mécanisme de chauffage externe capable de maintenir le gradient de température et la convection. Son origine est inconnue ; il pourrait provenir des radiations ou des processus chimiques au sein du disque.

iii) Instabilité barocline

Un autre type d'instabilité, appelée "instabilité barocline" pourrait être à l'œuvre dans l'activation de la turbulence et le transport de moment cinétique au sein des disques stratifiés radialement. Celle-ci se manifeste lorsque l'équation d'état du gaz n'est pas barotrope, autrement dit si gradient de pression et gradient de densité ne sont pas alignés. Il apparaît alors dans l'équation de la vorticité (rotationnel de la vitesse) un terme source égal à

$$\mathbf{W}_{bar} = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla P. \quad (1.12)$$

Ce terme, couplé à l'équation des fluctuations de température (ou de densité), est sous certaines conditions favorable à une instabilité. Elle a pour effet de générer des tourbillons à grandes échelles dans le disque qui peuvent être à l'origine d'un transport significatif de moment cinétique (Johnson et Gammie, 2005). L'instabilité barocline dans les disques a été redécouverte numériquement par Klahr et Bodenheimer (2003); Klahr (2004) en utilisant une approche globale puis en étudiant son comportement linéaire. Cependant seuls des effets de croissance transitoires ont été observés. Le problème non-linéaire a été par la suite étudié localement dans la shearing box par Johnson et Gammie (2006). Leurs travaux ont révélé que l'instabilité n'apparaissait pas dans le cas d'un profil képlérien et que celle-ci devait surement être une instabilité globale. Petersen et al. (2007) ont par la suite montré grâce à des simulations globales et en utilisant un nombre de Reynolds élevé que des tourbillons pouvaient être maintenus sur un temps de plusieurs centaines de rotation autour de l'objet central. Récemment, Lesur et Papaloizou (2010) ont conclu que l'instabilité dans les simulations locales était non-linéaire et sous-critique tandis que les derniers résultats de Raettig et al. (2013) suggèrent un transport assez faible pour les disques ($\alpha \sim 10^{-3}$).

iv) Instabilité gravitationnelle

Lorsque sa masse est suffisamment grande, le disque d'accrétion peut être influencé par son propre champ gravitationnel. Lorsque le paramètre de Toomre

$$Q = \frac{c_s \kappa}{\pi G \Sigma} \sim \frac{H}{R} \frac{M_\star}{M_{acc}} \quad (1.13)$$

est plus petit que 1, une instabilité gravitationnelle se développe au sein du disque. Cette instabilité est contrôlée par la température (via la vitesse du son c_s), et la densité de surface Σ . Un gaz froid et dense, souvent présent dans les régions externes des jeunes disques, sera propice à l'instabilité. Celle-ci peut évoluer vers un état dit de turbulence gravitationnelle ou bien prendre la forme de bras spiraux qui fragmentent, pouvant potentiellement accueillir la naissance de futures planètes. Lorsque le disque est dans un état de gravito-turbulence, il est possible d'obtenir une expression analytique pour le transport de moment cinétique (Gammie,

2001), en supposant que le disque est à l'équilibre thermique (la quantité de chaleur produite par la turbulence compense exactement les pertes thermiques) :

$$\alpha = \left[\frac{9}{4} \gamma_g (\gamma_g - 1) \Omega \tau_c \right]^{-1}, \quad (1.14)$$

où γ_g est l'indice adiabatique et τ_c le temps typique de refroidissement, qui dépend de la densité, de la température ou encore de l'opacité du disque. L'évaluation de τ_c dans les simulations numériques est difficile et dépend fortement de la résolution utilisée. Si ce temps est suffisamment petit (de l'ordre de Ω^{-1}), le transport de moment cinétique peut donc être efficace. Cependant les travaux de Paardekooper (2012) ont montré que le disque amorçait sa fragmentation pour des valeurs de τ_c inférieure à $20\Omega^{-1}$, laissant supposer que la turbulence gravitationnelle ne dure pas et ne peut opérer que sur des temps courts comparés à l'échelle de la vie d'un disque.

v) Instabilité magnétorotationnelle

Comme nous l'avons vu, la recherche d'instabilités purement hydrodynamiques n'a pas fourni de résultats probants pour expliquer le transport de moment cinétique déduit des observations. Au cours des dernières décennies, une proposition de solution plus convaincante à ce problème est apparue. Il s'agit de l'instabilité magnétorotationnelle (MRI). Celle-ci a été pour la première fois évoquée par Velikhov (1959) puis par Chandrasekhar (1960) dans un contexte purement théorique. Ce n'est qu'en 1991 que Balbus & Hawley ont redécouvert cette instabilité dans le cadre des disques astrophysiques. Elle se manifeste dans les disques suffisamment chauds et ionisés en interaction avec un champ magnétique. Nous la présenterons en détail dans le chapitre 2. L'analyse linéaire montre que le profil képlérien de vitesse est instable vis à vis de la MRI. Les simulations numériques indiquent que la turbulence générée par cette instabilité évacue naturellement du moment cinétique vers l'extérieur du disque avec une efficacité comparable à celle déduite des observations. Elle possède donc à priori toutes les qualités requises pour expliquer le processus d'accrétion. Nous verrons malgré tout que la turbulence associée à cette instabilité dépend fortement des régimes de dissipation considérés. A l'heure actuelle, des doutes sont toujours émis quant à son excitation et à son efficacité à transporter le moment cinétique dans différents systèmes accrétants. Comme nous le verrons au chapitre 2, cette problématique est au cœur des motivations qui ont conduits à ce travail de thèse.

1.1.4 Mécanismes de transport non turbulents

i) Ondes globales

La dissipation d'ondes hydrodynamiques non-axisymétriques dans les disques d'accrétion a été proposée comme mécanisme de transport de moment cinétique, dans les années 70, notamment à travers les travaux de Papaloizou et Pringle (1977). Ces ondes peuvent être excitées par les effets de marées (en particulier dans les disques de binaires). Lorsque ces ondes, initialement produites dans les régions externes du disque atteignent les régions internes, elles tournent moins vite que l'écoulement de base et peuvent donc transférer du moment cinétique vers l'extérieur. La revue de Balbus (2003) propose une étude détaillée de ces ondes et du transport de moment cinétique associé. Ce processus semble efficace mais nécessite une source de dissymétrie et ne peut donc pas être généralisé à tous les disques.

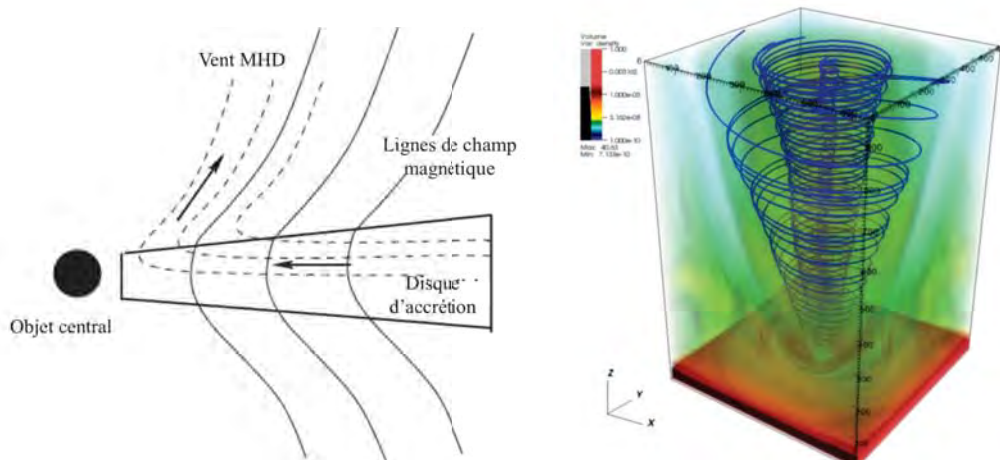


FIGURE 1.5 – A gauche : schéma simplifié de la structure magnétique dans le modèle d'accrétion/éjection (Sheikhnezami et Fendt, 2012). A droite : simulation 3D d'un jet avec le code FLASH (C. Zanni, Osservatorio Astrofisico di Torino, 2012). Les particules suivent les lignes de champ (en bleu) qui s'enroulent sous l'effet de la rotation différentielle.

ii) Vent magnétohydrodynamique

Les jets puissants observés dans les structures de disques de type T-Tauri sont potentiellement sources d'évacuation du moment cinétique, par l'intermédiaire d'un champ magnétique poloidal ouvert. Ce processus initialement proposé par Blandford et Payne (1982) nécessite une configuration magnétique bien spécifique. Les travaux de Ferreira et Pelletier (1995) ont permis de décrire ce processus de façon globale dans le disque à travers un modèle d'accrétion-éjection. L'effet du champ magnétique est similaire au freinage magnétique de l'expérience de la roue de Barlow : en s'opposant à la rotation du disque, la force de Lorentz prélève au disque moment cinétique et énergie de rotation, permettant ainsi un mouvement d'accrétion vers l'objet central.

Cependant la stabilité d'une telle structure magnétique n'est pas simple à obtenir car la rotation différentielle au sein du disque a tendance à enrouler et torsader les lignes de champ (Fig. 1.1.4) et donc à compromettre le mécanisme d'éjection de base. En réalité la turbulence liée à des instabilités MHD dans le disque introduit une résistivité additionnelle et apparaît être une condition nécessaire pour assurer la stabilité de l'ensemble. Casse et Ferreira (2000) ont montré que le couple "visqueux" créé par cette turbulence devait être de l'ordre du couple magnétique engendré par le champ poloidal ouvert. Ces travaux suggèrent donc que la turbulence joue un rôle central dans le processus d'accrétion et d'éjection des disques dans son ensemble. Une étude récente combinant modèles numériques et analytiques pointe également le lien étroit entre la turbulence initiée par la MRI et les vents MHD observés (Lesur et al., 2013).

1.2 Génération de champ magnétique en astrophysique et dans les disques

Le champ magnétique, à travers l'instabilité magnétorotationnelle (MRI), semble jouer un rôle central dans l'évolution des disques et en particulier dans le problème du transport et de l'accrétion. Celui-ci est également impliqué dans de nombreux processus comme l'éjection et les vents magnétohydrodynamiques. Il est donc particulièrement important de comprendre comment ce champ magnétique est maintenu tout au long de la vie des disques (ou du moins pendant la phase d'accrétion turbulente). Le problème de l'origine et de la dynamique des champs magnétiques dépasse en réalité le cadre des disques d'accrétion et se pose dans de nombreux problèmes astrophysiques et géophysiques. L'étude des processus de dynamo non-linéaires reposant sur des instabilités comme la MRI ou la flottaison magnétique pourrait notamment permettre de mieux comprendre la génération de champ magnétique à grande échelle en milieu stellaire mais aussi dans les disques où, comme nous l'expliquerons de manière détaillée au chapitre 2, l'instabilité MRI et la turbulence pourraient être étroitement liés à l'entretien du champ magnétique.

1.2.1 Théories de la dynamo

i) Dynamos en astrophysique

Dans un grand nombre d'objets astrophysiques (étoiles, disques, galaxies, ...), l'un des mécanismes possibles d'amplification ou d'entretien du champ magnétique est l'effet dynamo. Cet effet est la propriété que possède certains écoulements fluides, conducteurs d'électricité (comme les plasmas ou les métaux liquides), de générer un champ magnétique, et d'entretenir ce champ contre la dissipation ohmique, indépendamment de sources extérieures. C'est un effet tridimensionnel, ce qui signifie par exemple que dans le cadre des fluides tournants, un écoulement axisymétrique ne peut pas générer de champ magnétique axisymétrique. Cette propriété bien connue aujourd'hui a été énoncée en 1934 par Thomas Cowling et constitue le premier théorème anti-dynamo.

L'équation qui régit l'évolution du champ magnétique est l'équation d'induction,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B}. \quad (1.15)$$

qui sera dérivée en section 2.1.3. Dans un fluide conducteur d'électricité, on définit le terme de force électromotrice $\mathcal{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ où \mathbf{v} et \mathbf{B} sont le champ de vitesse et magnétique du fluide considéré. Ce terme apparaissant dans l'évolution temporelle du champ magnétique est le seul à pouvoir générer et entretenir \mathbf{B} sur des temps longs comparés au temps typique de la dissipation ohmique. Lorsque le champ de vitesse \mathbf{v} est imposé et ne dépend pas de \mathbf{B} , on parle de dynamo cinématique. Le processus dynamo dans ce régime est fondamentalement linéaire. Au contraire, les régimes pour lesquels le champ de vitesse est explicitement couplé au champ magnétique \mathbf{B} via la force de Lorentz $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}/(\rho\mu_0)$ est qualifié de non-cinématique et non-linéaire (ou saturé).

Pour chacun de ces deux régimes, la dynamo est dite à petite échelle (ou "turbulente") si le champ magnétique généré est d'échelle comparable à celle de la turbulence cinétique. Au contraire si les lignes de champ s'étirent sur des distances comparables à la taille du système astrophysique, on parle de dynamo à grande échelle. Dans le cadre de la théorie des disques

d'accrétion, les recherches se sont plutôt focalisées sur ce dernier type de dynamo, qui pourrait rendre compte d'un champ magnétique à grande échelle à même de faciliter le déclenchement de l'instabilité magnétorotationnelle (MRI) et des jets.

ii) Dynamo cinématique et théorie de champ moyen

La théorie de champ moyen est une théorie de dynamo, à l'origine cinématique, qui permet dans de nombreux problèmes de modéliser simplement les mécanismes d'amplification du champ magnétique à grande échelle. Cette théorie est née en partie des tentatives de modélisation du magnétisme solaire. L'effet "Omega" est connu depuis longtemps comme un mécanisme permettant de régénérer le champ magnétique toroïdal du Soleil. Celui-ci est créé par l'étirement des lignes de champ poloidal sous l'action du cisaillement induit par la rotation différentielle. Cependant il n'est pas suffisant pour décrire le processus de dynamo dans son ensemble. En effet un autre mécanisme est nécessaire pour expliquer la création de champ poloidal à partir de champ toroïdal, et ainsi fermer la boucle. Parker (1955); Steenbeck et Krause (1966) ont proposé l'effet α qui est à la base de la théorie de champ moyen et de beaucoup de modèles de dynamo astrophysiques (à clairement distinguer du paramètre α caractérisant le transport dans les disques). Cet effet repose sur l'hypothèse que la turbulence au sein du fluide, générée par des processus indépendants (comme les mouvements de convection dans le Soleil) ne possède pas de symétries miroirs, autrement dit que les tourbillons qui la constituent tournent dans une direction privilégiée (cyclonique ou anticyclonique). Dans le cadre du magnétisme solaire, cela n'est en réalité possible qu'en présence de la force de Coriolis, sous l'effet de la rotation, et d'une stratification verticale. L'effet statistique de ces tourbillons sur le champ magnétique toroïdal est de créer une composante grande échelle poloidale. La combinaison de l'effet Ω et de l'effet α a donné naissance au concept de dynamo $\alpha\Omega$ dans les écoulements en rotation différentielle (ou $\alpha^2\Omega$ lorsque l'effet α intervient aussi dans la régénération du champ toroïdal).

Les fondements théoriques de l'effet α ont été synthétisés entre autres par Moffatt (1978). L'idée est de décomposer le champ de vitesse et le champ magnétique en une partie moyenne grande échelle (notée avec un barre) et une partie fluctuante,

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{b}, \quad (1.16)$$

et d'écrire l'équation d'induction pour le champ grande échelle $\bar{\mathbf{B}}$ et les fluctuations \mathbf{b} :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = \nabla \times (\overline{\mathbf{u} \times \mathbf{b}} - \eta \nabla \bar{\mathbf{B}}), \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{u}} \times \mathbf{b} + \mathbf{G} - \eta \nabla \mathbf{b}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{G} = \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \overline{\mathbf{u} \times \mathbf{B}}. \quad (1.18)$$

où η est la diffusivité magnétique caractérisant la diffusion ohmique du champ magnétique. Nous reviendrons sur ce processus dissipatif plus en détail dans le chapitre suivant. Si \mathbf{u} n'a pas de dépendance en $\bar{\mathbf{B}}$, c'est à dire si le champ magnétique est suffisamment faible pour que la force de Lorentz ne joue aucun rôle, alors d'après l'équation (1.18), l'évolution des perturbations magnétiques est linéaire en $\bar{\mathbf{B}}$. Dans l'hypothèse d'une turbulence isotrope, on développe la force électromotrice $\mathcal{E} = \bar{\mathbf{u}} \times \mathbf{b}$ dans l'équation (1.17) suivant :

$$\bar{\mathcal{E}} = \alpha_m \bar{\mathbf{B}} - \beta_m \nabla \times \bar{\mathbf{B}}. \quad (1.19)$$

Pour des conditions très particulières (effet résistif important, faible temps de corrélation de la turbulence, champ \mathbf{B} variant lentement par rapport au temps caractéristique des structures turbulentes τ_c , terme \mathbf{G} négligeable), il est possible de montrer que $\alpha_m = -1/3\tau_c\overline{\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\omega}}$ et $\beta_m = 1/3\tau_c\overline{\mathbf{u}^2}$, où $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ est la vorticité de l'écoulement. Le terme $\overline{\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\omega}}$ fait référence à l'hélicité moyenne de l'écoulement. Une hélicité non-nulle traduit le fait que la turbulence ne possède pas de symétries miroirs, ce qui est une condition nécessaire à l'effet α dans les hypothèses formulées précédemment. Le deuxième terme β_m qui constitue la force électromotrice agit comme une diffusion turbulente et s'ajoute à la diffusion ohmique laminaire si $\beta_m > 0$. Les deux coefficients α_m et β_m peuvent être généralisés par des tenseurs plus complexes à calculer dans le cas d'une turbulence non-isotrope.

La théorie de champ moyen a été étudiée dans de nombreux problèmes astrophysiques ou géophysiques (Steenbeck et Krause, 1969; Roberts et Stix, 1972; Stix, 1975; Radler, 1990; Schriener et al., 2005; Brandenburg et Subramanian, 2005). Certains travaux ont par ailleurs tenté d'extraire des coefficients de champ moyen à partir des simulations numériques (Brandenburg et al., 2008), d'autres se sont efforcés de reproduire les observations (i.e cycle solaire, géodynamo) en utilisant ce formalisme. Cependant l'application de cette théorie a ses limites et est contestée (Cattaneo et Hughes, 1996; Hughes et Cattaneo, 2008; Tobias et al., 2011). Tout d'abord, les coefficients α_m et β_m sont parfois difficiles à définir et à déterminer "statistiquement" car ils peuvent fluctuer très fortement dans le temps. De plus la théorie de champ moyen ne donne qu'une compréhension partielle des mécanismes physiques à l'œuvre dans les processus de dynamo. Les modèles de champ moyen nécessitent également généralement l'introduction de nombreux paramètres pour reproduire les observations. Enfin la théorie cinématique dans sa forme la plus simple n'est pas adaptée à la base pour rendre compte de la rétroaction du champ magnétique sur le champ de vitesse via la force de Lorentz. Des modifications de la théorie ont été apportées afin de prendre en compte la saturation non-linéaire de la dynamo induite par la force de Lorentz. L'évolution de l'hélicité magnétique est notamment suspectée de jouer un rôle important dans la saturation de l'effet α (Blackman et Field, 2002; Brandenburg et Subramanian, 2005; Hubbard et Brandenburg, 2012).

iii) **Dynamos non-linéaires s'appuyant sur des instabilités MHD**

Si la théorie de champ moyen occupe aujourd'hui une place centrale dans la modélisation du magnétisme astrophysique à grande échelle, une autre classe de dynamos, non-linéaires et non-cinématiques, pourrait être particulièrement importante dans ce contexte. Les fondements de ce type de dynamos sont à priori très différents de la théorie de champ moyen et reposent en particulier sur l'action d'instabilités MHD. L'idée de base de ces mécanismes de dynamo est que ces instabilités amplifient des perturbations non-axisymétriques, qui sous certaines conditions, produisent une force électromotrice non-linéaire cohérente, capable d'entretenir le champ magnétique axisymétrique sur des temps longs. Cette force, contrairement au cas de la théorie de champ moyen, n'a aucune raison d'évoluer linéairement avec le champ magnétique. De plus, l'activation de la dynamo ne requiert pas la présence d'une hélicité nette dans l'écoulement. Un exemple de ce type de dynamo est la "dynamo magnétorotationnelle", qui pourrait être active dans certains disques d'accrétion et qui est au cœur de ce travail de thèse. Elle s'appuie sur l'instabilité MRI et a la particularité d'être sous-critique, c'est à dire que l'entretien du champ

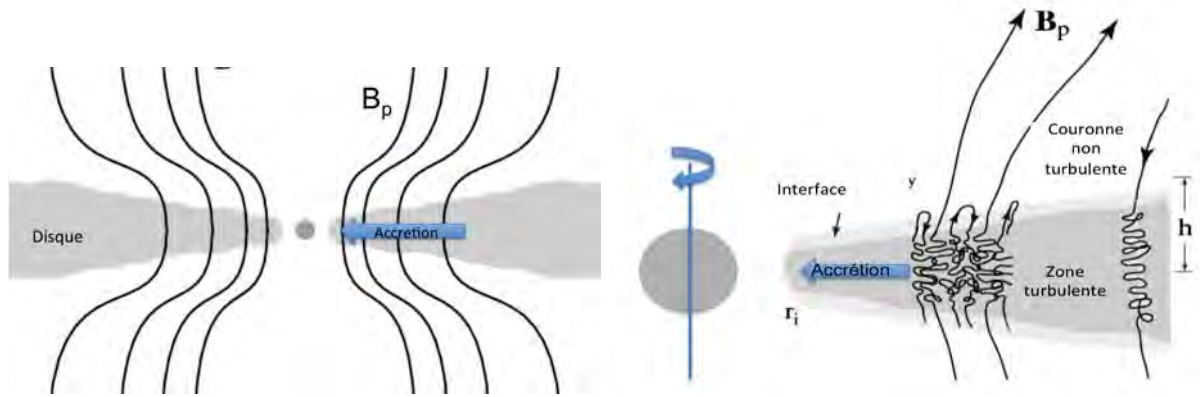


FIGURE 1.6 – Figure adaptée des schémas de Rothstein et Lovelace (2008), représentant l’advection d’un champ poloidal ouvert par le flux de matière accrétant. Cette advection suffit à amplifier le champ durant la phase d’accrétion. La turbulence au sein du disque entretenue par la MRI ajoute un effet de diffusion magnétique turbulente qui peut s’opposer au processus d’advection mais qui est en même temps essentiel à la stabilité de la structure magnétique.

magnétique nécessite l’introduction de perturbations d’amplitudes finies (Rincon et al., 2007b). Cette dynamo est donc non-cinématique dans la mesure où la force de Lorentz y joue un rôle très important (nous reviendrons de manière plus détaillée sur ce point dans le chapitre suivant).

Des formes de dynamos sous-critiques similaires, soutenues par d’autres instabilités MHD, comme la flottaison magnétique (Cline et al., 2003) ou l’instabilité de Tayler (Spruit, 2002) pourraient également être à l’œuvre dans les intérieurs stellaires. Ce type de dynamos suscite un intérêt grandissant en astrophysique car elles génèrent naturellement des champs magnétiques 3D cohérents à grande échelle dont la dynamique est chaotique, sans pour autant souffrir des limitations de la théorie de champ moyen.

1.2.2 Origine du champ magnétique dans les disques

i) Champ résiduel ou source externe

Plusieurs scénarios sont envisageables pour expliquer l’origine du champ magnétique dans les disques. Nous commencerons par évoquer ceux qui ne sont pas des mécanismes de dynamo à proprement parler. Dans le cas de disques proto-stellaires, il est possible qu’un champ résiduel, provenant de la nébuleuse primordiale, ait été advecté et amplifié par l’effet conjoint de la rotation et de la contraction gravitationnelle du système (voir Fig. 1.6), de sorte que son amplitude soit suffisante pour influencer la dynamique du disque (Lovelace, 1976; Bisnovatyi-Kogan et Ruzmaikin, 1976; Bisnovatyi-Kogan et Lovelace, 2007; Spruit et Uzdensky, 2005; Rothstein et Lovelace, 2008). Ce type de champ à grande échelle (dont la taille est grande devant la hauteur caractéristique du disque) conserverait globalement un flux vertical constant durant la phase d’accrétion et pourrait être à l’origine des vents MHD accompagnant les structures d’accrétion-éjection. Cependant ce modèle d’amplification par advection reste contesté car la turbulence au sein du disque a tendance à diffuser le champ; la viscosité et la diffusion turbulente au sein du disque contraignent donc fortement ce modèle. Une autre possibilité est que l’objet central

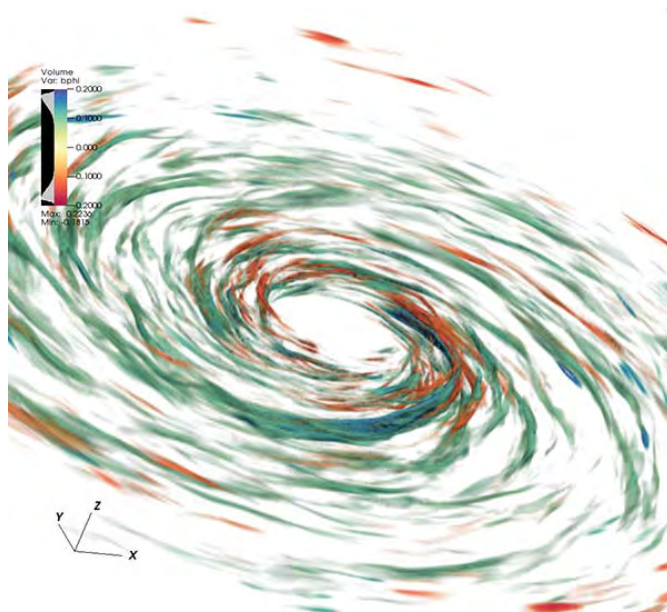


FIGURE 1.7 – Exemple de simulation globale de dynamo dans les disques par G. Bodo. Source : INAF Astrophysical Observatory of Torino, Italy.

(l'étoile par exemple) soit la source du champ magnétique. C'est un scénario notamment envisagé dans le cas des disques de binaires.

Dans les deux cas que nous venons de décrire, la source du champ magnétique est extérieure au disque. Cependant il est possible qu'aucune de ces sources ne soient présentes, ou bien que le champ résiduel ait été rapidement diffusé par les effets résistifs du plasma (diffusion ohmique). Selon l'échelle que l'on considère et le degré d'ionisation du milieu, le temps caractéristique de la dissipation ohmique peut être très petit devant le temps caractéristique d'accrétion du disque.

ii) Effet dynamo au sein du disque

Une alternative à ces scénarios est que le champ magnétique soit généré au sein du disque lui-même par un effet dynamo (Pudritz, 1981; Balbus et Hawley, 1998). Certaines observations, comme celles de Donati et al. (2005) (décrites en section 1.1.1 iv), vont dans ce sens, même si leur portée est probablement limitée et ne peut être généralisée à tous les disques.

Dans le cadre des disques astrophysiques, les deux formes de dynamos présentées précédemment ont été étudiées activement. La génération d'un champ magnétique, par un mécanisme de dynamo de champ moyen a été évoquée pour la première fois par Pudritz (1981) dans ce contexte. En utilisant la théorie de champ moyen, et en supposant une turbulence isotrope alimentée par l'introduction aléatoire d'ondes inertielles dans l'écoulement, il a pu estimer les coefficients α_m et β_m à prescrire pour ce type de dynamo. Il a également montré que la théorie de champ moyen tend à privilégier les modes quadrupôles pour le champ magnétique à grande échelle, ce qui a été plus tard confirmé par les simulations numériques des équations de champ moyen (Stepinski et Levy, 1990). Campbell (1992), grâce à une méthode aux valeurs propres puis Torkelsson et

Brandenburg (1994) grâce à une méthode d'intégration temporelle de ces mêmes équations, ont pu simuler l'effet $\alpha^2\Omega$ en incluant les effets de saturation non-linéaire dus à la force de Lorentz (modélisée par un terme de quenching) et à l'instabilité de flottaison magnétique. Leurs résultats montrent que les effets non-linéaires peuvent être très importants pour la dynamo et qu'ils modifient la structure du champ à grande échelle en introduisant une dynamique chaotique. Avec la découverte de l'instabilité magnétorotationnelle, dont la propriété essentielle est de générer de la turbulence en présence d'un champ magnétique, il est cependant devenu clair qu'un effet dynamo dans les disques peut difficilement être décrit par un formalisme simple de champ moyen, malgré les modifications apportées à cette théorie (Blackman et Field, 2002). Un mécanisme de dynamo non-linéaire, s'appuyant sur les instabilités comme la MRI et la flottaison magnétique semble plus approprié.

Un premier modèle physique simplifié faisant appel à ces divers instabilités est celui proposé par Tout et Pringle (1992). Dans ce modèle, le champ poloidal est régénéré grâce à l'instabilité magnétorotationnelle (pour la composante radiale) et à l'instabilité de flottaison magnétique (pour la composante verticale). Le champ toroïdal est quant à lui généré classiquement par effet Omega. Des solutions pseudo-cycliques de dynamo peuvent également être obtenues avec ce modèle. Bien que novatrice, cette étude reste très incomplète, étant donné la simplicité du modèle et l'absence de toute dépendance spatiale des champs. Plusieurs études ultérieures, dont celle de Hawley et al. (1996), que nous détaillerons dans le chapitre 2 et 3, ont mis en évidence le rôle clef de la MRI dans un tel processus. Le champ magnétique à grande échelle serait produit grâce à la force électromotrice, fruit de la corrélation non-linéaire entre les perturbations de vitesse et magnétique, amplifiées par la MRI (Rincon et al., 2007b; Lesur et Ogilvie, 2008b,a). Ce scénario est plutôt exotique, dans le sens où l'instabilité MRI permet l'entretien d'un champ magnétique à grande échelle, qui assure lui même que la MRI puisse être active.

En conclusion de cette deuxième section, les dynamos reposant sur des instabilités MHD pourraient constituer une alternative crédible aux dynamos de champ moyen afin d'expliquer l'origine du champ magnétique dans de nombreux systèmes astrophysiques. En particulier, l'étude de la dynamo magnétorotationnelle pourrait permettre de mieux cerner les mécanismes d'excitation de la turbulence MHD dans les disques, mais aussi d'améliorer notre connaissance de ces dynamos non-linéaires.

Cette présentation générale du contexte astrophysique achevée, nous allons à présent nous intéresser de manière détaillée à la dynamique magnétorotationnelle et à celle de la dynamo associée dans le contexte des disques d'accrétion.

Instabilité, turbulence et dynamo magnétorotationnelles

L'instabilité magnétorotationnelle brièvement introduite au chapitre précédent est l'un des mécanismes considéré aujourd'hui comme le plus efficace pour générer et entretenir la turbulence susceptible de transporter le moment cinétique dans les disques d'accrétion. Cette instabilité est au cœur de cette thèse et justifie qu'un chapitre entier soit dédié à sa présentation. Comme la MRI est une instabilité magnétohydrodynamique, nous commencerons par rappeler les hypothèses et les fondements théoriques de cette description décrivant le couplage d'un fluide conducteur d'électricité avec le champ magnétique. Cette présentation sera l'occasion de discuter des conditions d'application de la théorie et en particulier des effets non-idéaux dans le contexte des disques. Après un brève description des modèles théoriques et numériques utilisés pour étudier les écoulements en rotation différentielle, nous nous attacherons à re-dériver les principales propriétés de la MRI linéaire standard puis présenterons les principaux résultats numériques connus sur l'évolution non-linéaire de cette instabilité vers la turbulence dans les écoulements képlériens. Nous terminerons par présenter l'état de nos connaissances sur la dynamo magnétorotationnelle, qui constitue le sujet d'étude principal de cette thèse. Les problèmes principaux posés par l'existence des effets dissipatifs (visqueux et résistif) pour le scénario d'accrétion basé sur cette dynamo seront notamment évoqués.

2.1 Magnétohydrodynamique (MHD) dans les disques d'accrétion

2.1.1 Approximation de la MHD

Le gaz contenu dans les disques d'accrétion étant chauffé par l'astre central se retrouve sous la forme d'un plasma, constitué d'un mélange de molécules (ou atomes) neutres, et de particules chargées (électrons, ions) couplées aux champs électromagnétiques. Les plasmas que nous traiterons sont faiblement magnétisés au sens où la pression thermique est grande par rapport à la pression magnétique (paramètre plasma $\beta > 1$). Pour décrire un fluide conducteur d'électricité, il est d'usage d'utiliser les équations de la magnétohydrodynamique. Ces équations ne sont valables que sous certaines conditions :

- Le plasma doit être collisionnel (distribution maxwellienne des particules) ce qui suppose que les échelles spatiales du problème sont grandes devant le libre parcours moyen et les échelles de temps grandes devant le temps caractéristique des collisions.

	Protoplanétaire	Binaire cataclysmique	AGN
Longueur de Debye (m)	$10^{-7} - 10^{-6}$	$10^{-7} - 10^{-6}$	$10^{-6} - 10^{-3}$
Libre parcours moyen (m)	$10^{-2} - 1$	$10^{-2} - 1$	$10^5 - 10^6$
Fréquence de collision (Hz)	$10^3 - 10^5$	$10^4 - 10^6$	$10^{-3} - 10^{-1}$

TABLE 2.1 – Grandeurs caractéristiques du plasma

- Les échelles spatiales doivent être grandes par rapport à la longueur de Debye pour assurer l'électro-neutralité du plasma. Si les ions sont des protons, cela implique que la densité des électrons n_e est égale à la densité des ions n_i en tout point.

Le tableau 2.1 indique les ordres de grandeur typiques de ces échelles de longueur et de temps dans les disques astrophysiques. Elles ont été calculées grâce aux données du tableau 1.1. Si l'objectif est d'étudier les modèles globaux de disques, ces grandeurs sont à comparer avec l'épaisseur typique H et le temps caractéristique d'accrétion de ces disques. Si par contre une étude locale de la turbulence est réalisée, il est plus judicieux de comparer ces grandeurs aux échelles caractéristiques de la turbulence. Pour les disques proto-planétaires ou de binaires, l'approximation MHD est largement vérifiée. En revanche pour les disques d'AGN, cela dépend de la gamme de température étudiée et donc du rayon considéré. L'approximation fluide n'y est pas toujours appropriée.

L'hypothèse de plasma collisionnel permet de décrire l'ensemble du plasma chargé, ions et électrons, comme un seul fluide. Ce fluide a une vitesse notée \mathbf{v} , dite vitesse du centre de masse, qui correspond à la vitesse des ions puisque la masse m_e des électrons est faible devant la masse m_i des ions. L'équation du mouvement de ce fluide ressemble fortement à celle d'un fluide non-conducteur, à la différence que celui-ci est soumis à la force magnétique de Lorentz par unité de volume $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ où \mathbf{B} le champ magnétique et \mathbf{j} , le courant, proportionnel au différentiel de vitesse $\mathbf{v}_d \ll \mathbf{v}$ entre les ions et les électrons.

2.1.2 Équations de Maxwell

Comme nous venons de le voir, la force de Lorentz, centrale dans les écoulements MHD, est proportionnelle au produit vectoriel du courant et du champ magnétique. Or ces deux grandeurs, à priori inconnues, sont en réalité couplées au champ de vitesse \mathbf{v} car ce sont les mouvements de charges au sein du fluide qui génèrent les courants et le champ magnétique. Pour décrire l'évolution de \mathbf{j} et \mathbf{B} , on utilisera les équations de Maxwell dans un plasma neutre et non relativiste :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (2.3)$$

	Protoplanétaire	Binaire	AGN
Rayon de Larmor des ions (m)	$10^{-1} - 1$	$10^{-2} - 1$	$1 - 10^3$
Fréquence cyclotron des ions ω_{ci} (Hz)	$10^2 - 10^3$	$10^3 - 10^5$	$1 - 10^2$
Fréquence plasma des électrons ω_{pe} (Hz)	10^3	10^3	10

TABLE 2.2 – Rayon de Larmor et fréquences caractéristiques du plasma chargé pour $r = 1$ U.A..

La force de Lorentz par unité de volume peut donc se réécrire $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}/(\mu_0)$ tandis que l'évolution temporelle du champ magnétique dépend du rotationnel du champ électrique \mathbf{E} .

2.1.3 Loi d'Ohm et MHD non-idéale dans les disques

Le champ électrique peut être exprimé grâce à la loi d'Ohm généralisée qui s'obtient en faisant la différence entre l'équation du mouvement des ions et celle des électrons :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{j} + \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{n_e e} - \frac{(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\gamma \rho_n \rho_i} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}_e}{n_e e} + \frac{m_e}{e^2 n_e} \frac{\partial \mathbf{j}}{dt}, \quad (2.4)$$

où e est la charge de l'électron, $\eta = m_e \nu_c / (\mu_0 n_e e^2)$ la diffusivité magnétique, pour une certaine fréquence de collision ν_c , γ la constante de couplage de collisions entre les ions et les atomes neutres, ρ_i et ρ_n la densité massique des ions et des atomes neutres. Nous voyons qu'un certain nombre de termes apparaissent dans l'évolution du champ magnétique. Le premier est le terme "idéal" lié au mouvement des charges, le deuxième est le terme résistif dû aux collisions des électrons sur les autres espèces (et qui ralentissent donc le mouvement des électrons), le troisième décrit l'effet Hall, causé par la dérive de vitesse entre ions et électrons, qui donne lieu à un champ électrique perpendiculaire à \mathbf{B} et à \mathbf{j} . Le quatrième est la diffusion ambipolaire, traduisant les collisions ions/neutres. $\nabla \cdot \mathbf{P}_e / (n_e e)$ est connu sous le nom de pression électronique. Enfin le dernier est un terme lié à l'inertie des électrons et est parfois à l'origine des oscillations du plasma à la fréquence $\omega_{pe} = \sqrt{n_e e^2 / (\epsilon_0 m_e)}$.

Le calcul des grandeurs caractéristiques du plasma, comme la fréquence cyclotron $\omega_{ci} = Ze|B|/m_i$ des ions et la fréquence plasma ω_{pe} des électrons, permet d'évaluer l'ordre de grandeur de chacun de ces termes par rapport au terme principal $|\mathbf{v} \times \mathbf{B}|$. Dans un plasma complètement ionisé, on peut montrer que l'effet Hall et la pression électronique peuvent être négligés si ω_{ci}^{-1} est très petit devant le temps typique des phénomènes étudiés. De même le terme d'inertie électronique peut être oublié si ω_{pe}^{-1} est très petit devant ce temps typique. Le tableau 2.2 montre qu'à des distances de l'ordre de 1 U.A., ces trois termes sont donc négligeables. Cependant, dans un plasma peu ionisé, l'effet Hall et la diffusion ambipolaire peuvent prendre de l'importance, notamment dans les zones externes des disques protoplanétaires, à partir de 1 U.A. (Armitage, 2011; Fromang, 2013). Remarquons que les grandeurs ici calculées nécessitent la connaissance de l'intensité du champ magnétique. Les valeurs renseignées en section iv) sont les valeurs maximales du champ mesuré soit près du centre du disque, soit dans les jets. A une distance de 1 U.A. et dans le plan médian, on peut supposer en première approximation qu'il y a équipartition entre l'énergie magnétique et l'énergie cinétique, de telle sorte que $B \lesssim (2\mu_0 \rho_s^2)^{1/2}$.

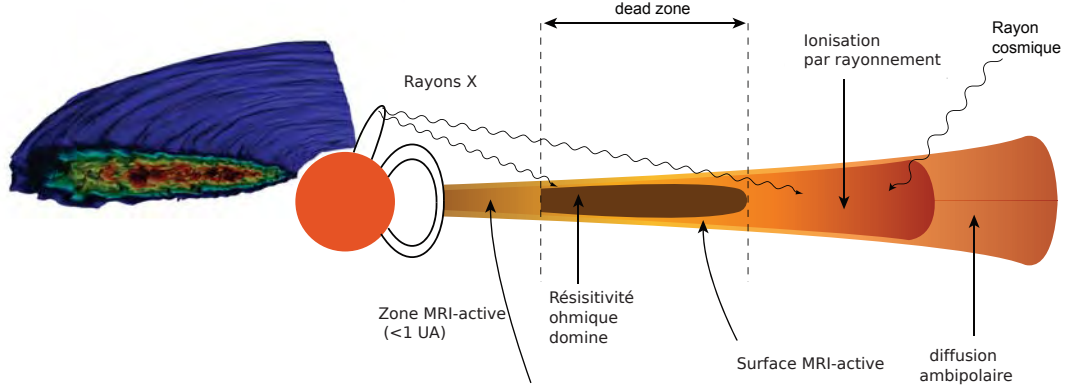


FIGURE 2.1 – Représentation d'un disque protoplanétaire et de sa "dead zone". Les régions favorables à l'instabilité MRI, caractérisés par une faible résistivité, sont localisés près de l'objet central et sur une couche superficielle à plus d'1 U.A. Les régions externes (loin du centre) sont dominées par la photo-ionisation puis par la diffusion ambipolaire. Adapté des croquis de Armitage (2011).

L'ordre de grandeur du terme idéal par rapport au terme de résistivité ohmique est donnée par le nombre de Reynolds magnétique :

$$\text{Rm} = \frac{LV}{\eta}, \quad (2.5)$$

où L et V sont la longueur et la vitesse typique de l'écoulement considéré. Dans un plasma d'hydrogène complètement ionisé, la diffusivité magnétique η (égale aussi à $1/(\mu_0\sigma)$ où σ est la conductivité) est due aux interactions coulombiennes et est donnée par :

$$\eta = 5.5 \cdot 10^5 \ln \Lambda_{ei} T^{-3/2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (\text{Balbus et Henri, 2008}) \quad (2.6)$$

où Λ_{ei} est le paramètre d'interaction de Coulomb entre les électrons et les ions. Lorsque les ions sont des protons et pour une température de 1000 K à 1 U.A., typique des disques protoplanétaires, on trouve $\eta \sim 10^8 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Pour un plasma faiblement ionisé, en revanche, la diffusivité magnétique est inversement proportionnelle à la fraction électronique du gaz $x_e = \rho_e/\rho_n$ (Spitzer) :

$$\eta = \frac{2.3 \times 10^{-4} T^{1/2}}{x_e} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (2.7)$$

x_e est une grandeur difficile à calculer dans les disques car elle dépend à la fois de l'ionisation thermique du milieu, de la photo-ionisation et de la recombinaison des électrons avec les grains de poussière ambiants. x_e varie très fortement avec la température et la densité du milieu. Pour une température de 1000 K à 1 U.A., typique des disques protoplanétaires, et en ne prenant en compte que l'ionisation thermique, on peut montrer que $x_e \approx 10^{-13}$ (Fromang, 2013). On trouve alors une diffusivité magnétique η de $10^{12} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. En prenant $L \approx 1 \text{ U.A.}$ et V la vitesse képlérienne autour du Soleil à 1 U.A., on obtient un Rm de l'ordre de 1000.

Selon le degré d'ionisation du disque, on voit donc que η et donc Rm peut prendre des valeurs assez différentes. Les ordres de grandeurs sont données ici à titre purement indicatif et ne rendent pas compte de la grande variété de régimes dissipatifs possible dans les disques d'accrétion. Ils montrent cependant que la résistivité ohmique n'est pas du tout négligeable pour la dynamique du champ magnétique dans certains disques. En particulier elle peut être importante dans les régions externes (> 1 U.A.) ou les couches profondes du disque. Gammie (1996) a suggéré que ces régions, appelées "dead zones", ne soit pas propices à l'instabilité magnétorotationnelle, tandis qu'en surface des disques (où l'ionisation est dominée par le rayonnement) ou près de l'astre central (ionisation d'origine thermique), la conductivité du plasma est suffisante pour activer l'instabilité (Fig. 2.1).

Dans le cadre de cette thèse, nous négligerons l'effet Hall, la diffusion ambipolaire et la pression électronique et ne garderons de l'équation (2.4) que le terme $-\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ et le terme résistif $\eta \mathbf{j}$. A partir de cette réduction, il est possible de dériver les équations de la magnétohydrodynamique dite "résistive" permettant de décrire complètement l'état du fluide et du champ magnétique à tout temps, pour une condition initiale donnée.

2.1.4 Equations de la MHD résistive et incompressible dans un écoulement en rotation

La magnétohydrodynamique dite résistive, dans le repère tournant associé à la rotation différentielle du système, est régie par quatre équations fondamentales détaillées ci dessous. \mathbf{v} et \mathbf{B} désignent respectivement le champ de vitesse et le champ magnétique.

Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.8)$$

Pour les résultats de cette thèse, nous ferons l'hypothèse que l'écoulement est incompressible (nombres de Mach faibles) et homogène ($\rho = cte$), ce qui implique

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.9)$$

Equation de conservation du flux magnétique :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.10)$$

Cette équation (connue sous le nom de Maxwell-Thomson) traduit le fait qu'il n'existe pas de monopole magnétique et que le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est nul.

Equation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left(P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\rho\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (2.11)$$

Cette équation décrit le mouvement du fluide dans le repère tournant soumis à :

- la force de pression du fluide qui se met sous la forme d'un gradient,

- la force de Lorentz qui s'écrit $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}/(\rho\mu_0)$; après avoir développé son expression, on montre qu'elle est composée d'un terme de pression magnétique que l'on peut regrouper dans le gradient avec la pression thermique, et d'un terme de tension magnétique $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}/(\rho\mu_0)$ qui a tendance à s'opposer aux déformations des lignes de champ; dans la suite la pression totale sera notée Π ,
- la force de friction visqueuse qui fait intervenir la viscosité cinématique de l'écoulement ν , constante et uniforme.

Dans le membre de gauche, nous avons regroupé les termes d'inertie, à savoir le terme d'advection et le terme de Coriolis $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$ qui fait intervenir la vitesse de rotation de l'écoulement au point considéré.

Equation d'induction :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} + \eta \Delta \mathbf{B}. \quad (2.12)$$

Elle régit la dynamique du champ magnétique; elle peut être dérivée en combinant l'équation de Maxwell-Faraday (2.2) et la loi d'Ohm (2.4). Le terme $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v}$ correspond au processus d'induction (création de champ magnétique à partir de l'écoulement) et le terme $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B}$ représente le processus d'advection du champ \mathbf{B} par l'écoulement. La diffusion magnétique $\eta \Delta \mathbf{B}$ a tendance à s'opposer à la création de champ magnétique \mathbf{B} . Les termes associés à l'effet Hall et à la pression électronique ne sont pas pris en compte pour les raisons données en 2.1.3. Une autre forme de l'équation fait apparaître la force électromotrice $\mathcal{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, et s'écrit

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B}. \quad (2.13)$$

2.1.5 Modèle de la couche de cisaillement et cas képlérien

La MRI étant une instabilité locale, il n'est pas forcément judicieux de dériver les équations de la MHD dans une géométrie cylindrique. Dans la suite, on restreindra en réalité l'étude à un modèle cartésien appelé "couche de cisaillement" (Goldreich et Lynden-Bell, 1965) dans lequel les effets de courbure sont négligés (Fig. 2.2). On notera x , y et z les coordonnées cartésiennes, associées respectivement à la direction radiale, azimutale et verticale. Localement, en un point de rayon r_0 , la vitesse \mathbf{v} d'une particule se décompose en trois composantes :

- une vitesse de rotation $r_0\Omega(r_0)\mathbf{e}_y$, uniforme sur l'intervalle de longueur en x de la couche,
- un cisaillement linéaire dû à la rotation différentielle qui s'exprime

$$\mathbf{u}_s = -Sx\mathbf{e}_y \quad \text{avec} \quad S = -r_0 \left. \frac{d\Omega}{dr} \right|_{r=r_0}, \quad (2.14)$$

- des perturbations de vitesse \mathbf{u} .

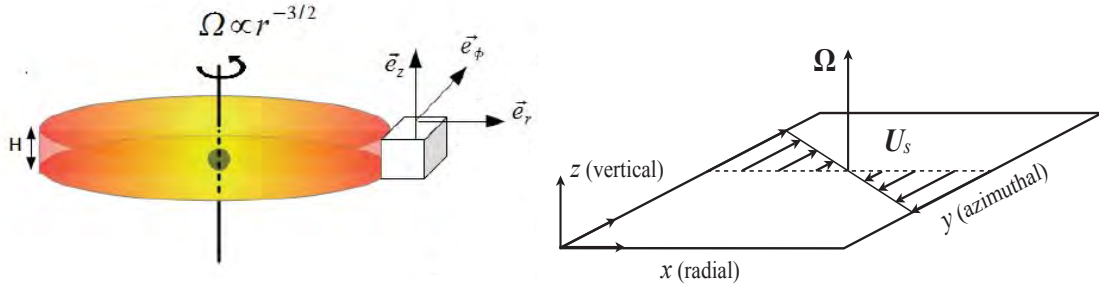


FIGURE 2.2 – Modèle local de la couche de cisaillement

Pour le cas d'une rotation képlérienne, on a $S = 3/2\Omega(r_0)$. Dans ce formalisme, un champ est dit axisymétrique si il ne dépend pas de y . Les équations qui régissent la dynamique des perturbations \mathbf{u} et du champ \mathbf{B} s'écrivent alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - Sx \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = 2\Omega u_y \mathbf{e}_x - (2\Omega - S)u_x \mathbf{e}_y - \frac{1}{\rho} \nabla \Pi + \frac{1}{\rho \mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - Sx \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B} = -SB_x \mathbf{e}_y + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u} + \eta \Delta \mathbf{B}. \quad (2.17)$$

2.1.6 Transport de moment cinétique

Le taux de transport local de moment cinétique est une quantité fondamentale car elle caractérise l'intensité de l'accrétion au sein du disque. Il peut être dérivé à partir de l'équation (2.16). En r_0 , l'équation d'évolution du moment cinétique vertical $\mathcal{L}_z = \rho r_0 (r_0 \Omega + (2\Omega - S)x + u_y)$, par unité de volume, s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_z}{\partial t} - Sx \frac{\partial \mathcal{L}_z}{\partial y} + r_0 \nabla \cdot \left[\rho u_y \mathbf{u} + (2\Omega - S)x \mathbf{u} + \Pi \mathbf{e}_y - \frac{B_y \mathbf{B}}{\mu_0} - \nu \rho \nabla u_y \right] = 0. \quad (2.18)$$

Cette équation traduit la conservation du moment cinétique global. Le flux radial de moment cinétique T_x est la projection en x du terme sous la divergence. En négligeant le terme de viscosité (cf considérations données en 1.1.2i), ce flux s'écrit alors :

$$T_x = r_0 \left[\rho u_x (u_y + 2\Omega x - Sx) - \frac{B_x B_y}{\mu_0} \right]. \quad (2.19)$$

En prenant la moyenne sur les trois directions de l'espace, notée $\langle \rangle$, et en considérant que la moyenne des fluctuations sur le domaine d'intégration est nulle, on obtient alors le coefficient de transport α effectif (et la viscosité équivalente) :

$$\alpha = \frac{\nu_t}{\Omega H^2} = \frac{T_x}{\Omega^2 H^2 \rho r_0} = \frac{1}{\Omega^2 H^2} \left\langle u_x u_y - \frac{B_x B_y}{\rho \mu_0} \right\rangle. \quad (2.20)$$

On note que le transport de moment cinétique est proportionnel à la différence entre les corrélations en x et en y des perturbations de vitesse et de champ magnétique. Le premier terme correspond au tenseur de Reynolds et le second au tenseur de Maxwell.

2.2 Modèle numérique de la "shearing box"

La représentation numérique du modèle de la couche de cisaillement est la "shearing box". Depuis le début des années 90, celle-ci s'est avérée très populaire pour simuler localement l'écoulement au sein des disques d'accrétion. Encore aujourd'hui elle est utilisée dans la modélisation de nombreux fluides astrophysiques dont l'écoulement de base est cisailé. Pour la décrire très simplement, la shearing box est une boîte cartésienne de dimensions (L_x, L_y, L_z) , avec L_x et L_z généralement très petites devant le rayon du disque. On peut ainsi imaginer le disque entier comme un pavage horizontal de plusieurs shearing box, dont les propriétés statistiques sont identiques. Cela suppose que l'échelle de la turbulence que l'on observe est plus petite que la taille de la boîte. Si l'on néglige les effets de courbure et que l'on étudie des ondes en spirales non-axisymétriques, d'échelle azimutale comparable aux périmètre du disque en r_0 , alors L_y peut être assimilée à ce périmètre. Les équations qui y sont développées sont celles présentées en section 2.1.4. Certains auteurs utilisent la formulation "compressible" des équations de la MHD (qui contient une équation d'évolution pour l'énergie interne) et prennent également en compte l'effet de la stratification verticale en densité $\rho(z)$, qui sera ultérieurement négligé dans notre étude.

L'intérêt de la shearing box est de pouvoir simuler la turbulence localement sans se préoccuper de la géométrie du disque ni des conditions limites souvent difficiles à déterminer. Dans ce cadre, les conditions aux bords sont généralement périodiques dans la direction verticale et azimutale, et "shear" périodique dans la direction radiale. Le cas radial est plus complexe à traiter car les solutions ne peuvent pas être strictement périodiques en x dans le référentiel tournant à r_0 . Une solution est de se placer dans le référentiel "lagrangien" qui suit le mouvement du cisaillement, ce qui permet d'imposer la périodicité dans cette direction. La contrepartie de cette transformation, déjà remarquée en section 2.3.2, est que le vecteur d'onde, dans une représentation de Fourier, dépend explicitement du temps. Cette formulation de "shear" périodicité a été introduite dans le cadre de la MRI et des écoulements képlériens par Hawley et al. (1995). Brandenburg et al. (1995) ont utilisé un code basé sur une méthode de différence finie. D'autres implémentations ont été développées au sein des codes ATHENA (Stone et al., 2008), PLUTO (Mignone et al., 2007), NIRVANA-III (Ziegler, 2008), RAMSES (Fromang et al., 2006) ou SNOOPY (développé par Geoffroy Lesur). Certains d'entre eux, comme SNOOPY, utilisent une méthode pseudo-spectrale (décomposition en modes de Fourier) dont l'intérêt est de contrôler de façon précise les effets dissipatifs. Ce code sera largement utilisé au cours de cette thèse et est présenté en annexe A.1.

2.3 Instabilité magnétorotationnelle linéaire

Nous allons à présent nous intéresser à l'instabilité MRI, active en particulier dans les écoulements magnétisés en rotation képlérienne. Cette instabilité linéaire, qui a la capacité d'amplifier exponentiellement des perturbations d'amplitude initialement faible, est un mécanisme puissant permettant de transporter le moment cinétique. Nous commencerons par rappeler le principe physique de l'instabilité puis nous étudierons en détails ses propriétés linéaires, c'est à dire la manière dont les perturbations évoluent lorsqu'elles restent faibles par rapport à l'écoulement de base cisailé et au champ magnétique support de l'instabilité.

2.3.1 Principe de l'instabilité

Afin d'expliquer le principe général de la MRI, nous supposons un disque en rotation képlérienne (telle que considéré par Balbus et Hawley (1991)), en présence d'un champ magnétique axisymétrique purement toroïdal (dans la direction azimutale). En réalité la MRI peut se développer pour une géométrie arbitraire, en particulier pour un champ poloïdal (dans le plan perpendiculaire à l'écoulement). Considérons un état initial où 2 particules de plasma, de même moment cinétique, sont situées sur une ligne de champ commune en $r = r_0$ (Fig. 2.3a). A la suite d'une perturbation, la première particule subit un déplacement $\delta r_1 > 0$ (vers une orbite plus haute) et la deuxième un déplacement $\delta r_2 < 0$ (vers une orbite plus basse).

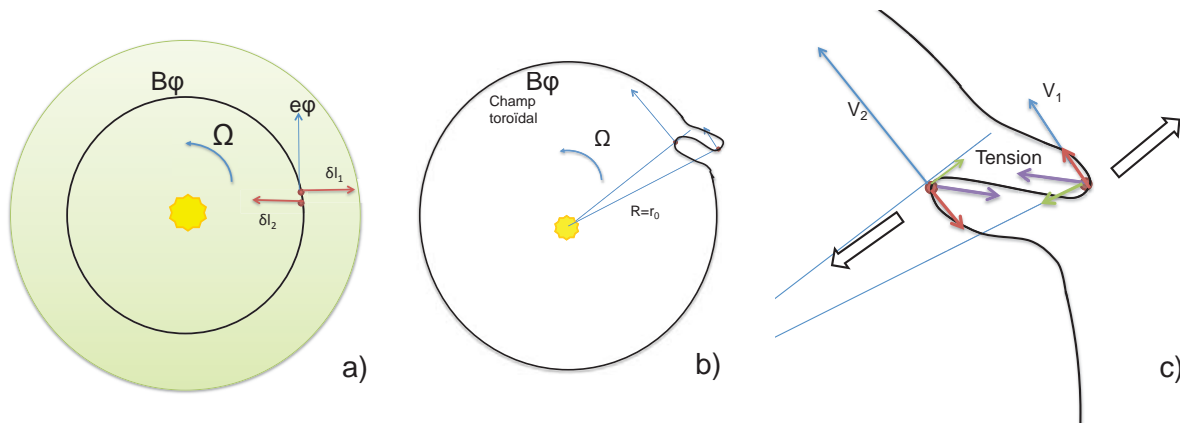


FIGURE 2.3 – Principe de la MRI et de son effet sur la ligne de champ toroïdal. Remarque : ce schéma est une représentation de la MRI très simplifiée et peu réaliste dans un plasma fluide. En réalité les effets de pression interdisent un mouvement 2D tel que représenté ici.

Si le plasma est peu résistif, le champ reste attaché aux deux particules (théorème du champ gelé) et à cause de la rotation différentielle, la ligne de champ se retrouve déformée (Fig. 2.3b). La tension magnétique associée à cette déformation génère une force de rappel (tension magnétique) illustrée par les flèches violettes sur la figure 2.3c. La composante toroïdale de la tension magnétique (en rouge) a tendance à accélérer la première particule et à freiner la deuxième. Il en résulte que la première va gagner encore plus de moment cinétique et monter, tandis que la deuxième va en perdre et va continuer à descendre. Les deux particules vont être de plus en plus éloignées et la tension magnétique entre les deux va être amplifiée. Le couple magnétique transfère le moment cinétique de la seconde vers la première particule, évacuant ainsi globalement ce moment cinétique vers l'extérieur du disque. L'instabilité n'est possible que si la vitesse de rotation du fluide décroît avec le rayon, ce qui est le cas du profil képlérien, car dans le cas contraire, la composante toroïdale de la tension magnétique serait dirigée dans le sens opposé et n'aurait donc plus l'effet déstabilisant. On peut également remarquer que si le champ magnétique est trop fort, la composante radiale de la force de tension magnétique peut avoir une action stabilisante en empêchant les particules de trop s'éloigner et en les ramenant à leur position initiale. On voit donc que l'instabilité est le résultat de plusieurs ingrédients qui sont :

- la présence d'un champ magnétique grande échelle de magnitude assez faible ;

- des perturbations de vitesse et de champ magnétique déformant les lignes de champ ;
- une rotation différentielle qui décroît avec le rayon.

2.3.2 Propriétés de l'instabilité dans un champ magnétique uniforme et constant

i) Linéarisation des équations

Afin d'obtenir un critère de stabilité pour la MRI, nous allons étudier localement l'évolution d'une perturbation de champ magnétique \mathbf{b} et de vitesse \mathbf{u} en linéarisant les équations de la MHD dans le modèle de la couche de cisaillement présenté en section 2.1.5. On suppose le champ magnétique de la forme :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b} \text{ avec } \mathbf{B}_0 = B_{0y}\mathbf{e}_y + B_{0z}\mathbf{e}_z$$

B_{0y} et B_{0z} sont les composantes toroïdale et verticale à grande échelle du champ magnétique, supposées uniformes et constantes dans le disque. La présence d'une composante radiale n'est pas indispensable ici pour décrire l'instabilité. L'effet de la résistivité et de la viscosité sont pris en compte. En négligeant les termes non-linéaires, on obtient les équations linéarisées suivantes :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - Sx \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \nabla \Pi + 2\Omega u_y \mathbf{e}_x - (2\Omega - S)u_x \mathbf{e}_y + \frac{1}{\rho\mu_0} \left(B_{0y} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y} + B_{0z} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z} \right) + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - Sx \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y} = -Sb_x \mathbf{e}_y + \left(B_{0y} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + B_{0z} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) + \eta \Delta \mathbf{b}. \quad (2.23)$$

ii) Perturbations axisymétriques

Dans un premier temps, nous restreignons l'étude au cas d'ondes axisymétriques, c'est à dire ne dépendant pas de y . On cherche à décomposer les solutions sur des modes de Fourier orthogonaux de la forme $V(\omega, k) \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ avec ω la pulsation et $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z)$ le vecteur d'onde. L'équation de dispersion est obtenue en injectant ces modes dans les équations linéarisées. On obtient un système de 6 équations scalaires dont on peut calculer le déterminant. L'annulation de ce déterminant permet d'obtenir la relation de dispersion suivante :

$$(\omega_\nu \omega_\eta - \omega_A^2) [\omega_\nu^2 \omega_\eta^2 - 2\omega_\nu \omega_\eta \omega_A^2 - \delta^2 \kappa^2 \omega_\eta^2 - \omega_A^2 (S^2 - \omega_A^2)] = 0, \quad (2.24)$$

où ω_ν et ω_η sont définies par $\omega_\nu = \omega - i\nu k^2$ et $\omega_\eta = \omega - i\eta k^2$. La pulsation d'Alfvén ω_A est reliée au champ B_0 par la relation :

$$\omega_A = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})}{\sqrt{\rho\mu_0}} = \mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k},$$

où $\mathbf{V}_A = \mathbf{B}_0 / \sqrt{\rho\mu_0}$ est la vitesse d'Alfvén et $\kappa^2 = 2\Omega(2\Omega - S)$ est la fréquence épicyclique qui représente la fréquence hydrodynamique naturelle (sans champ magnétique) à laquelle un élément de masse, en orbite dans le disque, oscille radialement. On a introduit également le facteur $\delta = k_z/k$.

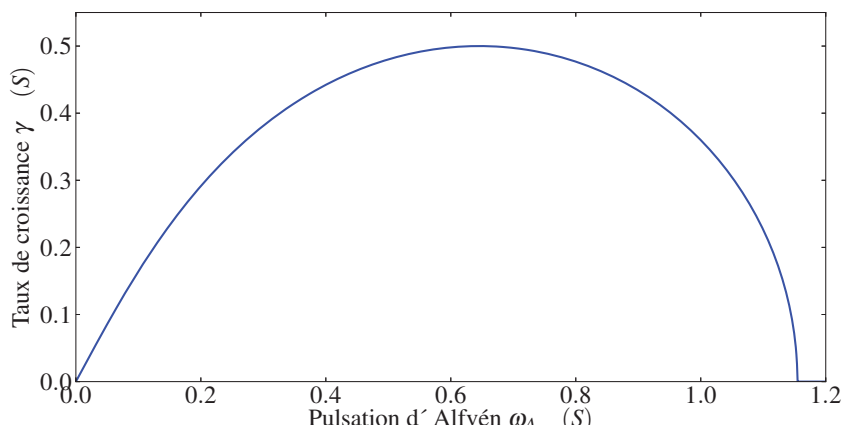


FIGURE 2.4 – Taux de croissance de la MRI axisymétrique linéaire en fonction de ω_A pour $\delta = 1$, $\nu = 0$ et $\eta = 0$.

La relation de dispersion étant d'ordre élevé, il est difficile de donner une solution analytique simple. Dans un premier temps, nous étudions donc le critère d'instabilité de la MRI sans dissipation, c'est-à-dire en posant $\eta = 0$ et $\nu = 0$. On remarque tout d'abord la branche de solution Alfvénique $\omega = \pm\omega_A$. Cette solution ne nous intéresse pas car elle n'est pas instable, ω étant réel (le critère d'instabilité est $\omega^2 < 0$). Concentrons-nous donc sur le deuxième membre de l'équation (2.24) qui est du second ordre en ω^2 et dont nous pouvons donner les racines :

$$\omega^2 = \omega_A^2 + \frac{\kappa^2 \delta^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\kappa^4 \delta^4 + 16 \omega_A^2 \Omega^2 \delta^2}. \quad (2.25)$$

Ce terme ne peut être négatif qu'en prenant la solution avec le signe négatif; après quelques calculs, la condition d'instabilité $\omega^2 < 0$ s'écrit alors $\omega_A^2 < \delta^2(4\Omega^2 - \kappa^2) = 2\delta^2\Omega S$. On en déduit en particulier que $d\Omega/dr = -S/r_0 < 0$ est une condition nécessaire d'instabilité. Dans le cas képlérien on remarque que $S = 3/2\Omega$ et donc que $\kappa = \Omega$, ce qui donne finalement :

$$0 < \omega_A^2 < 3\Omega^2 \delta^2. \quad (2.26)$$

La première conclusion que l'on peut tirer de cette étude est que la MRI n'existe que si le vecteur d'onde a une composante non nulle dans la direction du champ magnétique ($\omega_A = \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_A \neq 0$). Ceci traduit le rôle essentiel joué par la tension magnétique. La deuxième est que la MRI est une instabilité de champ faible, c'est-à-dire que si la pulsation Alfvénique (qui dépend de l'intensité du champ et du vecteur d'onde) est trop grande, il n'y a pas de croissance des perturbations. La limite est donnée par la valeur $\omega_A = \sqrt{3}\Omega\delta$. En effet un champ magnétique trop fort conduit à une tension magnétique rigidifiante qui rend impossible le développement de l'instabilité. Les petites longueurs d'onde (k^2 grand) sont aussi rapidement stabilisées pour une intensité de champ fixée.

Nous avons tracé le taux de croissance de l'instabilité $\gamma = -i\omega$ en fonction de ω_A (Fig. 2.4) afin d'étudier le comportement asymptotique de l'instabilité et de ses maxima dans le cas képlérien. Pour le tracé on a pris ici une valeur de $\delta = 1$ ($k_x = 0$) et on a normalisé le taux

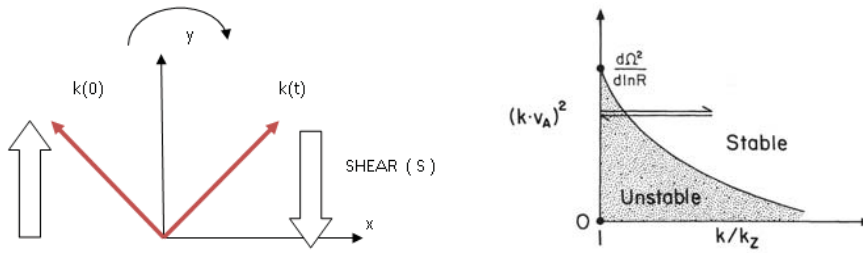


FIGURE 2.5 – A gauche : évolution temporelle du vecteur d’onde non-axisymétrique. A droite : diagramme d’instabilité de la MRI non-axisymétrique (Balbus et Hawley, 1992).

de croissance et ω_A à S . γ atteint un maximum, égal à $S/2$ pour $\omega_A = \sqrt{5/12}S$. Ce taux de croissance est de l’ordre de l’inverse de la période orbitale et est l’un des plus élevés obtenu pour une instabilité en présence de cisaillement (Balbus et Hawley, 1992). Cela fait par conséquent fait de la MRI une instabilité incontournable dans l’étude de la dynamique des disques d’accrétion.

iii) Cas d’un champ toroidal : perturbations non-axisymétriques

Lorsque le champ est purement toroidal, les ondes amplifiées par la MRI sont nécessairement non-axisymétriques, c’est-à-dire dépendant de la variable y ($k_y \neq 0$). En effet, le vecteur d’onde doit toujours avoir une composante colinéaire avec le champ support pour que la MRI puisse être active. On parle alors d’ondes de cisaillement (en anglais ”shearing waves”), aussi connues sous le nom d’ondes d’Orr-Kelvin (Lord Kelvin, 1887; Orr, 1907). Nous verrons par la suite que l’excitation de telles ondes 3D par la MRI est très importante pour exciter une dynamo dans les disques. Il est intéressant de comprendre comment ces perturbations sont amplifiées par la MRI par rapport au cas d’ondes axisymétriques.

La grande différence avec les perturbations axisymétriques est qu’elles ne se décomposent pas en modes de Fourier classiques. En effet il n’est pas possible de rendre périodique la coordonnée cartésienne x car le terme de cisaillement moyen $-Sx\partial\mathbf{u}/\partial y$ dans l’équation (2.22) dépend linéairement de x . Pour remédier à ce problème, on peut en fait introduire un vecteur d’onde qui dépend explicitement du temps :

$$k_x = k_x(0) + Sk_y t, \quad k_y = k_y(0), \quad k_z = k_z(0). \quad (2.27)$$

Cette opération revient à trouver des modes plans normaux dans un référentiel lagrangien qui suit le cisaillement et dans lequel $-Sx\partial\mathbf{u}/\partial y$ est absorbé dans la dérivée temporelle. On voit que la composante en x du vecteur d’onde dépend du temps, ce qui décrit mathématiquement l’enroulement d’ondes en spirale dans un écoulement en rotation différentielle.

Le cisaillement fait tourner le front d’onde tout en étirant le vecteur \mathbf{k} de façon à faire diminuer progressivement la longueur d’onde radiale. Lorsque le vecteur \mathbf{k} a une composante radiale k_x de signe opposé à k_y , on dit que l’onde est dans un mode ”leading”. La norme de k_x décroît linéairement jusqu’au temps $\tau_{sh} = |k_x(0)/Sk_y|$ où elle s’annule. Puis l’onde s’enroule ($k_x k_y > 0$), on dit alors qu’elle est dans un mode trailing. Au temps longs, $|k_x(t)|$ tend vers l’infini, ce qui correspond à une structure spirale feuilletée qui finit toujours par mourir sous l’effet combiné du cisaillement et de la dissipation visqueuse et magnétique.

Malgré leur comportement aux temps longs, ces modes non-axisymétriques, sont amplifiés par la MRI au moins de façon transitoire. Dans les équations linéarisées, la dérivée spatiale en x

va se traduire par un terme $ik_x = ik_x(0) + iSk_y t$ dépendant du temps ; la dérivée temporelle des perturbations ne peut donc plus se mettre plus sous la forme $-i\omega$ en raison de la dépendance explicite des équations par rapport au temps. Le calcul de la MRI non-axisymétrique a été partiellement réalisé par Balbus et Hawley (1992), avec prise en compte de la compressibilité. Nous nous limitons ici au cas d'un écoulement incompressible. L'équation obtenue est une équation quartique sur les perturbations de champ magnétique radial :

$$\frac{1}{\gamma^2} \left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_A^2 \right]^2 b_x + \kappa^2 \left[\frac{d^2}{dt^2} + \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\kappa^2} \right) \omega_A^2 \right] b_x - 6 \frac{k_x k_y}{k_z^2} S \left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_A^2 \right] \frac{db_x}{dt} = 0. \quad (2.28)$$

On retrouve bien le terme ω_A de pulsation alfvénique qui intervient dans le terme d'induction et de force de Lorentz ainsi que la pulsation épicyclique κ . Remarquons tout d'abord que l'annulation de k_y dans l'expression ci-dessus nous ramène au cas axisymétrique. Un terme de plus contenant la composante k_x dans le terme de droite caractérise l'évolution des ondes on-axisymétriques ; selon la valeur de k_x , l'équation (2.28) peut changer de nature. Par conséquent lorsque l'onde est suffisamment trailing (k_x grand), la solution peut passer d'une exponentielle croissante à une fonction décroissante ou oscillante. Sur la figure 2.5 (à droite), on voit que la région d'instabilité est traversée lorsque l'onde passe de leading à trailing. Lorsque l'onde est cisailée et que \mathbf{k} devient suffisamment grand, l'onde quitte la région instable et finit par être dissipée.

Aux temps courts, c'est à dire lorsque $k_x = k_{x0} + Sk_y t$ reste inférieur à k_z et si $k_y \ll k_z$, il est possible d'obtenir une solution approchée de l'équation (2.28), qui reproduit la croissance exponentielle transitoire de l'onde par la MRI. Cette solution est obtenue par une analyse WKB sur le petit paramètre k_y/k_z . Cette approche a été notamment utilisée par Lesur et Ogilvie (2008a) afin de calculer les modes non-axisymétriques MRI en champ non-uniforme, et donne de bons résultats en comparaison avec les solutions linéaires obtenues numériquement.

2.3.3 Effet de la dissipation sur l'instabilité linéaire

L'effet de la viscosité ν et de la diffusivité magnétique η est caractérisé par deux nombres sans dimension, les nombres de Reynolds (Re) et de Reynolds magnétique (Rm), définis dans le cas incompressible par :

$$\text{Re} = \frac{SL^2}{\nu} \quad \text{et} \quad \text{Rm} = \frac{SL^2}{\eta}, \quad (2.29)$$

où L est la longueur physique caractéristique du domaine étudié dans le modèle de couche de cisaillement. Le régime de bas Re (forte viscosité) se traduit par une résistance de l'écoulement vis-à-vis des forces entretenant sa dynamique. Si la viscosité est trop importante, la force de Lorentz n'est pas suffisante pour déstabiliser le fluide. Le taux de croissance diminue avec Re jusqu'à s'annuler pour un certain Re critique. Un calcul réalisé par Lesur (2007) montre qu'en réalité pour n'importe quel Re il y a toujours possibilité de générer de la MRI pourvu que Rm soit suffisamment grand. En dessous d'un certain Re (autour de 10-20), cette condition n'a plus de sens physique car la plupart des disques d'accrétion n'ont pas de Rm infiniment grands.

La résistivité magnétique, quant à elle, limite les effets inductifs et autorise les lignes de champ à glisser dans l'écoulement, diminuant l'effet de la tension magnétique. Lorsque le rappel magnétique devient trop faible pour compenser la force de Coriolis stabilisante, la MRI disparaît.

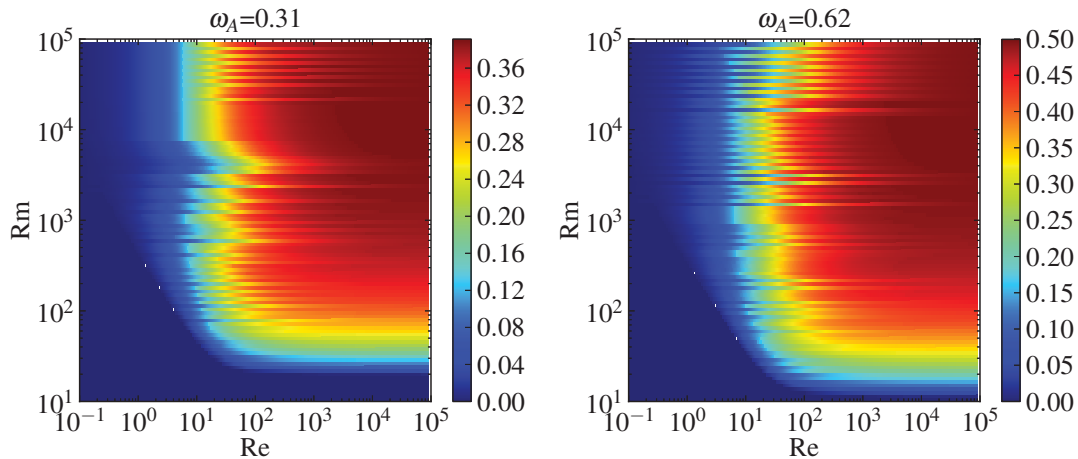


FIGURE 2.6 – Taux de croissance de la MRI axisymétrique, normalisé par rapport à S , en fonction de Re et Rm , pour différents ω_A .

La limite d'instabilité est obtenue pour un Rm critique quand ces deux forces sont du même ordre de grandeur. Ce Rm critique dépend du Re mais tend rapidement vers une valeur finie quand $Re \gg 1$. Cet effet de résistivité peut poser des problèmes dans les disques faiblement ionisés comme les disques d'étoiles jeunes, nous y reviendrons en fin de chapitre.

Analytiquement, les termes de dissipation ajoutent une dépendance des modes de perturbations en $e^{-k^2\nu t}$ et $e^{-k^2\eta t}$. Le calcul numérique précis du taux de croissance γ axisymétrique en fonction de Re et Rm peut être effectué en cherchant les zéros du polynôme d'ordre 4 associé à l'équation de dispersion (2.24). La figure 2.6 montre que γ décroît lorsque la dissipation est plus forte. Ce comportement ne dépend pas de l'intensité du champ magnétique, bien que le Rm critique pour lequel l'instabilité se déclare ($\gamma > 0$) augmente lorsque ω_A diminue. On notera que le taux de croissance tend vers une valeur asymptotique quand Re et Rm tendent tous les deux vers l'infini. L'effet de la dissipation sur les ondes non-axisymétriques est un peu plus subtil. La dépendance du taux de croissance est globalement la même que pour des ondes axisymétriques (autrement dit, l'onde évolue de la même manière au temps courts). En revanche aux temps longs, les ondes non-axisymétriques sont fortement cisailées, donc leur longueur d'onde radiale devient de plus en plus petite avec le temps. Plus l'échelle des perturbations est petite, plus le temps de diffusion diminue ($t_D \propto 1/\nu k^2$ ou $\propto 1/\eta k^2$). Comme k_x augmente proportionnellement à t pour ces ondes, celles-ci décroissent alors en $\exp(-\nu k_y^2 S^2 t^3)$ ou $\exp(-\eta k_y^2 S^2 t^3)$. La dissipation a donc pour effet de tuer très efficacement la MRI au temps longs, quelque soit la condition initiale ou ω_A .

2.4 Turbulence magnétorotationnelle en champ magnétique imposé à flux net

La théorie linéaire de la MRI, que nous venons de présenter, n'est pas suffisante pour décrire l'effet de l'instabilité dans son ensemble et en particulier les propriétés de turbulence qui en découle. Pour cela, il est essentiel d'étudier la phase non-linéaire de son évolution. L'approche

analytique est limitée pour étudier cette phase et il est par conséquent approprié d'utiliser les simulations numériques dans le modèle de la shearing box (voir section 2.2).

Dans cette section, nous présentons les résultats des simulations de la MRI pour un champ imposé (impliquant que le flux magnétique total à travers une section de la shearing box est une constante non nulle). L'une des principales quantités mesurée dans ces simulations est le coefficient α (défini par l'équation 2.20) qui traduit l'efficacité du transport turbulent.

2.4.1 Évolution non-linéaire et transition vers la turbulence

Les premières simulations de la MRI et de son comportement non-linéaire, dans cette configuration ont été réalisées par Hawley et Balbus (1991) en 2D. Ils ont montré que les modes amplifiés par la MRI prenaient la forme de "chaines" dans leur phase non-linéaire. Ces modes étirent les lignes de champ magnétique dans la direction radiale, emportant le champ et la matière de part et d'autre de leur orbite initiale. Leur étude suggère que ces structures transportent efficacement le moment cinétique vers l'extérieur du disque. Lorsque la phase non-linéaire est suffisamment avancée, les lignes de champ magnétique et de vitesse forment des plis de plus en plus resserrés, produisant d'importants gradients (verticaux si le champ support de la MRI est dans la direction z et horizontaux si celui-ci est toroidal). Goodman et Xu (1994) ont montré que ces structures en forme de "chaines" étaient linéairement instables vis à vis de deux types d'instabilités secondaires, la plus rapide s'apparentant à une instabilité de Kelvin-Helmoltz. Leur conclusion indique que ces instabilités, dites "parasites", semblent pouvoir déstabiliser l'écoulement et l'amener, par cascade, vers un état de turbulence MHD. D'autres auteurs comme Latter et al. (2009) ont étudié le développement d'instabilités linéaires de type "pinch" ou "tearing", prenant naissance sur les courants importants qui se forment sur ces modes en chaînes. Leur étude (en 3D) suggère cependant que le renouvellement et la destruction successives de ces modes, conduisant à un état de turbulence développée, est liée à la présence d'un mécanisme non-linéaire, impliquant l'interaction de plusieurs modes MRI actifs.

Les simulations 3D de la MRI en flux net, dans la shearing box, ont été initiées par Hawley et al. (1995). Dans un premier temps, ces simulations indiquent que l'évolution non-linéaire de la MRI conduit systématiquement à un état de turbulence MHD subsonique, initié par des instabilités parasites de modes MRI non-axisymétriques. Le transport radial de moment cinétique obtenu dans leur configuration se fait vers l'extérieur du disque avec une efficacité en accord avec les observations (α variant de 10^{-3} à 10^{-1}). Le tenseur de Maxwell (voir eq. (2.20)), contribue majoritairement à ce transport. Ces travaux ont notamment montré que la turbulence initiée par la MRI se développe quelque soit la géométrie du champ support, qu'il soit vertical ou toroidal. Le transport obtenu est cependant plus faible dans le cas d'un champ toroidal.

