



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du  
**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

**Délivré par :**  
Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)

**Discipline ou spécialité :**  
Génie électrique

---

**Présentée et soutenue par :**  
Raphaël VILAMOT

**le :** vendredi 13 janvier 2012

**Titre :**

Optimisation de la configuration magnétique d'un propulseur à effet Hall par  
résolution du problème magnétostatique inverse

---

**JURY**

Pr. Bertrand NOGAREDE, Dr. Laurent GARRIGUES, Pr. Michel DUDECK, Dr. Stephane  
MAZOUFFRE, Dr. Olivier CHADEBEC, Dr. Jean-Pierre BOEUF, Pr. Nourredine TAKORABET,  
Dr. Carole HENNAUX

Invités: Dr. Stephane ZURBACH (SNECMA), Dr. Nicolas ARCIS (CNES), Dr. Frédéric MESSINE

---

**Ecole doctorale :**

Génie Electrique, Electronique et Télécommunications (GEET)

**Unité de recherche :**

Laboratoire LAPLACE

**Directeur(s) de Thèse :**

Pr. Bertrand NOGAREDE, directeur de thèse  
Dr. Laurent GARRIGUES, co-directeur de thèse

**Rapporteurs :**

Dr. Stephane MAZOUFFRE, Chargé de Recherche HDR au laboratoire ICARE à Orléans  
Dr. Olivier CHADEBEC, Chargé de Recherche HDR au G2Elab à Grenoble



# **Table des matières**

Table des matières.....	3
Introduction générale.....	7
<b>Chapitre 1 Etat de l'art.....</b>	<b>10</b>
<b>1.1 La propulsion spatiale, introduction .....</b>	<b>11</b>
1.1.1 Principales notions employées .....	11
1.1.1.1 Poussée.....	11
1.1.1.2 Impulsion spécifique .....	12
1.1.1.3 Efficacité .....	12
1.1.2 Différents types de missions spatiales.....	13
1.1.3 Deux grands types de propulsion, chimique ou électrique.....	14
<b>1.2 Le propulseur à effet Hall.....</b>	<b>17</b>
1.2.1 Historique .....	17
1.2.1.1 Les précurseurs [Cho-04] .....	17
1.2.1.2 Les premiers essais [Per-08] .....	18
1.2.2 Principe de fonctionnement d'un propulseur à effet Hall .....	19
1.2.2.1 Descriptif de la structure .....	19
1.2.2.2 Principe de fonctionnement.....	19
<b>1.3 Etudes de l'influence du champ magnétique sur le fonctionnement du propulseur .....</b>	<b>22</b>
1.3.1 Topologie magnétique classique .....	22
1.3.1.1 Principales caractéristiques de la carte de champ .....	22
1.3.1.2 Circuit magnétique classique .....	23
1.3.2 Propulseurs à effet Hall à topologie magnétique modulable existants.....	24
1.3.2.1 Circuits magnétiques classiques avec bobines additionnelles (trim coils).....	24
1.3.2.2 Circuits magnétiques étagés .....	25
1.3.3 Impact de la topologie magnétique sur le fonctionnement du moteur .....	26
1.3.3.1 Amplitude de champ maximale au centre du canal.....	26
1.3.3.2 Gradient axial du champ magnétique, au centre du canal (selon z, à r fixé)....	27
1.3.3.3 Lentille magnétique et symétrie .....	29
1.3.3.4 Amplitude relative du champ au centre du canal et au niveau des parois (effet miroir)	30
1.3.3.5 Blindage magnétique des parois du canal .....	30
1.3.3.6 Zéro de champ et champ au niveau de l'anode .....	31
1.3.3.1 Synthèse .....	33
<b>1.4 Méthode d'analyse d'un circuit magnétique de propulseur à effet Hall, le PPS1350</b>	<b>34</b>
1.4.1 Simulation 2D de structures quasi axisymétriques .....	34
1.4.2 Simulation magnétique 3D : évaluation du degré d'homogénéité azimutale.....	36
<b>1.5 Conclusion.....</b>	<b>40</b>

<b>Chapitre 2 Résolution du problème magnétostatique inverse par optimisation.....</b>	<b>41</b>
<b>2.1 Principe de la conception par résolution du problème inverse en magnétostatique.....</b>	<b>42</b>
2.1.1 Principe.....	42
2.1.2 Minimum local ou global .....	46
2.1.3 Condition nécessaire d'optimalité.....	47
2.1.4 Optimisation sous contraintes .....	47
2.1.4.1 Méthodes admissibles .....	47
2.1.4.2 Pénalisation .....	48
2.1.4.3 Méthode basée sur le Lagrangien.....	48
<b>2.2 Principaux algorithmes de résolution.....</b>	<b>52</b>
2.2.1.1 Cas linéaire.....	52
2.2.1.2 Cas non linéaire.....	54
<b>2.3 Positionnement du problème.....</b>	<b>62</b>
<b>2.4 Etat de l'art de la conception optimale de dispositifs électromagnétiques ...</b>	<b>63</b>
2.4.1.1 Optimisation paramétrique.....	63
2.4.1.2 Optimisation géométrique.....	67
2.4.1.3 Optimisation topologique.....	69
<b>2.5 Distribution filaire et Biot et Savart.....</b>	<b>71</b>
<b>2.6 Formulation explicite du problème d'optimisation par différences finies....</b>	<b>75</b>
2.6.1 Principe.....	75
2.6.2 Formulation du problème .....	76
2.6.2.1 Choix de la méthode de résolution de l'équation aux dérivées partielles .....	76
2.6.2.2 Formalisation de la méthode des différences finies .....	77
2.6.3 Exemples de résolution .....	85
2.6.3.1 Validation du code de calcul par différences finies .....	85
2.6.3.2 Cas illustratif : résolution d'un problème de différences finies avec optimisation de la distribution de courant .....	87
<b>2.7 Conclusion et perspectives.....</b>	<b>89</b>

## **Chapitre 3 Dimensionnement de circuit magnétique pour deux moteurs de laboratoire (propulseur forte puissance PPS20K ML et PPS-FLEX) ..... 91**

<b>3.1 PPS20K ML.....</b>	<b>92</b>
3.1.1 Objectifs, intérêts .....	92
3.1.2 Spécifications .....	94
3.1.2.1 Contraintes géométriques.....	94
3.1.2.2 Cartographie magnétique souhaitée .....	95
3.1.3 Choix du type de structure .....	96
3.1.4 Design et optimisation.....	98
3.1.4.1 Optimisation paramétrique de la géométrie via simulation éléments finis .....	98
3.1.4.2 Choix du nombre de bobines optimal .....	104
3.1.5 Structure finale .....	106

3.1.6	Conclusion.....	109
<b>3.2</b>	<b>PPS-FLEX.....</b>	<b>111</b>
3.2.1	Objectifs, intérêts .....	111
3.2.1.1	Problématique.....	111
3.2.1.2	Cahier des charges.....	112
3.2.2	Dimensionnement du circuit magnétique.....	112
3.2.2.1	Choix du type de structure .....	112
3.2.2.2	Méthode de dimensionnement .....	114
3.2.2.3	Circuit magnétique optimisé .....	115
3.2.3	Simulations magnétostatiques 2D .....	120
3.2.3.1	Possibilités du PPS Flex en terme de réglage de la topologie magnétique ....	120
3.2.3.2	Domaine de validité de l'hypothèse de linéarité du champ .....	140
3.2.4	PPS-Flex : conclusion .....	143
<b>3.3</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>144</b>
<b>Chapitre 4 Réalisation du PPS-Flex et caractérisation expérimentale .....</b>		<b>145</b>
<b>4.1</b>	<b>Réalisation du prototype.....</b>	<b>146</b>
4.1.1	Rappels objectifs du PPS-Flex et des contraintes de réalisation .....	146
4.1.1.1	Rappel des objectifs .....	146
4.1.1.2	Rappel des contraintes inhérentes à tout circuit magnétique de propulseurs à effet Hall	146
4.1.1.3	Contraintes additionnelles .....	147
4.1.2	Choix des matériaux.....	148
4.1.2.1	Matériau ferromagnétique .....	148
4.1.2.2	Bobinages .....	148
4.1.2.3	Ecrans thermiques .....	148
4.1.3	Réalisation du circuit magnétique .....	148
4.1.3.1	Géométrie retenue .....	148
4.1.3.2	Deux méthodes d'assemblage envisagées.....	149
4.1.3.3	Bobinages .....	153
4.1.3.4	Instrumentation.....	154
4.1.3.5	Synthèse .....	154
<b>4.2</b>	<b>Alimentation et pilotage.....</b>	<b>155</b>
4.2.1	Réalisation du banc d'alimentation .....	155
4.2.1.1	Configuration d'alimentation .....	155
4.2.1.2	Cahier des charges.....	155
4.2.1.3	Choix des alimentations et interfaçage.....	156
4.2.2	Pilotage du PPS Flex .....	156
4.2.2.1	Interface de définition de cartographies magnétiques.....	157
4.2.2.2	Commande des alimentations.....	157
<b>4.3</b>	<b>Caractérisation magnétique .....</b>	<b>158</b>
4.3.1	Réalisation d'un gaussmètre.....	158
4.3.2	Mesures sur Gaussmètre.....	160
4.3.2.1	Méthodologie de mesure et de traitement des résultats.....	160
4.3.2.2	Vérification des possibilités de réglage de la topologie magnétique .....	162
4.3.2.3	Homogénéité azimutale.....	169

4.3.2.4	Impact des écrans thermiques inox .....	172
4.3.3	Conformité simulations – mesures .....	174
4.3.3.1	Comparaison des valeurs obtenues par simulations et mesures .....	174
4.3.3.2	Correction du modèle 2D .....	175
<b>4.4</b>	<b>Bilan - Perspectives .....</b>	<b>178</b>
	<b>Conclusion générale .....</b>	<b>179</b>

## **Introduction générale**

A l'heure où les voyages interplanétaires semblent pouvoir devenir une réalité à moyen terme, les Etats-Unis, la Chine, et même des acteurs privés tels que SpaceX ne cachant pas leur ambition d'envoyer des hommes sur Mars d'ici moins de 20 ans, les problématiques liées à la propulsion revêtent une importance critique. En effet, à mesure que les distances parcourues s'allongent, les solutions de propulsion dites classiques (propulsion chimique basée sur la réaction d'ergols) deviennent de moins en moins réalistes compte tenu des masses de carburants qu'elles requièrent. La propulsion électrique, en permettant d'atteindre des vitesses d'éjection de gaz beaucoup plus élevées, nécessite des quantités d'ergol beaucoup plus faibles et constitue à l'heure actuelle une alternative viable permettant d'envisager des missions à très longue distance.

Cette faible consommation de comburant rend aussi de fait la propulsion électrique attractive pour des missions à faibles et moyennes distances. Les industriels l'ont bien compris et le nombre de satellites en orbite autour de la Terre équipés de propulseurs électriques ne cesse de croître.

Dans la gamme des technologies de propulsion électrique, les propulseurs à effet Hall sont très attractifs et ont déjà largement fait la preuve de leur capacité à opérer sur des missions variées, allant de la correction d'inclinaison de satellite à la propulsion principale de sondes interplanétaires. Ces propulseurs requièrent pour un fonctionnement stable et efficient la génération de cartographies magnétiques bien particulières au niveau de la zone d'injection et d'accélération du fluide propulsif (canal du propulseur). Le champ magnétique imposé dans le canal du propulseur donne lieu à deux problématiques distinctes.

D'une part, l'impact exact de la forme du champ magnétique imposé sur le comportement du plasma présent dans le canal, et par là-même sur le fonctionnement global du propulseur, est encore très imparfaitement compris. Des études sur les interactions entre plasma et champ magnétique ont certes été menées depuis une dizaine d'années, mais elles ne permettent pas encore de définir précisément la phénoménologie du processus d'interaction en raison des expériences menées avec des propulseurs à effet Hall dont la constitution du circuit magnétique limite énormément le contrôle du champ magnétique.

D'autre part, les cartographies magnétiques sont générées dans un canal cylindrique par un circuit magnétique relativement complexe et comportant une grande part de flux de fuite dû à un entrefer relativement important. La conformation du champ magnétique avec ses

singularités (gradient de champ imposé en sortie de canal, zones de zéro de champ...) a donné lieu au bout d'un long travail d'optimisation empirique à des circuits magnétiques qui sont pénalisés non seulement par un rendement électrique très faible, mais aussi par une rigidité fonctionnelle qui minimise la marge de manœuvre sur le réglage optimal du champ magnétique.

Ces deux problématiques mettent en avant le besoin de mener des investigations sur le design et l'optimisation de nouveaux circuits magnétiques dédiés aux propulseurs à effet Hall. C'est dans ce contexte que l'on se propose d'initier une méthodologie de conception optimale de circuits magnétiques pour la propulsion électrique.

Cette étude se scinde en quatre parties bien distinctes qui permettent de couvrir l'ensemble de la problématique de conception de la définition d'un cahier des charges générique des circuits magnétiques associés à la propulsion électrique jusqu'à la réalisation d'un prototype.

La première partie est consacrée à la présentation des propulseurs à effet Hall et de leurs caractéristiques magnétiques. Après avoir rappelé les principes génériques de la propulsion spatiale, l'étude se focalisera sur la technologie des propulseurs à effet Hall (HET). Les phénomènes physiques mis en jeu pour la génération et le contrôle d'un plasma assurant la fonction de propulsion seront détaillés et le rôle du champ magnétique créé dans le canal plasma analysé au travers d'un état de l'art approfondi. On mettra en évidence dans ce cadre le besoin d'expérimentation dédiée qui permettrait de mieux quantifier l'impact de la topologie magnétique sur l'efficacité et le vieillissement des propulseurs à effet Hall. Enfin, une analyse plus précise et critique d'un circuit magnétique de propulseur à effet Hall actuellement commercialisé par la SNECMA (PPS1350) sera effectuée afin de montrer l'intérêt de développer un outil de conception rationalisé et systématisé permettant par exemple d'obtenir des gains en termes de masse et de volume.

La deuxième partie amorce donc la problématique de la conception des circuits magnétiques sous le biais de la formulation et de la résolution d'un problème d'optimisation. L'étape de formulation sous la forme d'un problème inverse sera analysée dans un cadre général. Un soin particulier sera porté sur les différentes possibilités de prise en compte des spécificités d'un cahier des charges propre au design, telles que les contraintes d'inégalités et/ou d'égalités, ainsi que sur les algorithmes de résolution. Après avoir choisi le type de formulation du problème inverse et l'algorithme de résolution, il convient de déterminer l'environnement global de traitement du problème spécifique de la conception en magnétostatique. Trois approches qui reposent sur une formulation implicite du problème magnétostatique seront successivement abordées : l'optimisation paramétrique, l'approche numérique et l'approche topologique. La formulation explicite sera elle aussi envisagée par le biais dans un premier temps de la résolution d'un problème défini analytiquement à partir de la loi de Biot et Savart. Dans un second temps, une méthode de conception reposant sur une formulation explicite, obtenue directement par discrétisation par différences finies des équations aux dérivées partielles caractéristiques d'un circuit magnétique, viendra conclure la deuxième partie.

La troisième partie s'attaque à la définition de deux circuits magnétiques dédiés à des propulseurs à effet Hall. Le premier circuit est associé à la réalisation d'un propulseur à effet Hall forte puissance, le PPS20K-ML, dans le cadre du projet européen Hiper. Les critères d'optimisation mis en avant concernent la minimisation de l'écart entre la cartographie magnétique produite par le circuit dimensionné et une topologie magnétique définie par le cahier des charges du circuit magnétique. Le circuit résultant a été défini et prédimensionné



en mettant à profit les méthodes de conception optimale couplant des algorithmes d'optimisation à des simulations numériques par éléments finis. Le deuxième circuit fait écho à la problématique mis en avant dans la première partie, à savoir la nécessité de mieux quantifier l'impact du champ magnétique sur le fonctionnement d'un propulseur à effet Hall. Dans cette optique, les critères d'optimisation mis en avant concernent principalement le besoin de disposer d'un circuit à fort degré de liberté qui permette d'imposer une très large variété de topologies magnétiques à l'intérieur du canal plasma. Par ailleurs, afin de faciliter son utilisation dans des caissons d'expérimentation (ambiance sous vide, balance de poussée...), ce circuit doit être directement implantable sur la base d'un circuit de propulseur déjà opérationnel et bien connu, le PPS1350.

La quatrième partie finalise l'étude de ce dernier circuit en effectuant son prototypage et en le validant par caractérisation magnétique. La réalisation du prototype est détaillée en explicitant les choix effectués autant sur les matériaux que sur les procédures de traitement des pièces constituant le circuit avant et après assemblage. Le module d'alimentation ainsi que l'interface de contrôle des topologies magnétiques sont par la suite présentés. Afin de mener à bien la phase de caractérisation magnétique, une platine motorisée de relevés de points de mesure du champ magnétique généré dans le canal plasma a été implantée. Les résultats expérimentaux qui en sont issus seront illustrés afin de valider les potentialités du circuit magnétique en terme de génération de topologies magnétiques diverses et variées.

# **Chapitre 1**

## **Etat de l'art**

## **1.1 La propulsion spatiale, introduction**

Les missions spatiales requièrent des besoins en propulsion qui vont sans cesse croissant. Des satellites opérant à basses altitudes (200km pour les plus bas) aux géostationnaires situés à 36000km, en passant par les sondes interplanétaires ou encore les vols habités, chaque type de mission possède ses caractéristiques propres (durée, distance, poussée nécessaire, etc.) et doit voir son mode de propulsion dimensionné en conséquence.

Il convient donc de bien analyser chacune des caractéristiques garantissant la viabilité et le succès de la mission. La première partie de ce chapitre sera, dans ce contexte, consacrée à l'analyse des paramètres physiques associés à la définition d'un propulseur spatial [Jah-68, Gar-11]. Un état de l'art des solutions technologiques opérationnelles sera ensuite effectué, avec une focalisation sur les propulseurs à effet Hall qui feront l'objet de la suite de l'étude. Enfin, une étude plus approfondie des caractéristiques magnétiques des propulseurs à effet Hall sera menée, avec l'analyse du circuit magnétique du PPS-1350 et une synthèse des résultats disponibles dans la littérature concernant l'impact du champ magnétique sur le fonctionnement du propulseur.

### **1.1.1 Principales notions employées**

#### **1.1.1.1 Poussée**

La première grandeur caractéristique pour un propulseur est la poussée qu'il peut fournir. Dans l'espace, en l'absence d'éléments extérieurs sur lesquels prendre appui, la seule force disponible est celle produite par une variation de la masse totale du système considéré. Pour un objet quelconque, le théorème de la quantité de mouvement donne en effet :

$$\frac{d(M(t) \cdot \vec{u}(t))}{dt} = \sum \vec{F}_i \quad 1-1$$

Avec  $M(t)$  la masse de l'objet à l'instant  $t$ ,  $\vec{u}(t)$  son vecteur position, et  $\vec{F}_i$  les forces s'exerçant sur l'objet.

Dans le cas d'un satellite, la masse peut s'écrire  $M(t) = M_0 - m(t)$  où  $M_0$  est la masse totale initiale du satellite, et  $m(t)$  la masse totale de fluide propulsif éjectée à un instant  $t$ .

En ne considérant aucune force s'exerçant sur le satellite et en injectant cette expression de la masse dans l'équation 1-2, on obtient :

$$M(t) \cdot \frac{d(\vec{v}(t))}{dt} = -\dot{m} \cdot \vec{v}_p = \vec{T} \quad 1-2$$

Avec  $\vec{v}(t)$  le vecteur vitesse du satellite,  $\vec{v}_p$  la vitesse d'éjection moyenne du fluide propulsif dans le référentiel du satellite,  $\dot{m} = \frac{d(m(t))}{dt}$  son débit et  $\vec{T}$  la poussée (exprimée en Newton) correspondant à la force appliquée au satellite.

A partir de l'équation 1-3, il est possible d'exprimer la masse  $\Delta m$  de fluide propulsif nécessaire en vue d'obtenir un incrément de vitesse  $\Delta v$  (grandeur caractéristique d'une opération de déplacement réalisée par un satellite) selon l'axe de poussée. On obtient ainsi :

$$\Delta m = M_0 \left( 1 - e^{-\frac{\Delta v}{v_p}} \right) \quad 1-3$$

On constate ainsi que pour un satellite de masse donnée devant opérer un déplacement nécessitant un incrément de vitesse  $\Delta v$ , le seul moyen de réduire la consommation de fluide propulsif est d'augmenter sa vitesse d'éjection  $v_p$ .

### 1.1.1.2 Impulsion spécifique

La notion d'impulsion spécifique ( $I_{sp}$ ) est très fréquemment employée pour caractériser les performances d'un propulseur. Elle permet en effet de compléter l'information apportée par la valeur de poussée, en lui associant une notion de consommation.

L' $I_{sp}$ , exprimée en secondes, correspond au temps nécessaire à une force  $m_0 g$  pour produire une poussée équivalente à celle consécutive à l'éjection d'une masse  $m_0$  (ou encore au temps pendant lequel un propulseur pourra maintenir une poussée de  $g$  Newton avec 1kg de fluide propulsif, où  $g$  est la constante de gravitation) [Gar-11].

$$I_{sp} \cdot m_0 g = m_0 v_p \quad 1-4$$

Soit :

$$I_{sp} = \frac{v_p}{g} \quad 1-5$$

L' $I_{sp}$  est donc aussi une image de la vitesse moyenne d'éjection des fluides dans la direction de la poussée. Une vitesse d'éjection de 20km/s correspond ainsi à une  $I_{sp}$  d'environ 2040s.

On note ainsi que plus la valeur d' $I_{sp}$  est grande, plus la consommation est faible pour opérer un incrément de vitesse donné.

### 1.1.1.3 Efficacité

La dernière grandeur caractéristique abordée ici ne concerne que les propulseurs électriques. En effet, contrairement aux propulseurs chimiques dont la poussée est générée uniquement par une réaction chimique entre les ergols, les propulseurs électriques ont recours à des champs électromagnétiques afin d'accélérer les particules du fluide propulsif et consomment par conséquent une certaine puissance électrique. Cette puissance sur un satellite est fournie par les panneaux solaires et est par conséquent limitée. L'efficacité,  $\eta$ , correspondant au rapport entre la puissance convertie en énergie cinétique pour le satellite et la puissance électrique absorbée par le propulseur,  $P$ , constitue donc un paramètre important. Elle peut s'exprimer ainsi :

$$\eta = \frac{T^2}{2\dot{m}P} \quad 1-6$$

Cette relation permet de mettre en évidence l'une des problématiques fortes de la propulsion électrique. En effet, il est possible de déduire l'expression du rapport poussée sur puissance :

$$\frac{T}{P} = \frac{2\eta}{v_p} \quad 1-7$$

On constate ainsi que ce rapport diminue lorsque la vitesse d'éjection augmente pour une même poussée. Un propulseur à forte  $I_{sp}$  consommera donc une puissance électrique plus élevée qu'un propulseur à  $I_{sp}$  faible.

Ce constat implique donc un compromis à trouver entre limitation de la consommation de fluide propulsif (ce qui revient à maximiser l'Isp) et puissance consommée (celle-ci étant dans tous les cas limitée à celle produite par le satellite). Pour chaque mission, une valeur optimale d'Isp existe, permettant de minimiser la masse totale du système propulsif, incluant la masse de fluide propulsif et le système d'alimentation électrique dans son ensemble.

L'efficacité d'un propulseur résulte d'une conversion d'énergie au sein de laquelle cohabite une succession de phénomènes physiques induisant des pertes lors de l'énergie électrique apportée au propulseur, en énergie cinétique effectivement transférée aux ions éjectés. Ainsi, en supposant que la vitesse des atomes neutres est négligeable face à celle des ions (seuls ces derniers participent alors à la poussée supposée dans la direction z) et en ne considérant que des ions mono-chargés, il est possible d'écrire l'efficacité sous la forme [Kim-98] :

$$\eta_T = \frac{m_i V_z^2}{2P_d} = \frac{I_i}{I_d} \eta_i \eta_\beta \eta_v \eta_\varepsilon \quad 1-8$$

avec  $m_i$  la masse d'un ion,  $V_z$  la composante axiale de la vitesse des ions,  $P_d$  la puissance électrique de décharge (produit de la tension  $U_d$  appliquée entre la cathode et l'anode avec le courant de décharge  $I_d$ ) et  $I_i$  le courant ionique. L'efficacité totale  $\eta_T$  peut donc être exprimée en fonction des facteurs suivants :

- $I_i/I_d$ , qui peut être vue comme la proportion de la puissance de décharge effectivement transférée aux ions (et non aux électrons)
- $\eta_i = \dot{m}_i/\dot{m}$ , l'efficacité d'ionisation, avec  $\dot{m}$  le débit total de gaz et  $\dot{m}_i$  le débit d'ions
- $\eta_\beta = \langle V_z \rangle^2 / \langle V_i \rangle^2$ , l'efficacité liée à la divergence du jet d'ions en sortie du propulseur (seules les vitesses axiales sont utiles à la poussée), avec  $\langle V_z \rangle$  la vitesse axiale moyenne des ions et  $\langle V_i \rangle$  la vitesse moyenne des ions.
- $\eta_v = \langle V_i \rangle^2 / \langle V_i^2 \rangle$ , l'efficacité caractérisant la dispersion dans la distribution des vitesses des ions.
- $\eta_\varepsilon = M \langle V_i^2 \rangle / 2eU_d$ , l'efficacité d'accélération (correspondant au rapport entre l'énergie cinétique des ions et l'énergie potentielle électrique totale)

Cette décomposition donne un aperçu des différents phénomènes qui doivent être pris en considération lors de l'analyse des performances d'un propulseur électrique.

### 1.1.2 Différents types de missions spatiales

Deux grands types de missions peuvent être distingués en termes de propulsion spatiale.

- Un système de propulsion est dit primaire lorsqu'il est employé pour les principaux déplacements du véhicule spatial, à savoir les opérations de transfert d'orbite ou la propulsion pour des missions interplanétaires.
- Dans le cas d'un satellite en orbite, plusieurs opérations sont à prévoir tout au long de sa durée de vie, certaines réalisées une seule fois et d'autres récurrentes. Pour un satellite géostationnaire, on dénombre ainsi :
  - o Le transfert de l'orbite basse correspondant à l'altitude de fin de combustion du dernier étage du lanceur (environ 200km) vers l'orbite géostationnaire à 36000km (opération de propulsion primaire)

- La mise à poste du satellite, une fois que ce dernier est sur l'orbite géostationnaire
- Tout au long de la durée de vie du satellite, des corrections d'orbites sont nécessaires afin de compenser les modifications d'altitude liées au freinage par l'atmosphère (principalement pour orbites basses), aux irrégularités du champ gravitationnel terrestre, etc.
- De même, l'orientation du satellite est perturbée par différents paramètres (les champs gravitationnels de la lune et du soleil notamment) et il est nécessaire d'effectuer des corrections d'orientation Nord/Sud et Est/Ouest.
- Enfin, en fin de vie, le satellite doit être placé sur une orbite de rebut et une certaine quantité de carburant doit être réservée pour cette opération.

Ces différentes manœuvres orbitales peuvent être caractérisées par l'incrément de vitesse auxquelles elles correspondent. Le Tableau 1-1 donne des ordres de grandeurs de  $\Delta v$  pour les manœuvres usuelles d'un satellite géostationnaire, ainsi que dans le cadre d'une utilisation en tant que propulsion primaire.

Transfert d'orbite	1500 m.s <sup>-1</sup>
Mise à poste	8 m.s <sup>-1</sup>
Correction d'orbite	15 m.s <sup>-1</sup> par an
Contrôle Nord/Sud et Est/Ouest	Respectivement 50 m.s <sup>-1</sup> et 5 m.s <sup>-1</sup> par an
Désorbitation	3 m.s <sup>-1</sup>
Propulsion primaire (sonde)	4000 m.s <sup>-1</sup>

Tableau 1-1: Ordres de grandeurs des  $\Delta v$  correspondant à différents types de manœuvres dans l'espace [Dar-99]

### 1.1.3 Deux grands types de propulsion, chimique ou électrique

Deux grands types de propulsions peuvent être dégagés parmi les propulseurs employés actuellement [Boe-03][Fri-03].

- la propulsion chimique, dans laquelle peuvent être distingués les propulseurs à gaz froids, liquide et solide.
- La propulsion électrique, regroupant un grand nombre de type de propulseurs différents qui ont pour caractéristique commune d'accélérer le fluide propulsif par ionisation et accélération à l'aide d'un champ électromagnétique.

Parmi ces derniers, il est notamment possible de citer les moteurs **électrothermiques**, qui, via un arc électrique (Arcjet) [Smi-93] ou un chauffage par effet Joule (Resistojet)[Law-98], augmentent fortement la température du gaz propulsif. Ce dernier est alors éjecté par une tuyère, à des vitesses d'éjection supérieures à celles des propulseurs chimiques. Les propulseurs **électromagnétiques** emploient une force de Laplace générée par un courant circulant à travers le plasma pour accélérer les ions. On peut ainsi citer les PPT (pulsed plasma thruster) qui utilisent un carburant solide progressivement érodé par le plasma et accéléré par un courant impulsif entre les électrodes et les MPD (magneto plasma dynamic thruster) [NAS]. Enfin, les propulseurs **électrostatiques** génèrent un gradient de champ électrique pour accélérer le fluide propulsif ionisé. Ils incluent les FEEP (Propulseurs à effet de champ) possédant une très faible poussée mais une Isp très élevée, employés sur les microsattellites, les propulseurs à grilles, ainsi que les propulseurs à effet Hall, auxquels nous nous intéresserons dans cette étude. Ces deux dernières technologies ont atteint un certain degré de maturité et sont déjà implantées sur de nombreux satellites.

Les propulseurs à grilles reposent sur le principe suivant : un plasma est généré dans une chambre de confinement à partir du fluide propulsif. La différence de potentiel entre deux grilles extractrices polarisées permet d'extraire et d'accélérer les ions du plasma. Le faisceau d'ions ainsi produit est ensuite neutralisé en sortie du propulseur à l'aide d'une cathode (voir Figure 1-1).

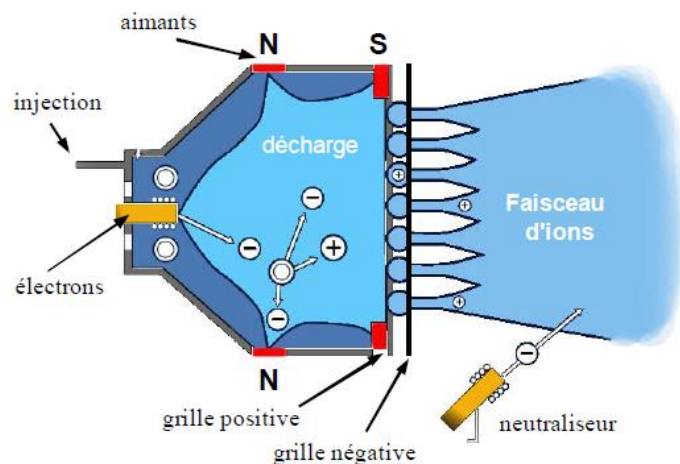


Figure 1-1: Schéma descriptif d'un propulseur ionique à grilles. [PER-08]

Ce type de système présente des Isp élevées et possède l'avantage de produire un faisceau d'ions faiblement divergent (ce qui est bénéfique pour la poussée et pour la gestion des interactions du faisceau avec le satellite). Cependant, certains facteurs limitants sont à prendre en considération. La première limitation est liée à la charge d'espace. La densité de courant ionique maximale traversant une grille polarisée est donnée par la loi de Child et est liée à la dimension des espaces de la grille. Ainsi, à tension d'alimentation constante, augmenter la poussée d'un propulseur ionique implique, soit la diminution des espaces de la grille (techniquement difficile), soit l'augmentation de son diamètre total. Les propulseurs à grille possèdent, de ce fait, des niveaux de poussée par unité de surface faibles en comparaison d'autres types de propulsion électrique. Un second aspect limitant réside dans l'érosion subie par les grilles extractrices soumises à un faisceau d'ions à très hautes vitesses. La durée de vie du propulseur est alors intimement liée à celle des grilles d'extractions. [Gar-11]

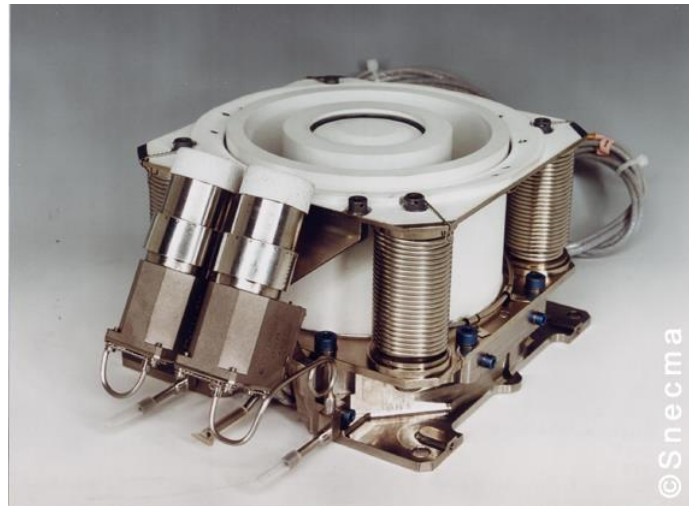
Les propulseurs à effets Hall, comprenant les technologies de type SPT (stationary plasma thruster), ou encore PPS, (propulseur à plasma stationnaire, dont les parois sont non-conductrices) et ALT (anode layer thruster, dont les parois sont conductrices) ont quant à eux l'avantage de ne pas posséder de grille d'extraction. Le champ électrique accélérateur est en effet créé directement au sein du plasma, grâce à un champ magnétique permettant de piéger les électrons (le principe sera repris plus en détail dans le paragraphe suivant).

La Figure 1-2 montre des photos de propulseurs ayant fait la preuve de leur capacité à opérer en système propulsif primaire : le propulseur à grilles NSTAR développé par Boeing pour la sonde Deep Space 1 développe une poussée maximale de 92 mN et une Isp de 3100s pour une puissance de 2,3kW ; le propulseur PPS1350, développé par la Snecma, a entre autre équipé la sonde Smart-1. Il produit une poussée de 88 mN et une Isp de 1650s pour une puissance de 1,5kW.

La liste est loin d'être exhaustive et de nombreux autres concepts ont vu le jour, avec des résultats plus ou moins prometteurs. En particulier, dans une gamme de puissance plus importante, on peut citer l'exemple du propulseur VASIMR (VARIABLE Specific Impulse Magnetoplasma Rocket), qui utilise une combinaison de chauffage RF et micro-ondes pour la création d'un plasma et l'accélération du fluide propulsif (combinant ainsi détente thermique, et accélération des ions par un champ électrique). Un prototype développant une poussée de 5 N pour une Isp de 5000s et une puissance de 200kW a été réalisé [Lon-11] et des essais en vol sont prévus en 2013 sur la station spatiale internationale.



(a)



(b)

Figure 1-2-a: Propulseur à grille NSTA, identique à celui ayant équipé la sonde Deep Space 1. Crédit : NASA

Figure 1-2-b : PPS-1350. Moteur à effet Hall développé par la Snecma ayant notamment volé sur la sonde SMART 1. Crédit : Snecma

Le Tableau 1-2 donne un aperçu des performances caractéristiques des principaux types de propulsions, chimique et électrique. Les valeurs indiquées mettent clairement en lumière l'avantage que présente la propulsion électrique sur la propulsion chimique : quand pour cette dernière la vitesse d'éjection reste tributaire de la réaction chimique employée et est ainsi limitée à quelques milliers de km/s, l'énergie apportée au fluide propulsif par la propulsion électrique est elle liée à la puissance électrique fournie au propulseur et à son efficacité. La limite, en termes de vitesse d'éjection, répond donc uniquement à des considérations technologiques (dissipation de l'énergie thermique, masse et volume total du système propulsif, etc.) et à la puissance maximale disponible sur le satellite. Pour des propulseurs électriques de puissance inférieures à quelques kW, il est ainsi possible d'obtenir des vitesses d'éjections de plusieurs dizaines de milliers de km/s et des poussées suffisantes pour effectuer des opérations de contrôle d'attitude, voire de transfert d'orbite.



		Poussée (en N)	Isp (en s)	Contrôle d'orientation	Correction d'orbite	Transfert d'orbite
Propulsion chimique	Gaz froid	0.05 à 20	10 à 100	oui		
	Solide	50 à 50000	300			oui
	Liquide	1 à 2000	250 à 350	oui	oui	oui
Propulsion électrique	Arcjet	0,1 à 0,2	450 à 650	oui	oui	oui
	FEEP	$10^{-5}$ à $2.10^{-3}$	5000 à 8000	oui		
	Grille	0,001 à 0,1	2500 à 3000	oui	oui	
	SPT	0,01 à 0,5	1000 à 2000	oui	oui	oui

Tableau 1-2: Comparatif des caractéristiques des principales familles de propulseurs [Bon-06]

Le gain de masse de fluide propulsif consommée est ainsi substantiel. Rappelons que le coût du kilogramme embarqué est évalué entre 10 et 15 k€ [Boe-03]. Ainsi, un satellite de 4 tonnes, ayant une durée de vie de 15 ans et employant un système propulsif chimique, embarque environ 2 tonnes de carburants. La propulsion électrique, à masse et durée de vie de satellite égales, permet d'économiser plusieurs centaines de kilos en fluide propulsif. La durée de vie du satellite peut ainsi être fortement augmentée, ou encore la quantité de fluide propulsif embarquée peut être réduite de façon à libérer de la masse pour embarquer de la charge utile supplémentaire ou bien, tout simplement, à réaliser de substantielles économies. Plus important encore, la propulsion électrique peut permettre d'envisager des missions non accessibles par le biais de la propulsion chimique. Prenons l'exemple d'une mission de mise en orbite autour de Mercure ( $\Delta v \approx 13 \text{ km.s}^{-1}$ ). Le ratio de masse utile dans le cas de la propulsion chimique ( $I_{sp}$  de 300s) serait d'environ 1% (99% de la masse initiale du vaisseau correspondrait aux ergols). Dans le cas de la propulsion électrique, pour une  $I_{sp}$  de 3000s, le ratio de masse utile s'élève à 64%.

D'une manière générale, toute mission nécessitant un  $\Delta v$  supérieur à  $10 \text{ km.s}^{-1}$  n'est pas envisageable à l'aide de la propulsion chimique [Rac-01].

Soulignons cependant que pour la propulsion électrique, la puissance électrique disponible sur le satellite est limitée par la puissance fournie par les panneaux solaires. Cela conduit à devoir opérer un compromis entre poussée et  $I_{sp}$ , en fonction des tâches allouées au propulseur (certaines opérations, comme le transfert d'orbite, devant se faire rapidement, et nécessitent donc des valeurs de poussée plus élevées). A plus long terme, pour des missions nécessitant des valeurs de poussée encore plus importantes, comme un vol habité vers Mars, l'utilisation de réacteurs nucléaires permettrait de s'affranchir de cette contrainte de puissance.

## 1.2 Le propulseur à effet Hall

### 1.2.1 Historique

#### 1.2.1.1 Les précurseurs [Cho-04]

L'histoire du développement des propulseurs à effet Hall, et plus généralement de la propulsion électrique, est évidemment intrinsèquement liée à celle du voyage dans l'espace. Il

est fait mention de ce dernier tout d'abord dans des œuvres littéraires, comme celles de Savinien Cyrano de Bergerac et, plus tard, de Jules Verne. Les véhicules décrits se basaient cependant sur une propulsion de type canon et projectile, le principe de propulsion par éjection de matière dans la direction opposée n'ayant pas encore été mis en évidence. Il faudra attendre pour cela Tsiolkovsky et sa célèbre équation, publiée officiellement en 1903. Tsiolkovsky est considéré comme l'un des pères de l'aéronautique moderne. Et, même si la majeure partie de son travail était tournée vers la propulsion chimique, il a fait partie (avec R. Goddard, et Y. Kondratyuk) des précurseurs qui, les premiers, ont formulé l'idée d'une propulsion électrique et les gains importants en terme de fluide propulsif consommé qu'elle pouvait amener du fait de la vitesse d'éjection élevée. Ses réflexions, quoique visionnaires, sont cependant toujours restées théoriques. Le premier brevet d'un propulseur électrostatique date de 1920 et a été déposé par R. Goddard. Ces différents travaux sont cependant restés relativement méconnus du public et de la communauté scientifique de l'époque. C'est en 1929, grâce à la publication du livre phare d'un autre grand nom de l'aéronautique, H. J. Oberth, que ces concepts ont commencé à réellement se diffuser. Il faut ensuite cependant attendre plusieurs dizaines d'années pour que de nouvelles avancées apparaissent. Ceci en raison notamment de la seconde guerre mondiale (les poussées potentiellement produites par la propulsion électrique étaient trop faibles pour avoir une application militaire), mais aussi du manque de maturité de la propulsion chimique (la complémentarité des deux types de propulsion avait déjà été comprise et la propulsion électrique ne pouvait être mise en application tant que des lanceurs n'avaient pas été développés). Il faudra ainsi attendre le début des années 1950, et les travaux de Shepherd et Cleaver, pour que des missions employant la propulsion électrique soient étudiées en profondeur. Et c'est enfin avec les travaux de E. Stuhlinger, que la propulsion électrique va entrer dans une phase de développement avancée.

#### **1.2.1.2 Les premiers essais [Per-08]**

Les premiers propulseurs testés en laboratoire sont du type resistojet et arcjet pour les électrothermiques, et propulseurs ionique à grille et à effet Hall pour les électrostatiques. Le premier propulseur à grille a été développé en 1959 par Kaufman aux Etats-Unis. L'Union soviétique s'est quant à elle tournée vers les propulseurs à effet Hall, sous l'égide de Morozov. Ces choix technologiques perdureront par la suite pendant de nombreuses années. Les Etats-Unis testeront avec succès en 1964 les premiers moteurs ioniques sur une mission dédiée, SERT 1 (Space Electric Rocket Test 1), ce qui a permis de valider la méthode de neutralisation du jet en sortie du propulseur. La même année, l'Union Soviétique enverra vers Mars ZOND 2, première sonde équipée d'un propulseur électrique (la mission n'atteindra cependant pas ses objectifs, suite à une coupure des communications) [NAS]. Un propulseur à effet Hall développé par Morozov et son équipe est testé en vol pour la première fois sur le satellite METEOR, en 1972.

Les années suivantes, les applications potentielles pour les satellites explosent et le nombre de mises en orbite de satellites croît conjointement. Même si la propulsion chimique est restée prépondérante pour la totalité des opérations, y compris celles de contrôle d'attitude, plusieurs centaines de propulseurs électriques ont été testés, démontrant ainsi la fiabilité et la maturité de la technologie. Parmi ces propulseurs, plus d'une centaine (russes dans leur très grande majorité) sont des propulseurs à effet Hall. La mission SMART 1, équipée d'un propulseur à effet Hall PPS-1350 (1,5kW) développé par la Snecma, a par ailleurs achevé de démontrer le fort intérêt de leur usage sur les sondes pour des missions plus lointaines.

Actuellement les développements vont vers des puissances plus élevées (3-5kW), de façon à couvrir les besoins des plateformes de satellites toujours grandissantes (ex :

Alphabus), mais aussi de permettre deux types de fonctionnement distinct, en privilégiant soit la poussée, soit l'Isp.

## 1.2.2 Principe de fonctionnement d'un propulseur à effet Hall

### 1.2.2.1 Descriptif de la structure

Un propulseur à effet Hall classique est composé des éléments suivants :

- Un canal diélectrique circulaire en céramique (généralement du BN-SiO<sub>2</sub>), dans lequel le plasma est confiné
- Un système d'injection du gaz, au fond du canal en céramique
- Une anode, placée en fond de canal
- Une cathode, placée à l'extérieur du propulseur, à proximité du plan de sortie
- Un circuit magnétique, permettant d'obtenir un champ magnétique de quelques centaines de Gauss, principalement radial, au niveau du plan de sortie du canal

Ces différents éléments sont représentés sur la Figure 1-3.

Le xénon injecté au fond du canal permet, une fois accéléré, de produire la poussée escomptée, mais une partie du gaz est aussi consommée par la cathode afin de produire les électrons nécessaires au fonctionnement.

Enfin, le système est complété par une alimentation permettant d'entretenir la décharge en imposant un potentiel (typiquement de l'ordre de quelques centaines de Volts) entre l'anode et la cathode.

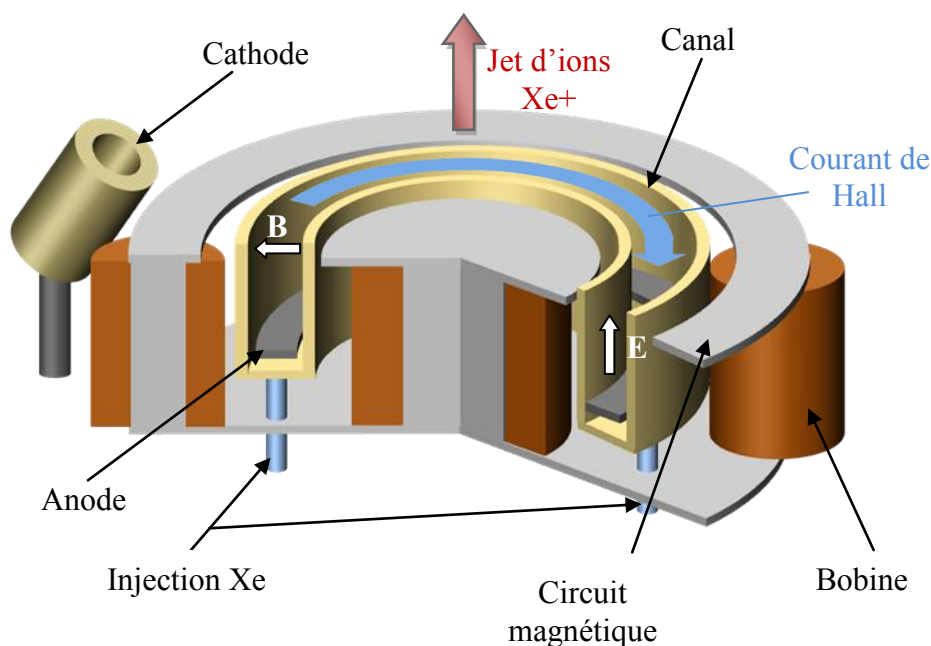


Figure 1-3: Schéma descriptif d'un propulseur à effet Hall de type SPT

### 1.2.2.2 Principe de fonctionnement

Le fonctionnement d'un propulseur à effet Hall peut être décomposé en deux phases distinctes, ionisation et accélération des ions.

