



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)

Discipline ou spécialité :

Réseaux, Télécommunications, Systèmes et Architecture

Présentée et soutenue par :

M. JEAN-ADRIEN VERNHES

le lundi 25 janvier 2016

Titre :

ECHANTILLONNAGE NON-UNIFORME: APPLICATION AUX
FILTRAGES ET AUX CONVERSIONS CAN/CNA (CONVERTISSEURS
ANALOGIQUE/NUMERIQUE ET NUMERIQUE/ANALOGIQUE) DANS
LES TELECOMMUNICATIONS PAR SATELLITE

Ecole doctorale :

Mathématiques, Informatique, Télécommunications de Toulouse (MITT)

Unité de recherche :

Institut de Recherche en Informatique de Toulouse (I.R.I.T.)

Directeur(s) de Thèse :

MME MARIE CHABERT

Rapporteurs :

M. DAVID BRIE, UNIVERSITE NANCY 1

M. PATRICE ABRY, ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE LYON

Membre(s) du jury :

M. DOMINIQUE DALLET, UNIVERSITE DE BORDEAUX, Président

M. LAURENT DUVAL, IFPEN, Membre

Mme MARIE CHABERT, INP TOULOUSE, Membre

Mme MARIE LAURE BOUCHERET, INP TOULOUSE, Membre

Remerciements

Je préfère prévenir de suite, ces remerciements sont denses. Mais c'est qu'on en croise des gens en 3 ans de thèse ! Et puis je profite également de cette tribune pour adresser un salut aux gens qui me sont chers et qui ont compté pour moi au cours des années passées, toutes les personnes qui m'ont soutenu et m'ont permis de relâcher la pression. Même si comme l'a dit un jour un grand homme : la pression, moi, je la bois. Je tiens toutefois à m'excuser par avance pour d'éventuels oublis, ma mémoire n'est pas infaillible et j'espère que les personnes que je pourrais oublier ne me tiendront pas rigueur de cet oubli involontaire. Commençons donc sans attendre ce chapitre si particulier, que l'on rêve d'écrire lors de la rédaction du manuscrit car il signifie que tout est fini mais que l'on tarde finalement à commencer, par nostalgie peut-être ou par crainte de clôturer définitivement un beau mais néanmoins intense mais néanmoins beau chapitre de notre vie. Tout ça pour le rédiger à la hâte car la fin de thèse est une pieuvre : le temps t'accule.

Je souhaite tout d'abord à remercier tous mes encadrants, sans qui cette thèse n'aurait pas été possible car ils l'ont proposée, soutenue et encadrée. Je tiens tout d'abord à remercier Marie Chabert, ma directrice de thèse, qui a fait preuve pour moi d'une grande disponibilité et qui m'a témoigné de la confiance tout au long de ces 3 ans, tout en me laissant de la liberté pour mener mon travail. Son suivi, son expérience d'encadrement et ses conseils m'ont été bénéfiques et je la remercie tout particulièrement pour ses encouragements lorsque j'en avais besoin. Je remercie également Bernard Lacaze pour sa grande sagesse, ses conseils avisés et son soutien technique qui m'ont constamment aidé à avancer, ainsi que pour sa bonne humeur et sa motivation sans faille qui en font un exemple pour moi. Je suis fier d'avoir pu travailler avec lui et un grand merci d'avoir accepté d'encadrer cette thèse.

Ma co-directrice de thèse Marie-Laure Boucheret a également joué un grand rôle dans le déroulement de cette thèse, en acceptant de rejoindre l'encadrement en cours de route et en maintenant au cours du temps une gentillesse et un humour à toute épreuve, tout en me faisant bénéficier de sa vision très large sur le domaine des télécommunications et de ses compétences transverses. Du côté de l'encadrement industriel, Guy Lesthievant du CNES a su me laisser une très grande liberté de travail tout en m'encourageant constamment et en témoignant un intérêt vif pour mon travail à chacune de nos discussions, sans perdre sa bonne humeur constante. Last but not least comme disent les anglo-saxons, Roland Baudin de Thales Alenia Space m'a donné un encadrement très rigoureux mais extrêmement intéressant et bénéfique, en suivant de très près la thèse et en me témoignant également une grande disponibilité, des conseils précieux ainsi qu'une sympathie et des encouragements que j'ai énormément apprécié. Je tiens à finir ce paragraphe en adressant un remerciement à Patrice Michel et Daniel Rousset, qui ont contribué au lancement de la thèse du côté du TéSA et de TAS.

Mes sincères remerciements vont ensuite aux membres de mon jury, Patrice Abry et David Brie qui m'ont fait un grand honneur en acceptant de rapporter ma thèse tout en posant un regard critique mais constructif sur mon travail, Dominique Dallet qui a présidé ce jury de manière dynamique, professionnelle et très sympathique, et Laurent Duval dont la rencontre au cours d'une conférence a abouti sur sa présence à ma soutenance que j'ai énormément apprécié. Je les remercie tous les 4 pour leurs grandes qualités humaines et professionnelles.

Il est maintenant temps d'adresser un grand merci à ceux que j'ai cotoyé au quotidien au cours de ces 3 ans au sein du laboratoire TéSA ou de l'IRIT. Je tiens tout particulièrement à remercier mes compères du TéSA Jorge et Tarik, mes camarades de thèse pendant 3 ans. Nous avons commencé ensemble et fini ensemble (enfin presque, à quelques mois près) et leur présence à mes côtés m'a permis de passer énormément de bon temps à rire et à discuter, surtout lors des moments compliqués. Difficile de les remercier pour tout ce qu'ils m'ont apporté mais *choukran* et *gracias*!

Je n'en oublie pas pour autant les autres doctorants du TéSA, de l'équipe SC ou de la team Réseau avec qui j'ai pu passer des moments privilégiés au TéSA ou à l'IRIT à jouer ou regarder des films pendant les pauses repas, ou tout simplement tailler une bavette. Les « vieux » : Abde, Bouchra, Florian, Guigui JAVA!, Raoul, Romain, Victor, Yoann, ... ; « les moins vieux » : Aziz, Farouk, JB,

Maialen, Nesrine, Olivier, Qi, ...; et les « gamins » : Charles-Ugo, Fabio, Pierre-Antoine, Romain, Sébastien, Sylvain, ... Merci pour tous les souvenirs que je garde de ces 3 ans à vos côtés! Et pour finir je mets un point d'honneur à penser à mes amis doctorants ne faisant pas partie du TéSA ou de l'IRIT car il ne faudrait pas oublier les copains du Laplace ou d'ailleurs : Alex lou pichon, Geb, Kevkeuh, Laura ma collègue de projet, Malpok le contrepreneur et Victor.

Impossible de poursuivre sans remercier les membres du TéSA pour leur accueil chaleureux et leur gentillesse : notamment Corinne qui en tant que directrice nous a permis de travailler dans d'excellentes conditions de travail, mais également David, Isabelle, Jacques, Marie-Josée, Philippe (merci pour les discussions musique!) et Yamina. J'ai vraiment apprécié de passer tout ce temps avec eux dans un environnement sain et détendu. Une pensée également pour le personnel de l'IRIT dont certains que j'ai cotoyé pendant 6 années (!) en comptant mon cursus d'ingénieur : André-Luc, Benoît, Charly, Emmanuel, Herwig, Jean-Yves, Julien, Martial, Nathalie, Nicolas, Sylvie & Sylvie, Thomas.

Je continue mon roman en m'attaquant aux remerciements de tous mes amis qui ont énormément compté pour moi au cours de ces années. Parce que la thèse c'est quand même l'occasion de se faire des bonnes bouffes! Je tiens donc à remercier pêle-mêle (des plus anciens aux plus récents) : mes amis de toujours les 4 fantastiques Olive, Oxido, Paulo et Razi avec leur grand cœur et leur amitié à toute épreuve; les copains du lycée Alex, Chris et Fanny spécialistes de l'ouloucuptère; la bande de fous de la prépa Artitz, Florent, John-John, wacon le Mot, Sean Paul, Thomas, Vincent et Zimoun qui fait le lien avec les cèpes de l'enseiht Camille, Clemclé, Cyril, Lala, Laura, Malpok, Rémi, Rime, Riton, Tangi, Vince, Yanis et Walid; les experts de Twist & Sound Cyril (encore lui!), Kaikai et Lélé; et pour finir les rugbyx/belotari/billarx Alex, Costax et Franckyx que j'ai connus sur les prés de l'INP qui ont été pour moi un sacré défouloir sous les ordres de la vieille garde Bernard, Jean-Louis et Thierry que je salue chaleureusement ainsi que tous ceux que j'ai croisé (et il y en a!) qui garderont peut-être un souvenir de Papi.

Je finirai ces remerciements par ma famille qui tient une place prépondérante dans mon cœur. Une grosse pensée à mes parents et mon frère qui ont toujours cru en moi et m'ont soutenu sans faille en me laissant la liberté de choisir mon parcours, à mes grand-parents, à ma tante pour avoir

fait le déplacement à ma soutenance, à ma belle-maman pour sa présence ainsi qu'à tous les autres membres de ma famille à qui je souhaite dédier cette thèse. Vive l'Aveyron !

Mais le plus spécial des remerciements est pour Sabrina qui m'a supporté, soutenu, encouragé, aidé au quotidien et bien plus encore. Merci d'être à mes côtés depuis tant d'années, de m'avoir témoigné autant d'amour, de patience, d'encouragements et d'avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui. Une belle aventure ne peut se faire que lorsque l'on est bien accompagné et je pense qu'en toi j'ai trouvé la plus belle des compagnes. Merci pour tout ce que nous avons partagé et ce qu'il nous reste à partager.

Jean-Adrien

Résumé

La théorie de l'échantillonnage uniforme des signaux, développée en particulier par C. Shannon, est à l'origine du traitement numérique du signal. Depuis, de nombreux travaux ont été consacrés à l'échantillonnage non uniforme. Celui-ci permet, d'une part, de modéliser les imperfections des dispositifs d'échantillonnage uniforme. D'autre part, l'échantillonnage peut être effectué de manière délibérément non uniforme afin de bénéficier de propriétés particulières, notamment un assouplissement des conditions portant sur le choix de la fréquence moyenne d'échantillonnage. La plupart de ces travaux reste dans un cadre théorique en adoptant des schémas d'échantillonnage et des modèles de signaux simplifiés. Or, actuellement, dans de nombreux domaines d'application, tels que les communications par satellites, la conversion analogique-numérique s'effectue sous des contraintes fortes pour les largeurs de bande mises en jeu, en raison notamment des fréquences très élevées utilisées. Ces conditions opérationnelles accentuent les imperfections des dispositifs électroniques réalisant l'échantillonnage et induisent le choix de modèles de signaux et de schémas d'échantillonnage spécifiques.

Cette thèse a pour objectif général d'identifier des modèles d'échantillonnage adaptés à ce cadre applicatif. Ceux-ci s'appliquent à des signaux aléatoires passe-bande, qui constituent un modèle classique en télécommunications. Ils doivent prendre en compte des facteurs technologiques, économiques ainsi que des contraintes bord de complexité et éventuellement intégrer des fonctionnalités propres aux télécommunications.

La première contribution de cette thèse est de développer des formules d'échantillonnage non uniforme qui intègrent dans le domaine numérique des fonctionnalités délicates à implémenter dans le domaine analogique aux fréquences considérées. La deuxième contribution consiste à caractériser

et à compenser les erreurs de synchronisation de dispositifs d'échantillonnage non uniforme particuliers, à savoir les convertisseurs analogique-numérique entrelacés temporellement, via des méthodes supervisées ou aveugles.

Abstract

The theory of uniform sampling, developed among others by C. Shannon, is the foundation of today digital signal processing. Since then, numerous works have been dedicated to non uniform sampling schemes. On the one hand, these schemes model uniform sampling device imperfections. On the other hand, sampling can be intentionally performed in a non uniform way to benefit from specific properties, in particular simplifications concerning the choice of the mean sampling frequency. Most of these works have focused on theoretical approaches, adopting simplified models for signals and sampling devices. However, in many application domains, such as satellite communications, analog-to-digital conversion is submitted to strong constraints over the involved bandwidth due to the very high frequencies used. These operational conditions enhance the imperfections of the involved electronic devices and require the choice of particular signal models and sampling schemes.

This thesis aims at proposing sampling models suitable for this context. These models apply to random band-pass signals, which are the classical models for telecommunication signals. They must take into account technological, economical factors and on-board complexity constraints and allow to integrate particular functionalities useful for telecommunication applications.

This thesis first contribution is to develop non uniform sampling formulas that can digitally integrate functionalities that appear to be tricky in the analog domain at the considered frequencies. The thesis second contribution consists in applying non uniform sampling theory to the estimation and compensation of synchronization errors encountered in particular sampling devices, the time-interleaved analog-to-digital converters. This estimation will be performed through supervised or blind methods.

Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	vii
Abstract	ix
Introduction	1
Chapitre 1 Aspects théoriques de l'échantillonnage	7
1.1 Introduction	7
1.2 Modèle de signal	12
1.2.1 Modèle de signal déterministe	13
1.2.2 Modèle de signal aléatoire	13
1.2.3 Signal passe-bas et signal passe-bande	15
1.3 Modèles d'échantillonnage	16
1.3.1 Définition générale	16
1.3.2 Échantillonnage uniforme	17
1.3.3 Échantillonnage non uniforme	24
1.4 Méthodes de reconstruction	33
1.4.1 Cas uniforme	34
1.4.2 Cas non uniforme	37
1.5 Bilan	49

Chapitre 2 Échantillonnage Non Uniforme en Télécommunications	51
2.1 Introduction	51
2.2 Contexte général : les télécommunications par satellites	52
2.3 Signaux de télécommunications	54
2.3.1 Transmission sur fréquence porteuse et composantes I/Q	54
2.3.2 Modèle passe-bande réel	56
2.3.3 Allocation en sous-bandes	57
2.3.4 Représentation complexe du signal	58
2.4 Problématiques au niveau du récepteur	60
2.4.1 Schéma de récepteur simplifié	60
2.4.2 Transposition en fréquence intermédiaire	61
2.4.3 Filtre anti-repliement	62
2.4.4 Échantillonnage uniforme passe-bande	65
2.5 Convertisseurs Analogique-Numérique entrelacés temporellement	66
2.5.1 Architecture et intérêt	67
2.5.2 Imperfections des échantillonneurs entrelacés	70
2.5.3 État de l’art des méthodes de calibration et de correction	74
2.6 Bilan	75
Chapitre 3 Échantillonnage Périodique Non Uniforme pour les Télécommunications	77
3.1 Introduction	77
3.2 Préambule : Isométrie fondamentale	78
3.3 Reconstruction PNS2 dans un cadre aléatoire	79
3.4 Reconstruction et filtrage conjoints	85
3.5 Ajout de fonctionnalités orientées vers les télécommunications	88
3.5.1 Formules de reconstruction à haute vitesse de convergence	88
3.5.2 Filtrage passe-bande généralisé : sélection d’une sous-bande fréquentielle	90
3.5.3 Rejet des interférences	101

3.5.4	Signal analytique	108
3.6	Généralisation à un positionnement de bande quelconque	111
3.7	Bilan	116
Chapitre 4 Échantillonnage Périodique Non Uniforme pour les Convertisseurs Analogique-		
	Numérique entrelacés	119
4.1	Introduction	119
4.2	Convertisseurs Analogique-Numérique entrelacés non uniformément	121
4.2.1	Modèle proposé	122
4.2.2	Impact de la désynchronisation	124
4.2.3	Stratégie d'estimation	130
4.3	Estimation supervisée de la désynchronisation	131
4.3.1	Signal d'apprentissage	131
4.3.2	Principe de la méthode d'estimation supervisée	131
4.3.3	Expressions analytiques de l'estimée de la désynchronisation	132
4.3.4	Bilan	143
4.3.5	Extension à une méthode semi-aveugle	143
4.4	Estimation aveugle de la désynchronisation	146
4.4.1	Principe	146
4.4.2	Non stationnarité du signal reconstruit en présence de désynchronisation	147
4.4.3	Présentation de la méthode d'estimation aveugle	153
4.4.4	Analyse des performances	169
4.5	Bilan	169
Conclusion et perspectives		173
Bibliographie		194

Table des figures

1.1	Numérisation d'un signal analogique par échantillonnage et quantification	9
1.2	Modèles de signal à bande limitée	15
1.3	Peigne de Dirac pour un échantillonnage uniforme de période T_e	18
1.4	Densité Spectrale de Puissance $S_{x_e}(f)$ du signal échantillonné uniformément à la fréquence f_e et illustration du repliement spectral pour $f_e < 2f_{\max}$	19
1.5	Repliement spectral après échantillonnage uniforme d'un signal passe-bande (partie positive des fréquences uniquement)	23
1.6	Fréquences d'échantillonnage valides pour un échantillonnage passe-bande uniforme . .	23
1.7	Modèle d'échantillonnage PNS2	30
1.8	Modèle d'échantillonnage PNSL	33
1.9	Exemple de splines pour $n = 4$	42
1.10	Repliement spectral pour une des séquences d'échantillonnage dans un modèle d'échantillonnage PNS2.	46
1.11	Schéma des filtres de reconstruction PNS2.	46
2.1	Schéma de transmission par satellite	53
2.2	Cadre d'étude des satellites transparents	54
2.3	Création du signal passe-bande en émission à partir des composantes en phase $x_I(t)$ et en quadrature $x_Q(t)$ et récupération de ces composantes en émission par transposition en bande de base	55
2.4	Modélisation d'un signal passe-bande réel	56

2.5	Illustration de l'allocation de canaux pour le cas de 3 utilisateurs	57
2.6	DSP du signal analytique associé à un signal passe-bande réel	59
2.7	Récepteur simplifié	61
2.8	Exemple de fonction de transfert d'un filtre anti-repliement	63
2.9	Modélisation simplifiée d'un filtre passe-bande utilisé comme filtre anti-repliement et comportement lors d'un échantillonnage uniforme passe-bande	65
2.10	Architecture et modèle d'échantillonnage théoriques d'un convertisseur entrelacé à L voies	68
2.11	Comparaison de la consommation d'un échantillonneur simple et d'un échantillonneur entrelacé (tiré et adapté de [Ste12])	69
2.12	Impact des erreurs survenant dans un convertisseur entrelacé à $L = 8$ voies pour un signal d'entrée sinusoïdal	73
3.1	Densité spectrale du signal contenue dans la $k^{\text{ème}}$ bande de Nyquist	81
3.2	Schémas équivalents de reconstruction PNS2 dans le cadre aléatoire	83
3.3	Filtre rectangulaire conjoint	91
3.4	Filtre trapézoïdal conjoint	93
3.5	Filtre en cosinus surélevé conjoint	94
3.6	Influence de la puissance moyenne du signal	97
3.7	Influence de la taille de la fenêtre de reconstruction sur les performances	97
3.8	Influence de la position du signal à l'intérieur de la bande de Nyquist	99
3.9	Influence de la largeur des bandes de transition du filtre conjoint sur les performances	99
3.10	Influence du paramètre de décalage entre les voies Δ sur les performances	100
3.11	Influence de la bande de Nyquist sur les performances	100
3.12	Adaptation du filtre conjoint à la bande du signal et réjection d'une interférence	102
3.13	Schéma de reconstruction PNS2 d'un signal séparé en plusieurs canaux distincts interférant les uns avec les autres	104
3.14	Filtres conjoints pour la reconstruction avec annulation d'interférence - Cas de $M = 3$ sous-bandes	106

3.15	Sélection de sous-bandes par reconstruction généralisée et annulation d'interférences	107
3.16	Influence de la position de l'interférence sur les performances	107
3.17	Performances de reconstruction des formules de reconstruction du signal analytique	112
3.18	Sélection de sous-bandes par reconstruction généralisée du signal analytique	112
3.19	Occupation spectrale du signal en l'absence de suréchantillonnage et application de filtres conjoints rectangulaires dans les bandes de Nyquist adjacentes k et $k + 1$	114
3.20	Occupation spectrale du signal pour deux valeurs de suréchantillonnage dans le cas d'un placement choisi aléatoirement	115
4.1	Architecture et modèle d'échantillonnage proposés d'un convertisseur entrelacé à L voies désynchronisé et correction numérique grâce à un bloc de reconstruction PNSL	123
4.2	EQMN de reconstruction en présence de désynchronisation en fonction de $\tilde{\Delta}$	128
4.3	EQMN de reconstruction en présence de désynchronisation en fonction de $ \tilde{\Delta} - \Delta $	129
4.4	Calibration d'un échantillonneur entrelacé à L voies par estimation successive deux-à- deux dans un schéma PNS2	131
4.5	Fonction $\sigma_{\tilde{\Delta}}^2$ pour deux sinusoides à des fréquences différentes et comparaison des $\hat{\Delta}_p$ obtenus dans chaque cas	135
4.6	Résultats de l'estimation par la méthode supervisée avec signal d'apprentissage sinusoidal	136
4.7	Tracé de la fonction $\sigma_{\tilde{\Delta}}^2$ (4.21) et influence de la bande B et de la fréquence centrale f_c du signal d'apprentissage	139
4.8	Fonction $\sigma_{\tilde{\Delta}}^2$ (4.21) pour $B = 0.5$ et deux valeurs de f_c	140
4.9	Candidats obtenus pour deux bruits de bande $B = 0.5$ centrés à des fréquences diffé- rentes dans la bande de Nyquist $k = 7$	141
4.10	Résultats de l'estimation par la méthode supervisée avec signal d'apprentissage de type bruit à bande limitée	142
4.11	Erreur d'estimation en fonction de la désynchronisation initiale après estimation basée sur la reconstruction (4.24)	145
4.12	Courbes de puissance estimée et tracé de la variance pour $M = 4$ et $k = 3$	156
4.13	Courbes de puissance estimée et tracé de la variance pour $M = 22$ et $k = 3$	157

4.14	Courbes de puissance estimée et tracé de la variance pour $M = 22$ et $k = 7$	158
4.15	Puissance moyenne du signal reconstruit pour différentes bandes de Nyquist : comparaison entre puissance théorique (4.46) et puissance empirique	160
4.16	Courbes de puissance estimée et variance après restriction à C_Δ ($M = 22$ et $k = 3$) . .	163
4.17	Courbes de puissance estimée et variance après restriction à C_Δ ($M = 22$ et $k = 7$) . .	164
4.18	Tracé de la puissance $P^{(\tilde{\Delta})}(\frac{\tilde{\Delta}}{2})$ théorique (4.18) et empirique et comparaison avec P_0 et P_Δ	166
4.19	Critères permettant l'estimation de $\hat{\Delta}$	167
4.20	Comparaison des critères d'estimation dans le cas de la restriction à C_Δ	168
4.21	Performances d'estimation et de reconstruction pour la méthode aveugle	170

Introduction

Contexte et problématique de la thèse

L'échantillonnage a fait l'objet de nombreuses études depuis les travaux fondateurs de Shannon consacrés à l'échantillonnage uniforme des signaux en bande de base. L'échantillonnage uniforme consiste à prélever des échantillons en des instants multiples de la période d'échantillonnage. Le théorème de Shannon-Nyquist, qui établit le lien entre la fréquence d'échantillonnage et la bande du signal, constitue un des fondements du traitement numérique du signal. Ces résultats ont été étendus par Landau aux signaux passe-bande [Lan67b, Lan67a]. De nombreux travaux ont également été consacrés à des schémas d'échantillonnage pour lesquels les échantillons ne sont plus prélevés de manière uniforme. Ces schémas sont destinés à modéliser les imperfections des dispositifs d'échantillonnage ou à s'affranchir du repliement spectral, qui constitue le principal inconvénient de l'échantillonnage uniforme. Qu'ils soient aléatoires [Yen56, Hig76] ou déterministes comme dans le cas de l'échantillonnage périodique non uniforme (PNS pour *Periodic Non Uniform Sampling*) [Koh53], ces modèles d'échantillonnage nécessitent des formules de reconstruction plus complexes que la désormais classique formule de Shannon.

Cependant, la plupart de ces travaux se sont concentrés, par simplicité, sur des signaux en bande de base, le plus souvent selon une approche théorique qui ne prend pas en compte les problèmes d'implantation pratique des dispositifs d'échantillonnage. Or, actuellement, dans de nombreux domaines d'application, tels que les communications par satellites, les signaux présentent des bandes de fréquences de plus en plus larges transmises à des fréquences potentiellement très élevées. La conversion

du signal analogique en un signal numérique, réalisée par un Convertisseur Analogique Numérique (CAN, aussi appelé ADC pour *Analog-to-Digital Converter*), constitue alors un enjeu technologique et économique [Mur08]. Cette thèse a pour objectif d'évaluer l'apport de l'échantillonnage non uniforme dans ce contexte.

Opérant dans le domaine numérique, les formules de reconstruction après échantillonnage peuvent intégrer des opérations qui s'avèrent délicates dans le domaine analogique aux fréquences considérées. La première contribution de cette thèse est de montrer, dans le cadre général de l'échantillonnage non uniforme, qu'elles permettent en particulier une conversion numérique-analogique sélective d'un signal passe-bande avec rejet des interférences [AGBC98, RKKJ06] ou une reconstruction directe du signal analytique [SF92a, Ric93] associé au signal d'intérêt, fonctionnalités utiles pour des applications de télécommunications. La deuxième contribution de cette thèse consiste à appliquer la théorie de l'échantillonnage non uniforme à la caractérisation et à la compensation des erreurs de dispositifs d'échantillonnage particuliers, les convertisseurs analogique-numérique entrelacés temporellement (TI-ADC pour *Time Interleaved Analog-to-Digital Converter*) [BJH80, KPJ93]. Ce dispositif constitue une solution technique permettant de réaliser un échantillonnage uniforme à haute fréquence en le décomposant en L opérations d'échantillonnage uniforme à fréquence L fois moindre par le biais d'échantillonneurs uniformes entrelacés temporellement de manière périodique et parfaitement synchronisés. Or, la synchronisation est difficile à garantir et à maintenir lorsque les contraintes extérieures (notamment thermiques) évoluent. L'erreur de désynchronisation étant considérée comme la plus dommageable sur les performances du TI-ADC [Elb03, Raz12], de nombreuses méthodes visent à la caractériser via une étape de calibration et à la compenser de manière matérielle. Or, ces deux étapes nécessitent une mise hors service temporaire du système, réduisent donc sa disponibilité et augmentent sa complexité et sa consommation d'énergie. Nous proposons des méthodes basées sur la théorie de l'échantillonnage non uniforme pour la caractérisation et la compensation des erreurs des TI-ADCs, via des méthodes supervisée et aveugle.

Ce travail de thèse a été mené au laboratoire TéSA et à l'Institut de Recherche en Informatique de Toulouse (IRIT) au sein de l'équipe Signal et Communications (SC). Il a été co-financé par le Centre National d'Études Spatiales (CNES) et Thales Alenia Space (TAS).

Organisation du manuscrit

Le premier chapitre introduit les aspects théoriques de l'échantillonnage de signaux, en présentant dans un premier temps les différents modèles de signaux utilisés, qu'ils soient définis par leur positionnement spectral ou par leurs caractéristiques statistiques. Différents modèles d'échantillonnage non-uniforme sont ensuite présentés dans ce chapitre ainsi que les propriétés intéressantes pour des applications de télécommunications. Nous mettrons notamment en évidence les différences entre échantillonnage uniforme et non uniforme. Pour finir, nous présenterons les principales méthodes de reconstruction associées à l'échantillonnage non uniforme, en nous appuyant de nouveau sur une vision guidée par des applications en télécommunications.

Le second chapitre présente les particularités de l'échantillonnage non uniforme de signaux de télécommunications passe-bande [VSW91, LV98] qui constituent l'objet de notre étude. Nous nous plaçons dans le cadre d'une chaîne de réception qui met en jeu des traitements spécifiques pour des signaux passe-bande. Nous présenterons notamment des fonctionnalités d'intérêt introduisant des problématiques au niveau des récepteurs. Ce chapitre s'intéresse également aux dispositifs permettant de réaliser l'échantillonnage de manière pratique et plus particulièrement aux échantillonneurs entrelacés temporellement (TI-ADC) [BJH80]. L'étude de ces dispositifs et de leurs imperfections [Elb03] nous conduira à sélectionner l'échantillonnage Périodique Non Uniforme (PNS pour *Periodic Non uniform Sampling*) [Koh53] comme modèle théorique [VCL⁺14, VCL⁺15a].

Le troisième chapitre introduit une méthode permettant d'améliorer le schéma de reconstruction d'un signal échantillonné via un échantillonnage PNS [VCL13, VCL⁺14]. Nous détaillerons les bases de la méthode qui s'appuie sur l'utilisation d'une isométrie entre espaces de Hilbert et de l'intégration d'un filtre numérique à la formule de reconstruction, appelé filtre conjoint. Cette méthode nous permet d'une part d'améliorer la vitesse de convergence des formules d'interpolation [CL12a] mais également de fusionner l'opération de reconstruction avec des fonctionnalités supplémentaires, particulièrement intéressantes pour les communications par satellite, comme une opération de rejet des interférences [VCL13] ou la construction directe du signal analytique [VCL⁺14]. Le cadre d'étude choisi pour nos développements en termes de positionnement spectral sera discuté à la fin du chapitre afin de

présenter une généralisation de notre raisonnement à un positionnement quelconque.

Le quatrième et dernier chapitre de ce document s'intéresse à la modélisation de la désynchronisation dans les échantillonneurs entrelacés temporellement à l'aide d'un modèle PNS et plus particulièrement à la mise en place d'une méthode de compensation de la désynchronisation [VCL⁺15a, VCL⁺15b, VCL⁺16]. Notre méthode vise à estimer la désynchronisation entre les voies afin de la réutiliser dans des formules de reconstruction appropriées. Cette méthode est réalisée entièrement dans le domaine numérique. Deux types de méthode sont présentées, la première se basant sur l'utilisation d'un signal d'apprentissage aux propriétés spectrales connues [VCL⁺15a, VCL⁺15b]. Nous prendrons deux exemples pratiques de signaux d'apprentissage pour lesquels les performances seront analysées. La deuxième méthode met en jeu une estimation aveugle de la désynchronisation [VCL⁺15b, VCL⁺16] grâce à une hypothèse de stationnarité du signal. L'étude de la puissance du signal nous permettra de développer une stratégie d'estimation de la désynchronisation.

Principales contributions

Les principales contributions de cette thèse sont exposées ci-dessous.

Chapitre 1. Ce chapitre présente les aspects théoriques de l'échantillonnage non-uniforme et détaille les justifications du choix de l'échantillonnage périodique non-uniforme comme schéma privilégié dans le cadre d'applications aux télécommunications.

Chapitre 2. Ce chapitre présente un modèle de récepteur au sein duquel nous identifierons des problématiques d'intérêt auxquelles nous apporterons des solutions dans les chapitres 3 et 4.

Chapitre 3. Nous introduisons dans ce chapitre une méthode d'amélioration de la reconstruction dans le cadre d'un échantillonnage PNS2 d'un signal aléatoire. Cette méthode se base sur l'introduction d'un filtre numérique conjoint dont le choix approprié permet de fusionner avec la reconstruction des opérations d'intérêt pour les télécommunications. Nous présentons les fondements mathématiques de cette reconstruction, basée sur une isométrie entre espaces de Hilbert. Nous détaillons ensuite plusieurs exemples de fonctionnalités intégrées à l'opération de reconstruction, notamment une sélection fréquentielle et un rejet d'interférences [VCL13,

[VCL⁺14] mais également la construction du signal analytique [VCL⁺14]. Un article de journal [VCL⁺Ja] regroupant ces développements est en préparation.

Chapitre 4. Nous présentons dans ce chapitre deux méthodes d'estimation de la désynchronisation, modélisée comme le décalage entre les voies d'un schéma d'échantillonnage PNS2. La première méthode est une méthode supervisée qui se base sur l'utilisation d'un signal d'apprentissage aux propriétés spectrales connues [VCL⁺15a, VCL⁺15b]. Nous utilisons la forme du spectre pour calculer un critère quadratique théorique qui sera comparé à son calcul empirique pour estimer la désynchronisation. Nous donnons l'exemple d'un signal d'apprentissage sinusoïdal et d'un signal de type bruit à bande limitée pour illustrer le fonctionnement de la méthode. La deuxième méthode d'estimation développée dans cette thèse est une méthode aveugle qui se base sur des propriétés de stationnarité du signal passe-bande transmis [VCL⁺15b, VCL⁺16]. Nous détaillons le calcul théorique de l'erreur quadratique de reconstruction en présence de désynchronisation ainsi que la formulation théorique de la puissance du signal reconstruit. Nous présentons ensuite un test de stationnarité simple, effectué sur une restriction de l'intervalle de recherche, nous permettant d'estimer la désynchronisation. Un article de journal [VCL⁺Jb] regroupant ces développements est en préparation.

Liste des publications

Article de journaux

- [VCL⁺Ja] J.-A. Vernhes, M. Chabert, B. Lacaze, G. Lesthievant, R. Baudin et M.-L. Boucheret, « Periodic Nonuniform Sampling scheme for improved selective reconstruction of satellite communication signals », En préparation.
- [VCL⁺Jb] J.-A. Vernhes, M. Chabert, B. Lacaze, G. Lesthievant, R. Baudin et M.-L. Boucheret, « Periodic Nonuniform Sampling scheme for joint estimation/compensation of desynchronisation in Time Interleaved ADCs », En préparation.

Articles de conférences

- [VCL⁺16] J.-A. Vernhes, M. Chabert, B. Lacaze, G. Lesthievant, R. Baudin et M.-L. Boucheret, « Blind Estimation of Unknown Time Delay in Periodic Non-Uniform Sampling : Application to Desynchronized Time-Interleaved-ADCs », dans *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, Shanghai, Chine, Mars 2016.
- [VCL⁺15b] J.-A. Vernhes, M. Chabert, B. Lacaze, G. Lesthievant, R. Baudin et M.-L. Boucheret, « Estimation du retard en échantillonnage périodique non uniforme - Application aux CAN entrelacés désynchronisés », dans *Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images (GRETSI 2015)*, Lyon, France, Septembre 2015.
- [VCL⁺15a] J.-A. Vernhes, M. Chabert, B. Lacaze, G. Lesthievant, R. Baudin et M.-L. Boucheret, « Adaptive Estimation and Compensation of the Time Delay in a Periodic Non-Uniform Sampling Scheme », dans *2015 International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA)*, pp. 473–477, Washington DC, USA, Mai 2015.
- [VCL⁺14] J.-A. Vernhes, M. Chabert, B. Lacaze, G. Lesthievant et R. Baudin, « Selective Analytic Signal Construction from a Non-Uniformly Sampled Bandpass Signal », dans *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, pp. 4978–4982, Florence, Italie, Mai 2014.
- [VCL13] J.-A. Vernhes, M. Chabert et B. Lacaze, « Conversion Numérique-Analogique sélective d’un signal passe-bande soumis à des interférences », dans *Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images (GRETSI 2013)*, Brest, France, Septembre 2013.

CHAPITRE 1

Aspects théoriques de l'échantillonnage

Sommaire

1.1	Introduction	7
1.2	Modèle de signal	12
1.2.1	Modèle de signal déterministe	13
1.2.2	Modèle de signal aléatoire	13
1.2.3	Signal passe-bas et signal passe-bande	15
1.3	Modèles d'échantillonnage	16
1.3.1	Définition générale	16
1.3.2	Échantillonnage uniforme	17
1.3.3	Échantillonnage non uniforme	24
1.4	Méthodes de reconstruction	33
1.4.1	Cas uniforme	34
1.4.2	Cas non uniforme	37
1.5	Bilan	49

1.1 Introduction

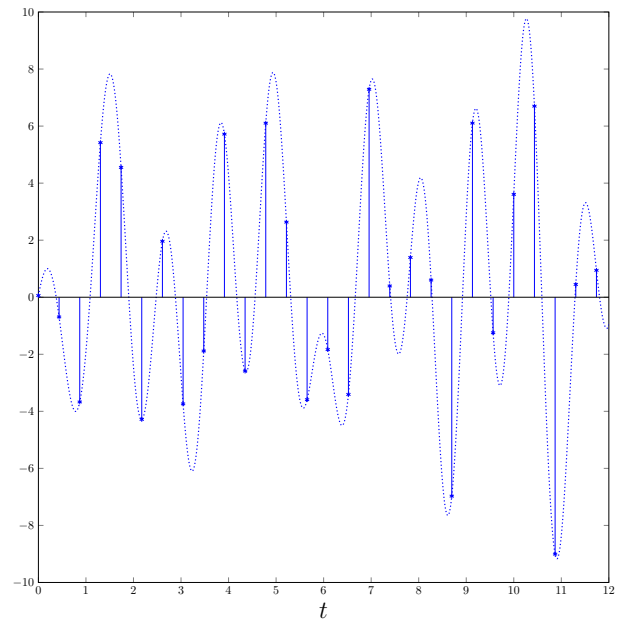
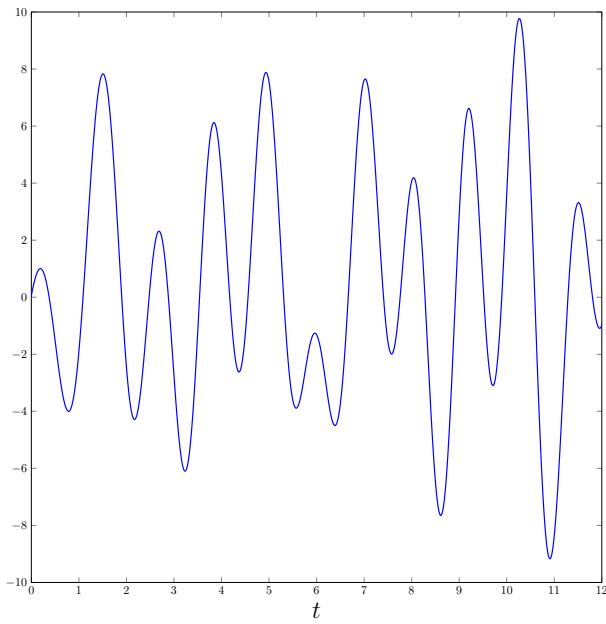
Cette thèse considère la problématique de l'échantillonnage dans le cadre du traitement du signal pour les télécommunications. Elle se concentre, de manière plus spécifique, sur les télécommunications par satellite. Les télécommunications font intervenir des signaux analogiques correspondant à des grandeurs électriques, optiques ou radioélectriques à variation continue dans le temps. Afin de pouvoir bénéficier des nombreux avantages du traitement numérique en émission et en réception, ces signaux doivent être numérisés. Ils sont alors représentés par une suite de valeurs discrètes.

Cette numérisation s'effectue selon deux étapes distinctes et interchangeable appelées échantillonnage et quantification comme schématisé sur la figure 1.1. L'échantillonnage vise à prélever des valeurs exactes, appelées échantillons, du signal analogique à des instants particuliers. La quantification vise quant à elle à remplacer la valeur exacte du signal (ou de l'échantillon si elle est mise en œuvre après l'échantillonnage) par une valeur choisie dans un ensemble fini. Dans le cas d'une quantification uniforme, cet ensemble est déterminé par un pas de quantification constant.

L'échantillonnage, avec la quantification, permet donc le passage du domaine analogique au domaine numérique en assurant la transformation d'un signal à temps et à valeurs continus en un signal à temps et à valeurs discrets. Il existe néanmoins des applications pour lesquelles le signal représentant les données à la sortie du capteur est naturellement à temps discret et l'étape d'échantillonnage n'est donc pas nécessaire, par exemple en astrophysique lors de l'observation de phénomènes spatiaux [Bou06]. Ceci n'est pas le cas dans le cadre des télécommunications où le signal original est à temps continu et nous considérons avec intérêt l'opération d'échantillonnage.

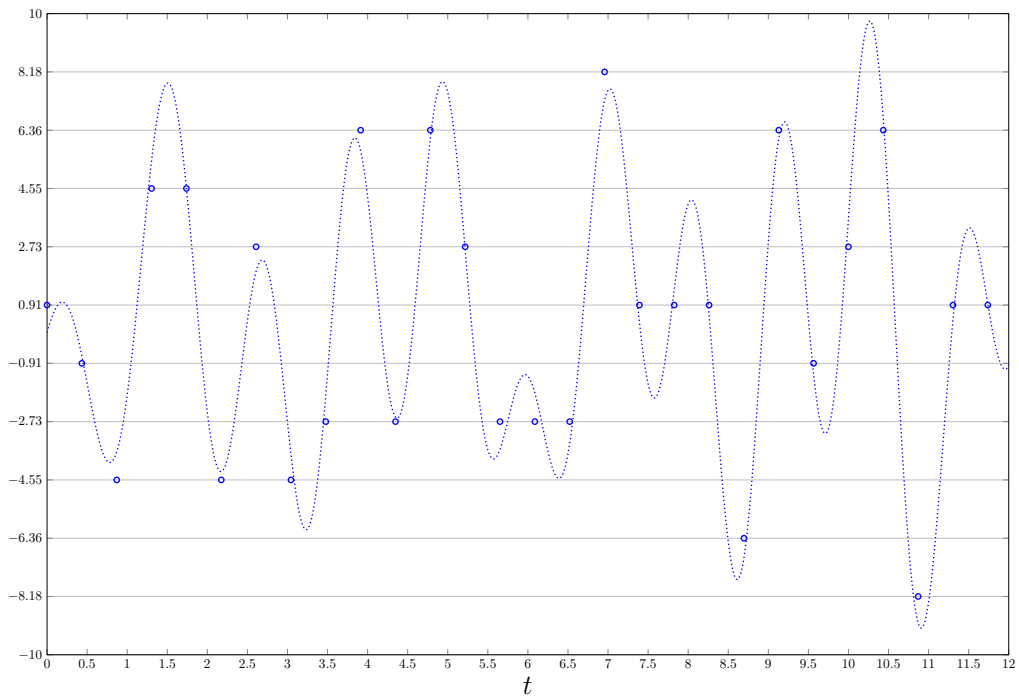
Lorsque la prise d'échantillons respecte certains critères, il a été montré que l'échantillonnage est une opération réversible et qu'il est possible de reconstruire le signal continu original en utilisant les échantillons prélevés. Pour cette raison, au cours de cette thèse, nous nous concentrerons sur l'étape d'échantillonnage sans considérer les erreurs introduites lors de la quantification. Il est possible de minimiser les erreurs de quantification, soit en considérant un pas de quantification uniforme très fin, soit en considérant une quantification non uniforme. Dans ce cas, ces erreurs peuvent être négligées au regard des erreurs introduites par les dispositifs électroniques d'échantillonnage et les contraintes pratiques (comme le nombre fini d'échantillons observés) qui mettent en défaut les formules de reconstruction théoriquement exactes. Ces erreurs proviennent par exemple de la troncature des formules de reconstruction [HT62, YT66], de la gigue d'échantillonnage ou bien d'un défaut de synchronisation sur lesquels nous nous concentrerons dans le Chapitre 4. Certains travaux ont considéré la prise en compte conjointe des erreurs d'échantillonnage et des erreurs de quantification comme Daubechies et De Vore [DD03] mais ces travaux restent minoritaires et conduisent à des résultats théoriques difficilement applicables dans le domaine des télécommunications.

L'échantillonnage a été introduit par les premiers travaux de Whittaker [Whi15], Ferrar [Fer27],



(a) Signal continu

(b) Signal échantillonné



(c) Signal quantifié

FIGURE 1.1 – Numérisation d'un signal analogique par échantillonnage et quantification

Nyquist [Nyc28], Kotelnikov [Kot33], Raabe [BDF⁺10] ou encore Shannon [Sha49] qui est passé à la postérité en donnant son nom à la théorie de l'échantillonnage uniforme utilisée dans le domaine du traitement du signal. Cette théorie a révolutionné le traitement du signal en ouvrant la voie au traitement numérique du signal. Dans ces travaux fondateurs, la théorie de l'échantillonnage se concentre sur l'échantillonnage uniforme de signaux passe-bas (voir partie 1.2.3 pour plus de détails sur ce type de signaux), en prélevant des échantillons régulièrement espacés dans le temps. Cette théorie a conduit à l'élaboration de dispositifs électroniques commandés par une horloge périodique permettant d'effectuer l'opération d'échantillonnage : les Convertisseurs Analogique-Numérique (CAN, également appelés ADC pour *Analog-to-Digital Converters*).

Par la suite, ces premiers travaux ont été étendus aux signaux dits passe-bande (ce modèle est explicité dans la partie 1.2.3) par les travaux de Landau [Lan67a, Lan67b] qui, par la prise en compte de ce modèle de signal plus particulier, ont permis d'envisager un relâchement des critères d'échantillonnage de Shannon. L'échantillonnage passe-bande, bien que moins exploré que l'échantillonnage passe-bas, a fait l'objet de développements intéressants. Kohlenberg [Koh53] a d'abord introduit un modèle d'échantillonnage qu'il a appelé passe-bande d'ordre 2 et qui se caractérise par l'utilisation de deux séquences uniformes d'échantillons entrelacées temporellement de manière à produire un échantillonnage globalement non uniforme. Ce modèle d'échantillonnage est historiquement le premier modèle non uniforme dans un cadre passe-bande. Il reste toutefois bien particulier et relativement simple, car mettant en œuvre des séquences uniformes. Par la suite l'échantillonnage passe-bande a bénéficié des contributions de Vaughan, Scott et White [VSW91] qui résument de manière intéressante les différentes méthodes pour échantillonner en passe-bande et reprennent notamment les travaux de Kohlenberg [Koh53]. Des travaux plus récents ont été consacrés à ce problème comme par exemple Coulson [CVP94, Cou95], Lin et Vaidyanathan [LV98], Akos et al [ASTC99] ou Sun [Sun06].

Que ce soit dans le cadre passe-bas ou passe-bande, de nombreux travaux ont étudié la possibilité de prélever des échantillons du signal d'une manière non uniforme, dans le cas où les instants d'échantillonnage sont observés et donc connus. Les premiers travaux de Kohlenberg ont été étendus à l'ordre L par Yen [Yen56] qui a développé des formules d'interpolation adéquates. Certains travaux modélisent l'échantillonnage et la reconstruction dans le cadre d'un schéma entrelacé d'ordre L en

termes de bancs de filtres d'analyse et de synthèse. On peut citer Lin et Vaidyanathan [LV98], Eldar et Oppenheim [EO00], Johansson et Löwenborg [JL02] ou Prendergast, Levy et Hurst [PLH04] comme principaux travaux portant sur ce sujet. D'autres applications ont été développées par la communauté circuits pour modéliser et corriger les erreurs temporelles survenant dans les dispositifs pratiques d'échantillonnage [Elb03, Raz12, Raz13, Vog05, JFS⁺04, DW09].

A la suite de Kohlenberg et Yen, les travaux de Balakrishnan [Bal62], Beutler et Leneman [BL66a, BL66b] ou encore Yao et Thomas [YT67] se sont intéressés au cas où les échantillons du signal, répartis de manière non uniforme, ne sont pas observés mais possèdent des propriétés statistiques connues. La connaissance de ces propriétés statistiques est notamment utile au niveau spectral car cet échantillonnage aléatoire possède des propriétés qui diffèrent de celles de l'échantillonnage uniforme en cela que le spectre du signal échantillonné ne correspond pas à une réplication périodique du spectre du signal original. Des développements mineurs ont également porté sur l'étude de l'échantillonnage dérivatif qui prend en compte les échantillons du signal et de sa dérivée comme dans les travaux initiaux de Fogel [Fog55] ou ceux de Stens [Ste83]. Ces différents modèles, aussi qualifiés de schémas d'échantillonnage, sont associés à des formules de reconstruction spécifiques permettant de retrouver le signal continu original. Jerri [Jer77] a effectué un important travail de synthèse des différents travaux consacrés à l'échantillonnage uniforme et non uniforme, de ses origines à la date de parution de l'article. Plus récemment, l'ouvrage édité par Marvasti [Mar01] est une référence reprenant de nombreux domaines d'application de l'échantillonnage non uniforme. On peut également citer la thèse de Wojtiuk [Woj00] qui fait un panorama de l'échantillonnage aléatoire et développe notamment les aspects spectraux liés à ce type d'échantillonnage dans le cadre d'une application aux transmissions radio, mais également la thèse de Sun [Sun06] qui s'intéresse à l'échantillonnage non uniforme passe-bande dans le cadre de la radio logicielle (*Software Defined Radio* ou *SDR*) ou encore un article d'Unser [Uns00] qui fait le point sur les avancées récentes de l'échantillonnage. Le livre d'Eldar [Eld15] fait également un panorama de l'échantillonnage en couvrant de nombreux domaines d'application.

L'échantillonnage a suscité récemment un regain d'intérêt avec l'émergence de l'échantillonnage compressif (*compressive sampling* ou *compressed sensing*) lancé par les premiers travaux de Donoho [Don06] et de Candès et Wakin [CW08]. Il s'agit de diminuer la fréquence d'échantillonnage

ou le nombre d'échantillons utilisés en exploitant des propriétés de parcimonie du signal (avec des applications en transmission radio [ME10]) ou de parcimonie d'une représentation du signal (par exemple la représentation temps-échelle [Don06]). Un domaine d'applications plus particulier est celui de l'Imagerie à Résonance Magnétique [LDP07] pour lequel les échantillons sont prélevés dans l'espace des fréquences. Cependant, l'échantillonnage compressif met en œuvre des algorithmes à la complexité élevée qui paraissent difficilement envisageables en l'état dans le cadre des télécommunications par satellite. Ceci dit, des travaux récents sur l'échantillonnage de signaux multi-bandes (voir partie 1.2.3), principalement dans le domaine de la radio logicielle, se rapprochent des travaux de l'échantillonnage compressif en se basant sur des propriétés de parcimonie du spectre du signal [FB96, MC97, VB00, RLH08]. Ces travaux utilisent des principes liés à l'échantillonnage uniforme passe-bande qui sera présenté dans la suite 1.3.2.3. Néanmoins, l'expression « en dessous de Nyquist » (*beyond Nyquist* ou *sub Nyquist*) utilisée dans de nombreux articles qui revendiquent l'utilisation d'une fréquence d'échantillonnage inférieure à celle de Shannon-Nyquist (1.11) pose question dans le domaine des communications numériques, où la condition de Shannon a été supplantée depuis longtemps par celle de Landau (comme expliqué dans la partie 1.3.2.3).

Ce chapitre présente les modèles de signaux considérés dans la suite du document ainsi qu'un panorama et une comparaison de divers modèles d'échantillonnage. Pour chaque modèle présenté, nous rappellerons les critères à respecter pour son utilisation. Nous poursuivrons par une présentation des méthodes de reconstruction générales ou associées à un modèle particulier.

1.2 Modèle de signal

Afin de modéliser le signal, il convient de rappeler que l'on distingue deux classes : les signaux déterministes et les signaux aléatoires. Plus de détails peuvent être trouvés chez Proakis [Pro01] quant à cette classification. Cette distinction détermine les outils disponibles pour analyser le contenu spectral du signal et pour démontrer les propriétés spectrales des différents schémas d'échantillonnage. Ainsi une transformée de Fourier du signal peut être utilisée dans le cas des signaux déterministes. En revanche, dans le cas des signaux aléatoires, les démonstrations des propriétés spectrales devront,

en toute rigueur, faire intervenir des Densités Spectrales de Puissance (DSP).

Le modèle de signal aléatoire est en fait le plus général car un signal déterministe peut être considéré comme une réalisation particulière d'un signal aléatoire. Au cours de cette thèse, nous nous plaçons dans le cadre de l'étude des signaux aléatoires ou processus stochastiques. Nous présentons donc cette modélisation qui sera utilisée tout au long du manuscrit. Néanmoins, les travaux sur l'échantillonnage ayant plus majoritairement adopté un cadre déterministe, nous rappelons également le modèle de signal associé.

1.2.1 Modèle de signal déterministe

Un signal déterministe est une fonction mathématique du temps à paramètres connus. Dans la littérature, les modèles considérés sont celui d'un signal à énergie finie, défini comme une fonction de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ($\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$) ou à puissance finie ($\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt < +\infty$) avec le cas particulier des signaux périodiques.

A partir du signal $x(t)$, il est possible d'accéder au contenu spectral $X(f)$, appelé spectre de fréquence de $x(t)$, en utilisant la transformée de Fourier :

$$X(f) = \text{TF}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2i\pi ft} dt \quad (1.1)$$

Le contenu spectral permet notamment de modéliser le signal selon la bande qu'il occupe, comme nous le présentons dans la partie [1.2.3](#).

1.2.2 Modèle de signal aléatoire

Pour plus de généralité et pour une application dans le cadre des télécommunications, nous avons fait le choix de modéliser le signal comme un processus aléatoire à temps continu $\mathbf{X} = \{x(t), t \in \mathbb{R}\}$. Tout au long de cette thèse, nous utiliserons les lettres capitales en gras pour représenter des processus aléatoires. Le choix d'un modèle aléatoire pour le signal d'intérêt se justifie pour des signaux de télécommunications par le fait qu'un certain nombre de paramètres de la chaîne de transmission sont inconnus (en particulier au niveau du canal) et que les dispositifs électroniques, en émission et réception par exemple, peuvent générer du bruit. De plus, le signal utilisé dans les télécommunications

résulte de la mise en forme de séquences de bits qui, par principe, sont inconnus en réception. Pour un t fixé, $x(t)$ est donc une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité approprié. Le processus aléatoire \mathbf{X} est communément supposé stationnaire au sens large (ou *wide-sense stationary (WSS)*) [Llo59, Yag62, CL66, Pro01]. Cette propriété est définie par :

$$\begin{cases} m_x(t) = \mathbb{E}[x(t)] = m_x \\ R_x(t, \tau) = \mathbb{E}[x(t)x^*(t - \tau)] = R_x(\tau) \end{cases} \quad (1.2)$$

où $\mathbb{E}[\dots]$ représente l'espérance mathématique tandis que l'exposant $*$ représente l'opération de conjugaison complexe. En considérant un signal réel, nous pourrions omettre ce conjugué mais l'application aux télécommunications implique la prise en compte de signaux complexes. Ces notations seront utilisées tout au long de cette thèse. (1.2) signifie que la moyenne et l'autocorrélation du processus existent toutes deux et ne dépendent pas du temps $t \in \mathbb{R}$, nous ramenant à une dépendance en τ uniquement pour l'expression de l'autocorrélation. Par simplicité et sans perte de généralité, \mathbf{X} est supposé à moyenne nulle : $m_x = 0$.

Dans la suite, un processus sera qualifié de stationnaire s'il respecte les conditions de stationnarité au sens large. Pour ce type de signal, le théorème de Wiener-Khintchine [Wie30] nous permet de relier la fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ du processus avec sa densité spectrale de puissance (DSP) notée $S_x(f)$. En effet, si $R_x(\tau)$ est une fonction continue alors elle s'écrit de manière unique sous la forme [Wie30, Yag62, CL66] :

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi f\tau} S_x(f) df \quad (1.3)$$

où $S_x(f)$ est définie au sens du calcul des probabilités. La DSP du signal aléatoire est donc définie comme la transformée de Fourier de son autocorrélation. La transformée de Fourier d'un signal aléatoire n'étant pas définie, la DSP constitue le seul moyen d'accéder au contenu spectral du signal. Le choix du modèle de signal détermine donc les outils disponibles pour l'analyse des propriétés des différents schémas d'échantillonnage. Beaucoup de travaux ayant été menés dans un cadre déterministe, nous serons amenés par la suite à reformuler certains résultats dans un cadre aléatoire avec les outils appropriés.

1.2.3 Signal passe-bas et signal passe-bande

Dans la plupart des articles, le signal est supposé à support spectral limité, ce qui se justifie par les propriétés physiques des capteurs et en particulier, dans le cadre des télécommunications, par la présence de filtres d'émission et de réception. Il convient de faire la distinction entre signal passe-bas, passe-bande et multi-bandes pour donner un cadre aux développements qui suivront. Nous ne considérons ici que des modèles de signaux réels car nous souhaitons représenter le signal physique effectivement reçu avant échantillonnage. Les modèles de signaux complexes interviennent essentiellement pour simplifier certains calculs lors de l'étude des performances de la chaîne ou pour formuler plus élégamment certaines opérations (nous développerons cet aspect dans la partie 2.3.4). La figure 1.2 schématise les trois modèles passe-bas, passe-bande et multi-bandes.

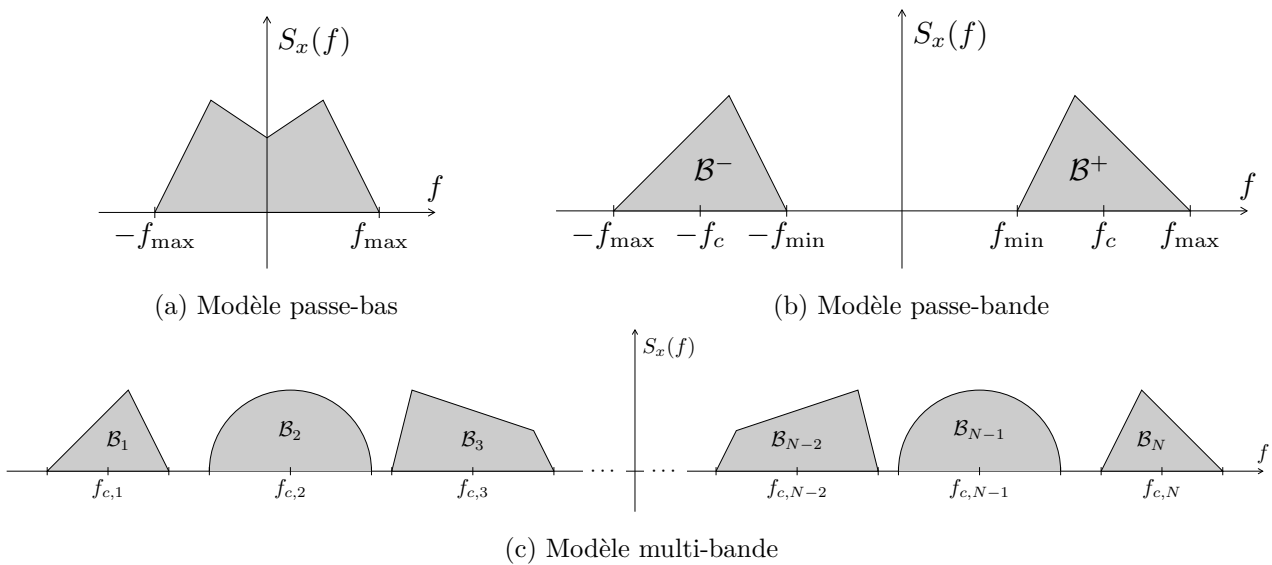


FIGURE 1.2 – Modèles de signal à bande limitée

Un signal est dit passe-bas ou en bande de base lorsque son contenu spectral est entièrement contenu dans une bande $[-f_{\max}, f_{\max}]$ située autour de l'origine des fréquences. Ainsi, nous avons $X(f) = 0, |f| > f_{\max}$ (respectivement $S_x(f) = 0$) dans le cas d'un signal passe-bas déterministe (respectivement aléatoire).

Un signal est dit passe-bande lorsque son contenu spectral est réparti en deux sous-bandes distinctes, symétriques dans le cas d'un signal réel et séparées de l'origine des fréquences. En notant ses bandes positive et négative \mathcal{B}^+ et \mathcal{B}^- , de fréquence centrale respective f_c et $-f_c$, nous avons $X(f) = 0$, $f \notin \mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}^-$ (respectivement $S_x(f) = 0$) dans le cas d'un signal passe-bande déterministe (respectivement aléatoire).

Enfin, un signal est dit multi-bandes lorsque son contenu spectral est réparti en plusieurs sous-bandes distinctes, symétriques deux à deux si le signal est réel. En notant $N \in \mathbb{N}$ le nombre de sous-bandes (dans la partie positive ou négative des fréquences), de notation respective \mathcal{B}_n , $n = 1, \dots, N$ et de fréquence centrale $f_{c,n}$, $n = 1, \dots, N$, nous avons $X(f) = 0$ (respectivement $S_x(f) = 0$) pour $f \notin \bigcup_{n=1}^N \mathcal{B}_n$ dans le cas d'un signal multi-bandes déterministe (respectivement aléatoire). Un signal multi-bandes est un cas particulier de signal passe-bande, qui est lui-même un cas particulier de signal passe-bas. Toutefois, notons que la répartition du contenu spectral en sous-bandes distinctes peut être exploitée lors de l'échantillonnage de ces signaux.

1.3 Modèles d'échantillonnage

Nous présentons ici la modélisation mathématique de différents schémas d'échantillonnage, uniforme et non uniforme. Les schémas non uniformes se séparent entre échantillonnage déterministe ou observé et échantillonnage aléatoire ou non observé. Dans le cas déterministe, nous présentons le point de vue général mettant en jeu des échantillons répartis irrégulièrement ainsi qu'un modèle particulier structuré appelé échantillonnage périodique non uniforme.

1.3.1 Définition générale

Considérons la séquence $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ constituée des instants d'échantillonnage. L'échantillonnage d'un signal $x(t)$ consiste à prélever les valeurs qu'il prend en ces instants. L'échantillonnage est donc défini comme un procédé qui conduit du signal à temps continu $x(t)$ à la séquence d'échantillons $\{x(t_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ également représentée, pour faciliter certains développements mathématiques [HVV98], par un signal

à temps continu $x_e(t)$:

$$x_e(t) = x(t) \cdot s(t) \quad (1.4)$$

avec :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_n) \quad (1.5)$$

où $s(t)$ est un processus impulsionnel à temps continu dit processus d'échantillonnage et $\delta(t)$ est la distribution de Dirac.

1.3.2 Échantillonnage uniforme

L'échantillonnage uniforme est le modèle le plus classique, défini par la prise d'échantillons du signal de manière régulière, c'est-à-dire avec un pas d'échantillonnage constant entre chaque échantillon. Il a été théorisé dans les premiers travaux portant sur l'échantillonnage et a donné lieu à une littérature très fournie. Nous résumons ici les aspects fondamentaux de l'échantillonnage uniforme puis nous précisons les résultats particuliers dans le cas des signaux passe-bas et passe-bande.

1.3.2.1 Définition et comportement spectral

En considérant un échantillonnage uniforme à la fréquence $f_e = \frac{1}{T_e}$ définie comme l'inverse de la période d'échantillonnage T_e , un point est prélevé sur le signal à des instants multiples de la période d'échantillonnage T_e conduisant à la séquence $\{x(nT_e)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Ceci peut être formalisé par :

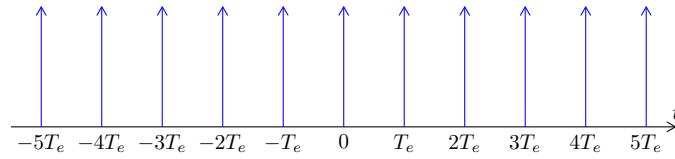
$$x_e(t) = x(t) \cdot \text{III}_{T_e}(t) \quad (1.6)$$

avec :

$$\text{III}_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e). \quad (1.7)$$

Le processus d'échantillonnage correspond alors au peigne de Dirac représenté sur la figure 1.3. Une propriété intéressante du peigne $\text{III}_{T_e}(t)$ concerne sa transformée de Fourier, qui est un peigne de Dirac en fréquence de période $\frac{1}{T_e}$, à un facteur $\frac{1}{T_e}$ près [MI91] :

$$\text{TF} [\text{III}_{T_e}(t)] = \frac{1}{T_e} \text{III}_{\frac{1}{T_e}}(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_e}\right). \quad (1.8)$$

FIGURE 1.3 – Peigne de Dirac pour un échantillonnage uniforme de période T_e

Dans le cas d'un signal déterministe à énergie ou puissance finie, il est possible de calculer la transformée de Fourier de $x_e(t)$:

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_e}\right). \quad (1.9)$$

Dans le cas d'un signal aléatoire, le calcul de sa DSP $S_{x_e}(f)$ conduit à :

$$S_{x_e}(f) = \left(\frac{1}{T_e}\right)^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_x\left(f - \frac{n}{T_e}\right) = f_e^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_x(f - nf_e) \quad (1.10)$$

et donc également à une réplique du contenu spectral du signal continu autour des fréquences nf_e , $\forall n \in \mathbb{Z}$. La figure 1.4 représente la densité spectrale de puissance du signal à temps continu, passe-bas et à support dans la bande $[-f_{\max}, f_{\max}]$ (pour la clarté de la figure) et la densité spectrale de puissance du signal échantillonné pour deux valeurs particulières de la fréquence d'échantillonnage.

1.3.2.2 Échantillonnage uniforme passe-bas – Critère de Shannon

Le critère de Shannon est une condition sur la fréquence d'échantillonnage minimale à utiliser afin d'éviter l'apparition d'un phénomène appelé *repliement spectral*. La figure 1.4 illustre ce phénomène : lorsque la fréquence d'échantillonnage est trop faible, la première réplique spectrale recouvre le spectre original du signal, ce qui entraînera nécessairement une erreur lors de la reconstruction [MI91].

Nous retrouvons donc le critère de Shannon qui s'énonce de la manière suivante. Pour un signal en bande de base de fréquence maximale f_{\max} , la fréquence d'échantillonnage utilisée pour échantillonner le signal et permettre une reconstruction sans erreur doit respecter :

$$f_e \geq f_{\text{SH}} = 2f_{\max}. \quad (1.11)$$

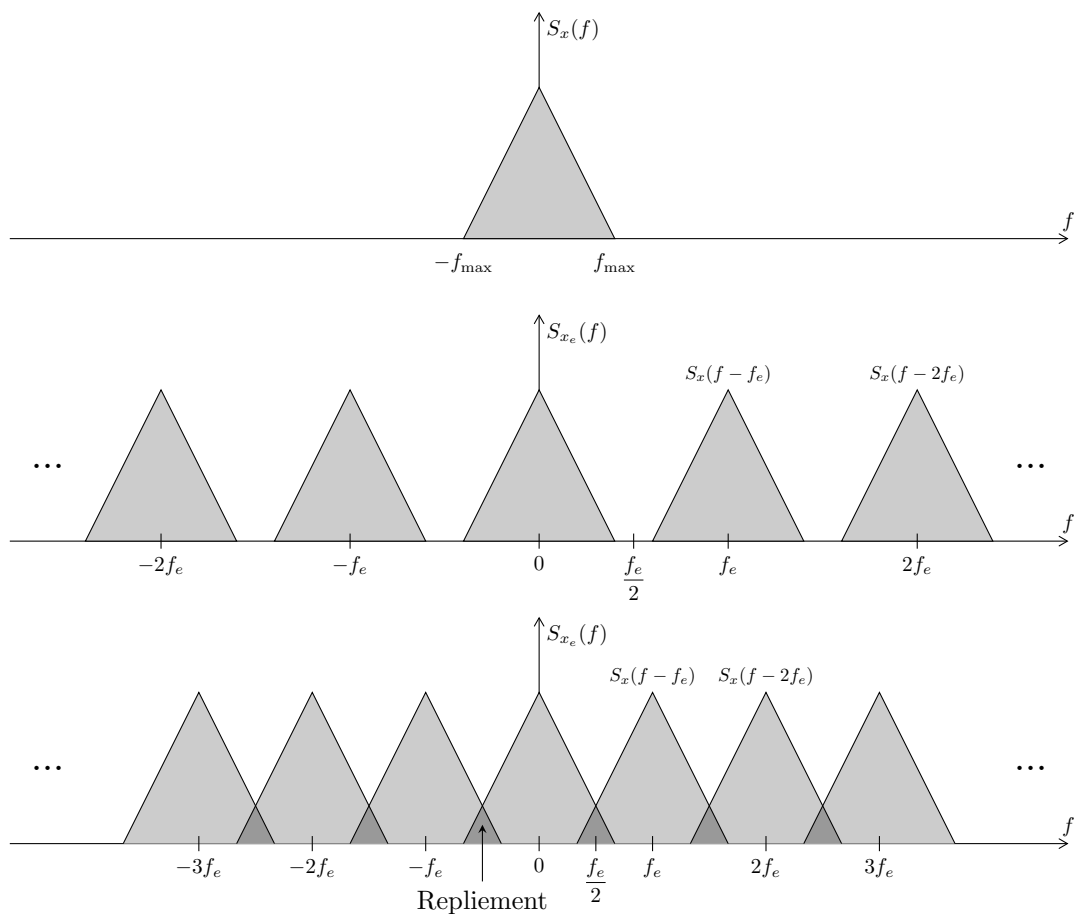


FIGURE 1.4 – Densité Spectrale de Puissance $S_{x_e}(f)$ du signal échantillonné uniformément à la fréquence f_e et illustration du repliement spectral pour $f_e < 2f_{\max}$

Ce critère porte des appellations différentes : critère de Shannon ou de Nyquist-Shannon, condition WKS pour Whittaker-Kotelnikov-Shannon (du noms des divers contributeurs au théorème d'échantillonnage). Dans cette thèse, nous ferons référence à ce critère sous le nom de critère de Shannon, son appellation la plus répandue.