Les simulations 3D que nous avons présentées jusqu'ici n'incluent pas la stratification verticale. Lorsque celle-ci est prise en compte, des difficultés apparaissent pour soutenir un état turbulent (Miller et Stone, 2000). Pour un champ initialement toroidal et uniforme, les modes en chaînes, amplifiés par la MRI, sont bien observés mais sont vite expulsés du plan du disque à cause de la flottaison magnétique induite par la stratification. Il se forme alors une couche très magnétisée et chaude dans les parties hautes du disque ($z > 2H$). La turbulence reste localisée au niveau du plan et n'atteint jamais un état stationnaire (grande variabilité temporelle de

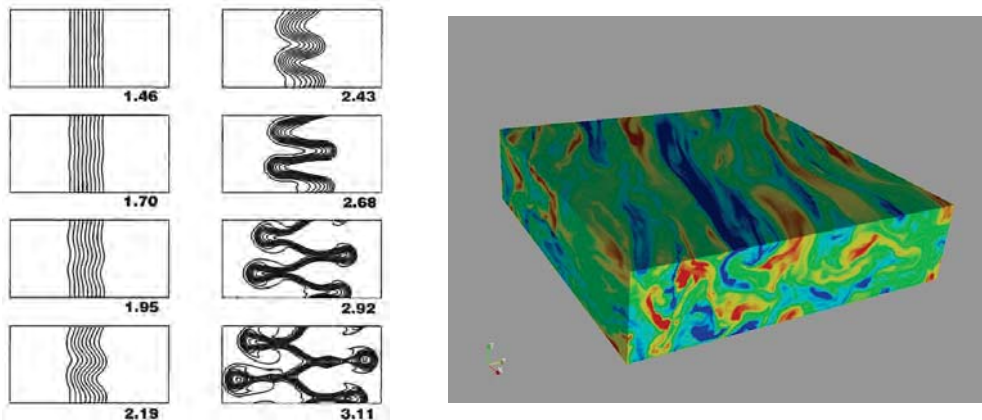


FIGURE 2.7 – A gauche : évolution non-linéaire des modes magnétiques MRI, prenant la forme de chaînes au temps longs et transportant la matière dans la direction radiale. Le temps indiqué est exprimé en Ω^{-1} (tiré de Hawley et Balbus (1991)). A droite : simulation dans la shearing box de turbulence MRI 3D avec le code SNOOPY (G. Lesur, P.Y. Longaretti).

l'écoulement). De plus elle ne semble pas aussi efficace que dans le cas d'une densité homogène ($\alpha < 2 \cdot 10^{-2}$). Pour un champ initialement vertical, la croissance des modes en chaînes induit une pression magnétique si forte qu'elle finit par briser la structure du disque. Le problème a été revisité très récemment par Lesur et al. (2013); Fromang (2013) qui ont suggéré que des jets ou des vents MHD étaient associés à la dynamique magnétorotationnelle dans les modèles de disques stratifiés. Nous verrons dans la section 2.5 que ces conclusions ne s'appliquent pas forcément lorsque le champ est à flux nul. Les propriétés de la turbulence forcée par la MRI dépendent de la géométrie et la dépendance spatiale du champ magnétique.

2.4.2 Effet de la dissipation et implications pour la physique des disques.

La plupart des simulations que nous avons évoquées précédemment n'incluaient pas explicitement les effets dissipatifs, à savoir le frottement visqueux et la résistivité (caractérisés par le Re et le Rm). Mais si aucune dissipation d'origine physique apportée par ν et η n'est imposée, l'énergie introduite cascade à l'échelle de la grille numérique et finit tout de même par être dissipée. La dissipation d'énergie dans ces simulations est donc complètement dominée par des effets numériques. Ce problème a été initialement soulevé dans ce contexte par Fromang et Papaloizou (2007); Davis et al. (2010); Pessah et al. (2007) dans des configurations de champ à flux nul où le transport mesuré dans les simulations dépendait de la résolution numérique.

La dissipation visqueuse et ohmique ont en réalité un impact majeur sur le développement de la MRI et de la turbulence associée. Tout d'abord, nous avons vu en section 2.3.3 que la MRI elle-même est inactive en dessous d'un certain Rm . Or les régions externes ($r \gg 1$ U.A.) et les couches profondes des disques protostellaires sont généralement froides et denses, avec un taux d'ionisation assez faible (voir section 2.1.3). La résistivité du plasma peut donc être très forte dans ces régions ($Rm < 100$). La présence de ces "dead zones", pouvant occuper un volume important du disque, a suscité un débat sur la question de l'efficacité du transport induit par la turbulence MRI. De nombreuses études ont depuis été menées pour comprendre les relations

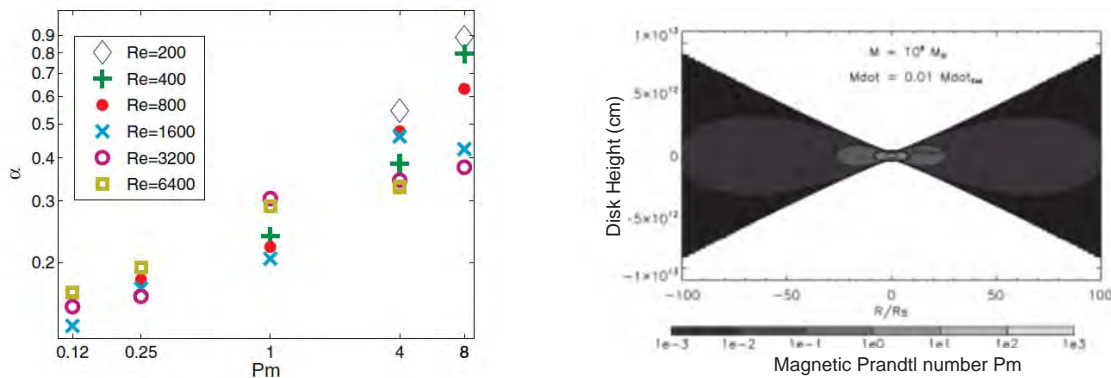


FIGURE 2.8 – A gauche : efficacité du transport α en fonction de Pm , d’après les simulations de MRI en champ imposé de Lesur et Longaretti (2007). A droite : évaluation du Pm dans un disque autour d’un trou noir de 10^8 masses solaires, et un α de 0.02 (Balbus et Henri, 2008). La région de $Pm > 1$ occupe un volume faible dans le disque.

entre la couche superficielle MRI-active et les dead zones dans le but de mieux cerner la dynamique de ces régions et contraindre le transport global dans les disques. Fleming et Stone (2003) ont montré qu’un transport significatif pouvait exister dans la zone morte, induit par la propagation d’ondes de densité se formant à partir de la zone active. Latter et Balbus (2012) ont également pointé l’existence d’une zone bistable étendue, comprise entre la zone active et la zone morte, et pouvant osciller entre un état turbulent à un état laminaire.

En plus de ce problème des ”dead zones”, les simulations numériques de la MRI en champ imposé (Lesur et Longaretti, 2007) ont montré que le coefficient de transport turbulent α décroît rapidement lorsque le Prandtl magnétique (Pm), défini comme le rapport entre ν et η , tend vers 0 (voir Fig. 2.8 à gauche). Ainsi même dans des régimes de dissipation où la MRI est linéairement active, il se peut que le transport turbulent soit très faible. Cette dépendance n’est toujours pas comprise et son importance n’a été réalisée que récemment. Dans la section suivante, nous montrerons que le problème du Prandtl magnétique se pose également dans les simulations où le champ magnétique n’est pas imposé (flux nul), avec des conséquences encore plus dramatiques. Cette diminution du transport à bas Pm peut poser des problèmes dans le cas des disques froids et faiblement ionisés, ainsi que dans les disques chauds caractérisés par $Pm \ll 1$. Dans ce dernier cas, Balbus et Henri (2008) ont montré que les zones de $Pm \gg 1$ sont souvent de taille réduite, comme l’indique la figure 2.8 (droite). En résumé, bien que la MRI soit de toute évidence une instabilité centrale dans le processus d’accrétion, il semble que son action puisse être limitée par ces effets diffusifs. D’autres mécanismes physiques, couplés à la MRI, comme les vents MHD, sont donc également étudiés aujourd’hui pour rendre compte du transport de moment cinétique observé.

2.5 Turbulence et dynamo magnétorotationnelles

Jusqu’à présent, nous nous sommes focalisés uniquement sur des simulations où le champ support de l’instabilité était imposé de manière externe. Mais comment ce champ magnétique est-il

généralisé puis entretenu durant la phase d'accrétion du disque? Comme nous l'avons expliqué dans la section 1.2, il est possible qu'il trouve son origine dans un mécanisme de dynamo non-cinématique faisant intervenir l'instabilité magnétorotationnelle elle-même. L'objectif de cette section est de donner un aperçu des résultats numériques obtenus à ce sujet.

2.5.1 Simulations de l'instabilité MRI en flux magnétique nul

Afin de savoir si un effet dynamo dans les disques était possible, plusieurs simulations locales de turbulence MRI dans un écoulement képlérien ont été réalisées dans la shearing box, laissant la possibilité au champ grande échelle d'évoluer dans le temps (Hawley et al., 1996; Brandenburg et al., 1995; Stone et al., 1996). Le champ magnétique dans ces simulations (excepté celles de Brandenburg et al. (1995)) a un "flux nul", à travers la shearing box. Cette condition assure que toute l'énergie magnétique est dissipée par effet Joule si aucun mécanisme dynamo n'est actif. Cette configuration s'oppose donc à celle utilisée dans les simulations de turbulence MRI décrites dans la section 2.4, pour lesquelles le champ magnétique support de la MRI était imposé et ne pouvait pas décroître.

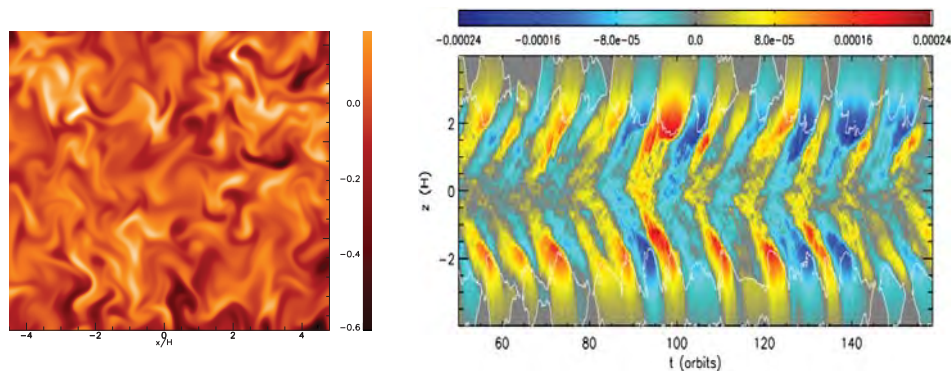


FIGURE 2.9 – A gauche : exemple de simulation de turbulence MRI 3D en flux nul sans stratification par Fromang et al. (2007). Les couleurs représentent l'intensité du champ toroidal dans le plan poloidal (x, z) . A droite : diagramme "papillon" illustrant les variations du champ axi-symétrique toroidal (moyenné en x et y) en fonction de z et du temps t dans une simulation de dynamo stratifiée. Les zones situées à haute altitude $z \sim 2$ sont fortement magnétisées (Simon et al., 2011).

Dans le cas d'une densité homogène et pour des conditions de shear-périodicité, Hawley et al. (1996) ont montré qu'une turbulence 3D dans le régime képlérien se maintenait sur des temps longs et que le transport associé était de l'ordre de $\alpha \sim 10^{-2}$, certes plus faible que dans le cas d'un champ moyen imposé, mais compatible avec les observations. Comme nous allons le voir au chapitre 3, la dynamique est le résultat d'un processus auto-entretenu où la turbulence et la génération du champ magnétique sont intimement liés. L'un et l'autre ne peuvent exister indépendamment : le champ magnétique permet d'activer la turbulence, à travers la MRI, qui à son tour rétroagit non-linéairement sur ce champ, lui permettant de rester en vie. Si un tel couplage non-linéaire était absent, la dissipation ohmique aurait pour effet de tuer le champ support de la MRI et donc la turbulence associée. Ce processus est nécessairement 3D et a la propriété d'être sous-critique. Hawley et al. (1996) ont notamment mis en évidence que la tur-

bulence décroît rapidement si la force de Lorentz n'est pas active, ce qui montre que la théorie cinématique est inadéquate pour rendre compte de la dynamo dans les disques d'accrétion.

Dans le cas d'un disque képlérien stratifié, Brandenburg et al. (1995) et Stone et al. (1996) ont mis en évidence une dynamo non-linéaire de même nature, entretenant la turbulence sur des temps longs. Le transport observé est sensiblement le même que dans le cas d'une densité homogène. Dans l'étude de Brandenburg et al. (1995), les conditions aux bords dans la direction verticale ne sont pas périodiques. Le flux de vitesse à travers la section haute et basse de la boîte est nul, contrairement à la configuration de Hawley et al. (1996). Ces deux travaux ont montré en particulier que l'écoulement stratifié était composé de deux parties : une couche faiblement magnétisée dans le plan médian du disque où la pression thermique domine et deux couches (de part et d'autres du plan médian) fortement magnétisées où la pression magnétique est comparable à la pression thermique. Cette structure, comme nous l'avons vu en section 2.4, est typique des boîtes stratifiées et ne semble pas dépendre de la configuration magnétique (flux nul ou non).

Ces simulations révèlent également que le champ toroidal à grande échelle varie fortement dans la boîte et que sa polarité s'inverse régulièrement. Ce comportement pseudo-cyclique a été confirmé par des études plus récentes (Davis et al., 2010; Simon et al., 2011). Dans le cas stratifié, le champ magnétique dans les couches coronales du disque présente des structures régulières dans le temps, rappelant les diagrammes papillons observés dans la dynamo solaire (Fig. 2.9).

La dynamo non-linéaire observée dans ces simulations semble très différente d'une dynamo $\alpha\Omega$. Dans certaines configurations, néanmoins, la théorie de champ moyen pourrait reproduire statistiquement l'évolution du champ magnétique sur des temps longs (Gressel, 2010; Simon et al., 2011). Des liens pourraient exister entre les deux formes de dynamo en particulier dans un régime de turbulence développée.

2.5.2 Influence du Prandtl magnétique sur la transition dynamo

Si les simulations numériques présentées en section 2.5.1 suggèrent qu'une dynamo MRI peut être entretenue dans un écoulement cisailé à flux magnétique nul, elles ne donnent aucune indication sur l'effet de la dissipation visqueuse et ohmique sur ce processus. À l'origine, l'idée d'introduire dans les simulations une viscosité ν et une diffusivité magnétique η finies fut proposée en réponse aux problèmes de convergences observés dans les simulations où ces coefficients ne sont pas explicitement introduits (voir section 2.4.2).

L'introduction de ces coefficients dissipatifs a permis de limiter ces problèmes de convergence et de façon inattendue, mettre en évidence que l'existence d'une dynamo MRI semble dépendre de manière critique des effets liés à la viscosité et à la résistivité. Les simulations en flux nul de Fromang et al. (2007) réalisées dans la shearing box (rapport d'aspect $L_y/L_x = 4$), dans une configuration compressible isotherme ont en effet montré qu'il existe un régime de dissipation pour lequel la dynamo MRI et donc la turbulence ne sont plus soutenues. La figure 2.10 tirée de cet article, montre comment évolue la frontière séparant le régime turbulent (où la dynamo MRI est active) du régime laminaire (où elle est inactive) en fonction de Re et Rm . Cette courbe indique qu'à bas Re la turbulence MHD n'est observée qu'au dessus d'un certain Rm critique, ce qui est attendu et se comprend simplement. À plus grand Re , cependant, elle ne se déclare

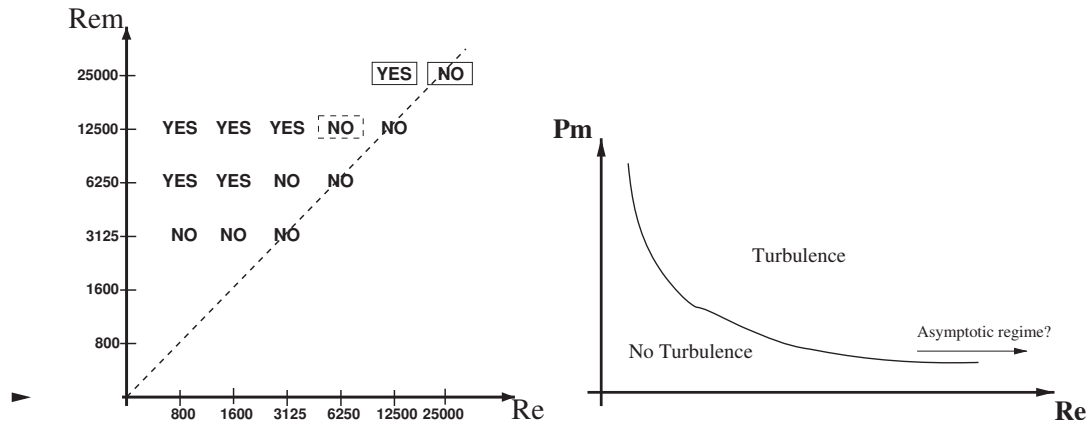


FIGURE 2.10 – À gauche : état de l’écoulement (turbulent ou non) pour un champ magnétique à flux nul dans le plan (Re, Rm) d’après Fromang et al. (2007). La ligne pointillée sur la courbe de droite dénote la ligne $Pm=1$. À gauche : frontière de la transition turbulente dans le plan (Re, Pm) . L’existence d’une limite asymptotique autour de $Pm = cte$ reste hypothétique.

que dans un régime où le Prandtl magnétique $Pm = \nu/\eta$ est qualitativement supérieur à 1. Autrement dit, il semble exister un Re critique (qui croît avec le Rm) au delà duquel la dynamo n’est plus viable, ce qui est beaucoup plus surprenant.

L’observation d’une transition entre un état turbulent et un état laminaire (correspondant au profil de base képlérien) autour de $Pm = 1$ est un résultat plutôt robuste car il a été également remarqué dans les simulations stratifiées verticalement (Simon et al., 2011). Par ailleurs, les simulations conduites au cours de cette thèse indiquent qu’une transition similaire a lieu pour un écoulement incompressible et quelque soit le rapport d’aspect de la sheating box considéré (voir chapitre 4). Cependant aucune étude aujourd’hui ne permet de connaître le comportement dans les régimes de Re (ou Rm) plus élevés, proches des conditions réelles que l’on trouve dans les disques astrophysiques. La frontière séparant le régime laminaire du régime turbulent tend-elle vers une valeur asymptotique proche de $Pm = 1$ à grand Re et Rm ?

Les résultats de Fromang et al. (2007) font écho aux simulations de la MRI en champ moyen constant où le transport diminue fortement avec Pm (voir section 2.4.2), et n’est également pas sans rappeler les travaux effectués sur la dynamo petite échelle, montrant que le régime des petits Pm affecte significativement la génération de champ magnétique (Schekochihin et al., 2004, 2007; Iskakov et al., 2007). Néanmoins, aucun lien évident n’a pour l’instant été démontré entre ces trois problèmes, même si certaines spéculations existent à ce sujet (Rincon et al., 2008). En réalité les raisons de ce comportement sont aujourd’hui indéterminées et restent débattues, l’étude de ce problème étant fortement parasitée par les problèmes de convergence numérique (Bodo et al., 2011; Käpylä et Korpi, 2011; Oishi et Mac Low, 2011; Simon et al., 2011; Bodo et al., 2014).

2.6 Conclusions

La difficulté à soutenir une dynamo non-linéaire ou à exciter une turbulence MRI efficace à bas Pm pourrait évidemment avoir des implications importantes pour la dynamique des disques d'accrétion. En effet, comme expliqué en section 2.4.2, le plasma de nombreux disques d'accrétion se situe dans le régime $Pm \ll 1$. L'origine de cette transition et de façon plus générale la dépendance en Pm des propriétés turbulentes de la dynamo MRI sont aujourd'hui mal connues et l'un des enjeux de ce travail est de comprendre les raisons physiques de cette dépendance. Dans le chapitre suivant, nous allons donc nous intéresser de plus près à la nature de cette transition, et notamment à ses similarités avec la transition à la turbulence dans le problème purement hydrodynamique des écoulements cisailés non-tournants.

La dynamo magnétorotationnelle, une transition fluide sous-critique

Nous avons vu dans les chapitres précédents que la physique de l'accrétion semble directement reliée au développement de l'instabilité magnétorotationnelle. Celle-ci, combinée à un processus de dynamo non-linéaire, pourrait notamment générer simultanément du champ magnétique et de la turbulence dans un disque, ce qui représente une propriété à la fois exceptionnelle et intrigante pour une instabilité. Cependant nous avons vu que ce mécanisme pourrait ne plus exister à petit nombre de Prandtl magnétique P_m , un régime important pour l'astrophysique des disques. Une transition entre un état turbulent et un état laminaire semble s'opérer autour de $P_m = 1$. Pour comprendre l'origine de ce comportement et ses implications possibles pour l'astrophysique des disques, il est nécessaire d'étudier en détail les mécanismes physiques non-linéaires sous-jacents à l'excitation de ce type de dynamo. En réalité, la transition dans le problème de la dynamo MRI partage de nombreux points communs avec la transition sous-critique à la turbulence des écoulements hydrodynamiques cisailés non-tournants. L'objet de ce chapitre est de présenter l'état de nos connaissances de la dynamique non-linéaire dans ces deux types de problèmes et les similarités qui existent entre les deux. Ceci nous permettra par la suite de définir un angle d'attaque pour comprendre la transition vers la dynamo MRI.

3.1 Transition dans les écoulements hydrodynamiques cisailés non-tournants

3.1.1 Introduction au problème

Le problème de la transition turbulente dans les écoulements cisailés sans rotation intrigue les scientifiques depuis plus d'un siècle. L'intérêt pour ce problème a émergé entre autres suite aux expériences de Reynolds (1883), qui examina la nature des écoulements de Hagen-Poiseuille (écoulements dans un tuyau cylindrique). Il montra expérimentalement que l'écoulement peut devenir turbulent lorsque la vitesse du fluide à l'intérieur du tube est supérieure à une certaine valeur critique. Cela revient à dire qu'une transition entre un état laminaire et un état turbulent apparaît autour d'un certain nombre de Reynolds, évalué aujourd'hui entre 1700 et 2200 (Avila et al., 2011).

Cette découverte restait à l'époque mystérieuse car l'écoulement de Hagen-Poiseuille était connu pour être stable linéairement (ce qui a été confirmé plus tard numériquement par Salwen et al. (1980); Meseguer et Trefethen (2003), même si aucune preuve n'existe réellement). Cependant, des expériences en laboratoires, complémentaires à celles de Reynolds (Davies et

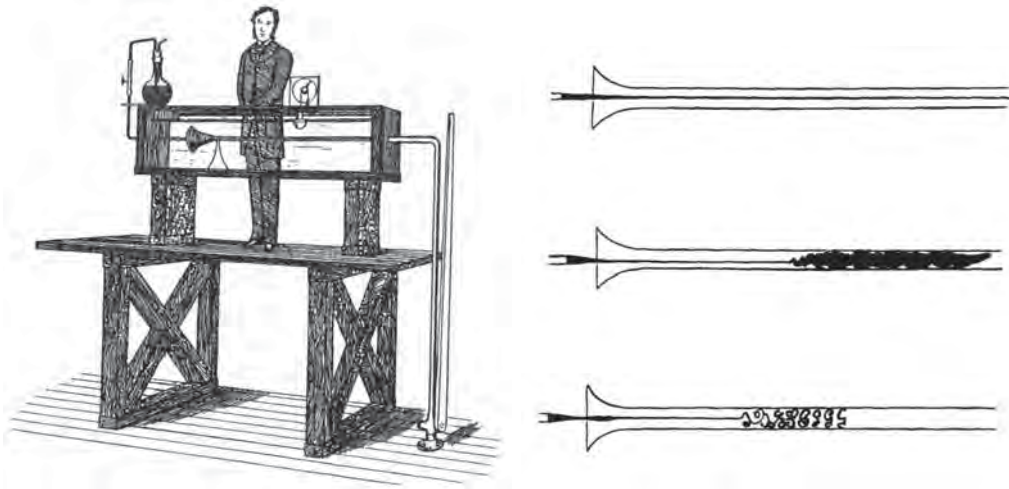


FIGURE 3.1 – À gauche : expérience sur la transition turbulente dans les tubes (Reynolds, 1883) . À droite : écoulement d'eau observé dans un tube, tel que dessiné par Reynolds

White, 1928; Patel et Head, 1969; Darbyshire et Mullin, 1995; Hof et al., 2003), ont révélé que l'écoulement devenait instable pour des perturbations d'amplitude finie, soulignant le caractère sous-critique de la transition à la turbulence. Ils ont également montré que le Reynolds critique pour lequel on observe la turbulence dépend fortement de l'amplitude et du type de perturbations introduites.

L'écoulement cisailé entre deux parois planes (autrement appelé écoulement de Couette plan et représenté sur la figure 3.2) partage des caractéristiques similaires. Reichardt (1956) ont montré expérimentalement qu'une transition à la turbulence est sous-critique et pour un Reynolds de l'ordre de 300-500 (Dauchot et Daviaud, 1995), malgré la stabilité linéaire de cet écoulement (Romanov, 1973).

De nombreux travaux ont été effectués pour comprendre comment ces deux écoulements deviennent non-linéairement instables et turbulents. Trefethen et al. (1993) ont proposé un mécanisme dans lequel la croissance linéaire transitoire de perturbations non-axisymétriques, due à la non-normalité des équations linéarisées gouvernant ces deux écoulements, serait responsable de la transition. Ces croissances transitoires pourraient permettre le déclenchement d'instabilités secondaires par un mécanisme "by-pass", mais ce scénario a très vite été contesté. Waleffe (1995b) a notamment montré que la nature de la rétroaction non-linéaire de telles perturbations jouait un rôle critique dans ce problème et déterminait in fine si l'excitation d'une dynamique transitionnelle était possible ou pas. L'idée, aujourd'hui acceptée par une grande majorité d'hydrodynamiciens, est que le maintien de la turbulence est liée à l'existence de structures 3D non-linéaires, cohérentes, capables d'extraire l'énergie du cisaillement pour la transférer à plus petite échelle. La dynamique de ces structures repose sur un processus hydrodynamique d'auto-entretien (PAE ou SSP en anglais), proposé par Waleffe (1995a) et qui sera présenté plus en détails au cours de ce chapitre. Le rôle de ces structures dans le déclenchement de la turbulence reste cependant encore mal compris. L'utilisation de la théorie des systèmes dynamiques et des bifurcations a permis de commencer à mieux cerner la place qu'elles occupent dans la dynamique chaotique transitionnelle associée à ces systèmes.

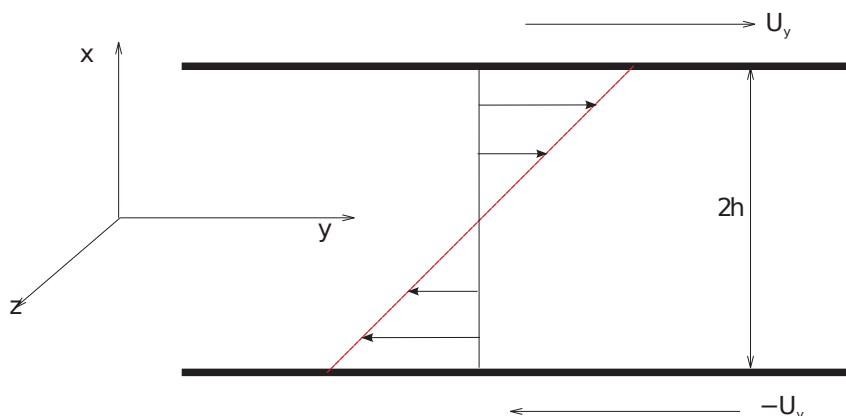


FIGURE 3.2 – Schéma illustrant l'écoulement cisailé de Couette-plan entre deux parois mobiles. La direction de l'écoulement est choisie suivant y , et non pas x comme l'usage le veut dans ce problème, afin de faciliter l'analogie avec la couche de cisaillement définie en section 2.1.5. La paroi supérieure se déplace avec une vitesse positive U_y alors que la paroi inférieure se déplace dans le sens inverse avec la même vitesse. Le profil de vitesse entre les 2 parois est illustré par le segment rouge.

3.1.2 Caractéristiques de la frontière laminaire/turbulent

Nous commençons ici par rappeler les principaux résultats apportés par l'étude phénoménologique de la transition dans ces écoulements hydrodynamiques cisailés sans rotation. Une des premières caractéristiques observées expérimentalement et numériquement est la nature transitoire des bouffées turbulentes (ou "puffs" en anglais) dans les systèmes de taille restreinte (Hof et al., 2006; Schneider et al., 2010). Ces "puffs", induits pas une perturbation d'amplitude finie, restent localisés dans la direction y et finissent par revenir dans un état laminaire au bout d'un certain temps dans la limite des Re étudiés. Notons que lorsque la taille en y (ou z) du système est suffisamment grande, ces "puffs" turbulents peuvent se scinder et contaminer le reste de l'écoulement, si bien que la turbulence est entretenue indéfiniment à partir d'un certain Re (Avila et al., 2011; Barkley, 2011). Nous ne traiterons pas le cas de ces systèmes spatialement étendus dans la suite, bien qu'ils soient aujourd'hui très étudiés dans le problème de la transition.

Les expériences de Darbyshire et Mullin (1995) dans l'écoulement de Hagen-Poiseuille ont permis de pointer la complexité de la transition à la turbulence dans ce problème. Pour une perturbation initiale de forme spatiale fixée, ils ont pu mesurer le temps de vie de la turbulence en fonction du nombre de Reynolds et de l'amplitude A de cette perturbation. Les résultats indiquent que la frontière entre un état turbulent et laminaire est difficile à définir (figure 3.3). Si pour un Re et une amplitude donnés, la turbulence est maintenue sur un temps long, ce n'est pas forcément le cas pour un écoulement initié au voisinage de ces paramètres, aussi proche soit t-il. Cela révèle l'extrême sensibilité de l'état turbulent aux paramètres physiques. Les simulations numériques de Schmiegel (1997); Faisst et Eckhardt (2004); Skufca et al. (2006) ont également mis en évidence une rapide variation du temps de vie de la turbulence en fonction de Re et de A , et une grande sensibilité de ce temps à la forme spatiale de la perturbation initiale choisie.

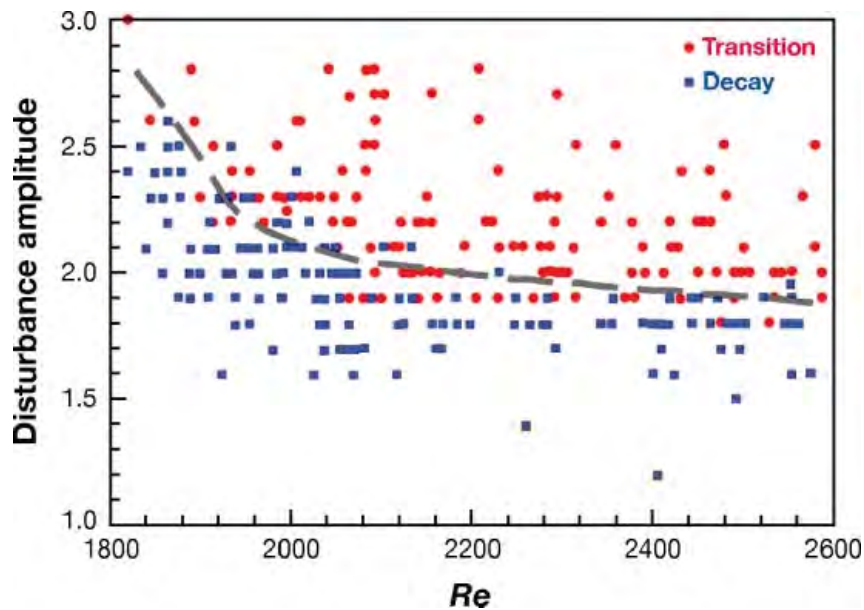


FIGURE 3.3 – Expérience de transition de Darbyshire et Mullin (1995) dans l’écoulement de Poiseuille. Des perturbations sont introduites en entrée du tube et sont mesurées 50 cm après. L’expérience consiste à regarder si les perturbations sont toujours présentes à cette distance, en fonction de leur amplitude et du nombre de Reynolds.

La frontière dans l’espace des phases, séparant les conditions initiales convergeant rapidement vers un état laminaire et celles qui transitent vers un état turbulent (dont la durée est finie mais très grande devant le temps caractéristique du cisaillement) est en fait une surface très compliquée faisant apparaître des motifs d’apparence fractale (Schmiegel, 1997). Ce comportement apparaît également dans des simulations de modèle réduit de Couette plan (Moehlis et al., 2004a).

L’extrême sensibilité du problème a conduit les hydrodynamiciens à étudier la distribution statistique des temps de vie de la turbulence et en particulier la probabilité $P(t)$ qu’un écoulement reste turbulent au moins pendant une durée t . Dans le cas des écoulements de Poiseuille, l’expérience de Darbyshire et Mullin (1995) et les travaux de Hof et al. (2006); Schneider et Eckhardt (2008) ont montré que $P(t)$ est une fonction exponentielle décroissante de t , dont le temps caractéristique τ semble augmenter lui-même exponentiellement avec Re . On parle de comportement ”double exponentiel”. Une loi exponentielle sur $P(t)$ indique que la probabilité de retomber vers un état laminaire est indépendante du temps écoulé. Cette propriété a été également remarquée dans le cas de Couette plan, que ce soit expérimentalement (Bottin et Chaté, 1998) ou numériquement (Schneider et al., 2010).

La forte sensibilité aux conditions initiales, la géométrie fractale de la frontière de transition et les propriétés statistiques obtenues sur le temps de vie de la turbulence ont fortement appuyé l’hypothèse que la dynamique turbulente dans ces écoulements cisailés hydrodynamiques est bâtie autour d’un répulseur chaotique, encore appelé ”selle chaotique”, dont les propriétés et les conséquences pour la dynamique seront étudiées dans le paragraphe 3.1.5.

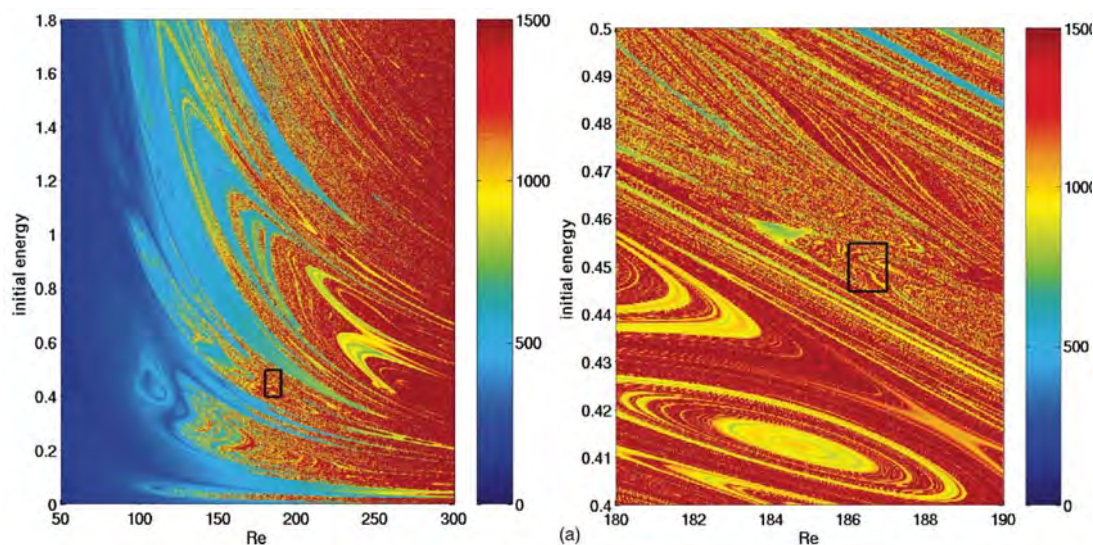


FIGURE 3.4 – Frontière d’apparence fractale de la transition turbulente dans un modèle réduit de l’écoulement de Couette plan (à 9 neuf modes de perturbations). Les couleurs correspondent aux temps de vie de la turbulence en fonction de Re et de l’amplitude d’une perturbation initiale. Un zoom sur la région ”turbulente” de la carte de gauche fait apparaître des motifs qui se répliquent à plus petite échelle. Les temps de vie dans la région ”turbulente” ne sont pas connexes alors qu’ils le sont dans la région ”laminaire”. Tiré de Moehlis et al. (2004a).

3.1.3 Processus d’auto-entretien (PAE)

Comment les premiers germes de turbulence apparaissent-t-ils dans ce type d’écoulement ? Les travaux expérimentaux sur l’écoulement de Poiseuille et de Couette plan ont montré que la dynamique transitionnelle était caractérisée par des structures récurrentes et cohérentes, prenant la forme de stries dans l’axe de l’écoulement et de tourbillons dans le plan perpendiculaire. Souvent observées près des parois, elles semblent apparaître de façon ”aléatoire” dans l’espace et le temps, mais sont régulièrement régénérées. La figure 3.5 montre ce type de structures dans les expériences de couches limites et dans les simulations numériques du problème de Couette. Plusieurs travaux conduits dans les années 90, ont indiqué que la dynamique de ces écoulements transitionnels était dominée par un processus non-linéaire auto-entretenu (Waleffe, 1995a, 1997).

Comment fonctionne ce processus ? Nous prendrons comme exemple l’écoulement de Couette plan, qui rappelons-le se décompose en un cisaillement de base $\mathbf{U}_s = -Sx\mathbf{e}_y$ et des perturbations \mathbf{u} . Ces perturbations peuvent être décomposées en un terme indépendant de la coordonnée y , noté avec un barre (l’équivalent d’axisymétrique dans le modèle de couche de cisaillement des disques) et d’un terme qui dépend de y , noté \mathbf{u}' .

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'. \quad (3.1)$$

Les structures en forme de stries et de tourbillons, observées expérimentalement et numériquement sont associées au terme $\bar{\mathbf{u}}$ car elles sont indépendantes de y . Leur dynamique est régie par l’équation :

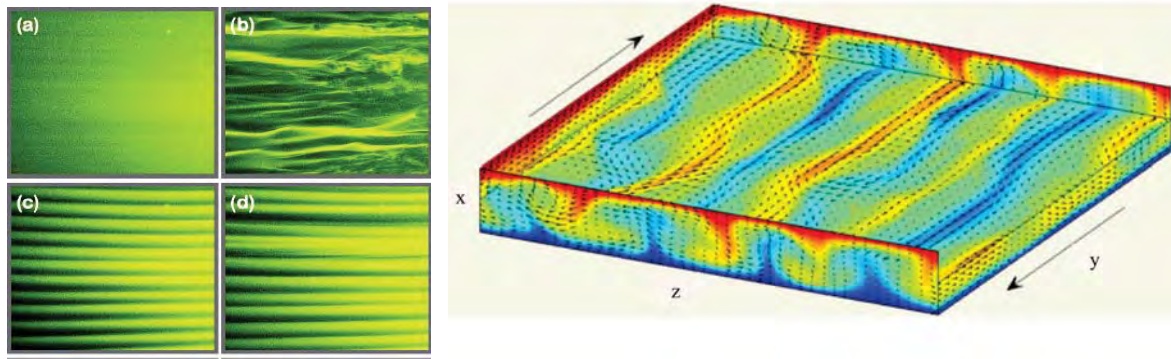


FIGURE 3.5 – A gauche : observation de stries dans le plan (y,z) caractérisant les écoulements pré-turbulents dans une expérience de couche limite (Fransson et al., 2006). A droite : simulation numérique d'un écoulement pré-turbulent de Couette plan avec le code Channelflow (Gibson et al., 2008; Gibson, 2012), dans lequel les stries (dans le sens de l'écoulement) et les tourbillons perpendiculaires à l'axe y sont parfaitement visibles.

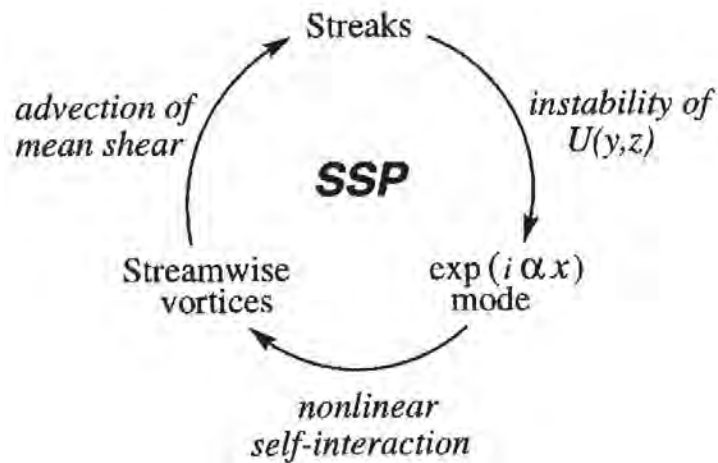


FIGURE 3.6 – Schéma simplifié du processus d'auto-entretien (PAE) des structures cohérentes dans les écoulements hydrodynamiques cisailés non-tournants (Hamilton et al., 1995).

$$(\partial_t + \bar{\mathbf{u}}_p \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + S \bar{u}_x \mathbf{e}_y = \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} - \nabla P - \overline{\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'}, \quad (3.2)$$

où $\bar{\mathbf{u}}_p$ est le champ de vitesse tourbillonnaire dans le plan perpendiculaire à \mathbf{e}_y . Le terme $S \bar{u}_x \mathbf{e}_y$ est associé à l'effet lift-up. Il correspond à l'advection du cisaillement par la composante \bar{u}_x et produit une composante dans la direction de l'écoulement. Le terme $-\overline{\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'}$ est un terme d'advection non-linéaire provenant de l'interaction entre les perturbations dépendantes de y .

Le mécanisme d'auto-entretien de ces perturbations est illustré sur la figure 3.6. Initialement, l'écoulement est dominé par des tourbillons d'amplitude finie en $O(1/Re)$, invariants en y , dans le plan perpendiculaire à \mathbf{e}_y . Ces derniers advectent l'écoulement cisailé de base \mathbf{U}_s , transportant la vitesse importante du bord des parois vers le centre (effet lift-up). Il en résulte une déformation du profil de cisaillement dans la direction x et z , correspondant aux "stries" invariante en y . Cette déformation d'amplitude $O(1)$ induit un point d'inflexion dans le profil de cisaillement en z et d'après le théorème de Rayleigh (Drazin et Reid, 2004), l'écoulement peut devenir instable vis à vis de l'instabilité Kelvin-Helmholtz. Cette instabilité dite "secondaire" (qui n'est pas causée directement par \mathbf{U}_s) est capable alors d'amplifier des ondes modulées en y (Waleffe, 1995a)¹. Lorsque ces ondes ont une amplitude suffisante, leur interaction non-linéaire via le terme $-\overline{\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'}$ permet alors de régénérer les tourbillons invariants en y dans le plan (x, z) . Cette interaction doit cependant avoir une forme spatiale bien corrélée avec la forme des tourbillons initiaux. Elle est en particulier très sensible à la géométrie de l'écoulement de base et à l'échelle des perturbations amplifiées par l'instabilité secondaire. Notons que le mécanisme global ne peut pas être déclenché avec des perturbations d'amplitudes infiniment faibles, et nécessite l'introduction de tourbillons initiaux d'amplitude finie en $O(1/Re)$, en première approximation.

L'identification de ce mécanisme a permis de mieux comprendre l'origine du Reynolds de transition observé numériquement et expérimentalement dans le problème hydrodynamique cisailé sans rotation. En effet si le Reynolds est trop faible, l'excitation de l'instabilité secondaire peut être compromise et l'énergie apporté par la rétroaction non-linéaire est insuffisante pour contrer la perte d'énergie des tourbillons poloidaux par friction visqueuse.

3.1.4 Structures invariantes

La découverte du PAE a permis d'identifier et d'étudier une large classe de solutions dite "invariantes", comme des points fixes (solutions stationnaires), des cycles ou des ondes progressives dans les différents écoulements présentés en section 3.1.1. Ces solutions se distinguent des solutions turbulentes par leur régularité dans le temps et leur cohérence spatiale à grande échelle.

Les premières structures invariantes de type points fixes, englobées dans une dynamique chaotique, ont été détectées numériquement dans le problème de Couette par Nagata (1990); Clever et Busse (1992); Waleffe (1998, 2003); Viswanath (2007); Gibson et al. (2008, 2009). Ces premières structures ont été historiquement découvertes par homotopie, c'est à dire par continuation de solutions existantes dans des problèmes voisins mais linéairement instables². Ainsi, le point fixe obtenu par Nagata (1990) a été continué à partir des solutions stationnaires du

¹Notons que la nature de cette instabilité (linéaire ou sous-critique) est toujours discutée (Cossu et al., 2011).

²Ces structures n'ont en réalité pas été découvertes sur la base de la physique phénoménologique du PAE.

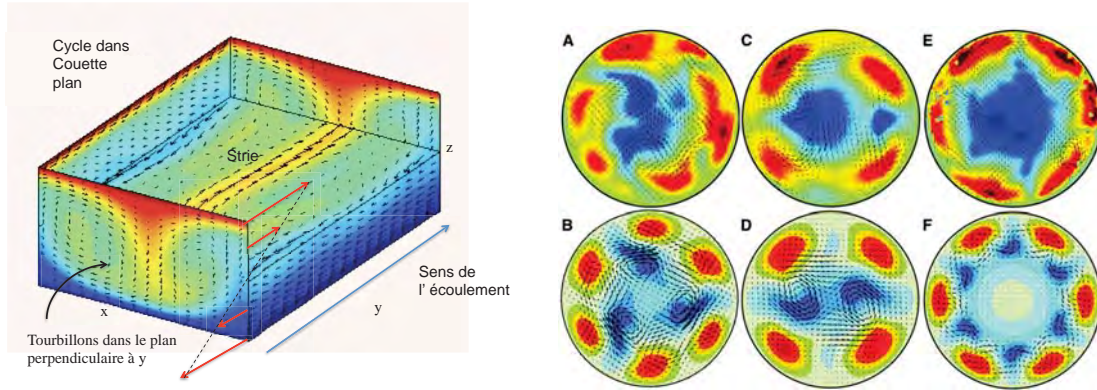


FIGURE 3.7 – Structures invariantes dans les écoulements cisailés hydrodynamiques. A gauche, instantané d'un cycle obtenu dans Couette plan avec le code Channelflow (Gibson et al., 2008; Gibson, 2012), dans lequel les stries et les tourbillons sont parfaitement visibles. A droite, ondes progressives dans Poiseuille obtenues expérimentalement (en haut) et numériquement (en bas). Les stries (en rouge) se répartissent au niveau du bord du tube et sont associées chacune à une paire de tourbillons visibles dans la section du tube (Faisst et Eckhardt, 2003).

problème de Taylor-Couette, en faisant tendre progressivement la rotation vers 0.

L'écoulement de Poiseuille ayant une symétrie miroir par rapport à son axe \mathbf{e}_y , les solutions stationnaires ne peuvent pas subsister et prennent la forme d'ondes progressives qui se déplacent le long de l'axe de l'écoulement (Ehrenstein et Koch, 1991; Waleffe, 2003). Capturer des structures invariantes dans ce problème est plus difficile à réaliser car il ne peut pas être connecté directement à une famille d'écoulements linéairement instables. Une technique imaginée par Waleffe (1998), puis reprise par Wedin et Kerswell (2004), consiste à introduire artificiellement un forçage F dans l'écoulement afin d'exciter des tourbillons dans le plan perpendiculaire à l'écoulement et obtenir plus simplement les structures recherchées. Une fois celles-ci convergées, il est possible de les continuer en faisant tendre progressivement F vers 0.

Depuis, des solutions cycliques ont également été trouvées dans le problème de Couette plan (Hamilton et al., 1995; Kawahara et Kida, 2001; Viswanath, 2007). Des solutions périodiques relatives (se déplaçant le long de l'écoulement) ont été détectées numériquement dans le problème de Poiseuille (Duguet et al., 2008). Ces solutions sont pour la plupart des bifurcations de Hopf de solutions stationnaires.

Tous ces points fixes, ondes progressives ou cycles sont dominés par des modes à grande échelle. La figure 3.7 montre la forme de ces structures cohérentes dans les deux types de problèmes. On voit que l'écoulement cisailé de base est déformé avec la formation de stries (indépendantes de y), localisées plutôt sur les bords du domaine où elles accélèrent le fluide. Dans le plan perpendiculaire à l'écoulement, le champ de vitesse prend la forme de tourbillons, réunis par paires, qui advectent le cisaillement de base, amenant la vitesse rapide dans les régions de basse vitesse et la vitesse plus lente vers les zones de vitesse élevée.

Ces solutions invariantes peuvent être suivies (ou recalculées) en fonction d'un paramètre comme le Reynolds, à l'aide d'une procédure de continuation. Dans le cas de Poiseuille, les

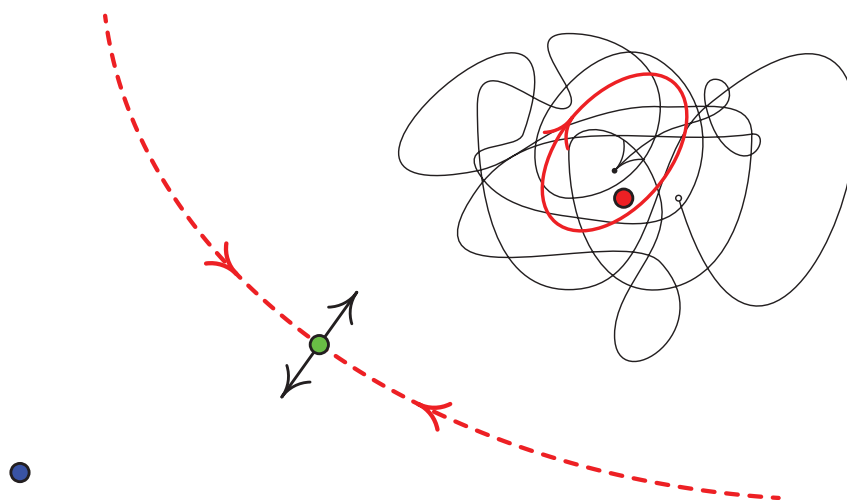


FIGURE 3.8 – Dessin schématisant la structure de la transition dans l'espace des phases. Le point bleu correspond à l'attracteur laminaire (l'écoulement cisailé de base), la courbe noire correspond à une trajectoire chaotique turbulente dans la "selle" chaotique. Au milieu se trouve une structure invariante stationnaire (point vert). Une perturbation le long de ses directions instables (flèches noires) nous amènent soit vers l'attracteur laminaire, soit vers une orbite chaotique. La courbe en pointillé correspond à sa variété stable et fait partie intégrante de la frontière entre la selle chaotique et le point fixe laminaire.

continuations ont montré que les plus simples d'entre elles naissent de bifurcations de type "noeud-col" (voir chapitre 5 pour la définition) autour de $Re = 1250$, très proche de la gamme de Re observée pour la transition globale de l'écoulement vers la turbulence (Wedin et Kerswell, 2004).

3.1.5 Structures invariantes et répulseur chaotique

Le mécanisme d'auto-entretien et les structures invariantes ayant été introduites, nous allons voir que ces dernières semblent jouer un rôle important dans l'apparition d'un répulseur chaotique et la transition vers le chaos spatio-temporel dans ces écoulements lorsque Re augmente. Les notions et le vocabulaire que nous allons employer dans cette partie peuvent être inhabituels pour la communauté d'astrophysiciens, et sont par conséquent introduits de façon plus détaillée en annexe B.

i) Le "edge"

Nous avons vu que l'espace des états, plus communément appelé "espace des phases", est divisé en deux ensembles séparés par une frontière complexe et de géométrie probablement fractale. Le premier ensemble contient les conditions initiales qui convergent "immédiatement" vers la solution laminaire. Dans l'espace des phases, il s'identifie au bassin d'attraction du point fixe correspondant à l'écoulement laminaire. Le deuxième ensemble contient celles qui mènent vers une dynamique chaotique et turbulente (avant de décroître aux temps longs). Si la turbulence était maintenue indéfiniment, il aurait la propriété d'un attracteur. Or nous avons vu que dans un système confiné spatialement (taille modérée en y et z), les temps de vie turbulents sont

finis, ce qui signifie que les points de cet ensemble appartiennent d'une certaine manière au bassin d'attraction laminaire. C'est pourquoi on parle plutôt de répulseur ou de "selle chaotique". Ces objets ne sont en général pas connexes car ils englobent un ensemble dense et discrets de points qui convergent "immédiatement" vers l'état laminaire. Une analogie qui permet de mieux comprendre les propriétés de selle chaotique est celle du trajet d'une particule dans une boîte avec parois incurvées, percée en certains endroits (Ott, 1993). Le mouvement est décrit comme chaotique mais peut de façon imprévisible s'arrêter lorsque la particule sort de la boîte.

La frontière entre ces deux comportements (en anglais le "edge") a suscité un intérêt grandissant ces dernières années car elle occupe une place centrale dans ce problème de transition. Dans la mesure où aucun bassin d'attraction chaotique ne peut être réellement défini dans ce type de problème, cette frontière n'apparaît pas comme une surface bien lisse séparant deux régions : elle est de mesure nulle, de dimension non-entière (fractale) et est en partie incluse géométriquement (et non au sens topologique) dans la selle chaotique. En réalité, les états qui la constituent ne convergent ni vers un état laminaire, ni vers un état de turbulence transitoire mais vers des structures invariantes, telles que nous les avons décrites dans la section précédente (points fixes, cycles limites, ondes progressives, attracteur chaotique...) (Schneider et al., 2007). Ces structures invariantes, dont le temps de vie est infini, peuvent être obtenues en faisant varier l'amplitude A de la perturbation initiale jusqu'à obtenir un état limite entre les solutions qui décroissent et celles qui deviennent chaotiques (méthode de bisection). Les simulations numériques ainsi que les travaux théoriques (Skufca et al., 2006; Viswanath et Cvitanović, 2009) ont montré que les structures composant cette frontière ont des directions instables et qu'elle ont donc des connexions avec la selle chaotique et le bassin d'attraction laminaire. Un schéma simplifié de la structure de la transition dans l'espace des phases est représenté sur la figure 3.8.

ii) Rôle des structures invariantes et des cycles dans la transition

Les structures invariantes observées près de cette frontière semblent donc être un maillon incontournable pour comprendre comment s'opère la transition d'un état régulier à grande échelle vers un état chaotique ou "pré-turbulent". Plusieurs études ont révélé le caractère instable de telles solutions et ont tenté de mieux comprendre leurs connexions avec la selle chaotique.

L'idée de base est que ces structures instables habitent de façon ponctuelle et dense l'espace des trajectoires chaotiques³. Une trajectoire chaotique serait contrainte à visiter le voisinage d'un grand nombre de ces structures, passant de l'une à l'autre, sans jamais y converger. Le chemin qu'elle emprunte serait en réalité totalement dicté par la dynamique locale de ces structures cohérentes. Les recherches se sont donc focalisées sur l'étude de la dynamique locale des points fixes, des ondes progressives ou des cycles, en s'appuyant notamment sur la théorie des systèmes dynamiques. Chaque structure cohérente possède un ensemble de directions stables et instables. Une perturbation le long d'une direction stable va avoir tendance à ramener l'écoulement vers la structure. Au contraire une perturbation le long de la direction instable va en revanche l'éloigner de cette structure et l'amener vers un état différent. Plusieurs études ont en particulier analysé le comportement des variétés stables et instables, qui sont des sous-espaces invariants de la

³Ici le terme de trajectoire (ou "orbite") est étendu à l'espace des phases (ensemble des états du système) et ne fait pas référence à l'espace physique.

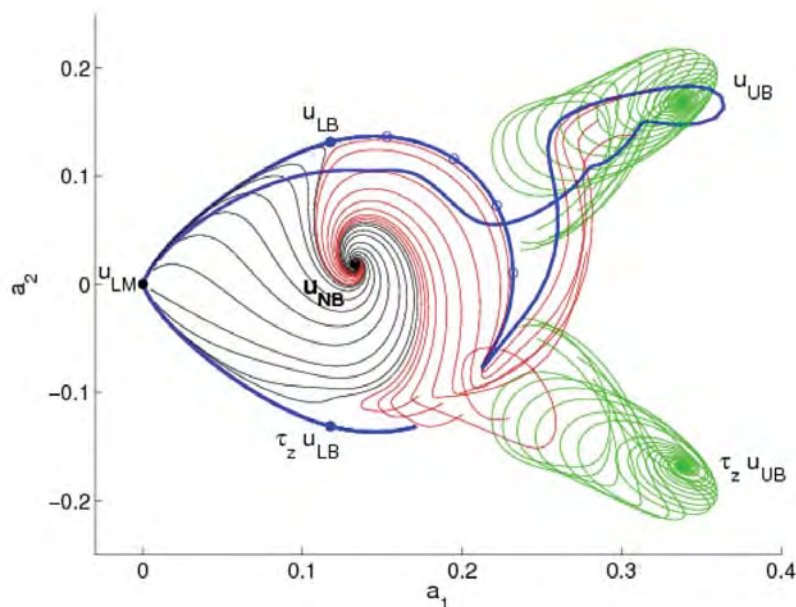


FIGURE 3.9 – Projection dans l’espace des phases de trois points fixes u_{LB} , u_{NB} et u_{UB} du problème de Couette plan et de leur variétés instables (en bleu celle de u_{LB} , en rouge et noir celle de u_{NB} , associée à deux directions différentes, et en vert celle de u_{UB}). u_{LM} est la solution laminaire. La variété de u_{NB} semble présenter une trajectoire séparatrice convergeant directement vers u_{LB} et indiquant la présence d’une connexion hétérocline (Gibson et al., 2008).

dynamique associés à ces directions et donc liés aux structures cohérentes (voir annexe B).

Une hypothèse proposée par Schmiegel (1997) est que la génération de chaos autour des structures cohérentes pourrait provenir de l’existence de bifurcations globales de type ”homocline” et ”hétérocline”, impliquant leurs variétés stables et instables. Ce type de bifurcation, dont nous donnons une description exhaustive en annexe B, a récemment été détecté indirectement dans les écoulements de Couette plan (Gibson et al., 2008; Halcrow et al., 2009; van Veen et Kawahara, 2011). Ces bifurcations particulières, connectant les différentes structures invariantes dans l’espace des phases, pourraient être à l’origine d’une dynamique chaotique. Les travaux comme ceux de Kreilos et Eckhardt (2012) ont montré plus explicitement dans l’écoulement de Couette plan que le chaos était la conséquence de bifurcations globales similaires (de type ”crise”), couplées à des cascades sous-harmoniques.

Il est important de souligner à ce stade que les bifurcations de structures invariantes (cycles, points fixes etc...) semblent jouer non seulement un rôle clé dans le caractère chaotique et transient de la dynamique turbulente mais apportent également une meilleure compréhension de la nature fractale de la transition, observée numériquement et expérimentalement.

La théorie des orbites périodiques (Cvitanovic et al., 1992; Cvitanovic, 2004) a finalement renforcé l’intérêt porté par les structures cycliques dans les écoulements entièrement turbulents. Cette théorie permet en principe de calculer des propriétés statistiques de la turbulence développée (à grand Re) comme l’énergie rms ou la quantité de mouvement, à partir des cycles

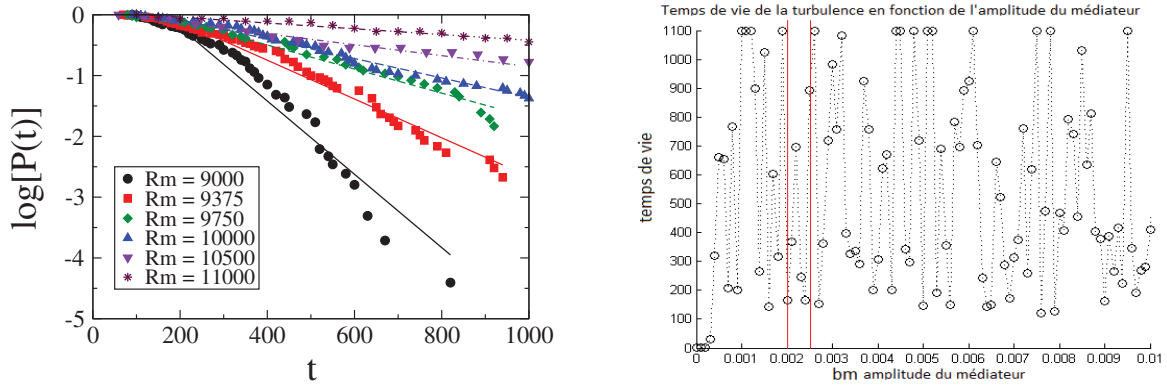


FIGURE 3.10 – A gauche : Logarithme de la probabilité P pour que le temps de vie de la dynamique entretenue par la dynamo MRI soit supérieur à t , en fonction de t , pour différent Rm (Rempel et al., 2010). A droite temps de vie de la dynamique en fonction de l’amplitude initiale d’un mode magnétique de perturbation (Herault, 2011, stage de M2).

présents dans l’écoulement (”formules traces”). Cette théorie est présentée brièvement en annexe D. Son application reste cependant encore relativement spéculative. Des tentatives récentes d’application à l’écoulement de Kolmogorov ont jusqu’à présent donné des résultats mitigés (Chandler et Kerswell, 2013).

3.2 Lien avec la transition dans le problème de la dynamo magnéto-rotationnelle

La section précédente nous a permis d’exposer les progrès accomplis ces dernières années pour comprendre la transition sous-critique hydrodynamique des écoulements cisailés sans rotation. En particulier les études récentes ont pointé le rôle important des structures invariantes dans la transition turbulente et des mécanismes non-linéaires associés. Même si ce problème peut à priori sembler très éloigné de celui de la dynamo magnéto-rotationnelle, nous allons à présent montrer qu’il existe une analogie forte entre les deux.

3.2.1 Une frontière de transition de géométrie fractale ?

La dynamo MRI est un processus sous-critique qui nécessite l’introduction de perturbations d’amplitude finie (voir section 2.5). Étant donné ce point de ressemblance avec le problème hydrodynamique, la transition vers la dynamo MRI partage-t-elle les mêmes caractéristiques que la transition dans Couette plan ou Poiseuille, à savoir des temps de vies finis, sensibles aux conditions initiales ? Retrouve-t-on une frontière laminaire/turbulent fractale typique des selles chaotiques ? Une étude réalisée par Rempel et al. (2010) montre que les temps de vie de la turbulence MRI en champ à flux nul sont effectivement finis. La figure 3.10, tirée de leur article, indique également que la probabilité d’avoir un temps de vie de la turbulence $\geq t$ est une fonction exponentielle décroissante de t dont le temps typique de décroissance augmente exponentiellement avec Rm . On a donc également affaire ici à un comportement ”double exponentiel” typique des transitions impliquant des selles chaotiques. Les travaux de stage de J.

Herault (Stage 2009-2010) à l'IRAP ont également révélé que les temps de vie de la turbulence sont très sensibles aux conditions initiales. Ces deux résultats suggèrent donc que la transition est construite autour d'une selle chaotique synonyme d'une frontière laminaire/turbulent de géométrie fractale. Cependant la forme exacte de la transition et sa dépendance vis à vis des paramètres de contrôle de ce problème, à savoir Re , Rm , ou les rapports d'aspect du domaine d'étude, sont encore mal connues.

3.2.2 La dynamo MRI : un processus auto-entretenu non-linéaire

i) Mécanisme d'auto-entretien du champ axisymétrique et des perturbations

La présence d'un écoulement cisailé et de perturbations non-axisymétriques (3D) amplifiées par une instabilité (la MRI) rappellent sans conteste les ingrédients à la base du processus auto-entretenu des écoulements hydrodynamiques de Couette et Poiseuille, présenté en section 3.1.3. De plus, le caractère non-linéaire, transient et sous-critique de la dynamo MRI a permis d'établir un rapprochement entre les deux problèmes. Un mécanisme d'auto-entretien de la dynamo MRI similaire au PAE de Waleffe (2003) a été proposé par Rincon et al. (2007b, 2008) dans le cadre des écoulements képlériens. Des pseudo-cycles de dynamo MRI ont par ailleurs été identifiées dans de nombreuses simulations (Brandenburg et al., 1995; Stone et al., 1996; Lesur et Ogilvie, 2008b), suggérant la présence d'un tel processus.

L'hypothèse fondamentale est que l'entretien de la turbulence MHD dans le problème de la dynamo MRI n'est possible que si le champ axisymétrique à flux nul $\overline{\mathbf{B}}(x, z, t)$, supportant la MRI, est régénéré en permanence. L'équation gouvernant son évolution est :

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t} = -S\overline{B}_x \mathbf{e}_y + \overline{\nabla} \times \overline{\mathcal{E}} + \eta \Delta \overline{\mathbf{B}} . \quad (3.3)$$

La barre dénote la moyenne du champ magnétique en y dans le modèle de la couche de cisaillement. $-S\overline{B}_x \mathbf{e}_y$ est l'effet Ω qui décrit l'étirement des lignes de champ par le cisaillement. Cet effet traduit simplement un transfert de la composante de champ poloidale vers la composante toroidale. $\overline{\nabla} \times \overline{\mathcal{E}}$ est le terme non-linéaire de force électromotrice et $\eta \Delta \overline{\mathbf{B}}$ est la diffusion ohmique. Pour comprendre la nature de ce processus, imaginons que l'on parte de la configuration suivante :

- un champ radial $\overline{B}_x(x, z)$ axisymétrique à flux nul, d'amplitude finie mais relativement faible,
- des perturbations non-axisymétriques de faibles amplitudes en champ magnétique et en vitesse, \mathbf{u} et \mathbf{b} .

Le processus global d'auto-entretien de la dynamo, illustré sur la figure 3.11, est le suivant

- tout d'abord le champ radial est cisailé et génère du champ toroidal par effet Ω .
- les perturbations non-axisymétriques sont amplifiées par la MRI, supportée essentiellement par le champ toroidal \overline{B}_y .

- au moment où la croissance des perturbations est maximale, le couplage non-linéaire entre perturbations de champ magnétique et de vitesse génère une force électromotrice possédant une projection axisymétrique (EMF), égale à $\overline{\mathbf{u} \times \mathbf{b}}$. Si la rétroaction non-linéaire associée à l'EMF est favorable, le champ $\overline{\mathbf{B}}$ peut être entretenu contre la dissipation ohmique.
- les perturbations non-axisymétriques, après la phase de rétroaction, sont rapidement cisailées puis dissipées. Un mécanisme non-linéaire impliquant une modulation radiale du champ axisymétrique permet de régénérer de nouvelles ondes non-axisymétriques. Le mécanisme global peut alors se répéter indéfiniment.

Les différentes étapes de ce processus ont été récemment étudiées en détail. La dérivation analytique de l'instabilité dans une configuration de champ constant à flux nul et pour des perturbations non-axisymétriques a été réalisée par Lesur et Ogilvie (2008a) grâce à une analyse WKB, en supposant une séparation d'échelle entre le champ $\overline{\mathbf{B}}$ support de la MRI et les perturbations. Ce travail a notamment montré que le taux de croissance se comporte à l'ordre 0 comme celui de la MRI classique axisymétrique. Aux ordres supérieurs, les taux de croissance maximaux sont localisés sur les extremums en z du champ magnétique axisymétrique.

Enfin, la phase de rétroaction non-linéaire a été étudiée entre autres par Lesur et Ogilvie (2008b); Herault (Stage 2009-2010) grâce à des simulations dans la shearing box. Dans le cas de conditions aux bords shear-périodiques, ces travaux montrent que la rétroaction associée à l'EMF retourne le champ axisymétrique en inversant ses polarités. Des solutions pseudo-cycliques apparaissent, pour lesquelles le champ magnétique se renverse périodiquement. Cependant ces simulations et les travaux analytiques associés indiquent que l'amplitude du champ axisymétrique initiale et le régime de dissipation contraignent le signe de la rétroaction. Cette dernière ne semble favorable que pour le champ \overline{B}_x , ce qui suggère que l'effet Ω est indispensable à la régénération de \overline{B}_y . Notons également qu'un formalisme de rétroaction quasilinear a été développé par Lesur et Ogilvie (2008a), sur la base du développement WKB décrit précédemment.

ii) Analogie avec le problème hydrodynamique

L'analyse de la figure 3.11 et la discussion précédente montrent que le fonctionnement de ce processus MHD est très analogue au mécanisme d'auto-entretien des écoulements turbulents cisailés purement hydrodynamiques et sans rotation. Une équivalence existe entre le champ axisymétrique poloidal (ici \overline{B}_x) et les paires de tourbillons des structures observées dans Couette plan ou Poiseuille. De même le champ toroidal \overline{B}_y peut être comparé au "stries" observées dans ces mêmes structures. L'analogie est également remarquable lorsque on compare l'équation de la dynamo (3.3) et l'équation (3.2). Tout d'abord, un terme d'amplification linéaire transitoire du champ axisymétrique (indépendant de y) apparaît dans les deux cas : l'effet Ω pour la dynamo MRI, qui traduit l'étirement des lignes de champ toroidal, et l'effet lift-up pour le problème hydrodynamique. La présence d'un terme de couplage non-linéaire entre perturbations non-axisymétriques permettant l'entretien de la dynamique (EMF pour la dynamo MRI et contrainte de Reynolds pour le cas hydrodynamique) atteste également de l'étroite ressemblance entre les deux problèmes. Enfin ces deux équations sont dissipatives, l'une faisant intervenir la résistivité, proportionnelle à $1/Rm$ et l'autre la viscosité, proportionnelle à $1/Re$.

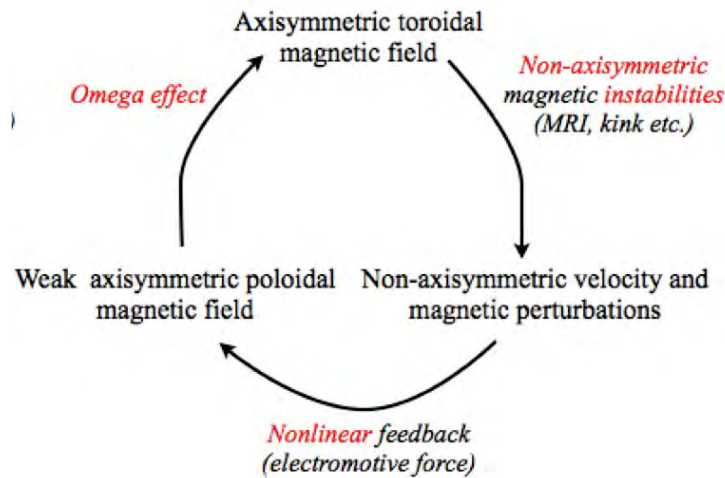


FIGURE 3.11 – Schéma simplifié du processus d’auto-entretien (PAE) du champ axisymétrique $\overline{\mathbf{B}}$ dans la dynamo MRI, à comparer à la figure 3.6.

3.2.3 Recherche de structures cohérentes invariantes

La recherche de solutions invariantes (points fixes, cycles) dans le problème de la dynamo MRI a été largement motivée par l’analogie avec les écoulements hydrodynamiques de Couette et Poiseuille. Ce sont les structures les plus simples (régulières, à grande échelle) décrivant le processus d’auto-entretien et peuvent également être suivies facilement en fonction d’un paramètre comme le Re ou le Rm . D’un point de vue astrophysique, leur étude apparaît notamment intéressante pour mieux comprendre le comportement non-linéaire de la dynamo MRI et la transition observée autour de $Pm = 1$.

i) Les premières structures découvertes

Rincon et al. (2007b) ont été les premiers à converger numériquement une solution stationnaire de dynamo MRI pour un fluide magnétisé cisailé et tournant, s’écoulant entre 2 parois parfaitement conductrices (Couette plan en rotation képlérienne). La technique utilisée repose sur l’introduction d’un forçage non-linéaire artificiel F et est similaire à celle employée par Waleffe (2003) pour trouver des ondes progressives dans Poiseuille. Cette solution stationnaire (ou ”point fixe”) possède tous les ingrédients du PAE décrits en section 3.2.2. Cependant son existence est limitée à faible Re et la présence de parois aux bords du domaine peut être jugée irréaliste d’un point de vue astrophysique. De nouvelles études ont donc été entreprises pour rechercher de telles structures dans la shearing box avec des conditions aux bords de type ”shear-périodique”, plus couramment employées dans les simulations de dynamo MRI.

ii) Cycle limite de Hecault et al. (2011)

Dans la configuration ”shear périodique”, les solutions stationnaires ne peuvent pas subsister car l’opérateur associé à la transformation de Fourier dépend explicitement du temps. Des solutions cycliques sont en revanche possibles. La première d’entre elles a été découverte par Hecault et al. (2011) dans la shearing box incompressible de dimensions $(L_x, L_y \text{ et } L_z)=(0.7, 20, 2)$, près du

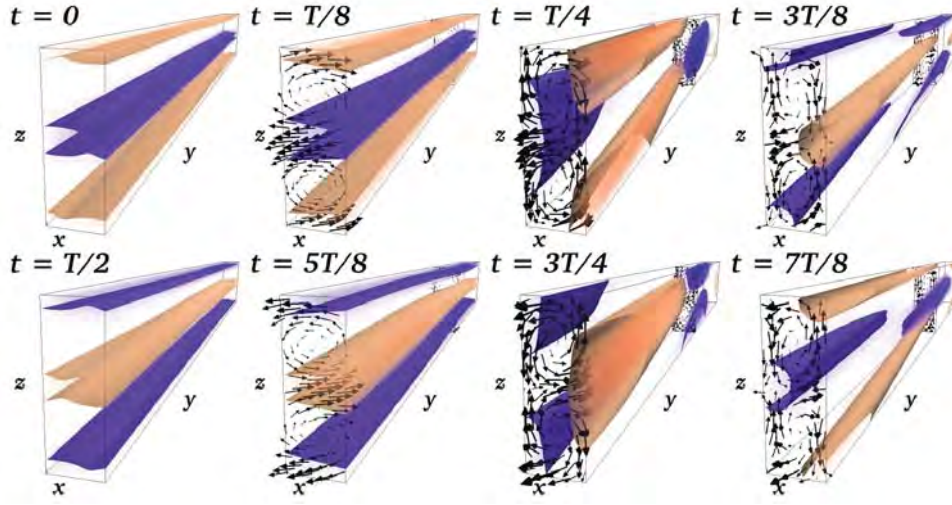


FIGURE 3.12 – Visualisation de la structure spatiale du cycle obtenu par Herault et al. (2011) pour différentes fractions de la période T . Les isosurfaces du champ \mathbf{B} sont colorées en fonction de l'intensité de \bar{B}_y . Le rouge dénote un champ positif et le bleu un champ négatif. Les flèches noires représentent le champ de vitesse dans le plan poloidal $y = 0$. Celui-ci a pour effet d'advecter le champ magnétique support de la MRI, initialement dominé par le mode axisymétrique toroidal.

régime transitionnel ($Re = 70$ et $Rm = 360$), où Re et Rm ont été définis en section 2.3.3. Le choix d'un rapport d'aspect L_y/L_x grand par rapport à celui utilisé dans les simulations plus classiques de la dynamo MRI est motivé par la volonté de simplifier la dynamique autant que possible (voir Herault et al. (2011) pour plus de détails). La connaissance du PAE de la dynamo MRI a permis de cibler des conditions initiales proches du cycle. Pour converger la solution, un algorithme de Newton-Krylov, développé par F. Rincon, C. Cossu et G. Lesur, a été couplé avec le code MHD tridimensionnel SNOOPY (voir annexe A.2).

Ce cycle est une structure 3D MHD non-linéaire à grande échelle, où coexistent un champ axisymétrique $\bar{\mathbf{B}}$, support de la MRI, dont la forme spatiale est dominée par le premier mode vertical dans la décomposition de Fourier,

$$\bar{\mathbf{B}}_0 = \hat{\mathbf{B}}_0 \cos(k_z z), \quad (3.4)$$

et des perturbations non-axisymétriques dont la géométrie reste relativement simple et grande échelle. Ces perturbations MRI-actives, sont dominées par un mode de Fourier trailing ($k_x(t) > 0$, $k_y > 0$) dont les nombres d'ondes sont $k_y = k_{y0} = 2\pi/L_y$, $k_z = k_{z0} = 2\pi/L_z$ pour la composante de vitesse et $k_y = k_{y0}$, $k_z = 0$ pour la composante magnétique. Comme la solution décrite ici est un cycle, il est nécessaire d'avoir $k_x(T) = k_x(0) + 2n\pi/L_x$ avec n entier. Comme $k_x = k_{y0}t$ dans ce cas précis, la période du cycle T doit donc être un multiple exact du rapport d'aspect ($T = 2L_y/L_x \sim 57.14S^{-1}$). Notons qu'il est possible d'obtenir des solutions périodiques de période fractionnaire à ce temps, si les modes non-axisymétriques non nuls vérifient $k_y > k_{y0}$.

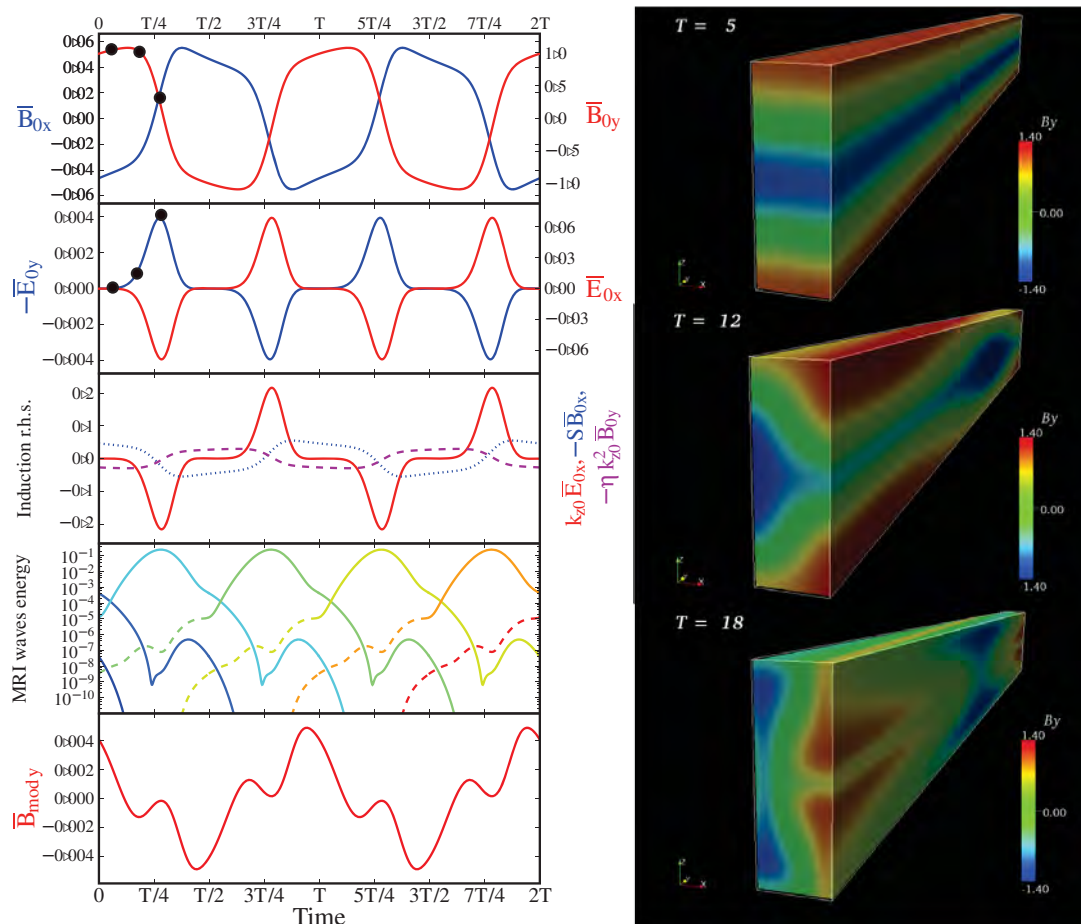


FIGURE 3.13 – Evolution temporelle des composantes axisymétriques et non-axisymétriques du cycle de Herault et al. (2011) pour $Re = 60$ et $Rm = 352$. De haut en bas : amplitude du champ $\bar{\mathbf{B}}_0$, de l'EMF axisymétrique $\bar{\mathcal{E}}_0$, des termes de l'équation d'induction axisymétrique (eq. 3.3), énergie des ondes non-axisymétriques successives ($k_y = k_{y0}$) et amplitude du mode magnétique axisymétrique médiateur ($k_z = k_{z0}, k_x = 2\pi/L_x$) permettant de régénérer de nouvelles ondes non-axisymétriques. Une représentation 3D du champ toroidal total B_y est donné à droite de la figure pour trois temps différents repérés par les points noirs sur les courbes.

Phase d'amplification MRI et retournement de $\overline{\mathbf{B}}_0$: La figure 3.12 illustre l'évolution spatio-temporelle du cycle durant une période. A $t = 0$, la dynamique est dominée par le champ azimutal axisymétrique à flux nul \overline{B}_y (voir eq.3.4). Ce champ sert de support à la MRI qui amplifie de façon quasi-exponentielle les perturbations non-axisymétriques d'amplitude initialement faible. D'un point de vue physique, la MRI a pour effet de séparer les particules radialement : si l'on se place dans le plan médian du disque, celles qui sont situées en $y = 0$ migrent vers les $x < 0$ tandis que celles au centre ($y = L_y/2$) migrent vers des $x > 0$ (vers l'extérieur du disque). Comme le champ magnétique est attaché aux particules, celui-ci va être déformé dans la direction radiale. Les lignes de champ de polarité différentes sont transportées dans des directions radiales opposées. Lorsque l'onde est suffisamment trailing, vers $t = T/4$, le champ de vitesse non-axisymétrique, sous l'effet du cisaillement et de l'incompressibilité, prend la forme de rouleaux contra-rotatifs (dans le plan poloidal). La composante de vitesse verticale, issue de ces rouleaux poloidaux, advecte alors le champ support de la MRI verticalement. Les lignes de champ de polarité positive sont amenées en $z = L_z/2$ alors que celles de polarité négatives sont transportées vers les extrémités en $z = 0$ et $z = L_z$. Au bout de $t = T/2$, les ondes non-axisymétriques meurent sous l'effet du cisaillement et le champ magnétique reprend sa configuration initiale mais avec une polarité inversée. Le retournement du champ est donc le résultat de la rétroaction non-linéaire des modes MRI sur le champ support.

La figure 3.13 montre l'évolution de certaines composantes du cycle durant 2 périodes. On voit que le changement de polarité du cycle intervient au moment où la force électromotrice (EMF) est maximale. Cette force électromotrice non-linéaire est composée d'un terme d'induction et d'un terme d'advection. Dans le cas du cycle de (Herault et al., 2011), c'est l'advection qui est à l'origine du pic d'EMF et qui traduit le transport du champ magnétique par le champ de vitesse. Sur le troisième graphe, illustrant les différentes composantes de l'équation d'induction axisymétrique, on voit que c'est l'EMF radiale qui domine instantanément la dynamique toroidale et non l'effet Ω . Comme l'ont indiqué Herault et al. (2011), ce cycle de dynamo MRI ne présente aucun des aspects d'une dynamo cinématique de type champ moyen car la force électromotrice n'est jamais proportionnelle à l'amplitude du champ grande échelle.