L'ionisation se fait par collision entre les atomes neutres de xénon injectés au fond du canal et les électrons issus de la cathode. Cependant, pour les niveaux de pression présents

dans le canal (quelques mTorr), le libre parcours moyen électronique est de l'ordre du mètre, ce qui est incompatible avec les quelques centimètres de profondeur du canal. Pour remédier à cela, un champ magnétique, principalement radial, est employé pour confiner les électrons. Si ce champ magnétique a une amplitude suffisante, une particule chargée adopte une trajectoire hélicoïdale autour des lignes de champ (la particule est alors dite magnétisée, voir Figure 1-5). La valeur du champ magnétique est choisie de façon à magnétiser les électrons et non les ions. En introduisant la notion de rayon de Larmor<sup>1</sup> des électrons ( $r_e$ ) et des ions ( $r_i$ ), cela se formalise donc sous la forme :  $r_e \ll L_c \ll r_i$

Avec  $L_c$  les dimensions caractéristiques du canal.

Les électrons suivent ainsi dans les zones de fort champ (en sortie de canal) non plus le gradient de potentiel électrique mais les lignes de champ, ce qui permet donc de ralentir très fortement leur déplacement de la cathode vers l'anode et d'augmenter suffisamment le temps de transit des électrons dans le canal pour permettre l'ionisation par collision des atomes de xénon.

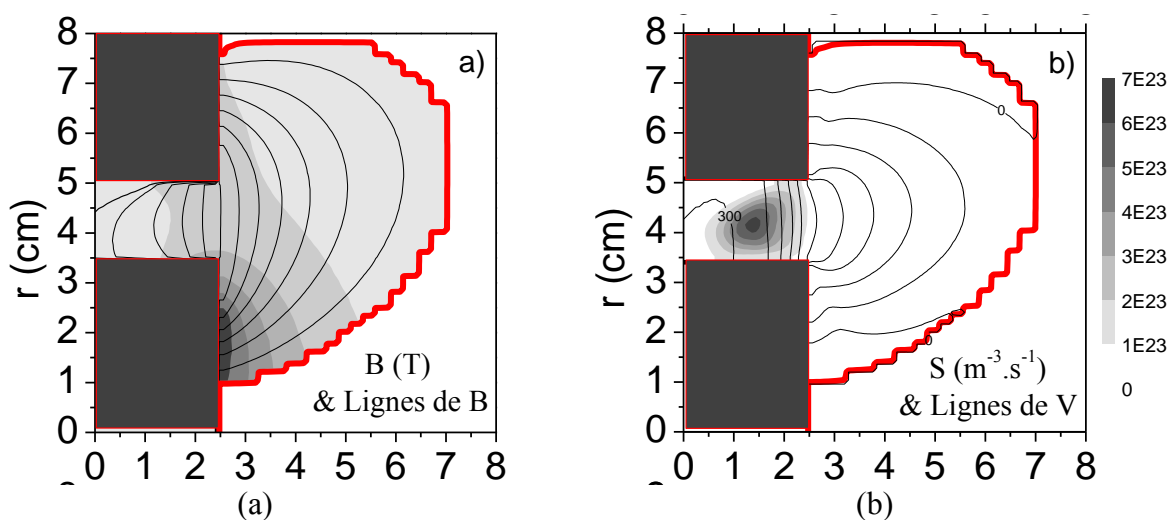


Figure 1-4: Influence du champ magnétique sur la répartition du potentiel électrique.

Exemple du SPT-100, point de fonctionnement nominal.

(a) Amplitude et lignes de champ magnétique. [Bar-02]

(b) Équipotentiels électriques et terme source d'ionisation (contours niveau de gris) [Bar-02]

Outre l'amplitude du champ, la forme des lignes de champ est, elle aussi, très impactante. En effet, la trajectoire des électrons enroulée autour des lignes de champ permet de faire l'hypothèse d'une chute de tension nulle le long d'une ligne. La différence de potentiel (quelques centaines de Volts, typiquement) imposée entre l'anode et la cathode induit ainsi un champ électrique dont les équipotentiels, en première approximation, se superposent aux lignes de champ magnétique (cette hypothèse ne prend cependant pas en compte l'influence de la pression électronique. Le potentiel électrique le long d'une ligne de champ varie en toute rigueur comme le logarithme de la variation de densité électronique)[Mor-72] (voir exemple Figure 1-4). Le xénon, une fois ionisé, subit la force

<sup>1</sup> Le rayon de Larmor est un concept permettant de décrire le comportement d'une particule chargée au sein d'un champ magnétique constant. Il correspond au rayon de la trajectoire hélicoïdale de la particule autour d'une ligne de champ et est dépendant de la masse  $m$  de la particule, de sa charge  $q$ , de son énergie cinétique  $T$  et de l'amplitude du champ magnétique  $B$ .

$$\text{Il vaut ainsi : } R_L = \frac{\sqrt{2mT}}{qB}$$

imposée par ce champ électrique et est éjecté vers le plan de sortie du canal, ce qui produit la poussée du propulseur. Le jet d'ions est ensuite neutralisé par des électrons provenant de la cathode (la neutralisation est indispensable afin d'éviter de charger progressivement le propulseur électriquement, ce qui finirait par perturber son fonctionnement).

*Trajectoire des électrons* : Le mouvement des électrons peut être décomposé en deux types de déplacement:

- Un mouvement hélicoïdal autour des lignes de champ précédemment décrit. Les lignes de champ étant principalement radiales et le canal étant constitué de céramiques diélectriques, les électrons effectuent des allers-retours entre les parois interne et externe. Ils suivent de plus un mouvement longitudinal en direction de l'anode (notamment du fait des collisions), ce qui correspond à un courant de quelques Ampères, dans les conditions du propulseur.
- une dérive azimuthale des électrons, à une vitesse  $V_d = \frac{E \times B}{B^2}$  due à la configuration croisée des champs magnétique et électrique. Il existe donc un courant circulant azimuthalement dans le propulseur appelé courant de Hall, dont l'amplitude est supérieure au courant anode-cathode (quelques dizaines d'Ampères pour des conditions typiques de fonctionnement). Ce courant de Hall peut être vu comme la source de la poussée produite par le propulseur par l'intermédiaire d'une force de Laplace (un courant azimuthal traversant un champ magnétique radial produit bien une force axiale).

Ces trajectoires sont représentées Figure 1-6.

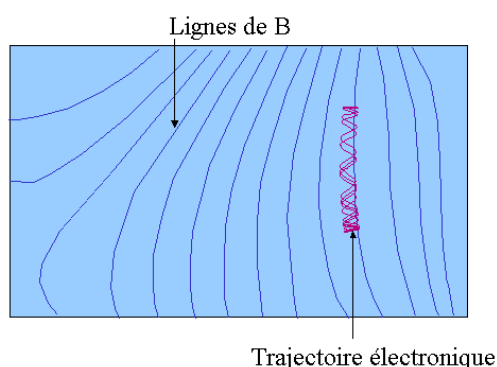


Figure 1-5: Exemple de trajectoire électronique en présence d'un champ magnétique [Bon-06]

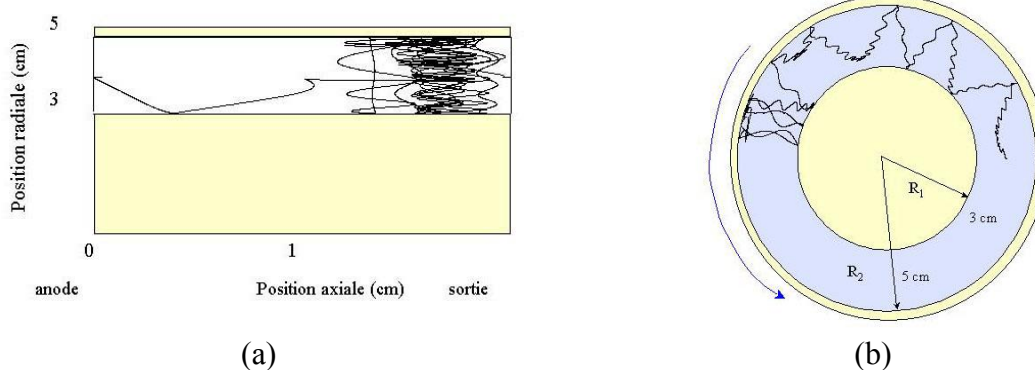


Figure 1-6-a: Exemple de trajectoire d'un électron dans le canal, vue dans le plan r-z [Gar-98]

Figure 1-6-b : Exemple de trajectoire d'un électron dans le canal, vue dans le plan r-θ [Gar-98]

Le propulseur à effet Hall peut-être ainsi être considéré comme un propulseur électrostatique ou électromagnétique, en fonction du choix de formalisation du principe de fonctionnement. Si la poussée est vue comme le résultat de l'accélération des ions par le champ électrique présent dans le canal, il se range alors dans la catégorie des propulseurs électrostatiques. Si la poussée est vue comme le résultat de la force de Laplace exercée par le courant de Hall dans le champ magnétique du canal, il est alors à considérer comme un propulseur électromagnétique. Ces deux visions sont en réalité équivalentes et complémentaires.

## **1.3 Etudes de l'influence du champ magnétique sur le fonctionnement du propulseur**

### **1.3.1 Topologie magnétique classique**

#### **1.3.1.1 Principales caractéristiques de la carte de champ**

La cartographie magnétique usuellement imposée dans le canal possède un certain nombre de caractéristiques spécifiques. De ces caractéristiques dépendent grandement les performances du propulseur à effet Hall et il est par conséquent essentiel de savoir préciser le rôle de chacune, dans l'optique d'une conception rationalisée. Il est notamment possible d'isoler les caractéristiques suivantes (cf. Figure 1-7 et Figure 1-8) :

- Amplitude maximale du champ magnétique au centre du canal (rayon médian)
- Gradient axial du champ magnétique, en entrée et sortie de lentille magnétique (croissance et décroissance de l'amplitude du champ)
- Position axiale du maximum de champ au centre du canal (rayon médian) par rapport au plan de sortie
- Degré de convexité des lignes de champ en amont du plan de sortie du canal (effet de « lentille magnétique » sur la trajectoire des électrons)
- Zéro de champ magnétique dans la zone anodique
- Amplitude du champ magnétique au niveau de l'anode

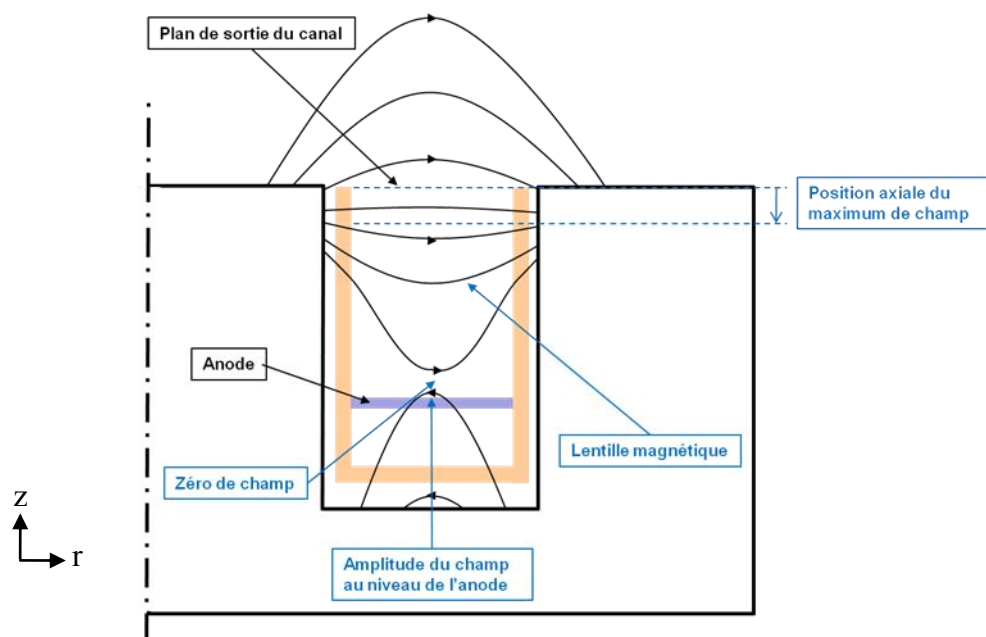


Figure 1-7: Schéma dans le plan  $r$ - $z$  indiquant les différents éléments caractéristiques d'une topologie magnétique d'un propulseur à effet Hall.

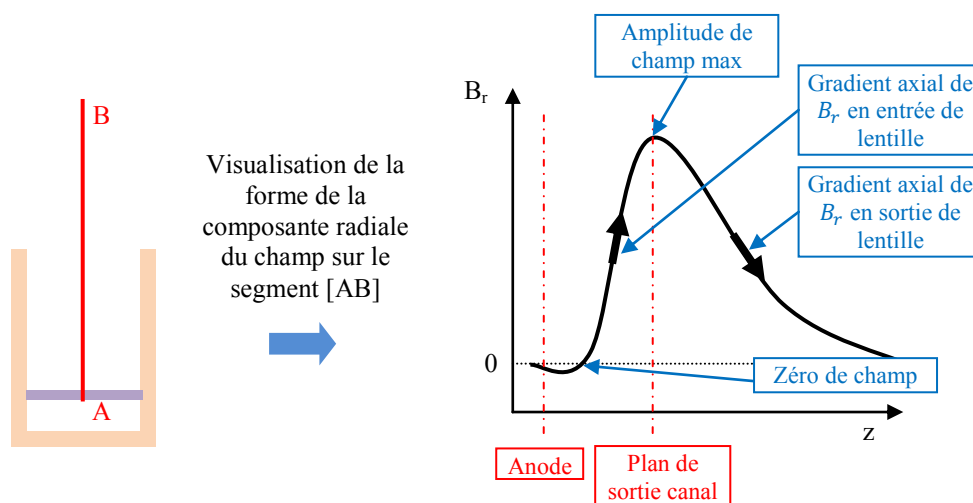


Figure 1-8: Illustration de la composante radiale du champ usuellement appliqué au centre du canal.

Toutes ces caractéristiques ne sont pas présentes sur la totalité des propulseurs à effet Hall (le SPT-100 ne présente par exemple aucun zéro de champ), mais ce vocable permet de décrire la grande majorité des topologies magnétiques existantes.

### 1.3.1.2 Circuit magnétique classique

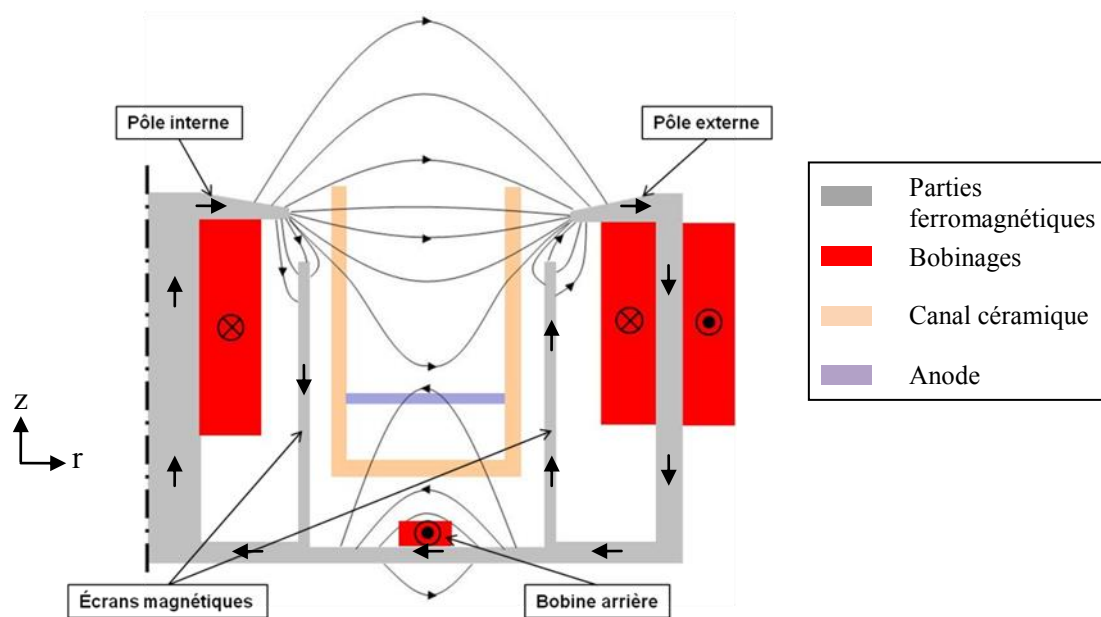


Figure 1-9: Schéma descriptif des principaux éléments du circuit magnétique d'un propulseur à effet Hall ainsi que de la carte de champ produite

La topologie usuelle décrite dans le paragraphe précédent peut être obtenue à l'aide du circuit magnétique schématisé Figure 1-9. Ce circuit magnétique peut être décomposé ainsi:

- Des pôles interne et externe, de part et d'autre du canal, produisant principalement le flux traversant ce dernier.
- Des écrans magnétiques, qui agissent sur la forme du champ au sein du canal de deux façons différentes. D'une part, ils court-circuitent une grande partie du flux magnétique produit par les pôles interne et externe, ce qui impacte ainsi

fortement la forme du champ en sortie du canal et, d'autre part, ils bloquent le passage du flux dans la zone anodique du canal.

Les écrans magnétiques ont constitué une modification structurelle majeure depuis les premiers propulseurs à effet Hall des années 50 et les modifications de topologie magnétique qu'ils induisent ont permis à cette technologie d'atteindre des niveaux de performances comparables à ceux d'autres types de propulsion électrique, comme les moteurs à grilles. Ils agissent en effet sur deux paramètres clés de la carte de champ dans le canal, à savoir le gradient axial de la composante radiale du champ (voir Figure 1-8) et la création de la "lentille magnétique" en sortie de canal (le rôle des différentes caractéristiques du champ dans le canal est précisé dans le paragraphe suivant).

Enfin, certains propulseurs commerciaux possèdent une bobine arrière (le PPS1350 de la Snecma notamment) ou un entrefer à l'arrière du circuit magnétique, permettant d'accentuer la valeur du gradient axial du champ en entrée de la lentille magnétique (à l'intérieur du canal). Ces ajouts induisent alors la potentielle apparition d'un zéro de champ dans la zone anodique et modifie l'amplitude du champ magnétique au niveau de l'anode.

### **1.3.2 Propulseurs à effet Hall à topologie magnétique modulable existants**

L'étude expérimentale de l'impact du champ magnétique passe par la réalisation d'un circuit magnétique autorisant une plage de réglage supérieure aux circuits magnétiques classiques, composés de parties ferromagnétiques, d'une bobine interne et d'une ou plusieurs bobines externes (ces dernières sont alors toutes alimentées par un même courant). L'un des objectifs de ces travaux de thèses étant la réalisation d'un propulseur à topologie magnétique paramétrable, il est utile de rappeler ici les travaux existant en la matière. Il est possible de répartir les différents circuits magnétiques mentionnés dans la littérature en deux groupes.

#### **1.3.2.1 Circuits magnétiques classiques avec bobines additionnelles (trim coils)**

La première approche expérimentale pour étudier l'impact d'une modification de la topologie magnétique sur le fonctionnement du propulseur consiste à ajouter une ou plusieurs bobines secondaires (trim coils) au circuit magnétique classique, afin de jouer localement sur le champ magnétique et de tester ainsi différentes topologies, autour d'une cartographie de base (générée par le circuit classique). Les emplacements les plus fréquents sont donnés Figure 1-10.

Les trim coils internes, les plus souvent utilisées [Kim-99, Lin-06, Dor-06, Hof-01, Hof-02], permettent généralement de jouer sur la valeur du gradient axial de champ imposée dans le canal (qui se traduit conjointement par une modification de la forme de la lentille magnétique). Si ces bobines sont généralement employées sur des modèles de propulseur de laboratoire à des fins de test et de diagnostic, certains propulseurs commerciaux, comme le PPS-1350, intègrent aussi une bobine arrière additionnelle afin d'obtenir une topologie magnétique conduisant à de meilleures performances (meilleure durée de vie et oscillations du courant de décharge plus faibles [Bon-06]).

Les trim coils externes (avec ou sans circuit magnétique additionnel associé) sont quant à elles utiles afin d'évaluer l'influence du champ en sortie du propulseur sur les caractéristiques de la plume (contrôle de l'étalement de la zone d'accélération, vectorisation de la poussée, etc.). [Day-97, Hof-03]



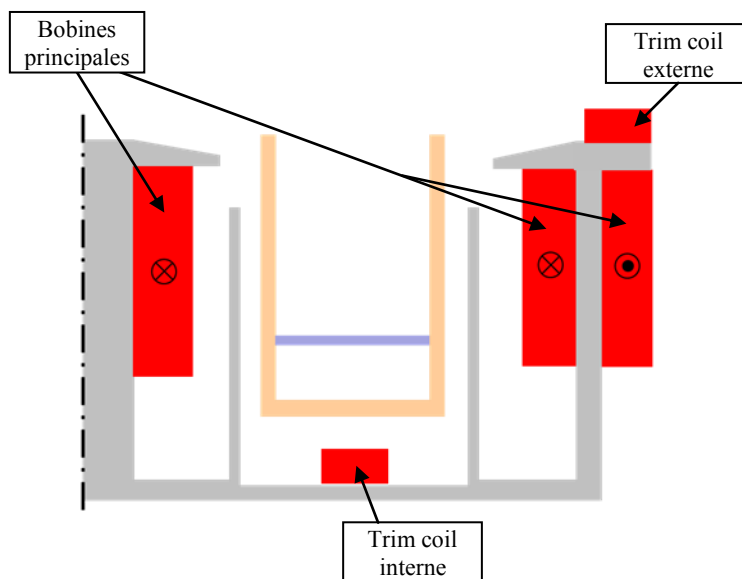


Figure 1-10: Positionnements les plus fréquents des bobines additionnelles (trim coils)

### 1.3.2.2 Circuits magnétiques étagés

Morozov réalise en 1972 l'étude de l'influence du signe du gradient axial du champ magnétique à l'aide d'un propulseur possédant des bobines externes classiques, mais deux bobines internes décalées axialement [Mor-72] et aucun écran magnétique (Figure 1-13). Les changements occasionnés par des modifications de l'alimentation des bobines peuvent alors être très importants allant, par exemple, jusqu'à l'inversion du signe du gradient magnétique. Une architecture similaire a notamment été employée plus récemment par Yu et al. pour des études portant notamment sur l'impact de l'angle des lignes de champ en sortie de canal [Yu-09a, Yu-09b].

Le circuit magnétique développé par Blinov et Gorshkov est d'une certaine façon une évolution de cette première structure, puisqu'il est composé de deux étages de bobines internes et externes [Bli-05, Gor-06] (schéma Figure 1-11). La plage de réglage s'en trouve ainsi considérablement élargie.

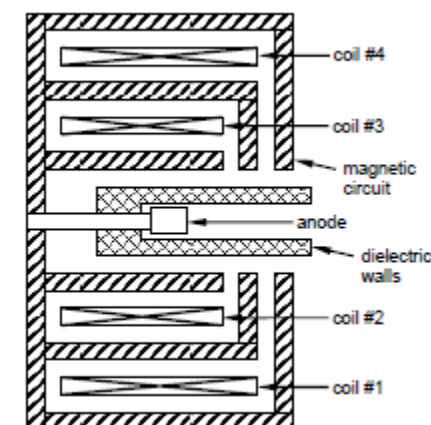


Figure 1-11: Schéma du circuit magnétique multi bobines développé par Blinov et al. [Bli-05]

### 1.3.3 Impact de la topologie magnétique sur le fonctionnement du moteur

De nombreuses études ont cherché à déterminer dans quelle mesure et par quel biais le profil de champ magnétique imposé dans le canal influence le comportement et les performances d'un propulseur à effet Hall. Si elles ont vu leurs conclusions restreintes par les plages de variation de champ autorisées par les circuits magnétiques des propulseurs employés, elles ont toutefois permis de dégager des informations primordiales pour la compréhension des phénomènes gouvernant le fonctionnement du propulseur et l'optimisation de la cartographie magnétique imposée.

#### 1.3.3.1 Amplitude de champ maximale au centre du canal

Les études concernant le champ magnétique les plus simples à mettre en œuvre d'un point de vue pratique sont celles évaluant l'impact d'une variation de la valeur maximale du champ dans le canal. Elles sont en effet réalisées en modulant dans les mêmes proportions les courants des différentes bobines du système, ce qui conduit, en l'absence de saturation trop importante du circuit magnétique, à une variation de l'amplitude et non de la forme du champ magnétique imposé dans le canal (l'étude ne porte donc en réalité pas seulement sur l'influence de la valeur maximale, mais sur une variation de l'ensemble de la carte de champ).

Ces études ont pu être réalisées analytiquement [Gar-98, Gan-08] et expérimentalement [Gaw-08]. Elles concluent notamment à un étalement du champ électrique lors de l'augmentation de la valeur maximale du champ, ce qui s'explique assez naturellement. En effet, le champ magnétique influe, comme vu précédemment, sur la mobilité électronique. La zone où le champ magnétique possède une amplitude suffisante pour jouer le rôle de « piège » à électrons augmente ainsi conjointement avec sa valeur maximale (voir Figure 1-6-a pour un exemple de répartition de champ électrique et magnétique le long du canal). La répartition du potentiel électrique suit donc celle des électrons et s'allonge axialement. A tension de décharge constante, la valeur crête du champ électrique a donc tendance à diminuer.

Ces études sont cependant finalement relativement peu nombreuses à être rapportées dans la bibliographie, en raison notamment d'une particularité du mode de réglage du champ magnétique dans les propulseurs à effets Hall classique. En effet, la présence d'une valeur optimale de champ est constatée lorsqu'un balayage des différentes amplitudes de champ est réalisé en jouant sur les valeurs d'alimentation des bobines (Figure 1-12-b) (le rapport entre les différents courants étant conservé de façon à maintenir constante la forme des lignes de champ). Cette valeur optimale, qui varie en fonction de la tension imposée entre la cathode et l'anode, correspond à la minimisation des oscillations du courant de décharge et à la maximisation du ratio  $I_i/I_d$  (qui intervient notamment pour le calcul de l'efficacité du propulseur), ou encore à la minimisation du rapport  $I_e/I_i$  avec  $I_e$  le courant électronique. La valeur de champ optimale correspond donc au point de fonctionnement où le nombre d'ions générés par électron allant de la cathode vers l'anode est maximal. [Kim-98]

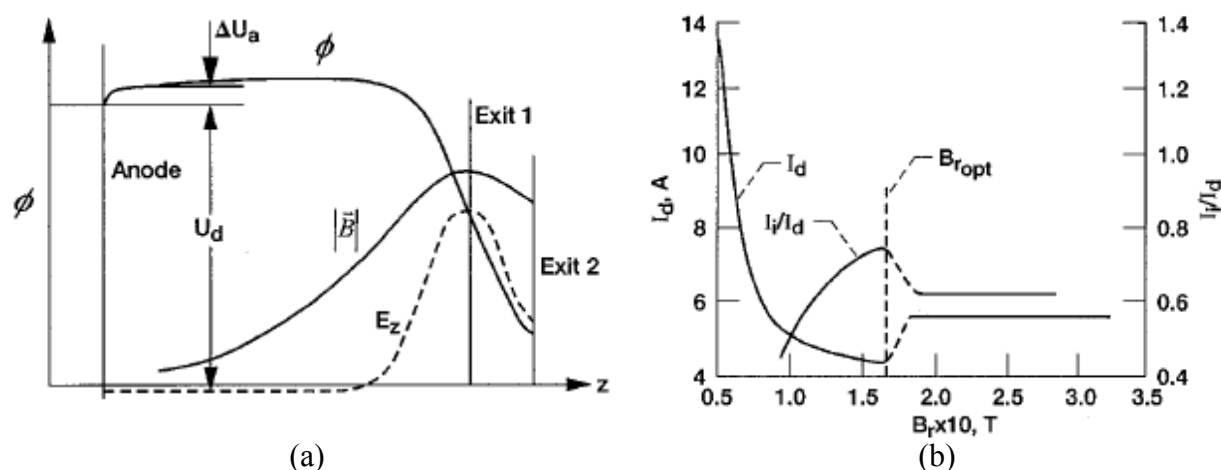


Figure 1-12-a : Distribution du champ magnétique et du champ et potentiel électriques le long du canal pour un SPT-100. [Kim-98]

Figure 1-12-b : Courant de décharge et ratio  $I_i/I_d$  en fonction de la valeur maximale du champ magnétique. [Kim-98]

### 1.3.3.2 Gradient axial du champ magnétique, au centre du canal (selon $z$ , à $r$ fixé)

Le deuxième paramètre de la cartographie magnétique fréquemment étudié dans la littérature, que ce soit analytiquement ou expérimentalement, est le gradient axial de la composante radiale du champ  $\nabla_z B_r$ . La première de ces études, qui a par la suite fait référence pour le choix du champ magnétique imposé dans la majeure partie des propulseurs à effet Hall, a été réalisée en 1972 par A.I. Morozov et al. [Mor-72]. Les auteurs ont effectué, à l'aide d'un propulseur possédant une bobine supplémentaire à l'arrière du canal (voir Figure 1-13-a), des mesures des tensions et courants de décharge ainsi que du potentiel plasma pour trois configurations magnétiques extrêmes: une configuration à gradient positif ( $\nabla_z B_r > 0$ ), une avec un champ magnétique quasi homogène tout le long du canal ( $\nabla_z B_r = 0$ ) et enfin une configuration avec un gradient de composante radiale négatif ( $\nabla_z B_r < 0$ ) (voir Figure 1-13-b). Chacune des configurations est choisie de façon à maintenir la valeur de l'intégrale de la composante radiale du champ le long du canal constante, afin de ne pas favoriser la mobilité électronique axiale de l'une ou l'autre des configurations.

Les résultats portent principalement sur deux points, le rapport  $I_e/I_d$  pour chacune des configurations et les oscillations du plasma au cours du fonctionnement.

Si le ratio  $I_e/I_d$  diffère peu entre les cas avec gradient positif et nul (le rapport vaut respectivement 0.35 et 0.5), il en est tout autre du cas avec gradient négatif (0.85). L'explication avancée pour cette différence s'appuie sur l'observation du second paramètre, à savoir les oscillations du plasma (les propulseurs à effet Hall fonctionnent généralement suivant un régime de respiration du plasma « basse fréquence » à quelques dizaines de kHz, auquel se superposent des oscillations plus faibles à quelques centaines de kHz du potentiel plasma). Ces dernières sont en effet bien plus importantes dans le cas du gradient négatif et conduisent même à un comportement instable du propulseur. Les cas de gradient nul et positif sont quant à eux stables, avec une minimisation des oscillations dans le cas du gradient positif. C'est sur la base de cette étude que les propulseurs ultérieurs ont été réalisés, en imposant un champ magnétique dans le canal respectant la condition  $\nabla_z B_r > 0$ .

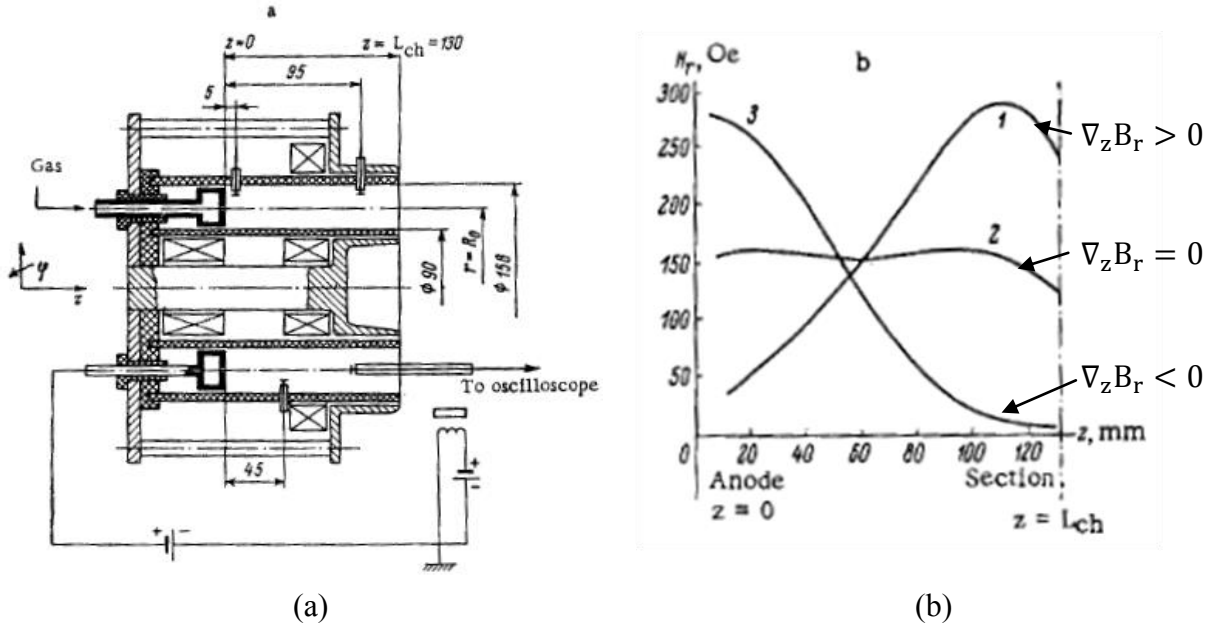


Figure 1-13-a : Schéma descriptif du propulseur à champ magnétique modulable employé par Morozov et al. [Mor-2]  
 Figure 1-13-b : Profils de champ testés par Morozov et al. Mesure de la composante radiale du champ magnétique  $H$  en fonction de  $z$  au niveau du rayon médian du canal ( $1\text{Oe}=1\text{G}$ ). [Mor-72]

Des études plus récentes ont montré qu’au-delà du signe, l’amplitude du gradient joue elle aussi un rôle important. Deux zones apparaissent en effet lors du fonctionnement du propulseur : La zone d’ionisation où les atomes de Xénon deviennent des ions  $\text{Xe}^+$  (ou très minoritairement  $\text{Xe}^{++}$ ) et la zone d’accélération où ces ions, devenus sensibles au champ électrique, sont accélérés (voir schéma Figure 1-14) [Dor-01]. Or, la position et l’étalement de ces deux zones est très dépendante de la répartition du champ magnétique et, plus particulièrement, de son gradient [Hof-06]. Gorshkov et al. ont notamment montré que la zone d’ionisation coïncidait avec le maximum d’une fonction représentative de l’évolution du gradient magnétique dans un espace  $2\text{D}^2$  [Gor-05]. La zone d’accélération est liée quant à elle à la répartition du champ électrique dans et en dehors du canal (et dont la localisation est donc elle aussi tributaire du champ magnétique imposé). Modifier la valeur du gradient de champ magnétique permet donc de jouer sur le positionnement relatif de ces deux zones, ce qui influe entre autres sur le courant électronique [Kim-98] ainsi que sur la divergence du jet d’ions en sortie du propulseur (plus la zone d’accélération se trouve vers l’extérieur du canal, plus la divergence a tendance à être élevée, du fait de la concavité plus faible, voire absente, des lignes de champ – cf. paragraphe suivant) [Ahe-04].

<sup>2</sup> Plus précisément, la fonction est la suivante :

$$F = \frac{\left| \vec{B} \times \nabla |\vec{B}| \right|}{|\vec{B}|}$$

Elle correspond au taux de variation du gradient du champ magnétique dans la direction perpendiculaire aux lignes de champ.

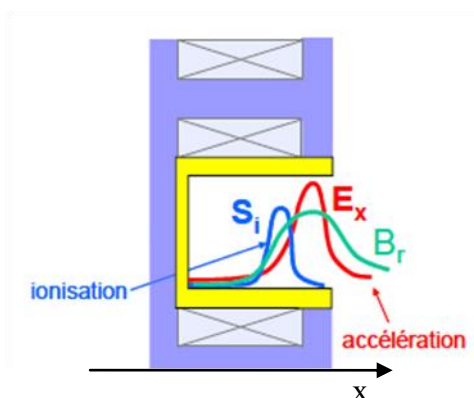


Figure 1-14: Représentation schématique du champ magnétique radial dans le canal, du terme source (zone d'ionisation) et du champ électrique (zone d'accélération). [Bon-06]

### 1.3.3.3 Lentille magnétique et symétrie

Le principe de lentille magnétique est à la base du mode de fonctionnement d'un propulseur à effet Hall. Les lignes de champ magnétique constituant une image au premier ordre des lignes équipotentielles du potentiel électrique, il est ainsi possible de forcer la convergence du faisceau d'ions vers le centre du canal en imposant un champ magnétique convexe en sortie de canal [Val-93]. Il est donc a priori souhaitable d'imposer un champ fortement convexe et symétrique par rapport au rayon moyen du canal, afin de diminuer la divergence et l'érosion des parois du canal et d'augmenter la proportion d'ions participant à la poussée. Différentes études expérimentales confirment cette hypothèse [Hof-04, Gor-06].

Linnel et al. ont notamment mesuré le champ électrique au sein du canal pour le propulseur NASA-173Mv1 en cours de fonctionnement. Les mesures mettent ainsi en évidence une composante radiale du champ électrique au centre du canal beaucoup plus faible (et donc une divergence moindre) lorsque la trim coil permettant une accentuation de la lentille magnétique est alimentée.

La configuration de champ en lentille magnétique induit de plus naturellement une différence d'amplitude du champ magnétique entre les parois et le centre du canal. Ceci, indépendamment de l'effet de lentille magnétique, conduit là encore à une focalisation du faisceau via un effet miroir (voir paragraphe suivant).

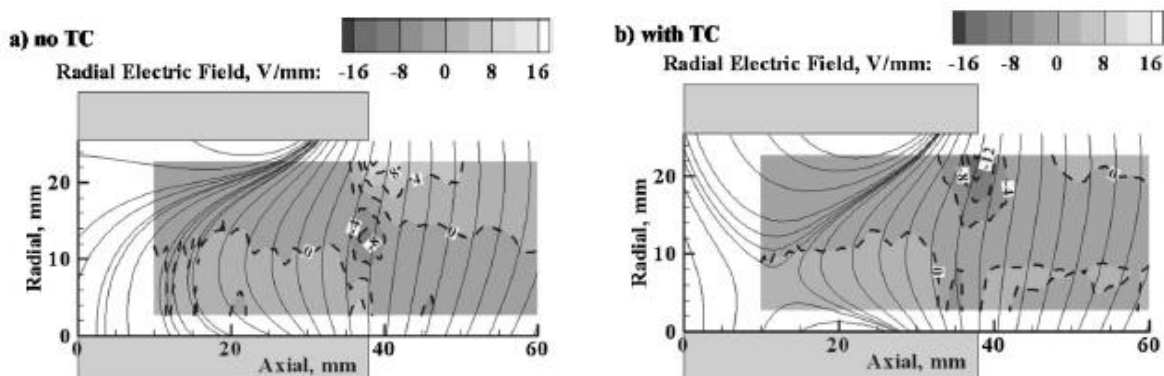


Figure 1-15: Ligne des champs magnétique, et composante radiale du champ électrique (a) sans trim coil alimentée (b) avec trim coil alimentée. Propulseur NASA 173Mv1, tension de 300V. [Lin-06]

#### 1.3.3.4 Amplitude relative du champ au centre du canal et au niveau des parois (effet miroir)

L'effet de lentille magnétique est, pour les topologies magnétiques modernes, difficilement dissociable d'un deuxième effet contribuant à focaliser le faisceau d'ions, appelé effet miroir. Mais Keidar et al. ont montré que, même en présence d'un champ principalement radial, un effet miroir peut être observé et impacte sur la répartition du potentiel électrique au sein du plasma [Kei-05]. En effet, ils ont montré qu'un gradient de champ magnétique radial entraîne des différences entre le potentiel électrique et les lignes de champ magnétique (contrairement à l'approximation proposée par Morozov) qui contribuent à une augmentation du potentiel dans les zones de fort champ magnétique et conduisent à une réduction de la divergence.

#### 1.3.3.5 Blindage magnétique des parois du canal

Les tests de qualification des moteurs consistent à faire fonctionner un propulseur dans un moyen d'essai pendant un nombre d'heures défini, sans maintenance, de façon à simuler un fonctionnement en conditions réelles. Le PPS1350 est par exemple qualifié pour 10 500 heures de fonctionnement.

Lors du fonctionnement, les parois du canal sont érodées par les impacts d'ions accélérés à haute vitesse. Cette érosion est prévue et les parois en céramique du canal sont réalisées de façon à la tolérer. Un phénomène apparaît cependant sur différents moteurs : au bout d'un certain nombre d'heures de fonctionnement, et donc d'un certain volume de céramique érodé, le taux d'érosion diminue fortement, jusqu'à finalement pratiquement s'annuler (pour le PPS1350, le taux d'érosion passe de  $6.10^{-6}$  m/h en début de vie à  $0,1.10^{-6}$  m/h au bout de 5500 heures de tir [Mar-08]).

L'érosion est l'un des aspects limitants de la durée de vie des propulseurs à effet Hall. Elle est problématique du point de vue de la pollution du voisinage immédiat et constitue un des facteurs de risque de mauvais fonctionnement du moteur. Comprendre les mécanismes à l'origine de cette variation de l'érosion revêt donc un intérêt certain pour l'amélioration de la technologie. Une hypothèse a récemment été émise par Mikellides et al. impliquant le champ magnétique à proximité des zones érodées [Mik-11].

En effet, l'érosion des parois du canal découvre progressivement des zones de la cartographie magnétique initialement inaccessibles au plasma. Cela a entre autres pour conséquence d'aboutir à des configurations où les lignes de champ, du fait de leur forme caractéristique de lentille magnétique, sont parallèles aux parois érodées (schéma Figure 1-16-a). Les auteurs ont ainsi montré, à l'aide de simulations fluides, que la stabilisation de l'érosion se produisait en se rapprochant d'une configuration à flux parallèle. Les calculs ont été effectués pour deux géométries des céramiques, après 1200 h et en régime permanent. La difficulté de la modélisation fluide du transport des électrons comporte une inconnue liée à la diffusion des électrons perpendiculairement aux lignes de champ magnétique. Des phénomènes de diffusion anormale ont été mis en avant pour expliquer comment les électrons sont transportés dans la région à fort champ magnétique où la densité des atomes chute de 2 ordres de grandeur sous l'effet de l'ionisation intense régnant dans cette région [Bon-06]. Les auteurs ont donc ajusté le coefficient de diffusion (mobilité) à travers une fréquence de collision effective de manière à reproduire les profils de température et de potentiel plasma mesurés dans le jet à quelques centimètres du plan de sortie.

Afin d'expliquer le comportement du moteur, ils proposent trois explications:

- Tout d'abord, conformément à l'hypothèse de Morozov, les équipotentielles du potentiel plasma se superposent au premier ordre aux lignes de champ magnétique. Or, dans le cas de la géométrie du canal en régime permanent

(lorsque l'érosion devient quasi nulle), certaines lignes de champ épousent le contour des parois érodées. La chute de potentiel plasma le long de ces parois est donc très faible, par rapport à des états d'érosion antérieurs (la différence de potentiel pour le canal à 1200h est de 286V le long de la paroi érodée. Elle est de seulement 30V pour le canal en régime permanent). Les ions sont donc moins accélérés avant d'impacter la paroi, ce qui contribue à fortement diminuer l'érosion.

- Les électrons sont eux aussi moins énergétiques à proximité de la zone d'érosion (là encore, du fait des lignes de champ parallèles aux parois, qui ont ainsi tendance à piéger des électrons moins énergétiques en provenance du fond du canal). L'énergie des électrons étant plus faible, l'énergie contenue dans la gaine électronique l'est aussi, et les ions sont donc moins accélérés en la traversant avant d'aller percuter la paroi.
- Enfin, un dernier effet est lié à la direction du champ électrique. La différence de potentiel plasma étant faible le long de la paroi, le champ électrique est donc principalement perpendiculaire à ces dernières. Les ions sont donc accélérés dans la direction opposée aux parois, ce qui conduit à une diminution de la densité du plasma à proximité de ces dernières (densité électronique 10 à 1000 fois plus faible). La quantité d'ions susceptibles d'aller impacter les parois diminue donc d'autant.

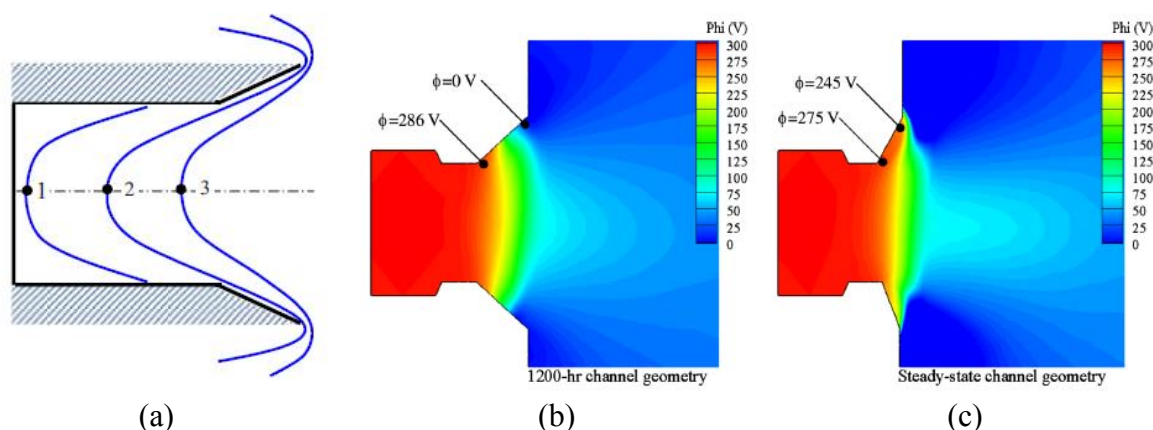


Figure 1-16-a: Schéma représentatif du canal et des lignes de champ magnétique après érosion. Les lignes de champ sont alors parallèles aux parois érodées du canal. [Mik-11]

Figure 1-16-b : Potentiel plasma calculé par simulation PIC pour la géométrie du canal après 1200 heures de fonctionnement. [Mik-11]

Figure 1-16-c : Potentiel plasma calculé par simulation PIC pour la géométrie du canal en régime permanent (érosion quasi nulle). [Mik-11]

### 1.3.3.6 Zéro de champ et champ au niveau de l'anode

L'un des moyens fréquemment employés afin d'augmenter le gradient axial du champ magnétique dans le canal est l'emploi d'une bobine arrière additionnelle permettant de jouer principalement sur le champ dans la zone anodique. Le gradient magnétique s'en trouve effectivement augmenté, mais cela peut entre autres induire l'apparition de deux caractéristiques sur la carte de champ dont l'impact est encore mal compris : une remontée de l'amplitude du champ magnétique à proximité de l'anode et un zéro de champ magnétique dans la zone anodique du canal (Figure 1-17 et Figure 1-18).

Les études portant exclusivement sur l'impact de l'un de ces deux paramètres sont quasi-inexistantes dans la littérature. En effet, même si certains auteurs se sont intéressés au sujet [Gar-03, Dor-06], les modifications de champ effectuées afin d'évaluer leur impact

respectif impliquaient la modification de plusieurs autres paramètres décisifs (gradient axial, amplitude de champ maximale).