1.3.2.3 Échantillonnage uniforme passe-bande

Critère de Landau

Les travaux initiaux sur l'échantillonnage ont envisagé un modèle de signal passe-bas. Dans le cas de l'échantillonnage uniforme, ces travaux ont conduit au critère de Shannon (1.11). Par la suite, Landau a proposé un critère adapté aux signaux multi-bandes. Il est bien entendu possible d'assimiler les signaux multi-bandes à des signaux passe-bas et d'utiliser le critère de Shannon. Le choix de la fréquence d'échantillonnage est alors inutilement contraint, en particulier lorsque la fréquence maximale du signal est très élevée. Ceci est le cas dans les transmissions à l'heure actuelle avec des fréquences de l'ordre du GHz et au-delà. Pour les signaux multi-bandes occupant N sous-bandes (positives ou négatives), chacune de largeur B_n , $n = 1, \dots, N$ (comme modélisé dans la partie 1.2.3), Landau a établi le critère général suivant [Lan67a, Lan67b] :

$$f_e \geq f_L = \sum_{n=1}^N B_n \quad (1.12)$$

où on note f_L la fréquence de Landau. Dans le cas des signaux passe-bande définis dans la partie 1.2.3, nous pouvons simplifier ce critère de Landau :

$$f_e \geq f_L = 2B. \quad (1.13)$$

En d'autres termes, la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure ou égale à la somme des largeurs des bandes pour pouvoir envisager une reconstruction. Dans le cas d'un signal passe-bas, nous retrouvons le critère de Shannon (1.11). Ce résultat est particulièrement intéressant car il conduit à une fréquence d'échantillonnage qui peut être significativement plus faible que la fréquence de Shannon. Le critère de Landau donne une borne minimale sur la fréquence d'échantillonnage qui pourra être atteinte sous certaines conditions uniquement. L'échantillonnage dit passe-bande

constitue donc une alternative intéressante à l'échantillonnage uniforme passe-bas lorsque les signaux passe-bande transmis présentent des fréquences élevées.

Fréquences d'échantillonnage valides

Toutefois, des précautions s'imposent dans le choix de la fréquence d'échantillonnage et toute fréquence supérieure à la fréquence de Landau n'est pas valide. Le critère de Landau est ainsi une condition nécessaire mais pas suffisante pour le choix de la fréquence d'échantillonnage. En effet, il est possible de délimiter une zone de fréquences d'échantillonnage valides. Les auteurs de [VSW91] expliquent que la fréquence d'échantillonnage minimale de Landau (1.12) ne peut être atteinte que dans certains cas particuliers. Dans le cas général, seul un ensemble d'intervalles de fréquences valides peut être dégagé en tenant compte de la largeur de bande du signal mais aussi de sa position. L'expression suivante (l'équation (16) dans [VSW91]) donne les fréquences d'échantillonnage possibles et les zones dans lesquelles l'échantillonnage n'est pas autorisé car il conduirait à un repliement spectral. Pour un signal passe-bande séparé en deux sous-bandes symétriques, de bande positive B comprise entre f_{\min} et f_{\max} , nous avons :

$$\frac{2f_{\max}}{n} \leq f_e \leq \frac{2f_{\min}}{n-1} \quad (1.14)$$

avec $n \in \mathbb{Z}$ donné par :

$$1 \leq n \leq \left\lfloor \frac{f_{\max}}{B} \right\rfloor \quad (1.15)$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ représente la partie entière.

Nous pouvons noter que le cas $n = 1$ se ramène au critère de Shannon (1.11), avec seulement une borne minimale sur la fréquence d'échantillonnage. Le critère de Shannon correspond donc au pire cas car des fréquences d'échantillonnage inférieures sont tout à fait possibles dans le cas d'un signal passe-bande.

L'expression (1.14) résulte de la réplification spectrale due à l'échantillonnage uniforme comme détaillé précédemment dans (1.10). La figure 1.5 illustre le repliement spectral pour une fréquence d'échantillonnage fixée. Pour des raisons de lisibilité, seules les répliques de la bande positive sont représentées. La condition d'absence de repliement entre la $n^{\text{ème}}$ réplique de la bande positive et la

bande négative conduit aux deux inégalités $f_{\max} - nf_e \leq -f_{\max}$ et $-f_{\min} \leq f_{\min} - (n-1)f_e$ et donc à la condition (1.14).

Le choix d'une fréquence d'échantillonnage égale à la fréquence de Landau f_L (1.12) ne garantit donc l'absence de repliement que si et seulement si f_{\max} est un multiple de la bande B du signal. Ce positionnement particulier est appelé positionnement entier dans [VSW91] et correspond au cas où l'inégalité de droite dans (1.15) se transforme en égalité : $n = \frac{f_{\max}}{B}$. Ce résultat est illustré sur la figure 1.6. Les régions grisées correspondent aux fréquences d'échantillonnage interdites. La ligne rouge correspond à la fréquence d'échantillonnage minimale autorisée, pour une valeur croissante de $\frac{f_{\max}}{B}$. Enfin, les segments en pointillés représentent les discontinuités correspondant au positionnement entier, pour lequel il est possible de choisir $f_e = 2B$.

La fréquence d'échantillonnage doit donc être choisie en respectant les conditions précédentes, toute valeur supérieure à f_L n'étant pas valide. Il existe des algorithmes permettant de sélectionner la valeur optimale de la fréquence d'échantillonnage en fonction des caractéristiques spectrales du signal, comme par exemple celui développé par Dodson et Silva [DS89]. Scoular et Fitzgerald [SF92b] ont étendu ces résultats à un signal multi-bande, et des exemples sont notamment donnés dans cet article pour un signal séparé en 3 sous-bandes.

La figure 1.6 met en lumière le manque de souplesse de l'échantillonnage passe-bande uniforme en ce qui concerne le choix de la fréquence d'échantillonnage car l'intervalle de fréquences valides, pour l'indice n maximal, se réduit très vite avec l'augmentation de la fréquence maximale f_{\max} c'est-à-dire la zone qui se trouve la plus proche de $\frac{f_L}{B}$ sur la figure 1.6. L'échantillonnage d'un signal situé à très hautes fréquences est donc d'autant plus délicat, car la moindre imprécision sur la fréquence d'échantillonnage peut entraîner l'apparition de repliement spectral à cause de cette réduction de l'intervalle de fréquences valides. Il est alors nécessaire de considérer une bande de garde pour se prémunir contre un repliement, ce qui contraint encore davantage le choix de la fréquence d'échantillonnage comme présenté chez Vaughan [VSW91].

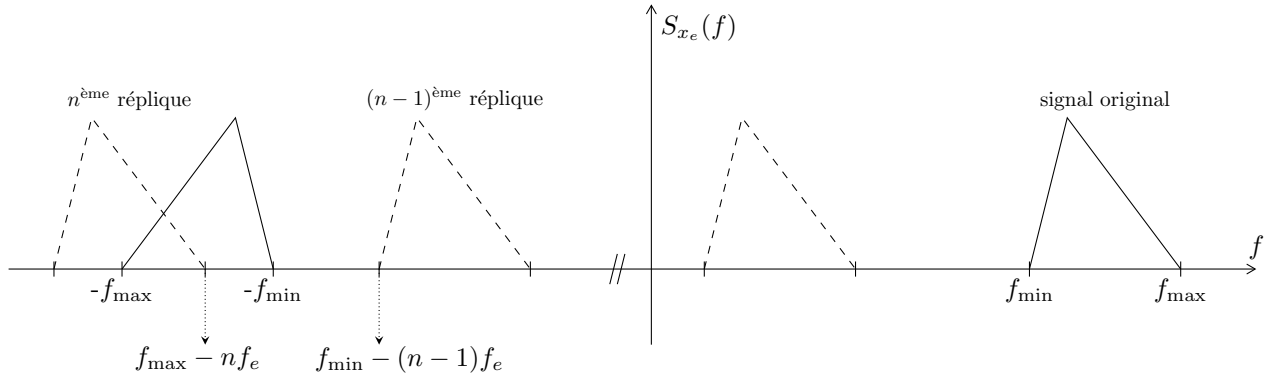


FIGURE 1.5 – Repliement spectral après échantillonnage uniforme d'un signal passe-bande (partie positive des fréquences uniquement)

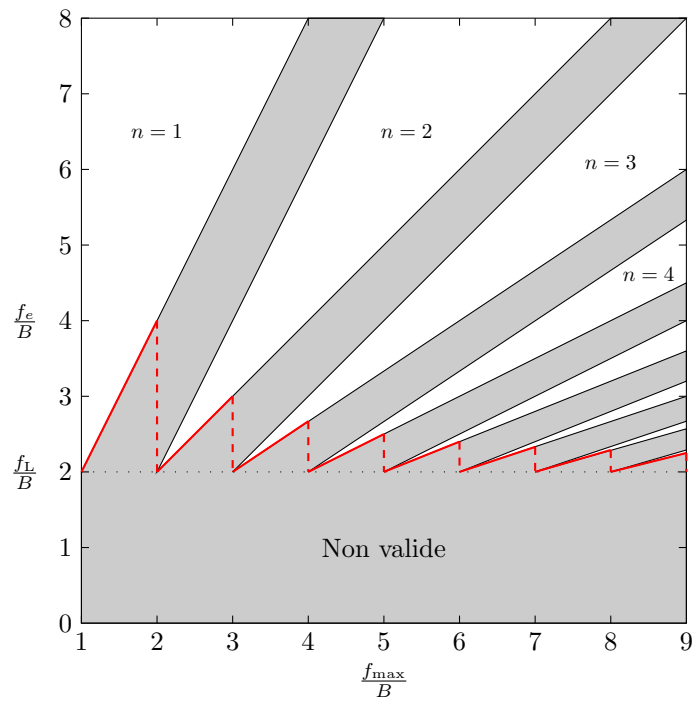


FIGURE 1.6 – Fréquences d'échantillonnage valides pour un échantillonnage passe-bande uniforme

1.3.3 Échantillonnage non uniforme

Nous détaillons ici des modèles d'échantillonnage qualifiés de non uniformes, par opposition à l'échantillonnage uniforme que nous venons de présenter. Ces modèles se caractérisent par un prélèvement d'échantillons à des intervalles irréguliers.

1.3.3.1 Échantillonnage irrégulier général

L'échantillonnage non uniforme quelconque ou échantillonnage irrégulier se caractérise par un pas d'échantillonnage variable : les instants ne sont pas distribués de manière périodique comme dans le cas uniforme, autrement dit en général $t_{m+1} - t_m \neq t_{n+1} - t_n$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Dans la suite, nous supposons toutefois qu'il existe une période moyenne d'échantillonnage finie notée T_e qui correspond à l'espérance mathématique de la durée entre deux échantillons successifs :

$$E[t_{n+1} - t_n] = T_e \quad (1.16)$$

La fréquence moyenne d'échantillonnage f_e sera définie comme l'inverse de cette période, soit $f_e = \frac{1}{T_e}$.

Dans ce cadre de l'échantillonnage irrégulier, il convient de faire une distinction entre échantillonnage déterministe, pour lequel les instants $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sont observés et donc connus, et échantillonnage aléatoire, pour lequel on ne connaît que les propriétés statistiques de la répartition des instants d'échantillonnage supposés non observés.

Échantillonnage déterministe ou observé

Lorsque les instants d'échantillonnage sont observés et donc connus, il est possible de reconstruire le signal original sans erreur, sous certaines conditions sur la répartition temporelle de ces instants, à l'aide de méthodes générales que nous détaillerons dans la partie 1.4.2. Nous présentons ces conditions dont la plus générale est connue sous le terme de condition de Kadec et qui a été énoncée dans le théorème de Paley-Wiener-Levinson-Kadec du nom des quatre contributeurs.

Pour reconstruire sans erreur le signal dans le cas d'un échantillonnage observé, il existe des conditions portant sur la répartition temporelle des instants d'échantillonnage formulées dans le cadre de deux théorèmes. D'une part, comme discuté dans [Jer77], un théorème couramment utilisé

généralise le critère de Shannon pour des signaux échantillonnés non uniformément en stipulant que la fréquence moyenne d'échantillonnage f_e doit respecter la condition de Shannon :

$$f_e \geq f_{\text{SH}} = 2f_{\text{max}}. \quad (1.17)$$

Une preuve de ce théorème est donnée chez Beutler [Beu66]. Cet article montre que dans certains cas particuliers, il est même possible d'avoir une fréquence moyenne d'échantillonnage inférieure à f_{SH} .

L'autre théorème est issu de premiers travaux de Paley et Wiener [Wie30, PW34] qui ont formulé que les instants $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ (choisis croissants tels que $t_{-1} < 0$, $t_0 = 0$ et $t_1 > 0$) doivent satisfaire :

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |t_n - nT_{\text{SH}}| \leq CT_{\text{SH}} \quad (1.18)$$

avec $T_{\text{SH}} = \frac{1}{f_{\text{SH}}}$, $C = \frac{1}{\pi^2}$ et une condition de symétrie sur la séquence des t_n : $t_{-n} = -t_n$, ceci afin de pouvoir reconstruire le signal à partir de ses échantillons grâce à une interpolation de Lagrange, que nous détaillerons dans la partie 1.4.2.1.

Plus tard, Levinson [Lev40] a amélioré ce théorème en proposant d'étendre le raisonnement à des séquences non symétriques et de prendre, dans la condition (1.18), $C = \frac{1}{4}$, ce qui conduit selon Kadec [Kad64] à la borne supérieure (des contre-exemples existent pour $C = \frac{1}{4}$). Ainsi, le théorème parfois appelé Paley-Wiener-Levinson ou théorème de Kadec nous donne pour la séquence $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |t_n - nT_{\text{SH}}| < \frac{T_{\text{SH}}}{4} \quad (1.19)$$

Cette condition dite de Kadec est très utilisée pour l'interpolation de signaux échantillonnés irrégulièrement et peut être vue comme une généralisation de la condition de Shannon. Elle implique qu'un instant d'échantillonnage non uniforme doit toujours être suffisamment proche d'un instant de la séquence uniforme de période T_{SH} .

Échantillonnage aléatoire ou non observé

Lorsque les instants d'échantillonnage ne sont pas observés et donc inconnus, il ne sera pas possible de développer des méthodes de reconstruction sans erreur. Toutefois, en considérant que les instants aléatoires suivent une distribution connue, il sera possible d'étudier les propriétés spectrales du signal,

à savoir le non repliement de spectre [SS60, Bal62, Bro63, BL66a, BL66b, Len66]. L'échantillonnage aléatoire ne sera pas considéré dans la suite de cette thèse mais nous en donnons néanmoins une rapide description afin de compléter cet état de l'art sur les méthodes d'échantillonnage.

Définition Les instants d'échantillonnage inconnus sont notés $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Afin de modéliser le caractère aléatoire, nous pouvons associer à chaque instant d'échantillonnage t_n une densité de probabilité continue notée $p_n(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Celle-ci permet d'associer à chaque instant réel t la probabilité d'appartenance de t_n à un intervalle infinitésimal autour de t . Nous pouvons définir $p_n(t)$ de la manière suivante :

$$\Pr [t_n \in [t, t + dt[] = p_n(t)dt, \forall n \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.20)$$

L'échantillonnage aléatoire permet par exemple de modéliser les défauts de l'échantillonnage uniforme qui conduisent à une incertitude sur la prise d'échantillon. Nous rappelons ici les deux modèles les plus populaires de répartition des instants d'échantillonnage aléatoires : la gigue et le modèle additif.

Modèle de type gigue Des travaux ont commencé très tôt à s'intéresser au modèle de gigue, parmi lesquels ceux de Balakrishnan [Bal62] et Brown [Bro63]. La gigue permet de modéliser des imperfections des dispositifs d'échantillonnage, liées à des problèmes de synchronisation de l'horloge qui commande la prise d'échantillons et à des incertitudes sur le temps d'ouverture des convertisseurs [Wal99]. Cette gigue, non observée, est modélisée à l'aide de variables aléatoires qui viennent perturber un échantillonnage uniforme. Les instants d'échantillonnage $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sont donc définis par :

$$t_n = nT_e + \tau_n \quad (1.21)$$

où τ_n est une variable aléatoire de densité de probabilité $p_n(t)$ et T_e est la période d'échantillonnage du système en l'absence de perturbations. On suppose généralement que tous les τ_n sont indépendants, de moyenne nulle (ce qui nous donne bien une fréquence moyenne d'échantillonnage de $f_e = \frac{1}{T_e}$), de même variance σ^2 et de même densité de probabilité $p(t)$, soit :

$$p_n(t) = p(t), \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (1.22)$$

Modèle de type additif Shapiro et Silverman [SS60] ainsi que Beutler et Leneman [BL66a, BL66b, Len66], s'appuyant sur une étude antérieure de McFadden [McF62], ont introduit un autre modèle d'échantillonnage aléatoire connu sous le nom de modèle additif. Il est défini par la distribution des intervalles de temps entre deux instants d'échantillonnage successifs. Le n^e instant d'échantillonnage t_n dans (1.5) est donc défini par rapport à l'instant précédent :

$$t_n = t_{n-1} + \tau_n \quad (1.23)$$

où τ_n est une variable aléatoire de densité de probabilité $p_n(t)$. On supposera que tous les τ_n sont indépendants, de moyenne T_e (ce qui nous donne bien une fréquence moyenne d'échantillonnage de $f_e = \frac{1}{T_e}$), de même variance σ^2 et de même densité de probabilité $p_n(t) = p(t)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

En posant $t_0 = 0$ par convention, l'instant d'échantillonnage t_n peut également s'écrire en fonction de l'instant d'échantillonnage initial sous la forme :

$$t_n = t_0 + \sum_{k=1}^n \tau_k = \sum_{k=1}^n \tau_k \quad (1.24)$$

L'instant t_n est ainsi la somme des n variables aléatoires $(\tau_k)_{1 \leq k \leq n}$ indépendantes de même loi $p(t)$. La densité de probabilité $p_n(t)$ de t_n est donc la n -convolution de $p(t)$, soit :

$$p_n(t) = \underbrace{p(t) * p(t) * \dots * p(t)}_{n \text{ termes}} = \underset{i=1}{\overset{n}{\otimes}} p(t) \quad (1.25)$$

Notons que les deux premiers moments de t_n sont $E[t_n] = nT_e = \frac{n}{f_e}$ et $\text{Var}[t_n] = n\sigma^2$. De plus, d'après le théorème central-limite, $p_n(t)$ tend vers une distribution gaussienne caractérisée par les moments précédents. Cette distribution est semblable à une gigue gaussienne de variance non constante, linéairement croissante avec n . Autrement dit, $p_n(t)$ est centré sur nT_e avec une forme de plus en plus étalée.

Il faut toutefois émettre un avertissement concernant la causalité temporelle de ce modèle d'échantillonnage. En effet, la variance de la loi de probabilité augmentant avec l'indice n de l'instant d'échantillonnage, il apparaît clairement que des instants d'échantillonnage successifs peuvent se retrouver inversés temporellement ($t_{n+1} < t_n$). Ceci est tolérable de manière théorique mais correspond difficilement à des comportements pratiques. Ce problème de causalité se trouve également dans le modèle

de gigue mais il pourra être limité (sans être annulé sauf dans certains cas particuliers où la loi est uniforme [Bil07]) par un choix approprié de la variance, celle-ci ne variant pas au cours du temps. Le modèle additif doit donc être manipulé avec précaution.

Bilan sur l'échantillonnage irrégulier

Dans le cas d'étude pratique des télécommunications par satellite dans lequel nous nous plaçons, l'échantillonnage aléatoire non observé ne peut être retenu comme candidat car la reconstruction sans erreur du signal est un enjeu crucial et ce modèle d'échantillonnage ne le permet pas. Le modèle de gigue peut être pris en compte pour modéliser des défauts d'horloge mais ces défauts sont de second ordre par rapport à la désynchronisation temporelle intervenant dans les convertisseurs entrelacés que nous présenterons en détails dans le chapitre 2.

Par ailleurs, le manque de structure de l'échantillonnage irrégulier observé est un frein car sa mise en place nécessite la création d'une horloge non uniforme respectant la condition de Kadec, ce qui peut potentiellement alourdir la mise en place pratique d'un tel modèle et limiter son intérêt. Ce modèle d'échantillonnage reste toutefois intéressant car il est très général et nous présentons donc dans la partie 1.4.2.1 des méthodes de reconstruction lorsque les échantillons du signal sont répartis de manière irrégulière et observée, ceci afin de faire un panorama des possibilités de reconstruction offertes dans le cas le plus général possible.

Nous allons maintenant présenter un schéma d'échantillonnage non uniforme structuré, appelé échantillonnage périodique non uniforme, plus simple à déployer de manière pratique car uniquement composé de séquences d'échantillonnage uniforme. Ce schéma s'est avéré pertinent pour la modélisation des CAN entrelacés présentés au chapitre 2.

1.3.3.2 Échantillonnage périodique non uniforme

L'échantillonnage périodique non uniforme ou *Periodic Nonuniform Sampling (PNS)* est un schéma particulier d'échantillonnage non uniforme déterministe et donc à temps observé, qui se caractérise par une structure simple. Il porte plusieurs appellations : introduit sous le nom d'échantillonnage passe-bande d'ordre 2 dans les travaux de Kohlenberg [Koh53], de Linden [Lin59] et de

Vaughan, Scott et White [VSW91], on le nomme également échantillonnage récurrent non uniforme [Yen56, EO00, ME08], échantillonnage *multicoset* [FH95, FB96, MV00b, VB00, ME10] et donc échantillonnage périodique non uniforme [SF92b, Mar96, LV98, MV00a, PLH04] qui sera le nom que nous utiliserons tout au long de cette thèse.

Ce modèle correspond à l'entrelacement temporel de L séquences uniformes d'échantillonnage, décalées entre elles de sorte que les échantillons sont finalement répartis de manière non uniforme mais selon un motif qui se répète périodiquement. Cette structure simple fait du PNS un schéma d'échantillonnage intéressant pour le cas pratique qui nous intéresse. Les figures 1.7 et 1.8 représentent respectivement la structure du PNS2 (2 séquences entrelacées) et du PNSL (L séquences).

Définition PNS2

Le PNS a été introduit pour la première fois dans un article de Kohlenberg [Koh53] qui a présenté le modèle à l'ordre 2 et développé des formules d'interpolation adéquates. Le PNS2 est caractérisé par l'utilisation de 2 séquences d'échantillonnage uniformes entrelacées notées \mathbf{t}_0 et \mathbf{t}_1 . Chaque séquence est uniforme à la fréquence d'échantillonnage f_e et nous notons Δ_i , $i = \{0, 1\}$ le décalage de chaque séquence par rapport à une séquence uniforme de référence $\{nT_e, n \in \mathbb{Z}\}$, ceci afin de modéliser la répartition non uniforme de la manière la plus générale. Nous avons donc :

$$\begin{cases} \mathbf{t}_0 = \{nT_e + \Delta_0, n \in \mathbb{Z}\} \\ \mathbf{t}_1 = \{nT_e + \Delta_1, n \in \mathbb{Z}\} \end{cases} \quad (1.26)$$

où $\Delta_0, \Delta_1 \in [0, T_e[$. Il existe certaines conditions sur le choix des Δ_i , notamment $\Delta_0 \neq \Delta_1$ de sorte que les deux voies ne soient pas identiques, et $\Delta_i \neq \frac{T_e}{2}$ afin d'exclure le cas particulier d'un échantillonnage uniforme. Il existe également d'autres conditions pour permettre la reconstruction que nous détaillerons dans la partie 1.4.2.2 dédiée à la présentation des formules de reconstruction associées au PNS2. Sans perte de généralité, nous pouvons fixer $\Delta_0 = 0$ et $\Delta_1 = \Delta$ dans (1.26). Nous avons ainsi :

$$\begin{cases} \mathbf{t}_0 = \{nT_e, n \in \mathbb{Z}\} \\ \mathbf{t}_1 = \{nT_e + \Delta, n \in \mathbb{Z}\} \end{cases} \quad (1.27)$$

qui sera l'écriture retenue lors de l'utilisation d'un modèle PNS2 par la suite. La figure 1.7 schématise le modèle PNS2 pour un décalage Δ quelconque entre les deux voies.

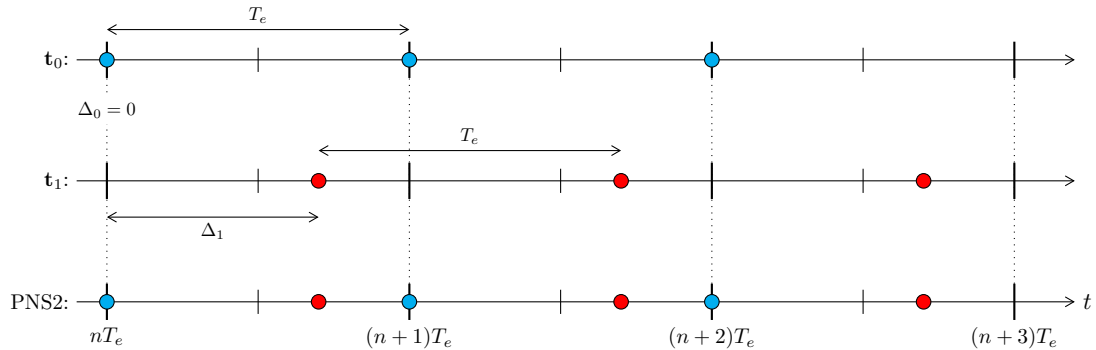


FIGURE 1.7 – Modèle d'échantillonnage PNS2

Propriétés et cadre d'application

Kohlenberg a introduit le schéma PNS2 pour l'échantillonnage de signaux passe-bande déterministes. En l'occurrence, Kohlenberg traite un signal réel dont le spectre est séparé en deux bandes symétriques positive et négative. Dans ce cas d'étude, il a montré que l'entrelacement (sous certaines conditions) de ces 2 séquences est suffisant pour reconstruire le signal original à partir des échantillons. Ce cas d'étude nous intéresse particulièrement car il correspond au modèle d'un signal réel passe-bande tel que considéré en télécommunications et présenté dans la partie 1.2.3.

Le schéma d'échantillonnage PNS2 a été présenté par Kohlenberg comme une alternative à l'échantillonnage passe-bande uniforme (détaillé dans la partie 1.3.2.3) en le définissant comme un échantillonnage d'ordre 2 qui permet de lever les conditions sur la position des bandes du signal qui restreignent l'échantillonnage uniforme. En effet, pour un signal passe-bande de largeur de bande B , la fréquence d'échantillonnage de Landau ($f_L = 2B$ selon (1.13)) ne pourra être atteinte que sous une hypothèse de positionnement entier pour l'échantillonnage uniforme (voir figure 1.6). Ces conditions sur la fréquence d'échantillonnage en fonction de la position des bande garantissent l'absence de repliement (figure 1.5) car elles permettent d'intercaler les répliques spectrales sans qu'elles ne se chevauchent.

En revanche, dans le cas du PNS2, la fréquence d'échantillonnage de Landau peut être utilisée pour n'importe quel positionnement de la bande. Cette propriété extrêmement intéressante pour des raisons de souplesse vient en fait de l'entrelacement non uniforme entre les voies qui permet d'utiliser la redondance d'information présente sur les deux voies. Il est en effet possible d'annuler le repliement spectral subi par chaque voie (la fréquence d'échantillonnage est de $f_e = B$ sur chaque voie, soit $2B$ au total) car les répliques sont adjacentes comme le montre la figure 1.10. Les deux séquences d'échantillonnage du PNS2 portent des informations distinctes sur le signal grâce à l'entrelacement non uniforme. La combinaison des informations portées par ces deux voies, soumises chacune au repliement, permet d'annuler l'effet de celui-ci sur la reconstruction. Ce comportement, allié à sa structure simple, rend le PNS2 particulièrement pertinent pour l'échantillonnage de signaux passe-bande et en fait un candidat pour le cas pratique des télécommunications par satellite. En effet, la structure du PNS2 (2 séquences uniformes) permet d'envisager son implantation directe avec les circuits actuellement disponibles (CAN).

D'autres articles ont repris les travaux initiaux de Kohlenberg. Vaughan, Scott et White [VSW91] ont fait une synthèse détaillée des différences entre le PNS2 et l'échantillonnage passe-bande uniforme, ainsi qu'une étude des propriétés du PNS2. Lin et Vaydianathan [LV98] ont également repris ce modèle dans le cadre déterministe en donnant une interprétation du modèle de Kohlenberg en termes de bancs de filtres et en le généralisant à l'ordre L . Ces formules de reconstruction ainsi que les formules originales de Kohlenberg [Koh53] permettent une reconstruction sans erreur du signal original sous l'hypothèse de la connaissance *a priori* de la position de la bande spectrale du signal. Nous présentons ces formules dans la partie suivante. D'autres travaux de Lacaze [Lac10] ont repris récemment les travaux sur le PNS2 en les appliquant à des signaux aléatoires. Ce cadre d'étude nous intéresse plus particulièrement compte tenu de la modélisation du signal que nous adoptons.

Extension au PNSL

Le PNS2 a été généralisé à l'ordre L par les premiers travaux de Yen [Yen56] sous le nom de *recurrent nonuniform sampling* repris par la suite par Higgins [Hig76, Hig87], par Lin et Vaydianathan [LV98] ou par Coulson [Cou95]. Ce modèle PNSL considère L séquences d'échantillonnage uniformes

de même fréquence $f_e = \frac{1}{T_e}$, notées \mathbf{t}_i , $i = 0 \dots L - 1$ et entrelacées temporellement. Comme présenté pour le PNS2, nous utilisons pour chaque séquence la fréquence d'échantillonnage minimale $f_e = \frac{2B}{L}$ qui conduit à une fréquence d'échantillonnage moyenne égale à la fréquence de Landau (1.12). Nous pouvons donc exprimer les \mathbf{t}_i par :

$$\mathbf{t}_i = \{nT_e + \Delta_i, n \in \mathbb{Z}\} \quad (1.28)$$

où les décalages temporels sont choisis selon :

$$\begin{cases} \Delta_i \in [0, T_e[\\ \Delta_i \neq \Delta_j & , \text{ pour } i \neq j \text{ et } i, j = 0 \dots L - 1 \\ \Delta_i \neq \frac{iT_e}{L} \end{cases} \quad (1.29)$$

de sorte que 2 séquences données ne peuvent pas être identiques et que le cas particulier de l'échantillonnage uniforme est exclu. La figure 1.8 schématise le modèle PNSL pour des décalages Δ_i quelconques. Nous voyons que l'échantillonnage est non uniforme mais qu'un « motif d'échantillonnage » est répété périodiquement.

Le PNSL peut également être modélisé à l'aide de bancs de filtres [LV98, EO00, JL02, PLH04]. Un banc de filtres d'analyse composé de filtres à retard correspondant aux décalages sur chaque voie permet de modéliser l'étape d'échantillonnage. Par la suite, un banc de filtres de synthèse permet d'effectuer l'opération de reconstruction du signal. Cette formulation peut être utilisée pour une implantation efficace de ce schéma d'échantillonnage. Il est intéressant de noter que cette approche de bancs de filtres, ainsi que le PNSL de manière globale, sont en fait un cas particulier du théorème d'échantillonnage généralisé de Papoulis [Pap77] sur lequel nous reviendrons par la suite dans la partie 1.4.2.2 lors de la présentation des méthodes de reconstruction.

Le modèle PNSL permet notamment de modéliser les imperfections des dispositifs d'échantillonnage particuliers appelés CAN entrelacés. Nous détaillerons ce type de convertisseurs ainsi que ses défauts potentiels dans le chapitre 2. Par ailleurs, le PNSL convient pour l'échantillonnage de signaux multi-bandes réels séparés en L sous-bandes et généralise en cela le PNS2 mais cet aspect ne rentre pas dans le cas de signaux de télécommunications par satellite où le signal occupe deux bandes

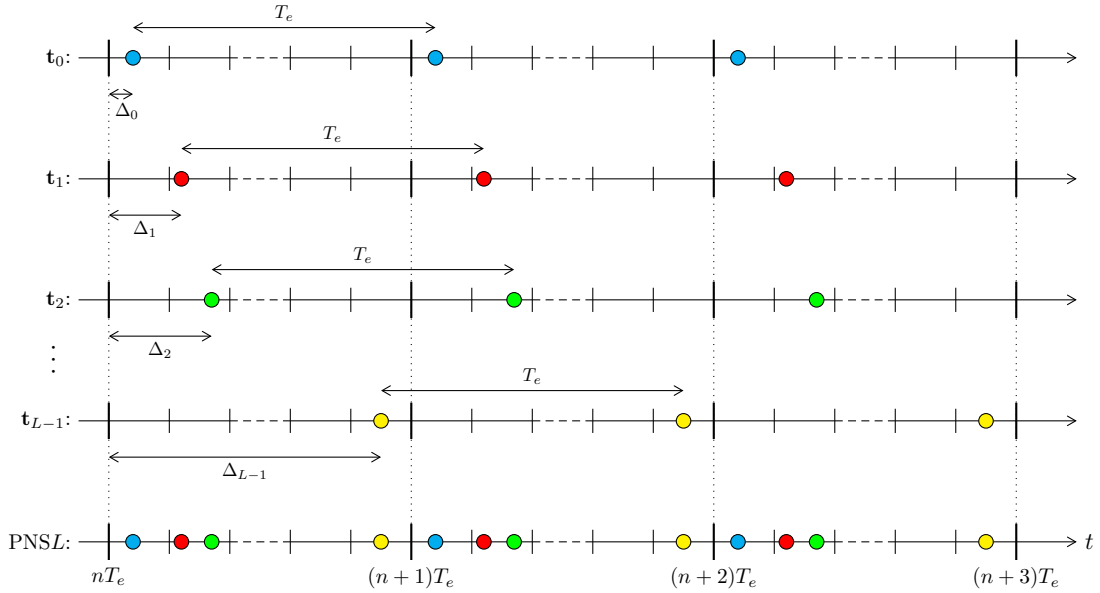


FIGURE 1.8 – Modèle d'échantillonnage PNSL

symétriques uniquement. En revanche, cet aspect trouve des applications en *Software Defined Radio* (*SDR*) où le signal occupe de multiples sous-bandes [Eld15].

1.4 Méthodes de reconstruction

La reconstruction ou interpolation du signal désigne l'opération inverse de l'échantillonnage qui vise à retrouver le signal original continu à l'aide de ses échantillons. Le signal reconstruit est noté $\hat{x}(t)$ et il s'écrit :

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi(t, t_n) x(t_n) \quad (1.30)$$

Les fonctions $\psi(t, t_n)$ sont appelées fonctions de reconstruction ou d'interpolation. Nous détaillons leur forme explicite dans le cas des schémas d'échantillonnage présentés précédemment excluant de fait l'échantillonnage non observé car elles nécessitent la connaissance des instants d'échantillonnage.

Dans le cadre de l'étude d'un signal modélisé comme un processus aléatoire, les performances de la reconstruction sont évaluées grâce à l'Erreur Quadratique Moyenne Normalisée (EQMN) définie

par :

$$\text{EQMN} = \frac{\text{E} \left[|x(t) - \hat{x}(t)|^2 \right]}{\text{E} \left[|x(t)|^2 \right]} \quad (1.31)$$

où $x(t)$ représente le signal original et $\hat{x}(t)$ la reconstruction effectuée à l'aide de la formule dont nous souhaitons évaluer les performances. L'erreur quadratique moyenne de reconstruction est normalisée par la puissance du signal original. Une reconstruction parfaite conduit à $\hat{x}(t) = x(t)$ et l'EQMN sera donc nulle dans ce cas là.

Il est à noter que dans le monde des télécommunications il est également courant d'utiliser le tracé du Rapport Signal à Erreur (RSE) qui est défini comme l'inverse de l'EQMN :

$$\text{RSE} = \frac{1}{\text{EQMN}} = \frac{\text{E} \left[|x(t)|^2 \right]}{\text{E} \left[|x(t) - \hat{x}(t)|^2 \right]} \quad (1.32)$$

et que l'on tracera en décibel (dB) :

$$\text{RSE}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} (\text{RSE}). \quad (1.33)$$

Cette partie présente les méthodes de reconstruction selon le modèle d'échantillonnage, uniforme ou non uniforme, mais toujours observé qui est une condition essentielle pour envisager une reconstruction exacte. Plus de détails peuvent également être trouvés dans [Mar01], [Sun06] ou [Bab12] qui ont réalisé un état de l'art des méthodes de reconstruction.

1.4.1 Cas uniforme

1.4.1.1 Échantillonnage uniforme passe-bas

Dans le cas d'un échantillonnage uniforme en bande de base où $t_n = nT_e$, $n \in \mathbb{Z}$, la fonction de reconstruction est de manière très classique un sinus cardinal :

$$\psi(t, t_n) = \psi(t, nT_e) = \text{sinc} [\pi f_e (t - nT_e)] \quad (1.34)$$

où sinc est défini selon : $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$. Nous pouvons ainsi exprimer le signal reconstruit comme :

$$\hat{x}(t) = x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc} [\pi f_e (t - nT_e)] x(nT_e). \quad (1.35)$$

Cette reconstruction est également appelée reconstruction de Shannon dans la littérature. Son interprétation fréquentielle repose sur le fait que la transformée de Fourier de la fonction sinus cardinal est une fonction porte de largeur f_e assimilée à un filtre passe-bas :

$$\text{TF} [\text{sinc}(\pi f_e t)] = \frac{1}{f_e} \Pi_{f_e}(f) = \begin{cases} \frac{1}{f_e} & -\frac{f_e}{2} \leq f \leq \frac{f_e}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}. \quad (1.36)$$

Ce filtre passe-bas permet d'isoler le spectre original, en supprimant ses répliques fréquentielles, et donc de retrouver le signal original.

1.4.1.2 Échantillonnage uniforme passe-bande

Dans le cas d'un échantillonnage uniforme passe-bande, la reconstruction de Shannon est modifiée pour permettre de reconstruire le signal dans sa bande d'origine en considérant maintenant un filtre passe-bande. Pour un signal de largeur de bande B centré sur la fréquence f_c , ce filtre est modélisé comme une fonction porte de largeur B dans les parties positive et négative du spectre. Ainsi, sa transformée de Fourier donnera un sinus cardinal modulé par un cosinus pour aboutir à la fonction de reconstruction [MI11] :

$$\psi(t, t_n) = \psi(t, nT_e) = \text{sinc}[\pi B(t - nT_e)] \cos[2\pi f_c(t - nT_e)]. \quad (1.37)$$

Nous pouvons ainsi exprimer le signal passe-bande reconstruit comme :

$$\hat{x}(t) = x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}[\pi B(t - nT_e)] \cos[2\pi f_c(t - nT_e)] x(nT_e). \quad (1.38)$$

Il existe également la possibilité de reconstruire n'importe quelle réplique spectrale, par le choix d'un filtre adapté qui donnera la fonction de reconstruction $\psi(t, nT_e)$ correspondante. Le signal n'appartiendra donc plus à sa bande d'origine mais sera transposé en fréquence [MI91]. Ce comportement est utilisé en pratique dans les récepteurs de télécommunication afin de conserver la réplique spectrale du signal la plus proche de l'origine des fréquences, dans ce que l'on appelle la pseudo bande de base, ce qui permet de coupler une opération de démodulation à celle de reconstruction.

Il est également intéressant de mentionner qu'en pratique l'opération de reconstruction est effectuée par filtrage grâce à une technique dite de bancs de filtres [JL02, PLH04] et non pas à l'aide

de formules sommatoires. Néanmoins nous privilégierons ce type de formulation étant donné que l'expression des filtres mis en œuvre sont tirés des formules sommatoires de reconstruction.

1.4.1.3 Troncature des formules

Les formules de reconstruction exactes développées dans la littérature ont une forme similaire à la formule générale (1.30) et sont donc toujours exprimées à l'aide de sommes infinies. La reconstruction de Shannon ((1.35) pour le cas uniforme passe-bas ou (1.38) pour le cas uniforme passe-bande) n'y fait pas exception. Ceci pose en pratique des problèmes de troncature, car la reconstruction s'effectue à partir des échantillons présents dans une fenêtre d'observation. Par souci de simplicité, nous considérerons que cette fenêtre, centrée sur l'instant de reconstruction, contient $2N + 1$ échantillons pour $N \in \mathbb{N}$ fixé. Dans le cas passe-bas, nous avons alors :

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-N}^{+N} \text{sinc}[\pi f_e(t - nT_e)]x(nT_e). \quad (1.39)$$

Dans ce cas, le signal reconstruit diffère du signal original et nous trouvons dans la littérature des travaux consacrés à l'impact des erreurs de troncature sur les performances, notamment chez Helms et Thomas [HT62] ou Yao et Thomas [YT66]. Il est possible de limiter ces erreurs de troncature en augmentant la vitesse de convergence de la formule de Shannon. Le sinus cardinal, dont les lobes secondaires s'atténuent lentement, rend nécessaire la prise en compte d'un nombre élevé d'échantillons du signal pour une reconstruction satisfaisante. Une modification de la reconstruction peut être envisagée en présence de suréchantillonnage ($f_e > f_{\text{SH}}$) en considérant des filtres plus réguliers.

En temporel, ceci revient à remplacer le sinus cardinal par des fonctions plus complexes pour améliorer la convergence. Les prolates sphéroïdales, également appelées fonctions de Slepian, ont ainsi été appliquées à l'échantillonnage de signaux passe-bande [Kha06]. Les fonctions de Bessel [SM76] ou les fonctions de classe Gevrey [ST05] ont également été envisagées mais conduisent à des formules difficilement applicables en pratique en raison de leur complexité élevée.

Nous reviendrons en détail sur cet aspect dans le chapitre 3 en l'adaptant dans le cas d'un modèle passe-bande car l'amélioration de la vitesse de convergence constitue un axe de travail intéressant en vue d'applications pratiques.

1.4.2 Cas non uniforme

1.4.2.1 Méthodes générales

Nous présentons ici des méthodes de reconstruction générales pour des instants répartis non uniformément, puis nous décrivons le cas particulier d'un échantillonnage périodique non uniforme dont la structure est exploitée pour obtenir des formules de reconstruction simplifiées.

Méthodes itératives

Les méthodes itératives opèrent selon des reconstructions successives combinées à une projection du résultat de la reconstruction sur un espace aux propriétés connues. Les premiers travaux sur des méthodes itératives sont dus à Papoulis [Pap75] et ont été présentés indépendamment par Gerchberg [Ger74] à la même époque, tous deux ayant donné leur nom à l'algorithme de Papoulis-Gerchberg. Cet algorithme se base sur une connaissance *a priori* de la bande \mathcal{B} du signal, à l'origine selon un modèle passe-bas, mais on peut également adapter cet algorithme pour un signal passe-bande pourvu que la position de la bande spectrale soit connue. Après reconstruction dans le domaine temporel, l'opération de projection consiste alors en un filtrage éliminant les fréquences se situant en dehors de la bande. L'erreur entre le signal reconstruit et sa projection est soumise aux mêmes opérations, qui sont répétées de manière itérative. En notant R l'opération de reconstruction et P l'opération de projection sur l'espace H des signaux de bande B , nous pouvons résumer ces opérations :

- Reconstruction du signal échantillonné initial $x^{(0)} = x(t_n)$ pour obtenir $R[x^{(0)}]$ (le choix de la méthode de reconstruction n'impacte pas, on peut utiliser une reconstruction par bloqueur par exemple)
- $R[x^{(0)}]$ n'appartient plus à l'espace H en toute généralité : projection sur H qui donne $P(R[x^{(0)}])$
- Échantillonnage non uniforme de la projection et calcul de l'erreur par rapport au signal original :

$$x^{(1)}(t_n) = x(t_n) - P(R[x^{(0)}])(t_n) \quad (1.40)$$

- A l'itération $k + 1$, application des opérations précédentes à l'erreur obtenue à l'itération k :

$$x^{(k+1)}(t_n) = x^{(k)}(t_n) - P\left(R\left[x^{(k)}\right]\right)(t_n) \quad (1.41)$$

La procédure est ainsi répétée jusqu'à la validation d'un critère de convergence. D'autres méthodes [Wil78, SA87, MAG91] ont par la suite été proposées en se basant sur l'introduction d'un paramètre supplémentaire, appelé facteur de convergence, permettant de modifier la vitesse de convergence de la méthode itérative. Récemment, [AM08] a étudié les propriétés de ces algorithmes et notamment le rôle du facteur de convergence. Ces méthodes itératives apparaissent néanmoins comme ayant une utilité limitée car elles impliquent un coût calculatoire rédhibitoire pour certaines applications en raison des reconstructions successives qu'elles nécessitent.

Méthodes matricielles

Il existe de nombreuses méthodes de reconstruction dites matricielles. Strohmer [Str91] présente un panorama de ces méthodes matricielles qui se basent sur l'utilisation d'inversion matricielle si cette inverse existe ou, dans l'alternative, qui utilisent une décomposition en valeurs singulières (ou *singular value decomposition (SVD)*) pour obtenir une pseudo-inverse sous condition de surdimensionnement.

Une méthode intuitive consiste à utiliser la formule de reconstruction de Shannon (1.35) pour établir un lien avec une version échantillonnée uniformément du signal. En effet, à partir d'échantillons espacés de manière uniforme à la période T_e , la formule de Shannon permet de reconstruire le signal pour tout $t \in \mathbb{R}$ et donc en particulier lorsque t prend pour valeurs les instants d'échantillonnage non uniforme. Ainsi, pour des instants $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ non uniformes, nous pouvons écrire :

$$x(t_n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}[\pi f_e(t_n - mT_e)]x(mT_e), \text{ pour } n \in \mathbb{Z}. \quad (1.42)$$

Or les échantillons uniformes $\{x(mT_e), m \in \mathbb{Z}\}$ sont *a priori* inconnus. Le but de la méthode matricielle est donc d'exprimer les estimées des échantillons uniformes notées $\tilde{x}(mT_e)$ en fonction des échantillons non uniformes $x(t_n)$ qui sont connus. Pour cela la formule (1.42) est tronquée pour $M \in \mathbb{Z}$ fixé et nous avons :

$$x(t_n) = \sum_{m=-M}^{+M} \text{sinc}[\pi f_e(t_n - mT_e)]\tilde{x}(mT_e), \text{ pour } n \in \mathbb{Z}. \quad (1.43)$$

Nous souhaitons reconstruire le signal $x(t)$ à partir des échantillons non uniformes observés sur une fenêtre donnée. Notons $\mathbf{x}_{\text{NU}} = [x(t_{-N}), \dots, x(t_N)]^T$ le vecteur constitué par ces échantillons non uniformes. Considérons le vecteur des échantillons uniformes $\tilde{\mathbf{x}}_{\text{U}} = [\tilde{x}(-MT_e), \dots, \tilde{x}(MT_e)]^T$ et $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times M}$ la matrice formée par les éléments :

$$a_{nm} = \text{sinc}[\pi f_e(t_n - mT_e)], \quad n = -N, \dots, N \text{ et } m = -M, \dots, M. \quad (1.44)$$

La formulation matricielle du problème est donc :

$$\mathbf{x}_{\text{NU}} = \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{\text{U}}. \quad (1.45)$$

Lorsque $M > N$, le système est surdéterminé et nous pouvons exprimer $\tilde{\mathbf{x}}_{\text{U}}$ par :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\text{U}} = \mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{x}_{\text{NU}} \quad (1.46)$$

où $\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^*$ représente une pseudo-inverse de la matrice \mathbf{A} . Cette pseudo-inverse peut également être obtenue grâce à une décomposition en valeurs singulières.

L'opération de reconstruction à proprement parler peut ensuite être effectuée en appliquant la formule de Shannon tronquée (1.39) aux échantillons uniformes estimés $\tilde{\mathbf{x}}_{\text{U}}$. Cette méthode pose néanmoins des problèmes pratiques. Outre sa complexité élevée due à la nécessité d'inverser une matrice, voire de calculer une pseudo-inverse, la reconstruction matricielle cumule, de manière non linéaire, deux types d'erreurs. En effet, avant l'inversion matricielle, une erreur d'estimation des échantillons uniformes est introduite par la troncature. Une erreur de troncature intervient également lors de l'étape finale de reconstruction du signal en des instants quelconques. Ces erreurs impactent fortement les performances de manière difficilement prévisible, ce qui limite l'intérêt des méthodes matricielles.

Méthodes d'interpolation polynomiales

Les méthodes d'interpolation polynomiales sont très utilisées pour la reconstruction car elles opèrent dans le domaine temporel à partir d'expressions explicites des fonctions de reconstruction. Nous présentons ici la méthode de Lagrange, puis une méthode dite par splines qui permet de

résoudre des problèmes de complexité liés à l'utilisation de la méthode de Lagrange. Nous présentons également une méthode de Lagrange modifiée, à vitesse de convergence améliorée, développée par Lacaze [Lac05a].

Lagrange La méthode de Lagrange est sans doute la plus connue des méthodes de reconstruction à partir de points non uniformément répartis. L'interpolation polynomiale sous forme lagrangienne a été formulée à l'origine pour $N + 1$ couples distincts $(t_n, x(t_n))$, $n = 0, \dots, N$ et donne :

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^N x(t_n) l_n(t) \text{ avec } l_n(t) = \prod_{k=0, k \neq n}^N \frac{t - t_k}{t_n - t_k} \quad (1.47)$$

où les $l_n(t)$ sont des polynômes de Lagrange de degré N (donc $\hat{x}(t)$ est au maximum de degré N). En considérant maintenant un nombre infini de points comme dans les méthodes précédentes, le signal peut-être reconstruit sans erreur grâce aux fonctions de reconstruction exprimées sous la forme suivante :

$$\psi(t, t_n) = \frac{G(t)}{G'(t_n)(t - t_n)} \quad (1.48)$$

avec $G(t) = (t - t_0) \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \left(1 - \frac{t}{t_k}\right)$ et $G'(t) = \frac{dG(t)}{dt}$.

Le théorème de Kadec, présenté dans la partie 1.3.3.1, est lié à la méthode de Lagrange. En effet, l'énoncé complet stipule que lorsque la condition sur la répartition des instants d'échantillonnage est respectée, le signal peut être reconstruit sans erreur grâce à la formule (1.48). On peut également montrer que, dans le cas d'un échantillonnage uniforme où $t_n = nT_e$, $n \in \mathbb{Z}$, la formule (1.48) se ramène à celle de Shannon en vertu de la relation classique :

$$\sin(\pi t) = \pi t \prod_{n \in \mathbb{Z}^*} \left(1 - \frac{t}{n}\right). \quad (1.49)$$

Cette méthode de Lagrange est toutefois difficile à utiliser sous sa forme (1.48) en raison de sa complexité calculatoire. Certaines méthodes permettent de diminuer cette complexité, comme par exemple la méthode du barycentre [BT04]. D'autre part, lors de l'utilisation pratique des formules tronquées pour une fenêtre d'observation contenant un nombre fini d'échantillons, la convergence de la formule de Lagrange n'est pas toujours garantie même en présence de suréchantillonnage.

Enfin, toujours dans sa version tronquée, cette méthode souffre de l'apparition potentielle d'une forte instabilité numérique due au phénomène de Runge [Epp87]. Ce phénomène correspond à une divergence aux extrémités de la fenêtre de reconstruction, les performances en son centre n'étant pas affectées. Dans ce cas, plutôt que d'augmenter la taille de la fenêtre d'observation (ce qui a également pour effet d'augmenter le degré du polynôme et donc la complexité calculatoire de la formule), il est préférable de se contenter d'une fenêtre de reconstruction petite par rapport à la fenêtre d'observation, positionnée au centre de celle-ci, et que l'on fera glisser pour une reconstruction du signal en tout point. Une autre possibilité est de segmenter l'opération de reconstruction polynomiale grâce à l'utilisation de splines.

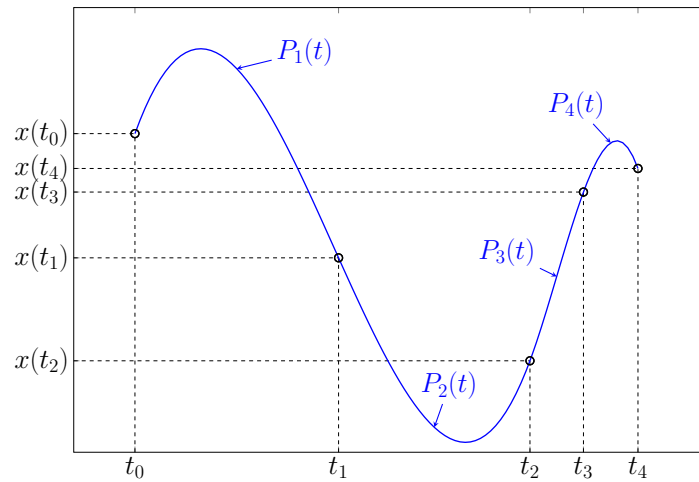
Splines La méthode dite par splines est une méthode classique d'interpolation des fonctions [DB78], de ce fait utilisée naturellement dans le domaine du traitement du signal, dans un cadre déterministe [AF97]. Elle revient à reconstruire le signal à l'aide de fonctions définies par morceaux grâce à des polynômes. La spline est définie par son degré, qui correspond conventionnellement à celui du polynôme de degré le plus élevé la constituant. Les splines de degré 3 dites cubiques, dont nous présentons ici le principe, sont les plus utilisées en pratique car elles permettent d'obtenir des résultats satisfaisants pour une faible complexité.

Sur chaque intervalle $[t_{n-1}, t_n]$ défini par les instants d'échantillonnage $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, le signal $x(t)$ est reconstruit grâce au polynôme de degré 3, noté $P_n(t)$:

$$P_n(t) = a_n t^3 + b_n t^2 + c_n t + d_n \quad (1.50)$$

où a_n , b_n , c_n et d_n sont 4 coefficients inconnus. La figure 1.9 donne un exemple de reconstruction par splines pour $n = 4$.

Les coefficients inconnus sont déterminés grâce à des conditions sur la continuité des polynômes, imposant que le signal reconstruit ainsi que ses dérivées première et seconde soient continus aux points de jonction entre les polynômes (c'est-à-dire aux instants t_n). Ces conditions s'expriment de

FIGURE 1.9 – Exemple de splines pour $n = 4$.

la manière suivante $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} P_n(t_n) = x(t_n) = P_{n+1}(t_n), \\ P'_n(t_n) = P'_{n+1}(t_n), \\ P''_n(t_n) = P''_{n+1}(t_n). \end{cases} \quad (1.51)$$

Notons que, dans le cas général d'une spline de degré D , ces conditions de continuité porteraient sur les $(D - 1)^{\text{èmes}}$ premières dérivées. Par ailleurs, dans le cas particulier des points extrêmes de la fenêtre d'observation (t_{-N} et t_N pour la fenêtre $\{t_n\}_{-N \leq n \leq N}$), ces conditions sont complétées par l'annulation de la dérivée seconde en ces points. En exploitant l'ensemble de ces conditions, il est possible de déterminer les coefficients de chaque polynôme $P_n(t)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. En considérant des splines d'ordre plus élevé, l'augmentation du nombre de conditions à résoudre pour obtenir les coefficients inconnus rend la méthode plus complexe, c'est pourquoi les splines cubiques restent les plus employées en pratique.

La complexité de la méthode de Lagrange augmente lorsque la taille de la fenêtre d'observation augmente, c'est-à-dire le nombre d'échantillons considérés. En revanche, la complexité de la méthode par splines reste stable puisqu'elle reconstruit le signal localement avec un nombre réduit d'échantillons, fixé en fonction du degré de la spline. Par ailleurs, les conditions de régularité des splines (\mathcal{C}^2

pour des splines cubiques) les rendent moins sujettes à l'instabilité numérique que la méthode de Lagrange. Néanmoins, les performances seront constantes sur une fenêtre d'observation (contrairement à celles de Lagrange sujette au phénomène de Runge) mais seront inférieures à celles de Lagrange au centre de la fenêtre par le fait même que les splines n'utilisent qu'un nombre réduit d'échantillons, qui peut être bien inférieur au nombre d'échantillons disponibles dans la fenêtre d'observation.

Lagrange modifiée Lacaze a proposé dans [Lac05a] une formule de Lagrange modifiée présentée dans un cadre aléatoire et utilisant $2N + 1$ échantillons pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, complétés par des échantillons uniformes. Cette formule bénéficie d'une vitesse de convergence améliorée et possède donc des performances supérieures à la formule classique lorsque le nombre d'échantillons est fini. En considérant $T_e = 1$ pour des raisons de simplicité, soient $P_N(t)$ et $Q_N(t)$ deux fonctions polynomiales et $R_N(t)$ une fonction, toutes trois définies pour $N \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} P_N(t) = \pi t \prod_{\substack{n \neq 0 \\ n=-N}}^N \left(1 - \frac{t}{n}\right), \\ Q_N(t) = \prod_{n=-N-1}^{N+1} \left(1 - \frac{t}{t_n}\right), \\ R_N(t) = \frac{Q_N(t)}{P_N(t)} \sin(\pi t). \end{cases} \quad (1.52)$$

Nous pouvons écrire la relation suivante, vraie pour tout $N \geq 0$:

$$\begin{cases} x(t) = R_N(t)[A_N(t) + B_N(t)], \\ A_N(t) = \sum_{|n| \leq N+1} \frac{P_N(t_n)}{(t - t_n)Q'_N(t_n) \sin(\pi t_n)} x(t_n), \\ B_N(t) = \sum_{|n| \geq N+1} \frac{(-1)^n P_N(n)}{\pi(t - n)Q_N(n)} x(n). \end{cases} \quad (1.53)$$

Les expressions $A_N(t)$ et $B_N(t)$ mettent en jeu des termes connus correspondant aux échantillons non uniformes $x(t_n)$ observés et des termes inconnus $x(n)$ non observés. Sous certaines conditions, il est montré que $\lim_{N \rightarrow \infty} B_N(t) = 0$, ce qui conduit à une expression ne faisant intervenir que les

échantillons non uniformes observés :

$$x(t) = Q(t) \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N+1} \frac{P_N(t_n)}{(t - t_n) Q'_N(t_n) \sin(\pi t_n)} x(t_n),$$

$$Q(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(t) = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{t}{t_n}\right).$$
(1.54)

La formule de Lagrange modifiée peut être également exprimée de la façon suivante :

$$x(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=-M}^M R_n(t) x(t_n) \right]$$
(1.55)

avec :

$$R_n(t) = \left[\prod_{\substack{m=-M \\ m \neq n}}^M \frac{t - t_m}{t_n - t_m} \right] \cdot \left[\prod_{\substack{m=-(M-1) \\ m \neq n}}^{M-1} \frac{t_n - m}{t - m} \right] \cdot \left[\frac{\sin_c(\pi t)}{\sin_c(\pi t_n)} \right].$$
(1.56)

Cette méthode améliorée présente des performances intéressantes liées à l'amélioration de la convergence. [CL12b] l'a appliquée dans le domaine des images en obtenant une amélioration de la qualité de reconstruction en termes de *Peak Signal to Noise Ratio (PSNR)* par rapport à une reconstruction par splines. Par ailleurs, [CCL09] a montré que la méthode de Lagrange modifiée possède de meilleures performances de reconstruction en comparaison des autres méthodes d'interpolation polynomiales et des méthodes itératives et matricielles. Il faut néanmoins nuancer ces résultats par le fait que cette méthode améliorée est beaucoup plus complexe.

1.4.2.2 Méthode particulière : échantillonnage périodique non uniforme

L'échantillonnage périodique non uniforme résulte de l'entrelacement non uniforme de séquences d'échantillonnage uniformes. Cette structure particulière peut être exploitée pour obtenir des formules de reconstruction plus simples que les formules générales présentées dans la partie précédente.

PNS2

Dans l'article fondateur [Koh53] qui a introduit le PNS2 vu comme une généralisation de l'échantillonnage passe-bande uniforme présenté dans la partie 1.3.2.3, Kohlenberg a présenté les formules de reconstruction associées.

L'analyse des effets spectraux de l'échantillonnage PNS2 montre que chaque séquence uniforme résultant d'un échantillonnage à $f_e = B$ est en fait soumise à du repliement spectral. Comme illustré sur la figure 1.10, les répliques spectrales couvrent l'ensemble de l'axe des fréquences. Nous représentons les répliques de la bande positive par des points (\cdot) et celles de la bande négative par des tirets ($-$). Considérons le repliement entre le spectre original et les $n^{\text{ème}}$ et $(n+1)^{\text{ème}}$ répliques et notons $f_i = -f_{\max} + (n+1)B = -f_{\min} + nB$ (avec $f_{\min} \leq f_i \leq f_{\max}$). La $n^{\text{ème}}$ (respectivement $(n+1)^{\text{ème}}$) réplique se replie donc sur l'intervalle (f_{\min}, f_i) (resp. (f_i, f_{\max})). Il est possible d'établir une relation entre n et la bande du signal en considérant que $\frac{2f_{\min}}{B} < n \leq \frac{2f_{\min}}{B} + 1$, ce qui donne :

$$n = \left\lfloor \frac{2f_{\min}}{B} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2f_{\min}}{B} \right\rfloor + 1 \quad (1.57)$$

Pour un modèle de signal déterministe, Kohlenberg [Koh53] a explicité la formule de reconstruction suivante dans le domaine temporel, associée à un schéma d'échantillonnage PNS2 défini dans la partie 1.3.3.2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)s(t - kT_e) + x(kT_e + \Delta)s(kT_e + \Delta - t) \\ s(t) = \frac{\cos[2\pi f_{\max}t - (n+1)\pi B\Delta] - \cos[2\pi(nB - f_{\min})t - (n+1)\pi B\Delta]}{2\pi Bt \sin[(n+1)\pi B\Delta]} \\ \quad + \frac{\cos[2\pi(nB - f_{\min})t - n\pi B\Delta] - \cos[2\pi f_{\min}t - n\pi B\Delta]}{2\pi Bt \sin[n\pi B\Delta]} \end{array} \right. \quad (1.58)$$

avec n défini par (1.57) et le décalage entre les deux séquences Δ tel que :

$$\Delta \neq \left\{ \frac{p}{nB}, \frac{p}{(n+1)B} \right\}, \quad \forall p \in \mathbb{Z}. \quad (1.59)$$

$s(t)$ est la fonction de reconstruction s'appliquant aux deux séquences uniformes pour reconstruire le signal continu [Koh53, VSW91]. Toujours dans un cadre déterministe, Lin et Vaidyanathan [LV98] ont fourni une formulation simplifiée de cette opération de reconstruction, qui traduit les formules précédentes dans le domaine spectral, sous forme de deux filtres rectangulaires par morceaux $F_0(f)$ (schématisé sur la figure 1.11) et $F_1(f)$ (tel que $F_1(f) = F_0(-f)$). Toutefois, dans certaines applications pratiques, la formulation temporelle reste mieux exploitable car elle agit directement sur les échantillons disponibles, ce qui évite un passage dans le domaine de Fourier.

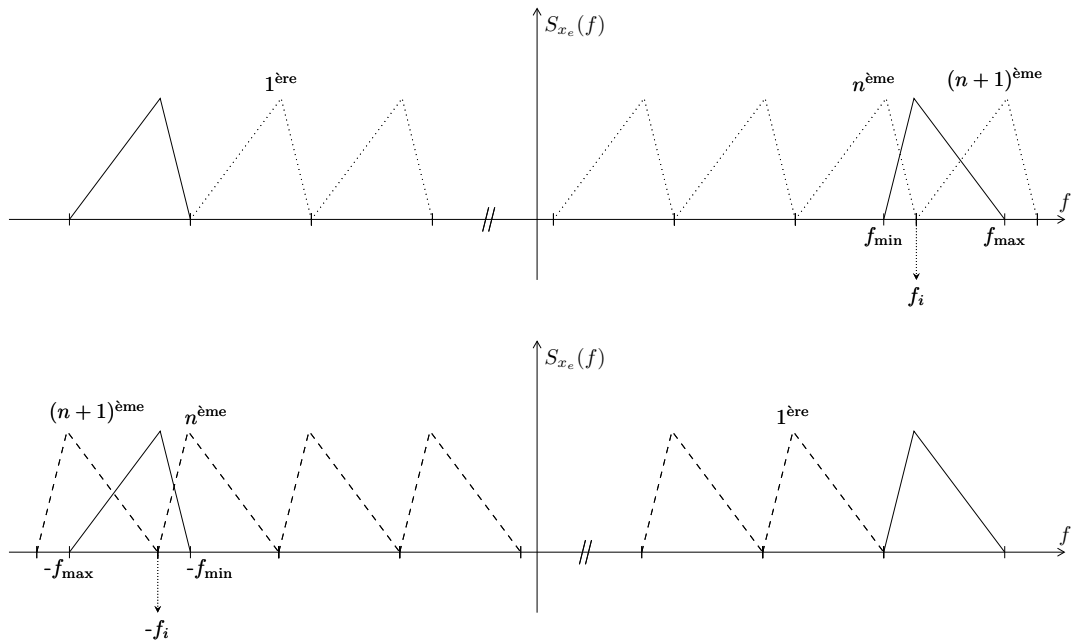


FIGURE 1.10 – Repliement spectral pour une des séquences d'échantillonnage dans un modèle d'échantillonnage PNS2.