Regénération des ondes non-axisymétriques : Durant la deuxième demi-période, l'onde non-axisymétrique initiale meurt sous l'effet du cisaillement et de la dissipation mais une nouvelle onde est régénérée puis amplifiée par la MRI. Cela entraîne un deuxième retournement du champ axisymétrique et un retour vers l'état initial. Si l'état initial est exactement sur le cycle, ce mécanisme se reproduit à l'infini. Mais comment les ondes non-axisymétriques sont-elles exactement régénérées périodiquement dans ce problème ?

Comme nous l'avons déjà mentionné, la régénération de ces ondes l'introduction d'une modulation radiale du champ axisymétrique permet de régénérer les ondes non-axisymétrique dans la shearing box, lorsque ces dernières sont dissipées. Dans sa phase trailing, l'onde non-axisymétrique interagît non-linéairement avec cette modulation et va créer une nouvelle onde leading de faible amplitude, amplifiée à son tour par la MRI.

Cette interaction peut être vue comme un échange d'énergie entre un mode médiateur (qui traduit la dépendance radiale du champ axisymétrique), la nouvelle onde leading et l'onde trailing mourante. La figure 3.14 montre cette interaction en triade. Au moment où l'onde trailing

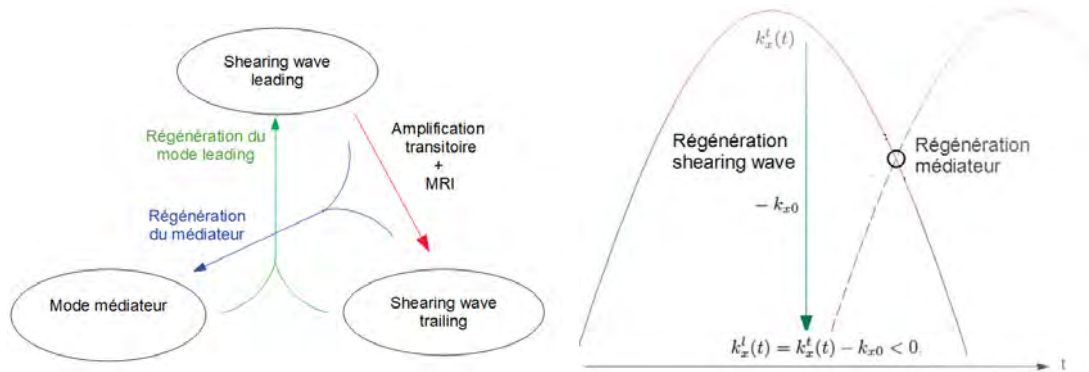


FIGURE 3.14 – Schéma représentant l’interaction en triade entre le mode médiateur, l’onde leading naissante et l’onde trailing mourante.

est amplifiée par la MRI, une partie de son énergie est transférée vers l’onde leading, par l’action du médiateur. Une fois l’onde leading entrant dans sa phase de croissance, elle interagit à son tour avec l’onde mourante pour réalimenter l’énergie du médiateur. Dans cette interaction complexe, on peut voir le mode médiateur comme une paroi, portée par \mathbf{e}_x qui réfléchirait une partie de l’onde trailing. Le vecteur d’onde dirigée vers les x positifs (si $k_y > 0$) prend une direction alors opposée, donnant naissance à une onde leading.

Ce mécanisme permet ainsi de fermer la boucle de dynamo et de réamorcer les deux phases que nous avons vu précédemment (croissance MRI et rétroaction non-linéaire). A noter qu’un tel mode médiateur est d’ailleurs présent dans le système réduit de Moehlis et al. (2004a) visant à décrire l’écoulement de Couette plan avec parois.

Instabilité : Herault et al. (2011) ont également montré que le cycle est instable pour le régime de Re et Rm considéré. Toute perturbation initiée sur le cycle conduit à une dynamique chaotique ou à une relaminarisation de l’écoulement au bout de 2-3 périodes. Cette propriété est très intéressante car elle suggère l’existence d’une dynamique très riche autour du cycle (voir section ii) sur la transition hydrodynamique), avec des connexions potentielles vers d’autres structures plus chaotiques.

Objectifs détaillés du travail de thèse

Nous avons vu aux chapitres précédents que la dynamo magnétorotationnelle est un candidat potentiel pour expliquer l'origine du champ magnétique et de la turbulence MHD dans les disques d'accrétion. Cependant, les conditions requises pour exciter cette dynamo non-linéaire, le rôle de la dissipation ainsi que la dynamique du régime transitionnel sont très mal comprises aujourd'hui. La dépendance de la transition en Pm reste également débattue et son origine est toujours inconnue. De plus les propriétés de transport de la turbulence MHD liée à la dynamo MRI ne sont pas clairement déterminées. Ce travail de thèse s'est focalisé essentiellement sur le problème de la transition à la dynamo MRI. L'objectif principal a été de mieux cerner les mécanismes physiques caractérisant la dynamique non-linéaire de cette dynamo afin d'identifier les causes de la transition observée autour de $Pm = 1$. Ce travail a également été réalisé dans l'optique plus générale de mieux comprendre le fonctionnement des dynamos sous-critiques, basées sur des instabilités MHD. Afin de répondre à ces objectifs, nous avons suivi le plan d'étude détaillé suivant :

- Dans un premier temps, nous avons cherché à comprendre la nature et la structure de la frontière laminaire/turbulent dans ce problème. Ce travail purement numérique et consistant à cartographier les temps de vie turbulents dans l'espace des phases, s'est largement inspiré des travaux sur la transition dans les écoulements hydrodynamiques cisailés. Une première question à laquelle nous avons cherché à répondre a été de savoir si l'on retrouvait les caractéristiques d'une transition impliquant l'existence d'une selle chaotique, comme celle observée par Moehlis et al. (2004a) dans un modèle réduit du problème de Couette plan. Nous avons exploré une large gamme de paramètres et de conditions initiales pour y répondre. Le second objectif de cette première partie a été d'identifier de nouvelles structures périodiques, dans des simulations à grand rapport d'aspect, similaires à celles de Herault et al. (2011), et d'apporter un éclairage phénoménologique sur leurs relations à la transition. Au cours de cette étude, nous avons également cherché à savoir si des solutions périodiques exactes similaires aux pseudo-cycles de Lesur et Ogilvie (2008b) existaient dans les écoulements à petit rapport d'aspect. Ce travail est présenté au chapitre 4.
- Le deuxième objectif a été d'établir le rôle exact des cycles de dynamo MRI dans la transition à la turbulence MHD. Comme nous l'avons vu au chapitre 3, la transition dans le problème hydrodynamique de Couette plan pourrait être liée à des bifurcations de structures invariantes comme les cycles. Plus généralement, ce type de bifurcations a été étudié activement dans de nombreux problèmes physiques et est décrit de façon rigoureuse et mathématique dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques. Nous avons donc cherché à identifier précisément les mécanismes de bifurcation à l'œuvre dans l'émergence

d'une activité chaotique de dynamo dans notre problème. Ce travail est présenté au chapitre 5. Des méthodes numériques spécifiques développées au cours de cette thèse pour réaliser ce travail sont présentées en annexe A.3.

- Enfin, ayant montré que les cycles sont effectivement impliqués dans l'émergence du chaos et de turbulence MHD dans le problème de la dynamo MRI, nous avons tenté de nous servir de ces objets physiques et mathématiques bien définis pour mieux cerner le comportement de la transition vis à vis du Pm. Pour cela, nous avons étudié la dépendance de ces cycles au régime de dissipation caractérisé par Re et Rm . L'objectif précis recherché était notamment de mettre en évidence un mécanisme physique générique susceptible d'expliquer la disparition de la dynamo à bas Pm. Ce travail est présenté au chapitre 6.

Enfin nous avons également en tête pour objectif au début de cette thèse d'aborder le problème de l'efficacité du transport de moment cinétique par la turbulence MHD auto-entretenu associé à la dynamo MRI. L'idée que nous avons était de tenter une application de la théorie des orbites périodiques (voir chapitre 3). Étant donné le temps investi dans la compréhension du problème de la transition, nous n'avons pas pu obtenir suffisamment de résultats pour en faire un chapitre entier. Nous avons donc décidé d'exposer le travail de "défrichage" accompli en annexe D.

II

Résultats

Exploration numérique de la transition dynamo

Ce premier chapitre présente l'ensemble des résultats d'une étude numérique effectuée au cours de la première année de thèse et visant à comprendre la géométrie et la structure de la transition dynamo MRI. Cette exploration avait également pour but d'identifier de nouvelles structures invariantes cycliques et d'apporter un éclairage phénoménologique sur leurs relations avec la dynamique transitionnelle. Pour cela, nous nous sommes attachés à cartographier la frontière laminaire/turbulent en sondant les temps de vie de la turbulence en fonction de certains paramètres du problème, puis à identifier des solutions cycliques à partir des cartes générées.

4.1 Modèle et méthodes numériques

Les résultats que nous présentons dans ce chapitre et les suivants ont été obtenus à partir des simulations des équations de la MHD incompressible (section 2.1.4) dans le modèle de la couche de cisaillement (section 2.1.5). Dans cette étude, le temps est mesuré en S^{-1} . Le champ magnétique \mathbf{B} sera exprimé comme une vitesse d'Alfvén et aura donc la même unité que le champ de vitesse \mathbf{u} . \mathbf{B} et \mathbf{u} sont tous les deux normalisés par la vitesse de cisaillement SL . Les nombres de Reynolds (Re) et Reynolds magnétique (Rm) que nous utiliserons sont définis en section 2.3.3.

Dans le modèle de couche de cisaillement, des symétries spatiales peuvent être imposées à l'écoulement pour réduire la dynamique à un sous-espace invariant et ainsi faciliter son analyse. Une des symétries, notée \mathcal{A}_1 et présentée en annexe A.1, sera largement exploitée dans les résultats qui suivent. Une quantité importante dans ce problème est le champ axisymétrique $\bar{\mathbf{B}}$, défini comme la moyenne de \mathbf{B} en y . Dans la plupart des cas symétriques étudiés, ce champ est dominé par le premier mode de Fourier en z :

$$\bar{\mathbf{B}}_0(z, t) = \bar{\mathbf{B}}_0(t) \cos(2\pi z/L_z),$$

où L_z est la dimension verticale du domaine d'étude. Ce champ est gouverné par l'équation de dynamo 3.3. Nous utiliserons abusivement la notation $\bar{\mathbf{B}}_0$ pour désigner $\bar{\mathbf{B}}_0(t)$ et le terme d'"amplitude" de $\bar{\mathbf{B}}_0$ pour désigner une valeur particulière de $\bar{\mathbf{B}}_0(t)$ à un temps donné (comme un maximum). Nous définissons de la même manière $\bar{\mathcal{E}}_0$ comme l'EMF axisymétrique responsable de l'évolution de ce champ (et donc projetée sur le premier mode de Fourier en z).

Les simulations de l'écoulement képlérien dans le modèle de couche de cisaillement ont été réalisées dans la shearing box (section 2.2) grâce au code pseudo-spectral SNOOPY, développé

par Geoffroy Lesur (annexe A.1). Ce code est une implémentation numérique du modèle de la couche de cisaillement dans un domaine réduit de taille (L_x, L_y, L_z) et pour une résolution numérique donnée (N_x, N_y, N_z) . Le calcul des cycles non-linéaires de dynamo MRI, a été possible grâce au code PEANUTS, interfacé avec SNOOPY. L'ensemble des méthodes numériques associées à ce code sont présentées en annexe A.2 et seront mentionnées au cours de l'étude, lorsque celles-ci seront utilisées.

La plupart des résultats ont été obtenus dans la shearing box de dimensions $(0.7, 20, 2)$, à grand rapport d'aspect L_y/L_x , utilisée notamment par Herault et al. (2011). Cette configuration permet d'étudier l'écoulement dans des gammes de Re et Rm faibles, où la dynamique dans le plan poloidal (x, z) est faiblement non-linéaire et encore simple à analyser. Les boîtes à plus petit rapport d'aspect nécessitent en effet un Re et Rm plus élevés, puisque les ondes non-axisymétriques à la base du processus d'auto-entretien de la dynamo y sont dissipées plus rapidement. Ces Re et Rm plus grands ont pour conséquence l'excitation d'un plus grand nombre de petites échelles dans le plan poloidal, ce qui complexifie l'analyse et requiert une plus grande résolution numérique pour simuler l'écoulement. Nous présenterons cependant quelques résultats dans les boîtes courtes afin de montrer la portée générale des résultats obtenus.

4.2 Cartographie de la transition

4.2.1 Procédure de cartographie

La description complète de la transition nécessiterait de pouvoir sonder les temps de vie turbulents pour toutes les conditions initiales de l'espace des phases et pour tous les paramètres physiques du problème. Cela n'est évidemment pas réalisable numériquement car le nombre de degrés de liberté de ce système MHD 3D est de l'ordre de plusieurs dizaines de milliers. Nous avons donc choisi une représentation 2D, qui consiste à cartographier les temps de vie en fonction de deux grandeurs physiques, caractéristiques de l'état du système (comme l'amplitude de la condition initiale) ou du régime de dissipation (comme le Re ou le Rm). La procédure pour cartographier la transition en fonction de ces paramètres est la suivante : on génère une forme spatiale de condition initiale en introduisant une amplitude aléatoire sur chaque mode de perturbations. Cela revient à mettre du bruit blanc sur les composantes de Fourier du champ de vitesse et du champ magnétique. Si l'on souhaite restreindre l'étude de la dynamique dans un sous-espace symétrique de type \mathcal{A}_1 , un filtre est alors appliqué, projetant l'état dans cet espace réduit. Pour finir, on impose l'incompressibilité et on renormalise le résultat de telle sorte que la densité totale d'énergie soit égale à 1. On note cet état initial normalisé X_{0_n} . Celui-ci est ensuite multiplié par une certaine amplitude A et sert de condition initiale X_0 pour nos simulations.

$$X_0 = AX_{0_n}, \quad \text{avec} \quad \langle X_{0_n}^2 \rangle = 1 \quad \text{et} \quad \langle \cdot \rangle = \frac{1}{L_x L_y L_z} \int \int \int_V \cdot. \quad (4.1)$$

Notons que la condition de flux magnétique nul est également imposée, c'est à dire que le champ généré ne possède pas de mode $(k_x = 0, k_y = 0, k_z = 0)$. Une série de simulations avec SNOOPY est alors réalisée à partir de la condition initiale, en faisant varier deux des trois paramètres (que sont A , Re et Rm) sur une grille prédéfinie. La durée des simulations T_f est fixée à l'avance, de l'ordre de plusieurs centaines de S^{-1} . Le temps de vie de la turbulence (ou temps de vie dynamique) est alors mesuré pour chaque simulation et reporté sur une carte 2D en fonction

des deux paramètres choisis. Ce temps est défini comme la durée pendant laquelle la densité moyenne d'énergie magnétique reste supérieure à une valeur seuil que nous avons fixée à 10^{-4} , dans les unités normalisées. En dessous on considère qu'il n'y a plus de dynamique turbulente et donc que l'écoulement est devenu laminaire. Nous avons vérifié que l'aspect général des cartes obtenues ne dépend pas trop de la valeur du seuil choisie, ni de l'observable considérée (on aurait pu prendre par exemple la densité d'énergie totale). Cette méthode, par contre, peut présenter un biais à grand Rm car dans ce régime, la décroissance du champ magnétique axisymétrique est très lente. Il est possible que l'énergie magnétique soit encore importante même après que la dynamique 3D turbulente ait été amortie. Dans ce cas particulier, notamment rencontré dans les boîtes à petit rapport d'aspect L_y/L_x , il est plus pertinent d'utiliser l'énergie cinétique qui traduit directement la vigueur des perturbations non-axisymétriques, dissipées beaucoup plus rapidement. Notons enfin que si le temps de vie dynamique est supérieur à T_f , il sera affiché comme égal à T_f .

4.2.2 Etude de la frontière en Pm

Les travaux de Fromang et al. (2007) ont montré que la transition entre un état laminaire et un état turbulent MHD semblait se faire autour de $Pm = 1$. Cependant leur étude a été réalisée pour un écoulement compressible et pour un petit rapport d'aspect ($L_y/L_x = \pi$). Aucune étude similaire n'est disponible pour des écoulements incompressibles, tels que nous les considérons dans cette thèse, et pour une shearing box de plus grand rapport d'aspect. Nous avons donc réalisé, dans un premier temps, des cartes de transition en fonction de Re et Rm , en suivant la procédure détaillée en 4.2.1 pour une boîte de dimensions $(0.7, 20, 2)$. Afin de s'assurer de la généralité de nos résultats, trois conditions initiales X_{0_1} , X_{0_2} et X_{0_3} , de forme et d'amplitude aléatoires ont été considérées, permettant la génération de trois cartes différentes. X_{0_1} et X_{0_2} ont une forme spatiale identique mais des amplitudes différentes ($A = 2.5$ pour la première et $A = 5$ pour la seconde). La troisième a une forme spatiale différente des deux premières et son amplitude A est de 5. Les symétries \mathcal{A}_1 ont été appliquées pour chacune d'entre elles. Nous avons étudié tout d'abord une gamme de Re et Rm allant de 100 à 1000, pour une résolution numérique de $48 \times 48 \times 72$. Les cartes ainsi obtenues sont illustrées sur la figure 4.1 (à gauche). On voit que les régions où la turbulence est entretenue sur des temps longs (colorées en rouge/foncé) semblent être localisées au dessus de la ligne $Pm = 1$. A bas Re , la dynamique semble être entretenue uniquement pour des Rm supérieurs à une certaine valeur critique (~ 500) tandis qu'à plus grand Re , la frontière laminaire/turbulent suit visuellement la ligne $Pm \sim 1$. Afin d'observer le comportement de la frontière à plus grand Re et Rm , nous avons réalisé trois cartes supplémentaires en partant des mêmes conditions initiales X_{0_1} , X_{0_2} et X_{0_3} mais en faisant varier Re et Rm entre 500 et 3000, avec une résolution numérique de $96 \times 96 \times 128$ (figures de droite). Notons que pour ces grands Re et Rm , la grille de paramètres est moins échantillonnée et par conséquent l'interprétation des résultats est plus difficile. Cependant on observe que la turbulence n'est réellement active qu'au dessus d'une ligne $Pm \sim 1$.

Nous avons ensuite refait le même type de carte pour une boîte de dimensions $(0.5, 2, 1)$, de rapport d'aspect intermédiaire $L_y/L_x = 4$. Cette configuration a été entre autres utilisée par Lesur et Ogilvie (2008b) pour étudier les solutions pseudo-cycliques incompressibles de la dynamo MRI. Une seule condition initiale a été utilisée dans ce cas. Comme l'échelle des structures non-axisymétriques en y est plus petite dans ce type de boîte, le régime de transition se trouve

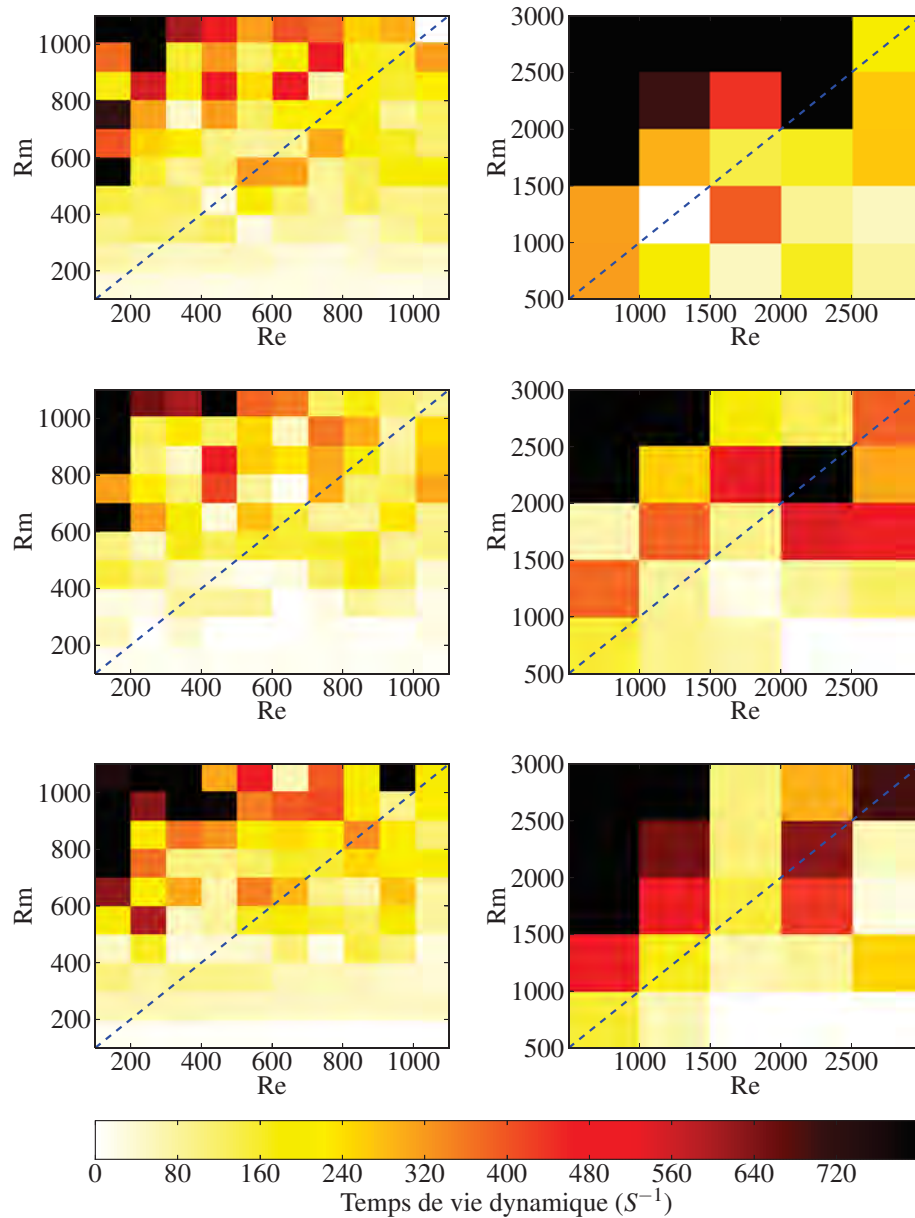


FIGURE 4.1 – Cartes représentant le temps de vie dynamique en fonction de Re et Rm , pour des simulations effectuées dans la boîte de dimensions $(0.7, 20, 2)$. De haut en bas, les simulations sont initialisées avec la condition X_{01} , X_{02} et X_{03} . Les cartes de gauche ont été effectuées à basse résolution $48 \times 48 \times 72$ pour une gamme de Re et Rm allant de 100 à 1000. Les cartes de droite correspondent aux simulations réalisées à plus grande résolution $96 \times 96 \times 128$ pour une gamme plus large de Re et Rm . La ligne pointillée correspond à la droite $Pm = 1$.

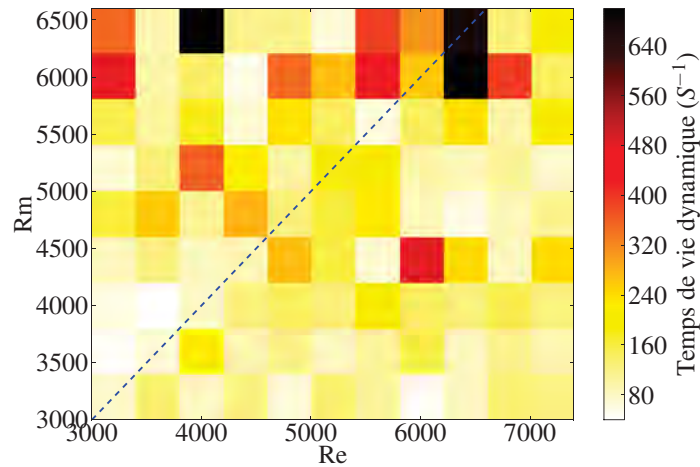


FIGURE 4.2 – Carte représentant le temps de vie dynamique en fonction de Re et Rm , pour des simulations effectuées dans la boîte de dimensions $(0.5, 2, 1)$. La forme de la condition initiale et son amplitude A sont fixées ($A = 5$). La résolution numérique est de $64 \times 64 \times 128$.

à des Re et Rm bien plus grands que ceux obtenus précédemment¹. Nos simulations indiquent que pour $Re < 800$ (régime non représenté ici), aucune dynamique n'est excitée, quelque soit Rm . Cette limite inférieure en Re , qui correspond à la limite de stabilité de la MRI, était de l'ordre de 30-50 pour la boîte de Herault et al. (2011) et n'était donc pas visible sur la figure 4.1. Les premières simulations turbulentes apparaissent pour $Re \sim 800$ et uniquement au dessus d'un certain Rm_c (ici autour de 3000, alors qu'il était proche de 500 pour la boîte de dimensions $(0.7, 20, 2)$). A plus grand Re , la carte de la figure 4.2 indique que la majorité des points turbulents se situent également au dessus d'une ligne $Pm \sim 1$. Ce résultat est cependant moins net que pour la boîte à plus grand rapport d'aspect.

Dans les deux cas présentés ci-dessus, le comportement de la frontière laminaire/turbulent ressemble donc fortement à celui décrit par Fromang et al. (2007) dans la boîte de dimensions $(1, \pi, 1)$. Notons que leur rapport d'aspect $L_y/L_x = \pi$, plus faible, implique une valeur de Rm_c encore plus grande, de l'ordre de 6000. La figure 4.3 récapitule de façon schématique l'ensemble des résultats à notre disposition, en plus de ceux de Fromang et al. (2007). Le rectangle noir en pointillé indique la grille en Re et Rm utilisée pour les cartes de la figure 4.1. L'ensemble de ces résultats indique que l'existence d'une transition autour de $Pm = 1$ est une caractéristique générale des simulations actuellement réalisables de dynamo MRI dans la shearing box, indépendante des rapport d'aspect utilisés. Notons que si l'on s'en tient à une définition de Re et Rm par rapport à la longueur de référence L (typiquement $L \sim L_x \sim L_z$ dans toutes les configurations présentées ici), la diminution du rapport d'aspect L_y/L_x a pour effet de décaler les frontières de transition vers des Re et Rm plus grands. Il n'est pas forcément pertinent de comparer directement les Re et Rm critiques de ces courbes définis ainsi car la longueur de référence utilisée n'est pas représentative de l'échelle azimutale des ondes non-axisymétriques, qui sont au cœur du processus dynamique étudié. Il s'avère cependant difficile de trouver un facteur d'échelle qui permettrait d'unifier l'ensemble de ces courbes critiques car les tailles ca-

¹si Re et Rm sont toujours définis par rapport à la longueur de référence L comme en section 2.3.3.

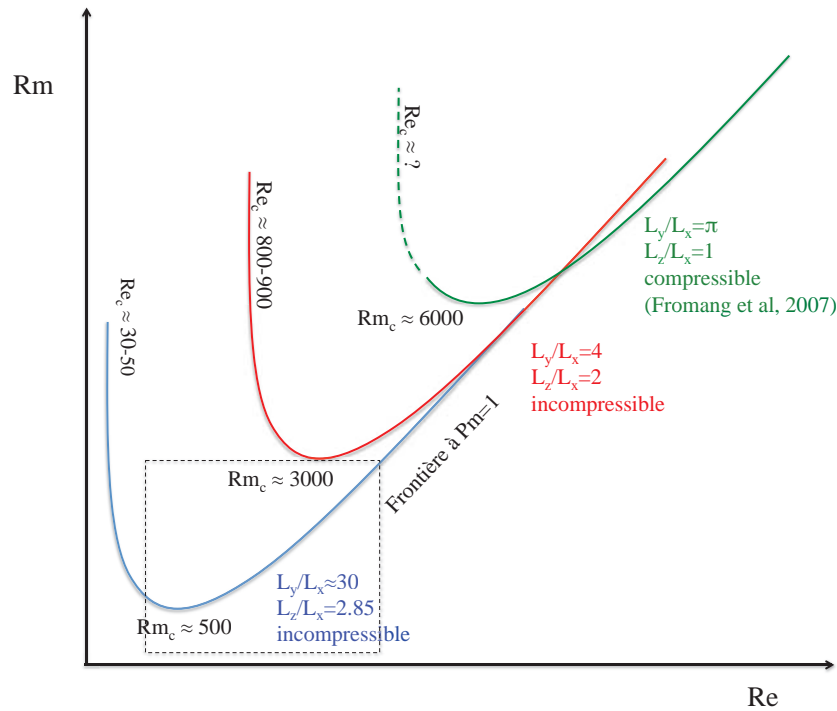


FIGURE 4.3 – Schéma représentant la forme des frontières laminaire/turbulent dans le problème de la dynamo MRI pour différents rapport d'aspects et configurations numériques. Une diminution du rapport d'aspect L_y/L_x a pour effet d'augmenter le Rm_c et le Re_c , pour lesquels un régime turbulent apparaît. Les résultats de Fromang et al. (2007) ne montrent pas explicitement l'existence d'une limite inférieure en Re , même si celle-ci existe obligatoirement. Dans chaque cas, une transition est observée autour de $Pm = 1$. Le cadre noir en pointillé indique la gamme de Re et Rm où les simulations de la figure 4.1 ont été réalisées.

ractéristiques du système suivant les 3 directions spatiales sont importantes pour la physique du problème.

4.2.3 Etude de la structure de la frontière de transition dans l'espace des phases

En plus de la dépendance globale en Pm de la transition, les cartes de la figure 4.1 révèlent la sensibilité du temps de vie de la turbulence aux conditions initiales. Nous avons donc étudié plus en profondeur cette propriété, afin de mieux comprendre la forme de la transition et la place des structures cohérentes (telles que les cycles) dans le problème de la dynamo MRI. A la manière de Moehlis et al. (2004a), nous avons cartographié la frontière laminaire/turbulent en sondant les temps de vie en fonction de l'amplitude A d'une forme de condition initiale donnée et du Rm , en suivant à nouveau la procédure décrite au paragraphe 4.2.1. Re est fixé dans un premier temps à 70 afin de simplifier la dynamique. Le paramètre de contrôle le plus important ici est Rm car il intervient directement dans l'équation (3.3) du champ axisymétrique et a donc un rôle équivalent à Re dans l'équation (3.2) du problème sous-critique hydrodynamique. Varier A revient à explorer l'espace des conditions initiales le long d'une ligne traversant la frontière entre le bassin laminaire et la région chaotique.

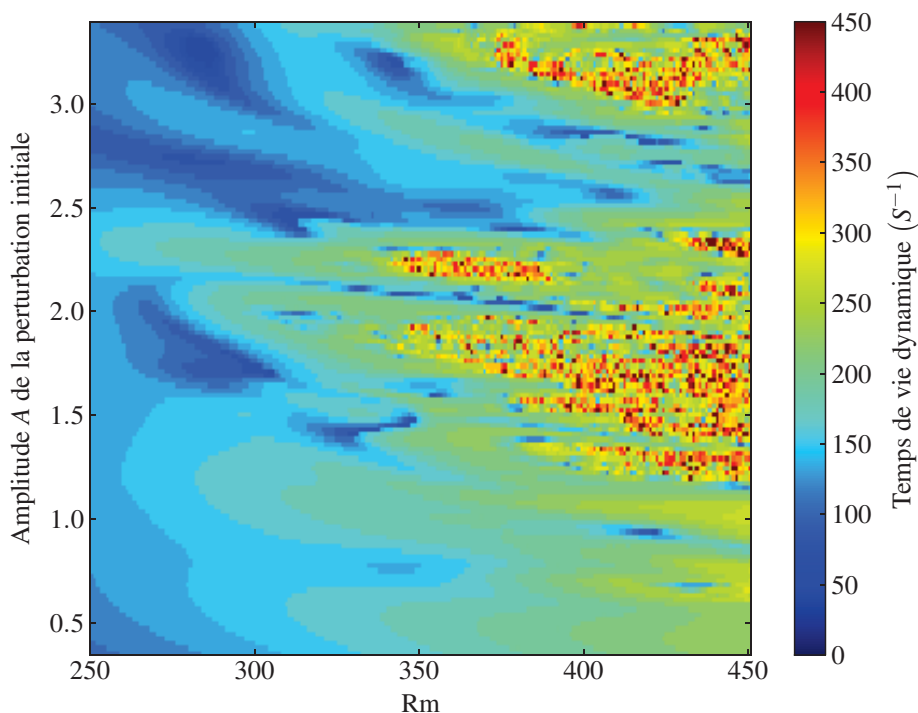


FIGURE 4.4 – Carte de transition à haute résolution ($\delta Rm = 1, \delta A = 0.023$) représentant le temps de vie dynamique en fonction de Rm et A pour une forme de condition initiale donnée. Aucune symétrie spatiale n'est imposée.

La figure 4.4 montre un exemple de carte de transition en (Rm, A) obtenue dans le problème complet, sans symétries spatiales, où chaque pixel représente une simulation. Le pas de grille utilisé est de $\delta Rm = 1, \delta A = 0.023$; la réalisation de cette carte a donc nécessité près de 30000 simulations. La résolution numérique est de $(N_x, N_y, N_z) = (24, 12, 36)$ et le temps final des simulations T_f de $450 S^{-1}$. Une carte similaire a été obtenue pour une dynamique restreinte au sous-espace de symétries \mathcal{A}_1 (Fig. 4.5 à gauche). Ces deux cartes indiquent la présence d'une région à bas Rm où les trajectoires dans l'espace des phases convergent rapidement (au bout de quelques dizaines de S^{-1}) vers la solution laminaire képlérienne et d'une autre à plus grand Rm , où la dynamique est turbulente sur plusieurs centaines de S^{-1} . Dans cette région, l'évolution de l'écoulement est extrêmement sensible aux conditions initiales et aux paramètres de contrôle. Une infime perturbation en A ou en Rm induit un changement drastique du temps de vie de la turbulence ou plus généralement des propriétés turbulentes (comme le transport). L'ensemble des conditions initiales convergeant vers un état turbulent n'est pas connexe. En effet, en plein milieu des régions dite "turbulentes", on observe la présence d'un certain nombre de points où la dynamique est inactive. La frontière entre cet ensemble et le bassin laminaire semble donc très complexe et présente une géométrie qui ressemble à une fractale. Un zoom effectué sur la région délimitée par le rectangle noir sur la carte de la figure 4.4 indique en effet que les motifs complexes associés à la frontière turbulent/laminaire se répliquent à plus petite échelle dans l'espace des phases. La réduction de la dynamique au sous espace symétrique \mathcal{A}_1 ne semble pas

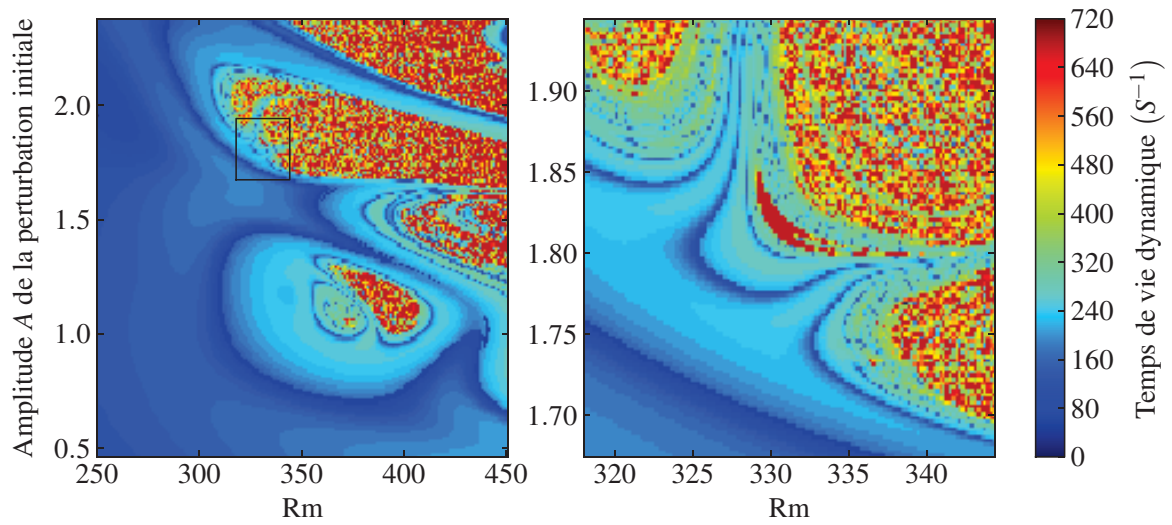


FIGURE 4.5 – Carte de transition représentant le temps de vie dynamique en fonction de Rm et A pour une forme de condition initiale donnée, dans l'espace de symétries \mathcal{A}_1 . A gauche la résolution est de $(\delta Rm = 1, \delta A = 0.0115)$. La zone délimitée par le cadre noir a été recalculée sur la figure de droite avec une résolution plus grande $(\delta Rm = 0.2, \delta A = 0.0023)$.

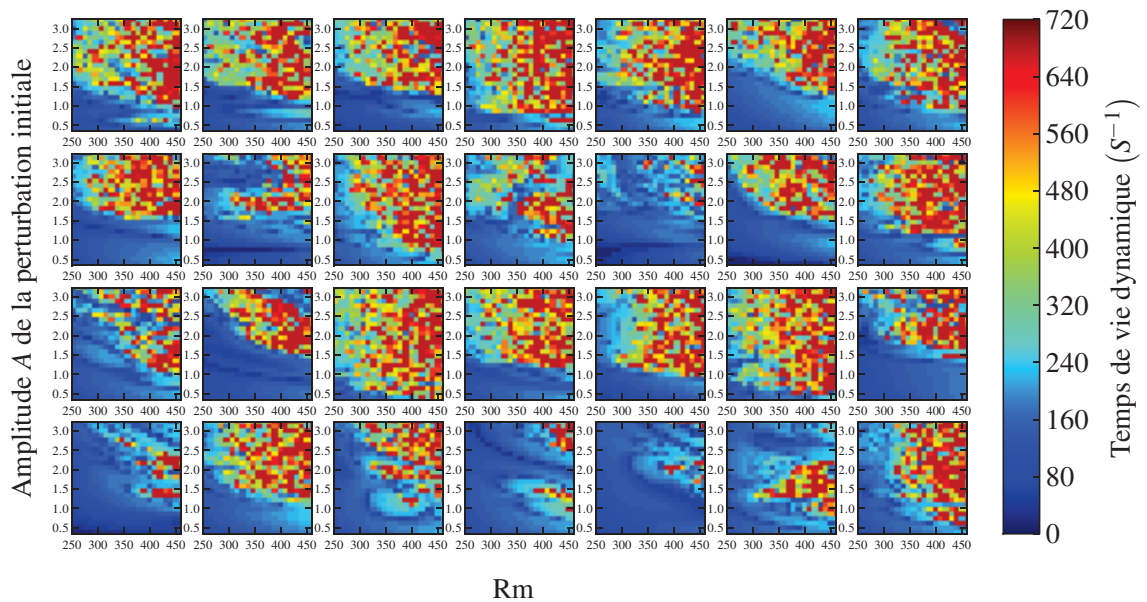


FIGURE 4.6 – Cartes de transition à basse résolution $(\delta Rm = 10, \delta A = 0.115)$ en fonction de A et de Rm , pour 28 formes spatiales de condition initiales différentes.

affecter ce résultat. Par la suite, nous utiliserons cette réduction afin de simplifier l'analyse du problème.

Ces cartes sont-elles représentatives de la dynamique globale de la transition ? En effet, elles n'ont été obtenues que pour une forme spatiale de condition initiale donnée, correspondant à une direction bien déterminée dans l'espace des phases. Or la dimension de l'espace des phases est de plusieurs milliers dans notre problème. Nous avons donc choisi de générer aléatoirement 28 formes spatiales différentes, en espérant que l'ensemble des directions associées à ces formes couvrent une portion globalement représentative de l'espace des phases. La figure 4.6 montre les cartes de transition associées à ces 28 formes de conditions initiales différentes. On constate tout d'abord qu'une géométrie fractale semble se dessiner quel que soit l'état initial considéré et semble donc être une propriété globale de la transition dans l'espace des phases. De plus, le Rm critique au delà duquel la dynamique devient turbulente dépend de l'amplitude A et de la forme spatiale de l'état initial. Par exemple, la première carte de la figure 4.6 nous indique que le Rm critique est d'environ 250, tandis que pour la carte n°26 (numérotée de gauche à droite et de haut en bas), il semble plutôt proche de 380.

Ces résultats, combinés à ceux de Rempel et al. (2010), suggèrent que la transition dans le problème de la dynamo MRI est liée à l'existence d'une "selle chaotique", similaire à celle décrite dans les sections 3.1.2 et 3.1.5 pour le problème sous-critique hydrodynamique. Il est également fort probable que les points dont le temps de vie dynamique est supérieur à $700 S^{-1}$ (quasi "infini") appartiennent à un ensemble de mesure nulle, associé au "edge" de la transition et incluant des structures invariantes de la dynamo MRI. L'objet du paragraphe suivant est d'étudier plus en détail la forme et les propriétés de cet ensemble.

4.2.4 Ilots de turbulence et relation avec les solutions cycliques

L'analyse détaillée des cartes de transition, dont celle de la figure 4.5, a permis de mieux comprendre la structure du "edge" et de mettre en évidence la présence de structures invariantes. La réduction de la dynamique au sous-espace des symétries a facilité cette analyse. La figure 4.5 montre que les régions chaotiques prennent la forme d'ilots ou de pointes qui pénètrent le domaine laminaire. De même des zones isolées dans lesquelles la dynamique est rapidement décroissante sont enchevêtrées dans les régions chaotiques.

La majorité des simulations contenues dans ces "ilots" ou ces "pointes" présentent une dynamique récurrente caractérisée par la période $T_0 = 2S^{-1}L_y/L_x$ (que nous appellerons période fondamentale par la suite). La figure 4.7 montre trois exemples de simulations pré-turbulentes, tirées des cartes au niveau de la frontière laminaire/turbulent. Les trajectoires sont globalement complexes mais semblent attirées de façon transitoire par des structures cycliques, pour lesquelles le champ axisymétrique change de polarité tous les $T_0/2$. Pour la deuxième simulation, on observe que la trajectoire chaotique s'approche très près d'un cycle (orbite rouge), qui a pu être convergé avec précision et dont nous reparlerons dans la section 4.3.3.

Cette dynamique récurrente a été analysée quantitativement et statistiquement en calculant la transformée de Fourier temporelle de \overline{B}_{0y} pour chaque simulation prise sur une carte (ici celle de la figure 4.5). Le ratio entre l'énergie intégrée sur un intervalle centré autour de la fréquence

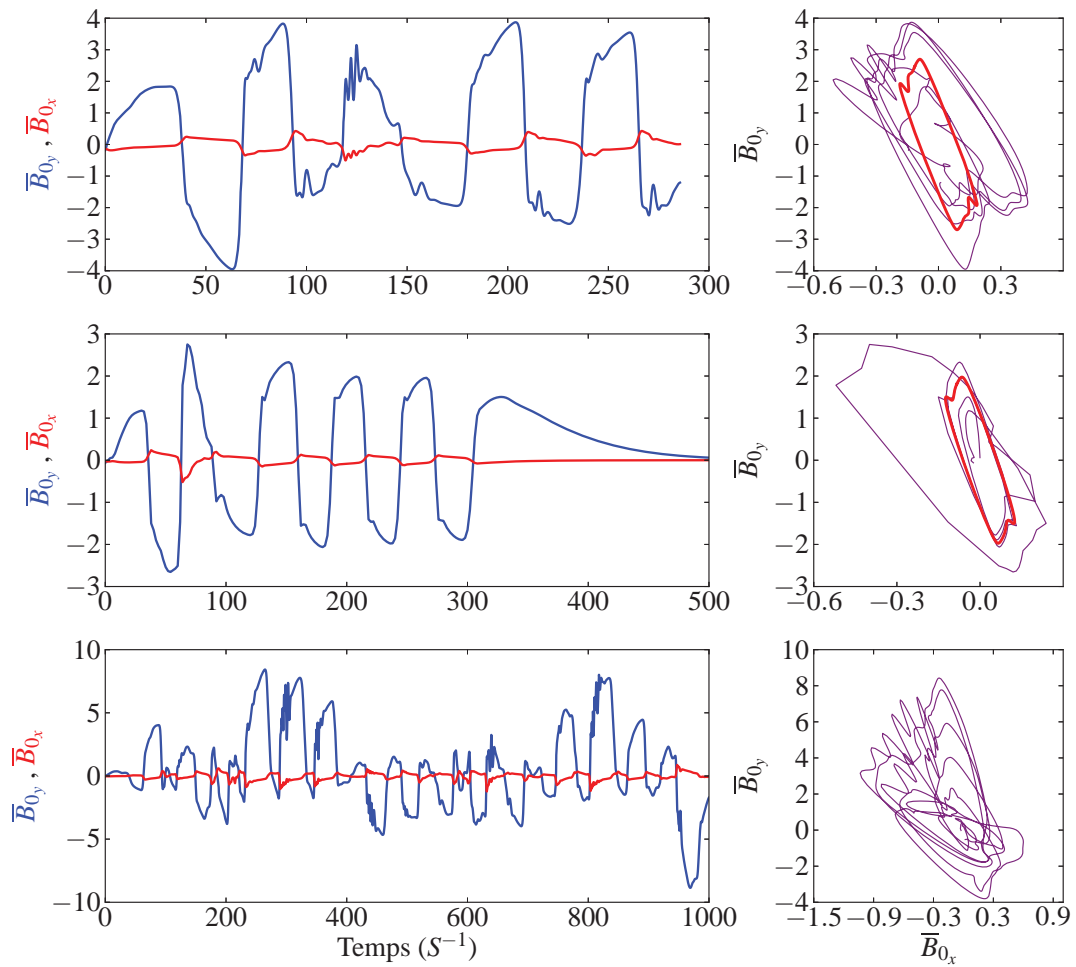


FIGURE 4.7 – Évolution temporelle (à gauche) et portrait de phase (à droite) du champ axi-symétrique $\bar{\mathbf{B}}_0$ pour trois simulations tirées des cartes de transition. L'orbite rouge sur le deuxième portrait de phase représente une solution non-linéaire cyclique instable qui a pu être convergée par la méthode de Newton.

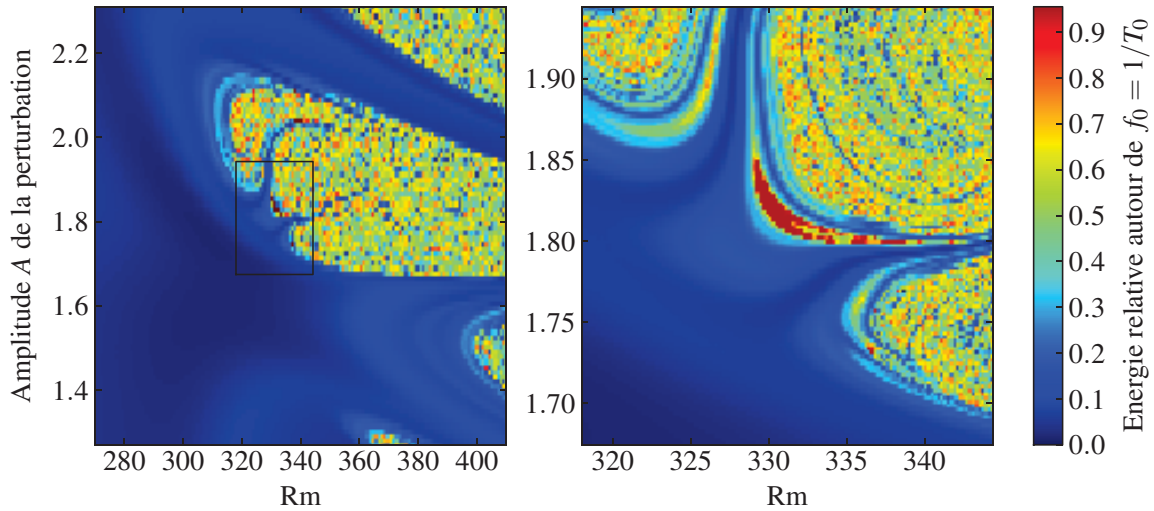


FIGURE 4.8 – Ratio entre l'énergie de \overline{B}_{0y} à la fréquence fondamentale $f_0 = 1/T_0$ et son énergie totale, en fonction de Rm et de l'amplitude A de la perturbation initiale, pour les simulations de la figure 4.5. Les zones rouges correspondent aux bassins d'attraction de cycles de dynamo stables.

fondamentale $f_0 = 1/T_0$ et l'énergie totale du signal est illustré sur la figure 4.8. Il apparaît de façon claire que pour les simulations contenues dans les régions chaotiques, plus de 50% de l'énergie en moyenne est localisée autour d'un pic de fréquence f_0 . Si l'on regarde ces cartes plus en détail, on voit apparaître également des régions, situées en périphérie des zones chaotiques, pour lesquelles le ratio défini précédemment est supérieur à 80%. Les simulations dans ces zones convergent systématiquement vers des orbites périodiques (cycles) ou bien vers des structures apériodiques très régulières. En effet, la carte zoomée de la figure 4.8 fait apparaître en bordure de la structure centrale ($Rm \sim 330$, $A \sim 1.8$) un croissant très fin coloré en rouge, dans lequel les simulations convergent vers une structure semblable au cycle de Herault et al. (2011), mais plus énergétique. Des régions similaires, plus isolées et restreintes (comme celle située en $Rm \sim 337$, $A \sim 1.73$), contiennent des cycles de plus grandes périodes (4, 6, 7, 8 T_0). Ces orbites ressemblent fortement au cycle de Herault et al. (2011), avec une inversion des polarités du champ axisymétrique tous les $T_0/2$. Cependant l'amplitude de ce champ est modulée au cours du temps par une période plus grande que T_0 . Rappelons que la condition initiale utilisée pour générer ces cartes est totalement aléatoire; sa forme spatiale n'est donc en rien corrélée avec celle des cycles identifiés.

Ce travail nous a donc permis de dévoiler la nature de la transition dynamo et de détecter une partie (probablement très restreinte) du "edge" dans ce problème. Une multitude de structures invariantes (cycles, orbites apériodiques), dont celle de Herault et al. (2011) ont été convergées à cette occasion. Nous reviendrons ultérieurement sur ces structures (section 4.3) et sur leur possible lien avec la transition (chapitre 5).

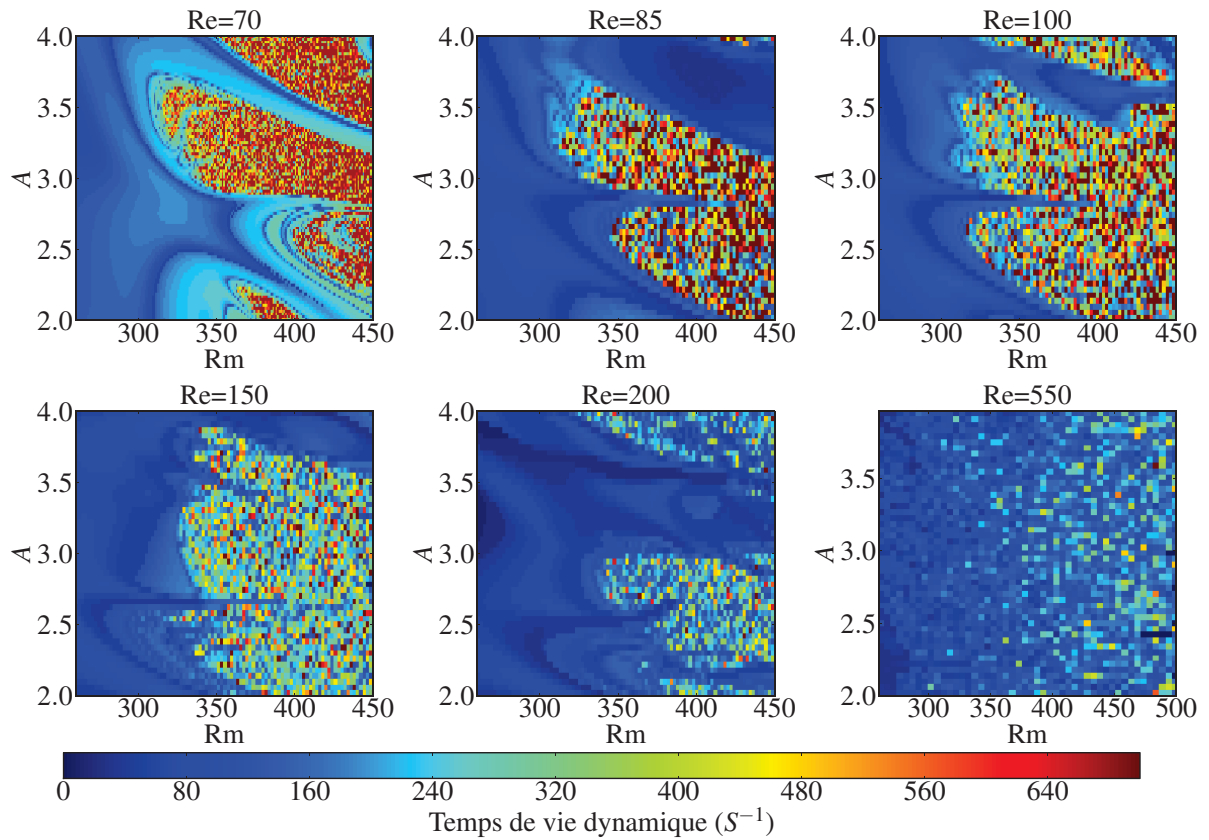


FIGURE 4.9 – Cartes de transition en fonction de Rm et de l’amplitude A de la condition initiale, pour différents Re . La forme de condition initiale est identique à celle utilisée pour générer les cartes de la figure 4.5. La résolution de grille est de $(\delta Rm = 2, \delta A = 0.04)$, excepté pour la carte à $Re = 70$ où la résolution est doublée et la carte à $Re = 550$ où $\delta Rm = 5$. La résolution numérique est de $(24 \times 12 \times 36)$ sauf pour la dernière carte où elle a été doublée.

4.2.5 Effet du nombre de Reynolds et du rapport d’aspect

Avant d’étudier plus en détails les structures cycliques et leur rôle dans la transition, nous nous sommes demandé si les conclusions obtenues pour la configuration précédente (bas $Re = 70$, $Pm > 1$, boîte à grand rapport d’aspect) étaient génériques, et si elles s’appliquaient à d’autres régimes de dissipation ou d’autres rapports d’aspect. En particulier comment se comportent les cartes de transition lorsque on augmente Re et que l’on se rapproche du régime autour de $Pm = 1$? Pour le savoir, nous avons réalisé six cartes de transition en (Rm, A) , pour différents Re allant de 70 à 550, en reprenant la condition initiale aléatoire utilisée pour générer la carte de la figure 4.5. La figure 4.9 montre qu’une augmentation de Re , jusqu’à $Re = 200$ ne change pas fondamentalement la structure de la frontière laminaire/turbulent dans l’espace des phases. On distingue toujours une région laminaire et un bassin fractal de selle chaotique où les temps de vie sont extrêmement sensibles à l’amplitude de la condition initiale. Les zones chaotiques font toujours apparaître des formes complexes, en forme d’ilots et de pointes à l’intérieur desquelles des structures récurrentes apparaissent. Cependant on voit que plus Re augmente, plus

ces formes semblent se diluer. Les temps de vie de la turbulence sont également sensiblement réduits. Pour $Re = 550$ ($Pm \leq 1$), il devient clairement difficile de distinguer une frontière nette entre la zone laminaire et la zone chaotique. De plus la cohérence entre les trajectoires chaotiques et les structures périodiques est de moins en moins marquée dans ce régime de plus grand Re , signe qu'un changement dans la dynamique s'opère autour de $Pm \sim 1$. On notera au passage que pour $Re = 550$, les premiers points turbulents se manifestent autour de $Rm \sim 400$, alors qu'à plus bas Re , ils apparaissaient autour de $Rm \sim 300$, ce qui est cohérent avec les résultats de la section 4.2.2. Il est difficile cependant de conclure sur le comportement de ces cartes à très grands Re et Rm , car nos capacités de calcul sont insuffisantes pour atteindre la résolution numérique nécessaire à l'étude de tels régimes.

Enfin, nous avons étudié comment ces cartes se comportent pour des rapports d'aspect beaucoup plus petits que celui utilisé par Herault et al. (2011). Hormis les travaux de Rempel et al. (2010) dans une boîte de dimension $(L_x, L_y, L_z) = (1, \pi, 1)$, la structure fine de la transition est assez mal connue dans ces régimes. Afin de compléter leur étude, nous avons réalisé plusieurs cartes de transition similaires à celles obtenues en section 4.2.3, pour une boîte de dimensions $(0.5, 2, 1)$, et donc de rapport d'aspect égal à 4. Le résultat non présenté dans ce manuscrit montre que les temps de vie turbulents sont là aussi extrêmement sensibles aux conditions initiales et que de nombreuses structures périodiques sont également excitées près du seuil de transition. Les résultats de Munoz et Rempel, présentés à la conférence Euromech à Cargèse (2014) et montrant des cartes de transition comparables à celle de la figure 4.5 pour des rapports d'aspect beaucoup plus petits, confirment que cette transition dynamo est génériquement associée à l'émergence d'une selle chaotique d'apparence fractale.

4.3 Nature du "edge state" et cycles identifiés

Les cartes que nous avons présentées indiquent que les trajectoires chaotiques près de la transition portent l'empreinte d'une dynamique cyclique et régulière. Nous allons à présent donner un aperçu des différentes structures cycliques identifiées afin de mieux comprendre la nature du "edge state" dans ce problème. Il sera particulièrement intéressant de voir si d'autres cycles similaires à celui de Herault et al. (2011) existent et d'étudier la place qu'ils occupent dans la transition. Différents rapports d'aspect et configurations de symétries ont été explorés afin d'obtenir une idée globale des formes possibles de dynamique cyclique dans ce problème.

4.3.1 Méthodes d'identification

L'analyse des cartes de transition s'est avérée être un moyen efficace pour découvrir des cycles de dynamo MRI. La méthode est simple et systématique : les simulations avec un temps de vie dynamique important sont triées puis analysées temporellement. Si une récurrence apparaît dans l'évolution du champ magnétique entre un temps t et un temps $t + T$ (ce qui est souvent le cas), une DNS est alors effectuée jusqu'au temps t . Puis un algorithme de Newton-Krylov est initié à ce temps, afin d'éliminer l'erreur quadratique entre l'état $\mathbf{X}(t)$ et l'état $\mathbf{X}(t + T)$. Souvent, à la première itération de l'algorithme, cette erreur est de l'ordre de la norme de l'état et il est par conséquent très difficile de converger vers la structure périodique. Dans les cas favorables, la convergence sur un cycle est obtenue après plusieurs itérations de l'algorithme (nécessitant une à plusieurs centaines de simulations sur une période), avec une erreur quadratique relative

inférieure à 10^{-5} . Un exemple d'une telle convergence est présentée en annexe A.2.

La plupart des cycles identifiés ont été obtenus par cette méthode. Cependant certains d'entre eux ont été détectés ou redécouverts différemment, notamment par l'analyse de la dynamique locale d'autres cycles (méthode par "perturbations" ou par "bifurcations"). Ces méthodes seront précisées le cas échéant.

4.3.2 Le cycle de Herault et al. (2011) et sa "upper branch"

Le cycle de Herault et al. (2011) a été détecté dans plusieurs simulations turbulentes, à partir des cartes de transition obtenues avec des conditions initiales aléatoires. Cela prouve qu'il joue un rôle important dans la dynamique. Il apparaît généralement lorsque l'intensité de la turbulence est décroissante ou au tout début des simulations (précurseur). C'est l'un des cycles de plus faible amplitude identifié jusqu'à ce jour dans le problème de la dynamo MRI. D'après l'analyse des cartes, il semble vivre dans une région assez étendue en Re et Rm .

Pour se faire une première idée de sa nature et de son domaine d'existence, nous avons réalisé une continuation de ce cycle en Rm . Le principe est de recalculer le cycle avec l'algorithme de Newton-Krylov pour des incréments successifs en Rm . La figure 4.10 montre l'évolution de l'amplitude maximale (sur une période T_0) de la composante toroidale de $\overline{\mathbf{B}}_0$ en fonction de Rm . A l'origine le cycle de Herault et al. (2011) a été convergé pour un Re de 70 et un Rm de 360, représenté par le point noir sur la branche du bas. On constate que cette branche se retourne en $Rm = 327.4$ et donne naissance à une deuxième branche pour laquelle l'amplitude du champ axisymétrique est plus forte.

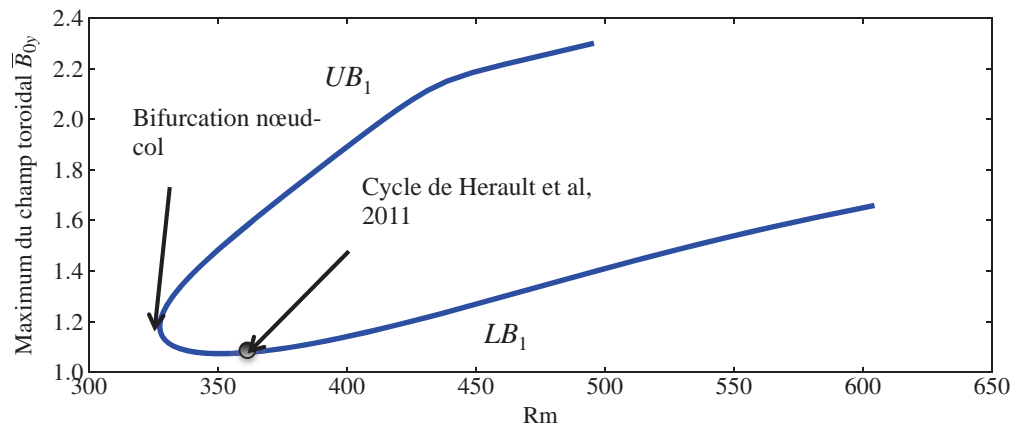


FIGURE 4.10 – Courbe de continuation en Rm du cycle de Herault et al. (2011) faisant apparaître une bifurcation de type nœud-col à $Rm = 328$.

Ce type de courbe est caractéristique d'une bifurcation nœud-col ("saddle node" en anglais). Pour un même Re et Rm , deux solutions existent, une solution de "lower branch" (LB_1), correspondant à la branche du cycle de Herault et al. (2011), et une "upper branch" (UB_1) de plus haute énergie. Cette paire de solutions non-linéaires sera notée SN_1 . Notons que le cycle identifié dans le croissant de la figure 4.5 correspond à la solution de la branche UB_1 à $Rm \sim 330$.

Cette solution a été également obtenue par perturbation de LB_1 le long de sa direction instable (unique pour $Rm = 360$). Nous ne rentrerons pas pour l'instant dans l'analyse de stabilité de SN_1 mais il apparaît clairement que UB_1 est stable une faible gamme de Rm (où son bassin d'attraction est le croissant de la figure 4.5). L'évolution sur une période de ces deux solutions est présentée sur la figure 4.11 pour $Re = 70$ et $Rm = 352$. Le cycle UB_1 ressemble fortement à LB_1 mais avec une énergie plus grande. Le portrait de phase fait apparaître UB_1 en violet, avec une amplitude de \bar{B}_{0y} de 1.5 et LB_1 en bleu, avec une amplitude de 1.

4.3.3 Autres cycles de type nœud-col de période fondamentale T_0 en boîte longue

i) Dans l'espace des symétries \mathcal{A}_1

D'autres paires de cycles, semblables à SN_1 et présentant les symétries \mathcal{A}_1 ont été convergées, pour la plupart à partir des cartes de transition dans la boîte de dimensions (0.7, 2, 20). A ce jour, on compte au moins quatre autres paires de cycles, résultant d'une bifurcation de type nœud-col, identifiées dans des régimes de dissipation similaires. Tout d'abord, SN_2 constituée de la paire LB_2 et UB_2 est une structure qui présente les mêmes caractéristiques physiques que SN_1 , mais avec une énergie plus grande. Pour $Re = 70$ et $Rm = 352$, la figure 4.12 montre que l'amplitude de \bar{B}_{0y} pour LB_2 est de l'ordre de 2, alors qu'elle est de 2.6 pour UB_2 . L'EMF axisymétrique, associée au renversement du champ magnétique axisymétrique, présente des oscillations assez importantes au moment où l'onde est dans sa phase trailing avancée. Notons que LB_2 correspond au cycle repéré dans la simulation de la figure 4.7 (marqué par une orbite rouge), autour duquel tournait la trajectoire chaotique.

Deux autres paires de cycles SN_3 et SN_4 , issues d'une bifurcation nœud-col, ont été identifiées. La figure 4.13 montre l'évolution de LB_3 pour $(Re, Rm)=(400, 513)$ et UB_4 pour $(Re, Rm)=(70, 352)$. Les deux autres branches UB_3 et LB_4 ont également été obtenues mais ne sont pas représentées ici. La paire SN_3 n'existe que pour $Re > 200$ et a été trouvée à partir des cartes effectuées à plus grand Re . Il n'est donc pas forcément pertinent de comparer directement son amplitude avec les autres structures. La paire SN_4 a été identifiée dans le même régime que les autres, en particulier à $Re = 70$. Son énergie est la plus grande de toutes les structures que nous avons convergées (le champ magnétique toroïdal \bar{B}_{0y} a une amplitude de l'ordre de 3.5 pour UB_4). D'un point de vue dynamique, UB_4 ressemble beaucoup à UB_2 , avec une EMF très oscillante. En regardant la visualisation 3D de la figure 4.13, on remarque que les zones de champ magnétique positives (en rouge) basculent à $T_0/4$ dans le sens opposé à celui observé pour les autres cycles (vers la gauche c'est à dire vers les $x < 0$).

La dernière paire de cycles identifiée SN_5 (non représentée) a été découverte dans un îlot pré-turbulent des cartes de transition située à très bas Rm . Les continuations ont montré que ce cycle naît au travers d'une bifurcation nœud-col mais ne vit que dans une région très limitée en Rm (entre 264 et 300) pour $Re = 70$. Cela suggère que cette paire de cycles intervient localement dans la dynamique turbulente dans cet îlot. De nombreux îlots ont été identifiés à partir des cartes, ce qui laisse à penser que de nombreuses autres structures similaires à SN_5 pourraient exister. Ce cycle a la particularité d'avoir une forte amplitude, de l'ordre de celle de UB_4 .

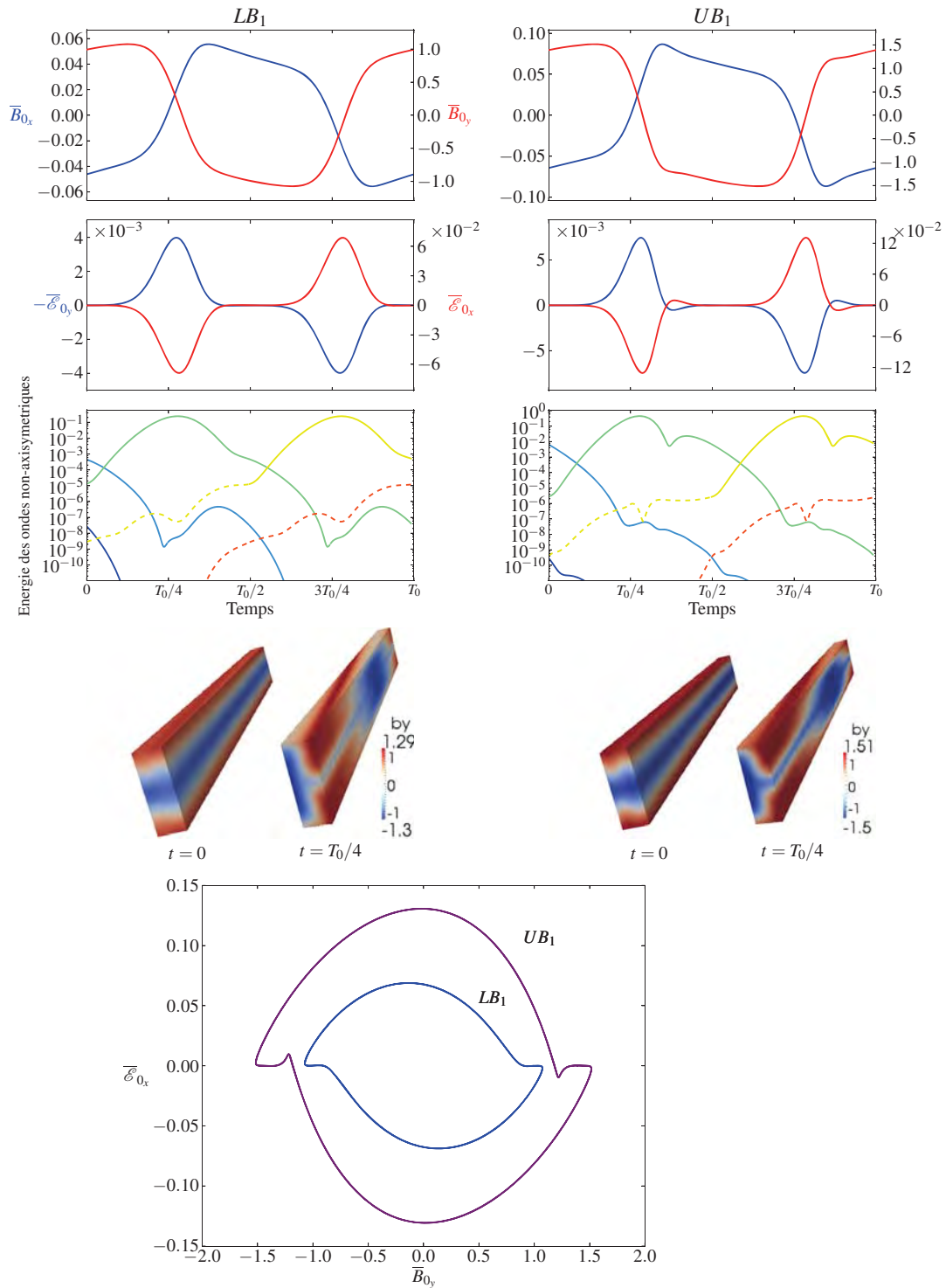


FIGURE 4.11 – En haut : évolution temporelle de LB_1 (à gauche) et UB_1 (à droite) pour $Re = 70$ et $Rm = 352$. Les trois premiers graphes représentent de haut en bas, le champ axisymétrique $(\overline{B}_{0,x}, \overline{B}_{0,y})$, l'EMF axisymétrique $(\overline{\mathcal{E}}_{0,x}, \overline{\mathcal{E}}_{0,y})$ et l'énergie des ondes de cisailment successives (sur le mode $k_y = 2\pi/L_y$) en fonction du temps. Le passage trait pointillé / trait plein indique la transition leading/trailing des ondes. Au centre : représentation 3D des isosurfaces de B_y pour les deux cycles, à $t = 0$ et $t = T_0/4$. En bas : portrait de phase des cycles représentant le champ $\overline{B}_{0,y}$ en fonction de $\overline{\mathcal{E}}_{0,x}$. Résolution numérique : $24 \times 12 \times 36$.

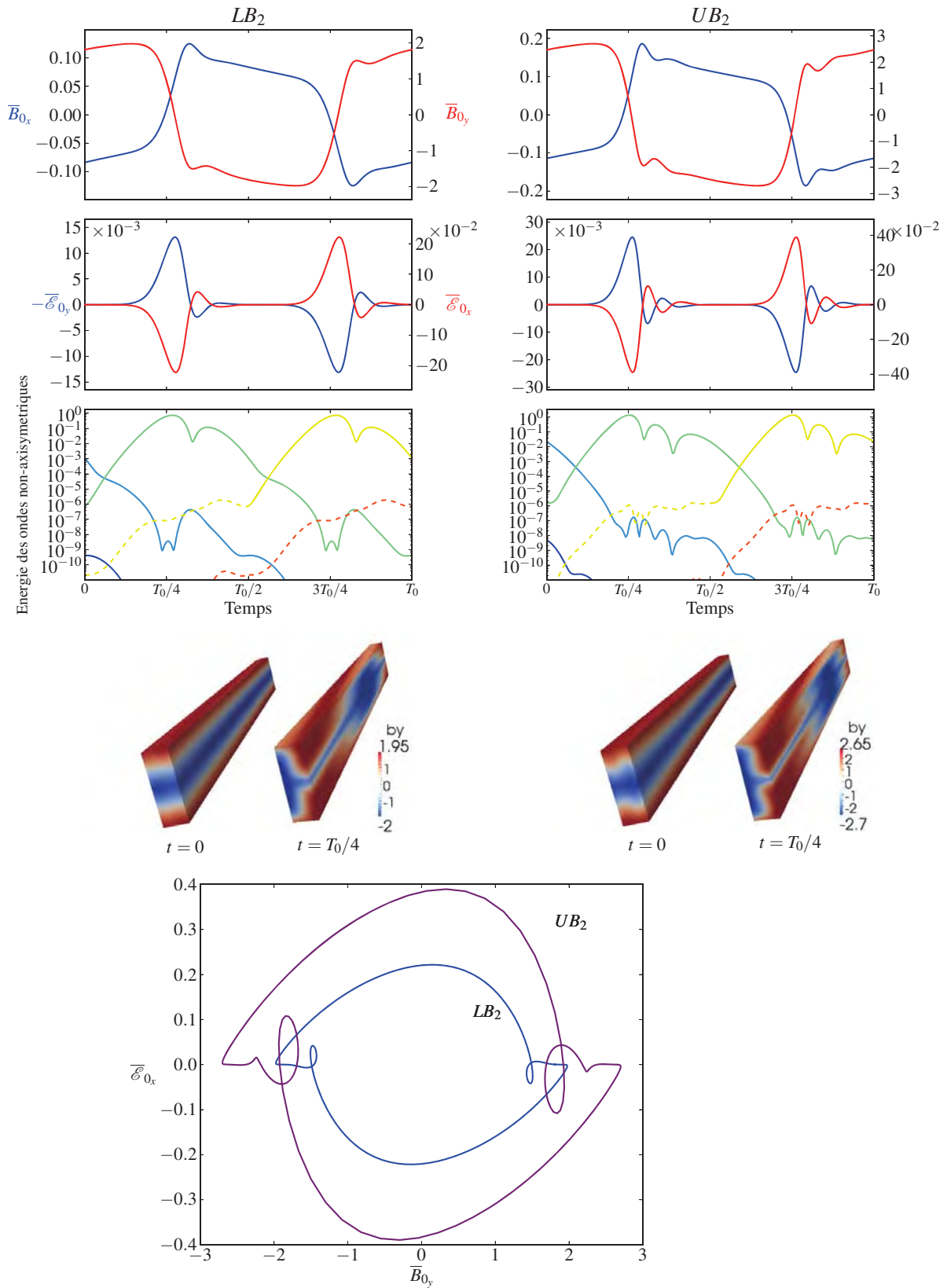


FIGURE 4.12 – Evolution temporelle de LB_2 (à gauche) et UB_2 (à droite) pour $Re = 70$ et $Rm = 352$. Voir légende de la figure 4.11 pour plus d'informations. Résolution numérique : $24 \times 12 \times 36$.

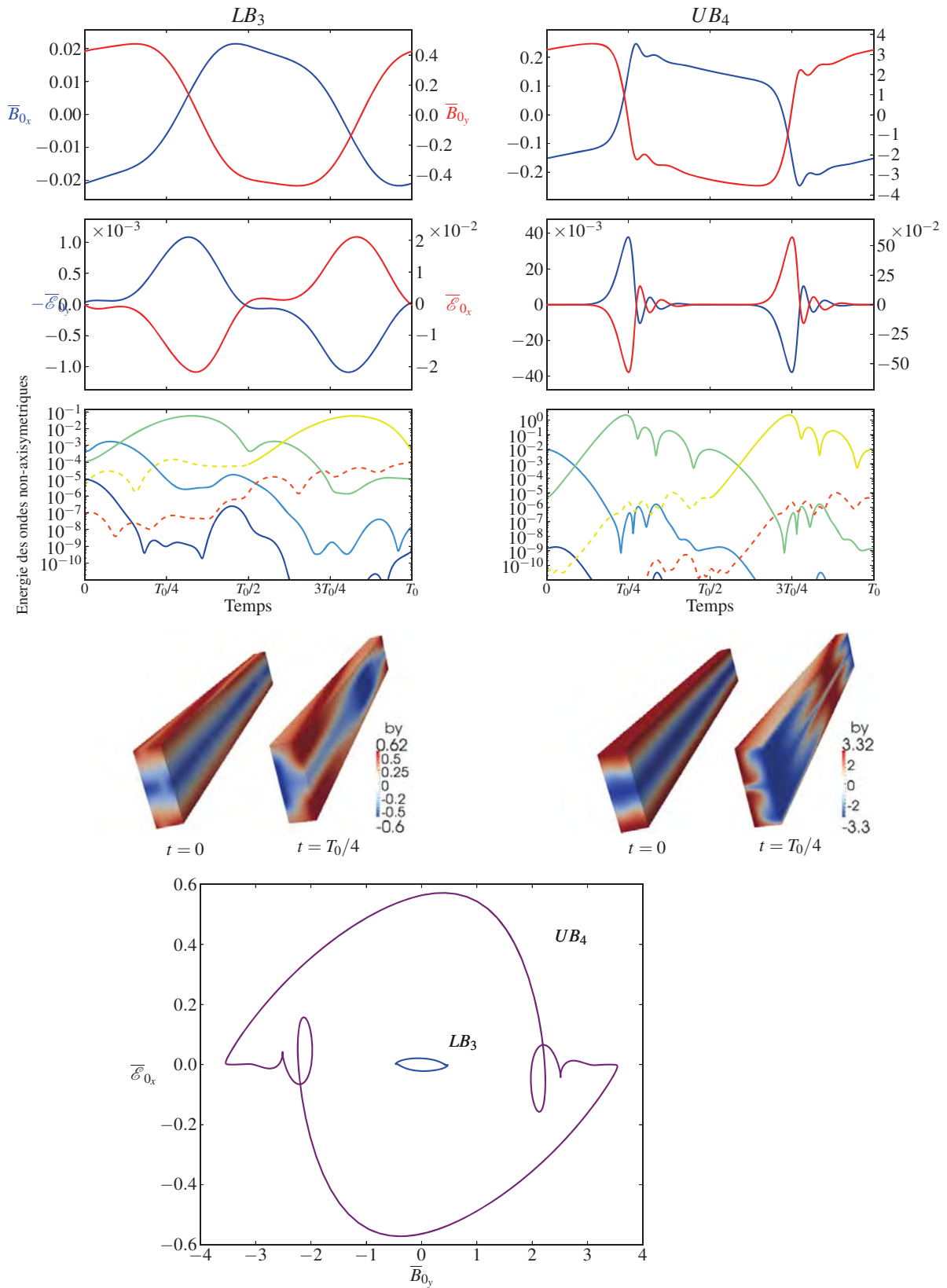


FIGURE 4.13 – Evolution temporelle de LB_3 (à gauche) et UB_4 (à droite) pour $(Re = 400, Rm = 511)$ et $(Re = 70, Rm = 352)$ respectivement. Voir légende de la figure 4.11 pour plus d'informations. Résolution numérique : $48 \times 24 \times 72$.

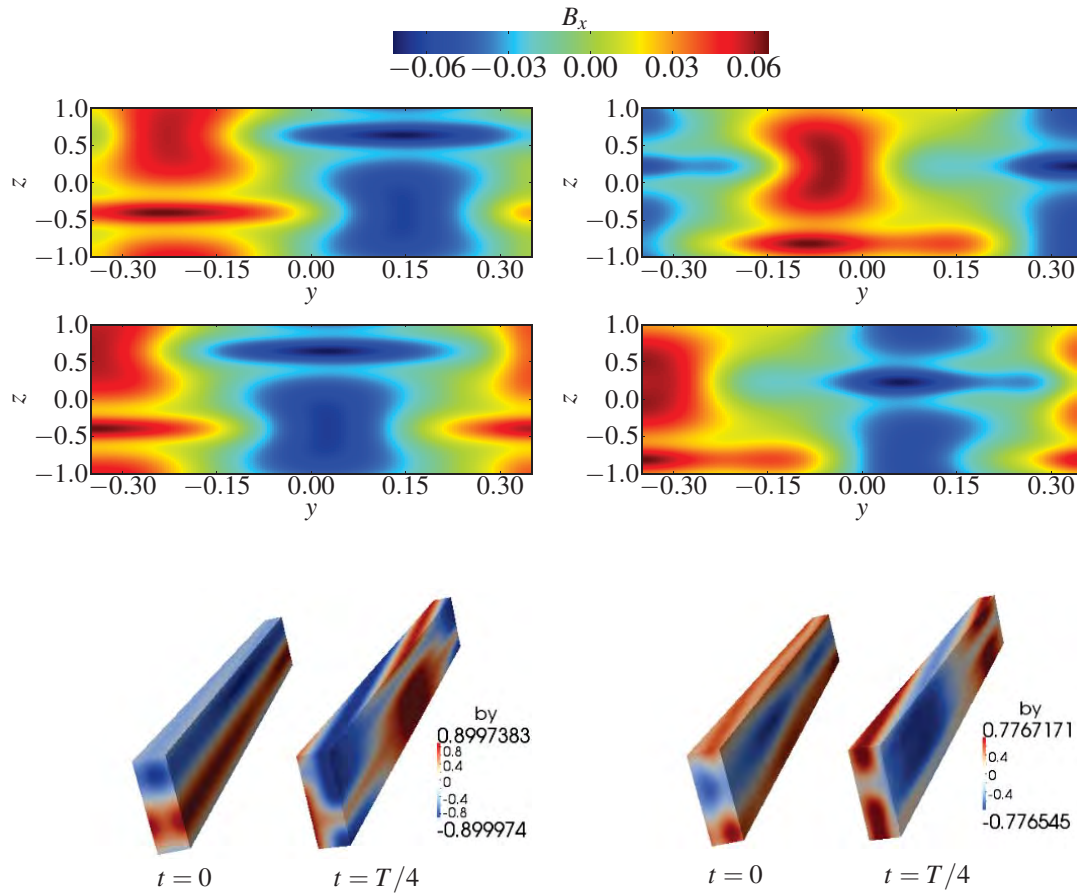


FIGURE 4.14 – En haut : iso surfaces du champ magnétique total B_x dans le plan (y, z) pour les cycles relatifs UB_{4r} à $Re = 70$ et $Rm = 384$ (à gauche) et LB_{2r} à $Re = 70$ et $Rm = 412$ (à droite). La première carte (en partant du haut) est représentée pour $t = T_0/4$ et la seconde pour $t = T_0/4 + T_0$. L'état final est translatée en y par rapport à l'état initial. En bas : visualisation 3D des iso surfaces du champ magnétique B_y . Résolution numérique : $24 \times 12 \times 36$.

ii) Sans les symétries

Lorsque les symétries \mathcal{A}_1 ne sont pas imposées, les cycles décrits précédemment existent toujours mais ne sont pas forcément les plus représentatifs de la dynamique. En fait l'analyse des cartes de transition dans le problème général sans symétrie fait apparaître des cycles dits "relatifs" ("relative periodic orbits" ou "RPO" en anglais). Ces solutions ne sont pas périodiques au sens strict du terme. L'état final, à $t = T_0$ est une version translatée spatialement en y ou z de l'état initial à $t = 0$. Les cycles relatifs n'existent pas dans le sous-espace des symétries \mathcal{A}_1 car la translation le long d'un axe brise ces symétries.