Les résultats doivent donc être interprétés avec certaines précautions, mais plusieurs informations ont toutefois pu être extraites de ces investigations.

D'après Garrigues et al., le zéro de champ induit une mobilité électronique élevée à son voisinage, ce qui se traduit notamment par l'étalement de la zone d'ionisation. Certains ions sont alors créés très en amont du canal, dans une zone où la lentille magnétique ne joue pas son rôle. Ces ions ont alors plus de chances d'aller impacter les parois du canal. Les auteurs comparent les résultats de simulation par code hybride pour 4 topologies magnétiques différentes et observent notamment une augmentation du courant ionique vers les parois de 0,4A pour le cas 2 (sans zéro de champ) à 1A pour le cas 4 (avec zéro de champ). Les simulations ne montrent cependant pas d'effet négatif sur l'érosion des céramiques (au contraire, celle-ci aurait tendance à concerner une zone plus restreinte pour le cas 4), mais l'impact du zéro est probablement masqué par la modification du gradient magnétique qui lui est associée. En effet, le surplus d'ions impactant la paroi est faiblement énergétique puisqu'ils n'ont pas encore traversé la zone d'accélération et l'érosion supplémentaire qu'ils auraient pu occasionner est faible devant les variations d'érosion occasionnées par les différences de positionnement relatif et absolu des zones d'ionisation et d'accélération.

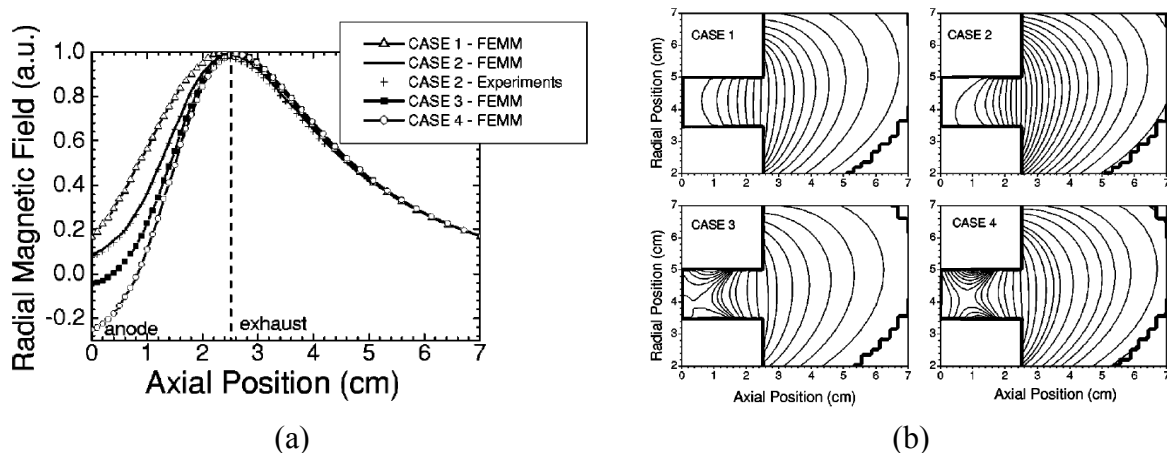


Figure 1-17: Topologies de champ magnétique testées par Garrigues et al. (a) Composante radiale du champ au centre du canal en fonction de  $z$ . (b) Lignes de champ correspondant à chacun des 4 cas testés. [Gar-03]

Dorf et al. ont fait le choix de ne pas modifier le courant d'alimentation des bobines principales en faisant varier celui de la bobine arrière [Dor-06]. Cela aboutit aux profils de champ donnés Figure 1-18 (la valeur maximale du champ varie fortement entre les différentes topologies examinées). Ils se sont alors intéressés à l'impact de la valeur de champ au niveau de l'anode sur le champ électrique à sa proximité immédiate à l'aide de mesures expérimentales. Ces dernières ont mis en évidence une différence importante au niveau de la chute de potentiel anodique en fonction de la topologie imposée. En effet, cette dernière est négative (+6 à +10V à 2 mm de l'anode) pour les topologies  $B_0$  et  $B_{pos}$  (ce qui correspond à une gaine négative qui aura donc un effet répulsif sur les électrons) et positive (jusqu'à -5V à 2 mm de l'anode) dans le cas de la topologie  $B_{neg}$ . S'il est difficile de tirer des conclusions catégoriques de ces résultats, ils confirment néanmoins l'intérêt d'approfondir l'étude de l'impact du champ magnétique sur la gaine anodique.



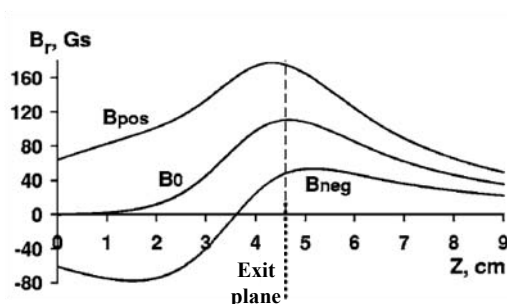


Figure 1-18: Profils de champ au centre du canal étudiés par Dorf et al. [Dor-06]

### 1.3.3.1 Synthèse

Le Tableau 1-3 récapitule les caractéristiques des topologies magnétiques étudiées jusqu'à présent, ainsi que leurs influences constatées sur le fonctionnement du propulseur.

Caractéristique de la topologie magnétique	Influences relevées, par simulation ou expérimentalement
Amplitude maximale du champ au centre du canal	<ul style="list-style-type: none"> <li>Etatement de la zone de champ électrique</li> <li>⇒ Stabilisation du plasma</li> <li>⇒ Oscillation du courant de décharge</li> <li>⇒ Ratio <math>I_i/I_d</math></li> </ul>
Gradient axial du champ au centre du canal, en amont du maximum de champ	<ul style="list-style-type: none"> <li>Gradient positif</li> <li>⇒ Stabilisation du plasma</li> <li>⇒ Oscillation du courant de décharge</li> <li>⇒ Ratio <math>I_i/I_d</math></li> <li>Amplitude du gradient</li> <li>⇒ Position relative des zones d'ionisation et d'accélération</li> <li>⇒ Divergence du jet d'ions</li> <li>⇒ Erosion des parois du canal</li> <li>⇒ Ratio <math>I_i/I_d</math></li> </ul>
Convexité de la lentille magnétique en amont du plan de sortie du canal	<ul style="list-style-type: none"> <li>⇒ Divergence du jet d'ions</li> <li>⇒ Erosion des parois du canal</li> </ul>
Amplitude relative du champ au centre du canal et au niveau des parois (effet miroir)	<ul style="list-style-type: none"> <li>⇒ Divergence du jet d'ions</li> <li>⇒ Erosion des parois du canal</li> </ul>
Zéro de champ dans la zone anodique du canal	<ul style="list-style-type: none"> <li>⇒ Modification locale de la mobilité électronique</li> <li>⇒ Ratio <math>I_i/I_d</math></li> <li>⇒ Stabilité du plasma</li> </ul>

Amplitude du champ au niveau de l'anode	⇒ Modification du potentiel de la gaine anodique
Inclinaison des lignes de champ par rapport aux parois du canal	⇒ Effet de blindage magnétique ➔ Divergence du jet d'ions ➔ Erosion des parois du canal

Tableau 1-3: Récapitulatif de l'influence de la topologie magnétique par caractéristique.

## **1.4 Méthode d'analyse d'un circuit magnétique de propulseur à effet Hall, le PPS1350**

L'influence du champ magnétique sur le fonctionnement du propulseur est donc multiple et incontournable. La connaissance fine de la topologie magnétique générée par le circuit d'un propulseur est donc très importante. La méthodologie employée pour cela est décrite dans cette partie et est appliquée au PPS1350 développé par la Snecma.

### **1.4.1 Simulation 2D de structures quasi axisymétriques**

Les différents circuits magnétiques étudiés à l'occasion de ces travaux de thèse sont généralement des structures tridimensionnelles n'ayant aucun axe de révolution. En toute rigueur, l'évaluation par simulation numérique du champ magnétique généré par ces circuits requiert l'emploi de simulations éléments finis 3D.

Cependant, la variation azimutale du champ magnétique imposé dans le canal d'un propulseur à effet Hall est censée être la plus faible possible et est en pratique le plus souvent négligeable, du fait de l'emploi de structure permettant une homogénéisation azimutale (voir paragraphe suivant). Ainsi, même lorsque le bobinage externe est composé de plusieurs bobines réparties autour du canal, leur nombre est choisi de telle sorte que l'homogénéité azimutale soit assurée dans l'entrefer occupé par le canal en céramique. Ces structures se comportent donc, d'un point de vue magnétique, comme des géométries purement axisymétriques. Il est ainsi possible, moyennant quelques hypothèses d'équivalences, de s'affranchir de simulations éléments finis 3D extrêmement coûteuses en temps de mise en place et de calcul, en les remplaçant par des simulations éléments finis 2D sur une structure considérée comme équivalente (voir Figure 1-19). Le temps de calcul devient alors négligeable (de l'ordre de la seconde).

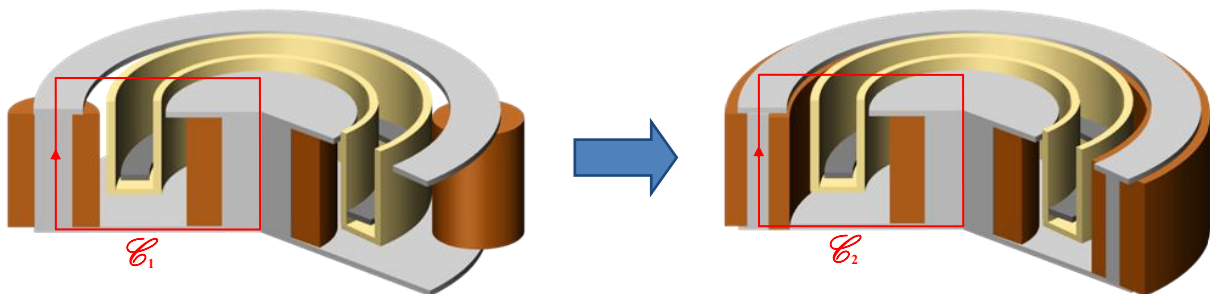


Figure 1-19: Passage d'une structure quasi axisymétrique à une structure réellement axisymétrique

Afin d'obtenir la structure axisymétrique considérée comme équivalente, il est nécessaire de remplacer les éléments non invariants par rotation autour de l'axe z (bobines et noyaux externes) par des éléments ayant l'axe z comme axe de révolution. Les deux systèmes devant avoir une cartographie magnétique identique pour une alimentation donnée, il est nécessaire de bien calculer les dimensions de la structure axisymétrique. Le circuit équivalent doit être dimensionné de façon à ce qu'il reproduise exactement, pour une alimentation donnée, la même cartographie de champ dans l'entrefer, mais aussi les mêmes niveaux d'induction dans les parties ferromagnétiques. Les sections de passages de flux doivent dans ce contexte être adaptées. L'épaisseur de la couronne ferromagnétique externe vaut donc :

$$e = \frac{n_{bob} \cdot R_{noy}^2}{2R_c} \quad 1-9$$

avec  $n_{bob}$  le nombre de bobines à remplacer,  $R_c$  le rayon moyen de la couronne ferromagnétique et  $R_{noy}$  le rayon du noyau des bobines (voir Figure 1-20).

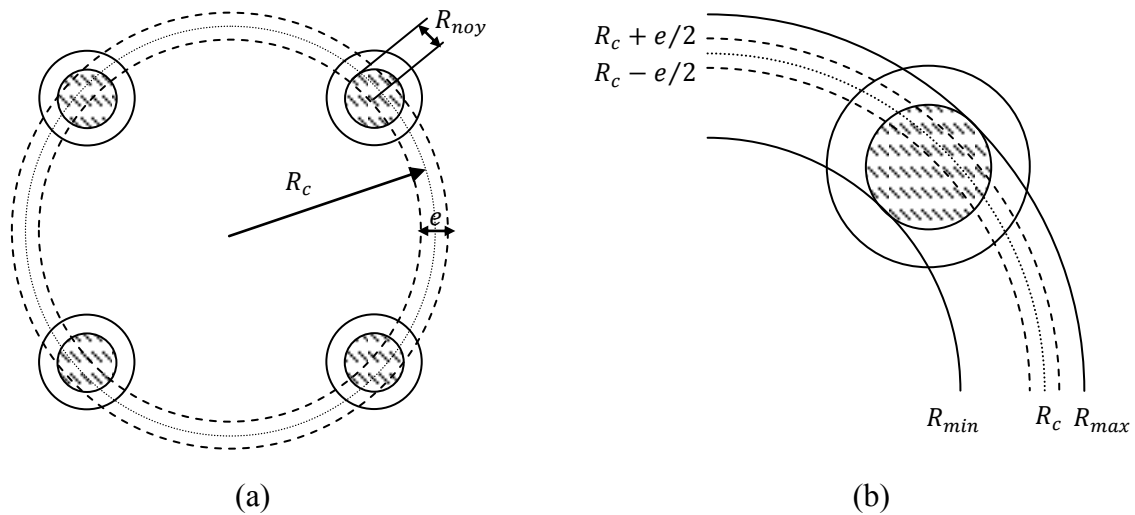


Figure 1-20: (a) Couronne ferromagnétique à section de flux équivalente aux sections des noyaux de 4 bobines (b) Positionnement du rayon médian  $R_c$  de la couronne ferromagnétique. Sa valeur est minimale, afin de ne pas surestimer les fuites avec les éléments ferromagnétiques adjacents (écrans) est  $R_{min} + e/2$

En toute rigueur, le choix de la valeur  $R_c$  devrait être réalisé en comparant les fuites magnétiques apparaissant entre les noyaux et le reste du circuit magnétique avec celle issue de la couronne ferromagnétique équivalente. Cependant, les simulations réalisées sur des circuits type montrent une influence négligeable de ce paramètre sur la plage de variation considérée ( $[R_{min} + e/2, R_{max} - e/2]$ ). De plus, d'autres imprécisions liées au passage 3D/2D induisent des erreurs supplémentaires à celles occasionnées par le réglage de ce paramètre (notamment la non homogénéité de la répartition du champ dans les parties adjacentes aux pièces non axisymétriques). Dans ces conditions, il a été choisi de définir un rayon moyen équivalent :

$$R_c = \frac{R_{min} + R_{max}}{2}$$

L'épaisseur des deux couronnes de cuivre est, quant à elle, prise égale à l'épaisseur de cuivre des bobines, en vertu du théorème d'Ampère. Les niveaux d'induction doivent être identiques dans les deux structures. Si on applique le théorème d'Ampère sur les contours respectifs  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , cf. Figure 1-19, on peut facilement en conclure qu'à Ampère/tours égaux, les sections de cuivre des bobines doivent être identiques.

**1.4.2 Simulation magnétique 3D : évaluation du degré d'homogénéité azimutale**

Confidentiel

Confidentiel

Confidentiel

Confidentiel

## **1.5      Conclusion**

Ce chapitre introductif a d'abord permis de se familiariser avec la propulsion électrique, en dressant un rapide historique des technologies mises en œuvre et en soulignant sa complémentarité avec la propulsion chimique. Un bref récapitulatif des technologies de propulsion électrique existantes a été réalisé avant de s'intéresser plus particulièrement aux propulseurs à effet Hall, sujets d'étude de ce manuscrit. Ces derniers reposent sur une technologie ayant fait la preuve, à la fois de sa maturité et de son intérêt, puisque de nombreux satellites embarquent des propulseurs de ce type. Cependant, de nombreuses zones d'ombre perdurent quant aux phénomènes internes gouvernant le comportement du plasma lors du fonctionnement du propulseur. En particulier, l'impact du champ magnétique, s'il est indéniable, est encore loin d'être parfaitement compris. Une synthèse des études existantes sur l'influence du champ magnétique sur le fonctionnement de ces propulseurs a donc été réalisée et a permis de mettre en évidence les aspects à privilégier dans le contexte d'une étude expérimentale de l'impact du champ magnétique. Enfin, la méthode employée pour l'analyse d'un circuit magnétique a été décrite en prenant l'exemple du PPS1350 développé par la Snecma. Cette étude a mis en évidence la quantité importante de fuites magnétiques présentes dans les circuits incluant des écrans magnétiques et laisse présager de l'intérêt du développement d'outil de conception rationalisé, permettant d'aboutir à des structures de circuit magnétique innovantes, plus légères et moins gourmandes énergétiquement.



## **Chapitre 2**

# **Résolution du problème magnétostatique inverse par optimisation**

La conception de circuit magnétique fait fortement appel à l'expertise et l'expérience du concepteur à différentes étapes du processus (choix de la structure, hypothèses de modélisation). Une approche de rationalisation du processus de conception consiste à limiter l'usage de ces connaissances empiriques, en remplaçant le jugement de l'expert par des méthodes de choix automatisées et visant à aboutir à un design de structure optimal.

Les méthodes permettant de formaliser et de résoudre un tel problème sont nombreuses et le but de ce chapitre est d'explorer différentes pistes qui pourraient mener à un outil de conception automatisée applicable au design optimal de circuits magnétiques, tels que ceux employés dans les propulseurs à effet Hall.

## **2.1 Principe de la conception par résolution du problème inverse en magnétostatique**

Cette partie rappelle les notions générales indispensables à la compréhension des méthodes de formalisation des problèmes de conception sous forme de problèmes d'optimisation.

### **2.1.1 Principe**

La conception d'un dispositif électromagnétique passe par certaines étapes incontournables :

- La définition d'un cahier des charges. En concertation avec le « client », il s'agit, d'une part, de définir les objectifs de la structure en termes de fonctionnalités et de performances et, d'autre part, de préciser les contraintes qui devront être respectées (contraintes dimensionnelles, telles qu'un encombrement ou une masse maximum, contraintes physiques, telles qu'une densité de courant ou une puissance maximale, ou encore contraintes structurelles en imposant un type particulier d'architectures).
- La définition et le développement de la structure : le concepteur doit aboutir à une structure dimensionnée qui satisfasse le cahier des charges. Il s'appuie pour cela sur son expérience propre et sur les informations issues de modèles analytiques ou numériques.
  - Les modèles analytiques sont généralement dérivés de lois intégrales décrivant les phénomènes physiques mis en œuvre dans le dispositif. Ils présentent l'avantage d'une exécution très rapide, ainsi que d'une formulation explicite, ce qui permet notamment de calculer aisément des dérivées partielles par rapport aux différentes variables de conception. Ils s'intègrent ainsi facilement dans un processus de conception automatisé par optimisation. Cependant, ce type de modèle implique toujours des hypothèses simplificatrices et les résultats obtenus ne reflètent pas nécessairement l'exacte réalité. La qualité d'un dimensionnement basé exclusivement sur un modèle analytique tient donc à la validité des hypothèses employées.
  - Les modèles numériques sont, quant à eux, issus des lois locales (équations de Maxwell dans le cas présent), discrétisées et résolues numériquement. Ils donnent ainsi notamment accès aux valeurs physiques présentes en n'importe quel point de l'espace, alors que les modèles analytiques se contentent généralement de grandeurs intégrées. La précision des résultats obtenus dépend toutefois de la taille du maillage employé (entre autres) et la résolution du système peut être très longue (ce qui dans le cadre d'une procédure de conception par optimisation est fortement dommageable, le modèle pouvant être appelé un très grand nombre de fois). Enfin, les informations de gradient

sont d'une manière générale difficilement accessibles (ce qui complique fortement l'utilisation de certains codes efficaces d'optimisation).

- La validation : une fois le design de la structure arrêté, une vérification des performances et de la conformité avec le cahier des charges est nécessaire. Elle peut être réalisée par prototypage ou à l'aide de simulations numériques.

La conception d'un dispositif peut, d'un certain point de vue, être considérée comme la résolution d'un problème inverse. La définition de cette notion passe par la compréhension de ce qui est appelé problème direct. [Fit-04, Fon-07].

Le *problème direct* consiste, à partir d'une structure magnétique dont toutes les caractéristiques sont connues (dimensions, matériaux, courants d'alimentation, etc.), à calculer un certain nombre de grandeurs physiques du système (induction en différents points, flux magnétique sur une surface, force exercée sur un élément, etc.). Ce type de problème peut être résolu de façon analytique (théorème d'Ampère et conservation du flux, etc.) ou numérique (méthode de calcul par éléments finis, etc.), en s'appuyant sur une description du système par les équations de Maxwell.

Le *problème inverse de conception* consiste quant à lui à définir, à partir de caractéristiques exprimées en termes de grandeurs physiques (valeur de champ en certains points, couple développé par la structure, etc.), le dispositif électromagnétique (constitué de matériaux ferromagnétiques, bobinages, aimants, etc.) à même de les générer tout en respectant un certain nombre de contraintes (dimensionnelles, valeurs maximales portant sur les niveaux de champs, les courants, etc.) (cf. Figure 2-1).

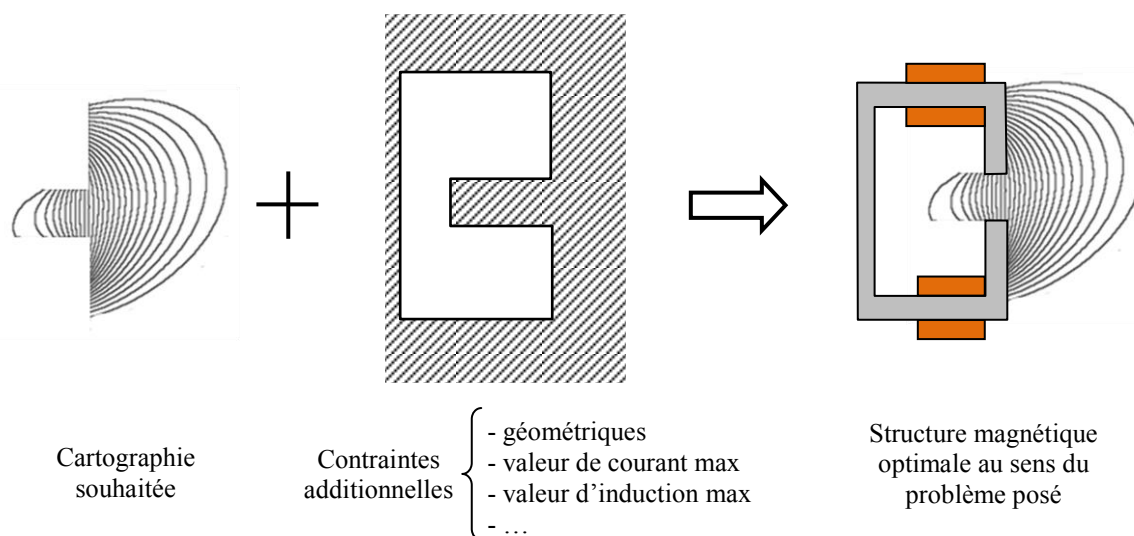


Figure 2-1: Schéma descriptif du principe du problème inverse de conception de dispositifs magnéostatiques

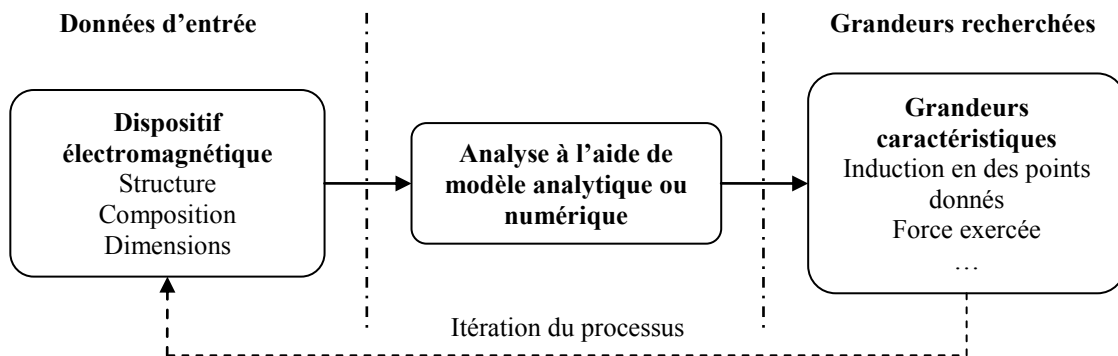
Deux méthodes peuvent être envisagées pour résoudre un problème inverse de conception (voir Figure 2-2):

- A partir d'un dimensionnement initial (basé sur l'expérience du concepteur, en s'aidant éventuellement de modèles simplifiés), le problème direct est résolu. Le résultat obtenu est comparé avec les objectifs fixés et les paramètres de conception sont modifiés, en s'appuyant sur l'expérience du concepteur. Le processus est itéré jusqu'à l'obtention d'une solution le satisfaisant.

- Le problème peut aussi être formulé sous sa forme inverse (par exemple sous la forme d'un problème d'optimisation), en cherchant à obtenir le design le plus adapté pour obtenir des caractéristiques données. La méthode de résolution peut ensuite elle-même faire appel à des résolutions successives du problème direct pour guider sa convergence. C'est notamment le cas des algorithmes méta-heuristiques (algorithmes génétiques [Duf-00], d'essaim particulaire (PSO) [Has-11], etc.) ou des algorithmes de descente se basant sur l'évaluation d'un gradient (algorithme du gradient, du gradient conjugué, de Newton-Raphson, etc.).

Dans l'optique d'une rationalisation des processus décisionnaires permettant d'aboutir à la conception d'un dispositif électromagnétique quelconque, la deuxième approche est la plus adaptée. Le problème inverse de conception peut alors généralement se formaliser sous la forme d'un problème d'optimisation [Kon-93].

(a) Conception par itération du problème direct



(b) Conception par résolution du problème inverse

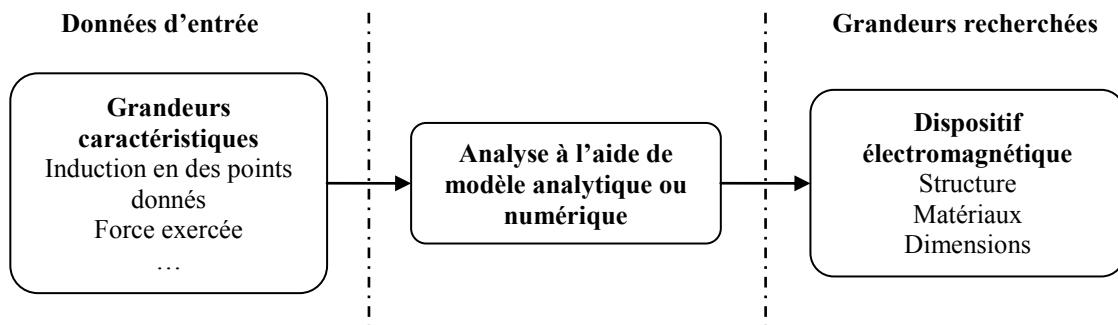


Figure 2-2: Méthodes de résolution du problème de conception. (a) Itération du problème direct (b) Résolution du problème inverse [Fit-04]

Considérons un premier cas non général où la structure et les matériaux employés ont été définis au préalable (optimisation paramétrique). Le problème devient alors un problème de dimensionnement optimal. Il comporte alors :

- $n$  variables continues, qu'il est possible de regrouper en un vecteur  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$
- $p$  inégalités (qui représentent par exemple une limite physique d'échauffement du dispositif). Les inégalités sont exprimées par convention sous forme de fonctions ( $g_i \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ) inférieures ou égales à 0.

- $q$  égalités (valeur de couple, de champ souhaité, etc.) exprimées sous forme de fonctions  $h_i \forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket$  égales à 0.
- $n$  butées qui permettent de fixer une borne minimale et maximale pour chacune des variables. Elles s'expriment sous la forme d'encadrement des variables  $x_i$  par deux valeurs  $x_i^L$  et  $x_i^U$  appartenant à  $\mathbb{R}$ . Ces butées définissent sur  $\mathbb{R}^n$  l'espace de recherche, que l'on notera  $V$ .
- Un critère à minimiser  $f$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Ce critère peut correspondre à différents objectifs (minimisation d'une grandeur - masse, volume, etc. - ou minimisation de l'erreur par rapport à une valeur fixe objectif - valeurs de champ, etc. -)

Le système se formalise ainsi sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ g_i(x) \leq 0 \quad \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ h_j(x) = 0 \quad \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket \\ x_k^L \leq x_k \leq x_k^U \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{array} \right. \quad 2-1$$

L'intersection entre le domaine où les contraintes sont respectées et le domaine de recherche, défini par les butés, sera appelé *domaine admissible*.

La solution du problème correspond alors au vecteur de variables  $\mathbf{x}$  qui minimise la fonction  $f$  sur le domaine admissible.

La conception d'un dispositif électromagnétique requiert cependant dans le cas général d'effectuer des choix entre différentes possibilités non représentables par des variables continues (choix de matériaux, etc.). On peut alors parler dans ce cas de problème de conception optimale. Ainsi, aux  $n_c$  variables continues peuvent s'ajouter :

- $n_b$  variables booléennes, regroupées en un vecteur  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{n_b})^T$  à valeurs dans l'ensemble  $B$ .
- $n_e$  variables entières, regroupées en un vecteur  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{n_e})^T$  à valeurs dans l'ensemble  $\mathbb{N}$ , et dont les valeurs sont comprises entre  $2n_e$  paramètres de butée ( $z_l^L \leq z_l \leq z_l^U \quad \forall l \in \{1, \dots, n_e\}$ ) à valeurs dans  $\bar{\mathbb{N}}$ .

Le problème se formule alors comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\substack{x \in \mathbb{R}^{n_c} \\ z \in \mathbb{N}^{n_e} \\ b \in B^{n_b}}} f(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{b}) \\ g_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{b}) \leq 0 \quad \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ h_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{b}) = 0 \quad \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket \\ x_k^L \leq x_k \leq x_k^U \quad \forall k \in \llbracket 1, n_c \rrbracket \\ z_l^L \leq z_l \leq z_l^U \quad \forall l \in \llbracket 1, n_e \rrbracket \end{array} \right. \quad 2-2$$

Les fonctions  $f$ ,  $g_i$  et  $h_j$  sont toujours à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , mais sont définies sur un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^{n_c} \cup \mathbb{N}^{n_e} \cup B^{n_b}$ .

Cette étape de formulation du problème revêt une importance primordiale. En effet, un même problème de conception peut être formalisé de différentes façons (modèles numériques ou analytiques, etc.). Une même formalisation du problème peut ensuite être traduite en

différents problèmes d'optimisation. Les égalités peuvent par exemple être remplacées par des doubles inégalités correspondant à des encadrements à un epsilon près ou encore, un terme entrant dans le calcul du critère à minimiser peut être intégré sous forme de contrainte. Ces formulations sont équivalentes du point de vue du système décrit, mais certaines conduiront à des résultats plus probants (meilleur taux de convergence, temps d'exécution moins élevés, etc.) en fonction de la méthode employée pour la résolution [Caf-11]. La première étape du design par optimisation consiste donc, en fonction du problème traité et des méthodes de résolution utilisées, à sélectionner la formulation la mieux adaptée.

### 2.1.2 Minimum local ou global

Une fois le problème d'optimisation formulé, l'algorithme de résolution entre en jeu afin d'obtenir la solution minimisant le critère d'optimisation sur le domaine admissible. On distingue alors deux types de minimum.

#### Minimum local

Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

Soit  $a \in D$

On dit que  $a$  est un minimum local de la fonction  $f$ , s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que :

$$\forall x \in V, f(a) \leq f(x)$$

#### Minimum global

Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

Soit  $a \in D$

On dit que  $a$  est le minimum ou minimum global de la fonction  $f$  si :

$$\forall x \in D, f(a) \leq f(x)$$

Le minimum global est ainsi le plus petit des minima locaux. La Figure 2-3 donne un exemple de fonction présentant des minima locaux multiples. La fonction est alors dite *multimodale*. Une fonction possédant un seul minimum est dite *unimodale*.

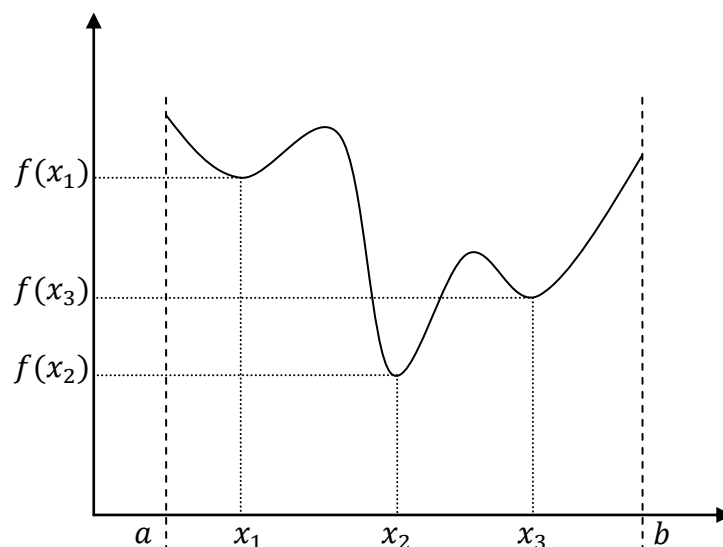


Figure 2-3: Exemple de fonction définie sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  présentant des minima locaux multiples  $x_i$ .  $x_2$  est le minimum global.

### 2.1.3 Condition nécessaire d'optimalité

La recherche d'un minimum peut dans le cas de fonctions continues se ramener à l'étude des *points stationnaires* de la fonction. On montre en effet aisément la propriété suivante:

Soit  $f$  une fonction de  $V$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathbf{x}^* \in V$ .

Si  $\mathbf{x}^*$  est un extremum local de  $f$  et si  $f$  est dérivable en  $\mathbf{x}^*$ , alors  $f'(\mathbf{x}^*) = 0$

Il s'agit cependant d'une condition nécessaire mais non suffisante et il convient de vérifier la nature du point stationnaire obtenu suite à une quelconque résolution (en vérifiant par exemple que la matrice hessienne de la fonction au point stationnaire est définie positive, ce qui est une condition nécessaire d'ordre 2 pour montrer que c'est un minimum local).

### 2.1.4 Optimisation sous contraintes

Chaque contrainte ajoutée à un problème d'optimisation conduit à diviser l'espace de définition du problème en deux sous-espaces (variétés), en fonction de l'admissibilité des solutions qu'ils regroupent. L'intersection de ces différents sous-espaces admissibles pour les contraintes prises séparément constitue le domaine admissible dans lequel la solution du problème de minimisation est à chercher. Deux approches peuvent être envisagées pour cela. Il est possible de choisir d'évoluer uniquement dans le domaine admissible, en introduisant par exemple la notion de direction admissible dans l'algorithme (algorithmes dits de « méthode admissible »). Une fois une première solution admissible trouvée, l'algorithme est contraint à n'évoluer que dans des directions respectant les contraintes (ce qui n'est en pratique pas toujours aisé). La deuxième approche consiste à autoriser des déplacements dans la totalité de l'espace de recherche, tout en orientant l'évolution vers les points respectant les contraintes (pénalisation externe, algorithme se basant sur le Lagrangien) [Cul-94].

#### 2.1.4.1 Méthodes admissibles

Les algorithmes de type « méthodes admissibles » sont nombreux, mais reposent tous sur la même idée : restreindre l'évolution de l'algorithme au domaine admissible. Cela implique, d'une part, l'obligation de trouver un point appartenant à ce domaine (non trivial dans le cas général) et, d'autre part, de savoir rester dans le domaine admissible à partir d'un point en faisant partie, ce qui là encore, peut constituer une difficulté. Ils présentent cependant l'avantage de donner à chaque itération, une nouvelle approximation réalisable de la solution.

L'algorithme du gradient projeté est un exemple de ce type de méthode. L'idée est d'utiliser un algorithme de descente (cf. 2.2.1.2.a) sur le problème d'optimisation, sans prendre en compte les contraintes, afin d'obtenir une direction de déplacement. Cette direction est ensuite projetée sur l'espace admissible pour obtenir la direction finale de déplacement (cf. Figure 2-4).

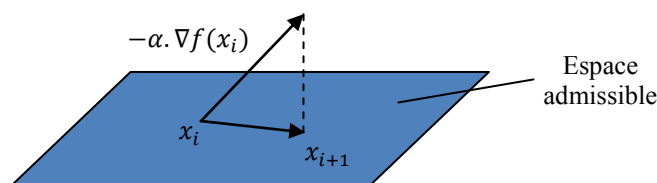


Figure 2-4: Représentation schématique de la progression d'un algorithme de gradient projeté.  $\alpha$  est un scalaire dont la grandeur est fixe ou adaptée à chaque itération

### 2.1.4.2 Pénalisation

Un deuxième type de méthode permettant de prendre en compte les contraintes consiste à pénaliser au niveau du critère les espaces non admissibles. Il est possible d'effectuer une pénalisation extérieure ou intérieure. Le premier cas consiste à ajouter artificiellement une pénalisation au critère, croissante avec la distance par rapport au domaine admissible. Il s'agit donc d'une pénalisation extérieure. Le deuxième, revient à interdire un déplacement en dehors des frontières du domaine admissible. Le coût est augmenté progressivement à mesure que l'on se rapproche d'une frontière du domaine, jusqu'à devenir infini au niveau de ces dernières.

Pour les deux types d'approche, on résout alors non plus un problème unique, mais une succession de problèmes en augmentant progressivement la valeur de pénalisation (ce qui permet de stabiliser la convergence des algorithmes)

### 2.1.4.3 Méthode basée sur le Lagrangien

Une méthode à la fois élégante et efficace pour traiter les contraintes dans un problème d'optimisation consiste à faire appel à la notion de *Lagrangien*. [All-07]

#### 2.1.4.3.a Définition du Lagrangien

- Cas des contraintes d'égalités

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \\ h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket \\ x_k^L \leq x_k \leq x_k^U \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{cases} \quad 2-3$$

où les  $h_i$  sont des fonctions dérivables de l'espace de recherche  $V$  dans  $\mathbb{R}$ .

Il est possible de définir le Lagrangien d'un tel problème [All-07, Cul-96] :

On appelle Lagrangien du problème 2-3 la fonction  $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$  définie dans  $V \times \mathbb{R}^q$  par :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^q \lambda_i h_i(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad 2-4$$

On appelle les nouvelles variables  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$  les *multiplicateurs de Lagrange* pour les contraintes  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), \dots, h_q(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ .

L'intérêt de la notion vient du théorème suivant, découlant de la condition nécessaire d'optimalité :

Soit  $\mathbf{x}^* \in V$  tel que  $\forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket, h_i(\mathbf{x}^*) = 0$ .

Si :

- $\mathbf{x}^*$  est un minimum local du problème 2-3
- les fonctions  $f$  et  $h_i \forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket$  sont continûment dérivables au voisinage de  $\mathbf{x}^*$
- les vecteurs  $\mathbf{h}'_i(\mathbf{x}^*)$  sont linéairement indépendants

Alors, il existe des multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_q^*) \in \mathbb{R}^q$  tels que :



$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^q \lambda_i^* \mathbf{h}'_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\lambda}^* \mathbf{h}'(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad 2-5$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad 2-6$$

Les relations 2-5 et 2-6 correspondent alors à un ensemble de  $n + q$  équations (non linéaires dans le cas général), suffisantes a priori pour retrouver les  $n$  inconnues primales (variables  $\mathbf{x}$ ) et les  $q$  variables auxiliaires (multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$ ). On constate d'autre part que la dérivée partielle par rapport à  $\boldsymbol{\lambda}$  correspond aux contraintes d'égalités du problème.

Le problème initial d'optimisation sous contraintes à  $n$  inconnues se ramène ainsi à un problème d'optimisation sans contrainte à  $n + q$  inconnues consistant à rechercher les points stationnaires du Lagrangien. Une fois les points stationnaires du Lagrangien identifiés, il faut ensuite vérifier qu'il s'agisse bien d'un minimum local en calculant par exemple une dérivée seconde.

#### - Cas des contraintes d'inégalités

Les contraintes d'inégalités peuvent être traitées d'une façon analogue. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \\ g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ x_k^L \leq x_k \leq x_k^U \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{cases} \quad 2-7$$

où les  $g_i$  sont des fonctions dérivables de l'espace de recherche  $V$  dans  $\mathbb{R}$ .

On définit de façon analogue le Lagrangien du problème 2-7 dans  $V \times \mathbb{R}^{+p}$  :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \mu_i g_i(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad 2-8$$

Les variables  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p)^3$  sont à valeurs réelles et **positives**.

Il est de plus utile d'introduire la notion de contraintes actives. Soit  $\mathbf{x} \in V$ , la contrainte  $g_i$  est dite active au point  $\mathbf{x}$  si  $g_i(\mathbf{x}) = 0$ . En effet, ce sont les contraintes susceptibles d'être violées suite à une petite variation autour du point  $\mathbf{x}$ . Si  $g_i(\mathbf{x}) < 0$ , il existe un voisinage de  $\mathbf{x}$  sur lequel la contrainte sera toujours respectée. Elle peut donc être ignorée pour des variations dans ce voisinage. Seules les contraintes actives à l'itération considérée seront ainsi prises en compte (comme des contraintes égalités), ce qui permet une simplification du problème.

Le théorème de stationnarité du Lagrangien prend alors la forme suivante <sup>4</sup> :

<sup>3</sup> Ces variables additionnelles peuvent être appelées multiplicateurs de Lagrange, mais dans le cas des contraintes d'inégalités on parle aussi de multiplicateurs de Karush, Kuhn et Tucker [Cul-94].

Soit  $\mathbf{x}^* \in V$  tel que  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, g_i(\mathbf{x}^*) \leq 0$ . Posons  $I$  l'ensemble des indices des contraintes actives.

Si :

- $\mathbf{x}^*$  est un minimum local du problème 2-7
- les fonctions  $f$  et  $g_i \forall i \in I$  sont continûment dérivables au voisinage de  $\mathbf{x}^*$
- les vecteurs  $\mathbf{g}'_i(\mathbf{x}^*) \forall i \in I$  sont linéairement indépendants

Alors, il existe des multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\mu}^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_p^*) \in \mathbb{R}^p$  tels que :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \mathbf{g}'_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\lambda}^* \mathbf{g}'(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad 2-9$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad 2-10$$

Et de plus si  $i \in I$  alors  $\lambda_i^* > 0$  et inversement si  $i \notin I$  alors  $\lambda_i^* = 0$ . Ce qui peut aussi s'écrire :  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \lambda_i^* g_i = 0$ .

Un problème d'optimisation sous contraintes d'inégalités pourra donc être résolu en formulant le Lagrangien du problème et en recherchant ses points stationnaires. Les formulations analogues pour contraintes d'égalités et d'inégalités permettent de plus de résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes mixtes (i.e. contraintes d'inégalité et d'égalité)

*Remarque* : il est possible de donner une interprétation à la valeur obtenue pour les multiplicateurs de Lagrange calculés en un point  $\mathbf{x}$ . Sous certaines hypothèses de régularité des fonctions  $f, g$  et  $h$  il est possible de montrer que les multiplicateurs de Lagrange sont un indicateur du « coût » de la contrainte associée. Il s'agit d'ailleurs d'une façon intuitive d'expliquer la nullité des paramètres de Lagrange associés aux contraintes inactives (Ces contraintes sont inactives car elles n'influencent pas sur la position de la solution à une itération donnée. Elles ne coutent donc rien pour être respectées)

#### 2.1.4.3.b Point selle et dualité

On peut préciser la nature des points stationnaires du Lagrangien à chercher. Introduisons tout d'abord la notion de point selle :

Soient  $A$  et  $B$  deux espaces de Banach. Soit  $f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  une application de  $A \times B$  dans  $\mathbb{R}$ . On dit que  $(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*) \in A \times B$  est un point selle de  $f$  si

$$\forall \mathbf{a} \in A, \quad \forall \mathbf{b} \in B \quad f(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}) \leq f(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*) \leq f(\mathbf{a}, \mathbf{b}^*)$$

L'intérêt de la notion prend tout son sens avec le théorème suivant :

Soit  $f$  une application continûment dérivable ( $C_1$ ) de  $V$  dans  $\mathbb{R}$  (critère à minimiser). Soit  $K$  une variété de  $V$  (espace admissible défini par un ensemble de  $p$  contraintes  $C_1$ ). On pose

---

<sup>4</sup> Des versions plus générales de ce théorème existent. En particulier, l'hypothèse d'indépendance linéaire de  $\mathbf{g}'(\mathbf{x}^*)$  est une condition suffisante, mais non nécessaire.

$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$  défini de  $V \times \mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}$ , le Lagrangien du problème de minimisation associé. Soit  $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in V \times \mathbb{R}^p$ . Si  $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$  est un point selle de  $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ , alors  $\mathbf{x}^* \in K$  et  $\mathbf{x}^*$  est le minimum global de  $f$  sur l'espace admissible  $K$ .

Une représentation schématique de la notion de point selle appliquée au Lagrangien est visible Figure 2-5.

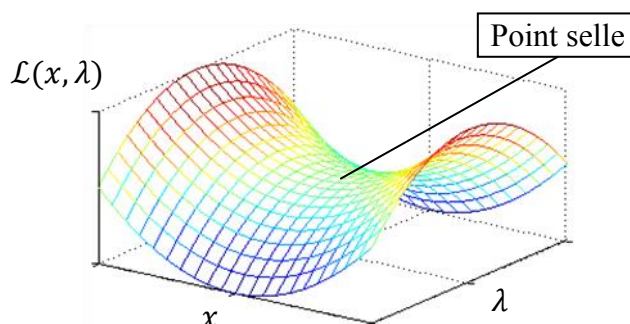


Figure 2-5: Représentation de la notion de point selle appliquée au Lagrangien. Cas d'un problème à une variable et une contrainte.

La recherche des points selle du Lagrangien d'un problème ne conduit pas à un problème d'optimisation sans contrainte, mais à deux problèmes différents. C'est la notion de dualité. En effet, on montre que si un point  $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in V \times \mathbb{R}^p$  est un point selle du Lagrangien  $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ , alors il est solution du problème :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \min_{\mathbf{x} \in V} \left( \sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^p} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \right) \quad 2-11$$

Ce problème est appelé *problème primal*. Il consiste à chercher, parmi tous les points de l'espace de recherche, celui minimisant la borne supérieure du Lagrangien pour l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange.

Mais  $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$  est aussi solution de :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \max_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^p} \left( \inf_{\mathbf{x} \in V} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \right) \quad 2-12$$

Il s'agit du *problème dual*, qui consiste à chercher, parmi l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange, ceux correspondant à la borne inférieure maximale du Lagrangien pour l'ensemble des points du domaine de recherche (il s'agit donc d'un problème de maximisation).

En fonction de la difficulté et de la nature de chacun des problèmes, il peut être avantageux de résoudre le problème dual à la place du problème primal ou inversement.