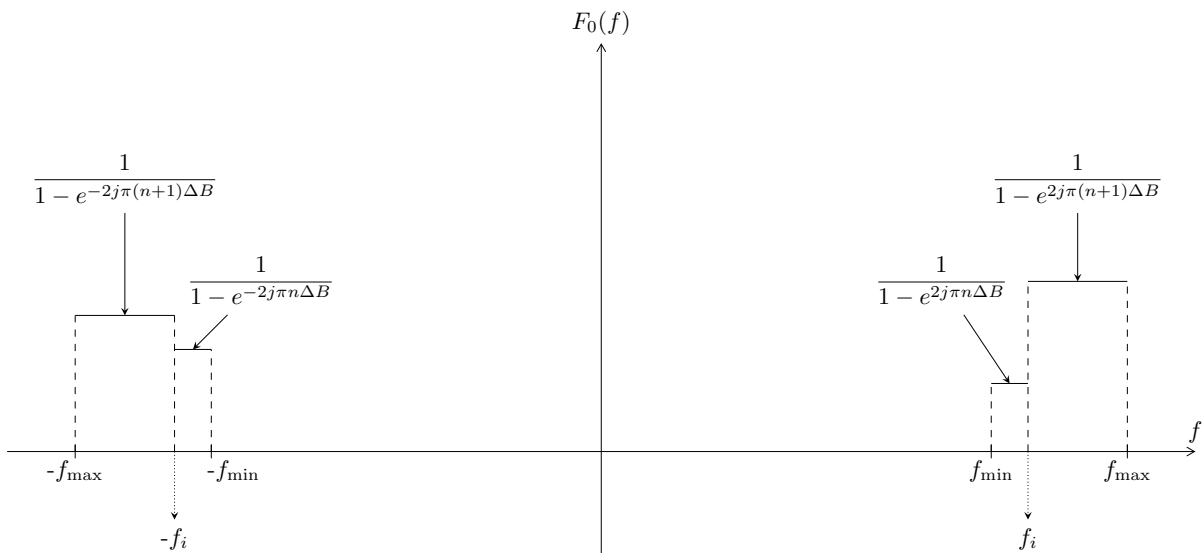


FIGURE 1.11 – Schéma des filtres de reconstruction PNS2.

Nous pouvons proposer une réécriture de la fonction d'interpolation $s(t)$ sous la forme :

$$s(t) = (1 - R) \frac{\sin [(n + 1)\pi B(\Delta - t)]}{\sin [(n + 1)\pi B\Delta]} \operatorname{sinc} \left[2\pi t(f_{\max} - (n + 1)\frac{B}{2}) \right] + R \frac{\sin [n\pi B(\Delta - t)]}{\sin [n\pi B\Delta]} \operatorname{sinc} \left[2\pi t(n\frac{B}{2} - f_{\min}) \right] \quad (1.60)$$

avec l'introduction de la notation suivante :

$$R = n - \frac{2f_{\min}}{B}, \quad 0 \leq R \leq 1. \quad (1.61)$$

Cette formule modifiée met en évidence la généralisation de la fonction d'interpolation uniforme car chaque terme fait intervenir le sinus cardinal, pondéré respectivement par $(1 - R)$ et R et par un terme plus complexe qui permet d'intégrer une opération de modulation à l'opération de reconstruction. Il en résulte que le signal reconstruit $\hat{x}(t)$ est le signal passe-bande original. Néanmoins en modifiant la construction de nos formules, il est également possible d'adapter la formule (1.60) afin de reconstruire le signal dans n'importe quelle sous-bande où on veut reconstruire, et notamment en bande de base ou en fréquence intermédiaire comme expliqué brièvement chez Linden [Lin59] et repris en détail chez Coulson, Vaughan et Poletti [CVP94]. En définitive, il est parfaitement possible de choisir dans quelle bande nous souhaitons effectuer la reconstruction.

Tout ces développements ont toutefois été présentés dans un cadre déterministe et la littérature est peu fournie lorsque l'on s'intéresse au cadre des signaux aléatoires dans lequel nous nous plaçons dans cette thèse. Nous pouvons citer Lacaze qui a présenté des formules de reconstruction PNS2 dans ce cadre d'étude [Lac10, Lac12].

PNSL

Le PNS2 peut être généralisé à l'ordre L et des formules de reconstruction peuvent également être calculées pour interpoler le signal échantillonné selon la modélisation présentée dans la partie 1.3.3.2. Le premier à avoir travaillé sur cette généralisation est Yen [Yen56] mais pour un signal modélisé en

bande de base. Il a proposé la reconstruction du signal d'après la formule :

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = \sum_{l=1}^L \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e + \Delta_l) \psi_{kl}(t), \\ \psi_{kl}(t) = \frac{(-1)^{kL} \sin\left[\frac{\pi}{T_e}(t - \Delta_l)\right]}{\frac{\pi}{T_e}(t - kT_e - \Delta_l)} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^L \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T_e}(t - \Delta_m)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{T_e}(\Delta_l - \Delta_m)\right]}. \end{cases} \quad (1.62)$$

En plus de ne pas être applicable à un signal passe-bande, cette formule se révèle difficilement utilisable en pratique car elle possède une complexité élevée. Coulson [Cou95] a généralisé les résultats de Kohlenberg à n'importe quel ordre et pour un signal passe-bande mais les formules obtenues sont une nouvelles fois extrêmement complexes.

Dans le cadre de signaux aléatoires, Lacaze [Lac13] a étendu ses précédents travaux sur le PNS2 au cas du PNS3 mais les formules obtenues laissent présager que, dans le domaine temporel, la formulation pour des ordres supérieurs s'avère trop complexe pour être exploitable dans des applications pratiques.

Une approche permettant d'envisager des applications pratiques consiste à utiliser des bancs de filtres pour modéliser la prise d'échantillons et la reconstruction. Ce type d'approche a été exploré chez Lin et Vaidyanathan [LV98], Eldar et Oppenheim [EO00], Johansson et Löwenborg [JL02], Prendergast, Levy et Hurst [PLH04], Kovacevic et Vetterli [KV93], Namgoong [Nam02] ou plus récemment Maymon et Oppenheim [MO12]. La reconstruction est ainsi basée sur des fonctions de transfert de filtres définies dans le domaine fréquentiel.

Comme nous l'avons énoncé dans la partie 1.3.3.2, il est intéressant de noter que cette approche de bancs de filtres, ainsi que le PNS L de manière globale, sont en fait un cas particulier du théorème d'échantillonnage généralisé de Papoulis [Pap77], repris également par Brown [BJ81]. Ce théorème donne une condition et une formule de reconstruction après filtrage et échantillonnage d'une fonction g définie en bande de base sur $]-\sigma, \sigma[$. Les sorties de K filtres de réponses impulsionnelles $G_k(f)$, notées $g_k(t) = \int_{-\sigma}^{\sigma} G(f)G_k(f)e^{2j\pi ft}df$, $k = 1, \dots, K$, sont échantillonnées à $f_e = \frac{1}{T_e} = \frac{2\sigma}{K}$: nous obtenons donc les suites d'échantillons $g_k(mT_e)$, $m \in \mathbb{Z}$. Ainsi, nous pouvons reconstruire g par :

$$\tilde{g}(t) = \sum_{k=1}^K \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} g_k(mT_e)y_k(t - mT_e) \quad (1.63)$$

où les fonctions y_k , $k = 1, \dots, K$ sont des opérateurs de reconstruction définis par les relations suivantes :

$$\begin{cases} y_k(t) = \frac{1}{f_e} \int_{-\sigma}^{-\sigma+f_e} Y_k(f, t) e^{2j\pi f t} df, & k = 1, \dots, K \\ Y_k(f, t) \text{ tel que } \sum_{k=1}^K G_k(f) Y_k(f, t) = 1, & \forall t \in \mathbb{R} \\ \text{et } Y_k(f, t) \text{ périodique : } Y_k(f, t + T_e) = Y_k(f, t) \end{cases} \quad (1.64)$$

Nous obtenons ainsi une reconstruction d'une fonction à partir de K filtrages et il est aisé de retrouver les résultats du PNSL, notamment dans le cadre des bancs de filtres, en définissant de manière appropriée les filtres $G_k(f)$ comme des filtres à retard permettant de simuler le schéma d'échantillonnage périodique non uniforme.

1.5 Bilan

Nous avons présenté dans ce chapitre un panorama non exhaustif de différents schémas théoriques d'échantillonnage, en précisant les modèles de signaux auxquels ils peuvent s'appliquer. Après avoir rappelé les conditions permettant la reconstruction du signal d'origine, nous avons présenté les méthodes de reconstruction associées à chacune de ces méthodes.

Dans le chapitre suivant, nous présentons le cadre d'application particulier des télécommunications par satellites pour lequel nous procédons à une analyse des problématiques de la chaîne de réception. A partir de ces problématiques, nous identifierons les schémas d'échantillonnage susceptibles d'y apporter des solutions.

A la lumière des éléments présentés, le PNS fait déjà figure de candidat privilégié car il possède un certain nombre d'atouts compatibles avec la problématique de cette thèse. Nous souhaitons tout d'abord nous placer dans un cadre d'échantillonnage observé permettant une reconstruction théorique exacte du signal, excluant de fait l'échantillonnage aléatoire. Par ailleurs, le PNS permet d'échantillonner de manière simple de par sa structure entrelacée mettant en jeu des séquences uniformes d'échantillonnage qui sont extrêmement simples à générer à l'aide d'une horloge uniforme et des CAN actuellement disponibles. En ce sens, l'échantillonnage irrégulier général semble difficile à mettre en place car il nécessite une horloge non uniforme et des circuits qui restent à développer. Une solution

pourrait être d'utiliser une horloge pseudo aléatoire, plus simple à mettre en œuvre mais qui possède l'inconvénient de ne pas être totalement aléatoire et d'être toujours plus complexe qu'un échantillonnage uniforme classique. Par ailleurs, la reconstruction du signal apparaît plus complexe dans le cas irrégulier général que dans le cas du PNS car, même si la reconstruction pour des ordres $L > 2$ semble complexe, la structure entrelacée du PNS L rend les formules de reconstruction moins complexes que ce que l'on peut obtenir dans un cas général. Cet argument de complexité est à prendre en compte en vue d'éventuelles applications pratiques nécessitant une implantation dans un contexte embarqué. Le PNS a l'avantage d'être peu coûteux en termes de fréquence d'échantillonnage, d'être souple quant au choix de cette fréquence et de pouvoir s'implanter avec les dispositifs d'échantillonnage actuellement disponibles.

CHAPITRE 2

Échantillonnage Non Uniforme en Télécommunications

Sommaire

2.1	Introduction	51
2.2	Contexte général : les télécommunications par satellites	52
2.3	Signaux de télécommunications	54
2.3.1	Transmission sur fréquence porteuse et composantes I/Q	54
2.3.2	Modèle passe-bande réel	56
2.3.3	Allocation en sous-bandes	57
2.3.4	Représentation complexe du signal	58
2.4	Problématiques au niveau du récepteur	60
2.4.1	Schéma de récepteur simplifié	60
2.4.2	Transposition en fréquence intermédiaire	61
2.4.3	Filtre anti-repliement	62
2.4.4	Échantillonnage uniforme passe-bande	65
2.5	Convertisseurs Analogique-Numérique entrelacés temporellement	66
2.5.1	Architecture et intérêt	67
2.5.2	Imperfections des échantillonneurs entrelacés	70
2.5.3	État de l'art des méthodes de calibration et de correction	74
2.6	Bilan	75

2.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre des généralités sur les communications par satellites, suivies de la modélisation classique d'un signal de télécommunications. Nous proposons ensuite un schéma simplifié du récepteur considéré lors de transmissions par satellite selon une vision à la fois système et circuit afin d'identifier des problématiques rencontrées en ses différents points et pouvant être reliées à l'échantillonnage. Nous présentons en effet les problématiques liées à l'échantillonnage uniforme

utilisé en télécommunications, aux filtrages effectués au niveau du récepteur et à la construction du signal analytique. Certaines de ces problématiques peuvent trouver des solutions dans l'utilisation de schémas d'échantillonnage non uniforme. Nous finirons par décrire un dispositif d'échantillonnage particulier, les échantillonneurs entrelacés temporellement, dont certaines imperfections, préjudiciables en termes de performances, peuvent également être modélisées par un schéma d'échantillonnage non uniforme et de ce fait être corrigées.

2.2 Contexte général : les télécommunications par satellites

Le contexte applicatif de cette thèse est celui des télécommunications par satellite. Nous considérons plus particulièrement le cas des répéteurs numériques transparents large bande. Ce type de répéteurs permet d'interconnecter une ou plusieurs stations passerelles (*gateways*), reliées à l'infrastructure du réseau terrestre, avec un grand nombre de stations utilisateurs (*users*) réparties sur une zone dite de couverture, comme schématisé sur la figure 2.1. La transmission de la passerelle aux utilisateurs s'appelle la voie aller et a été historiquement utilisée dans le cadre de la diffusion de contenu, par exemple de télévision selon des normes fixées par les premiers standards DVB-S (pour *Digital Video Broadcasting* par Satellite) et son évolution DVB-S2 [EN09b]. Une voie retour a également été développée afin de répondre à un besoin d'interactivité lié à l'émergence de contenu internet, standardisé dans DVB-RCS (pour *Return Channel Satellite*) [EN09a]. Néanmoins, avec l'augmentation des débits montant et descendant, les voies aller et retour ne sont plus cloisonnées dans ces applications et sont maintenant utilisées pour de l'envoi de contenu (vidéo, voix, données) des utilisateurs vers le réseau et inversement. La figure 2.1 illustre les voies aller (diffusion) et retour (interactivité).

Dans le cadre d'applications aux répéteurs numériques transparents, la charge utile du satellite n'effectue pas d'opération de décodage du signal pour pouvoir le régénérer mais uniquement des opérations d'amplification, filtrage, routage et changement de fréquence. La tendance est d'effectuer ces opérations de traitement du signal à bord de manière numérique, et ceci nécessite donc, aux extrémités de la chaîne, la présence d'opérations réciproques de conversion analogique/numérique puis de conversion numérique/analogique. Par ailleurs, le signal physique réel est converti en signal

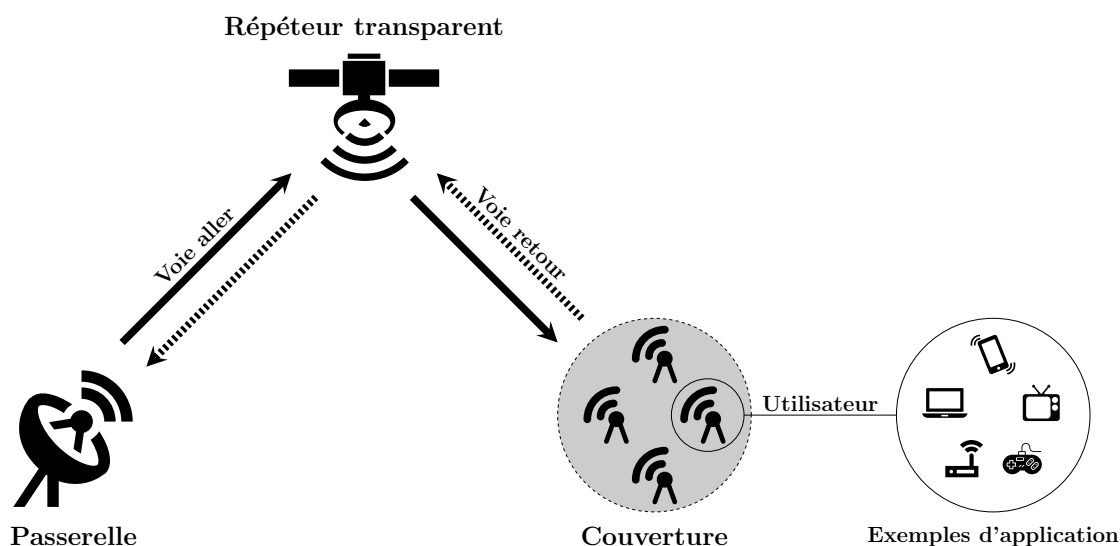


FIGURE 2.1 – Schéma de transmission par satellite

numérique complexe afin de récupérer des informations de phase. La charge utile assure ensuite des fonctions de démultiplexage et de multiplexage (opérations réciproques), de formation de faisceaux (ou *beamforming*) ainsi que des opérations de commutation fréquentielle et spatiale et de contrôle de niveaux. Cette liste d'opérations est bien entendu non exhaustive mais elle est résumée sur la figure 2.2 sous le terme de Processeur Numérique Transparent (PNT). Plus d'informations sur la charge utile de satellites de communications peuvent être trouvées dans [Bra12]. Il convient d'ajouter à ces opérations numériques un filtrage analogique d'entrée qui permet d'éliminer le bruit existant en dehors de la bande spectrale connue du signal. Ce filtrage est appelé filtre anti-repliement (ou AAF pour *anti-aliasing filter*) car il permet d'éviter le repliement hors bande lors des transpositions en fréquence et lors de la conversion numérique/analogique du signal.

Des circuits intégrés numériques de type ASICs (*Application-Specific Integrated Circuit*) réalisent l'ensemble des opérations numériques. Actuellement, l'augmentation des bandes passantes (de l'ordre de quelques centaines de MHz ou plus dans le cadre des satellites large bande) et l'augmentation du nombre d'accès (qui représentent les différents faisceaux ou bandes de fréquences allouées à des utilisateurs) font émerger des problèmes liés à la consommation d'énergie et à la masse des dispositifs

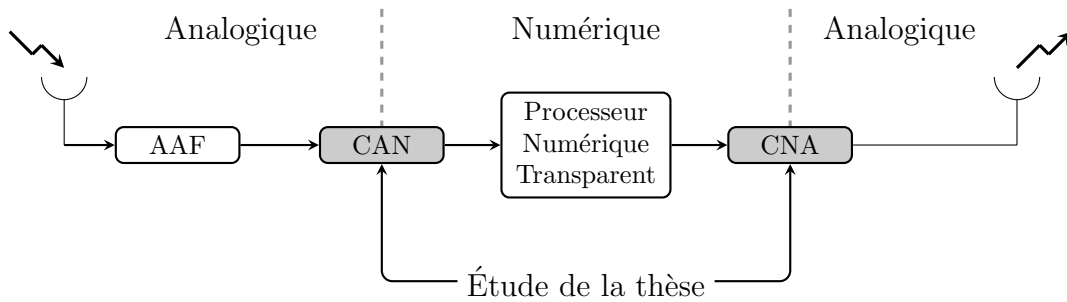


FIGURE 2.2 – Cadre d'étude des satellites transparents

électroniques. Un enjeu majeur pour la conception des satellites du futur est la prise en compte conjointe des trois facteurs que sont le débit, la puissance consommée et la masse des circuits embarqués pour permettre un fonctionnement optimal du système.

2.3 Signaux de télécommunications

Nous commençons par présenter le modèle de signal utilisé classiquement dans les télécommunications en rappelant ses caractéristiques, notamment liées à sa transmission sur fréquence porteuse et à son découpage en sous-bandes, chacune allouée à un utilisateur particulier. Nous présenterons également la formulation complexe du signal utilisée pour simplifier certains traitement dans la chaîne numérique.

2.3.1 Transmission sur fréquence porteuse et composantes I/Q

Un signal de télécommunications $x(t)$ est défini de manière classique comme un signal passe-bande réel. Ce modèle a été présenté dans le paragraphe 1.2.3 par opposition au modèle dit en bande de base. Un signal de télécommunications étant contraint à être transmis dans une bande particulière, fixée par des réglementations précises pour diviser le spectre des fréquences entre diverses applications, il est commun d'utiliser une transmission dite sur fréquence porteuse, c'est-à-dire que le signal, est modulé avant transmission par une sinusoïde à haute fréquence. Cette opération permet de réaliser une transposition en fréquence, c'est-à-dire un transfert du contenu spectral du signal dans une bande particulière. Cette transposition en fréquence conserve les caractéristiques du signal, en termes de

largeur de bande notamment, et le signal transposé en fréquence porte la même information que le signal original. En notant f_c la fréquence porteuse, le signal transposé est représenté par :

$$x(t) = x_{\text{BB}}(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (2.1)$$

où $x_{\text{BB}}(t)$ représente le signal généré en bande de base.

Ce signal en bande de base s'exprime en fonction de deux composantes continues $x_I(t)$ et $x_Q(t)$, respectivement appelées composantes en phase et en quadrature. Ces deux composantes résultent de la modulation numérique des bits d'information à transmettre. Elles sont ensuite modulées séparément à la fréquence f_c et ajoutées pour former le signal passe-bande dans une formulation équivalente à (2.1) :

$$x(t) = x_I(t) \cos(2\pi f_c t) - x_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (2.2)$$

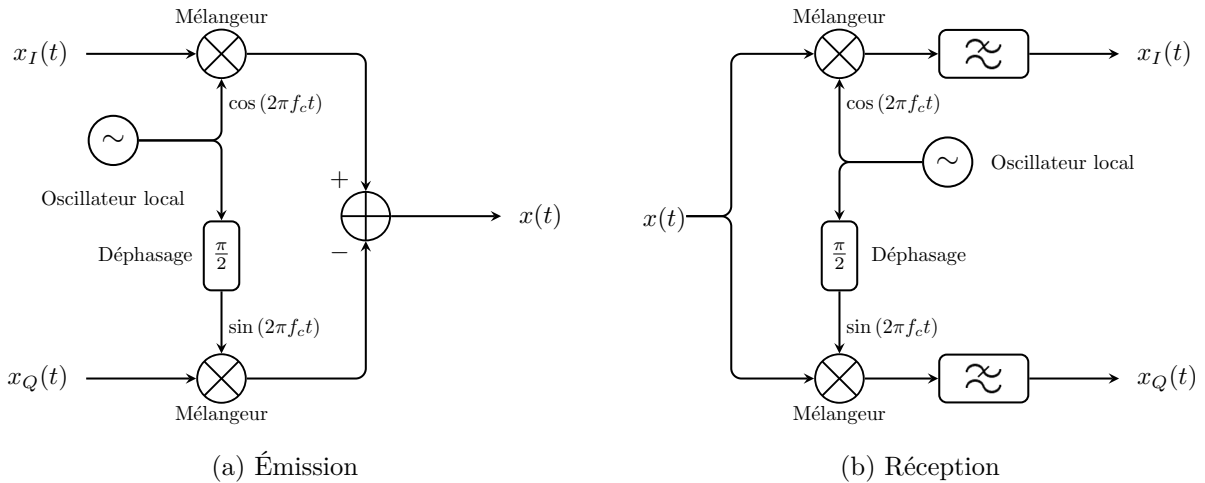


FIGURE 2.3 – Création du signal passe-bande en émission à partir des composantes en phase $x_I(t)$ et en quadrature $x_Q(t)$ et récupération de ces composantes en émission par transposition en bande de base

Une manière de créer le signal passe-bande à partir des composantes $x_I(t)$ et $x_Q(t)$ est résumée sur la figure 2.3a. Les voies en phase et en quadrature sont transposées en fréquence à l'aide de mélangeurs qui assurent l'opération de multiplication entre le signal d'entrée et une sinusoïde générée

par un oscillateur local à la fréquence porteuse f_c pour la voie en phase et déphasée de $\frac{\pi}{2}$ pour la voie en quadrature.

En réception, il est possible d'effectuer l'opération inverse pour obtenir les composantes en phase et en quadrature directement à partir du signal reçu grâce à une transposition en bande de base, schématisée sur la figure 2.3b. En plus des opérations précédentes, un filtrage passe-bas est réalisé sur chaque voie afin d'éliminer les fréquences indésirables issues de la transposition en fréquence. Nous reviendrons sur le principe de la transposition dans le paragraphe 2.4.2.

2.3.2 Modèle passe-bande réel

Comme présenté dans le chapitre 1 (dans la partie 1.2.2), nous modélisons le signal passe-bande réel comme un processus aléatoire stationnaire. Cette modélisation est en adéquation avec le contexte des télécommunications où de nombreux événements imprévisibles (traversée des couches atmosphériques, scintillation, bruit thermique, etc...) donnent au signal un caractère aléatoire [Pro01]. L'hypothèse de stationnarité au sens large donnée dans 1.2 est généralement adoptée. Cette condition permet de supposer que les propriétés du signal (moyenne et autocorrélation) ne dépendent pas du temps et de définir une DSP selon la représentation donnée dans le chapitre 1 (dans la partie 1.2.3).

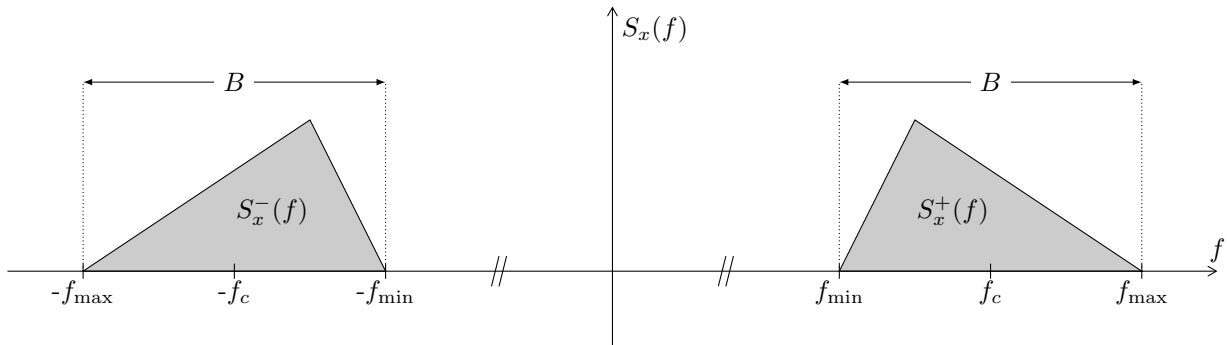


FIGURE 2.4 – Modélisation d'un signal passe-bande réel

La DSP notée $S_x(f)$ (schématisée sur la figure 2.4) est nulle en dehors de deux sous-bandes symétriques. Notons f_{\min} la fréquence minimale de la bande positive, f_{\max} la fréquence maximale et $f_c = \frac{f_{\min} + f_{\max}}{2}$ la fréquence centrale, qui est la fréquence porteuse définie dans la partie précédente

de sorte que :

$$S_x(f) = 0, f \notin (-f_{\max}, -f_{\min}) \cup (+f_{\min}, +f_{\max}) \quad (2.3)$$

La largeur de chacune des sous-bandes $S_x^-(f)$ et $S_x^+(f)$, notée B , est alors donnée par $B = f_{\max} - f_{\min}$ et la largeur totale est $2B$

2.3.3 Allocation en sous-bandes

Dans les applications de télécommunications par satellite visées, le signal est considéré à large bande, typiquement $B = 500\text{MHz}$. En pratique, cette bande est séparée en un certain nombre de canaux aloués à des utilisateurs différents, chaque canal étant séparé de ses voisins par une bande de garde. La figure 2.5 représente l'allocation de canaux pour le cas de 5 utilisateurs se partageant la bande selon une méthode d'accès de type FDMA (*Frequency Division Multiple Access*), celle-ci pouvant être combinée avec du TDMA (*Time Division Multiple Access*) ou du CDMA (*Code Division Multiple Access*), sans impact sur notre modélisation.

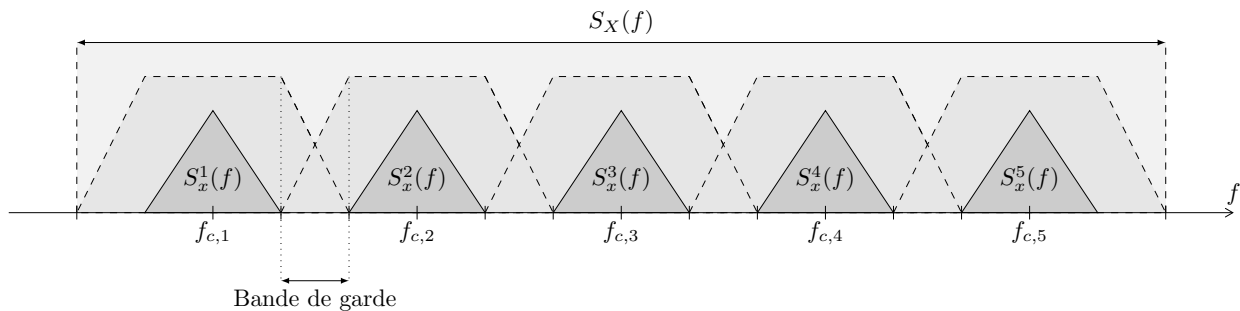


FIGURE 2.5 – Illustration de l'allocation de canaux pour le cas de 3 utilisateurs

La forme des sous-bandes dépendra des filtres de mise en forme utilisés lors de l'émission (typiquement des filtres en racine de cosinus surélevé ou *SRRCF* pour *Square Root Raised Cosine Filter*), filtres qui peuvent entraîner un décalage en fréquence et donc causer une imprécision Δ_f sur la position des fréquences centrales de chaque sous-bande. Afin d'éviter que deux bandes voisines ne se recouvrent à cause de cette imprécision, il sera nécessaire de prévoir des bandes de garde entre les sous-bandes, dont la largeur sera nécessairement supérieure à $2\Delta_f$. La bande de garde n'étant pas

utilisée pour la transmission du signal utile, elle doit être réduite au maximum. Pour chaque utilisateur, les canaux adjacents peuvent être considérés comme des interférences qui viennent perturber le signal utile et l'erreur engendrée est appelée *Adjacent-Channel Interference (ACI)* [MB09]. Il est intéressant de rejeter cette interférence [BEGK02] en sélectionnant chaque canal de manière précise pour restituer fidèlement le contenu assigné à chaque utilisateur. Dans le chapitre 3 nous montrerons qu'il est possible d'effectuer la sélection des sous-bandes par filtrage et le rejet des bandes voisines interférentes en les intégrant à la reconstruction d'un signal échantillonné non uniformément.

2.3.4 Représentation complexe du signal

2.3.4.1 Enveloppe complexe

Pour représenter un signal passe-bande réel de manière simplifiée, un outil pratique est l'enveloppe complexe du signal qui représente l'équivalent passe-bas complexe du signal passe-bande. Il peut être défini à partir des composantes en phase et en quadrature définies dans le paragraphe 2.3.1 :

$$x_c(t) = x_I(t) + ix_Q(t) \quad (2.4)$$

Ces composantes portent des informations sur la phase $\phi(t)$ et l'amplitude $A(t)$ instantanées de l'enveloppe complexe du signal :

$$\begin{aligned} A(t) &= \sqrt{x_I(t)^2 + x_Q(t)^2} & \phi(t) &= \tan^{-1} \left(\frac{x_Q(t)}{x_I(t)} \right) \\ x_I(t) &= A(t) \cos(\phi(t)) & x_Q(t) &= A(t) \sin(\phi(t)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Par ailleurs, le signal passe-bande transmis peut être défini comme la partie réelle de l'enveloppe complexe modulée autour de la fréquence porteuse f_c :

$$x(t) = \text{Re} \left[x_c(t) e^{2i\pi f_c t} \right] \quad (2.6)$$

où l'opérateur $\text{Re}[\cdot]$ représente la partie réelle d'un nombre complexe ($\text{Im}[\cdot]$ pour la partie imaginaire).

L'enveloppe complexe du signal permet de représenter en bande de base le signal passe-bande transmis, ce qui permet de simplifier certains calculs (destinés à analyser les performances de la chaîne de transmission par exemple). Par ailleurs, notons que pour un signal passe-bande stationnaire, l'enveloppe complexe $x_c(t)$ ainsi que les composants $x_I(t)$ et $x_Q(t)$ sont également des processus aléatoires et possèdent les propriétés de stationnarité héritées de $x(t)$.

2.3.4.2 Signal analytique

Le signal analytique est une représentation complexe du signal très utilisée [Fla98], en particulier dans les télécommunications [Pro01] afin de représenter le signal passe-bande de manière simplifiée. Il correspond à un signal dont le contenu spectral est composé uniquement de la bande positive du signal réel d'origine. La figure 2.6 montre la densité spectrale du signal analytique associé au signal modélisé dans la figure 2.4.

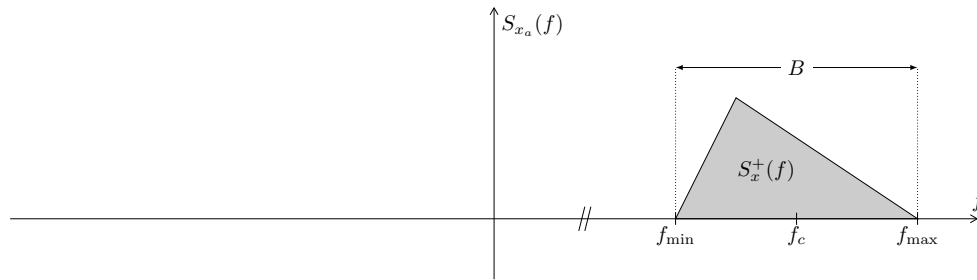


FIGURE 2.6 – DSP du signal analytique associé à un signal passe-bande réel

Pour un processus aléatoire réel \mathbf{X} , le signal analytique \mathbf{X}_a est défini par :

$$\begin{cases} x_a(t) = x(t) + ix_h(t) \\ x_h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t-u)}{\pi u} du = \text{v.p.} \left\{ x(t) * \frac{1}{\pi t} \right\} \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{-\varepsilon} \frac{x(t-u)}{\pi u} du + \int_{\varepsilon}^T \frac{x(t-u)}{\pi u} du \end{cases} \quad (2.7)$$

où $x_h(t)$ est la transformée de Hilbert du signal $x(t)$ et v.p. désigne la valeur principale.

On peut également définir la transformée de Hilbert comme un filtrage du signal $x(t)$:

$$\begin{aligned} x_h(t) &= x(t) * h(t) \\ h(t) &= \frac{1}{\pi t} \quad H(f) = -i \operatorname{sign}(f) \end{aligned} \quad (2.8)$$

où le filtre $h(t)$ possède une fonction de transfert $H(f)$. La transformée de Hilbert réalise un filtrage dit en quadrature puisque les fréquences positives sont déphasées de $-\frac{\pi}{2}$ et les fréquences négatives de $\frac{\pi}{2}$. Le filtre de Hilbert noté $h_a(t)$ permettant de déterminer le signal analytique à partir du signal $x(t)$ possède une fonction de transfert $H_a(f) = 1 + \operatorname{sign}(f)$.

Le signal analytique peut également s'exprimer en fonction de l'enveloppe complexe du signal qui correspond à sa version en bande de base :

$$x_a(t) = x_c(t)e^{2i\pi f_c t} \quad (2.9)$$

et ainsi les composantes en phase et en quadrature définies précédemment s'expriment simplement à l'aide du signal analytique :

$$\begin{aligned} x_I(t) &= \operatorname{Re} \left[x_a(t)e^{-2i\pi f_c t} \right] \\ x_Q(t) &= \operatorname{Im} \left[x_a(t)e^{-2i\pi f_c t} \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ceci permet d'obtenir simplement ces composantes après transposition en fréquence. Pour un signal passe-bande réel, la bande de fréquence négative peut être vue comme redondante car elle transporte les mêmes informations que la partie positive. Par ailleurs, de nombreuses opérations travaillent à partir du signal complexe pour des raisons de simplicité, moins d'opérations étant requises pour traiter le signal complexe. Nous pouvons citer le *beamforming* ou formation de faisceaux [VVB88, VT04], qui est un filtrage spatial basé sur l'utilisation d'un réseau d'antennes. L'adaptation de ces antennes nécessite la connaissance de la phase et de l'amplitude instantanées du signal définies via le signal analytique.

Le signal analytique a fait l'objet d'études dans le cadre de l'échantillonnage de signaux passe-bande [SF92a, Rie93] afin de récupérer directement ce signal à partir des échantillons du signal d'origine. Nous adopterons une démarche similaire dans le chapitre 3 où nous présenterons une méthode permettant de reconstruire directement le signal analytique à partir d'échantillons non uniformes.

2.4 Problématiques au niveau du récepteur

2.4.1 Schéma de récepteur simplifié

Nous présentons maintenant un schéma simplifié du récepteur permettant de mettre en évidence des problématiques d'intérêt. Le récepteur simplifié, représenté sur la figure 2.7, se rapproche des récepteurs hétérodynes présents dans les transmissions radio dont [Sun06] a fait un panorama. Le but du récepteur est d'échantillonner uniformément le signal passe-bande transmis à haute fréquence (HF)

et de fournir finalement des échantillons en bande de base. Néanmoins, des contraintes technologiques liées à la HF nous obligent à transposer le signal dans une bande où l'échantillonnage sera plus simple à mettre en œuvre. Ce schéma se compose donc d'une transposition de haute fréquence à une fréquence intermédiaire (FI) que nous définirons dans la suite, précédée d'un filtrage analogique passe-bande (PB) permettant de couper les composantes fréquentielles se trouvant en dehors de la bande du signal et qui sont susceptibles d'être transposées également en FI lors de la transposition. Ensuite, le schéma comporte un dispositif d'échantillonnage, lui aussi précédé d'un filtre analogique passe-bande appelé filtre anti-repliement (ou AAF pour *anti-aliasing filter*) car des composantes hors bandes sont susceptibles de se replier lors de l'échantillonnage et doivent donc être coupées.

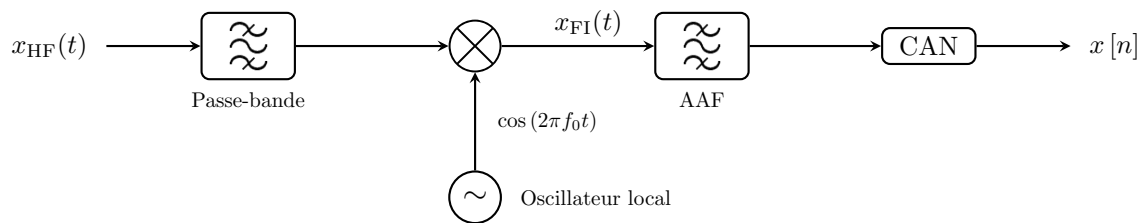


FIGURE 2.7 – Récepteur simplifié

2.4.2 Transposition en fréquence intermédiaire

Dans des applications de télécommunications par satellite, les signaux sont transmis typiquement à des fréquences de l'ordre de la dizaine de GHz (typiquement 10 GHz en bande K_u et de 20 à 30 GHz en bande K_a) et il s'avère très difficile de les traiter directement à des fréquences aussi élevées. D'une part, l'opération d'échantillonnage devient très délicate dans la mesure où la moindre gigue d'échantillonnage entraîne des erreurs importantes du fait des variations extrêmement rapides des signaux. D'autre part, le filtrage AAF (présenté dans la partie suivante) nécessaire avant l'opération d'échantillonnage étant un filtre analogique avec des propriétés de sélectivité strictes, sa conception s'avère problématique à très haute fréquence avec les technologies actuelles. Afin de pouvoir effectuer ce filtrage AAF dans des conditions favorables, le signal est donc transposé au préalable dans une bande de fréquence moins élevée, appelée fréquence intermédiaire (FI). Notons que cette transposition

est précédée par un filtrage passe-bande qui sert à enlever le bruit hors bande. Cependant, celui-ci ne pose pas autant de problèmes que le filtre AAF car il ne requiert pas une sélectivité en fréquence aussi élevée. En effet, les fréquences qui peuvent interférer lors de la transposition et qui doivent donc être coupées par ce filtre sont contraintes et ne prennent qu'un faible nombre de valeurs comme nous allons le voir.

La transposition en FI permet de transférer le contenu spectral du signal analogique, de bande B et centré initialement autour de la fréquence porteuse f_c , autour des fréquences principales $f_c \pm f_0$ via l'utilisation d'un oscillateur local à la fréquence f_0 mais également autour de toutes les fréquences $\pm k f_c \pm m f_0$ avec $k, m \in \mathbb{Z}$, appelées produits d'intermodulation ou harmoniques. Suite à la transposition, le signal est donc filtré afin d'éliminer toutes les fréquences indésirables et ne conserver que la bande centrée autour de $f_i = f_c - f_0$. Il faut cependant faire attention au fait que d'autres composantes peuvent se retrouver à f_i par transposition, notamment la composante initialement à la fréquence image $f_{\text{image}} = f_0 - f_i$, les autres possibilités étant des produits d'intermodulation dont les contributions seront moindres. En pratique, on choisit donc conjointement f_i et le gabarit du filtre passe-bande en entrée de sorte que la composante à la fréquence image soit coupée et ne puisse donc pas interférer sur le signal après transposition.

Le signal ainsi transposé peut être échantillonné mais il est également possible d'enchaîner plusieurs opérations de transposition en fréquence afin de descendre par palier de la HF à la bande où le signal sera échantillonné, comme c'est le cas dans les récepteurs radio [Sun06].

2.4.3 Filtre anti-repliement

Le filtre anti-repliement (*Anti-Aliasing Filters* ou *AAF*) est un filtre passe-bande analogique utilisé en amont de l'opération d'échantillonnage uniforme passe-bande, afin de supprimer des fréquences parasites initialement hors bande mais qui sont susceptibles de se replier. En effet, lors des transmissions entre la station sol émettrice et le satellite, le signal est entaché d'un bruit large bande qui produit des interférences dans et en dehors de la bande du signal qui ne peuvent être négligées. Le filtre AAF se trouve donc entre l'étape de transposition en fréquence intermédiaire et l'opération d'échantillonnage dans notre schéma de récepteur simplifié (figure 2.7).

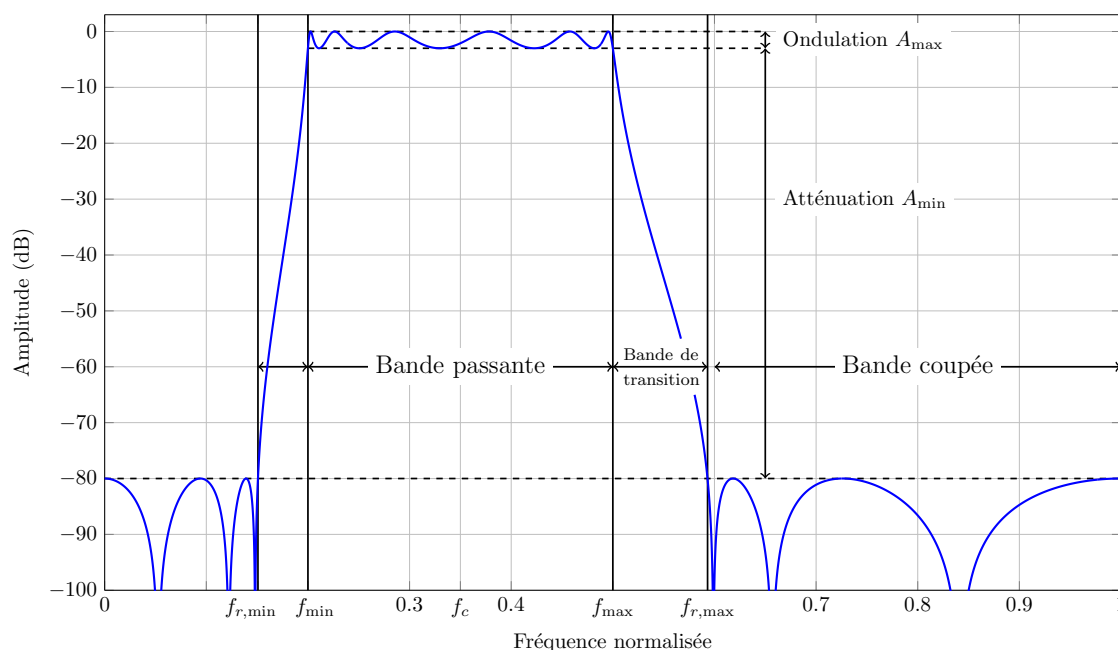


FIGURE 2.8 – Exemple de fonction de transfert d'un filtre anti-repliement

La figure 2.8 présente la fonction de transfert d'un filtre passe-bande pouvant être utilisé comme filtre anti-repliement. Les paramètres de ce filtre sont liés à ceux du signal $x(t)$. Ils sont présentés sur la figure 2.8 et sont les fréquences de coupure à -3dB f_{\min} et f_{\max} qui délimitent la bande passante $B = f_{\max} - f_{\min}$, les fréquences de réjection $f_{r,\min}$ et $f_{r,\max}$ à partir desquelles les fréquences sont coupées avec une atténuation minimale de A_{\min} dB, ainsi que la fréquence centrale $f_c = \frac{f_{\max} + f_{\min}}{2}$. Une ondulation maximale de A_{\max} dB est tolérée dans la bande passante. Ici, nous avons représenté un filtre de type elliptique, d'ordre 6, passe-bande entre 0.2 et 0.5 en fréquence normalisée, d'atténuation de 80dB et d'ondulation de 3dB (ondulation volontairement élevée pour que la figure 2.8 soit compréhensible visuellement, et n'ayant donc pas valeur d'exemple pratique).

Dans le domaine des télécommunications, comme dans beaucoup d'applications, il est souhaitable que les bandes de transition du filtre anti-repliement soient étroites. En effet, non seulement ces bandes de transition ne sont pas utilisables pour transmettre le signal ce qui entraîne une réduction de la bande utile, mais elles influent également sur la fréquence d'échantillonnage utilisable comme nous le détaillons dans le paragraphe suivant. Il est malheureusement difficile de concevoir des filtres

analogiques aux bandes de transition étroites, et cette difficulté augmente avec leur fréquence centrale [VSW91, Sch01]. Le facteur de qualité Q permet d'évaluer la sélectivité d'un filtre pour une fréquence centrale donnée et est défini comme le rapport entre la fréquence centrale et la bande passante B du filtre à 3dB :

$$Q = \frac{f_c}{B} = \frac{f_{\max} + f_{\min}}{2(f_{\max} - f_{\min})} \quad (2.11)$$

avec les notations utilisées sur la figure 2.8.

Pour une fréquence centrale donnée, une valeur élevée de Q correspond à un filtre sélectif. Il est par contre difficile, pour des raisons technologiques, d'avoir des filtres sélectifs à haute fréquence et donc d'avoir des valeurs élevées de Q . Les filtres passe-bande les plus sélectifs utilisés en pratique sont les filtres à ondes acoustiques de surface, mais ils n'atteignent que difficilement les 500 MHz en bande passante nécessaires pour les applications de télécommunications par satellite visées. Ils sont également sujets à de fortes ondulations dans la bande passante, ce qui les rend difficile à utiliser. [VSW91] présente notamment une étude de l'échantillonnage passe-bande uniforme et des difficultés de fonctionnement à haute fréquence, en illustrant à l'aide de divers filtres possédant des valeurs de Q différentes.

Les filtres anti-repliement constituent un vestige analogique au cœur d'un système où le numérique devient prédominant pour des raisons de coût. Les AAF peuvent être considérés comme le goulot d'étranglement de la chaîne et diminuer leurs contraintes, notamment en termes de raideur des bandes de transition, constitue un enjeu. Des études se sont intéressées à l'intégration des AAF à l'opération de conversion analogique/numérique du signal [PP00, PP04] grâce à une méthode utilisant des poids adaptatifs lors de l'opération de d'échantillonnage du signal effectuée grâce à des échantillonneurs-bloqueurs. L'échantillonnage aléatoire a été envisagé comme une solution pour relâcher ces contraintes. Il possède en effet la propriété intéressante que les répliques spectrales se replient sur le spectre original sous une forme étalée qui apparaît comme un bruit. Toutefois, même en observant les temps générés selon une distribution aléatoire, ce type d'échantillonnage ne permet pas de reconstruction pour des signaux passe-bande et il n'a pas pu être utilisé.

2.4.4 Échantillonnage uniforme passe-bande

Dans la chaîne de réception simplifiée représentée sur la figure 2.7, l'opération d'échantillonnage est effectuée selon la méthode détaillée dans le paragraphe 1.3.2.3 d'échantillonnage passe-bande uniforme qui respecte le critère de Landau (1.13). Le but est d'utiliser le repliement spectral inhérent à ce schéma d'échantillonnage pour récupérer une réplique spectrale en bande de base, sous des contraintes dues à la position de la bande du signal comme détaillé dans le paragraphe 1.3.2.3.

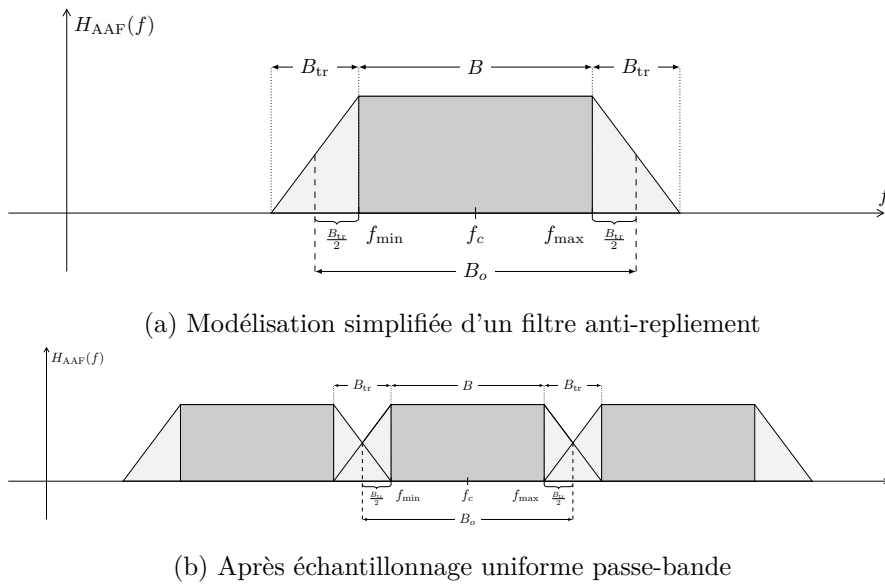


FIGURE 2.9 – Modélisation simplifiée d'un filtre passe-bande utilisé comme filtre anti-repliement et comportement lors d'un échantillonnage uniforme passe-bande

Cependant se pose également un problème lié au filtre anti-repliement introduit avant l'échantillonnage et modélisé de manière simple sur la figure 2.9a par une bande passante de largeur B et des bandes de transition de part et d'autre, de même largeur B_{tr} . En effet, lors de l'échantillonnage, la bande à considérer n'est pas uniquement celle de la bande passante du filtre (qui correspond à celle du signal utile) mais doit tenir compte du fait que la bande de transition laisse passer des fréquences parasites qui pourront se replier si elles ne sont pas considérées comme faisant partie de la bande du signal à échantillonner. Ainsi la bande occupée étant maintenant $B_o = B + B_{tr}$, la fréquence d'échantillonnage est augmentée proportionnellement à la largeur des bandes de transition. On ne

prend en compte que la moitié de la bande de transition de part et d'autre car elles peuvent se croiser lors du repliement (schématisé sur la figure 2.9b) étant donné qu'elles ne contiennent que du bruit. Il apparaît donc essentiel de contraindre la largeur des bandes de transition des filtres afin de pouvoir échantillonner le signal à une fréquence la plus faible possible.

Par ailleurs, l'incertitude concernant le positionnement de la fréquence centrale (expliqué précédemment dans le paragraphe 2.3.3) nécessite de choisir avec précaution la fréquence d'échantillonnage et notamment de considérer une bande de garde [VSW91]. Ces limitations de l'échantillonnage uniforme passe-bande nous ont poussé à nous intéresser à l'échantillonnage entrelacé afin de l'intégrer à la chaîne simplifiée de réception. Cet échantillonnage, dont le principe a été détaillé dans le paragraphe 1.3.3.2 permet de s'affranchir des limitations sur le choix de la fréquence d'échantillonnage en ce qui concerne la position de la bande du signal sans néanmoins apporter de solution quant aux bandes de transition qui contrôleront toujours la fréquence d'échantillonnage utilisée. Nous montrons dans le chapitre 3 qu'il est possible d'intégrer dans la reconstruction des fonctionnalités intéressantes en réception. En outre, comme nous allons maintenant le présenter, le schéma d'échantillonnage PNS trouve une application naturelle dans la modélisation des défauts d'un type d'échantillonneur particulier appelé Convertisseur Analogique-Numérique entrelacé temporellement.

2.5 Convertisseurs Analogique-Numérique entrelacés temporellement

De nombreux travaux ont appliqué la théorie de l'échantillonnage à la modélisation des dispositifs d'échantillonnage, les Convertisseurs Analogique-Numérique (CAN) ou *Analog to Digital Converters (ADC)*. Il existe plusieurs types d'échantillonneurs mais nous nous intéresserons plus particulièrement aux CANs entrelacés temporellement ou *Time-Interleaved ADC (TI-ADC)* introduits par Black et Hodges [BJH80]. Ce type de convertisseur a depuis fait l'objet de nombreux travaux visant à caractériser les erreurs se produisant dans le circuit [Elb03, Raz12, Raz13, Vog05, ECM09] ainsi qu'à proposer des méthodes de correction de ces erreurs [Elb03, Raz12, Raz13, JFS⁺04, DW09, Rud01, SRM07, MDCC09]. Nous présentons ici l'architecture des convertisseurs entrelacés qui présente un intérêt en

télécommunications étant donné qu'elle permet d'atteindre de hautes fréquences d'échantillonnage à faible coût. Nous présentons également les défauts potentiels de ce type de convertisseurs.

2.5.1 Architecture et intérêt

Les convertisseurs entrelacés ont été introduits par Black et Hodges [BJH80] comme une solution technique pour atteindre de hautes fréquences d'échantillonnage en distribuant l'opération d'échantillonnage entre plusieurs convertisseurs décalés temporellement. Pour un système utilisant L convertisseurs en parallèle, fonctionnant chacun à une fréquence f_e , une fréquence d'échantillonnage globale de Lf_e est obtenue par multiplexage des différentes voies. La figure 2.10a schématise cette architecture.

Le schéma d'échantillonnage associé est le suivant. La sortie de la voie $i = 0, \dots, L - 1$ est notée x_i :

$$x_i[k] = x(kT_e + \frac{i}{L}T_e), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.12)$$

Après multiplexage, nous avons donc :

$$x[n] = x_i \left[\frac{n-i}{L} \right] \text{ avec } i = n \bmod L \text{ et } n \in \mathbb{Z}, \quad (2.13)$$

où \bmod représente l'opération modulo. La figure 2.10b illustre ce schéma associé qui permet d'obtenir un échantillonnage globalement uniforme en sortie.

Cette architecture entrelacée est intéressante pour plusieurs raisons. Tout d'abord, l'entrelacement permet clairement d'atteindre des fréquences d'échantillonnage élevées à un moindre coût, grâce à l'utilisation de convertisseurs fonctionnant à faible fréquence sur chaque voie. Pour une fréquence d'échantillonnage cible, l'entrelacement permet en effet de réduire la fréquence d'échantillonnage sur chaque voie par rapport à un échantillonneur simple.

Par ailleurs, les échantillonneurs entrelacés présentent des avantages en termes de compromis entre puissance consommée et fréquence d'échantillonnage. En effet, l'entrelacement apporte une plus grande flexibilité et une étude récente [SWH01] a montré pour la première fois qu'une architecture entrelacée avec un choix approprié des paramètres peut conduire à une réduction de la consommation. Ce résultat a été également rapporté dans [Raz13]. En effet, la puissance consommée P_c par

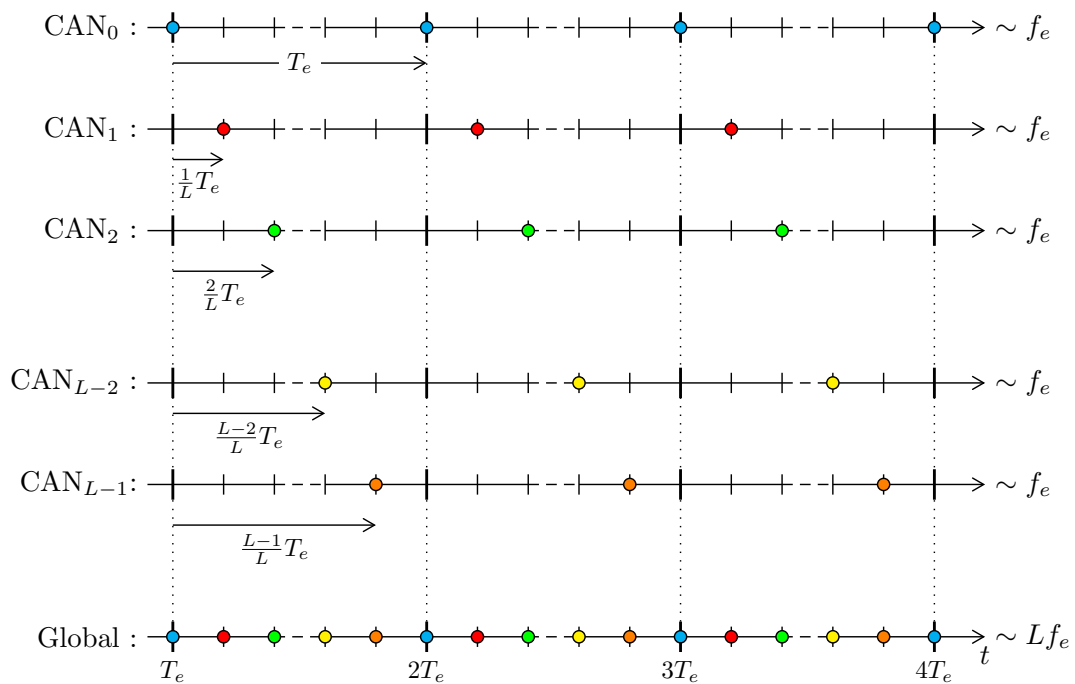
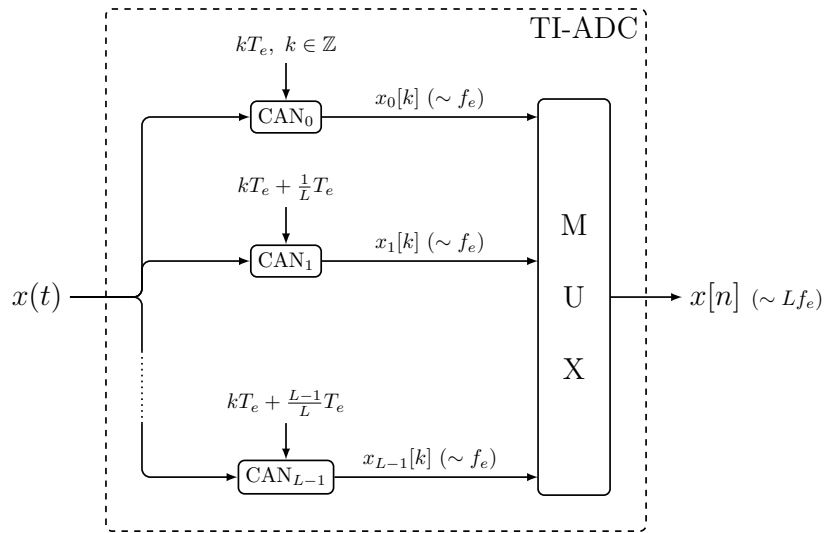


FIGURE 2.10 – Architecture et modèle d'échantillonnage théoriques d'un convertisseur entrelacé à L voies

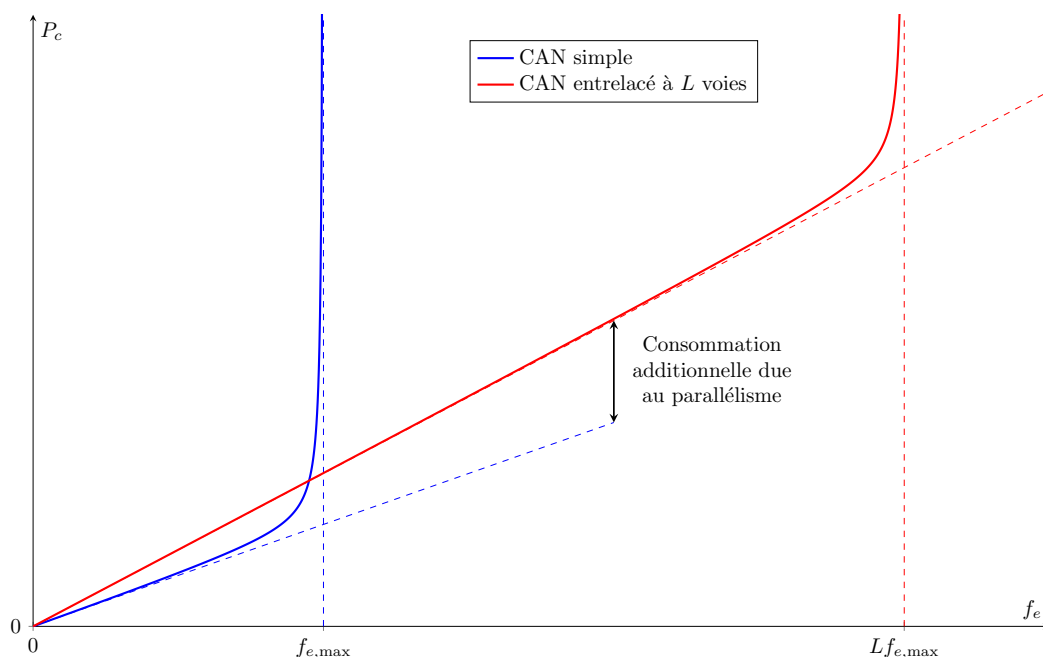


FIGURE 2.11 – Comparaison de la consommation d’un échantillonneur simple et d’un échantillonneur entrelacé (tiré et adapté de [Ste12])

un échantillonneur simple n’est pas linéaire en fonction de la fréquence d’échantillonnage comme le montre la figure 2.11 [Ste12] et tend à croître de manière exponentielle lorsque l’on approche les limites technologiques de l’échantillonneur. Bien que l’entrelacement nécessite la consommation d’une quantité de puissance liée aux équipements contrôlant l’entrelacement, notamment le système d’horloge, la consommation globale du système s’avère diminuée par l’emploi d’une architecture entrelacée [Raz13]. Lorsque la fréquence d’échantillonnage augmente, l’architecture entrelacée devient plus intéressante qu’un échantillonneur simple car elle permet de repousser les limites technologiques globale car chaque échantillonneur élémentaire fonctionne en dessous de ses limites comme le montre la figure 2.11.

Enfin, l’architecture entrelacée présente l’avantage de nécessiter moins de composants que d’autres architectures de convertisseurs telles que les *pipeline ADC* ou les *flash ADC* pour une fréquence d’échantillonnage similaire [Elb03]. Ceci permet de réaliser des circuits plus petits et donc moins

lourds, ce qui est un avantage recherché en télécommunications par satellite. Les convertisseurs entrelacés sont ainsi très utilisés dans des applications qui requièrent de très hautes fréquences d'échantillonnage, comme par exemple les stations radio [Elb03].

2.5.2 Imperfections des échantillonneurs entrelacés

Il est important de noter que cette architecture ne conduit à l'échantillonnage uniforme souhaité que lorsque les convertisseurs élémentaires sont strictement identiques, aux propriétés connues et parfaitement synchronisés. Or, cette hypothèse est irréaliste en pratique en raison d'imperfections liées aux procédés de fabrication et aux conditions de fonctionnement extrêmes et variables (température et tension d'alimentation principalement). L'hétérogénéité entre les convertisseurs élémentaires ainsi que les imperfections de l'horloge sont responsables de 3 types d'erreurs, connues sous le nom de *mismatch errors* : l'erreur de décalage en amplitude (*offset*), l'erreur de gain et l'erreur de désynchronisation temporelle. Elles sont considérées comme statiques ou variant lentement par rapport à la dynamique du système en fonction des conditions d'utilisation [Elb03].

Nous illustrerons leurs effets respectifs en considérant l'exemple d'un échantillonneur avec $L = 8$ voies fonctionnant toutes à une fréquence d'échantillonnage de $f_e = 1$, pour une fréquence globale de $f_e = 8$, avec en entrée un signal de test simple défini comme une sinusoïde à la fréquence $f_0 = 3.23$ (respectant donc le critère de Shannon). Dans les simulations, chaque erreur (*offset*, gain et désynchronisation) a été choisie aléatoirement et différente sur chaque voie.

2.5.2.1 Offset

L'erreur dite d'*offset* est due à un décalage d'amplitude dans les convertisseurs qui se caractérise par une sortie non nulle pour une entrée nulle. En notant Δ_i^o l'erreur d'*offset* survenant sur la voie $i = 0, \dots, L - 1$, l'échantillon à l'instant k sur l'échantillonneur i s'écrit :

$$\tilde{x}_i[k] = x(kT_e + \frac{i}{L}T_e) + \Delta_i^o. \quad (2.14)$$

Cette erreur existe de manière systématique dans les convertisseurs simples mais elle n'impacte pas les performances du système. Par contre, il est important d'en tenir compte dans le cadre de

convertisseurs entrelacés car l'hétérogénéité des décalages en amplitude sur les différentes voies est source de distorsions non linéaires sur le signal de sortie. La figure 2.12a présente l'impact de cette erreur d'*offset* en termes de composantes fréquentielles pour une entrée sinusoïdale. Nous voyons qu'elle a pour effet l'apparition de raies à des fréquences pf_e , $p \in \mathbb{Z}$. [Elb03] propose une méthode pour corriger cette erreur. Nous considérons dans notre étude que cette erreur a été corrigée en amont.

2.5.2.2 Gain

Le gain représente une erreur d'échelle dans les convertisseurs qui se traduit par l'apparition d'un facteur multiplicatif sur le signal de sortie. En notant Δ_i^g l'erreur de gain survenant sur la voie $i = 0, \dots, L - 1$, l'échantillon à l'instant k sur l'échantillonneur i s'écrit :

$$\tilde{x}_i[k] = \Delta_i^g x(kT_e + \frac{i}{L}T_e). \quad (2.15)$$

De la même manière que les erreurs de décalages d'amplitude, cette erreur existe dans les convertisseurs simples mais elle devient gênante dans le cas des TI-ADC car elle crée des distorsions sur le signal de sortie. La figure 2.12b présente l'impact de cette erreur de gain en termes de composantes fréquentielles pour une entrée sinusoïdale. Elle a pour effet l'apparition de raies à des fréquences multiples de $pf_e \pm f_0$, $p \in \mathbb{Z}$. Cette erreur a également été étudiée dans [Elb03] et une méthode de correction a été proposée. Nous considérerons donc également que cette erreur a été corrigée en amont.

2.5.2.3 Désynchronisation

La désynchronisation temporelle, également appelée gigue statique, représente un décalage global de la séquence des instants d'échantillonnage. Ce décalage est considéré comme statique car il varie lentement dans le temps et doit être différencié de la gigue d'échantillonnage, qui représente un décalage aléatoire se produisant à chaque prise d'échantillon et qui a pour cause des imperfections liées à la génération de l'horloge. Cette gigue aléatoire se caractérise par un bruit gaussien additif et n'est pas considérée dans la désynchronisation temporelle. En notant Δ_i l'erreur de désynchronisation

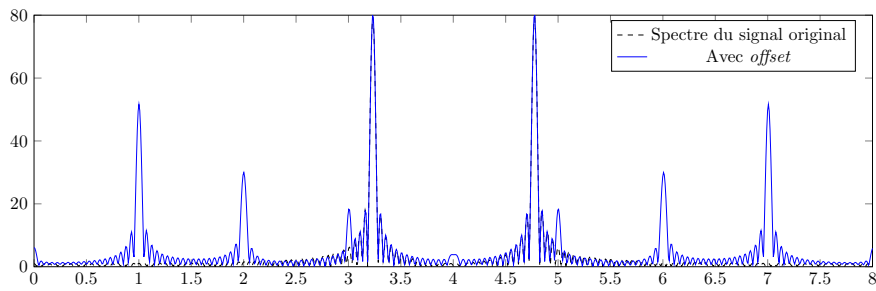
statique survenant sur la voie $i = 0, \dots, L - 1$, nous avons :

$$\tilde{x}_i[k] = x(kT_e + \Delta_i). \quad (2.16)$$

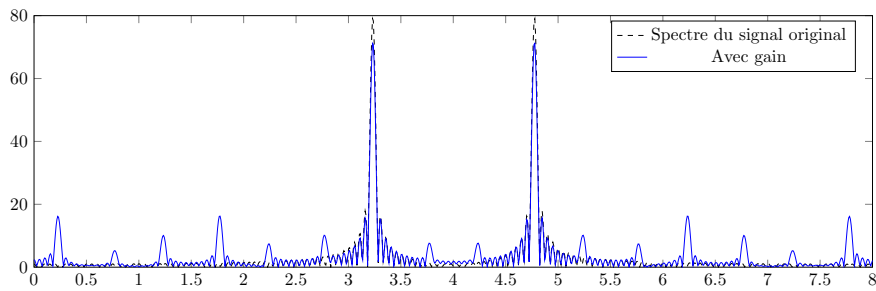
Le cas parfait sans désynchronisation correspond à $\Delta_i = \frac{i}{L}T_e$ et conduit à l'échantillonnage global uniforme souhaité. Cette désynchronisation est donc particulièrement problématique dans les convertisseurs entrelacés car elle entraîne un décalage entre les voies qui conduit à un échantillonnage irrégulier. Ceci entraîne des distorsions sur le signal après reconstruction si celle-ci est réalisée sous l'hypothèse d'un échantillonnage uniforme. Les erreurs de désynchronisation sont dues à divers composants du circuit [Raz12] mais elles proviennent principalement de problèmes liés au circuit d'horloge. En particulier, le partage de l'horloge par les différentes voies devient de plus en plus problématique lorsque le nombre L de voies augmente.