Grâce à la carte de transition de la figure 4.4, nous avons identifié et convergé quatre cycles relatifs de période T_0 . Deux vitesses de phase c_y et c_z ont été introduites dans l'algorithme de Newton afin de prendre en compte la translation de l'état final dans les directions y et z . Les quatres paires, nommés respectivement SN_{1r} , SN_{2r} , SN_{3r} et SN_{4r} sont toutes issues d'une

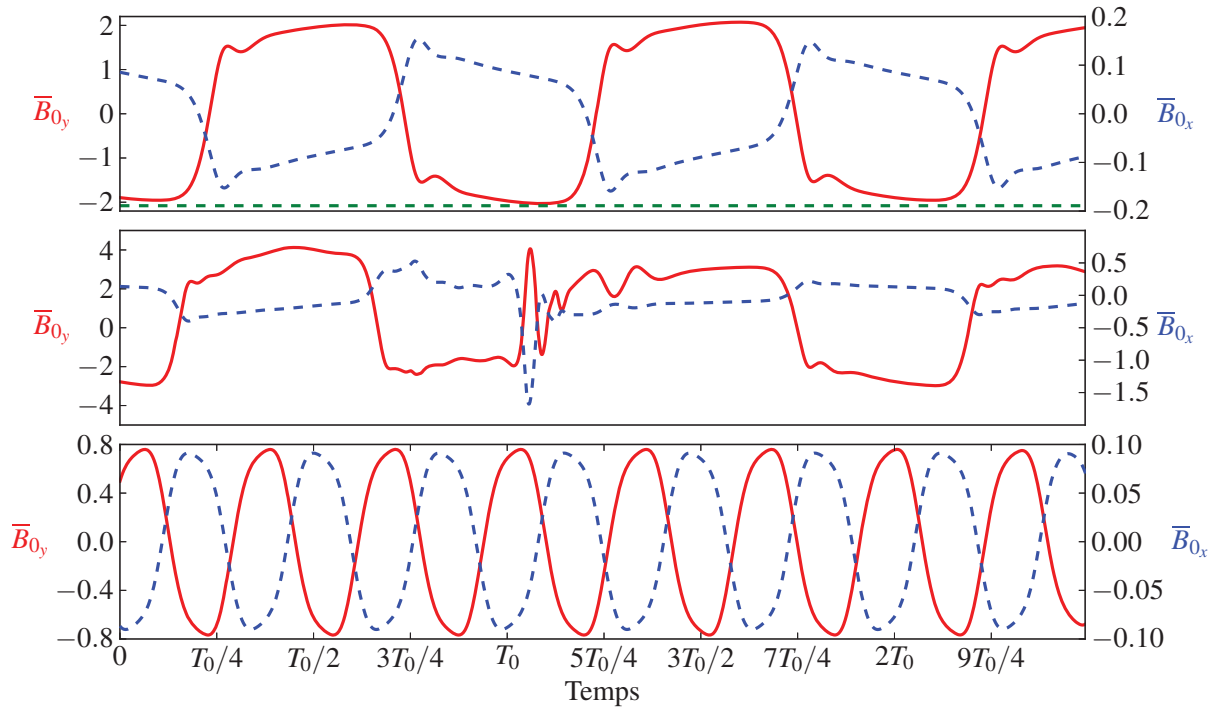


FIGURE 4.15 – Evolution temporelle du champ magnétique axisymétrique $\bar{\mathbf{B}}_0$ pour 3 cycles de périodes différentes de T_0 dans la boîte de dimensions $(0.7, 20, 2)$. Le premier (en partant du haut) a été obtenu pour $Re = 70$ et $Rm = 287$. Le deuxième pour $Re = 70$ et $Rm = 350$, et enfin le troisième pour $Re = 227$ et $Rm = 310$. La ligne horizontale verte pointillée permet de voir que le premier cycle est de période double. Résolution numérique : $24 \times 12 \times 36$ sauf pour le dernier pour lequel $N_y = 36$.

bifurcation nœud-col et apparaissent pour différents Rm critiques, entre 350 et 400 (pour $Re = 70$). Huit cycles relatifs au total ont donc été trouvés, en comptant les "lower" et les "upper" branches. Sur une période, ces cycles sont translatés le long de l'axe y (axe de l'écoulement). La figure 4.14 montre une coupe dans le plan (y, z) du champ magnétique radial pour deux de ces cycles, UB_{4r} et LB_{2r} . Le premier est translaté vers les y négatifs d'un quart de L_y ; le second est translaté dans la même direction d'environ $0.37 L_y$. Notons également que les états associés à ces cycles ne sont pas symétriques en z , ils possèdent une certaine phase ψ par rapport aux cycles du sous-espace symétrique \mathcal{A}_1 , qui pourrait être annulée si on le souhaitait, le problème étant périodique en z . De telles structures ont également été trouvées dans le problème hydrodynamique (Viswanath, 2007) et sont caractéristiques des systèmes dynamiques avec des symétries continues.

4.3.4 Cycles de périodes différentes en boîte longue

Nous n'avons jusque là mentionné que l'existence de cycles de période fondamentale $T_0 = 2S^{-1}L_y/L_x$. Or comme nous l'avons vu dans les cartes, certaines trajectoires turbulentes sont dominées par des structures pour lesquelles le champ magnétique varie toujours sur des échelles de T_0 mais avec une amplitude modulée sur des temps plus longs, supérieurs ou égaux à $2T_0$.

En analysant de plus près ces simulations, nous avons découvert des cycles de périodes longues, comme la paire SN_6 , de période $2T_0$, dont l'évolution temporelle de la LB_1 est présentée sur la figure 4.15. Cette paire de cycle naît à partir d'une bifurcation nœud-col à $Rm = 285$ pour $Re = 70$. Elle n'est donc pas issue d'une bifurcation locale d'un autre cycle, de type doublement de période (bifurcations présentée en annexe B). Des orbites de période $3T_0, 4T_0$ jusqu'à $7T_0$ ont été convergées ainsi que des structures plus complexes et très asymétriques en temps, comme celle représentée au centre de la figure 4.15, de période $2T_0$. Nous n'avons pas réussi à la converger avec une erreur quadratique relative suffisamment faible mais nous la présentons néanmoins pour illustrer la grande diversité d'orbites périodiques rencontrées. D'autres cycles avec une dynamique encore plus exotique, présentant des "bursts" de champ axisymétrique, ont été repérés mais n'ont pas pu être calculés précisément avec l'algorithme de Newton-Krylov. Enfin des orbites de période fractionnaire à T_0 existent également dans la shearing box. Leur dynamique repose sur des ondes non-axisymétriques caractérisées par un nombre d'onde azimutal $k_y = 2n\pi/L_y$ avec $n > 1$. C'est le cas du dernier cycle de la figure 4.15, dont la période est $T_0/3$. La rétroaction non-linéaire (EMF) à l'origine du basculement du champ $\bar{\mathbf{B}}_0$ est causée par l'amplification du mode non-axisymétrique de nombre d'onde $k_y = 3k_{y0} = 6\pi/L_y$. Ce cycle n'a pas été identifié directement à partir des cartes, bien que des structures très similaires ont pu y être détectées. La méthode d'obtention est expliquée en annexe A.2.

4.3.5 Cycles dans des boîtes à plus petit rapport d'aspect

Enfin, nous avons pu obtenir des cycles dans des boîtes à plus petits rapport d'aspect. Les mécanismes physiques régissant leur dynamique sont les mêmes que ceux décrits pour les boîtes allongées. Cependant, le retournement du champ $\bar{\mathbf{B}}_0$ pour ces cycles fait intervenir une succession d'ondes non-axisymétriques, contrairement aux cycles présentées jusqu'à présent qui ne faisait intervenir qu'une seule onde par retournement. Ces cycles ont la particularité de ne pas être symétriques en temps (le temps associé au premier retournement n'est pas forcément le même que celui associé au second retournement) et de présenter une dynamique plus complexe, basée sur davantage de modes à petite échelle. Nous présentons sur la figure 4.16 deux cycles de ce type, LB_{1m} obtenu dans une boîte de dimensions $(0.7, 6, 2)$, et l'autre LB_{2m} dans une boîte de dimensions $(0.5, 2, 1)$. Les paires associées seront notées SN_{1m} et SN_{2m} .

L'évolution temporelle de LB_{1m} est représentée à gauche de la figure 4.16. Ce cycle a une période longue de $51.43S^{-1}$ alors que $T_0 = 2S^{-1}L_y/L_x = 17.14S^{-1}$. Le premier retournement est causé par le passage de 3 ondes non-axisymétriques successives (de bleu foncé à bleu cyan sur le graphe représentant l'énergie des ondes), dont une seule est réellement amplifiée par la MRI. Le deuxième retournement fait intervenir 3 ondes, d'amplitudes équivalentes (de couleur verte). L'autre cycle LB_{2m} a une période de $20S^{-1}$. Le premier retournement de $\bar{\mathbf{B}}_0$ fait intervenir l'action de deux ondes de cisaillement (dont une seule est vraiment amplifiée), alors que le second fait intervenir 3 ondes (dont 2 sont réellement amplifiées). Pour ce cycle, les retournements successifs de $\bar{\mathbf{B}}_0$ ne se font donc pas sur une demi-période.

Notons que l'effet Ω semble dynamiquement plus important pour ces cycles que pour ceux étudiés en boîte longue. L'évolution des ondes de cisaillement au cours de leur phase d'amplification par la MRI est également plus marquée par les effets non-linéaires. Ces cycles dans les boîtes courtes possèdent une dynamique très similaire aux pseudo-cycles observés dans les

simulations turbulentes de la dynamo MRI dans des boîtes de dimensions similaires (Lesur et Ogilvie, 2008b), pour lesquels le basculement régulier du champ axisymétrique est produit par le passage de plusieurs ondes (amplifiées ou non) et résulte par conséquent d'un effet cumulatif. Notons que ces cycles dans les boîtes à petits rapports d'aspect pourraient être une clé pour expliquer l'émergence de structures dynamo récurrentes et "statistiques" de longues périodes comme les cycles "papillons" décrits par Simon et al. (2011).

4.4 Conclusions

Cette première partie du travail a permis tout d'abord de montrer que la limite en P_m pour la dynamo MRI rapportée par Fromang et al. (2007) semble se généraliser à différents rapports d'aspect, pour les résolutions numériques accessibles actuellement. Nous avons ensuite obtenu des éléments qualitatifs suggérant fortement que l'excitation de la dynamo, près du régime transitionnel, repose sur l'émergence d'une selle chaotique synonyme d'une frontière de transition dans l'espace des phases de géométrie probablement fractale. Dans tous les cas, la dynamique transitionnelle est dominée par des solutions cycliques, identifiées puis convergées pour différents Re ou rapports d'aspects à l'aide de l'algorithme de Newton-Krylov. Il semble donc que ces cycles jouent un rôle important dans la bifurcation du système vers des états turbulents, ce qui pourrait en faire des objets d'étude de choix pour comprendre l'origine physique de la frontière en P_m . La détermination et la validation de ce rôle a constitué l'objet du travail présenté au chapitre suivant.

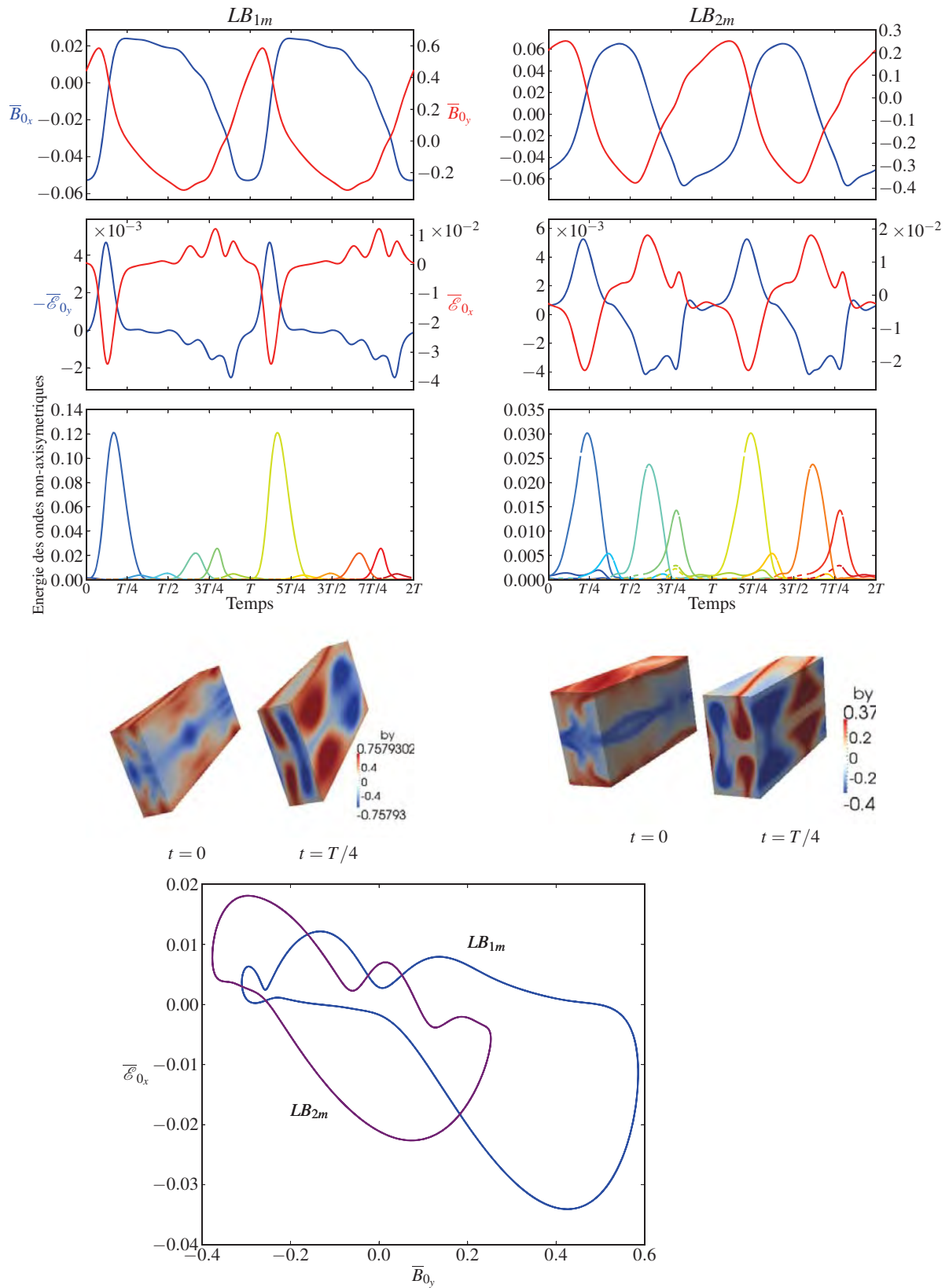


FIGURE 4.16 – Evolution temporelle de LB_{1m} (à gauche) et LB_{2m} (à droite) pour $(\text{Re} = 100, \text{Rm} = 900)$ et $(\text{Re} = 908, \text{Rm} = 3033)$ respectivement. Voir légende de la figure 4.11 pour plus d'informations. Résolution numérique : $48 \times 24 \times 72$ pour LB_{1m} et $48 \times 48 \times 72$ pour LB_{2m} .

Lien entre transition et cycles de dynamo

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la transition vers la dynamo MRI possède des caractéristiques assez singulières si on la compare aux transitions fluides supercritiques classiques (comme la convection thermique ou la dynamo cinématique). Dans la deuxième partie de ce travail de thèse, nous avons cherché à identifier clairement les mécanismes de bifurcation responsables de ce type de transition et tout particulièrement le rôle des cycles de dynamo MRI. L'objectif de ce chapitre est de présenter les résultats de ce travail qui s'est largement basé sur les méthodes de la théorie des systèmes dynamiques. L'application de ces méthodes au problème de la transition sous-critique des écoulements hydrodynamiques cisailés a récemment révélé que des bifurcations locales et globales de structures invariantes cycliques sont effectivement responsables de la transition vers des états chaotiques dans ce problème lorsque le nombre de Reynolds est augmenté¹. Observe-t-on le même type de bifurcations lorsque Rm augmente dans notre problème et, si oui, quel est leur impact sur la dynamique ?

Ce chapitre étant assez technique, et par souci de clarté de la présentation et de pédagogie, nous présentons en annexe B quelques éléments de la théorie des systèmes dynamiques, indispensables à la compréhension détaillée des résultats qui suivent.

5.1 Cadre de l'étude

La turbulence est souvent définie comme un état chaotique spatio-temporel, c'est à dire un état où le spectre des échelles spatiales et temporelles s'étale sur de nombreuses fréquences et où la sensibilité aux conditions initiales est grande. D'après la théorie des systèmes dynamiques, les structures invariantes, comme les solutions périodiques, occupent une place centrale dans la transition vers un tel état. Ruelle et Takens (1971) ont suggéré, dans le cadre de transitions super-critiques, qu'un nombre fini de bifurcations, apparaissant sur des états invariants (points fixes, cycles...) soient à l'origine du chaos. Dans les années 1970-80, des progrès importants ont été réalisés pour comprendre l'émergence du chaos temporel dans des systèmes non-linéaires simples et de dimensions réduites, comme l'application logistique, la carte de Hénon ou l'attracteur de Lorenz (May, 1976; Hénon, 1976; Sparrow, 1982). Le cadre de la théorie des bifurcations ne s'applique facilement que pour des régimes transitionnels, là où la dynamique est encore simple à analyser et le nombre de degrés de liberté actifs relativement faible. L'annexe B expose

¹Nous faisons ici référence aux travaux de Kreilos et Eckhardt (2012), qui ont été réalisés dans la même période que ce travail de thèse.

les différents mécanismes de bifurcations et les principaux scénarios de "route vers le chaos" dans les systèmes dissipatifs comme celui caractérisant notre problème.

Notre objectif a été d'étudier numériquement les différentes bifurcations de cycles de dynamo MRI afin de comprendre comment le chaos émerge dans ce système. L'étude s'est déroulée en deux temps : tout d'abord, nous avons tenté de voir si un scénario de cascade sous-harmonique pouvait être à l'origine du chaos. Pour cela, nous avons analysé de façon détaillée la stabilité linéaire des cycles et leurs bifurcations locales. Puis nous nous sommes intéressés à un autre scénario, reposant sur l'apparition de bifurcations globales impliquant les variétés stables et instables des cycles. Nous verrons au cours de ce chapitre que ce deuxième scénario semble être plus convaincant pour expliquer l'émergence du chaos dans notre problème.

La dynamique est ici restreinte au sous-espace de symétries \mathcal{A}_1 afin de réduire le nombre de structures invariantes du problème et d'éliminer les cycles relatifs, dont la nature est fondamentalement identique à celle des cycles périodiques. De plus cela facilite la convergence du solveur de Newton-Krylov. Nous restreignons également l'étude à la configuration à grand rapport d'aspect de dimensions $(0.7, 20, 2)$, ce qui permet de simplifier la dynamique non-linéaire des cycles. Seules les deux paires de cycles SN_1 et SN_2 , présentées en section 4.3.2 et 4.3.3 ont été considérées dans cette étude. Leur simplicité et leur vaste domaine d'existence en Rm font de ces structures des objets idéaux à analyser. La continuation de ces derniers est obtenue en variant Rm dans une gamme allant de 327 à 600, tandis que Re est fixé à 70. Ce régime correspond à un Pm assez élevé, de l'ordre de 5 à 10, où la grande majorité des cycles ont été découverts. La dynamique locale des cycles dans ce régime est alors simple à analyser car elle est bâtie seulement autour d'une ou quelques directions instables. Toutes ces restrictions ne devraient pas entacher la conclusion de cette étude. En effet nous avons vu dans le chapitre précédent que la structure de la transition est la même quelque soit les symétries imposées, le Re ou le rapport d'aspect considéré. Les mêmes mécanismes de transition doivent donc se retrouver à priori dans toutes ces configurations.

5.2 Bifurcation locales de cycles de dynamo MRI

5.2.1 Diagramme de bifurcations de SN_1

Nous commençons par étudier la paire de cycles SN_1 , dont dérive la solution de Herault et al. (2011). Comme nous l'avons montré en section 4.3.2, ce cycle naît d'une bifurcation de type noeud-col à $Rm = 327.4$, donnant naissance à deux branches de solutions, LB_1 et UB_1 (Fig. 5.1). La nature de la bifurcation noeud-col est confirmée en remarquant que le plus grand multiplicateur de Floquet Λ_1 , tracé en bleu sur les deux graphes à droite de la figure 5.1, passe par 1 au point d'intersection des deux branches.

Juste au dessus de ce point de bifurcation, entre $Rm = 327.4$ et $Rm = 336.55$, UB_1 est stable (si on limite l'analyse au sous-espace \mathcal{A}_1) car tous les multiplicateurs de Floquet sont inférieurs à 1. Cela explique la présence du bassin d'attraction en forme de croissant observé dans la carte 4.8. Lorsque Rm augmente, les multiplicateurs de Floquet Λ_2 (en trait rouge interrompu) et Λ_3 (courbe verte en trait pointillé), initialement complexes conjugués deviennent réels. Pour $Rm = 336.55$, l'un d'entre eux devient supérieur à 1, faisant perdre sa stabilité à

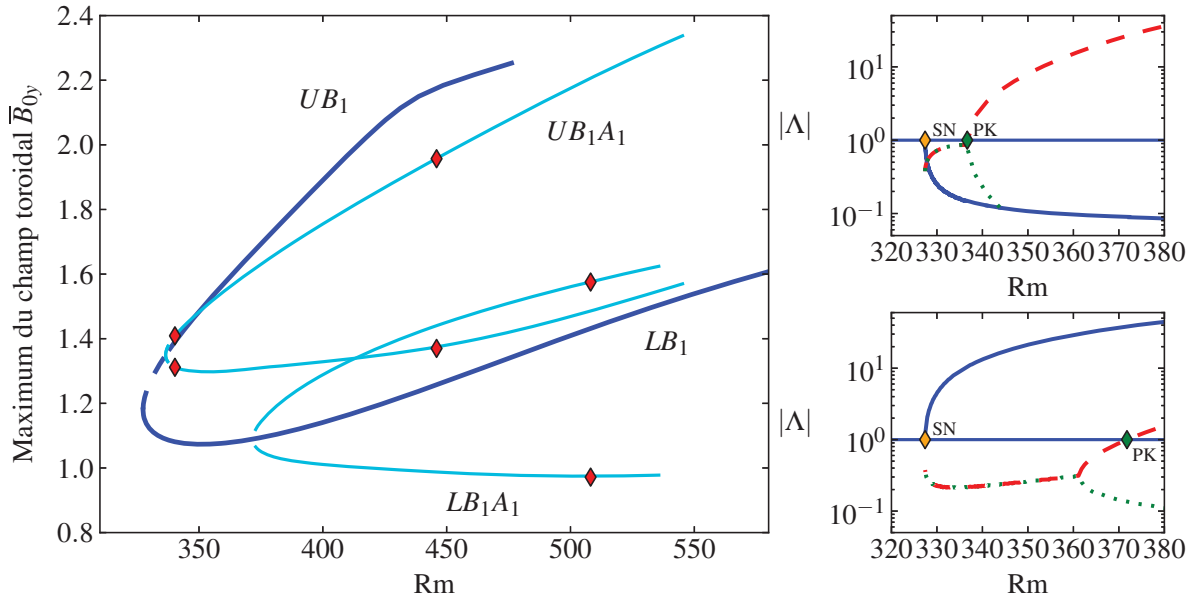


FIGURE 5.1 – Diagramme de bifurcation de SN_1 . A gauche : amplitude maximale de \overline{B}_{0y} sur une période T_0 en fonction de Rm . Une ligne pleine ou pointillée correspond respectivement à une solution instable ou stable. La courbe bleu foncé représente les branches LB_1 et UB_1 tandis que les courbes bleues clair sont associées aux cycles asymétriques en temps UB_1A_1 et LB_1A_1 . Les losanges rouges indiquent la position des bifurcations de doublement de période. A droite : norme des trois plus grands multiplicateurs de Floquet en fonction de Rm (en haut ceux associés à UB_1 et en bas ceux associés à LB_1). La ligne horizontale bleue dénote la transition stable/instable. Les multiplicateurs complexes conjugués sont superposés dans cette représentation.

UB_1 et donnant lieu à une bifurcation de type "pitchfork". De cette bifurcation naissent deux branches de solutions périodiques, représentées en bleu clair sur la figure 5.1. Ces nouveaux cycles ressemblent fortement à UB_1 mais ont la particularité d'être asymétriques en temps. L'amplitude de \overline{B}_0 sur la première demi-période n'est pas la même que sur la seconde demi-période. L'écart entre ces deux amplitudes, initialement nul au point de bifurcation ($Rm = 336.55$) croit ensuite avec le Rm . Les deux branches sont en réalité une et même solution physique, présentant un déphasage temporel de $T_0/2$ avec une inversion des polarités magnétiques ; elle sera notée dans la suite UB_1A_1 . La branche LB_1 , quant à elle, est instable sur tout le domaine de Rm étudié car $\Lambda_1 \geq 1$. Une bifurcation de type "pitchfork" est également observée pour $Rm = 371.24$, donnant naissance à une paire de solutions périodiques asymétriques notée LB_1A_1 et de même nature que UB_1A_1 .

L'apparition de telles structures asymétriques au travers de bifurcations pitchfork est une propriété bien connue des systèmes possédant des symétries spatiales (Swift et Wiesenfeld, 1984). Elle a notamment été remarquée dans le problème de la convection doublement diffusive (Knobloch et Weiss, 1981; Moore et al., 1983; Knobloch et R., 1986) et dans des modèles simplifiés de Couette plan (Moehlis et al., 2004b). En analysant la stabilité des branches asymétriques, ces travaux ont notamment révélé l'existence de bifurcations de doublement de période, l'une des routes possible menant au chaos. L'analyse de stabilité des branches asymétriques dans notre

Rm	Type de bifurcation	Branche	Rm	Type de bifurcation	Branche
327.40	Noeud-col	-	334.52	Noeud-col	-
336.55	Pitchfork	UB_1	335.25	Rev. Pitchfork	LB_2
371.24	Pitchfork	LB_1	347.52	Pitchfork	UB_2
340.28	Doublement de P	UB_1A_1	375.41	Pitchfork	LB_2
439.03	Tore ?	UB_1	364.67	P-doubling	UB_2A_1
445.92	Doublement de P	UB_1A_1	405.73	P-doubling	LB_2A_1
508.12	Doublement de P	LB_1A_1			
~ 634	Doublement de P	LB_1A_1			

TABLE 5.1 – Tableau de bifurcations associées à SN_1 (à gauche) et SN_2 (à droite) et obtenues en continuant ces deux paires de cycles en Rm. La valeur des multiplicateurs de Floquet associés à ces bifurcations est donnée dans Riols et al. (2013).

problème montre que LB_1A_1 (instable initialement) subit une première bifurcation de doublement de période en $Rm = 508.1$, puis une deuxième en $Rm = 634$. Ces deux bifurcations sont associées au passage d'un multiplicateur de Floquet par -1. et sont repérées par un losange rouge sur la figure 5.1. Elles donnent naissance à un cycle de période $2T_0$ dont l'amplitude reste proche de celle de LB_1A_1 . De la même façon, pour UB_1A_1 (stable initialement sur un intervalle réduit en Rm), nous avons mis en évidence deux bifurcations de type "doublement de période" ; la première a lieu pour $Rm = 340.28$ et résulte de la perte de stabilité de UB_1A_1 , la deuxième apparaît pour $Rm = 445.92$.

Ce résultat suggère la possibilité d'une cascade de doublement de période pour la paire de cycles SN_1 . Cependant, l'étude de stabilité des cycles de période double n'est pas évidente. En continuant le premier cycle de période $2T_0$ identifié en Rm, nous avons remarqué qu'il subit à son tour une bifurcation de doublement de période mais nous n'avons pas pu converger le cycle de période $4T_0$ associé à cette bifurcation. La difficulté à converger avec l'algorithme de Newton pourrait être due à l'apparition d'une cascade très étroite en Rm de bifurcations telle que proposée dans le scénario de Feigenbaum, à l'instabilité accrue des cycles ou bien à la complexité de la dynamique induite par des bifurcations globales (voir section 5.3).

5.2.2 Diagramme de bifurcations de SN_2

Afin de s'assurer que le diagramme de bifurcation observé pour SN_1 est représentatif, nous avons étudié la stabilité de SN_2 , une des autre paires issues d'une bifurcation noeud-col présentée en section 4.3.3. Sa continuation en Rm est illustrée sur la figure 5.2. L'analyse des multiplicateurs de Floquet (figures de droite) confirme bien la nature noeud-col de la bifurcation, avec le changement de stabilité de Λ_2 et son passage à 1 pour $Rm = 334.52$. Contrairement à SN_1 , ce changement ne concerne pas la plus grande valeur propre Λ_1 qui reste supérieure à 1 autour du point de bifurcation. Les deux branches LB_2 et UB_2 sont par conséquent instables dès leur apparition.

Le scénario de bifurcations de LB_2 et UB_2 est globalement identique à celui des deux branches LB_1 et UB_1 , mais légèrement plus compliqué à analyser. Tout près de la bifurcation noeud-col, en $Rm = 335.25$, Λ_1 (en trait rouge interrompu) diminue drastiquement et devient stable. Une

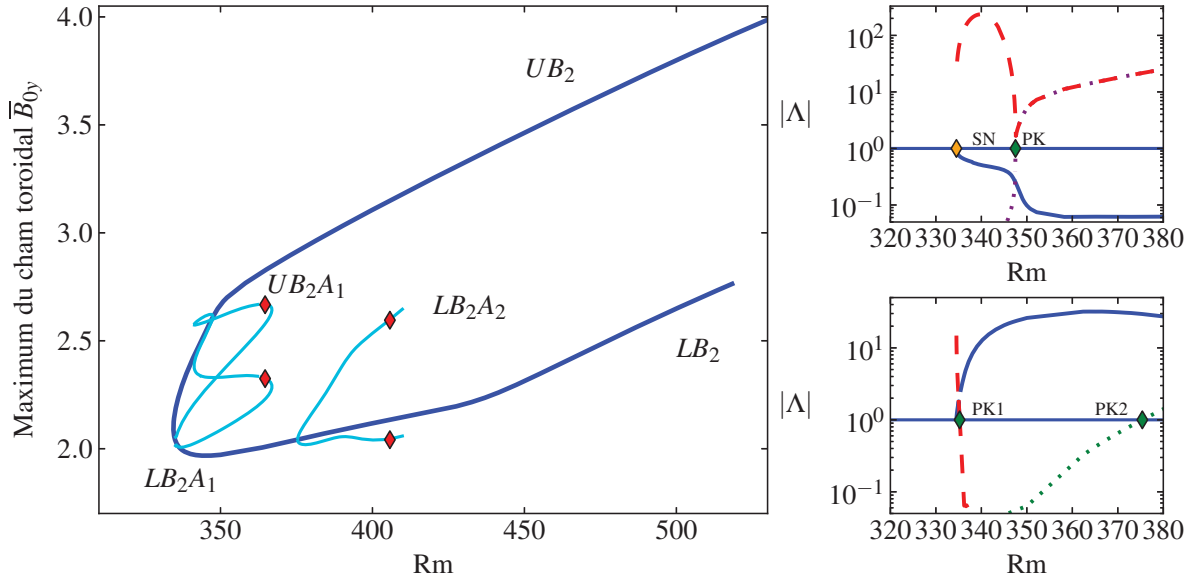


FIGURE 5.2 – Diagramme de bifurcation de SN_2 . Voir légende de la figure 5.1 pour plus d’informations. Le troisième plus grand multiplicateur de Floquet (en norme) n’est pas le même pour LB_2 et UB_2 . Il est noté respectivement Λ_3 (en vert en haut à droite) et Λ_4 (en violet en bas à droite).

bifurcation inverse (mais toujours sous-critique) de type pitchfork apparaît donc en ce point, donnant naissance à une paire de solutions asymétriques en temps, notée LB_2A_1 , de même nature que celle observée pour SN_1 . Ces branches de solutions sont tracées en bleu clair sur la figure 5.2. Une différence notable avec LB_1A_1 est que la branche asymétrique LB_2A_1 n’existe pas à grand Rm et finit par se retourner à $Rm = 366.9$ pour rejoindre finalement UB_2 en $Rm = 347.52$. Le calcul de stabilité de UB_2 révèle l’émergence d’une bifurcation pitchfork en ce point, causée par le changement de stabilité d’un multiplicateur de Floquet (indiqué en violet pointillé sur la figure 5.2). Ainsi LB_2A_1 est connecté à la fois à LB_2 et à UB_2 , de sorte que $LB_2A_1 \equiv UB_2A_1$. Enfin notons qu’une deuxième bifurcation de type pitchfork apparaît à $Rm = 375.41$ pour LB_2 , donnant naissance à une structure asymétrique, noté LB_2A_2 et déconnectée cette fois de UB_2 .

Les cycles asymétriques $LB_2A_1 \equiv UB_2A_1$ et LB_2A_2 sont tous les deux sujets à des bifurcations de doublement de période. Ces bifurcations sont indiquées avec un losange rouge sur les courbes de continuation. En revanche, la convergence des orbites de période 2 avec l’algorithme de Newton n’a pas été possible pour SN_2 , pour des raisons probablement similaires à celles indiquées pour SN_1 .

5.2.3 Mise en défaut d’une route purement sous-harmonique vers le chaos

L’analyse des bifurcations locales de cycles de dynamo MRI indique que des cascades sous harmoniques, similaires à celle de Feigenbaum, semblent effectivement se produire dans la configuration étudiée. Cependant ce scénario de cascade ne peut pas être à lui seul responsable de la transition vers le chaos temporel dans notre cas. En effet, d’après les cartes de la section

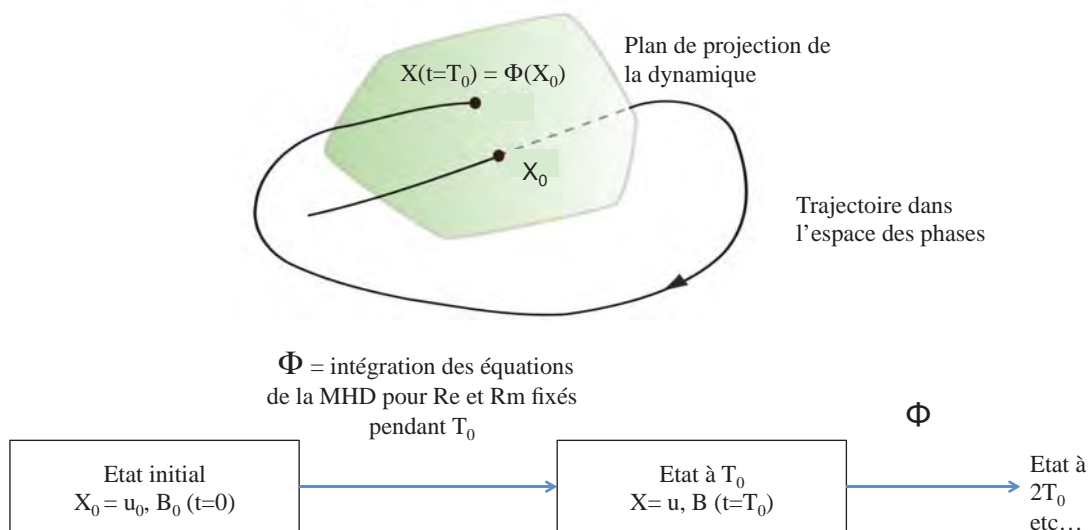
4.2.3, les premières structures turbulentes apparaissent pour des Rm bien plus faibles que ceux pour lesquels nous avons identifié les premiers doublements de période. Un autre mécanisme de bifurcation, intervenant à plus bas Rm et proche des bifurcations nœud-col a donc été recherché.

5.3 Bifurcations globales de cycles

Une autre route vers le chaos dans ce type de problème, suggérée par Schmiegel (1997) pour le problème hydrodynamique, est la bifurcation globale homocline ou hétérocline de solutions non-linéaires invariantes. Ce type de bifurcation est décrit en détail en annexe B et est associée à la collision dans l'espace des phases des variétés stables et instables de ces solutions. La détection de telles bifurcations est beaucoup plus difficile que l'analyse des bifurcations locales et n'a été entreprise que très récemment pour des problèmes fluides 3D. Elle peut se faire grâce à deux méthodes. Comme expliqué en annexe, lors d'une bifurcation homocline, la variété instable associée à un cycle a la particularité de développer une infinité de plis dans l'espace des phases, formant un treillis complexe autour du cycle. Une première méthode d'identification de telles bifurcations possible repose donc sur la visualisation directe des variétés instables. De plus ces bifurcations entraînent en théorie une dynamique de type fer à cheval (Smale, 1967), avec la naissance d'orbites homoclines (ou hétéroclines) et d'une infinité de cycles stables de périodes arbitrairement longues au voisinage du treillis associé à la bifurcation. La deuxième méthode consiste donc à repérer la signature d'une telle dynamique et des orbites associées.

5.3.1 Technique de visualisation des variétés

Plusieurs méthodes peuvent être employées pour visualiser la variété instable d'un cycle. Nous utiliserons ici une méthode similaire à celle de Gibson et al. (2008). Celle-ci étant présentée en détail en annexe A.3, nous n'en donnerons que les grandes lignes. Tout d'abord, les conditions de "shear" périodicité rendent possible l'étude "stroboscopique" de l'écoulement dans la shearing box, c'est à dire en ne regardant l'état que tous les T_0 . Le flot Φ_λ^t , où $\lambda = Rm$, peut être réduit à une application discrète, dont l'itérée d'ordre 1 (correspondant à une intégration des équations MHD sur une période T_0) sera simplement notée Φ (voir schéma ci dessous).



Cette projection stroboscopique, similaire à une projection dans une section de Poincaré, permet ainsi de visualiser plus simplement la dynamique instable autour de cycles de dynamo MRI.

Comme la dimension du système dynamique est très grande dans notre problème, il est par ailleurs nécessaire de projeter les états sur un nombre réduit de composantes pour visualiser la dynamique dans l'espace des phases. Nous avons choisi une projection dans le plan $(\overline{B}_{0_x}, \overline{B}_{0_y})$, étant donné que le champ $\overline{\mathbf{B}}_0$ est un des modes les plus importants de la dynamique. Dans cette représentation 2D stroboscopique, un cycle sera vu comme un point, tandis que sa variété instable apparaîtra comme une ligne 1D (l'exercice a été restreint aux régimes de Re et Rm où les cycles n'ont qu'une seule direction instable). Obtenir une "image" d'une variété nécessite plusieurs milliers de simulations, à la résolution de $(N_x, N_y, N_z) = (24, 12, 36)$, où chaque simulation peut durer plusieurs centaines de S^{-1} .

5.3.2 Treillis homoclines et hétéroclines identifiés

i) Treillis impliquant LB_1

Dans un premier temps, nous avons étudié la géométrie de la variété instable de LB_1 , $W^u(LB_1)$, entre $Rm = 333$ et $Rm = 338.5$. La figure 5.3 laisse clairement entrevoir la formation d'un treillis hétérocline, entre $W^u(LB_1)$ et la variété stable de UB_1 , $W^s(UB_1)$. Un zoom autour de UB_1 a été effectué (figures du bas) afin de mieux distinguer la géométrie complexe de $W^u(LB_1)$. Pour $Rm = 333$, $W^u(LB_1)$ semble simplement converger vers l'orbite stable UB_1 . Lorsque UB_1 est sur le point de perdre sa stabilité, pour $Rm > 336.3$, la variété instable s'approche de UB_1 en formant de nombreux plis avant de revenir vers LB_1 . Ce retour vers l'orbite d'origine suggère l'apparition d'un second treillis homocline, moins évident à visualiser. La présence de ces deux treillis a été confirmée par la convergence d'une orbite hétérocline entre LB_1 et UB_1 et d'une orbite homocline propre à LB_1 . Nous reviendrons sur leur calcul dans la section suivante.

ii) Treillis homoclines de UB_1

Nous avons montré ensuite que ce type de treillis se manifeste aussi autour de UB_1 lorsque le cycle est instable. La figure 5.4 illustre la projection de la variété instable $W^u(UB_1)$ dans le plan $(\overline{B}_{0_x}, \overline{B}_{0_y})$ pour trois Rm, compris entre 337.5 et 339, juste après la bifurcation pitch-fork qui fait perdre à UB_1 sa stabilité. Pour $Rm = 337.5$, $W^u(UB_1)$ s'approche et s'enroule autour de la solution asymétrique UB_1A_1 . A ce Rm, UB_1A_1 est toujours stable (voir tableau 5.1) et apparaît donc comme un attracteur local. Pour un Rm = 338.27 légèrement supérieur, un changement notable apparaît dans le comportement de $W^u(UB_1)$ autour de UB_1A_1 . Des dendrites se forment autour du point fixe UB_1A_1 et semblent revenir dans la direction du point fixe initial UB_1 . Ces dendrites grandissent et sont étirées le long de la direction instable de UB_1 . Pour $Rm = 339$, $W^u(UB_1)$ présente un grand nombre de plis, qui s'accumulent autour de UB_1 . Cette configuration révèle manifestement l'existence d'un treillis homocline caractérisé par une infinité d'intersections entre la variété instable de UB_1 et sa variété stable. Ce résultat est renforcé par la découverte d'orbites homoclines associées à UB_1 que nous présenterons dans la section suivante. On notera que cette bifurcation globale fait intervenir un cycle asymétrique intermédiaire, ici UB_1A_1 , qui permet à $W^u(UB_1)$ d'effectuer un premier pli et de revenir vers UB_1 . L'expansion des dendrites est en partie rendu possible par le fait que UB_1A_1 perd sa

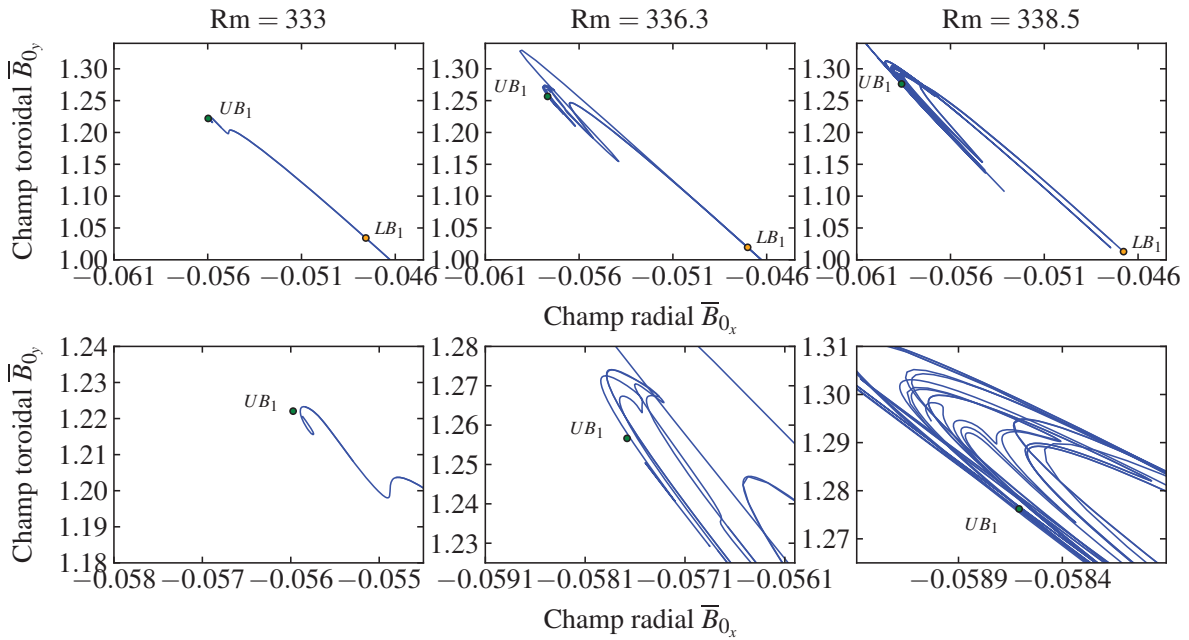


FIGURE 5.3 – Projections de la variété instable de LB_1 pour trois Rm différents. Les figures du bas sont zoomées autour de UB_1 pour mieux distinguer le treillis hétérocline entre LB_1 et UB_1 . De nombreux plis de la variété autour de LB_1 et UB_1 sont observés à partir de $Rm = 336.3$.

stabilité pour un $Rm = 340.28$ très voisin. Dans le cas de LB_1 , la bifurcation hétérocline avec UB_1 apparaissait également juste avant la perte de stabilité de UB_1 .

iii) Autres treillis hétéroclines

Deux autres treillis hétéroclines ont été détectés dans le régime transitionnel étudié. Le premier concerne la variété instable de UB_1 et la variété stable de LB_1 . $W^u(UB_1)$ forme des plis de plus en plus resserrés autour de LB_1 lorsque $Rm \sim 343$. Le deuxième, plus intéressant, concerne une connexion hétérocline entre deux cycles issus d'une bifurcation noeud-col différente. Ainsi pour $Rm \sim 350$, $W^u(UB_1)$ approche LB_2 et forme un treillis dans son voisinage.

5.3.3 Calcul d'orbites homoclines et hétéroclines

Un treillis homocline (ou hétérocline), entraîne l'apparition d'une infinité d'orbites du même nom. Si l'on se réfère au schéma du treillis homocline donné en annexe B (Fig. B.2), on voit qu'une orbite homocline est formé par la suite $(p, q, q', q'', \dots, p)$ dans la représentation stroboscopique de notre système. Comme la variété instable de p recoupe sa variété stable au voisinage de q (conséquence du lemme de Palis-Takens), une infinité d'orbites homoclines sont créées lorsque qu'une bifurcation homocline se produit. Pour chaque treillis identifié dans la section 5.3.2, nous avons pu converger et continuer l'une de ces trajectoires en Rm , grâce à une méthode présentée en annexe A.3. Une orbite homocline associée à LB_1 est illustrée sur la figure 5.5 (en haut à gauche). La trajectoire part du cycle LB_1 , fait une excursion vers une dynamique plus énergétique et chaotique pendant une durée d'environ $3T_0$ (appelée temps de transition),

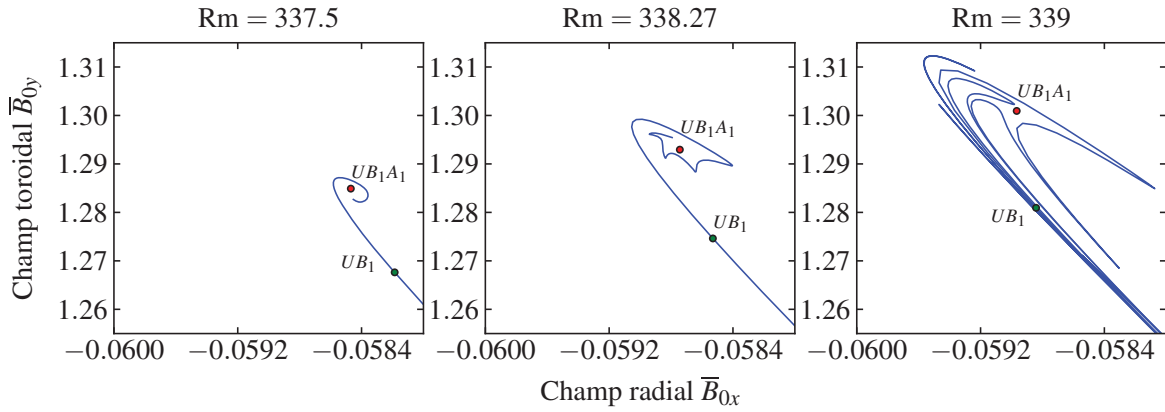


FIGURE 5.4 – Projections de la variété instable de UB_1 pour trois Rm différents. Un treillis homocline est clairement identifié pour $Rm = 339$.

puis revient sur LB_1 . Pour $Rm = 338.62$, l'excursion, définie comme la différence entre l'énergie magnétique du cycle et l'extremum d'énergie atteinte durant la phase de transition, est positive et comparable à l'énergie de LB_1 . Cette orbite a été continuée entre $Rm = 338.62$ et $Rm = 340.5$ (courbe en haut à droite). Elle naît d'une bifurcation de type nœud-col homocline, et présente donc deux branches de solutions, l'une possédant une excursion plus grande que l'autre. Cette orbite a été également suivie en Re , pour des valeurs de Re comprise entre 70 et 94, suggérant ainsi que le treillis homocline existe dans une gamme de Re assez large. On notera que d'autres orbites homoclines associées au même treillis (relatif à LB_1) ont été trouvées et présentent des excursions et des temps de transition différents. Le Rm critique correspondant à la bifurcation nœud-col homocline n'est pas forcément le même pour toutes ces orbites mais reste proche de $Rm = 338$. Ces Rm sont dans tous les cas inférieurs au Rm pour lequel on observe le premier doublement de période sur la branche associée à LB_1 .

Une orbite homocline associée à UB_1 a été obtenue par une méthode similaire. Elle est représentée sur la figure 5.5 (bas). Celle-ci est également issue d'une bifurcation de type nœud-col homocline pour $Rm = 338.72$ et a été continuée jusqu'à $Rm = 350$. Son excursion est négative et augmente en valeur absolue lorsque Rm croît. Pour mieux comprendre la place qu'occupe cette orbite dans la dynamique, sa projection dans une application de premier retour de Poincaré est illustré sur la figure 5.6. Le plan de projection n'est plus définie comme $(\bar{B}_{0x}, \bar{B}_{0y})$ mais comme le plan $(\bar{B}_{0y}^n, \bar{B}_{0y}^{n+1})$, où \bar{B}_{0y}^{n+1} et \bar{B}_{0y}^n sont respectivement le champ toroidal et son image associée à l'application de premier retour Φ (correspondant à l'intégration des équations de la MHD pendant T_0). Le point vert, représentant UB_1 est notre point de départ. Une petite perturbation le long de sa direction instable nous amène sur le point étoilé 1. Les images successives de ce point sont dénotées par les étoiles violettes numérotées. Au point 6, l'orbite est à son excursion maximale, puis elle converge progressivement vers UB_1 en suivant les lignes de plus en plus resserrées de la variété instable.

Enfin trois orbites hétéroclines associées aux trois treillis présentés en section 5.3.2 ont été convergées grâce à un algorithme similaire à celui utilisé pour les orbites homoclines. La figure 5.7 montre l'évolution temporelle de ces orbites et leur portrait de phase dans un plan (\bar{B}_{0y}, E_m) .

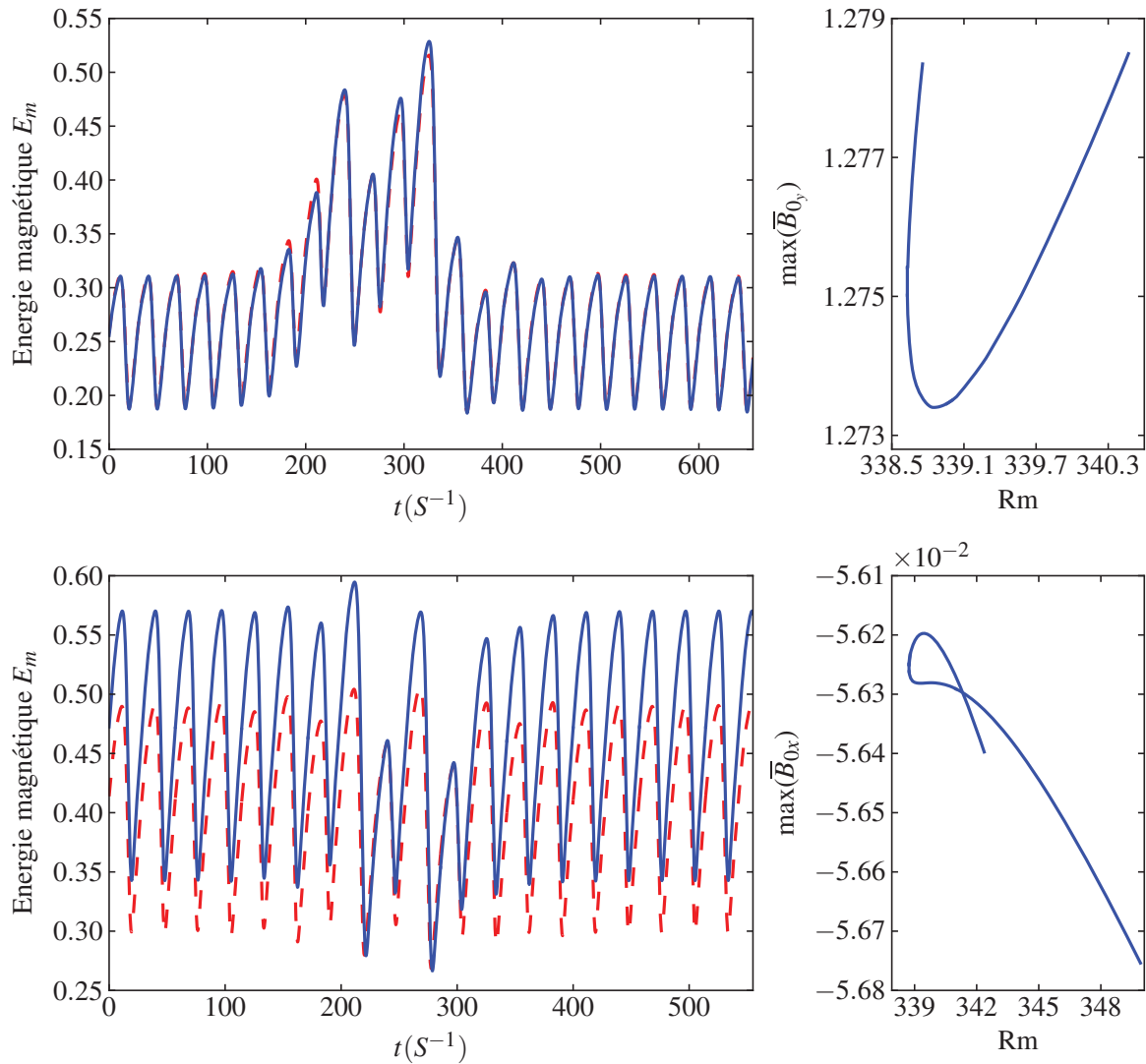


FIGURE 5.5 – En haut à gauche : évolution temporelle de l'énergie magnétique totale d'une orbite homocline associée à LB_1 pour $Rm = 338.8$ et $Rm = 340.5$. En bas à gauche, même représentation pour une orbite homocline associée à UB_1 , pour $Rm = 338.7$ et $Rm = 349.9$. Les courbes de droite représentent l'extremum (maxima ou minima) de \overline{B}_{0y} atteint durant la phase de transition, en fonction de Rm .

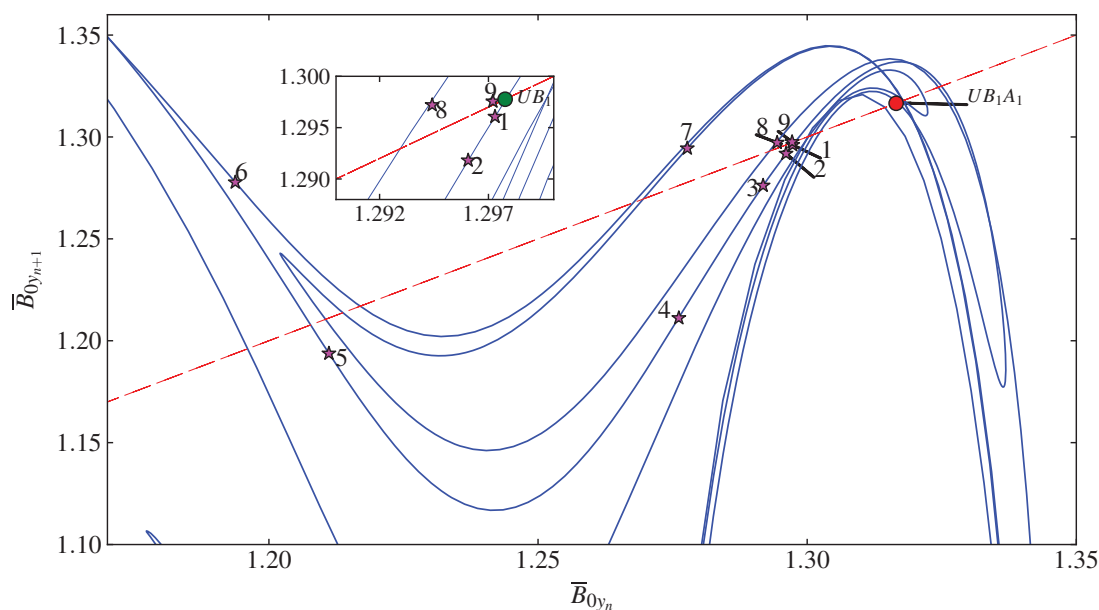


FIGURE 5.6 – Représentation d’une orbite homocline (points étoilés) par application de premier retour de Poincaré. En bleu est représentée la variété $W^u(UB_1)$, les points vert et rouge dénotent respectivement le cycle UB_1 et UB_1A_1 . L’état du système est réduit ici uniquement à la composante \bar{B}_{0y} .

Dans l’ordre, sont tracées les trajectoires hétéroclines entre LB_1 et UB_1 pour $Rm = 339$, entre UB_1 et LB_1 pour $Rm = 345$ et entre UB_1 et LB_2 pour $Rm = 352$. Ces résultats attestent donc de la présence d’un grand nombre d’orbites homoclines et hétéroclines pour des Rm très proches de la transition, apportant une preuve supplémentaire de l’occurrence des bifurcations globales de cycles dynamo.

5.4 Conséquence des bifurcations globales sur la dynamique

5.4.1 Dynamique de type "fer à cheval"

Ces bifurcations globales sont-elles responsables de la dynamique chaotique transitionnelle observée dans ce problème? Dans un premier temps, nous avons cherché à vérifier qu’une dynamique de type "fer à cheval", prédite par le théorème de Smale-Birkhoff (voir annexe B.3) était bien présente autour de treillis de UB_1 . Rappelons que ce théorème stipule qu’en présence d’un treillis homocline ou hétérocline associé à un point fixe, la dynamique autour de ce point se comporte comme l’application discrète en fer à cheval est alors de nature chaotique. Si l’on considère un sous-ensemble D de l’espace des phases aussi petit que l’on veut, contenant une partie de $W^u(UB_1)$, alors cela signifie qu’il existe un certain N pour lequel l’itérée $\Phi^N(D)$ a une intersection non vide avec D . Cela suggère l’existence d’une orbite périodique de période NT_0 . De plus l’ensemble défini comme l’intersection des $\Phi^{kN}(D)$ avec $k > 0$ contient théoriquement une infinité d’orbites de périodes arbitrairement longues.

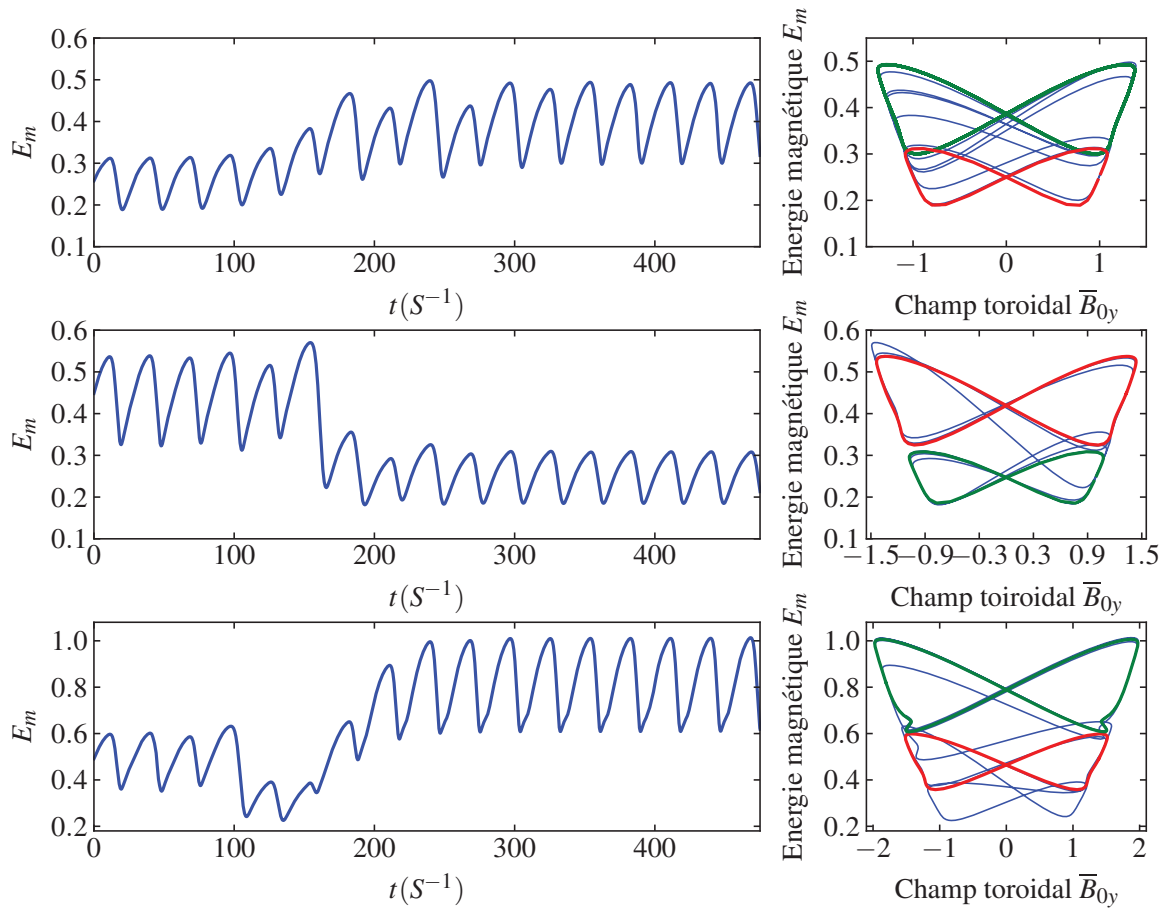


FIGURE 5.7 – Trois orbites hétéroclines associées au treillis de SN_1 . De haut en bas, $LB_1 \rightarrow UB_1$ pour $Rm = 341$, $UB_1 \rightarrow LB_1$ pour $Rm = 345$ et $UB_1 \rightarrow LB_2$ pour $Rm = 352$. A gauche : évolution temporelle de l'énergie magnétique totale E_m ; à droite : portrait de phase représentant E_m en fonction de \bar{B}_{0y} . L'orbite initiale est colorée en rouge et l'orbite vers laquelle on converge en vert.

Pour vérifier cette propriété, nous avons cherché des orbites périodiques de périodes longues, supérieures ou égales à $2T_0$, au voisinage de UB_1 . Nous nous sommes fixés un $Rm = 339$ et nous avons réalisé le même type de projections que pour la figure 5.6, en visualisant sur un plan l'image $\Phi^j(S)$ d'un segment S de $W^u(UB_1)$ en fonction de son i -ème itérée $\Phi^i(S)$. Si les états projetés ne sont pas dégénérés (autrement dit si la valeur de \overline{B}_{0_y} est suffisante pour identifier localement un point de $W^u(UB_1)$), alors les points fixes dans cette représentation sont des orbites périodiques de période $(j - i)T_0$. De cette façon, nous avons pu obtenir une orbite de période $4T_0$ en traçant l'itérée d'ordre 5 de $W^u(UB_1)$ en fonction de son itérée d'ordre 1. L'algorithme de Newton a été utilisé pour affiner la condition initiale et converger vers la solution exacte.

Cette orbite de période 4 nous a servi d'exemple pour illustrer comment la dynamique de type "fer à cheval" émerge dans notre système. La figure 5.8 montre la position des différents points, P_0, P_1, P_2 , and P_3 de l'orbite de période 4 dans le plan $(\overline{B}_{0_x}, \overline{B}_{0_y})$. L'image $P_4 = \Phi(P_3)$ coïncide exactement avec P_0 . Considérons le point P_u le plus proche de P_0 et situé sur le segment initial utilisé pour générer la variété $W^u(UB_1)$. Autour de ce point, on génère un petit rectangle R de conditions initiales voisines générées à partir d'une perturbation de UB_1 le long de sa direction instable \mathbf{X}_u et des ses deux premières directions stables \mathbf{X}_{s_1} et \mathbf{X}_{s_2} . R est donc l'ensemble vérifiant :

$$\mathbf{X}(\epsilon_u, \epsilon_{s_1}, \epsilon_{s_2}) = X_{UB_1} + \epsilon_u \mathbf{X}_u + \epsilon_{s_1} \mathbf{X}_{s_1} + \epsilon_{s_2} \mathbf{X}_{s_2} \quad (5.1)$$

avec $\epsilon_u, \epsilon_{s_1}, \epsilon_{s_2}$, trois paramètres variant dans un intervalle déterminé. ϵ_u est choisi très petit devant ϵ_{s_1} et ϵ_{s_2} , de façon à obtenir un ensemble R allongé dans la direction stable de UB_1 et recouvrant le point P_0 . Enfin le ratio $\epsilon_{s_1}/\epsilon_{s_2}$ est fixé et permet d'orienter le rectangle dans une direction voulue. Les états sur le périmètre de R sont intégrés numériquement sur plusieurs T_0 afin de calculer les images successives par Φ de ce rectangle initial. L'application successive de Φ a pour effet d'étirer R le long de la variété instable $W^u(UB_1)$ et de le contracter dans la direction stable perpendiculaire à $W^u(UB_1)$. Après quatre itérations, l'image $\Phi^4(R)$ recoupe le rectangle initial R , donnant naissance à l'orbite de période 4 T_0 . L'application Φ^4 vérifie donc parfaitement les propriétés d'une application en "fer à cheval". Notons que l'intersection entre R et $\Phi^4(R)$ a lieu dans l'espace des phases complet et n'est pas restreint au plan $(\overline{B}_{0_x}, \overline{B}_{0_y})$.

En utilisant la même technique utilisée pour obtenir cette orbite de période 4 T_0 , nous avons pu mettre la main sur de nombreuses autres orbites périodiques de périodes 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 T_0 . Cette découverte indique clairement que l'on peut en fait construire une infinité d'applications de type "fer à cheval" à partir du treillis homocline associé à UB_1 , chacune correspondant à un nombre différents d'itérations de Φ . L'évolution temporelle de ces orbites est illustrée sur la figure 5.9. Certaines d'entre elles sont des cycles identifiés précédemment grâce aux cartes de transition de la section 4.2.4. Puisque ces cycles apparaissent dans le voisinage de UB_1 , l'énergie magnétique oscille tout les $T_0/2$, à des niveaux comparables à celle de UB_1 . Cependant ces oscillations sont modulées dans le temps avec une période plus longue. Pour des applications 2D dissipatives, comme la carte de Hénon, il a été montré que les orbites de longues périodes associées aux treillis naissent de bifurcations nœud-col et que leur "upper branch" est toujours stable à l'origine (Gavrillov et Shil'nikov, 1972; Newhouse, 1979; Robinson, 1983; Palis et Takens, 1993). Elles rencontrent ensuite théoriquement une bifurcation de doublement de période (Yorke et Alligood, 1983). Nous avons vérifié que ces propriétés sont bien vérifiées dans notre problème à plusieurs milliers de dimensions. Ces orbites de longues périodes sont issues de bifurcations

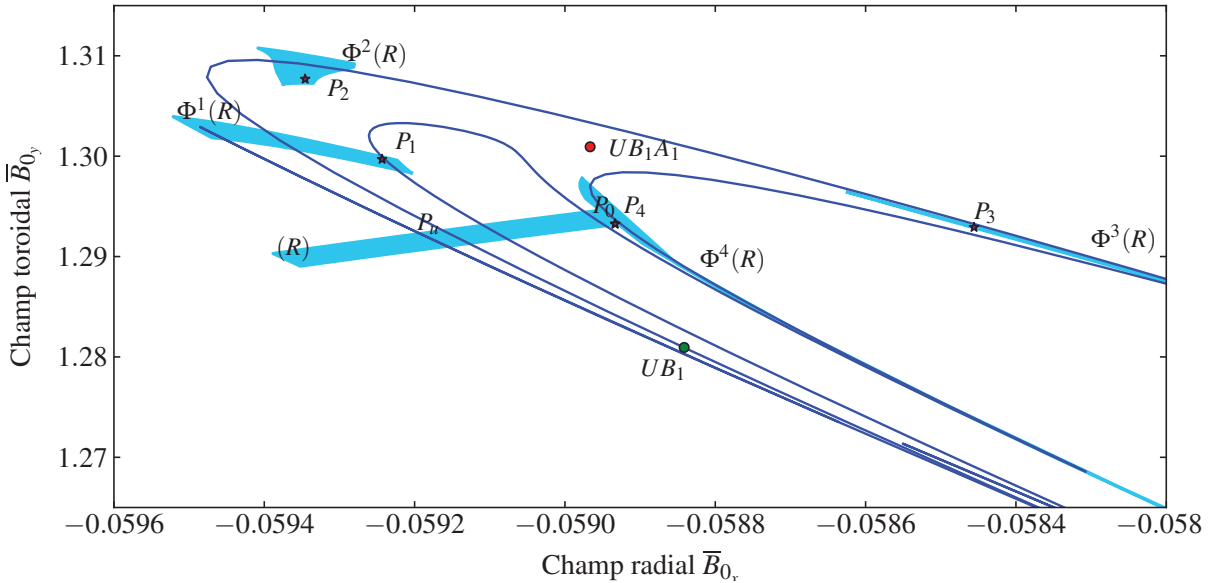


FIGURE 5.8 – Représentation de la dynamique autour de la variété instable $W^u(UB_1)$ dans la projection $(\bar{B}_{0x}, \bar{B}_{0y})$. Les points fixes UB_1 et UB_1A_1 sont représentés avec des ronds pleins colorés. Un rectangle initial R intersectant $W^u(UB_1)$ et ses images successives par Φ sont représentées par les surfaces bleu clair. Une intersection est visible entre R et $\Phi^4(R)$, donnant naissance à une orbite de période $4T_0$ (points étoilés).

nœud-col distinctes à des R_m légèrement différents. L'analyse locale des cycles de type nœud-col révèle qu'ils sont stables sur un domaine limité en R_m , près de la bifurcation nœud-col. Cette stabilité a probablement contribué à faciliter leur détection dans les cartes de transition. Celles-ci ont des bassins d'attraction très réduits mais visibles sur la carte de la figure 4.8. Enfin nous avons pu constater que pour des R_m légèrement supérieurs au R_m où elles apparaissent, ces orbites rencontrent des bifurcations de doublement de période, caractérisées par le passage à -1 d'un des multiplicateurs de Floquet.

En résumé, cette étude numérique montre que tous les symptômes d'une dynamique en fer à cheval sont réunis et donc que le théorème de Smale-Birkhoff est bien vérifié dans notre problème. La présence d'une telle dynamique induit théoriquement un comportement chaotique au voisinage des cycles concernés, qui est évidemment relié à l'existence d'un nombre infini d'orbites périodiques dans ce voisinage. Nous allons montrer dans le paragraphe suivant que la sensibilité aux conditions initiales, propre aux systèmes chaotiques et observée dans notre problème (chapitre 4), apparaît bien lorsque le treillis est formé.

5.4.2 Émergence du chaos et lien avec les cartes de transition

Afin d'établir un lien direct entre l'émergence du chaos et la formation des treillis associés aux bifurcations globales, nous avons testé la sensibilité du système lorsque un ensemble de conditions initiales approche et traverse le treillis formé par $W^u(UB_1)$. Cet ensemble a été généré

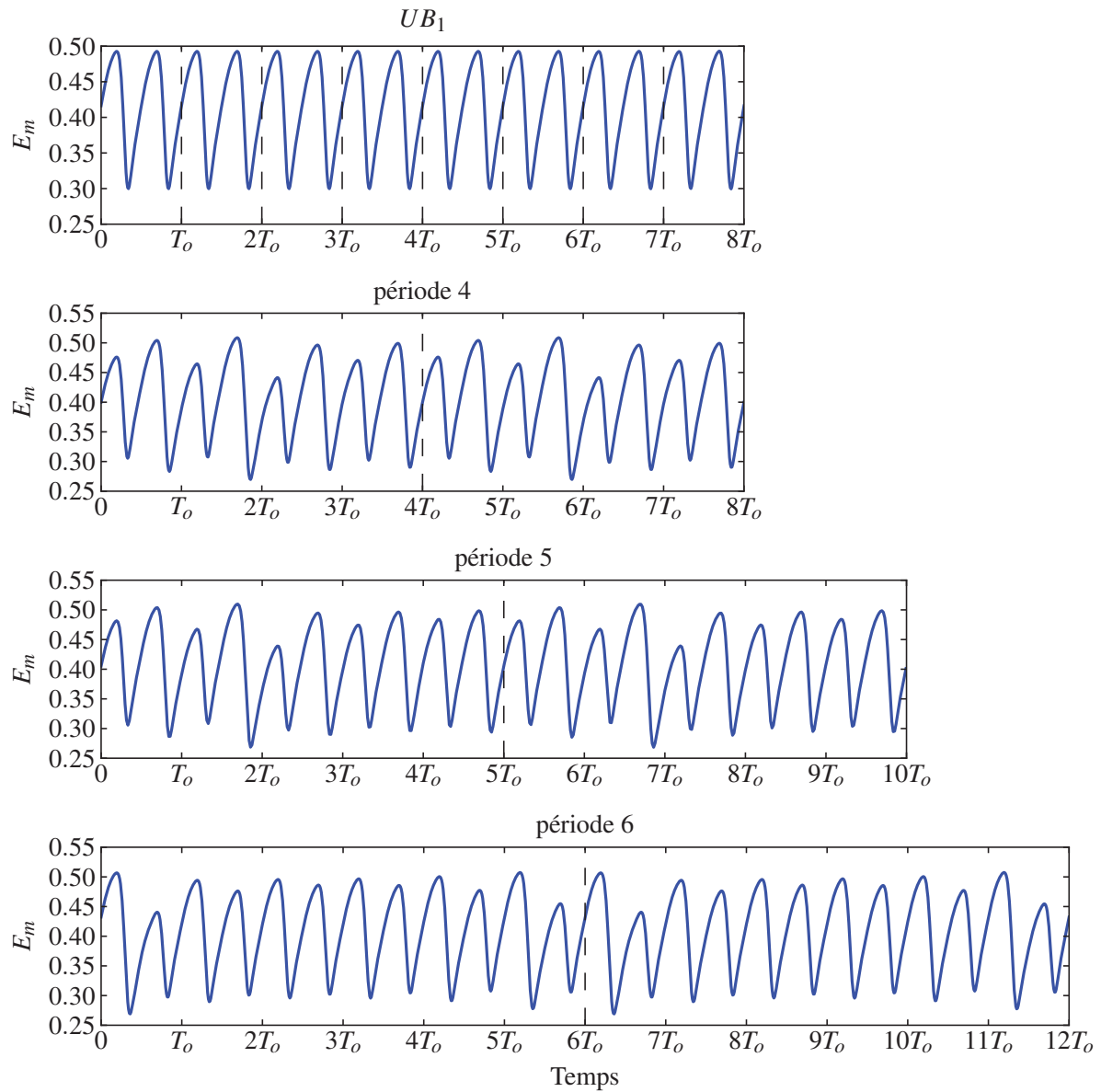


FIGURE 5.9 – Plusieurs orbites de longues périodes ($\geq 2T_0$) issues du treillis homocline à UB_1 et prenant naissance dans des bifurcations nœud-cols distinctes. L'évolution de l'énergie magnétique totale est représentée sur deux périodes des cycles. Le cycle UB_1 a été également ajouté sur la première figure pour pouvoir le comparer aux autres cycles.

de la même façon que le rectangle R de la section précédente, en perturbant le cycle de base UB_1 le long de sa direction instable et de ses deux premières directions stables. Le triplet $\epsilon_u, \epsilon_{s_1}, \epsilon_{s_2}$ permet de définir un point dans cet ensemble. Pour le cas que nous présentons ici, nous considérerons une ligne d'états initiaux transverse à $W^u(UB_1)$, représentée en pointillé rouge sur la figure 5.10 (gauche). ϵ_u est donc fixé et les deux autres paramètres ϵ_{s_1} et ϵ_{s_2} sont choisis suffisamment grands pour que les extrémités de la ligne se trouvent en dehors du treillis formé par $W^u(UB_1)$. Une fois l'orientation de cette ligne choisie, chaque condition initiale la constituant est intégrée numériquement. Le temps de vie de la turbulence et l'amplitude de \overline{B}_{0y} après $7T_0$ sont alors mesurés et reportés sur la figure 5.10 (en bas). L'abscisse ici correspond à la coordonnée curviligne le long de la ligne de conditions initiales. On voit clairement qu'une dynamique chaotique est excitée pour chaque condition initiale dans le treillis. Loin du treillis en revanche aucune dynamique n'est excitée. Cela suggère donc fortement que la bifurcation homocline associée à UB_1 est responsable de l'émergence du chaos dans cette région transitionnelle de l'espace des phases.

L'analyse des bifurcations globales que nous venons d'effectuer permet finalement de faire un rapprochement entre les treillis observés et les cartes de transition du chapitre 4. Tout d'abord, nous comprenons désormais que les structures complexes observées (ilots et pointes) sont la manifestation de treillis associés à un ou plusieurs cycles de dynamo. Une coupe à Rm fixé, amplitude A variable, donnerait une courbe de temps de vie très similaire à celle de la figure 5.10 (en bas), avec une succession de zones chaotiques et de zones laminaires. Enfin la dynamique de fer à cheval, résultant des bifurcations homoclines et hétéroclines, a des propriétés fractales, qui pourraient notamment expliquer la forme des cartes obtenues. En effet pour un ensemble D au voisinage de la variété instable d'un cycle, $\Phi^k(D) \cap D$ tend vers un ensemble de Cantor lorsque k tend vers l'infini (Ott, 1993). Cet ensemble est non-connexe, de mesure nulle et fractal, et possède donc toutes les caractéristiques des régions chaotiques observées sur les cartes de transition. Cette ressemblance ne constitue cependant pas une preuve absolue, et l'apparition de cascades sous-harmoniques ou d'autres crises, à plus grand Rm , peut compliquer la topologie de l'espace des phases, comme l'ont montré récemment Kreilos et Eckhardt (2012) dans le problème de la transition hydrodynamique sous-critique de l'écoulement de Couette plan.

5.5 Conclusions

Ce travail numériquement difficile et technique, qui a nécessité la réalisation de très nombreuses simulations, a permis de montrer que les cycles de dynamo MRI sont à l'origine de bifurcations globales dont émergent une dynamique chaotique pré-turbulente dans ce système. Les premières bifurcations de ce type se manifestent pour des Rm très proches des Rm des bifurcations nœud-col dont sont issus ces cycles. Ce résultat est l'un des tous premiers de ce type à avoir été obtenu pour un système physique réaliste en trois dimensions et présentant plusieurs milliers de degrés de liberté. Le comportement chaotique que nous avons décrit n'est pas à proprement parler un état turbulent car les écoulements restent à relativement grande échelle. Néanmoins, ces bifurcations marquent une transition claire entre un état laminaire et un état où la dynamo MRI est excitée.