Ces différentes méthodes de traitement des contraintes permettent ainsi de résoudre des problèmes d'optimisation de critère (dans le cas d'un dispositif électromagnétique il peut s'agir de la masse, du volume, etc.), en respectant un certain nombre de conditions supplémentaires. On se rapproche ainsi de la résolution d'un problème inverse de conception optimale formulé sous la forme d'un problème d'optimisation. Les algorithmes de résolution de tels problèmes sont toutefois très nombreux et il est bon d'en connaître les caractéristiques générales afin de sélectionner le plus à même de résoudre le problème considéré. La partie

suivante dresse donc un inventaire des principales méthodes employées dans ce contexte et décrit brièvement leur principe de fonctionnement.

## 2.2 Principaux algorithmes de résolution

### 2.2.1.1 Cas linéaire

La résolution de problèmes d'optimisation linéaire, avec éventuellement des contraintes linéaires, fait l'objet d'un domaine d'étude à lui seul, appelé programmation linéaire. Le problème est posé sous la forme standard suivante [Cul-94, Cor-10]:

$$\begin{cases} \min_{x \geq 0 \in \mathbb{R}^n} c^T x \\ Ax - b = 0 \end{cases} \quad 2-13$$

Avec  $A$  de dimension  $m \times n$  une matrice de rang  $m$ , et  $b$  et  $c$  des vecteurs appartenant respectivement à  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$ .

Cette formulation standardisée permet d'unifier la totalité des approches en programmation linéaire et ne nuit pas à la généralité des résultats obtenus, même si les contraintes d'inégalité en sont absentes et les variables définies comme positives. En effet, les contraintes d'inégalité peuvent toujours être ramenées à des contraintes d'égalité en utilisant des variables d'écarts. La contrainte  $A_1 x - b_1 \leq 0$  se ramène à  $A_1 x - b_1 + y = 0$  avec  $y \geq 0$ . Les variables d'écart  $y$  sont alors ajoutées aux variables  $x$ . De la même façon, la restriction aux variables positives n'est pas handicapante, puisque s'il est nécessaire de considérer une variable prenant ses valeurs sur l'ensemble des réels, il est possible de la décomposer en deux variables positives :  $x = x^+ - x^-$  avec  $x^+ \geq 0$  et  $x^- \geq 0$ .

La programmation linéaire s'appuie notamment sur les deux résultats suivants :

- Les contraintes  $Ax - b = 0$  définissent un polytope (généralisation d'un polygone ou d'un polyèdre à l'ordre  $n$ ) sur l'espace de recherche. Si ce polytope est borné, alors le problème d'optimisation possède une solution et l'un des sommets au moins du polytope est solution. L'optimum obtenu est nécessairement un optimum global (il n'y a pas d'optimum local).

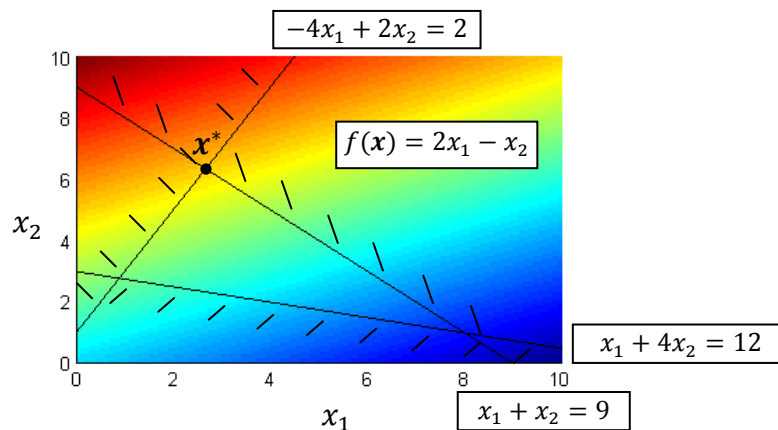


Figure 2-6: Exemple graphique de problème de programmation linéaire simple. L'optimum global est  $\mathbf{x}^*$ .

$$\text{Min } f(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_2 \text{ tel que } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 2 \end{cases}$$

- *Notion de base.* Les sommets d'un polytope de contrainte décrit par  $\mathbf{Ax} - \mathbf{b} = 0$  peuvent être caractérisés par la propriété suivante : un point  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  est un sommet si et seulement si les colonnes  $\mathbf{A}_i$  correspondant aux  $x_i$  non nuls sont linéairement indépendants.  $\mathbf{A}$  étant de rang  $m$ , cela implique que tout sommet du polytope possède au plus  $m$  composantes non nulles. Ces dernières sont appelées variables de base du sommet (les autres sont appelées variables hors-base)

Les algorithmes employés pour résoudre ces problèmes d'optimisation linéaire vont à présent être introduits. Le but n'est pas ici de constituer un inventaire exhaustif des méthodes employées et la présentation sera restreinte aux deux algorithmes principaux (du point de vue de la fréquence d'utilisation), à savoir les méthodes du simplexe et celles des points intérieurs.

#### 2.2.1.1.a Méthode du simplexe

L'algorithme du simplexe a été développé par G. B. Dantzig (qui le publia en 1947) et est actuellement l'un des plus fréquemment employés en programmation linéaire. Il s'appuie sur les résultats énoncés précédemment et sur le fait que le nombre de sommets d'un polytope issu de contraintes soit fini pour développer une méthode évaluant le critère à minimiser en différents sommets, afin d'aboutir au minimum global du problème en un nombre fini d'itérations.

Le principe de l'algorithme est le suivant [Cul-94, Cia-88]:

Un point de départ est choisi (plusieurs méthodes de construction systématique existent) parmi les sommets du polytope de contrainte (tout polytope non vide possède au moins un sommet). On applique une procédure de déplacement itérative de sommet en sommet permettant de toujours diminuer la valeur du critère : une variable hors base (nulle) dont l'augmentation permet l'amélioration du critère est choisie (si aucune variable hors base ne convient, le sommet est l'optimum du problème). On fixe la valeur de la variable ainsi choisie à la plus petite valeur positive annulant l'une des variables de base (si aucune ne s'annule, le problème n'est pas borné et ne possède donc pas de solution). Cette dernière devient donc une variable hors base. Cette opération correspond à un déplacement sur un sommet adjacent, en améliorant la valeur du critère. Le processus est ensuite itéré à partir de ce nouveau sommet (et donc ce nouveau jeu de variables de base).

La complexité théorique de l'algorithme du simplexe est exponentielle. On observe cependant expérimentalement une complexité bien plus faible et, *en moyenne*, l'algorithme converge en  $\mathcal{O}(mn)$  opérations [Cul-94].

#### 2.2.1.1.b Points intérieurs

Les principales alternatives à la méthode du simplexe sont les algorithmes dits de points intérieurs, développés par Khachiyan et Karmakar au début des années 1980 [Cul-94]. Elles sont nommées ainsi par opposition à la méthode du simplexe, car l'algorithme reste à l'intérieur du polytope défini par les contraintes et ne s'approche des frontières que lors de la convergence. Ils font appel à des fonctions et méthodes non linéaires (algorithme de descente), ainsi qu'à des fonctions de pénalisation pour la prise en compte des contraintes.

Des transformations successives sont appliquées au problème afin de l'exprimer sous forme équivalente (dans le sens où il possède des solutions identiques au problème initial). La méthode consiste ensuite à résoudre une suite de problèmes dont les solutions convergent vers la solution du problème initial.

Ces algorithmes sont de complexité polynomiale, mais nécessitent cependant un travail relativement important de reformulation du problème avant de pouvoir être appliqués. En pratique, ils sont de plus généralement moins efficaces que la méthode du simplexe.

#### 2.2.1.1.c Extension au cas non linéaire

Les algorithmes décrits ici ont vocation à être employés sur des problèmes de programmation linéaire. Cependant, leur efficacité et leur capacité à traiter des problèmes de très grandes dimensions amène bien souvent à tenter de reformuler d'éventuels problèmes n'entrant pas dans ce domaine de définition (fonction quadratique, bilinéaire ou, plus généralement, non linéaire) sous la forme d'un ou plusieurs problèmes de programmation linéaire. Les méthodes pour opérer ces transformations sont extrêmement nombreuses et variées et dépendent fortement des propriétés des fonctions considérées (convexité, etc.) [She-99, Hu-10].

Remarquons enfin que si l'efficacité de ces algorithmes pour la résolution d'un problème linéaire incite à reformuler les problèmes plus complexes de façon à pouvoir les utiliser, l'inverse est aussi vrai. Des versions de l'algorithme du simplexe existent ainsi pour des fonctions non linéaires quelconques, mais la méthode perd un grand nombre des propriétés de convergence vers l'optimum global qui font son intérêt.

#### 2.2.1.2 Cas non linéaire

On rappelle la forme générale du problème d'optimisation considéré :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) & \\ g_i(x) \leq 0 & \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ h_j(x) = 0 & \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket \\ x_k^L \leq x_k \leq x_k^U & \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{array} \right. \quad 2-14$$

Les contraintes (égalités, inégalités et butées) définissent un sous ensemble de  $\mathbb{R}^n$  correspondant au domaine admissible que l'on notera  $V_{ad}$ .

Des hypothèses de convexité sur  $f$  peuvent de plus être invoquées de façon à garantir l'existence et l'unicité d'un minimum global. Cette hypothèse est cependant rarement vérifiée dans le cas général et nous nous abstenons donc de la formuler ici.

De nombreux algorithmes existent afin de tenter de résoudre ce type de problème. Trois grandes classes de méthode seront abordées dans cette présentation : les algorithmes de descente, les méthodes méta-heuristiques, ainsi que les méthodes d'optimisation globales déterministes.

#### 2.2.1.2.a Algorithmes de descente

Les algorithmes de descente se basent sur l'évaluation des dérivées du critère afin de déterminer une direction de descente. Ils nécessitent donc d'une manière générale, que la fonction considérée soit, au minimum, continûment dérivable sur l'espace de recherche. Deux sortes d'algorithmes seront examinés, les méthodes de gradient et de Newton [Cul-94, All-07].

### Méthode du gradient

Les méthodes du gradient suivent toutes le même schéma : on construit une suite récursive de points, en cherchant à partir du point considéré à l'itération  $k$  une direction et une norme pour le déplacement. On construit donc :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k, \quad 2-15$$

avec  $\alpha_k \in \mathbb{R}$  le pas du déplacement et  $\mathbf{d}_k \in \mathbb{R}^n$  un vecteur direction unitaire. Les algorithmes diffèrent les uns des autres en fonction de la méthode employée pour définir ces deux valeurs, mais se basent tous sur le même constat, à savoir que l'opposé de  $\Delta \mathbf{f}$  est une direction de descente (la meilleure, sur un voisinage suffisamment petit).

Citons notamment les algorithmes de gradient suivants :

- Méthode du gradient à pas fixe. Le plus simple des algorithmes de gradient, mais aussi le moins efficace (dans le sens de la convergence et du nombre d'itérations nécessaire). Il consiste à choisir comme direction de descente  $\mathbf{d}_k = -\frac{\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)}{\|\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\|}$  et à définir un pas fixe tout au long de l'algorithme  $\alpha_k = \alpha$
- Méthode du gradient à pas optimal. Cet algorithme est une amélioration du précédent. Il utilise de façon identique  $\mathbf{d}_k = -\frac{\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)}{\|\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\|}$  comme direction de descente, mais le paramètre  $\alpha_k$  est choisi tel que :

$$f(\mathbf{x}_{k+1}) = \min_{\alpha_k \in \mathbb{R}^{+*}} f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k) \quad 2-16$$

La méthode nécessite donc à chaque itération la résolution d'un problème d'optimisation additionnel. Ce problème de recherche linéaire est cependant simple et peu coûteux à résoudre (à condition de se contenter d'une approximation du  $\alpha_k$  optimal, à l'aide notamment de la méthode d'Armijo[Cul-94]) et la convergence de l'algorithme par rapport à la version à pas fixe est grandement améliorée.

- Méthode du gradient conjugué. Il s'agit d'une méthode de descente dont la direction de descente est calculée à la fois à l'aide du gradient et des directions de descente précédentes. Les directions successives sont en effet choisies conjuguées les unes par rapport aux autres, ce qui implique notamment qu'elles sont linéairement indépendantes les unes des autres. On construit ainsi itérativement une base dans laquelle l'expression du minimum pour une approximation quadratique de  $f(\mathbf{x}_k)$  est connue. Le choix de  $\alpha_k$  est donc effectué de façon à évaluer sa coordonnée selon  $\mathbf{d}_k$ . La méthode donne de meilleurs résultats que la méthode du gradient à pas optimal, en particulier lorsque le Hessien de la fonction est mal conditionné.

### Méthode de Newton

Rappelons tout d'abord le principe de la méthode de Newton-Raphson sur un cas monodimensionnel :

Soit  $g$  une application dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . L'idée est d'approximer  $g$  au point considéré  $x_k$  par sa dérivée. On en déduit une valeur de racine qui deviendra  $x_{k+1}$ . Le processus est

itéré jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit atteint ( $g(x_k) \leq \varepsilon$ ). Le schéma donné en Figure 2-7 résume le principe de la méthode :

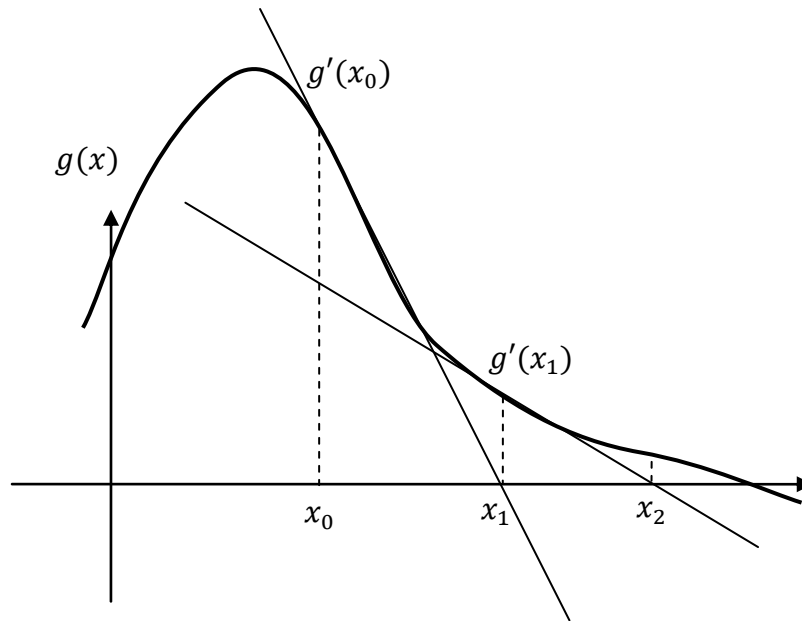


Figure 2-7 : Schéma descriptif du principe de la méthode de Newton-Raphson pour trouver une racine d'une fonction dérivable.

Cette méthode présente l'avantage d'une convergence quadratique locale, ce qui la rend très efficace dès lors que l'on est en capacité de choisir un point de départ dans la zone d'attraction d'une racine.

L'idée de la méthode de Newton appliquée à la résolution de problème d'optimisation non linéaire consiste donc à appliquer une méthode de Newton-Raphson multidimensionnelle à la recherche des racines de  $f'$  (recherche de points stationnaires de  $f$ ). La méthode faisant appel à la dérivée de la fonction considérée, il est donc nécessaire de calculer la matrice hessienne de  $f$  (et par conséquent  $f$  doit être deux fois dérivable sur l'espace de recherche).

Le développement de Taylor au premier ordre de  $f'$  au voisinage de  $x_0$  donne :

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) \quad 2-17$$

On cherche à obtenir  $f'(x) = \mathbf{0}$  à l'aide de cette approximation, donc on déduit la valeur de  $x$  :

$$x = x_0 - f''(x_0)^{-1}f'(x_0) \quad 2-18$$

Remarque : La direction obtenue n'est pas nécessairement une direction de descente, puisqu'un point stationnaire peut aussi être un maximum ou un point selle. Vérifier si la matrice hessienne est définie positive permet de confirmer qu'il s'agit bien d'une direction de descente.

Cette méthode fait appel au calcul du Hessien, ce qui peut s'avérer coûteux (voire impossible) dans le cas de problème de grande dimension notamment. Dans ce cas, on lui préfère généralement la méthode du gradient conjugué ou la méthode de quasi-Newton.



### *Méthode de quasi-Newton*

La méthode de quasi-Newton est identique à la méthode de Newton, sauf que le Hessien de la fonction n'est pas calculé (tout au moins à chaque itération). En lieu et place est utilisée une approximation de ce dernier, construite itérativement [Cul-94].

Différentes méthodes de mise à jour de l'approximation du Hessien à chaque itération existent, mais leur présentation détaillée ne sera pas abordée ici.

#### *2.2.1.2.b Méthodes métaheuristiques*

Les méthodes précédentes nécessitent au minimum de travailler sur des fonctions dérivables, voire deux fois dérivables et de pouvoir calculer cette dérivée. Ce cas de figure est cependant loin d'être la règle générale et le simple fait d'introduire des variables entières interdit, par exemple, la définition d'un gradient. De plus, ces algorithmes de descente ont une convergence locale. Sous certaines hypothèses de convexité, il est possible de garantir leur convergence vers un minimum global, mais en dehors de ces cas finalement assez restreints, il est impossible de garantir que l'optimum obtenu soit global, ni même que l'algorithme converge.

Les méthodes métaheuristiques (heuristiques générales pouvant être adaptées à différents types de problème) tentent de contourner ces deux problèmes, en se basant généralement sur une algorithmique stochastique afin d'élargir au maximum le domaine de recherche de l'optimum. Elles peuvent être très simples (multistart) ou s'appuyer sur des méthodes très élaborées (algorithmes évolutionnaires). Elles ne nécessitent généralement pas de calcul de gradient et permettent de couvrir une large zone du domaine de recherche.<sup>5</sup>

#### *Multistart*

La méthode du multistart fait le lien entre les méthodes de descente vues dans la section précédente et les méthodes métaheuristiques. Elle consiste simplement à lancer successivement une méthode de descente quelconque à partir de différents points de départ, déterminés de façon plus ou moins aléatoire, dans l'espoir de couvrir une zone plus large de l'espace de recherche et d'avoir ainsi l'un des points de départ qui se trouve dans la zone d'attraction de l'optimum global.

Le principe du multistart est très simple à mettre en œuvre et peut, dans le cas de fonction comportant un nombre important de minima locaux, sensiblement améliorer les résultats obtenus avec tout type de méthode (y compris d'autres métaheuristiques).

#### *Recuit simulé*

La méthode du recuit simulé, comme de nombreuses autres méthodes métaheuristiques (algorithmes évolutionnaires, d'essaim particulaire) est inspiré de l'observation de phénomènes naturels ou physiques (en l'occurrence dans le domaine de la métallurgie). Celui-

---

<sup>5</sup> Certaines méthodes méta-heuristiques sont parfois, en raison de cette dernière caractéristique, abusivement qualifiées de méthodes d'optimisation globale. Cependant, aucune ne garantit l'obtention du minimum global, à la différence notamment des algorithmes d'optimisation globaux déterministes.

ci est basé sur un modèle de comportement des atomes d'un métal lorsqu'ils sont soumis à une procédure de recuit (forte élévation de la température suivi d'un lent refroidissement). Ce procédé permet d'atteindre des niveaux d'énergies plus bas pour le métal et ainsi d'améliorer certaines de ses propriétés. Le modèle du processus physique a ensuite été adapté à l'optimisation, en faisant une analogie entre minimisation de l'énergie des atomes et minimisation du critère [Kir-83].

Pour cela, une température est définie et évolue au cours de l'algorithme en parallèle à la valeur du critère. La température est initialisée à une valeur arbitraire (choisie par l'utilisateur en fonction de la loi de décroissance utilisée). Un point de départ est défini parmi les points de l'espace admissible. Une perturbation est opérée sur cette solution, occasionnant ainsi une évolution du critère à minimiser. Si le critère est diminué, la perturbation est intégrée et le point ainsi obtenu devient le nouveau point considéré. Si le critère est augmenté, le nouveau point peut encore être retenu, avec une probabilité :

$$p = e^{\frac{-\Delta f}{T}} \quad 2-19$$

avec  $\Delta f = f(x_{k+1}) - f(x_k)$

Cette heuristique permet d'accepter des points augmentant le critère avec une probabilité décroissante tout au long de l'algorithme (la température suivant toujours une loi décroissante, soit par palier, soit continue). L'algorithme s'arrête lorsqu'un critère de convergence est validé ou si la température atteint un certain seuil.

Cet algorithme met en lumière l'un des inconvénients partagé par beaucoup de méthodes métaheuristiques, à savoir le nombre important de paramètres (ici température initiale, loi de décroissance, critère d'arrêt) qui doivent être fixés de manière empirique. Cet aspect est encore plus critique pour les algorithmes évolutionnaires présentés ci-dessous.

### *Evolutionnaires*

Les algorithmes évolutionnaires sont inspirés de la théorie de l'évolution de Darwin pour les populations biologiques. Ils se basent sur une version simplifiée de cette théorie, en insistant principalement sur deux caractéristiques de cette dernière : la survie du plus adapté et la variation non dirigée (aucune notion de gradient, etc.) de l'algorithme.

Le vocabulaire est lui aussi adapté dans ce contexte.

- Les solutions considérés sont appelées individus,
- Un groupe de solutions forme une population,
- Le critère à optimiser est appelé fonction d'adaptation,
- Chaque itération de la boucle principale correspond à une génération. Le temps est ainsi représenté par l'évolution de l'algorithme et est discrétisé.

L'idée est de représenter l'ensemble des individus de l'espace de recherche, de la façon la plus homogène possible, à l'aide d'un vecteur (génotype) de variables binaires ou réelles. Cette population ainsi définie est soumise à la pression de l'environnement (avantage aux individus ayant une valeur de fonction d'adaptation faible) et évolue de façon à s'adapter au mieux (i.e. diminuer la valeur de la fonction d'adaptation). Toutefois, de la même façon que dans la théorie de l'évolution, l'individu ne cherche pas à évoluer dans une certaine direction, la diminution du critère ne s'appuie pas sur un choix de direction optimale (calcul de gradient).

L'algorithme se base sur différentes opérations, effectuées successivement :

- les opérations de sélection qui déterminent qui parmi la population est susceptible de se reproduire
- les opérations de variation qui définissent la façon dont les nouveaux individus (enfants) seront générés à partir des parents. On y distingue les opérateurs de croisement, qui permettent un brassage du génotype des parents et les opérateurs de mutation, qui introduisent des modifications aléatoires dans le génotype.
- Les opérations de remplacement, qui définissent, à partir des parents et enfant d'une génération, la population de la génération suivante.

L'algorithme s'arrête lorsque la fonction d'adaptation a atteint une valeur souhaitée, ou lorsqu'il n'y a plus d'amélioration pendant un certain nombre de génération.

La Figure 2-8 schématise le déroulement d'un algorithme évolutionnaire.

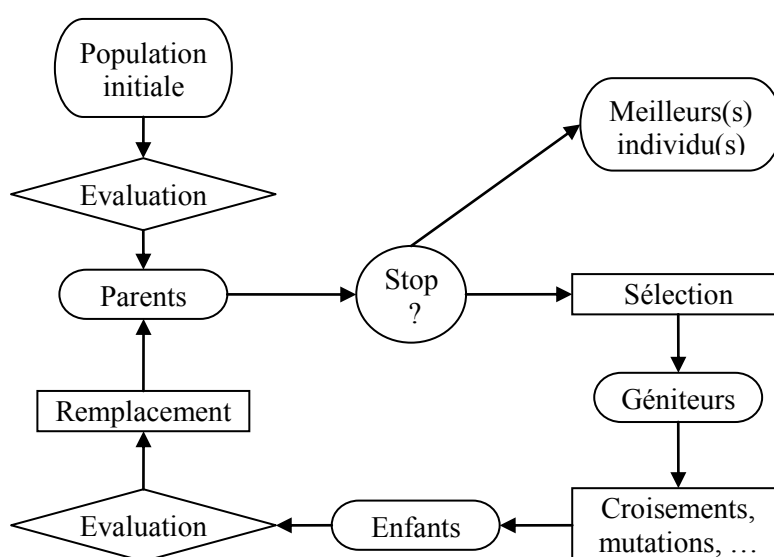


Figure 2-8: Schéma de principe d'un algorithme évolutionnaire [All-07]

La notion de diversité génétique est importante : elle correspond à la variété des génotypes présents dans la population pour une génération donnée. Lorsque cette diversité est très faible, les variations d'une génération à l'autre deviennent quasi nulles et l'algorithme s'arrête naturellement. Si cette diminution de la diversité intervient trop tôt dans le déroulement de l'algorithme, l'espace de recherche n'aura été que faiblement exploré et il est possible que le minimum obtenu ne soit qu'un minimum local. Afin d'éviter ces situations, il est important de bien équilibrer l'impact des opérations d'exploration (opérations conduisant à la découverte de nouvelles zones de l'espace de recherche, telles que les mutations ou le choix de la population initiale) et d'exploitation (opération permettant au voisinage d'un minimum d'évoluer vers ce dernier. Les opérations de sélection, de croisement et de remplacement en font partie).

De très nombreuses méthodes différentes ont été développées pour chacune de ces opérations, mais leur description en détail n'est pas l'objet de cette présentation succincte des algorithmes évolutionnaires.

La force de ce type d'algorithme est d'abord leur capacité à être appliqué à un très grand nombre de problèmes d'optimisation ainsi que de pouvoir obtenir des solutions là où aucune méthode déterministe n'a encore permis d'en trouver. Un deuxième avantage, qui prend tout

son sens dans le contexte de la conception optimale de dispositif, réside dans le nombre potentiellement important de solutions fournies par l'algorithme. Dans le cas, par exemple, d'une optimisation multicritère, un algorithme de descente donnera une seule solution à chaque lancement de l'algorithme. Il sera nécessaire de relancer l'algorithme à partir de points de départ différents ou de modifier légèrement le critère de façon à favoriser certains minima locaux par rapport à d'autre. Dans le cas d'une optimisation multicritère, un algorithme évolutionnaire donnera quant à lui plusieurs solutions du front de Pareto<sup>6</sup>. Dans le cadre d'un problème de conception optimale, ces différentes alternatives sont un atout pour le concepteur, qui peut choisir l'une des solutions en ayant les éléments pour juger de la prévalence de l'une d'entre elles sur des particularités qui n'entrent pas nécessairement en compte dans le critère d'optimisation.

Les inconvénients de ce type d'algorithme sont le pendant de leurs qualités. Un balayage large de l'espace de recherche implique un nombre important d'évaluations de la fonction d'optimisation, ce qui peut s'avérer rapidement fortement chronophage lorsque cette dernière implique des calculs de grande dimension (calculs par éléments finis, etc.). De plus, comme toute méthode stochastique, il y a une certaine incertitude quant au statut de l'optimum trouvé. Et il est en particulier impossible d'affirmer qu'il s'agit d'un optimum global. Deux exécutions successives de l'algorithme à partir de paramètres identiques peuvent ainsi donner deux solutions différentes.

De nombreuses autres méthodes métaheuristiques ont été développées et sont activement utilisées par la communauté scientifique. Citons notamment la recherche tabou, qui consiste à interdire à l'algorithme un retour en arrière en gardant en mémoire les derniers déplacements effectués, ou encore l'optimisation par essaim particulière, basée sur des simulations de déplacements de groupe d'oiseaux, où chaque individu se déplace en fonction de ses propres critères, tout en tenant compte du déplacement des individus proches.

#### 2.2.1.2.c Algorithmes d'optimisation globale

Les algorithmes d'optimisation globale seront présentés au travers des méthodes appelées Branch and Bound par intervalle (ou en français, séparation et évaluation) qui représentent une catégorie d'algorithmes à la fois efficaces et prometteurs de cette branche des méthodes d'optimisation [Mes-06].

L'idée directrice de ces algorithmes est la subdivision de l'espace de recherche en sous-ensemble  $Z_i \subseteq V$ , et l'évaluation des propriétés de ces sous-ensembles afin d'éliminer ceux ne contenant pas l'optimum global. Plus précisément, l'algorithme se déroule comme suit (on note  $\tilde{x}$  la solution courante de l'algorithme qui correspond à la meilleure évaluation  $f(\tilde{x})$  en un point respectant les contraintes depuis l'initialisation de l'algorithme):

- L'espace de recherche est divisé en sous ensembles (pavé)  $Z_i \subseteq V$  correspondant à autant de sous-problèmes à résoudre. Ces pavés sont regroupés dans une liste  $L$ .
- Pour chaque pavé  $Z_i$ , on vérifie :
  - o s'il existe une contrainte non respectée sur l'ensemble du pavé

---

<sup>6</sup> La notion de front de Pareto intervient dans un problème d'optimisation multicritères et correspond à l'ensemble des points (appelés optimum de Pareto ou Pareto-optimum) pour lesquels une amélioration de l'une des composantes du critère impliquerait nécessairement une détérioration d'une autre de ses composantes. Il est alors impossible de trancher entre les différents Pareto-optima avec les seules informations liées au critère.

- si la borne inférieure de  $f$  sur le pavé, calculée au moyen de l'arithmétique d'intervalle, est supérieure à  $f(\tilde{x})$ .

Si l'une de ces conditions est vérifiée, il est prouvé que l'optimum global ne se trouve pas dans le pavé considéré et celui-ci est éliminé de  $L$ . Si aucune de ces conditions n'est vérifiée, il est impossible de trancher et le pavé  $Z_i$  est divisé en sous-ensembles qui sont ajoutés à  $L$ .

- L'algorithme s'arrête lorsque la liste  $L$  ne contient plus aucun pavé (le problème ne possède alors aucune solution réalisable) ou lorsque les pavés restant dans la liste  $L$  permettent d'encadrer la valeur de l'optimum global  $f(x^*)$  avec une précision inférieure à une valeur  $\varepsilon$  fixée par l'utilisateur.

Les points clés de l'algorithme sont la vérification des contraintes et le calcul d'une borne inférieure (minorant) pour chacun des pavés considérés. La méthode se base pour cela sur l'arithmétique d'intervalle, popularisée par Moore en 1966 [Moo-66]. Le but initial de cet arithmétique était l'encadrement des erreurs d'arrondis pour les calculs effectués en nombres flottants, mais les principes généraux sur lesquels elle s'appuie peuvent être appliqués afin d'obtenir des valeurs de minorants pour le problème abordé ici.

L'idée est de ne plus s'intéresser aux variables sous la forme d'un nombre réel, mais de considérer l'intervalle (le plus serré possible) encadrant la valeur de cette variable.

On définit alors les opérations de cette arithmétique particulière comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} [a, b] + [c, d] = [a + c, b + d] \\ [a, b] - [c, d] = [a - d, b - c] \\ [a, b] \times [c, d] = [\min\{a \times c, a \times d, b \times c, b \times d\}, \max\{a \times c, a \times d, b \times c, b \times d\}] \\ [a, b] \div [c, d] = [a, b] \times \left[\frac{1}{d}, \frac{1}{c}\right] \text{ si } 0 \notin [c, d] \end{array} \right. \quad 2-20$$

Les propriétés de l'arithmétique classique ne sont pas toutes conservées, du fait notamment des opérations d'addition et de soustraction qui ne sont pas l'inverse l'une de l'autre, de même que la multiplication et la division. On a cependant la propriété fondamentale suivante, qui servira notamment à calculer les valeurs de minorants: les opérations de l'arithmétique d'intervalle conservent l'inclusion. Soit  $A_1, A_2, B_1, B_2$  quatre intervalles de valeurs réelles. Si  $A_1 \subseteq B_1$  et  $A_2 \subseteq B_2$  alors  $A_1 * A_2 \subseteq B_1 * B_2$ , avec  $*$  l'un des 4 opérateurs définis en 2-20.

De nombreuses autres méthodes ont de plus été développées afin de trouver de meilleurs minorants que ceux fournis directement par l'arithmétique d'intervalle dans le cas de fonctions non linéaires (polynomiales, trigonométriques, etc.) et des procédures d'accélération ont été développées [Mes-06, Nin-10], ce qui a permis d'aboutir à une méthode pouvant être appliquée à un grand nombre de formulations analytiques et donnant l'optimum global d'un problème complexe en un temps acceptable [Mes-98, Fit-04, Fon-07].

Les principaux types d'algorithmes ayant été présentés, leur application dans le cadre de la conception optimale de dispositif électromagnétique peut à présent être détaillée. Commençons par répertorier les possibilités s'offrant au concepteur souhaitant appliquer une procédure d'optimisation.

## **2.3      Positionnement du problème**

Le but de cette étude est de fournir des pistes permettant d'aboutir à un outil de conception de circuits magnétiques optimaux respectant un ensemble de contraintes et capable de générer une cartographie magnétique donnée.

La résolution d'un tel problème inverse de conception donne lieu à une très grande multiplicité d'approches. En effet, chaque étape du processus nécessite d'effectuer un choix quant à l'approche employée et les combinaisons possibles sont donc innombrables. Citons notamment les points suivants :

- Hypothèses retenues pour la description du problème : toute représentation d'un système physique est imparfaite. La première étape consiste donc à définir quelles seront les hypothèses utilisées pour définir le système. Dans le cas de la conception d'un circuit magnétique, cela peut, par exemple, être le choix de la représentation des matériaux ferromagnétiques (perméabilité fixe ou définition d'une courbe  $B(H)$ , prise en compte de l'influence de la température sur les propriétés magnétiques, etc.).
- Choix de la mise en forme du problème en vue de sa résolution : le problème peut éventuellement être retranscrit dans une base convenant mieux pour la résolution, par analogie ou simplification (les sources électromagnétiques peuvent ainsi être représentées de différentes manières, plus ou moins équivalentes. En magnétostatique, une collection de conducteurs parcourus par différents courants peut ainsi être remplacée par une distribution continue de courant dans un volume ou encore comme un ensemble de dipôles magnétiques)
- Choix de la méthode employée pour la mise en équation du problème. Certains choix sont imposés par ceux réalisés aux étapes précédentes, mais d'une manière générale, une grande latitude est disponible à ce niveau. Le problème peut ainsi être modélisé de façon purement analytique (calcul du champ produit par une distribution filaire dans l'air par l'équation de Biot et Savart) ou numériquement, après discrétisation (méthode des différences finies, des éléments finis, des moments, etc.).
- Formulation du problème d'optimisation. Comme vu précédemment, les possibilités à cette étape sont innombrables : formulation du critère à minimiser, méthode de traitement des contraintes, etc.
- Et enfin, choix de l'algorithme d'optimisation (qui doit être réalisé en adéquation avec les choix effectués précédemment). Là encore, les méthodes à disposition sont très nombreuses.

Même si certains choix préliminaires sont restrictifs pour la suite (la prise en compte de matériaux ferromagnétiques non linéaires oblige par exemple à envisager une méthode de résolution par discrétisation de l'espace), les possibilités de combinaisons qui découlent de ces différentes étapes sont quasiment infinies.

Chaque choix a cependant des répercussions sur l'ensemble de la résolution et on constate ainsi l'apparition d'un certain nombre de directions privilégiées dans la littérature du domaine. La partie suivante s'attache à décrire les principales méthodes de conception optimales de dispositifs électromagnétiques ayant été employées avec succès jusqu'ici.

## **2.4 Etat de l'art de la conception optimale de dispositifs électromagnétiques**

Les méthodes de conception optimales présentées seront classées en fonction de la nature de la paramétrisation du problème et détaillées par ordre croissant de complexité. Le design par optimisation paramétrique sera donc vu en premier (seules quelques grandeurs caractéristiques du dispositif sont choisies comme variables du problème d'optimisation), puis le design par optimisation géométrique sera présenté (la structure générale est fixée, mais certaines frontières sont libres et leurs formes sont contrôlées par les variables du problème) et enfin l'optimisation topologique sera abordée (aucune structure n'est prédéfinie et le problème d'optimisation consiste à déterminer la meilleure répartition de matière - sources, matériaux - conduisant à une minimisation du critère).

### **2.4.1.1 Optimisation paramétrique**

Le principe du design par optimisation paramétrique consiste à définir une structure paramétrée dont certaines dimensions seront les variables du problème d'optimisation. Il s'agit donc d'une vision macroscopique du problème et ce dernier peut être modélisé suivant deux approches distinctes, la modélisation analytique ou numérique.

#### *2.4.1.1.a Modélisation analytique*

Lorsque des modèles analytiques du dispositif étudié sont disponibles (dans le cadre des dispositifs électromagnétiques, cela peut concerner par exemple des dispositifs magnétostatiques simples présentant peu de fuites magnétiques ou des systèmes plus complexes comme des machines), il est possible de s'appuyer sur ces derniers pour optimiser la structure.

Les premières méthodes de conception optimale développées se sont basées sur cette approche, puisqu'elle conduit à des systèmes de dimensions relativement réduites et dont les gradients sont généralement facilement calculables. Ils ont de ce fait pu être couplés à des algorithmes de type descente. [Ram-73] réalise ainsi une comparaison des résultats obtenus sur le design optimal d'une machine asynchrone pour différents algorithmes de descente d'ordre 0 (pas de calcul de gradient) et 1 (calcul des dérivées premières). [Bou-90] applique un algorithme de descente d'ordre 0 s'apparentant à une méthode de relaxation simplifiée pour le design d'une machine synchrone à aimants permanents.

Les modèles employés restent cependant relativement simples (en particulier, le nombre de variables considérées est restreint) de façon à simplifier au maximum le problème d'optimisation associé. Même ainsi, le critère à optimiser est généralement non convexe et possède un nombre relativement important de minima locaux (remarquons par exemple qu'aucun des algorithmes employés dans [Ram-73] ne convergent sur le même minimum local). Afin de pallier cette difficulté, les approches permettant une meilleure exploration du domaine de recherche ont été introduites (avec notamment des méthodes de conception optimale de machine basées sur les algorithmes génétiques [Bia-98] ou l'utilisation d'algorithme d'optimisation globale par intervalles de type Branch and Bound déterministe [Mes-98]. L'efficacité de ces méthodes a permis d'étendre leur plage d'application. Les algorithmes d'optimisation globale ont été améliorés de façon à pouvoir prendre en compte des variables entières, de catégories, etc. ce qui permet notamment de ne plus fixer la structure initiale et de laisser l'algorithme effectuer le choix de la structure la plus adaptée

(tout en restant dans un nombre fini et surtout prédéfini de possibilités) [Font-07]. Les algorithmes génétiques ont quant à eux été employés dans des approches systèmes pour l'optimisation en parallèle de la structure d'une machine et de son alimentation [Dea-11].

#### *2.4.1.1.b Modélisation numérique*

En l'absence de modèle analytique décrivant avec suffisamment de précision le comportement de la structure considérée, il est possible d'employer des méthodes de résolution numérique par discrétisation de l'espace (résolution par différences finies, éléments finis).

Ces méthodes de résolution permettent souvent d'obtenir des résultats beaucoup plus proches de la réalité, mais dans le cadre de la conception optimale, elles présentent un inconvénient important. Les grandeurs calculées (potentiel vecteur en magnétostatique, déplacement en mécanique, etc.) sont obtenues par résolution d'un système linéaire ou non linéaire découlant de la discrétisation des équations aux dérivées partielles associées à la physique du problème. Cela implique notamment qu'on ne dispose généralement pas de formulation explicite reliant les variables du problème à ces grandeurs calculées et, a fortiori, avec le critère à optimiser. Cela induit donc, d'une part, un temps potentiellement important pour l'évaluation de la fonction, mais surtout, cela interdit le calcul analytique d'une dérivée de la fonction à minimiser.

Pour des problèmes de faibles dimensions, il est possible d'envisager des algorithmes de descente d'ordre 0. [Hor-01] utilise ainsi une méthode de Rosenbrock pour l'optimisation d'un problème à 9 variables et un exemple de méthode basée sur un algorithme de type MADS, Mesh Adaptive Direct Search, est présentée et employée au chapitre 3.1. Le risque est toutefois d'aboutir à des minima locaux et il n'est pas envisageable d'étendre ce type de méthode à des problèmes de grande taille.

Dans ce cas, il est possible d'employer des algorithmes métaheuristiques. Comme souvent, les algorithmes génétiques sont les plus souvent utilisés (optimisation du positionnement des aimants permanents pour minimiser le couple de détente d'une machine synchrone [Luk-04], ou encore optimisation du poids d'une machine disque à aimants permanents [Cve-09]), mais d'autres méthodes peuvent s'avérer tout aussi efficaces. [Has-11] utilise ainsi un algorithme de type essaim particulaire pour l'optimisation d'une machine à flux transverse, [Ouy-06] s'appuie sur une combinaison d'algorithme évolutionnaire et de méthodes de Monte Carlo pour le design optimal d'une machine à aimants permanents.

Les méthodes métaheuristiques réclament généralement un nombre important d'évaluations de la fonction à minimiser et donc, un nombre élevé de simulation par éléments finis. Certains auteurs proposent donc, pour contourner ce problème et maintenir des temps de calcul acceptables, des méthodes d'accélération de la résolution par éléments finis en parallèle de leur procédure d'optimisation [Fon-07].

Les exemples présents dans la littérature d'études de conception optimale paramétrique à l'aide de méthodes métaheuristique et de résolution numérique sont nombreux et une variété importante d'approches a pu être testée et validée à cette occasion.

Enfin, remarquons que les deux types d'approches, analytique et numérique, peuvent être avantageusement couplés de façon à profiter des attraits de chacune d'entre elles (rapidité et formulation explicite de la modélisation analytique, précision des résultats obtenus par la modélisation numérique). Citons notamment les travaux effectués dans le domaine de l'optimisation globale déterministe effectués sur le sujet appliqués au dimensionnement des machines électriques [Mes-98, Fit-04, Fon-07].



### Calcul de dérivées dans le cadre d'une modélisation numérique

Un des problèmes majeurs liés à l'utilisation de simulations numériques au cours des algorithmes d'optimisation tient au fait qu'il est généralement impossible d'obtenir une formulation explicite reliant le critère aux variables du problème et donc d'obtenir par un calcul direct et analytique les valeurs de dérivées de cette fonction. Si le calcul direct est impossible, il existe cependant d'autres moyens d'obtenir les valeurs de dérivées premières. Les algorithmes de descente d'ordre 1, voire supérieur peuvent dans ce cas être avantageusement exploités.

La méthode la plus simple consiste simplement à calculer une approximation de la dérivée partielle pour chaque variable, en effectuant une petite variation sur chacune d'entre elles.

On considère alors le problème d'optimisation suivant (il est toujours possible de se ramener à un problème d'optimisation sans contrainte via le calcul de multiplicateur de Lagrange) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ x_k^L \leq x_k \leq x_k^U \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{array} \right. \quad 2-21$$

Il est ainsi possible de calculer la dérivée partielle de  $f$  en fonction de chacune des variables  $x_i$  de la façon suivante :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} = \frac{f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_i + \Delta x, \dots, \tilde{x}_n) - f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_i, \dots, \tilde{x}_n)}{\Delta x} \quad 2-22$$

Avec  $\tilde{x}$  le vecteur variable à l'itération considérée. Le calcul du gradient d'une fonction à  $n$  variables nécessite donc, en plus de l'évaluation de la fonction au point  $\tilde{x}$ ,  $n$  évaluations supplémentaires. L'évaluation numérique de la valeur de la fonction pouvant être potentiellement très coûteuse en temps de calcul, il est inenvisageable d'appliquer cette méthode de calcul pour un nombre important de variables. De même, le calcul de dérivée d'ordre supérieur est impossible en pratique.

*Remarque* : Le schéma de dérivée utilisé ici est un schéma avant. D'autres schémas de dérivée peuvent éventuellement être utilisés (mais l'utilisation d'une dérivée centrée implique un doublement du nombre d'évaluations de la fonction nécessaire).

Une deuxième méthode de calcul est donc préférée dans le cas de systèmes de moyenne ou grande taille. Elle se base sur la notion de problème adjoint et permet de calculer, au prix d'une seule résolution d'un système de taille identique au système étudié, l'ensemble des dérivées partielles du critère par rapport à chacune des variables (calcul de sensibilité). La méthode, appliquée dans le cadre d'une structure magnétostatique modélisée numériquement, est la suivante [Cou-89, Oka-06] :

Un modèle numérique d'un dispositif magnétostatique possède la forme suivante :

$$\mathbf{MA} = \mathbf{S} \quad 2-23$$

Avec  $\mathbf{M}$  la matrice de coefficient représentative du problème,  $\mathbf{A}$  le vecteur correspondant aux valeurs de potentiels vecteurs et  $\mathbf{S}$  un vecteur correspondant aux termes sources.

Il est possible de dériver cette expression par rapport à une variable  $x_i$  :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \mathbf{A} + \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_i} \quad 2-24$$

On cherche à calculer la dérivée de la fonction à minimiser  $f$  en fonction de la variable  $x_i$ . En supposant que  $f$  ne dépend que de  $\mathbf{A}$  et de  $\mathbf{x}$ , on peut écrire la différentielle totale de  $f$  (en posant  $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ) :

$$\frac{df(\mathbf{A}, \mathbf{x})}{dx_i} = \frac{df(\mathbf{A}, \bar{\mathbf{x}}, x_i)}{dx_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} \quad 2-25$$

( $\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial x_i}$  est nul puisque les variables sont indépendantes)

Les termes  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  et  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}}$  peuvent être calculés facilement, il ne reste donc qu'à calculer le terme  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i}$

Pour cela, on utilise l'équation 2-24 qui donne :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} = \mathbf{M}^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \mathbf{A} \right) \quad 2-26$$

En insérant 2-26 dans 2-25, on obtient :

$$\frac{df(\mathbf{A}, \mathbf{x})}{dx_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} \mathbf{M}^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \mathbf{A} \right) \quad 2-27$$

On pose :

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} \mathbf{M}^{-1} \quad 2-28$$

La dérivée de  $f$  par rapport à  $x_i$  est donc :

$$\frac{df(\mathbf{A}, \mathbf{x})}{dx_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \boldsymbol{\lambda}^T \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \tilde{\mathbf{A}} \right) \quad 2-29$$

avec  $\tilde{\mathbf{A}}$  le potentiel vecteur obtenu par résolution du système 2-23 et qui peut donc normalement être connu lorsque l'on souhaite calculer la dérivée. Il ne reste donc plus qu'à déterminer  $\boldsymbol{\lambda}$ . Or, d'après 2-28 on a :

$$\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{M} = \mathbf{M} \boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} \quad 2-30$$

car  $\mathbf{M}$  est symétrique (l'influence du potentiel vecteur en un nœud sur un autre est toujours réciproque).

Cette équation correspond à un second problème, appelé problème adjoint, où le terme source  $\mathbf{S}$  est remplacé par  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}}$ . La valeur de  $\boldsymbol{\lambda}$  est indépendante de la variable  $x_i$  considérée, et la résolution de ce problème adjoint permet donc à l'aide de l'équation 2-29 de calculer

l'ensemble des dérivées partielles de  $f$  par rapport aux variables  $x_i$ , au prix d'une seule résolution d'un problème de même taille et complexité que le problème numérique initial.