Des études ont montré que les erreurs de désynchronisation ont un impact plus important sur les performances que les erreurs d'*offset* et de gain [Elb03, Vog05, Raz12]. Elles sont également plus difficiles à calibrer et à corriger car elles concernent l'instant de prise d'échantillon alors que l'*offset* et le gain produisent un simple biais additif et multiplicatif sur la valeur de l'échantillon. En particulier, des études [Jen88, ECM09] ont analysé leur impact pour une entrée sinusoïdale ou aléatoire. La figure 2.12c présente l'impact de cette erreur de désynchronisation dans le cas d'une entrée sinusoïdale. Nous voyons qu'elle a pour effet l'apparition de raies à des fréquences multiples de $pf_e \pm f_0$, $p \in \mathbb{Z}$ (les mêmes que l'erreur de gain), comme l'avait étudié [Elb03]. L'étude de l'effet des erreurs confirme le caractère prédominant de la désynchronisation car on ne retrouve quasiment plus la forme du spectre original lors de sa seule prise en compte (figure 2.12c). Les effets combinés des trois types d'erreur sont représentés sur la figure 2.12d, qui se révèle relativement peu différente de la figure 2.12c.

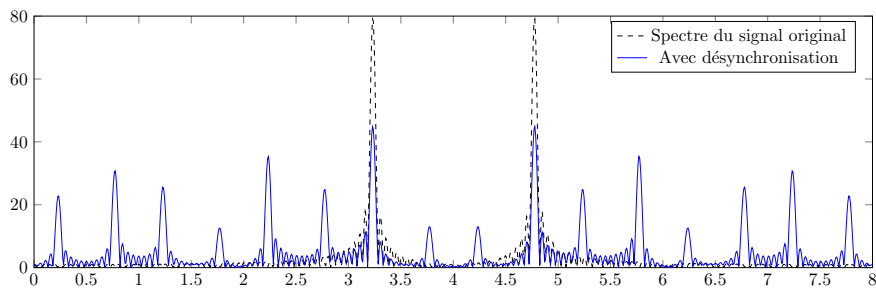
L'apparition de désynchronisation temporelle peut être modélisée par un échantillonnage PNSL que nous avons présenté dans le chapitre 1. Nous utiliserons cette modélisation dans la suite pour tenir compte de l'échantillonnage irrégulier dû à l'apparition de désynchronisations hétérogènes sur les voies du convertisseur entrelacé.



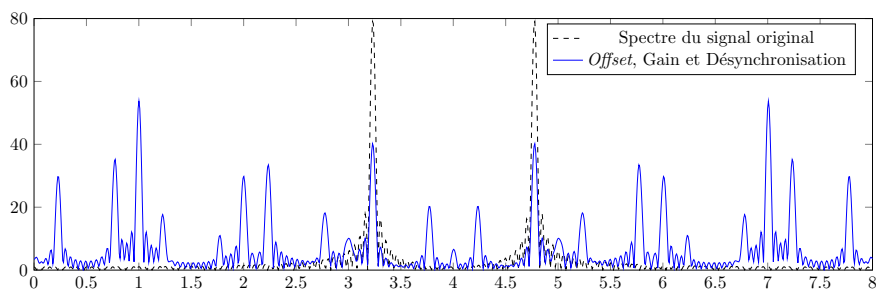
(a) Offset



(b) Gain



(c) Désynchronisation



(d) Total

FIGURE 2.12 – Impact des erreurs survenant dans un convertisseur entrelacé à $L = 8$ voies pour un signal d'entrée sinusoïdal

2.5.3 État de l'art des méthodes de calibration et de correction

La problématique de la correction de convertisseurs entrelacés désynchronisés a été largement explorée autant par les communautés signal que circuits. Nous faisons un bref panorama des méthodes existantes en décrivant leurs avantages et inconvénients mais plus d'informations peuvent être trouvées dans [Elb03, Ste12, VHS⁺12].

Parmi les premières méthodes proposées pour la correction de la désynchronisation, on retrouve une architecture basée sur l'implantation d'un échantillonneur unique en amont de la séparation multi-voies [DFLH98, FDLH98]. Ce type de méthode n'est pas satisfaisant car cette architecture s'éloigne de l'objectif initial qui était d'échantillonner séparément sur chaque voie pour des raisons de souplesse. D'autres méthodes se basent sur l'utilisation de séquences d'apprentissage, qui sont des signaux simples aux propriétés connues, transmis avant le signal passe-bande ou pendant les pauses de transmission. Ces méthodes, parmi lesquelles nous pouvons citer [JL00], ont l'avantage d'être extrêmement simples d'utilisation mais l'arrêt de la transmission du signal utile peut ne pas être possible et généralement n'est pas souhaitable.

Il est également courant de se baser sur la redondance des composants électroniques, comme [ECM11] qui propose l'ajout d'un échantillonneur supplémentaire utilisé pour comparer la sortie de chaque voie et permettre une calibration en arrière plan. Ces méthodes sont courantes dans la communauté circuit et conduisent à des résultats intéressants. Néanmoins, de la même manière que les méthodes utilisant des séquences d'apprentissage, la redondance des équipements peut être pénalisante pour le fonctionnement du système, en termes de consommation de puissance et de masse des circuits. D'autres méthodes proposent l'intégration de la calibration dans des stratégies de *Built-In Self Test (BIST)* [DVdSR13] au moment de la conception du circuit. Il est néanmoins préférable d'utiliser des méthodes en ligne permettant de suivre les variations des paramètres au cours du temps.

L'essentiel de la littérature consacrée à la correction de la désynchronisation est donc tournée vers l'étude de méthodes les plus générales possibles, aveugles et se déroulant en arrière plan, et nous pouvons citer [EGE04, EGE05, JFS⁺04, DW09] ou encore [HL06] pour 2 échantillonneurs entrelacés et [HL07] étendus pour 4 échantillonneurs. Ces méthodes ont l'avantage de pouvoir être utilisées sans nécessiter l'arrêt du système et exploitent des propriétés comme la stationnarité du

signal [SRM07] ou le *Pseudo-Aliasing* [MYFI13] qui est obtenu conjointement avec le signal résiduel par une transformée d'Hadamard suivi d'un filtre dérivateur. Le *Pseudo-Aliasing* permet de corriger le signal résiduel distordu par les erreurs de gain et de désynchronisation et ainsi d'éliminer l'*aliasing*. Néanmoins, ces méthodes se basent quasi systématiquement sur une modélisation déterministe d'un signal et en bande de base, excluant de fait l'application à des signaux aléatoires passe-bande qui nous intéressent pour les télécommunications.

Pour des raisons de souplesse dans la conception des CAN entrelacés, il peut être intéressant de ne pas chercher à corriger ces erreurs de synchronisation mais de les estimer et d'en tenir compte dans les traitements suivants, notamment la reconstruction du signal qui s'effectue de manière numérique [EGE04, JFS⁺04, JL00]. Nous développerons dans le chapitre 4 de cette thèse des méthodes d'estimation du décalage entre les voies d'un convertisseur entrelacé soumis à de la désynchronisation temporelle. Nous pourrions utiliser cette estimation du décalage lors de la reconstruction du signal selon un schéma d'échantillonnage non uniforme sans correction préalable de la désynchronisation.

2.6 Bilan

Dans ce chapitre, nous avons présenté des généralités liées au contexte des télécommunications par satellite. Nous avons ensuite dégagé des problématiques au niveau du récepteur présenté sous forme d'un schéma simplifié. Une première problématique est la réjection d'interférences voisines et la sélection de sous-bandes fréquentielles, qui interviennent dans un contexte multiutilisateurs. Une autre problématique concerne la création du signal analytique qui est un outil omniprésent en réception pour effectuer les traitements de manière simplifiée en se ramenant à un signal à bande fréquentielle limitée aux fréquences positives. Enfin, il est important de s'intéresser aux dispositifs d'échantillonnage et nous avons décidé de considérer un type particulier appelée convertisseur entrelacé qui est sujet à des imperfections conduisant à une distorsion du signal.

En lien avec les éléments théoriques présentés dans le chapitre 1, l'objectif est de mettre en place un échantillonnage non uniforme dans le contexte des télécommunications en discutant de divers schémas candidats. Le PNS est le schéma que nous avons sélectionné car, outre ses propriétés intéressantes en

termes de simplicité, d'application aux signaux passe-bande et de souplesse, nous allons montrer qu'il permet une reconstruction du signal à laquelle nous pouvons ajouter des fonctionnalités répondant aux problématiques listées ci-dessus. Cet ajout passe par l'intégration d'un filtre conjoint comme nous le détaillons dans le chapitre 3. Par ailleurs, la structure du PNS trouve une application naturelle dans la modélisation des convertisseurs entrelacés soumis à des défauts de désynchronisation. Nous présentons dans le chapitre 4 des méthodes supervisée et aveugle d'estimation de la désynchronisation basées sur une modélisation PNS de ces convertisseurs.

CHAPITRE 3

Échantillonnage Périodique Non Uniforme pour les Télécommunications

Sommaire

3.1	Introduction	77
3.2	Préambule : Isométrie fondamentale	78
3.3	Reconstruction PNS2 dans un cadre aléatoire	79
3.4	Reconstruction et filtrage conjoints	85
3.5	Ajout de fonctionnalités orientées vers les télécommunications	88
3.5.1	Formules de reconstruction à haute vitesse de convergence	88
3.5.2	Filtrage passe-bande généralisé : sélection d'une sous-bande fréquentielle	90
3.5.3	Rejet des interférences	101
3.5.4	Signal analytique	108
3.6	Généralisation à un positionnement de bande quelconque	111
3.7	Bilan	116

3.1 Introduction

L'échantillonnage périodique non uniforme (PNS) est un schéma d'échantillonnage basé sur l'entrelacement de séquences uniformes qui a été étudié dans la littérature [Koh53, Lin59, VSW91] pour son application aux signaux passe-bande. En effet, lorsque le signal passe-bande est modélisé en deux bandes symétriques comme nous l'avons présenté précédemment au paragraphe 1.2.3, l'entrelacement de deux séquences uniformes garantit la reconstruction sans erreur du signal pour une fréquence d'échantillonnage minimale qui ne dépend pas de la position de la bande spectrale du signal. Ces formules de reconstruction PNS2 ont été développées dans un cadre déterministe par Kohlenberg [Koh53] et ont été ensuite reprises et appliquées dans de nombreux contextes.

Le contexte des télécommunications de notre étude impliquant un modèle passe-bande pour les signaux, nous avons été amenés à nous intéresser à ce schéma d'échantillonnage. Cependant, notre modèle de signal étant aléatoire, les démonstrations faites dans le cadre déterministe ne s'appliquent plus. Nous proposons donc ici l'utilisation du schéma d'échantillonnage PNS2 dans le cadre des signaux aléatoires en nous basant sur le formalisme développé dans les travaux de Lacaze [Lac05a, Lac05b, Lac09]. Ce formalisme permet l'utilisation rigoureuse du PNS2 dans un cadre aléatoire grâce à un schéma de reconstruction basé sur des filtres.

Nous présentons dans ce chapitre des modifications de la reconstruction PNS2 basées sur l'ajout d'un filtrage, permettant d'en améliorer les performances et d'obtenir des fonctionnalités supplémentaires. Nous détaillons des exemples pratiques permettant de répondre à des problématiques liées aux télécommunications en considérant des opérations telles que la sélection de sous-bandes fréquentielles, le rejet d'interférences et la construction du signal analytique. Les formules de reconstruction associées sont développées sous l'hypothèse d'un positionnement particulier de la bande qui conduit à des expressions simplifiées. Nous précisons l'importance du suréchantillonnage qui permet l'utilisation de filtres possédant des propriétés de régularité croissantes. Nous présentons également une extension de ces formules au cas général dans lequel la bande spectrale du signal est positionnée de manière quelconque.

3.2 Préambule : Isométrie fondamentale

Nous présentons ici l'isométrie fondamentale entre espaces de Hilbert qui nous a permis de développer les formules de reconstruction PNS2. Cet outil théorique simplifie grandement les démonstrations car il offre la possibilité de raisonner à partir d'exponentielles complexes en liant l'espace d'appartenance du processus aléatoire étudié à un espace de fonctions que nous allons présenter.

Définissons tout d'abord l'espace de Hilbert \mathbf{H} engendré par le processus aléatoire $\mathbf{X} = \{x(t), t \in \mathbb{R}\}$. Cet espace représente l'ensemble des combinaisons linéaires de \mathbf{X} et il est muni du produit scalaire [CL66, Lac00, Lac05b] :

$$\langle x(t), x(t') \rangle_{\mathbf{H}} = \mathbb{E} [x(t)x^*(t')] = R_x(t - t') = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi f(t-t')} S_x(f) df \quad (3.1)$$

Définissons ensuite $\mathcal{L}_{S_x}^2$ l'espace des fonctions h qui sont telles que $\int_{\mathbb{R}} [|h|^2 S_x](f) df < \infty$ où $S_x(f)$ représente la densité spectrale de \mathbf{X} . Cet espace $\mathcal{L}_{S_x}^2$ est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire défini par [CL66, Lac00, Lac05b] :

$$\langle g, h \rangle_{\mathbf{H}} = \int_{-\infty}^{+\infty} [gh^* S_x](f) df \quad (3.2)$$

Nous pouvons définir \mathbf{H} le sous-espace de $\mathcal{L}_{S_x}^2$ qui est engendré par l'exponentielle complexe $\{e^{2i\pi ft}, t \in \mathbb{R}\}$. Intéressons-nous à la correspondance $\mathcal{I}_{\mathbf{X}}$ entre le processus \mathbf{X} et l'exponentielle complexe qui est définie par :

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{I}_{\mathbf{X}}} e^{2i\pi ft}. \quad (3.3)$$

Il a été démontré que $\mathcal{I}_{\mathbf{X}}$ est une isométrie [CL66, Lac05b] définie par les relations :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} = \{y(t), t \in \mathbb{R}\}, \mathbf{Z} = \{z(t), t \in \mathbb{R}\} \in \mathbf{H} ; g, h \in \mathbf{H} \\ \left\{ \begin{array}{l} y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{I}_{\mathbf{X}}} g \\ z(t) \xleftrightarrow{\mathcal{I}_{\mathbf{X}}} h \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}[y(t)z^*(t)] = \int_{\mathbb{R}} [gh^* S_x](f) df \\ \mathbf{E}[|y(t) - z(t)|^2] = \int_{\mathbb{R}} [|g - h|^2 S_x](f) df \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.4)$$

L'isométrie fondamentale permet de remplacer des calculs de produits scalaires entre variables aléatoires, c'est-à-dire d'espérances mathématiques, par des calculs d'intégrales impliquant l'exponentielle complexe et ainsi d'utiliser l'analyse de Fourier comme outil mathématique. Par ailleurs, notons que la relation 3.4 permet de retrouver l'expression du théorème de Wiener-Khintchine (1.3) en prenant $\mathbf{Y} = \{x(t), t \in \mathbb{R}\}$, $\mathbf{Z} = \{x(t - \tau), t \in \mathbb{R}\}$, $g(t) = e^{2i\pi ft}$ et $h(t) = e^{2i\pi f(t - \tau)}$ et donc $\mathbf{E}[x(t)x^*(t - \tau)] = \int_{\mathbb{R}} [e^{2i\pi f\tau} S_x](f) df$.

3.3 Reconstruction PNS2 dans un cadre aléatoire

La reconstruction PNS2 dans le cadre des processus aléatoires a été étudiée par Lacaze [Lac05b, Lac05a, Lac09] qui a déduit un schéma de reconstruction à base de filtres linéaires définis à partir du spectre du signal. Nous détaillons ici la genèse de ce schéma sur lequel nous nous baserons par la suite pour présenter nos propositions de reconstruction améliorée.

Nous utilisons un modèle de signal $\mathbf{X} = \{x(t), t \in \mathbb{R}\}$ défini comme un processus aléatoire stationnaire selon la définition qui en a été faite dans le chapitre 1. Il convient tout d'abord de préciser

que la méthode de reconstruction présentée a été développée sous l'hypothèse d'un positionnement particulier du support spectral du signal. Cette hypothèse conduit à des simplifications dans les formules de reconstruction. Il est toutefois possible de généraliser le raisonnement à un support spectral quelconque et nous présenterons cette généralisation à la fin de ce chapitre.

Nous considérons des fréquences normalisées et nous supposons que la densité spectrale du signal est bornée et comprise entre une fréquence minimale f_{\min} et une fréquence maximale f_{\max} pour la partie positive (respectivement $-f_{\max}$ et $-f_{\min}$ pour la partie négative). Ces fréquences étant supposées normalisées, nous considérons un indice $k \in \mathbb{Z}$ fixé qui nous permet de définir ces limites fréquentielles selon :

$$k - \frac{1}{2} \leq f_{\min} \leq f_{\max} \leq k + \frac{1}{2}. \quad (3.5)$$

En d'autres termes, la densité spectrale de puissance du processus notée $S_x(f)$ a un support contenu dans la $k^{\text{ème}}$ bande de Nyquist $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}(k)$ définie en termes de fréquences normalisées par :

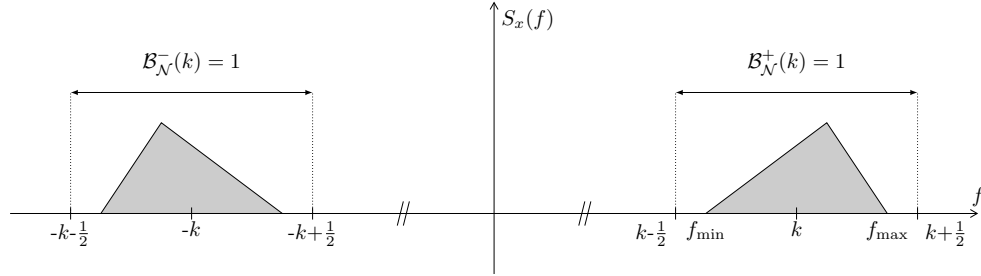
$$\mathcal{B}_{\mathcal{N}}(k) = \underbrace{\left(-k - \frac{1}{2}, -k + \frac{1}{2}\right)}_{\mathcal{B}_{\mathcal{N}}^-(k)} \cup \underbrace{\left(k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)}_{\mathcal{B}_{\mathcal{N}}^+(k)}. \quad (3.6)$$

Les inégalités extrêmes dans l'équation (3.5) deviendront des égalités dans le cas où le signal occupe la totalité de la bande de Nyquist en question. Dans ce cas, la fréquence minimale d'échantillonnage est la fréquence de Landau. Le cas contraire correspond à du suréchantillonnage qui pourra être exploité pour proposer des formules améliorées.

Le signal \mathbf{X} est échantillonné grâce à un schéma d'échantillonnage PNS2. Étant donné que nous travaillons en fréquences normalisées dans une bande de Nyquist de largeur égale à 1, nous choisissons une fréquence d'échantillonnage $f_e = 1$ sur chaque voie du PNS2, ce qui nous permet de respecter le critère de Landau. Nous formons ainsi les deux séquences uniformes $\mathbf{X}_0 = \{x(n), n \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathbf{X}_{\Delta} = \{x(n + \Delta), n \in \mathbb{Z}\}$, décalées de $\Delta \in]0, 1[$ l'une par rapport à l'autre.

Nous souhaitons reconstruire à partir de ces deux séquences d'échantillons la meilleure estimation $\tilde{\mathbf{X}}$ du processus original \mathbf{X} :

$$\tilde{x}(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[\sum_{n=-N}^N r_n^{(0)}(t)x(n) + \sum_{n=-N}^N r_n^{(\Delta)}(t)x(n + \Delta) \right] \quad (3.7)$$

FIGURE 3.1 – Densité spectrale du signal contenue dans la $k^{\text{ème}}$ bande de Nyquist

au sens du minimum de l'erreur quadratique de reconstruction $\sigma_{t,\Delta}^2$ définie par :

$$\sigma_{t,\Delta}^2 = \mathbb{E} \left[|x(t) - \tilde{x}(t)|^2 \right]. \quad (3.8)$$

$r_n^{(0)}(t)$ et $r_n^{(\Delta)}(t)$ désignent les fonctions de reconstruction.

Les séquences \mathbf{X}_0 et \mathbf{X}_Δ engendrent respectivement les sous-espaces de Hilbert \mathbf{H}_0 et \mathbf{H}_Δ de \mathbf{H} . Dans ce contexte, la meilleure estimation $\tilde{\mathbf{X}}$ est donc définie par la projection orthogonale de \mathbf{X} sur la somme des deux sous-espaces précédents [Lac10] :

$$\tilde{x}(t) = \text{pr}_{\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_\Delta} x(t) \quad (3.9)$$

c'est-à-dire que $\tilde{\mathbf{X}}$ est la combinaison linéaire d'échantillons issus des deux séquences qui est la plus proche de \mathbf{X} au sens de l'erreur quadratique moyenne.

Le problème réside dans le fait que les sous-espaces \mathbf{H}_0 et \mathbf{H}_Δ ne sont pas orthogonaux en général et la projection sur leur somme ne correspond pas à la somme des projections. Il faut donc construire le sous-espace \mathbf{K} complémentaire orthogonal de \mathbf{H}_0 dans $\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_\Delta$ tel que :

$$\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_\Delta = \mathbf{H}_0 \oplus \mathbf{K} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{K}, \quad \mathbf{H}_0 \perp \mathbf{K} \quad (3.10)$$

ce qui nous permet de pouvoir décomposer la projection précédente en :

$$\tilde{x}(t) = \text{pr}_{\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_\Delta} x(t) = \text{pr}_{\mathbf{H}_0 + \mathbf{K}} x(t) = \text{pr}_{\mathbf{H}_0} x(t) + \text{pr}_{\mathbf{K}} x(t). \quad (3.11)$$

Notons les résultats de ces deux dernières projections orthogonales sous la forme des séquences $\tilde{\mathbf{X}}_0 = \{\tilde{x}_0(t), t \in \mathbb{R}\}$ et $\tilde{\mathbf{X}}_K = \{\tilde{x}_K(t), t \in \mathbb{R}\}$ avec $\tilde{x}_0(t) = \text{pr}_{\mathbf{H}_0} x(t)$ et $\tilde{x}_K(t) = \text{pr}_{\mathbf{K}} x(t)$.

Soit la suite $\mathbf{D} = \{D_n, n \in \mathbb{Z}\}$ définie par :

$$D_n = x(n + \Delta) - \mu_\Delta[\mathbf{X}_0](n) \quad (3.12)$$

où μ_Δ représente le filtre linéaire invariant utilisé pour filtrer la séquence d'échantillons \mathbf{X}_0 et dont la fonction de transfert s'écrit :

$$\mu_\Delta(f) = e^{2i\pi f\Delta} \frac{S_\Delta}{S_0}(f) \quad (3.13)$$

avec $S_u(f)$, représentant le spectre replié de \mathbf{X} , qui est défini pour $f \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $u \in \mathbb{R}$ par :

$$S_u(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi nu} S_x(f + n) \quad (3.14)$$

Notons que $S_0(f)$ représente la densité spectrale de puissance des séquences d'échantillons \mathbf{X}_0 et \mathbf{X}_Δ . Nous avons alors [Lac05b] :

$$\langle D_n, x(k) \rangle_{\mathbf{H}} = \mathbb{E}[D_n x^*(k)] = 0 \quad (3.15)$$

ce qui montre que la suite \mathbf{D} est orthogonale à \mathbf{H}_0 . De plus, d'après (3.12) nous avons :

$$x(n + \Delta) = D_n + \mu_\Delta[\mathbf{X}_0](n). \quad (3.16)$$

Nous pouvons en déduire que n'importe quel élément de \mathbf{H}_Δ correspond à la somme d'un élément de la suite \mathbf{D} et d'un élément de \mathbf{H}_0 . La suite \mathbf{D} engendre donc le sous-espace \mathbf{K} complémentaire orthogonal à \mathbf{H}_0 , et nous obtenons la décomposition souhaitée :

$$\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_\Delta = \mathbf{H}_0 \oplus \mathbf{K}. \quad (3.17)$$

Les deux séquences \mathbf{D} et \mathbf{X}_0 sont orthogonales et forment donc une base de projection pour le processus à reconstruire \mathbf{X} . Afin d'exprimer cette projection orthogonale (3.11) en termes de deux filtres linéaires invariants μ_t et ψ_t dont les sorties sont les séquences $\tilde{\mathbf{X}}_0$ et $\tilde{\mathbf{X}}_K$, nous écrivons les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[(x(t) - \tilde{x}_0(t))x_0^*(k)] = 0 \\ \mathbb{E}[(x(t) - \tilde{x}_K(t))D_k^*] = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Après développement de ces expressions grâce à l'isométrie fondamentale (3.4), nous obtenons les fonctions de transfert de μ_t et ψ_t , définies sur $f \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ respectivement en généralisant μ_Δ (3.13) pour $t \in \mathbb{R}$ et par [Lac10] :

$$\psi_t(f) = e^{2i\pi f(t-\Delta)} \frac{S_0 S_{t-\Delta} - S_\Delta^* S_t}{S_0^2 - |S_\Delta|^2}(f). \quad (3.19)$$

Ce schéma de reconstruction est présenté sur la figure 3.2a. Il est qualifié de schéma orthogonal étant donné que le filtre μ_Δ génère la séquence \mathbf{D} , orthogonale à \mathbf{X}_0 .

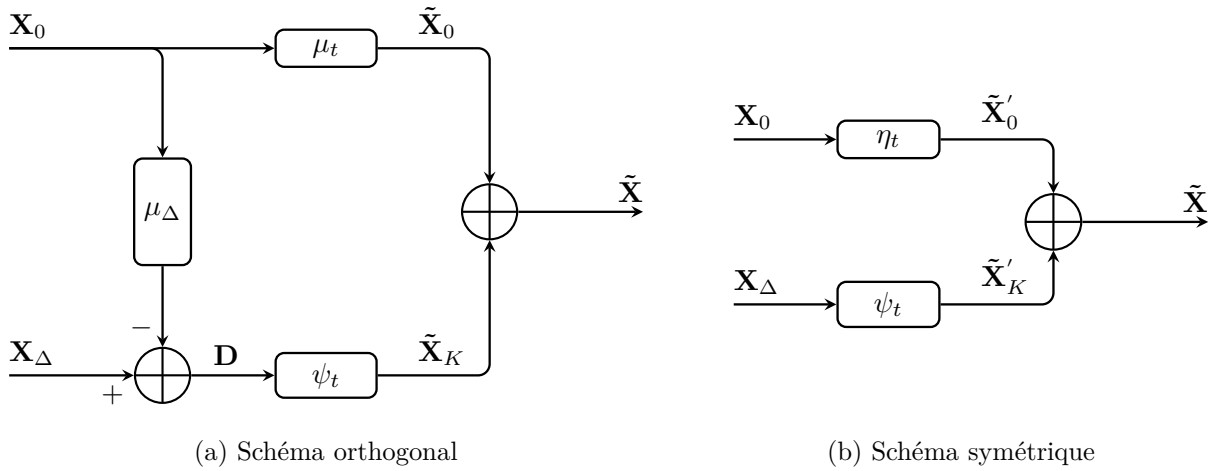


FIGURE 3.2 – Schémas équivalents de reconstruction PNS2 dans le cadre aléatoire

En remarquant que l'estimation $\tilde{\mathbf{X}}$ obtenue en sortie du schéma orthogonal s'exprime par :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{X}} &= \mu_t[\mathbf{X}_0] + \psi_t[\mathbf{D}] \\ &= \mu_t[\mathbf{X}_0] + \psi_t[\mathbf{X}_\Delta - \mu_\Delta[\mathbf{X}_0]] \\ &= (\mu_t - \mu_\Delta \psi_t)[\mathbf{X}_0] + \psi_t[\mathbf{X}_\Delta] \end{aligned} \quad (3.20)$$

il est possible de définir un schéma de reconstruction équivalent dit symétrique par l'introduction d'un filtre η_t dont la fonction de transfert est définie sur $f \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ par :

$$\eta_t(f) = [\mu_t - \mu_\Delta \psi_t](f) = e^{2i\pi f t} \frac{S_0 S_t - S_\Delta S_{t-\Delta}}{S_0^2 - |S_\Delta|^2}(f). \quad (3.21)$$

Les sorties des filtres η_t et ψ_t sont notées respectivement $\tilde{\mathbf{X}}'_0 = \{\tilde{x}'_0(t), t \in \mathbb{R}\}$ et $\tilde{\mathbf{X}}'_K = \{\tilde{x}'_K(t), t \in \mathbb{R}\}$. En considérant que les fonctions de transfert des filtres η_t et ψ_t sont intégrables sur leur intervalle

de définition, une décomposition en séries de Fourier existe et l'isométrie fondamentale $\mathcal{I}_{\mathbf{X}}$ (3.3) conduit aux relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_t(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n^{(0)}(t) e^{2i\pi f n} \xleftrightarrow{\mathcal{I}_{\mathbf{X}}} \tilde{x}'_0(t) = \eta_t[\mathbf{X}_0] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n^{(0)}(t) x(n), \\ \psi_t(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n^{(\Delta)}(t) e^{2i\pi f n} \xleftrightarrow{\mathcal{I}_{\mathbf{X}}} \tilde{x}'_K(t) = \psi_t[\mathbf{X}_\Delta] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n^{(\Delta)}(t) x(n + \Delta). \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Le calcul de la décomposition en séries de Fourier des filtres η_t et ψ_t conduit aux fonctions $r_n^{(0)}(t)$ et $r_n^{(\Delta)}(t)$, $n \in \mathbb{Z}$ appelées fonctions de reconstruction. Nous avons finalement l'expression de l'estimation $\tilde{\mathbf{X}}$ sous la forme :

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}'_0(t) + \tilde{x}'_K(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n^{(0)}(t) x(n) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n^{(\Delta)}(t) x(n + \Delta). \quad (3.23)$$

Dans le cas d'un signal modélisé comme un processus passe-bande séparé en deux sous-bandes distinctes, [Lac09] a montré que ce schéma de reconstruction est sans erreur dans le cas de la prise en compte d'un nombre infini d'échantillons. La meilleure estimation $\tilde{\mathbf{X}}$ est donc égale au processus initial. Par ailleurs, dans ce cas de figure, en considérant un signal occupant la totalité de la bande de Nyquist d'indice k à laquelle il appartient (c'est-à-dire en l'absence de suréchantillonnage), il est possible de simplifier les expressions des filtres η_t et ψ_t qui dépendent en toute généralité de la densité spectrale du processus. Dans ce cas, seuls les termes $n = \pm k$ de (3.14) interviennent et on peut montrer que les fonctions de transfert des filtres se simplifient et ne dépendent plus de la densité spectrale du processus [Lac10]. Nous obtenons ainsi, après simplification, une reconstruction exacte qui s'écrit :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\sin [2\pi k(\Delta - t)]}{\sin [2\pi k\Delta]} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{sinc} [\pi(t - n)] x(n) \\ &\quad + \frac{\sin [2\pi kt]}{\sin [2\pi k\Delta]} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{sinc} [\pi(t - n - \Delta)] x(n + \Delta) \end{aligned} \quad (3.24)$$

sous la condition que $2k\Delta \notin \mathbb{Z}$, soit $\Delta \neq \frac{p}{2k}$, $p = 1, \dots, 2k - 1$ car nous avons fixé $\Delta \in]0, 1[$ par convention. Cette condition permet d'éviter l'annulation du dénominateur des fractions.

Cette formule fait apparaître un sinus cardinal pour reconstruire chaque séquence d'échantillons ainsi qu'une modulation dans la bande de Nyquist par le biais des fractions, indépendantes des échantillons, placées en facteur des deux sommes. Nous présentons maintenant une amélioration de cette

reconstruction permettant d'intégrer un filtrage lors de la reconstruction du signal. Nous l'utiliserons notamment pour intégrer des fonctionnalités utiles pour des applications en télécommunications, ainsi que pour améliorer la vitesse de convergence de ces formules.

3.4 Reconstruction et filtrage conjoints

En généralisant le raisonnement détaillé dans la partie précédente, il est possible de réaliser l'opération de reconstruction du signal de manière conjointe avec une opération de filtrage dans le cadre de l'utilisation d'un schéma d'échantillonnage PNS2 [Lac12]. Ainsi, le signal reconstruit peut être défini comme le résultat d'une opération de filtrage et, en choisissant des propriétés adaptées du filtre conjoint, il est possible d'insérer des opérations d'intérêt comme un filtrage passe-bande généralisé permettant d'effectuer une sélection de sous-bandes et un rejet d'interférences, de reconstruire le signal analytique ou bien d'améliorer la vitesse de convergence des formules de reconstruction.

Considérons pour cela \mathcal{H}_c un filtre analogique linéaire et invariant temporellement, que nous appellerons filtre conjoint, et dont la réponse impulsionnelle $h_c(t)$ et la fonction de transfert $H_c(f)$ sont données par :

$$H_c(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_c(u) e^{-2i\pi f u} du. \quad (3.25)$$

En appliquant ce filtre au processus \mathbf{X} , nous obtenons le processus $\mathbf{Y} = \mathcal{H}_c[\mathbf{X}]$ défini par :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_c(u) x(t - u) du. \quad (3.26)$$

Le principe de la reconstruction avec filtrage conjoint est de reconstruire le processus filtré \mathbf{Y} à partir des échantillons du processus \mathbf{X} distribués selon un schéma PNS2. Il convient de préciser que l'opération de filtrage analogique n'est que théorique. Elle n'intervient que dans les développements mathématiques conduisant aux formules de reconstruction améliorées. Ce filtrage n'apparaît finalement que sous une forme numérique intégrée à la formule de reconstruction, et ceci est bien évidemment préférable étant données les difficultés pour concevoir des filtres analogiques.

Afin de reconstruire \mathbf{Y} , nous cherchons donc la meilleure estimation $\tilde{\mathbf{Y}}$ au sens de l'erreur quadratique moyenne telle que :

$$\tilde{y}(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[\sum_{n=-N}^N r_n^{(0, H_c)}(t) x(n) + \sum_{n=-N}^N r_n^{(\Delta, H_c)}(t) x(n + \Delta) \right]. \quad (3.27)$$

Les fonctions de reconstruction dépendent maintenant de la forme du filtre conjoint en toute généralité et sont donc notées $r_n^{(0, H_c)}(t)$ et $r_n^{(\Delta, H_c)}(t)$ pour tenir compte de cette dépendance.

Il a été montré dans [Lac09] que l'on peut adapter l'isométrie fondamentale (3.3) pour la reconstruction de \mathbf{Y} :

$$y(t) = \mathcal{H}_c[x](t) \xleftrightarrow{\mathcal{I}_X} H_c(f) e^{2i\pi ft} \quad (3.28)$$

où $H_c(f)$ est la fonction de transfert du filtre \mathcal{H}_c introduite dans (3.25). Nous définissons alors $S_u^{H_c}(f)$ le spectre replié adapté de l'expression (3.14) et pondéré par la fonction de transfert $H_c(f)$ du filtre conjoint :

$$S_u^{H_c}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi nu} [S_x H_c](f + n). \quad (3.29)$$

Cette expression sera utilisée pour définir la généralisation des filtres présents dans le schéma de reconstruction (figure 3.2).

Ainsi, comme présenté dans [Lac12], il est possible d'adapter le schéma de reconstruction symétrique de la figure 3.2b, avec les fonctions de transfert de filtres $\eta_t^{H_c}$ et $\psi_t^{H_c}$, adaptés au filtre conjoint, de sorties respectives $\tilde{\mathbf{Y}}_0$ et $\tilde{\mathbf{Y}}_K$. Nous pouvons écrire les relations d'orthogonalité suivantes dans le cas de la reconstruction de \mathbf{Y} :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[(y(t) - \tilde{y}_0(t))x_0^*(k)] = 0, \\ \mathbb{E}[(y(t) - \tilde{y}_K(t))D_k^*] = 0. \end{cases} \quad (3.30)$$

Après développement de ces expressions grâce à l'isométrie fondamentale (3.4), nous obtenons les fonctions de transfert de $\eta_t^{H_c}$ et $\psi_t^{H_c}$ définies pour $f \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$\begin{cases} \eta_t^{H_c}(f) = e^{2i\pi ft} \frac{S_0 S_t^{H_c} - S_\Delta S_{t-\Delta}^{H_c}}{S_0^2 - |S_\Delta|^2}(f), \\ \psi_t^{H_c}(f) = e^{2i\pi f(t-\Delta)} \frac{S_0 S_{t-\Delta}^{H_c} - S_\Delta^* S_t^{H_c}}{S_0^2 - |S_\Delta|^2}(f). \end{cases} \quad (3.31)$$

En considérant le modèle de bande énoncé en (3.5), les expressions (3.31) peuvent se simplifier en considérant uniquement les indices $\pm k$ dans l'expression du spectre replié pondéré (3.29), avec k qui correspond à l'indice de la bande de Nyquist (3.6). Il est possible de montrer que la densité du processus n'intervient plus dans la définition des filtres $\eta_t^{H_c}$ et $\psi_t^{H_c}$ [Lac12] et nous avons :

$$\begin{cases} \eta_t^{H_c}(f) = ie^{2i\pi ft} \frac{H_c(f+k)e^{2i\pi k(t-\Delta)} - H_c(f-k)e^{-2i\pi k(t-\Delta)}}{2 \sin [2\pi k\Delta]}, \\ \psi_t^{H_c}(f) = ie^{2i\pi f(t-\Delta)} \frac{H_c(f-k)e^{-2i\pi kt} - H_c(f+k)e^{2i\pi kt}}{2 \sin [2\pi k\Delta]}. \end{cases} \quad (3.32)$$

Par ailleurs, de la même manière que dans (3.22), en considérant que les fonctions de transfert des filtres $\eta_t^{H_c}$ et $\psi_t^{H_c}$ sont intégrables sur leur intervalle de définition, il existe une décomposition en séries de Fourier que nous exprimons par :

$$\begin{cases} \eta_t^{H_c}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n^{(0, H_c)}(t) e^{-2i\pi fn}, \\ \psi_t^{H_c}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n^{(\Delta, H_c)}(t) e^{-2i\pi fn}. \end{cases} \quad (3.33)$$

Ceci nous permet d'exprimer les fonctions de reconstruction $r_n^{(0, H_c)}(t)$ et $r_n^{(\Delta, H_c)}(t)$:

$$\begin{cases} r_n^{(0, H_c)}(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \eta_t^{H_c}(f) e^{2i\pi f(t-n)}, \\ r_n^{(\Delta, H_c)}(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \psi_t^{H_c}(f) e^{2i\pi f(t-n)}. \end{cases} \quad (3.34)$$

A partir des expressions de $\eta_t^{H_c}$ et $\psi_t^{H_c}$ qui dépendent de la fonction de transfert $H_c(f)$ du filtre conjoint, via les termes $H_c(f \pm k)$ dans (3.32), nous calculons les deux intégrales ci-dessus par changement de variable pour ramener les bornes de l'intégrale dans la bande de définition du filtre $H_c(f)$. En l'occurrence, nous ferons une distinction entre le calcul pour la partie positive et le calcul pour la partie négative du filtre qui sont symétriques, puis nous ajouterons les résultats pour obtenir les fonctions de reconstruction $r_n^{(0, H_c)}(t)$ et $r_n^{(\Delta, H_c)}(t)$, auxquelles nous avons maintenant intégré le filtre conjoint \mathcal{H}_c . Finalement, d'après l'isométrie fondamentale (3.28), nous pourrions écrire :

$$\tilde{y}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n^{(0, H_c)}(t) x(n) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n^{(\Delta, H_c)}(t) x(n + \Delta) \quad (3.35)$$

qui conduit à une reconstruction sans erreur [Lac12]. Il est possible, moyennant le choix de filtres conjoints appropriés de proposer des solutions aux diverses problématiques développées dans le chapitre 2.

3.5 Ajout de fonctionnalités orientées vers les télécommunications

Dans le cadre de l'application aux télécommunications, il peut être intéressant de choisir le filtre conjoint de manière à intégrer des fonctionnalités utiles pour une chaîne de transmission. Nous détaillons ici diverses fonctionnalités à intégrer, en lien avec les problématiques présentées dans le chapitre 2, ainsi que les expressions explicites des fonctions de reconstruction associées. Ces fonctionnalités sont un filtrage passe-bande généralisé permettant la sélection de sous-bandes fréquentielles, le rejet d'interférences et la construction du signal analytique, problématiques que nous avons exposées dans le chapitre 2. Ces fonctionnalités seront combinées avec une amélioration de la convergence [VCL13, VCL⁺14] rendue possible par l'utilisation de filtre conjoint aux propriétés de régularité élevées. Cette amélioration de la convergence est intéressante en pratique en raison du nombre fini d'échantillons utilisés pour la reconstruction.

3.5.1 Formules de reconstruction à haute vitesse de convergence

Cet intérêt pour l'amélioration de la vitesse de convergence vient du fait que, dans les applications pratiques, la reconstruction du signal est effectuée à partir d'une fenêtre d'observation glissante contenant un nombre fini d'échantillons :

$$\tilde{y}(t) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} r_n^{(0,H_c)}(t)x(n) + \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} r_n^{(\Delta,H_c)}(t)x(n + \Delta) \quad (3.36)$$

Les formules de reconstruction exactes étant définies pour un nombre infini d'échantillons, la reconstruction n'est plus exacte pour un nombre fini d'échantillons et les formules doivent donc avoir une vitesse de convergence suffisante pour permettre de minimiser les erreurs liées à leur troncature. Il est possible d'améliorer la vitesse de convergence en modifiant l'expression des fonctions d'interpolation. [HT62, YT66] avaient proposé les premiers une amélioration de la vitesse de convergence (en bande de base néanmoins) grâce à une élévation à la puissance m du sinus cardinal. [Cam68] a étudié la convergence exponentielle de la reconstruction de fonctions à bande limitée définie comme la transformée de Fourier de distributions bornées, et [Nat86] a repris ce travail pour démontrer l'existence, sous hypothèse de suréchantillonnage, de fonctions de reconstruction \mathcal{C}^∞ généralisant la

reconstruction en sinus cardinal avec un taux de convergence exponentiel. Plus récemment [ST06] s'est appuyé sur l'utilisation de fonctions de classe Gevrey pour obtenir une convergence exponentielle, et a illustré cette convergence en utilisant des évaluations obtenues grâce à des expansions de Gabor tronquées. Nous pouvons également citer [DD03] qui s'est intéressé à l'amélioration de la convergence de la reconstruction de signaux quantifiés sur un nombre fini de bits par modulation Sigma-Delta ($\Sigma\Delta$), en démontrant l'existence de schémas de quantification permettant d'atteindre une convergence polynomiale.

Une méthode d'amélioration de la vitesse de convergence des formules de reconstruction PNS2 a été proposée dans [CL12a]. Elle s'appuie sur la définition d'un filtre conjoint plus régulier qu'un filtre rectangulaire [GW95, Zyg02]. En effet, si les formules issues d'un filtre rectangulaire souffrent d'un faible taux de convergence, elles le doivent aux discontinuités de la fonction de transfert qui entraînent un développement en série de Fourier avec une décroissance en n^{-1} [GW95, Zyg02].

Comme précédemment, le signal est modélisé comme un processus aléatoire \mathbf{X} dont la densité spectrale a pour support $\mathcal{B}_{\mathbf{X}} = (-f_{\max}, -f_{\min}) \cup (f_{\min}, f_{\max})$ avec $\mathcal{B}_{\mathbf{X}} \subset \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(k)$. Nous notons la largeur de bande $B = f_{\max} - f_{\min}$. Pour réaliser l'amélioration de la vitesse convergence, nous devons supposer qu'il est possible de définir des bandes de transition pour le filtre conjoint, de largeur respective B_{tr} de part et d'autre de la bande du signal, c'est-à-dire que nous devons supposer un suréchantillonnage et qu'il ne doit pas y avoir d'autres composantes fréquentielles dans la bande $\mathcal{B}_{\text{tr}} = (-f_{\max} - B_{\text{tr}}, -f_{\max}) \cup (-f_{\min}, -f_{\min} + B_{\text{tr}}) \cup (f_{\min} - B_{\text{tr}}, f_{\min}) \cup (f_{\max}, f_{\max} + B_{\text{tr}})$ qui représente l'ensemble des bandes de transition du filtre conjoint. Ainsi, nous pouvons définir une fonction de transfert du filtre conjoint avec les propriétés suivantes :

$$H_c(f) = \begin{cases} 1 & f \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}} \\ \text{quelconque} & f \in \mathcal{B}_{\text{tr}} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.37)$$

Ce comportement quelconque dans les bandes de transition peut être utilisé pour l'amélioration de la convergence en considérant des fonctions de transfert aux propriétés de régularité croissante [CL12a]. En effet, les termes d'un développement en séries de Fourier ont une décroissance qui

dépend de la régularité de la fonction [GW95, Zyg02]. En considérant une fonction de transfert continue (trapèze par exemple), la vitesse de convergence est en n^{-2} tandis qu'une fonction de transfert continue et dérivable à dérivée continue (cosinus surélevé par exemple) permet d'atteindre une vitesse de convergence en n^{-3} . Ces exemples seront détaillés dans la partie suivante.

Enfin, nous définissons un facteur de remplissage ρ qui représente le rapport entre la largeur de bande du filtre conjoint (comprenant donc les bandes de transition) et la largeur de bande du signal auquel le filtre est adapté :

$$\rho = \frac{B + 2B_{\text{tr}}}{B} \quad (3.38)$$

Ce facteur représente l'excès de bande couverte par le filtre à travers ses bandes de transition. L'application en télécommunications nécessite d'avoir ρ le plus proche de 1 pour limiter les pertes de bande utile.

Dans la suite, nous proposons de combiner cette amélioration de la convergence des formules à la sélection de sous-bande fréquentielle, en considérant des filtres conjoints plus généraux.

3.5.2 Filtrage passe-bande généralisé : sélection d'une sous-bande fréquentielle

3.5.2.1 Principe

Lorsque le signal \mathbf{X} considéré est placé de manière quelconque dans la bande de Nyquist $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}(k)$, il est intéressant de développer un filtre conjoint adapté à sa bande et ainsi d'intégrer une opération de filtrage passe-bande dans la reconstruction. Nous avons développé des formules de reconstruction généralisées dans le cas où f_{\min} et f_{\max} sont placés de manière quelconque [VCL13]. Ces formules permettent d'obtenir la reconstruction du signal sur une sous-bande fréquentielle $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$. Nous verrons par la suite que cette sélection fréquentielle peut être appliquée à la sélection de canaux, au rejet d'interférences ou à la construction du signal analytique.

Nous détaillons maintenant trois exemples de filtre conjoint permettant d'effectuer un filtrage passe-bande généralisé. Le premier représente un filtre rectangulaire, permettant de simuler le comportement classique des formules de reconstruction. Néanmoins, ce filtre donnant des formules de reconstruction à faible vitesse de convergence, il est intéressant d'essayer de définir des filtres qui

permettent d'obtenir des propriétés de convergence améliorées. Les deux autres filtres sont donc respectivement un filtre trapézoïdal et un filtre en cosinus surélevé, choisis pour leur simplicité et leurs propriétés de régularité croissante. Il est cependant tout à fait possible d'améliorer la convergence en choisissant des filtres aussi réguliers que souhaité, à l'aide par exemple de filtres définis par des fonctions polynomiales par morceau ou des filtres infiniment dérivables sur un support fini. Cependant, le calcul des séries de Fourier peut conduire alors à des expressions compliquées selon le filtre utilisé [Nat86, ST06] et les formules de reconstruction associées peuvent s'avérer difficile à mettre en œuvre en pratique. Le filtre trapézoïdal et le filtre en cosinus surélevé constituent donc un bon compromis entre complexité et amélioration de la convergence.

3.5.2.2 Filtre généralisé rectangulaire

Le filtre rectangulaire \mathcal{H}^R adapté à la bande du signal et ne présentant donc pas de bandes de transition est considéré à titre de référence. Bien que permettant la sélection d'une sous-bande fréquentielle, il correspond à une vitesse de convergence faible. Sa fonction de transfert définie par :

$$H_{f_{\min}, f_{\max}}^R(f) = \begin{cases} 1 & f \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}} = (-f_{\max}, -f_{\min}) \cup (f_{\min}, f_{\max}) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.39)$$

est représentée sur la figure 3.3.

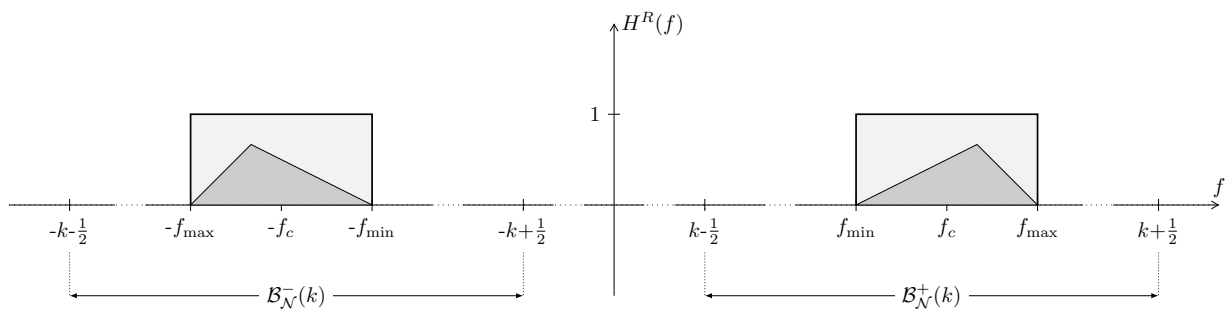


FIGURE 3.3 – Filtre rectangulaire conjoint

Après calcul des développements en séries de Fourier pour ce filtre généralisé, nous obtenons les

fonctions de reconstruction suivantes :

$$\begin{cases} r_n^{(0,H^R)}(t) = \frac{-B \sin [2\pi f_c(t-n) - 2\pi k\Delta]}{\sin [2\pi k\Delta]} \operatorname{sinc} [\pi B(t-n)] \\ r_n^{(\Delta,H^R)}(t) = \frac{B \sin [2\pi f_c(t-n-\Delta) + 2\pi k\Delta]}{\sin [2\pi k\Delta]} \operatorname{sinc} [\pi B(t-n-\Delta)] \end{cases} . \quad (3.40)$$

Le taux de convergence de cette reconstruction est faible (n^{-1}) d'après l'expression (3.40) : $r_n^{(0,H^R)}(t) \underset{n \rightarrow \infty}{\propto} \frac{1}{n}$ de par la présence du sinus cardinal. Cette faible convergence est due aux discontinuités de la fonction de transfert du filtre aux points $f = \pm f_{\min}$ et $f = \pm f_{\max}$ [GW95, Zyg02].

3.5.2.3 Filtre généralisé trapézoïdal

En tenant compte de la présence de bandes de transition, il est possible de définir un filtre continu, ce qui permet d'améliorer la convergence des formules de reconstruction. L'exemple le plus direct est un filtre trapézoïdal \mathcal{H}^T (illustré sur la figure 3.4), unitaire sur la bande du signal et possédant une bande de transition $B_{\text{tr}} > 0$ de part et d'autre. Nous indiquons ce filtre par f_{\min} , f_{\max} et B_{tr} car sa fonction de transfert dépend de ces trois paramètres :

$$H_{f_{\min}, f_{\max}, B_{\text{tr}}}^T(f) = \begin{cases} 1 & f \in \mathcal{B}_X \\ \frac{-f+f_{\max}}{B_{\text{tr}}} + 1 & f \in (f_{\max}, f_{\max} + B_{\text{tr}}) \\ \frac{f-f_{\min}}{B_{\text{tr}}} + 1 & f \in (f_{\min} - B_{\text{tr}}, f_{\min}) \\ \frac{-f-f_{\min}}{B_{\text{tr}}} + 1 & f \in (-f_{\min}, -f_{\min} + B_{\text{tr}}) \\ \frac{f+f_{\max}}{B_{\text{tr}}} + 1 & f \in (-f_{\max} - B_{\text{tr}}, -f_{\max}) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.41)$$

Nous rappelons que B_{tr} est choisi de manière à respecter :

$$k - \frac{1}{2} \leq f_{\min} - B_{\text{tr}} < f_{\min} \leq f_{\max} < f_{\max} + B_{\text{tr}} \leq k + \frac{1}{2}. \quad (3.42)$$

Après calcul des développements en séries de Fourier pour ce filtre généralisé, nous obtenons les

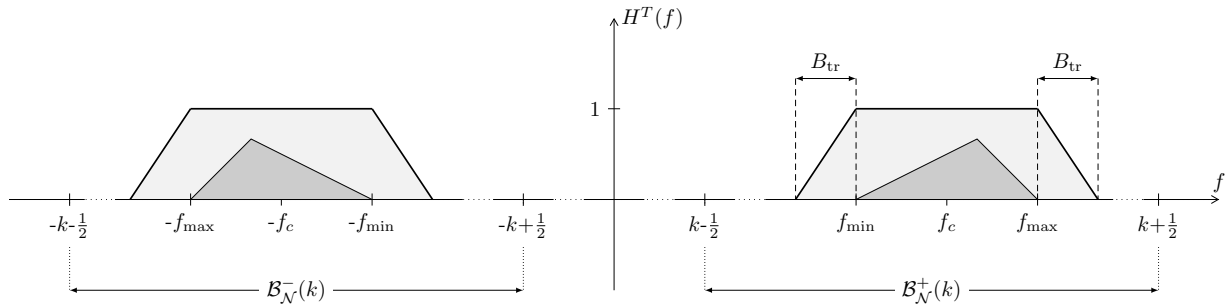


FIGURE 3.4 – Filtre trapézoïdal conjoint

fonctions de reconstruction suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_n^{(0,H^T)}(t) = -(B + B_{\text{tr}}) \frac{\sin [2\pi f_c(t - n) - 2\pi k\Delta]}{\sin [2\pi k\Delta]} \times \\ \quad \text{sinc} [\pi(B + B_{\text{tr}})(t - n)] \text{sinc} [\pi B_{\text{tr}}(t - n)] \\ r_n^{(\Delta,H^T)}(t) = (B + B_{\text{tr}}) \frac{\sin [2\pi f_c(t - n - \Delta) + 2\pi k\Delta]}{\sin [2\pi k\Delta]} \times \\ \quad \text{sinc} [\pi(B + B_{\text{tr}})(t - n - \Delta)] \text{sinc} [\pi B_{\text{tr}}(t - n - \Delta)] \end{array} \right. \quad (3.43)$$

Nous pouvons déduire de l'expression (3.43) le taux de convergence de cette nouvelle formule de reconstruction : $r_n^{(0,H^T)}(t) \underset{n \rightarrow \infty}{\propto} \frac{1}{n^2}$. Ce taux en n^{-2} vient de la présence des deux termes en sinus cardinal. Cette convergence vient du fait que la fonction de transfert du filtre est continue en tout point mais non dérivable aux points $f = \pm f_{\text{min}}$, $f = \pm f_{\text{max}}$, $f = \pm(f_{\text{min}} - B_{\text{tr}})$ et $f = \pm(f_{\text{max}} + B_{\text{tr}})$ [GW95, Zyg02]. Par ailleurs, l'analyse des fonctions $r_n^{(0,H^T)}(t)$ et $r_n^{(\Delta,H^T)}(t)$ lorsque $B_{\text{tr}} = 0$ nous permet de retrouver le cas d'un filtre généralisé rectangulaire (3.40) comme attendu.

3.5.2.4 Filtre généralisé en cosinus surélevé

Nous définissons également un filtre généralisé en cosinus surélevé \mathcal{H}^{CS} (illustré sur la figure 3.5), lui aussi unitaire sur la bande du signal et possédant une bande de transition $B_{\text{tr}} > 0$ de part et d'autre, avec cette fois-ci une propriété de continuité et de dérivabilité de la fonction de transfert en

tout point. Cette fonction de transfert est définie par :

$$H_{f_{\min}, f_{\max}, B_{\text{tr}}}^{CS}(f) = \begin{cases} 1 & f \in \mathcal{B}_X \\ \cos^2 \left[\frac{\pi}{2B_{\text{tr}}}(f - f_{\max}) \right] & f \in (f_{\max}, f_{\max} + B_{\text{tr}}) \\ \cos^2 \left[\frac{\pi}{2B_{\text{tr}}}(f - f_{\min}) \right] & f \in (f_{\min} - B_{\text{tr}}, f_{\min}) \\ \cos^2 \left[\frac{\pi}{2B_{\text{tr}}}(f + f_{\min}) \right] & f \in (-f_{\min}, -f_{\min} + B_{\text{tr}}) \\ \cos^2 \left[\frac{\pi}{2B_{\text{tr}}}(f + f_{\max}) \right] & f \in (-f_{\max} - B_{\text{tr}}, -f_{\max}) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.44)$$

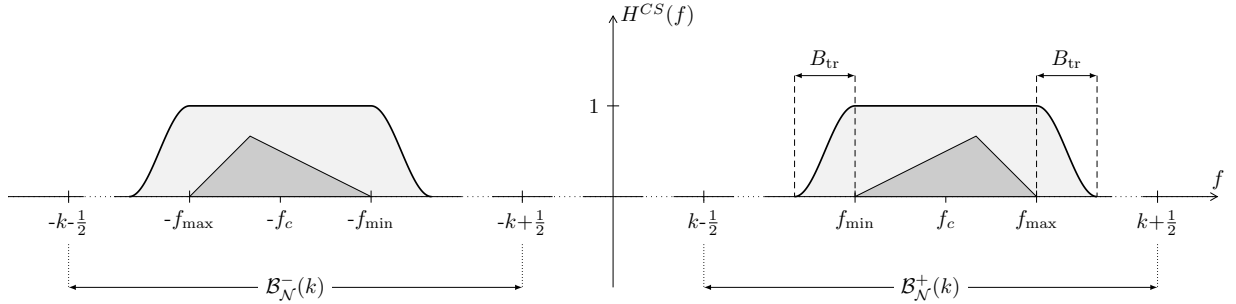


FIGURE 3.5 – Filtre en cosinus surélevé conjoint

Le calcul des développements en séries de Fourier pour ce filtre généralisé nous permet d'obtenir les fonctions de reconstruction suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_n^{(0, H^{CS})}(t) = \frac{\sin [2\pi f_c(t - n) - 2\pi k\Delta]}{2 \left[4B_{\text{tr}}^2(t - n)^2 - 1 \right] \sin [2\pi k\Delta]} \times \\ \quad (B \operatorname{sinc} [\pi B(t - n)] + (B + 2B_{\text{tr}}) \operatorname{sinc} [\pi(B + 2B_{\text{tr}})(t - n)]) \\ r_n^{(\Delta, H^{CS})}(t) = \frac{-\sin [2\pi f_c(t - n - \Delta) + 2\pi k\Delta]}{2 \left[4B_{\text{tr}}^2(t - n - \Delta)^2 - 1 \right] \sin [2\pi k\Delta]} \times \\ \quad (B \operatorname{sinc} [\pi B(t - n - \Delta)] + (B + 2B_{\text{tr}}) \operatorname{sinc} [\pi(B + 2B_{\text{tr}})(t - n - \Delta)]) \end{array} \right. \quad (3.45)$$

Nous pouvons déduire de l'expression (3.45) le taux de convergence de cette nouvelle formule de reconstruction : $r_n^{(0, H^{CS})}(t) \underset{n \rightarrow \infty}{\propto} \frac{1}{n^3}$. Ce taux en n^{-3} vient de la présence du terme en sinus cardinal (n^{-1}) multiplié par la fraction (n^{-2}). Cette convergence vient du fait que la fonction de transfert du

filtre est continue, dérivable et à dérivée continue en tout point [GW95, Zyg02]. Par ailleurs, de la même manière que pour le filtre trapézoïdal, les fonctions de reconstruction sont identiques à celles pour un filtre rectangulaire lorsque $B_{\text{tr}} = 0$, comme attendu.

3.5.2.5 Analyse des performances

Nous présentons dans cette partie les résultats des simulations menées pour valider le comportement des formules de reconstruction généralisées proposées. Outre l'ajout de fonctionnalités, nous montrons qu'il est toujours possible de bénéficier de l'amélioration de la convergence.

Les performances de reconstruction sont évaluées grâce à l'utilisation de l'Erreur Quadratique Moyenne Normalisée (EQMN) définie dans (1.31). Ce critère permet d'étudier les performances indépendamment de la puissance du signal comme le montre la figure 3.6. En pratique, la reconstruction est effectuée sur un petit intervalle appelé fenêtre de reconstruction situé autour du centre de la fenêtre d'observation. C'est en effet dans cette zone, qui exclut les effets de bords, que les performances sont les meilleures. Le signal peut être reconstruit en tout point par glissement de la fenêtre d'observation et donc de la fenêtre de reconstruction. Nous estimons le critère EQMN sur la fenêtre de reconstruction en moyennant sur un nombre n_{ite} d'itérations ($n_{\text{ite}} = 1000$ dans notre cas) correspondant à plusieurs réalisations du signal.

Le signal de base utilisé dans les simulations est un bruit gaussien à bande limitée modélisé dans la 3^{ème} bande de Nyquist ($k = 3$) avec une puissance moyenne $P_{\text{moy}} = 1$. Les simulations ont été effectuées pour une fenêtre d'observation de $N = 100$ échantillons sur chaque voie avec un décalage $\Delta = 0.4167$ (ce choix sera expliqué dans la partie 3.5.2.5) et un facteur de remplissage $\rho = 2$. Par ailleurs, nous prenons $B = 0.2$, $B_{\text{tr}} = 0.1$ et $f_c = 2.7$. Lors des simulations, nous serons amenés à faire varier l'un de ces paramètres en laissant les autres fixés à ces valeurs de référence, ceci afin de tester indépendamment l'influence de chacun sur les performances de reconstruction.

L'EQMN sera tracée en fonction de divers paramètres du système. Nous présentons tout d'abord l'analyse des performances en fonction du nombre d'échantillons présents dans la fenêtre d'observation pour montrer l'amélioration de la vitesse de convergence puis nous évaluerons l'EQMN en fonction d'autres paramètres du système qui sont : la position de la fréquence centrale f_c de la bande du signal,

sa largeur de bande B , la largeur des bandes de transition B_{tr} (et donc d'une manière indirecte, le facteur de remplissage ρ qui est lié à B et B_{tr}), le numéro de la bande de Nyquist k et le décalage Δ entre les deux voies.

Nous présentons le code couleur utilisé de façon similaire dans toutes les simulations. L'EQMN est tracée en rouge pour le filtre rectangulaire, en bleu pour le filtre trapézoïdal et en noir pour le filtre en cosinus surélevé.

Influence de la taille de fenêtre

La figure 3.7 présente les résultats de tracé de l'EQMN en fonction du nombre d'échantillons N utilisée sur chaque voie du PNS2. Nous considérons la reconstruction du signal pour les trois formules calculées précédemment afin de montrer l'amélioration de la convergence.

Pour chaque courbe représentant un filtre conjoint, les performances augmentent lorsque la taille de la fenêtre d'observation augmente. Par ailleurs, nous constatons bien que la vitesse de convergence a été améliorée par le filtre trapézoïdal car la courbe descend plus vite en termes d'EQMN lorsque N augmente et, de la même manière, le filtre en cosinus surélevé augmente encore sensiblement la vitesse de convergence.

Influence de la position du signal

La figure 3.8 présente le tracé de l'EQMN en fonction de la position de la fréquence centrale f_c du signal, qui balaye les fréquences entre $k - \frac{1}{2} + (B_{tr} + \frac{B}{2}) = 2.7$ et $k + \frac{1}{2} - (B_{tr} + \frac{B}{2}) = 3.3$. Nous constatons que la position du signal à l'intérieur de la bande de Nyquist n'impacte pas sur les performances, à B et B_{tr} fixées, ce qui est cohérent par rapport au comportement attendu.

Influence de la largeur des bandes de transition du filtre conjoint

La figure 3.9 présente le tracé de l'EQMN en fonction de la largeur de la bande de transition B_{tr} qui augmente, pour une largeur de bande fixe $B = 0.2$. Nous avons ici considéré que le signal est centré sur $f_c = 3$ afin de se centrer à l'intérieur de la bande de Nyquist. Cela permet de se donner le plus de marge possible afin d'augmenter B_{tr} étant donné que les bandes de transition sont symétriques.