D'un point de vue astrophysique, la conclusion la plus importante de cette étude est que la transition dynamo dans l'écoulement képlérien repose sur l'existence de ces cycles. Ce résultat

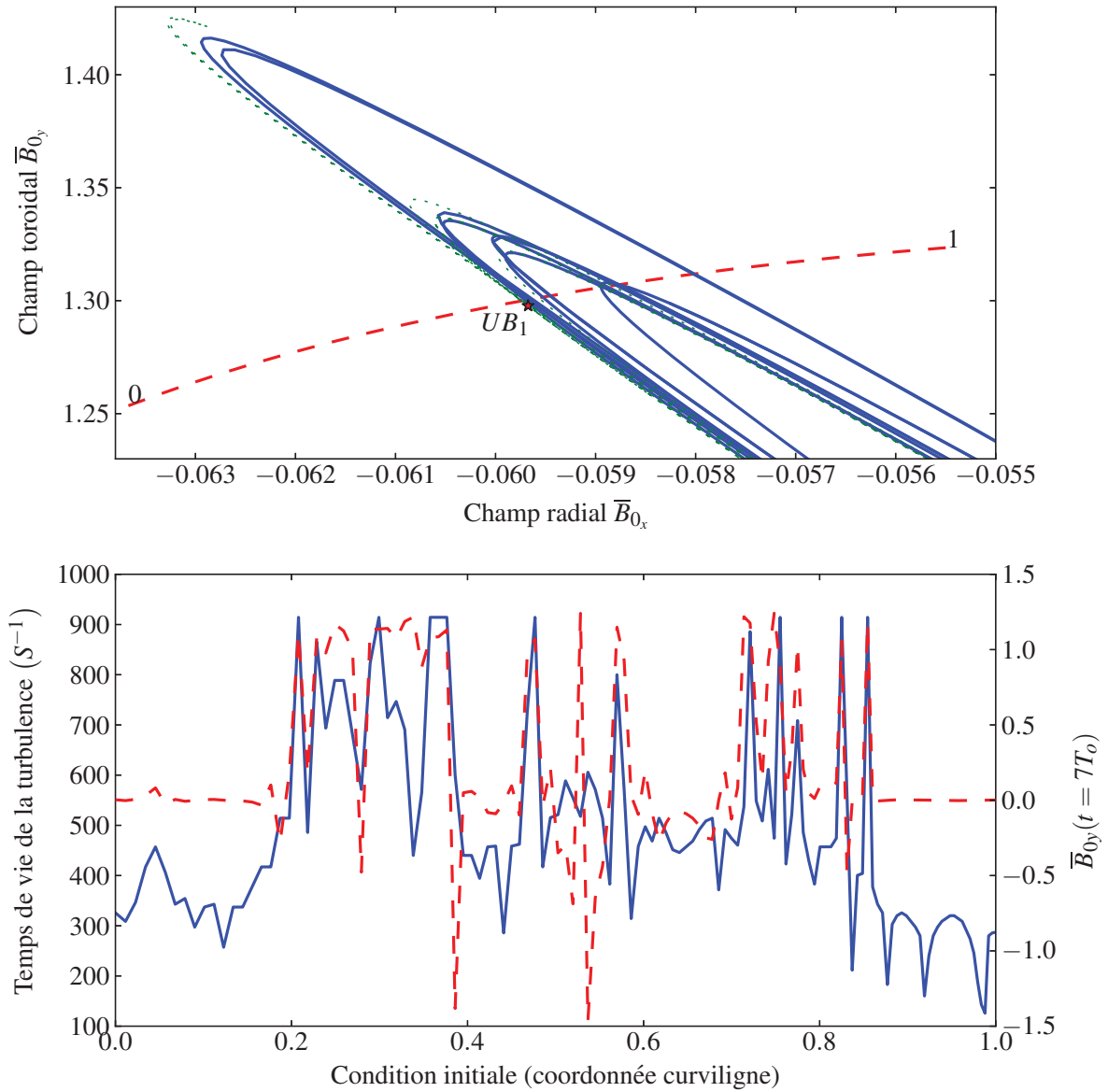


FIGURE 5.10 – En haut : "segment" de conditions initiales projeté dans le plan $(\bar{B}_{0x}, \bar{B}_{0y})$, traversant le treillis associé à UB_1 . En bas : temps de vie de la dynamique (en trait plein bleu) et $\bar{B}_{0y}(t = 7T_0)$ (en trait pointillé rouge), en fonction de la coordonnée sur le segment de condition initiales.

a été exploité dans la dernière partie de cette thèse pour tenter de comprendre l'origine de la dépendance de la dynamo aux processus dissipatifs et en particulier la dépendance en P_m de la transition.

6

Recherche de l'origine physique de la dépendance en Pm à partir de cycles

Le travail présenté au chapitre précédent a permis d'établir le rôle central joué par les cycles de dynamo magnétorotationnelle dans la transition. Nous avons mis en évidence numériquement qu'ils sont à l'origine des premiers germes d'une dynamo chaotique dans l'écoulement cisailé képlérien. Ces cycles constituant des objets mathématiques et numériques propres et bien définis, cette conclusion nous a alors amené à effectuer une étude méticuleuse de leur dynamique en fonction du régime de dissipation, afin de comprendre les conditions physiques d'excitation de la dynamo MRI et en particulier la dépendance en Pm de la transition. Tout d'abord il nous a semblé pertinent de nous interroger sur le domaine d'existence de ces cycles dans l'espace des paramètres. Vivent-ils à Pm plus petit que 1 ? Dans un second temps, nous avons analysé comment la physique de ces cycles (à ce stade uniquement connue à $Pm > 1$) évolue en fonction de Re et Rm , en particulier lorsque on se rapproche de la frontière de transition à plus petits Pm . Dans ce chapitre nous présentons l'ensemble de cette analyse et les conclusions physiques principales concernant l'excitation de la dynamo.

6.1 Etude paramétrique des cycles en boîte longue

La méthode de continuation décrite auparavant en section 4.3 permet de calculer les solutions cycliques en fonction d'un paramètre choisi, comme Re , Rm , ou les dimensions de la shearing box. Cette méthode est coûteuse en temps de calcul car elle nécessite plusieurs milliers de simulations pour caractériser une branche de solutions. Nous commencerons par illustrer l'ensemble des continuations effectuées en Rm puis en Re pour les paires de cycles SN_i identifiés dans la boîte de dimensions $(0.7, 20, 2)$, jugées importantes pour l'étude de la transition. Les continuations des cycles asymétriques, issus de bifurcations "pitchfork" ne seront pas présentées ici. Par ailleurs, peu de continuations ont pu être effectuées à grand Rm , du fait de la forte instabilité des cycles.

6.1.1 Continuation en Re et Rm

Les courbes de continuation de SN_1 en Rm sont présentées sur la figure 6.1 (à gauche) pour différents Re . L'observable considérée ici est le maximum du champ $\overline{B}_{0,y}$ sur une période. Tout d'abord, on remarque que SN_1 est bien issu d'une bifurcation nœud-col quelque soit le nombre de Reynolds considéré. Ce réseau de courbes montre que le Rm critique $Rm_{cl}(Re)$ de la bifurcation nœud-col diminue avec Re pour $Re < 300$ mais augmente pour des Re supérieurs. A bas Re , l'amplitude du champ \overline{B}_0 (et plus généralement l'amplitude des composantes axisymétriques) augmente avec Rm , même si un régime asymptotique semble se dessiner lorsque $Rm \rightarrow \infty$. A

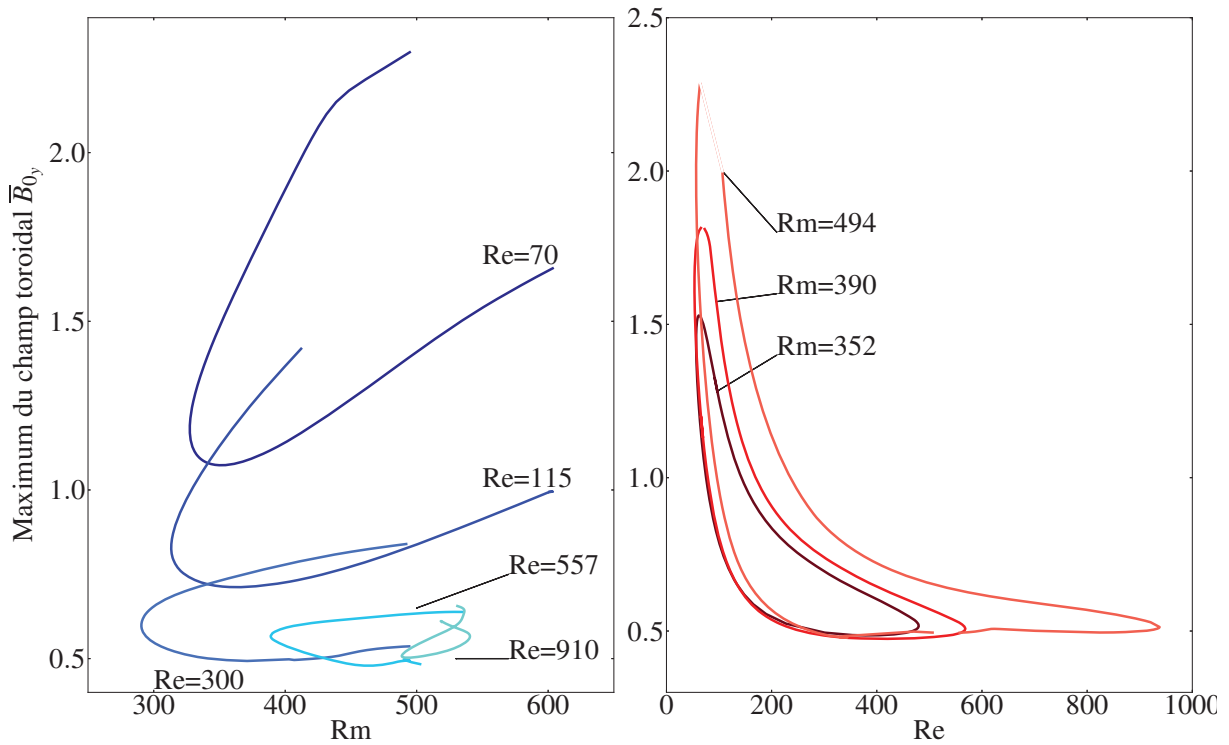


FIGURE 6.1 – Courbes de continuation de SN_1 en Rm (à gauche) et en Re (à droite).

plus grand Re , ces quantités évoluent beaucoup plus lentement en Rm . Près de la bifurcation, on observe systématiquement une augmentation importante du champ \bar{B}_0 sur la lower branch. Enfin notons qu'à grand Re (ici ~ 900), les courbes semblent se refermer à partir d'un certain Rm critique $Rm_{cu}(Re)$, suggérant que SN_1 pourrait n'être présent que dans une gamme de Rm modéré. Cependant les problèmes de convergence de l'algorithme de Newton dus à l'instabilité croissante de SN_1 en Rm nous ont empêché de le continuer au-delà de $Rm \sim 600 - 650$.

Les courbes de continuation de SN_1 en Re sont illustrées sur la figure 6.1 (droite), pour différents Rm . Au delà de $Rm = 500$, l'obtention de ces courbes est plus difficile pour les raisons déjà indiquées précédemment (stabilité, résolution). Pour un Rm fixé, ces courbes prennent la forme de "bananes", délimitées par deux Re critiques, Re_{cl} et $Re_{cu}(Rm)$. Ces deux points correspondent à des bifurcations de type noeud-col (inversées pour la limite supérieure Re_{cu}). Le premier, Re_{cl} , semble ne pas dépendre de Rm et montre que le cycle existe uniquement pour $Re \gtrsim 60$. Le second Re_{cu} limite l'existence du cycle à grand Re et dépend clairement du Rm , si bien que le domaine d'existence de SN_1 en Re s'élargit lorsque Rm augmente. Sur les deux branches, le champ \bar{B}_{0y} diminue fortement à bas Re , puis semble tendre vers une valeur asymptotique autour de 0.5 à plus grand Re .

Le même travail a été effectué pour la paire SN_2 . Les continuations ont été beaucoup plus difficile à réaliser, étant donnée l'instabilité plus forte de ces cycles. A grand Rm et pour $Re \gtrsim 100$, une résolution double (par rapport à SN_1) a été nécessaire car SN_2 possède une dynamique non-

linéaire plus riche, avec davantage de modes à petite échelle excités. Les courbes de continuation (non représentées ici) sont très similaires à celles de SN_1 . Dans une gamme de Rm comprise entre 350 et 494, la courbe d'évolution du champ toroïdal en fonction de Re a également une forme caractéristique "en banane", avec un Re critique qui semble augmenter avec Rm . Cependant elle a la particularité d'être connectée avec la courbe de continuation de SN_1 . Les deux paires de cycles entrent donc en collision pour un Rm compris entre 352 et 494, autour d'un Re proche de 70. L'étude des deux paires de cycles SN_3 et SN_4 a été partiellement entreprise et semble indiquer que ces cycles ont des courbes de continuations similaires.

6.1.2 Frontière d'existence des cycles

En reportant l'ensemble des valeurs critiques Rm_{cl} , Rm_{cu} , Re_{cl} et Re_{cu} pour lesquelles une bifurcation nœud-col apparaît, il est possible de tracer la frontière d'existence d'une paire de cycle donnée dans le plan (Re, Rm) . Ces frontières sont illustrées sur la figure 6.2 pour SN_1 , SN_2 et SN_3 . Pour les deux premiers, la frontière est quasi-verticale à bas Re , car la dissipation visqueuse empêche la croissance des ondes-non-axiymétriques et donc l'existence d'une dynamique 3D auto-entretenu en dessous d'un certain Re . A partir de $Re \sim 300$, Re_{cu} est une fonction croissante du Rm et la frontière semble alors suivre une ligne $Pm \sim cte$. La paire SN_3 quant à elle n'existe pas en dessous de $Re = 200$ et sa frontière à grand Re semble suivre une ligne $Pm \sim 1$. Pour la gamme de Rm considérée (ici entre 300 et 600), tous les cycles semblent disparaître à petit Pm ($Pm \lesssim 0.5$). Ce comportement fait clairement écho aux résultats de Fromang et al. (2007) et à l'exploration numérique similaire dans les boîtes à grands rapports d'aspect présentée en section 4.2.2. Ce résultat renforce l'idée que les cycles sont directement connectés à la transition dynamo dans son ensemble et nous a donc incités à comprendre les raisons de leur disparition à petit Pm . En particulier nous nous sommes posés les deux questions suivantes :

- Pourquoi pour un Rm fixé, les cycles disparaissent-ils à grand Re ?
- Pourquoi le Rm critique augmente t-il lorsque Re augmente ? (ou de façon équivalente pourquoi le Re critique augmente avec Rm ?)

Comme nous l'avons déjà mentionné, les composantes axisymétriques à grande échelle ($\bar{\mathbf{B}}_0, \bar{\mathcal{E}}_0$) et donc le taux de croissance de la MRI tendent vers une constante sur LB_1 lorsque Re augmente. Une théorie asymptotique quasi-linéaire de la MRI non-axisymétrique et de l'EMF associée ne permet donc pas à elle seule d'expliquer la disparition des cycles à grand Re . Plusieurs pistes de recherches ont été poursuivies pour répondre à ces questions. La première que nous présenterons est basée sur une approche énergétique des cycles et s'est révélée la plus convaincante parmi toutes les pistes étudiées. La deuxième s'est appuyé sur une analyse de la dynamique des ondes non-axisymétriques dans un champ variable dans le temps. Enfin, la dernière est basée sur une étude de l'instabilité principale des cycles, qui n'est pas directement impliqué dans leur disparition à grand Re , même si elle pourrait être reliée aux bifurcations globales responsables de la transition vers le chaos.

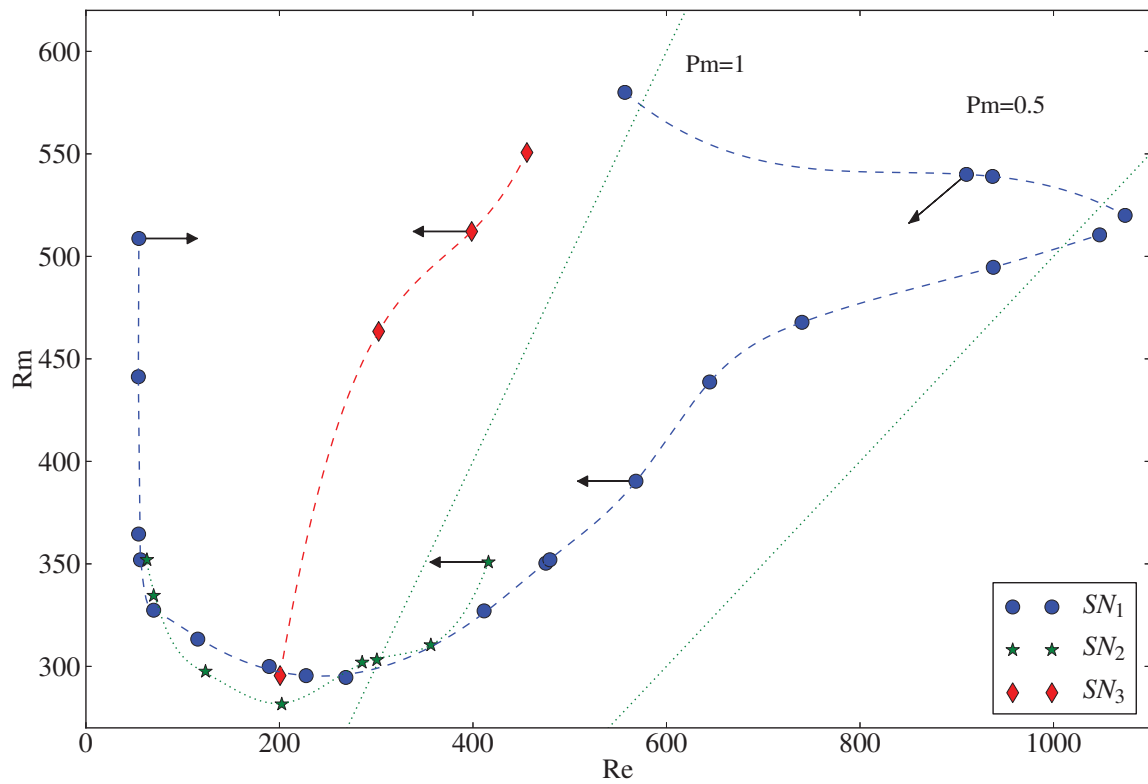


FIGURE 6.2 – Frontières d'existence de SN_1 , SN_2 et SN_3 (lignes pointillées) dans le plan (Re, Rm) . Chaque point sur la frontière correspond à un Re critique ou Rm critique de bifurcation noeud-col obtenu en continuant les cycles. Les flèches noires pointent vers les régions où les cycles existent.

6.2 Étude énergétique et rôle des processus dissipatifs

En examinant des simulations initialisées à partir d'un même état proche de LB_1 , nous nous sommes rendus compte que le champ axisymétrique $\bar{\mathbf{B}}_0$ perdait une quantité importante d'énergie au cours de son renversement lorsque Re augmentait. A grand Re , il peut perdre quasiment la moitié de son énergie sur une demi-période $T_0/2$. Or la dynamo MRI ne peut être entretenue que si le champ support de la MRI est lui-même maintenu pendant une longue période contre la dissipation ohmique. Ce comportement nous a intrigué et nous a incité à étudier le bilan énergétique détaillé des cycles, afin d'identifier la raison de cette perte d'énergie et analyser quantitativement comment ce bilan évolue en Re et Rm . Nous restreignons pour l'instant cette étude au cycle SN_1 dans la boîte de dimensions $(0.7, 20, 2)$. Le cas des boîtes plus courtes sera traité plus tard dans la section 6.4.2.

6.2.1 Bilan énergétique des cycles et rôle de la diffusion turbulente

L'objectif de cette section est de comprendre comment l'énergie produite et dissipée évolue en fonction de Re pour l'une des paires de cycles les plus représentatives, SN_1 .

Dans un premier temps, rappelons que la dynamique non-axisymétrique des cycles repose sur un nombre fini de modes MRI actifs. Dans le cas des boîtes longues, et pour la paire SN_1 , un seul mode MRI dénoté $(\tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{b}}_1)$ est actif, les autres $(\tilde{\mathbf{u}}_j, \tilde{\mathbf{b}}_j)$, avec $j \geq 2$, ne sont pas déstabilisés par la MRI et sont quasiment entièrement esclaves de la dynamique entretenue par $\bar{\mathbf{B}}_0$ et le mode actif. On peut alors décomposer le champ de vitesse et le champ magnétique d'un cycle comme

$$\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}}_0 + \tilde{\mathbf{b}}_1 + \sum_{j \geq 2} \tilde{\mathbf{b}}_j \quad \text{and} \quad \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}_1 + \sum_{j \geq 2} \tilde{\mathbf{u}}_j, \quad (6.1)$$

Dans le cas de SN_1 , $\tilde{\mathbf{u}}_1$ est le mode de vitesse non-axisymétrique trailing de vecteur d'onde $(k_x(t) = Sk_y t, k_y = 2\pi/L_y, k_z = 2\pi/L_z)$ et $\tilde{\mathbf{b}}_1$ est le mode magnétique trailing avec les mêmes nombres d'ondes en x et y mais avec $k_z = 0$. Tous les autres modes ($j \geq 2$) sont des modes à plus petite échelle.

Afin de réaliser le bilan énergétique de SN_1 , nous avons tout d'abord intégré l'équation d'induction (3.3) pour $\bar{\mathbf{B}}_0(z, t) = \hat{B}_0(t) \cos(k_z z)$ sur le volume de la boîte et sur une demi-période $T_0/2 = S^{-1}L_y/L_x$. L'opération d'intégration sera notée $\langle \rangle^t$. Comme l'amplitude du champ axisymétrique varie entre $\hat{B}_0(0)$ et $-\hat{B}_0(0)$ sur une demi-période pour un cycle, son énergie est conservée et on obtient donc le bilan suivant :

$$\boldsymbol{\Omega}_0 + \mathbf{I}_0 + \mathbf{A}_0 + \mathbf{D}_0 = \mathbf{0}, \quad (6.2)$$

avec :

- $\boldsymbol{\Omega}_0 = -S \langle \bar{B}_{0y} \bar{B}_{0x} \rangle^t \mathbf{e}_y$, l'énergie produite par l'étirement des lignes de champ dûe au cisaillement linéaire (effet Ω),

- $\mathbf{I}_0 = \langle \overline{\mathbf{B}_0} \circ \overline{\mathbf{B}} \cdot \nabla \mathbf{u} \rangle^t$, l'énergie échangée avec les fluctuations de vitesses par induction non-linéaire, où \circ est le produit terme à terme de 2 vecteurs (ou produit d' Hadamard).
- $\mathbf{D}_0 = -\eta k_{z_0}^2 \langle \overline{\mathbf{B}_0} \circ \overline{\mathbf{B}_0} \rangle^t$, l'énergie dissipée par effet Joule,
- $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_{01} + \mathbf{A}_{02+}$, l'énergie magnétique échangée avec les autres modes par advection non-linéaire. Elle se décompose en 2 termes, l'un représentant les échanges avec le mode actif MRI, noté \mathbf{A}_{01} et l'autre correspondant à l'énergie transférée aux modes esclaves ($j \geq 2$), noté \mathbf{A}_{02+} . Ces deux termes s'écrivent :

$$\mathbf{A}_{01} = -\langle \overline{\mathbf{B}_0} \circ \overline{\mathbf{u}_1} \cdot \nabla \mathbf{b}_1 \rangle^t, \quad \mathbf{A}_{02+} = -\langle \overline{\mathbf{B}_0} \circ \overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla \overline{\mathbf{B}} \rangle^t - \mathbf{A}_{01}, \quad (6.3)$$

La figure 6.3 (de gauche) montre comment chaque terme de ce bilan d'énergie évolue en fonction de Re pour LB_1 (Rm fixé égal à 390). Nous avons projeté le bilan sur la composante x (en haut) et y (en bas). Notons que le comportement décrit par la suite vaut également pour UB_1 . On remarque que la composante azimutale du champ support de la MRI, \overline{B}_{0y} , perd de l'énergie par dissipation ohmique D_{0y} , mais aussi par transfert advectif, à travers le terme non-linéaire $A_{0y} < 0$. Cette part d'énergie A_{0y} , est redistribuée puis dissipée sur les petites échelles ; elle agit comme une diffusion non-linéaire, ou dite "turbulente" sur le champ \overline{B}_{0y} . L'effet Ω est le seul terme source pour \overline{B}_y , permettant de contrer ces effets dissipatifs. L'induction non-linéaire I_{0y} est ici négligeable (nous verrons plus tard que cette propriété n'est pas généralisable à toutes les configurations de boîtes). Comme \overline{B}_{0y} soutient l'instabilité et que seul l'effet Ω semble contribuer de façon significative à sa régénération, on en déduit que le maintien de \overline{B}_{0x} est primordial pour la dynamo MRI dans son ensemble.

La figure 6.3 (en haut à gauche) indique que \overline{B}_{0x} puise essentiellement son énergie du transfert advectif non-linéaire $A_{01x} > 0$, qui provient des corrélations entre les modes de vitesse et magnétique MRI actifs, $\tilde{\mathbf{u}}_1$ et $\tilde{\mathbf{b}}_1$. L'énergie gagnée est compensée par les pertes par dissipation ohmique directe, via le terme D_{0x} et par advection non-linéaire, via le terme $A_{02x} < 0$. Ce dernier représente l'énergie transférée vers les modes esclaves à petite échelle (de même nature que le terme A_{0y}) et peut être également interprétée comme une diffusion turbulente pour le champ \overline{B}_{0x} . Dans le cas de SN_1 et pour le régime de paramètres étudié, la majeure partie de cette énergie est donnée au mode $\tilde{\mathbf{b}}_2$ de vecteur d'onde ($k_y = k_{y_0}, k_z = 2k_{z_0}$), de sorte que $\mathbf{A}_{02+} \simeq -\mathbf{A}_{20} = -\langle \tilde{\mathbf{b}}_2 \circ \tilde{\mathbf{u}}_1 \cdot \nabla \overline{\mathbf{B}_0} \rangle^t$. De la même façon que pour la composante y , l'induction non-linéaire I_{0x} peut être négligée si bien que $A_{01x} \simeq |D_{0x} + A_{02x}|$. Pour SN_1 , le terme A_{02x} est de l'ordre de 10 à 15% de D_{0x} .

Il apparait donc clairement que l'entretien de \overline{B}_{0x} sur des temps longs repose sur la quantité d'énergie fournie par le mode MRI à travers les corrélations non-linéaires $\tilde{\mathbf{u}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{b}}_1$. Afin de comprendre comment l'énergie est injectée dans le mode MRI et transférée sur \overline{B}_{0x} , nous avons réalisé le même type de bilan énergétique pour la composante magnétique $\tilde{\mathbf{b}}_1$. Ce bilan s'écrit :

$$\mathbf{\Omega}_1 + \mathbf{I}_1 + \mathbf{A}_1 + \mathbf{D}_1 = \langle \tilde{\mathbf{b}}_1 \circ \frac{\partial \tilde{\mathbf{b}}_1}{\partial t} \rangle^t \simeq \mathbf{0}, \quad (6.4)$$

avec :

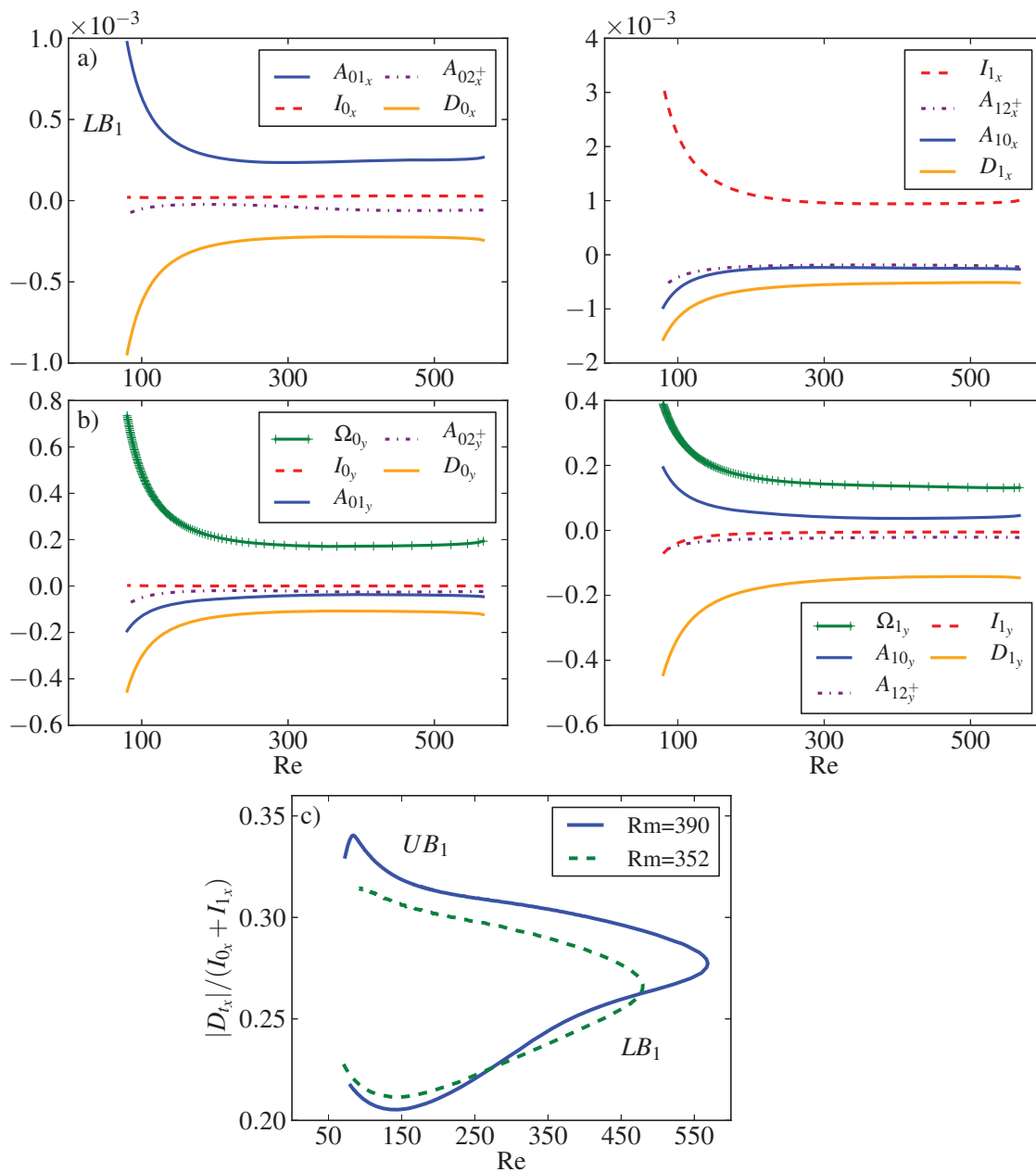


FIGURE 6.3 – Bilan d'énergie magnétique en fonction de Re pour SN_1 . a) Projection en x du bilan pour $\bar{\mathbf{B}}_0$ (à gauche) et pour le mode MRI actif $\tilde{\mathbf{b}}_1$ (à droite) relative à la branche de solutions LB_1 à $Rm = 390$. b) Projections en y de ce même bilan. c) Ratio entre la dissipation D_{tx} et l'énergie injectée sur le champ actif $I_{0x} + I_{1x}$ pour les deux branches.

- $\Omega_1 = -S\langle\tilde{b}_{1_y}\tilde{b}_{1_x}\rangle^t \mathbf{e}_y$, l'énergie produite par induction linéaire dûe au cisaillement,
- $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{1L} + \mathbf{I}_{1NL}$, où $\mathbf{I}_{1L} = \langle\tilde{\mathbf{b}}_1 \circ \overline{\mathbf{B}}_0 \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}_1\rangle^t$ est l'énergie résultant de l'induction "linéaire" entre $\tilde{\mathbf{u}}_1$ et $\overline{\mathbf{B}}_0$, processus central dans la MRI, et \mathbf{I}_{1NL} l'induction non-linéaire provenant des modes de vitesse petites échelles $j \geq 2$,
- $\mathbf{D}_1 = -\eta\langle(k_x(t)^2 + k_{y_0}^2)\tilde{\mathbf{b}}_1 \circ \tilde{\mathbf{b}}_1\rangle^t$, l'énergie dissipée par effet Joule,
- $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_{10} + \mathbf{A}_{12+}$, l'énergie magnétique échangée avec les autres modes à travers l'advection non-linéaire. Elle se décompose de nouveau en 2 termes, $\mathbf{A}_{10} = -\mathbf{A}_{01} < 0$ correspondant à l'énergie transférée vers $\overline{\mathbf{B}}_0$, et \mathbf{A}_{12+} l'énergie transférée vers les petites échelles magnétiques ($j \geq 2$).

Notons que l'énergie des composantes non-axisymétriques considérées ($k_x = Sk_y t$) n'est pas strictement conservée au bout d'une demi-période. Initialement leur énergie est très faible, proche de 0; après avoir été amplifiées par la MRI, leur énergie retombe à une valeur proche de 0 du fait de la dissipation. Les deux valeurs initiale à $t = 0$ et finale à $t = T_0/2$, n'ont pas de raison d'être identiques, mais leur valeur est très faible par rapport à l'énergie apportée durant la phase d'amplification (voir évolution de l'énergie des ondes non-axisymétriques sur la figure 4.11).

La figure 6.3 (à droite) illustre le bilan d'énergie magnétique décrit par l'équation (6.4). On remarque que l'énergie apportée sur les deux composantes x et y de $\tilde{\mathbf{b}}_1$ provient respectivement des termes d'induction I_{1_x} et Ω_{1_y} . Pour la composante radiale \tilde{b}_{1_x} , une partie de l'énergie perdue vient du terme de dissipation linéaire D_{1_x} , une autre du transfert \mathbf{A}_{10_x} permettant d'alimenter le champ \overline{B}_{0_x} et le reste du transfert advectif non-linéaire $A_{12_x^+}$ vers les petites échelles. Ce dernier terme est associé à la diffusion turbulente du mode magnétique MRI. L'énergie est en grande partie transférée vers le mode trailing magnétique dénoté $\tilde{\mathbf{b}}_3$ de vecteur d'onde ($k_y = 2k_{y_0}, k_z = 0$) de sorte que $\mathbf{A}_{12+} \simeq -\mathbf{A}_{31} = -\langle\tilde{\mathbf{b}}_3 \circ \tilde{\mathbf{u}}_1 \cdot \nabla \tilde{\mathbf{b}}_1\rangle^t$. La dissipation associée à \mathbf{A}_{12+} sera d'autant plus forte que les corrélations $\tilde{\mathbf{u}}_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1$ seront importantes et donc que la MRI sera forte.

En sommant les deux équations (6.2) et (6.4) pour éliminer le terme de transfert \mathbf{A}_{10_x} , on obtient la relation projetée sur x :

$$I_{0_x} + I_{1_x} \simeq |D_{0_x} + D_{1_x}| + |A_{02_x^+} + A_{12_x^+}|, \quad (6.5)$$

Cette relation représente la projection en x du bilan global d'énergie magnétique des composantes actives du champ, $\overline{B}_{0_x} + \tilde{b}_{1_x}$ pour SN_1 . Elle traduit le fait que l'excitation de la dynamo MRI nécessite que l'énergie apportée par induction sur la composante radiale $I_{0_x} + I_{1_x}$ soit suffisante pour contrer la somme de la dissipation laminaire $D_{0_x} + D_{1_x}$ et de la dissipation dite "turbulente", $D_{t_x} = A_{02_x^+} + A_{12_x^+}$.

Comment ce bilan global sur le champ $\overline{B}_{0_x} + \tilde{b}_{1_x}$ évolue t-il en fonction de Re pour la paire de cycles SN_1 ? La figure 6.3c) représente le ratio entre la dissipation "turbulente" $|D_t|$ et l'énergie total injectée dans le système $I_{0_x} + I_{1_x}$ (via la MRI essentiellement) en fonction de Re et pour

deux valeurs différentes de Rm . Pour la upper branch UB_1 , ce ratio est nettement plus important que pour LB_1 . La raison principale de cette différence vient du fait que l'amplitude de $\bar{\mathbf{B}}_0$ sur UB_1 est plus grande et donc que les modes $\tilde{\mathbf{b}}_1$ et $\tilde{\mathbf{u}}_1$ sont amplifiées plus fortement (la MRI sur SN_1 est toujours dans un régime de champ faible où le taux de croissance $\gamma \simeq \sqrt{3}k_y\bar{B}_{0y}$ est directement proportionnel à \bar{B}_{0y}). En conséquence les non-linéarités et en particulier le terme \mathbf{A}_{12+} sont plus forts sur UB_1 que sur LB_1 . On voit que le ratio $|D_t|/(I_{0x} + I_{1x})$ diminue très légèrement avec Re pour UB_1 . Aucune interprétation ne peut être réellement tirée de cette branche car l'amplitude du champ \bar{B}_{0y} varie trop fortement sur toute la gamme de Re considérée. L'effet direct du Re sur le bilan d'énergie de UB_1 ne peut donc pas être identifié simplement. En revanche sur LB_1 , les courbes de continuation de la figure 6.1 nous montrent que \bar{B}_{0y} et globalement toutes les composantes axisymétriques du cycle tendent vers une valeur asymptotique lorsque $Re \gtrsim 400$, ce qui suggère un régime asymptotique pour le taux de croissance et l'injection d'énergie par la MRI. Le ratio $|D_t|/(I_{0x} + I_{1x})$ augmente d'environ 50% entre $Re = 70$ et $Re = 550$ (pour $Rm = 390$), ce qui suggère qu'une plus grande partie de l'énergie injectée sur $\bar{B}_{0x} + \tilde{b}_{1x}$ est perdue sous forme de dissipation "turbulente" lorsque Re augmente. Comme la MRI est asymptotique à grand Re , il semble que l'injection I_{1x} ne puisse plus compenser cette dissipation additionnelle au delà d'un certain Re et la branche de solution LB_1 cesse alors d'exister.

L'interprétation que l'on peut donner de ce résultat est que l'augmentation de Re a pour effet d'exciter des modes de vitesse plus vigoureux (et à petite échelle), qui en advectant le champ magnétique actif, vont avoir tendance à produire des petites échelles magnétiques dissipées efficacement. Cela résulte de manière effective en une forme de diffusion magnétique turbulente. Une augmentation de Re entraîne par ailleurs des oscillations épicycliques du mode actif grand échelle $\tilde{\mathbf{u}}_1$ dans les boîtes allongées (nous le verrons en section 6.5). Ces oscillations peuvent impacter directement le terme d'échange \mathbf{A}_{10} et indirectement les termes de dissipation turbulente \mathbf{A}_{02+} et \mathbf{A}_{12+} . Dans le cas de SN_1 , les courbes de la figure 6.3 indiquent que le transfert \mathbf{A}_{10} n'est pas particulièrement affecté à grand Re , ce qui suggère que ces oscillations ont un impact très limité sur le bilan énergétique, du moins dans la gamme de \bar{B}_{0y} assez faible caractérisant le cycle SN_1 à grand Re .

6.2.2 Extinction de la dynamo et dépendance en Rm

Dans la section précédente, nous avons montré que la disparition des cycles à grand Re est probablement liée à une augmentation de la diffusion/dissipation turbulente affectant le champ magnétique actif $\bar{\mathbf{B}}_0 + \tilde{\mathbf{b}}_1$. Cependant cela n'explique pas complètement la dépendance en Pm de la transition et en particulier l'augmentation du Rm critique Rm_{cl} avec Re , observé sur la figure 6.2. L'analyse du bilan énergétique des cycles en Rm s'est révélée infructueuse pour comprendre directement l'influence de ce paramètre car les variations importantes de l'amplitude de $\bar{\mathbf{B}}_0$ avec Rm (voir figure 6.1) biaise ¹ l'interprétation physique du ratio $|D_t|/(I_{0x} + I_{1x})$. L'idée a donc été de comparer les bilans énergétiques de simulations un peu plus génériques (mais proches des cycles) en fonction de Re et Rm en contrôlant l'amplitude \hat{B}_0 du champ axisymétrique. Cette méthode permet d'identifier plus clairement l'effet direct du Re , du Rm et de la quantité d'énergie initiale injectée, sur le bilan énergétique. Les simulations que nous avons réalisées sont initialisées de la même manière, avec un champ $\bar{\mathbf{B}}_0 = \hat{B}_0(0.04\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) \cos(k_z z)$ et des perturba-

¹Toute modification de $\bar{\mathbf{B}}_0$ ayant également pour conséquence de modifier le taux d'injection par la MRI en raison de la dépendance linéaire du taux de croissance MRI en $\bar{\mathbf{B}}_0$.

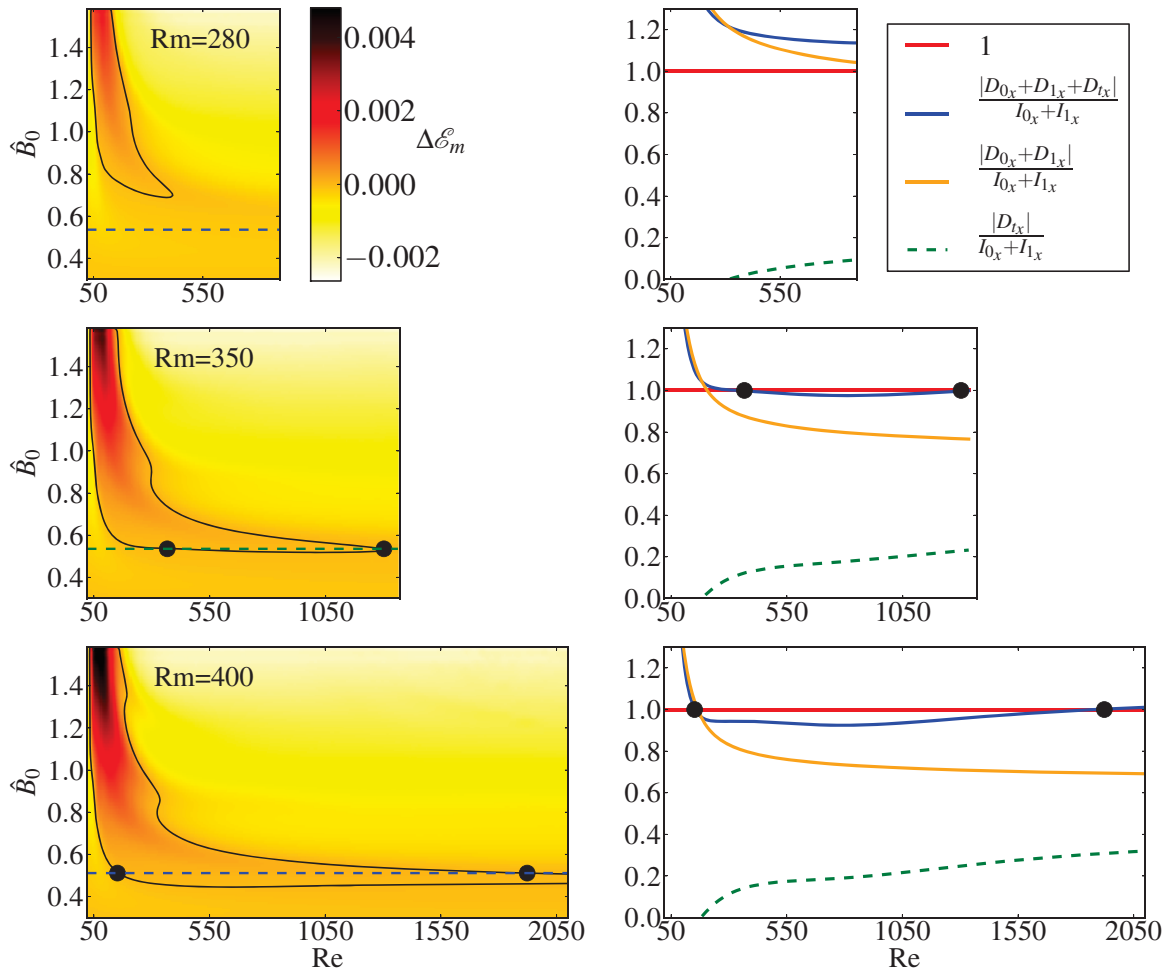


FIGURE 6.4 – Bilan d'énergie magnétique pour des simulations initialisées aléatoirement (sauf l'amplitude initiale du champ axisymétrique \hat{B}_0 qui est contrôlée). Le bilan est intégré sur une demi-période $T_0/2$ pour 3 valeurs différentes de Rm . A gauche : énergie nette $\Delta\mathcal{E}_m$ gagnée par $\overline{B_{0,x}}$ en fonction de Re et \hat{B}_0 . L'iso-contour $\Delta\mathcal{E}_m = 0$ est représenté par une courbe noire. L'intersection entre cette courbe et la ligne $\hat{B}_0 \sim 0.52$ est marquée par 2 points noirs. A droite : termes de dissipation et d'injection apparaissant dans l'équation (6.6), normalisés par $I_{0_x} + I_{1_x}$, en fonction de Re , pour $\hat{B}_0 \sim 0.52$.

tions non-axisymétriques, générée à partir d'un paquet de modes trailing ($|k_y| = k_{y0}$, $k_x(0) = 0$ et plusieurs k_z) d'amplitudes aléatoires et faibles. Le ratio $\overline{B}_{0x}/\overline{B}_{0y} = 0.04$ est représentatif de LB_1 et assure que Ω_{0y} est de l'ordre de D_{0y} . Bien que les composantes non-axisymétriques initiales soient générées de façon aléatoire, la structure de cette condition initiale reste proche dans l'espace des phases de LB_1 .

Cet état initial a été intégré à l'aide de SNOOPY pour différentes valeurs de Re , Rm et \hat{B}_0 , pendant une demi-période. Pour chacune de ces simulations on observe un retournement du champ magnétique. Comme nous ne simulons pas un état cyclique, la valeur finale de l'amplitude de $\overline{\mathbf{B}}_0$ n'est pas forcément $-\hat{B}_0$ car le champ perd ou gagne une certaine quantité d'énergie durant $T_0/2$. Les cartes de la figure 6.4 (à gauche) représentent le différentiel d'énergie

$$\Delta\mathcal{E}_m \simeq I_{0x} + I_{1x} - |D_{0x} + D_{1x} + D_{tx}| \quad (6.6)$$

gagné ou perdu par \overline{B}_{0x} , en fonction de Re et de l'amplitude initial \hat{B}_0 , pour trois Rm différents². Dans toutes les simulations réalisées ici, I_{0x} reste toujours très faible devant I_{1x} . On remarque que l'iso-contour $\Delta\mathcal{E}_m = 0$ forme une courbe très similaire aux courbes de continuation en Re des cycles SN_1 , SN_2 ou SN_4 . Dans tous les cas, il existe un intervalle de Re pour lequel \overline{B}_{0x} gagne plus d'énergie qu'il n'en perd ($\Delta\mathcal{E}_m > 0$) et cet intervalle s'élargit à mesure que Rm augmente. Le Re critique pour lequel le champ axisymétrique radial gagne de l'énergie sur une demi-période passe de 420 pour $Rm = 280$ à environ 2100 pour $Rm = 400$. Il semble donc que l'expérience capture l'essentiel de la physique que nous cherchons à étudier.

La figure 6.4 (à droite) représente l'évolution en fonction de Re des différents termes du bilan d'énergie (6.6), normalisés par $I_{0x} + I_{1x}$, pour une valeur de $\hat{B}_0 \simeq 0.52$ (ligne en pointillé bleue). Pour $Rm = 350$ et $Rm = 400$, cette valeur de \hat{B}_0 correspond au niveau d'injection pour lequel la dynamique est entretenue sur la plus large gamme en Re . Ces courbes nous indiquent qu'à $Rm = 280$, le système perd plus d'énergie qu'il n'en gagne, quelque soit le Re considéré. A plus grand $Rm = 350$, les deux points noirs délimitent l'intervalle dans lequel \overline{B}_{0x} gagne de l'énergie sur $T_0/2$. Pour $Re < 320$, l'énergie induite par la MRI n'est pas suffisante car celle-ci est affaiblie par les effets visqueux. A plus grand Re , le ratio $|D_{0x} + D_{1x}|/(I_{0x} + I_{1x})$ tend vers une constante (la MRI atteint son régime asymptotique en Re). En revanche, et c'est le point le plus important, le ratio $|D_{tx}|/(I_{0x} + I_{1x})$ continue d'augmenter. Nous avons vérifié que $I_{0x} + I_{1x}$ est en réalité quasi-constant dans ce régime de Re et que c'est bien la dissipation turbulente qui varie le plus fortement avec Re . Au delà de $Re = 1300$, l'énergie magnétique perdue via D_{tx} devient trop grande et le champ axisymétrique ne peut plus être maintenu au cours du temps.

A plus grand $Rm = 400$, (et toujours pour la valeur fixée de $\hat{B}_0 \simeq 0.52$) le même scénario semble se dessiner, mais le Re critique au delà duquel la dynamique n'est plus soutenue est clairement supérieur à celui obtenu pour $Rm = 350$. Comment expliquer que ce Re critique augmente avec Rm ? On remarque que le ratio $|D_{0x} + D_{1x}|/(I_{0x} + I_{1x})$ (courbes oranges), tend vers une valeur qui diminue lorsque Rm augmente (on passe successivement de 1, à 0.8, puis 0.7 pour $Rm = 280, 350$ et 400). Si l'on regarde ces deux termes en détails, on remarque en fait que l'induction I_{1x} augmente avec Rm relativement à $|D_{1x} + D_{0x}|$. En fait la MRI (sont

²il n'y a pas égalité stricte entre $\Delta\mathcal{E}_m$ et $I_{0x} + I_{1x} - |D_{0x} + D_{1x} + D_{tx}|$ car le différentiel d'énergie associé à b_{1x} est formellement non-nul, même si il reste très faible en pratique (voir équation 6.4)

aux de croissance) n'est vraisemblablement pas encore asymptotique vis à vis de Rm dans le régime transitionnel étudié et la part relative de dissipation ohmique laminaire dans le bilan énergétique diminue lorsque Rm augmente. Cet effet compense partiellement l'augmentation de dissipation turbulente et décale la disparition de la dynamo vers des plus grands Re lorsque Rm augmente. Notons que cela suppose que D_{t_x} n'augmente pas trop en Rm (à Re fixé), ce qui est le cas d'après nos simulations.

6.2.3 Conclusion intermédiaire

En se basant sur une analyse énergétique des cycles de dynamo MRI et de simulations plus génériques dans le régime transitionnel, nous avons pu montrer quantitativement que les transferts magnétiques à petite échelle, interprétés comme une diffusion effective du champ actif grande échelle, augmentent de façon importante à grand Re . Une partie de l'énergie gagnée à travers la MRI se retrouve perdue par ces transferts, agissant comme une dissipation "turbulente" faiblement non-linéaire. Nous mettons entre guillemets le terme turbulent car les transferts observés pour les cycles de dynamo se font tout de même entre des modes à relativement grande échelle et pour des champs de vitesse qu'on ne peut pas qualifier de complètement turbulents. Il est important de souligner que cette diffusion n'est pas à strictement parler identique à celle de la théorie de dynamo de champ moyen (se manifestant à travers le terme $-\beta_m \nabla \times \mathbf{B}$ de l'équation (1.19)). De plus dans notre cas, les fluctuations du champ de vitesse, à l'origine du terme de diffusion de champ moyen, ne sont pas imposées et sont excitées indirectement par la MRI (via la cascade turbulente). L'augmentation de Rm ne semble pas diminuer l'effet de la dissipation turbulente, mais permet une injection plus grande d'énergie et une dissipation laminaire plus faible du champ actif. Cela permet de compenser la plus grande diffusion "turbulente" de ce champ, et par conséquent de maintenir la dynamo à plus grand Re (alternativement on peut voir qu'une augmentation de Re nécessite d'aller à plus grand Rm pour contrer cet effet dissipatif, expliquant ainsi l'augmentation du Rm critique avec Re).

La mise en évidence de cet effet constitue le principal résultat de pertinence astrophysique de ce travail. Nous verrons en section 6.4.2 qu'il semble pouvoir être généralisé au cas des boîtes courtes. Mais avant cela, nous présenterons deux autres pistes suivies durant cette thèse pour expliquer la dépendance de la transition au Pm .

6.3 Autres mécanismes physiques étudiés en boîte longue

6.3.1 Dynamique inertielle des ondes non-axisymétriques

Nous présentons dans cette section une autre piste suivie pour expliquer la disparition des cycles à petit Pm dans la boîte allongée de dimensions (0.7, 20, 2). Celle-ci a été étudiée, durant la thèse, bien avant l'analyse énergétique de la section précédente et s'appuie sur une analyse de la dynamique des ondes non-axisymétriques, même si des liens existent entre les deux approches. Nous verrons cependant que cette étude possède un certain nombre de limites qui seront discutées à la fin de la section.

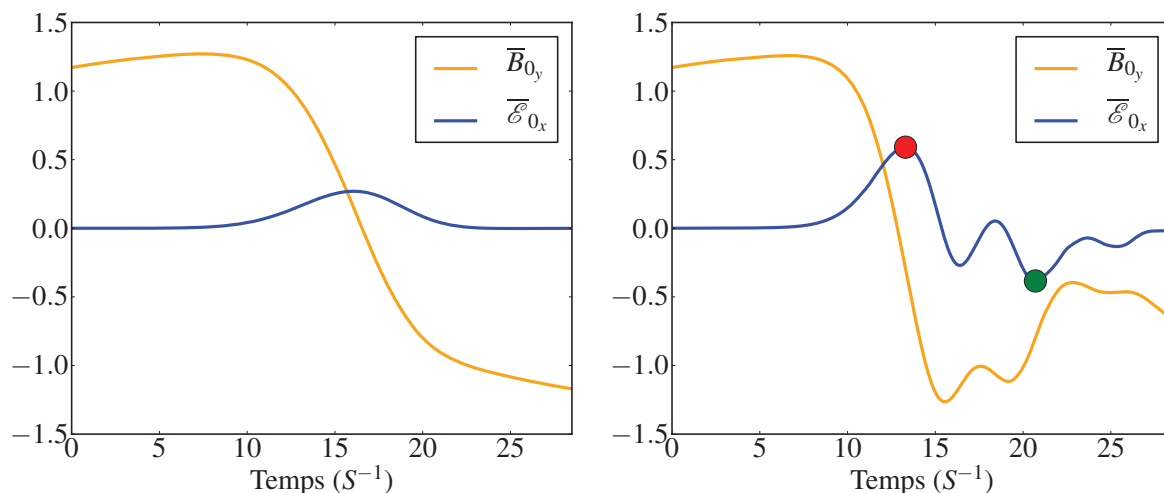


FIGURE 6.5 – Evolution temporelle de \overline{B}_{0_y} (courbe orange) et de $\overline{\mathcal{E}}_{0_x}$ (courbe bleue) durant une demi-période $T_0/2$ de LB_1 . A gauche : simulation dont l'état initial est celui de LB_1 à $Re=60$ et $Rm=352$. A droite : simulation initiée à partir du même état pour $Re=400$. Les ronds pleins rouge et vert indiquent respectivement le pic primaire d'EMF responsable du retournement de $\overline{\mathbf{B}}_0$ et le pic secondaire le plus important associé aux oscillations.

i) Oscillations de la force électromotrice à grand Re

L'analyse de la dynamique des cycles en boîte longue montre qu'une augmentation de Re a tendance à faire osciller temporellement la force électromotrice (EMF) et les ondes non-axisymétriques associées, après le retournement du champ $\overline{\mathbf{B}}_0$. Pour le voir, une première expérience simple a consisté à prendre une condition initiale sur le cycle LB_1 pour un Re faible, à $Rm = 352$ fixé, et à l'intégrer pour un Re beaucoup plus grand. La figure 6.5 permet de comparer l'évolution temporelle de l'EMF axisymétrique $\overline{\mathcal{E}}_{0_x}$ (projection sur la première composante de Fourier en z) et du champ \overline{B}_{0_y} entre la simulation du cycle à $Re = 60$ et une simulation partant du même état à $Re = 400$. Dans les 2 cas, le champ \overline{B}_{0_y} se retourne sous l'effet de $\overline{\mathcal{E}}_{0_x}$, indiquant que le processus de rétroaction non-linéaire de la dynamo MRI ne semble pas affecté. Cependant, dans le cas $Re = 400$, de fortes oscillations sont visibles à la fois sur l'EMF et sur le champ axisymétrique. Ces oscillations apparaissent après le retournement de \overline{B}_{0_y} , dans la phase trailing avancée des ondes non-axisymétriques ($k_x(t) \gg k_y$). Leur fréquence est de l'ordre de la fréquence épicyclique κ , égale à $2/3 S$ dans le cas Képlérien. Nous avons également observé ces oscillations pour les paires de cycles SN_2 et SN_4 , pour lesquelles l'amplitude des oscillations peut atteindre jusqu'à 20% (respectivement 30%) du pic d'EMF primaire, associé au retournement de $\overline{\mathbf{B}}_0$. Dans le cas de SN_1 , celles-ci sont moins visibles mais une bosse secondaire d'EMF apparaît malgré tout lorsque Re augmente et peut atteindre 15% du pic primaire d'EMF. Nous avons pensé que ces oscillations pourraient être nuisibles à la dynamo pour 2 raisons :

- d'une part elles produisent des variations importantes du champ support de la MRI, \overline{B}_{0_y} , sur des échelles de temps comparables à celle de la MRI. Si la cohérence temporelle de ce champ n'est plus assurée, il est possible que les ondes non-axisymétriques ne soient plus am-

plifiées de façon optimale par l'instabilité. Dans l'expérience décrite ci dessus à $Re = 400$, nous avons notamment observé que l'onde active associée à la seconde demi-période n'est pas (ou peu) amplifiée, ce qui se traduit par une décroissance rapide du champ de dynamo \overline{B}_{0y} . Il n'est cependant pas évident de prouver quantitativement que les oscillations de \overline{B}_{0y} observées affectent directement la croissance MRI de cette onde.

- d'autre part, on remarque que le champ \overline{B}_{0y} perd de l'énergie entre 0 et $T_0/2$ pour la simulation à $Re = 400$ de la figure 6.5. Il se peut que les oscillations d'EMF soient liées en partie à cette perte d'énergie. Elles pourraient jouer un rôle dans la dissipation "turbulente" mise en évidence dans la section précédente. Elles impactent notamment la composante y du transfert advectif A_{0y} lorsque le champ $\overline{\mathbf{B}}_0$ est d'amplitude suffisamment forte (ce qui n'était pas le cas pour SN_1 où le champ axisymétrique était d'amplitude plutôt faible)

ii) Origine physique des oscillations d'EMF

L'étude de la physique de ces oscillations nous a semblé intéressante pour deux raisons : tout d'abord elle pourrait permettre de mieux comprendre la dépendance de la dynamo au régime de dissipation. D'autre part, elle pourrait offrir une analyse de la dynamique des ondes non-axisymétriques lorsque le champ support de l'instabilité est non-uniforme et non-constant, problème qui n'a jamais été étudié à ce jour.

Notre analyse sera basée sur l'étude de deux simulations. La première a pour état initial le cycle LB_2 à $Re = 163$ et $Rm = 352$. La deuxième est initialisée avec un $\overline{\mathbf{B}}_0$ donné et un paquet d'ondes non-axisymétriques trailing ($k_x(0) = 0, k_y = k_{y0} = 2\pi/L_y$) d'amplitudes aléatoires et de k_z différents, pour $Re = 300$ et $Rm = 300$. L'évolution temporelle de ces deux simulations est illustrée sur la figure 6.6. La première rangée de courbes en a) représente l'évolution de $\overline{\mathcal{E}}_{0x}$ et de \overline{B}_{0y} sur une demi-période $T_0/2$. Pour chacune des deux simulations, on voit clairement apparaître des oscillations de ces deux quantités après le retournement de \overline{B}_{0y} . Pour la deuxième simulation (initialisée avec une condition aléatoire), les bosses secondaires d'EMF les plus importantes atteignent 80% du pic primaire associé au retournement.

Dans notre configuration, la rétroaction non-linéaire $\partial\overline{\mathcal{E}}_0/\partial z$ associée à l'EMF axisymétrique est dominée par le terme d'advection $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{b}}$, où $\tilde{\mathbf{u}}$ et $\tilde{\mathbf{b}}$ sont les composantes non-axisymétriques du champ de vitesse et magnétique. Comme $\tilde{b}_z \ll \tilde{b}_x$ et $\tilde{b}_z \ll \tilde{b}_y$ (pour une dynamique dans le sous-espace \mathcal{A}_1), l'EMF axisymétrique s'écrit donc :

$$\overline{\mathcal{E}}_{0x} \simeq -\overline{\tilde{u}_z \tilde{b}_y}, \text{ et } \overline{\mathcal{E}}_{0y} \simeq \overline{\tilde{u}_z \tilde{b}_x}. \quad (6.7)$$

Nous rappelons que $\overline{\mathcal{E}}_{0x}$ (respectivement $\overline{\mathcal{E}}_{0y}$) affecte directement \overline{B}_{0y} (respectivement \overline{B}_{0x}). Dans les deux simulations présentées ici (et de façon plus générale dans le régime de Re et Rm considérés ici), les modes non-axisymétriques, du champ de vitesse et magnétique, $\tilde{\mathbf{u}}_1$ et $\tilde{\mathbf{b}}_1$, de vecteurs d'onde respectifs

$$k_x(t) = Sk_y t, \quad k_y = 2\pi/L_y, \quad k_z = 2\pi/L_z,$$

et

$$k_x(t) = Sk_y t, \quad k_y = 2\pi/L_y, \quad k_z = 0.$$

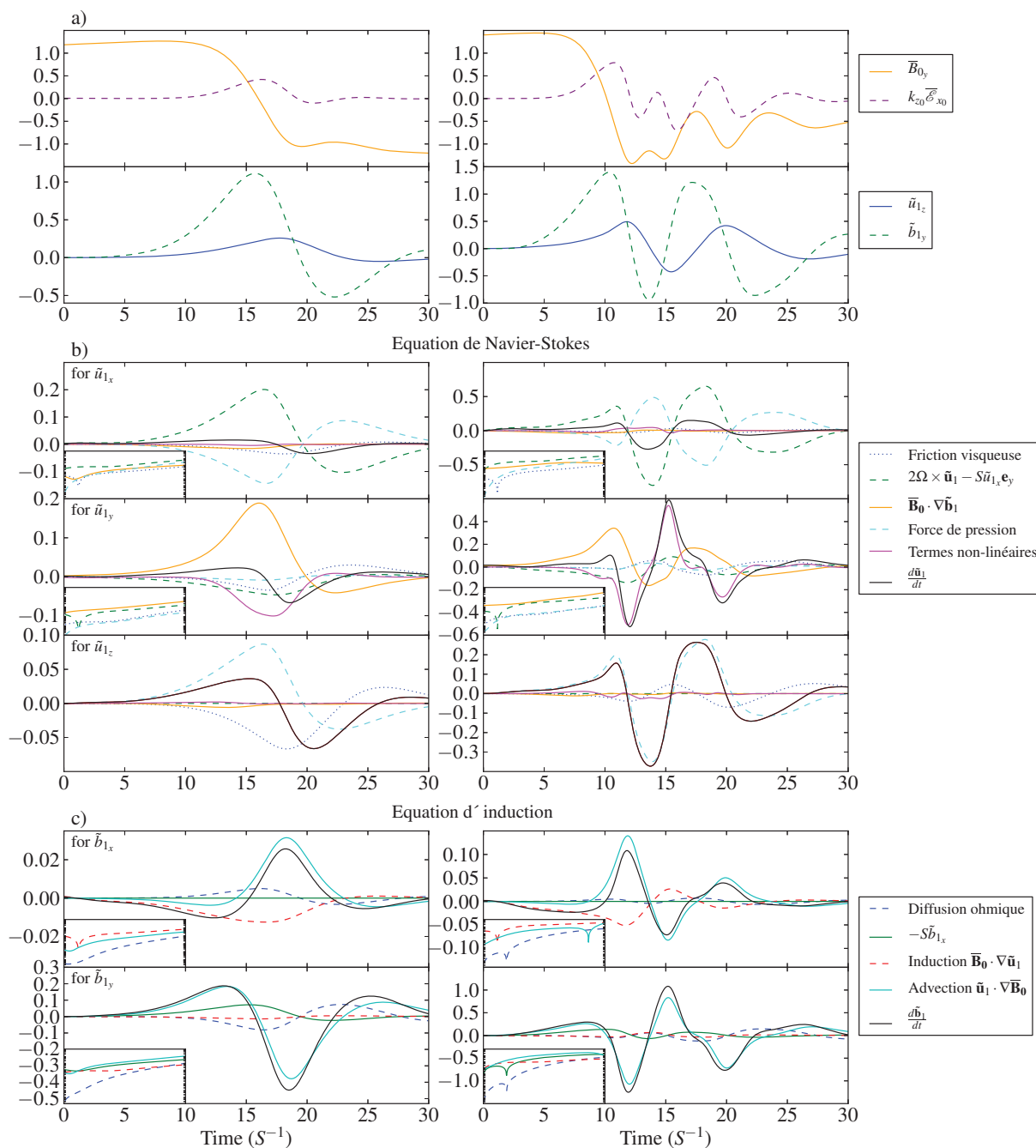


FIGURE 6.6 – A gauche : simulation de LB_2 pour $Re = 163$ et $Rm = 352$; à droite : simulation initialisée avec un condition aléatoire pour $Re = 300$ et $Rm = 300$. a) Evolution temporelle de $\bar{B}_{0,y}$, $\bar{\mathcal{E}}_{0,x}$, $\tilde{u}_{1,z}$ et $\tilde{b}_{1,y}$ sur une demi-période $T_0/2$. b) Projections en x , y et z des termes de l'équation de Navier-Stokes pour le mode de vitesse non-axisymétrique dominant $k_y = 2\pi/L_y$ et $k_z = 2\pi/L_z$. c) Projections en x , y des termes de l'équation d'induction pour le mode magnétique non-axisymétrique fondamental $k_y = 2\pi/L_y$ et $k_z = 0$. Les figures incluses en bas des courbes pour les composantes x et y représentent l'évolution de ces mêmes quantités dans une échelle logarithmique et pour les 10 premiers temps de cisaillement S^{-1} .

contribuent de façon majoritaire à l'EMF et sont les seuls à être amplifiés par la MRI. La figure 6.6a) montre l'évolution temporelle de \tilde{u}_{1z} et \tilde{b}_{1y} . Ces modes sont amplifiés quasi-exponentiellement par la MRI durant un temps de $\sim 10 S^{-1}$, atteignent un maximum et décroissent ensuite en oscillant. La pseudo-période associée aux oscillations est d'environ $10 S^{-1}$ mais semble en réalité augmenter avec le temps.

Afin de comprendre la dynamique de ces perturbations, nous avons représenté sur la figure 6.6b) les différents termes physiques des équations de la MHD intervenant dans l'évolution de \tilde{u}_{1x} , \tilde{u}_{1y} , \tilde{u}_{1z} et \tilde{b}_{1x} , \tilde{b}_{1y} . Les équations d'évolution pour ces perturbations correspondantes sont données en annexe C. Pour $t < 10 S^{-1}$, on remarque que l'évolution de ces composantes est quasi exponentielle (voir figures en échelle logarithmique insérées en bas à gauche). La partie linéaire de la tension magnétique $\overline{\mathbf{B}}_0 \cdot \nabla \tilde{\mathbf{b}}_1$ domine l'évolution de \tilde{u}_{1y} alors que \tilde{u}_{1x} est dominée par le terme de Coriolis et le gradient de pression, qui sont de signes opposés. Lorsque la tension magnétique azimuthale est positive, \tilde{u}_{1x} est aussi positif, indiquant que les particules fluides, accélérées, migrent vers des x plus grands (orbites plus hautes dans une représentation cylindrique). La tension magnétique radiale et verticale est très faible en comparaison des autres forces. Toujours pour $t < 10 S^{-1}$, l'évolution des composantes magnétiques \tilde{b}_{1x} et \tilde{b}_{1y} est dominée respectivement par le terme d'induction et le terme de cisaillement $-S\tilde{b}_{1x}$. Tous les comportements que nous venons de décrire sont la signature d'une phase de croissance MRI des perturbations non-axisymétriques.

Puis, au moment du retournement de $\overline{\mathbf{B}}_0$, le champ de vitesse non-axisymétrique, sous l'effet du cisaillement, prend la forme de tourbillons poloidaux qui advectent le champ support de la MRI (voir figure 4 de Herault et al. (2011)). En raison de l'incompressibilité, une grande partie de la vitesse en x est transférée sur la composante z .

Pour $t > 10S^{-1}$, la croissance exponentielle de ces perturbations s'arrête. La tension magnétique azimuthale, initialement déstabilisante décroît soudainement pour $t \simeq 16 S^{-1}$ dans le cas de la première simulation et $t \simeq 13 S^{-1}$ pour la seconde. Le signe de la tension magnétique change et devient identique à celui de la force de Coriolis, ce qui contraste avec le phase de croissance MRI. Comment expliquer cette décroissance de la tension magnétique? Les courbes de la figure 6.6c) montre que l'évolution des perturbations magnétiques \tilde{b}_{1x} et \tilde{b}_{1y} est dominée par le terme d'advection $\tilde{u}_z \partial_z \overline{\mathbf{B}}_0$. Ces perturbations deviennent donc esclaves de la dynamique du champ axisymétrique à travers la relation

$$d\tilde{\mathbf{b}}_1/dt \simeq k_{z0} \tilde{u}_{1z} \overline{\mathbf{B}}_0, \quad (6.8)$$

avec $k_{z0} = 2\pi/L_z$. Puisque $\overline{\mathbf{B}}_0$ change de polarité et que \tilde{u}_{1z} garde un signe constant, l'amplitude de $\tilde{\mathbf{b}}_1$ est nécessairement décroissante. La tension magnétique azimuthale proportionnelle à \tilde{b}_{1y} se comporte alors de la même manière. On voit donc que la dynamique non-linéaire du champ support a pour premier effet d'inhiber la MRI.

Lorsque la phase trailing de l'onde est bien avancée ($k_x \gg k_y$), la tension azimuthale devient faible devant les termes inertiels et le champ de vitesse oscille. Pour les deux simulations, les oscillations du champ de vitesse radial et azimuthal sont dues au terme de Coriolis (combiné au cisaillement) et au terme non-linéaire $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$. La domination des termes inertiels aux temps longs peut être comprise en regardant l'évolution de la pulsation d'Alfvén instantanée,

$$\omega_A(t) = k_y \overline{B}_{0y}(t) + k_x(t) \overline{B}_{0x}(t), \quad (6.9)$$

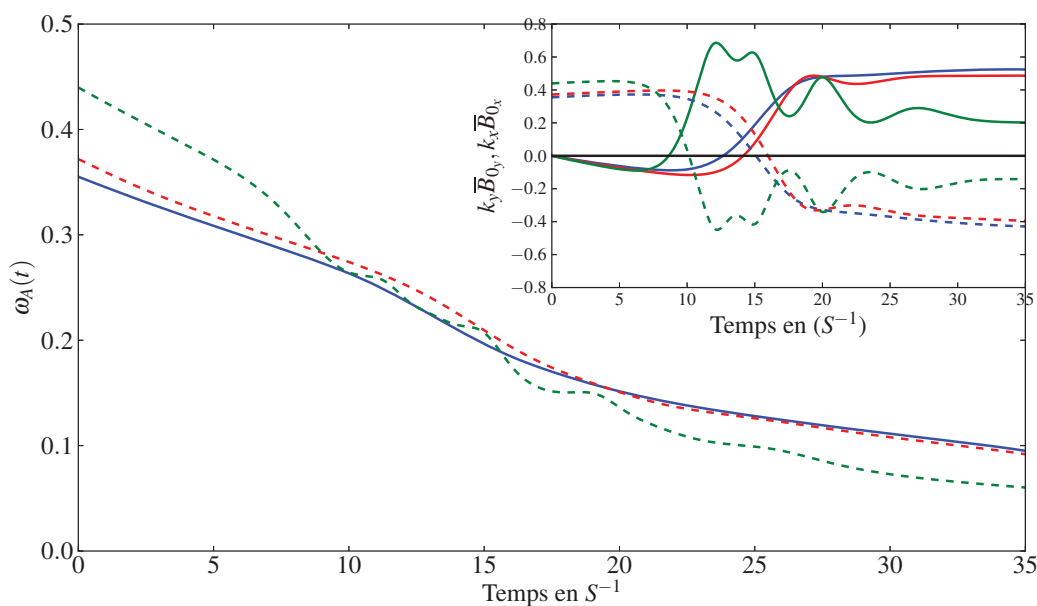


FIGURE 6.7 – Evolution temporelle de la pulsation d'Alfven associée aux ondes de cisaillement $\tilde{\mathbf{u}}_1$ et $\tilde{\mathbf{b}}_1$. Les courbes rouge et vert pointillées correspondent aux simulations de la figure 6.6. Pour comparaison, la courbe pleine bleue correspond au cycle LB_1 à $Re = 70$ et $Rm = 352$. La figure insérée en haut représente l'évolution de $k_y \bar{B}_{0y}$ (ligne pleine) et $k_x \bar{B}_{0x}$ (ligne pointillée).

associée à l'onde non-axisymétrique, au cours du temps. La figure 6.7 montre que ω_A décroît durant la phase trailing, passant de 0.4 à une valeur $\lesssim 0.1$, bien inférieure à la fréquence épicyclique $\kappa = 2/3$. Cette décroissance de ω_A est due au fait que le champ $\bar{\mathbf{B}}_0$ évolue dynamiquement dans ce problème³. Le mode propre instable de taux de croissance $\gamma \simeq \sqrt{3}\omega_A$ (puisque $\omega_A < \kappa$), croit en fait très lentement par rapport au mode propre stable oscillant. Ce mode fait osciller l'écoulement à la fréquence épicyclique, même si le mouvement, influencé par le terme $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$, est en réalité plus complexe à analyser.

iii) Dépendance des oscillations à la dissipation

Afin de quantifier l'effet de ces oscillations inertielles sur la dynamique et mieux comprendre leur dépendance en Re et Rm , nous avons tracé, pour chaque couple (Re, Rm) où LB_1 a été convergé, le ratio \mathcal{R}_p entre l'amplitude maximale des pics secondaires, et l'amplitude du pic primaire d'EMF associée au retournement de $\bar{\mathbf{B}}_0$. La figure 6.8 montre clairement que \mathcal{R}_p augmente lorsque Re augmente. La variation de ce ratio en Rm est moins évidente à percevoir, bien que pour $Re = 200, 300$ et 400 , la figure 6.8 suggère que \mathcal{R}_p diminue lorsque Rm augmente. Le gradient d'amplitude des oscillations de l'EMF semble donc être corrélé visuellement avec la frontière d'existence de SN_1 . L'augmentation de l'amplitude des oscillations avec Re est aussi observée pour le cycle SN_2 .

³Ce cas diffère du cas où un champ magnétique toroïdal support de l'instabilité est généré par effet Ω à partir d'un champ radial, et pour lequel la pulsation d'Alfvén reste constante au cours du temps (Balbus et Hawley, 1992).

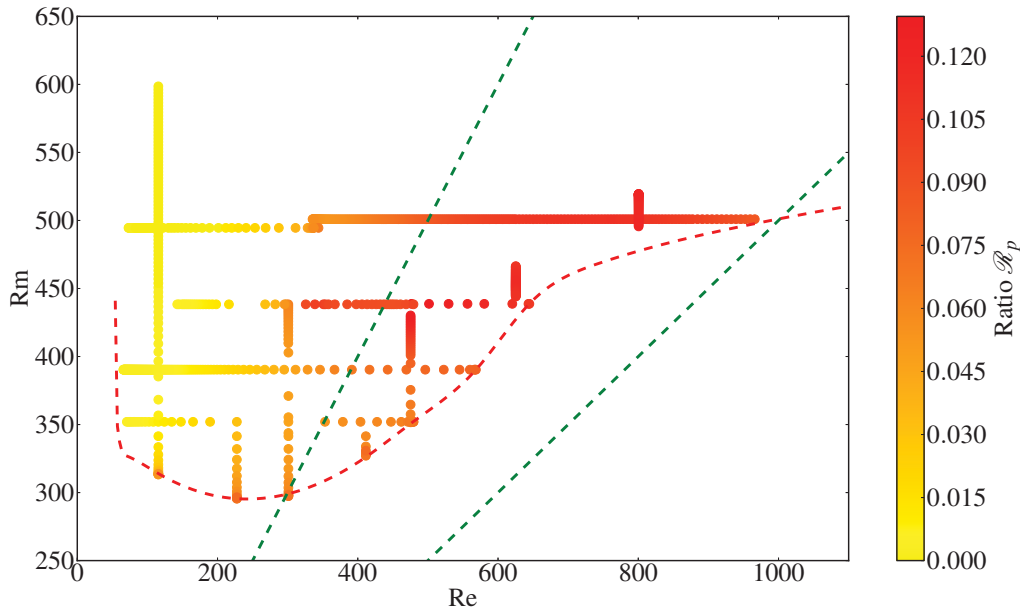


FIGURE 6.8 – Ratio \mathcal{R}_p entre l’amplitude maximale du pic secondaire d’EMF et celle du pic primaire associé au retournement de $\overline{\mathbf{B}}_0$, calculé pour LB_1 en fonction de Re et Rm. La ligne pointillée rouge dénote la frontière d’existence de SN_1 et les lignes pointillées vertes correspondent aux droites $Pm = 1$ et $Pm = 0.5$.

Pour explorer de façon plus générique leur dépendance à la dissipation, nous avons réalisé une série de simulations, en partant d’une même condition initiale (LB_1 à $Re = 479$ et $Rm = 352$) et en variant Re et Rm sur une grille prédéfinie. L’amplitude du champ initial $\overline{\mathbf{B}}_0$ est donc fixée dans ces simulations. Le résultat, présenté sur la figure 6.9 montre que ces oscillations augmentent avec Re, mais aussi avec Rm. Ce comportement en Rm, différent de celui observé sur la figure 6.8, est obtenu également pour des simulations basées sur des conditions initiales aléatoires à champ $\overline{\mathbf{B}}_0$ fixé. Enfin, nous présentons en annexe C un modèle quasi-linéaire de dynamo MRI qui reproduit assez bien la dynamique des ondes non-axisymétriques aux temps longs dans cette configuration de boîte. Les simulations effectués à partir de ce modèle montrent clairement que l’amplitude des oscillations augmente avec Re et Rm, et qu’elles dépendent fortement de la valeur de $\overline{B}_{0y}(t = 0)$ introduite dans les simulations.

iv) Conclusions

La principale conclusion de cette analyse est que l’évolution non-linéaire de $\overline{\mathbf{B}}_0$ modifie en profondeur la dynamique des ondes non-axisymétriques et est à l’origine des oscillations d’EMF et de $\overline{\mathbf{B}}_0$ observées. Ces oscillations sont de nature inertielle, avec une fréquence proche de κ , la fréquence épicyclique. Une augmentation de Re favorise alors naturellement leur excitation et a pour effet d’augmenter leurs amplitudes et leur durée de vie. Cependant, si ces oscillations semblent être importantes d’un point de vue dynamique à grand Re, il n’est pas clair qu’elles soient la cause directe ou unique de la disparition des cycles à petit Pm. Plusieurs réserves

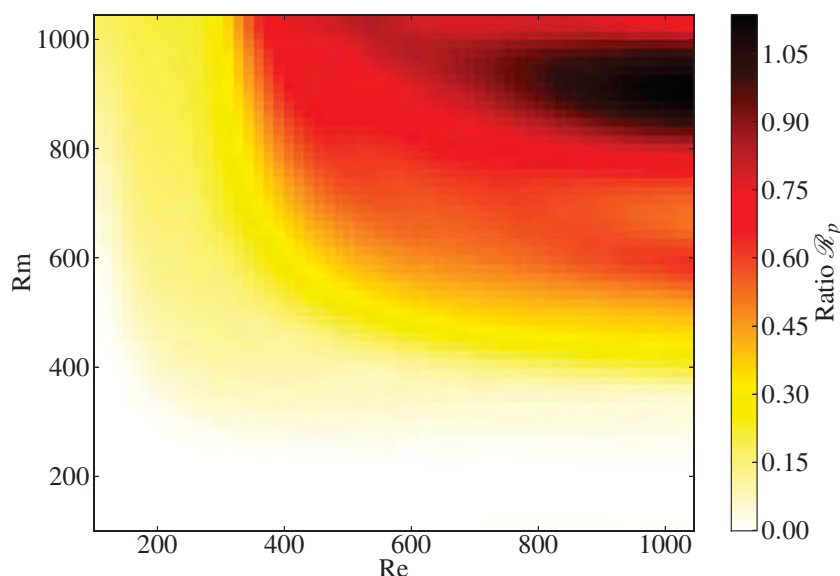


FIGURE 6.9 – Ratio \mathcal{R}_p entre l'amplitude maximale du pic secondaire d'EMF et celle du pic primaire en fonction de Re et Rm , pour un ensemble de simulations réalisées avec SOOPY, partant d'une même condition initiale et donc d'un même champ $\overline{\mathbf{B}}_0$ initial.

peuvent être formulées en ce sens :

- tout d'abord, dans les régimes de faibles champs ($\overline{B}_{0y} \sim 0.4$), l'amplitude des oscillations reste relativement faible. C'est le cas notamment de SN_1 , où \mathcal{R}_p ne dépasse pas les 13%. Il est donc difficile d'imaginer que ces oscillations puissent affecter considérablement la régénération des ondes leading intervenant dans la deuxième demi-période. Nous avons également vérifié qu'elles n'affectent pas considérablement le bilan énergétique du champ actif présenté en section 6.2 pour SN_1 lorsque $Re \gtrsim 300$ et plus généralement dans la gamme de \overline{B}_{0y} faible caractérisant ce cycle à grand Re .
- De plus, leur dépendance en Rm n'est pas clairement établie. Bien que la figure 6.8 indique que le ratio \mathcal{R}_p semble augmenter pour LB_1 lorsque Rm diminue (pour un Re fixé), les simulations plus génériques basées sur une amplitude initiale de $\overline{\mathbf{B}}_0$ fixé montrent le contraire. Il est probable que les variations de $\overline{\mathbf{B}}_0$ avec Rm sur la branche LB_1 des cycles soit importante pour rendre compte de la dépendance observée sur la figure 6.8.
- Enfin ces oscillations n'existent pas (ou sont très faibles) dans le cas des boîtes plus courtes. En effet le temps associé au cisaillement des ondes $S^{-1}L_y/L_x$ est plus petit que le temps associé aux mouvements inertiels, $2\pi/\kappa$. L'idée que les oscillations soient responsables de la transition à petit Pm ne peut donc pas être généralisée à toutes les configurations de boîtes.