*Remarques :*

- La méthode est présentée ici dans le cadre de l'étude d'une structure magnétostatique afin de simplifier l'exposé. Elle est toutefois très générale et peut être appliquée à de nombreux autres domaines (électromagnétisme, mécanique, contrôle optimal, etc.) [All-07].
- Il existe d'autres approches pour aboutir à la formulation des dérivées du critère. Nous avons employé ici la méthode dite des variables adjointe, mais il est possible de s'appuyer sur le théorème de Tellegen comme proposé par Lowther et Dyck [Dyc-94]. [Bur-97] décrit quant à lui les méthodes de dérivation implicite et les compare aux méthodes de types variable adjointe.
- La solution du problème adjoint est notée  $\lambda$ . La notation est donc identique à celle employée pour désigner des multiplicateurs de Lagrange, mais il ne s'agit pas d'une coïncidence. Ces valeurs peuvent en effet être vues comme les multiplicateurs de Lagrange correspondant au point stationnaire d'une formulation du problème par Lagrangien [All-07].

Cette méthode de calcul de gradient a été employée à de nombreuses reprises au cours des vingt dernières années pour la conception optimale de diverses structures électromagnétiques dans le cadre de procédures d'optimisation paramétriques [Tsi-05, Koh-97, Wei-06]. Elle se justifie d'autant plus que le nombre de variables du problème considéré est grand. Le domaine d'application de prédilection de la méthode concerne les problèmes d'optimisation géométrique et topologique (voir plus bas).

#### 2.4.1.2 Optimisation géométrique

L'optimisation géométrique (ou optimisation de forme) consiste à faire varier les positions des frontières de la forme, tout en gardant une topologie (au sens mathématique du terme) identique. Par définition, les structures accessibles par ce type d'algorithme sont nécessairement homéomorphes à la géométrie initiale (il existe une bijection continue, dont l'inverse est elle-même continue, entre les deux formes. En 2D, cette notion se visualise simplement en comptant le nombre de « trous » d'une structure, ou en termes plus précis, en dénombrant le nombre de composantes connexes de la frontière de la forme, cf. Figure 2-9).

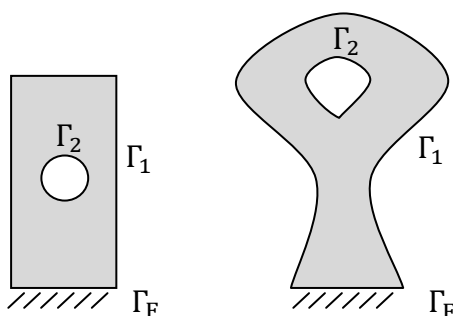


Figure 2-9: Exemple de structures 2D homéomorphes. Dans le cas de l'optimisation géométrique, les frontières peuvent être fixes ( $\Gamma_F$  sur cet exemple) ou variables ( $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ ).

Même si la plage de variation autorisée est potentiellement importante, une structure initiale doit être définie et le nombre de « trous » d'une structure ne peut pas évoluer au cours de la résolution. C'est notamment pour cette raison que ce type d'optimisation est parfois utilisé

après une procédure d'optimisation paramétrique ou topologique (voir sections précédente et suivante), les résultats ainsi obtenus étant souvent très complémentaires.

Les méthodes de conception par optimisation géométrique se basent quasi exclusivement sur des modélisations numériques des systèmes étudiés. Seules ces dernières sont en effet généralement à même de fournir une évaluation précise de l'impact d'une modification de forme sur le critère à minimiser.

Un problème d'optimisation de forme est théoriquement de dimension infinie. En pratique, la très grande majorité des problèmes d'optimisation géométrique rencontrés dans le cadre de la conception optimale de dispositifs est ramenée à des problèmes d'optimisations paramétriques (et donc à une dimension finie), en définissant un certain nombre de points de contrôles sur la surface à optimiser. Ce sont alors les coordonnées de ces points de contrôle qui sont les variables du problème et la forme de la surface est définie à l'aide de ces derniers (un exemple courant est le choix de certains nœuds du maillage éléments finis appartenant à la surface à optimiser comme points de contrôle. Les nœuds adjacents aux nœuds de contrôle sont déplacés en fonction de ces derniers, de façon à obtenir des surfaces lisses)

Comme pour l'optimisation paramétrique associée à des modélisations numériques, deux approches se dégagent dans la littérature : des méthodes basées sur des algorithmes métaheuristiques ou des algorithmes de descente couplés à des calculs de dérivées par introduction d'un problème adjoint (Design Sensitivity Analysis).

[Zio-08] réalise ainsi une optimisation de la forme d'un bouclier conducteur permettant de limiter l'impact d'un champ électromagnétique extérieur sur des mesures. La forme est définie à l'aide de courbes de Bézier et l'optimisation est réalisée à l'aide d'algorithme génétique. Il s'agit d'une optimisation paramétrique dont les variables sont les points de contrôle des courbes de Bézier. [Yok-00] utilise ces mêmes algorithmes pour optimiser la forme de pièces polaires de deux structures (les pièces polaires rotoriques d'une machine synchrone et celles d'un aimant). D'autres types d'algorithmes métaheuristiques donnent des résultats tout aussi satisfaisants et [Chu-97] emploie ainsi des algorithmes immunitaires pour l'optimisation de forme de pièces polaires ferromagnétiques (les points de contrôle sont directement les nœuds du maillage de la méthode par éléments finis).

L'approche par algorithmes de descente couplés à un calcul de gradient par définition d'un problème adjoint a aussi été employée avec succès sur ce type de problème. [Kim-04] optimise la forme des saillances des pièces polaires du rotor d'une machine synchrone. En s'intéressant à la signification physique du terme source apparaissant dans le problème adjoint, les auteurs indiquent une méthode pour utiliser des logiciels de simulations commerciaux par éléments finis, afin de calculer les gradients par la méthode des variables adjointes (voir aussi [Kim-07] qui propose une méthode analogue dans le cadre de l'optimisation topologique). [Ryu-06] étudie la forme optimale de pièces polaires ferromagnétiques 3D pour un IRM et montre à cette occasion que la méthode de calcul de gradient par la méthode des variables adjointes peut-être appliquée de façon à prendre en compte les caractéristiques non linéaires des matériaux ferromagnétiques.

Enfin, soulignons que les deux approches peuvent être couplées, en déterminant à l'aide des algorithmes génétiques un point proche de l'optimum global (ou tout au moins dans sa zone d'attraction) et en améliorant le résultat obtenu en utilisant cette solution comme point de départ d'un algorithme de descente [Moh-97].

### 2.4.1.3 Optimisation topologique

Le but des méthodes de conception par optimisation topologique est tout d'abord de pallier au principal défaut des deux méthodes de conception optimales présentées précédemment, à savoir l'obligation de définir une topologie de structure (ou éventuellement plusieurs topologies) avant de lancer la procédure d'optimisation. Elle permet ainsi théoriquement de s'affranchir de l'expertise du concepteur (cette dernière reste cependant indispensable pour convenablement formuler le problème et valider le résultat obtenu) et d'aboutir à des structures nouvelles auxquelles le concepteur n'aurait pas nécessairement songées.

D'autres inconvénients concernant les problèmes définis sous la forme d'optimisation paramétrique ou géométrique s'ajoutent à ce premier aspect [All-07]:

- Nombreux minima locaux : ces types de problème présentent généralement une forte dépendance de la solution trouvée aux point(s) de départ (forme initiale) et au maillage. Une modification de l'un de ces deux paramètres peut ainsi induire des changements importants dans la forme optimale.
- Non-existence de solution optimale : certains problèmes peuvent être mal posés, ce qui se traduit par une non convergence lorsque le maillage est raffiné (la frontière de la forme présente des détails supplémentaires à chaque raffinement)
- Remaillage à chaque itération : la modification des frontières implique un remaillage systématique à chaque itération, ce qui peut être très coûteux en temps (dans le cas d'un maillage 3D notamment).

L'optimisation topologique consiste, non plus à faire varier la position des frontières entre chaque type de matériau, mais à rechercher une répartition de matière optimale. Elle se définit donc théoriquement comme un problème d'optimisation discret (présence de matériau A, B ou C).

La difficulté première inhérente à ce type de problème est liée à la présence de variables discrètes. En effet, il est de fait impossible d'effectuer un calcul direct de gradient. Comme déjà vu précédemment, les méthodes métaheuristiques s'affranchissent de cette information et permettent donc un traitement direct de ce genre de problème.

L'approche la plus simple consiste à effectuer un maillage de l'espace et à associer à chacune des mailles de la zone à optimiser une variable discrète contrôlant la présence de matériau. [Duf-00] réalise ainsi une optimisation de la forme d'un rotor de machine à reluctance variable à l'aide d'un algorithme génétique. [Cam-07] utilise un algorithme immunitaire pour optimiser la forme 3D d'une tête de lecture.

L'utilisation directe du maillage pour la définition des variables (les nœuds et les paramètres des mailles sont directement les variables du problème) peut être problématique (augmenter la précision du calcul par éléments finis implique notamment une augmentation du nombre de variables sans que cette dernière ne soit nécessairement souhaitée). La notion de macro-gène (2 échelles de variables, afin de contrôler séparément les tendances générales et les détails de la structure) peut notamment permettre de contourner ce problème. Ishikawa et al. utilisent ce principe qui leur permettent en outre d'obtenir des formes optimales plus proches de formes physiquement réalisables (les formes optimales obtenues en optimisation topologique à l'aide d'algorithmes génétiques ayant tendance à être fortement discontinues). Une autre approche consiste à considérer un maillage variable tout au long de la résolution de l'algorithme. Dehez et al. utilisent ainsi une heuristique génétique contrôlant parallèlement le matériau associé à chaque maille (cellule), mais aussi le nombre et la position des mailles (en se basant sur le principe des diagrammes de Voronoï) [Deh-08].

Pour conclure ce bref éventail de réalisations, remarquons que les méthodes métaheuristiques appliquées à l'optimisation topologique présentent à l'heure actuelle des difficultés à converger vers des structures immédiatement réalisables (surfaces non lisses et discontinues). Une étape d'interprétation est alors nécessaire afin de débarrasser le motif de ses différentes scories et discontinuités.

La présence de variables discrètes compromet le calcul de gradient par les méthodes d'état adjoint présentées précédemment. Une approche possible consiste à utiliser des méthodes d'homogénéisation [All-07]. Ces dernières permettent à la fois de contourner le problème des variables discrètes, mais répondent aussi à l'une des problématiques importantes de l'optimisation topologique. L'une des difficultés rencontrées lorsque l'optimisation est effectuée sur une répartition de matériau provient du fait qu'il peut ne pas exister de forme optimale du problème correspondant à une répartition de matériaux réels. En effet, la structure optimale peut être constituée d'un matériau hétérogène à structure plus ou moins périodique et comportant d'infimes trous. Le critère est amélioré à chaque raffinement de la microstructure et la diminution de la taille de ces trous (chaque raffinement du maillage autorise des détails plus fins qui permettent d'améliorer le critère). La solution optimale correspond alors au passage à la limite de ces microstructures lorsque leur taille caractéristique tend vers 0. Ce matériau n'est pas descriptible numériquement puisqu'il serait nécessaire d'effectuer le calcul sur un maillage infiniment fin. Ce genre de cas de figure conduit à une instabilité de la forme optimale obtenue. La solution consiste à autoriser la présence de ces matériaux composites présentant une microstructure. Leurs propriétés seront alors décrites à l'aide de propriétés moyennes, ou homogénéisées (voir Figure 2-10).

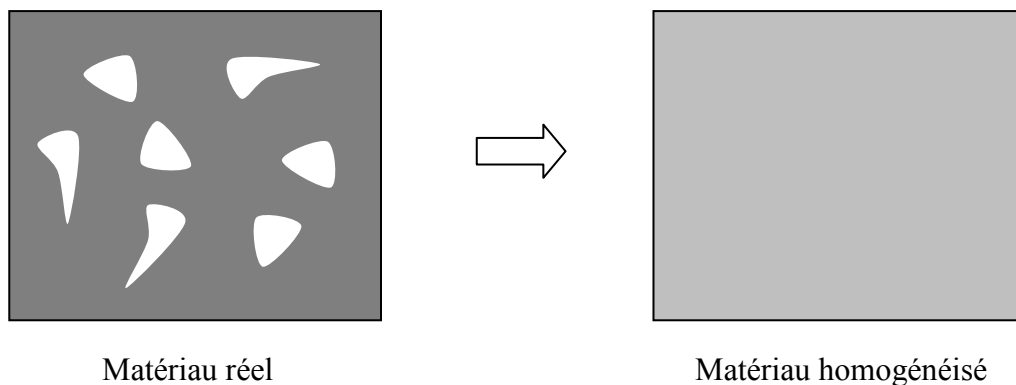


Figure 2-10 : Principe d'homogénéisation des matériaux. Les propriétés du matériau homogénéisé sont calculées de façon à conduire à un comportement identique à celui du matériau réel.

L'intérêt de cette approche est très fort : d'une part, elle implique la manipulation de variables continues et autorise donc le calcul de gradient. D'autre part, l'homogénéisation correspond à une relaxation du problème et garantit l'existence d'une solution optimale homogénéisée au problème d'optimisation. Certains auteurs ont appliqué le principe d'homogénéisation au design optimal de dispositifs magnéto-statiques [Yoo-00], mais la plupart lui ont préféré une approche simplifiée consistant à accepter les états de densités intermédiaires compris entre 0 (absence de matière) et 1 (présence de matière), (méthode de convexification ou des matériaux fictifs). La répartition de matière est donc décrite dans ce cadre à l'aide d'une variable de densité continue. Cette approche est toutefois moins générale que la méthode d'homogénéisation et donne des résultats moins bons, mais a cependant l'avantage d'être bien plus simple à mettre en oeuvre [Yoo-04, All-07].

Dans le domaine de l'optimisation topologique de dispositifs magnétostatiques, cette approche a notamment été développée par Dyck et Lowther, qui l'appellent « distribution optimale de matériau » (OMD). [Dyc-94, Dyc-96]

La géométrie obtenue à l'aide de ces méthodes ne correspond pas toutefois dans le cas général à une géométrie physique réalisable, puisque l'on cherche à obtenir une répartition de matériaux réels (air ou fer, etc.). Une phase de pénalisation des états intermédiaires peut alors être envisagée afin de transformer la répartition continue de densité de matière en une répartition discrète réalisable physiquement. Il s'agit alors d'une opération de capture des frontières séparant les différents matériaux dans un milieu initialement homogène.

La méthode la plus souvent employée pour cette étape de pénalisation consiste à définir la perméabilité sous la forme :

$$\mu = \mu_0(1 + (\mu_r - 1)p^n) \quad 2-31$$

La variable contrôlant la perméabilité est alors  $p$ , qui varie entre 0 et 1,  $n$  est une valeur choisie par l'utilisateur, elle est fixe ( $n > 1$  implique une pénalisation des valeurs intermédiaires) ou croissante au fur et à mesure des itérations de l'algorithme.

Les exemples de mise en application de cette méthode sont nombreux [Byu-04, Par-09, Lee-11, Lab-10].

L'approche peut surprendre, puisqu'elle consiste d'abord à convertir un problème à variables discrètes en problème à variables continues, puis à tenter dans un second temps de retrouver des valeurs discrètes de façon à obtenir une structure physiquement réalisable. L'intérêt est d'opérer en deux étapes : d'abord, l'identification de la solution optimale dans un espace de dimensions supérieures à l'espace des formes admissibles (résolution du problème sous sa forme homogénéisée) afin de profiter de propriétés de convergence favorables, puis la projection de la solution optimale obtenue dans l'espace des formes admissibles (matériaux réels, etc.) via une étape de pénalisation.

## **2.5 Distribution filaire et Biot et Savart**

Les deux grands types d'approches identifiées dans la partie précédente (algorithmes de descente et calcul de sensibilité ou méthodes métaheuristiques) s'appuient sur des méthodes numériques du calcul du champ.

En vue de résoudre le problème à l'aide de méthodes déterministes, voire globales, nous avons orienté les premières tentatives de formalisation du problème vers des méthodes de calcul analytique. L'idée est donc, à partir d'une cartographie magnétique souhaitée, de retrouver la distribution de sources élémentaires optimales permettant de générer cette dernière. Dans cette optique, on va combiner le calcul du champ produit par une source élémentaire unique avec le théorème de superposition, en prenant en compte les critères suivants :

- La nature des sources élémentaires employées qui peuvent être constituées de conducteurs infinis, de spires de courant et de dipôle ;
- La méthode de calcul et, éventuellement, les approximations effectuées pour le champ généré par la source élémentaire ;
- La méthode de description de la carte de champ objectif qui pourra se faire par le biais de valeurs ponctuelles du champ avec ou sans valeur de dérivée spatiale, de fonction de répartition de l'induction sur un segment, etc. ;

L'éventail des problèmes à traiter dans ce contexte est très vaste et nous avons décidé de nous limiter à la configuration suivante :

- Les problèmes considérés sont des problèmes 2D, planaires, dans le vide (perméabilité fixe égale à  $\mu_0$ ) ;
- Les sources élémentaires sont des conducteurs infinis, perpendiculaires au plan du problème ;
- Le champ magnétique généré par le fil est calculé à l'aide de la loi de Biot et Savart (calcul exact) ;
- La carte de champ objectif est décrite par des valeurs ponctuelles des composantes du champ B souhaité. ;

La Figure 2-11 schématise le type de problème ainsi défini.

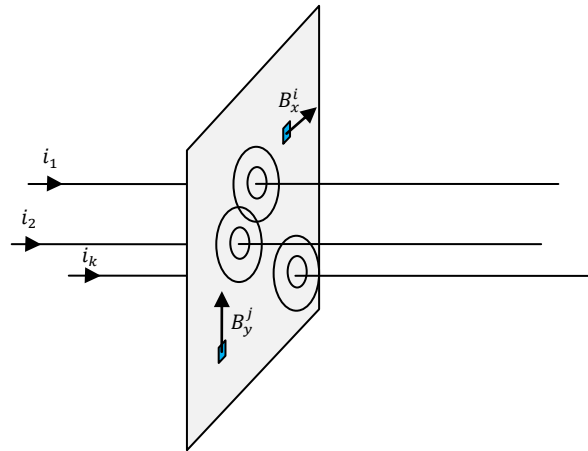


Figure 2-11: Schéma du type de problème étudié

Le calcul du champ produit au point  $M_i = (x_M^i, y_M^i)$  par un conducteur infini positionné au point  $(x_F^k, y_F^k)$  et parcouru par un courant  $I_k$  en appliquant la loi de Biot et Savart donne le résultat suivant :

$$\mathbf{B}_k(M_i) = \frac{\mu_0 I_k}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{-(y_M^i - y_F^k)}{(x_M^i - x_F^k)^2 + (y_M^i - y_F^k)^2} \\ \frac{(x_M^i - x_F^k)}{(x_M^i - x_F^k)^2 + (y_M^i - y_F^k)^2} \end{bmatrix}$$

Pour  $n$  conducteurs et  $m_x$  (respectivement  $m_y$ ) valeurs de composante  $B_x$  (respectivement  $B_y$ ), le problème se formule matriciellement sous la forme suivante :

$$\mathbf{M}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_x \\ \mathbf{M}_y \end{bmatrix} \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_x \\ \mathbf{B}_y \end{bmatrix} = \mathbf{B}$$

Avec

$$\mathbf{M}_x = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \frac{-(y_M^i - y_F^k)}{(x_M^i - x_F^k)^2 + (y_M^i - y_F^k)^2} \right]_{(i,j) \in \llbracket \mathbf{1}, \mathbf{n} \rrbracket \times \llbracket \mathbf{1}, \mathbf{m} \rrbracket} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_y = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \frac{(x_M^i - x_F^k)}{(x_M^i - x_F^k)^2 + (y_M^i - y_F^k)^2} \right]_{(i,j) \in \llbracket \mathbf{1}, \mathbf{n} \rrbracket \times \llbracket \mathbf{1}, \mathbf{m} \rrbracket}$$

La nature du problème dépend des variables considérées. Si les variables sont uniquement les valeurs de courant parcourant chaque conducteur, le problème considéré est alors linéaire.



Dans le cas où les positions des fils sont les variables (avec ou sans les valeurs de courant), le problème est alors non linéaire.

D'autre part, en fonction du rapport  $\frac{n}{m}$  avec  $m = m_x + m_y$  il est possible d'aboutir à des problèmes sous déterminés (problèmes de rang déficient  $\frac{n}{m} > 1$ ) ou surdéterminés et ne possédant donc pas de solution exacte ( $\frac{n}{m} < 1$ ).

Pour résoudre ces types de problèmes nous avons dans un premier temps exploité les algorithmes d'optimisation présents dans la toolbox optimisation pour le logiciel Matlab afin de cibler au plus vite les méthodes de résolution les plus appropriées.

Plusieurs tests ont été réalisés, notamment sous la forme d'études statistiques. Un problème générique est défini à partir d'un tirage aléatoire de points de mesure et de valeurs de champ objectif. Le problème est ensuite résolu pour un nombre de variables donné. En répétant l'opération plusieurs fois pour les mêmes paramètres et en faisant varier les paramètres, il est possible d'obtenir des cartographies statistiques pour différentes informations (taux de convergence de l'algorithme, taux de solutions produisant exactement le champ objectif, etc.) L'intérêt de ce type d'analyse réside dans sa grande généralité. Elle permet ainsi de réaliser des comparaisons entre algorithmes, entre formulations d'un même problème, ou même entre différentes combinaisons algorithme+formulation (certains algorithmes nécessitant une formulation particulière du problème : un problème linéaire traité par un algorithme de programmation linéaire devra par exemple nécessairement être mis sous forme matricielle, mais le même problème devra être formulé différemment pour être traité par certains algorithmes non linéaires).

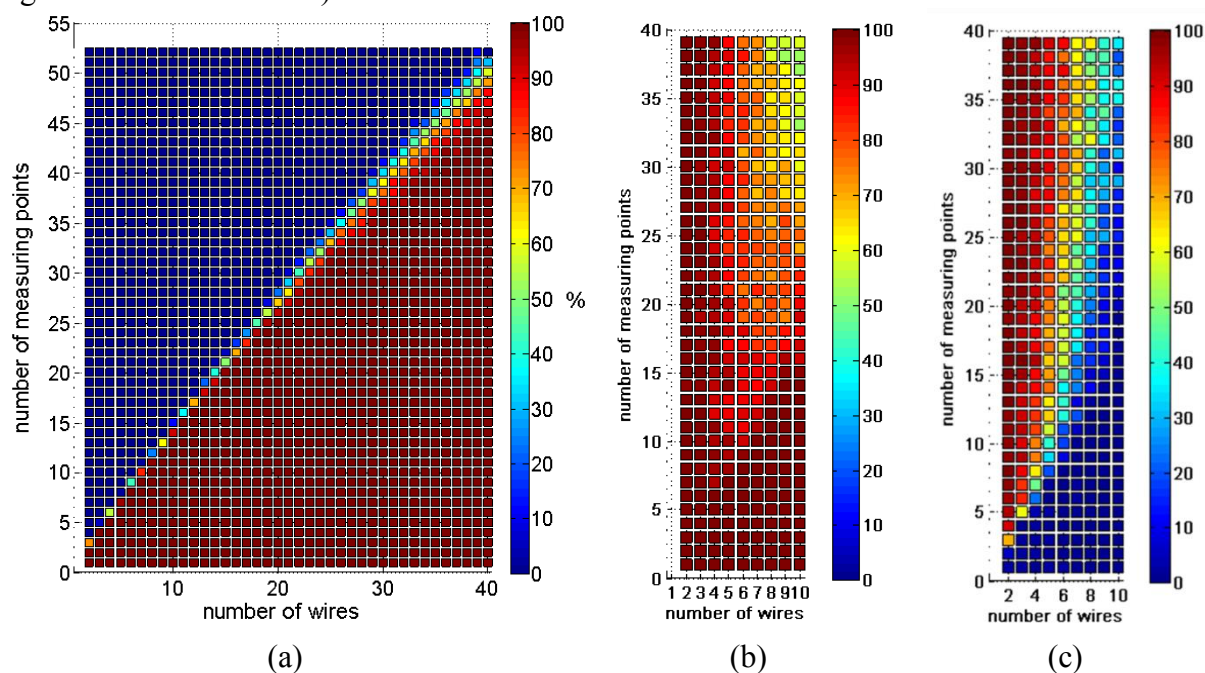


Figure 2-12 : Cartographie de taux de convergence en fonction du nombre de conducteurs et du nombre de points de mesure (un point de mesure correspond ici à 2 valeurs de champ  $B$  imposées) pour la fonction `lsqnonlin` de matlab.

- (a) Taux de convergence sur une solution produisant le champ souhaité pour une cartographie  
 (b) Taux de convergence sur une solution produisant le champ souhaité lorsqu'au moins une solution existe (cartographie objectif issu d'une distribution de conducteurs réelle)  
 (c) Taux de convergence sur une distribution identique à celle employée pour générer la carte de champ objectif

Les informations pouvant être tirées de ce genre d'analyse sont nombreuses. Il est d'abord évidemment possible de quantifier la capacité d'un algorithme à trouver une solution au problème posé, en fonction de la valeurs des paramètres imposée. La Figure 2-12-a montre

ainsi le taux de convergence sur une solution produisant le champ souhaité, lorsque la position et la valeur de courant pour chaque conducteur est considérée comme une variable. Chaque point de mesure correspondant ici systématiquement à deux valeurs de champ objectif, on retrouve bien une ligne de démarcation séparant zone de convergence et de non-convergence pour un ratio de 3/2. L'impact de l'ajout d'une contrainte (borne supplémentaire par exemple) peut être évalué par comparaison avec cette cartographie.

Il est aussi possible d'étudier les différences de comportements des algorithmes en s'assurant de l'existence d'une solution, ce qui apporte plusieurs indications. Pour cela, une distribution de fil et de valeur de courant est générée aléatoirement. Le champ produit par cette distribution est calculé et servira de champ objectif. L'algorithme d'optimisation est alors lancé à partir d'un point de départ aléatoire. L'existence d'au moins une solution (la distribution initiale) est ainsi garantie. Ceci permet, d'une part, d'évaluer la capacité d'un algorithme à éviter les minimums locaux (Figure 2-12-b. Les taux de convergence inférieurs à 100% correspondent à autant de convergence sur des minimums locaux), et, d'autre part, d'évaluer le degré d'unicité de la solution d'un problème (si la solution trouvée par l'algorithme correspond systématiquement à la distribution de fil initiale, le problème possède très probablement une solution unique pour ces valeurs de paramètres, cf Figure 2-12-c).

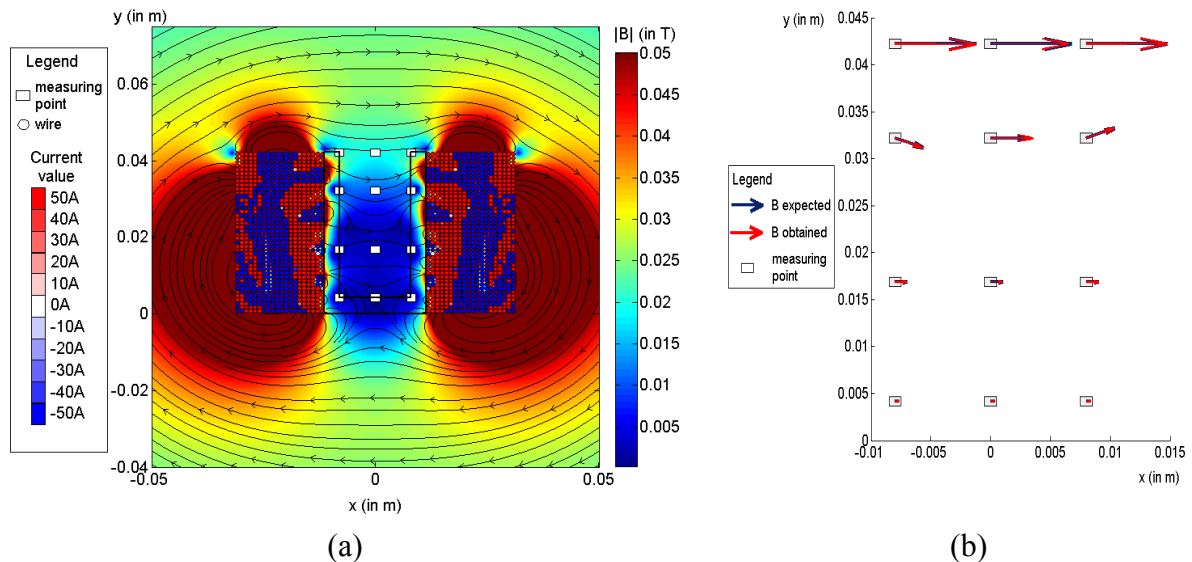


Figure 2-13 : Exemple de problème test. Les valeurs de courant dans chaque conducteur sont optimisées pour obtenir les valeurs de champs souhaitées (qui simulent le champ magnétique d'un propulseur à effet Hall).

(a) Solution obtenue

(b) Comparaison entre le champ obtenue et le champ souhaité

Ces évaluations statistiques nous ont permis de nous familiariser avec le comportement des différents algorithmes disponibles, qui ont ensuite pu être appliqués à des problèmes plus précis. La Figure 2-13 montre l'un des problèmes ainsi traité et la solution obtenue. Le problème est ici linéaire (seules les valeurs de courant sont considérées comme des variables, la position des conducteurs est fixe). On constate notamment l'apparition de motifs dans la distribution de valeurs de courant obtenue. Cette présence de motifs est systématique et il est peut-être envisageable de définir une méthode de conception optimale impliquant une résolution produisant une distribution de sources élémentaires de ce type, suivie d'une étape d'interprétation de la distribution obtenue en terme de sources et matériau ferromagnétique. Cette voie n'a cependant pas été explorée, en raison notamment de l'absence de solution simple pour la description des parties ferromagnétiques. Dans ce domaine, la méthode développée dans la partie suivante nous a semblée plus prometteuse.

## **2.6 Formulation explicite du problème d'optimisation par différences finies**

### **2.6.1 Principe**

L'idée développée par cette formulation consiste à tenter de résoudre directement le problème d'optimisation, sous une forme explicite obtenue par discrétisation. Les méthodes classiques s'appuient sur une résolution en deux temps : l'algorithme définit d'abord les valeurs des variables du problème d'optimisation (correspondant par exemple à une répartition donnée des matériaux ferromagnétiques). Ces valeurs permettent, via une discrétisation des équations aux dérivées partielles, de formuler un problème matriciel dont les inconnues sont les grandeurs d'intérêt du problème (potentiel vecteur à chaque nœud du domaine, etc.). La résolution de ce second problème permet alors d'évaluer la valeur du critère à optimiser. Cette résolution en deux temps interdit dans le cas général d'obtenir une formulation explicite permettant de calculer le critère à partir des variables du problème d'optimisation.

La méthode proposée ici permet d'obtenir cette formulation explicite du problème. L'idée est simplement de traiter les deux problèmes précédents (problème d'optimisation conduisant à un second problème d'équations aux dérivées partielles discrétisées) conjointement. Les variables du second problème ne sont plus des variables intermédiaires servant à évaluer la valeur du critère, mais des variables du problème d'optimisation général. La Figure 2-14 représente schématiquement le déroulement des deux types d'approches.

L'inconvénient de l'approche réside dans le nombre de variables qui augmente fortement. Cependant, la formulation explicite permet de faire appel à des méthodes de résolution inenvisageables dans le cas implicite. De plus, en s'intéressant à la formulation du problème obtenu (linéaire, quadratique, bilinéaire, etc.), il est possible d'employer un algorithme dédié, moins générique que ceux employés pour une approche classique, mais qui possède souvent des propriétés de convergence plus fortes.

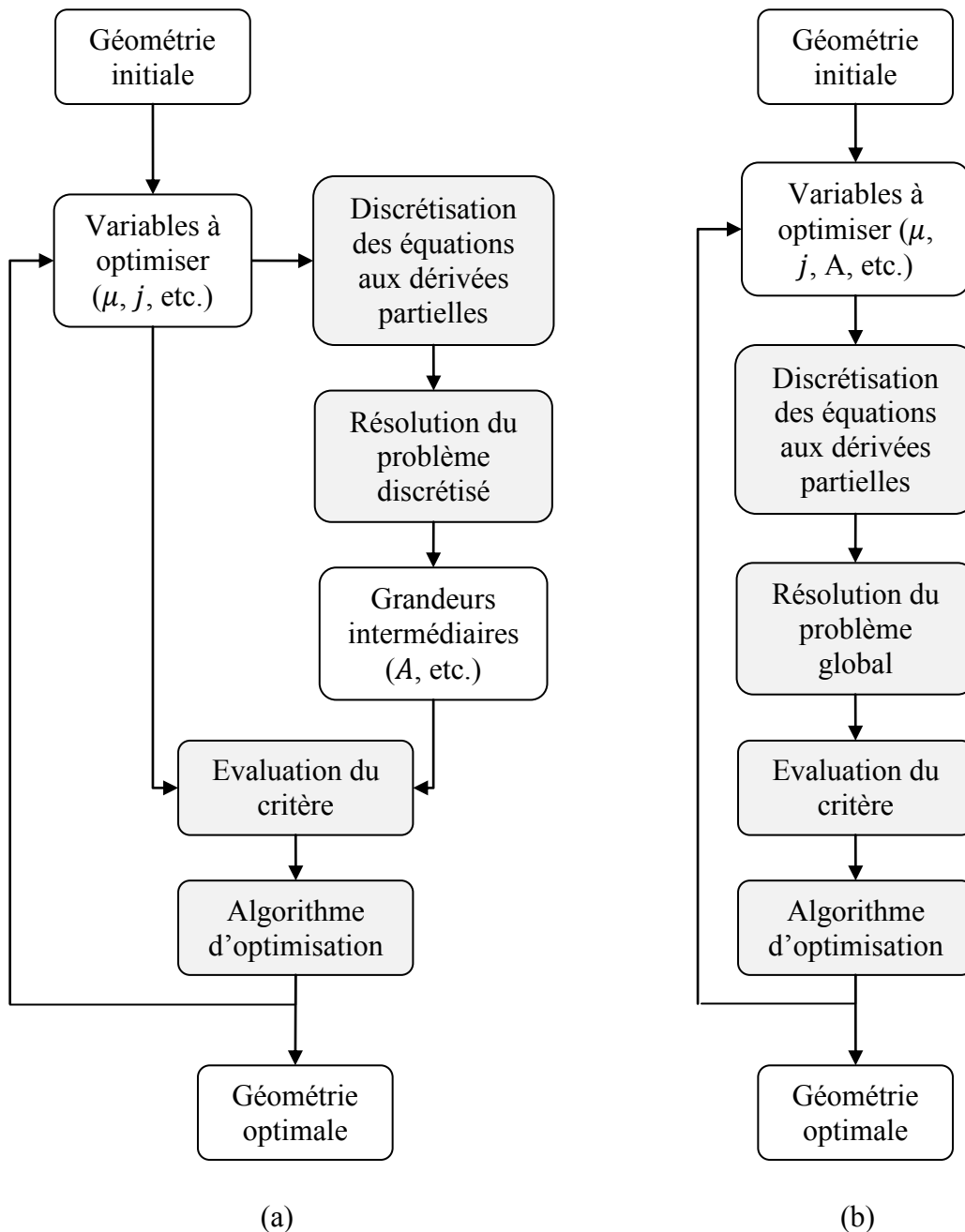


Figure 2-14: Déroulements des algorithmes d'optimisation pour la conception optimale impliquant des simulations numériques. (a) Méthodes classiques (b) Approche proposée

## 2.6.2 Formulation du problème

### 2.6.2.1 Choix de la méthode de résolution de l'équation aux dérivées partielles

Le fait de pouvoir prendre en compte finement la nature du problème considéré (linéaire, quadratique, bilinéaire, etc.) implique de choisir avec précautions la méthode de résolution de l'équation aux dérivées partielles. La nature du problème dépend en effet de la méthode sélectionnée (différences finies, éléments finis, schéma de discrétisation choisi, etc.)

Le but de cette étude est de montrer une éventuelle faisabilité d'une approche de traitement conjoint des variables de conception et de ce qui est habituellement considéré comme des variables intermédiaires. L'étude sera réalisée dans le cadre suivant :

- les problèmes considérés sont des problèmes de magnétostatique ou des problèmes de conception de dispositifs magnétiques basse fréquence pouvant être considérés comme des problèmes magnétostatiques.
- les structures considérées seront des géométries 2D. Les matrices seront de plus exprimées uniquement dans des repères cartésiens pour simplifier la présentation. L'extension aux repères cylindriques ou sphériques ne pose cependant aucun problème particulier.

Le choix de la méthode de discrétisation s'est porté vers les différences finies. Il s'agit d'une méthode relativement ancienne, qui a depuis été supplantée en termes d'utilisation par les méthodes éléments finis notamment, mais elle présente l'intérêt d'une implémentation assez naturelle et simple, ce qui est tout à fait adéquat pour une étude de faisabilité.

Il faut de plus préciser la méthode de discrétisation retenue. La méthode classiquement employée pour les différences finies implique des relations différentes entre les potentiels vecteurs à l'intérieur d'un même matériau et celles reliant les potentiels vecteurs au niveau des frontières entre deux types de matériau (interface air/fer), (formulation forte). Ceci n'est pas envisageable ici, puisque la perméabilité doit pouvoir faire partie des variables du problème d'optimisation et les frontières entre chaque milieu sont donc amenées à évoluer au cours de la résolution. Il serait alors nécessaire de redéfinir la forme de la matrice à chaque itération, ce qui renverrait aux mêmes problèmes de formulation implicite reliant les variables au critère et réduirait à néant l'intérêt de la méthode.

Ce problème peut être évité en s'appuyant sur une formulation obtenue par calcul intégral à l'échelle de chaque maille (formulation faible). Les nœuds sont traités indifféremment, qu'ils soient situés à l'intérieur d'un matériau ou au niveau d'une interface et la forme de la matrice représentative du problème discrétisée est indépendante des valeurs de perméabilité dans le domaine. Cette méthode est présentée dans [Dur-68] et a été employée dans le logiciel DIFIMEDI développé au LEEI dans les années 1980 [DIF].

### 2.6.2.2 Formalisation de la méthode des différences finies

#### *Formulation intégrale des équations aux dérivées partielles du champ*

Les notations suivantes seront utilisées pour la suite :

- $\mathbf{j}$  est la densité volumique de courant
- $\mathbf{M}$  est l'aimantation du milieu considéré
- $\mu = \mu_0 \mu_r$  est la perméabilité magnétique.  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H.m<sup>-1</sup> est la perméabilité magnétique du vide et  $\mu_r$  la perméabilité relative. On sera de plus amené à utiliser la notion de reluctivité  $\nu = 1/\mu$  (et on définira de même  $\nu_0 = 1/\mu_0$  et  $\nu_r = 1/\mu_r$ ).

Dans le cadre de l'approximation des états quasi-stationnaires, le champ magnétique est régi par les équations suivantes :

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad 2-32$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad 2-33$$

Ou sous forme intégrale (conservation du flux et théorème d'Ampère) :

$$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad 2-34$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad 2-35$$

La loi constitutive des matériaux donne de plus :

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mathbf{M} \quad 2-36$$

L'équation 2-32 permet d'introduire le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  tel que

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A} \quad 2-37$$

D'après 2-33 et 2-36, on a

$$\mathbf{rot} \left( \frac{\mathbf{B} - \mathbf{M}}{\mu} \right) = \mathbf{j} \quad 2-38$$

ou encore (l'opérateur  $\mathbf{rot}$  étant linéaire)

$$\mathbf{rot} \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \mathbf{j} - \mathbf{rot} \left( \frac{\mathbf{M}}{\mu} \right) \quad 2-39$$

et en introduisant 2-37, on a

$$\mathbf{rot} \left( \frac{\mathbf{rot} \mathbf{A}}{\mu} \right) = \mathbf{j} - \mathbf{rot} \left( \frac{\mathbf{M}}{\mu} \right) \quad 2-40$$

Les équations précédentes sont valables pour tout système 3D. Dans le cas d'une structure 2D invariante par translation selon l'axe  $z$ , les grandeurs du problème se réduisent dans un repère cartésien à :

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ j_z = j \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A_z = A \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'équation 2-40 devient ainsi scalaire :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = -j_z - v \frac{\partial M_y}{\partial x} + v \frac{\partial M_x}{\partial y} \quad 2-41$$

ou encore, sous forme intégrale en appliquant le théorème de Green (avec  $S$  la surface fermée s'appuyant sur le contour  $C$ ):

$$\oint_C \left( v \frac{\partial A_z}{\partial y} dx - v \frac{\partial A_z}{\partial x} dy \right) = - \int_S j_z dx dy + \oint_C (v M_x dx + v M_y dy) \quad 2-42$$

L'idée de la méthode consiste, après avoir discrétisé le domaine d'étude en mailles rectangulaires, à appliquer localement l'équation 2-42 autour d'un nœud. Cette opération donnera une relation entre les valeurs de potentiel vecteur au nœud considéré et ceux adjacents.

### Définition des matrices représentatives du problème

Le maillage du domaine est réalisé à l'aide d'une grille rectangulaire non nécessairement régulière, dont les coordonnées des nœuds sont données par les vecteurs  $C_x$  et  $C_y$ . La Figure 2-15 donne la paramétrisation employée pour repérer les grandeurs en fonction du maillage.

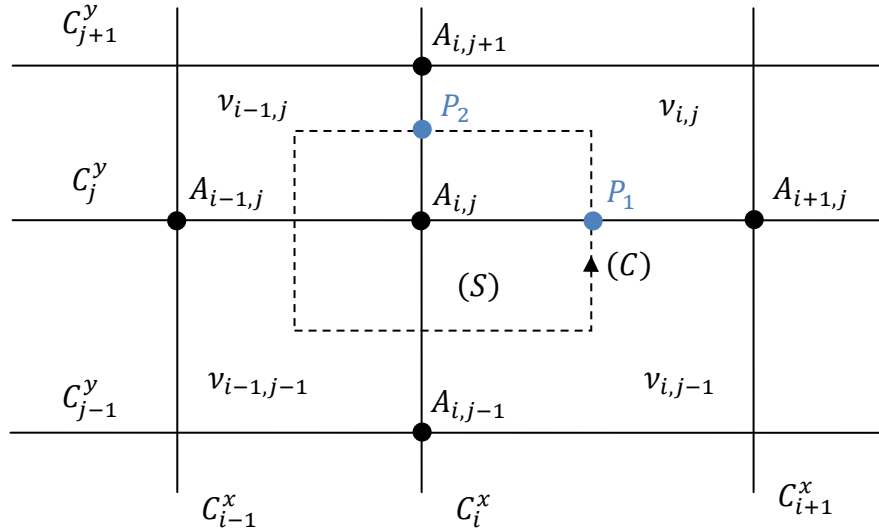


Figure 2-15: Paramétrisation des grandeurs intervenant dans le calcul. Les valeurs des potentiels vecteurs sont exprimées aux nœuds, les valeurs de perméabilité, de courant ou d'aimantation sont exprimées pour chaque maille et sont repérées par l'indice du nœud au coin inférieur gauche.

On applique l'équation 2-42 au contour (C). Il est pour cela nécessaire de calculer les valeurs des dérivées partielles  $\frac{\partial A_z}{\partial x}$  et  $\frac{\partial A_z}{\partial y}$  le long du contour. On utilise pour cela un schéma de dérivée centrée :

$$\frac{\partial A_z}{\partial x}(x, y) = \frac{A_z(x+h, y) - A_z(x-h, y)}{2h} + o(h) \quad 2-43$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial y}(x, y) = \frac{A_z(x, y+h) - A_z(x, y-h)}{2h} + o(h) \quad 2-44$$

En appliquant ces formules au schéma de maille présenté Figure 2-15, on obtient par exemple :

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)_{P_1} \approx \frac{A_{i+1,j} - A_{i,j}}{C_{i+1}^x - C_i^x} \quad \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)_{P_2} \approx \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j}}{C_{j+1}^y - C_j^y} \quad 2-45$$

En supposant que la valeur de dérivée ainsi calculée est constante le long du segment auquel appartient le point de calcul, il est possible de calculer la relation 2-42. Après développement, on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} & \alpha_0 A_{i,j} - \alpha_1 A_{i+1,j} - \alpha_2 A_{i,j+1} - \alpha_3 A_{i-1,j} - \alpha_4 A_{i,j-1} \\ & = \beta_1 j_{i-1,j-1} + \beta_2 j_{i,j-1} + \beta_3 j_{i-1,j} + \beta_4 j_{i,j} \end{aligned} \quad 2-46$$

$$\begin{aligned}
 & +\delta_1^x M_{i-1,j-1}^x + \delta_2^x M_{i,j-1}^x + \delta_3^x M_{i-1,j}^x + \delta_4^x M_{i,j}^x \\
 & +\delta_1^y M_{i-1,j-1}^y + \delta_2^y M_{i,j-1}^y + \delta_3^y M_{i-1,j}^y + \delta_4^y M_{i,j}^y
 \end{aligned}$$

avec :

$\alpha_1 = \frac{C_j^y - C_{j-1}^y}{2(C_{i+1}^x - C_i^x)} v_{i,j-1} + \frac{C_{j+1}^y - C_j^y}{2(C_{i+1}^x - C_i^x)} v_{i,j}$		$\alpha_2 = \frac{C_i^x - C_{i-1}^x}{2(C_{j+1}^y - C_j^y)} v_{i-1,j} + \frac{C_{i+1}^x - C_i^x}{2(C_{j+1}^y - C_j^y)} v_{i,j}$	
$\alpha_3 = \frac{C_j^y - C_{j-1}^y}{2(C_i^x - C_{i-1}^x)} v_{i-1,j-1} + \frac{C_{j+1}^y - C_j^y}{2(C_i^x - C_{i-1}^x)} v_{i-1,j}$		$\alpha_4 = \frac{C_{i+1}^x - C_i^x}{2(C_j^y - C_{j-1}^y)} v_{i-1,j} + \frac{C_i^x - C_{i-1}^x}{2(C_j^y - C_{j-1}^y)} v_{i-1,j-1}$	
$\alpha_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$			
$\beta_1 = \frac{1}{4} (C_i^x - C_{i-1}^x)(C_j^y - C_{j-1}^y)$		$\beta_2 = \frac{1}{4} (C_{i+1}^x - C_i^x)(C_j^y - C_{j-1}^y)$	
$\beta_3 = \frac{1}{4} (C_i^x - C_{i-1}^x)(C_{j+1}^y - C_j^y)$		$\beta_4 = \frac{1}{4} (C_{i+1}^x - C_i^x)(C_{j+1}^y - C_j^y)$	
$\delta_1^x = \frac{C_i^x - C_{i-1}^x}{2} v_{i-1,j-1}$	$\delta_2^x = \frac{C_{i+1}^x - C_i^x}{2} v_{i,j-1}$	$\delta_3^x = -\frac{C_i^x - C_{i-1}^x}{2} v_{i-1,j}$	$\delta_4^x = -\frac{C_{i+1}^x - C_i^x}{2} v_{i,j}$
$\delta_1^y = -\frac{C_j^y - C_{j-1}^y}{2} v_{i-1,j-1}$	$\delta_2^y = \frac{C_j^y - C_{j-1}^y}{2} v_{i,j-1}$	$\delta_3^y = -\frac{C_{j+1}^y - C_j^y}{2} v_{i-1,j}$	$\delta_4^y = \frac{C_{j+1}^y - C_j^y}{2} v_{i,j}$

La relation 2-46 n'est valable que pour les nœuds intérieurs au domaine puisqu'elle fait intervenir la valeur de potentiel aux nœuds adjacents dans les quatre directions. Il est donc de plus nécessaire de définir les relations pour les nœuds aux frontières. Dans un souci de simplicité et dans un premier temps, nous considérerons ici des conditions de Dirichlet homogènes (potentiel vecteur nul sur la frontière du domaine).