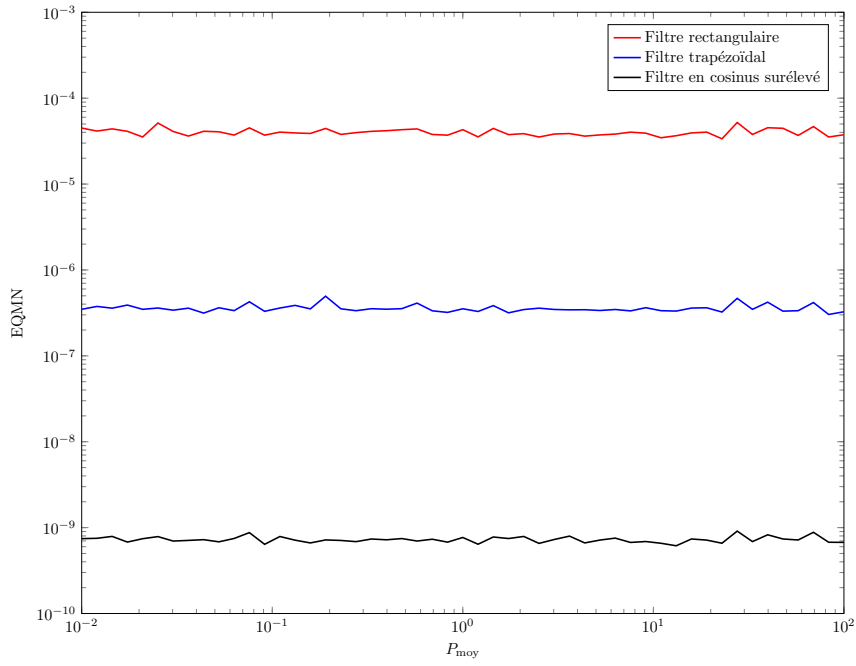


FIGURE 3.6 – Influence de la puissance moyenne du signal

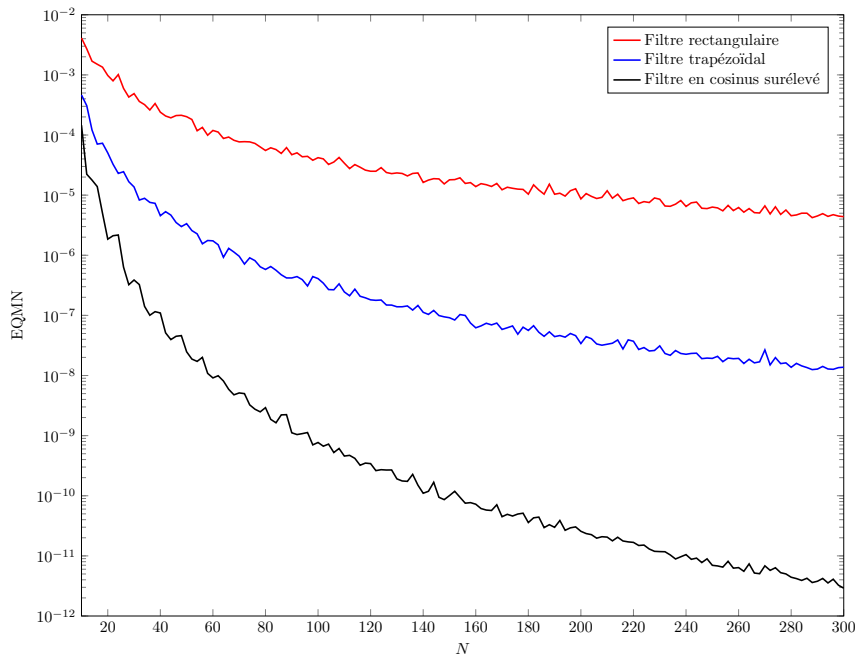


FIGURE 3.7 – Influence de la taille de la fenêtre de reconstruction sur les performances

La bande de transition varie entre une valeur minimale fixée arbitrairement à $B_{tr} = 0.01$ et une valeur maximale de $B_{tr} = 0.33$. En l'absence de signaux d'interférences à proximité de la bande \mathcal{B}_X du signal, l'augmentation de la bande de transition B_{tr} entraîne une augmentation des performances de reconstruction. Il est intéressant de choisir la bande de transition du filtre conjoint aussi large que possible pour avoir les meilleures performances possibles, en fonction bien entendu du facteur de remplissage ρ et du facteur de suréchantillonnage θ que nous pouvons tolérer. Il faudra trouver un compromis entre amélioration de la vitesse de convergence et choix de la largeur de la bande de transition qu'il sera possible d'utiliser. L'influence de signaux d'interférence dans les performances de la reconstruction est considéré dans la partie 3.5.3.

Influence du décalage entre les voies du PNS2

La figure 3.10 présente le tracé de l'EQMN en fonction de la valeur du décalage Δ entre les voies du PNS2. Théoriquement, ce paramètre peut être choisi de manière quelconque en dehors d'un nombre fini de valeurs définies par $\Delta = \frac{p}{2k}$, $p = 1, \dots, 2k - 1$ (tracées en pointillés sur la figure 3.10). Nous constatons que la valeur du décalage a une influence sur l'EQMN et que toutes les valeurs en dehors des valeurs interdites ne donnent pas les mêmes performances. Cette influence s'explique numériquement car une valeur de Δ proche d'une valeur interdite entraîne des problèmes dans le calcul des formules de reconstruction puisque le dénominateur des fractions tend alors vers 0 en raison du terme en $\sin[2\pi k\Delta]$. Cela a pour effet de causer des divergences au niveau de la reconstruction et donc une augmentation de l'erreur de reconstruction.

L'erreur de reconstruction est minimale pour les valeurs de Δ les plus éloignées des valeurs interdites, soit :

$$\Delta = \frac{1}{4k} + \frac{p}{2k}, \quad p = 0, \dots, 2k - 1 \quad (3.46)$$

avec p choisi de manière quelconque. Nous préconisons donc le choix de ces valeurs dans un schéma PNS2 et nous avons notamment utilisé la valeur $\Delta = 0.4167$ obtenue pour $p = 2$ dans les autres simulations.

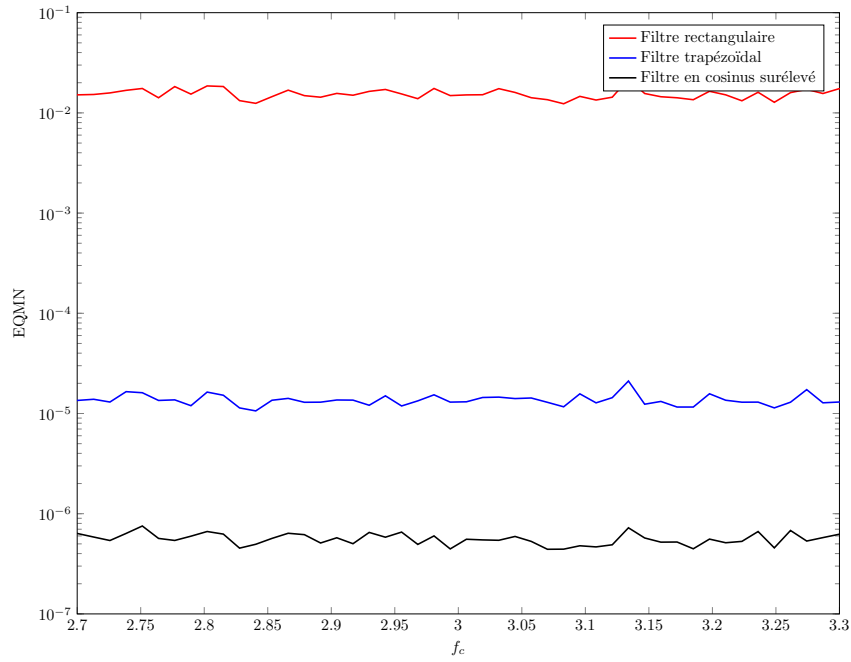


FIGURE 3.8 – Influence de la position du signal à l'intérieur de la bande de Nyquist

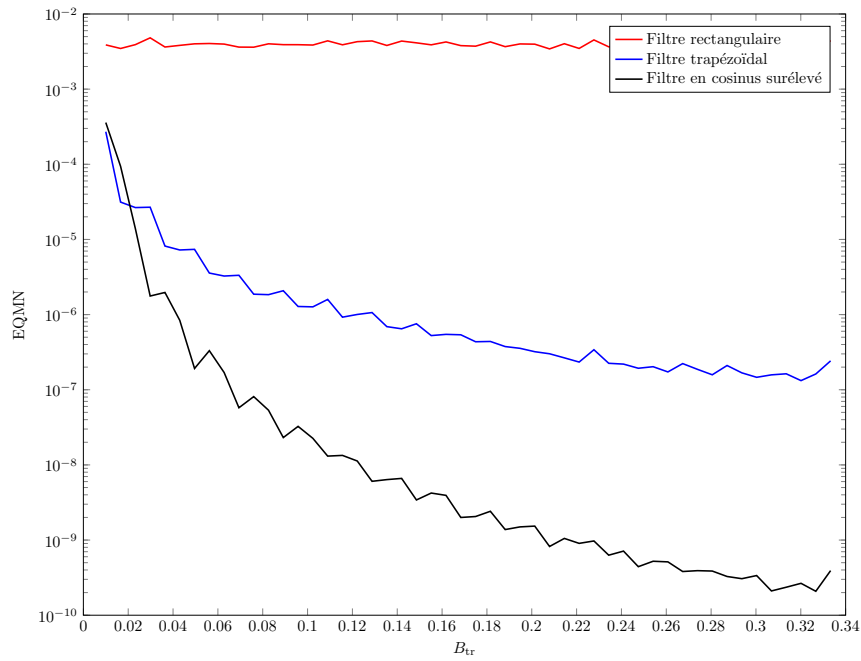


FIGURE 3.9 – Influence de la largeur des bandes de transition du filtre conjoint sur les performances

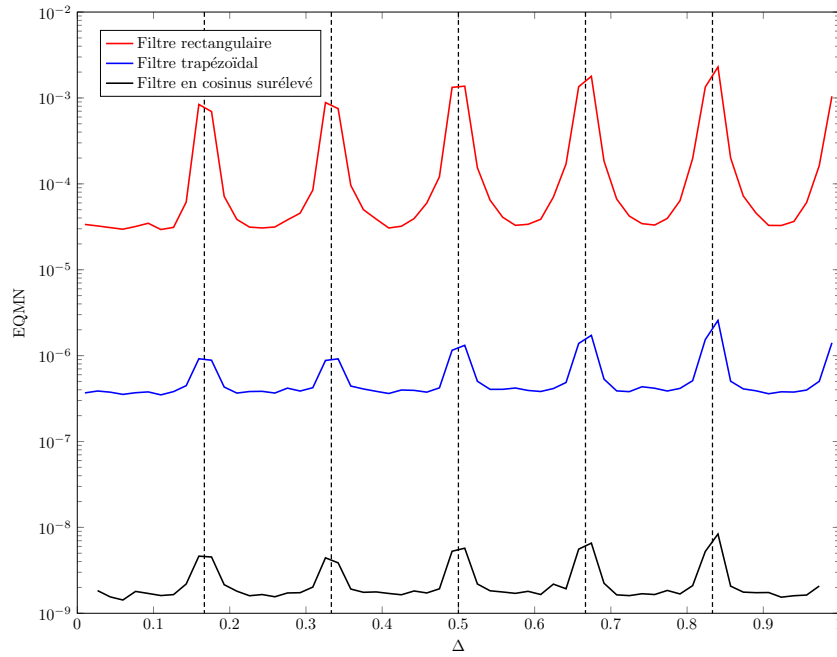
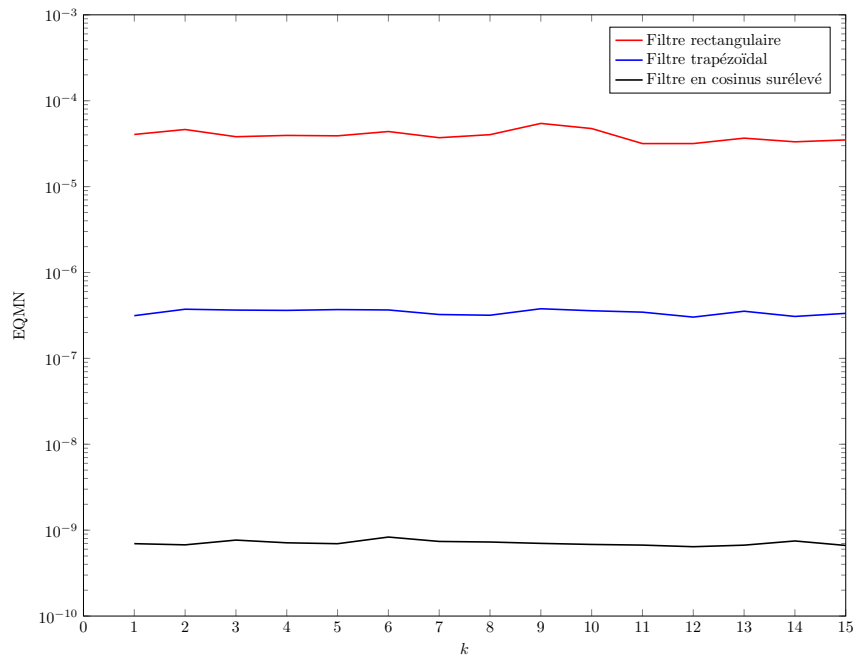
FIGURE 3.10 – Influence du paramètre de décalage entre les voies Δ sur les performances

FIGURE 3.11 – Influence de la bande de Nyquist sur les performances

Influence de la bande de Nyquist

La figure 3.11 présente le tracé de l'EQMN en fonction du numéro de la bande de Nyquist k qui contrôle la position de la bande spectrale du signal. Nous nous attendons à ce que ce paramètre n'influe pas sur les performances de la reconstruction si Δ est choisi de manière appropriée comme nous l'expliquons ci-dessus. Nous avons pris comme décalage $\Delta = \frac{1}{4k} + \frac{p}{2k}$ pour une valeur de $p = 0, \dots, 2k - 1$ quelconque. Nous constatons bien que le numéro de la bande de Nyquist dans lequel nous modélisons notre signal n'a aucune influence sur les performances de reconstruction dès lors que la valeur du décalage est correctement choisie en fonction de k . Il faut néanmoins nuancer ces considérations purement théoriques et que l'on retrouve en simulation, par le fait que l'on aura des problèmes pratiques lorsque le numéro de la bande de Nyquist augmente. En effet, le signal variant plus rapidement dans le domaine temporel à mesure que l'on se rapproche de la HF, il sera plus sensible à l'apparition de gigue d'échantillonnage que nous n'avons pas pris en compte dans notre modèle. Il sera plus difficile d'effectuer l'opération d'échantillonnage sans erreur et les performances des reconstructions en seront impactées.

3.5.3 Rejet des interférences

3.5.3.1 Principe

Comme présenté dans le chapitre 2, le signal transmis dans les télécommunications est modélisé par un signal passe-bande perturbé par des interférences passe-bande dues par exemple aux canaux adjacents alloués aux autres utilisateurs (*Adjacent Channel Interference* ou ACI) [MB09], mais également aux bandes de fréquence adjacentes utilisées par d'autres applications. Il est également fréquent que du bruit parasite apparaisse en raison d'imperfections des traitements (raies d'intermodulation non coupées après transposition en fréquence par exemple). Il est donc très important de pouvoir sélectionner avec précision une sous-bande fréquentielle donnée afin de rejeter les interférences proches [AGBC98, RKKJ06]. Cette sélection fréquentielle est effectuée à l'aide d'un filtre passe-bande adapté à la bande du signal et intégré en numérique à la formule de reconstruction.

Le signal est toujours modélisé comme un processus aléatoire \mathbf{X} dont la densité spectrale a pour

support $\mathcal{B}_{\mathbf{X}} \subset \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(k)$. Ce signal est perturbé par une interférence dont le support \mathcal{B}_{int} est également inclus dans $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}(k)$. Nous supposons que cette interférence se situe hors de la bande du signal c'est-à-dire que $\mathcal{B}_{\mathbf{X}} \cap \mathcal{B}_{\text{int}} = \emptyset$. La figure 3.12 illustre le positionnement spectral de l'interférence et du signal dans la bande de Nyquist considérée.

Il faudra donc que la fréquence d'échantillonnage du signal soit suffisante pour que les bandes du signal et de l'interférence soient toutes deux contenues dans la bande de Nyquist considérée. Ceci conduira potentiellement à un léger suréchantillonnage que nous allons définir. Notons B_{tot} la bande totale occupée par le signal et l'interférence et qui s'étend donc de la première fréquence non nulle (qu'elle appartienne au signal ou à l'interférence de manière indifférente) à la dernière fréquence non nulle du spectre. Ainsi B_{tot} (signal et interférence) doit être contenu entièrement dans la bande de Nyquist et nous pouvons définir le facteur de suréchantillonnage θ comme le rapport entre la fréquence d'échantillonnage et la bande B_{tot} :

$$\theta = \frac{1}{B_{\text{tot}}} \quad (3.47)$$

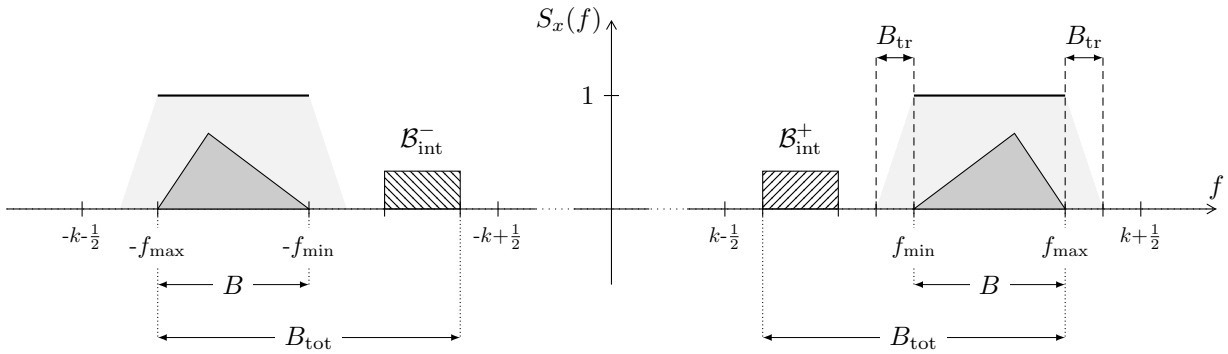


FIGURE 3.12 – Adaptation du filtre conjoint à la bande du signal et réjection d'une interférence

En choisissant un filtre conjoint adapté au support spectral $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ du signal, le processus reconstruit \mathbf{Y} correspond au signal filtré avec annulation de l'interférence. Plus précisément, le filtre sera choisi de manière à ce que $H(f) = 0$ pour $f \in \mathcal{B}_{\text{int}}$ (figure 3.12). Ensuite, une reconstruction sans erreur de \mathbf{Y} sans interférence sera possible selon le schéma de reconstruction explicité dans la figure 3.2b. Dans le cas où l'on souhaite améliorer la convergence, il faudra supposer que les bandes de transition

autour de la bande du signal ne contiennent pas l'interférence, c'est-à-dire que les supports du signal et de l'interférence ne doivent pas être strictement adjacents [VCL13]. La présence d'une partie de l'interférence dans les bandes de transition du filtre conjoint conduit à des erreurs de reconstruction comme illustré dans la partie 3.5.3.3 de présentation des simulations.

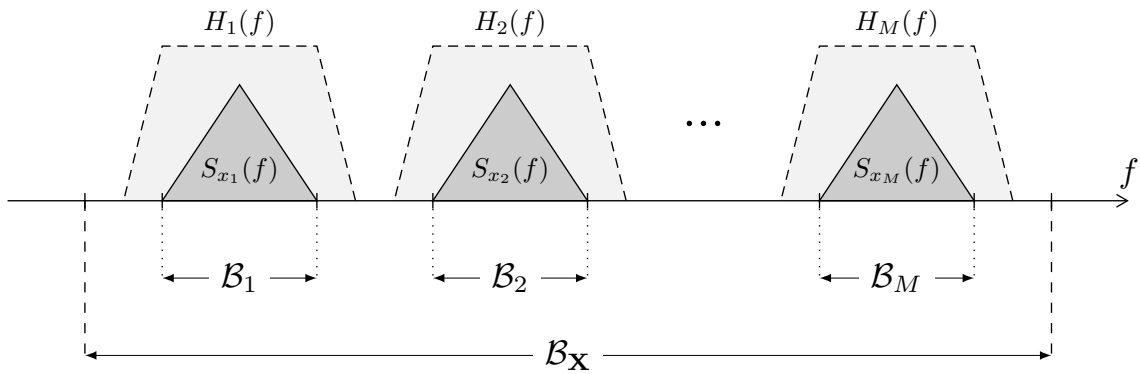
Le rejet d'interférence allié à la sélection de sous-bandes fréquentielles trouvent une application dans la sélection de sous-canaux que nous détaillons maintenant.

3.5.3.2 Application à la sélection de sous-canaux

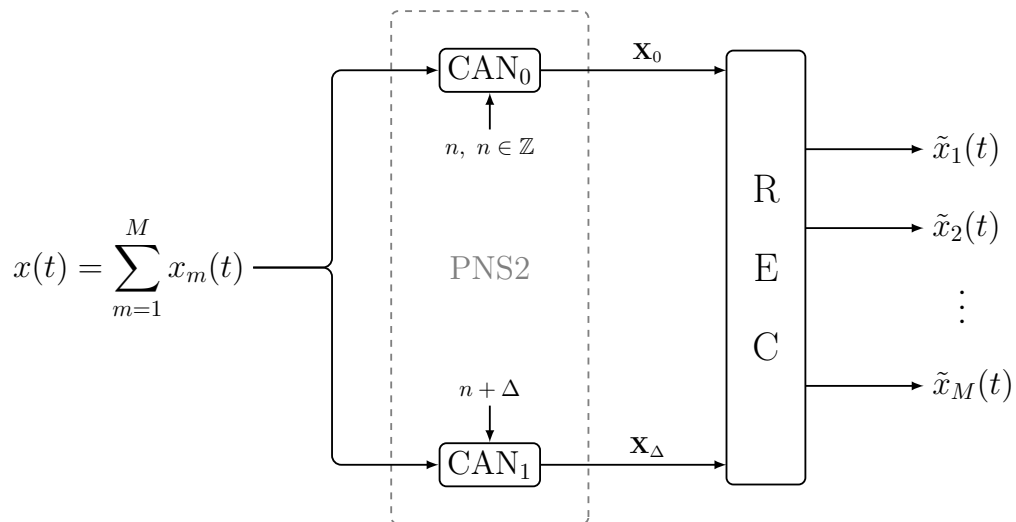
Nous proposons un système de reconstruction PNS2 permettant l'annulation des interférences en reconstruisant une sous-bande sélectionnée correspond par exemple à un canal particulier dans le cas de transmission multi-utilisateurs séparée en M sous-canaux, chacun étant associé à un utilisateur. Celui-ci est présenté sur la figure 3.13. Considérons un signal d'entrée $x(t) = \sum_{m=1}^M x_m(t)$ défini comme la somme de M signaux élémentaires $x_m(t)$, $m = 1, \dots, M$ correspondant chacun à un canal de densité spectrale $S_{x_m}(f)$ dont le support correspond à la sous-bande \mathcal{B}_m . Nous pouvons reconstruire sur chacune des M sorties un canal filtré de ses interférents par le biais d'un échantillonnage et d'une reconstruction adaptée PNS2.

Toutes les sous-bandes sont supposées avoir la même largeur de bande B et sont espacées d'une bande de garde de largeur B_{tr} . La bande de garde est notée B_{tr} car elle permettra d'utiliser une bande de transition B_{tr} pour les filtres conjoints associés aux formules de reconstruction. Nous pouvons définir un cas d'étude où les sous-bandes et les bandes de garde couvrent toute la bande de Nyquist. Cette configuration est présentée sur la figure 3.14 dans le cas $M = 3$. Nous pouvons en déduire une expression des paramètres B , B_{tr} et θ en fonction de ρ et M . Nous utilisons le paramètre ρ (3.38) pour évaluer l'excès de bande de chaque filtre. Comme toute la bande de Nyquist est occupée, nous pouvons écrire :

$$MB + (M + 1)B_{\text{tr}} = 1. \quad (3.48)$$



(a) Modèle du signal



(b) Schéma de reconstruction

FIGURE 3.13 – Schéma de reconstruction PNS2 d'un signal séparé en plusieurs canaux distincts interférant les uns avec les autres

En exploitant cette relation et la définition de ρ (3.38), nous avons :

$$\begin{cases} B = \frac{2}{2M + (M + 1)(\rho - 1)} \\ B_{\text{tr}} = \frac{\rho - 1}{2M + (M + 1)(\rho - 1)} \end{cases} \quad (3.49)$$

Par ailleurs, dans ce cas, le facteur de suréchantillonnage est défini comme $\theta = \frac{1}{B_{\text{tot}}}$ d'après (3.47), avec B_{tot} qui est illustré sur la figure 3.14 comme la bande totale couverte par des composantes du signal. Il n'y a donc que deux bandes de transition en excès et nous avons $B_{\text{tot}} + 2B_{\text{tr}} = 1$, ce qui nous donne la valeur de suréchantillonnage θ :

$$\theta = \frac{2M + (M + 1)(\rho - 1)}{2M + (M - 1)(\rho - 1)} \quad (3.50)$$

Nous illustrerons ce cas pratique dans la partie suivante de présentation des simulations pour le cas de $M = 3$ canaux adjacents, mais les formules sont valables pour toute valeur de M .

3.5.3.3 Analyse des performances

Nous présentons dans cette partie les résultats des simulations menées dans le cadre de l'application à la sélection de sous-canaux. Nous considérons le scénario présenté sur la figure 3.13 qui modélise le signal comme la somme de signaux limités fréquentiellement à une sous-bande donnée. Nous montrerons qu'il est possible de reconstruire indépendamment chaque sous-bande, en limitant l'impact des sous-bandes adjacentes considérées comme des interférences et dont les supports sont disjoints. Ce scénario offrant la possibilité d'utiliser des filtres conjoints à bande de transition non nulle, nous présentons également l'amélioration de la vitesse de convergence dans chaque cas. Par ailleurs nous montrons l'effet de la reconstruction lorsque l'interférence se trouve à l'intérieur de la bande de définition du filtre.

Nous considérons le cas $M = 3$ qui correspond à un signal séparé en 3 sous-bandes, comme représenté sur la figure 3.14, de même largeur $B = 0.2$, séparées de $B_{\text{tr}} = 0.1$ et avec un suréchantillonnage $\theta = 1.25$ d'après (3.49) et (3.49). Le signal sur chaque sous-bande est similaire à celui décrit dans la partie 3.5.2.5. Les 3 sous-bandes sont centrées respectivement sur $f_{c,1} = 2.7$, $f_{c,2} = 3$ et $f_{c,3} = 3.3$ et nous précisons lorsqu'une seule des bandes ou les trois sont considérées lors de la reconstruction.

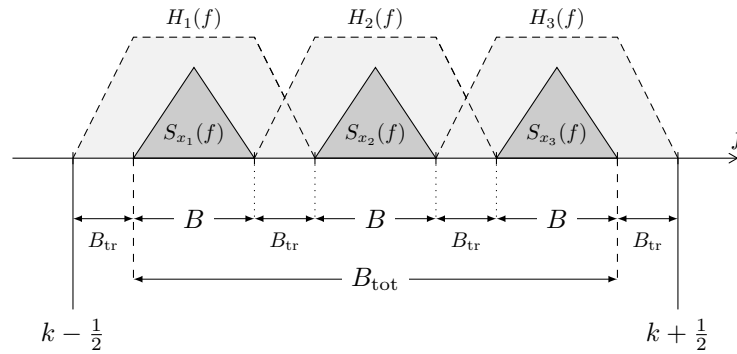


FIGURE 3.14 – Filtrés conjoints pour la reconstruction avec annulation d'interférence - Cas de $M = 3$ sous-bandes

Sélection de sous-canaux

La figure 3.15 présente le tracé de l'EQMN dans le cas de l'application présentée dans la partie 3.5.3.2 pour $M = 3$. Les 3 sous-bandes occupent la bande de Nyquist, toutes les sous-bandes sont supposées de largeur égale à B et elles sont séparées de B_{tr} ce qui nous permet de positionner les filtres conjoints. Par ailleurs, nous retrouvons également un intervalle B_{tr} de part et d'autre de la première et de la dernière bande (voir figure 3.14). Nous traçons, en fonction du nombre d'échantillons N , les performances pour chacune des bandes reconstruite à l'aide des trois formules intégrant des filtres conjoints. Les 3 sous-bandes sont tracées respectivement en pointillés (..), en tirets (-) et en tiret-point (-.) sur la figure 3.15. Nous constatons que les performances sont équivalentes pour chacune des bandes qui est donc reconstruite avec rejet des bandes adjacentes. Pour comparaison, la reconstruction lorsqu'aucune interférence n'est présente est tracée en trait plein. Nous constatons que le rejet d'interférence se traduit par un décalage d'EQMN mais l'allure générale de la reconstruction est la même. L'interférence que constituent les sous-bandes voisines est atténuée, et un nombre d'échantillons N suffisant conduit à une EQMN négligeable.

Influence de la position relative de l'interférence

La figure 3.16 présente le tracé de l'EQMN pour une interférence modélisée maintenant de manière simple comme une sinusoïde, ceci afin de pouvoir faire varier simplement sa fréquence f_{int} et modéliser

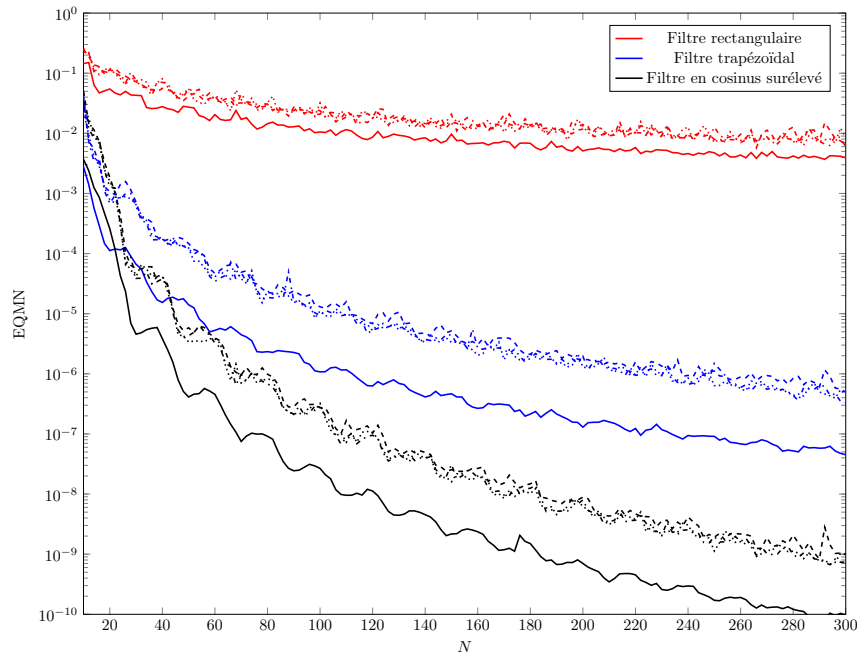


FIGURE 3.15 – Sélection de sous-bandes par reconstruction généralisée et annulation d’interférences

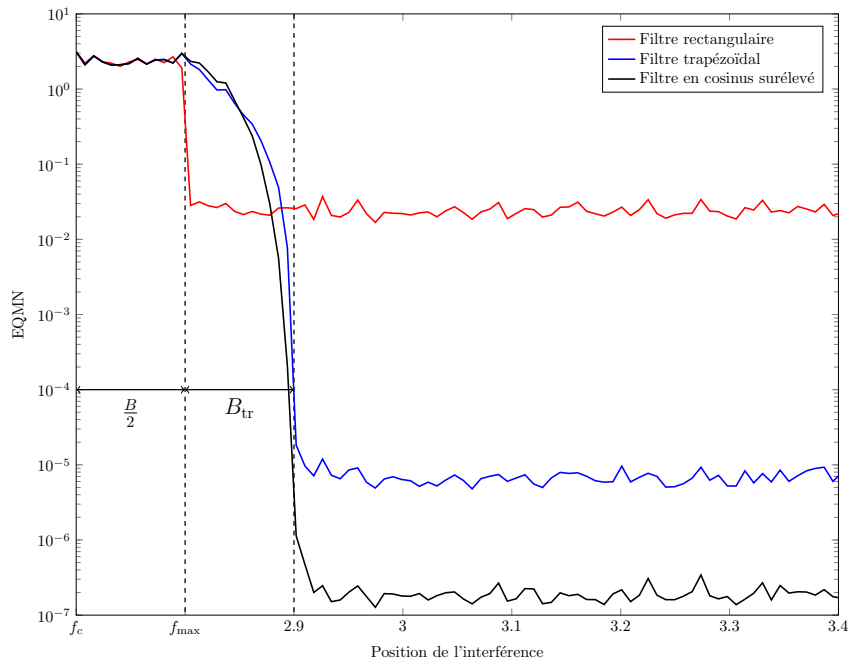


FIGURE 3.16 – Influence de la position de l’interférence sur les performances

ainsi les performances selon sa position. Nous utilisons une seule sous-bande positionnée comme la première sous-bande de l'exemple précédent centrée sur $f_c = 2.7$, et l'interférence varie entre la fréquence centrale du signal et la limite supérieure de la bande de Nyquist. Nous constatons que l'interférence est totalement annulée à condition qu'elle se trouve en dehors de la bande de définition du filtre, bande de transition comprise. Notons que lorsque la sinusoïde traverse la bande de transition, la reconstruction s'améliore. Le choix d'une sinusoïde comme signal d'interférence permet de retrouver au niveau de l'EQMN la forme de la fonction de transfert du filtre et notamment sa décroissance fréquentielle (linéaire pour le trapèze, non linéaire pour le cosinus surélevé). Nous aurions également pu considérer une interférence passe-bande dont la fréquence centrale se déplace, mais la sinusoïde conduit à une interprétation plus visuelle.

3.5.4 Signal analytique

Le signal analytique présenté dans le chapitre 2 est un outil utilisé fréquemment dans les télécommunications. [Rie93] a présenté une méthode de reconstruction du signal analytique à partir d'un échantillonnage passe-bande uniforme. [SF92a] a également présenté des méthodes de reconstruction du signal analytique dans le cadre d'un échantillonnage aléatoire passe-bas par l'utilisation de formules de reconstruction de Lagrange (1.48) ou PNSL par l'utilisation de formules de Yen (1.62) adaptées pour le cas de signaux analytiques.

Nous présentons ici une reconstruction de signal analytique dans le cadre d'un schéma d'échantillonnage PNS2 en choisissant un filtre conjoint approprié. Le principe de la construction du signal analytique est dérivé de la reconstruction sélective présentée précédemment mis à part que les filtres conjoints sont définis uniquement sur les fréquences positives, simulant le comportement d'un filtre analytique présenté dans la partie 2.3.4.2. Il faut noter que les formules de reconstruction seront complexes car le signal reconstruit est complexe. Il est possible d'effectuer la construction du signal analytique en parallèle à la fois du rejet d'interférences et de l'amélioration de la convergence [VCL⁺14]. Nous présentons ici cette méthode généralisée avec les trois formes de filtres présentées pour l'amélioration de la convergence, chaque filtre étant défini comme la restriction aux fréquences

positives du filtre passe-bande généralisé correspondant. Nous validerons le comportement des formules par le biais de simulations similaires à celles présentées dans la partie précédente, avec une modification du critère de reconstruction faisant intervenir le signal analytique plutôt que le signal d'origine.

3.5.4.1 Filtre analytique rectangulaire

Le premier exemple est donc un filtre analytique rectangulaire \mathcal{H}_a^R adapté à la bande positive du signal uniquement et pour lequel nous n'avons pas de bande de transition. La fonction de transfert de ce filtre est la restriction aux fréquences positives de la fonction de transfert du filtre rectangulaire généralisé (3.39).

Après calcul des développements en séries de Fourier pour ce filtre analytique, nous obtenons les fonctions de reconstruction complexes suivantes :

$$\begin{cases} r_n^{(0, H_a^R)}(t) = \frac{iB e^{2i\pi[f_c(t-n) - k\Delta]}}{\sin[2\pi k\Delta]} \operatorname{sinc}[\pi B(t-n)] \\ r_n^{(\Delta, H_a^R)}(t) = \frac{-iB e^{2i\pi[f_c(t-n-\Delta) + k\Delta]}}{\sin[2\pi k\Delta]} \operatorname{sinc}[\pi B(t-n-\Delta)] \end{cases} \quad (3.51)$$

3.5.4.2 Filtre analytique trapézoïdal

Nous définissons maintenant un filtre analytique trapézoïdal \mathcal{H}_a^T , unitaire sur la bande positive du signal et possédant une bande de transition $B_{\text{tr}} > 0$ de part et d'autre, permettant d'obtenir une fonction de transfert continue définie comme restriction aux fréquences positives de la fonction de transfert du filtre trapézoïdal généralisé (3.41).

Nous rappelons que B_{tr} est choisi de manière à respecter :

$$k - \frac{1}{2} \leq f_{\min} - B_{\text{tr}} < f_{\min} \leq f_{\max} < f_{\max} + B_{\text{tr}} \leq k + \frac{1}{2}. \quad (3.52)$$

Après calcul des développements en séries de Fourier pour ce filtre analytique, nous obtenons les

fonctions de reconstruction suivantes :

$$\begin{cases} r_n^{(0, H_a^T)}(t) = i(B + B_{\text{tr}}) \frac{e^{2i\pi[f_c(t-n) - k\Delta]}}{\sin[2\pi k\Delta]} \operatorname{sinc}[\pi(B + B_{\text{tr}})(t - n)] \operatorname{sinc}[\pi B_{\text{tr}}(t - n)] \\ r_n^{(\Delta, H_a^T)}(t) = -i(B + B_{\text{tr}}) \frac{e^{2i\pi[f_c(t-n-\Delta) + k\Delta]}}{\sin[2\pi k\Delta]} \operatorname{sinc}[\pi(B + B_{\text{tr}})(t - n - \Delta)] \operatorname{sinc}[\pi B_{\text{tr}}(t - n - \Delta)] \end{cases} \quad (3.53)$$

3.5.4.3 Filtre analytique en cosinus surélevé

Nous définissons également un filtre analytique en cosinus surélevé \mathcal{H}_a^{CS} , lui aussi unitaire sur la bande positive du signal et possédant une bande de transition $B_{\text{tr}} > 0$ de part et d'autre, avec cette fois-ci une propriété de continuité et de dérivabilité de la fonction de transfert en tout point. Cette fonction de transfert est la restriction aux fréquences positives de la fonction de transfert précédemment définie pour le filtre en cosinus surélevé généralisé dans (3.44).

Après calcul des développements en séries de Fourier pour ce filtre généralisé, nous obtenons les fonctions de reconstruction suivantes :

$$\begin{cases} r_n^{(0, H_a^{CS})}(t) = \frac{-ie^{2i\pi[f_c(t-n) - k\Delta]}}{2[4B_{\text{tr}}^2(t-n)^2 - 1] \sin[2\pi k\Delta]} \times \\ \quad (B \operatorname{sinc}[\pi B(t-n)] + (B + 2B_{\text{tr}}) \operatorname{sinc}[\pi(B + 2B_{\text{tr}})(t-n)]) \\ r_n^{(\Delta, H_a^{CS})}(t) = \frac{ie^{2i\pi[f_c(t-n-\Delta) + k\Delta]}}{2[4B_{\text{tr}}^2(t-n-\Delta)^2 - 1] \sin[2\pi k\Delta]} \times \\ \quad (B \operatorname{sinc}[\pi B(t-n-\Delta)] + (B + 2B_{\text{tr}}) \operatorname{sinc}[\pi(B + 2B_{\text{tr}})(t-n-\Delta)]) \end{cases} \quad (3.54)$$

3.5.4.4 Analyse des performances

Nous reprenons le même principe expérimental que précédemment car la reconstruction du signal analytique peut être couplée au rejet d'interférence, à la différence que nous introduisons ici un critère de reconstruction différent. En effet, étant donné que nous reconstruisons le signal analytique, nous évaluons maintenant le critère EQMN (1.31) à partir du signal analytique reconstruit comparé au signal analytique théorique $x_a(t)$ défini à partir du signal original : $x_a(t) = x(t) + ix_h(t)$ avec $x_h(t)$ la transformée de Hilbert du signal obtenue par filtrage.

La figure 3.17 présente les résultats de tracé de l'EQMN en fonction de la taille de la fenêtre d'échantillons N utilisée sur chaque voie du PNS2 dans le cas de l'application présentée précédemment où 3 sous-bandes occupent la bande de Nyquist (voir figure 3.14). Nous nous plaçons tout d'abord dans le cas où seule la première sous-bande de fréquence centrale $f_c = 2.7$ est reconstruite mais subit l'interférence des autres sous-bandes. Les échantillons proviennent du signal total contenant les 2 sous-bandes. La différence par rapport à précédemment est que nous reconstruisons ici le signal analytique en lieu en place du signal original. Nous constatons que les interférences ont été atténuées, ceci dans le cas de la reconstruction du signal analytique. Nous avons ainsi pu regrouper deux opérations de filtrage avec la reconstruction : un filtrage analytique et un filtrage passe-bande sélectif, ajoutant ainsi un double intérêt à la reconstruction qui se passe de deux opérations de filtrage au prix d'une complexité un peu plus élevée des formules de reconstruction. Par ailleurs, la convergence est améliorée par l'utilisation de filtres conjoints de régularité croissante, ce qui valide la propriété d'amélioration de la convergence des formules.

La figure 3.18 présente maintenant le tracé de l'EQMN en fonction du nombre d'échantillons N pour la reconstruction du signal analytique associé à chacune des bandes. Cette reconstruction est effectuée à l'aide des 3 filtres présentés. Les 3 sous-bandes sont tracées respectivement en pointillés (..), en tirets (-) et en tiret-point (-.) sur la figure 3.18. Nous constatons que les performances sont équivalentes pour chacune des sous-bandes.

3.6 Généralisation à un positionnement de bande quelconque

L'hypothèse selon laquelle la bande du signal est incluse dans la bande de Nyquist de numéro k conduit à une simplification des formules. Toutefois, des formules générales peuvent être obtenues pour un placement de bande et une fréquence d'échantillonnage quelconques. Il convient pour cela de distinguer deux cas selon qu'il y ait ou non suréchantillonnage. Pour chaque cas, nous expliquons la démarche à suivre pour pouvoir utiliser les développements présentés dans ce chapitre. Dans les deux cas, nous expliquons comment nous pouvons nous ramener au cas d'étude utilisé tout au long de ce chapitre.

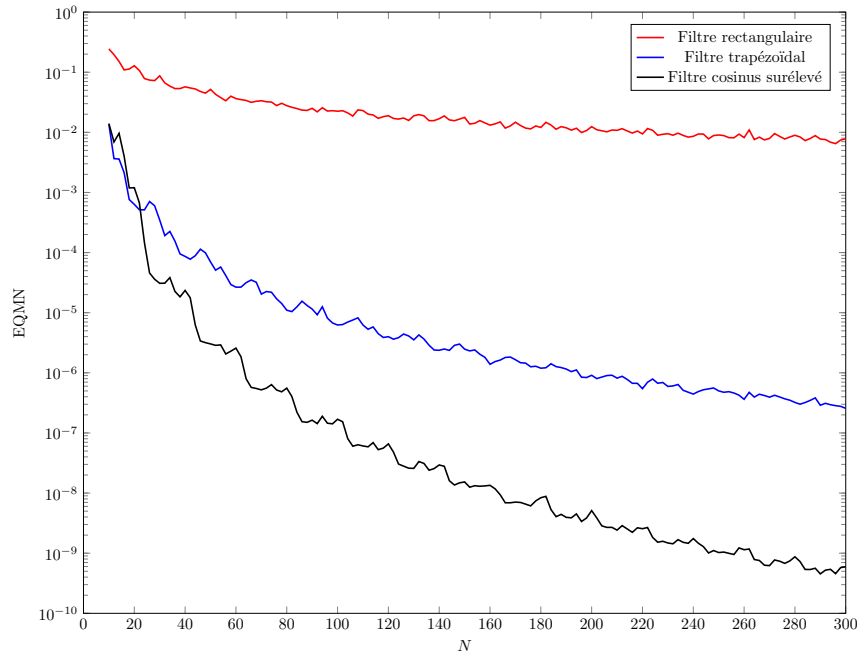


FIGURE 3.17 – Performances de reconstruction des formules de reconstruction du signal analytique

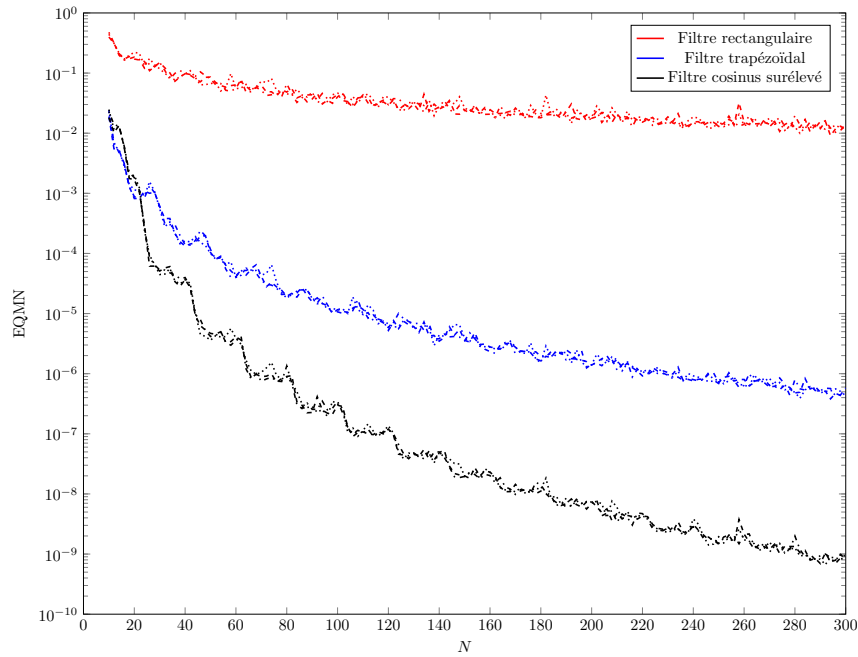


FIGURE 3.18 – Sélection de sous-bandes par reconstruction généralisée du signal analytique

Absence de suréchantillonnage

En l'absence de suréchantillonnage, il est impossible d'utiliser des filtres conjoints possédant une bande de transition mais l'utilisation du filtre conjoint rectangulaire permet de reconstruire le signal. Nous travaillons à la fréquence d'échantillonnage minimale permettant une reconstruction sans erreur, égale à la fréquence de Landau donc à la bande du signal. Nous considérons maintenant un placement quelconque en fréquence par rapport à la bande de Nyquist schématisé sur la figure 3.19. Ainsi, la bande normalisée de largeur $B = 1$ se trouve à cheval sur deux bandes de Nyquist de numéro k et $k + 1$. Cependant, en considérant séparément la reconstruction sur la bande k et la bande $k + 1$ grâce à deux filtres rectangulaires adjacents, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(t) &= \tilde{x}^k(t) + \tilde{x}^{k+1}(t) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n^{(0, H_c, k)}(t) x(n) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n^{(\Delta, H_c, k)}(t) x(n + \Delta) \\
&\quad + \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n^{(0, H_c, k+1)}(t) x(n) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n^{(\Delta, H_c, k+1)}(t) x(n + \Delta) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[r_n^{(0, H_c, k)}(t) + r_n^{(0, H_c, k+1)}(t) \right] x(n) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[r_n^{(\Delta, H_c, k)}(t) + r_n^{(\Delta, H_c, k+1)}(t) \right] x(n + \Delta)
\end{aligned} \tag{3.55}$$

avec les fonctions de reconstruction $r_n^{(0, H_c, k)}(t)$, $r_n^{(0, H_c, k+1)}(t)$, $r_n^{(\Delta, H_c, k)}(t)$ et $r_n^{(\Delta, H_c, k+1)}(t)$ obtenues à l'aide des formules (3.40) adaptées selon le schéma de la figure 3.19. En développant ces calculs, nous retrouvons une formule similaire à celle développée par Kohlenberg dans le cadre déterministe (1.60) permettant de faire un parallèle entre les deux développements. La généralisation est donc claire en l'absence de suréchantillonnage et notre cas d'étude particulier n'est pas restrictif.

Présence de suréchantillonnage

Lorsqu'un suréchantillonnage est envisageable, le raisonnement est différent. L'idée est d'utiliser le suréchantillonnage en choisissant de manière appropriée la valeur de θ afin de placer la bande normalisée entièrement dans une seule bande de Nyquist et retrouver notre cas d'étude. En effet, lorsque le suréchantillonnage augmente, le signal ramené en bande normalisé a le comportement suivant : il se rapproche de l'origine avec une bande qui diminue inversement proportionnellement à θ ($B_{\text{tot}} = \frac{1}{\theta}$ d'après (3.47)). Il est donc possible de se placer dans le cas d'un faible suréchantillonnage

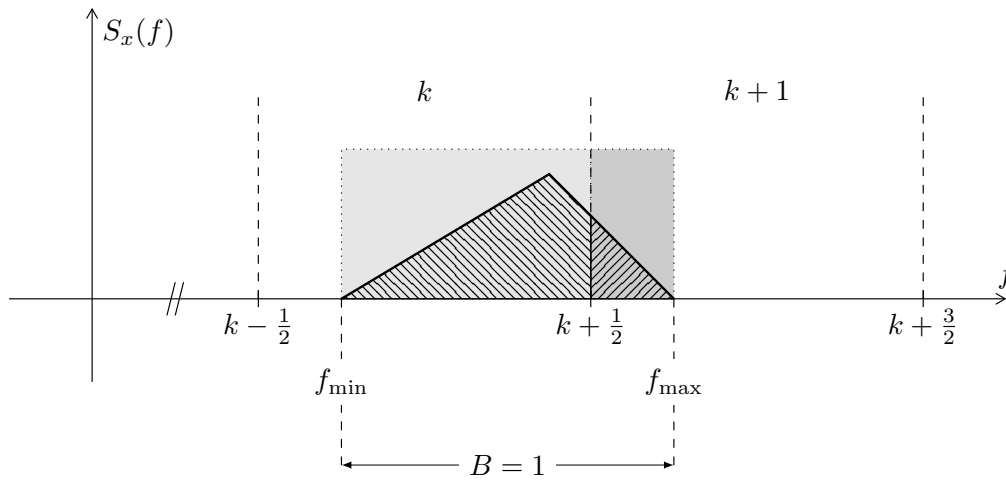


FIGURE 3.19 – Occupation spectrale du signal en l’absence de suréchantillonnage et application de filtres conjoints rectangulaires dans les bandes de Nyquist adjacentes k et $k + 1$

(θ légèrement supérieure à 1) pour lequel le signal a été ramené complètement dans une unique bande de Nyquist. Nous avons illustré ce comportement sur les figures 3.20a et 3.20b, respectivement pour $\theta = 1.1$ et $\theta = 1.4$. Nous voyons que dans le premier cas, le signal n’est pas complètement ramené dans la bande de Nyquist de numéro k , une partie subsiste dans la $k + 1^{\text{ème}}$ bande. En revanche, en augmentant le suréchantillonnage, nous arrivons au second cas pour lequel le signal est complètement ramené dans la bande de Nyquist de numéro k , et nous pouvons mettre en place notre méthode de filtrage conjoint. En allant plus loin, il sera également possible de jouer sur la valeur de θ pour centrer la bande du signal dans la bande de Nyquist et avoir des bandes de transition identiques de part et d’autre.

L’idée de cette généralisation se base sur le fait que le suréchantillonnage est obligatoire pour pouvoir utiliser un filtrage conjoint comme nous l’avons présenté précédemment. Il est donc tout à fait envisageable de choisir la valeur du suréchantillonnage utilisé (au lieu de le subir) afin de s’affranchir d’un placement spectral quelconque et ainsi simplifier les formules de reconstruction PNS2 en se basant sur les développements présentés dans ce chapitre.

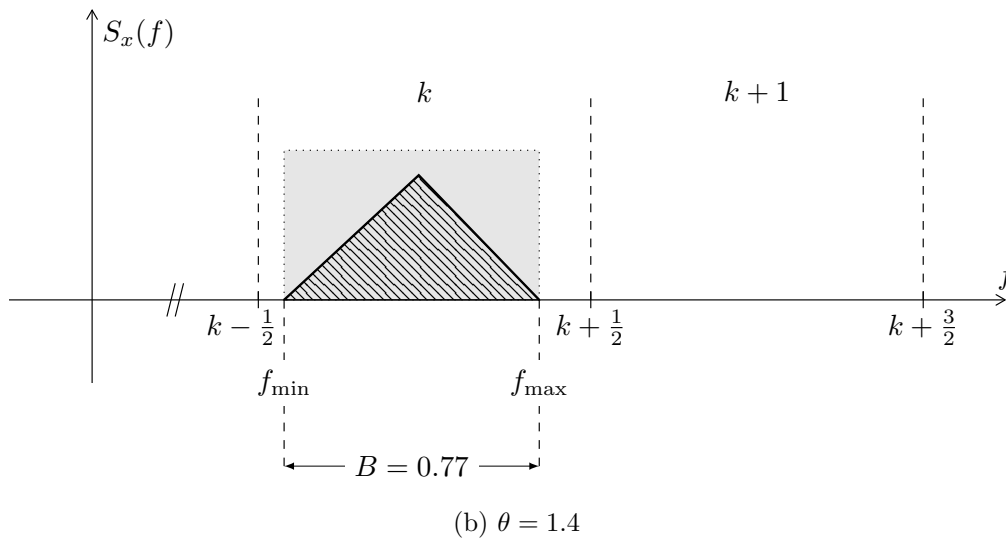
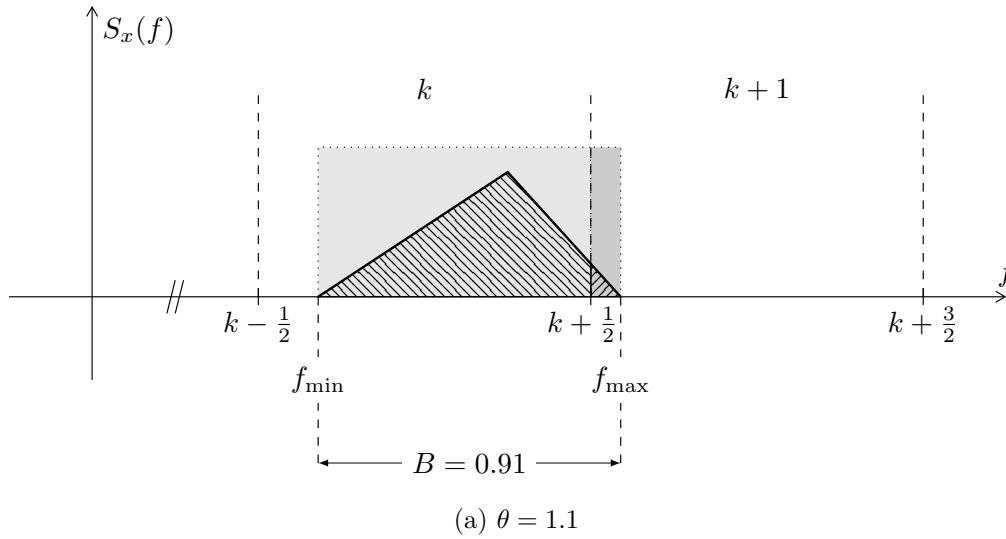


FIGURE 3.20 – Occupation spectrale du signal pour deux valeurs de suréchantillonnage dans le cas d'un placement choisi aléatoirement

3.7 Bilan

Le schéma d'échantillonnage PNS2 a été choisi pour notre étude en raison de sa simplicité, de la souplesse qu'il permet en termes de choix de fréquence d'échantillonnage et pour son implantation directe rendue possible grâce à son utilisation d'équipements existants. Tout cela en fait un candidat particulièrement intéressant pour des applications liées aux télécommunications. En ce sens, nous avons présenté dans ce chapitre l'ajout de fonctionnalités à la reconstruction du signal échantillonné à l'aide d'un schéma PNS2. Cet ajout se fait par le biais d'un filtre conjoint, qui permet de modifier les fonctions de reconstruction calculées à partir de développements en séries de Fourier. Ce filtre conjoint est ainsi intégré dans l'opération de reconstruction et peut être choisi de manière relativement libre.

A partir de formules améliorées pour lesquelles la vitesse de convergence a été augmentée par le choix de filtres conjoints aux propriétés de régularité appropriées, nous avons développé des formules de reconstruction utiles en télécommunications car permettant l'ajout de fonctionnalités vues comme des opérations clés de la chaîne de réception dans le chapitre 2.

Ainsi cela a permis l'ajout d'opérations de filtrage passe-bande sélectif permettant la sélection de sous-bandes fréquentielles ainsi que le rejet d'interférences proches, trouvant des applications dans la séparation de canaux dans le cadre multiutilisateur. Par ailleurs, nous avons proposé l'ajout d'un filtrage analytique permettant de reconstruire une représentation complexe du signal utilisée couramment dans la chaîne de réception. Ces fonctionnalités, ainsi que l'amélioration de la convergence, peuvent être vues comme des briques élémentaires potentiellement sommables et nous avons montré que la reconstruction du signal analytique peut se faire conjointement au rejet d'interférence ainsi qu'à l'amélioration de la vitesse de convergence.

Finalement, nous nous sommes placés dans le cas où la bande du signal était incluse dans une bande de Nyquist, ce qui nous a permis d'élaborer des formules de reconstruction relativement simples. Toutefois, nous avons montré que la généralisation est tout à fait possible dans n'importe quel cas de figure. D'autre part, lorsque cela est possible, un choix approprié du suréchantillonnage permet de se replacer dans le cas simplifié précédent.

Le PNS2 trouve ici un cadre d'étude mettant en lumière ses capacités de flexibilité et d'adaptabilité dans le traitement de signaux de télécommunications modélisé comme des signaux passe-bande. Le PNS2 est un schéma d'échantillonnage qui possède des propriétés lui permettant d'en faire un candidat intéressant pour de futures applications dans un cadre pratique.

Il est intéressant de noter que toutes ces fonctionnalités pourraient être aussi intégrées à un échantillonnage passe-bande uniforme mais dans ce cas, on perdrait la flexibilité sur le choix de la fréquence d'échantillonnage qui est permise par le schéma d'échantillonnage PNS2.

CHAPITRE 4

Échantillonnage Périodique Non Uniforme pour les Convertisseurs Analogique-Numérique entrelacés

Sommaire

4.1	Introduction	119
4.2	Convertisseurs Analogique-Numérique entrelacés non uniformément	121
4.2.1	Modèle proposé	122
4.2.2	Impact de la désynchronisation	124
4.2.3	Stratégie d'estimation	130
4.3	Estimation supervisée de la désynchronisation	131
4.3.1	Signal d'apprentissage	131
4.3.2	Principe de la méthode d'estimation supervisée	131
4.3.3	Expressions analytiques de l'estimée de la désynchronisation	132
4.3.4	Bilan	143
4.3.5	Extension à une méthode semi-aveugle	143
4.4	Estimation aveugle de la désynchronisation	146
4.4.1	Principe	146
4.4.2	Non stationnarité du signal reconstruit en présence de désynchronisation	147
4.4.3	Présentation de la méthode d'estimation aveugle	153
4.4.4	Analyse des performances	169
4.5	Bilan	169

4.1 Introduction

L'augmentation de la fréquence d'échantillonnage utilisée dans les Convertisseurs Analogique-Numérique (CAN) est un défi majeur dans de nombreux domaines et en particulier dans les télécommunications. En effet, l'évolution rapide des systèmes de communications implique l'utilisation de

fréquences et surtout de bandes (quelques centaines de MHz) de plus en plus élevées lors des transmissions. Les besoins accrus en termes de fréquence d'échantillonnage conduisent à une augmentation de la consommation des circuits. Les dispositifs d'échantillonnage font donc l'objet de nombreuses études [Elb03, Raz12, Raz13, DW09, SRM07, BHFD15, TALGL15, Ste12].

Les Convertisseurs Entrelacés [BJH80, KPJ93] ont été introduits comme une solution technique pour atteindre des hautes fréquences d'échantillonnage en entrelaçant temporellement et en multiplexant plusieurs convertisseurs de faible coût et de faible consommation car fonctionnant à faible fréquence d'horloge. Bien que cette solution nécessite une consommation supplémentaire de puissance en raison de l'ajout d'un circuit dédié à la synchronisation, elle demeure une alternative intéressante pour atteindre des fréquences d'échantillonnage qu'un échantillonneur simple ne pourrait atteindre du fait des limitations auxquelles il est soumis (figure 2.11).

Nous avons souligné dans le chapitre 2 que le fonctionnement de ce système suppose une synchronisation parfaite entre les différentes voies du convertisseur [Elb03, Raz12, Vog05, ECM09]. Nous nous concentrerons donc dans ce chapitre sur les erreurs de désynchronisation temporelle. Ces erreurs causant l'apparition de distorsions non linéaires sur le signal reconstruit lorsqu'elles ne sont pas corrigées, il est nécessaire de munir les convertisseurs non seulement de circuit de synchronisation potentiellement coûteux pour minimiser la désynchronisation mais également, étant donné que cette dernière est inévitable, de circuits spécifiques de calibration [Elb03]. Étant donné que les formules de reconstruction pour ce type de convertisseurs sont basées sur l'hypothèse stricte d'un échantillonnage uniforme en sortie du multiplexeur, la calibration doit être effectuée en ligne en amont. Un état de l'art des méthodes de calibration existantes a été donné dans la partie 2.5.3.

Nous proposons dans ce chapitre un cadre de travail alternatif pour les convertisseurs entrelacés en proposant de nous adapter à la désynchronisation au lieu de la corriger. Ce cadre de travail se base sur l'utilisation d'un schéma d'échantillonnage périodique non uniforme (PNS) afin de modéliser de manière plus flexible les convertisseurs entrelacés. Ce schéma PNS prend en compte, lors de la reconstruction, un décalage entre les voies qui modélise la désynchronisation. Les corrections (matérielles ou numériques) des dispositifs d'échantillonnage sont ainsi remplacées avantageusement (à condition que la complexité soit suffisamment faible) par des traitements numériques du signal

qui sont effectués *a posteriori* lors de l'étape de reconstruction. Notre modèle alternatif des TI-ADC correspond à un dispositif moins coûteux analogiquement car il permet de s'affranchir de l'utilisation de circuits de synchronisation précis et de corrections matérielles du dispositif d'échantillonnage. Nous tentons de nous adapter aux défauts des circuits et notre méthode suit en cela les principes du paradigme de « *Dirty Radio Frequency* » [FLP⁺07] qui vise à s'accomoder de circuits analogiques imparfaits, dont les imperfections sont corrigées par la suite de manière numérique.

Cette stratégie suppose une connaissance *a priori* de la désynchronisation. Dans le cadre de ce modèle de convertisseurs, nous proposons donc une méthode d'estimation du décalage entre les voies d'échantillonnage lorsque ce décalage est inconnu ou lorsqu'il est soumis à des variations lentes durant le fonctionnement. Deux méthodes d'estimation sont proposées, la première fonctionnant de manière supervisée et la seconde de manière aveugle. L'estimation se base, dans le premier cas, sur l'utilisation d'un signal d'apprentissage aux propriétés spectrales connues, envoyé avant le signal passe-bande ou pendant les mises en veille du système. Dans le second cas, l'estimation se base sur l'exploitation de propriétés de stationnarité du signal reconstruit après échantillonnage PNS. La stationnarité a été utilisée précédemment dans [SRM07] mais la méthode proposée, qui utilise une analyse de la corrélation entre entrée et sortie, se base sur l'hypothèse d'un signal en bande de base, permettant ainsi une identification univoque de la désynchronisation. Cette hypothèse n'étant pas réaliste dans un contexte de télécommunications, nous considérons un modèle de signal passe-bande pour développer l'estimation du décalage entre voies. Pour les deux types de méthodes proposés, nous détaillerons les développements permettant l'estimation du décalage inconnu ainsi que les performances de la reconstruction du signal utilisant cette estimation.

4.2 Convertisseurs Analogique-Numérique entrelacés non uniformément

Nous proposons un modèle innovant de convertisseurs basés sur un entrelacement non uniforme des différentes voies qui le composent. Cette modélisation est justifiée par la sensibilité des convertisseurs entrelacés à la désynchronisation. Nous proposons une manière moins coûteuse et plus réaliste

de représenter les convertisseurs entrelacés en relâchant les contraintes de synchronisation. La modélisation d'un convertisseur entrelacé à L voies désynchronisé s'appuie de manière naturelle sur un schéma d'échantillonnage PNSL. Nous présentons ensuite le comportement de ce modèle lorsque la désynchronisation varie en caractérisant les conditions d'apparition de cette variation ainsi que l'impact sur la reconstruction du signal. Finalement, nous présentons la stratégie d'estimation que nous adoptons et qui sera détaillée selon deux axes : estimation supervisée et estimation aveugle.

4.2.1 Modèle proposé

Nous considérons un convertisseur composé de L voies correspondant à L échantillonneurs dits élémentaires représenté sur la figure 4.1a. Chaque voie réalise un échantillonnage à la fréquence commune f_e et est caractérisée par un décalage Δ_i , $i = 0, \dots, L-1$. Par comparaison avec l'architecture classique (figure 2.10a), nous voyons sur la figure 4.1a que l'étape de multiplexage de sortie a été remplacée par une reconstruction PNSL qui prend en compte les décalages Δ_i , $i = 0, \dots, L-1$ de chaque voie. Cette reconstruction est valable pour $t \in \mathbb{R}$ mais pour des applications pratiques en vue d'opérations post-échantillonnage, la reconstruction peut être effectuée sur un train d'instantanés uniformes tels qu'obtenus en sortie d'un convertisseur entrelacé classique.

La désynchronisation est corrigée *a posteriori* de manière numérique, ce qui nécessite donc des traitements plus complexes qu'un simple multiplexage. Cependant, cette augmentation de la complexité de reconstruction s'accompagne d'une baisse de la complexité au niveau de la synchronisation entre les voies et d'une calibration. La complexité a été déplacée de la partie matérielle vers la partie logicielle du système, ce qui est dans la tendance actuelle. Nous considérons cette architecture de convertisseurs entrelacés dans la suite de ce chapitre.

La figure 4.1 fait le parallèle entre l'architecture proposée et le modèle d'échantillonnage résultant qui est un schéma PNSL. On note $T_e = \frac{1}{f_e}$ la période d'échantillonnage sur chaque voie. Comme présenté dans le paragraphe 1.3.3.2, ce schéma d'échantillonnage est composé de L séquences uniformes $\mathbf{X}_{\Delta_i} = \{X(nT_e + \Delta_i), n \in \mathbb{Z}\}$, $i = 0, \dots, L-1$ entrelacées temporellement, avec des conditions sur les valeurs de Δ_i (1.29) qui conditionnent la répartition des échantillons.