6.3.2 Instabilité des cycles

Les arguments physiques et énergétiques avancés dans la section 6.2 ont permis de mieux comprendre pourquoi les structures les plus simples de la dynamique en boîte longue, comme les cycles de dynamo MRI, disparaissent à petit Pm. Cependant nous avons vu au chapitre 5 que la transition vers le chaos se faisait à travers des bifurcations globales de ces cycles, impliquant leurs variétés instables. Même dans un régime où les cycles existent, il est possible que ces variétés, associées à la nature instable des cycles, changent de comportement à grand Re et que l'existence de telles bifurcations en soit affectées. En particulier la carte de la figure 4.9 montre qu'à l'approche de la frontière à $Pm \sim 1$, la structure de la transition semble être modifiée. Nous avons donc cherché, de manière complémentaire, à analyser la nature physique des instabilités de ces cycles et leur dépendance à la dissipation, pour comprendre si certaines d'entre elles pouvaient jouer un rôle dans ce problème.

i) Différentes sources d'instabilités secondaires ou "parasites"

Le calcul des multiplicateurs de Floquet en section 5.2 a montré que les cycles de dynamo MRI, de période fondamentale T_0 comme SN_1 , sont des structures instables sur la quasi-totalité de leur domaine d'existence. D'un point de vue physique, ce comportement instable est lié à la présence d'instabilités secondaires, prenant naissance sur les champs associés aux cycles (ou sur ses gradients). Les gradients qui apparaissent dans ces structures MHD peuvent être le support de deux types d'instabilités :

- Les instabilités dite de "déchirement" ou en anglais "tearing" (TI) qui prennent naissance à partir des gradients magnétiques. Pour une couche de courant 2D, le taux de croissance γ_{TI} associé à cette instabilité est très faible devant la fréquence d'Alfvén, $\tau_A^{-1} = V_A/L$, (Furth et al., 1963). Il est prévu dans un cadre purement théorique un taux de croissance $\gamma_{TI} \sim \tau_A^{-1} L_u^{-3/5}$ avec $L_u = LV_A/\eta = (U_s/V_A)Rm$, le nombre de Lundquist (Goldston et Rutherford, 2010). Pour une vitesse typique de cisaillement de l'ordre de la vitesse d'Alfvén et τ_A^{-1} de l'ordre de S (ce qui est le cas dans nos simulations de dynamo MRI), le taux de croissance est de l'ordre de $Rm^{-3/5}S^{-1}$, c'est à dire $\sim 0.04 S^{-1}$ pour la gamme de Rm étudiée. Bien entendu, cette estimation est très grossière et se veut purement indicative, notre problème étant bien plus complexe qu'une simple couche de courant 2D.
- Les instabilités de cisaillement dont celle de Kelvin-Helmholtz (KH) qui prennent naissance à partir des gradients du champ de vitesse. Pour un écoulement de Kolmogorov (où le profil du gradient de vitesse est en sinus), la théorie linéaire montre que le taux de croissance maximal est de l'ordre de $0.1 S^{-1}$ pour un écoulement 2D (Meshalkin, 1961).

Ces deux instabilités sont assez bien comprises dans des géométries simples et lorsque elles sont traitées séparément. Cependant lorsque les deux gradients sont présents et qu'ils sont formés à partir de structures 3D dépendante du temps, l'analyse de ces instabilités est plus difficile. Dans la limite de perturbations sub-alfvéniennes ($\mathbf{u} \ll \mathbf{B}$) et pour un champ magnétique orienté dans la direction du cisaillement, des arguments théoriques et numériques (Chandrasekhar, 1961; Chen

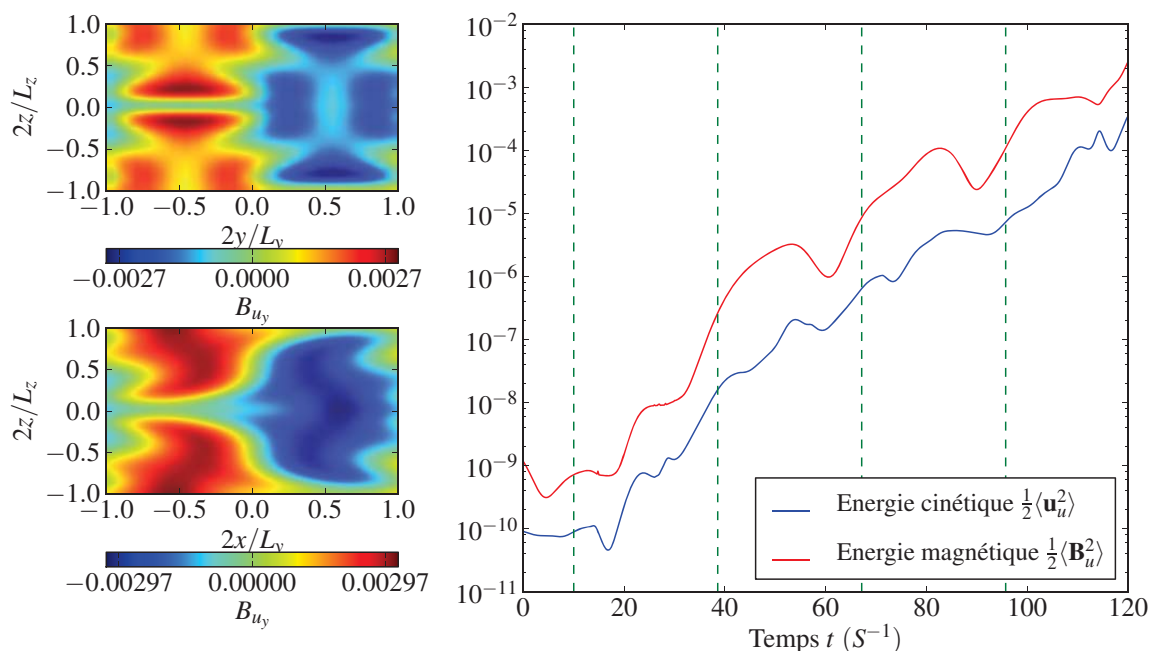


FIGURE 6.10 – A gauche : iso-intensité du champ magnétique total B_{uy} du mode instable $\mathbf{X}_u(t)$ dans une section (y, z) (en haut) et (x, z) (en bas) pour $t = T_0$. A droite : évolution temporelle de la densité d'énergie cinétique et magnétique de ce mode instable. Les traits verticaux pointillés représentent les lignes où le champ $\bar{\mathbf{B}}_0$ de LB_1 est maximal.

et al., 1997) indiquent que l'instabilité de KH est inhibée et seule l'instabilité "tearing" est active.

On peut également imaginer que la MRI soit source d'instabilité secondaire des cycles de dynamo MRI. En effet si on perturbe légèrement le cycle en augmentant initialement l'amplitude de la perturbation non-axisymétrique, celle-ci va avoir une amplitude plus forte après sa phase de croissance MRI, augmentant en retour la rétroaction non-linéaire et donc l'amplitude du champ $\bar{\mathbf{B}}_0$ sur la deuxième demi-période. La deuxième onde va donc être davantage amplifiée (si le cycle est dans un régime de champ faible) et le phénomène peut alors s'amplifier pour les ondes successives. L'écoulement devient chaotique, ou relaminarise si le champ devient trop fort. Dans ce cas la MRI dite "parasite" se développe sur le champ magnétique total du cycle.

ii) Etude d'un mode propre instable du cycle SN_1

Afin de mieux cerner la source d'instabilité des cycles de dynamo, nous avons étudié l'évolution d'un mode propre instable de LB_1 , près de sa frontière d'existence, à $Re = 934$ et $Rm = 494$. La méthode de calcul de l'évolution temporelle d'un mode propre instable est la suivante : on perturbe le cycle le long de sa direction la plus instable (associée à un certain multiplicateur Λ_u , égal ici $-36.8 + 27.03i$, qui a été calculé grâce à l'analyse de Floquet) et on calcule à tout temps la différence $\mathbf{X}_u(t)$ entre l'état obtenu et le cycle. La figure 6.10 (à droite) montre comment l'énergie magnétique et cinétique de ce mode $\mathbf{X}_u(t)$ évolue durant les deux premières périodes, correspondant à la phase linéaire de l'instabilité secondaire. Ces deux quantités aug-

mentent quasi-exponentiellement mais présentent des paliers durant lesquels elles cessent de croître (voire diminuent). Les instants où l'amplification du mode propre est maximale correspondent en réalité aux temps où le champ axisymétrique $\overline{\mathbf{B}}_0$ du cycle de base est maximal (repérés par les lignes verticales pointillées de la figure 6.10). Le taux de croissance global mesuré à partir de ces courbes est sensiblement égal à $\ln|\Lambda_u|/T_0 \approx 0.063$, tout à fait compatible avec des instabilités de type TI ou KH dans la gamme de Re et Rm étudiée. Cependant on remarque que le taux de croissance instantané, c'est à dire celui que l'on mesurerait si les paliers n'existaient pas, est proche du double de cette valeur (~ 0.13 mesuré) et se rapproche plus du taux de croissance de la MRI associé à un mode fondamental $k_y = k_{y_0}$ ($\gamma \sim k_{y_0} \overline{B}_{0y}^{max}$ avec $\overline{B}_{0y}^{max} = 0.5$ dans notre cas).

Une représentation de ce mode dans le plan (y, z) et (x, z) (à gauche de la figure 6.10) montre que sa géométrie est complexe et qu'il est non-axisymétrique avec un mode $k_y = k_{y_0}$ dominant à $t = T_0$. Sa forme change assez rapidement dans le temps, alternant entre des structures à grande et petite échelle. Comme cette solution est un mode propre, sa forme spatiale à $t = T_0$ est identique à celle en $t = 0$, avec une amplitude plus grande et un signe opposé (car $\Re(\Lambda_u) < 0$).

Pour aller plus loin dans l'analyse de ce mode, nous avons étudié numériquement la contribution énergétique des différents termes linéaires intervenant dans son évolution. Si $\mathbf{u}_c(t)$ et $\mathbf{B}_c(t)$ dénotent les composantes du champ de vitesse et du champ magnétique du cycle, les équations linéaires associées à l'évolution du mode propre $\mathbf{X}_u(t) = (\mathbf{u}_u(t), \mathbf{B}_u(t))$ sont :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_u}{\partial t} - Sx \frac{\partial \mathbf{u}_u}{\partial y} + \mathbf{u}_c \cdot \nabla \mathbf{u}_u + \mathbf{u}_u \cdot \nabla \mathbf{u}_c = \mathbf{F}_\Omega - \frac{1}{\rho} \nabla \Pi_u + \frac{1}{\rho \mu_0} (\mathbf{B}_c \cdot \nabla \mathbf{B}_u + \mathbf{B}_u \cdot \nabla \mathbf{B}_c) + \nu \Delta \mathbf{u}_u, \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_u}{\partial t} - Sx \frac{\partial \mathbf{B}_u}{\partial y} + \mathbf{u}_c \cdot \nabla \mathbf{B}_u + \mathbf{u}_u \cdot \nabla \mathbf{B}_c = \mathbf{B}_c \cdot \nabla \mathbf{u}_u + \mathbf{B}_u \cdot \nabla \mathbf{u}_c - SB_{u_x} \mathbf{e}_y + \eta \Delta \mathbf{B}_u. \quad (6.11)$$

où \mathbf{F}_Ω est la force de Coriolis combinée au terme de cisaillement $-Su_{u_x} \mathbf{e}_y$. Pour chaque terme \mathbf{F}_i de l'équation (6.10), on définit sa contribution énergétique comme :

$$\Gamma(\mathbf{F}_i)(t) = \langle \mathbf{u}_u \circ \mathbf{F}_i \rangle \quad (6.12)$$

avec \circ le produit terme à terme de deux vecteurs et $\langle \rangle$ la moyenne sur les trois directions de l'espace (déjà définie au début du chapitre 4). De même la contribution énergétique d'un terme de l'équation d'induction (6.11) s'écrira $\Gamma(\mathbf{F}_i)(t) = \langle \mathbf{B}_u \circ \mathbf{F}_i \rangle$. Γ est un vecteur, ce qui signifie que le bilan énergétique est analysé sur les trois directions de l'espace physique x, y et z .

Les courbes de la figure 6.11 montrent les différentes contributions énergétiques $\Gamma(\mathbf{F}_i)(t)$ en fonction du temps pour les composantes radiale et azimutale du champ \mathbf{u}_u et \mathbf{B}_u . Les contributions associées aux termes dissipatifs et à la force de pression ne sont pas représentées sur cette figure, car ces termes n'ont pas de rôle direct sur l'instabilité. De plus, la contribution énergétique associée aux termes $-Sx \frac{\partial \mathbf{u}_u}{\partial y}$ et $-Sx \frac{\partial \mathbf{B}_u}{\partial y}$ est négligeable. La longueur des barres bleues représente la quantité d'énergie apportée par chaque terme $\Gamma(\mathbf{F}_i)(t)$, intégrée sur la durée de la simulation. Si la barre est orientée vers la gauche, cela signifie que le terme correspondant fait perdre de l'énergie au mode, si elle est orientée vers la droite, elle lui en fait gagner. On remarque que le gain d'énergie cinétique du mode propre provient essentiellement de la force

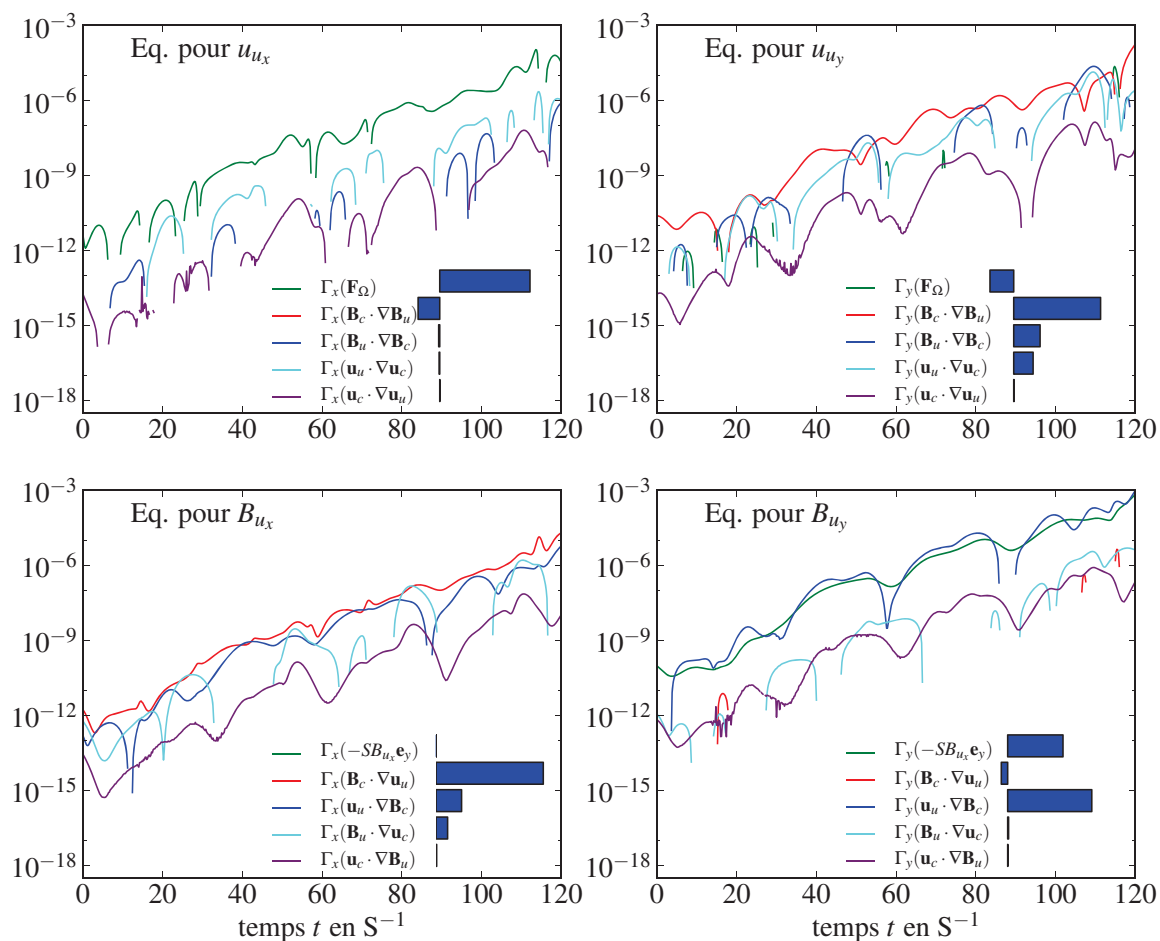


FIGURE 6.11 – Contributions énergétiques des termes gouvernant l'évolution du mode propre instable $\mathbf{X}_u(t)$. Les cadres du haut correspondent aux projections en x et y de l'équation de moment(6.10) et ceux du bas aux projections en x et y de l'équation d'induction (6.11). L'interruption de certaines courbes indique le passage par des valeurs négatives. Les barres bleues représentent la quantité d'énergie intégrée sur $120S^{-1}$ et normalisée pour chaque terme. Une barre orientée vers la droite indique une contribution énergétique positive pour $\mathbf{X}_u(t)$.

de Coriolis (combinée au cisaillement) pour la composante u_{u_x} et du terme de force de Lorentz $\mathbf{B}_c \cdot \nabla \mathbf{B}_u$ pour la composante u_{u_x} . Ces deux forces sont clairement associées à une instabilité MRI. Une contribution non négligeable est également apportée par le terme $\mathbf{B}_u \cdot \nabla \mathbf{B}_c$ qui fait intervenir les gradients magnétiques du cycle. Ce terme est une source probable d'instabilité de type TI (ou autres instabilités de courant), même si la majeure partie de l'énergie provient des termes associés à la MRI. Enfin la contribution du terme de gradient de vitesse, plus faible encore, montre que les instabilités de type KH ne sont pas dominantes dans notre cas. L'augmentation de l'énergie magnétique, quant à elle, est essentiellement due à la composante inductive sur x et en partie au cisaillement sur y . On remarque que la composante advective $\mathbf{u}_u \cdot \nabla \mathbf{B}_c$ est également une source d'énergie importante pour la composante B_{u_y} . Celle-ci semble être de même nature que la composante A_{1_y} de la figure 6.3 qui alimentait le champ toroïdal associée au mode actif MRI du cycle SN_1 .

Cette étude suggère fortement que l'instabilité des cycles de dynamo MRI est due en grande partie à une instabilité MRI secondaire. Nous resterons cependant prudent sur cette conclusion étant donné qu'un seul cycle pour un régime bien particulier a été analysé. Néanmoins nous pensons que la compréhension physique des bifurcations globales reposant sur les variétés instables des cycles, pourrait être renforcée par l'étude plus complète des ces instabilités secondaires.

iii) Dépendance à la dissipation

Afin d'étudier la dépendance de l'instabilité des cycles à la dissipation visqueuse et ohmique, nous avons calculé le taux de croissance du mode le plus instable de LB_1 pour l'ensemble des valeurs de Re et Rm où ce cycle a été continué. La figure 6.12 montre que ce taux augmente assez fortement avec Rm , mais en revanche n'évolue pas du tout avec Re . Cette forte instabilité à grand Rm est compatible avec l'hypothèse que l'instabilité des cycles est de nature magnétorotationnelle. En effet dans cette configuration de boîte et pour $Rm \lesssim 1000$, le taux de croissance de la MRI dépend fortement de Rm mais sature très vite en Re .

iv) Conclusions

Il est clair que la disparition des cycles et donc de la dynamique à grand Re est d'une manière ou d'une autre explicable par une analyse de stabilité, puisque les cycles identifiés disparaissent dans une bifurcation nœud-col inverse à grand Re . La relation entre cette analyse mathématique et la nature du phénomène physique responsable de la disparition des cycles (voir section 6.2) est cependant difficile à établir et à interpréter. Dans cette étude, nous avons simplement montré que le mode d'instabilité principale des cycles ne semble pas affecter la dynamique des variétés instables et des bifurcations lorsque Re augmente. Notons finalement que l'augmentation du taux de croissance de ce mode avec Rm est très probablement responsable des problèmes de convergence des cycles rencontrés avec la méthode de Newton-Krylov à grand Rm .

6.4 Extension de l'étude à des rapports d'aspect plus petits

Les résultats principaux relatifs à l'étude paramétrique et énergétique des cycles que nous avons présentés précédemment ont été obtenus pour une boîte à grand rapport d'aspect. Bien

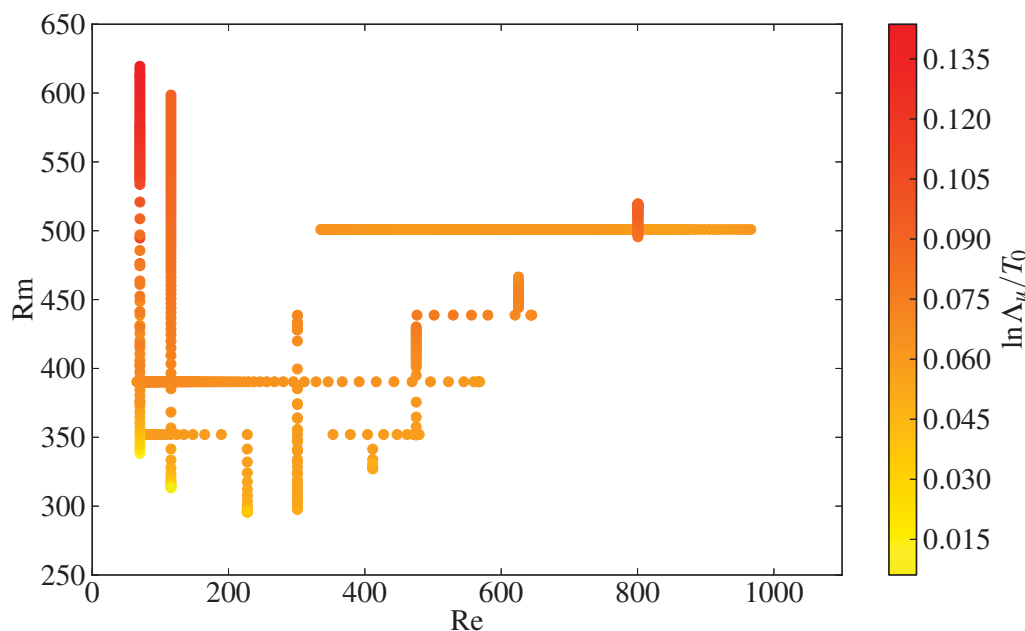


FIGURE 6.12 – Valeur de l'exposant de Floquet de LB_1 correspondant à son mode le plus instable, en fonction de Re et Rm .

évidemment, nous avons cherché à savoir si ils pouvaient être généralisés aux boîtes à plus petits rapports d'aspect, plus couramment utilisées pour les simulations de ce problème. Nous présentons donc ici les résultats de continuations de cycles dans ce type de boîtes, puis une analyse énergétique identique à celle de la section 6.2.

6.4.1 Continuations et frontières d'existence

Afin de sonder les domaines d'existence des cycles dans des boîtes de rapport d'aspect plus petits, nous avons employé deux méthodes : la première méthode consiste à continuer les cycles comme SN_1 , obtenu dans la boîte $(0.7, 20, 2)$, en fonction de L_y (L_x, L_z fixés), afin de diminuer progressivement le rapport d'aspect de ces solutions, puis de les étudier en fonction de Re et Rm . La seconde consiste à continuer directement les cycles identifiés dans les boîtes courtes (comme ceux présentés en section 4.3.5). La continuation de ces cycles est cependant techniquement très difficile et reste incomplète même si quelques tendances ont pu être mises en évidence.

i) Continuations de SN_1 à plus petits L_y

Nous avons d'abord recalculé la solution LB_1 pour $Re = 115$ et $Rm = 356$, en changeant progressivement la longueur de boîte L_y . Le résultat de cette continuation montre que SN_1 vit dans une gamme assez large en L_y , comprise entre $L_{y_c} = 8.35$ et $L_{y_c} = 23.6$ pour le Re et Rm considéré. La figure 6.13 (à gauche) montre comment évoluent ces deux L_y critiques en fonction de Rm (ou de façon équivalente le Rm critique en fonction de L_y) pour Re fixé. On remarque que la limite inférieure en L_y est quasi verticale et ne dépend donc pas de Rm . L'origine de

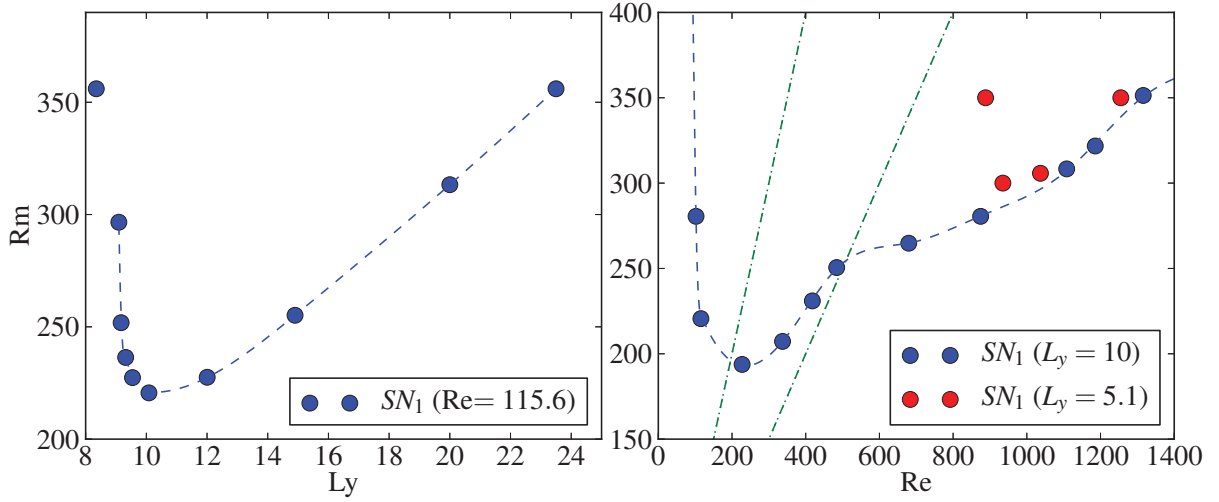


FIGURE 6.13 – A gauche : frontière d’existence de SN_1 dans un plan (L_y, Rm) , pour $Re = 115.6$ fixé. A droite : frontière d’existence de SN_1 dans un plan (Re, Rm) pour deux valeurs différentes de L_y (en bleu, $L_y = 10$ et en rouge $L_y = 5.1$).

cette barrière est identique à celle observée à bas Re sur la figure 6.2; si L_y est trop petit, la dissipation visqueuse affectant les ondes non-axisymétriques l’emporte sur l’énergie fournie par la MRI et le cycle cesse d’exister. Nous avons alors vérifié qu’une augmentation de Re a pour effet de diminuer la limite inférieure en L_y . En fixant la valeur de Rm à 350 et en partant de $L_y = 8.4$, nous avons pu continuer LB_1 jusqu’à $Re = 920$ et repousser cette limite inférieure à $L_{yc} = 5.1$. Notons que sur la figure de gauche, entre $L_y = 10$ et $L_y = 20$, le Rm critique diminue lorsque L_y diminue. Ce résultat, plutôt contre-intuitif, semble lié à la hausse rapide observée du champ $\overline{\mathbf{B}}_0$ lorsque L_y diminue. Cette hausse correspond à une augmentation du taux de croissance de la MRI ($\propto \overline{B}_{0y}/L_y$), permettant de compenser l’augmentation de la dissipation ohmique des ondes non-axisymétriques $\propto 1/(L_y^2 Rm)$.

Nous avons finalement réalisé une série de continuations pour deux valeurs différentes de L_y (10 et 5.1), afin d’obtenir la frontière d’existence de SN_1 dans le plan (Re, Rm) . La figure 6.13 (à droite) montre que pour $L_y = 10$, la frontière a le même comportement que celui décrit dans la section 6.1.2 pour $L_y = 20$, même si SN_1 survit à plus petits Pm . La courbe frontière pour $L_y = 5.1$ est très incomplète mais montre que SN_1 vit dans une gamme étroite en Re , dont la borne inférieure est nettement décalée vers la droite ($Re_{cl} \sim 900$). Le Rm critique global est plus élevé que pour le cas $L_y = 10$ mais la borne supérieure en Re semble toujours croître avec Rm .

Les ondes cisillées acquièrent des échelles radiales de plus en plus petites lorsque L_y diminue ($k_x \propto t/L_y$) et l’existence des cycles est nécessairement décalée vers des plus grands Re et Rm . L’obtention des frontières d’existence pour des L_{yc} inférieurs à 5 est donc beaucoup plus difficile car les Re et Rm critiques augmentent très rapidement et la résolution numérique requise devient par conséquent trop grande. Des moyens de calculs plus importants sont nécessaires pour connaître le comportement asymptotique de SN_1 quand $L_y \rightarrow 0$.

Ces frontières nous renseignent également sur les propriétés de cycles d'échelles spatiales plus petites existant dans la boîte initiale de dimensions $(0.7, 20, 2)$, comme celui représenté sur la figure 4.15. En effet en empilant 2 boîtes ⁴ de dimension $L_y = 10$ dans la direction y , il est possible d'obtenir une solution périodique exacte des équations (2.1.4) dans la boîte $L_y = 20$. Le cycle obtenu est de période $T_0/2$ et le mode de perturbation non-axisymétrique permettant l'entretien de la dynamo a pour nombre d'onde $k_y = 4\pi/L_y = 2k_{y0}$. Une solution similaire de période $T_0/4$ est obtenue en superposant 4 fois la solution SN_1 à partir de la boîte $L_y = 5$. Ces deux cycles construits de toutes pièces ont exactement la même frontière d'existence en (Re, Rm) que celle de la figure 6.13. Notons qu'il est possible de construire de cette manière des cycles de période T_0/n reposant sur des harmoniques $k_y = 2\pi n/L_y$. Cela montre qu'une multitude de structures cohérentes à plus petite échelle existent dans la boîte de dimensions $(0.7, 20, 2)$ pour une gamme de Re et Rm assez large et que leur frontière d'existence a un comportement similaire à celle de SN_1 . Celle-ci se décale progressivement à grand Re et Rm lorsque l'échelle dominante des modes non-axisymétriques est réduite. Cela montre également qu'une dynamique temporelle multi-échelle, caractéristique de la turbulence développée, est possible à partir de ces cycles lorsque les deux paramètres dissipatifs deviennent grands.

ii) Continuations de SN_{2m} dans la boîte de dimensions $(0.5, 2, 1)$

La paire de cycles SN_{2m} (section 4.3.5), dont la dynamique repose sur le passage de plusieurs ondes cisailées successives, est la seule structure que nous avons pu converger dans une boîte où L_y est de l'ordre de L_x et L_z . Bien qu'il ne soit pas certain que ce cycle soit représentatif de la dynamique dans cette boîte, nous l'avons continué pour connaître sa dépendance en Re et Rm . Sa continuation ayant nécessité une résolution numérique de $48 \times 48 \times 72$ (16 fois plus de points que pour le cycle de Herault et al. (2011)), le domaine sondé en Re et Rm est assez restreint. La gamme de Rm étudiée s'étend entre 2850 et 3450. Nous avons vérifié que les solutions cycliques obtenues sont bien résolues numériquement. Nos résultats, illustrés sur la figure 6.14, suggèrent là encore que SN_{2m} disparaît au delà d'un certain Re (à Rm fixé) et que le Re critique correspondant augmente avec Rm , dans la gamme restreinte de paramètres étudiée. Notons que ce cycle semble vivre dans une gamme assez étroite en Re et pour des Pm bien supérieurs à l'unité (ici $Pm \gtrsim 3$). Les courbes de continuation représentant l'amplitude du champ radial en fonction de Re sont assez différentes des "bananes" observées pour SN_1 ; aucune baisse importante du champ $\bar{\mathbf{B}}_0$ lorsque Re augmente n'a été remarquée pour ce cycle.

6.4.2 Etude énergétique des simulations à plus petits rapports d'aspect

Afin de savoir si les conclusions de la section 6.2, relatives au effets de la diffusion turbulente sur l'excitation de la dynamo, s'appliquent aussi dans les boîtes à plus petit rapport d'aspect, nous avons analysé les bilans d'énergie magnétique pour le cycle SN_{2m} dans la gamme de Re et Rm où il a été continué. Cette étude est loin d'être exhaustive mais apporte une compréhension préliminaire au problème dans le cas des boîtes courtes. Elle pointe également les difficultés techniques rencontrées, associées à la plus grande complexité des structures dans ces boîtes.

⁴Cette idée a été suggérée par John Papaloizou.

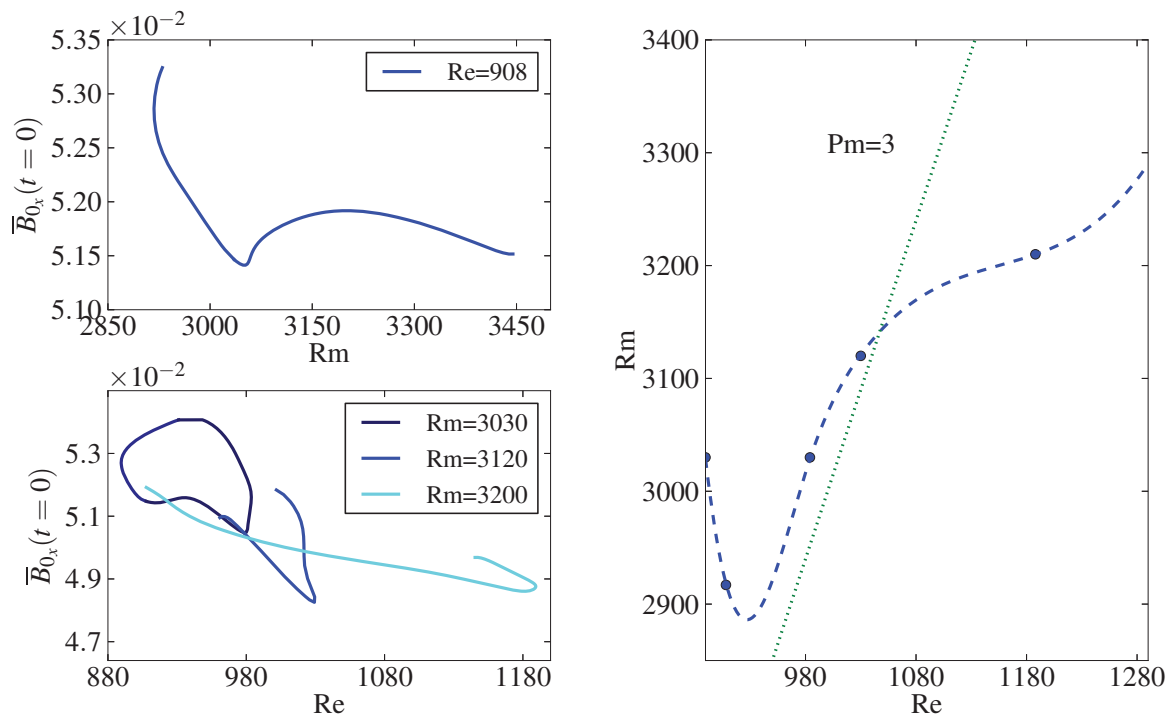


FIGURE 6.14 – A gauche : courbes de continuation du cycle SN_{2m} en Rm (en haut) et en Re (en bas). La quantité tracée ici est le champ radial \bar{B}_{0_x} à $t = 0$. A droite : frontière d'existence de ce cycle dans la gamme de Re et Rm étudiée. Les ronds pleins bleus correspondent aux différents Re critique et Rm critiques obtenus. Remarque : l'analyse des spectres d'énergie en fonction de k indiquent que les cycles obtenus sont convergés avec la résolution numérique utilisée ($48 \times 48 \times 72$).

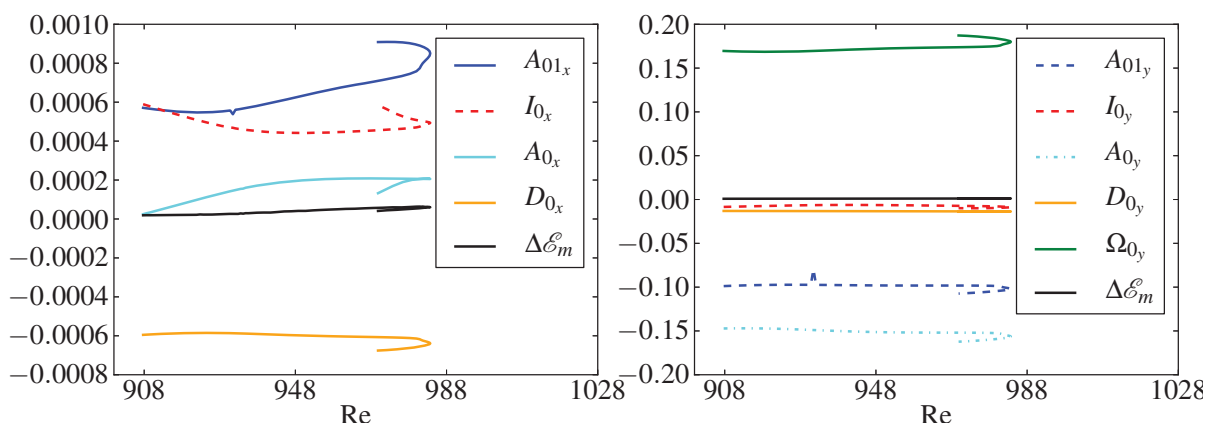


FIGURE 6.15 – Bilan d'énergie du champ axisymétrique $\overline{\mathbf{B}}_0$ sur la période $T = 20S^{-1}$ du cycle SN_{2m} , représentant les différents composantes de l'équation (6.2) en fonction de Re ($Rm = 3030$). La branche partant de $Re = 908$ est la lower branch. Ce bilan est projeté sur la composante x (à gauche) et y (à droite).

i) Bilan sur le champ $\overline{\mathbf{B}}_0$

Contrairement au cas de SN_1 , le cycle SN_{2m} n'est pas symétrique en temps (voir section 4.3.5) et il est donc nécessaire d'étudier le bilan d'énergie intégré sur une période complète, ici $T_p = 5S^{-1}L_y/L_x$. Nous commençons par analyser le bilan d'énergie sur la composante axisymétrique fondamentale $\overline{\mathbf{B}}_0$. La figure 6.15 illustre les différents termes de l'équation (6.2), toujours vérifiée dans ce cas, en fonction de Re , pour $Rm = 3030$. Le champ \overline{B}_{0y} (à droite), puise son énergie de l'effet Ω et la dissipe essentiellement à petite échelle par transfert advectif. La dissipation ohmique D_{0y} est faible dans ce bilan, contrairement au cas des boîtes allongées. Dans cette configuration, il est une fois de plus nécessaire de pouvoir régénérer la composante \overline{B}_{0x} pour assurer la pérennité du processus de dynamo MRI. La figure de gauche montre que cette composante radiale puise son énergie à la fois de l'induction non-linéaire I_{0x} et de l'advection non-linéaire A_{0x} , et perd son énergie via la dissipation ohmique. Ce bilan diffère de celui de SN_1 étant donné que I_{0x} est ici comparable à A_{0x} (il était négligeable sur la figure 6.3). Lorsque Re augmente, on remarque que la composante inductive a tendance à diminuer tandis que la composante advective tend à augmenter. L'origine de I_{0x} ne sera pas traitée dans la suite de notre étude, bien qu'elle contribue de façon importante à la régénération du champ de dynamo. A_{0x} se décompose en une somme de terme d'échange entre $\overline{\mathbf{B}}_0$ et les autres modes magnétiques. Une grande partie de cette énergie est fournie par les différentes ondes successives amplifiées par la MRI. Dans les paragraphes suivants, nous allons analyser comment cette énergie est produite et transmise sur $\overline{\mathbf{B}}_0$ puis montrer comment un bilan similaire à l'équation (6.5) peut être établi.

ii) Multiplicité des ondes

Une première difficulté par rapport à l'analyse de SN_1 est que le retournement du champ $\overline{\mathbf{B}}_0$ est due au passage successif de plusieurs ondes de cisaillement, qui vont lui céder ou lui emprunter chacune une certaine quantité d'énergie. Nous avons vu en section 4.3.5 que 5 ondes, plus ou

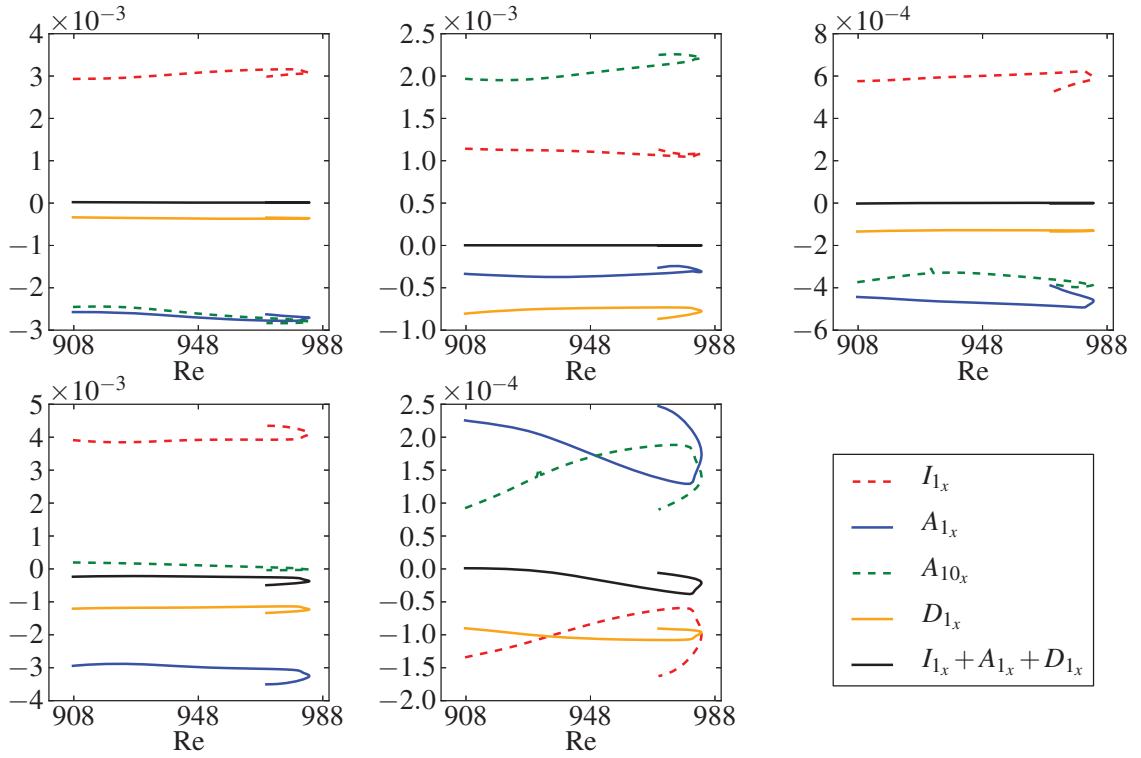


FIGURE 6.16 – Bilan d'énergie en x du mode $\tilde{\mathbf{b}}_1$ en fonction de Re pour le cycle SN_{2m} ($Rm = 3030$). Chacune des cinq figures représente les termes d'injections et de dissipation pour les cinq ondes non-axisymétriques se succédant tous les $L_y/L_x S^{-1}$.

moins amplifiées par la MRI, sont cumulativement impliquées dans les deux renversements de $\bar{\mathbf{B}}_0$ associés à SN_{2m} . La figure 6.16 montre les composantes inductive, advective et dissipative, I_{1x} , A_{1x} , D_{1x} , pour chacune des 5 ondes, projetées sur la composante radiale du mode non-axisymétrique fondamental $\tilde{\mathbf{b}}_1$, en fonction de Re . Pour chaque onde, la somme de ces 3 termes est proche de 0 pour les mêmes raisons que celles indiquées dans le cas de SN_1 . On voit que 2 d'entre elles (la troisième et la cinquième) ont une contribution énergétique très faible. En particulier pour la cinquième, le terme I_{1x} est négatif ce qui suggère que cette onde n'est pas amplifiée par la MRI. On remarque que toutes les ondes ne contribuent pas forcément à la régénération du champ $\bar{\mathbf{B}}_0$. C'est le cas de la deuxième onde dont le transfert advectif radial A_{10x} est positif. Néanmoins, lorsque ce bilan est sommé sur l'ensemble des 5 ondes, le transfert advectif A_{10x} est globalement négatif, ce qui signifie que de l'énergie nette est injectée par la MRI pour entretenir \bar{B}_{0x} sur un cycle. Nous considérerons par la suite que ces 5 ondes successives agissent comme une seule onde équivalente sur une période du cycle, dont la contribution énergétique est la somme des contributions de chaque onde.

iii) Nombre de modes actifs

Dans le cas des boîtes allongées, nous avons vu qu'un seul mode actif $\tilde{\mathbf{b}}_1$, amplifié par la MRI, permettait de transférer de l'énergie au champ axisymétrique. En revanche, pour des rapports

d'aspect plus petits, la composante active du champ magnétique est constituée de plusieurs modes instables pour la MRI. Le bilan de la figure 6.16 associé à $\tilde{\mathbf{b}}_1$ n'est donc pas suffisant pour décrire l'ensemble des transferts d'énergie permettant de régénérer le champ de dynamo.

Pour chaque mode de perturbations non-axisymétriques, labellisé j , il est possible de définir un bilan d'énergie similaire associant un terme lié à l'induction \mathbf{I}_j , l'advection \mathbf{A}_j , la dissipation ohmique \mathbf{D}_j et à l'effet du cisaillement $\mathbf{\Omega}_j$. Nous noterons également \mathbf{A}_{jk} le terme de transfert advectif entre le mode $\tilde{\mathbf{b}}_j$ et le mode $\tilde{\mathbf{b}}_k$. D'un point de vue énergétique, rappelons que les modes sont "actifs" si ils gagnent de l'énergie par induction ($\mathbf{I}_{j_x} > 0$ et $\mathbf{\Omega}_{j_y} > 0$) et en transmettre une partie au champ $\overline{\mathbf{B}}_0$ par advection non-linéaire. Ils se distinguent des modes dits "esclaves" nourris par un transfert advectif non-linéaire et pour lesquels l'énergie associée à l'induction I_{j_x} est faible ou négative. La figure 6.18 montre comment évolue le bilan d'énergie en Re du cycle SN_{2m} , sommé sur les cinq ondes, pour différents modes. Il est clair que les modes magnétiques actifs non-axisymétriques sont les modes trailing ($k_x = Sk_y t$, $k_y = k_{y_0}$) avec $k_z = 0$, $k_z = 2k_{z_0}$, $k_z = 4k_{z_0}$ etc ... (les modes $k_y = k_{y_0}$, impairs en z n'existent pas dans les symétries A_1). Notons que plus l'échelle verticale du mode est petite (k_z grand), plus sa contribution énergétique est faible. Au delà de $k_z = 6k_{z_0}$, le terme d'induction linéaire $\mathbf{\Omega}_{j_y}$ devient négatif et celui en x très faible. Pour $k_y > k_{y_0}$, la composante inductive I_{j_x} est négative, indiquant que ces modes sont esclaves et qu'ils ne peuvent contribuer à entretenir $\overline{\mathbf{B}}_0$.

Nous noterons par l'indice a_i ($i = 1, 2, 3, 4$) les modes magnétiques non-axisymétriques actifs de vecteurs d'onde respectifs ($k_x = Sk_y t$, $k_y = k_{y_0}$, $k_z = 2(i-1)k_{z_0}$) et par l'indice e_i ($i \geq 1$) tous les autres modes esclaves. Remarquons que dans ce formalisme, $\tilde{\mathbf{b}}_1 \equiv \tilde{\mathbf{b}}_{a_1}$. Pour les modes actifs, on a

$$\mathbf{\Omega}_{a_i} + \mathbf{I}_{a_i} + \mathbf{A}_{a_i} + \mathbf{D}_{a_i} \simeq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad (6.13)$$

avec

$$\mathbf{A}_{a_i} = \mathbf{A}_{a_i 0} + \sum_{a_j, j \neq 0} \mathbf{A}_{a_i a_j} + \sum_{e_j, j \neq 0} \mathbf{A}_{a_i e_j} \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (6.14)$$

$\mathbf{A}_{a_i 0}$ est la quantité d'énergie transférée vers le champ $\overline{\mathbf{B}}_0$, $\sum_{a_j} \mathbf{A}_{a_i a_j}$ est le terme d'échange interne entre les modes actifs non-axisymétriques et $\mathbf{D}_{t_i} = \sum_{e_j} \mathbf{A}_{a_i e_j}$ l'énergie transférée vers les modes esclaves à petite échelle. Comme pour le cas de SN_1 , cette décomposition permet de dissocier l'énergie échangée entre les modes actifs, qui favorise la dynamo MRI, et celle cédée aux modes esclaves, qui la défavorise. Le dernier terme est associé à une forme de dissipation turbulente que nous noterons \mathbf{D}_{t_i} et qui est une perte nette d'énergie pour le champ support de la MRI et les modes MRI actifs.

iv) Bilan global d'énergie de SN_{2m}

En faisant la somme de l'équation (6.13) sur tous les modes actifs, et en y ajoutant l'équation (6.2) pour le champ $\overline{\mathbf{B}}_0$, on obtient pour la composante x :

$$\left(I_{0x} + \sum_{a_i, i \neq 0} I_{a_i x} \right) + \left(D_{0x} + \sum_{a_i, i \neq 0} D_{a_i x} \right) + \left(\sum_{0 \leq i \leq 4} D_{t_i x} \right) \simeq 0 \quad (6.15)$$

Pour simplifier les notations, le premier terme sera noté I_x , le second D_{la_x} et le troisième D_{t_x} . Cette équation généralise l'équation (6.6) dans le cas de cycles dynamo "multi-ondes". Dans

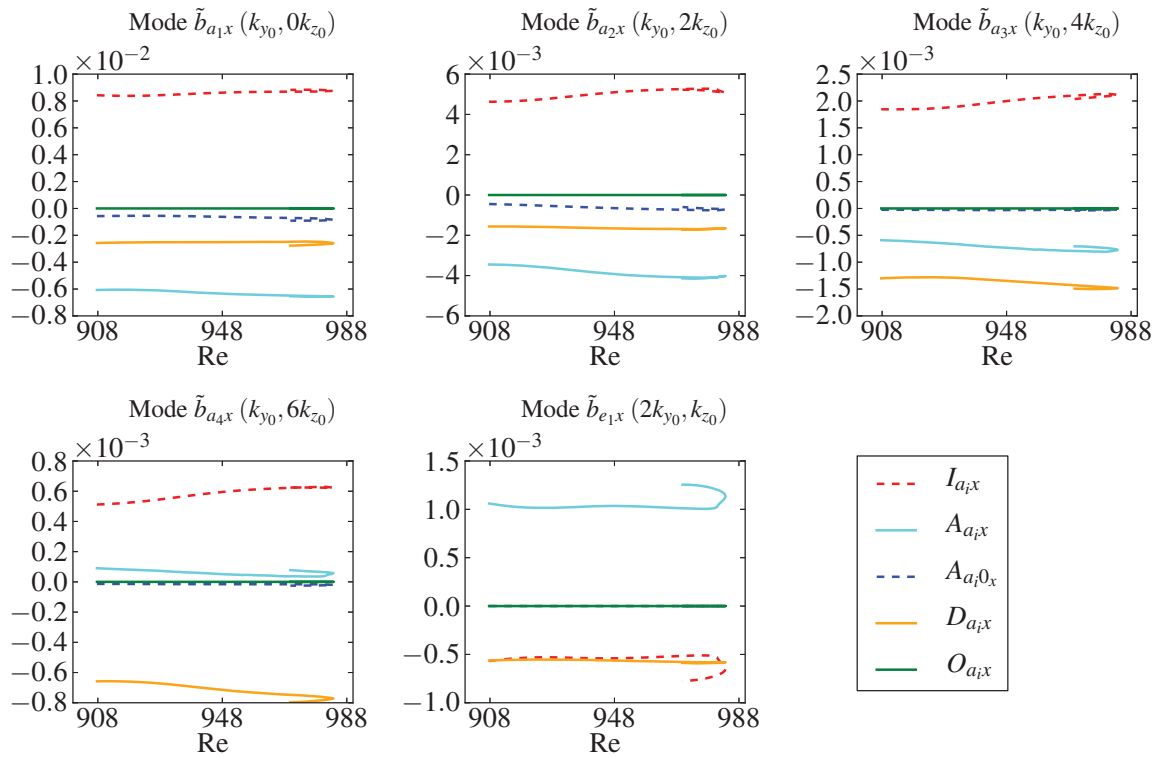


FIGURE 6.17 – Bilan d'énergie en x pour les 4 modes actifs non-axisymétriques \tilde{b}_{a_i} et pour un mode esclave \tilde{b}_{e_1} en fonction de Re pour le cycle SN_{2m} ($Rm = 3030$). Pour chacune de ces figures, les contributions énergétiques sont intégrées sur la période $T = 20S^{-1}$ et sommées sur les cinq ondes de cisaillement.

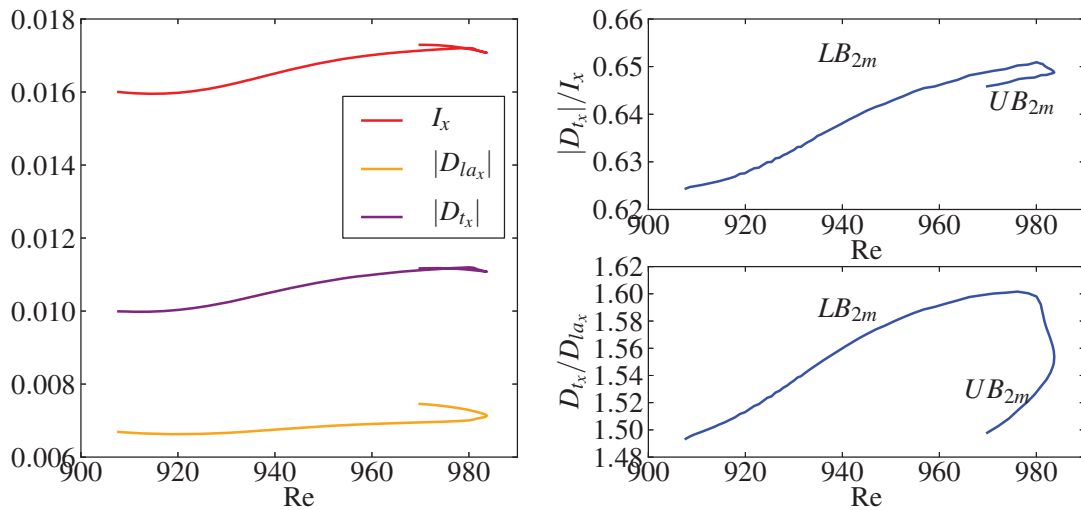


FIGURE 6.18 – A gauche : termes du bilan global (6.15) pour le cycle SN_{2m} en fonction de Re ($Rm = 3030$). A droite : ratio D_{t_x}/I_x (en haut) et $D_{t_x}/D_{I_{a_x}}$ (en bas) en fonction de Re .

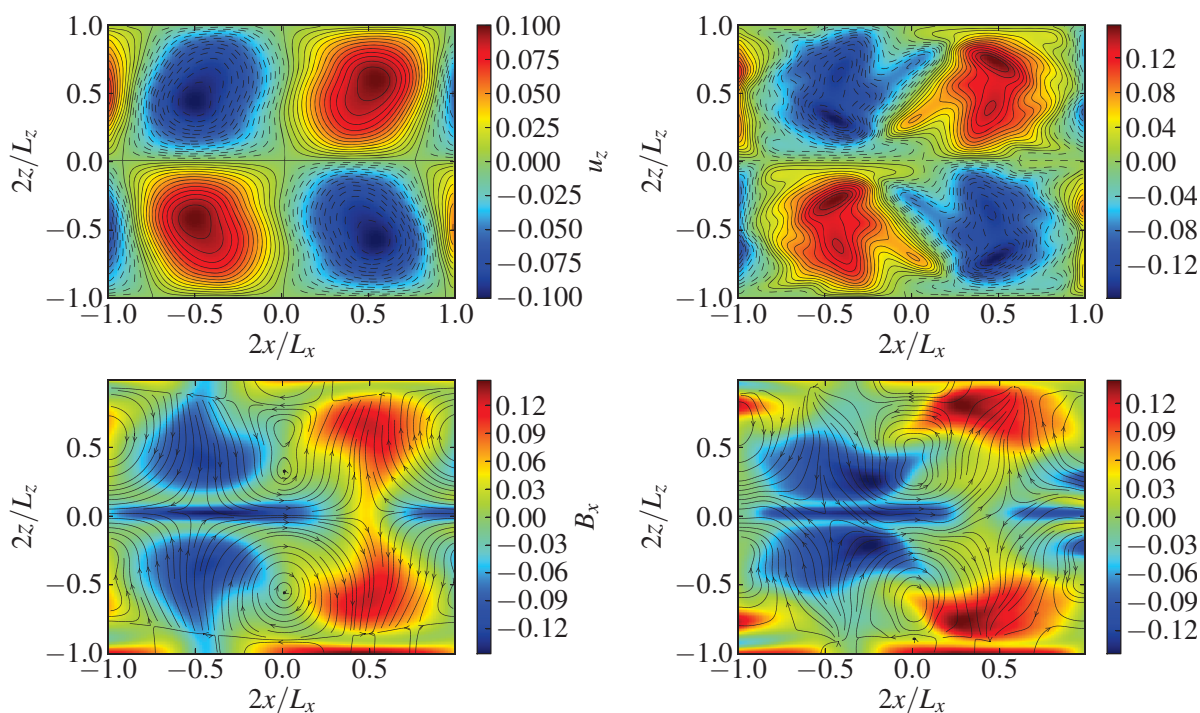


FIGURE 6.19 – A gauche : simulation du cycle SN_{2m} à $Re=908$ et $Rm=3030$. A droite : simulation du même état initial mais intégré pour $Re=5000$. En haut : iso contours de la composante u_z dans le plan poloidal (x, z) pour $t = 5 S^{-1}$ au moment du premier retournement de $\overline{\mathbf{B}}_0$. Les lignes noires dénotent ces contours. En bas : iso contours de la composante magnétique B_x dans le plan (x, z) au même instant. Les lignes noires fléchées représentent le champ de vitesse poloidal.

le terme de dissipation turbulente, nous avons inclus $D_{t_0x} = \sum_{e_j} \mathbf{A}_{0e_jx}$, qui est l'énergie cédée par le champ $\overline{\mathbf{B}}_{0x}$ aux modes esclaves. Ces trois termes ont été calculés pour SN_{2m} en fonction de Re , et sont représentés à gauche de la figure 6.18. Les courbes de droite montrent le ratio D_{t_x}/I_x (en haut) puis le ratio D_{t_x}/D_{lax} (en bas) en fonction de Re , pour $Rm = 3030$. Ces deux ratios augmentent pour la "lower branch" et pour la "upper branch" lorsque Re augmente. Ce comportement, similaire à celui observé pour SN_1 , suggère que l'augmentation de la dissipation turbulente est également responsable de la disparition des cycles à grand Re dans des boîtes à petit rapport d'aspect. Il faut cependant noter que la gamme de Re étudiée ici est relativement faible et que les variations du ratio D_{t_x}/I_x ne sont pas forcément significatives, même si une tendance générale semble se dessiner.

v) Diffusion turbulente dans des simulations plus génériques

Afin de compléter notre étude dans les boîtes courtes et d'illustrer plus explicitement comment cette diffusion turbulente affecte le cycle SN_{2m} , nous avons réalisé une série de simulations initialisées à partir d'un même état initial (correspondant à LB_{2m} pour $Re = 908$ et $Rm = 3030$),

en faisant varier Re et Rm . Il n'est pas possible ici d'étudier précisément l'évolution du bilan d'énergie global (6.15) car les variations en Re et Rm imposées modifient drastiquement la dynamique non-linéaire associée à la régénération des ondes successives. Cependant il est possible de calculer l'énergie gagnée ou perdue $\Delta\mathcal{E}_m$ par le champ \overline{B}_{0x} sur une période du cycle SN_{2m} en fonction de Re et Rm . Le résultat (non représenté ici) montre que le champ perd systématiquement de l'énergie, mais beaucoup moins dans le régime de grands Pm . Le terme de transfert advectif A_{0x} à l'origine de l'entretien de \overline{B}_{0x} semble diminuer à grand Re . Cela ne permet pas de quantifier rigoureusement la dissipation turbulente telle que nous l'avons défini, mais donne une indication qu'un transfert d'énergie magnétique vers les petites échelles est effectivement réalisé à grand Re . La figure 6.19 montre la forme que prend le champ de vitesse vertical et le champ B_x total, à $t = 5 S^{-1}$ pour deux simulations initialisées à partir du cycle LB_{2m} . La première est réalisée pour $Re = 908$ (cycle exact) et la deuxième pour $Re = 5000$. On distingue clairement que le champ de vitesse vertical, acquiert de la structure à petite échelle à grand Re . Les tourbillons poloidaux qui advectent le champ magnétique et qui sont responsables de son retournement sont fortement déformés et présentent une structure plus turbulente. Ces dernières diffusent le champ magnétique de manière plus efficace que dans le régime laminaire à Re faible et sont à l'origine de la fuite d'énergie magnétique et d'une dissipation efficace de celle-ci à petite échelle. L'apparition de gradients plus forts dans la structure du champ magnétique à grand Re (voir figure 6.19) atteste de la présence plus marquée de ces petites échelle magnétiques.

6.5 Conclusions

Les résultats présentés dans ce chapitre suggèrent que l'origine physique de la disparition des cycles à petit Pm est l'augmentation des effets de diffusion magnétique turbulente à la fois sur la composante du champ support de la MRI et sur les perturbations non-axisymétriques MRI actives. Cette conclusion semble indépendante des configurations de boîtes utilisées. Une remarque importante est que cette étude a été effectuée dans un régime transitionnel à Re et Rm modérés. Il est pour le moment impossible de conclure sur le comportement asymptotique du système à très grand Re et Rm . Aborder ce problème dans la gamme de paramètres astrophysiques est particulièrement délicat avec les techniques utilisées durant cette thèse, et nécessiterait de pouvoir continuer les cycles de dynamo ou d'effectuer des simulations à très haute résolution numérique.

Notons finalement que l'analyse des oscillations épicycliques sur les cycles, même si elle s'est révélée infructueuse pour caractériser la dépendance en Pm de la transition, a par ailleurs permis de décrire pour la première fois la dynamique quasilineaire de la MRI dans un champ support lui-même dépendant du temps.

Conclusions et perspectives

Résumé du travail effectué

L'objectif principal de cette thèse était de mettre à jour les mécanismes d'excitation de la dynamo magnétorotationnelle et de la turbulence MHD associée, dans un écoulement képlérien cisailé représentatif des disques d'accrétion astrophysiques minces, et d'en comprendre la dépendance vis à vis des processus dissipatifs. Nous avons utilisé pour cela des simulations locales 3D des équations de la MHD incompressible, visqueuse et résistive dans la shearing box. L'approche suivie tout au long de cette thèse s'est largement inspirée des travaux effectués sur le problème de la transition hydrodynamique des écoulements cisailés non-tournants. Notre étude s'est notamment cristallisée autour de structures cycliques de dynamo MRI, qui se sont révélées intéressantes pour répondre à la problématique posée.

Au chapitre 4, nous avons montré qu'une transition entre un état laminaire et un état turbulent semble s'opérer dans le régime $Pm \sim 1$. Cette étude, complémentaire de celle de Fromang et al. (2007), a permis de généraliser ce résultat à différents rapports d'aspect des simulations. Nous avons ensuite mis en évidence la structure complexe et de géométrie probablement fractale de la frontière de transition dans l'espace des phases, ainsi que la présence marquée de comportements cycliques dans la dynamique transitionnelle. Plusieurs solutions périodiques ont été identifiées grâce à l'algorithme de Newton-Krylov, dans différentes configurations de boîtes et pour différents régimes de dissipation. Dans le chapitre 5, nous avons présenté une analyse des bifurcations de ces cycles qui a permis d'établir le lien étroit existant entre ces structures et l'émergence des premiers germes d'une activité dynamo chaotique. Ce résultat, longtemps recherché dans le contexte de la transition sous-critique hydrodynamique, a été obtenu pour la première fois dans un système fluide 3D à plusieurs milliers de degrés de liberté, en parallèle et indépendamment de travaux similaires sur le problème hydrodynamique (Kreilos et Eckhardt, 2012). Il a nécessité la mise en œuvre de techniques numériques originales et de concepts empruntés à la théorie des systèmes dynamiques, peu couramment utilisés en astrophysique. En se basant sur ce résultat, nous avons finalement pu mettre en évidence un mécanisme physique à même d'expliquer l'existence d'une frontière de transition en Pm pour cette dynamo. Notre interprétation des résultats présentés dans le chapitre 6 est que l'excitation de la dynamo MRI à $Pm \ll 1$ est rendue difficile par la présence d'une diffusion magnétique turbulente affectant le champ support de la MRI, ainsi que les perturbations non-axisymétriques MRI-instables. Cet effet semble assez robuste et a été mis en évidence pour plusieurs rapports d'aspect du problème.

Implications pour l'astrophysique des disques et l'étude des dynamos

Il est important de souligner que la nature idéalisée des simulations que nous avons réalisées durant cette thèse (Re et Rm modérés "transitionnels", incompressibilité, géométrie cartésienne, conditions aux bords périodiques) ne permet pas d'extrapoler directement les résultats aux

disques d'accrétion, étant donné la physique plus complexe de ces objets et les gammes de Re et Rm plus grandes qui caractérisent la plupart d'entre eux. Cependant, ce travail constitue une étape essentielle à la compréhension rigoureuse de mécanismes de bases d'excitation de la turbulence MHD dans les disques et plus généralement de dynamos astrophysiques.

La mise en évidence des effets de diffusion magnétique turbulente à bas Pm dans ce problème constitue le premier point important de discussion. Un tel effet a également été mesuré dans des expériences d'écoulements turbulents de sodium liquide, pour des régimes de bas Pm (Frick et al., 2010; Rahbarnia et al., 2012) et pourrait notamment être responsable de l'augmentation du seuil critique en Rm d'activation de dynamo (cinématique) dans ces expériences (Miralles et al., 2013). Notons que dans notre cas, les mouvements turbulents responsables de cet effet ne sont pas imposés de manière indépendante du champ magnétique, mais sont excités indirectement par la MRI. Combinés à nos résultats, ces travaux attestent donc de la généralité de ce processus et laissent à penser qu'il est incontournable dans les disques d'accrétion, dont la plupart se caractérisent par des Pm faibles. Il n'est cependant pas démontré aujourd'hui qu'une frontière laminaire/turbulent autour de $Pm \sim cte$ existe toujours à très grand Re et Rm , même si l'analyse énergétique présentée au chapitre 6 pourrait théoriquement être appliquée également à ces régimes très turbulents. Des simulations à plus haute résolution seront nécessaires pour déterminer dans quelles conditions un effet dynamo peut se manifester dans les régimes de dissipation caractéristiques des disques. Notons enfin que l'effet de diffusion turbulente mis en évidence pourrait également contribuer à expliquer la diminution importante du transport à petit Pm observée dans les simulations dans lesquelles le champ magnétique support de l'instabilité MRI est imposé. En effet, il est possible que cet effet affecte directement les perturbations amplifiées par l'instabilité dans cette configuration, ainsi que la distribution radiale du champ support. Cette interprétation reste bien entendu spéculative pour le moment, mais pourrait élargir la portée astrophysique des résultats obtenus.

Ce travail nous a par ailleurs permis de mieux comprendre la nature, la physique et le rôle joué par des solutions périodiques dans ce processus de dynamo. Une grande variété de comportements cycliques a pu être identifiée. Nous avons pu en particulier calculer des solutions périodiques dont la dynamique est basée sur le passage successif de plusieurs ondes de cisaillement (en comparaison à la paire de cycle SN_1 qui n'est bâtie que sur une seule onde par renversement du champ magnétique). Ces cycles pourraient constituer une clé de compréhension des états de turbulence développée et des diagrammes dynamos "papillons" observés dans les simulations à grand Re et Rm (Lesur et Ogilvie, 2008a; Simon et al., 2011), pour lesquels la dynamique du champ magnétique axisymétrique à grande échelle semble régie par l'action cumulative ("statistique") de perturbations non-axisymétriques à plus petite échelle. L'étude des bifurcations de ces cycles a également permis de progresser dans la compréhension des mécanismes de transition à la turbulence sous-critique dans un contexte plus général que celui des disques. De telles bifurcations vers des états chaotiques sont en effet recherchées dans le problème de la géodynamo et les expériences de dynamos (Monchaux et al., 2009; Gissinger, 2012).

Enfin, la caractérisation détaillée des mécanismes de transition de la dynamo MRI effectuée au cours de cette thèse représente une étape significative dans l'étude des dynamos sous-critiques basées sur des instabilités MHD, dont les bases physiques semblent très différentes des dynamos de champ moyen de type $\alpha\Omega$, souvent invoquées dans le contexte astrophysique.

Perspectives

Ce travail ouvre plusieurs perspectives de recherche intéressantes pour l'avenir.

- Tout d'abord, il serait intéressant d'étudier les mécanismes d'excitation de la dynamo MRI dans des configurations physiques plus générales, en prenant en compte notamment la stratification verticale et en imposant des conditions aux bords plus réalistes. Comme nous l'avons vu, ces effets pourraient modifier la structure de l'écoulement, notamment par l'action de la flottaison magnétique qui a tendance à expulser le champ magnétique hors du disque (Brandenburg et al. (1995), voir également la thèse de C.J. Donnelly, Cambridge, 2013). L'identification et l'étude de solutions cycliques dans ce genre de configuration, telles que nous l'avons effectuée durant cette thèse, apparaît intéressante pour aborder ce problème.
- La géométrie cartésienne utilisée dans nos simulations est également une limitation importante à la modélisation réaliste des écoulements dans les disques. Des simulations numériques cylindriques globales de disques pourrait s'avérer fort utile pour mieux comprendre les effets intrinsèques à cette géométrie. De telles simulations seront cependant plus difficiles à mettre en œuvre, pour des raisons techniques et de temps de calcul.
- Ce travail pourrait également être confronté dans les années avenir aux expériences de dynamos, et notamment à celles programmées dans les écoulements plasmas en rotation képlérienne (expérience MPDX de Madison, voir Collins et al. (2012), expérience PROMISE de Rossendorf). Ces expériences pourraient en effet permettre d'étudier le processus de dynamo magnétorotationnelle en géométrie globale cylindrique ou sphérique. Une analyse numérique similaire à celle effectuée au cours de cette thèse dans une géométrie similaire à celle de ces expériences pourrait s'avérer fort utile pour déterminer si une dynamo magnétorotationnelle peut effectivement être excitée dans celles-ci.
- Ce travail pourrait servir à la compréhension de mécanismes de dynamos soutenues par d'autres instabilités que la MRI (Spruit, 2002; Cline et al., 2003) dont on pense qu'elles pourraient être actives en milieu stellaire. Les travaux de Cline et al. (2003), en particulier, indiquent que des signatures de dynamique non-linéaire chaotique similaires à celles identifiées dans notre problème sont présentes dans la dynamo basée sur l'instabilité de flottaison magnétique, qui pourrait être pertinente dans le contexte solaire. L'enjeu sera de déterminer si le concept de processus de dynamo auto-entretenu se généralise concrètement à ce type de dynamos et de mettre en évidence des solutions cycliques correspondantes.
- Bien que le mécanisme de dynamo que nous avons décrit soit par nature très différent de celui de la dynamo de champ moyen, des ponts pourraient exister entre ces différentes

approches. En effet il est possible que dans les régimes plus turbulents que ceux simulés ici, la dynamique du champ à grande échelle soit le fruit d'un effet statistique cumulatif, induit par le passage successif d'ondes de cisaillement. Cette dynamique pourrait alors peut-être être réduite à un formalisme de champ moyen restant effectif à établir.

- Enfin l'un des défis majeurs de la théorie de l'accrétion est l'estimation de l'efficacité du transport turbulent de moment cinétique au sein des disques, pour des régimes de turbulence développée représentatifs des conditions astrophysiques. La théorie des orbites périodiques (voir annexe D) pourrait permettre d'évaluer ce transport à partir d'une statistique sur les cycles présents dans l'écoulement turbulent. L'application pratique de cette théorie n'a pas donné de résultats convaincants jusqu'à présent, une des difficultés rencontrées étant que le nombre de structures périodiques et de bifurcations dans l'écoulement augmente très rapidement avec Re et Rm . Cependant, les efforts actuels menés dans cette direction par la communauté travaillant sur le problème de la transition à la turbulence dans les écoulements cisailés pourraient permettre des progrès importants dans les prochaines années et méritent donc d'être suivis de près dans la perspective d'une application à des problèmes astrophysiques.

Nous terminerons par souligner la grande richesse de ce problème et les nombreuses perspectives que son étude offre pour la compréhension des mécanismes d'accrétion et des dynamos astrophysiques.

Bibliographie

- ALECIAN, E. *An Introduction to Accretion Disks*, volume 857 of *Lecture Notes in Physics*. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- ARMITAGE, P. J. *Astrophysics of Planet Formation*. Cambridge University Press, 2010.
- ARMITAGE, P. J. Dynamics of Protoplanetary Disks. *ARA&A*, vol. 49, p. 195–236, 2011.
- AVILA, K., MOXEY, D., DE LOZAR, A., AVILA, M., BARKLEY, D. et HOF, B. The Onset of Turbulence in Pipe Flow. *Science*, vol. 333, p. 192–, 2011.
- AVILA, M. Stability and Angular-Momentum Transport of Fluid Flows between Corotating Cylinders. *Physical Review Letters*, vol. 108 (12), p. 124501, 2012.
- BALBUS, S. A. Enhanced Angular Momentum Transport in Accretion Disks. *ARA&A*, vol. 41, p. 555–597, 2003.
- BALBUS, S. A. et HAWLEY, J. F. A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I - Linear analysis. *ApJ*, vol. 376, p. 214–233, 1991.
- BALBUS, S. A. et HAWLEY, J. F. A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. IV. Nonaxisymmetric Perturbations. *ApJ*, vol. 400, p. 610–621, 1992.
- BALBUS, S. A. et HAWLEY, J. F. Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks. *Rev. Mod. Phys.*, vol. 70, p. 1–53, 1998.
- BALBUS, S. A. et HAWLEY, J. F. An Exact, Three-dimensional, Time-dependent Wave Solution in Local Keplerian Flow. *ApJ*, vol. 652, p. 1020–1027, 2006.
- BALBUS, S. A., HAWLEY, J. F. et STONE, J. M. Nonlinear Stability, Hydrodynamical Turbulence, and Transport in Disks. *ApJ*, vol. 467, p. 76, 1996.
- BALBUS, S. A. et HENRI, P. On the Magnetic Prandtl Number Behavior of Accretion Disks. *ApJ*, vol. 674, p. 408–414, 2008.
- BARKLEY, D. Simplifying the complexity of pipe flow. *Phys. Rev. E*, vol. 84 (1), p. 016309, 2011.
- BIRKHOFF, G. D. Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques. *Mem. Pont. Acad. Sci. Nov. Lyn.*, vol. 1, p. 85, 1935.
- BISNOVATYI-KOGAN, G. S. et LOVELACE, R. V. E. Large-Scale B-Field in Stationary Accretion Disks. *ApJ*, vol. 667, p. L167–L169, 2007.

- BISNOVATYI-KOGAN, G. S. et RUZMAIKIN, A. A. The accretion of matter by a collapsing star in the presence of a magnetic field. II - Selfconsistent stationary picture. *Astrophys. Space Sci.*, vol. 42, p. 401–424, 1976.
- BLACKMAN, E. G. et FIELD, G. B. New dynamical mean-field dynamo theory and closure approach. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 89, p. p 265007, 2002.
- BLANDFORD, R. D. et PAYNE, D. G. Hydromagnetic flows from accretion discs and the production of radio jets. *MNRAS*, vol. 199, p. 883–903, 1982.
- BODO, G., CATTANEO, F., FERRARI, A., MIGNONE, A. et ROSSI, P. Symmetries, scaling laws, and convergence in shearing-box simulations of magneto-rotational instability driven turbulence. *ApJ*, vol. 739, p. 82, 2011.
- BODO, G., CATTANEO, F., MIGNONE, A. et ROSSI, P. On the Convergence of Magnetorotational Turbulence in Stratified Isothermal Shearing Boxes. *ApJL*, vol. 787, p. L13, 2014.
- BOTTIN, S. et CHATÉ, H. Statistical analysis of the transition to turbulence in plane couette flow. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 6 (1), p. 143–155, 1998.
- BRANDENBURG, A., NORDLUND, A., STEIN, R. F. et TORKESSON, U. Dynamo-generated Turbulence and Large-Scale Magnetic Fields in a Keplerian Shear Flow. *ApJ*, vol. 446, p. 741–754, 1995.
- BRANDENBURG, A., RADLER, K. H. et SCHRINNER, M. Scale dependence of alpha effect and turbulent diffusivity. *A&A*, vol. 482 (3), p. 739–746, 2008.
- BRANDENBURG, A. et SUBRAMANIAN, K. Astrophysical magnetic fields and nonlinear dynamo theory. *Phys. Rep.*, vol. 417, p. 1–209, 2005.
- CABOT, W. Numerical Simulations of Circumstellar Disk Convection. *ApJ*, vol. 465, p. p 874, 1996.
- CABRIT, S. Constraints on accretion-ejection structures in young stars. *Proceedings of EAS Publications Series*, vol. 3 of *EAS Publications Series*, p. 147–182, 2002.
- CAMPBELL, C. G. Magnetically-controlled disc accretion. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, vol. 63, p. 197–213, 1992.
- CANNIZZO, J. K. The Accretion Disk Limit Cycle Model : Toward an Understanding of the Long-Term Behavior of SS Cygni. *ApJ*, vol. 419, p. 318, 1993.
- CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A. et ZANG, T. A. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer, 1988.
- CASSE, F. et FERREIRA, J. Magnetized accretion-ejection structures. IV. Magnetically-driven jets from resistive, viscous, Keplerian discs. *A&A*, vol. 353, p. 1115–1128, 2000.
- CATTANEO, F. et HUGHES, D. W. Nonlinear saturation of the turbulent α effect. *Phys. Rev. E*, vol. 54, p. R4532–R4535, 1996.

- CHANDLER, G. J. et KERSWELL, R. R. Invariant recurrent solutions embedded in a turbulent two-dimensional Kolmogorov flow. *J. Fluid Mech.*, vol. 722, p. 554–595, 2013.
- CHANDRASEKHAR, S. The Stability of Non-Dissipative Couette Flow in Hydromagnetics. *Proceedings of Natl. Acad. Sci.*, vol. 46, p. 253–257, 1960.
- CHANDRASEKHAR, S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. 1961.
- CHEN, Q., OTTO, A. et LEE, L. C. Tearing instability, Kelvin-Helmholtz instability, and magnetic reconnection. *J. Geophys. Res.*, vol. 102, p. 151–162, 1997.
- CHRISTIANSEN, F., CVITANOVIC, P. et PUTKARADZE, V. Spatiotemporal chaos in terms of unstable recurrent patterns. *Nonlinearity*, vol. 10, p. 55, 1997.
- CLEVER, R. M. et BUSSE, F. H. Three-dimensional convection in a horizontal fluid layer subjected to a constant shear. *J. Fluid Mech.*, vol. 234, p. 511–527, 1992.
- CLINE, K. S., BRUMMELL, N. H. et CATTANEO, F. Dynamo Action Driven by Shear and Magnetic Buoyancy. *ApJ*, vol. 599, p. 1449–1468, 2003.
- COLLINS, C., KATZ, N., WALLACE, J., JARA-ALMONTE, J., REESE, I., ZWEIBEL, E. et FOREST, C. B. Stirring Unmagnetized Plasma. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 108 (11), p. 115001, 2012.
- COSSU, C., BRANDT, L., BAGHERI, S. et HENNINGSON, D. S. Secondary threshold amplitudes for sinuous streak breakdown. *Physics of Fluids*, vol. 23 (7), p. 074103, 2011.
- CVITANOVIC, P. Periodic orbit theory in classical and quantum mechanics. *Chaos*, vol. 2, p. 1–4, 1992.
- CVITANOVIC, P. *Chaos : Classical and quantum*. 2004. URL <http://chaosbook.org>.
- CVITANOVIC, P., GASPARD, P. et SCHREIBER, T. Investigation of the Lorentz gas in terms of periodic orbits. *Chaos*, vol. 2, p. 85–90, 1992.
- DARBYSHIRE, A. G. et MULLIN, T. Transition to turbulence in constant-mass-flux pipe flow. *J. Fluid Mech.*, vol. 289, p. 83, 1995.
- DAUCHOT, O. et DAVIAUD, F. Finite amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow. *Physics of Fluids*, vol. 7, p. 335–343, 1995.
- DAVIES, S. J. et WHITE, C. M. An experimental study of the flow of water in pipes of rectangular section. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, vol. 119 (781), p. pp. 92–107, 1928.
- DAVIS, S. W., STONE, J. M. et PESSAH, M. E. Sustained Magnetorotational Turbulence in Local Simulations of Stratified Disks with Zero Net Magnetic Flux. *ApJ*, vol. 713, p. 52–65, 2010.
- DONATI, J.-F., PALETOU, F., BOUVIER, J. et FERREIRA, J. Direct detection of a magnetic field in the innermost regions of an accretion disk. *Nature*, vol. 438, p. 466–469, 2005.