Pour ces nœuds, les coefficients  $\alpha_i$  sont alors les suivants :

$$\alpha_0 = 1 \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \quad 2-47$$

Il est à présent possible d'exprimer le problème aux différences finies sous sa forme matricielle :

$$MA = S_I + S_M \quad 2-48$$

avec :

- **A** un vecteur regroupant les valeurs de potentiels vecteurs à chaque nœud, rangé sous la forme suivante :



$$\mathbf{A}^T = [A_{1,1}, A_{2,1}, \dots, A_{n_i,1}, A_{1,2}, \dots, A_{n_i,n_j}] \quad 2-49$$

- $\mathbf{S}_I$  un vecteur regroupant les termes sources dus aux densités de courant dans chaque maille :

$$\mathbf{S}_I^T = [S_{1,1}^I, S_{2,1}^I, \dots, S_{n_i-1,1}^I, S_{1,2}^I, \dots, S_{n_i-1,n_j-1}^I] \quad 2-50$$

Chaque terme valant :

$$S_{i,j}^I = (\beta_1)_{i,j} j_{i-1,j-1} + (\beta_2)_{i,j} j_{i,j-1} + (\beta_3)_{i,j} j_{i-1,j} + (\beta_4)_{i,j} j_{i,j} \quad 2-51$$

- $\mathbf{S}_M$  un vecteur regroupant les termes sources dus aux aimants permanents :

$$\mathbf{S}_M^T = [S_{1,1}^M, S_{2,1}^M, \dots, S_{n_i-1,1}^M, S_{1,2}^M, \dots, S_{n_i-1,n_j-1}^M] \quad 2-52$$

Chaque terme valant :

$$S_{i,j}^M = (\delta_1^x)_{i,j} M_{i-1,j-1}^x + (\delta_2^x)_{i,j} M_{i,j-1}^x + (\delta_3^x)_{i,j} M_{i-1,j}^x + (\delta_4^x)_{i,j} M_{i,j}^x \quad 2-53$$

- $\mathbf{M}$  est la matrice des coefficients (matrice diagonale par bande dont les termes non nuls sont les  $(\alpha_i)_k$  avec  $k = n_i(j-1) + i$  l'indice du nœud considéré)

### Formulation du problème d'optimisation en vue d'une résolution groupée

Examinons les dépendances de chacun des termes de l'équation 2-48: La matrice  $\mathbf{M}$  dépend des coordonnées de chaque nœud (valeurs fixes) et des valeurs de perméabilité dans chaque maille. Le vecteur  $\mathbf{S}_M$  dépend lui aussi des coordonnées des nœuds et des perméabilités, ainsi que des valeurs d'aimantation. Le vecteur  $\mathbf{S}_I$  enfin, dépend des coordonnées des nœuds et des valeurs de densité de courant dans chaque maille.

Ces dépendances déterminent la nature du problème à résoudre dans le cadre d'une résolution par optimisation en variables groupées (les valeurs de potentiels vecteurs à chaque nœud auxquelles s'ajoutent les variables de terme source et des caractéristiques du milieu matériel - courants, aimantation, perméabilité -). Les paragraphes suivants décrivent les formulations du problème d'optimisation associées à chaque choix de variable.

*Remarque :* Nous mettrons pour l'instant de côté le cas d'une perméabilité non linéaire et considérerons uniquement par la suite le cas d'une perméabilité indépendante de la valeur de champ magnétique.

#### ➤ Potentiel vecteur seul

Il s'agit du problème direct classiquement résolu par les logiciels de simulations éléments finis (à la méthode de discrétisation près). Les variables de conception sont toutes fixées afin de définir une géométrie et l'on cherche à exprimer le potentiel vecteur résultant.

Le problème peut être formulé sous la forme du problème d'optimisation suivant :

$$\min_{A \in \mathbb{R}^n} [(MA - S_I - S_M)^T (MA - S_I - S_M)] \quad 2-54$$

Il s'agit d'un problème convexe de moindre carré pouvant être facilement résolu par des algorithmes de descente.

Il peut aussi être formulé sous la forme d'un problème de programmation linéaire, en ajoutant par exemple une variable  $\varepsilon$  (cette formulation permet de remplacer une valeur absolue dans la formulation du critère) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n_n} \\ \varepsilon \geq 0}} \varepsilon \\ (MA - S_I - S_M) \leq \varepsilon \\ -(MA - S_I - S_M) \leq \varepsilon \end{array} \right. \quad 2-55$$

Ce qui matriciellement s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\substack{X \in \mathbb{R}^{n_n+1} \\ X(n_n+1) \geq 0}} F^T X \\ M_1 X - S_1 \leq 0 \\ M_2 X - S_2 \leq 0 \end{array} \right. \quad 2-56$$

avec  $n_n$  le nombre total de nœuds du domaine, et :

$$\begin{array}{lll} M_1 = [M & -1] & M_2 = [-M & -1] & X = \begin{bmatrix} A \\ \varepsilon \end{bmatrix} \\ S_1 = [S_I + S_M] & & S_2 = [-S_I - S_M] & & F = \begin{bmatrix} 0_{[n_n, 1]} \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad 2-57$$

Il s'agit alors d'un problème d'optimisation linéaire sous contraintes linéaires, qu'il est possible de résoudre avec l'algorithme du simplexe ou les méthodes de points intérieurs. Le système matriciel décrivant les équations issues des différences finies passe ainsi du statut de critère à celui de contraintes. Cette méthode de formulation peut, d'une façon générale, être employée pour transformer la plupart des éléments pouvant participer au calcul du critère en contrainte et inversement.

➤ Potentiel vecteur et densité de courant

Considérons à présent le cas où la densité de courant de certaines mailles du domaine fait partie des variables. Cela implique de définir un objectif que la distribution de courant devra minimiser. On choisit un critère à minimiser exprimé à l'aide d'une combinaison linéaire de potentiel vecteur (ce qui peut par exemple correspondre à des valeurs de potentiels vecteurs ou de champ magnétique fixées en certains points)

Le problème d'optimisation est alors le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\substack{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^2 \\ \varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0 \\ A \in \mathbb{R}^{n_n} \\ j \in \mathbb{R}^{n_j}}} (\gamma_1 \varepsilon_1 + \gamma_2 \varepsilon_2) \\ (MA - M_I j_{var} - S_{I_{fixe}} - S_M) \leq \varepsilon_1 \cdot \mathbf{1}_{[n_n, 1]} \\ - (MA - M_I j_{var} - S_{I_{fixe}} - S_M) \leq \varepsilon_1 \cdot \mathbf{1}_{[n_n, 1]} \\ (M_{obj} A - A_{obj}) \leq \varepsilon_2 \cdot \mathbf{1}_{[n_{obj}, 1]} \\ - (M_{obj} A - A_{obj}) \leq \varepsilon_2 \cdot \mathbf{1}_{[n_{obj}, 1]} \end{array} \right. \quad 2-58$$

Ce qui donne matriciellement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\substack{X \in \mathbb{R}^{n_n + n_j + 2} \\ X(n_n + n_j + 1) \geq 0, X(n_n + n_j + 2) \geq 0}} F^T X \\ M_1 X - S_1 \leq \mathbf{0} \\ M_2 X - S_2 \leq \mathbf{0} \end{array} \right. \quad 2-59$$

avec  $n_n$  le nombre total de nœuds du domaine,  $n_j$  le nombre de mailles dont la densité de courant est considérée comme une variable,  $n_{obj}$  le nombre de ligne de  $M_{obj}$  et :

$$M_1 = \begin{bmatrix} M & -M_I & -1 & 0 \\ M_{obj} & \mathbf{0}_{[n_{obj}, n_j]} & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} -M & M_I & -1 & 0 \\ -M_{obj} & \mathbf{0}_{[n_{obj}, n_j]} & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} A \\ j_{var} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad 2-60$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} S_{I_{fixe}} + S_M \\ A_{obj} \end{bmatrix} \quad S_2 = \begin{bmatrix} -S_{I_{fixe}} - S_M \\ -A_{obj} \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[n_n, 1]} \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

Les coefficients  $\gamma_k$  sont des valeurs fixées par l'utilisateur permettant d'homogénéiser et de pondérer l'impact de chaque terme (ici les  $\varepsilon_k$ ) dans le critère. Le terme  $S_{I_{fixe}}$  est pris en compte dans l'équation aux différences finies puisque rien n'interdit la présence, en zones distinctes, de mailles où la densité de courant est imposée et d'autres où elle constitue une variable du problème. Les matrices dont la description exacte n'est pas donnée dans le texte ( $M_I$  et  $M_{obj}$ ) sont décrites en détail dans l'annexe A.

Ce problème peut être mal posé (infinité de solutions si le nombre de variable densités de courant est supérieur au rang de  $M_{obj}$ ) et on lui préférera alors le problème suivant, qui intègre en plus une minimisation de la somme des valeurs absolue des densités de courant:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\substack{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{n_j} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_n} \\ \mathbf{j}_{var} \in \mathbb{R}^{n_j}}} \sum_{k \in \llbracket 1, n_j \rrbracket} \varepsilon_k \\
 & \mathbf{MA} - \mathbf{M}_I \mathbf{j}_{var} - \mathbf{S}_{I_{fixe}} - \mathbf{S}_M = \mathbf{0} \\
 & \mathbf{M}_{obj} \mathbf{A} - \mathbf{A}_{obj} = \mathbf{0} \\
 & \mathbf{j}_{var} \leq \boldsymbol{\varepsilon} \\
 & -\mathbf{j}_{var} \leq \boldsymbol{\varepsilon}
 \end{aligned} \tag{2-61}$$

avec  $\mathbf{j}_{var} = [j_1^{var}, \dots, j_{n_j}^{var}]$  et  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_j}]$

Qui donne matriciellement

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\substack{X \in \mathbb{R}^{n_n + 2n_j} \\ X(n_n + n_j + 1) \geq 0, X(n_n + n_j + 2) \geq 0}} \mathbf{F}^T \mathbf{X} \\ \mathbf{M}_1 \mathbf{X} - \mathbf{S}_1 \leq \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_2 \mathbf{X} - \mathbf{S}_2 \leq \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_3 \mathbf{X} - \mathbf{S}_3 = \mathbf{0} \end{array} \right. \tag{2-62}$$

Les matrices prenant la forme suivante ( $\mathbf{I}_{[n]}$  est la matrice identité de dimension  $n$ ) :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_1 &= [\mathbf{0}_{[n_j, n_n]} \quad \mathbf{I}_{[n_j]} \quad -\mathbf{I}_{[n_j]}] & \mathbf{S}_1 &= [\mathbf{0}_{[n_j, 1]}] & \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[n_n + n_j, 1]} \\ \mathbf{1}_{[n_j, 1]} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{M}_2 &= [\mathbf{0}_{[n_j, n_n]} \quad -\mathbf{I}_{[n_j]} \quad -\mathbf{I}_{[n_j]}] & \mathbf{S}_2 &= [\mathbf{0}_{[n_j, 1]}] & & \\
 \mathbf{M}_3 &= \begin{bmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{M}_I & \mathbf{0}_{[n_n, n_j]} \\ \mathbf{M}_{obj} & \mathbf{0}_{[n_{obj}, n_j]} & \mathbf{0}_{[n_{obj}, n_j]} \end{bmatrix} & \mathbf{S}_3 &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{I_{fixe}} + \mathbf{S}_M \\ \mathbf{A}_{obj} \end{bmatrix} & \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{j}_{var} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2-63}$$

*Remarque* : On utilise ici autant de variables  $\varepsilon_k$  additionnelles qu'il y a de variables  $j_k^{var}$ . En effet, ne définir qu'une seule variable additionnelle, comme dans le cas précédent, reviendrait à minimiser uniquement la valeur maximale des valeurs absolues des densités de courant, ce qui n'est pas nécessairement suffisant pour que le problème devienne bien posé (le problème ne se posait pas dans les cas précédents puisque l'unique variable  $\varepsilon$  devait tendre vers 0 et imposait donc de fait une minimisation pour chacun des termes du résultat de l'équation matricielle).

➤ Potentiel vecteur et aimantation

La méthode est similaire à celle qui a été présentée pour les densités de courant prises en tant que variables. La seule différence vient de la perméabilité qui, en toute rigueur, n'est pas égale à celle de l'air et qu'il serait nécessaire d'adapter selon que la valeur d'aimantation de la maille soit nulle ou non. En pratique, choisir une perméabilité fixe, égale à celle de l'air ou à celle du type d'aimant employé (typiquement 1,05 fois la perméabilité de l'air), dans les zones où les valeurs d'aimantation sont des variables, n'influe que très peu sur les résultats et la simplification est donc légitime dans une optique de prédimensionnement.

➤ Potentiel vecteur et perméabilité

L'introduction de la reluctivité comme variable pose plus de problèmes que pour les cas précédents (on utilise la reluctivité plutôt que la perméabilité car cela permet de manipuler des produits plutôt que des divisions qui peuvent être problématiques pour certains algorithmes d'optimisation). En effet, les variables reluctivité interviennent sous la forme de produit avec les variables potentiels vecteurs. Le problème à résoudre n'est donc plus linéaire, mais bilinéaire, tout au moins en partie (certaines contraintes restent linéaires).

En posant  $\mathbf{M}_{lin}$  la matrice correspondant aux contraintes linéaires issues du problème différences finies (équations des nœuds non adjacents d'une maille dont la perméabilité est une variable) et  $(\mathbf{M}_{bilin})_k$  les matrices correspondant à chaque équation scalaire bilinéaire (même formalisme pour  $\mathbf{S}_I^{lin}$ , etc.), le problème devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\substack{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^2 \\ \varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0 \\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_n} \\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_v}}} (\gamma_1 \varepsilon_1 + \gamma_2 \varepsilon_2) \\ (\mathbf{M}_{lin} \mathbf{A} - \mathbf{S}_I^{lin} - \mathbf{S}_M^{lin}) \leq \varepsilon_1 \cdot \mathbf{1}_{[n_n, 1]} \\ -(\mathbf{M}_{lin} \mathbf{A} - \mathbf{S}_I^{lin} - \mathbf{S}_M^{lin}) \leq \varepsilon_1 \cdot \mathbf{1}_{[n_n, 1]} \\ (\mathbf{M}_{obj} \mathbf{A} - \mathbf{A}_{obj}) \leq \varepsilon_2 \cdot \mathbf{1}_{[n_{obj}, 1]} \\ -(\mathbf{M}_{obj} \mathbf{A} - \mathbf{A}_{obj}) \leq \varepsilon_2 \cdot \mathbf{1}_{[n_{obj}, 1]} \\ \forall k \in \llbracket 1, n_{bilin} \rrbracket \quad [\mathbf{A} \quad \mathbf{v}] (\mathbf{M}_{bilin})_k \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} - (\mathbf{S}_I^{bilin})_k - (\mathbf{S}_M^{bilin})_k \leq \varepsilon_3 \end{array} \right.$$

$n_{bilin}$  est le nombre total d'équations scalaires bilinéaires et est égal au nombre de nœuds adjacents à une maille dont la perméabilité est variable. Il est donc nécessaire de définir autant de matrices  $(\mathbf{M}_{bilin})_k$ . La formulation du problème matricielle se complexifie donc légèrement, mais reste facilement réalisable de façon automatisée.

L'aspect le plus problématique réside dans le fait que les matrices  $(\mathbf{M}_{bilin})_k$  ne sont jamais définies positives. En effet, chaque terme bilinéaire correspond au produit d'un potentiel vecteur avec une perméabilité. Les matrices correspondantes possèdent donc nécessairement une diagonale nulle. La conservation de la trace d'une matrice carrée, quelle que soit sa base d'expression, implique donc que la somme des valeurs propres est nulle, ce qui se traduit nécessairement par des valeurs propres de signes opposés dès lors que la matrice est non nulle.

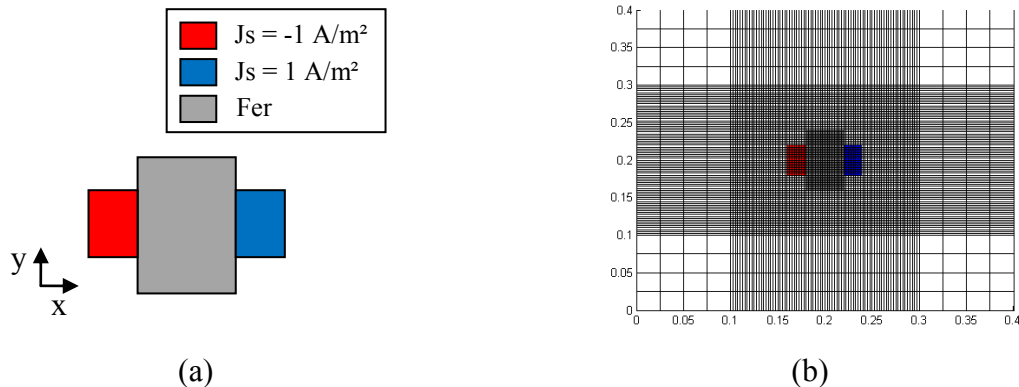
Le traitement des contraintes bilinéaires est de ce fait plus complexe et certaines bibliothèques d'algorithmes ne couvrent pas ce cas de figure (Cplex, notamment, qui est une bibliothèque de résolution de problème de programmation linéaire, mais qui peut résoudre certains problèmes bilinéaire en les ramenant à des problèmes linéaires par diverses méthodes de relaxation). Il sera donc nécessaire de se tourner vers des algorithmes dédiés au traitement de problèmes bilinéaires.

## 2.6.3 Exemples de résolution

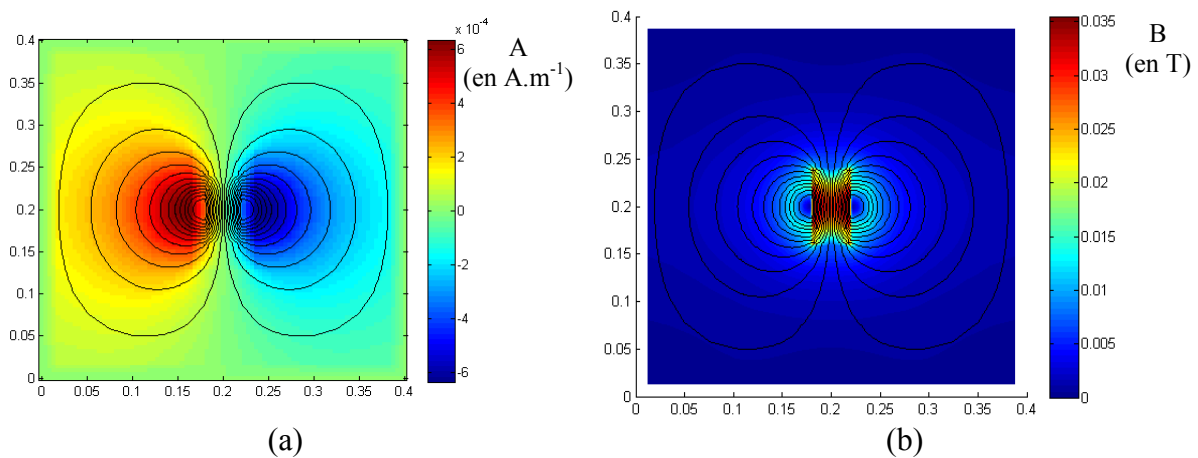
### 2.6.3.1 Validation du code de calcul par différences finies

Afin de valider le code différences finies développé pour l'étude, un exemple simple de structure magnéto-statique a été défini et les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus à l'aide du logiciel éléments finis FEMM 4.2. Le problème simulé est décrit Figure

2-16. Il s'agit d'un noyau ferromagnétique infiniment long et séparant deux nappes de courant de densité de courant égales en valeur absolue, mais de direction opposée. Des conditions de Dirichlet homogènes sont appliquées aux frontières du domaine.



Le problème d'optimisation obtenu est de la forme 2-56. Il est résolu à l'aide de la version pour matlab de la bibliothèque d'algorithme C-plex, développé par IBM ILOG. Le vecteur résultat est mis sous forme matricielle et l'on obtient ainsi la répartition du potentiel vecteur visible Figure 2-17-a. Le champ magnétique est calculé sur une grille décalée (calcul effectué au centre de chaque maille) à partir des valeurs de potentiel vecteur. Le résultat est donné en Figure 2-17-b.



Le même problème a été simulé sous FEMM (structure et taille du domaine identique). Les résultats sont comparés Figure 2-18. Les deux courbes se superposent parfaitement. Le code différences finies semble donc correct et les résultats obtenus ont une précision amplement suffisante pour l'étude prospective menée ici.

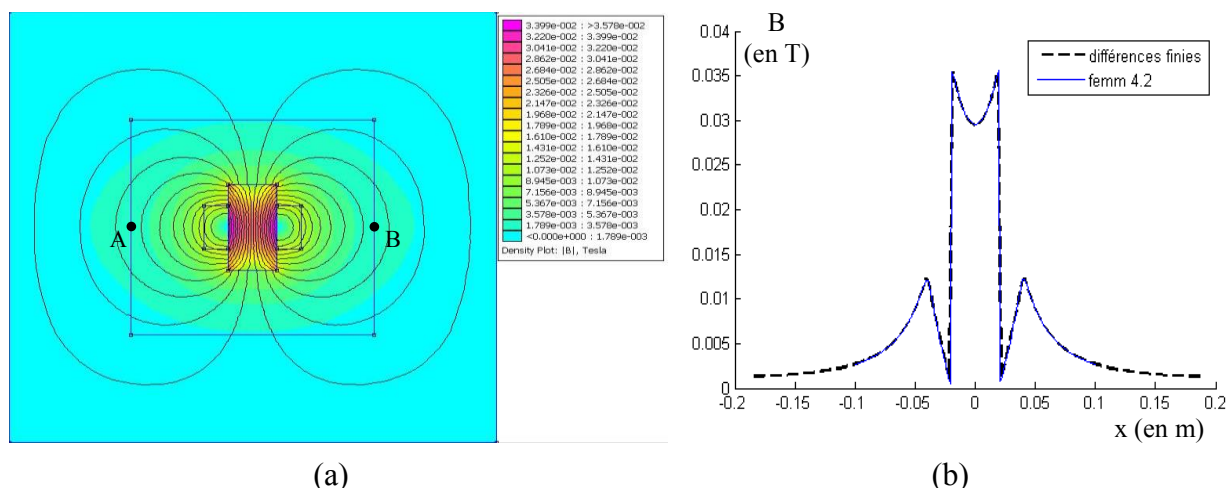


Figure 2-18-a : Champ magnétique B obtenu sous FEMM 4.2.

Figure 2-18-b : Comparaison de la norme du champ magnétique obtenue par le code différence finies et le logiciel FEMM sur le segment [AB].

### 2.6.3.2 Cas illustratif : résolution d'un problème de différences finies avec optimisation de la distribution de courant

Le code différences finies employé ayant été validé, il est à présent possible de tester sa capacité à résoudre parallèlement un problème identique, tout en optimisant les variables de conception. Le problème que l'on se propose de résoudre est un problème d'optimisation de répartition de sources et est décrit Figure 2-19. Le domaine comprend donc une pièce ferromagnétique à géométrie fixe, une distribution de courant fixe (en bleu) et une zone où la densité de courant est variable et fixée par l'algorithme lors de la résolution. L'objectif défini est d'obtenir un potentiel vecteur nul au niveau de l'axe de symétrie vertical de la pièce ferromagnétique. Cet objectif ne présente pas d'intérêt particulier du point de vue de la conception, puisque la solution est triviale et consiste à définir une distribution de courant symétrique à la distribution de courant fixe et de signe opposé. Il permettra par contre de valider la pertinence d'une solution triviale.

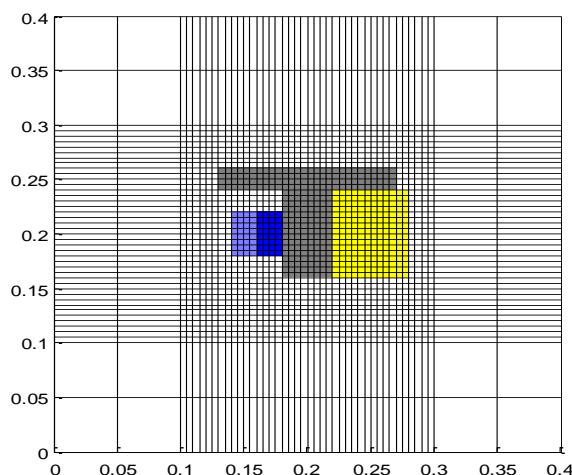


Figure 2-19 : Schéma du problème d'optimisation de répartition des sources. La zone jaune correspond à la zone à densité de courant variable. La géométrie des pièces ferromagnétiques et la distribution de courant en bleu (dégradé proportionnel à la densité de courant imposée dans chaque maille) sont fixes. L'objectif est d'obtenir un potentiel vecteur nul (axe de symétrie pour B) au niveau de l'axe de symétrie vertical de la pièce ferromagnétique ( $x=0.2$ ).

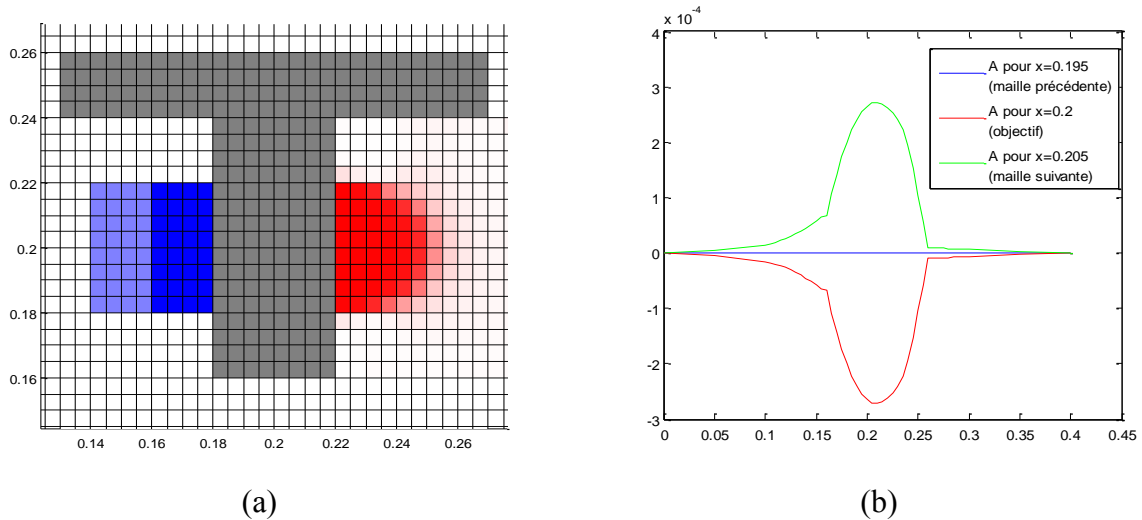


Figure 2-20-a : Distribution de courant obtenue après résolution du problème d'optimisation.  
 Figure 2-20-b : Valeurs du potentiel vecteur au niveau du segment de définition de l'objectif ( $x=0.2m$ ), comparé aux valeurs de potentiel aux niveaux des nœuds adjacents

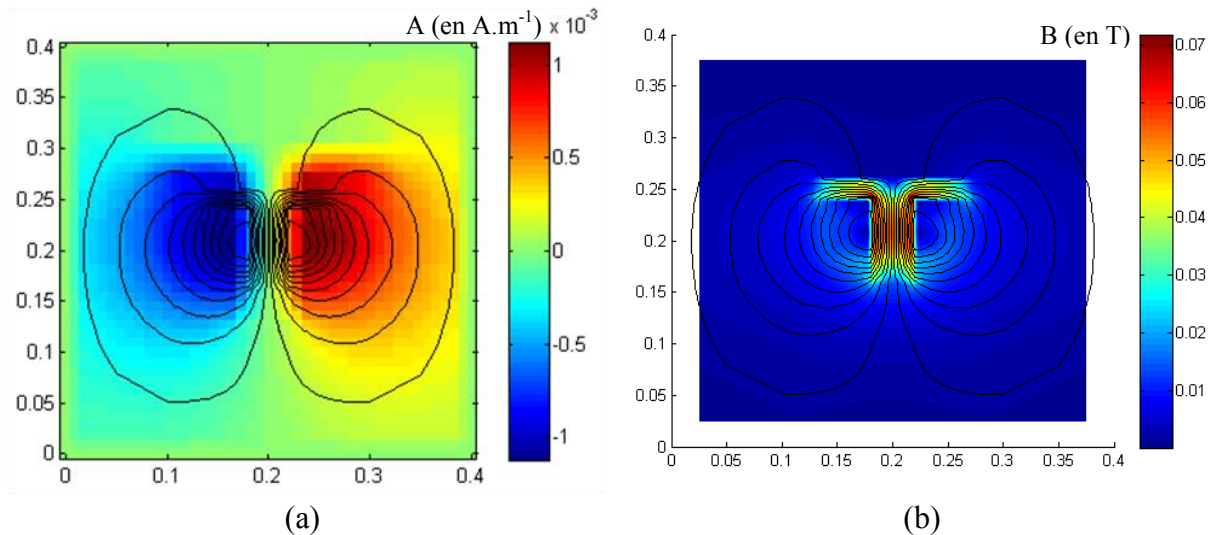


Figure 2-21-a : Carte de densité du potentiel vecteur obtenue après résolution du problème de différences finies  
 Figure 2-21-b : Cartographie du champ magnétique B obtenu après résolution du problème de différences finies

La distribution de courant obtenue comme solution est donnée en Figure 2-20, ainsi que la distribution de potentiel vecteur produite au niveau de l'axe ( $x=0.2m$ ). Cette dernière est comparée aux valeurs de potentiels vecteurs relevées aux niveaux des nœuds adjacents, de façon à mieux visualiser les ordres de grandeurs. L'erreur moyenne par rapport aux objectifs est de l'ordre de  $10^{-9}$  (valeur maximale  $10^{-8}$ ). Le résultat fourni par l'algorithme est donc tout à fait satisfaisant. Les différences visibles entre la distribution de courant fixe et la distribution solution sont en grande partie dues au fait que le problème est mal posé, car le nombre d'équations de contrainte provenant des potentiel vecteurs objectifs est inférieur au nombre de variables densités de courant. Cependant, ce dernier point n'explique pas tout, puisque les valeurs de potentiels vecteurs au niveau de l'axe vertical central ne sont pas parfaitement nulles. Les erreurs d'arrondis provenant notamment des grandes différences d'ordre de grandeurs entre les différentes valeurs du problème peuvent ainsi induire une très légère instabilité de la solution du problème (puisque en toute rigueur, il existait une solution



optimale fournissant une distribution de potentiel vecteur parfaitement nulle au niveau de l'axe  $x=0.2\text{m}$ ).

Pour conclure par rapport à cet exemple, la Figure 2-21 présente les distributions du potentiel vecteur et du champ magnétique obtenues à l'issue de la résolution. On vérifie bien la symétrie du champ par rapport à l'axe  $x=0.2$  et l'antisymétrie du potentiel vecteur.

## **2.7 Conclusion et perspectives**

L'objectif de cette étude était de réaliser un état de l'art des méthodes d'optimisation applicables à la conception optimale de dispositifs magnéto-statiques, dans l'optique de définir des voies potentielles pour l'élaboration d'un outil de conception de structure optimale.

Pour cela, les principales notions utiles à la compréhension des problématiques liées à l'optimisation ont été rappelées. Les principaux algorithmes employés ont ensuite été brièvement décrits. Enfin, les trois approches possibles de conception optimale de dispositifs magnéto-statiques (optimisation paramétrique, géométrique et topologique) ont été présentées. L'analyse de ces approches, couplées aux algorithmes de résolution dans la littérature, laisse apparaître deux grandes approches possibles :

- les méthodes métaheuristiques. Elles sont largement utilisées, mais ne garantissent cependant pas des résultats directement utilisables (une interprétation de la structure obtenue par un expert est très souvent nécessaire du fait des nombreuses irrégularités que présente la solution), en particulier lorsque le nombre de variables est important (optimisation topologique). Elles nécessitent de plus généralement un nombre d'évaluations très important, ce qui peut être problématique pour des problèmes d'optimisation dont le calcul du critère est long (calcul de valeur par simulation numérique 3D, etc.).
- Des méthodes de descente, couplées avec un calcul de gradient (sensibilité) par formulation d'un problème adjoint. Couplées à des méthodes de convexification/pénalisation, les résultats obtenus sont assez satisfaisants et proches d'un design directement exploitable.

A ces deux principales approches s'ajoute l'utilisation d'algorithmes déterministes globaux, mais leur domaine d'application est pour le moment cantonné aux problèmes d'optimisation paramétrique possédant relativement peu de variables (de l'ordre de la vingtaine) et pour lesquels un modèle analytique au moins partiel est disponible.

A partir de cette analyse de l'existant, on peut conclure que deux approches semblent le plus à même d'être compatibles avec une méthode de conception pouvant garantir l'obtention de l'optimum global :

- les méthodes d'homogénéisation, couplées à des algorithmes de descente et des calculs de gradient par introduction d'un état adjoint, en s'intéressant à la convexité de la formulation du problème,
- la résolution directe du problème d'optimisation, en s'appuyant sur une formulation explicite du problème.

La première méthode a déjà fait preuve de sa capacité à fournir des solutions pertinentes au problème de conception optimale. L'introduction de la notion de convexité permettra de garantir l'obtention de l'optimum global. La résolution du problème inverse de conception optimale à l'aide de ce type d'algorithme a déjà été réalisée avec succès sur de nombreux

problèmes, d'abord dans le domaine de la conception de structure mécanique, puis les concepts ont été appliqués à la conception de structures électromagnétiques. La majorité des concepts et méthodes sont donc dors et déjà disponibles et fonctionnels et la réalisation d'un outil de conception de structures optimales automatisées peut être envisagée à relativement court terme. Un premier outil, basé sur l'utilisation du logiciel élément fini FEMM est en cours de réalisation. Dans un second temps, un environnement de conception automatisée mêlant optimisation paramétrique, géométrique et topologique et guidée par des calculs de gradients via des méthodes de problème adjoint peut être envisagé. L'apport d'un tel outil de conception serait très adapté, dans le cadre du dimensionnement de structures possédant un comportement magnétostatique difficile à modéliser analytiquement, comme le circuit magnétique d'un propulseur à effet Hall par exemple. Par ailleurs, l'introduction de méthodes d'homogénéisation (et non plus de convexification) peut s'avérer intéressante, en permettant de travailler dans un espace de solutions physiquement réalisables (notion de matériaux composites). Cette réduction de l'espace de recherche par rapport aux méthodes de convexification permet d'aboutir à de meilleures solutions une fois l'étape de pénalisation réalisée [All-07].

La deuxième approche implique de considérer conjointement les variables du problème d'optimisation et celles associées à la modélisation par différences ou éléments finis, ce qui implique un nombre de variables beaucoup plus important, mais permet d'obtenir une formulation explicite reliant variables de conception et critère à optimiser. L'augmentation de la puissance de calcul numérique autorise désormais à envisager ce type de solutions, qui peuvent permettre l'utilisation d'une classe plus large d'algorithmes d'optimisation pour la résolution du problème de conception optimale (qu'elle soit paramétrique, géométrique ou topologique), comme les algorithmes de programmation linéaire, quadratique ou même, à plus long terme, des méthodes d'optimisation déterministes globales. Cette approche n'a évidemment pas la maturité de la précédente, mais semble prometteuse.

La méthode permet actuellement le calcul d'une densité de courant optimale, pouvant prendre des valeurs entières ou continues et la suite des travaux pourrait s'articuler comme suit :

- implémentation de la possibilité de définir des aimantations variables : il n'y a pas de difficultés techniques particulières pour cela et la formulation est très similaire à celle des variables de densités de courant,
- implémentation du code d'optimisation autour d'une méthode de résolution par élément finis, afin de gagner en précision au niveau du modèle et surtout en souplesse au niveau du maillage,
- prise en compte de la perméabilité en tant que variable : les premières tentatives se sont pour l'instant avérées infructueuses. Une approche par relaxation des contraintes bilinéaires (méthode de MacCormick) a été tentée sans succès et le principal outil de résolution employé, C-plex, ne résout pas les problèmes d'optimisation quadratique non convexes. Cependant, des algorithmes dédiés à ce type de problème existent et de nombreuses méthodes de relaxation des contraintes bilinéaires ont été développées. Il reste donc un certain nombre de voies à tester.

## **Chapitre 3**

**Dimensionnement de circuit magnétique  
pour deux moteurs de laboratoire  
(propulseur forte puissance PPS20K ML et  
PPS-FLEX)**

Dans le cadre des travaux initiés lors de cette thèse, les circuits magnétiques de deux propulseurs à effet Hall aux caractéristiques très différentes ont été dimensionnés. Le PPS20K ML est un prototype de propulseur forte puissance (20kW) réalisé dans le cadre du projet européen Hiper. Des contraintes supplémentaires sont liées à cette puissance élevée et à la géométrie qui en découle, mais la méthode de dimensionnement employée peut être utilisée pour tout type de propulseur à structure classique. L'étude réalisée a dans ce cas été circonscrite au prédimensionnement du circuit magnétique. Une étude plus complète a par contre été effectuée dans le cas du PPS-Flex, un prototype de propulseur permettant le réglage du champ magnétique. Cette partie détaille successivement les méthodes de dimensionnement de chacun de ces circuits magnétiques. La réalisation pratique du prototype PPS Flex sera, quant à elle, abordée dans la partie suivante.

### **3.1      PPS20K ML**

Le travail détaillé dans cette partie concerne un prédimensionnement du circuit magnétique pour un propulseur à effet hall forte puissance, développé dans le cadre du projet européen Hiper. Le contexte de cette étude, et les raisons de son opportunité seront tout d'abord brièvement exposés. Le dimensionnement étant intimement dépendant de la structure choisie pour le propulseur, ainsi que de ses caractéristiques géométriques, ces aspects seront présentés dans une seconde partie. La troisième partie détaillera ensuite les méthodes employées pour le dimensionnement, et enfin, une dernière partie sera consacrée au circuit magnétique proposé et aux performances attendues.

#### **3.1.1      Objectifs, intérêts**

La faible poussée des propulseurs à effets Hall actuellement en vol les cantonne à un domaine de missions encore relativement restreint, incluant principalement le maintien à poste et certains transferts d'orbite de satellite. Ils ont cependant démontré leur capacité à remplacer avantageusement la propulsion chimique en tant que moyen de propulsion principal pour des missions plus lointaines, comme des vols de sondes spatiales (Smart-1, Hayabusa), et de nouveaux types de missions peuvent être envisagés à moyen et long termes pour les propulseurs à effet Hall, comme par exemple la propulsion de vols habités. Entre alors évidemment en compte la notion de durée du vol, qui elle-même est directement liée à la poussée développée par les propulseurs. Le développement de propulseurs de plus fortes puissances, possédant une force de poussée plus importante, fait donc partie des champs d'amélioration importants à moyen terme pour ce type de propulsion.

Le projet européen HIPER s'inscrit dans une perspective de réflexion sur les nouveaux moyens de propulsion des missions futures, et constitue donc un cadre idéal pour l'étude d'un propulseur forte puissance. Le profil de mission sélectionné pour le projet est le suivant:

- 4 à 6 propulseurs électriques
- poussée théorique: 1 à 10 N
- Isp : 2000s
- Puissance électrique d'un propulseur: 20 kW/N
- Tension nominale: 300 à 1000V
- Durée de fonctionnement totale du propulseur: 5 000 à 50 000 h
- Ergol : xenon, argon, vapeurs de métal (Hg,Cs,Bi)

La solution proposée impliquant un propulseur à effet Hall est bien sûr celle qui nous intéresse ici. Les données choisies pour le prototype sont les suivantes:

- puissance du prototype: 20 KW
- poussée du prototype : 1 N

Ces valeurs correspondent aux valeurs basses des plages requises pour le profil de mission, mais le prototype devra de plus démontrer la scalabilité des différents processus mis en jeu (fonctionnement et mode de fabrication), afin de garantir dans une certaine mesure la faisabilité d'un propulseur pour des valeurs de puissance et de poussée plus élevées.

Différentes architectures de propulseurs à effet Hall forte puissance peuvent être envisagées. La Figure 3-1 représente les schémas des trois principales structures possibles.

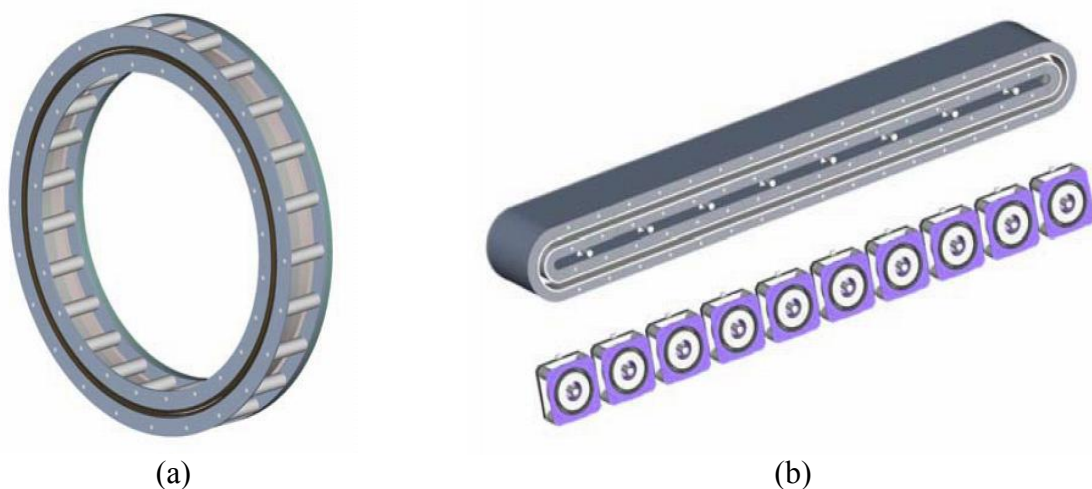


Figure 3-1: Structures envisagées pour le prototype de propulseur forte puissance (a) architecture monolithique (b) propulseur "race track" et propulseur multi voies (cluster) (crédit SNECMA)

La première et la plus simple d'un point de vue développement est la structure multi voies, constituée d'un cluster de propulseurs de plus faible puissance déjà commercialisés. Celle-ci a été écartée, car l'intérêt scientifique aurait été relativement restreint (même si la prise en compte des interactions entre les différents propulseurs est loin d'être un problème trivial), ou du moins inférieur au retour d'expérience lié à la réalisation d'un propulseur ayant l'une des deux autres architectures.

La deuxième structure est de type "race track". Il s'agit d'un propulseur classique, auquel une partie rectiligne de canal à été adjointe. Cette architecture possède des aspects séduisants, puisque il est théoriquement possible d'adapter les paramètres de fonctionnement du propulseur en adaptant la longueur de sa partie rectiligne. Cependant, cela correspond à une altération importante de l'architecture classiquement utilisée et certains problèmes directement liés à cette modification de géométrie peuvent être observés (densité de plasma non homogène tout au long du canal). Ces derniers, en s'ajoutant à ceux venant de la forte puissance, auraient pu rendre difficile l'interprétation des résultats. De plus, les performances mesurées sur les propulseurs de ce type existants sont inférieures à celle obtenues à l'aide d'une architecture classique de puissance équivalente. Cette structure a donc été à son tour écartée.

La dernière structure possible est la classique architecture monolithique. C'est donc cette dernière solution qui a été préférée. Ce choix est de plus conforté par les données extraites des études comparatives prenant en compte des propulseurs de différentes puissances déjà existant, qui montrent que le rendement d'un moteur tend à s'améliorer lorsque le diamètre du propulseur, et donc la puissance, (toutes les grandeurs étant conjointement adaptées) vont grandissant.

### 3.1.2 Spécifications

Parmi les différentes contraintes à prendre en compte pour le design du circuit magnétique, trois aspects peuvent être dégagés. D'une part, le circuit magnétique doit s'adapter à la géométrie du canal et des différents autres éléments constitutifs du propulseur, ce qui impose des contraintes géométriques au circuit. D'autre part, le champ magnétique produit par la structure doit se rapprocher autant que possible des cartes de champ définies au préalable et qui garantissent théoriquement un point de fonctionnement du propulseur optimal. Enfin, les contraintes de scalabilité imposées au prototype doivent aussi être prises en compte dans l'élaboration du circuit magnétique.

#### 3.1.2.1 Contraintes géométriques

Les principales contraintes géométriques émanent du canal en céramique du propulseur. Ses dimensions, illustrées Figure 3-2, et définies à l'aide d'études menées en parallèle par le laboratoire ICARE et la Snecma, impactent à la fois sur l'espace disponible pour le circuit magnétique et sur les cartes de champ requises. La largeur du canal constitue en effet directement l'entrefer du circuit magnétique, or plus ce dernier est important et plus il est coûteux énergétiquement de produire une topologie magnétique donnée, à niveau de champ égal.

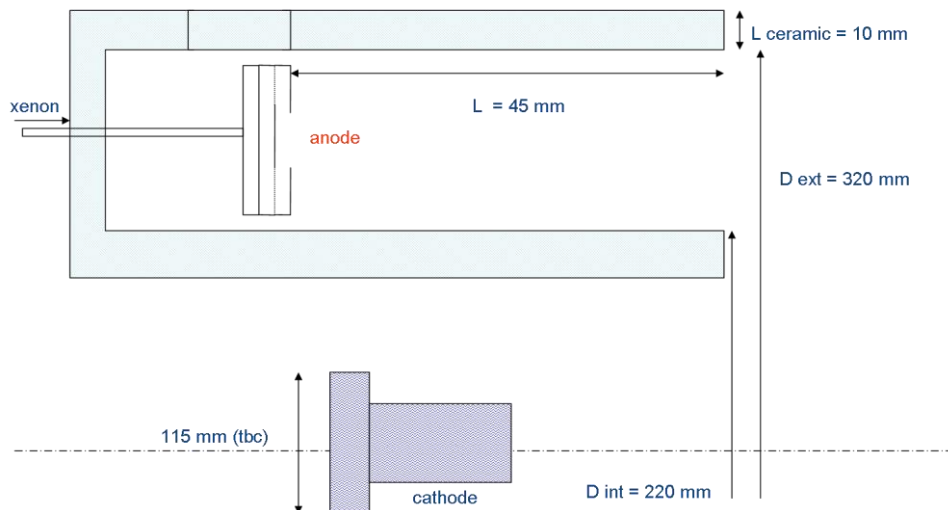


Figure 3-2: Forme et dimensions du canal du PPS20kML (Image SNECMA)

D'autre part, il a été choisi pour le PPS20K ML de disposer la cathode au centre du propulseur (cette configuration se retrouve sur plusieurs propulseurs forte puissance, comme le NASA 457M d'une puissance nominale de 50kW - photo Figure 3-3), ce qui réduit d'autant la place disponible pour le dimensionnement du circuit magnétique.