Nous nous plaçons dans la suite dans le cadre adopté dans le chapitre 3. Nous considérons un

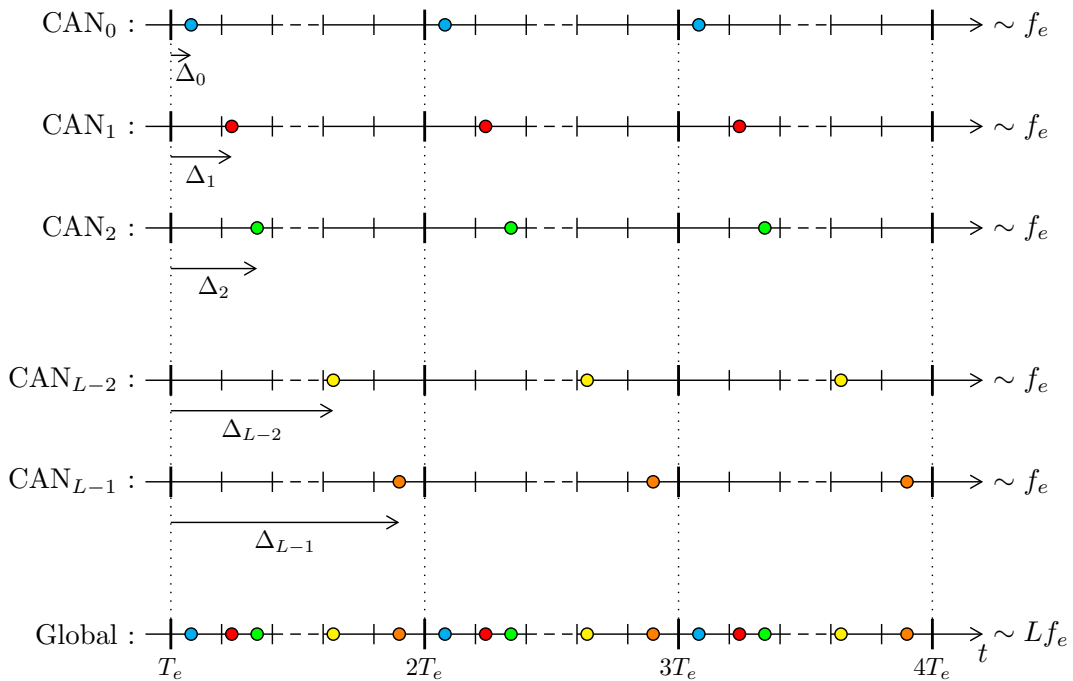
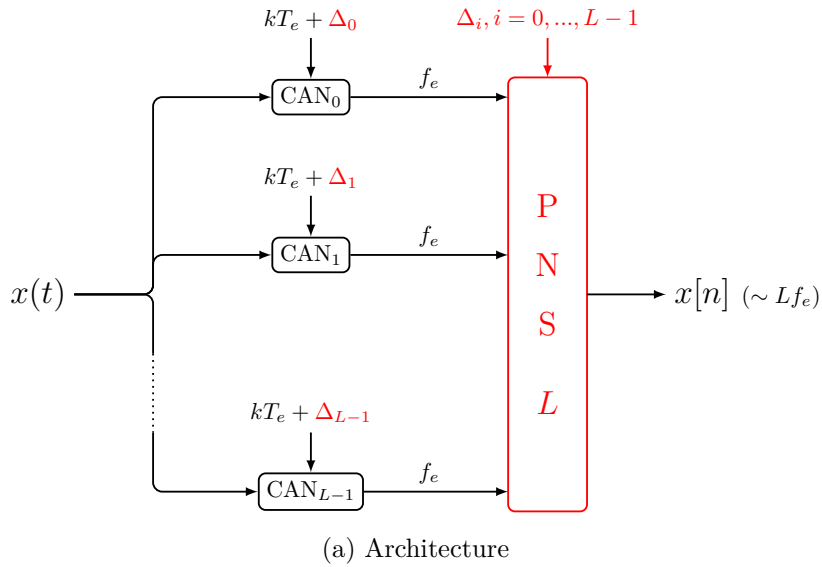


FIGURE 4.1 – Architecture et modèle d'échantillonnage proposés d'un convertisseur entrelacé à L voies désynchronisé et correction numérique grâce à un bloc de reconstruction PNSL

signal passe-bande modélisé comme un processus aléatoire stationnaire et dont la densité spectrale est positionnée comme représenté sur la figure 3.1. Ce signal est échantillonné à l'aide d'un schéma d'échantillonnage PNS2 constitué de deux séquences d'échantillonnage uniforme à la fréquence $f_e = 1$ sans perte de généralité. Nous formons ainsi les deux séquences uniformes $\mathbf{X}_0 = \{x(n), n \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathbf{X}_\Delta = \{x(n + \Delta), n \in \mathbb{Z}\}$, caractérisées par le décalage $\Delta \in]0, 1[$ entre elles. Nous mentionnerons le cas échéant la présence de suréchantillonnage si nous souhaitons utiliser les filtrages conjoints présentés dans le chapitre 3. Nous présentons les méthodes d'estimation de la désynchronisation dans le cas d'un convertisseur composé de 2 voies mais nous montrerons à la fin de cette partie que notre raisonnement peut être étendu au cas général d'un convertisseur composé de L voies.

Lorsque le décalage Δ entre les voies est connu, la reconstruction exacte s'effectue de manière classique grâce à la formule (3.35) que nous rappelons ici :

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n^{(0,H)}(t, \Delta) x(n) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n^{(\Delta,H)}(t, \Delta) x(n + \Delta). \quad (4.1)$$

Nous avons légèrement modifié l'appellation des fonctions de reconstruction $r_n^{(0,H)}(t, \Delta)$ et $r_n^{(\Delta,H)}(t, \Delta)$ par rapport à celle fournie dans (3.35) pour faire apparaître le fait qu'elles dépendent toutes deux de Δ . Cette dépendance sera utilisée dans la partie suivante pour caractériser la désynchronisation.

Dans le cas où le signal occupe toute la bande de Nyquist et où sa fréquence centrale est donc $f_c = k$, les fonctions de reconstruction s'expriment simplement selon (partie 3.5.2.2) [CL12a] :

$$\begin{cases} r_n^{(0,H^R)}(t, \Delta) = \frac{\sin [2\pi k(\Delta - t)]}{\sin [2\pi k\Delta]} \text{sinc} [\pi(t - n)] \\ r_n^{(\Delta,H^R)}(t, \Delta) = \frac{\sin [2\pi kt]}{\sin [2\pi k\Delta]} \text{sinc} [\pi(t - n - \Delta)] \end{cases} \quad (4.2)$$

En présence de suréchantillonnage, nous pourrions remplacer ces fonctions de reconstruction par les fonctions adéquates obtenues grâce à l'introduction d'un filtre conjoint trapézoïdal (partie 3.5.2.3) ou en cosinus surélevé (partie 3.5.2.4).

4.2.2 Impact de la désynchronisation

Les formules de reconstruction (4.2) supposent que le retard Δ est connu *a priori* pour fournir une reconstruction sans erreur. Or, pour une modélisation réaliste des CAN entrelacés, le retard

doit être considéré comme inconnu lors de la mise en fonctionnement du système. En effet, en raison d'imperfections lors de la conception de l'architecture entrelacée, le décalage effectif peut être différent du décalage prévu. De plus, le décalage peut varier en phase de fonctionnement, en raison principalement de contraintes thermiques. Néanmoins, ces variations peuvent être supposées lentes par rapport à la dynamique du système [Elb03]. En conséquence, nous considérerons par la suite des valeurs fixes de la désynchronisation pendant la durée d'observation.

Nous nous replaçons dans le contexte du schéma orthogonal de reconstruction (figure 3.2a) présenté dans la partie 3.3. Dans le cas idéal où le décalage Δ est connu et utilisé pour la reconstruction, la relation d'orthogonalité (3.15) est vérifiée. En formant la séquence $\mathbf{D} = \{D_n, n \in \mathbb{Z}\}$ qui s'écrit $D_n = x(n + \Delta) - \mu_\Delta[\mathbf{X}_0](n)$ (3.12), cette relation d'orthogonalité entre la séquence \mathbf{D} et la première séquence d'échantillons \mathbf{X}_0 s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D_n x^*(m)] &= 0, \quad \forall (n, m) \in \mathbb{Z}, \\ \mathbb{E}[(x(n + \Delta) - \mu_\Delta[\mathbf{X}_0](n))x^*(m)] &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

D'après (3.13), le filtre μ_Δ s'écrit :

$$\mu_\Delta(f) = e^{2i\pi f \Delta} \frac{S_\Delta}{S_0}(f) \quad (4.4)$$

en fonction du spectre replié défini à partir de la densité spectrale du signal par 3.14 :

$$S_u(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi n u} S_x(f + n). \quad (4.5)$$

Il est donc clair que la construction du filtre μ_Δ nécessite la connaissance de Δ et, dans ce cas, le schéma orthogonal obtenu est sans erreur comme nous l'avons présenté dans la partie 3.3.

Dans le cas où la désynchronisation est inconnue, nous utilisons un retard erroné noté $\tilde{\Delta}$ pour la reconstruction PNS2, alors que les séquences d'échantillons du PNS2 sont en réalité \mathbf{X}_0 et \mathbf{X}_Δ . La relation (4.3) n'étant plus valable, la projection n'est plus orthogonale. Dans ce cas, (4.3) devient :

$$\mathbb{E}[(x(n + \Delta) - \mu_{\tilde{\Delta}}[\mathbf{X}_0](n))x^*(m)] \neq 0. \quad (4.6)$$

Ainsi, la reconstruction n'est plus sans erreur et s'écrit sous la forme :

$$x^{(\tilde{\Delta})}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n^{(0,H)}(t, \tilde{\Delta})x(n) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n^{(\Delta,H)}(t, \tilde{\Delta})x(n + \Delta) \quad (4.7)$$

En considérant par exemple le cas d'un filtre rectangulaire conjoint, les formules de reconstruction s'écrivent :

$$\begin{cases} r_n^{(0,HR)}(t, \tilde{\Delta}) = \frac{\sin [2\pi k(\tilde{\Delta} - t)]}{\sin [2\pi k\tilde{\Delta}]} \operatorname{sinc} [\pi(t - n)] \\ r_n^{(\Delta,HR)}(t, \tilde{\Delta}) = \frac{\sin [2\pi kt]}{\sin [2\pi k\tilde{\Delta}]} \operatorname{sinc} [\pi(t - n - \tilde{\Delta})] \end{cases} \quad (4.8)$$

en remplaçant Δ par $\tilde{\Delta}$ dans l'expression des fonctions de reconstruction. De la même manière, nous pouvons écrire les formules de reconstruction pour les deux autres filtres conjoints considérés dans le chapitre 3 et nous allons nous intéresser à l'EQMN de reconstruction obtenue en présence de désynchronisation.

Tout d'abord, il est possible de calculer l'EQMN théorique de reconstruction. Nous montrons dans la partie 4.4.2 dédiée à l'étude de la stationnarité du signal reconstruit que cette erreur théorique s'exprime par :

$$\begin{aligned} \text{EQMN} &= \frac{\mathbb{E} [|x(t) - x(\tilde{\Delta})(t)|^2]}{\mathbb{E} [|x(t)|^2]} \\ &= 4 \left(\frac{\sin [2\pi kt]}{\sin [2\pi k\tilde{\Delta}]} \right)^2 \frac{\int_0^\infty \sin^2 [\pi f(\Delta - \tilde{\Delta})] S_x(f) df}{\int_0^\infty S_x(f) df}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Nous constatons que l'erreur de reconstruction dépend du temps sauf lorsque $\tilde{\Delta} = \Delta$ et présente un comportement particulier illustré sur la figure 4.2. En effet, étant donné que la reconstruction diverge pour $\tilde{\Delta} = \frac{p}{2k}$, $p \in \mathbb{Z}$ (dans ce cas, le sinus au dénominateur des fonctions de reconstruction (4.8) s'annule), l'EQMN tend vers l'infini en ces points de discontinuité tracés en pointillés sur la figure 4.2. Par ailleurs, l'EQMN présente un comportement oscillant avec des passages par des minima locaux entre deux valeurs interdites de $\tilde{\Delta}$ et un minimum global atteint pour Δ . Nous verrons par la suite que ce comportement dû au caractère passe-bande du signal entraîne une indétermination lors de l'estimation du décalage et nous expliquerons les hypothèses à envisager pour lutter contre ce problème.

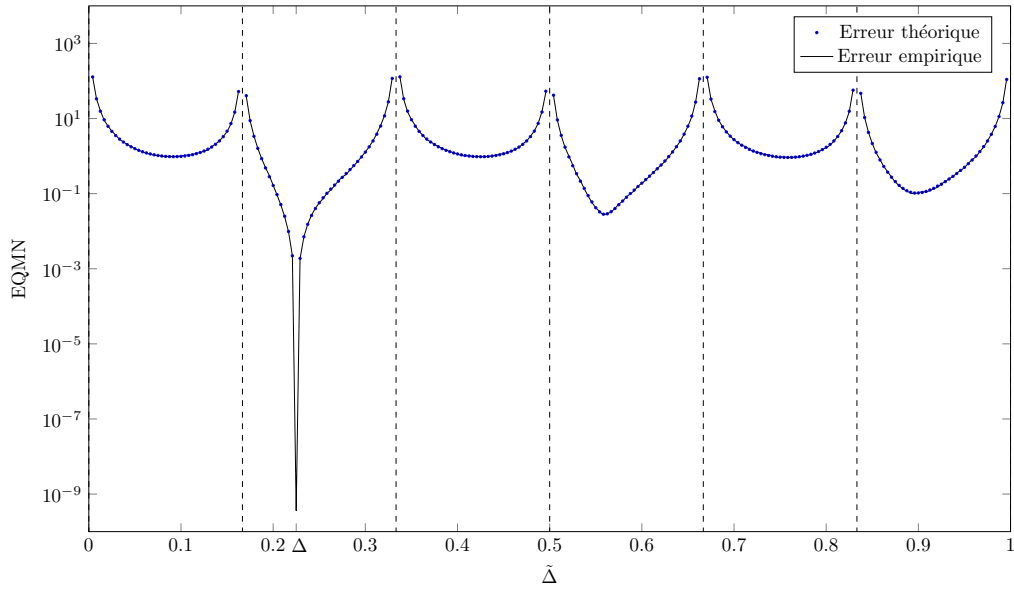
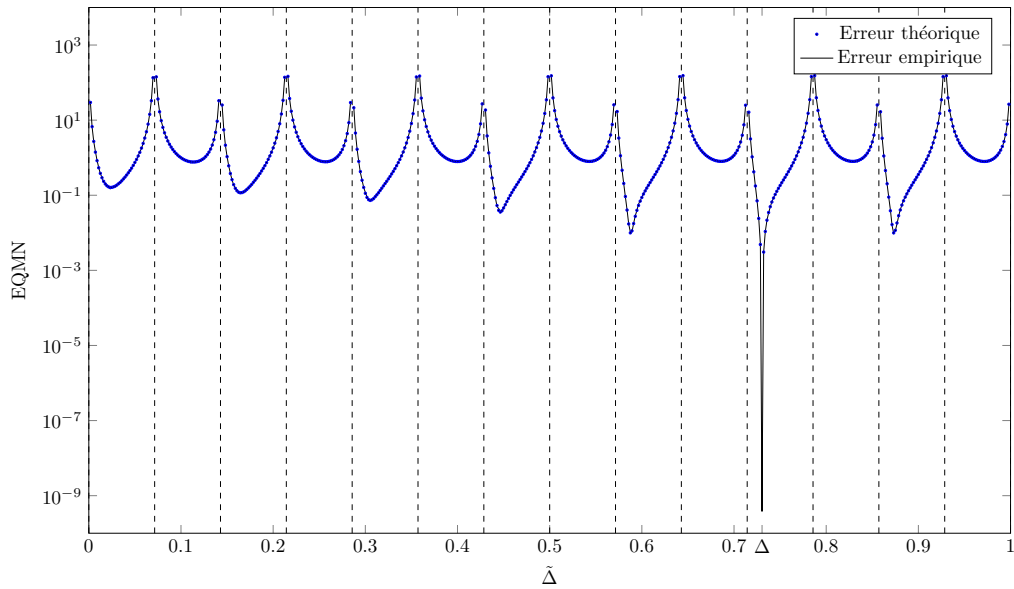
Nous avons également tracé, sur la figure 4.2, l'EQMN de reconstruction obtenue de manière empirique dans le cas de l'utilisation de la formule de reconstruction (4.7) en fonction du retard $\tilde{\Delta}$

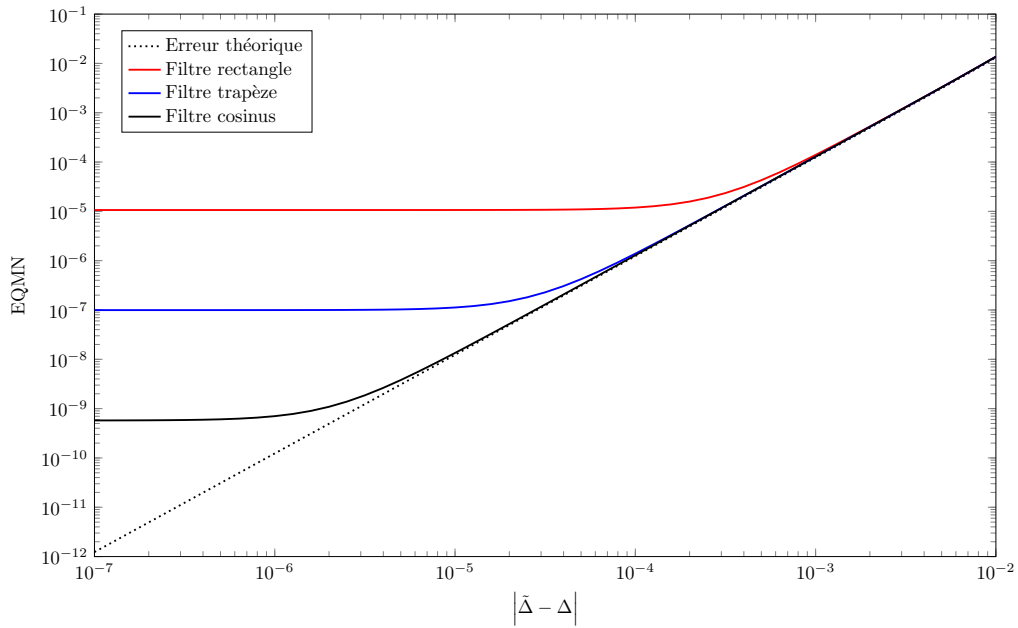
variant sur $]0, 1[$ et ceci pour un signal appartenant à la bande de Nyquist de numéro $k = 3$ (figure 4.2a) et $k = 7$ (figure 4.2b). Cette reconstruction a été effectuée pour un signal modélisé comme un processus aléatoire échantillonné à l'aide d'un schéma PNS2 caractérisé par un retard $\Delta = 0.2250$ dans le cas $k = 3$ et $\Delta = 0.7304$ dans le cas $k = 7$. Nous avons effectué la reconstruction à l'aide de $N = 100$ échantillons sur chaque voie. L'EQMN de reconstruction empirique a été évaluée pour $n_{ite} = 100$ itérations et comparée avec la valeur théorique calculée à partir de la densité spectrale du signal.

La comparaison entre les trois filtres conjoints nous permet de constater que la seule différence a lieu au voisinage de Δ où les filtres permettent d'améliorer la reconstruction selon le comportement attendu présenté dans le chapitre 3. Pour des raisons de lisibilité, la figure 4.2 représente l'EQMN pour le filtre en cosinus surélevé seulement, celui-ci possédant les meilleures performances. Le comportement dans le voisinage en question est représenté sur la figure suivante 4.3. Lorsque $\tilde{\Delta}$ s'éloigne de Δ , c'est-à-dire en présence de désynchronisation, le comportement est identique pour les trois filtres. Nous nous concentrerons donc dans la suite sur le filtre rectangulaire pour illustrer nos développements.

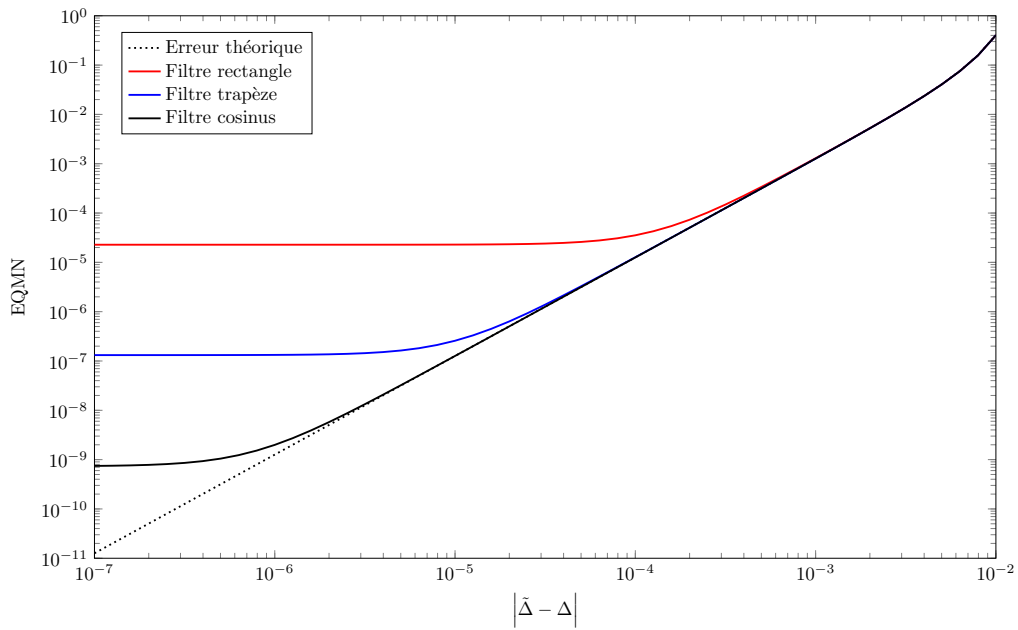
La figure 4.3 présente le tracé de l'EQMN en fonction de la différence $|\tilde{\Delta} - \Delta|$. Nous constatons que chaque cas de filtrage conjoint atteint une valeur seuil d'EQMN qui dépend du nombre d'échantillons considérés en entrée tandis que la courbe théorique continue de décroître car l'EQMN est nulle en théorie pour $\tilde{\Delta} = \Delta$. Cette figure montre que, pour une différence inférieure à 10^{-4} entre $\tilde{\Delta}$ et Δ , les performances dans le cas du filtre rectangulaire atteignent le seuil d'EQMN et permettent de retrouver en sortie une reconstruction satisfaisante. De la même manière, pour une différence respectivement inférieure à 10^{-5} et 10^{-6} entre $\tilde{\Delta}$ et Δ , nous retrouvons des performances satisfaisantes pour les filtres trapézoïdal et en cosinus surélevé. Cette figure permet d'évaluer l'estimation de Δ requise dans un cadre donné (ici $N = 100$ échantillons en entrée qui sera notre cas d'étude) pour obtenir des performances de reconstruction satisfaisantes.

Nous constatons que l'estimation du décalage est une problématique d'intérêt car l'EQMN augmente très vite lorsque l'erreur sur l'estimation de la désynchronisation augmente. Nous avons donc mis en lumière le besoin d'une estimation précise du paramètre Δ pour garder des performances de

(a) Bande de Nyquist $k = 3$ et $\Delta = 0.2250$ (b) Bande de Nyquist $k = 7$ et $\Delta = 0.7304$ FIGURE 4.2 – EQMN de reconstruction en présence de désynchronisation en fonction de $\tilde{\Delta}$



(a) Bande de Nyquist $k = 3$ et $\Delta = 0.2250$



(b) Bande de Nyquist $k = 7$ et $\Delta = 0.7304$

FIGURE 4.3 – EQMN de reconstruction en présence de désynchronisation en fonction de $|\tilde{\Delta} - \Delta|$

reconstruction satisfaisantes et nous détaillons maintenant la stratégie d'estimation proposée.

4.2.3 Stratégie d'estimation

Afin de lutter contre les erreurs de désynchronisation, nous proposons une stratégie d'estimation. Cette stratégie d'estimation utilise le schéma de reconstruction PNS2 détaillé dans la partie 3.3.

Comme expliqué dans la partie précédente, les variations du retard sont supposées lentes par rapport au temps nécessaire à l'estimation et nous considérons en conséquence une valeur du retard Δ fixe pendant la durée d'observation. Il sera néanmoins possible de suivre les variations en mettant en place une méthode opérant de façon périodique ou de manière adaptative.

Nous présentons dans cette thèse deux méthodes originales d'estimation du décalage entre les voies d'un schéma d'échantillonnage PNS2. La première méthode se place dans un cadre supervisé et utilise un signal aux propriétés connues, appelé signal d'apprentissage, transmis durant des phases de pause de la transmission du signal d'intérêt. La connaissance des propriétés spectrales du signal d'apprentissage nous permet d'obtenir des formules explicites de l'estimée du retard. La deuxième méthode effectue une estimation aveugle et se base sur les propriétés de la reconstruction PNS2 du signal d'intérêt. En particulier l'hypothèse de stationnarité du signal reconstruit n'est plus valable en cas de désynchronisation. La méthode proposée peut être utilisée pour tout type de signal possédant la propriété de stationnarité au sens large, c'est-à-dire pour les signaux de télécommunications selon le modèle classique.

Sans perte de généralité, nous nous concentrons sur le cas $L = 2$ dans la suite mais les résultats peuvent être étendus au cas général d'un convertisseur à L voies. En effet, en choisissant un CAN comme référence, le système peut être calibré en effectuant une estimation successive deux-à-deux de chaque voie par rapport à la référence. Nous pouvons donc utiliser la stratégie d'estimation proposée pour le PNS2. Le fonctionnement de ces estimations successives est résumé sur la figure 4.4. L'état initial est représenté sur la figure 4.4a, toutes les voies sont non calibrées et une voie de référence est choisie. Le retard sur chaque voie est estimé par rapport à la voie de référence (à l'étape i sur 4.4c par exemple) et finalement le système est entièrement calibré après $L - 1$ étapes d'estimation (figure 4.4d).

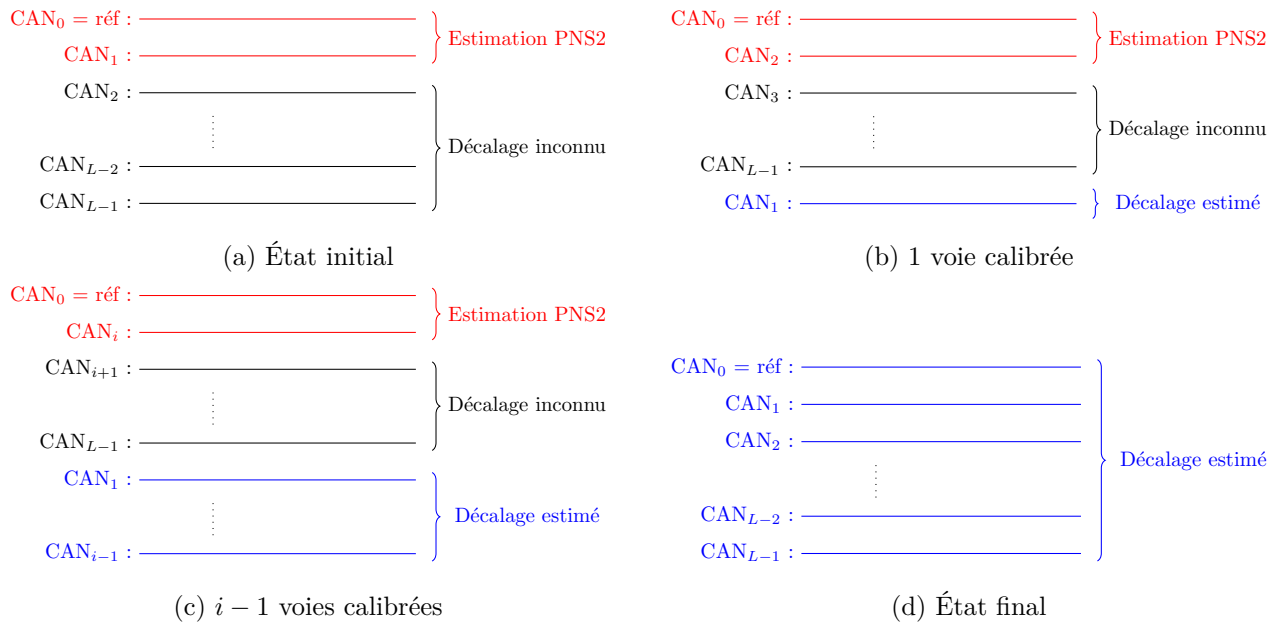


FIGURE 4.4 – Calibration d’un échantillonneur entrelacé à L voies par estimation successive deux-à-deux dans un schéma PNS2

4.3 Estimation supervisée de la désynchronisation

4.3.1 Signal d’apprentissage

La méthode d’estimation supervisée utilise un signal d’apprentissage dont les propriétés spectrales sont, par hypothèse, connues [VCL⁺15a, VCL⁺15b]. L’information sur la densité spectrale du signal sera utilisée pour obtenir un critère théorique d’erreur quadratique d’estimation que nous comparerons à un critère empirique calculé à partir des séquences d’échantillons. Nous proposerons des expressions analytiques de l’estimée du retard dans le cas de deux signaux d’apprentissage simples : une sinusoïde et un bruit à bande limitée.

4.3.2 Principe de la méthode d’estimation supervisée

Nous considérons dans cette partie un signal d’apprentissage noté $\mathbf{X}^{\text{app}} = \{x^{\text{app}}(t), t \in \mathbb{R}\}$ de densité spectrale de puissance $S_{x^{\text{app}}}(f)$. Ce signal est échantillonné grâce à un schéma PNS2, ce qui

conduit à deux séquences d'échantillons $\mathbf{X}_0^{\text{app}}$ et $\mathbf{X}_\Delta^{\text{app}}$. Le principe de la méthode supervisée est d'utiliser ces séquences d'échantillons pour en tirer un critère quadratique dont nous allons comparer l'expression théorique avec une estimation empirique issue des échantillons.

Considérons le critère quadratique caractérisant le décalage entre les deux séquences d'échantillonnage et défini par :

$$\sigma_\Delta^2 = \text{E} \left[|x^{\text{app}}(n + \Delta) - x^{\text{app}}(n)|^2 \right]. \quad (4.10)$$

Ce critère dépend du décalage Δ entre les deux voies et grâce l'isométrie fondamentale (3.4), nous pouvons l'exprimer sous la forme :

$$\sigma_\Delta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{2i\pi f \Delta} - 1|^2 S_{x^{\text{app}}}(f) df. \quad (4.11)$$

Nous supposons que le signal d'apprentissage est à bande limitée et que $S_{x^{\text{app}}}(f)$ est contenue dans une bande $\mathcal{B}_{\mathbf{X}^{\text{app}}}$. Dans ce cas, l'équation (4.11) devient :

$$\sigma_\Delta^2 = \int_{\mathcal{B}_{\mathbf{X}^{\text{app}}}} |e^{2i\pi f \Delta} - 1|^2 S_{x^{\text{app}}}(f) df \quad (4.12)$$

qui peut être simplifiée par l'utilisation de relations trigonométriques :

$$\begin{aligned} |e^{2i\pi f \Delta} - 1|^2 &= (\cos [2\pi f \Delta] - 1)^2 + \sin^2 [2\pi f \Delta] \\ &= 2 - 2 \cos [2\pi f \Delta]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Nous avons donc :

$$\sigma_\Delta^2 = 2 \int_{\mathcal{B}_{\mathbf{X}^{\text{app}}}} (1 - \cos [2\pi f \Delta]) S_{x^{\text{app}}}(f) df. \quad (4.14)$$

Ainsi, en combinant le calcul théorique de σ_Δ^2 obtenu à partir de (4.14) avec le résultat empirique obtenu grâce à une estimation de (4.10) à partir des échantillons disponibles sur chaque voie du PNS2, il est possible de trouver une estimation de Δ . Cette stratégie d'estimation nécessite la connaissance de $S_{x^{\text{app}}}(f)$ qui apparaît dans (4.14).

4.3.3 Expressions analytiques de l'estimée de la désynchronisation

Dans la suite, nous proposons des expressions simples de l'estimée de Δ pour deux signaux d'apprentissage particuliers. Le premier correspond à une sinusoïde tandis que le deuxième est un

bruit à bande limitée. La connaissance de l'expression de la densité spectrale de ces deux signaux nous permet de simplifier la formulation théorique de l'erreur quadratique (4.14). Une méthode par séquence d'apprentissage semi-aveugle peut également être développée en modifiant le critère d'intérêt et nous présenterons cette méthode dans la partie 4.3.4.

4.3.3.1 Signal d'apprentissage sinusoïdal

Dans les méthodes de calibration proposées dans la littérature, les signaux d'apprentissage sont couramment modélisés comme des sinusoïdes car celles-ci conduisent à des développements simples, tout en étant faciles à générer. Nous proposons ici une méthode basée sur la connaissance de la densité spectrale du signal d'apprentissage sinusoïdal pour simplifier le critère précédent. Nous utiliserons une sinusoïde générée à une fréquence variable afin de lever une indécision inhérente au fonctionnement de notre système qui échantillonne de manière passe-bande selon le critère de Landau.

Pour un signal sinusoïdal à la fréquence f_0 , la densité spectrale s'écrit : $S_{x^{\text{app}}}(f) = \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$, $k - \frac{1}{2} < f_0 < k + \frac{1}{2}$ au sens des distributions, où $\delta(f)$ représente la distribution de Dirac. L'indice k représente le numéro de la bande de Nyquist dans laquelle nous travaillons, de sorte que la sinusoïde est traitée comme un signal passe-bande et échantillonnée selon le critère de Landau en considérant toute la bande de Nyquist. A partir de la connaissance de la densité spectrale, l'équation (4.14) se simplifie en :

$$\sigma_{\Delta}^2 = 2(1 - \cos[2\pi f_0 \Delta]). \quad (4.15)$$

Nous pouvons définir une fonction $\sigma_{\tilde{\Delta}}^2$ en fonction de $\tilde{\Delta}$ qui varie sur l'intervalle $]0, 1[$:

$$\sigma_{\tilde{\Delta}}^2 = g(\tilde{\Delta}) = 2\left(1 - \cos\left[2\pi f_0 \tilde{\Delta}\right]\right) \quad (4.16)$$

que nous allons utiliser pour obtenir une estimation de Δ par inversion :

$$\hat{\Delta} = g^{-1}(\sigma_{\hat{\Delta}}^2) \quad (4.17)$$

pour la valeur du critère $\sigma_{\hat{\Delta}}^2$ calculée de manière empirique à partir des échantillons du signal grâce à (4.10). Par ailleurs, la fonction $\sigma_{\tilde{\Delta}}^2$ est périodique de période $\frac{1}{2f_0}$.

La fonction $\sigma_{\tilde{\Delta}}^2$ (4.16) a été tracée sur les figures 4.5a et 4.5b en fonction de $\tilde{\Delta}$ pour deux valeurs différentes de f_0 dans la bande de Nyquist $k = 7$ (respectivement $f_{0,1} = 7.0843$ et $f_{0,2} = 7.2797$). Nous remarquons que la fonction ne représente pas une bijection quelle que soit la valeur de f_0 . Ceci est dû au fait que nous travaillons pour $k > 0$.

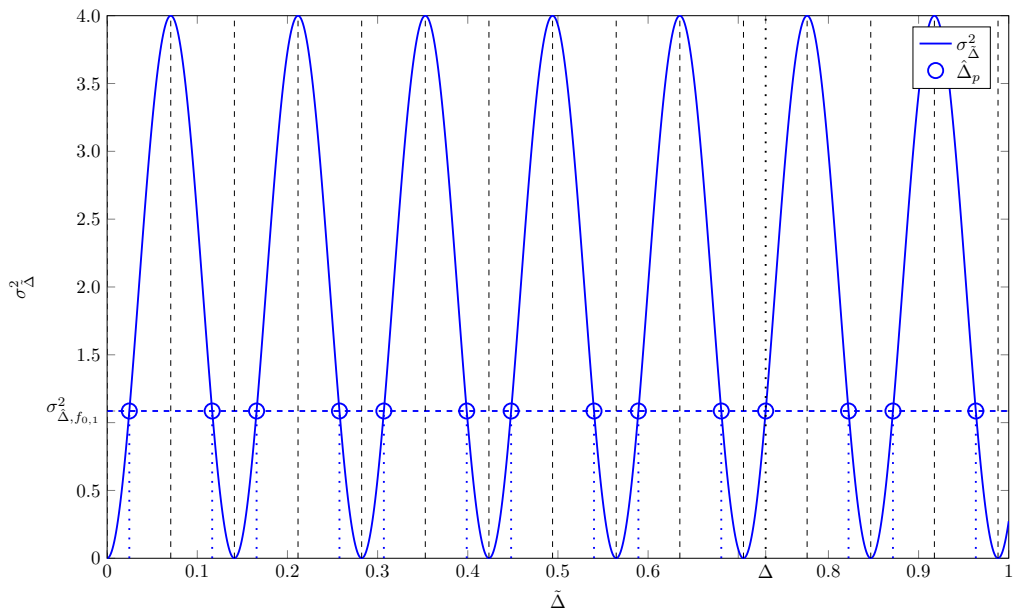
Ainsi, pour une valeur cible de $\sigma_{\tilde{\Delta}}^2$, plusieurs valeurs de $\tilde{\Delta}$ conviennent, chacune appartenant à une période de la fonction sinusoidale (4.16). En considérant la restriction à chacune des périodes $[\frac{p}{2f_0}, \frac{p+1}{2f_0}]$, $p = 0, \dots, [2f_0]$ sur lesquelles la fonction (4.16) est bijective, il est possible d'utiliser la fonction arc cosinus pour obtenir une inversion. Nous obtenons donc les valeurs $\hat{\Delta}_p$:

$$\hat{\Delta}_p = \begin{cases} \frac{1}{2\pi f_0} \arccos \left[1 - \frac{\sigma_{\tilde{\Delta}}^2}{2} \right] + \frac{p}{2f_0}, & p \text{ pair} \\ -\frac{1}{2\pi f_0} \arccos \left[1 - \frac{\sigma_{\tilde{\Delta}}^2}{2} \right] + \frac{p+1}{2f_0}, & p \text{ impair} \end{cases}, \quad p = 0, \dots, [2f_0]. \quad (4.18)$$

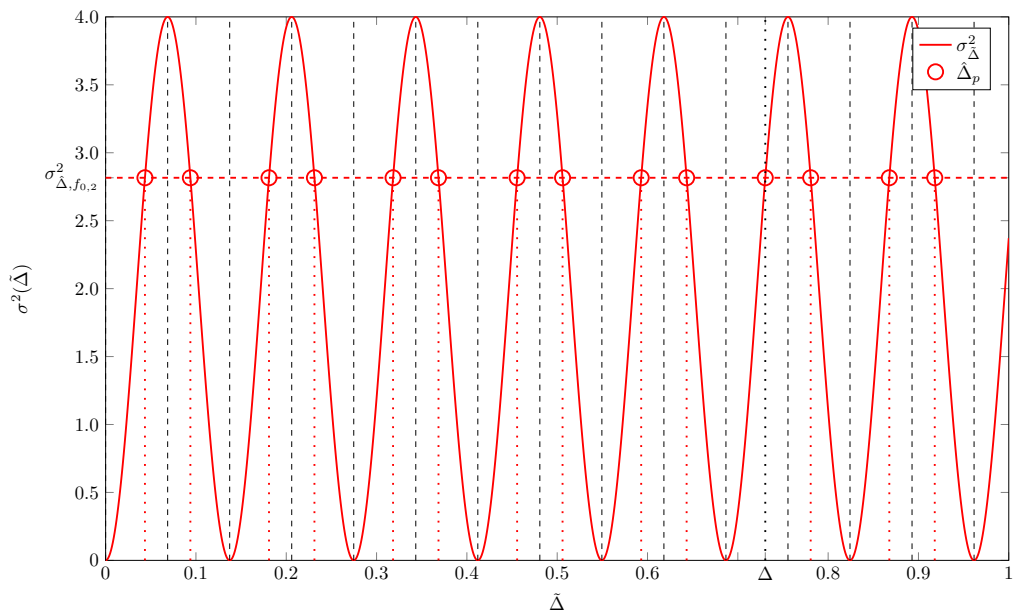
représentés sur les figures 4.5a et 4.5b par les intersections entre la fonction $\sigma_{\tilde{\Delta}}^2$ et les critères calculés via (4.10) appelés respectivement $\sigma_{\tilde{\Delta},f_{0,1}}^2$ et $\sigma_{\tilde{\Delta},f_{0,2}}^2$.

En comparant les valeurs de $\hat{\Delta}_p$ obtenues dans le cas des deux fréquences f_0 (figure 4.5c), nous remarquons qu'une seule valeur se retrouve dans les deux cas, correspondant à la meilleure estimée de Δ , tandis que les autres valeurs sont différentes selon la valeur de f_0 . Ainsi, en itérant le procédé pour différentes valeurs de f_0 , nous obtenons finalement une estimation de Δ . La figure 4.6a montre le tracé de l'histogramme des valeurs $\hat{\Delta}_p$ obtenues pour $N_{\text{ite}} = 100$ itérations avec une fréquence f_0 tirée aléatoirement dans la bande de Nyquist $k = 7$ pour chaque itération. Ce tracé nous permet de confirmer que seules les valeurs de $\hat{\Delta}_p$ proches de Δ se retrouvent le plus lors des itérations. Ainsi, en ne gardant que ces candidats notés $\hat{\Delta}$, nous obtenons une estimation de Δ que nous avons utilisé pour tracer la figure 4.6b présentant les résultats de l'erreur quadratique d'estimation $E[|\hat{\Delta} - \Delta|^2]$ en fonction de N le nombre d'échantillons en entrée (utilisés pour calculer $\sigma_{\tilde{\Delta}}^2$ grâce à (4.10)) et pour $N_{\text{ite}} = 1000$ itérations. Cette erreur quadratique peut s'exprimer de manière classique en fonction du biais et de la variance de l'estimation selon :

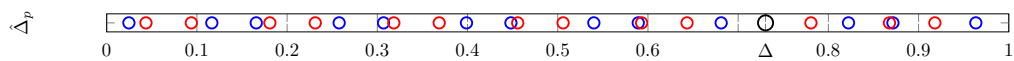
$$E[|\hat{\Delta} - \Delta|^2] = \left(E[\hat{\Delta}] - \Delta \right)^2 + \text{Var}[\hat{\Delta}]. \quad (4.19)$$



(a) $f_{0,1} = 7.0843$



(b) $f_{0,2} = 7.2797$



(c) Comparaison des $\hat{\Delta}_p$ obtenus dans le cas des deux sinusoides

FIGURE 4.5 – Fonction $\sigma_{\hat{\Delta}}^2$ pour deux sinusoides à des fréquences différentes et comparaison des $\hat{\Delta}_p$ obtenus dans chaque cas

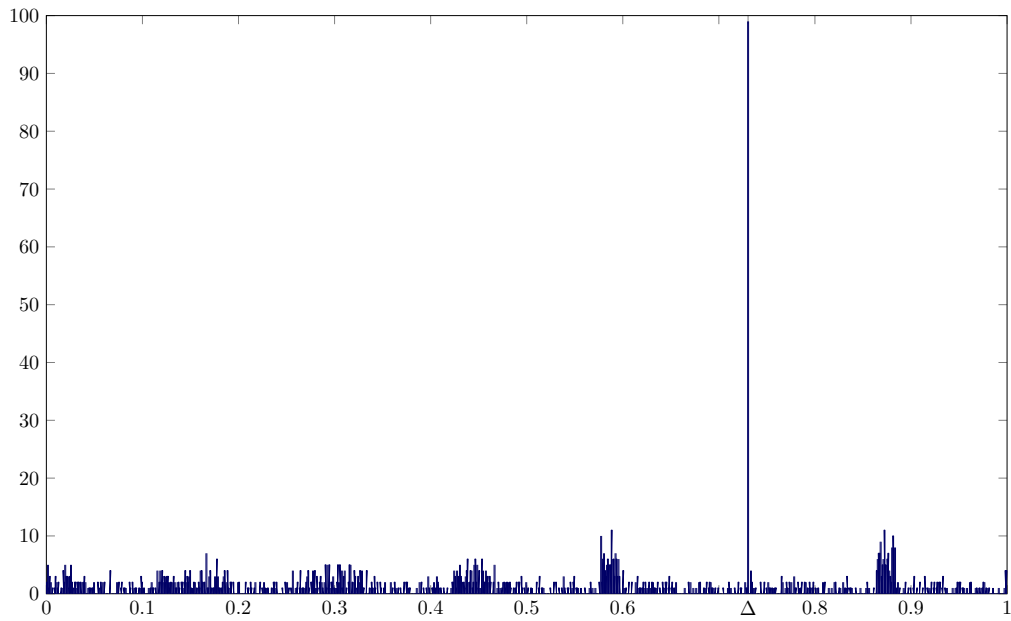
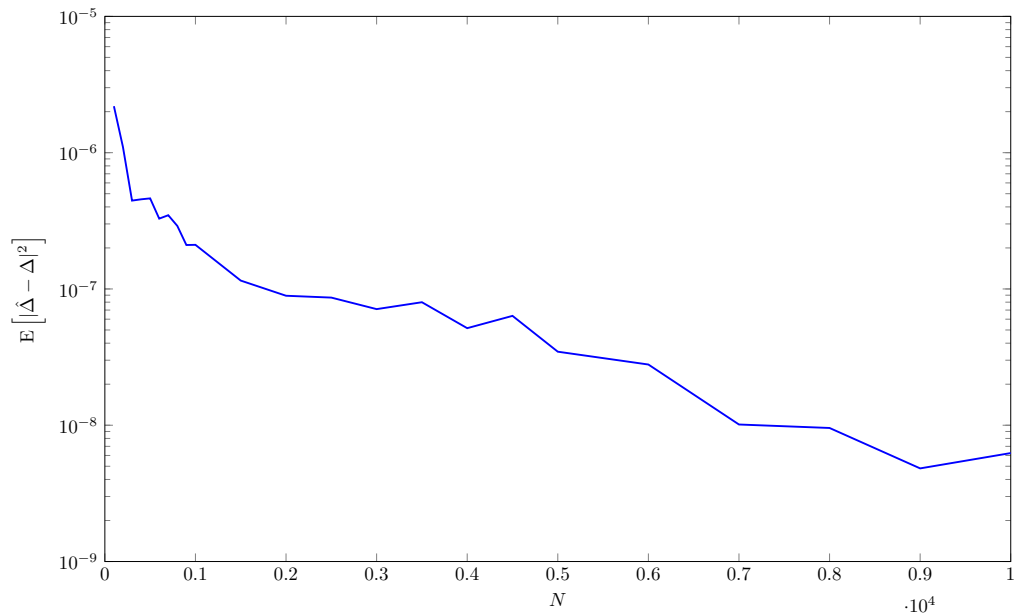
(a) Histogramme des candidats $\hat{\Delta}_p$ pour 1000 classes et $N_{\text{ite}} = 100$ (b) Erreur quadratique d'estimation $E[|\hat{\Delta} - \Delta|^2]$ en fonction du nombre N d'échantillons pour $N_{\text{ite}} = 1000$

FIGURE 4.6 – Résultats de l'estimation par la méthode supervisée avec signal d'apprentissage sinusoïdal

Finalement, en nous référant à la figure 4.3, nous voyons que le système retrouve des performances satisfaisantes après estimation en termes d'EQMN de reconstruction.

4.3.3.2 Signal d'apprentissage de type bruit à bande limitée

Un signal d'apprentissage de type bruit à bande limitée peut être utilisé à moindre coût si l'on considère que le canal de transmission est modélisé comme un canal gaussien. Ainsi lors des phases de pause de la transmission, le signal en entrée du système est un bruit gaussien que l'on peut utiliser comme signal d'apprentissage afin de se passer d'une étape d'injection comme dans le cas d'un signal sinusoïdal. Néanmoins, nous aurons tout de même besoin de filtrer le bruit par un filtre de fréquence centrale variable comme nous allons le détailler.

Considérons le cas général d'un bruit à bande limitée positionné spectralement dans la $k^{\text{ème}}$ bande de Nyquist mais ne couvrant pas toute la bande. En effet, de manière analogue à la partie précédente où la sinusoïde était générée à une fréquence f_0 variable, nous supposons maintenant que le bruit est centré sur une fréquence f_c appartenant à la bande de Nyquist et nous ferons varier f_c pour obtenir une estimation de Δ .

Le signal d'apprentissage a donc une densité spectrale $S_{x^{\text{app}}}(f) = 1$ sur $(-f_c - \frac{B}{2}, -f_c + \frac{B}{2}) \cup (f_c - \frac{B}{2}, f_c + \frac{B}{2})$ avec $0 < B < 1$ qui représente la largeur de bande du signal d'apprentissage, et $S_{x^{\text{app}}}(f) = 0$ ailleurs. Nous supposons donc $f_c \in (k + \frac{B-1}{2}, k + \frac{1-B}{2})$, de sorte que le signal d'apprentissage soit entièrement contenu dans la bande de Nyquist.

Avec cette expression de la DSP, l'équation (4.14) se simplifie en :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\Delta}^2 &= 2 \int_{-f_c - \frac{B}{2}}^{-f_c + \frac{B}{2}} (1 - \cos [2\pi f \Delta]) df + 2 \int_{f_c - \frac{B}{2}}^{f_c + \frac{B}{2}} (1 - \cos [2\pi f \Delta]) df \\
&= 4 \left(B - \frac{1}{2\pi\Delta} \left(\sin \left[2\pi \left(f_c + \frac{B}{2} \right) \Delta \right] - \sin \left[2\pi \left(f_c - \frac{B}{2} \right) \Delta \right] \right) \right) \\
&= 4 \left(B - \frac{1}{2\pi\Delta} (2 \cos [2\pi f_c \Delta] \sin [\pi B \Delta]) \right) \\
&= 4B(1 - \cos [2\pi f_c \Delta] \operatorname{sinc} [\pi B \Delta]).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Nous pouvons définir une fonction σ_{Δ}^2 en fonction de $\tilde{\Delta}$ qui varie sur l'intervalle $]0, 1[$:

$$\sigma_{\Delta}^2 = g(\tilde{\Delta}) = 4B \left(1 - \cos [2\pi f_c \tilde{\Delta}] \operatorname{sinc} [\pi B \tilde{\Delta}] \right). \tag{4.21}$$

Celle-ci va être utilisée pour reprendre le raisonnement présenté dans la partie précédente consistant à calculer $\sigma_{\hat{\Delta}}^2$ à partir des échantillons selon (4.10) et à isoler les candidats possibles $\hat{\Delta}_p$ afin de déterminer lequel représente la meilleure estimation de Δ . Etant donné que la présence du sinus cardinal dans la fonction (4.21) rend impossible l'inversion de cette fonction, on peut obtenir les valeurs de $\hat{\Delta}_p$ en se reportant à une courbe de référence calculée au préalable. En pratique, cette courbe peut être stockée en mémoire sous forme d'une table permettant d'identifier les valeurs des candidats correspondants.

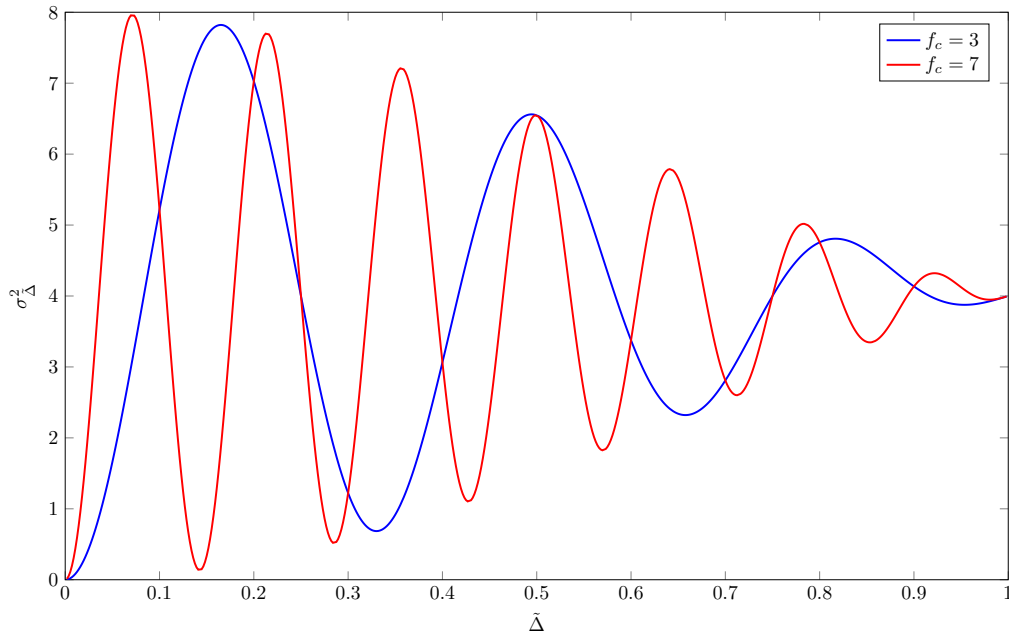
La figure 4.7 présente le tracé de $\sigma_{\tilde{\Delta}}^2$ (4.21) en fonction de $\tilde{\Delta}$ variant sur $]0, 1[$. Ce tracé est comparé pour diverses valeurs de f_c (à B fixé) et pour diverses valeurs de B (à f_c fixé) afin de tester l'influence de ces deux paramètres. Nous constatons que cette fonction présente un caractère oscillant se rapprochant de ce que nous avons observé dans la partie précédente, avec néanmoins une atténuation lorsque $\tilde{\Delta}$ augmente en raison de la présence du terme en sinus cardinal dans (4.21). Nous remarquons par ailleurs que l'augmentation de k provoque de plus en plus d'oscillations car le signal se trouve à des fréquences plus élevées, tandis que la diminution de la bande B du signal entraîne une atténuation des oscillations. Nous choisissons dans la suite de considérer une bande $B = 0.5$ et une fréquence f_c variable dans la bande de Nyquist $k = 7$.

Nous avons représenté sur la figure 4.8 les courbes obtenues pour deux fréquences centrales $f_c = 7.1344$ et $f_c = 6.7531$ choisies aléatoirement dans la bande de Nyquist $k = 7$, avec $B = 0.5$ dans les deux cas. L'atténuation de la fonction due au sinus cardinal entraîne dorénavant une dissymétrie des courbes entre les intervalles $\Delta =]0, \frac{1}{2}[$ et $\Delta =]\frac{1}{2}, 1[$ (contrairement au cas précédent, cf figure 4.5c) que nous allons prendre en compte.

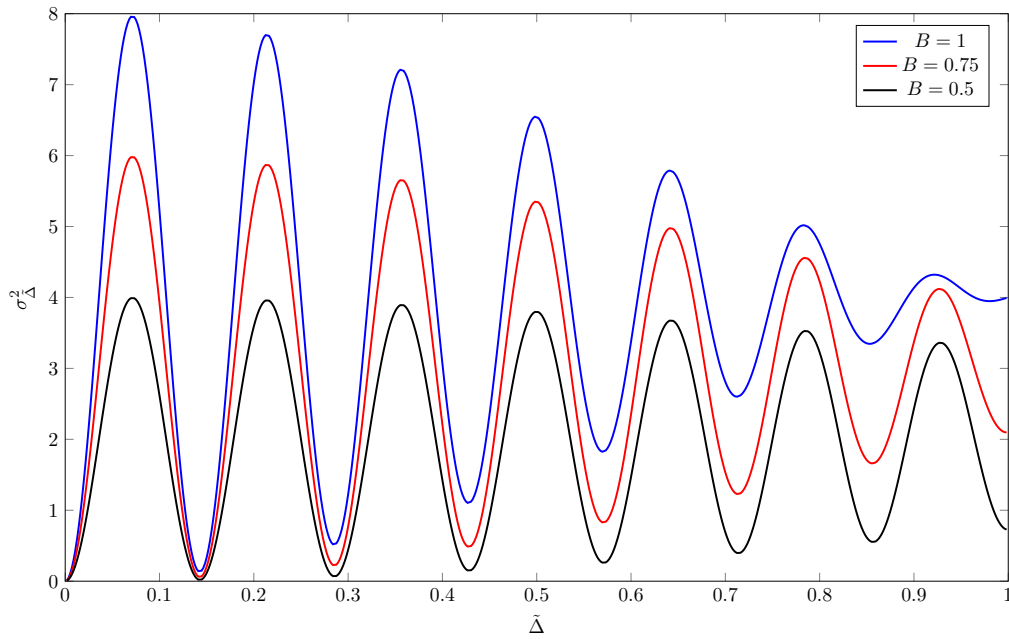
En effet, de la même manière que nous avons défini le critère quadratique σ_{Δ}^2 dans (4.10), il est tout à fait possible de définir le critère quadratique $\sigma_{1-\Delta}^2$, qui peut être vu comme complémentaire de σ_{Δ}^2 . Nous considérons pour cela la nouvelle suite d'échantillons décalée temporellement $\mathbf{X}_1^{\text{app}} = \{x^{\text{app}}(n+1), n \in \mathbb{Z}\}$, qui correspond à $\mathbf{X}_0^{\text{app}}$ décalée d'une période d'échantillonnage. Nous définissons alors :

$$\sigma_{1-\Delta}^2 = \text{E} \left[|x^{\text{app}}(n+1) - x^{\text{app}}(n+\Delta)|^2 \right]. \quad (4.22)$$

Ces deux informations complémentaires vont nous permettre, en les combinant, de contourner



(a) Bande du signal fixe $B = 1$



(b) Fréquence centrale fixe $f_c = 7$

FIGURE 4.7 – Tracé de la fonction $\sigma_{\hat{\Delta}}^2$ (4.21) et influence de la bande B et de la fréquence centrale f_c du signal d'apprentissage

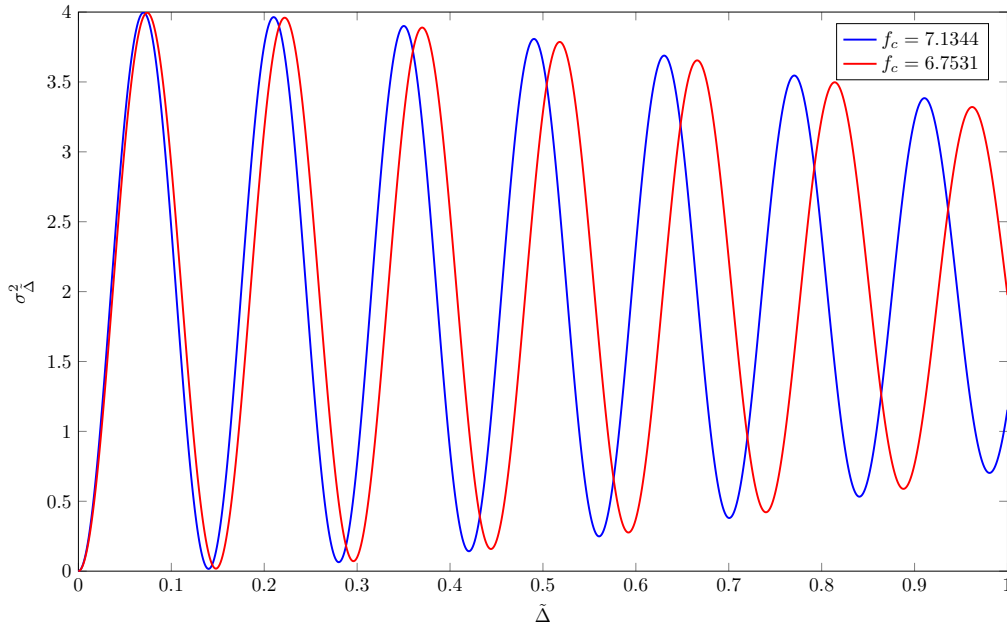


FIGURE 4.8 – Fonction $\sigma_{\hat{\Delta}}^2$ (4.21) pour $B = 0.5$ et deux valeurs de f_c

l'atténuation de la fonction $\sigma_{\hat{\Delta}}^2$ pour $\tilde{\Delta} > 0.5$. Nous avons repris l'exemple précédent de deux séquences d'échantillons décalées de $\Delta = 0.7304$ pour illustrer cette combinaison. Les figures 4.9a et 4.9b représentent les candidats $\hat{\Delta}_p$ obtenus à partir du calcul de $\sigma_{\hat{\Delta}}^2$ (4.10) et les candidats $(1 - \hat{\Delta})_p$ obtenus à partir de $\sigma_{1-\hat{\Delta}}^2$ (4.22) pour les deux fréquences centrales représentées sur la figure 4.8.

Ensuite, nous pouvons calculer l'histogramme des valeurs $\hat{\Delta}_p$ combinées que nous avons représentées sur la figure 4.10a et nous voyons clairement apparaître au voisinage de Δ la meilleure estimation issue des $\hat{\Delta}_p$. La combinaison des deux estimations va nous permettre de converger très rapidement vers une valeur unique.

Ainsi, nous obtenons l'erreur quadratique d'estimation (4.19) tracée sur la figure 4.10b en fonction du nombre N d'échantillons en entrée et $N_{\text{ite}} = 1000$ itérations. En nous référant à la figure 4.3, nous retrouvons de nouveau des performances satisfaisantes en termes d'EQMN de reconstruction lorsque l'estimation est effectuée à l'aide d'un signal d'apprentissage de type bruit à bande limitée.

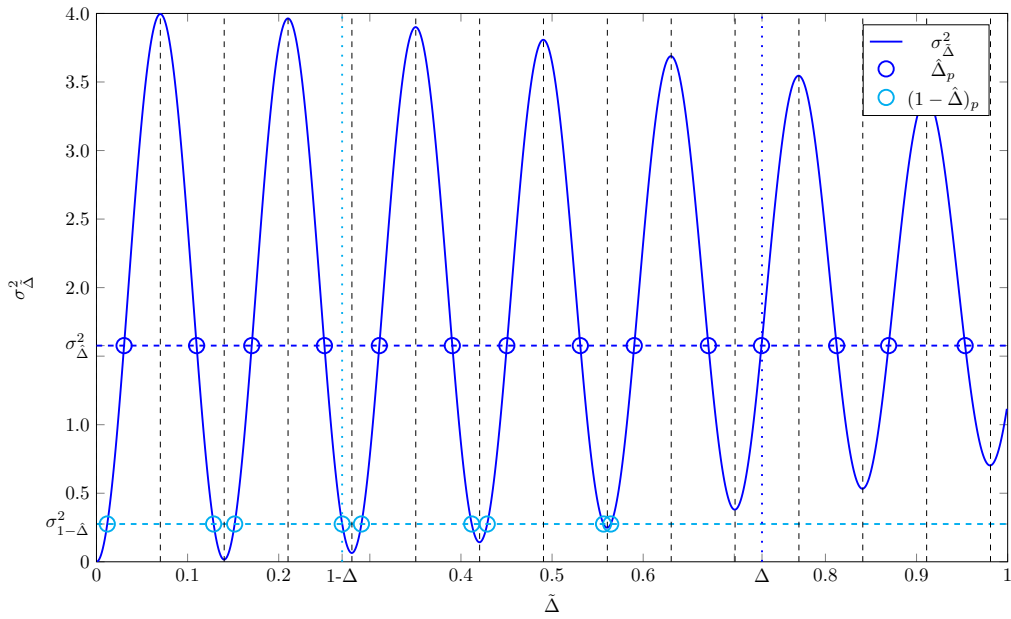
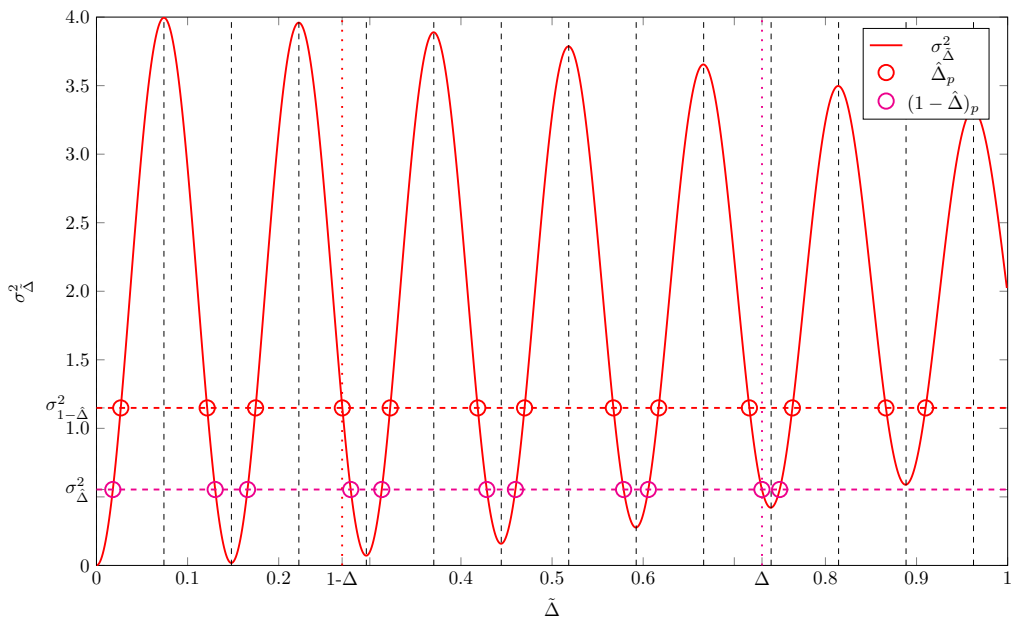
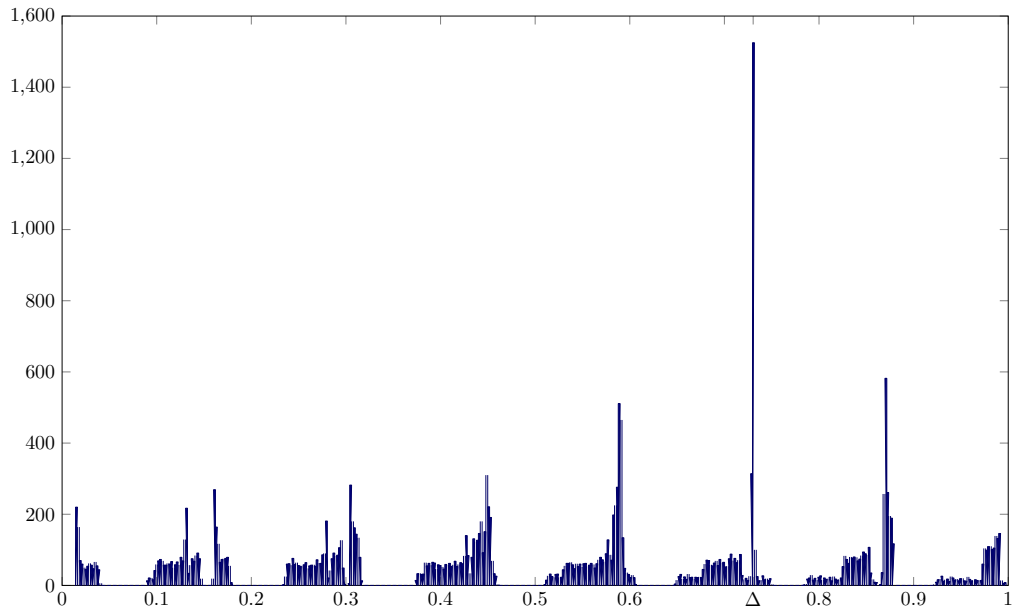
(a) Candidats pour $f_c = 7.1344$ (b) Candidats pour $f_c = 6.7531$

FIGURE 4.9 – Candidats obtenus pour deux bruits de bande $B = 0.5$ centrés à des fréquences différentes dans la bande de Nyquist $k = 7$



(a) Histogramme des candidats issus de la combinaison pour 500 classes

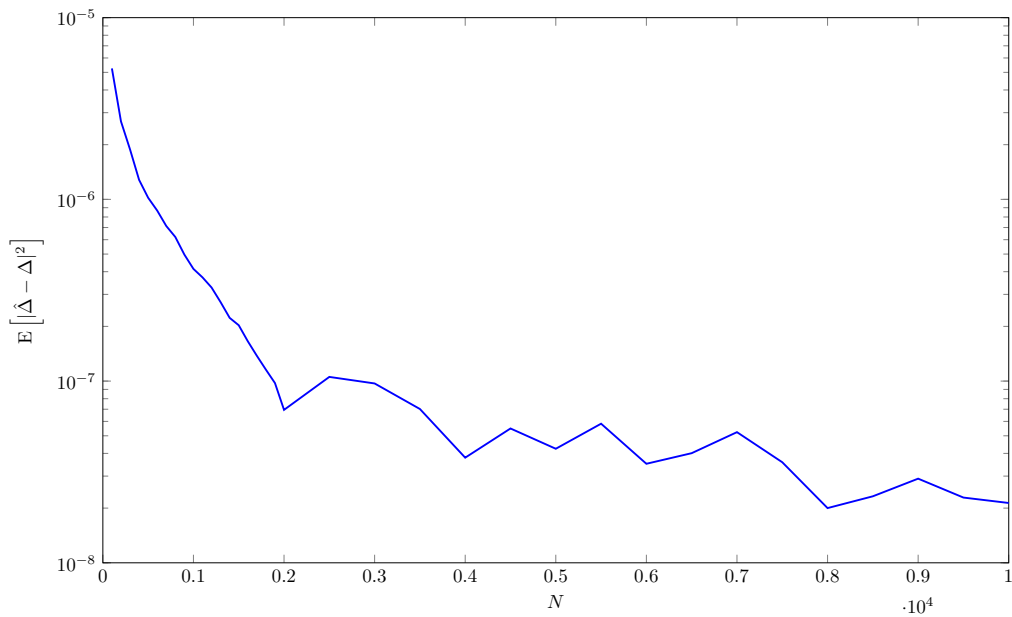
(b) Erreur quadratique d'estimation $E[|\hat{\Delta} - \Delta|^2]$ en fonction de N pour $N_{\text{ite}} = 1000$ en utilisant la combinaison des candidats

FIGURE 4.10 – Résultats de l'estimation par la méthode supervisée avec signal d'apprentissage de type bruit à bande limitée

4.3.4 Bilan

Cette méthode supervisée possède de bonnes propriétés en termes de complexité car elle repose sur des calculs simples. Elle pourrait être utilisée pour l'auto-calibration du système en phase de conception dans les stratégies de *Built-In Self Test (BIST)* [DVdSR13] mais également dans une stratégie d'auto-calibration embarquée.