- DRAZIN, P. G. et REID, W. H. *Hydrodynamic Stability*. 2004.
- DUGUET, Y., WILLIS, A. P. et KERSWELL, R. R. Transition in pipe flow : the saddle structure on the boundary of turbulence. *J. Fluid Mech.*, vol. 613, p. 255–274, 2008.
- EDLUND, E. M. et JI, H. Nonlinear stability of laboratory quasi-Keplerian flows. *Phys. Rev. E*, vol. 89 (2), p. 021004, 2014.
- EHRENSTEIN, U. et KOCH, W. Three-dimensional wavelike equilibrium states in plane poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, vol. 228, p. 111–148, 1991.
- FAISST, H. et ECKHARDT, B. Traveling waves in pipe flow. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91 (22), p. 224502, 2003.
- FAISST, H. et ECKHARDT, B. Sensitive dependence on initial conditions in transition to turbulence in pipe flow. *J. Fluid Mech.*, vol. 504, p. 343, 2004.
- FEIGENBAUM, M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, vol. 19, p. 25–52, 1978.
- FEIGENBAUM, M. J. The metrical universal proprieties of period doubling bifurcations and the spectrum for a route to turbulence. *Ann. New York. Acad. Sci.*, vol. 357, p. 330–336, 1980.
- FERREIRA, J. et PELLETIER, G. Magnetized accretion-ejection structures. III. Stellar and extragalactic jets as weakly dissipative disk outflows. *A&A*, vol. 295, p. 807, 1995.
- FLEMING, T. et STONE, J. M. Local Magnetohydrodynamic Models of Layered Accretion Disks. *ApJ*, vol. 585, p. 908–920, 2003.
- FLOCK, M., FROMANG, S., GONZÁLEZ, M. et COMMERÇON, B. Radiation magnetohydrodynamics in global simulations of protoplanetary discs. *A&A in press*, vol. 560, p. A43, 2013.
- FRANK, J., KING, A. et RAINE, D. J. *Accretion Power in Astrophysics : Third Edition*. Cambridge University Press, 2002.
- FRANSSON, J. H., TALAMELLI, A., BRANDT, L. et COSSU, C. Delaying Transition to Turbulence by a Passive Mechanism. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96 (6), p. 064501, 2006.
- FRICK, P., NOSKOV, V., DENISOV, S. et STEPANOV, R. Direct Measurement of Effective Magnetic Diffusivity in Turbulent Flow of Liquid Sodium. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105 (18), p. 184502, 2010.
- FROMANG, S. MRI-driven angular momentum transport in protoplanetary disks. *EAS Publications Series*, volume 62 of *EAS Publications Series*, p. 95–142, 2013.
- FROMANG, S., HENNEBELLE, P. et TEYSSIER, R. A high order Godunov scheme with constrained transport and adaptive mesh refinement for astrophysical magnetohydrodynamics. *A&A*, vol. 457, p. 371–384, 2006.
- FROMANG, S. et PAPALOIZOU, J. MHD simulations of the magnetorotational instability in a shearing box with zero net flux. I. The issue of convergence. *A&A*, vol. 476, p. 1113–1122, 2007.

- FROMANG, S., PAPALOIZOU, J., LESUR, G. et HEINEMANN, T. MHD simulations of the magnetorotational instability in a shearing box with zero net flux. II. The effect of transport coefficients. *A&A*, vol. 476, p. 1123–1132, 2007.
- FUKAGAWA, M., TAMURA, M., ITOH, Y., KUDO, T., IMAEDA, Y., OASA, Y., HAYASHI, S. et HAYASHI, M. Near-infrared images of protoplanetary disk surrounding hd 142527. *APJL*, vol. 636 (2), p. L153, 2006.
- FURTH, H. P., KILLEEN, J. et ROSENBLUTH, M. N. Finite-Resistivity Instabilities of a Sheet Pinch. *Physics of Fluids*, vol. 6, p. 459–484, 1963.
- GAMMIE, C. F. Layered Accretion in T Tauri Disks. *ApJ*, vol. 457, p. 355, 1996.
- GAMMIE, C. F. Nonlinear Outcome of Gravitational Instability in Cooling, Gaseous Disks. *ApJ*, vol. 553, p. 174–183, 2001.
- GAVRILOV, N. et SHIL'NIKOV, L. On the three dimensional dynamical systems close to a system with a structurally unstable homoclinic curve, i. *Math. USSR Sbornik*, vol. 17, p. 467, 1972.
- GIBSON, J. F. Channelflow : a spectral Navier-Stokes simulator in C++. Technical report, U. New Hampshire, 2012. Channelflow.org.
- GIBSON, J. F., HALCROW, J. et CVITANOVIĆ, P. Visualizing the geometry of state space in plane Couette flow. *J. Fluid Mech.*, vol. 611, p. 107–130, 2008.
- GIBSON, J. F., HALCROW, J. et CVITANOVIĆ, P. Equilibrium and travelling-wave solutions of plane Couette flow. *J. Fluid Mech.*, vol. 638, p. 243, 2009.
- GISSINGER, C. A new deterministic model for chaotic reversals. *European Physical Journal B*, vol. 85, p. 137, 2012.
- GOLDREICH, P. et LYNDEN-BELL, D. II. Spiral arms as sheared gravitational instabilities. *MNRAS*, vol. 130, p. 125, 1965.
- GOLDSTON, R. et RUTHERFORD, P. *Introduction to Plasma Physics, chapter 20*. Taylor & Francis, 2010.
- GOODMAN, J. et XU, G. Parasitic instabilities in magnetized, differentially rotating disks. *ApJ*, vol. 432, p. 213–223, 1994.
- GRESSEL, O. A mean-field approach to the propagation of field patterns in stratified magnetorotational turbulence. *MNRAS*, vol. 405, p. 41–48, 2010.
- HAISCH, JR., K. E., LADA, E. A. et LADA, C. J. Disk Frequencies and Lifetimes in Young Clusters. *ApJ*, vol. 553, p. L153–L156, 2001.
- HALCROW, J., GIBSON, J. F., CVITANOVIĆ, P. et VISWANATH, D. Heteroclinic connections in plane Couette flow. *J. Fluid Mech.*, vol. 621, p. 365, 2009.
- HAMILTON, J. M., KIM, J. et WALEFFE, F. Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures. *J. Fluid Mech.*, vol. 287, p. 317–348, 1995.

- HARTMANN, L. *Accretion Processes in Star Formation : Second Edition*. Cambridge University Press, 2009.
- HARTMANN, L., CALVET, N., GULLBRING, E. et D'ALESSIO, P. Accretion and the Evolution of T Tauri Disks. *ApJ*, vol. 495, p. 385, 1998.
- HAWLEY, J. F. et BALBUS, S. A. A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disks. II. Nonlinear Evolution. *ApJ*, vol. 376, p. 223–233, 1991.
- HAWLEY, J. F., BALBUS, S. A. et WINTERS, W. F. Local hydrodynamic stability of accretion disks. *ApJ*, vol. 518, p. 394–404, 1999.
- HAWLEY, J. F., GAMMIE, C. F. et BALBUS, S. A. Local Three-dimensional Magnetohydrodynamic Simulations of Accretion Disks. *ApJ*, vol. 440, p. 742, 1995.
- HAWLEY, J. F., GAMMIE, C. F. et BALBUS, S. A. Local Three-dimensional Simulations of an Accretion Disk Hydromagnetic Dynamo. *ApJ*, vol. 464, p. 690–703, 1996.
- HÉNON, M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Commun. Math. Phys.*, vol. 50, p. 69, 1976.
- HERAULT, J. Stabilité non-linéaire et effet dynamo dans un écoulement MHD cisailé, Stage 2009-2010.
- HERAULT, J., RINCON, F., COSSU, C., LESUR, G., OGILVIE, G. I. et LONGARETTI, P.-Y. Periodic magnetorotational dynamo action as a prototype of nonlinear magnetic-field generation in shear flows. *Phys. Rev. E*, vol. 84, p. 036321, 2011.
- HOF, B., JUEL, A. et MULLIN, T. Scaling of the Turbulence Transition Threshold in a Pipe. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91 (24), p. 244502, 2003.
- HOF, B., WESTERWEEL, J., SCHNEIDER, T. M. et ECKHARDT, B. Finite lifetime of turbulence in shear flows. *Nature*, vol. 443, p. 59, 2006.
- HUBBARD, A. et BRANDENBURG, A. Catastrophic Quenching in $\alpha\Omega$ Dynamos Revisited. *ApJ*, vol. 748, p. 51, 2012.
- HUGHES, D. W. et CATTANEO, F. The alpha-effect in rotating convection : size matters. *J. Fluid Mech.*, vol. 594, p. 445–461, 2008.
- HUTAWARAKORN, B. et COHEN, R. J. Magnetic field structure in the bipolar outflow source G 35.2-0.74N : MERLIN spectral line results. *MNRAS*, vol. 303, p. 845–854, 1999.
- ICHIMARU, S. Bimodal behavior of accretion disks - Theory and application to Cygnus X-1 transitions. *ApJ*, vol. 214, p. 840–855, 1977.
- ISKAKOV, A. B., SCHEKOCIHIN, A. A., COWLEY, S. C., MCWILLIAMS, J. C. et PROCUTOR, M. R. E. Numerical Demonstration of Fluctuation Dynamo at Low Magnetic Prandtl Numbers. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98 (20), p. 208501, 2007.
- JAFFE, W., FORD, H. C., FERRARESE, L., VAN DEN BOSCH, F. et O'CONNELL, R. W. A large nuclear accretion disk in the active galaxy NGC4261. *Nature*, vol. 364, p. 213–215, 1993.

- JI, H., BURIN, M. J., SCHATMAN, E. et GOODMAN, J. Hydrodynamic turbulence cannot transport angular momentum effectively in astrophysical disks. *Nature*, vol. 444, p. 343, 2006.
- JOHNSON, B. M. et GAMMIE, C. F. Vortices in Thin, Compressible, Unmagnetized Disks. *ApJ*, vol. 635, p. 149–156, 2005.
- JOHNSON, B. M. et GAMMIE, C. F. Nonlinear Stability of Thin, Radially Stratified Disks. *ApJ*, vol. 636, p. 63–74, 2006.
- KÄPYLÄ, P. J. et KORPI, M. J. Magnetorotational instability driven dynamos at low magnetic Prandtl numbers. *MNRAS*, vol. 413, p. 901, 2011.
- KAWAHARA, G. et KIDA, S. Periodic motion embedded in plane Couette turbulence : regeneration cycle and burst. *J. Fluid Mech.*, vol. 449, p. 291, 2001.
- KENYON, S. J. et HARTMANN, L. High-resolution infrared spectra of FU Orionis variables - Keplerian rotation and mass loss. *ApJ*, vol. 342, p. 1134–1141, 1989.
- KING, A. R., PRINGLE, J. E. et LIVIO, M. Accretion disc viscosity : how big is alpha ? *MNRAS*, vol. 376, p. 1740–1746, 2007.
- KLAHR, H. The Global Baroclinic Instability in Accretion Disks. II. Local Linear Analysis. *ApJ*, vol. 606, p. 1070–1082, 2004.
- KLAHR, H. H. et BODENHEIMER, P. Turbulence in Accretion Disks : Vorticity Generation and Angular Momentum Transport via the Global Baroclinic Instability. *ApJ*, vol. 582, p. 869–892, 2003.
- KNOBLOCH, E. On the stability of stratified plane Couette flow. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, vol. 29 (2), p. 105–116, 1984.
- KNOBLOCH, E. et R., M. D. Transition to chaos in two-dimensional double-diffusive convection. *J. Fluid Mech.*, vol. 166, p. 409–448, 1986.
- KNOBLOCH, E. et WEISS, N. O. Bifurcations in a model of double-diffusive convection. *Phys. Lett. A*, vol. 85, p. 127, 1981.
- KORYCANSKY, D. G. Growth and decay of disturbances in stratified shear flow in a rotating frame. *ApJ*, vol. 399, p. 176–181, 1992.
- KREILOS, T. et ECKHARDT, B. Periodic orbits near the onset of chaos in plane couette flow. *Chaos*, vol. 22, p. 047505, 2012.
- LAN, Y. et CVITANOVIĆ, P. Unstable recurrent patterns in Kuramoto-Sivashinsky dynamics. *Phys. Rev. E*, vol. 78 (2), p. 026208, 2008.
- LAPLACE, P. S. *Exposition du système du monde*, volume V. Gallica, bibliothèque numérique de la BNF, 1796.
- LATTER, H. N. et BALBUS, S. The dynamics of inner dead-zone boundaries in protoplanetary discs. *MNRAS*, vol. 424, p. 1977–1990, 2012.

- LATTER, H. N., LESAFFRE, P. et BALBUS, S. A. MRI channel flows and their parasites. *MNRAS*, vol. 394, p. 715–729, 2009.
- LESUR, G. *Instabilités et sources locales de turbulence dans les disques d'accrétion*. PhD thesis, 2007.
- LESUR, G., FERREIRA, J. et OGILVIE, G. I. The magnetorotational instability as a jet launching mechanism. *A&A*, vol. 550, p. A61, 2013.
- LESUR, G. et LONGARETTI, P.-Y. On the relevance of subcritical hydrodynamic turbulence to accretion disk transport. *A&A*, vol. 444, p. 25–44, 2005.
- LESUR, G. et LONGARETTI, P.-Y. Impact of dimensionless numbers on the efficiency of magnetorotational instability induced turbulent transport. *MNRAS*, vol. 378, p. 1471–1480, 2007.
- LESUR, G. et OGILVIE, G. I. Localized magnetorotational instability and its role in the accretion disc dynamo. *MNRAS*, vol. 391, p. 1437, 2008a.
- LESUR, G. et OGILVIE, G. I. On self-sustained dynamo cycles in accretion discs. *A&A*, vol. 488, p. 451, 2008b.
- LESUR, G. et OGILVIE, G. I. On the angular momentum transport due to vertical convection in accretion discs. *MNRAS*, vol. 404, p. L64–L68, 2010.
- LESUR, G. et PAPALOIZOU, J. C. B. The subcritical baroclinic instability in local accretion disc models. *A&A*, vol. 513, p. A60, 2010.
- LIN, D. N. C. et PAPALOIZOU, J. On the structure and evolution of the primordial solar nebula. *MNRAS*, vol. 191, p. 37–48, 1980.
- LIN, D. N. C. et PAPALOIZOU, J. C. B. Theory of Accretion Disks II : Application to Observed Systems. *ARA&A*, vol. 34, p. 703–748, 1996.
- LIVIO, M. Astrophysical jets : a phenomenological examination of acceleration and collimation. *Physics Reports*, vol. 311, p. 225–245, 1999.
- LORD KELVIN. Stability of fluid motion - rectilinear motion of viscous fluid between two parallel planes. *Phil. Mag.*, vol. 24 (5), p. 188, 1887.
- LOVELACE, R. V. E. Dynamo model of double radio sources. *Nature*, vol. 262, p. 649–652, 1976.
- LYNDEN-BELL, D. et PRINGLE, J. E. The evolution of viscous discs and the origin of the nebular variables. *MNRAS*, vol. 168, p. 603–637, 1974.
- MAY, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, vol. 261 (5560), p. 459–467, 1976.
- MENDOZA, E. E. Infrared Excesses in T Tauri Stars and Related Objects. *ApJ*, vol. 151, p. 977, 1968.

- MENDOZA V., E. E. Infrared Photometry of T Tauri Stars and Related Objects. *ApJ*, vol. 143, p. 1010, 1966.
- MESEGUER, Á. et TREFETHEN, L. N. Linearized pipe flow to Reynolds number 10^7 . *Journal of Computational Physics*, vol. 186, p. 178–197, 2003.
- MESHALKIN, L. Investigation of the Stability of a Stationary Solution of a System of Equations for the Plane Movement of an Incompressible Viscous Fluid. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 25, p. 1700–1705, 1961.
- MIGNONE, A., BODO, G., MASSAGLIA, S., MATSAKOS, T., TESILEANU, O., ZANNI, C. et FERRARI, A. PLUTO : A Numerical Code for Computational Astrophysics. *ApJS*, vol. 170, p. 228–242, 2007.
- MILLER, K. A. et STONE, J. M. The Formation and Structure of a Strongly Magnetized Corona above a Weakly Magnetized Accretion Disk. *ApJ*, vol. 534, p. 398–419, 2000.
- MIRALLES, S., BONNEFOY, N., BOURGOIN, M., ODIER, P., PINTON, J.-F., PLIHON, N., VERHILLE, G., BOISSON, J., DAVIAUD, F. et DUBRULLE, B. Dynamo threshold detection in the von Kármán sodium experiment. *Phys. Rev. E*, vol. 88 (1), p. 013002, 2013.
- MODJAZ, M., MORAN, J. M., KONDRATKO, P. T. et GREENHILL, L. J. Probing the Magnetic Field at Subparsec Radii in the Accretion Disk of NGC 4258. *ApJ*, vol. 626, p. 104–119, 2005.
- MOEHLIS, J., ECKHARDT, B. et FAISST, H. Fractal lifetimes in the transition to turbulence. *Chaos*, vol. 14, p. 11, 2004a.
- MOEHLIS, J., FAISST, H. et ECKHARDT, B. A low-dimensional model for turbulent shear flows. *New Journal of Physics*, vol. 6, p. 56, 2004b.
- MOFFATT, H. K. *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*. Cambridge University Press, 1978.
- MONCHAUX, R., BERHANU, M., AUMAITRE, S., CHIFFAUDEL, A., DAVIAUD, F., DUBRULLE, B., RAVELET, F., FAUVE, S., MORDANT, N., PETRELIS, F., BOURGOIN, M., ODIER, P., PINTON, J.-F., PLIHON, N. et VOLK, R. The Von Kármán Sodium experiment : turbulent dynamical dynamos. *Phys. Fluids*, vol. 21, p. 035108, 2009.
- MOORE, D. R., TOOMRE, J., KNOBLOCH, E. et WEISS, N. O. Period doubling and chaos in partial differential equations for thermosolutal convection. *Nature*, vol. 303, p. 663, 1983.
- NAGATA, M. Bifurcations in Couette flow between almost corotating cylinders. *J. Fluid Mech.*, vol. 169, p. 229–259, 1986.
- NAGATA, M. Three-dimensional finite-amplitude solutions in plane Couette flow : bifurcation from infinity. *J. Fluid Mech.*, vol. 217, p. 519–527, 1990.
- NARAYAN, R. et QUATAERT, E. Black Hole Accretion. *Science*, vol. 307, p. 77–80, 2005.
- NARAYAN, R. et YI, I. Advection-dominated accretion : A self-similar solution. *ApJ*, vol. 428, p. L13–L16, 1994.

- NEWHOUSE, S. E. The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms. *Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 50, p. 101, 1979.
- OISHI, J. S. et MAC LOW, M.-M. Magnetorotational turbulence transports angular momentum in stratified disks with low magnetic Prandtl number but magnetic Reynolds number above a critical value. *ApJ*, vol. 740, p. 18, 2011.
- ORR, W. M. The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. part I : a perfect liquid. *Proceedings of R. Irish Acad. A.*, vol. 27, p. 9–68, 1907.
- OSTILLA MÓNICO, R., VERZICCO, R., GROSSMANN, S. et LOHSE, D. Turbulence decay towards the linearly-stable regime of Taylor-Couette flow. *J. Fluid Mech.*, vol. 748, 2014.
- OTT, E. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, 1993.
- PAARDEKOOOPER, S.-J. Numerical convergence in self-gravitating shearing sheet simulations and the stochastic nature of disc fragmentation. *MNRAS*, vol. 421, p. 3286–3299, 2012.
- PALIS, J. et TAKENS, F. *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*. Cambridge University Press, 1993.
- PAOLETTI, M. S., VAN GILS, D. P. M., DUBRULLE, B., SUN, C., LOHSE, D. et LATHROP, D. P. Angular momentum transport and turbulence in laboratory models of Keplerian flows. *A&A*, vol. 547, p. A64, 2012.
- PAPALOIZOU, J. et PRINGLE, J. E. Tidal torques on accretion discs in close binary systems. *MNRAS*, vol. 181, p. 441–454, 1977.
- PARKER, E. N. Hydromagnetic Dynamo Models. *ApJ*, vol. 122, p. 293, 1955.
- PATEL, V. C. et HEAD, M. R. Some observations on skin friction and velocity profiles in fully developed pipe and channel flows. *J. Fluid Mech.*, vol. 38, p. 181–201, 1969.
- PELLEGRINI, S., VENTURI, T., COMASTRI, A., FABBIANO, G., FIORE, F., VIGNALI, C., MORGANTI, R. et TRINCHIERI, G. The Nuclear Accretion in the FR I Radio Galaxy IC 4296 from Chandra and Very Long Baseline Array Observations. *ApJ*, vol. 585, p. 677–686, 2003.
- PESSAH, M. E., CHAN, C.-K. et PSALTIS, D. Angular Momentum Transport in Accretion Disks : Scaling Laws in MRI-driven Turbulence. *ApJ*, vol. 668, p. L51–L54, 2007.
- PETERSEN, M. R., STEWART, G. R. et JULIEN, K. Baroclinic Vorticity Production in Protoplanetary Disks. II. Vortex Growth and Longevity. *ApJ*, vol. 658, p. 1252–1263, 2007.
- PETERSON, B. *An Introduction to Active Galactic Nuclei*. Cambridge University Press, 1997.
- POINCARÉ, J. H. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Grands classiques Gauthier-Villars. Blanchard, Paris, 1899.
- POMEAU, Y. Front motion, metastability and subcritical bifurcations in hydrodynamics. *Physica D*, vol. 23, p. 3, 1986.

- PUDRITZ, R. E. Dynamo action in turbulent accretion discs around black holes. I - The fluctuations. II - The mean magnetic field. *MNRAS*, vol. 195, p. 881–914, 1981.
- RADLER, K.-H. The Solar Dynamo *IAU Colloq. 121 : Inside the Sun.*, édité par BERTHOMIEU, G. et CRIBIER, M., volume 159 of *Astrophysics and Space Science Library*, p. 385, 1990.
- RAETTIG, N., LYRA, W. et KLAHR, H. A Parameter Study for Baroclinic Vortex Amplification. *ApJ*, vol. 765, p. 115, 2013.
- RAHBARNIA, K., BROWN, B. P., CLARK, M. M., KAPLAN, E. J., NORNBORG, M. D., RASMUS, A. M., ZANE TAYLOR, N., FOREST, C. B., JENKO, F., LIMONE, A., PINTON, J.-F., PLIHON, N. et VERHILLE, G. Direct Observation of the Turbulent emf and Transport of Magnetic Field in a Liquid Sodium Experiment. *ApJ*, vol. 759, p. 80, 2012.
- REES, M. J., BEGELMAN, M. C., BLANDFORD, R. D. et PHINNEY, E. S. Ion-supported tori and the origin of radio jets. *Nature*, vol. 295, p. 17–21, 1982.
- REICHARDT, H. Über die geschwindigkeitsverteilung in einer geradlinigen turbulenten couettestromung. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 36 (S1), p. S26–S29, 1956.
- REMPEL, E. L., LESUR, G. et PROCTOR, M. R. E. Supertransient Magnetohydrodynamic Turbulence in Keplerian Shear Flows. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105 (4), p. 044501, 2010.
- REYNOLDS, O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous and of the law of resistance in parallel channels. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 174, p. 935–982, 1883.
- RICHARD, D. et ZAHN, J. P. Turbulence in differentially rotating flows. What can be learned from the Couette-Taylor experiment. *A&A*, vol. 347, p. 734–738, 1999.
- RINCON, F., OGILVIE, G. I. et COSSU, C. On self-sustaining processes in Rayleigh-stable rotating plane Couette flows and subcritical transition to turbulence in accretion disks. *A&A*, vol. 463, p. 817–832, 2007a.
- RINCON, F., OGILVIE, G. I. et PROCTOR, M. R. E. Self-sustaining nonlinear dynamo process in Keplerian shear flows. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, p. 254502, 2007b.
- RINCON, F., OGILVIE, G. I., PROCTOR, M. R. E. et COSSU, C. Subcritical dynamos in shear flows. *Astron. Nachr.*, vol. 329, p. 750, 2008.
- RIOLS, A., RINCON, F., COSSU, C., LESUR, G., OGILVIE, G. I., LONGARETTI, P.-Y. et HERAULT, J. Global bifurcations to subcritical magnetorotational dynamo action in Keplerian shear flow. *J. Fluid Mech.*, vol. 731, p. 1–45, 2013.
- ROBERTS, P. H. et STIX, M. Ac-Effect Dynamos, by the Buliard-Gelfman Formalism. *A&A*, vol. 18, p. 453, 1972.
- ROBINSON, C. Bifurcation to infinitely many sinks. *Commun. Math. Phys.*, vol. 90, p. 433, 1983.
- ROBINSON, E. L. The structure of cataclysmic variables. *ARA&A*, vol. 14, p. 119–142, 1976.

- ROMANOV, V. Stability of plane-parallel couette flow. *Functional Analysis and Its Applications*, vol. 7 (2), p. 137–146, 1973.
- ROTHSTEIN, D. M. et LOVELACE, R. V. E. Advection of Magnetic Fields in Accretion Disks : Not So Difficult After All. *ApJ*, vol. 677, p. 1221–1232, 2008.
- SALWEN, H., COTTON, F. W. et GROSCH, C. E. Linear stability of poiseuille flow in a circular pipe. *J. Fluid Mech.*, vol. 98, p. 273–284, 1980.
- SCHARTMAN, E., JI, H., BURIN, M. J. et GOODMAN, J. Stability of quasi-Keplerian shear flow in a laboratory experiment. *A&A in press*, vol. 543, p. A94, 2012.
- SCHEKOCHIHIN, A. A., COWLEY, S. C., TAYLOR, S. F., MARON, J. L. et MCWILLIAMS, J. C. Simulations of the Small-Scale Turbulent Dynamo. *ApJ*, vol. 612, p. 276–307, 2004.
- SCHEKOCHIHIN, A. A., ISKAKOV, A. B., COWLEY, S. C., MCWILLIAMS, J. C., PROCTOR, M. R. E. et YOUSEF, T. A. Fluctuation dynamo and turbulent induction at low magnetic Prandtl numbers. *New Journal of Physics*, vol. 9, p. 300, 2007.
- SCHMIEGEL, A. Fractal Stability Border in Plane Couette Flow. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 79, p. 5250–5253, 1997.
- SCHNEIDER, T., ECKHARDT, B. et YORKE, J. A. Turbulence transition and the edge of chaos in pipe flow. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 99, p. 034502, 2007.
- SCHNEIDER, T. M., DE LILLO, F., BUEHRLE, J., ECKHARDT, B., DÖRNEMANN, T., DÖRNEMANN, K. et FREISLEBEN, B. Transient turbulence in plane couette flow. *Phys. Rev. E*, vol. 81, p. 015301, 2010.
- SCHNEIDER, T. M. et ECKHARDT, B. Lifetime statistics in transitional pipe flow. *Phys. Rev. E*, vol. 78, p. 046310, 2008.
- SCHRINNER, M., RÄDLER, K.-H., SCHMITT, D., RHEINHARDT, M. et CHRISTENSEN, U. Mean-field view on rotating magnetoconvection and a geodynamo model. *Astronomische Nachrichten*, vol. 326, p. 245–249, 2005.
- SHAKURA, N. I. et SUNYAEV, R. A. Black holes in binary systems. Observational appearance. *A&A*, vol. 24, p. 337–355, 1973.
- SHEIKHNEZAMI, S. et FENDT, C. MHD simulations of jet-launching from diffusive magnetized accretion disks. *EAS Publications Series*, volume 58 of *EAS Publications Series*, p. 113–116, 2012.
- SHEN, Y., STONE, J. M. et GARDINER, T. A. Three dimensional compressible hydrodynamic simulations of vortices in disks. *ApJ*, vol. 653, p. 513, 2006.
- SHKLOVSKY, I. S. On the Nature of the Source of X-Ray Emission of SCO XR-1. *ApJ*, vol. 148, p. L1, 1967.
- SIMÓ, C. *Les Méthodes Modernes de la Mécanique Céleste (Goutelas '89)*. , édité par BENEST, D. et FROESCHLÉ, C., p. 285. Editions Frontières, Gif-sur-Yvette, 1989.

- SIMON, J. B., HAWLEY, J. F. et BECKWITH, K. Resistivity-driven state changes in vertically stratified accretion disks. *ApJ*, vol. 730, p. 94, 2011.
- SKUFCA, J. D., YORKE, J. A. et ECKHARDT, B. Edge of Chaos in a Parallel Shear Flow. *Physical Review Letters*, vol. 96 (17), p. 174101, 2006.
- SMALE, S. Differentiable dynamical systems .I. Diffeomorphisms. *Bulletin of American Mathematical Society*, p. 747–817, 1967.
- SPARROW, C. *The Lorenz Equations : Bifurcation, Chaos and Strange Attractors*, volume 41 of *Appl. Math. Sci.* Springer-Verlag, 1982.
- SPITZER, L. *Physics of Fully Ionized Gases*. Interscience Publishers.
- SPRUIT, H. C. Dynamo action by differential rotation in a stably stratified stellar interior. *A&A*, vol. 381, p. 923–932, 2002.
- SPRUIT, H. C. et UZDENSKY, D. A. Magnetic Flux Captured by an Accretion Disk. *ApJ*, vol. 629, p. 960–968, 2005.
- STEENBECK, M. et KRAUSE, F. Erklärung stellarer und planetarer Magnetfelder durch einen turbulenzbedingten Dynamomechanismus. *Zeitschrift Naturforschung Teil A*, vol. 21, p. 1285, 1966.
- STEENBECK, M. et KRAUSE, F. On the Dynamo Theory of Stellar and Planetary Magnetic Fields. I. AC Dynamos of Solar Type. *Astronomische Nachrichten*, vol. 291, p. 49–84, 1969.
- STEPINSKI, T. F. et LEVY, E. H. Generation of dynamo magnetic fields in thin Keplerian disks. *ApJ*, vol. 362, p. 318–332, 1990.
- STIX, M. The galactic dynamo. *A&A*, vol. 42, p. 85–89, 1975.
- STONE, J. M., GARDINER, T. A., TEUBEN, P., HAWLEY, J. F. et SIMON, J. B. Athena : A New Code for Astrophysical MHD. *ApJS*, vol. 178, p. 137–177, 2008.
- STONE, J. M., HAWLEY, J. F., GAMMIE, C. F. et BALBUS, S. A. Three-dimensional Magnetohydrodynamical Simulations of Vertically Stratified Accretion Disks. *ApJ*, vol. 463, p. 656–673, 1996.
- STROM, K. M., STROM, S. E., EDWARDS, S., CABRIT, S. et SKRUTSKIE, M. F. Circumstellar material associated with solar-type pre-main-sequence stars - A possible constraint on the timescale for planet building. *AJ*, vol. 97, p. 1451–1470, 1989.
- SWIFT, J. W. et WIESENFELD, K. Suppression of period doubling in symmetric systems. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 52, p. 705, 1984.
- TEREBEY, S., SHU, F. H. et CASSEN, P. The collapse of the cores of slowly rotating isothermal clouds. *ApJ*, vol. 286, p. 529–551, 1984.
- TOBIAS, S. M., CATTANEO, F. et BRUMMELL, N. H. On the Generation of Organized Magnetic Fields. *ApJ*, vol. 728, p. 153, 2011.

- TORKESSON, U. et BRANDENBURG, A. Turbulent accretion disk dynamos. *A&A*, vol. 283, p. 677–692, 1994.
- TOUT, C. A. et PRINGLE, J. E. Accretion disc viscosity - A simple model for a magnetic dynamo. *MNRAS*, vol. 259, p. 604–612, 1992.
- TREFETHEN, L. N., TREFETHEN, A. E., REDDY, S. C. et DRISCOLL, T. A. Hydrodynamic stability without eigenvalues. *Science*, vol. 261, p. 578–584, 1993.
- UCHIYAMA, Y., URRY, C. M., CHEUNG, C. C., JESTER, S., VAN DUYN, J., COPPI, P., SAMBRUNA, R. M., TAKAHASHI, T., TAVECCHIO, F. et MARASCHI, L. Shedding New Light on the 3C 273 Jet with the Spitzer Space Telescope. *ApJ*, vol. 648, p. 910–921, 2006.
- UMURHAN, O. M. et REGEV, O. Hydrodynamic stability of rotationally supported flows : Linear and nonlinear 2D shearing box results. *A&A*, vol. 427, p. 855, 2004.
- VAN VEEN, L. et KAWAHARA, G. Homoclinic tangle on the edge of shear turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 107, p. 114501, 2011.
- VELIKHOV, E. P. Stability of an ideally conducting liquid flowing between cylinders rotating in a magnetic field. *Sov. Phys. JETP*, vol. 36, p. 1398–1404, 1959.
- VISWANATH, D. Recurrent motions within plane Couette turbulence. *J. Fluid Mech.*, vol. 580, p. 339, 2007.
- VISWANATH, D. et CVITANOVIĆ, P. Stable manifolds and the transition to turbulence in pipe flow. *J. Fluid Mech.*, vol. 627, p. 215, 2009.
- WALEFFE, F. Hydrodynamic stability and turbulence : beyond transients to a self-sustaining process. *Studies in Applied Math.*, vol. 95, p. 319–343, 1995a.
- WALEFFE, F. Transition in shear flows. Nonlinear normality versus non-normal linearity. *Phys. Fluids*, vol. 7, p. 3060–3066, 1995b.
- WALEFFE, F. On a self-sustaining process in shear flows. *Phys. Fluids*, vol. 9, p. 883–900, 1997.
- WALEFFE, F. Three-Dimensional Coherent States in Plane Shear Flows. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, p. 4140–4143, 1998.
- WALEFFE, F. Homotopy of exact coherent structures in plane shear flows. *Phys. Fluids*, vol. 15, p. 1517–1534, 2003.
- WEDIN, H. et KERSWELL, R. R. Exact coherent structures in pipe flow : travelling wave solutions. *J. Fluid Mech.*, vol. 508, p. 333–371, 2004.
- WEINTRAUB, D. A., SANDELL, G. et DUNCAN, W. D. Submillimeter measurements of T Tauri and FU Orionis stars. *ApJ*, vol. 340, p. L69–L72, 1989.
- WILLIS, A. P., CVITANOVIĆ, P. et AVILA, M. Revealing the state space of turbulent pipe flow by symmetry reduction. *J. Fluid Mech.*, vol. 721, p. 514, 2013.

- YORKE, J. A. et ALLIGOOD, T. Period doubling cascades of attractors : a prerequisite for horseshoes. *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 9, p. 319, 1983.
- YOUNG, P. et SCHNEIDER, D. P. A quest for the red companion in six cataclysmic binaries. *ApJ*, vol. 247, p. 960–968, 1981.
- ZAKHAROV, A. F., KARDASHEV, N. S., LUKASH, V. N. et REPIN, S. V. Magnetic fields in active galactic nuclei and microquasars. *MNRAS*, vol. 342, p. 1325–1333, 2003.
- ZEL'DOVICH, Y. B. The Fate of a Star and the Evolution of Gravitational Energy Upon Accretion. *Soviet Physics Doklady*, vol. 9, p. 195, 1964.
- ZIEGLER, U. The NIRVANA code : Parallel computational MHD with adaptive mesh refinement. *CPC*, vol. 179, p. 227–244, 2008.

Annexes

A

Méthodes numériques

A.1 Techniques de DNS : code SNOOPY et shearing box

A.1.1 Shear-périodicité

Le code SNOOPY, développé par Geoffroy Lesur, est un code pseudo-spectral (Canuto et al., 1988) qui permet de réaliser des simulations numériques directes (DNS en anglais) des équations de la MHD incompressibles et dissipatives en 3 dimensions. Le code offre une implémentation de la shearing box dans laquelle les conditions aux bords sont périodiques dans la direction y et z . A cause du cisaillement, la périodicité de l'écoulement dans la direction x n'est pas directement réalisable. En effet, considérons le membre de gauche de l'équation de Navier-Stokes (2.16 et de l'équation d'induction (2.17) en présence d'un cisaillement linéaire $\mathbf{U}_S = -Sx\mathbf{e}_y$:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} - Sx \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \dots, \quad (\text{A.1})$$

où Ψ peut être \mathbf{u} ou \mathbf{B} . Cette équation a une dépendance linéaire explicite en x , les solutions dans cette direction ne peuvent donc pas être périodiques. D'un point de vue physique, si l'on suppose qu'une structure physique, dépendante de la coordonnée y , est périodique en x au temps t , le cisaillement va détruire la périodicité de cette structure à l'instant immédiatement après. Afin de pouvoir décomposer les solutions en modes de Fourier (représentation spectrale), une solution est de se placer dans le référentiel lagrangien associé au cisaillement (Umurhan et Regev, 2004), défini de la manière suivante :

$$x' = x, \quad y' = y + Sxt, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (\text{A.2})$$

Dans ce référentiel, l'équation (A.1) se transforme en

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t'} = \dots, \quad (\text{A.3})$$

qui n'a plus de dépendance explicite en x' . Des conditions périodiques aux bords peuvent donc être imposées dans les trois directions dans ce référentiel.

A.1.2 Représentation spectrale des solutions

Les considérations du paragraphe précédente montrent donc qu'un champ Ψ dans la représentation discrétisée du référentiel lagrangien cisailé (x'_p, y'_q, z'_r) peut se décomposer en modes de Fourier (spatiaux) suivant :

$$\hat{\Psi}_{l,m,n} = \sum_{-N_x/2}^{N_x/2} \sum_{-N_y/2}^{N_y/2} \sum_{-N_z/2}^{N_z/2} \Psi(x'_p, y'_q, z'_r) \exp[-i(k'_{x,l}x'_p + k'_{y,m}y'_q + k'_{z,n}z'_r)], \quad (\text{A.4})$$

où les $k'_{x,l} = 2\pi l/L_x$ sont les nombres d'ondes de Fourier en x' dans le référentiel lagrangien et $k'_{y,m} = 2\pi m/L_y$ et $k'_{z,n} = 2\pi n/L_z$, les nombres d'ondes en y' et en z' .

En utilisant l'équation (A.2) dans (A.4), il est possible de regarder l'évolution de ces modes dans le référentiel eulérien (x, y, z) . Le cisaillement d'un mode non-axisymétrique de nombre d'onde $k'_{y,m}$ et $k'_{x,l}$ dans le référentiel lagrangien est en fait équivalent à un mode de nombre d'ondes

$$k_x(t) = k'_{x,l} + Sk'_{y,m}t, \quad k_y = k'_{y,m}, \quad k_z = k'_{z,n}. \quad (\text{A.5})$$

dans la représentation eulérienne. On voit donc que l'opération introduit une dépendance temporelle du nombre d'onde radial. Par conséquent une onde non-axisymétrique (dépendante de y) et observée dans le référentiel eulérien, va voir son échelle radiale diminuer progressivement sous l'effet du cisaillement. Ces ondes sont généralement appelées ondes de cisaillement ou "shearing waves" en anglais (Lord Kelvin, 1887; Orr, 1907). Le membre de droite de l'équation d'évolution de ces ondes (contenant le terme de force de Lorentz, le terme de pression et la dissipation) a la particularité de dépendre explicitement du temps car il fait intervenir les gradients (et donc la dérivée en x) des champs de vitesse ou magnétique.

A.1.3 Procédure de remapping

A cause du cisaillement, le nombre d'onde utilisé pour calculer les dérivées spatiales dans l'espace spectral croît linéairement dans le temps (voir équation (A.5)). Considérons l'évolution non-linéaire d'un paquet d'ondes de cisaillement dans la représentation numérique associée à la shearing box (c'est à dire faisant intervenir un nombre fini de modes de Fourier). A $t = 0$ ces modes sont répartis sur la grille de référence de dimensions N_x, N_y, N_z dans l'espace spectral (voir figure A.1). Au bout d'un certain temps, ces ondes vont finir par sortir de cette grille à cause du cisaillement. Leur échelle spatiale devient plus petite que l'échelle de résolution de la grille et ne sont donc plus pertinentes d'un point de vue physique. De plus les interactions non-linéaires entre ces modes peuvent exciter des modes de Fourier leading ($k_x(t)k_y < 0$), certains étant pertinents pour la physique mais absents de la base de vecteur d'ondes associé à la grille de simulation.

Ce problème est résolu grâce à une technique dite de "remapping". La figure A.1 montre qu'à $t = 0$, la grille de simulation coïncide avec la grille de référence fixe de nombre d'ondes ($k'_{x,l}, k'_{y,m}, k'_{z,n}$). Lorsque t augmente, la grille de simulation est cisailée et après un temps $T_{SB} = L_y/SL_x$, les nombres d'onde associés à cette grille sont :

$$k_x(T_{SB}) = k'_{x,l} + k'_{y,m}ST_{SB} = k'_{x,l+m}, \quad k_y = k'_{y,m}, \quad k_z = k'_{z,n}. \quad (\text{A.6})$$

Autrement dit, une onde de cisaillement de nombre d'onde azimutal $k'_{y,m}$ et de nombre d'onde radial initial $k'_{x,l}$ peut être directement décrite à $t = T_{SB}$ comme une onde avec le même $k'_{y,m}$ mais avec un nombre d'onde $k'_{x,l+m}$ différent dans la direction radiale. Il est alors possible de re-projeter à $t = T_{SB}$ les champs vectoriels sur la grille de référence. Par exemple, les coefficients de Fourier $\hat{\Psi}_{l,m,n}$ entre $t = 0$ et $t = T_{SB}$ deviennent $\hat{\Psi}_{l+m,m,n}$ entre T_{SB} et $2T_{SB}$, et ainsi de suite. En plus de cette ré-allocation de l'espace de Fourier, les amplitudes des modes trailing pour lesquels $|k_x| > \pi N_x/L_x$ à $t = T_{SB}$ sont remises à 0. Les vecteurs de base de Fourier correspondants sont alors supprimés (étoiles rouges sur la figure) et remplacés par de nouveaux vecteurs de base à même de décrire des modes leading contenus dans la grille de référence (cercles rouges).

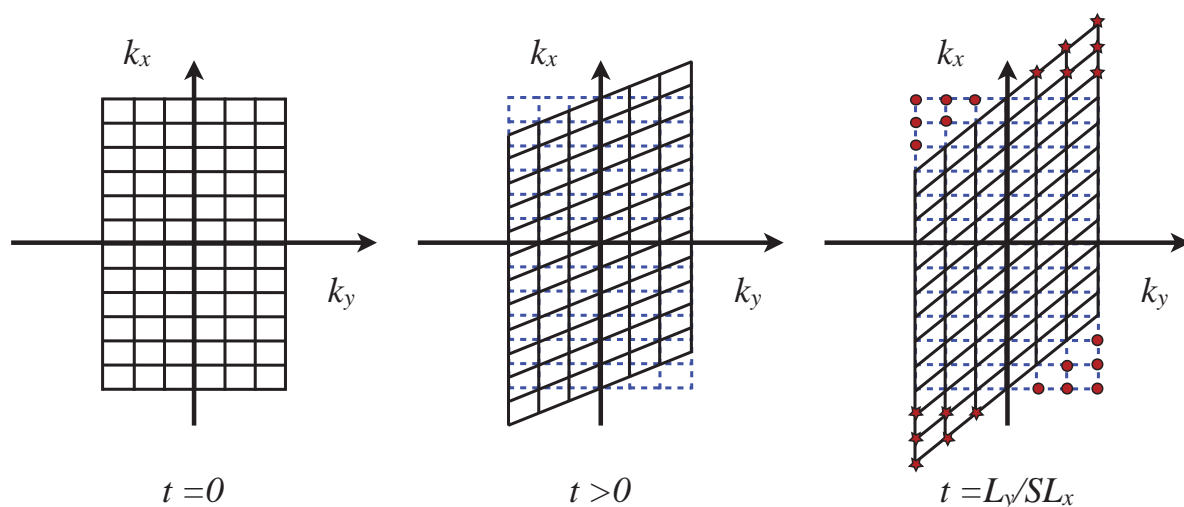


FIGURE A.1 – Evolution temporelle de la grille spectrale de simulations, représentée en noir, par dessus la grille de référence fixe en bleu pointillée. Les deux grilles coïncident après $t = T_{SB}$, excepté pour les points marqués d'un symbole. Les étoiles rouges indiquent les modes trailing dont l'échelle radiale est inférieure à l'échelle de la grille de référence ($k_y k_x > 0$, avec $|k_x| > \pi N_x / L_x$). Les vecteurs de base correspondant à ces modes sont supprimés lors de la procédure de remapping du système et remplacés par des vecteurs de base leading (cercles rouges).

Durant la procédure de remapping, la base de Fourier associée à la représentation des champs est mise à jour mais les champs eux-mêmes et donc l'évolution physique du système ne sont pas affectés si la résolution utilisée est suffisante. En effet, dans ces conditions, l'annulation des amplitudes associées aux modes trailing $|k_x| > \pi N_x / L_x$ est négligeable car les échelles associées à ces modes ont été déjà largement dissipées. Pour des simulations bien résolues, cette opération n'apporte qu'une très faible dissipation comparée à la dissipation physique (Lesur et Longaretti, 2005). La procédure de remapping n'apporte pas non plus d'énergie à de nouveaux modes leading mais assure simplement la possibilité qu'ils soient excités physiquement, grâce à l'allocation de la base de Fourier correspondante dans la grille de simulations. Une méthode pseudo-spectrale de désaliasing est utilisée pour calculer tous les termes non-linéaires des équations à chaque pas de temps. Ces termes sont les seuls à pouvoir physiquement introduire de l'énergie dans ces modes leading, lorsque la base de Fourier correspondante est introduite.

A.1.4 Intégration en temps

L'intégration en temps des équations de la MHD dans le référentiel tournant est réalisée grâce au couplage d'une méthode de type "Splitting Operator" et d'un algorithme de Runge-Kutta du troisième ordre pour les termes idéaux de la MHD et par un schéma implicite en temps pour les termes dissipatifs.

A.1.5 Symétries

Nagata (1986) a identifié plusieurs symétries possibles pour les solutions hydrodynamiques non-linéaires tridimensionnelles dans les écoulements instables de Taylor-Couette, dans la limite "thin-gap" (correspondant à une représentation cartésienne de l'écoulement de Couette plan en rotation entre deux parois). Dans la shearing box et pour l'écoulement MHD képlérien, plusieurs symétries du même type peuvent être dérivées. On considère une boîte de dimensions (L_x, L_y, L_z) et on introduit un référentiel tournant avec le fluide en $x = L_x/2$:

$$\tilde{y} = y - \frac{L_x}{2} St . \quad (\text{A.7})$$

La plupart des simulations et des solutions non-linéaires décrites dans cette thèse sont restreintes à un sous-espace \mathcal{A}_1 dans lequel les champs vérifient les propriétés de symétries suivantes :

$$\mathbf{u} : \left\{ \begin{array}{l} u_x = u_{x,ee}(t) \cos(k_{ze}z) \sin(k_{ye}\tilde{y} + k_x(t)x) \\ \quad + u_{x,oo}(t) \cos(k_{zo}z) \cos(k_{yo}\tilde{y} + k_x(t)x) \\ u_y = u_{y,ee}(t) \cos(k_{ze}z) \sin(k_{ye}\tilde{y} + k_x(t)x) \\ \quad + u_{y,oo}(t) \cos(k_{zo}z) \cos(k_{yo}\tilde{y} + k_x(t)x) \\ u_z = u_{z,ee}(t) \sin(k_{ze}z) \cos(k_{ye}\tilde{y} + k_x(t)x) \\ \quad + u_{z,oo}(t) \sin(k_{zo}z) \sin(k_{yo}\tilde{y} + k_x(t)x) \end{array} \right\} , \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{B} : \left\{ \begin{array}{l} B_x = B_{x,eo}(t) \cos(k_{ze}z) \sin(k_{yo}\tilde{y} + k_x(t)x) \\ \quad + B_{x,oe}(t) \cos(k_{zo}z) \cos(k_{ye}\tilde{y} + k_x(t)x) \\ B_y = B_{y,eo}(t) \cos(k_{ze}z) \sin(k_{yo}\tilde{y} + k_x(t)x) \\ \quad + B_{y,oe}(t) \cos(k_{zo}z) \cos(k_{ye}\tilde{y} + k_x(t)x) \\ B_z = B_{z,eo}(t) \sin(k_{ze}z) \cos(k_{yo}\tilde{y} + k_x(t)x) \\ \quad + B_{z,oe}(t) \sin(k_{zo}z) \sin(k_{ye}\tilde{y} + k_x(t)x) \end{array} \right\} , \quad (\text{A.9})$$

où les indices e et o indiquent que les nombres d'ondes correspondants sont associés à des harmoniques paires ou impaires respectivement. $k_x(t)$ a la même définition ici que dans l'équation (A.5). Notons que les équations de la MHD conservent ces symétries.

A.2 Solveur de Newton-Krylov - PEANUTS

Un solveur de Newton-Krylov est implémenté au sein du code PEANUTS, développé par F. Rincon et C. Cossu, permettant le calcul précis d'orbites périodiques. Ce code a été interfacé à SNOOPY en 2009 pour traiter des problèmes fluides dans la shearing box. Les méthodes du solveur de Newton reposent sur la librairie PETSC. La difficulté principale associée à l'implémentation de ce type d'interface réside dans la réduction de l'état du système afin d'assurer le bon fonctionnement de l'algorithme de Newton. En effet, pour des fluides incompressibles ou lorsque une méthode de desaliasing est utilisée, certains modes de Fourier peuvent être redondants ou bien strictement nuls, et doivent donc être éliminés afin d'éviter certains problèmes numériques de conditionnement (points singuliers, matrices non-inversibles etc...). Dans un premier temps, nous décrirons comment passer d'une représentation 3D complète de champs MHD (SNOOPY) à une représentation vectorielle 1D réduite de l'état du système, servant d'"input" pour l'algorithme

de Newton (PEANUTS). Dans un second temps, nous développerons les différentes contraintes à ajouter au vecteur d'état (comme les phases spatiales et temporelles) afin de calculer les solutions périodiques. Les notions rencontrées par la suite (stabilité des orbites périodique, variétés) sont introduites en annexe B.

A.2.1 Comptage de modes

L'objectif de cette section est de pouvoir compter le nombre de variables d'état indépendantes de notre système afin d'obtenir un problème inversible. Nous partons donc d'un ensemble de $6N_xN_yN_z$ valeurs réelles, correspondant aux valeurs des 6 composantes de champs dans l'espace physique. Les deux équations de divergence des champs (2.9)-(2.10) réduisent le nombre de composantes de champs indépendantes à 4 (au lieu de 6). De plus dans notre configuration, le champ magnétique et le champ de vitesse ont une moyenne nulle sur la boîte, ce qui permet de retirer une variable à chaque composante de vitesse et magnétique. Le nombre de variables indépendantes dans la shearing box 3D est donc $N_v = 4(N_xN_yN_z - 1)$. Si l'on retire également les modes de Nyquist, on trouve

$$N_v = 4(N_xN_yN_z - 2). \quad (\text{A.10})$$

Si une méthode desaliasing est utilisée (ce qui est le cas dans les simulations de la thèse) N_i ($i = x, y, z$) doit être un multiple de 3 et 2, de telle sorte que les $n_i = 2N_i/3$ sont des entiers. La procédure de desaliasing impose également que les coefficients de Fourier dans les plans de Nyquist $n_i/2$ soient nuls. Ainsi on ne garde dans chaque direction que $n_i - 1$ variables, ce qui fait un total de $(n_x - 1)(n_y - 1)(n_z - 1)$ par composantes de champ. Au total on obtient donc un nombre de variables indépendantes égales à

$$N_v = 4[(n_x - 1)(n_y - 1)(n_z - 1) - 1] . \quad (\text{A.11})$$

A.2.2 Reduction de variables

La procédure permettant de passer de la représentation spectrale 3D des champs \mathbf{u} et \mathbf{B} (notés génériquement Φ) à la représentation vectorielle réduite de taille N_v est résumée dans le tableau A.1 dans le cas où le desaliasing est pris en compte. Dans l'opération directe (DNS \rightarrow Newton), seulement deux composantes de champ sont gardées pour chaque mode de Fourier afin de satisfaire la contrainte d'incompressibilité. Les modes avec $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ sont supprimés afin de s'assurer que la moyenne des 6 composantes de champ est nulle. Dans l'opération inverse (Newton \rightarrow DNS), certaines composantes manquantes sont retrouvées grâce à la condition d'incompressibilité exprimée dans l'espace de Fourier, les autres sont mises à 0.

La gamme de nombres d'ondes indiquée dans le tableau correspond à celle qui est gardée durant l'opération DNS \rightarrow Newton et résulte de la nature réelle des champs physiques. Les amplitudes complexes associées aux nombres d'ondes manquants sont retrouvées par conjugaison.

A.2.3 Algorithme de Newton, contraintes de phases et shear-périodicité

Afin de calculer des orbites périodiques relatives dans le problème de Couette avec parois, Viswanath (2007) ont proposé une méthode générale, basée sur un algorithme de Newton-Krylov, et permettant d'imposer certaines contraintes sur les orbites recherchées. Le cas de la shearing

		Variables gardées	Gamme de \mathbf{k}	Composante manquante
$k_z \neq 0$		$\tilde{\Psi}_x$ and $\tilde{\Psi}_y$	$k_z = 1$ to $(n_z - 2)/2$	$\tilde{\Psi}_z = -[k_x \tilde{\Psi}_x + k_y \tilde{\Psi}_y]/k_z$
$k_z = 0$	$k_y \neq 0$	$\tilde{\Psi}_z$ and $\tilde{\Psi}_x$	$k_y = 1$ to $(n_y - 2)/2$	$\tilde{\Psi}_y = -k_x \tilde{\Psi}_x/k_y$
	$k_y = 0$	$\tilde{\Psi}_y$ and $\tilde{\Psi}_z$	$k_x = 1$ to $(n_x - 2)/2$	$\tilde{\Psi}_x = 0$
	$k_x \neq 0$			
	$k_x = 0$	supprimée		

TABLE A.1 – Schéma récapitulant l’opération de réduction de modes. Pour chaque mode de Fourier, un certain nombre de variables sont gardées lors du passage entre le code de DNS, SNOOPY, et le code de Newton, PEANUTS. Les composantes manquantes sont celles recalculées lors de l’opération inverse.

box est un peu spécial et mérite d’être discuté en détails. On notera dans la suite $\mathbf{X}(t)$ le vecteur d’état donné en entrée de l’algorithme de Newton. Ce vecteur, de taille N_v , contient tous les modes de Fourier indépendants des champs physiques (\mathbf{u}, \mathbf{B}) . Le système dynamique est formellement décrit par l’équation

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) , \quad (\text{A.12})$$

où \mathbf{F} est l’opérateur non-linéaire associé aux équations de la MHD. Ce système peut être intégré à l’aide d’une DNS. Le solveur de Newton est utilisé pour calculer une orbite périodique relative de période T vérifiant

$$\mathbf{X}(\mathbf{X}_0, T) = \tau(\mathbf{X}_0) , \quad (\text{A.13})$$

où \mathbf{X}_0 est l’état initial à $t = 0$ et τ est un opérateur de translation spatial dans les directions y et z (qui correspondent aux deux directions d’invariance du système où des conditions périodiques sont possibles). En principe le problème possède $N_t = N_v + 3$ inconnues, les N_v variables indépendantes du vecteur d’état, la période T de l’orbite que l’on cherche et les deux phases en y et z , qui peuvent être traduites en terme de vitesses de phases C_y et C_z en utilisant la période T . Ces variables additionnelles sont indispensables car le problème initial de taille N_v n’est pas entièrement déterminé, à cause de l’invariance temporelle de l’orbite périodique (tous ses points vérifient l’équation (A.13)) et les invariances spatiales (toute version translatée de l’orbite périodique en y ou z est une solution périodique). Trois contraintes supplémentaires doivent donc être imposées pour lever la dégénérescence et pour rendre le problème numérique non-singulier.

La méthode de Newton permet de résoudre l’équation (A.13) de façon itérative. Le principe est le suivant : on part d’un état initial $\mathbf{X}_{g,0}$ proche du cycle visé, et on effectue une succession de corrections $\delta\mathbf{X}_i$ à cet état afin de produire des états à $t = T$ qui se rapprochent progressivement de $\tau(\mathbf{X}_{g,0})$. Chaque itération de l’algorithme, correspondant à une correction, nécessite la résolution d’un système linéaire faisant intervenir le Jacobien du système. Ce calcul est effectué de manière itérative en utilisant un algorithme de Krylov (méthode GMRES) ce qui nécessite plusieurs DNS sur un temps T . Les trois contraintes permettant de lever les dégénérescences

spatiale et temporelle, décrites précédemment, sont :

$$\left\langle \delta \mathbf{X}_i, \frac{\partial \mathbf{X}_{g,i}}{\partial y} \right\rangle = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$\left\langle \delta \mathbf{X}_i, \frac{\partial \mathbf{X}_{g,i}}{\partial z} \right\rangle = 0, \quad (\text{A.15})$$

$$\langle \delta \mathbf{X}_i, \mathbf{F}(\mathbf{X}_{g,i}) \rangle = 0, \quad (\text{A.16})$$

où le crochets dénotent le produit scalaire entre deux vecteurs d'états dans l'espace des phases. Dans le cas général, ces contraintes imposent que les corrections effectuées par le solveur soient orthogonales aux directions de l'espace des phases le long desquelles l'écoulement est invariant. Cependant, la shear-périodicité décrite en section A.1.1 brise l'invariance des équations par translation continue en temps. En d'autres termes, les périodes possibles dans notre système sont discrètes et sont étroitement reliées au temps de remapping $T_{SB} = L_y/SL_x$. Pour illustrer ce propos, considérons un état \mathbf{X} du système à $t = 0$. A cause du cisaillement de la base de Fourier sur laquelle les champs sont projetés, il est impossible de comparer les coefficients de Fourier entre cet état et un état arbitraire au temps t , car la base utilisée est différente entre ces deux temps. Les seuls temps où une telle comparaison est pertinente sont les temps multiples de T_{SB} lors desquels la base de Fourier est confondue à celle en $t = 0$. Les conditions aux bords shear-périodiques suggèrent donc que les orbites périodiques doivent avoir une période multiple de T_{SB} . Dans la pratique, nous avons vu que les cycles de dynamo MRI les plus simples sont composés de deux renversements de champ chaque T_{SB} , ce qui signifie que la période fondamentale du système est $T_0 = 2T_{SB}$ (Herault et al., 2011). Nous avons vu également lors de cette thèse que des orbites fractionnaires au temps de remapping étaient possibles. Ce cas particulier correspond à des cycles pour lesquels les composantes de Fourier associées au nombre d'onde $k_{y_0} = 2\pi/L_y$ ont une amplitude nulle. Pour ces cycles, la dynamique non-axisymétrique est uniquement supportée par des modes de vecteur d'onde $k_y = 2\pi n/L_y$ avec $n \geq 2$.

Enfin, notons que lorsque les symétries \mathcal{A}_1 sont imposées, les invariances spatiales continues de translation sont brisées et les orbites périodiques relatives ont toutes $C_y = 0$ et $C_z = 0$. Dans ce cas, on peut retirer ces deux contraintes du solveur de Newton. Nous avons vérifié que la convergence d'une même orbite périodique est obtenue avec ou sans ces contraintes. Nous avons également vérifié que la convergence vers un cycle dans les symétries \mathcal{A}_1 grâce au solveur de Newton, peut être obtenue sans les symétries en partant du même état initial.

A.2.4 Exemple de convergence d'un cycle

Nous illustrons ci dessous un exemple de sortie produite par le code PEANUTS, lorsque l'algorithme de Newton est utilisé pour capturer un cycle. La convergence du cycle de période T_0 nécessite ici 6 itérations effectives. Pour chacune d'entre elles, une dizaine de sous-itérations de l'algorithme de Krylov sont nécessaires afin d'estimer l'inverse du Jacobien du système (chacune de ces sous-itérations correspond à une intégration numérique jusqu'à T_0). A chaque itération de Newton sont affichées la norme résiduelle absolue entre l'état à $t = 0$ et celui à $t = T_0$, la norme de l'état à $t = 0$, et 5 variables de l'état (la dernière étant le champ axisymétrique $\overline{B_{0x}}$).

Solve a nonlinear system using Newton method.

Initial guess in file Newtonguess

Extra variables guesses:

0.0000000000 0.0000000000 338.1951074866

Solution saved in file Newtonout

```
-----
It = 0 || Residual Norm = 4.42431713e+02
      || Guess Norm = 6.18096395e+03
      || State Vector = 0.00000000e+00 0.00000000e+00 3.38195107e+02 -
2.44766184e-18 -3.93386892e+02

0 KSP Residual norm 4.424317128747e+02
1 KSP Residual norm 4.182497722461e+02
2 KSP Residual norm 4.182490142990e+02
3 KSP Residual norm 1.571578421887e+02
4 KSP Residual norm 1.571544919671e+02
5 KSP Residual norm 9.926426620944e+01
6 KSP Residual norm 9.333401889902e+01
7 KSP Residual norm 8.557633381149e+01
8 KSP Residual norm 9.050926885718e+00
9 KSP Residual norm 2.190092293539e-01
10 KSP Residual norm 7.025864331352e-04

It = 1 || Residual Norm = 3.60545660e+02
      || Guess Norm = 6.10898599e+03
      || State Vector = 1.95220611e-07 6.95529229e-07 3.38195107e+02
5.08201478e-12 -3.89037894e+02

0 KSP Residual norm 3.605456600215e+02
1 KSP Residual norm 3.604177382390e+02
2 KSP Residual norm 3.604170363098e+02
3 KSP Residual norm 1.825373287412e+02
4 KSP Residual norm 1.825353271524e+02
5 KSP Residual norm 7.717990700914e+01
6 KSP Residual norm 7.288148998425e+01
7 KSP Residual norm 2.024496741189e+01
8 KSP Residual norm 7.561665700180e-01
9 KSP Residual norm 1.985348020162e-02
10 KSP Residual norm 2.030344091914e-04

It = 2 || Residual Norm = 9.03636330e+01
      || Guess Norm = 6.00634096e+03
      || State Vector = 8.80512056e-08 2.41239786e-06 3.38195107e+02 -
1.08063568e-11 -3.81288373e+02

0 KSP Residual norm 9.036363303017e+01
1 KSP Residual norm 9.036362681454e+01
2 KSP Residual norm 9.036362222745e+01
3 KSP Residual norm 9.036208278631e+01
4 KSP Residual norm 9.036161047366e+01
5 KSP Residual norm 8.667142067102e+01
6 KSP Residual norm 1.166521651951e+01
7 KSP Residual norm 1.730626208427e+00
8 KSP Residual norm 3.370666612712e-01
9 KSP Residual norm 2.416806166055e-02
10 KSP Residual norm 1.605398451542e-04

It = 3 || Residual Norm = 1.87032102e+01
      || Guess Norm = 6.07927015e+03
      || State Vector = -1.71442636e-08 -9.37323271e-07 3.38195107e+02
1.83319810e-14 -3.85822472e+02

0 KSP Residual norm 1.870321020653e+01
1 KSP Residual norm 1.838055922773e+01
2 KSP Residual norm 1.838054294204e+01
3 KSP Residual norm 2.059685067255e+00
4 KSP Residual norm 2.058638040316e+00
5 KSP Residual norm 1.929991720737e+00
6 KSP Residual norm 1.225420858641e-01
```

```

7 KSP Residual norm 1.205305403606e-01
8 KSP Residual norm 1.118762561306e-02
9 KSP Residual norm 1.581135203739e-04

It = 4 || Residual Norm = 4.61322856e-01
      || Guess Norm = 6.08146895e+03
      || State Vector = -1.74519620e-08 -9.40585602e-07 3.38195107e+02
8.03937003e-15 -3.85941977e+02

0 KSP Residual norm 4.613228562322e-01
1 KSP Residual norm 4.613228441726e-01
2 KSP Residual norm 4.613227707140e-01
3 KSP Residual norm 4.608396165338e-01
4 KSP Residual norm 4.608339591198e-01
5 KSP Residual norm 4.505487908602e-01
6 KSP Residual norm 2.502590284702e-01
7 KSP Residual norm 5.803679956995e-03
8 KSP Residual norm 6.427568695282e-04
9 KSP Residual norm 2.898106232718e-05
10 KSP Residual norm 2.299893365020e-07

It = 5 || Residual Norm = 7.50332877e-03
      || Guess Norm = 6.08184532e+03
      || State Vector = -1.90143041e-08 -9.45935201e-07 3.38195107e+02 -
1.05363478e-16 -3.85965192e+02

0 KSP Residual norm 7.503328769177e-03
1 KSP Residual norm 7.503327308827e-03
2 KSP Residual norm 7.503188615288e-03
3 KSP Residual norm 7.503061326464e-03
4 KSP Residual norm 7.500609372219e-03
5 KSP Residual norm 5.787558930829e-03
6 KSP Residual norm 5.578921520502e-03
7 KSP Residual norm 1.792202549917e-04
8 KSP Residual norm 1.614489437284e-05
9 KSP Residual norm 1.648459963897e-07
10 KSP Residual norm 1.192011530019e-09

It = 6 || Residual Norm = 2.96666976e-04
      || Guess Norm = 6.08184200e+03
      || State Vector = -1.89928329e-08 -9.44641898e-07 3.38195107e+02 -
4.69535180e-18 -3.85964951e+02

0 KSP Residual norm 2.966669759867e-04
1 KSP Residual norm 2.966669745853e-04
2 KSP Residual norm 2.966668436280e-04
3 KSP Residual norm 2.962333135669e-04
4 KSP Residual norm 2.962128665258e-04
5 KSP Residual norm 2.952432943513e-04
6 KSP Residual norm 1.756793398637e-04
7 KSP Residual norm 3.056379392921e-06
8 KSP Residual norm 5.608887410218e-07
9 KSP Residual norm 1.108719404046e-08
10 KSP Residual norm 2.266691959795e-10

It = 7 || Residual Norm = 5.86572993e-06
      || Guess Norm = 6.08184219e+03
      || State Vector = -1.89919208e-08 -9.44645246e-07 3.38195107e+02 -
2.89588436e-19 -3.85964963e+02

Newton Solver has converged !
Total number of Newton iterations = 7

```

A.3 Méthode numérique pour le calcul des bifurcations globales

A.3.1 Visualisation de variétés instables

Une technique courante permettant d'analyser la dynamique au voisinage de solutions non-linéaires invariantes est de regarder la géométrie de leur variété instable W^u à travers une section de retour de Poincaré (Simó, 1989). Cette méthode a notamment été utilisée pour l'étude du système de Kuramoto-Sivashinsky par Christiansen et al. (1997); Lan et Cvitanović (2008) et employée dans le contexte des écoulements de Couette plan et de Poiseuille (Gibson et al., 2008, 2009; Halcrow et al., 2009; van Veen et Kawahara, 2011; Willis et al., 2013). La représentation des variétés instables d'une orbite périodique est beaucoup plus simple lorsque celle-ci n'a qu'une seule direction instable, ce qui est le cas pour les paires de cycles SN_1 et SN_2 dans le régime transitionnel de notre problème à bas Rm , dans le sous-espace de symétries \mathcal{A}_1 . On considère dans cette annexe une orbite p périodique, dont l'état dans l'espace des phases à $t = 0$ est noté \mathbf{X}_e . Un point de la variété instable W^u associée à l'orbite est en première approximation situé sur sa tangente locale au point \mathbf{X}_e

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_e + \varepsilon \mathbf{X}_u, \quad (\text{A.17})$$

où \mathbf{X}_u est le vecteur propre associé à la direction instable du cycle, et ε est un paramètre très petit devant 1 qui permet d'assurer que l'on reste tangent à W^u au point \mathbf{X}_e . Pour générer un segment entier de W^u , on considère un ensemble de points, définis par l'équation (A.17) en faisant varier le paramètre ε dans une certaine gamme de valeurs. Cet segment est alors utilisé comme un ensemble de conditions initiales qui peuvent être intégrées à l'aide d'une DNS, durant un temps aussi long que l'on souhaite. Comme W^u est un invariant de la dynamique, tous les points images résultant de l'intégration des conditions initiales sur le segment appartiennent également à la variété instable. Ces points permettent donc de visualiser des portions de la variété aussi éloignée de \mathbf{X}_e que l'on souhaite dans l'espace des phases. Les trajectoires obtenues par intégration temporelle des points du segment initial forment donc une surface 2D (dans le cas où une seule direction instable est présente). Afin de simplifier la visualisation, il est d'usage de représenter la dynamique dans une section de Poincaré. La variété instable est alors réduite à une courbe 1D formée par l'intersection de la surface 2D et de la section de Poincaré. On utilise finalement une projection dans un sous-espace de dimension 2 afin de visualiser la variété sur un plan de phase donnée.

Le problème de la dynamo MRI dans la shearing box est original (par rapport au problème de la transition dans les écoulements cisailés avec parois) au sens où il est possible de réduire la dynamique non-linéaire à une application discrète Φ , où les états sont observés de manière stroboscopique tous les T_0 . Cette discrétisation du système est en réalité équivalente à regarder la dynamique dans une section de Poincaré. Dans cette représentation stroboscopique, les cycles de dynamo MRI apparaissent comme des points d'équilibre non-linéaire et les variétés comme des lignes 1D. Comme la donnée d'un état complet à chaque T_0 ne peut pas être visualisée simplement, on projette alors la dynamique sur un plan de phase $(\overline{B}_{0x}, \overline{B}_{0y})$, les composantes du champ magnétique axisymétrique grande échelle étant assez représentatives de la dynamique. Ce plan est notamment équivalent à la projection tourbillons poloidaux/ stries dans le problème hydrodynamique. Une troisième variable peut être introduite (comme une composante non-axisymétrique) si la projection introduit des dégénérescences.

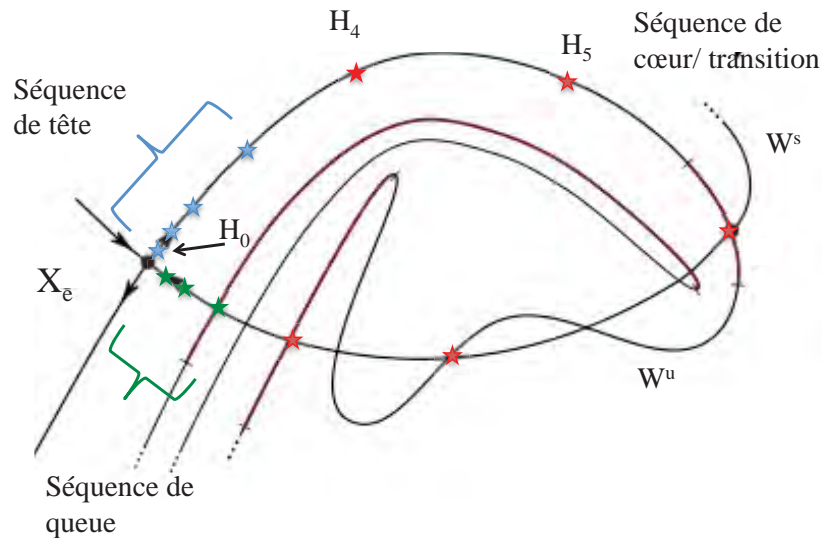


FIGURE A.2 – Représentation d’une orbite homocline et des trois séquences (de tête, de cœur et de queue) dans une section de Poincaré, projetée dans le plan de phase. Les points étoilés dénotent quelques points de l’orbite homoclines.

Notons que le calcul du segment initial, permettant par intégrations successives de générer l’ensemble de la variété instable, nécessite de pouvoir calculer le vecteur propre instable \mathbf{X}_u du point \mathbf{X}_e associé au cycle. Ce vecteur est obtenu grâce au solveur SLEPc intégré à PEANUTS et utilisé pour calculer la stabilité et les multiplicateurs de Floquet des cycles.

A.3.2 Calcul et continuation des orbites homoclines

Dans la représentation discrète et stroboscopique de l’écoulement dans notre problème, une orbite homocline associée à un point fixe \mathbf{X}_e est caractérisé par une séquence unique de points dans le plan de phases, définissant le ”cœur de l’orbite”, dont la taille typique ou ”temps de transition” est égale à N_t . Cette séquence est précédée d’un ensemble infini de points au voisinage de \mathbf{X}_e qui s’en échappent exponentiellement (appelée séquence de tête) et est suivie d’un autre ensemble infini qui au contraire converge vers \mathbf{X}_e (appelé séquence de queue). La séquence de transition de taille N_t entre ces deux ensembles représente la phase d’excursion non-linéaire dans le treillis homocline, loin du point fixe.

i) Calcul des orbites homoclines

Dans cette annexe, nous présenterons uniquement le calcul d’orbites homoclines relatives aux cycles de dynamo MRI. Le calcul associé aux orbites hétéroclines est calqué sur la même procédure. Afin d’obtenir de telles orbites, il est nécessaire dans un premier temps de construire la projection de la variété instable W^u d’un cycle p (représenté par le point fixe \mathbf{X}_e) dans le plan de phase $(\overline{B}_{0x}, \overline{B}_{0y})$ en utilisant la technique présentée en section A.3.1. Typiquement, la variété est obtenue en construisant 5 à 20 images successives du segment initial, par intégration successive des équations pendant T_0 , selon le degré de précision voulu. L’étape suivante est

d'identifier le pli de la variété instable W^u s'approchant au plus près du point fixe \mathbf{X}_e et le point appartenant à ce pli qui minimise la distance avec \mathbf{X}_e . On cherche alors l'antécédent de ce point dans le segment initial utilisé pour calculer la variété (c'est à dire la condition initiale sur le segment qui mène à ce point après intégrations successives). Si la valeur de ε utilisée pour générer cette condition est suffisamment petite pour que celle ci puisse être considérée comme faisant partie de la séquence de tête d'une orbite homocline, l'intégration numérique de cette condition initiale sur plusieurs T_0 donne une approximation de l'orbite homocline recherchée. Cependant comme la dynamique est étirée le long de la direction de W_u , une très faible erreur sur l'estimation de ε peut faire diverger les trajectoires après quelques itérations. Il est donc en général nécessaire de raffiner la condition initiale sur le segment initial. Une méthode de bisection sur ε est utilisée pour réduire la distance entre le dernier point d'intégration et \mathbf{X}_e . Des orbites avec une séquence de tête arbitrairement longue peuvent être obtenues en utilisant des segments initiaux arbitrairement petits et proches de \mathbf{X}_e . De même, des orbites avec une séquence de queue arbitrairement longue sont obtenues en augmentant le nombre d'intégrations successives durant T_0 .

ii) Continuation des orbites homoclines en fonction d'un paramètre

On suppose qu'une orbite homocline \mathcal{H} associé à un point fixe \mathbf{X}_e , a été calculée pour un Rm donné, grâce à la méthode présentée dans la section précédente, sous la forme d'une séquence de points (\mathbf{H}_i) avec $i = 0, \dots, N - 1$. \mathbf{H}_0 est le point situé sur le segment initial, \mathbf{H}_1 son image par Φ et ainsi de suite. Le paramètre ε_0 , ayant servi à calculer \mathbf{H}_0 est également connu.

Afin de recalculer cette orbite pour un Rm légèrement différent $\text{Rm} + \Delta\text{Rm}$, la première étape est de recalculer le point fixe \mathbf{X}_e au Rm visé en utilisant une méthode de continuation classique puis de calculer sa valeur propre instable \mathbf{X}_u grâce au solveur de stabilité. On construit alors un nouvel état perturbé \mathbf{H}_0^0 en utilisant le même ε_0 qu'avant. A partir de cet état, on applique N fois l'opérateur Φ (en intégrant \mathbf{H}_0^0 durant NT_0) et on obtient une nouvelle séquence \mathbf{H}_i^0 au Rm considéré. Cette séquence n'est généralement pas une bonne approximation de l'orbite homocline au nouvel Rm car elle diverge par rapport à \mathcal{H} à partir d'une certaine itération. Afin de converger précisément vers l'orbite homocline au nouvel Rm, on doit raffiner la valeur de ε en se servant de la différence entre les deux séquences \mathbf{H}_i^0 et \mathbf{H}_i . Avant de rentrer dans le cœur de la méthode, on introduit F_N , fonction de ε qui pour un point fixe donné \mathbf{X}_e et sa direction instable associée \mathbf{X}_u , renvoie la projection sur le plan de phase $(\bar{B}_{0x}, \bar{B}_{0y})$ de l'image Φ_o^N du point $\mathbf{X}_e + \varepsilon\mathbf{X}_u$.

$$F_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (\text{A.18})$$

$$\varepsilon \mapsto \text{P} [\Phi_o^N(\mathbf{X}_e + \varepsilon\mathbf{X}_u)] . \quad (\text{A.19})$$

La projection P sur le plan de phase n'est en réalité pas obligatoire mais permet de rendre l'algorithme beaucoup plus rapide que si l'état complet est considéré. On utilise alors une méthode de Newton afin de réaliser la correction en ε . Deux cas sont possibles. Soit la différence entre les suites (\mathbf{H}_i^0) et (\mathbf{H}_i) ne divergent qu'après une certaine itération $N_d > N_t$, c'est à dire au niveau des points situés dans la séquence de queue de l'orbite homocline (après la phase de transition de taille N_t); dans ce cas une première itération de Newton est effectuée afin d'annuler la différence $\mathbf{H}_{N_d} - \mathbf{X}_e$ au Rm visé :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - \tilde{J}_0 \text{P} [\mathbf{H}_{N_d}^0 - \mathbf{X}_e] , \quad (\text{A.20})$$

où $\tilde{J}_0 = ((J_0^T J_0)^{-1})J_0^T$ est la pseudo-inverse de $J_0 = \left. \frac{dF_{N_d}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0}$.

ε_1 est utilisé ensuite pour effectuer une nouvelle prédiction de l'état initial \mathbf{H}_0^1 . Cet état est intégré une nouvelle fois et permet d'obtenir une nouvelle séquence de points \mathbf{H}_i^1 . En général, une seule itération de Newton n'est pas suffisante pour converger l'orbite homocline au Rm voulu, mais celle-ci diverge après un nombre d'itérations plus grand que N_d (et toujours dans la séquence de queue). Afin de tirer profit de cette propriété, on incrémente N_d de 1 à chaque itération de Newton, de sorte que les points situés plus loin dans la séquence de queue approche le point \mathbf{X}_e plus rapidement. A l'itération n de l'algorithme, la correction se met sous la forme

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} - \tilde{J}_{n-1} \text{P} \left[\mathbf{H}_{N_d+n-1}^{n-1} - \mathbf{X}_e \right], \quad (\text{A.21})$$

avec $\tilde{J}_{n-1} = ((J_{n-1}^T J_{n-1})^{-1})J_{n-1}^T$ la pseudo-inverse de $J_{n-1} = \left. \frac{dF_{N_d+n-1}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_{n-1}}$.

En pratique, les Jacobiennes J_i (qui sont simplement des vecteurs à deux éléments dans les projections utilisées) sont calculés approximativement à l'aide d'une différence finie du premier ordre.

Dans le cas où l'orbite \mathbf{H}_i^0 (générée à partir de ε_0) diverge avant la séquence de tête ($N_d > N_t$) l'algorithme doit être légèrement modifié. On cherche alors à ce que tous les points de \mathbf{H}_i^0 dont l'indice est compris entre N_d et N_t restent proches de l'orbite originale \mathcal{H} calculée pour le Rm initial. Les premières étapes de l'algorithme sont donc modifiées de la manière suivante :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - \tilde{J}_0 \text{P} \left[\mathbf{H}_{N_d}^0 - \mathbf{H}_{N_d} \right], \quad (\text{A.22})$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \tilde{J}_1 \text{P} \left[\mathbf{H}_{N_d+1}^1 - \mathbf{H}_{N_d+1} \right], \quad (\text{A.23})$$

et ainsi de suite jusqu'à ce que la séquence de queue de l'orbite soit atteinte. Une fois cette condition remplie, \mathbf{X}_e devient la cible de l'algorithme de Newton et la procédure est la même que celle décrite précédemment dans le cas où $N_d > N_t$.

Cet algorithme reste très empirique (il n'y a pas de preuve mathématique de sa convergence) mais a donné de bons résultats pour continuer les orbites homoclines et hétéroclines. Bien évidemment, pour fonctionner, le ΔRm doit rester suffisamment faible de sorte que l'orbite homocline au Rm visé diffère légèrement de \mathcal{H} calculé au Rm initial.

B

Brève introduction à la théorie des systèmes dynamiques

Cette annexe a pour but de présenter brièvement les différents concepts empruntés à la théorie des systèmes dynamiques utilisés au cours de ce travail. Nous commencerons par présenter le formalisme de la théorie et la notion de stabilité locale des orbites périodiques (ou cycles), puis nous détaillerons quelque "routes" vers le chaos dans les systèmes dissipatifs reposant sur des bifurcations de cycles.

B.1 Formalisme

On définit l'espace des phases M d'un système physique comme l'ensemble de ses degrés de liberté (ou états). Cet espace est de dimension infinie lorsque le système est continu, mais peut être réduit à une dimension finie dès lors qu'il est discrétisé spatialement, comme dans des simulations numériques. Dans notre problème, un état du système est caractérisé par l'ensemble des coefficients de Fourier des trois composantes spatiales du champ de vitesse et du champ magnétique.

Soit $\mathbf{X}(t)$ l'état du système au temps t . On considère alors une famille d'équations différentielles et un état initial \mathbf{X}_0 de M telle que :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = F_\lambda(\mathbf{X}(t)), \quad \mathbf{X}(t=0) = \mathbf{X}_0 \in M. \quad (\text{B.1})$$

La fonction F_λ est supposée \mathcal{C}^1 et correspond dans notre cas au propagateur non-linéaire des équations de la MHD. λ s'identifie à Rm, Re ou aux dimensions de la boîte dans notre problème. On appelle flot du système dynamique la fonction définie sur M , au temps t , par $\Phi_\lambda^t : \mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{X}(t)$.

Nous emploierons également la forme discrétisée en temps de ce système d'équations, échantillonnée à intervalle régulier T fixé. Si \mathbf{X}_n est l'état au temps nT , l'itérée d'ordre n du flot Φ_λ^n est définie de telle sorte que :

$$\mathbf{X}_n = \Phi_\lambda^n(\mathbf{X}_0). \quad (\text{B.2})$$

Une orbite périodique p (ou cycle) de période T_p est définie dans ce formalisme comme une trajectoire de l'espace des phases pour laquelle $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t + T_p)$ en tout point et pour tout t . Dans le système à temps discret associé à Φ_λ^n , cette orbite périodique est un point fixe pour $T = T_p$. Cette forme discrétisée du permet de visualiser la dynamique plus simplement, sans en changer les propriétés.