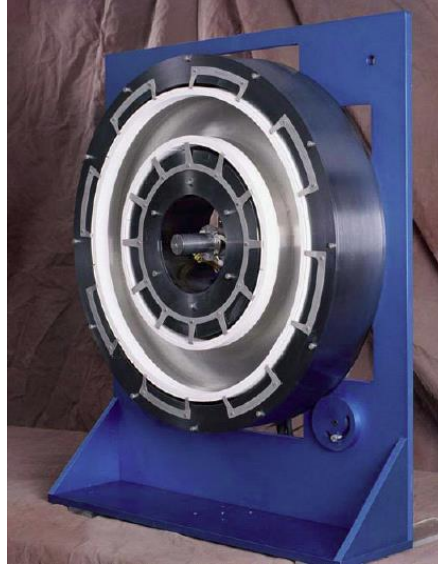


Figure 3-3: Propulseur NASA 457M, présentant une cathode centrale.

Enfin, il est nécessaire de prendre en compte les différentes connectiques de la chambre du propulseur (arrivée de gaz, alimentation de l'anode, etc.), ainsi qu'un possible allongement de la longueur totale du canal, en fonction du choix effectué pour le positionnement de l'anode.

### 3.1.2.2 Cartographie magnétique souhaitée

Les objectifs en matière de cartes de champ dans le canal ont été définis à partir de cartographies classiquement utilisées pour des propulseurs de plus faibles puissances et dont les caractéristiques ont été homothétiquement adaptées aux dimensions du canal du PPS20K ML. La valeur maximale du champ au centre du canal  $a$ , quant à elle, été définie à l'aide de lois d'échelle en partie empiriques (les amplitudes ne seront cependant pas données ici pour des raisons de confidentialité).

Le profil de champ au centre du canal ainsi obtenu est donné Figure 3-4. Il correspond à une topologie magnétique classique, ne présentant pas de zéro de champ.

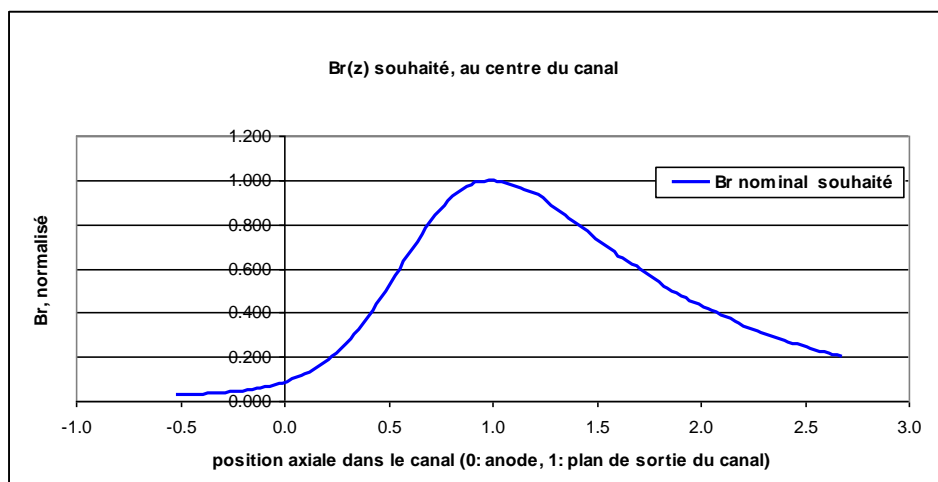
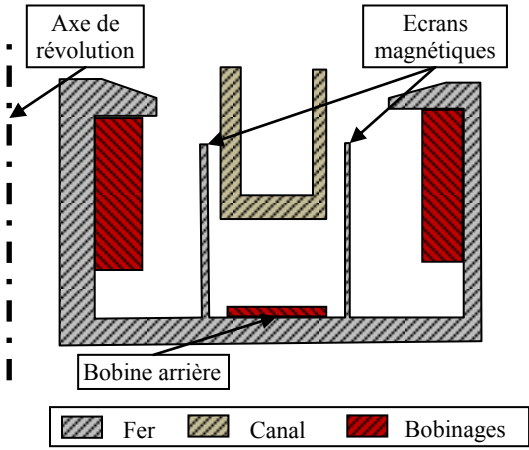
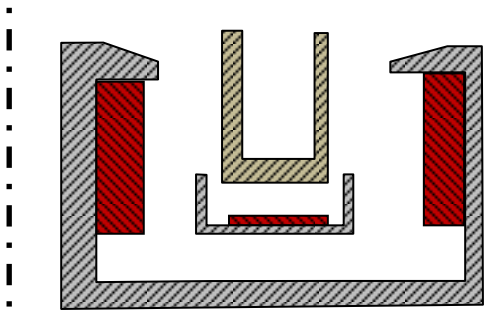


Figure 3-4: Profil de champ souhaité au centre du canal du PPS20K ML, normalisé par rapport à sa valeur maximale.

### 3.1.3 Choix du type de structure

Les méthodes de design par optimisation paramétriques qu'il a été choisi d'employer ici nécessitent un choix préalable de structure (contrairement aux méthodes de dimensionnement par optimisation topologiques, voir partie 2.4.1.3). Ce choix a été effectué parmi un éventail de structures plus ou moins dérivées de la géométrie classiquement utilisée, de façon à profiter au maximum de l'expertise développée par les partenaires du projet. Afin de limiter les modifications déjà importantes du PPS20K ML par rapport au modèles de propulseurs plus basses puissances existants, il a en effet été décidé d'éviter un changement trop drastique de géométrie, qui pourrait occasionner des comportements inattendus d'un point de vue thermique par exemple. Différentes architectures, autour de la structure classiquement utilisée, ont donc été testées. Elles sont répertoriées dans le Tableau 3-1. Pour chacune d'elle, un dimensionnement rapide par essais erreurs (itérations manuelles successives des paramètres dimensionnants en fonction de l'écart constaté avec l'objectif) a été réalisé. Les conclusions quant au potentiel de chaque géométrie sont données en regard, mais précisons d'ores et déjà qu'aucune de ces structures n'a permis d'obtenir exactement la topologie magnétique souhaitée à l'issue de cette première étape.

 <p>Axe de révolution</p> <p>Ecrans magnétiques</p> <p>Bobine arrière</p> <p> <span style="display: inline-block; width: 10px; height: 10px; background-color: #cccccc; border: 1px solid black;"></span> Fer         <span style="display: inline-block; width: 10px; height: 10px; background-color: #90ee90; border: 1px solid black; margin-left: 10px;"></span> Canal         <span style="display: inline-block; width: 10px; height: 10px; background-color: #ff0000; border: 1px solid black; margin-left: 10px;"></span> Bobinages     </p>	<p>Configuration classique, avec écrans magnétiques et bobines arrière.</p> <p>➔ Résultats encourageants, mais ne répondant pas totalement aux attentes, en matière de topologie magnétique et de poids de la structure.</p>
	<p>Modification de la forme des écrans afin de dissocier la fonction de courts-circuits magnétiques, de celle de pôles secondaires.</p> <p>➔ Les capacités de réglages offertes par la structure semblent intéressantes et conduisent à certaines topologies inaccessibles avec la structure classique. La topologie objectif n'a cependant pas pu être atteinte ou suffisamment approchée sans dépasser les valeurs de densité de courant physiquement acceptables pour les bobinages.</p>



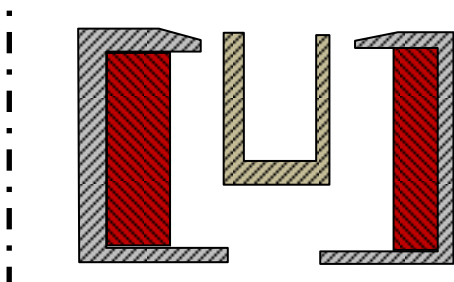
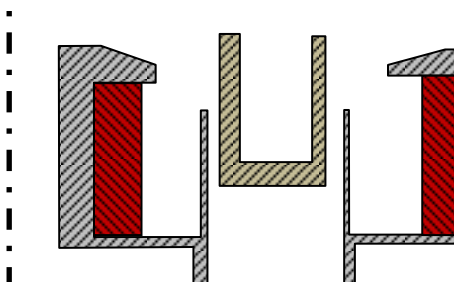
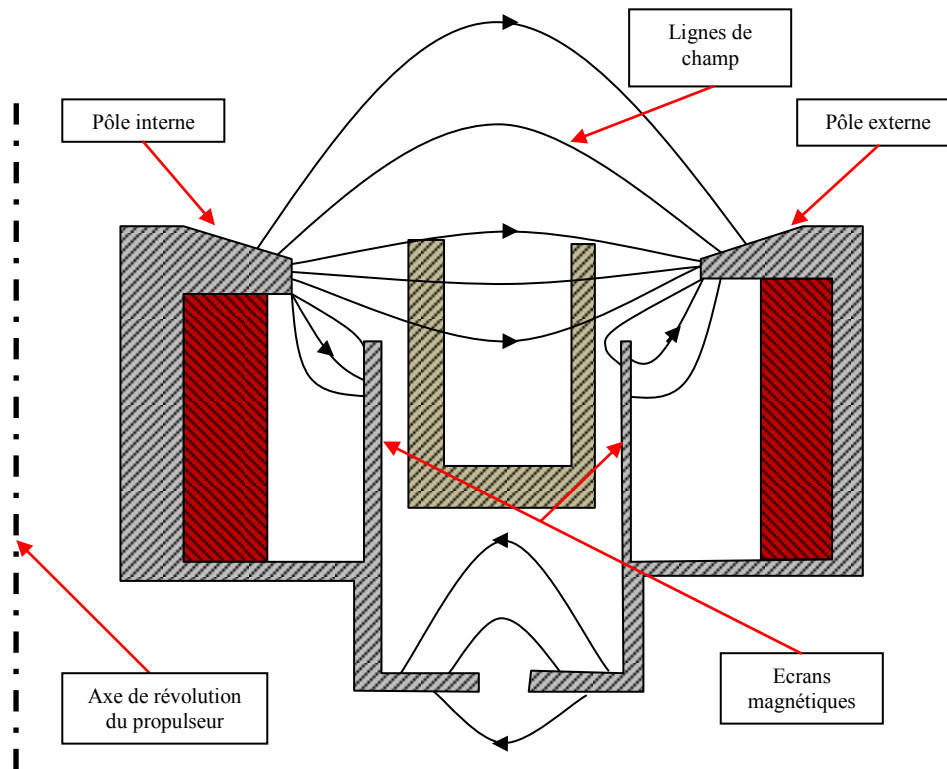
	<p>Structure en deux modules, interne et externe, séparés.</p> <p>→ La simplicité de la structure et son faible encombrement en font une piste intéressante pour des propulseurs de plus fort diamètre, mais la place impartie dans le cas présent n'a pas permis d'atteindre les objectifs fixés.</p>
	<p>Configuration finalement choisie. Il s'agit d'une structure classique dont la masse a été minimisée. La bobine arrière peut être remplacée par un entrefer arrière, pour un résultat équivalent.</p>

Tableau 3-1: Architectures envisagées pour le circuit magnétique du PPS20k ML

Le principe du fonctionnement de l'architecture sélectionnée est rappelé par le schéma donné Figure 3-5 : le flux magnétique, en l'absence d'autre partie ferromagnétique a tendance à aller du pôle interne vers le pôle externe. Deux pièces ferromagnétiques, généralement appelées "écrans magnétiques", sont de plus positionnées de part et d'autre du canal céramique et se comportent comme des pôles magnétiques secondaires. Ils permettent ainsi de limiter le flux traversant le fond du canal et de limiter la zone de fort champ à une bande plus ou moins étroite en sortie de canal.



*Figure 3-5: Schéma de principe de l'architecture envisagée*

### **3.1.4 Design et optimisation**

#### **3.1.4.1 Optimisation paramétrique de la géométrie via simulation éléments finis**

Le dimensionnement d'une telle structure magnétique via une optimisation basée sur un modèle analytique du type circuit de reluctances n'est pas approprié. En effet, le circuit magnétique comporte des flux de fuites, en particulier à travers les écrans magnétiques, dont les amplitudes sont du même ordre de grandeur que le flux utile traversant le canal. Par ailleurs, ces flux varient énormément en fonction de géométries des différentes parties ferromagnétiques. Le développement d'un modèle analytique fiable nécessiterait de ce fait une étude paramétrique préalable de manière à constituer des surfaces de réponses, sur lequel pourrait ensuite s'appuyer l'algorithme d'optimisation. Le cadre de ces études serait cependant nécessairement restrictif, puisqu'elles nécessitent la définition d'une structure de façon relativement figée n'offrant pas la même marge de manœuvre pour l'optimisation de forme.

Enfin, si un modèle analytique simple constitué à partir des lois de la magnétostatique (théorème d'Ampère et conservation du flux) est bien adapté à des processus d'optimisation globale, il se construit sur des grandeurs physiques telles que le flux ou les valeurs moyennes de champ et ne peut, par la même, prendre en compte le gradient de champ magnétique, élément fondamental de la topologie du propulseur.

Il a donc été choisi d'employer une méthode d'optimisation faisant appel à une modélisation par éléments finis de la structure pour évaluer la pertinence d'un set de paramètres.

### 3.1.4.1.a Principe de la méthode employée

La méthode de dimensionnement développée couple un algorithme d'optimisation paramétrique à une résolution par éléments finis afin d'aboutir à une géométrie optimisée. Pour des raisons de simplicité et de flexibilité de l'approche, il a été choisi de traiter le modèle éléments finis en boîte noire, prenant en données d'entrée les paramètres géométriques de la structure et donnant en sortie les valeurs de champs pour une configuration de courant optimale. Un critère d'évaluation pour la fonction d'optimisation est ensuite calculé afin d'évaluer la concordance entre les valeurs de champs obtenues et l'objectif initialement défini.

Le principe d'une telle optimisation est schématisé Figure 3-6. L'algorithme est classique, à l'exception de l'étape de calcul du champ magnétique détaillée dans le paragraphe suivant.

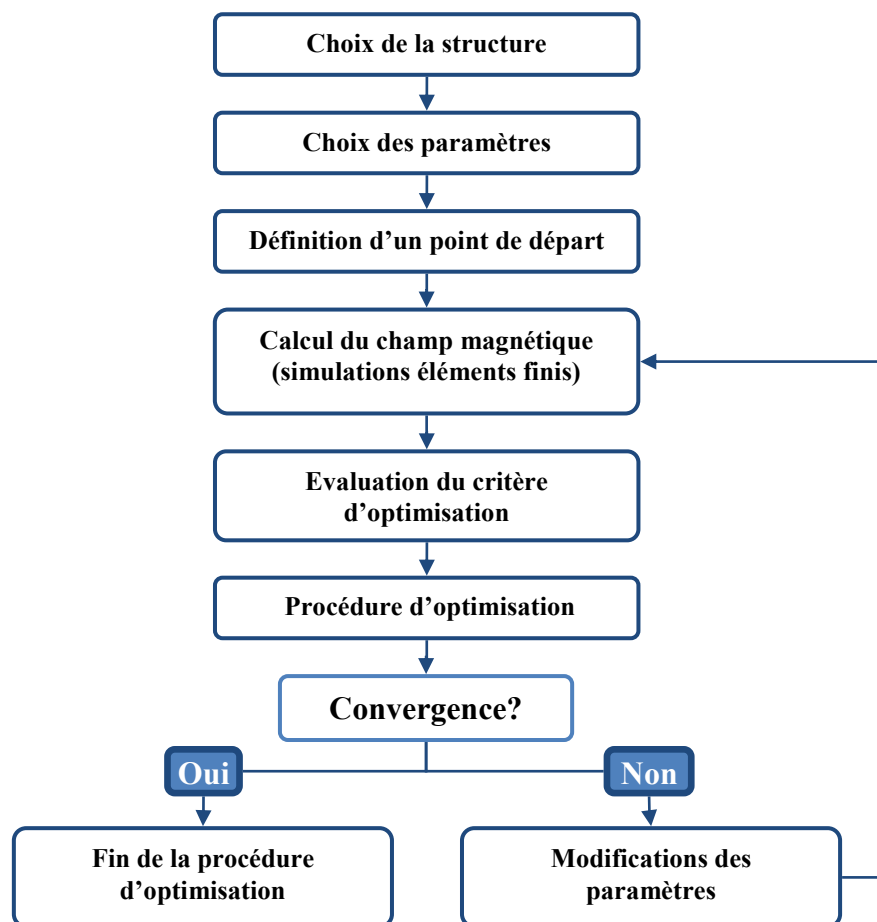


Figure 3-6: Principe de l'algorithme d'optimisation employé

### 3.1.4.1.b Calcul du champ obtenu pour chaque set de paramètres

Le calcul du champ magnétique présent à l'intérieur du canal du propulseur est réalisé à l'aide d'un modèle éléments finis. Les hypothèses classiquement utilisées d'homogénéité azimutale du champ dans le canal (invariance du champ  $B$  selon  $\theta$ ) permettent de se ramener à un modèle 2D, ce qui représente un gain de temps considérable à chacun des nombreux appels de la fonction d'évaluation du critère au cours de la procédure d'optimisation.

Le champ produit par une géométrie donnée est dépendant des courants alimentant chacun des bobinages. Deux approches méthodologiques ont été envisagées afin de déterminer les valeurs de ces courants.

Dans le premier cas, les valeurs de courants sont considérées comme les variables géométriques au cours de l'optimisation. Cette approche montre cependant rapidement ses limites. En effet, dès lors que le nombre de points de mesure du champ servant à définir la cartographie objectif (et donc le critère d'optimisation) est suffisant, il correspond à chaque géométrie une et une seule configuration de courant permettant de minimiser le critère. Chaque modification de la géométrie entraîne alors a priori une modification des courants optimaux. La dépendance entre les deux types de variables, électriques et géométriques, est ainsi trop importante pour pouvoir être convenablement traitée de front. Cette formulation a pour conséquence une multiplication des minima locaux qui restent a priori très éloignés du minimum global et s'avère ainsi totalement inefficace pour un nombre de variables géométriques supérieur à 5.

Dans la seconde méthode préconisée, il s'agit de différencier les variables géométriques et électriques en appliquant une résolution en deux temps prenant en compte la différence de nature existant entre les deux types de variables. L'idée est ainsi d'évaluer les géométries produites à chaque itération sur leur point de fonctionnement optimal, i.e. lorsque les valeurs des courants d'alimentation des bobines de la structures sont optimisées de façon à générer la carte de champ la plus proche possible de l'objectif fixé au sens du critère employé lors de l'optimisation, à l'aide d'une sous-procédure appelée à chaque itération de l'algorithme général. La méthode possède des inconvénients. D'une part, elle requiert un nombre de simulations éléments finis à chaque itération égal au nombre de valeurs de courants indépendantes dans le système et, d'autre part, elle se base sur le théorème de superposition du champ pour le calcul des courant optimaux, ce qui restreint son application au domaine linéaire, en supposant le circuit magnétique non saturé. Elle conduit cependant à des résultats bien plus satisfaisants.

La procédure à chaque itération de l'algorithme principal est la suivante:

Un set de valeurs pour les variables géométriques est fixé à partir des résultats issus des itérations précédentes. Afin d'obtenir les valeurs de champs servant à évaluer la pertinence des dimensions sélectionnées, il est encore nécessaire de définir les valeurs de courants parcourant chaque bobine du système. Pour cela, une simulation par éléments finis est réalisée pour chacune des bobines du système. Pour chacune de ces simulations, le courant de la bobine concernée est fixé à une valeur arbitraire  $I_{simu}$  alors que les autres bobines ne sont pas alimentées. Les valeurs de champs obtenues aux différents points de mesure sont relevées dans chacun des cas. Cette étape de récupération de données réalisée, nous obtenons, pour n bobines et m points de mesures, les vecteurs de valeurs de champ suivants :

$$\forall i \in 1, \dots, n \quad \mathbf{B}_i = [Br_1^i \dots Br_m^i \quad Bz_1^i \dots Bz_m^i]$$

Avec  $Br_j^i$  et  $Bz_j^i$  les valeurs de la projection radiale (respectivement axiale) du champ magnétique produit par la bobine i au point de mesure j.

Il est alors possible d'appliquer le théorème de superposition pour déterminer le champ produit par n'importe quelle configuration d'alimentation, par combinaisons linéaires des valeurs de champs obtenues lors des simulations précédentes réalisées en alimentant les bobines individuellement. L'application de ce théorème nécessite cependant de supposer les matériaux magnétiques comme linéaires. Il est donc nécessaire de vérifier que les plages de variations des variables soient définies de façon à éviter toute saturation des matériaux

magnétiques afin de demeurer dans le domaine de validité du théorème. Sous ces hypothèses, le vecteur de champ aux différents points de mesure peut être calculé ainsi :

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1..n} \frac{I_i}{I_{simu}} \mathbf{B}_i$$

Avec  $\mathbf{B}_i$  le vecteur de champ B obtenu au point de mesure lorsque la bobine i est parcourue par un courant  $I_{simu}$ , les autres n'étant pas alimentées, et  $I_i$  le courant parcourant la bobines i dans la configuration choisie.

Il est ainsi possible de lancer une procédure d'optimisation en utilisant un critère à minimiser identique à celui de la boucle principale. Le problème étant linéaire, le temps d'exécution de cette sous-procédure est totalement négligeable par rapport au temps nécessaire à la réalisation des simulations éléments finis. Le principe de cette procédure est résumé Figure 3-7).

Cette méthode présente deux avantages. D'une part, elle permet de comparer chaque géométrie envisagée lors de la boucle principale d'optimisation à son meilleur potentiel, ce qui conduit à des résultats bien plus probants que ceux obtenus en traitant les variables géométriques et électriques de façon non différenciée. D'autre part, les valeurs de courants obtenues donnent une indication sur l'efficacité énergétique de la structure, ce qui autorise une optimisation multicritère intégrant une minimisation des valeurs de courants nécessaires à l'obtention de la carte de champs requise.

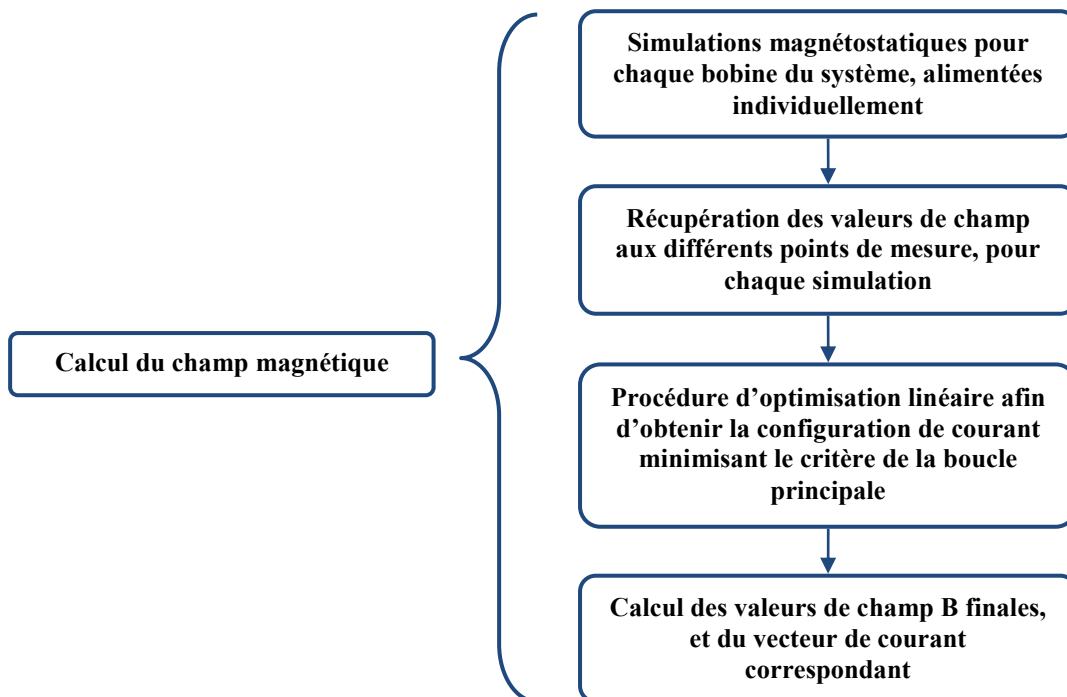


Figure 3-7: Sous-procédure d'optimisation pour la détermination des valeurs de courants optimales

### 3.1.4.1.c Choix des logiciels et des algorithmes employés

Afin de faciliter a posteriori l'utilisation et la modification de l'outil d'optimisation, il a été décidé d'exploiter des codes numériques et des solvers commercialisés sous des logiciels largement diffusés. Les logiciels choisis sont ainsi :

- FEMM 4.2 [FEM]: Ce logiciel libre de simulation électromagnétique 2D par éléments finis a l'avantage d'être d'une grande simplicité tout en restant précis et est totalement pilotable par script Matlab.
- NOMAD, et plus particulièrement sa version sous matlab NOMADm [NOM, Dig-]: Il s'agit d'un outil d'optimisation spécialement développé pour répondre aux problèmes de type boîte noire et dont les temps d'exécution de la fonction d'évaluation du critère d'optimisation sont relativement longs, ce qui correspond au cas traité ici, l'évaluation du critère impliquant plusieurs simulations éléments finis ayant chacune un temps d'exécution de l'ordre de la seconde. Il est basé sur un algorithme de type « mesh adaptive direct search » (MADS) dont l'une des caractéristiques est l'absence d'utilisation de gradient (algorithme de descente d'ordre 0), la procédure se contentant d'évaluation successive de la fonction sur une grille adaptée à chaque itération. Ce solver prendra en charge la gestion de la procédure d'optimisation principale.
- Matlab® permettra de faire le lien entre ces deux logiciels. Ce seront de plus quelques unes de ses fonctions d'optimisation propres qui seront employées dans la boucle d'optimisation des courants.

### 3.1.4.1.d Choix des variables

La difficulté de résolution du problème croît fortement avec le nombre de variables considérées. Afin de minimiser les grandeurs géométriques à optimiser, une structure simplifiée a été définie. 9 grandeurs géométriques suffisent alors à caractériser le circuit: le positionnement axial et radial des pôles interne et externe, celles des écrans magnétiques interne et externe et la largeur de l'entrefer situé à l'arrière du canal. Les variables correspondantes sont stockées dans un vecteur  $x$  (cf. Figure 3-8).

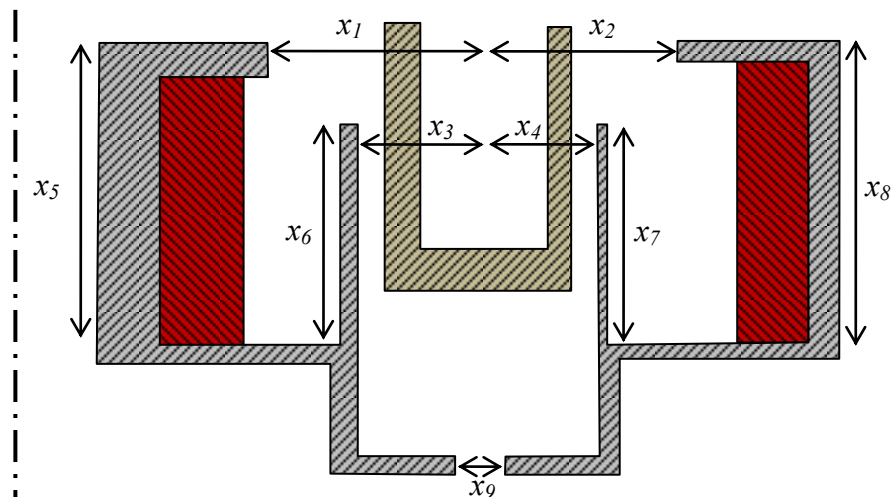


Figure 3-8 : Variables sélectionnées pour la procédure d'optimisation

Les sections des différentes culasses ferromagnétiques ne seront pas considérées comme des variables géométriques. Elles ont été choisies dans un premier temps de manière à éviter toute saturation, dès lors que les courants imposés aux bobinages restent en deçà d'un certain seuil (pris égal à la valeur correspondant à la densité maximale de courant physiquement

admissible par les bobines en régime permanent). Ces épaisseurs de culasses seront ensuite ajustées manuellement, une fois la géométrie optimale fixée, de façon à minimiser la masse du circuit.

Enfin, les formes des plots interne et externe sont délibérément rectilignes, car introduire des formes plus complexes accroît le nombre de variables, pour un impact peu significatif.

#### 3.1.4.1.e Définition du critère d'optimisation

La procédure d'optimisation nécessite la définition d'un critère prenant en compte la totalité des objectifs assignés à la structure. Le critère principal juge de la capacité de la géométrie considérée à produire la carte de champ requise. Pour cela, le champ produit par la géométrie lorsqu'elle est alimentée par les courants optimaux est relevé aux différents points de mesure et est comparé aux valeurs attendues en ces mêmes points. Le critère est donc défini comme suit:

- Les valeurs de champ magnétique aux points de mesures sont stockées dans des vecteurs:

$$\mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} Br_1 \\ \vdots \\ Br_i \\ \vdots \\ Br_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_z = \begin{bmatrix} Bz_1 \\ \vdots \\ Bz_i \\ \vdots \\ Bz_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{norme} = \begin{bmatrix} \sqrt{Br_1 + Bz_1} \\ \vdots \\ \sqrt{Br_1 + Bz_i} \\ \vdots \\ \sqrt{Br_1 + Bz_n} \end{bmatrix}$$

Avec pour  $i=1, \dots, n$   $Br_i$  et  $Bz_i$  les valeurs des composantes respectivement radiales et axiales du champ magnétique au point de mesure  $i$ .

- Les vecteurs de champ magnétique requis sont définis sur le même principe:

$$\mathbf{B}_{r\,obj} = \begin{bmatrix} Br_{obj\,1} \\ \vdots \\ Br_{obj\,i} \\ \vdots \\ Br_{obj\,n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{z\,obj} = \begin{bmatrix} Bz_{obj\,1} \\ \vdots \\ Bz_{obj\,i} \\ \vdots \\ Bz_{obj\,n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{norme\,obj} = \begin{bmatrix} B_{norme\,obj\,1} \\ \vdots \\ B_{norme\,obj\,i} \\ \vdots \\ B_{norme\,obj\,n} \end{bmatrix}$$

- Ces valeurs de champ sont définies avec une pondération représentative du degré de précision avec lequel la carte de champ finale doit respecter chacune de ces valeurs. Ces poids sont définis à l'aide de vecteurs de même dimension que les vecteurs précédents, appelés  $\alpha_r$ ,  $\alpha_z$ ,  $\alpha_{norme}$ .

- On définit ainsi les critères suivants :

$$Crit_{B_r} = \sum_i \left( \alpha_r(i) \cdot \left( \mathbf{B}_r(i) - \mathbf{B}_{r\,obj}(i) \right) \right)^2$$

$$Crit_{B_z} = \sum_i \left( \alpha_z(i) \cdot \left( \mathbf{B}_z(i) - \mathbf{B}_{z\,obj}(i) \right) \right)^2$$

$$Crit_{B_{norme}} = \sum_i \left( \alpha_{norme}(i) \cdot \left( \mathbf{B}_{norme}(i) - \mathbf{B}_{norme\,obj}(i) \right) \right)^2$$

- Et le critère finalement employé est donc :

$$Crit_1 = \beta_{B_r} \cdot Crit_{B_r} + \beta_{B_z} \cdot Crit_{B_z} + \beta_{B_{norme}} \cdot Crit_{B_{norme}}$$

Avec  $\beta_{B_r}$ ,  $\beta_{B_z}$  et  $\beta_{B_{norme}}$  des coefficients permettant à la fois une normalisation des différents critères et une pondération optionnelle.

Le critère peut être complété, en incluant une information sur l'énergie nécessaire à la génération du champ souhaité. Il devient alors:

$$Crit_2 = \beta_{B_r} \cdot Crit_{B_r} + \beta_{B_z} \cdot Crit_{B_z} + \beta_{B_{norme}} \cdot Crit_{B_{norme}} + \beta_I \cdot Crit_I$$

$$\text{Avec } Crit_I = \sum_{j=1}^m R_j \cdot I_j^2$$

Où  $m$  est le nombre de bobines du système,  $I_j$  le courant parcourant la bobine  $j$  et  $R_j$  leur résistance respective (calculée en fonction des valeurs de résistivité et des dimensions).

Compte tenu de la difficulté d'obtention du champ souhaité, et du fait que le PPS 20kML n'est pas un modèle de vol, il a cependant paru préférable de ne pas utiliser ce dernier critère et de se cantonner à une minimisation du critère 1.

### 3.1.4.2 Choix du nombre de bobines optimal

Les calculs et modèles précédents ont été réalisés en 2D, afin de garantir des temps de calcul acceptables en vue d'un appel de la fonction lors de l'optimisation. La possibilité d'utilisation de ces modèles 2D est cependant conditionnée par l'homogénéité azimutale du champ magnétique au sein des parties axisymétriques du propulseur. Or, la variation azimutale du champ est directement liée au nombre et à la répartition des éléments non nécessairement axisymétrique de la structure, à savoir les bobines, internes et externes, et leur noyau central. Deux configurations de bobinage sont envisageables :

- Un bobinage global, réellement axisymétrique, disposé sur le diamètre intérieur du propulseur (à l'image des modèles 2D simulés). Ces bobinages garantissent un champ parfaitement homogène azimutalement.
- Des bobines multiples réparties sur la totalité du périmètre en nombre suffisant pour garantir une variation azimutale du champ dans le canal, définie à l'aide d'une tolérance fixée au préalable. Ces bobines multiples facilitent l'évacuation de l'énergie thermique accumulée au niveau des céramiques du canal sous la forme de rayonnement au travers des espaces inter bobines.

Compte tenu des avantages et inconvénient relatifs à ces configurations, on optera pour la structuration suivante :

- Sur le rayon interne, un bobinage global. Des bobines multiples présentent un intérêt minime, puisque seule une très faible proportion d'un éventuel rayonnement thermique filtrant à travers elles pourrait effectivement être évacuée vers l'espace, la grande majorité de ce rayonnement balayant des pièces du propulseur en regard. Par ailleurs, elles seraient de plus beaucoup plus encombrantes à flux produit égal qu'une bobine unique. La zone étant critique en termes d'espace disponible, le choix se porte donc logiquement sur une bobine unique.
- Au niveau externe, la situation est inverse, puisque un rayonnement qui filtrerait à travers les bobines serait directement émis vers l'espace et l'encombrement est bien moins critique. La configuration multi bobines est donc plus appropriée.



Dès lors que le choix s'est porté sur une configuration à bobinages multiples au niveau externe, une étude supplémentaire s'impose afin de déterminer le nombre optimal. Deux aspects concourants sont alors à prendre en compte, les considérations thermiques s'opposant aux objectifs d'homogénéité de champ. Si, en effet, l'amplitude de la variation azimutale du champ va en s'amointrissant avec l'augmentation du nombre de bobines externes, l'échauffement du propulseur, quant à lui, croît avec le nombre de bobines. Ceci pour deux raisons : d'une part, le volume total de cuivre nécessaire pour les bobines externes croît avec le nombre de bobines, ce qui se traduit par des pertes par effet Joule plus importantes et donc une quantité d'énergie thermique totale à évacuer plus importante. D'autre part, la surface disponible pour le rayonnement des céramiques du canal vers l'espace diminue si le nombre de bobines augmente (voir Figure 3-9).

Dans ces conditions, il est nécessaire d'évaluer l'impact du nombre de bobines sur le degré d'inhomogénéité azimutale du champ magnétique, afin de déterminer le meilleur compromis entre homogénéité du champ et échauffement de la structure. Dans cette optique, des simulations magnéto-statiques 3D sous ANSYS ont été réalisées sur une structure simplifiée (cf. Figure 3-10).

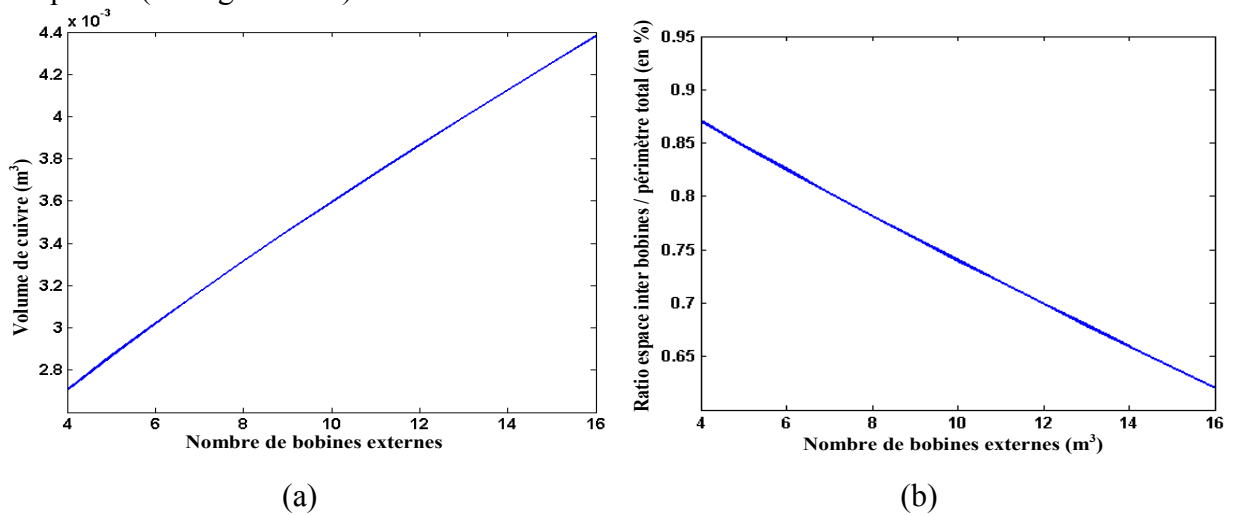


Figure 3-9.a: Volume de cuivre en fonction du nombre de bobines externes

Figure 3-9.b : Ratio entre l'espace disponible pour le rayonnement vers l'espace entre les bobines externes, et le périmètre total, en fonction du nombre de bobines externes.

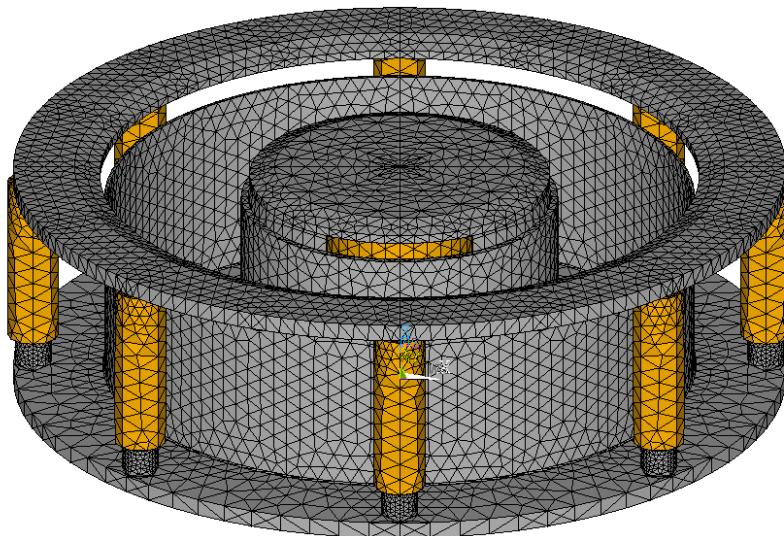


Figure 3-10: Exemple de structure simulée afin de déterminer le nombre optimal de bobines externes. (Ici 8 bobines externes)

Les résultats de ces simulations sont donnés Figure 3-11. On vérifie bien une diminution de la variation azimuthale sur le plan de sortie du canal lorsque le nombre de bobines externes augmente. On constate aussi que le taux de variation croît lorsque l'on se rapproche des éléments non axisymétriques de la structure. Les variations au niveau de la céramique externe sont ainsi bien plus importantes que celles au niveau de la céramique interne.

Au regard de ces différents résultats, le nombre de 8 bobines externes constitue un compromis satisfaisant. Il permet de limiter la variation azimuthale maximale au niveau du plan de sortie du canal à une valeur de l'ordre du pourcent, sans affecter les capacités de refroidissement de la structure (cf. Figure 3-9-b : l'espace disponible pour le rayonnement entre les différentes bobines externe représente 78% du périmètre total, ce qui est supérieur à la proportion observée sur les propulseurs de tailles inférieures servant de référence à cette étude). C'est donc cette configuration qui sera retenue.

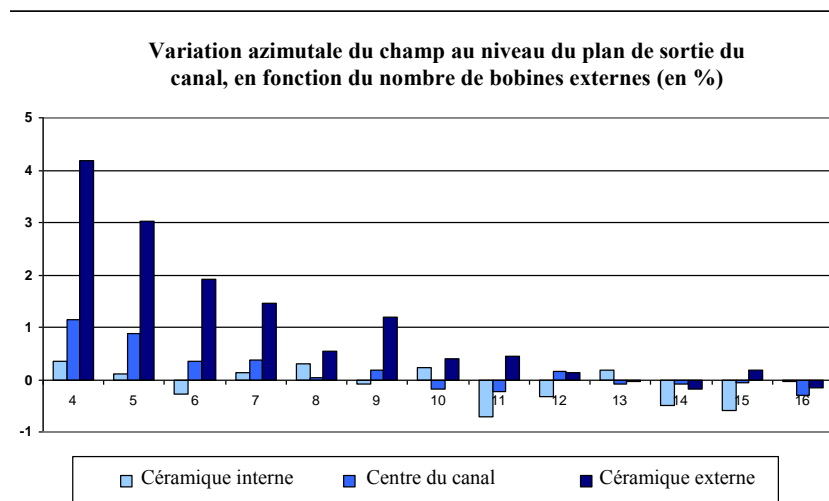


Figure 3-11: Variation azimuthale du champ magnétique au niveau du plan de sortie du canal, en fonction du nombre de bobines externes.

### 3.1.5 Structure finale

Confidentiel

-  
-  
-  
-  
-  
-  
-

-  
-  
-  
-  
-  
-  
-  
-  
-  
-

Confidentiel

-

# Confidentiel

Certains compromis ont donc été réalisés :

- L'amplitude du champ magnétique tend à remonter en amont du plan de sortie de l'anode. Ceci n'influe a priori pas sur le fonctionnement du propulseur, mais ce point doit cependant être réexaminé, en particulier si l'injection de gaz est séparée de l'anode.
- Afin d'obtenir les gradients axiaux requis, il est nécessaire de fortement court-circuiter le champ émis par les pièces polaires principales via les écrans magnétiques. Cela conduit, entre autres, à des valeurs de champ importantes au niveau des parois interne et externe du canal. Ce paramètre a été intégré dans un second temps dans le critère d'optimisation, ce qui a permis de limiter l'écart relatif avec les valeurs de champ au niveau du rayon médian. Elles restent cependant relativement élevées comparativement aux cartographies employées pour des propulseurs de plus faibles puissances, en particulier au niveau des coins situés à proximité de l'anode (intersection entre le plan de sortie anodique et les parois interne ou externe). Les premières simulations du plasma du moteur réalisées à l'aide d'un code hybride n'ont cependant pas montré d'impact particulier de cette caractéristique sur le fonctionnement du propulseur.

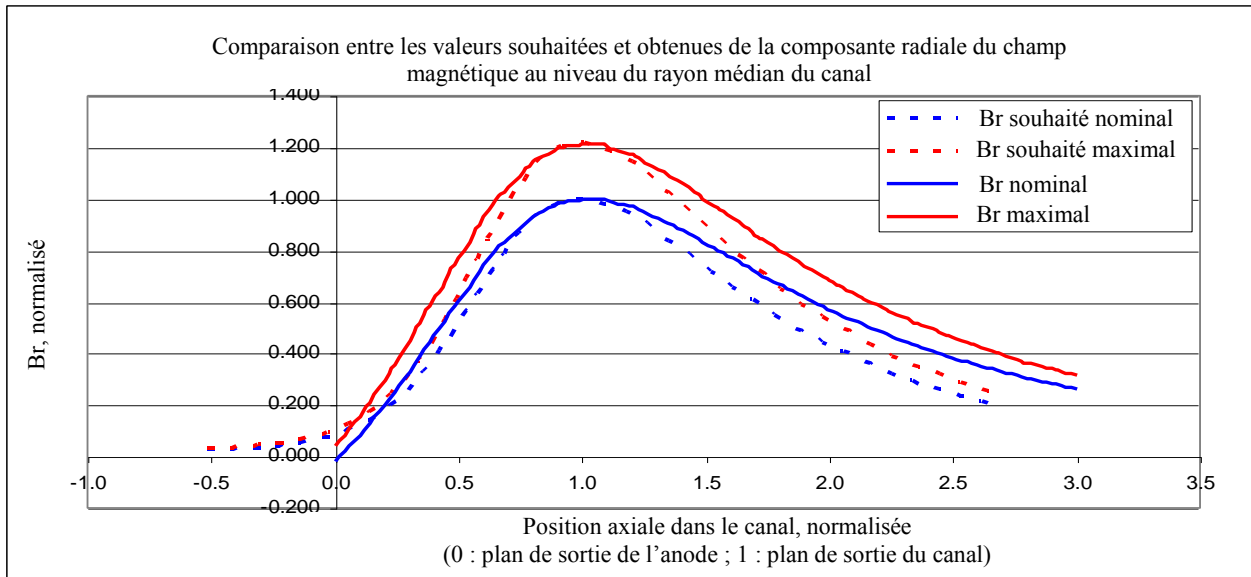


Figure 3-12: Comparaison entre les valeurs de champ objectif et celles obtenues par la structure au niveau du rayon médian du canal, pour deux modes de fonctionnements distincts.