Les limitations de cette méthode proviennent de la nécessité d'émettre le signal d'apprentissage seul et donc en l'absence du signal d'intérêt, ce qui nécessite une déconnexion du système, la détection de périodes de silence ou bien encore une calibration avant le début de transmission, lors de l'initialisation de la connexion entre émetteur et récepteur. Il peut également être nécessaire d'ajouter au système un circuit d'injection du signal d'apprentissage en entrée (comme dans le cas de la sinusoïde) si on ne souhaite pas le transmettre depuis la station sol, ainsi qu'un dispositif de suppression en sortie du convertisseur pour que le signal d'apprentissage ne se propage pas dans le système. Néanmoins, nous pouvons également imaginer utiliser le canal satellitaire modélisé comme un bruit à bande limitée pour se passer de dispositif d'injection et traiter ce signal comme un signal d'apprentissage, mais dans ce cas là, nous avons besoin de pouvoir filtrer ce bruit de manière variable à l'intérieur de la bande de Nyquist correspondante.

Cette méthode suppose un arrêt du système qui peut ne pas être applicable, mais lorsque celui-ci est possible, les traitements simples et rapides font de la méthode supervisée une méthode efficace, intéressante à utiliser en pratique. Toutefois, notons qu'une autre stratégie serait possible et consisterait à utiliser une version modifiée du critère (4.10) pour former une méthode semi-aveugle qui permettrait de se passer de déconnexions du système.

4.3.5 Extension à une méthode semi-aveugle

Cette stratégie semi-aveugle, applicable dans le cas général où la densité spectrale du signal est inconnue, consisterait à comparer les suites d'échantillons obtenues respectivement pour un décalage Δ et $\tilde{\Delta}$, soit :

$$\sigma_{\Delta}^2 = \text{E} \left[|x^{\text{app}}(n + \Delta) - x^{\text{app}}(n + \tilde{\Delta})|^2 \right]. \quad (4.23)$$

En faisant varier le paramètre $\tilde{\Delta}$, il serait alors possible d'obtenir le minimum de la fonction (4.23) qui correspondrait à la meilleure estimation de Δ . Néanmoins, cette méthode nécessite non seulement la mise en place d'un algorithme itératif de recherche de minimum qui est plus complexe que les formules analytiques proposées mais également une reconstruction de la séquence d'échantillons $\mathbf{X}_{\tilde{\Delta}}^{\text{app}} = \{x^{\text{app}}(n + \tilde{\Delta}), n \in \mathbb{Z}\}$. Cette reconstruction est possible en utilisant seulement les échantillons de la première voie $\mathbf{X}_0^{\text{app}}$ dans le cas où le signal d'apprentissage est modélisé comme un signal passe-bas. Dans ce cas là, nous sommes en présence de suréchantillonnage car le système est calibré pour échantillonner un signal passe-bande de largeur de bande totale $2B$, tandis qu'un signal passe-bas utilisé dans les mêmes conditions sera de largeur B . Nous pouvons donc utiliser par exemple la formule de Shannon (1.35) pour la reconstruction :

$$x^{\text{app}}(n + \tilde{\Delta}) = \sum_k \text{sinc} \left[\pi(n + \tilde{\Delta} - k) \right] x^{\text{app}}(n + k). \quad (4.24)$$

Nous pouvons également utiliser l'amélioration de la convergence que nous avons présenté dans le paragraphe 3.5.1 en l'adaptant en bande de base afin d'améliorer la vitesse de convergence de la formule (4.24). Nous pouvons par exemple définir une formule exploitant un filtre conjoint en cosinus surélevé dans le cas où $S_{x^{\text{app}}}(f) = 0$, $f \notin (-\frac{B}{2}, \frac{B}{2})$ où $0 < B < 1$ représente la largeur de bande du signal. Dans ce cas, la reconstruction s'écrit :

$$x^{\text{app}}(n + \tilde{\Delta}) = \sum_k r_k(n) x^{\text{app}}(n + k) \quad (4.25)$$

$$r_k(n) = \frac{B \text{sinc} \left[\pi B(n + \tilde{\Delta} - k) \right] + \text{sinc} \left[\pi(n + \tilde{\Delta} - k) \right]}{2 \left[4B_{\text{tr}}^2 (n + \tilde{\Delta} - k)^2 - 1 \right]}$$

avec $B_{\text{tr}} = \frac{1-B}{2}$ qui représente la largeur de la bande de transition du filtre conjoint.

La figure 4.11 présente les résultats que nous pouvons attendre en utilisant cette méthode modifiée. La reconstruction du signal est effectuée à l'aide d'une fenêtre d'observation glissante de $N_{\text{éch}}$ échantillons dont la taille varie entre les figures 4.11a et 4.11b. Une erreur initiale $|\tilde{\Delta} - \Delta|$ est choisie de manière aléatoire sur une échelle logarithmique entre $5 \cdot 10^{-4}$ et $5 \cdot 10^{-1}$. Nous traçons l'erreur d'estimation $|\hat{\Delta} - \Delta|$ résultante après les deux premières itérations dans chaque cas, ainsi que le résultat d'estimation final après un certain nombre d'itérations. Notons que la ligne en pointillés

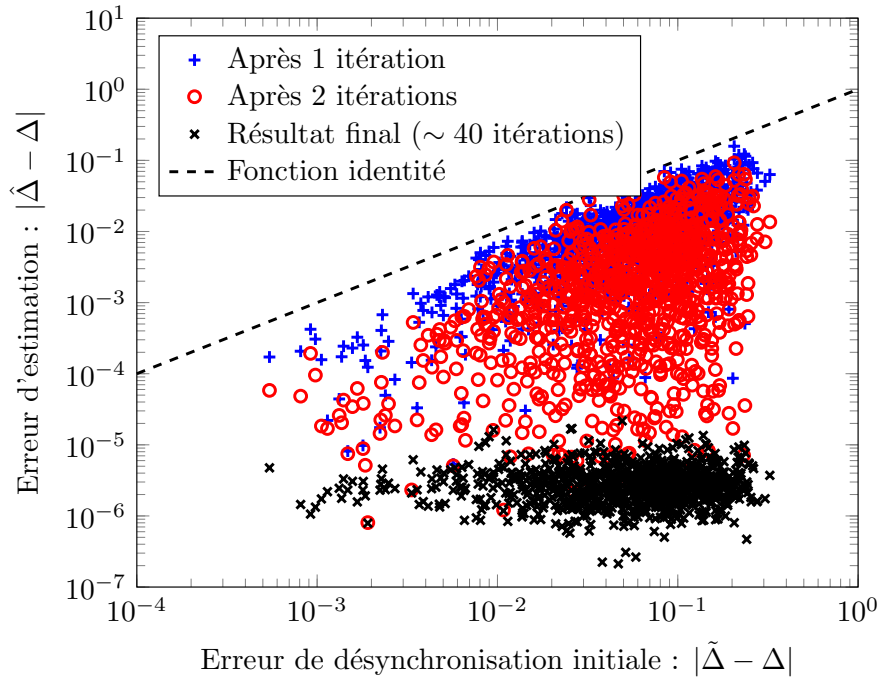
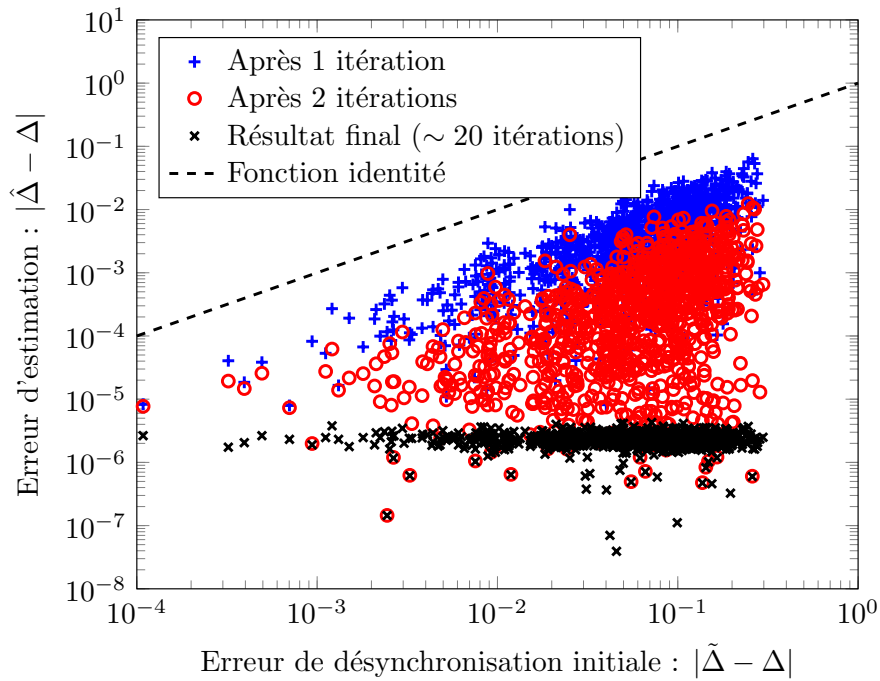
(a) $N_{\text{éch}} = 10$ (b) $N_{\text{éch}} = 100$

FIGURE 4.11 – Erreur d'estimation en fonction de la désynchronisation initiale après estimation basée sur la reconstruction (4.24)

représente la fonction identité. Avant la mise en place de l'algorithme, chaque point appartient donc à cette ligne. Dans le cas $N_{\text{éch}} = 100$ sur la figure 4.11b, le résultat final est estimé à partir d'une moyenne de 20 itérations et présente une précision en dessous de 10^{-5} pour quasiment tous les points avec une erreur d'estimation moyenne de $2 \cdot 10^{-6}$. Dans le cas $N_{\text{éch}} = 10$ sur la figure 4.11a, nous constatons que même avec un faible nombre d'échantillons en entrée, l'estimation donne des résultats avec une erreur d'estimation en dessous de 10^{-5} pour la majorité des points et une erreur d'estimation moyenne de $3 \cdot 10^{-6}$, pour environ 40 itérations en moyenne. La variance de l'estimation est néanmoins plus élevée dans ce cas. Cependant, le nombre d'itérations plus élevé doit être relié à un nombre plus faible d'échantillons pris en compte. Ainsi, pour $N_{\text{éch}} = 10$, nous utilisons $40 \cdot 10 = 400$ échantillons en moyenne contre $20 \cdot 100 = 2000$ échantillons dans le cas $N_{\text{éch}} = 100$. En consultant la figure 4.3a, nous constatons que les performances retrouvées sont satisfaisantes en termes d'erreur de reconstruction après mise en place de cette méthode itérative.

4.4 Estimation aveugle de la désynchronisation

4.4.1 Principe

La deuxième méthode d'estimation que nous présentons est une méthode aveugle qui repose sur l'utilisation du signal passe-bande transmis, que l'on suppose stationnaire au sens large [VCL⁺15b, VCL⁺16]. Cette méthode se veut plus générale que la méthode précédente qui n'est pas applicable dans tous les cas d'étude, notamment lorsqu'il est impossible de transmettre un signal d'apprentissage ou de connaître les propriétés spectrales du signal. Aucune hypothèse autre que la stationnarité n'est requise dans la méthode que nous allons présenter.

Nous utilisons un signal d'entrée supposé stationnaire au sens large selon le modèle classique en télécommunications (1.2). Le signal reconstruit en sortie respecte également cette propriété de stationnarité dans le cas d'un système invariant. Cette propriété d'entrée/sortie supposées stationnaires a été précédemment utilisée dans [SRM07], mais cet article se basait sur un signal d'entrée en bande de base pour en déduire une analyse de la fonction de corrélation. Nous utilisons ici cette propriété de stationnarité différemment car nous basons notre étude sur un signal passe-bande et nous nous

intéressons à sa puissance moyenne, qui est un autre indicateur de la stationnarité (1.2).

Nous expliciterons la formule théorique de l'erreur de reconstruction en cas de désynchronisation, pour montrer que celle-ci est non nulle en présence de désynchronisation et dépend du temps. Ensuite, nous démontrons que le signal reconstruit ne sera stationnaire qu'en l'absence de désynchronisation. En présence de désynchronisation, sa puissance dépendra donc du temps. Nous mettons en place une méthode d'estimation de la stationnarité du signal en nous intéressant à sa puissance. Nous montrons qu'une estimation de la puissance moyenne du signal sur différentes sous-suites d'instant de reconstruction et la comparaison de ces puissances nous permet de vérifier ses variations au cours du temps. Après avoir présenté une hypothèse de restriction nécessaire pour lever une indétermination, nous utilisons ce test sur les puissances pour développer une méthode simple d'estimation basée sur la reconstruction du signal pour une sous-suite particulière d'instant.

4.4.2 Non stationnarité du signal reconstruit en présence de désynchronisation

Nous nous plaçons dans le cadre défini précédemment. Un signal passe-bande stationnaire \mathbf{X} est échantillonné à l'aide d'un schéma PNS2, ce qui conduit à deux séquences d'échantillons notées \mathbf{X}_0 et \mathbf{X}_Δ caractérisées par un décalage Δ entre elles. Nous allons nous intéresser à l'expression théorique de l'erreur de reconstruction introduite par l'utilisation d'un décalage erroné $\tilde{\Delta}$ ainsi qu'à la puissance du signal reconstruit pour montrer que ce dernier n'est stationnaire qu'en l'absence de désynchronisation, c'est-à-dire lorsque $\tilde{\Delta} = \Delta$. Cette propriété sera par la suite utilisée pour développer une méthode d'estimation de Δ .

Le signal passe-bande étant réel et séparé en deux sous-bandes selon le modèle présenté dans la partie 1.2.3, nous pouvons le décomposer selon :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_+ + \mathbf{X}_-, \quad (4.26)$$

où $\mathbf{X}_+ = \{x_+(t), t \in \mathbb{R}\}$ (respectivement \mathbf{X}_-) représente la restriction du signal aux fréquences positives (respectivement aux fréquences négatives). En utilisant (3.3), nous considérons l'isométrie restreinte respectivement à \mathbf{X}_+ et \mathbf{X}_- , que l'on peut exprimer comme :

$$x_+(t) \xleftrightarrow{\mathcal{I}_{\mathbf{X}_+}} e^{2i\pi ft} |_{f>0} \quad \text{et} \quad x_-(t) \xleftrightarrow{\mathcal{I}_{\mathbf{X}_-}} e^{2i\pi ft} |_{f<0}. \quad (4.27)$$

Nous allons utiliser cette restriction de l'isométrie pour pouvoir exprimer l'erreur quadratique de reconstruction en présence de désynchronisation, puis la puissance du signal reconstruit.

Réécrivons tout d'abord la formule de reconstruction exacte (4.1) pour tenir compte de cette séparation entre \mathbf{X}_+ et \mathbf{X}_- . Dans le cas de l'absence de suréchantillonnage et de filtre conjoint (ou bien en considérant un filtre rectangulaire, ce qui est équivalent), nous pouvons exprimer le signal reconstruit grâce à (4.2) sous la forme :

$$x(t) = \frac{A_0(t) \sin [2\pi k(\Delta - t)] + A_\Delta(t) \sin [2\pi kt]}{\sin [2\pi k\Delta]} \quad (4.28)$$

avec :

$$\begin{cases} A_0(t) = x_+(t)e^{-2i\pi kt} + x_-(t)e^{2i\pi kt} \\ A_\Delta(t) = x_+(t)e^{-2i\pi k(t-\Delta)} + x_-(t)e^{2i\pi k(t-\Delta)} \end{cases} \quad (4.29)$$

Cependant, en présence de désynchronisation, la reconstruction est dorénavant effectuée en utilisant le décalage erroné $\tilde{\Delta}$. Le signal reconstruit est noté $\mathbf{X}^{(\tilde{\Delta})} = \{x^{(\tilde{\Delta})}, t \in \mathbb{R}\}$ comme précédemment et nous pouvons exprimer la formule de reconstruction adaptée de la même manière que (4.28) :

$$x^{(\tilde{\Delta})}(t) = \frac{A_0(t) \sin [2\pi k(\tilde{\Delta} - t)] + A_\Delta(t + \Delta - \tilde{\Delta}) \sin [2\pi kt]}{\sin [2\pi k\tilde{\Delta}]} \quad (4.30)$$

avec $A_0(t)$ et $A_\Delta(t)$ définis selon (4.29).

Erreur quadratique moyenne de reconstruction

Nous définissons $\sigma_{\tilde{\Delta}}^2(t)$ l'erreur quadratique moyenne de reconstruction commise en utilisant la formule de reconstruction (4.30). Cette erreur s'écrit :

$$\sigma_{\tilde{\Delta}}^2(t) = \mathbb{E} \left[|x(t) - x^{(\tilde{\Delta})}(t)|^2 \right]. \quad (4.31)$$

Afin de calculer $\sigma_{\tilde{\Delta}}^2(t)$, nous considérons l'isométrie restreinte définie dans (4.27) et, en utilisant (4.30), nous pouvons écrire pour $f > 0$:

$$x_+^{(\tilde{\Delta})}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{I}_{\mathbf{X}}} e^{2i\pi t(f-k)} \frac{\sin [2\pi k(\tilde{\Delta} - t)]}{\sin [2\pi k\tilde{\Delta}]} + e^{2i\pi f(t+\Delta-\tilde{\Delta})} e^{-2i\pi k(t-\tilde{\Delta})} \frac{\sin [2\pi kt]}{\sin [2\pi k\tilde{\Delta}]} \quad (4.32)$$

De la même manière, pour $f < 0$, nous avons :

$$x_{-}^{(\tilde{\Delta})}(t) \stackrel{\mathcal{I}_{\mathbf{X}}}{\longleftrightarrow} e^{2i\pi t(f+k)} \frac{\sin [2\pi k(\tilde{\Delta} - t)]}{\sin [2\pi k\tilde{\Delta}]} + e^{2i\pi f(t+\Delta-\tilde{\Delta})} e^{2i\pi k(t-\tilde{\Delta})} \frac{\sin [2\pi kt]}{\sin [2\pi k\tilde{\Delta}]} . \quad (4.33)$$

Ainsi, grâce à (4.27), (4.32) et (4.33), nous pouvons en déduire la relation suivante mettant en jeu $x(t) - x^{(\tilde{\Delta})}(t)$:

$$x(t) - x^{(\tilde{\Delta})}(t) \stackrel{\mathcal{I}_{\mathbf{X}}}{\longleftrightarrow} \begin{cases} e^{2i\pi ft} \left(1 - \frac{e^{-2i\pi kt}}{\sin [2\pi k\tilde{\Delta}]} \left(\sin [2\pi k(\tilde{\Delta} - t)] + e^{2i\pi f(\Delta-\tilde{\Delta})+2i\pi k\tilde{\Delta}} \sin [2\pi kt] \right) \right), & f > 0, \\ e^{2i\pi ft} \left(1 - \frac{e^{2i\pi kt}}{\sin [2\pi k\tilde{\Delta}]} \left(\sin [2\pi k(\tilde{\Delta} - t)] + e^{2i\pi f(\Delta-\tilde{\Delta})-2i\pi k\tilde{\Delta}} \sin [2\pi kt] \right) \right), & f < 0. \end{cases} \quad (4.34)$$

Nous pouvons écrire (4.34) plus simplement :

$$x(t) - x^{(\tilde{\Delta})}(t) \stackrel{\mathcal{I}_{\mathbf{X}}}{\longleftrightarrow} \begin{cases} e^{2i\pi ft} \frac{\sin [2\pi kt]}{\sin [2\pi k\tilde{\Delta}]} \left(1 - e^{2i\pi f(\Delta-\tilde{\Delta})} \right) e^{2i\pi k(\tilde{\Delta}-t)}, & f > 0, \\ e^{2i\pi ft} \frac{\sin [2\pi kt]}{\sin [2\pi k\tilde{\Delta}]} \left(1 - e^{2i\pi f(\Delta-\tilde{\Delta})} \right) e^{2i\pi k(t-\tilde{\Delta})}, & f < 0. \end{cases} \quad (4.35)$$

Finalement, en prenant le module au carré de l'expression précédente, nous pouvons déduire la relation :

$$\left| x(t) - x^{(\tilde{\Delta})}(t) \right|^2 \stackrel{\mathcal{I}_{\mathbf{X}}}{\longleftrightarrow} \left| \frac{\sin [2\pi kt]}{\sin [2\pi k\tilde{\Delta}]} \left(1 - e^{2i\pi f(\Delta-\tilde{\Delta})} \right) \right|^2 . \quad (4.36)$$

Nous utilisons maintenant l'isométrie fondamentale (3.4) qui nous permet d'exprimer l'erreur de reconstruction $\sigma_{\tilde{\Delta}}^2(t)$ comme :

$$\begin{aligned} \sigma_{\tilde{\Delta}}^2(t) &= \text{E} \left[|x(t) - x^{(\tilde{\Delta})}(t)|^2 \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin [2\pi kt]}{\sin [2\pi k\tilde{\Delta}]} \left(1 - e^{2i\pi f(\Delta-\tilde{\Delta})} \right) \right|^2 s_X(f) df \\ &= \left(\frac{\sin [2\pi kt]}{\sin [2\pi k\tilde{\Delta}]} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| 1 - e^{2i\pi f(\Delta-\tilde{\Delta})} \right|^2 s_X(f) df . \end{aligned} \quad (4.37)$$

En utilisant la réécriture donnée dans (4.13), nous obtenons finalement l'expression suivante de l'erreur quadratique de reconstruction en présence de désynchronisation :

$$\sigma_{\tilde{\Delta}}^2(t) = \text{E} \left[|x(t) - x^{(\tilde{\Delta})}(t)|^2 \right] = 8 \left(\frac{\sin [2\pi kt]}{\sin [2\pi k\tilde{\Delta}]} \right)^2 \int_0^{\infty} \sin^2 [\pi f(\Delta - \tilde{\Delta})] S_x(f) df . \quad (4.38)$$

En normalisant par la puissance du signal original $E[|x(t)|^2] = 2 \int_0^\infty S_x(f)df$, nous pouvons retrouver l'expression de l'EQMN tracée dans la partie 4.2.2 lors de la comparaison avec l'EQMN obtenue de manière empirique :

$$\begin{aligned} \text{EQMN} &= \frac{E[|x(t) - x^{(\tilde{\Delta})}(t)|^2]}{E[|x(t)|^2]} \\ &= 4 \left(\frac{\sin[2\pi kt]}{\sin[2\pi k\tilde{\Delta}]} \right)^2 \frac{\int_0^\infty \sin^2[\pi f(\Delta - \tilde{\Delta})] S_x(f) df}{\int_0^\infty S_x(f) df}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Nous remarquons que la reconstruction sera sans erreur ($\sigma_{\tilde{\Delta}}^2(t) = 0$) uniquement lorsque $\tilde{\Delta} = \Delta$ qui correspond au cas d'absence de désynchronisation. Par ailleurs, en présence de désynchronisation ($\tilde{\Delta} \neq \Delta$), l'EQMN s'exprime comme une fonction sinusoïdale qui dépend donc du temps. Nous validons ainsi le comportement empirique présenté sur la figure 4.2.

Puissance du signal reconstruit

Intéressons-nous maintenant à l'expression de la puissance du signal reconstruit qui s'écrit $P^{(\tilde{\Delta})}(t) = E[|x^{(\tilde{\Delta})}(t)|^2]$. Nous simplifions la relation (4.32) définie pour $f > 0$ en :

$$x_+^{(\tilde{\Delta})}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{I}_{\mathbf{X}}} \frac{e^{2i\pi t(f-k)}}{\sin[2\pi k\tilde{\Delta}]} \left(\sin[2\pi k(\tilde{\Delta} - t)] + e^{2i\pi f(\Delta - \tilde{\Delta}) + 2i\pi k\tilde{\Delta}} \sin[2\pi kt] \right). \quad (4.40)$$

De la même manière, pour $f < 0$, (4.33) se simplifie en :

$$x_-^{(\tilde{\Delta})}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{I}_{\mathbf{X}}} \frac{e^{2i\pi t(f+k)}}{\sin[2\pi k\tilde{\Delta}]} \left(\sin[2\pi k(\tilde{\Delta} - t)] + e^{2i\pi f(\Delta - \tilde{\Delta}) - 2i\pi k\tilde{\Delta}} \sin[2\pi kt] \right). \quad (4.41)$$

Nous en déduisons la relation suivante permettant d'exprimer $|x^{(\tilde{\Delta})}|^2$:

$$|x^{(\tilde{\Delta})}(t)|^2 \xleftrightarrow{\mathcal{I}_{\mathbf{X}}} \begin{cases} \frac{1}{\sin^2[2\pi k\tilde{\Delta}]} \left| \sin[2\pi k(\tilde{\Delta} - t)] + e^{2i\pi f(\Delta - \tilde{\Delta}) + 2i\pi k\tilde{\Delta}} \sin[2\pi kt] \right|^2, & f > 0, \\ \frac{1}{\sin^2[2\pi k\tilde{\Delta}]} \left| \sin[2\pi k(\tilde{\Delta} - t)] + e^{2i\pi f(\Delta - \tilde{\Delta}) - 2i\pi k\tilde{\Delta}} \sin[2\pi kt] \right|^2, & f < 0. \end{cases} \quad (4.42)$$

Intéressons-nous à l'expression définie pour $f > 0$. Nous pouvons écrire le module à partir des

parties réelles et imaginaires :

$$\begin{aligned} |x^{(\tilde{\Delta})}(t)|^2 \xrightarrow{\mathcal{I}_{\mathbf{x}}} & \frac{1}{\sin^2 [2\pi k \tilde{\Delta}]} \left[\left(\sin [2\pi k (\tilde{\Delta} - t)] + \cos [2\pi f (\Delta - \tilde{\Delta}) + 2\pi k \tilde{\Delta}] \sin [2\pi kt] \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\sin [2\pi f (\Delta - \tilde{\Delta}) + 2\pi k \tilde{\Delta}] \sin [2\pi kt] \right)^2 \right], \quad f > 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

En utilisant les relations trigonométriques :

$$\begin{aligned} \cos [2\pi f (\Delta - \tilde{\Delta}) + 2\pi k \tilde{\Delta}] &= 1 - 2 \sin^2 [\pi f (\Delta - \tilde{\Delta}) + \pi k \tilde{\Delta}] \quad \text{et} \\ \sin [2\pi k (\tilde{\Delta} - t)] + \sin [2\pi kt] &= 2 \cos [2\pi k (2t - \tilde{\Delta})] \sin [\pi k \tilde{\Delta}], \end{aligned} \quad (4.44)$$

nous obtenons après développement :

$$\begin{aligned} |x^{(\tilde{\Delta})}(t)|^2 \xrightarrow{\mathcal{I}_{\mathbf{x}}} & \frac{4}{\sin^2 [2\pi k \tilde{\Delta}]} \left(\sin^2 [\pi k \tilde{\Delta}] \cos^2 [2\pi k (2t - \tilde{\Delta})] \right. \\ & \left. + \sin [2\pi kt] \sin [2\pi k (t - \tilde{\Delta})] \sin^2 [\pi f (\Delta - \tilde{\Delta}) + \pi k \tilde{\Delta}] \right), \quad f > 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Un raisonnement similaire permet d'aboutir au même résultat dans le cas $f > 0$ de la relation (4.42) en changeant f en $-f$. Ainsi, l'isométrie fondamentale (3.4) nous permet d'écrire l'expression de la puissance du signal reconstruit :

$$\begin{aligned} P^{(\tilde{\Delta})}(t) &= \mathbb{E} \left[|x^{(\tilde{\Delta})}(t)|^2 \right] \\ &= \frac{8}{\sin^2 (2\pi k \tilde{\Delta})} \int_0^\infty \left(\sin^2 [\pi k \tilde{\Delta}] \cos^2 [\pi k (2t - \tilde{\Delta})] \right. \\ & \quad \left. + \sin [2\pi kt] \sin [2\pi k (t - \tilde{\Delta})] \sin^2 [\pi f (\Delta - \tilde{\Delta}) + \pi k \tilde{\Delta}] \right) S_x(f) df. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Cette expression fait apparaître clairement la dépendance en t de la puissance dans le cas de désynchronisation où $\tilde{\Delta} \neq \Delta$. Ainsi, le signal reconstruit ne sera pas stationnaire au sens large (1.2) et nous allons utiliser cette propriété par la suite pour détecter si la condition de stationnarité est respectée par le signal reconstruit, et ainsi déterminer une estimation de Δ .

Nous pouvons remarquer plusieurs choses en analysant l'expression (4.46). Tout d'abord la puissance ne dépend pas du temps lorsque $\tilde{\Delta} = \Delta$ car nous avons :

$$\begin{aligned}
P^{(\Delta)}(t) &= \frac{8}{\sin^2(2\pi k\Delta)} \int_0^\infty \left(\sin^2[\pi k\Delta] \cos^2[\pi k(2t - \Delta)] \right. \\
&\quad \left. + \sin[2\pi kt] \sin[2\pi k(t - \Delta)] \sin^2[\pi k\Delta] \right) S_x(f) df \\
&= \frac{8 \sin^2[\pi k\Delta]}{\sin^2(2\pi k\Delta)} \left(\cos^2[\pi k(2t - \Delta)] + \frac{1}{2} \cos[2\pi k\Delta] - \frac{1}{2} \cos[2\pi k(2t - \Delta)] \right) \int_0^\infty S_x(f) df \\
&= \frac{8 \sin^2[\pi k\Delta]}{\sin^2(2\pi k\Delta)} \cos^2[\pi k\Delta] \int_0^\infty S_x(f) df \\
&= 2 \int_0^\infty S_x(f) df .
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Dans ce cas, nous pouvons donc supprimer le paramètre temporel et $P^{(\Delta)} = \mathbb{E} \left[|x^{(\Delta)}(t)|^2 \right] = \mathbb{E} \left[|x(t)|^2 \right]$. Cela correspond au cas où la désynchronisation est connue (par exemple si elle a été préalablement estimée), ce qui permet de retrouver une reconstruction sans erreur et un signal reconstruit stationnaire au sens large.

Par ailleurs, nous remarquons que les valeurs particulières de (4.46) calculées en $t = 0$ et $t = \tilde{\Delta}$ mènent à des simplifications. En effet, dans ces deux cas, la deuxième partie de l'intégrale dans (4.46) s'annule respectivement via les termes $\sin[2\pi kt]$ et $\sin[2\pi k(t - \tilde{\Delta})]$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
P^{(\tilde{\Delta})}(0) = P^{(\tilde{\Delta})}(\tilde{\Delta}) &= \frac{8}{\sin^2(2\pi k\tilde{\Delta})} \int_0^\infty \sin^2[\pi k\tilde{\Delta}] \cos^2[\pi k\tilde{\Delta}] S_x(f) df \\
&= 2 \int_0^\infty S_x(f) df .
\end{aligned} \tag{4.48}$$

La première puissance $P^{(\tilde{\Delta})}(0)$ correspond en fait à la puissance calculée aux instants d'échantillonnage correspondant à la séquence \mathbf{X}_0 . Ces échantillons correspondant à des valeurs exactes obtenues sur le signal passe-bande stationnaire, nous retrouvons un comportement indépendant du temps et nous pouvons noter $P^{(\tilde{\Delta})}(0) = P_0$. Les formules de reconstruction PNS2 permettent de retrouver un signal continu pour $t \in \mathbb{R}$ à partir des échantillons discrets \mathbf{X}_0 et \mathbf{X}_Δ avec la propriété que ce signal continu passe exactement par les échantillons discrets. Cependant, lors d'une reconstruction erronée, les échantillons \mathbf{X}_Δ ne sont pas rattachés aux instants $\{n + \Delta, n \in \mathbb{Z}\}$ mais aux instants $\{n + \tilde{\Delta}, n \in \mathbb{Z}\}$. Ainsi, nous en déduisons la relation sur les puissances : $P^{(\tilde{\Delta})}(\tilde{\Delta}) = P_\Delta$, que nous

avons montrée dans (4.48). En toute généralité, nous avons donc également la relation $P^{(\tilde{\Delta})}(\Delta) \neq P_{\Delta}$. Nous utiliserons dans la suite les puissances P_0 et P_{Δ} lors de l'estimation de la désynchronisation.

4.4.3 Présentation de la méthode d'estimation aveugle

Afin d'estimer le décalage entre les voies du schéma PNS2, nous mettons en place une méthode pour évaluer la non stationnarité du signal reconstruit qui se base sur la propriété que nous venons de démontrer : la puissance du signal reconstruit en présence de désynchronisation dépend du temps (4.46). Le principe de la méthode d'estimation est de calculer la puissance moyenne du signal en différents instants en extrayant des sous-suites d'instant de reconstruction puis de comparer ces puissances. Si les puissances moyennes estimées à différents instants ne sont pas égales, le signal reconstruit n'est pas stationnaire. Au contraire, lorsque les puissances estimées sont proches, le signal reconstruit est supposé respecter la condition de stationnarité. Ainsi, le paramètre utilisé pour la reconstruction dans ce cas là nous fournit une estimation de Δ qui sera utilisée pour effectuer une reconstruction sans erreur.

Nous présentons dans un premier temps les détails généraux ayant trait aux sous-suites d'instant de reconstruction et nous illustrerons le comportement de la puissance en ces différents instants. Par la suite, nous définirons notre cadre de travail qui doit respecter une hypothèse concernant la localisation de la désynchronisation, puis nous finirons en développant une méthode d'estimation simple basée sur l'utilisation d'une sous-suite particulière.

4.4.3.1 Test de la stationnarité

Nous rappelons le contexte de notre étude. Lorsque le schéma d'échantillonnage PNS2 est désynchronisé, la reconstruction du signal est effectuée à partir des séquences d'échantillons \mathbf{X}_0 et \mathbf{X}_{Δ} décalées de Δ mais selon la formule (4.7) qui prend comme paramètre la valeur erronée de décalage $\tilde{\Delta}$. Nous allons étudier la puissance de ce signal reconstruit avec erreur en effectuant la reconstruction pour des sous-suites d'instant de reconstruction qui permettent d'évaluer la puissance moyenne à des instants différents.

Nous considérons donc M instants de reconstruction différents notés $\{\tau_m\}_{m=1,\dots,M}$, $M \in \mathbb{N}^*$,

respectant la condition $\tau_m \in]0, 1[$, $\forall m \in \{1, \dots, M\}$. Nous voulons évaluer la puissance en ces instants que l'on notera $P_m^{(\tilde{\Delta})} = P^{(\tilde{\Delta})}(\tau_m)$ en se référant à (4.46). Nous allons pour cela considérer M sous-suites d'instants de reconstruction définies respectivement pour $n \in \mathbb{Z}$ par l'ensemble des instants discrets $\{n + \tau_m\}_{m=1, \dots, M}$. Chaque suite a donc une périodicité de 1 qui correspond à la fréquence d'échantillonnage utilisée sur chaque voie du schéma PNS2. L'idée est d'exploiter l'ergodicité supposée du signal en effectuant un moyennage sur divers instants périodiques pour la même reconstruction au lieu d'effectuer un moyennage sur plusieurs itérations. Nous considérons dans un premier temps $M > 1$ suites de reconstruction pour illustrer le comportement de la puissance du signal reconstruit. Par la suite, nous détaillerons une méthode se basant sur l'utilisation d'une seule suite particulière, couplée à l'estimation de la puissance des sous-suites d'échantillons issues du schéma PNS2, donnant lieu à des développements plus simples de l'estimation de Δ .

Nous pouvons effectuer la reconstruction du signal notée $x^{(\tilde{\Delta})}(n + \tau_m)$ en ces instants grâce à la formule (4.7). Nous calculons $P_m^{(\tilde{\Delta})}$ la puissance du signal reconstruit à l'instant τ_m qui est définie par :

$$P_m^{(\tilde{\Delta})} = \mathbb{E} \left[\left| x^{(\tilde{\Delta})}(n + \tau_m) \right|^2 \right]. \quad (4.49)$$

Nous pouvons également définir la puissance du signal échantillonné sur les séquences \mathbf{X}_0 et \mathbf{X}_Δ . Nous notons respectivement ces puissances P_0 et P_Δ et elles s'écrivent :

$$\begin{cases} P_0 = \mathbb{E} \left[|x(n)|^2 \right], \\ P_\Delta = \mathbb{E} \left[|x(n + \Delta)|^2 \right]. \end{cases} \quad (4.50)$$

En théorie, ces puissances sont égales ($P_0 = P_\Delta = P_{\text{ref}}$) mais nous séparons les notations en vue d'une utilisation pratique ultérieure où les puissances seront estimées à partir d'un nombre fini d'échantillons et où les valeurs obtenues seront donc différentes. Par ailleurs, comme expliqué dans la partie 4.4.2, ces deux puissances correspondent à la puissance du signal reconstruit évaluée respectivement en $t = 0$ et $t = \tilde{\Delta}$.

Notre méthode d'évaluation de la stationnarité se base sur la propriété suivante. Si $\tilde{\Delta} = \Delta$, le signal reconstruit est stationnaire, sa puissance ne dépend pas du temps et les puissances $P_m^{(\tilde{\Delta})}$

calculées en différents instants sont donc égales. Nous avons ainsi :

$$P_{m_1}^{(\tilde{\Delta})} = P_{m_2}^{(\tilde{\Delta})} = P_{\text{ref}} \quad \forall (m_1, m_2) \in [1, M]. \quad (4.51)$$

Au contraire, lorsque $\tilde{\Delta} \neq \Delta$, l'égalité (4.51) n'est plus valable et la puissance du signal reconstruit va donc varier au cours du temps. Nous allons donc chercher à identifier l'estimation $\hat{\Delta}$ de Δ qui permet de respecter (4.51).

En pratique, nous choisissons à M fixé des valeurs de τ_m régulièrement espacées dans $]0, 1[$ pour illustrer le comportement de la puissance :

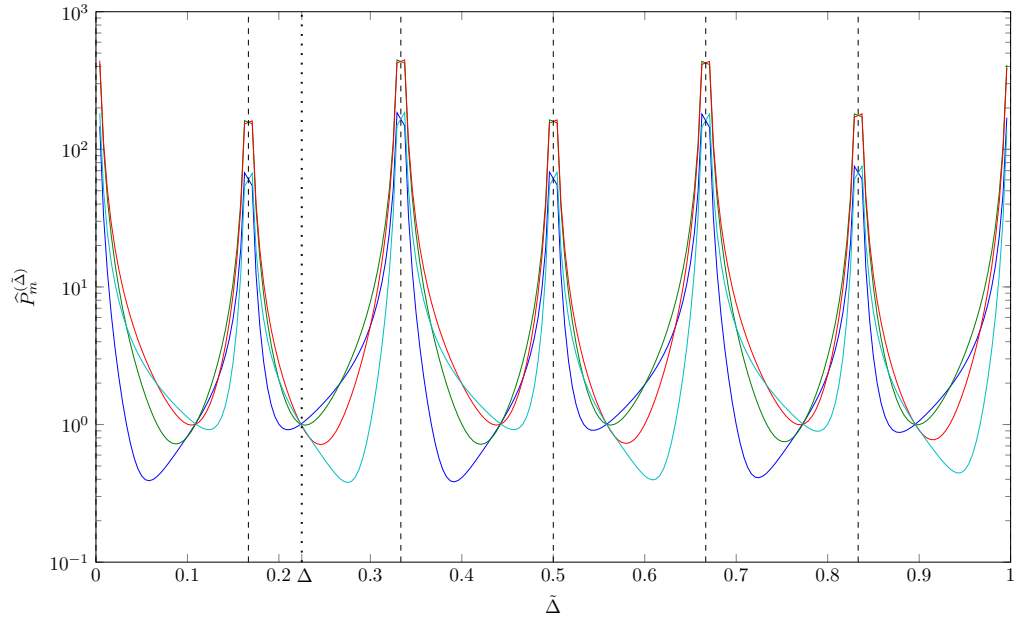
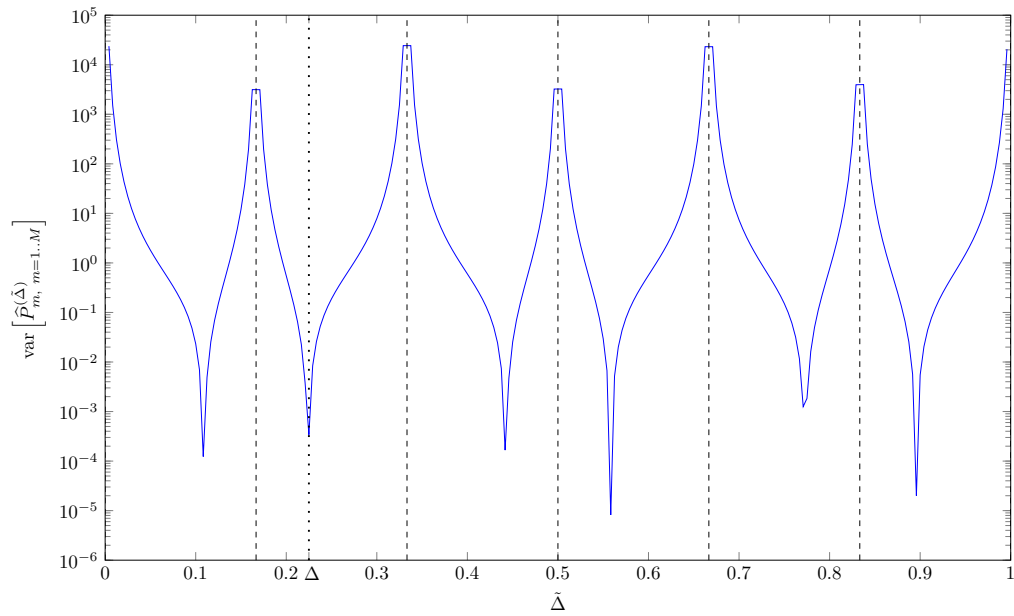
$$\tau_m = \frac{m}{M+1}. \quad (4.52)$$

Ensuite, les puissances $P_m^{(\tilde{\Delta})}$ vont être estimées à ces instants à partir de $N \in \mathbb{N}$ instants de reconstruction permettant de construire les sous-suites utilisées. Grâce à l'estimateur classique de l'espérance mathématique, nous obtenons une estimée de (4.49) par :

$$\hat{P}_m^{(\tilde{\Delta})} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \left| x^{(\tilde{\Delta})} \left(n + \frac{m}{M+1} \right) \right|^2, \quad m = 1, \dots, M \quad (4.53)$$

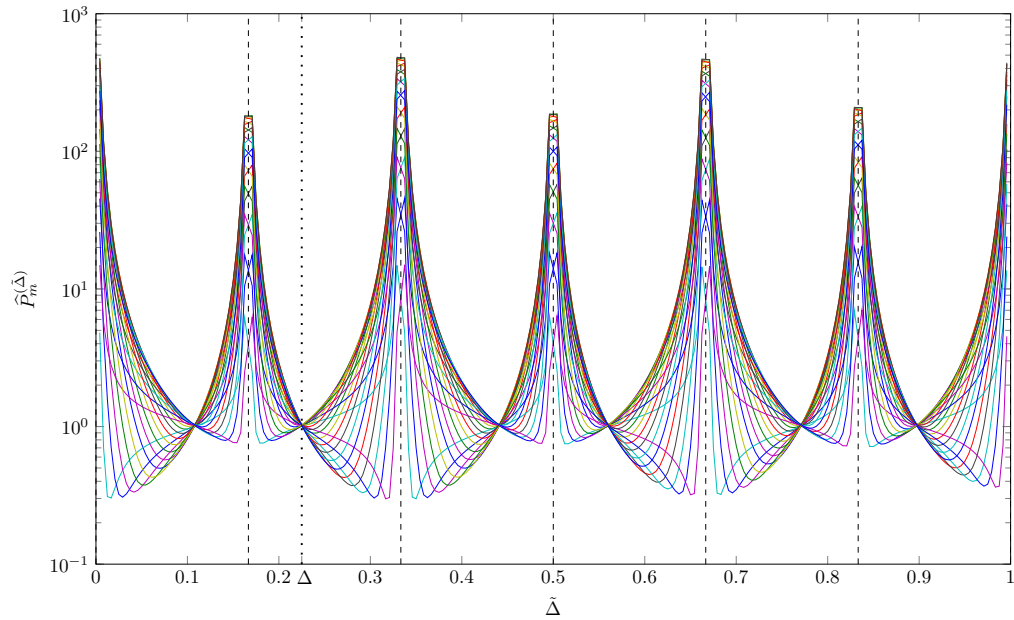
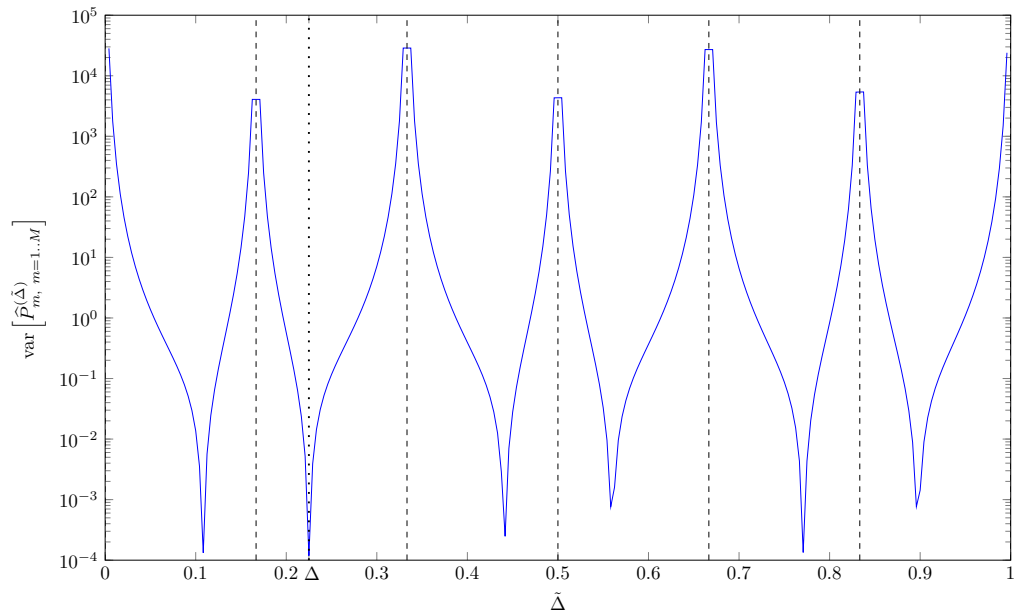
Les figures 4.12a et 4.13a présentent le tracé des puissances $\hat{P}_m^{(\tilde{\Delta})}$ pour une bande de Nyquist $k = 3$, un décalage à estimer $\Delta = 0.2250$ dans les deux cas, et respectivement $M = 4$ et $M = 22$. Par ailleurs, la figure 4.14a présente le tracé des puissances $\hat{P}_m^{(\tilde{\Delta})}$ pour $k = 7$, $\Delta = 0.7304$ et $M = 22$. Pour les trois figures, chaque courbe correspond à une valeur de M permettant de calculer $\hat{P}_m^{(\tilde{\Delta})}$ en fonction de $\tilde{\Delta}$ variant dans l'intervalle $]0, 1[$.

Nous remarquons sur les figures 4.12a, 4.13a et 4.14a que les courbes de puissances se croisent effectivement au voisinage de Δ , validant ainsi le comportement attendu. En effet, en ce point de croisement, les puissances estimées sont toutes égales et la puissance du signal est donc indépendante du temps. Nous remarquons également une autre propriété problématique sur laquelle nous reviendrons plus en détails dans la partie suivante. En effet, la propriété de stationnarité semble être respectée pour d'autres valeurs de $\tilde{\Delta}$, entraînant une indétermination sur Δ lorsque l'intervalle $]0, 1[$ est considéré. Nous devons donc émettre une hypothèse supplémentaire que nous présentons en détails dans la partie suivante.

(a) Puissance du signal reconstruit aux instants τ_m calculée en fonction de $\tilde{\Delta}$ 

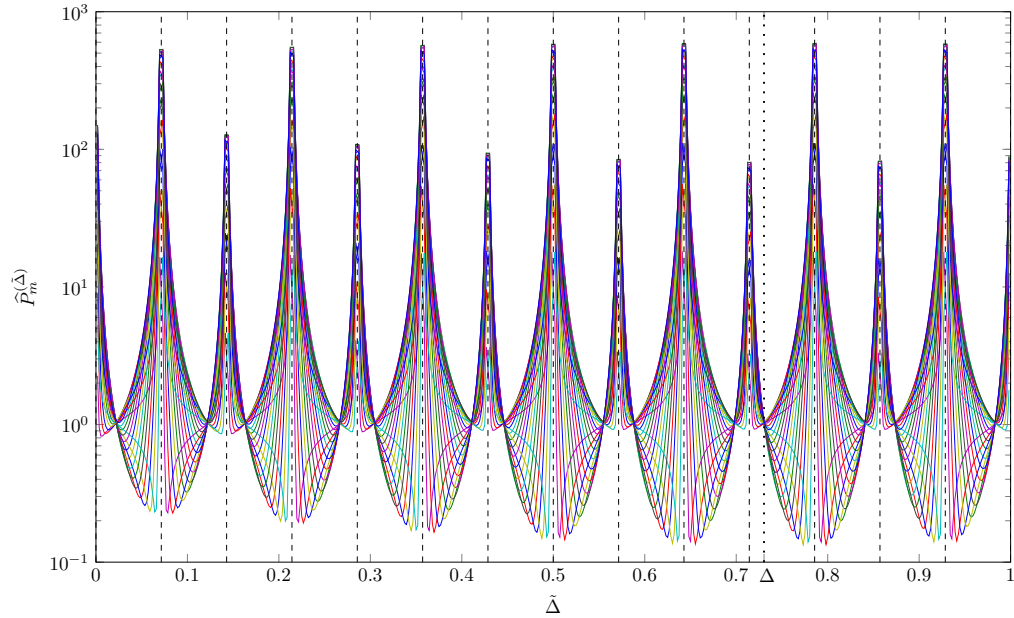
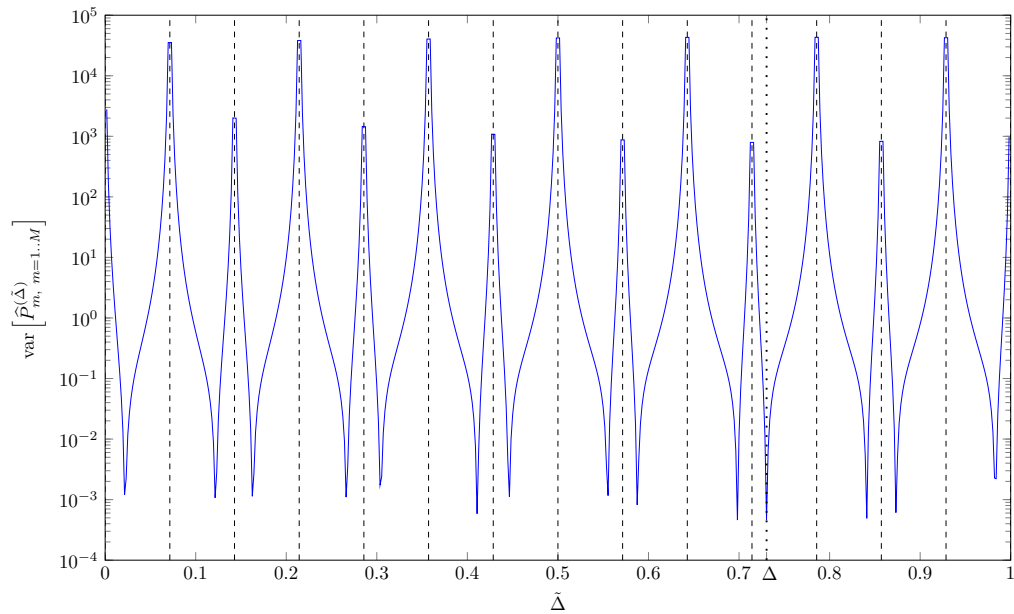
(b) Variance de la puissance calculée aux différents instants de reconstruction

FIGURE 4.12 – Courbes de puissance estimée et tracé de la variance pour $M = 4$ et $k = 3$

(a) Puissance du signal reconstruit aux instants τ_m calculée en fonction de $\tilde{\Delta}$ 

(b) Variance de la puissance calculée aux différents instants de reconstruction

FIGURE 4.13 – Courbes de puissance estimée et tracé de la variance pour $M = 22$ et $k = 3$

(a) Puissance du signal reconstruit aux instants τ_m calculée en fonction de $\tilde{\Delta}$ 

(b) Variance de la puissance calculée aux différents instants de reconstruction

FIGURE 4.14 – Courbes de puissance estimée et tracé de la variance pour $M = 22$ et $k = 7$

En pratique, compte tenu du protocole de simulations qui se base sur une reconstruction du signal à l'aide d'une fenêtre d'observation de taille finie, l'équation (4.51) n'est pas strictement vérifiée et les courbes ne se croisent pas en un seul point mais dans un voisinage de celui-ci. Ainsi, il convient de chercher le point en lequel elles sont les plus proches les unes des autres et nous pouvons pour cela utiliser une estimation de la variance des courbes de puissance $\widehat{P}_m^{(\tilde{\Delta})}$ pour un $\tilde{\Delta}$ fixé. Nous obtenons ainsi une fonction qui dépend de $\tilde{\Delta}$:

$$f(\tilde{\Delta}) = \text{Var} \left[\widehat{P}_{m, m=1..M}^{(\tilde{\Delta})} \right]. \quad (4.54)$$

La figure 4.12b (respectivement 4.13b et 4.14b) présente le tracé de la variance de la puissance issue de la figure 4.12a (respectivement 4.13a et 4.14a). Nous constatons que la variance diminue au voisinage de $\tilde{\Delta} = \Delta$. Nous pouvons donc définir une estimation de Δ notée $\hat{\Delta}$ en calculant le minimum de la fonction représentant la variance :

$$\hat{\Delta} = \min_{\tilde{\Delta}} f(\tilde{\Delta}) = \min_{\tilde{\Delta}} \text{Var} \left[\widehat{P}_{m, m=1..M}^{(\tilde{\Delta})} \right]. \quad (4.55)$$

Néanmoins, nous constatons que nous avons de nouveau une indécision sur l'estimation du minimum car la fonction présente des minima locaux qui nécessitent la prise en compte d'une hypothèse de travail détaillée dans la partie suivante. Sous cette hypothèse, nous pourrions ensuite présenter une méthode simplifiée en considérant $M = 1$ sous-suite. En effet, la complexité est proportionnelle à la valeur de M car, pour chaque sous-suite, nous devons reconstruire le signal en N instants pour évaluer (4.53) et un choix approprié de M nous permettra de limiter le nombre d'instant à reconstruire et donc la complexité.

4.4.3.2 Restriction de l'intervalle de recherche

La puissance du signal reconstruit prend une forme particulière qu'illustre la figure 4.15 représentant l'expression (4.46) dans le cadre d'un signal aléatoire passe-bande. Nous constatons que cette puissance a une forme périodique et qu'elle tend vers l'infini pour les valeurs de $\tilde{\Delta}$ qui causent une annulation du sinus de la formule (4.7). Ces valeurs sont données par $\tilde{\Delta} = \frac{p}{2k}$, $p = 0, \dots, 2k$. Nous caractérisons ainsi $2k - 1$ périodes dans l'intervalle de définition de $\tilde{\Delta}$ (qui est $]0, 1[$) que nous pouvons noter $C_m = \left[\frac{m}{2k}, \frac{m+1}{2k} \right]$, $m = 0, \dots, 2k - 1$ et que nous appellerons « cases ».

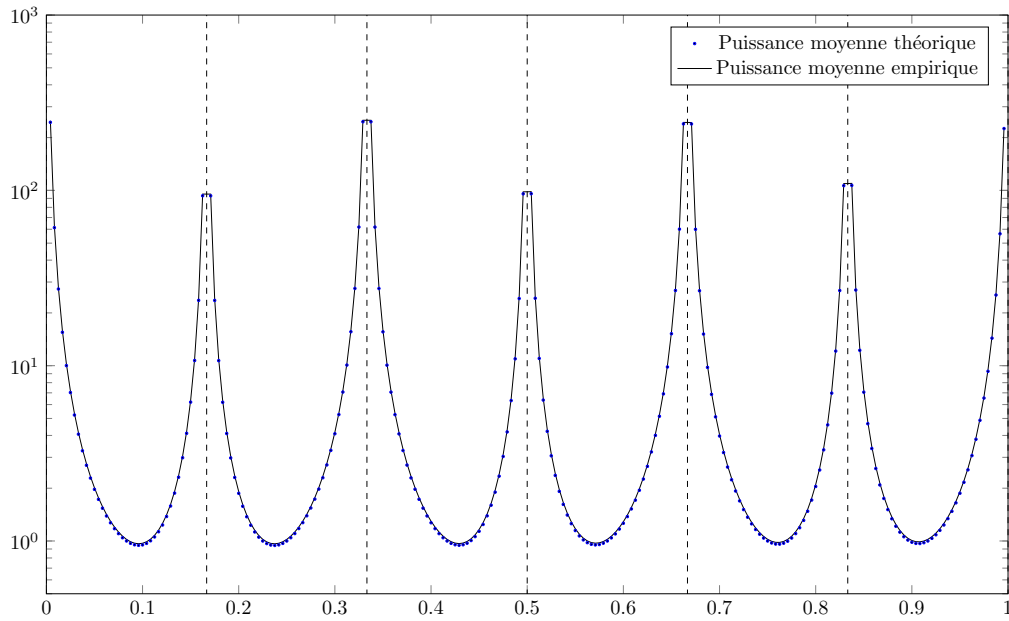
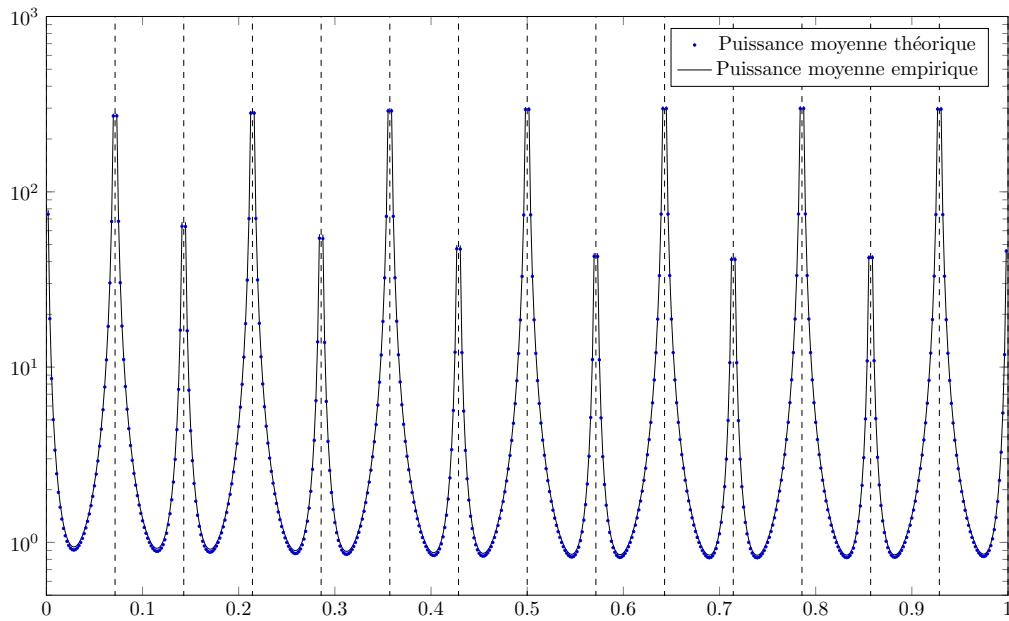
(a) Bande de Nyquist $k = 3$ (b) Bande de Nyquist $k = 7$

FIGURE 4.15 – Puissance moyenne du signal reconstruit pour différentes bandes de Nyquist : comparaison entre puissance théorique (4.46) et puissance empirique

Ainsi, nous constatons que le comportement de la puissance est le même dans chaque case et que nous faisons face à une indécision si nous considérons globalement l'intervalle $]0, 1[$ lors de l'estimation de Δ . En effet, sur la figure 4.15, nous constatons que plusieurs points correspondent à l'intersection entre la puissance du signal reconstruit non stationnaire (4.46) et la puissance théorique du signal, parmi lesquels la valeur exacte $\tilde{\Delta} = \Delta$. Nous avons constaté précédemment que le comportement est le même lorsque nous considérons la puissance en différents instants via des sous-suites de reconstruction, il existe dans chaque case un point où la stationnarité est respectée.

Cette indécision est due au caractère passe-bande du signal qui peut être vu comme une modulation d'un signal passe-bas dans une certaine bande de Nyquist, en l'occurrence de numéro k pour notre modélisation. Comme vu dans le chapitre 2, la modulation permet de garder la même information sur le signal mais entraîne une modification de sa forme, notamment en termes d'oscillations dues à sa localisation dans une bande plus élevée. Cette modulation se retrouve dans la forme de la reconstruction donnée par la formule (4.7) qui fait apparaître clairement des composantes sinusoidales caractérisant la modulation. Ce comportement oscillant dû au caractère passe-bande était déjà apparu dans la partie 4.3.3 présentant deux exemples d'application de la méthode supervisée. Nous avons levé l'indécision dans ce cas là en faisant varier la fréquence du signal d'apprentissage sinusoidal ou de la fréquence centrale du signal de type bruit à bande limitée, mais le même raisonnement ne peut être appliqué ici.

Afin de s'affranchir ici de cette indécision et estimer le décalage Δ , nous prenons donc en compte l'hypothèse de travail suivante. Nous supposons que la désynchronisation varie peu, lentement et de manière continue dans le temps, de sorte que $\tilde{\Delta}$ reste dans un voisinage de Δ borné par les valeurs interdites les plus proches. Nous définissons ainsi C_Δ la case à laquelle appartient Δ par $C_\Delta = [\frac{m_\Delta}{2k}, \frac{m_\Delta+1}{2k}]$ avec $m_\Delta = \lfloor 2k\Delta \rfloor$. Nous bornerons ainsi la recherche de l'estimée de Δ à cet intervalle C_Δ . Cette restriction est justifiée de manière théorique par la périodicité de la puissance du signal reconstruit qui ne nous permet pas de discriminer entre les différentes cases pour trouver l'estimation de Δ sans *a priori*.

D'un point de vue pratique et notamment circuits, cette hypothèse est en accord avec le fait que la désynchronisation est principalement due à des contraintes thermiques sur les composants

électroniques qui causent de faibles variations autour de la valeur Δ . D'un point de vue théorique, nous trouvons également une justification à cette restriction dans un voisinage par le fait que la reconstruction va diverger lorsque Δ se rapproche d'une valeur interdite, causant un comportement néfaste sur le signal reconstruit car l'EQMN de reconstruction va tendre vers l'infini (figure 4.2).

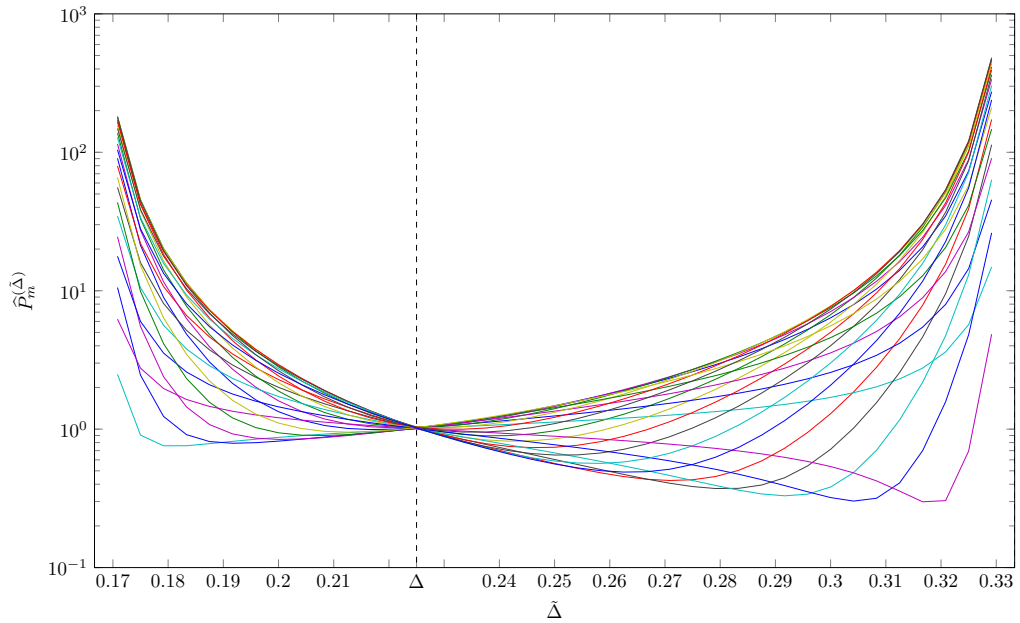
Ainsi, en reprenant les courbes de puissance et de variance précédentes sous cette hypothèse de travail (figure 4.16 et 4.17), nous constatons que la recherche du minimum va donner une estimation unique de Δ , permettant de lever l'indécision sur notre méthode. L'estimée s'exprime donc dorénavant par :

$$\hat{\Delta} = \min_{\Delta \in C_{\Delta}} \text{Var} \left[\hat{P}_{m, m=1..M}^{(\tilde{\Delta})} \right]. \quad (4.56)$$

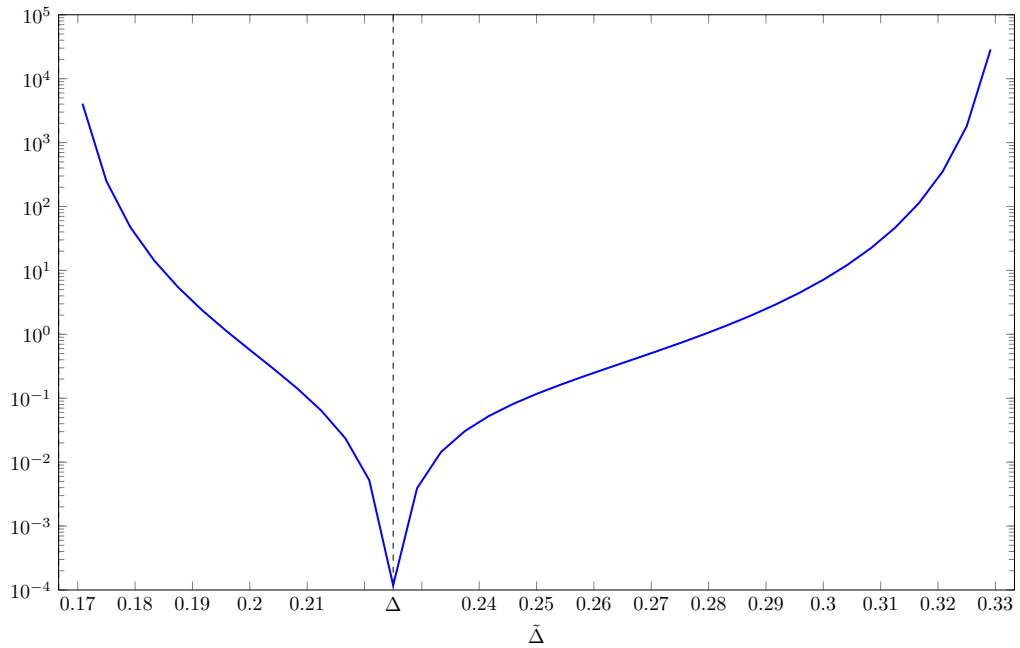
Nous obtenons ainsi une méthode novatrice par rapport à la littérature et une contribution intéressante car nous nous intéressons au signal passe-bande reconstruit dans sa bande d'origine, ce qui implique des contraintes supplémentaires par rapport à un formalisme passe-bas. En effet, nous avons dû restreindre l'intervalle de recherche de Δ prise en compte pour lever l'indécision. Une amélioration envisagée serait de ne pas reconstruire le signal passe-bande mais sa version transposée en bande de base, nécessitant au passage le développement de formules de reconstruction adaptées. Cela permettrait de garder la même information sur le signal et sur l'échantillonnage utilisé, notamment le décalage Δ entre les séquences d'échantillons, mais de se placer dans le cadre de l'étude d'un signal variant moins vite. Cette méthode est à l'étude et fera l'objet de développements ultérieurs.