B.2 Analyse de stabilité et bifurcations locales

L'étude de la dynamique locale des cycles et de leur stabilité est essentielle pour comprendre comment le chaos émerge et s'organise. Considérons donc un cycle p et une perturbation initiale infinitésimale de ce cycle $\delta\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_p$. En première approximation, on peut écrire :

$$\Phi_\lambda^t(\mathbf{X}_0) = \Phi_\lambda^t(\mathbf{X}_p) + \left(\frac{\partial \Phi_\lambda^t}{\partial \mathbf{X}} \right) \delta\mathbf{X}_0. \quad (\text{B.3})$$

Si le système est de dimension finie N , la jacobienne $\partial\Phi_\lambda^t/\partial\mathbf{X}$ est une matrice $N \times N$, notée $M_x(t)$. L'écart au cycle p au bout d'un temps t , $\delta\mathbf{X}(t) = \Phi_\lambda^t(\mathbf{X}_0) - \Phi_\lambda^t(\mathbf{X}_p)$ est donc l'application de M_x au vecteur $\delta\mathbf{X}_0$ (écart initial). Cette matrice est diagonalisable et possède donc un ensemble de vecteurs propres $\mathbf{y}_i(t)$ et de valeurs propres $\Lambda_i(t)$ tels que $\delta\mathbf{X}(t) = \sum_i^N c_i \mathbf{y}_i(t)$, avec c_i les projections sur la base des $\mathbf{y}_i(t) = \Lambda_i(t) \mathbf{y}_i(0) = e^{\sigma_i t} \mathbf{y}_i(0)$. Au temps $t = T_p$, la matrice M est appelée matrice de monodromie, les valeurs propres $\Lambda_i(T_p)$ les multiplicateurs de Lyapunov et les σ_i , les exposants de Floquet. Les directions instables du cycle représentent donc l'ensemble des vecteurs propres pour lesquels $|\Lambda_i| > 1$, (ou $\Re(\sigma_i) > 0$) et les directions stables l'ensemble des vecteurs propres pour lesquels $|\Lambda_i| < 1$ (ou $\Re(\sigma_i) < 0$). Notons qu'au moins un des vecteurs propres de M associé à p a une valeur propre neutre égale à 1, qui correspond à la direction le long du cycle. On dit qu'une structure est un attracteur lorsque elle ne possède que des directions stables. On emploie le terme de "selle" pour un cycle qui possède des directions instables.

Lorsque le paramètre λ (Rm par exemple) varie, il arrive que l'un des multiplicateurs de Floquet change de stabilité (ce qui se produit lorsque il traverse le cercle unité). Dans ce cas, on parle de bifurcation locale. On distingue plusieurs types de bifurcations locales, parmi lesquelles :

- Les bifurcations "fourche" (en anglais, "pitchfork") où l'une des directions stables d'un cycle devient instable. Une nouvelle branche de solution périodique apparaît et hérite de la stabilité du multiplicateur de Floquet à l'origine de la bifurcation.
- Les bifurcations nœud-col (en anglais, "saddle-node"), caractérisées par l'apparition soudaine d'une paire de cycles dont l'un possède au moins une valeur propre stable. Nous avons déjà évoqué en section 4.3 l'existence de telles bifurcations, donnant naissance aux paires de cycles de dynamo MRI.
- Les bifurcations sous-harmoniques (doublement de période, en anglais, "period-doubling"). Elles sont obtenues lorsque la partie réelle de l'un des multiplicateurs de Floquet d'un cycle passe par la valeur -1. Une orbite de période double émerge alors et coexiste avec le cycle de période simple.

Une autre notion importante liée à l'analyse de stabilité d'un cycle p est celle de "variétés stables et instables", $W^s(p)$ et $W^u(p)$ définies comme les ensembles invariants :

$$W^s(p) := \{q \in M : \Phi_\lambda^t(q) \rightarrow p \text{ pour } t \rightarrow +\infty\}, \quad (\text{B.4})$$

$$W^u(p) := \{q \in M : \Phi_\lambda^t(q) \rightarrow p \text{ pour } t \rightarrow -\infty\}. \quad (\text{B.5})$$

La variété stable de p est donc l'ensemble des états qui convergent vers p pour $t \rightarrow \infty$ (ou $n \rightarrow \infty$). Localement, elle correspond à la surface dans M générée par l'ensemble des directions stables de p . La variété instable en revanche est générée par l'ensemble des directions instables de p , dont les points convergent vers p pour $t \rightarrow -\infty$. On définit également une variété neutre qui est générée par l'ensemble des directions associées aux exposants de Lyapunov de partie réelle nulle et de partie imaginaire non-nulle. Si cette variété neutre est réduite à l'ensemble vide, la somme des dimensions de $W^s(p)$ et $W^u(p)$ est alors égale à la dimension de M .

B.3 Quelques routes vers le chaos

Les bifurcations ainsi que la géométrie des variétés sont très importantes en théorie des systèmes dynamiques car elle peuvent changer de façon drastique la nature de la dynamique d'un système non-linéaire. Elles interviennent dans plusieurs scénarios de "routes vers le chaos" que nous présentons ci dessous. Ce paragraphe n'a pas vocation à être exhaustif et présente essentiellement des notions utilisées dans le cadre de ce travail. Nous passerons notamment sur les notions d'intégrabilité et de transition au chaos dans les systèmes hamiltoniens.

B.3.1 Cascade sous harmonique (doublements de période)

Une route possible vers le chaos est la cascade sous-harmonique, historiquement découverte par Feigenbaum (1978). Dans ce scénario, un point fixe (ou un cycle p de période 1 dans la représentation discrétisée du système différentiel) perd une dimension stable pour un certain λ_1 et bifurque vers une orbite stable de période 2. Cette orbite bifurque à son tour vers une orbite de période 4 pour $\lambda_2 > \lambda_1$, etc.. Ce processus aboutit à une série de bifurcations sous-harmoniques. La suite des λ_i converge vers une valeur finie λ_∞ , au-delà de laquelle le point fixe initial est remplacé par une succession d'orbites périodiques ou d'attracteurs chaotiques aperiodiques (ou attracteurs étranges).

Feigenbaum (1980) a étudié en particulier cette route vers le chaos pour l'application logistique, un problème issu de l'étude des populations en biologie. Ce problème unidimensionnel simple en apparence est régi par l'équation différentielle :

$$X_{n+1} = \lambda X_n(1 - X_n). \quad (\text{B.6})$$

La figure B.1 montre que ce système converge systématiquement vers un point fixe égal à $X = 1 - 1/\lambda$ pour $0 < \lambda < 3$. Puis pour $\lambda = 3$, un premier cycle de période 2 apparaît et le système oscille entre deux valeurs. Un doublement de période apparaît ensuite pour $\lambda = 1 + \sqrt{6}$, puis une cascade de bifurcations similaires est ensuite amorcée. L'intervalle entre chaque bifurcation décroît avec la période de l'orbite créée. Autour de $\lambda = 3.56995$ la cascade s'achève et le comportement des solutions est aperiodique quelque soit la condition initiale. Au delà de cette valeur, on observe une succession de zones laminaires (appelées îlots de stabilité) et de zones où la dynamique est fortement chaotique. Cette séquence de bifurcations est ainsi connue pour amener progressivement le système vers un état chaotique, dont les propriétés sont celles d'un attracteur.

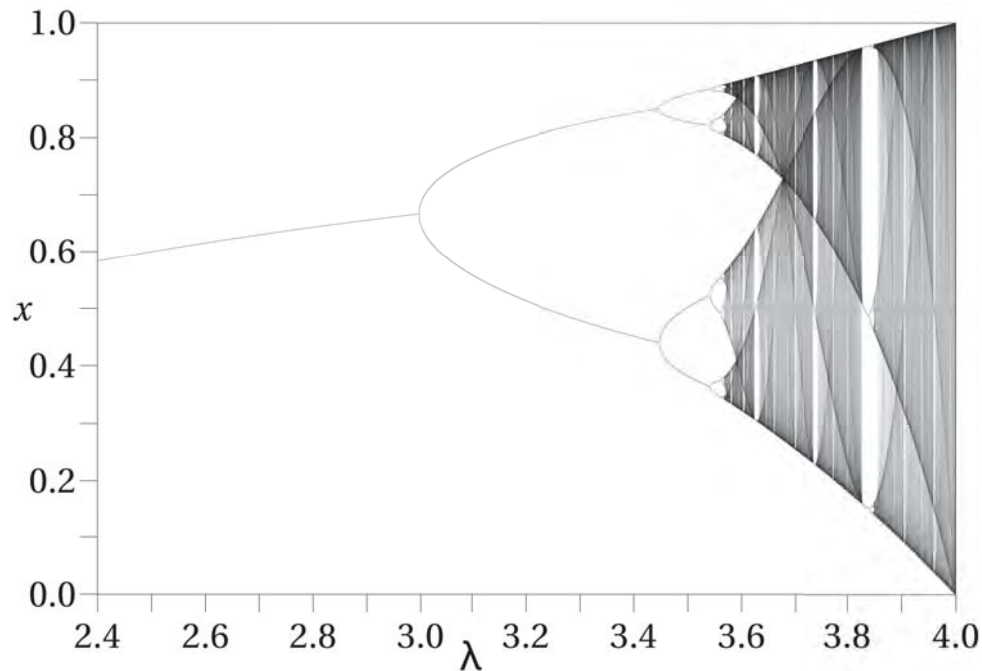


FIGURE B.1 – Diagramme de bifurcations de l’application logistique, tel que décrit par Feigenbaum (1980). La ligne entre $\lambda = 2.4$ et $\lambda = 3.$ correspond à la solution du point fixe $X = 1 - 1/\lambda$. Puis cette ligne se divise lorsque les bifurcations de doublement de période apparaissent.

B.3.2 Intermittence

Ce scénario, proposé par Pomeau (1986), est associé généralement à la collision de deux orbites périodiques, l’une stable et l’autre instable (c’est le cas notamment des bifurcations noeud-col ou des bifurcations de doublement de période inverse) ou bien d’une orbite périodique et d’un point fixe (bifurcation de Hopf) (Ott, 1993). A l’approche de la collision, un phénomène d’intermittence est observé ; la trajectoire reste globalement dans un état régulier, proche d’un cycle, mais devient par instant très chaotique. Cette intermittence a été identifiée dans le problème de l’attracteur de Lorentz (Pomeau, 1986) et dans des expériences de réactions chimiques oscillantes (F. Argoul, A. Arneodo, 1987).

B.3.3 Bifurcations globales de type crises

C’est une bifurcation du système caractérisée par la disparition, ou au contraire par l’expansion soudaine d’un attracteur chaotique. Elle se manifeste lors de la collision entre une orbite périodique instable (ou sa variété stable) et l’attracteur chaotique. La dénomination de ”bifurcation globale” vient du fait que ce scénario ne peut être prédit par une analyse de stabilité locale. Dans une crise de type ”explosive”, l’attracteur chaotique se transforme en selle chaotique, dans laquelle les trajectoires finissent par retomber dans l’état laminaire ou converger vers un autre attracteur. Ce type de comportement a récemment été identifié numériquement par Kreilos et Eckhardt (2012) dans le problème de la transition hydrodynamique à la turbulence pour l’écoulement de Couette plan. L’attracteur chaotique, issu d’une cascade sous-harmonique

d'un cycle limite, se transforme en selle chaotique pour une certaine valeur de Re , suite à sa collision avec la variété stable du point de selle. De telles crises sont également impliquées dans l'apparition d'une dynamique chaotique dans le problème de la carte de Hénon (dont l'espace des phases est 2D). D'autres types de crises existent, comme la collision de plusieurs attracteurs chaotiques entre eux. Certains types de crises peuvent être également à l'origine de comportements intermittents.

B.3.4 Bifurcations globales de type "homoclines" ou "hétéroclines"

Elles sont un cas particulier de bifurcations de type crise "explosive". Elle apparaissent lorsque les variétés stables et instables de cycles ou de points fixes entrent en collision transverse dans l'espace des phases. Si les variétés appartiennent au même cycle (ou point fixe), on parle de bifurcations "homoclines". Dans le cas contraire, on parle de bifurcations hétéroclines. L'intersection est dite transverse lorsque les surfaces associées aux variétés stable et instable ne sont pas tangentes au point considéré.

On dit qu'un point $q \in M$ est homocline à p si $q \in (W^s(p) \cap W^u(p)) - \{p\}$, autrement dit si il existe un point d'intersection entre les variétés instable et stable d'une même orbite périodique, qui ne soit pas cette orbite. On définit de manière similaire un point hétérocline impliquant deux orbites périodiques. La représentation habituelle d'une intersection homocline dans une visualisation de type "section de Poincaré" est donnée sur la figure B.2. Les cycles y sont représentés par des points fixes et leurs variétés par des lignes courbes (à une dimension). Ces courbes ne sont pas des trajectoires physiques paramétrées en temps, elles représentent des ensembles invariants de l'espace des phases. En étudiant ces intersections, Poincaré s'exclama : "On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer" (Poincaré, 1899). En effet, l'existence d'un seul point homocline (ou hétérocline) a des conséquences très importantes sur la forme que prennent les variétés et sur les trajectoires qui se dessinent autour.

Comme $W^s(p)$ et $W^u(p)$ sont des invariants de la dynamique, l'image d'un point homocline q par l'application de premier retour Φ_λ^1 doit se retrouver simultanément sur la variété stable et instable de p . L'image d'un segment de $W^u(p)$, centré autour de q (marqué d'un trait rouge sur la figure B.2) doit donc forcément recouper la variété stable $W^s(p)$, en un point noté ici q' . C'est également vrai pour les itérées successives de q , ce qui implique l'existence d'une infinité de points homoclines. Ces points doivent se rapprocher progressivement du point p , car ils appartiennent à sa variété stable. En conséquence, $W^u(p)$ forme une infinité de plis de plus en plus resserrés autour de p . Par ailleurs, d'après le lemme "λ" de Palis et Takens (1993), toute portion D transverse à $W^s(p)$, comme notre segment rouge initial, converge vers $W^u(p)$ après une infinité d'itérations. La variété instable repasse donc au voisinage du point q initial après un nombre fini n d'itérations. Cela donne naissance au treillis très complexe dont Poincaré parlait et qu'il préférait ne pas représenter.

Le théorème de Smale-Birkhoff (Birkhoff, 1935; Smale, 1967) stipule sous certaines hypothèses (différentiabilité des applications, hyperbolicité du système) que si il existe un point homocline, alors à partir d'un certain entier N , la dynamique propre à Φ_λ^N est de type "fer à cheval", du nom de l'application à temps discret découverte par Smale (1967) dont la dynamique représente le prototype du chaos hyperbolique. La conséquence principale de cette propriété est

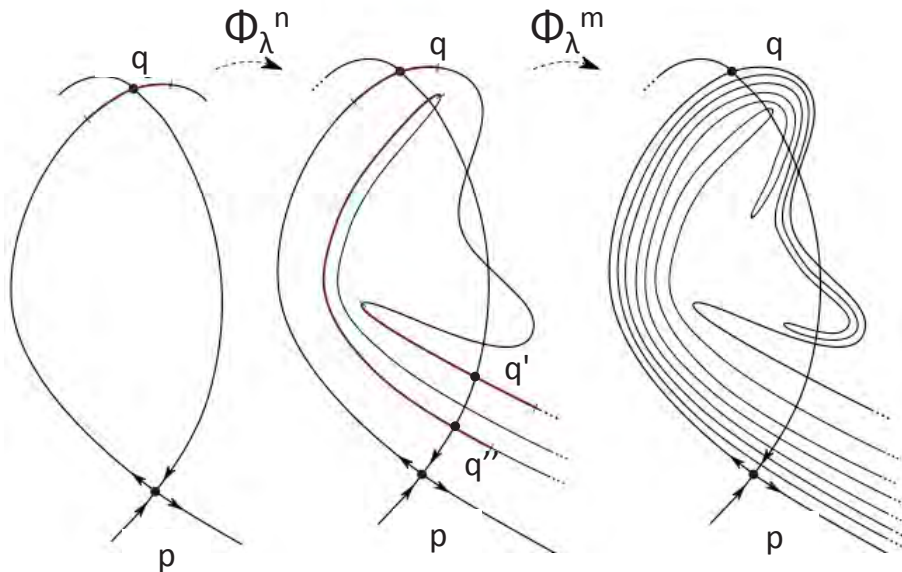


FIGURE B.2 – Représentation d’un treillis homocline. Les points p et q indiquent la position de l’orbite périodique et du point homocline. La courbe noire, dont les flèches pointent vers p (respectivement fuit le point p) représente $W^s(p)$ (respectivement $W^u(p)$). Les points q' , q'' etc.. indiquent les orbites homoclines successives associées au treillis.

l’apparition d’une infinité d’orbites périodiques et l’émergence du chaos au voisinage de p .

Dans le cadre des bifurcations globales, une application Ψ de type ”fer à cheval” peut essentiellement être décrite comme la somme de trois opérations sur un ensemble D au voisinage de p : un étirement le long de la variété instable $W^u(p)$ qui correspond à une divergence exponentielle dans cette direction, une contraction le long de la direction orthogonale associée à la variété stable $W^s(p)$, qui correspond à une convergence exponentielle, et un repliement de D . La figure B.3 illustre de façon simple les trois opérations associées à ce type de dynamique. Lorsque l’application de type ”fer à cheval” est répétée une infinité de fois, l’ensemble $\Psi^\infty(D) \cap D$, contenant toutes les orbites périodiques au voisinage de p forme un ensemble de Cantor discret et non-connexe. La dynamique et la réalisation du théorème de Smale-Birkhoff sont analysés numériquement dans le problème de la dynamo MRI au chapitre 5 (section 5.8).

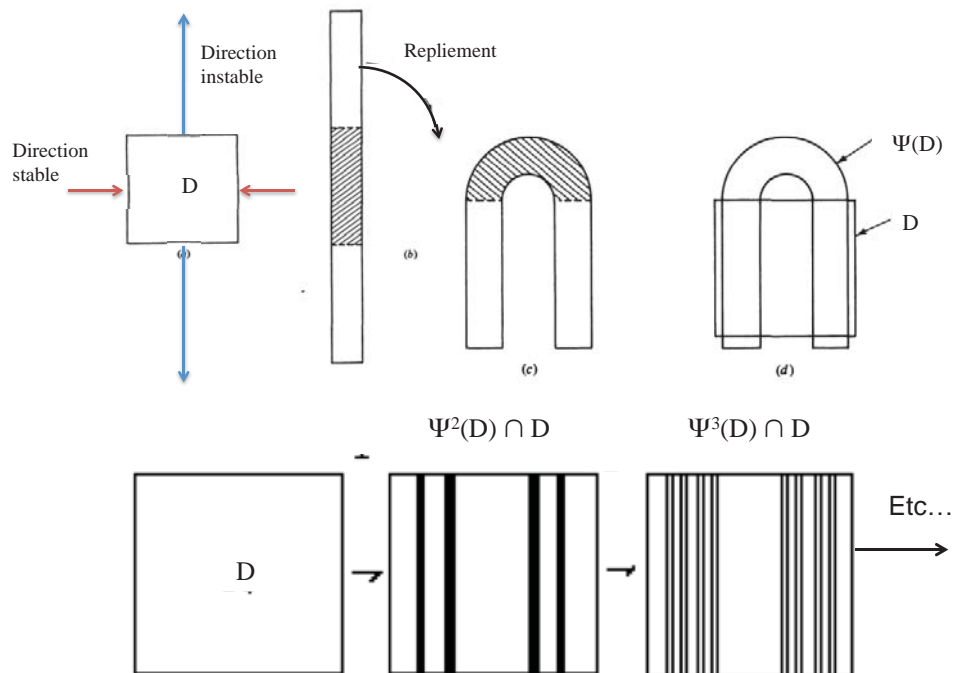


FIGURE B.3 – Représentation d’une application Ψ en ”fer à cheval”. Un exemple d’une telle application est Φ^4 introduite en section 5.8. Ce schéma basique illustre la façon dont la dynamique des variétés se comporte dans le cas d’une crise homocline. Un ensemble initial D de l’espace des phases, ici choisi au voisinage de l’orbite périodique (représenté par un carré) est contracté dans la direction verticale, puis étiré dans la direction horizontale perpendiculaire et enfin plié en deux. L’ensemble obtenu après une itération de cette application a une intersection non-connexe avec le carré initial. Cette intersection s’apparente à un ensemble de Cantor fractal lorsque l’opération est répétée une infinité de fois.

C

Modèle quasi-linéaire de la dynamique non-axisymétrique dans la dynamo magnétorotationnelle

Cette annexe décrit un système d'équations quasilineaire reproduisant assez bien l'évolution temporelle des perturbations non-axisymétriques, ainsi que celle de la force électromotrice (EMF) des cycles de dynamo MRI dans les boites longues. Ce système réduit nous a servi à mieux comprendre la physique de ces perturbations et à explorer leur dynamique dans une large gamme de paramètres avec une puissance de calcul limitée. Le modèle est quasilineaire au sens où l'évolution temporelle des perturbations non-axisymétriques MRI actives est linéarisée, mais la dynamique temporelle du champ support de la MRI est prise en compte dans leur évolution à travers la rétroaction non-linéaire (EMF) générée par les perturbations non-axisymétriques.

C.1 Equations du modèle réduit quasilineaire

On considère dans ce modèle uniquement les modes trailing fondamentaux, qui vérifient $k_y = 2\pi/L_y$ et $k_x(t) = Sk_y t$ pour $t \geq 0$. On filtre également la dépendance en z des perturbations en ne prenant que les modes pour lesquels $k_z \leq 4\pi/L_z$. Dans les boites longues et avec les symétries \mathcal{A}_1 , cela revient à prendre le mode MRI actif $\tilde{\mathbf{u}}_1$ et $\tilde{\mathbf{b}}_1$ (de nombre d'onde respectifs en z $k_z = k_{z_0} = 2\pi/L_z$ et $k_z = 0$) et un mode magnétique "esclave" de nombre d'onde $k_z = 4\pi/L_z$ que nous noterons $\tilde{\mathbf{b}}_2$ (ces modes ont été définis au chapitre 6). La prise en compte de ce dernier est nécessaire pour reproduire de manière satisfaisante la structure verticale des perturbations magnétiques non-axisymétriques dans un champ support $\overline{\mathbf{B}}_0$ modulé en z .

Les amplitudes de ces trois modes seront notées $\hat{\mathbf{u}}_1$, $\hat{\mathbf{b}}_1$ et $\hat{\mathbf{b}}_2$. On introduit également les notations $k_h^2 = k_y^2 + k_x^2$ et $k^2 = k_h^2 + k_{z_0}^2$. Ces modes peuvent ainsi être écrits :

$$\tilde{u}_{1,x,y} = \hat{u}_{1,x,y}(t) \cos(Sk_y tx + k_y y) \cos(k_{z_0} z), \quad (\text{C.1})$$

$$\hat{u}_{1,z} = \hat{u}_{1,z}(t) \sin(Sk_y tx + k_y y) \sin(k_{z_0} z), \quad (\text{C.2})$$

$$\tilde{b}_{1,x,y} = \hat{b}_{1,x,y}(t) \sin(Sk_y tx + k_y y), \quad (\text{C.3})$$

$$\tilde{b}_{1,z} = 0, \quad (\text{C.4})$$

$$\tilde{b}_{2,x,y} = \hat{b}_{2,x,y}(t) \sin(Sk_y tx + k_y y) \cos(2k_{z_0} z), \quad (\text{C.5})$$

$$\tilde{b}_{2,z} = \hat{b}_{2,z}(t) \cos(Sk_y tx + k_y y) \sin(2k_{z_0} z). \quad (\text{C.6})$$

La pression s'exprime :

$$\tilde{P} = \hat{P} \sin(Sk_y t x + k_y y) \cos(k_{z_0} z). \quad (\text{C.7})$$

Le système d'équations linéarisé décrivant l'évolution temporelle des modes non-axisymétriques $\tilde{\mathbf{u}}_1$, $\tilde{\mathbf{b}}_1$ et $\tilde{\mathbf{b}}_2$ s'écrit

$$k_x \hat{u}_{1_x} + k_y \hat{u}_{1_y} = k_z \hat{u}_{1_z}, \quad (\text{C.8})$$

$$k_x \hat{b}_{1_x} + k_y \hat{b}_{1_y} = 0, \quad (\text{C.9})$$

$$k_x \hat{b}_{2_x} + k_y \hat{b}_{2_y} + 2k_z \hat{b}_{2_z} = 0, \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{d\hat{u}_{1_x}}{dt} = 2\Omega \hat{u}_{1_y} - k_x \hat{P} + \omega_A (\hat{b}_{1_x} + \hat{b}_{2_x}/2) - \hat{b}_{2_z} \bar{B}_{0_x} k_{z_0}/2 - \nu k^2 \hat{u}_{1_x}, \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{d\hat{u}_{1_y}}{dt} = -(2\Omega - S) \hat{u}_{1_x} - k_y \hat{P} + \omega_A (\hat{b}_{1_y} + \hat{b}_{2_y}/2) - \hat{b}_{2_z} \bar{B}_{0_y} k_{z_0}/2 - \nu k^2 \hat{u}_{1_y}, \quad (\text{C.12})$$

$$\frac{d\hat{u}_{1_z}}{dt} = k_{z_0} \tilde{P} - \omega_A \hat{b}_{2_z} - \nu k^2 \hat{u}_{1_z}, \quad (\text{C.13})$$

$$\frac{d\hat{b}_{1_x}}{dt} = -\omega_A \hat{u}_{1_x}/2 + k_{z_0} \hat{u}_{1_z} \bar{B}_{0_x}/2 - \eta k_h^2 \hat{b}_{1_x}, \quad (\text{C.14})$$

$$\frac{d\hat{b}_{1_y}}{dt} = -S \hat{b}_{1_x} - \omega_A \hat{u}_{1_y}/2 + k_{z_0} \hat{u}_{1_z} \bar{B}_{0_y}/2 - \eta k_h^2 \hat{b}_{1_y}, \quad (\text{C.15})$$

$$\frac{d\hat{b}_{2_x}}{dt} = -\omega_A \hat{u}_{1_x}/2 - k_{z_0} \hat{u}_{1_z} \bar{B}_{0_x}/2 - \eta (k_h^2 + 4k_{z_0}^2) \hat{b}_{2_x}, \quad (\text{C.16})$$

$$\frac{d\hat{b}_{2_y}}{dt} = -S \hat{b}_{2_x} - \omega_A \hat{u}_{1_y}/2 - k_{z_0} \hat{u}_{1_z} \bar{B}_{0_y}/2 - \eta (k_h^2 + 4k_{z_0}^2) \hat{b}_{2_y}, \quad (\text{C.17})$$

$$\frac{d\hat{b}_{2_z}}{dt} = \omega_A \hat{u}_{1_z}/2 - \eta (k_h^2 + 4k_{z_0}^2) \hat{b}_{2_z}. \quad (\text{C.18})$$

où $\omega_A(t) = k_y \bar{B}_{0_y}(t) + k_x(t) \bar{B}_{0_x}(t)$ est la pulsation d'Alfvén. L'équation non-linéaire décrivant l'évolution du champ axisymétrique $\bar{\mathbf{B}}_0$ est :

$$\frac{d\bar{B}_{0_x}}{dt} = -k_{z_0} \bar{\mathcal{E}}_{0_y} - \eta k_{z_0}^2 \bar{B}_{0_x}, \quad (\text{C.19})$$

$$\frac{d\bar{B}_{0_y}}{dt} = -S \bar{B}_{0_x} + k_{z_0} \bar{\mathcal{E}}_{0_x} - \eta k_{z_0}^2 \bar{B}_{0_y}, \quad (\text{C.20})$$

où les composantes d'EMF $\bar{\mathcal{E}}_{0_x}$ et $\bar{\mathcal{E}}_{0_y}$ s'écrivent

$$\bar{\mathcal{E}}_{0_y} = \frac{\hat{u}_{1_z} \hat{b}_{1_x}}{2} - \frac{\hat{u}_{1_z} \hat{b}_{2_x}}{4} - \frac{\hat{b}_{2_z} \hat{u}_{1_x}}{4}, \quad (\text{C.21})$$

$$\bar{\mathcal{E}}_{0_x} = -\frac{\hat{u}_{1_z} \hat{b}_{1_y}}{2} + \frac{\hat{u}_{1_z} \hat{b}_{2_y}}{4} + \frac{\hat{b}_{2_z} \hat{u}_{1_y}}{4}. \quad (\text{C.22})$$

C.2 Exemple de simulation réalisée avec ce modèle

La figure C.1 illustre un exemple de simulation réalisable avec le modèle réduit quasilineaire présenté dans la section précédente. La condition initiale est générée de la manière suivante : pour un certain Re et Rm , et pour une taille de boîte donnée, on choisit une certaine amplitude initiale pour le champ magnétique $\overline{\mathbf{B}}_0$ et on introduit des amplitudes aléatoires sur les modes non-axisymétriques.

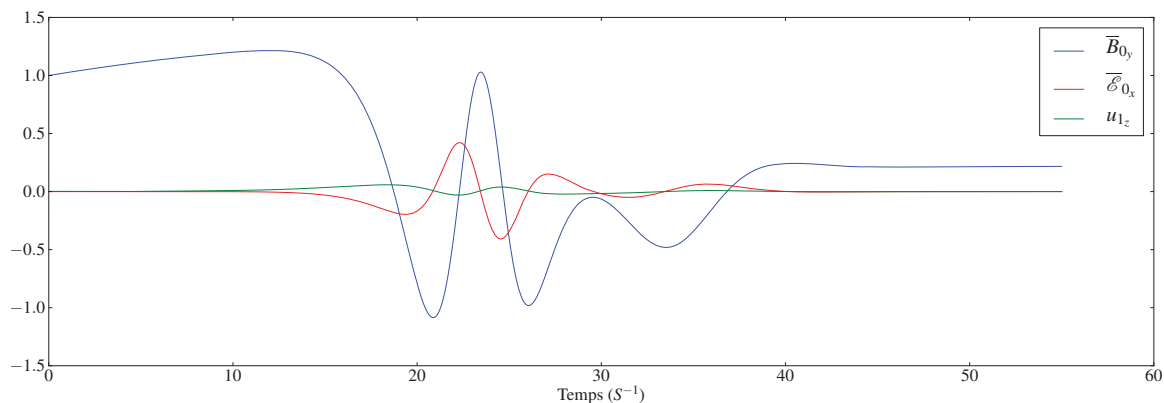


FIGURE C.1 – Exemple de simulation réalisée dans le modèle réduit quasilineaire à partir d'une condition initiale donnée (amplitudes aléatoires sur les modes non-axisymétriques et une amplitude de 1 et -0.044 pour \overline{B}_{0y} et \overline{B}_{0x}). Pour cette simulation, $Re = 1000$, $Rm = 550$, $(L_x, L_y, L_z) = (0.7, 20, 2)$.

Cette figure montre l'évolution temporelle du champ axisymétrique \overline{B}_{0y} , de la force électromotrice $\overline{\mathcal{E}}_{0x}$ et de la composante verticale de vitesse non-axisymétrique u_{1z} durant les 55 premiers temps de cisaillement. La dynamique finit par être dissipée aux temps longs car il n'existe pas de mécanisme de régénération d'ondes leading dans ce modèle (voir section 3.2.3). L'évolution de ces quantités ressemble fortement à celle présentée sur la figure 6.6 pour le problème général. Une phase de croissance MRI est observée entre $t = 0$ et $t = 20 S^{-1}$, suivie d'un retournement du champ autour de $t_{rev} = 20 S^{-1}$. Des oscillations sont ensuite observées sur les trois composantes représentées sur la figure. La présence de ces oscillations dans ce modèle réduit indique qu'elles sont avant tout issues de la physique linéaire des ondes non-axisymétriques.

C.3 Évolution des perturbations non-axisymétriques pour $\omega_A \ll \kappa$

L'objectif de cette section est de calculer analytiquement l'EMF non-linéaire produite par l'interaction entre les perturbations non-axisymétriques durant la phase trailing avancée, c'est à dire après la phase de croissance MRI et le retournement du champ $\overline{\mathbf{B}}_0$. L'intérêt de ce calcul est de pouvoir évaluer l'intensité des oscillations inertielles que nous avons identifiées au chapitre 6 et de mieux comprendre leur dépendance à la dissipation. Le temps sera donc considéré grand devant le temps de retournement du champ t_{rev} . On suppose que $\omega_A \ll \kappa$ dans cette phase et que les oscillations de $\overline{\mathbf{B}}_0$ sont relativement faibles, ce qui est le cas si l'amplitude des perturbations non-axisymétriques reste faible devant l'amplitude de $\overline{\mathbf{B}}_0$, afin de faire l'approximation d'un

champ constant. Notons que cette hypothèse n'est pas vérifiée sur la figure C.1 pour laquelle les conditions initiales et les Re, Rm choisis sont propices à de fortes oscillations.

Les équations de la section C.1 peuvent alors être développées asymptotiquement à l'ordre le plus bas en ω_A/κ . Le champ de vitesse, dans ce cas, est découplé du champ magnétique :

$$\frac{d\hat{u}_{1x}}{dt} = 2\Omega\hat{u}_{1y} - k_x\hat{P} - \nu k^2\hat{u}_{1x}, \quad (\text{C.23})$$

$$\frac{d\hat{u}_{1y}}{dt} = -(2\Omega - S)\hat{u}_{1x} - k_y\hat{P} - \nu k^2\hat{u}_{1y}, \quad (\text{C.24})$$

$$\frac{d\hat{u}_{1z}}{dt} = k_{z0}\hat{P} - \nu k^2\hat{u}_{1z}. \quad (\text{C.25})$$

L'évolution des perturbations magnétiques reste quant à elle couplée au champ de vitesse :

$$\frac{d\hat{b}_{1x}}{dt} = k_{z0}\hat{u}_{1z}\overline{B}_{0x}/2 - \eta k_h^2\hat{b}_{1x}, \quad (\text{C.26})$$

$$\frac{d\hat{b}_{1y}}{dt} = -S\hat{b}_{1x} + k_{z0}\hat{u}_{1z}\overline{B}_{0y}/2 - \eta k_h^2\hat{b}_{1y}, \quad (\text{C.27})$$

$$\frac{d\hat{b}_{x2}}{dt} = -k_{z0}\hat{u}_{1z}\overline{B}_{0x}/2 - \eta(k_h^2 + 4k_{z0}^2)\hat{b}_{x2}, \quad (\text{C.28})$$

$$\frac{d\hat{b}_{y2}}{dt} = -S\hat{b}_{x2} - k_{z0}\hat{u}_{1z}\overline{B}_{0y}/2 - \eta(k_h^2 + 4k_{z0}^2)\hat{b}_{y2}. \quad (\text{C.29})$$

Afin d'éliminer le terme de pression, on considère l'équation d'évolution du champ de vortacité dans le plan horizontal (x,y) , défini comme :

$$\tilde{\omega}_{x,y} = \hat{\omega}_{x,y} \cos(Sk_y t x + k_y y) \sin(k_{z0} z), \quad (\text{C.30})$$

avec

$$\hat{\omega}_x = k_y\hat{u}_{1z} + k_{z0}\hat{u}_{1y} = \frac{k_x k_y}{k_{z0}}\hat{u}_{1x} + \frac{k_{z0}^2 + k_y^2}{k_{z0}}\hat{u}_{1y}, \quad (\text{C.31})$$

$$\hat{\omega}_y = -(k_{z0}\hat{u}_{1x} + k_x\hat{u}_{1z}) = -\frac{k_{z0}^2 + k_x^2}{k_{z0}}\hat{u}_{1x} - \frac{k_x k_y}{k_{z0}}\hat{u}_{1y}. \quad (\text{C.32})$$

En prenant le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes, on obtient alors les deux équations suivantes :

$$\frac{d\hat{\omega}_x}{dt} = -(2\Omega - S)k_{z0}\hat{u}_{1x} - \nu k^2\hat{\omega}_x, \quad (\text{C.33})$$

$$\frac{d\hat{\omega}_y}{dt} = -2\Omega k_{z0}\hat{u}_{1y} - S k_y\hat{u}_{1z} - \nu k^2\hat{\omega}_y. \quad (\text{C.34})$$

Afin d'éliminer les termes visqueux, on introduit une nouvelle variable :

$$\hat{\omega}^* = \hat{\omega} \exp\left(\int_{t_0}^t \nu k^2 dt'\right), \quad (\text{C.35})$$

où t_0 est un temps arbitraire plus grand que t_{rev} . En utilisant cette transformation et les équations (C.31) à (C.34) on aboutit au système suivant :

$$\frac{d\hat{\omega}_x^*}{dt} = -(2\Omega - S) \left(\frac{-k_x k_y}{k^2} \hat{\omega}_x^* - \frac{k_{z_0}^2}{k^2} \hat{\omega}_y^* \right), \quad (\text{C.36})$$

$$\frac{d\hat{\omega}_y^*}{dt} = -2\Omega \left[\left(1 - \frac{\kappa^2 k_y^2}{4\Omega^2 k^2} \right) \hat{\omega}_x^* + \frac{k_x k_y}{k^2} \left(1 - \frac{S}{2\Omega} \right) \hat{\omega}_y^* \right], \quad (\text{C.37})$$

où $\kappa = [2\Omega(2\Omega - S)]^{1/2}$ est la fréquence épicyclique. En utilisant la dérivée de l'équation (C.36) dans l'équation (C.37), on obtient finalement l'équation différentielle du second ordre :

$$k^2 \frac{d^2 \hat{\omega}_x^*}{dt^2} + 2S^2 k_y^2 t \frac{d\hat{\omega}_x^*}{dt} + \kappa^2 \left[k_{z_0}^2 - k_y^2 + \frac{k_y^4}{k^2} \left(1 - \frac{S}{2\Omega} \right) \right] \hat{\omega}_x^* = 0. \quad (\text{C.38})$$

Afin de trouver une solution analytique à cette équation, nous supposons que $k \simeq S k_y t$. Ce n'est pas vrai si $t \lesssim L_y/L_z$ mais est approximativement vérifié aux temps plus grands. On introduit $\bar{\kappa} = \kappa L_y/L_z$. En supposant également que $L_y/L_z \gg 1$ et que $\Omega = 2/3S$ (profil képlérien), la solution à l'équation du second ordre est

$$\hat{\omega}_x = K_1 t^{-1/2} \cos(\bar{\kappa}/S \ln t + \phi) \exp\left(-\frac{S^2 k_y^2 \nu (t^3 - t_0^3)}{3}\right). \quad (\text{C.39})$$

où K_1 et ϕ sont des constantes. Ce calcul est en fait jusque là identique à celui effectué par Balbus et Hawley (2006) et notre solution analytique est en accord avec leur résultat. Lorsque t tend vers l'infini, la solution tend vers 0 de façon super-exponentielle à cause de la dissipation visqueuse combinée au cisaillement de l'onde non-axisymétrique (voir aussi Knobloch (1984); Korycansky (1992)). Pour un Re suffisamment grand, la solution oscille à une fréquence qui décroît avec le temps à cause du facteur en $\ln t$. Cette fréquence typique est en réalité de l'ordre de κ pour $t \sim L_y/L_z$. Enfin, la décroissance algébrique en $t^{-1/2}$, qui est due au cisaillement et à l'incompressibilité, est assez lente en comparaison du mouvement oscillant. Pour $L_y/L_z \gg 1$, $\hat{\omega}_y$ a le même comportement puisque

$$\frac{d\hat{\omega}_y^*}{dt} = -2\Omega \hat{\omega}_x^*. \quad (\text{C.40})$$

Afin de calculer l'EMF non-linéaire, il est nécessaire de calculer la composante \hat{u}_{1z} . Pour $t > L_y/L_z \gg 1$, l'équation de continuité (C.8) se réduit à $\hat{u}_{1z} k_{z_0} \simeq \hat{u}_{1x} k_x$. En utilisant l'équation (C.33) pour la vorticité en x , on obtient :

$$\hat{u}_{1z}^* = -\frac{1}{(2\Omega - S)} \frac{k_x}{k_{z_0}^2} \frac{d\hat{\omega}_x^*}{dt} = -\frac{2\Omega t}{k_{z_0} \bar{\kappa}} \frac{d\hat{\omega}_x^*}{dt}. \quad (\text{C.41})$$

En utilisant la dérivée de $\hat{\omega}_x^*$ obtenue à l'équation C.39, on trouve :

$$\hat{u}_{1z} = K_2 t^{-1/2} \cos(\bar{\kappa}/S \ln t + \psi) \exp\left(-\frac{S^2 k_y^2 \nu (t^3 - t_0^3)}{3}\right), \quad (\text{C.42})$$

où K_2 et ψ sont des constantes. Afin de calculer les perturbations magnétiques $\hat{\mathbf{b}}_1$ and $\hat{\mathbf{b}}_2$ apparaissant dans l'expression de l'EMF, on utilise les équations (C.14)-(C.17) et on suppose que $\bar{\mathbf{B}}_0$ est approximativement constant à partir de t_0 . On néglige également le terme de cisaillement dans l'évolution de la composante toroidale, ce qui est justifié par le fait que $\hat{b}_{1y} \gg \hat{b}_{1x}$ dans la plupart des simulations effectuées dans les boites longues. Le calcul donne :

$$\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{b}}(t_0) + k_{z_0} \frac{\bar{\mathbf{B}}_0}{2} \int_{t_0}^t \hat{u}_{1z} \exp \frac{S^2 k_y^2 \eta (t'^3 - t^3)}{3} dt', \quad (\text{C.43})$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_2 = \tilde{\mathbf{b}}_2(t_0) - k_{z_0} \frac{\bar{\mathbf{B}}_0}{2} \int_{t_0}^t \hat{u}_{1z} \exp \left(\frac{S^2 k_y^2 \eta (t'^3 - t^3)}{3} + 4k_z^2 \eta (t' - t) \right) dt'. \quad (\text{C.44})$$

En utilisant les équations (C.21)-(C.22), on obtient l'expression suivante pour la projection axisymétrique du rotationnel de l'EMF :

$$\nabla \times \mathcal{E} \simeq -\frac{1}{2} k_{z_0} \hat{u}_{1z} \left(\tilde{\mathbf{b}} - \frac{1}{2} \mathbf{b}_2 \right) \quad (\text{C.45})$$

$$= -\frac{k_{z_0} \hat{u}_{1z}}{2} \left[\tilde{\mathbf{b}}_0 - \frac{\tilde{\mathbf{b}}_{2_0}}{2} + k_{z_0} \frac{\bar{\mathbf{B}}_0}{2} \int_{t_0}^t \hat{u}_{1z} \exp \frac{S^2 k_y^2 (t'^3 - t^3)}{3} \left(1 + \frac{1}{2} \exp 4k_{z_0}^2 \eta (t' - t) \right) dt' \right]. \quad (\text{C.46})$$

Ce résultat qui traduit l'advection verticale des perturbations de champ magnétique, montre que l'EMF dépend directement de l'évolution temporelle de la perturbation verticale de vitesse non-axisymétrique. Comme le montre l'équation (C.42), \hat{u}_{1z} oscille au temps longs. Pour $\bar{\mathbf{B}}_0$ et des conditions initiales fixées, cette relation indique que l'amplitude et la durée des oscillations d'EMF augmentent avec Re et Rm. L'intensité des oscillations dépend également linéairement de l'amplitude de $\bar{\mathbf{B}}_0$ après le retournement.

C.4 Etude numérique des oscillations d'EMF

Afin de caractériser de façon générique la dépendance de ces oscillations à la dissipation, nous avons finalement réalisé une série de simulations avec le modèle quasilinear présenté en section C.1. Neuf conditions initiales différentes ont été générées. Pour chacune d'entre elles, l'amplitude de chaque mode non-axisymétrique est générée aléatoirement. La valeur initiale de \bar{B}_{0y} et \bar{B}_{0x} est dans un premier temps fixée à 0.5 et -0.022 respectivement (le ratio entre les deux correspond approximativement à celui de LB_1). Pour chaque condition initiale, nous avons réalisé un carte de simulations qui représente le ratio \mathcal{R}_p entre l'amplitude maximale des oscillations et celle du pic primaire d'EMF associé au retournement de $\bar{\mathbf{B}}_0$, en fonction de Re et Rm. Le résultat, illustré sur la figure, C.2, suggère qu'une augmentation de Re et Rm a tendance à faire croître l'intensité des oscillations, ce qui est en accord avec les prévisions analytiques de la section précédente. Ce résultat ne semble pas dépendre de la condition initiale. Nous avons vérifié par ailleurs que ces variations en Re et Rm ne dépendent pas significativement des valeurs initiales de \bar{B}_{0y} et \bar{B}_{0x} .

La figure C.3 montre l'évolution du ratio \mathcal{R}_p pour les mêmes neuf conditions initiales en fonction de l'amplitude initiale de \bar{B}_{0y} (à droite). Ces courbes indiquent que les oscillations d'EMF sont d'autant plus importantes que le champ support est fort. On remarque que pour une gamme de champ \bar{B}_{0y} comprise entre 0.3 et 0.7, l'évolution du ratio \mathcal{R}_p est quasiment linéaire

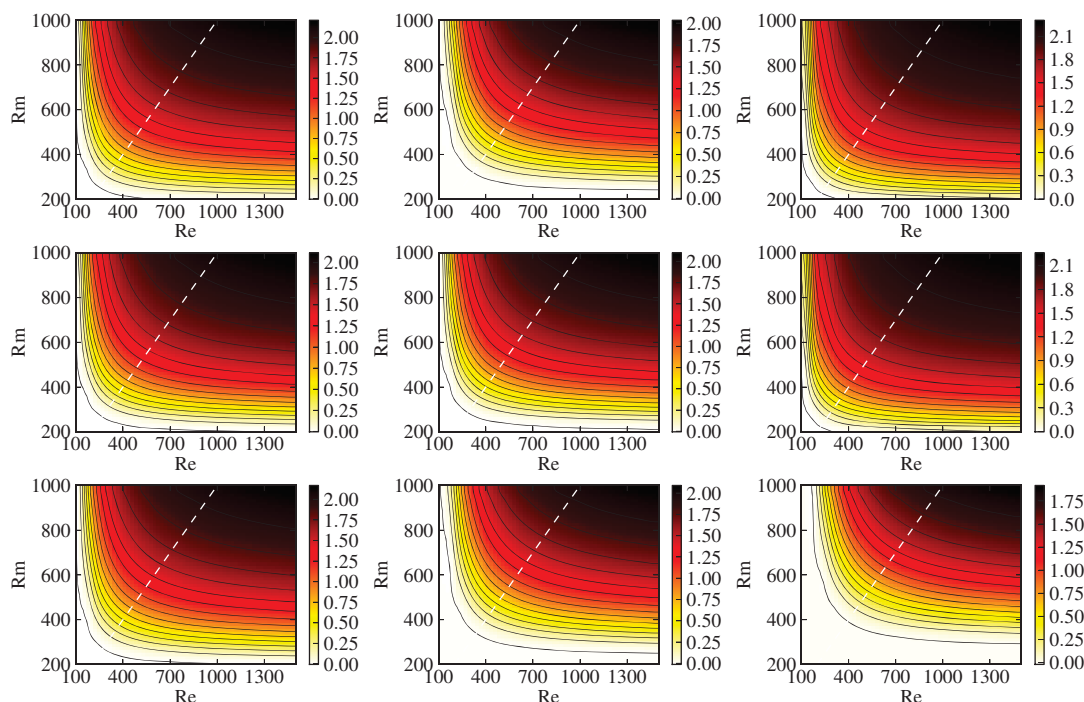


FIGURE C.2 – Ratio \mathcal{R}_p entre l’amplitude maximale des oscillations d’EMF et celle du pic primaire en fonction de Re et Rm , pour une série de 9 simulations réalisées dans le modèle quasi-linéaire de dynamo MRI réduit à 4 modes. Les amplitudes initiales des trois modes non-axisymétriques sont générées aléatoirement et sont différentes pour les 9 cas. L’amplitude initiale de \overline{B}_{0y} est fixée ici à 0.5. La boîte utilisée a pour dimensions (0.7, 20, 2)

avec l’amplitude de \overline{B}_{0y} , résultat qui avait été obtenu analytiquement dans la section précédente. A plus grand \overline{B}_{0y} , les oscillations deviennent si fortes qu’elles rétroagissent sur l’évolution des perturbations non-axisymétriques. Dans ce cas, l’hypothèse de faibles oscillations et de champ constant utilisée dans la dérivation analytique de la section précédente n’est plus vérifiée. On observe alors une saturation du ratio \mathcal{R}_p et donc de l’intensité des oscillations vis à vis du champ \overline{B}_{0y} initial.

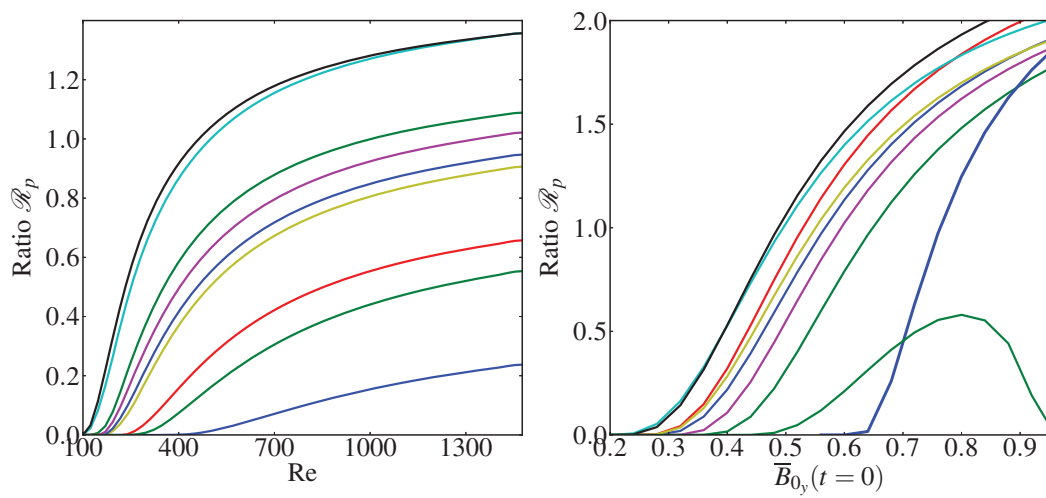


FIGURE C.3 – Ratio \mathcal{R}_p entre l'amplitude maximale des oscillations d'EMF et celle du pic primaire pour une série de 9 simulations réalisées dans un modèle quasi-linéaire de dynamo MRI réduit à 4 modes. Les amplitudes initiales sur les trois modes non-axisymétriques sont générées aléatoirement et sont différentes pour les 9 cas. A gauche, \mathcal{R}_p est représenté en fonction de Re pour une amplitude initiale de \overline{B}_{0_y} égale à 0.5. A droite, il est tracé en fonction de l'amplitude initiale de \overline{B}_{0_y} pour un Re fixé égal à 600. Le Rm est dans tous les cas égal à 360. La boîte utilisée a pour dimensions (0.7, 20, 2).

D

Statistiques turbulentes, transport et cycles

La théorie des orbites périodiques (Cvitanovic (1992), voir Cvitanovic (2004) pour une exposition pédagogique) s'inscrit dans le cadre général des systèmes dynamiques et offre un moyen de calculer statistiquement certaines propriétés d'un "flot" non-linéaire (par exemple des statistiques turbulentes associées à un écoulement fluide) à partir d'éventuelles solutions périodiques du problème considéré. L'objectif de cette annexe est de présenter sommairement un travail de synthèse de cette théorie, réalisé au cours de cette thèse, dans la perspective de pouvoir l'appliquer concrètement à des problèmes fluides. Le travail présenté ci dessous a permis de prendre en main le formalisme de la théorie. Nous décrivons les étapes principales de la dérivation établissant la relation entre observables moyennes et cycles, appelée couramment "formule trace", en se basant sur le cours théorique de Cvitanovic (2004). Notons que l'application d'une telle théorie au problème de la turbulence hydrodynamique développée dans les écoulements cisailés a jusqu'à présent donné des résultats mitigés.

D.1 Dualité entre dynamique des cycles et propriétés globales de l'écoulement

Le système MHD étudié au cours de cette thèse présente une dynamique chaotique extrêmement sensible aux conditions initiales. Pour ce type de problème, on cherche généralement à caractériser le comportement statistique du système à travers la moyenne de grandeurs physiques appelées observables. Par exemple, dans notre cas, il est particulièrement intéressant de connaître quelle quantité de moment cinétique est transférée radialement, en moyenne, vers l'extérieur du système. De façon générale, il est possible en simulant numériquement un écoulement d'intégrer un certain nombre de conditions initiales aléatoires et de mesurer en moyenne la quantité désirée. Cependant, cette technique est coûteuse en temps de calcul et ne permet pas forcément de comprendre physiquement et mathématiquement ce qui régit la dynamique et les propriétés physiques du système. Nous allons voir que malgré la complexité de certains problèmes, la dynamique globale "moyennée" peut en théorie et sous certaines conditions, être réduite à la dynamique locale des orbites périodiques du système. Si un nombre suffisant de ces cycles est connu, il devient en principe envisageable d'estimer analytiquement une moyenne des grandeurs physiques sur l'espace des états.

D.1.1 Cadre de l'étude et définitions

Considérons un système dynamique défini par un flot dynamique Φ^t et un espace des phases M contenant un ensemble de conditions initiales (ou vecteurs d'états initiaux). Pour toute condition initiale $\mathbf{X}_0 \in M$, le vecteur d'état au temps t (appelé trajectoire) est donné par $\mathbf{X}(t) = \Phi^t(\mathbf{X}_0)$. Pour simplifier les notations, nous poserons $x = \mathbf{X}$ et $x_0 = \mathbf{X}_0$.

i) Définition d'une observable

On appelle "observable" toute fonction $a(x)$ qui à un vecteur d'état x au temps t associe une quantité observable qui peut être un scalaire, un vecteur ou un tenseur. L'observable est une grandeur physique mesurable au cours du temps le long d'une trajectoire de l'espace des phases. Il s'agit par exemple du flux de moment cinétique radial dans notre problème (voir équation (2.20)). L'objectif de la théorie est d'établir une expression mathématique explicite pour la moyenne temporelle dans l'espace des phases de cette observable.

ii) Définition des moyennes

A partir d'une observable "a", on définit les moyennes suivantes :

- **Intégrale temporelle** de $a(x)$ le long d'une trajectoire de point initial x_0 :

$$A^t(x_0) = \int_0^t a(x(t))dt = \int_0^t a(\Phi^t(x_0))dt. \quad (\text{D.1})$$

- **Moyenne temporelle** de $a(x)$ le long d'une trajectoire de point initial x_0 : $\overline{A(x_0)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} A^t(x_0)$. Pour une orbite périodique, elle est définie simplement comme le rapport $\frac{A_p}{T_p}$ où $A_p = \int_0^{T_p} a(x(t))dt$ et T_p est la période de l'orbite.

- **Moyenne sur l'espace des phases** : pour t fixé, on moyenne les observables sur tous les états $\Phi^t(x_0)$ issus de l'intégration des vecteurs $x_0 \in M$.

$$\langle a \rangle (t) = \frac{1}{|M|} \int_M a(\Phi^t(x_0))dx_0 \quad \text{avec } |M| = \int_M dx_0. \quad (\text{D.2})$$

- **Moyenne globale** (sur le temps et l'espace) :

$$\langle a \rangle = \langle \overline{A(x_0)} \rangle = \frac{1}{|M|} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int_M a(\Phi^t(x_0))dx_0. \quad (\text{D.3})$$

Cette définition n'a un sens que si le système est ergodique (l'ensemble de l'espace des phases est visité par la dynamique), ce qui implique que les deux intégrales commutent.

iii) Opérateur d'évolution

La moyenne $\langle a \rangle$ que nous cherchons à calculer n'est pas facile à obtenir si on s'en tient à sa stricte définition. Pour y parvenir, on cherche donc à passer par une autre moyenne, batie au travers d'un opérateur d'évolution (dit de Perron-Frobenius) que nous allons pouvoir relier aux valeurs propres d'instabilité des orbites périodiques (multiplicateurs de Floquet). L'opérateur d'évolution \mathcal{L}^t associé à l'observable a est une fonction de M^2 dans R^p (p est la dimension de l'observable) qui à 2 vecteurs d'état x et y associe

$$\mathcal{L}^t(y, x) = \delta(y - \Phi^t(x))e^{\beta A^t(x)}. \quad (\text{D.4})$$

Cet opérateur est construit de la manière suivante : si y au temps t n'est pas l'image de x par le flot, alors sa valeur vaut 0. Sinon elle vaut $\exp(\beta A^t(x))$, où β est une variable non physique auxiliaire de même dimension que a dont nous nous servirons pour déterminer les moyennes par différentiation¹. On définit également une application linéaire, notée L_a^t et associée à l'opérateur d'évolution :

$$L_a^t : y \rightarrow \int_M \mathcal{L}^t(y, x) dx. \quad (\text{D.5})$$

D.1.2 Lien entre la moyenne globale d'une observable et l'opérateur d'évolution

On définit la moyenne exponentielle au temps t de la manière suivante :

$$\langle e^{\beta A^t} \rangle = \langle L_a^t \rangle = \frac{1}{|M|} \int_M \left(\int_M \mathcal{L}^t(y, x) dx \right) dy = \frac{1}{|M|} \int_M \int_M \delta(y - \Phi^t(x)) e^{\beta A^t(x)} dy dx. \quad (\text{D.6})$$

Par abus de langage, on dira que c'est la moyenne spatiale de l'opérateur d'évolution. On notera que l'intégrale sur M permet de ne garder que les points sur la trajectoire des états initiaux qui sont restés sur l'ensemble de départ M . On va alors chercher à déterminer le comportement asymptotique de la moyenne $\langle \exp(\beta A^t) \rangle$ lorsque t tend vers l'infini. Si la moyenne temporelle de l'observable est bien définie, $A^t(x)$ est alors équivalent à $t\overline{A(x_0)}$. On s'attend donc à ce que la moyenne $\langle \exp(\beta A^t) \rangle$ croisse exponentiellement au temps longs :

$$\langle e^{\beta A^t} \rangle \rightarrow (const) e^{ts_0(\beta)}.$$

Par construction de s_0 , on a $s_0(\beta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \langle e^{\beta A^t} \rangle$. En dérivant cette expression par rapport à β , on obtient la relation fondamentale permettant de retrouver la moyenne globale de l'observable :

$$\langle a \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \langle A^t \rangle = \left. \frac{\partial s_0}{\partial \beta} \right|_{\beta=0}. \quad (\text{D.7})$$

Au temps longs, l'opérateur linéaire L_a^t est diagonalisable (voir Cvitanovic (2004) pour les propriétés des opérateurs de Perron-Frobenius) et son action est entièrement dominée par sa plus

¹Le paramètre β joue un rôle équivalent à celui de la température dans la définition des fonctions de partition en physique statistique.

grande valeur propre $\lambda_0(t)$. On peut alors montrer que l'exposant $s_0(\beta)$ que l'on cherche à calculer est directement relié à $\lambda_0(t)$ par :

$$s_0(\beta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \lambda_0(t). \quad (\text{D.8})$$

On reconnaît dans cette expression le plus grand exposant de Lyapunov à temps fini de l'opérateur d'évolution. En utilisant la propriété d'additivité de l'opérateur \mathcal{L}^t le long d'une trajectoire, on démontre qu'il existe un générateur \mathcal{A} tel que $\mathcal{L}^t = \exp(\mathcal{A}t)$. Cela revient à dire que les valeurs propres de L_a^t , notées $\lambda_i(t)$, peuvent être mises sous la forme $\exp(\alpha_i t)$. Si on note α_0 la plus grande valeur propre de \mathcal{A} alors il vient directement que $s_0(\beta) = \alpha_0$. En conclusion, nous avons appris que la moyenne d'une observable est directement reliée à la plus grande valeur propre du générateur \mathcal{A} de l'opérateur d'évolution. Le problème est maintenant de comprendre comment calculer une telle quantité en pratique.

D.1.3 Formule trace

En prenant la trace de L_a^t il est possible de relier ses valeurs propres aux observables moyennées sur les orbites périodiques du système, en admettant qu'il en existe au moins une. Par définition, la trace de l'opérateur d'évolution est $Tr(L_a^t) = \sum \lambda_i(t) = \sum \exp(\alpha_i t)$. D'après la théorie des opérateurs à noyaux, on peut mettre cette quantité sous la forme :

$$Tr(L_a^t) = \int_M \mathcal{L}^t(x, x) dx = \int_M \delta(x - \Phi^t(x)) e^{\beta A^t(x)} dx. \quad (\text{D.9})$$

Considérons un temps t fixé. L'intégration porte sur tout les états x de M tel que $x = \Phi^t(x)$. Cette condition est réalisée si et seulement si x appartient à une orbite périodique de période t . Si on appelle F_t l'ensemble des points de l'espace des phases tel que $\Phi^t(x_i) = x_i$, c'est-à-dire appartenant à une orbite périodique, on peut démontrer que cette intégrale se met sous la forme :

$$Tr(L_a^t) = \sum_{F_t / \Phi^t(x_i) = x_i} \frac{e^{\beta A^t(x)}}{\|\det(I - M^t(x_i))\|}, \quad (\text{D.10})$$

où M^t est la matrice de monodromie de l'orbite périodique de période t passant par le point x_i (matrice jacobienne de l'application de premier retour Φ^t). En effectuant le recensement de tous les points de F_t sur une orbite périodique donnée et en sommant sur toutes les orbites de période t , on montre alors que :

$$Tr(L_a^t) = \sum_p T_p \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{e^{r\beta A_p}}{\|\det(I - M_p^r)\|} \delta_{t, T_p r}. \quad (\text{D.11})$$

L'entier r dans la somme infinie représente le nombre de tours passés sur une orbite périodique donnée et p représente l'ensemble des cycles de période T_p . Cette formule n'est pas encore exploitable puisque le symbole de Kroeneker ne peut pas être calculé explicitement. L'astuce pour s'en débarrasser est d'intégrer ensuite sur toutes les périodes du système, en prenant la transformée de Laplace de $Tr(L_a^t)$. Cette transformation revient en fait à ne sélectionner que les temps t qui sont égaux à la période d'un cycle primaire ($r=1$) ou d'un cycle répété r fois. On

obtient alors la formule trace reliant les valeurs propres du générateur \mathcal{A} (à travers la trace de sa résolvante) aux caractéristiques des orbites périodiques :

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \text{Tr}(L_a^t) = \text{Tr} \left(\frac{1}{s - \mathcal{A}} \right) = \sum_p T_p \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{e^{r(\beta A_p - s T_p)}}{\|\det(I - M_p^r)\|}. \quad (\text{D.12})$$

D.1.4 Hypothèse d'hyperbolicité et formule asymptotique

L'hypothèse d'hyperbolicité permet de faire une approximation sur la stabilité des orbites périodiques en considérant que seules les valeurs propres de la matrice de monodromie supérieures à 1 vont être importantes. Elle permettra entre autres de donner une expression simple pour le déterminant $\det(I - M_p^r)$. Cette hypothèse suppose qu'il existe deux réels strictement positifs λ_e et λ_c tels que pour tous les cycles primaires, les multiplicateurs de Floquet (ou valeurs propres) de la matrice de monodromie vérifient :

$$|\Lambda_{p,e}| > e^{\lambda_e T_p} \text{ et } |\Lambda_{p,c}| < e^{-\lambda_c T_p}$$

où $\Lambda_{p,e}$ sont les multiplicateur de Floquet de module supérieur à 1 de l'orbite périodique (instables) et $\Lambda_{p,c}$ sont ceux de module inférieur à 1 (stables). Dans cette hypothèse, le déterminant est réduit au produit des multiplicateurs supérieurs à 1 de la matrice de monodromie :

$$\|\det(I - M_p^r)\| \simeq \prod_e |\Lambda_{p,e}|^r. \quad (\text{D.13})$$

Nous utiliserons cette approximation dans la suite de l'étude et nous noterons Λ_p ce produit.

D.2 Fonction zeta et calcul de la plus grande valeur propre de l'opérateur \mathcal{A}

Le problème de la formule trace (D.12) est qu'elle diverge en $z = e^{-s} = e^{-\alpha_i}$, précisément là où il est intéressant de l'évaluer pour estimer s_0 . De plus la somme infinie portant sur le nombre de tours r n'est pas forcément convergente. On utilise donc plutôt le déterminant spectral (ou polynôme caractéristique) qui permet de mettre le problème sous la forme d'une résolution de zéros. En utilisant les propriétés de la trace et du déterminant, on peut montrer que celui-ci se met sous la forme :

$$\det(s - \mathcal{A}) = \exp \left(- \sum_p \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r} \frac{e^{r(\beta A_p - s T_p)}}{\Lambda_p^r} \right). \quad (\text{D.14})$$

On définit aussi la fonction zeta comme l'inverse du déterminant spectral. L'étude des zéros de la fonction $\det(s - \mathcal{A})/1/\xi$ va permettre de déterminer le spectre de L_a^t (ou plutôt ici de \mathcal{A}) et donc d'obtenir sa plus grande valeur propre en fonction de β . On a montré précédemment que $s_0(\beta)$ était strictement égal à cette valeur propre. Dans un premier temps, simplifions la fonction $1/\xi$ en posant $t_p = e^{\beta A_p - s T_p} / \Lambda_p$. On dérive alors une formule simple qui est la représentation en produit d'Euler de la fonction zeta inverse :

$$1/\xi = \exp \left(- \sum_p \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{t_p^r}{r} \right) = \exp \left(- \sum_p \ln(1 - t_p) \right) = \prod_p (1 - t_p). \quad (\text{D.15})$$

Il serait tentant d'affirmer que les zéros de la fonction $1/\xi$ sont simplement les t_p . En réalité le produit porte sur une infinité de cycles et donc en théorie on ne peut pas affirmer qu'il converge. Par conséquent les t_p ne sont pas forcément les zéros de la fonction zeta. Pour déterminer ces zéros, nous allons mettre le produit infini sous la forme d'un polynôme en $z = e^{-s}$, que l'on tronque à partir d'un certain ordre. La résolution des zéros se ramènera à la recherche des racines du polynôme obtenu. En développant le produit d'Euler, on obtient :

$$1/\xi = \prod_p (1 - t_p) = 1 - \sum_{p_2, p_2, \dots, p_k}^{\infty} (-1)^k t_{p_1} t_{p_2} \dots t_{p_k}.$$

La somme ici porte sur toutes les combinaisons distinctes de cycles primaires qui ne se répètent pas. Si on note t_π le produit des $(-1)^k t_{p_1} t_{p_2} \dots t_{p_k}$, la fonction zeta inverse se réécrit plus simplement :

$$1/\xi = 1 - \sum_{\pi} t_\pi. \quad (\text{D.16})$$

Pour $k > 1$, t_π représente le poids d'un pseudocycle équivalent contenant une séquence de cycles plus petits p_1, p_2, \dots, p_k . On a donc :

$$t_\pi = (-1)^{k_\pi+1} \frac{1}{|\Lambda_\pi|} e^{\beta A_\pi - s T_\pi} \text{ avec } T_\pi = T_{p_1} + T_{p_2} + \dots + T_{p_{k_1}},$$

$$A_\pi = A_{p_1} + A_{p_2} + \dots + A_{p_{k_1}} \text{ et } \Lambda_\pi = \Lambda_{p_1} \Lambda_{p_2} \dots \Lambda_{p_{k_1}}.$$

où k_π est l'indice k associé au terme t_π de la série. A partir d'un certain degré π , si le flot est suffisamment lisse, la dynamique des orbites de longue période va être écrantée (ou compensée) par les cycles plus petits. Dans le cas d'une dynamique symbolique de type "fer à cheval", pour laquelle les cycles de plus grande période sont construits à partir des cycles fondamentaux de plus petite période, cette propriété d'écrantage est naturellement vérifiée. La somme peut alors se réduire aux contributions des cycles fondamentaux. Quand la dynamique n'est pas symbolique, cette propriété n'est pas évidente car on ne peut pas définir de cycles fondamentaux. Cependant il est possible de couper la série à partir d'un certain degré lorsque la valeur propre du mode instable du pseudo-cycle devient trop grande. Autrement dit on ne garde que les k_π cycles tel que $\Lambda_\pi = \Lambda_{p_1} \Lambda_{p_2} \dots \Lambda_{p_{k_\pi}} < \Lambda_{max}$. En réalité, tous les systèmes chaotiques présentent un certain degré d'écrantage : lorsque la période devient suffisamment grande, on peut toujours trouver une série de cycles plus petits dont la somme des périodes sera proche de la grande période (idem pour la valeur propre instable qui est multiplicative).

Par souci de simplicité, la formule trace pourra être appliquée dans notre problème à l'ordre le plus bas, dans l'hypothèse que la dynamique est symbolique. L'effet des cycles secondaires de période $2T_0, 3T_0, \dots$ (identifiés en section 5.4.1) et des cycles de périodes fractionnaires que nous avons identifiés en section 4.3.4 et 6.4.1 pourra être négligé sur la dynamique. Une fois la série tronquée, il suffit pour obtenir $s_0(\beta)$ de résoudre les zéros de :

$$\sum_{\pi: T_\pi = T_0} (-1)^{k_\pi+1} \frac{e^{\beta A_\pi - s T_\pi}}{|\Lambda_\pi|} = 1 \quad (\text{D.17})$$

grâce à une méthode de Newton par exemple. On sélectionne ensuite la plus grande racine $e = e^{-s}$ pour laquelle s correspond à la plus grande valeur propre de l'opérateur d'évolution. On a donc une méthode concrète pour déterminer la moyenne de l'observable désirée à partir de l'équation (D.7).

D.2.1 Calcul de la moyenne de l'observable

Nous avons vu que la moyenne est obtenue en dérivant $s_0(\beta)$ par rapport à β et en évaluant la dérivée au point $\beta=0$. Une première solution serait de résoudre $s_0(\beta)$ pour une série de valeurs de β autour de zero et de calculer numériquement la dérivée en 0. Une deuxième solution, plus intéressante, repose sur une méthode analytique. On peut montrer que la fonction $F(\beta, s) = 1/\xi = 1 - \sum_{\pi} t_{\pi}$ est constante sur la courbe $s = s_0(\beta)$ et donc :

$$\frac{dF(\beta, s_0(\beta))}{d\beta} = \frac{\partial F}{\partial \beta} + \frac{ds_0}{d\beta} \frac{\partial F}{\partial s} \Big|_{s=s_0(\beta)} = 0 \implies \frac{ds_0}{d\beta} = \frac{\partial F}{\partial \beta} / \frac{\partial F}{\partial s} \Big|_{s=s_0(\beta)}.$$

Il est possible de calculer analytiquement $\frac{\partial(1/\xi)}{\partial \beta}$ et $\frac{\partial(1/\xi)}{\partial s}$ grâce à (D.16). Par évaluation de ces dérivées en $\beta = 0$ et en $s = s_0(\beta) = s_0(0)$, on montre alors que la moyenne globale de l'observable a est égale à :

$$\langle a \rangle = \frac{\partial s_0}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} = \frac{\sum_{\pi} A_{\pi} t_{\pi}}{\sum_{\pi} T_{\pi} t_{\pi}} \Big|_{\beta=0, s=s_0(0)} = \frac{\sum_{\pi} (-1)^{k_{\pi}+1} \frac{A_{\pi}}{|\Lambda_{\pi}|} e^{-s_0(0)T_{\pi}}}{\sum_{\pi} (-1)^{k_{\pi}+1} \frac{T_{\pi}}{|\Lambda_{\pi}|} e^{-s_0(0)T_{\pi}}}. \quad (\text{D.18})$$

Cette formule constitue le résultat principal de la dérivation, en ce qu'elle est directement applicable au problème considéré, si on suppose que le système dynamique vérifie l'hypothèse d'hyperbolicité et la propriété d'écrantage (ce qui n'est pas prouvé dans notre cas).

Publications

Under consideration for publication in J. Fluid Mech.

1

Global bifurcations to subcritical magnetorotational dynamo action in Keplerian shear flow

A. RIOLS^{1,2}, F. RINCON^{1,2} †, C. COSSU³,
G. LESUR⁴, P.-Y. LONGARETTI⁴,
G. I. OGILVIE⁵ AND J. HERAULT⁶

¹Université de Toulouse; UPS-OMP; IRAP; Toulouse, France

²CNRS; IRAP; 14 avenue Edouard Belin, F-31400 Toulouse, France

³CNRS-Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT),
Allée du Professeur Camille Soula, 31400 Toulouse, France

⁴UJF-Grenoble 1 / CNRS-INSU, Institut de Planétologie et d'Astrophysique de Grenoble
(IPAG) UMR 5274, Grenoble, F-38041, France

⁵Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge,
Centre for Mathematical Sciences, Wilberforce Road, Cambridge CB3 0WA, United Kingdom

⁶Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure, CNRS UMR 8550,
24 Rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France

(Received ?; revised ?; accepted ?. - To be entered by editorial office)

Magnetorotational dynamo action in Keplerian shear flow is a three-dimensional, non-linear magnetohydrodynamic process whose study is relevant to the understanding of accretion processes and magnetic field generation in astrophysics. Transition to this form of dynamo action is subcritical and shares many characteristics of transition to turbulence in non-rotating hydrodynamic shear flows. This suggests that these different fluid systems become active through similar generic bifurcation mechanisms, which in both cases have eluded detailed understanding so far. In this paper, we build on recent work on the two problems to investigate numerically the bifurcation mechanisms at work in the incompressible Keplerian magnetorotational dynamo problem in the shearing box framework. Using numerical techniques imported from dynamical systems research, we show that the onset of chaotic dynamo action at magnetic Prandtl numbers larger than unity is primarily associated with global homoclinic and heteroclinic bifurcations of nonlinear magnetorotational dynamo cycles. These global bifurcations are found to be supplemented by local bifurcations of cycles marking the beginning of period-doubling cascades. The results suggest that nonlinear magnetorotational dynamo cycles provide the pathway to turbulent injection of both kinetic and magnetic energy in incompressible magnetohydrodynamic Keplerian shear flow in the absence of an externally imposed magnetic field. Studying the nonlinear physics and bifurcations of these cycles in different regimes and configurations may subsequently help to better understand the physical conditions of excitation of magnetohydrodynamic turbulence and instability-driven dynamos in a variety of astrophysical systems and laboratory experiments. The detailed characterization of global bifurcations provided for this three-dimensional subcritical fluid dynamics problem may also prove useful for the problem of transition to turbulence in hydrodynamic shear flows.

† Email address for correspondence: francois.rincon@irap.omp.eu

Dissipative effects on the sustainment of a magnetorotational dynamo in Keplerian shear flow

A. Riols^{1,2}, F. Rincon^{1,2}, C. Cossu³, G. Lesur^{4,5}, G. I. Ogilvie⁶, and P. -Y. Longaretti^{4,5}

¹ Université de Toulouse; UPS-OMP; IRAP: Toulouse, France

² CNRS; IRAP; 14 avenue Edouard Belin, F-31400 Toulouse, France

³ CNRS; Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT), Allée du Professeur Camille Soula, 31400 Toulouse, France

⁴ Univ. Grenoble Alpes, IPAG, F-38000 Grenoble, France

⁵ CNRS, IPAG, F-38000 Grenoble, France

⁶ Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, Centre for Mathematical Sciences, Wilberforce Road, Cambridge CB3 0WA, United Kingdom

June 2, 2014

ABSTRACT

The magnetorotational (MRI) dynamo has long been considered one of the possible drivers of turbulent angular momentum transport in astrophysical accretion disks. However, various numerical results suggest that this dynamo may be difficult to excite in the astrophysically relevant regime of magnetic Prandtl number Pm significantly smaller than unity, for reasons currently not well understood. The aim of this Letter is to present the first results of an ongoing numerical investigation of the role of both linear and nonlinear dissipative effects in this problem. Combining a parametric exploration and an energy analysis of incompressible nonlinear MRI dynamo cycles representative of the transitional dynamics in large aspect ratio shearing boxes, we find that turbulent magnetic diffusion makes the excitation and sustainment of this dynamo at moderate magnetic Reynolds number Rm increasingly difficult for decreasing Pm . This results in an increase of the critical Rm of the dynamo for increasing kinematic Reynolds number Re , in agreement with earlier numerical results. Given its very generic nature, we argue that turbulent magnetic diffusion could be an important determinant of MRI dynamo excitation in disks, and may also limit the efficiency of angular momentum transport by MRI turbulence in low Pm regimes.

Key words. accretion disks – MHD – dynamo – turbulence

1. Introduction

Magnetorotational instability (MRI) occurs in differentially rotating flows whose angular velocity decreases with distance to the rotation axis (Velikhov 1959; Chandrasekhar 1960; Balbus & Hawley 1991) and is the most commonly invoked excitation mechanism of angular momentum-transporting turbulence in accretion disks (Balbus & Hawley 1998). In a uniform magnetic field \mathbf{B} , the MRI amplifies arbitrarily small perturbations exponentially and breaks down nonlinearly into MHD turbulence (e. g. Hawley et al. 1995). The transport efficiency of MRI turbulence continues to be debated, and may be reduced in the astrophysically relevant regime of low magnetic Prandtl number Pm , the ratio between kinematic viscosity and magnetic diffusivity (Lesur & Longaretti 2007; Balbus & Henri 2008).

Another question in this context is that of the origin of the MRI-supporting magnetic field. In some cases, this field may be generated by an internal disk dynamo process which could bootstrap MHD turbulence in the disk independently of its magnetic environment (Balbus & Hawley 1998; Donati et al. 2005). Early simulations by Hawley et al. (1996) in the so-called zero-net-flux configuration appropriate to this problem showed that such a dynamo is indeed possible and is intimately coupled to the MRI (see also Brandenburg et al. (1995)), but its viability in disks has since been questioned by numerical studies suggesting that it may be impossible to excite at low Pm (Fromang et al. 2007), for as yet unclear physical reasons (Bodo et al. 2011; Käpylä & Korpi 2011; Oishi & Mac Low 2011; Simon et al. 2011).

The aim of this Letter is to seek a physical explanation for this behaviour by exploiting recently discovered dynamical properties of this subcritical dynamo mechanism (Rincon et al. 2007, 2008; Lesur & Ogilvie 2008), whose principles are otherwise rather simple: starting from a zero net-flux axisymmetric weak poloidal field, a larger toroidal field is generated through the Ω effect. This field is MRI-unstable to non-axisymmetric MHD perturbations, whose growth results in a nonlinear electromotive force (EMF) that sustains (and can also reverse) the axisymmetric field. Recent work suggests that cyclic nonlinear solutions provide the first germs of excitation of the dynamo in shearing box simulations (Herault et al. 2011; Riols et al. 2013) and possibly form the backbone of the ensuing self-sustained MHD turbulence. Parametric studies of cycles representative of the transitional dynamics, complemented with an analysis of their energetics, may therefore prove useful to understand how dissipative effects affect the dynamo transition as a whole. Here, we present the first results of an ongoing numerical investigation of this kind. We focus on the simpler case of incompressible dynamics in large aspect ratio shearing boxes, which includes most of the fundamental physical complexity of the problem, except for stratification and boundary effects. An exhaustive study of different configurations will be presented in a subsequent paper.

2. Equations and numerical framework

The equations and numerical framework are described in detail in Riols et al. (2013). We use the cartesian shearing sheet de-

Résumé

L'un des défis majeurs de la théorie des disques d'accrétion en astrophysique est de pouvoir identifier des mécanismes efficaces de transport de moment cinétique au sein de ces objets. Le scénario le plus crédible aujourd'hui est que ce transport est lié à l'existence de turbulence magnétohydrodynamique (MHD), initiée par une instabilité dite "magnétorotationnelle" (MRI), nécessitant la présence d'un champ magnétique. Ce problème soulève la question de l'origine et de l'entretien de ce champ au sein du disque. Un mécanisme de dynamo sous-critique non-linéaire, s'appuyant sur la MRI, pourrait permettre d'expliquer conjointement l'entretien de la turbulence MHD et du champ magnétique dans l'écoulement cisailé képlérien. Des mécanismes similaires basés sur d'autres instabilités MHD pourraient également être à l'œuvre dans les intérieurs stellaires. Les conditions physiques d'excitation de cette dynamo sont cependant mal comprises. Des travaux numériques ont suggéré que celle-ci pourrait ne pas être entretenue à petit nombre de Prandtl magnétique (ratio entre viscosité et diffusivité magnétique), un régime assez commun dans les disques d'accrétion. Le but de cette thèse a été de mieux comprendre les conditions d'entretien de cette dynamo et le rôle joué par les effets dissipatifs dans la transition vers une turbulence MHD auto-entretenu. Pour cela, nous avons étudié en détail la nature de la transition et le rôle particulier des solutions périodiques non-linéaires tridimensionnelles. Nous avons d'abord montré que l'émergence d'activité chaotique associée à cette dynamo était due à la présence de bifurcations globales de tels cycles. Nous avons ensuite tenté d'élucider l'origine physique de la dépendance en Pm de la transition. Grâce à une analyse énergétique des cycles, nous avons mis en évidence qu'une forme de diffusion magnétique "turbulente" rend l'excitation de la dynamo plus difficile à petit Pm . Cet effet très générique pourrait s'opposer à l'activation de la dynamo dans les disques mais aussi limiter l'efficacité du transport de moment cinétique associé à la turbulence MRI à bas Pm .

Mots-clés : disques d'accrétion – dynamos – turbulence MHD – dynamique non-linéaire

Abstract

One of the main challenges of accretion disk theory in astrophysics is to identify efficient angular momentum transport mechanisms in disks. The most popular scenario is that this transport is due to the magnetohydrodynamic (MHD) turbulence triggered by the magnetorotational instability (MRI), which requires the existence of a magnetic field. This raises the question of the origin and sustainment of such a field in disks. A subcritical nonlinear dynamo process, involving the MRI, may be responsible for the joint excitation of MHD turbulence and magnetic fields in Keplerian shear flow. Similar dynamos driven by other MHD instabilities may also be active in stellar interiors. However, the detailed mechanisms underlying the excitation of the MRI dynamo are not well understood. Numerical results suggest that this mechanism may not be sustained at low magnetic Prandtl number (ratio between viscosity and magnetic diffusivity), a common dissipation regime in accretion disks. The purpose of this thesis has been to understand the physical conditions of excitation of this dynamo and the role of dissipative effects on the transition to self-sustained MHD turbulence. For this purpose, we investigated in detail the nature of the transition and the role of tridimensional nonlinear periodic solutions in this problem. First, we showed that the emergence of chaotic dynamo action is primarily associated with global bifurcations involving such cycles. We then attempted to elucidate the physical origin of the Pm dependence of the transition. Using a detailed energy analysis of several dynamo cycles, we found that "turbulent" diffusion makes the excitation of the dynamo increasingly difficult for decreasing Pm . This very generic effect could be an important determinant of MRI dynamo excitation in disks, and may also limit the efficiency of angular momentum transport by MRI turbulence at low Pm .

Keywords: accretion disks – dynamos – MHD turbulence – nonlinear dynamics