4.4.3.3 Stratégie d'estimation

A partir des développements précédents utilisant la non stationnarité du signal reconstruit en présence de désynchronisation, nous présentons maintenant une méthode simplifiée d'estimation de Δ . Nous considérons pour cela l'évaluation de la puissance du signal à partir de la reconstruction d'une seule sous-suite particulière caractérisée par $\tau_1 = \frac{\tilde{\Delta}}{2}$. La puissance à cet instant présente une expression théorique simplifiée que nous allons donner dans la suite. Après évaluation, cette puissance est comparée aux puissances en $t = 0$ et $t = \tilde{\Delta}$ obtenue à partir des deux séquences d'échantillons, introduites précédemment sous l'appellation P_0 et P_{Δ} (4.50). Nous allons utiliser le fait que, d'après l'hypothèse de travail introduite dans la partie précédente, $\tilde{\Delta} = \Delta$ représente le seul

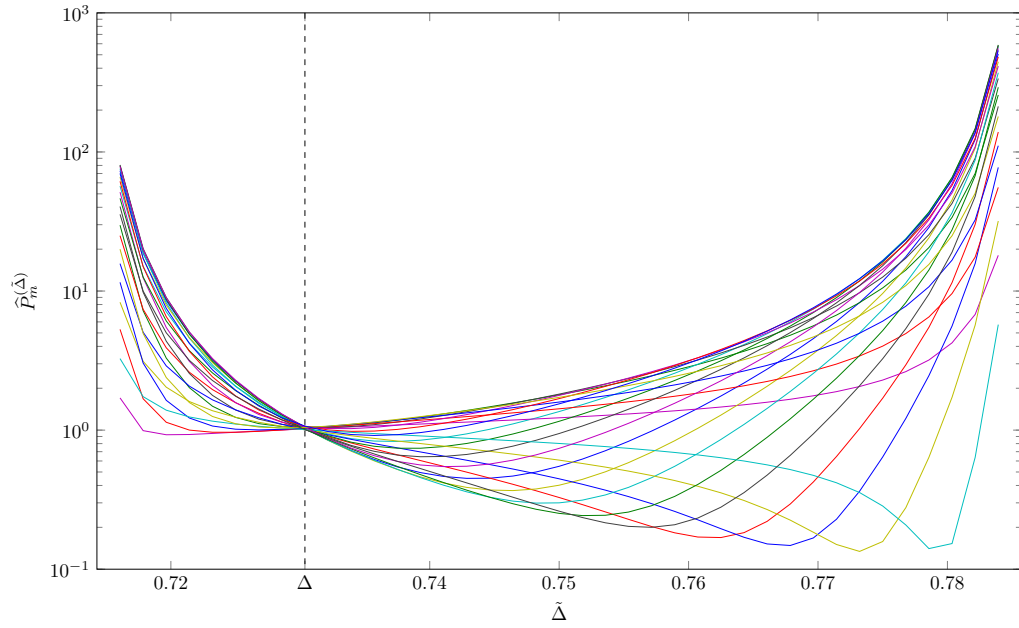
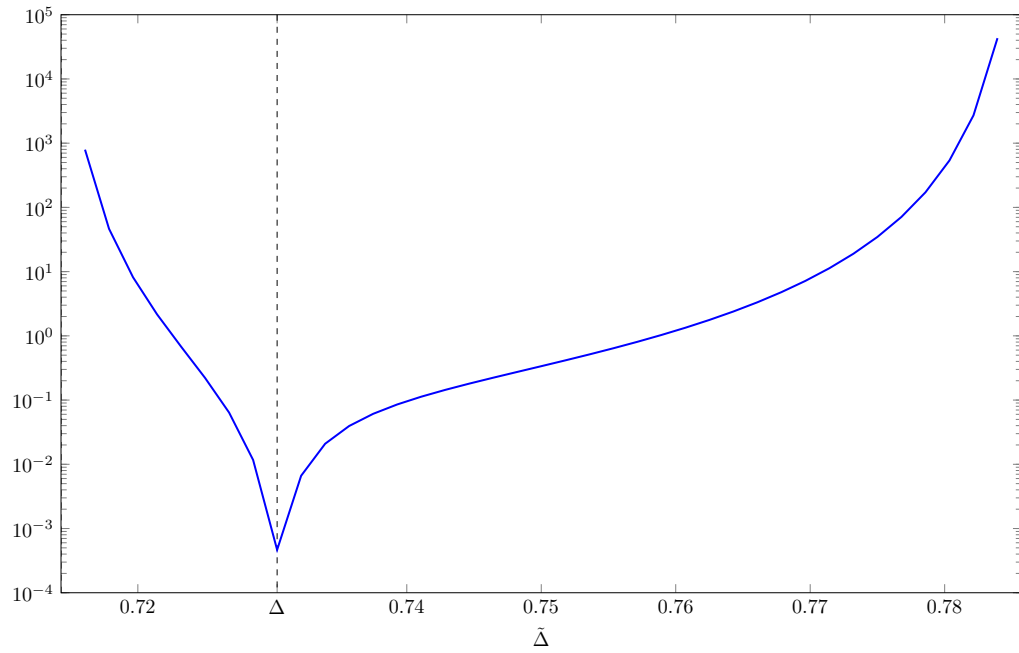


(a) Puissance du signal reconstruit aux instants τ_m calculée en fonction de $\tilde{\Delta}$



(b) Variance de la puissance calculée aux différents instants de reconstruction

FIGURE 4.16 – Courbes de puissance estimée et variance après restriction à C_Δ ($M = 22$ et $k = 3$)

(a) Puissance du signal reconstruit aux instants τ_m calculée en fonction de $\tilde{\Delta}$ 

(b) Variance de la puissance calculée aux différents instants de reconstruction

FIGURE 4.17 – Courbes de puissance estimée et variance après restriction à C_{Δ} ($M = 22$ et $k = 7$)

point de l'intervalle d'étude où le signal est stationnaire.

La puissance du signal reconstruit à l'instant $\frac{\tilde{\Delta}}{2}$ est obtenue à partir de l'expression (4.46) et s'exprime par :

$$\begin{aligned}
 P^{(\tilde{\Delta})}\left(\frac{\tilde{\Delta}}{2}\right) &= \frac{8}{\sin^2(2\pi k\tilde{\Delta})} \int_0^\infty \left(\sin^2[\pi k\tilde{\Delta}] - \sin^2[\pi k\tilde{\Delta}] \sin^2[\pi f(\Delta - \tilde{\Delta}) + \pi k\tilde{\Delta}] \right) S_x(f) df \\
 &= \frac{8 \sin^2[\pi k\tilde{\Delta}]}{\sin^2(2\pi k\tilde{\Delta})} \int_0^\infty \left(1 - \sin^2[\pi f(\Delta - \tilde{\Delta}) + \pi k\tilde{\Delta}] \right) S_x(f) df \\
 &= \frac{2}{\cos^2[\pi k\tilde{\Delta}]} \int_0^\infty \cos^2[\pi f(\Delta - \tilde{\Delta}) + \pi k\tilde{\Delta}] S_x(f) df.
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

La figure 4.18 présente le tracé de l'expression théorique de cette puissance donnée par (4.18) en fonction du paramètre $\tilde{\Delta}$ et comparée avec le tracé de la puissance du signal reconstruit après échantillonnage PNS2 d'un signal aléatoire. Nous avons également représenté les puissances P_0 et P_Δ , égales de manière théorique, qui vont nous permettre de mettre en place une méthode pratique d'estimation de Δ .

En reprenant la formulation précédente de l'estimée à partir de la variance, nous posons :

$$\begin{cases} \hat{P}_1 = P_0 \\ \hat{P}_2 = P^{(\tilde{\Delta})}\left(\frac{\tilde{\Delta}}{2}\right) \\ \hat{P}_3 = P_\Delta \end{cases} \tag{4.58}$$

et ainsi nous avons :

$$\hat{\Delta} = \min_{\tilde{\Delta} \in C_\Delta} \text{Var} \left[\hat{P}_{m, m=1..3}^{(\tilde{\Delta})} \right]. \tag{4.59}$$

Une autre stratégie d'estimation consiste à définir une puissance de référence à partir de P_0 et P_Δ et de la comparer à $P^{(\tilde{\Delta})}\left(\frac{\tilde{\Delta}}{2}\right)$. Cette puissance de référence estimée correspond à celle du signal stationnaire et peut être exprimée comme la moyenne entre P_0 et P_Δ :

$$P_{\text{ref}} = \frac{P_0 + P_\Delta}{2}. \tag{4.60}$$

Ainsi, la comparaison entre la puissance $P^{(\tilde{\Delta})}\left(\frac{\tilde{\Delta}}{2}\right)$ et P_{ref} nous fournit donc une estimée de Δ

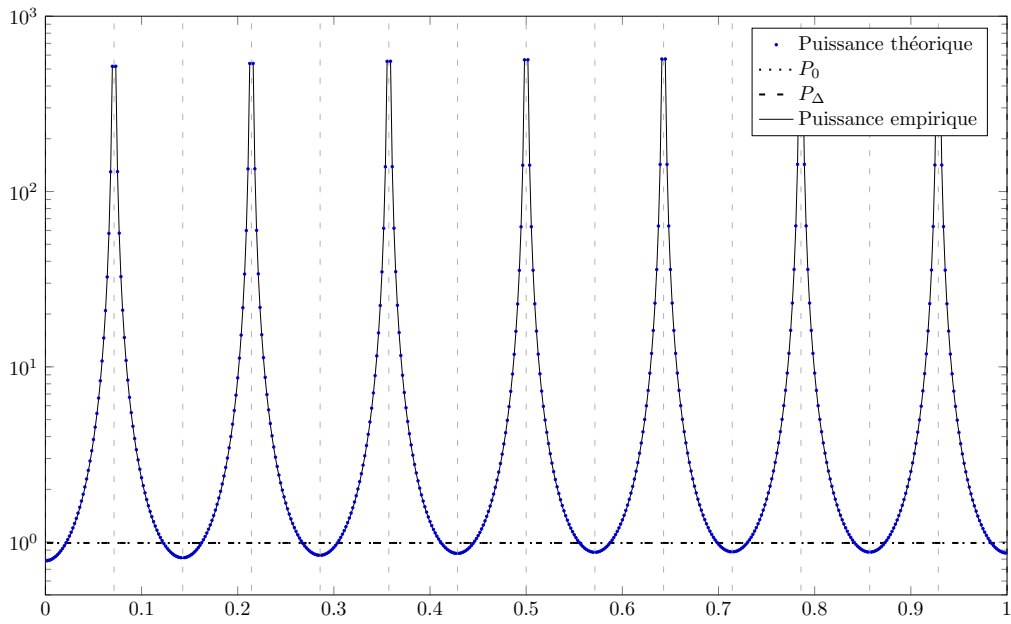
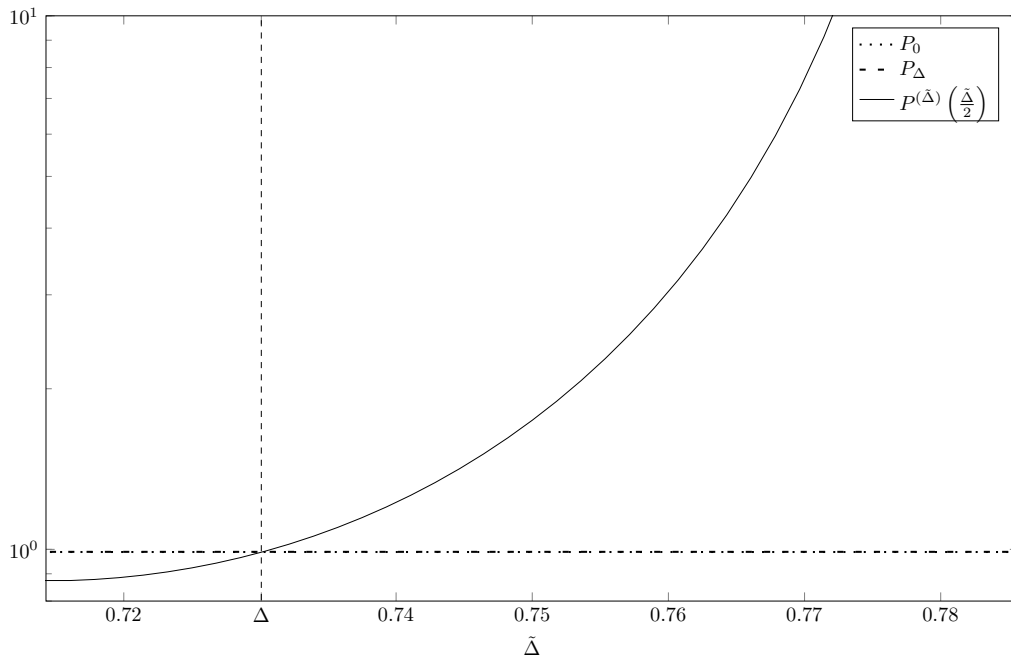
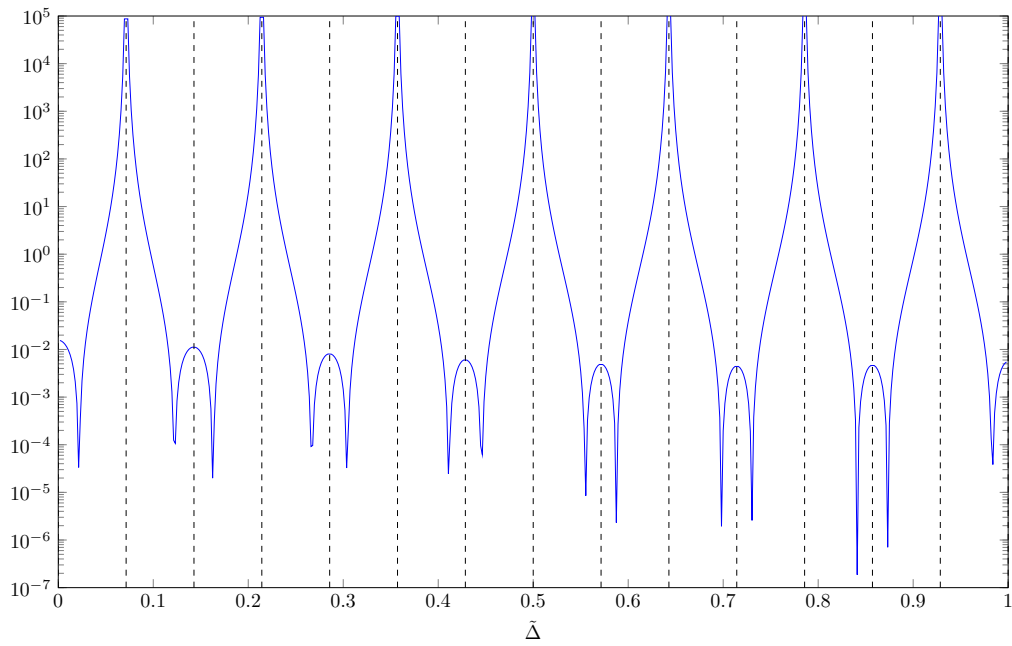
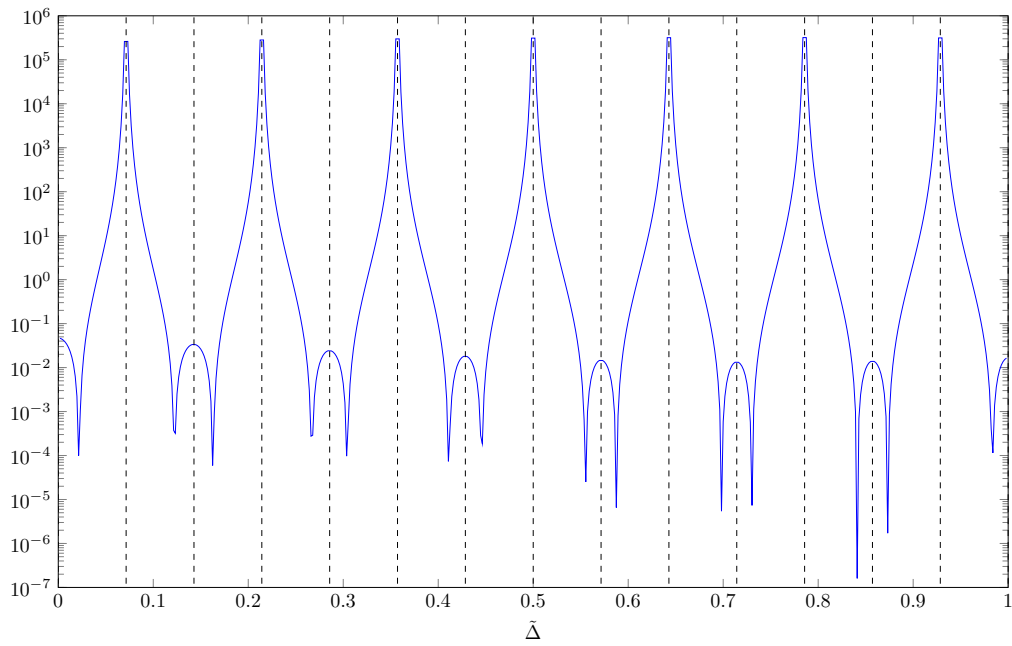
(a) Bande de Nyquist $k = 7$ (b) Restriction à C_Δ

FIGURE 4.18 – Tracé de la puissance $P^{(\tilde{\Delta})}(\frac{\tilde{\Delta}}{2})$ théorique (4.18) et empirique et comparaison avec P_0 et P_Δ



(a) Variance



(b) Critère alternatif

FIGURE 4.19 – Critères permettant l'estimation de $\hat{\Delta}$

notée $\hat{\Delta}$ que nous pouvons définir par :

$$\hat{\Delta} = \min_{\tilde{\Delta} \in C_{\Delta}} \left| P^{(\tilde{\Delta})} \left(\frac{\tilde{\Delta}}{2} \right) - P_{\text{ref}} \right|^2. \quad (4.61)$$

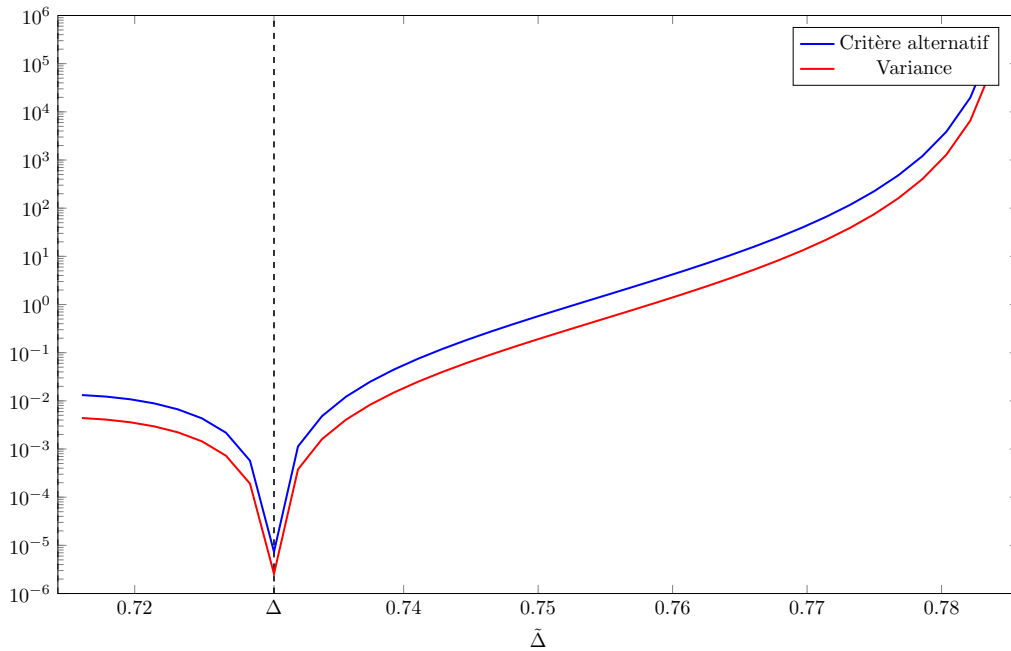


FIGURE 4.20 – Comparaison des critères d'estimation dans le cas de la restriction à C_{Δ}

La figure 4.20 présente le tracé de ces deux critères dans l'intervalle restreint de $\tilde{\Delta}$. Nous constatons visuellement que les deux critères semblent équivalents, le critère alternatif semblant néanmoins plonger de manière plus marquée au voisinage de Δ permettant une meilleure identification du minimum qui représente l'estimation $\hat{\Delta}$. Nous utiliserons ce critère alternatif dans la partie suivante.

Nous avons obtenu une méthode simplifiée car nous avons dorénavant $M = 1$ sous-suite de reconstruction, permettant de limiter le nombre d'instantants de reconstruction à calculer. Dorénavant, seuls N instantants sont reconstruits pour pouvoir évaluer la puissance $P^{(\tilde{\Delta})} \left(\frac{\tilde{\Delta}}{2} \right)$. Nous testons les performances de cette méthode dans la partie suivante.

4.4.4 Analyse des performances

Des simulations ont été effectuées pour un signal modélisé comme un processus stationnaire passe-bande dans la bande de Nyquist $k = 7$. L'échantillonnage PNS2 est caractérisé par un décalage $\Delta = 0.7304$ que nous allons estimer grâce à la mise en place de la méthode aveugle présentée ci-dessus.

La figure 4.21a présente le tracé de l'erreur quadratique d'estimation (4.19) en fonction du nombre d'échantillons N utilisés pour effectuer la reconstruction du signal. Nous constatons que les performances sont améliorées avec l'augmentation du nombre d'échantillons pris en compte. En complément de cette erreur quadratique, nous avons tracé sur la figure 4.21b le Rapport Signal à Erreur (RSE) moyen en dB, calculé sur le signal reconstruit utilisant la valeur estimée $\hat{\Delta}$ lors de l'opération de reconstruction. Ce RSE est défini comme le rapport entre la puissance du signal et la puissance de l'erreur de reconstruction selon :

$$\text{RSE}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left[\frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{erreur}}} \right] = 10 \log_{10} \left[\frac{\text{E}[|x(t)|^2]}{\text{E}[|x(t) - x(\hat{\Delta})(t)|^2]} \right] \quad (4.62)$$

Initialement, nous avons un RSE de 2.4dB étant donné que la reconstruction est fortement dégradée par la présence de désynchronisation. Nous constatons sur la figure 4.21b que la désynchronisation est compensée après estimation en considérant qu'au dessus de 40dB la reconstruction est satisfaisante.

4.5 Bilan

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à des dispositifs d'échantillonnage particulier appelés convertisseurs entrelacés temporellement pour lesquels le schéma d'échantillonnage PNS trouve une application naturelle pour modéliser la désynchronisation. En effet, ces convertisseurs sont sujets à l'apparition de défauts de synchronisation. La désynchronisation est dommageable pour le convertisseur car elle conduit à des erreurs de reconstruction importantes comme nous l'avons illustré.

Nous avons présenté dans ce chapitre un cadre de travail pour la compensation de la désynchronisation en nous basant sur une modélisation PNS de ces défauts suivie d'une reconstruction PNS qui nécessite la connaissance de la désynchronisation. L'idée est de s'adapter à cette désynchronisation

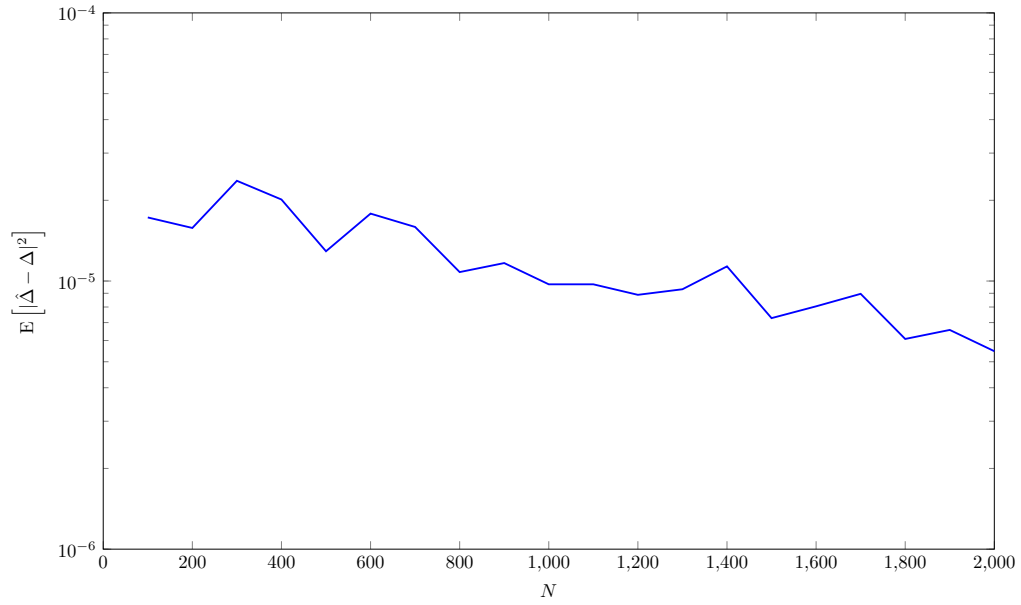
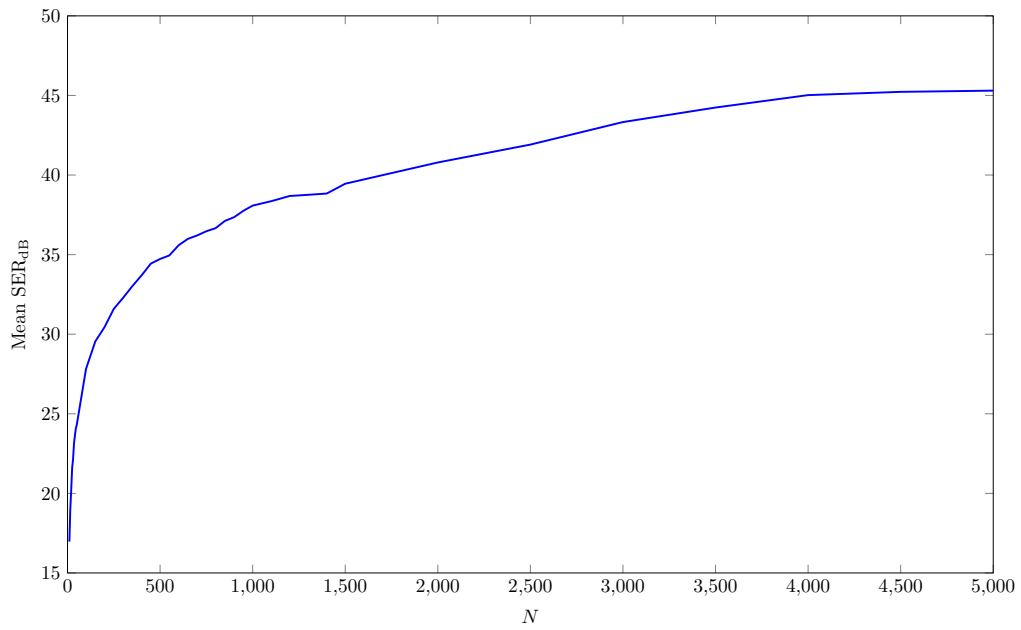
(a) Erreur quadratique d'estimation en fonction de N pour $N_{\text{ite}} = 1000$ (b) RSE de reconstruction moyen en dB en fonction de N pour $N_{\text{ite}} = 1000$

FIGURE 4.21 – Performances d'estimation et de reconstruction pour la méthode aveugle

au lieu de chercher à la corriger. Ainsi, en passant par une phase d'estimation lorsqu'elle est inconnue, nous pouvons mettre en place une architecture PNS où l'estimée est utilisée lors de la reconstruction afin de retrouver des performances satisfaisantes.

Nous avons donc présenté deux méthodes d'estimation qui se différencient par le signal qu'elles utilisent. La première méthode, déclinée selon deux exemples pratiques, est une méthode supervisée qui est basée sur l'utilisation d'un signal d'apprentissage. Ce signal possède des propriétés connues, en l'occurrence sur la forme de son spectre, nous permettant de déduire l'expression théorique d'un critère quadratique. En comparant ce critère théorique avec celui obtenu de manière empirique à partir des échantillons du signal d'apprentissage, nous pouvons obtenir une estimation de la désynchronisation. Une analyse des performances est menée pour l'exemple d'un signal sinusoïdal puis d'un signal de type bruit à bande limitée.

La deuxième méthode présentée dans cette thèse est une méthode aveugle. Elle n'utilise que le signal transmis, sous une condition de stationnarité. Nous avons montré que le signal reconstruit n'est stationnaire que lorsque la désynchronisation est connue, ce qui nous permet de mettre en place un test de stationnarité basé sur l'estimation de la puissance du signal reconstruit à différents instants. Ainsi, en comparant ces puissances, nous obtenons un indicateur du caractère stationnaire du signal. Afin de lutter contre une indétermination due au caractère passe-bande du signal, nous avons présenté une méthode simple basée sur une restriction de l'intervalle de recherche et sur un faible nombre d'instant de reconstruction, et nous en avons étudié les performances.

Conclusion et perspectives

Le but de cette thèse était d'explorer les potentialités de l'échantillonnage non uniforme dans le domaine des télécommunications. L'objectif visé était de sélectionner un schéma d'échantillonnage non uniforme susceptible de permettre des développements en lien avec les problématiques des récepteurs de télécommunications.

Le premier chapitre a donc été consacré à un état de l'art non exhaustif de l'échantillonnage non uniforme d'un point de vue théorique. Plusieurs schémas d'échantillonnage ont été présentés, qu'ils soient déterministes ou aléatoires, ainsi que les modèles de signaux auxquels ils s'appliquent. Nous avons ensuite présenté les méthodes de reconstruction qui leur sont associées, en précisant sous quelles conditions cette reconstruction est possible. Ces schémas ont été discutés du point de vue de l'applicabilité au contexte des télécommunications. Il en est ressorti que l'échantillonnage déterministe appelé périodique non uniforme (PNS) est un candidat privilégié pour nos études. En effet, son fonctionnement simple mettant en jeu des séquences uniformes entrelacées temporellement de manière non uniforme permet d'envisager une utilisation directe à moindre coût de dispositifs d'échantillonnage existants. Par ailleurs, ce schéma est directement rattaché à l'échantillonnage de signaux passe-bande pour lequel il a été introduit en premier lieu. En effet, le PNS présente des propriétés intéressantes de souplesse du choix de la fréquence d'échantillonnage pour les signaux passe-bande, qui constituent le modèle classique en télécommunications. L'utilisation du critère de Landau est permise par le PNS quelle que soit la position du support spectral du signal, ce qui permet de choisir une fréquence d'échantillonnage inférieure à celle d'un schéma classique d'échantillonnage passe-bande uniforme.

Dans le deuxième chapitre, des généralités en lien avec les récepteurs de télécommunications,

notamment une présentation de la modélisation de la chaîne de réception que nous utilisons, ont ensuite été exposées. A partir du détail de divers points d'intérêt de la chaîne, nous avons dégagé des problématiques pratiques, pour certaines desquelles nous avons proposé d'apporter des solutions par l'utilisation d'échantillonnage non uniforme. La première problématique qui a été identifiée est la réjection d'interférences voisines et la sélection de sous-bandes fréquentielles, intervenant dans un contexte de transmissions multi-utilisateurs. Afin de traiter chaque utilisateur de manière indépendante, il est en effet important de pouvoir séparer le contenu fréquentiel appartenant à chacun et d'effectuer des traitements séparés sur chaque sous-bande ainsi sélectionnée. La deuxième problématique identifiée se rapporte à la création du signal analytique qui est un outil couramment utilisé car il permet de simplifier les traitements au sein de la chaîne de réception de télécommunications. Enfin, la troisième problématique concerne les dispositifs d'échantillonnage qui sont sujets à des imperfections pratiques lors de leur conception et qui nécessitent une modélisation adaptée. Nous isolons un type particulier appelé convertisseur entrelacé temporellement pour lequel nous présentons les problématiques de désynchronisation. Le schéma PNS permet d'apporter des solutions aux trois problématiques citées car nous montrons dans les chapitres suivants qu'il permet une reconstruction du signal à laquelle nous pouvons ajouter des fonctionnalités répondant aux deux premières problématiques. Par ailleurs, sa structure entrelacée en fait une modélisation naturelle des convertisseurs entrelacés soumis à une désynchronisation.

Dans le troisième chapitre, nous avons proposé une méthode d'ajouts de fonctionnalités à l'opération de reconstruction d'un signal aléatoire échantillonné par un schéma PNS2. Nous avons rappelé en début de chapitre les fondements mathématiques sur lesquels se base la reconstruction PNS2 dans le cadre de l'utilisation de signaux aléatoires, notamment l'isométrie fondamentale qui permet de lier le processus aléatoire à reconstruire avec l'exponentielle complexe de façon à simplifier les calculs d'intégrale subséquents. Nous avons ensuite présenté la reconstruction PNS2 avec l'ajout d'un filtre conjoint qui est utilisé pour modifier les développements en séries de Fourier permettant de calculer les fonctions de reconstruction. Le filtre conjoint est ainsi intégré directement dans la reconstruction et un choix approprié de sa fonction de transfert permet de modifier la reconstruction selon l'ajout de fonctionnalités visé. Nous avons notamment présenté une reconstruction couplée à un filtrage

passe-bande sélectif qui permet la sélection de sous-bandes fréquentielles ainsi que le rejet d'interférences proches, répondant à la première problématique introduite dans le deuxième chapitre. Nous avons ensuite présenté l'ajout d'un filtrage analytique permettant la construction du signal complexe analytique, très utilisé dans la chaîne de réception de télécommunications. Ces fonctionnalités ont également été couplées à des formules dont la vitesse de convergence a été améliorée. En effet, la reconstruction, théoriquement exacte pour un nombre infini d'échantillons, est effectuée en pratique sur une fenêtre d'observation contenant un nombre fini d'échantillons, ce qui entraîne des erreurs de reconstruction, que nous pouvons néanmoins limiter en améliorant la vitesse de convergence. La fin du chapitre est consacrée à une généralisation du cas considéré pour développer l'ajout du filtre conjoint, basé sur un positionnement particulier de la bande du signal dans une bande de Nyquist donnée. Nous avons montré qu'un raisonnement similaire peut être développé pour un signal positionné de manière quelconque.

Cette intégration de fonctionnalités à la reconstruction PNS2 ouvre des perspectives intéressantes concernant de futures applications dans un cadre pratique. Tout d'abord, nous pouvons envisager de modifier la modélisation de l'échantillonnage pour tenir compte de la manière pratique d'échantillonner basée sur l'utilisation d'échantillonneurs réels (bloqueurs, à porte analogique, ...). Il serait alors nécessaire de modifier notre approche théorique. Nous pouvons également envisager d'ajouter d'autres fonctionnalités à l'opération de reconstruction, nécessitant le choix de filtres conjoints appropriés et le calcul de séries de Fourier associées. Par ailleurs, l'échantillonnage PNS étant rattaché en pratique à l'utilisation de bancs de filtres [LV98, EO00, JL02, PLH04], il serait intéressant de reformuler dans ce cadre les résultats d'ajout de fonctionnalités. Finalement, une application de ces résultats peut être envisagée dans le cadre d'un échantillonnage I/Q. En effet, en pratique la création des composantes en phase et en quadrature (présentées dans la partie 2.3.1) se fait grâce à deux échantillonneurs qui peuvent être désynchronisés. Dans ce cas, l'enveloppe complexe construite à partir des voies I/Q est entachée d'une erreur due à la désynchronisation. Une piste de travail serait d'appliquer la méthode présentée dans ce chapitre à cette problématique particulière lorsque la désynchronisation est connue.

Le quatrième et dernier chapitre de cette thèse a été consacré à un type particulier de dispositifs

d'échantillonnage, les convertisseurs entrelacés, pour lequel le PNS trouve une application naturelle. En effet, ces convertisseurs sont sujets à des défauts de désynchronisation que nous choisissons de modéliser à l'aide d'un schéma PNS. Cependant, cette désynchronisation étant inconnue, susceptible de varier et ayant un impact important sur la reconstruction si elle n'est pas traitée, nous montrons qu'une stratégie d'estimation de la désynchronisation suivie de l'utilisation d'une reconstruction PNS permet de lutter contre les erreurs de reconstruction causées sur le signal de sortie. Nous avons donc présenté deux méthodes d'estimation de la désynchronisation, modélisée par le décalage entre les voies d'un schéma d'échantillonnage PNS2. La première méthode développée est une méthode supervisée qui se base sur la transmission et le traitement d'un signal d'apprentissage aux propriétés spectrales connues. A partir de cette connaissance, nous en avons déduit la formulation théorique d'un critère quadratique que nous avons comparé à un calcul empirique à partir des échantillons du signal d'apprentissage modélisé comme un signal passe-bande. Nous avons présenté deux exemples particuliers : un signal sinusoïdal et un signal de type bruit à bande limitée. Dans les deux cas, nous avons levé une ambiguïté liée au caractère passe-bande du signal d'apprentissage par la considération d'un signal variable en fréquence. Les performances d'estimation ont été étudiées pour les deux exemples. La deuxième méthode présentée dans ce chapitre est une méthode aveugle qui se base uniquement sur des propriétés de stationnarité du signal d'intérêt. Nous avons donné l'expression théorique de l'erreur quadratique de reconstruction dans le cas où la désynchronisation est inconnue puis nous avons montré que la puissance du signal reconstruit ne dépend pas du temps uniquement lorsque la désynchronisation est connue. Ce résultat nous a permis de développer une méthode d'estimation de la désynchronisation basée sur un test de stationnarité en étudiant la puissance du signal reconstruit à différents instants et en les comparant. Finalement, nous avons présenté une méthode simple basée sur une restriction de l'intervalle de recherche et sur la reconstruction du signal à un instant particulier.

Différentes perspectives peuvent être dégagées concernant les deux méthodes d'estimation présentées. Concernant la méthode supervisée, il serait intéressant de se baser sur des signaux aux propriétés connues classiquement utilisés comme les séquences *pseudorandom noise* (PN) par exemple. Ces séquences sont pseudo-aléatoires et sont insérées à l'émission au début des trames pour effectuer une

synchronisation en réception par recherche du maximum d'énergie. Nous pouvons citer comme candidats susceptibles les séquences de Chu [Chu72] qui font partie de la famille des séquences *Constant Amplitude Zero AutoCorrelation (CAZAC)*, déjà utilisés dans des applications de communications sans fil. En ce qui concerne la méthode aveugle, une mise en place adaptative fait partie des perspectives envisagées à court terme afin de rendre la méthode implantable dans un cadre pratique. Une levée de la restriction de l'intervalle de recherche serait également un résultat intéressant afin de se passer d'*a priori* et d'étendre la méthode à un cadre plus général. Finalement, en lien avec la piste de travail sur l'échantillonnage I/Q désynchronisé présentée précédemment, une autre piste de travail serait de mettre en place une estimation de la désynchronisation inconnue qui a lieu dans un échantillonnage I/Q afin de l'utiliser ensuite pour la compenser grâce à une reconstruction conjointe, ce qui permettrait de réutiliser et de joindre les deux parties de notre travail de thèse dans une application pratique.

Bibliographie

- [AF97] A. Aldroubi and H. Feichtinger. Complete iterative reconstruction algorithms for irregularly sampled data in spline-like spaces. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, volume 3, pages 1857–1860. IEEE, 1997.
- [AGBC98] H. Arslan, S. C. Gupta, G. E. Bottomley, and S. Chennakeshu. Successive cancellation of adjacent channel signals in FDMA/TDMA digital mobile radio systems. In *IEEE Vehicular Technology Conference (VTC)*, volume 3, pages 1720–1724. IEEE, 1998.
- [AM08] A. Amini and F. Marvasti. Convergence analysis of an iterative method for the reconstruction of multi-band signals from their uniform and periodic nonuniform samples. *Sampling Theory in Signal and Image Processing (STSIP)*, 7(2) :113, 2008.
- [ASTC99] D. M. Akos, M. Stockmaster, J. B. Tsui, and J. Caschera. Direct bandpass sampling of multiple distinct RF signals. *IEEE Transactions on Communications*, 47(7) :983–988, 1999.
- [Bab12] P. Babu. *Spectral Analysis of Nonuniformly Sampled Data and Applications*. PhD thesis, Uppsala Universitet, 2012.
- [Bal62] A. V. Balakrishnan. On the problem of time jitter in sampling. *IRE Transactions on Information Theory*, 8(3) :226–236, 1962.
- [BDF⁺10] P. L. Butzer, M. M. Dodson, P. J. Ferreira, J. R. Higgins, O. Lange, and P. Seidler.

- Herbert Raabe's work in multiplex signal transmission and his development of sampling methods. *Signal Processing*, 90(5) :1436–1455, 2010.
- [BEGK02] B. F. Beidas, H. El Gamal, and S. Kay. Iterative interference cancellation for high spectral efficiency satellite communications. *IEEE Transactions on Communications*, 50(1) :31–36, 2002.
- [Beu66] F. J. Beutler. Error-free recovery of signals from irregularly spaced samples. *Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) Review*, 8(3) :328–335, 1966.
- [BHFD15] A. Bonnetat, J.-M. Hode, G. Ferre, and D. Dallet. Correlation-based frequency-response mismatch compensation of quad-tiadc using real samples. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs*, 62(8) :746–750, 2015.
- [Bil07] I. Bilinskis. *Digital Alias-Free Signal Processing*. Wiley, New York, 2007.
- [BJ81] J. L. Brown Jr. Multi-channel sampling of low-pass signals. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 28(2) :101–106, 1981.
- [BJH80] W. C. Black Jr. and D. A. Hodges. Time interleaved converter arrays. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, 15(6) :1022–1029, 1980.
- [BL66a] F. J. Beutler and O. A. Leneman. Random sampling of random processes : Stationary point processes. *Information and Control*, 9(4) :325–346, 1966.
- [BL66b] F. J. Beutler and O. A. Leneman. The theory of stationary point processes. *Acta Mathematica*, 116(1) :159–190, 1966.
- [Bou06] S. Bourguignon. *Analyse spectrale à haute résolution de signaux irrégulièrement échantillonnés : Application à l'Astrophysique*. PhD thesis, Université Paul Sabatier-Toulouse III, 2006.
- [Bra12] T. M. Braun. *Satellite Communications Payload and System*. Wiley, New Jersey, 2012.

- [Bro63] W. M. Brown. Sampling with random jitter. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 11(2) :460–473, 1963.
- [BT04] J.-P. Berrut and L. N. Trefethen. Barycentric lagrange interpolation. *Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) Review*, 46(3) :501–517, 2004.
- [Cam68] L. L. Campbell. Sampling theorem for the fourier transform of a distribution with bounded support. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 16(3) :626–636, 1968.
- [CCL09] W. Chauvet, M. Chabert, and B. Lacaze. Influence d’un échantillonnage irrégulier sur les performances de la reconstruction. *Colloque sur le Traitement du Signal et des Images (GRETSI)*, 2009.
- [Chu72] D. Chu. Polyphase codes with good periodic correlation properties (corresp.). *IEEE Transactions on Information Theory*, 18(4) :531–532, 1972.
- [CL66] H. Cramér and M. R. Leadbetter. *Stationary and related stochastic processes*. Wiley, New York, 1966.
- [CL12a] M. Chabert and B. Lacaze. Fast convergence reconstruction formulas for periodic nonuniform sampling of order 2. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 3793–3796. IEEE, 2012.
- [CL12b] M. Chabert and B. Lacaze. Non uniform sampling for remote sensing images. In *IEEE International Geoscience And Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, pages 4718–4721. IEEE, 2012.
- [Cou95] A. J. Coulson. A generalization of nonuniform bandpass sampling. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(3) :694–704, Mars 1995.
- [CVP94] A. J. Coulson, R. G. Vaughan, and M. A. Poletti. Frequency-shifting using bandpass sampling. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(6) :1556–1559, 1994.

- [CW08] E. J. Candès and M. B. Wakin. An introduction to compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 25(2) :21–30, 2008.
- [DB78] C. De Boor. A practical guide to splines. *Applied Mathematical Sciences*, 1, 1978.
- [DD03] I. Daubechies and R. DeVore. Approximating a bandlimited function using very coarsely quantized data : A family of stable sigma-delta modulators of arbitrary order. *The Annals of Mathematics*, 158(2) :679–710, Septembre 2003.
- [DFLH98] K. C. Dyer, D. Fu, S. H. Lewis, and P. J. Hurst. An analog background calibration technique for time-interleaved analog-to-digital converters. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, 33(12) :1912–1919, 1998.
- [Don06] D. L. Donoho. Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(4) :1289–1306, 2006.
- [DS89] M. M. Dodson and A. M. Silva. An algorithm for optimal regular sampling. *Signal Processing*, 17(2) :169–174, 1989.
- [DVdSR13] E. Dogaru, F. Vinci dos Santos, and W. Rebernak. LMS-based RF BIST architecture for multistandard transmitters. In *IEEE International Symposium on Defect and Fault Tolerance in VLSI and Nanotechnology Systems (DFT)*, pages 131–136. IEEE, 2013.
- [DW09] V. Divi and G. W. Wornell. Blind calibration of timing skew in time-interleaved analog-to-digital converters. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 3(3) :509–522, 2009.
- [ECM09] M. El-Chammas and B. Murmann. General analysis on the impact of phase-skew in time-interleaved ADCs. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers*, 56(5) :902–910, 2009.
- [ECM11] M. El-Chammas and B. Murmann. A 12-GS/s 81-mW 5-bit time-interleaved flash ADC with background timing skew calibration. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, 46(4) :838–847, 2011.

- [EGE04] J. Elbornsson, F. Gustafsson, and J.-E. Eklund. Blind adaptive equalization of mismatch errors in a time-interleaved A/D converter system. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers*, 51(1) :151–158, 2004.
- [EGE05] J. Elbornsson, F. Gustafsson, and J.-E. Eklund. Blind equalization of time errors in a time-interleaved ADC system. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53(4) :1413–1424, 2005.
- [Elb03] J. Elbornsson. *Analysis, Estimation and Compensation of Mismatch Effects in A/D Converters*. PhD thesis, Linköpings Universitet, Department of Electrical Engineering, Linköping, 2003.
- [Eld15] Y. C. Eldar. *Sampling Theory : Beyond Bandlimited Systems*. Cambridge University Press, 2015.
- [EN09a] ETSI EN. 301 790 v1.5.1 Digital Video Broadcasting (DVB) ; Interaction channel for satellite distribution systems. European Standard (Telecommunications series), ETSI, 2009.
- [EN09b] ETSI EN. 302 307 v1.2.1 Digital Video Broadcasting (DVB) ; Second generation framing structure, channel coding and modulation systems for Broadcasting, Interactive Services, News Gathering and other broadband satellite applications (DVB-S2). European Standard (Telecommunications series), ETSI, 2009.
- [EO00] Y. C. Eldar and A. V. Oppenheim. Filterbank reconstruction of bandlimited signals from nonuniform and generalized samples. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 48(10) :2864–2875, Octobre 2000.
- [Epp87] J. F. Epperson. On the runge example. *American Mathematics Monthly*, 94(4) :329–341, 1987.
- [FB96] P. Feng and Y. Bresler. Spectrum-blind minimum-rate sampling and reconstruction of

- multiband signals. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, volume 3, pages 1688–1691. IEEE, 1996.
- [FDLH98] D. Fu, K. C. Dyer, S. H. Lewis, and P. J. Hurst. A digital background calibration technique for time-interleaved analog-to-digital converters. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, 33(12) :1904–1911, 1998.
- [Fer27] W. L. Ferrar. On the consistency of cardinal function interpolation. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 47 :230–242, 1927.
- [FH95] B. Foster and C. Herley. Exact reconstruction from periodic nonuniform samples. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, volume 2, pages 1452–1455. IEEE, 1995.
- [Fla98] P. Flandrin. *Temps-fréquence, Deuxième édition*. Hermès, 1998.
- [FLP⁺07] G. Fettweis, M. Löhning, D. Petrovic, M. Windisch, P. Zillmann, and W. Rave. Dirty RF : A new paradigm. *International Journal of Wireless Information Networks*, 14(2) :133–148, 2007.
- [Fog55] L. Fogel. A note on the sampling theorem. *IRE Transactions on Information Theory*, 1(1) :47–48, 1955.
- [Ger74] R. W. Gerchberg. Super-resolution through error energy reduction. *Journal of Modern Optics*, 21(9) :709–720, 1974.
- [GW95] C. Gasquet and P. Witomski. *Analyse de Fourier et applications : filtrage, calcul numérique, ondelettes*. Masson, 1995.
- [Hig76] J. R. Higgins. A sampling theorem for irregularly spaced sample points. *IEEE Transactions on Information Theory*, 22(5) :621–622, Septembre 1976.
- [Hig87] J. R. Higgins. Some gap sampling series for multiband signals. *Signal Processing*, 12(3) :313–319, 1987.

- [HL06] S. Huang and B. Levy. Adaptive blind calibration of timing offset and gain mismatch for two-channel time-interleaved ADCs. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers*, 53(6) :1278–1288, 2006.
- [HL07] S. Huang and B. Levy. Blind calibration of timing offsets for four-channel time-interleaved ADCs. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers*, 54(4) :863–876, 2007.
- [HT62] H. D. Helms and J. B. Thomas. Truncation error of sampling-theorem expansions. *Proceedings of the IRE*, 50(2) :179–184, 1962.
- [HVV98] S. Haykin and B. Van Veen. *Signals and Systems*. Wiley, New York, 1998.
- [Jen88] Y. C. Jenq. Digital spectra of nonuniformly sampled signals : Fundamentals and high-speed waveform digitizers. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 37(2) :245–251, 1988.
- [Jer77] A. J. Jerri. The shannon sampling theorem – Its various extensions and applications : A tutorial review. *Proceedings of the IEEE*, 65(11) :1565–1596, 1977.
- [JFS⁺04] S. M. Jamal, D. Fu, M. P. Singh, P. J. Hurst, and S. H. Lewis. Calibration of sample-time error in a two-channel time-interleaved analog-to-digital converter. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers*, 51(1) :130–139, 2004.
- [JL00] H. Jin and E. Lee. A digital-background calibration technique for minimizing timing-error effects in time-interleaved ADCs. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Analog and Digital Signal Processing*, 47(7) :603–613, 2000.
- [JL02] H. Johansson and P. Löwenborg. Reconstruction of nonuniformly sampled bandlimited signals by means of digital fractional delay filters. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(11) :2757–2767, Novembre 2002.
- [Kad64] M. I. Kadec. The exact value of the paley-wiener constant. *Soviet Math. Dokl.*, 5 :559–561, 1964.

- [Kha06] K. Khare. Bandpass sampling and bandpass analogues of prolate spheroidal functions. *Signal processing*, 86(7) :1550–1558, 2006.
- [Koh53] A. Kohlenberg. Exact interpolation of band-limited functions. *Journal of Applied Physics*, 24(12) :1432–1436, Décembre 1953.
- [Kot33] V. A. Kotelnikov. On the carrying capacity of the ether and wire in telecommunications. In *Material for the First All-Union Conference on Questions of Communication*, Izd. Red. Upr. Svyazi RKKA, Moscow, 1933.
- [KPJ93] R. Khoini-Poorfard and D. A. Johns. Time-interleaved oversampling convertors. *Electronics Letters*, 29(19) :1673–1674, 1993.
- [KV93] J. Kovačević and M. Vetterli. Perfect reconstruction filter banks with rational sampling factors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(6) :2047–2066, 1993.
- [Lac00] B. Lacaze. *Processus aléatoire pour communications numériques*. Hermès, 2000.
- [Lac05a] B. Lacaze. Reconstruction formula for irregular sampling. *Sampling Theory in Signal and Image Processing (STSIP)*, 4(1) :33–43, 2005.
- [Lac05b] B. Lacaze. A theoretical exposition of stationary processes sampling. *Sampling Theory in Signal and Image Processing (STSIP)*, 4(3) :201–230, 2005.
- [Lac09] B. Lacaze. About bi-periodic samplings. *Sampling Theory in Signal and Image Processing (STSIP)*, 8(3) :287–306, Septembre 2009.
- [Lac10] B. Lacaze. Equivalent circuits for the PNS2 sampling scheme. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers*, 57(11) :2904–2914, Novembre 2010.
- [Lac12] B. Lacaze. Filtering from PNS2 sampling. *Sampling Theory in Signal and Image Processing (STSIP)*, 11(1) :43–53, 2012.
- [Lac13] B. Lacaze. Equivalent circuits for the PNS3 sampling scheme. *Sampling Theory in Signal and Image Processing (STSIP)*, 12(2–3) :245–265, 2013.

- [Lan67a] H. J. Landau. Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions. *Acta Mathematica*, 117(1) :37–52, Juillet 1967.
- [Lan67b] H. J. Landau. Sampling, data transmission, and the Nyquist rate. *Proceedings of the IEEE*, 55(10) :1701–1706, Octobre 1967.
- [LDP07] M. Lustig, D. Donoho, and J. Pauly. Sparse MRI : The application of compressed sensing for rapid MR imaging. *Magnetic Resonance in Medicine*, 58(6) :1182–1195, 2007.
- [Len66] O. A. Leneman. Random sampling of random processes : Impulse processes. *Information and Control*, 9(4) :347–363, 1966.
- [Lev40] N. Levinson. Gap and density theorems. *American Mathematical Society Colloquium*, 26, 1940.
- [Lin59] D. A. Linden. A discussion of sampling theorems. *Proceedings of the IRE*, 47(7) :1219–1226, 1959.
- [Llo59] S. P. Lloyd. A sampling theorem for stationary (wide sense) stochastic processes. *Transactions of the American Mathematical Society*, 92(1) :1–12, 1959.
- [LV98] Y-P. Lin and P. P. Vaidyanathan. Periodically nonuniform sampling of bandpass signals. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Analog and Digital Signal Processing*, 45(3) :340–351, Mars 1998.
- [MAG91] F. Marvasti, M. Analoui, and M. Gamshadzahi. Recovery of signals from nonuniform samples using iterative methods. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39(4) :872–878, 1991.
- [Mar96] F. Marvasti. Nonuniform sampling theorems for bandpass signals at or below the nyquist density. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(3) :572–576, 1996.
- [Mar01] F. Marvasti. *Nonuniform Sampling : Theory and Practice*. Kluwer Academic - Plenum Publishers, New York, 2001.

- [MB09] G. Maral and M. Bousquet. *Satellite communications systems : systems, techniques and technology, Fifth Edition*. Wiley, 2009.
- [MC97] R. J. Martin and D. A. Castelow. Reconstruction of multiband signals using irregular sampling. *General Electric Company (GEC) Journal of Technology*, 14 :180–185, 1997.
- [McF62] J. A. McFadden. On the lengths of intervals in a stationary point process. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological)*, pages 364–382, 1962.
- [MDCC09] J. A. McNeill, C. David, M. Coln, and R. Croughwell. "Split ADC" calibration for all-digital correction of time-interleaved ADC errors. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs*, 56(5) :344–348, 2009.
- [ME08] E. Margolis and Y. C. Eldar. Nonuniform sampling of periodic bandlimited signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(7) :2728–2745, Juillet 2008.
- [ME10] M. Mishali and Y. Eldar. From theory to practice : Sub-Nyquist sampling of sparse wide-band analog signals. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 4(2) :375–391, 2010.
- [MI91] R. J. Marks II. *Introduction to Shannon sampling and interpolation theory*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [MI11] D. G. Manolakis and V. K. Ingle. *Applied digital signal processing : theory and practice*. Cambridge University Press, New York, 2011.
- [MO12] S. Maymon and A. V. Oppenheim. Quantization and compensation in sampled interleaved multichannel systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 60(1) :129–138, 2012.
- [Mur08] B. Murmann. A/D converter trends : Power dissipation, scaling and digitally assisted architectures. In *IEEE Custom Integrated Circuits Conference (CICC)*, pages 105–112. IEEE, 2008.

- [MV00a] P. Marziliano and M. Vetterli. Fast reconstruction in periodic nonuniform sampling of discrete-time bandlimited signals. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 317–320. IEEE, 2000.
- [MV00b] P. Marziliano and M. Vetterli. Reconstruction of irregularly sampled discrete-time bandlimited signals with unknown sampling locations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 48(12) :3462–3471, 2000.
- [MYFI13] J. Matsuno, T. Yamaji, M. Furuta, and T. Itakura. All-digital background calibration technique for time-interleaved ADC using pseudo aliasing signal. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers*, 60(5) :1113–1121, 2013.
- [Nam02] W. Namgoong. Finite-length synthesis filters for non-uniformly time-interleaved analog-to-digital converter. In *IEEE International Symposium on Circuits and Systems (IS-CAS)*, volume 4, pages 815–818. IEEE, 2002.
- [Nat86] F. Natterer. Efficient evaluation of oversampled functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 14(3) :303–309, 1986.
- [Nyq28] H. Nyquist. Certain topics in telegraph transmission theory. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 47(2) :617–644, 1928.
- [Pap75] A. Papoulis. A new algorithm in spectral analysis and band-limited extrapolation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 22(9) :735–742, 1975.
- [Pap77] A. Papoulis. Generalized sampling expansion. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 24(11) :652–654, Novembre 1977.
- [PLH04] R. S. Prendergast, B. C. Levy, and P. J. Hurst. Reconstruction of band-limited periodic nonuniformly sampled signals through multirate filter banks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers*, 51(8) :1612–1622, Août 2004.
- [PP00] Y. S. Poberezhskiy and G. Y. Poberezhskiy. Sampling technique allowing exclusion of antialiasing filter. *Electronics Letters*, 36(4) :297–298, 2000.

- [PP04] Y. S. Poberezhskiy and G. Y. Poberezhskiy. Sampling and signal reconstruction circuits performing internal antialiasing filtering and their influence on the design of digital receivers and transmitters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers*, 51(1) :118–129, 2004.
- [Pro01] J. G. Proakis. *Digital Communications, Fourth Edition*. McGraw-Hill, New York, 2001.
- [PW34] R. E. Paley and N. Wiener. *Fourier transforms in the complex domain*, volume 19. American Mathematical Society, New York, 1934.
- [Raz12] B. Razavi. Problem of timing mismatch in interleaved ADCs. In *IEEE Custom Integrated Circuits Conference (CICC)*, pages 1–8, 2012.
- [Raz13] B. Razavi. Design considerations for interleaved ADCs. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, 48(8) :1806–1817, 2013.
- [Rie93] S. Ries. Reconstruction of real and analytic band-pass signals from a finite number of samples. *Signal processing*, 33(3) :237–257, 1993.
- [RKKJ06] T. Renk, C. Kloeck, C. Koerner, and F. K. Jondral. Increasing spectral efficiency by managing adjacent channel interference. In *International Workshop on Technology and Policy for Accessing Spectrum (TAPAS)*, volume 16. ACM, Août 2006.
- [RLH08] A. Rosenthal, A. Linden, and M. Horowitz. Multirate asynchronous sampling of sparse multiband signals. *Journal of Optical Society of America (JOSA) A*, 25(9) :2320–2330, 2008.
- [Rud01] M. K. Rudberg. Calibration of mismatch errors in time interleaved ADCs. In *IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems (ICECS)*, volume 2, pages 845–848. IEEE, 2001.
- [SA87] K. D. Sauer and J. P. Allebach. Iterative reconstruction of bandlimited images from non-uniformly spaced samples. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 34(12) :1497–1506, 1987.

- [Sch01] R. Schaumann. *Design of analog filters*. Oxford University Press, Oxford, 2001.
- [SF92a] S. C. Scoular and W. J. Fitzgerald. Analytic sampling of bandpass signals. *Signal processing*, 29(1) :67–76, 1992.
- [SF92b] S. C. Scoular and W. J. Fitzgerald. Periodic nonuniform sampling of multiband signals. *Signal Processing*, 28(2) :195–200, 1992.
- [Sha49] C. E. Shannon. Communication in the presence of noise. *Proceedings of the IRE*, 37(1) :10–21, 1949.
- [SM76] B. D. Sharma and F. C. Mehta. Generalized bandpass sampling theorem. *Mathematica Balkanica*, 6 :204–217, 1976.
- [SRM07] M. Seo, M. Rodwell, and U. Madhow. Generalized blind mismatch correction for two-channel time-interleaved A-to-D converters. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, volume 3, pages 1505–1508. IEEE, 2007.
- [SS60] H. S. Shapiro and R. A. Silverman. Alias-free sampling of random noise. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 8(2) :225–248, 1960.
- [ST05] T. Strohmer and J. Tanner. Implementations of Shannon’s sampling theorem, a time-frequency approach. *Sampling Theory in Signal and Image Processing (STSIIP)*, 4(1) :1–17, 2005.
- [ST06] T. Strohmer and J. Tanner. Fast reconstruction methods for bandlimited functions from periodic nonuniform sampling. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 44(3) :1073–1094, Juin 2006.
- [Ste83] R. L. Stens. A unified approach to sampling theorems for derivatives and Hilbert transforms. *Signal Processing*, 5(2) :139–151, 1983.
- [Ste12] D. V. Stepanovic. *Calibration Techniques for Time-Interleaved SAR A/D Converters*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 2012.

- [Str91] T. Strohmer. Irregular sampling, frames and pseudoinverse. Master's thesis, University of Vienna, Department of Mathematics, 1991.
- [Sun06] Y-R. Sun. *Generalized bandpass sampling receivers for Software Defined Radio*. PhD thesis, Royal Institute of Technology, School of Information and Communication Technology, Stockholm, 2006.
- [SWH01] L. Sumanen, M. Waltari, and K. Halonen. A 10-bit 200-MS/s CMOS parallel pipeline A/D converter. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, 36(7) :1048–1055, 2001.
- [TALGL15] S. Traoré, B. Aziz, D. Le Guennec, and Y. Louet. Adaptive non-uniform sampling of sparse signals for green cognitive radio. *Computers & Electrical Engineering*, 2015.
- [Uns00] M. Unser. Sampling – 50 years after shannon. *Proceedings of the IEEE*, 88(4) :569–587, Avril 2000.
- [VB00] R. Venkataramani and Y. Bresler. Perfect reconstruction formulas and bounds on aliasing error in sub-nyquist nonuniform sampling of multiband signals. *IEEE Transactions on Information Theory*, 46(6) :2173–2183, 2000.
- [VCL13] J.-A. Vernhes, M. Chabert, and B. Lacaze. Conversion numérique-analogique sélective d'un signal passe-bande soumis à des interférences. *Colloque sur le Traitement du Signal et des Images (GRETSI)*, Septembre 2013.
- [VCL⁺14] J.-A. Vernhes, M. Chabert, B. Lacaze, G. Lesthievant, and R. Baudin. Selective analytic signal construction from a non-uniformly sampled bandpass signal. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 4978–4982. IEEE, 2014.
- [VCL⁺15a] J.-A. Vernhes, M. Chabert, B. Lacaze, G. Lesthievant, R. Baudin, and Boucheret M.-L. Adaptive estimation and compensation of the time delay in a periodic non-uniform sampling scheme. *International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA)*, pages 473–477, 2015.

- [VCL⁺15b] J.-A. Vernhes, M. Chabert, B. Lacaze, G. Lesthievant, R. Baudin, and Boucheret M.-L. Estimation du retard en échantillonnage périodique non uniforme - application aux CAN entrelacés désynchronisés. *Colloque sur le Traitement du Signal et des Images (GRETSI)*, 2015.
- [VCL⁺16] J.-A. Vernhes, M. Chabert, B. Lacaze, G. Lesthievant, R. Baudin, and Boucheret M.-L. Blind estimation and compensation of unknown time delay in periodic non-uniform sampling : Application to time interleaved ADCs. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 0–0, 2016.
- [VHS⁺12] C. Vogel, M. Hotz, S. Saleem, K. Hausmair, and M. Soudan. A review on low-complexity structures and algorithms for the correction of mismatch errors in time-interleaved ADCs. In *IEEE International New Circuits and Systems Conference (NEWCAS)*, pages 349–352. IEEE, 2012.
- [Vog05] C. Vogel. The impact of combined channel mismatch effects in time-interleaved ADCs. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 54(1) :415–427, 2005.
- [VSW91] R. G. Vaughan, N. L. Scott, and D. R. White. The theory of bandpass sampling. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39(9) :1973–1984, Septembre 1991.
- [VT04] H. L. Van Trees. *Detection, estimation, and modulation theory, optimum array processing*. John Wiley & Sons, 2004.
- [VVB88] B. D. Van Veen and K. M. Buckley. Beamforming : A versatile approach to spatial filtering. *IEEE Acoustics, Speech and Signal Processing (ASSP) Magazine*, 5(2) :4–24, 1988.
- [Wal99] R. H. Walden. Analog-to-digital converter survey and analysis. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 17(4) :539–550, 1999.
- [Whi15] E. T. Whittaker. On the functions which are represented by the expansion of interpolating theory. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 35 :181–194, 1915.

- [Wie30] N. Wiener. Generalized harmonic analysis. *Acta Mathematica*, 55(1) :117–258, 1930.
- [Wil78] R. G. Wiley. Recovery of bandlimited signals from unequally spaced samples. *IEEE Transactions on Communications*, 26(1) :135–137, 1978.
- [Woj00] J. J. Wojtiuk. *Randomised sampling for radio design*. PhD thesis, University of South Australia, School of Electrical and Information Engineering, 2000.
- [Yag62] A. M. Yaglom. *Theory of Stationary Random Functions*. Prentice Hall, New Jersey, 1962.
- [Yen56] J. L. Yen. On nonuniform sampling of bandwidth-limited signals. *IRE Transactions on Circuit Theory*, 3(4) :251–257, 1956.
- [YT66] K. Yao and J. B. Thomas. On truncation error bounds for sampling representations of band-limited signals. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2(6) :640–647, 1966.
- [YT67] K. Yao and J. Thomas. On some stability and interpolatory properties of nonuniform sampling expansions. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 14(4) :404–408, Décembre 1967.
- [Zyg02] A. Zygmund. *Trigonometric series, Third Edition*, volume 1-2. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.