### 3.1.5.1.a Saturation des pièces ferromagnétiques

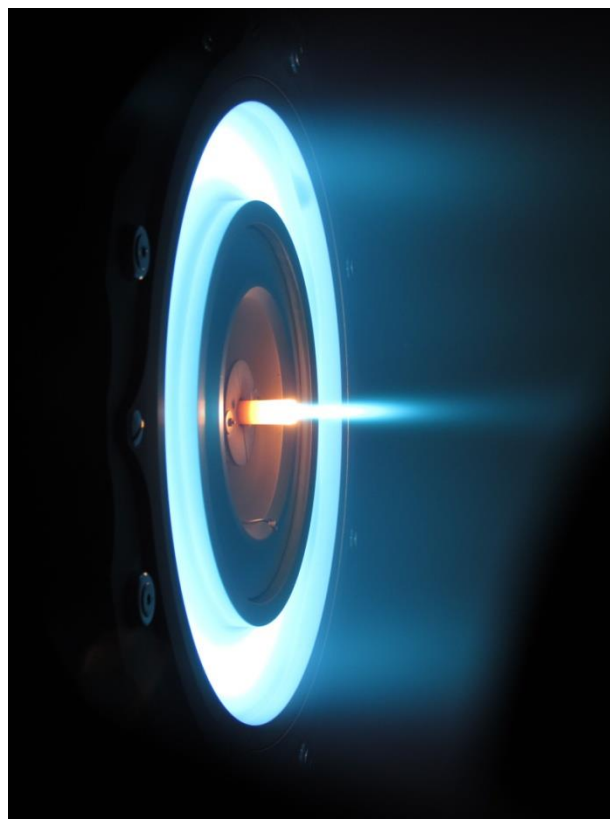
La géométrie a globalement été définie de façon à obtenir une induction relativement homogène dans l'ensemble des pièces ferromagnétiques. Toutefois, les contraintes d'encombrement au niveau de la zone interne du circuit magnétique sont très fortes, ce qui conduit à ce que le noyau de la bobine interne et l'écran magnétique qui lui est adjacent ne soient pas aussi espacés qu'il serait souhaitable. Des fuites magnétiques importantes apparaissent entre ces deux pièces, fuites d'autant plus élevées que l'écran magnétique est épais (puisque cela conduit à une réduction supplémentaire de l'espace de séparation). Un compromis a donc dû être trouvé au niveau de l'épaisseur de l'écran interne. Le niveau d'induction dans cette pièce est légèrement supérieur à celui du reste du circuit. Cette pièce est donc aussi la première à atteindre l'induction de saturation, lors d'essai à fort champ magnétique. Cette saturation intervient cependant au-delà de la plage de fonctionnement définie par le cahier des charges (comme en témoigne l'absence de déformation entre les courbes à Br nominal et Br maximal présentées Figure 3-14) et ne pénalise pas le dimensionnement du circuit.

## 3.1.6 Conclusion

L'étude présentée a concerné le dimensionnement du circuit magnétique dédié à un propulseur forte puissance (20kW). Les spécifications découlant du cahier des charges, au niveau des caractéristiques magnétiques attendues, ainsi que sur l'espace disponible pour la création du circuit magnétique, ont d'abord été précisées. Citons, entre autres, la contrainte d'un espace central réservé pour le positionnement d'une cathode centrale, absent sur les propulseurs de plus faible puissance, de même que la présence à l'arrière du canal d'une zone libre qui doit permettre l'emploi de différents types de système d'injection de gaz. A partir de ce cahier des charges, une sélection de différentes structures dérivées de la géométrie classique a été effectuée et un choix fut réalisé à partir d'une procédure d'optimisation. Une méthode de dimensionnement par optimisation, couplant un algorithme d'optimisation pour les problèmes de type « boîte noire » et un modèle éléments finis, a alors été développée. La méthode se veut généralisable et utilisable sans connaissances poussées en optimisation ou

modélisation par éléments finis. La géométrie finalement obtenue, qui repose sur une bobine centrale et 8 bobines externes réparties uniformément sur le rayon externe du canal du propulseur, respecte les contraintes géométriques fixées par le cahier des charges et produit une distribution spatiale du champ magnétique au sein du canal en concordance avec les prérequis. Les légères différences entre le champ initialement souhaité et celui réellement accessible mettent en évidence les limites de la géométrie classique pour des propulseurs de grands diamètres, les lois d'échelle s'avérant faire évoluer la géométrie du canal de façon pénalisante pour la génération du champ lorsque la puissance croît. Ces différences ne devraient cependant pas encore être trop pénalisantes pour le PPS20K ML.

La suite des travaux de conception du circuit magnétique de ce propulseur a été réalisée par la SNECMA. Les premiers essais ont eu lieu courant 2011 et ont donné des résultats très encourageants. (Photo du prototype final en fonctionnement Figure 3-13).



*Figure 3-13: PPS20K-ML en fonctionnement dans le moyen d'essai PIVOINE. Essai réalisé à 23.5kW.*

## **3.2      PPS-FLEX**

Cette partie traite du dimensionnement d'un circuit magnétique de propulseur de faible puissance devant permettre l'obtention d'un ensemble de carte de champ à amplitude et gradient de champ variables. Sur la base de la synthèse effectuée au Chapitre 1, des objectifs précis en termes de cartographie de champ ont pu être définis et seront présentés. Le choix du circuit magnétique sera alors explicité avant d'en présenter les performances attendues et surtout la large marge de manœuvre en terme de production de cartes de champ diverses et variées. La réalisation technique du prototype ainsi que les premiers résultats expérimentaux seront détaillés dans un dernier temps.

### **3.2.1      Objectifs, intérêts**

#### **3.2.1.1      Problématique**

L'influence primordiale de la topologie magnétique au sein du canal n'est plus à démontrer (cf. partie 1.3). Le coût de réalisation des circuits magnétiques et la difficulté de procéder à des réglages mécaniques durant les essais ont naturellement conduit à envisager l'étude expérimentale de cette influence à l'aide de bobinage(s) supplémentaire(s), permettant de modifier l'allure de la carte de champ autour d'un point de fonctionnement classique. De nombreuses études expérimentales de ce type ont été ainsi conduites, et ce depuis les premières générations de propulseurs à effet Hall, et ont permis des avancées substantielles, en matière de design de propulseur d'une part, mais aussi de compréhension des phénomènes intrinsèques (cf. partie 1.3.2);

La portée de ces études s'est toutefois trouvée limitée, du fait du nombre de degrés de liberté relativement réduit offert par les moyens d'essais. En effet, les circuits magnétiques utilisés reposaient en général sur l'adjonction d'une ou deux bobines supplémentaires (génériquement baptisées "trim coils ") au circuit classiquement utilisé pour les propulseurs à effets Hall. Ceci permet effectivement la variation de la distribution de champ autour d'une topologie de base. Cependant, les variations obtenues ne sont pas assez significatives et, de plus, les paramètres définissant cette topologie ne sont que très rarement modifiables indépendamment les uns des autres.

Typiquement, l'ajout d'une bobine à l'arrière du canal, permet, en jouant sur son courant d'alimentation, de modifier la valeur de gradient magnétique axial  $\nabla_z B_r$ . Mais cette modification s'accompagne de variations plus ou moins sensibles sur plusieurs autres paramètres de la topologie magnétique, tels que la courbure des lignes de champ, l'apparition d'un zéro de champ dans la zone anodique du canal, l'amplitude de champ qui peut être non négligeable au niveau de l'anode et enfin une légère variation de la valeur maximale du champ dans le canal. Toutes ces modifications sont loin d'être sans impact sur le plasma au sein du canal et donc sur le fonctionnement du propulseur. La courbure des lignes de champ définit directement la "lentille magnétique" présente en sortie du canal, dont le rôle sur la divergence de la plume a été montré à plusieurs reprises [Hof-04, Gor-06]; la présence d'un gradient  $\nabla_z |B_r|$  négatif, même sur une zone peu étendue, est suspectée d'être une source d'instabilité de fonctionnement [Dor-06]; la valeur de densité de champ au niveau de l'anode influe sur la chute de potentiel plasma à proximité [Dor-06]; et enfin l'amplitude maximale de  $\mathbf{B}$  influe, quant à elle, directement sur la mobilité électronique [Gar-98].

L'objectif de cette étude est donc de parvenir à dimensionner une structure magnétique permettant un réglage fin de la topologie magnétique au sein du canal, tout en s'affranchissant

de l'interdépendance entre les paramètres caractéristiques de la cartographie, que l'on retrouve jusqu'à présent dans les circuits magnétiques présentant des possibilités de réglages limites.

### 3.2.1.2 Cahier des charges

Sur le plan magnétique, la structure devra donc permettre un réglage indépendant des paramètres suivants:

- Gradient axial de la composante radiale du champ  $\nabla_z B_r$ , au centre du canal, en amont de la sortie du canal ;
- Gradient axial de la composante radiale du champ  $\nabla_z B_r$ , au centre du canal, en aval de la sortie du canal ;
- Amplitude du maximum de la composante radiale du champ au centre du canal ;
- Position axiale du maximum de champ ;
- Inclinaison de la lentille magnétique au niveau du plan de sortie du canal ;
- Présence ou absence d'un zéro de champ à proximité de l'anode ;
- Position radiale et axiale du zéro de champ ;
- Amplitude de champ au niveau de l'anode ;

Se pose ensuite la question des dimensions et de la puissance du propulseur qui sera ainsi réalisé. Les partenaires industriels et institutionnels du projet (la Snecma, le CNES et le GDR Propulsion Electrique) ont collecté au fil des années une quantité considérable de données sur les moteurs SPT-100 de Fakel, et PPS1350 de Snecma (les similarités entre les deux moteurs rendent les données collectées applicables à l'un et l'autre). Afin de pouvoir mettre à profit ces données, il a donc été choisi de dimensionner la nouvelle structure magnétique autour de l'architecture du PPS 1350. Enfin, pour des raisons de coûts, et pour limiter le nombre de pièces à réaliser, seul le circuit magnétique sera modifié. La structure réalisée devra donc s'adapter au PPS 1350 ML (modèle de laboratoire, présentant entre autres plus de flexibilité en termes de démontage que le PPS1350 classique), en venant remplacer le circuit magnétique existant. Elle devra donc être capable, entre autres, de produire le champ magnétique du PPS1350.

## 3.2.2 Dimensionnement du circuit magnétique

### 3.2.2.1 Choix du type de structure

Une structure permettant un réglage indépendant d'un nombre de paramètres important doit nécessairement s'appuyer sur un nombre suffisant de degré de liberté. Classiquement, l'ensemble des études menées sur le sujet montre que l'on parvient de façon plus ou moins satisfaisante à augmenter les degrés de liberté par l'adjonction de bobinages supplémentaires pilotés indépendamment au circuit magnétique initialement utilisé. Cependant, cette approche a montré certaines limites et a donc ici été rapidement abandonnée au profit d'une refonte complète du circuit. En effet, le circuit magnétique classique ne laisse que peu de place pour l'ajout de bobines supplémentaires, dans des emplacements par ailleurs peu favorables d'un point de vue magnétique (cf. partie 1.3.2.1). Ces emplacements sont relativement éloignés de la zone critique en termes de mise en forme du champ au sein du canal (zone de part et d'autre du canal) et ne confèrent pas à ces bobinages additionnels une influence suffisante pour réaliser l'objectif fixé.

Il est donc nécessaire d'envisager une structure comportant un nombre important de bobinages alimentés indépendamment, mais positionnés de manière à influencer



significativement sur la topologie magnétique au sein du canal. Cette influence doit être aussi suffisamment localisée pour permettre un contrôle découplé des paramètres.

La réflexion s'est rapidement orientée vers une structure à encoches, à l'image de ce qui est réalisé sur des machines électriques tournantes. Les schémas de principe d'une telle structure sont donnés Figure 3-14.

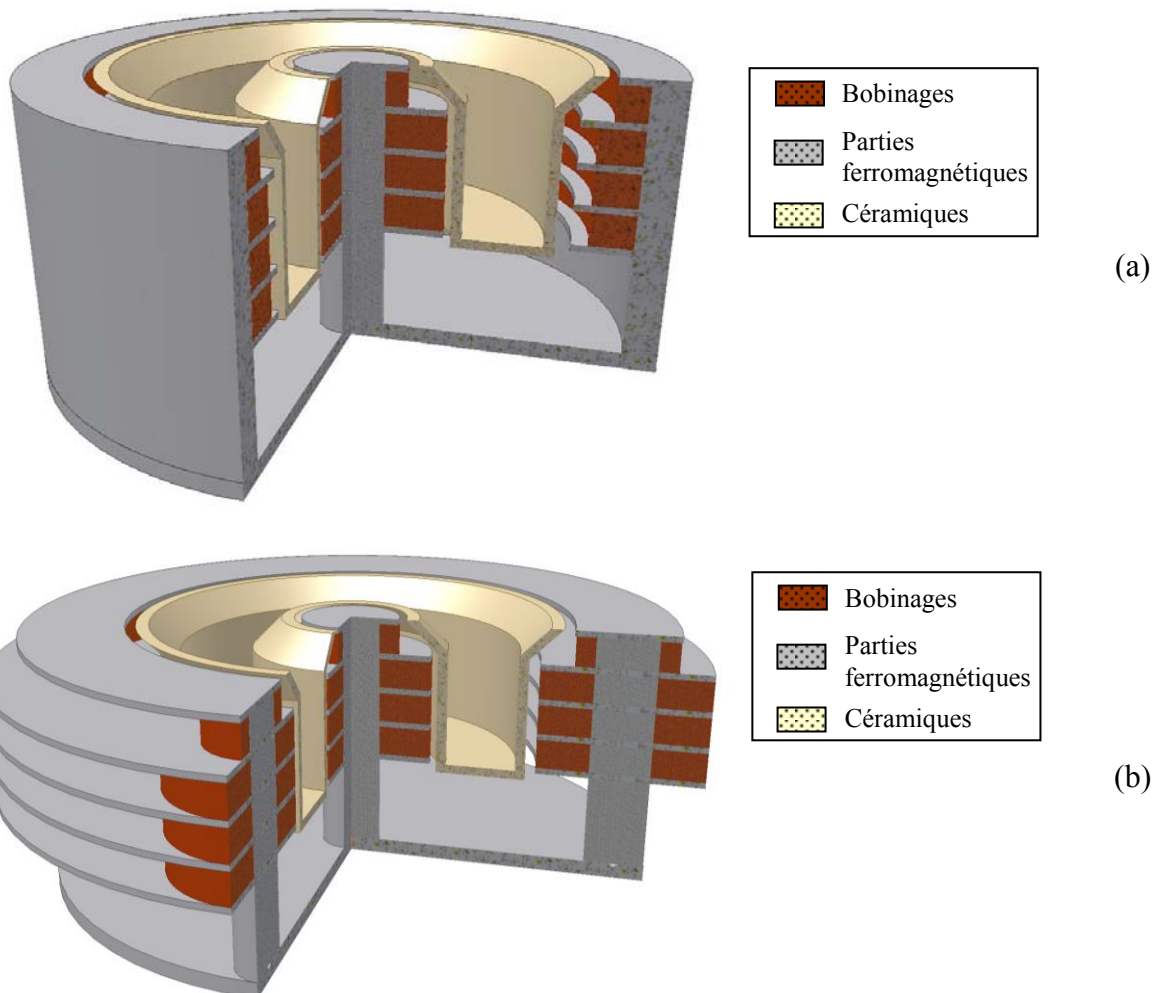


Figure 3-14-a : Schéma de principe de la structure à encoche (vue isométrique tronquée), une seule bobine externe par étage

Figure 3-14-b : Schéma de principe de la structure à encoche (vue isométrique tronquée), quatre bobines externes par étage

La structure multi étages ainsi proposée doit permettre de contrôler le flux passant à travers chaque niveau du canal en jouant sur l'alimentation de chacun des étages (bobines externes et internes d'un même niveau alimentées par un courant proportionnel). Dans un second temps, il sera également possible de dissymétriser la carte de champ, en dissociant complètement les courants circulant dans les bobines externes et internes d'un même niveau.

La structure présente un canal qui diffère de celui du PPS1350. En effet, le canal de ce dernier est totalement rectiligne. Cependant, en vue d'un contrôle de la topologie magnétique dans la zone située après le plan de sortie du canal, il peut s'avérer intéressant de placer un ou plusieurs étages supplémentaires, permettant une gestion plus fine des lignes de champ en sortie du propulseur (ce qui peut en particulier être utilisé pour moduler le gradient axial négatif ou l'inclinaison des lignes de champ afin de tester l'impact de ces paramètres sur la

plume). Or, ces étages supplémentaires doivent être protégés du plasma et des impacts ioniques, ce qui explique la présence d'une prolongation oblique du canal (dont la forme sera à préciser afin de limiter au maximum son influence sur le fonctionnement du propulseur). Cette partie oblique du canal constitue une différence importante par rapport au propulseur classique. De façon à garantir l'obtention de points de comparaison entre les distributions spatiales de champ obtenues respectivement par le PPS1350 et le PPS Flex, il a été choisi de rendre cette partie amovible. La portion oblique du canal, ainsi que les bobines qu'elle protège, devront donc être démontables, sans que cela n'empêche le fonctionnement du PPS Flex.

### 3.2.2.2 Méthode de dimensionnement

Deux aspects sont à considérer lors du dimensionnement de cette structure. Il est nécessaire, d'une part, de déterminer le nombre d'étages optimal pour répondre aux objectifs fixés et, d'autre part, d'optimiser les dimensions des différentes encoches.

Une méthode systématique de dimensionnement par optimisation, comme celle employée pour le propulseur forte puissance PPS20K-ML (cf. chapitre 3.1) est difficile à mettre en œuvre dans le cas présent. En effet, du fait du caractère flexible du champ que le circuit magnétique doit produire, les objectifs d'une telle optimisation sont par définition multiples. Il faudrait donc envisager une procédure d'optimisation multicritère, chaque critère étant associé à un objectif fixé dans le cahier des charges. Ce type d'optimisation serait techniquement réalisable, mais très complexe à mettre en œuvre, du fait de la grande difficulté d'obtention d'un critère réellement représentatif de l'ensemble des caractéristiques et potentialités d'une structure donnée. Cette approche n'a donc pas été retenue et une approche par variation paramétrique sur logiciel de simulation numérique par éléments finis a été adoptée.

Néanmoins, ce type d'approche n'est pas aisé dans le cas d'une structure possédant un grand nombre de degré de liberté. En effet, à chaque modification géométrique, il est nécessaire de retrouver la bonne combinaison de courant dans chaque bobine pour produire chacune des configurations magnétiques prévues dans le cahier des charges. La procédure est laborieuse et très coûteuse en temps, puisque chaque modification de la configuration d'alimentation nécessite une nouvelle simulation par éléments finis. Pour pallier ce problème, la méthodologie suivante a été mise en place:

- Un modèle éléments finis paramétré a été réalisé sous le logiciel FEMM à l'aide de scripts LUA. Il permet de définir les principales caractéristiques géométriques qui doivent être déterminées en vue de l'obtention de la structure optimale (nombre d'étages total dans la structure, section des bobines, épaisseur de chacune des plaques ferromagnétiques séparant les différents étages, etc...)
- Pour toute nouvelle géométrie envisagée, un nouveau set de simulation par éléments finis est réalisé. Pour chaque bobinage, une simulation est effectuée avec un courant unitaire qui le parcourt, tandis que les autres bobinages ne sont pas alimentés. Les valeurs de champ magnétique aux différents points d'une grille définie par l'utilisateur sont relevées pour chacune de ces simulations.
- Ces grilles de valeurs de champ sont ensuite importées sous Matlab, avec lequel une interface de visualisation a été développée (voir Figure 3-15). Cette interface met en application le principe de superposition du champ magnétique. L'utilisateur définit les valeurs d'alimentation qu'il souhaite voir imposer dans chacun des bobinages. Le champ magnétique total est ensuite calculé par combinaison linéaire des différentes valeurs de champ obtenues pour chaque bobine alimentée séparément, pondérées par la valeur du courant d'alimentation fixée par l'utilisateur (cf. partie 3.1.4.1.b ).

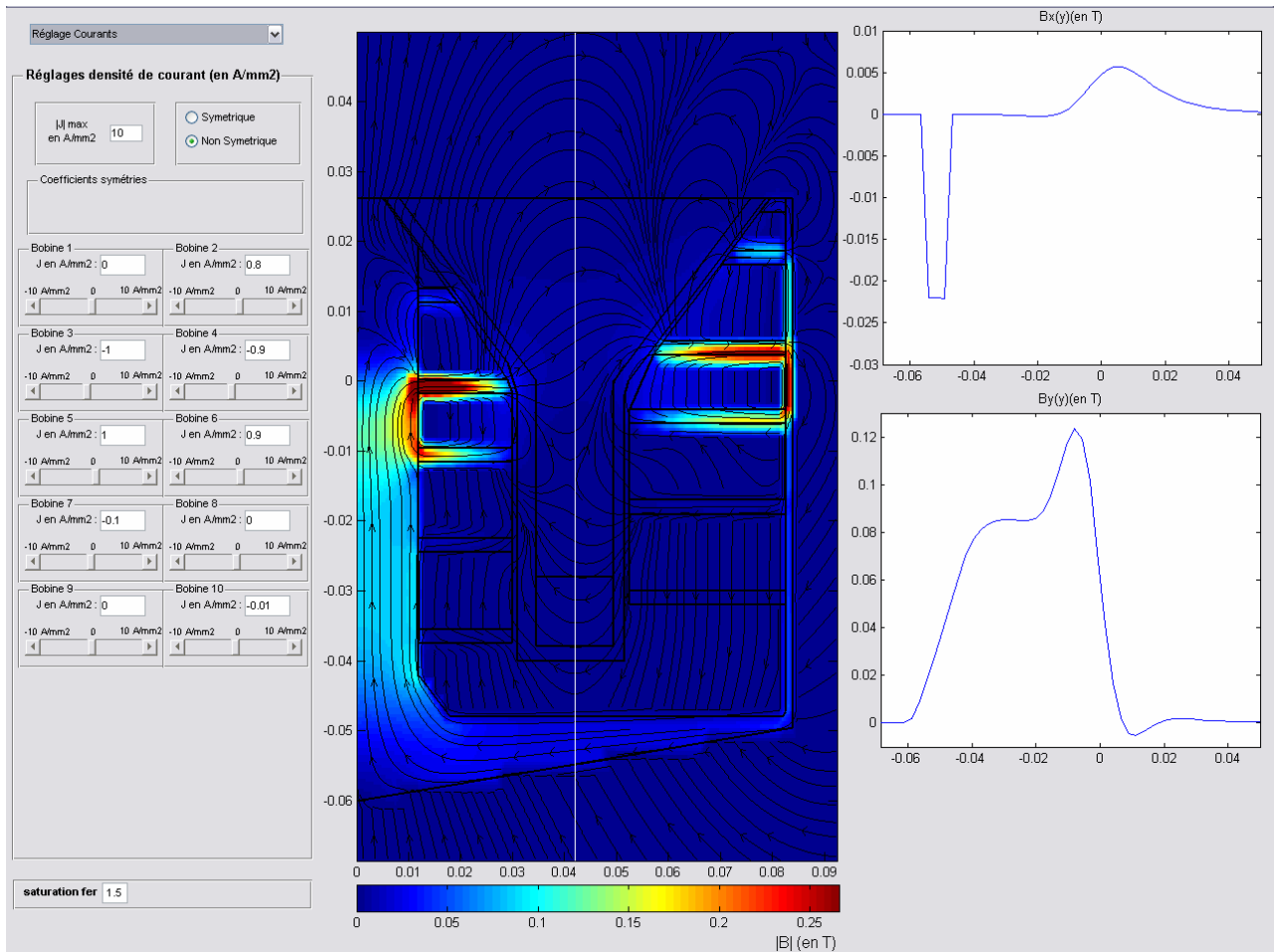


Figure 3-15 : Interface de visualisation développée sous Matlab. Les densités de courant dans chaque bobinage sont paramétrables à gauche de la fenêtre et différentes visualisations sont disponibles au centre et à droite.

### 3.2.2.3 Circuit magnétique optimisé

#### 3.2.2.3.a Caractéristiques générales de la structure

Avant de travailler sur les différentes dimensions de la structure, il convient de définir ses caractéristiques générales. En particulier, il faut déterminer le nombre d'étages optimal qui permet de satisfaire les différents objectifs fixés, ainsi que le nombre de bobines externes afin de garantir une variation azimutale inférieure au seuil de tolérance.

#### ➤ Nombre d'étages du circuit magnétique

Ces étages peuvent être séparés en deux groupes : ceux associés à la partie rectiligne du canal, qui correspond au canal classique d'un PPS1350, et ceux associés à la partie oblique (et situés en aval du plan de sortie d'un PPS1350 classique). Compte tenu de l'état de l'art effectué en début d'étude et après avoir réalisé une étude paramétrique par simulation numérique sous FEMM sur des structures multi étages, des lignes directrices de définition du circuit ont pu être édictées :

- *Nombre de bobines au niveau de la partie rectiligne du canal:* Le nombre d'étages face à la partie rectiligne du canal doit respecter plusieurs critères antagonistes. Premièrement, le nombre de degrés de liberté qu'ils apportent à eux seuls, puisque les

autres étages doivent pouvoir être retirés, doit être suffisant pour permettre d'atteindre les objectifs en termes de flexibilité sur la cartographie magnétique. Or, chaque étage, dans le mode de fonctionnement le plus contraint (courants des bobines internes et externes d'un même étage liés) amène un seul degré de liberté. En effet, si l'on souhaite imposer un champ symétrique par rapport au centre du canal, les courants des bobines internes et externes d'un même étage doivent respecter un ratio prédéterminé. En conséquence, le nombre minimum d'étages pour disposer de suffisamment de degrés de liberté pour permettre d'atteindre la flexibilité souhaitée en matière de topologie magnétique (cf. cahier des charges) est, d'après les simulations numériques préliminaires réalisées, de trois.

Par ailleurs, le nombre d'étages est limité par deux aspects. D'une part, chaque étage supplémentaire augmente la complexité du système, puisqu'il ajoute deux courants supplémentaires à régler, autant de modules d'alimentations DC à prévoir et à piloter. Et le nombre de câbles à faire sortir de la cuve sous vide augmente en conséquence. D'autre part, le champ créé par chaque bobine étant effectif principalement à la hauteur du canal sur laquelle elle est positionnée, il est nécessaire de loger toutes les bobines uniquement sur la hauteur du canal. Par conséquent, augmenter le nombre d'étages implique de diminuer l'épaisseur de chacun. Le flux magnétique ayant tendance à emprunter le chemin le plus court dans l'air, si la hauteur des bobines diminue avec l'accroissement de leur nombre, le canal tendrait à être court-circuité par l'espace occupé par le cuivre.

Ces différents aspects impliquent un compromis à trouver entre potentialités de réglages et contraintes techniques. Il a ainsi été décidé de fixer le nombre d'étages dans la partie rectiligne et inamovible à trois.

- *Nombre de bobines au niveau de la partie oblique du canal (amovibles)* : Les modifications à ce niveau du circuit magnétiques doivent être limitées, car elles obligent à prolonger le canal en guise de protection. L'idée n'étant pas de modifier le comportement du propulseur, l'angle de ces parois obliques est pris suffisamment obtus pour espérer limiter leur impact. Mais l'ajout d'un diélectrique dans cette zone n'est a priori jamais anodin. La longueur de cette zone doit donc être limitée au strict nécessaire. Les simulations ont par ailleurs montré qu'un seul étage permettait déjà d'obtenir une certaine latitude en matière de réglage de champ avec, en particulier, la possibilité d'obtenir un gradient magnétique négatif en sortie du canal. C'est donc cette configuration qui a été choisie.

➤ *Caractéristiques du circuit magnétique externe*

En ce qui concerne les bobinages externes du circuit magnétique, deux options sont envisageables (voir Figure 3-14). Dans le premier cas le circuit magnétique est axisymétrique et ne comporte donc qu'une seule bobine par étage. Cela a comme avantage de garantir une invariance azimutale parfaite du champ généré (et permet en sus d'utiliser des simulations magnétostatiques par éléments finis 2D sans utiliser d'hypothèses simplificatrices). La deuxième possibilité consiste à réaliser une structure quasi-axisymétrique, en disposant judicieusement plusieurs bobines externes régulièrement espacées autour du canal. La largeur de l'entrefer constitué par ce dernier tend à homogénéiser azimutalement le champ. L'homogénéité azimutale du champ magnétique au sein du canal est alors directement liée au nombre de bobines externes du circuit (à l'image de ce qui a été montré pour le PPS20K-ML). Les simulations magnétiques devraient dans ce cas en toute rigueur être faites en 3D.

Cependant, au moyen d'hypothèses simplificatrices (cf. chapitre 1), il est possible de se ramener à une structure axisymétrique équivalente.

Concernant la distribution spatiale du champ magnétique, la structure totalement axisymétrique est préférable. Elle garantit l'homogénéité azimutale ( $B$  ne dépend pas de  $\theta$ ) et la concordance avec les simulations 2D. Cependant, la structure comportant plusieurs bobines externes présente, elle aussi, des avantages non négligeables. D'une part, d'un point de vue thermique, elle permet une meilleure dissipation du flux thermique issu du canal en céramique, par rayonnement vers le vide à travers les espaces entre chaque colonne de bobines. D'autre part, ce type de structure facilite l'instrumentation du propulseur en vue d'une caractérisation du plasma par Fluorescence Induite par Laser (LIF) (au prix d'une entaille dans le circuit magnétique externe, entaille qu'il est impossible de réaliser dans un circuit mono-bobine puisque cela reviendrait à sectionner la dite bobine). Ce type de mesure étant fréquemment utilisé pour caractériser le fonctionnement des propulseurs dans le moyen d'essai PIVOINE, ce dernier point a orienté notre choix vers une structure à plusieurs bobines externes par étage.

Le nombre de bobines externes par étage doit alors être déterminé. Sachant que le circuit magnétique du PPS 1350 possède par définition des dimensions analogues à celui du PPS Flex, il semble raisonnable de conserver le même nombre de bobines externes afin d'obtenir une variation azimutale du champ du même ordre. Le nombre de bobines externes pour chaque étage sera donc fixé à quatre.

#### ➤ Choix du matériau des parties ferromagnétiques

Le choix du matériau composant les parties ferromagnétiques du circuit doit être réalisé avant de procéder à l'optimisation de la géométrie de la structure, puisque les caractéristiques telles que la perméabilité et la valeur d'induction à saturation du matériau choisi impacteront fortement sur les différentes dimensions du système.

Compte tenu de la nature continue du champ magnétique qui doit être imposé dans le canal, des pièces ferromagnétiques massives seront utilisées. Le choix du matériau utilisé pour réaliser ces pièces est ensuite imposé par les contraintes fortes d'encombrement auxquelles est soumis le design de la structure. De fait, il est nécessaire de s'orienter vers les matériaux présentant les plus hautes valeurs de saturations, afin de conduire le maximum de flux magnétique avec une section de matériau minimale. Dans ces conditions, deux matériaux ont été envisagés :

- Le fer Armco® (fer pur à 99,8%) (cf. courbes de premières aimantations données Figure 3-16).
- Le fer-cobalt.

Le fer Armco® est le matériau de prédilection utilisé dans les propulseurs à effet Hall commercialisés. Il combine de bonnes propriétés magnétiques et une conductivité thermique suffisante pour les contraintes du spatial. Le fer-cobalt possède cependant une valeur d'induction à saturation supérieure (Les alliages magnétiques Fe-Co présentent en effet la plus forte valeur d'induction à saturation parmi les alliages connus) et possède un point de Curie aux environs de 950°C, ce qui implique des propriétés magnétiques peu altérées pour des températures allant jusqu'à 500°C. Mais, compte tenu du coût de la matière première et des difficultés importantes que présente l'usinage d'un tel matériau, le fer Armco® constitue la nuance appropriée pour le développement du circuit.

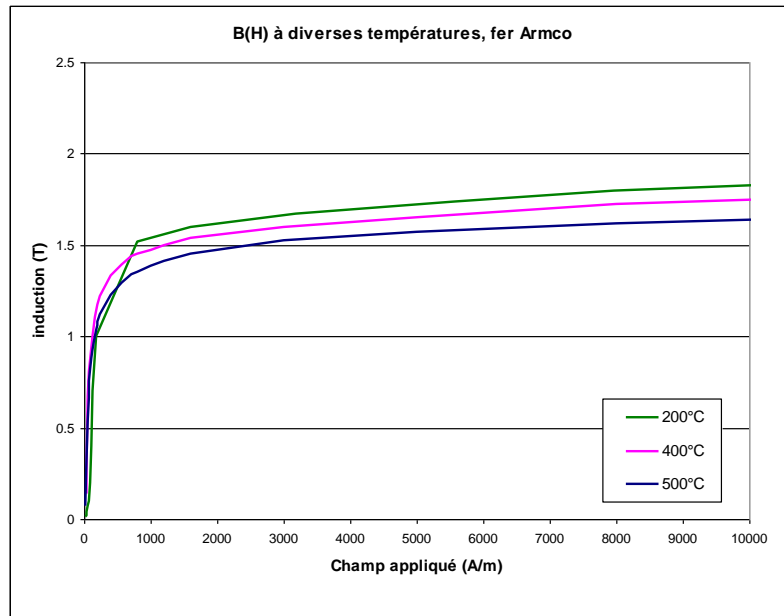


Figure 3-16: Courbe de première aimantation du fer Armco®, pour différentes températures

#### ➤ Récapitulatif des choix préliminaires

Le circuit magnétique retenu possèdera donc en conclusion quatre étages, dont un amovible, localisé au niveau du plan de sortie d'un canal classique. Chaque étage sera composé d'une bobine interne et de 4 bobines externes. Le matériau employé pour le circuit magnétique sera le Fer Armco®.

Il reste à présent à définir les dimensions optimisées du circuit qui garantissent les objectifs en termes de flexibilité de réglage du champ magnétique au sein du canal.

#### 3.2.2.3.b Dimensions du circuit magnétique optimisé

Plusieurs contraintes techniques définissent le périmètre dans lequel il convient d'identifier les dimensions optimales par rapport aux objectifs de réglage de la topologie magnétique :

- *Minimisation de l'impact des modifications du canal sur le fonctionnement du propulseur.* L'étage supplémentaire situé en aval du plan de sortie du canal du PPS1350 classique doit être protégé du plasma et, en particulier, de l'érosion ionique. Ces protections ne seront jamais parfaitement neutres vis à vis du fonctionnement du propulseur et le choix du matériau les constituant doit être fait avec d'autant plus de minutie. L'option d'une protection métallique amagnétique a rapidement été éliminée, en raison du caractère conducteur que cela conférerait à la protection. Cela aurait pour conséquence directe une modification drastique de la répartition du potentiel électrique à son voisinage. L'alumine a ensuite été envisagée, mais elle aussi rejetée. En effet, des précédents essais menés sur des propulseurs ont rapporté des problèmes avec des pièces en alumine en contact avec le plasma du propulseur, problèmes probablement liés au coefficient d'émission secondaire de ce matériau qui s'est révélé trop élevé pour ce type d'utilisation. Le matériau qui aurait un comportement le plus

neutre possible vis-à-vis du plasma pourrait être une céramique similaire à celle employée pour le canal du propulseur. Le canal sera donc prolongé par une partie évasée en céramique. L'angle que font ces parois obliques par rapport aux parois rectilignes du canal doit être suffisamment obtus pour limiter leur impact, mais suffisamment aigu pour ménager une place suffisante pour le dernier étage du circuit magnétique. La valeur de compromis a été définie en fonction de la divergence de la plume du propulseur.

- *Distance minimale entre le circuit magnétique et le canal.* Cette marge est régie par des considérations thermiques et techniques. D'un point de vue thermique, le canal constituant la source principale de puissance dissipée, il paraît raisonnable d'en éloigner au maximum le circuit magnétique. Cependant, en l'absence de transfert de chaleur par conduction (pas de contact entre le canal en céramique et le circuit magnétique) et par convection (allumage du propulseur dans un caisson sous vide), le seul paramètre influant sur le transfert par rayonnement est donc le facteur de forme géométrique entre les 2 pièces en regard (canal céramique et pièces ferromagnétiques et bobines en vis-à-vis). Précisons qu'il s'agit ici du facteur de forme thermique défini pour une pièce A vers une pièce B comme la proportion de flux thermique en provenance de la pièce A atteignant la pièce B. Or, compte tenu du caractère critique revêtu par la place disponible pour le circuit magnétique dans les zones faisant face au canal (particulièrement concernant les bobines internes), la distance séparant ces deux pièces ne pourra être ajustée que de quelques millimètres, ce qui ne constitue pas une variation suffisante pour influencer notablement sur la valeur de ce facteur de forme géométrique. Dans ces conditions, cette contrainte a été ignorée et les seules contraintes restantes sont d'ordre technologique. Les pièces ne devant en effet jamais être en contact du fait d'une déformation ou dilatation éventuelles, une marge de sécurité doit être prise en compte. D'autre part, il a été prévu d'insérer un écran thermique entre le circuit magnétique et le canal, afin de limiter le rayonnement incident sur les bobinages. Ces différents points nous ont amenés à choisir une distance minimale entre le circuit magnétique et le canal de 2mm.
- *Contraintes héritées des pièces du PPS 1350.* La totalité du bloc incluant le canal du PPS1350 est conservée. Or, ce bloc est en temps normal fixé au circuit magnétique extérieur par une bague venant se visser sous la plaque avant. Le système de fixation du PPS Flex ne doit pas nécessairement être identique et ne le sera pas en pratique, mais cette bague fait partie du bloc canal et doit être conservée. Il faut donc laisser la place qu'elle occupe dans le circuit magnétique vacante. Cela impose le positionnement de certaines plaques du circuit magnétique extérieur, de manière à ce que la bague passe entre deux d'entre elles.

Ces différentes contraintes, ainsi que les choix préliminaires explicités plus haut, ont permis d'aboutir, à la suite d'un grand nombre d'essais de jeux de paramètres géométriques via simulation éléments finis, à une structure satisfaisant les différents critères du cahier des charges. Ses principales caractéristiques sont indiquées dans le Tableau 3-2.

Caractéristiques générales du circuit magnétique	Hauteur sans dernier étage (axiale) (en mm)	90
	Hauteur avec dernier étage (axiale) (en mm)	78
	Largeur (diagonale maximale) (en mm)	240
	Nombre d'étages total	3 + 1 amovible
	Nombre de colonnes externes	4
	Nombre total de bobines	4 internes + 16 externes + 2 arrières
Caractéristiques du canal	Largeur du canal rectiligne (radiale) (en mm)	16
	Longueur du canal rectiligne (axiale) (en mm)	27
	Largeur maximale partie oblique du canal (radiale) (en mm)	35
	Longueur partie oblique du canal (axiale) (en mm)	11

Tableau 3-2 : Récapitulatif des principales caractéristiques du circuit magnétique du PPS Flex

### 3.2.3 Simulations magnéostatiques 2D

La partie suivante détaille les potentialités de la structure proposée et vérifie sa capacité à répondre au cahier des charges défini. De plus, l'outil de calcul de champ développé afin de faciliter l'utilisation du prototype reposant sur une hypothèse de linéarité du champ magnétique, il est nécessaire de vérifier le domaine de validité de cette hypothèse. Ceci sera réalisé en comparant les résultats obtenus via l'outil de visualisation par superposition des valeurs de champ obtenues pour chaque bobine alimentée séparément et ceux obtenus par des simulations éléments finis classiques, prenant en compte la caractéristique non linéaire du fer Armco®.

#### 3.2.3.1 Possibilités du PPS Flex en terme de réglage de la topologie magnétique

Les souhaits de réglage indépendant de paramètres émis lors de l'élaboration du cahier étaient les suivants:

- Gradient axial de la composante radiale du champ  $\nabla_z B_r$ , au centre du canal, en amont de la sortie du canal
- Gradient axial de la composante radiale du champ  $\nabla_z B_r$ , au centre du canal, en aval de la sortie du canal
- Amplitude du maximum de la composante radiale du champ au centre du canal
- Position axiale du maximum de champ
- Inclinaison de la lentille magnétique au niveau du plan de sortie du canal
- Présence ou absence d'un zéro de champ à proximité de l'anode
- Position radiale et axiale du zéro de champ
- Amplitude de champ au niveau de l'anode

En vue de mettre en évidence les variations de topologies magnétiques réalisables par le PPS-Flex, des comparaisons seront établies à partir d'une topologie magnétique de référence,



représentative de ce qui est classiquement utilisé dans les propulseurs à effet Hall (Figure 3-17 et Figure 3-18). Cette dernière présente une lentille magnétique symétrique par rapport au centre (rayon moyen) du canal. La composante radiale de  $B$  au niveau de ce rayon moyen est maximale 1 mm après le plan de sortie du canal rectiligne. Il n'y a pas de zéro de champ stricto sensu dans la zone anodique du canal, mais le champ  $y$  est cependant extrêmement faible.

Pour des raisons de confidentialité, l'échelle de niveaux de gris indiquant la valeur de champ sur les cartographies magnétiques 2D est volontairement absente. Cependant, afin de permettre des comparaisons, les bornes de cette échelle seront conservées constantes pour l'ensemble des figures de cette partie. De la même façon, les valeurs de champ données sur les profils seront toutes normalisées par rapport à la valeur maximale du champ au centre du canal pour la topologie magnétique choisie comme référence. Il est difficile de retranscrire intégralement la totalité des caractéristiques d'une topologie donnée sans recourir à un grand nombre de graphes exposant les profils de champ en chacune des zones du canal. Cependant, il apparaît à l'usage que la contrainte de symétrie, fréquemment imposée, et le profil de champ au centre du canal, sont suffisamment contraignants d'un point de vue magnétique pour n'autoriser qu'une solution respectant les bornes de courant imposées. Dans la plupart des cas, une cartographie 2D montrant l'amplitude et les lignes de champ, ainsi qu'un profil axial de champ au centre du canal seront donc suffisantes pour visualiser convenablement la topologie étudiée. Les comparaisons entre les lignes de champ des différentes cartographies doivent être réalisées avec certaines précautions. En effet, dans les zones de champ de faible amplitude, la densité de lignes de champ est naturellement plus faible et des différences notables peuvent sembler apparaître entre deux topologies quasiment identiques. Ces différences sont des différences de positions des lignes, et non de forme (deux lignes passant strictement par le même point auraient la même forme).

Sur la totalité des profils de champ donnés dans cette partie, la courbe en rouge correspond à la topologie magnétique servant de référence et les courbes en bleu correspondent aux différentes variations obtenues autour de cette topologie.

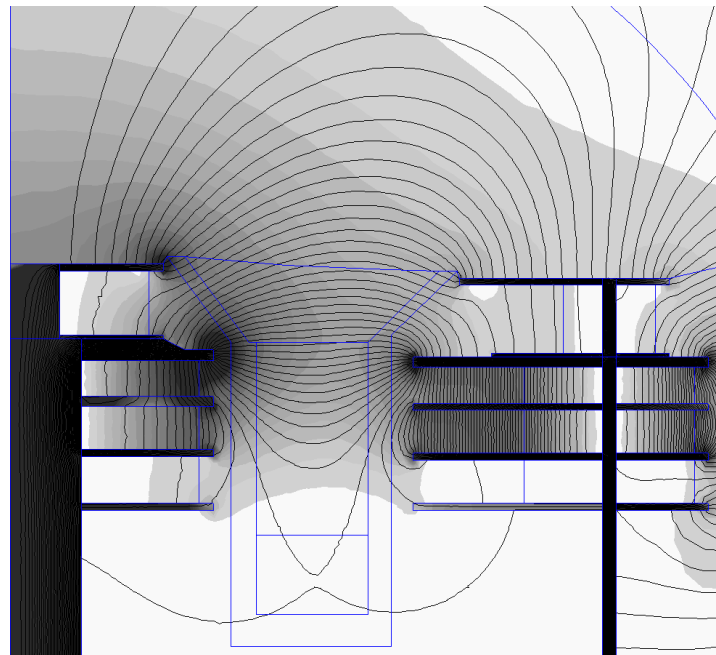


Figure 3-17: Vue 2D (lignes de champ et amplitude de  $B$ ) de la topologie magnétique choisie comme point de comparaison (les variations seront effectuées autour de cette dernière).

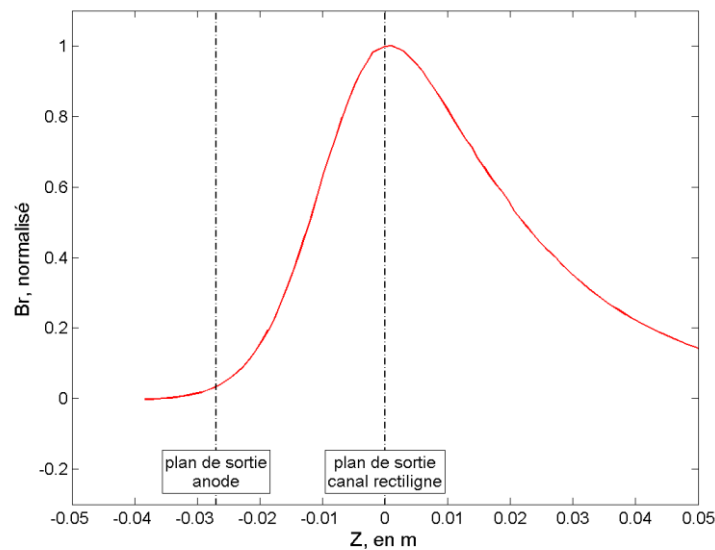


Figure 3-18 : Profil axial de la composante radiale du champ, au centre du canal ( $r=42.375\text{mm}$ ) pour la topologie choisie comme point de comparaison.

Le PPS Flex est prévu pour fonctionner de manière exhaustive lorsque son dernier étage est présent. Cependant, afin de pouvoir revenir à un canal strictement identique à celui d'un propulseur classique, il est prévu de pouvoir fonctionner en mode dégradé sans le dernier étage. Les deux configurations, respectivement avec et sans dernier étage, seront donc étudiées.

### 3.2.3.1.a Configuration avec dernier étage

#### ➤ Gradient axial de la composante radiale du champ $\nabla_z B_r$ , au centre du canal

L'un des paramètres suscitant le plus d'interrogations quant à son impact réel sur le fonctionnement du propulseur est le gradient axial de la composante radiale du champ, au centre du canal. Le PPS-Flex permet une variation de ce paramètre, en amont et en aval du plan de sortie du canal rectiligne, indépendamment des autres caractéristiques de la topologie magnétique.

- En amont du plan de sortie du canal rectiligne :

La plage de réglage du gradient amont est illustrée par les topologies a, b, c, d, et e données Figure 3-19 et Figure 3-22. Le gradient au centre du canal passe ainsi (sur la partie linéaire de l'augmentation de  $B_r$ ) approximativement de 36 unité/m à 55 unité/m (le gradient de la topologie de comparaison (c) se situant autour de 47 unité/m), ce qui représente respectivement une diminution de gradient de 24% (topologie (a)), et une augmentation de 21% (topologie (e)).

Les cartographies 2D montrent que les modifications induites sur les autres caractéristiques des topologies restent largement en dessous du seuil acceptable, en particulier à l'extérieur du canal où aucune différence n'est visible. Seule la forme de la lentille magnétique, en

particulier dans la zone à proche de l'anode, est inévitablement modifiée, ce paramètre n'étant pas indépendant du gradient.

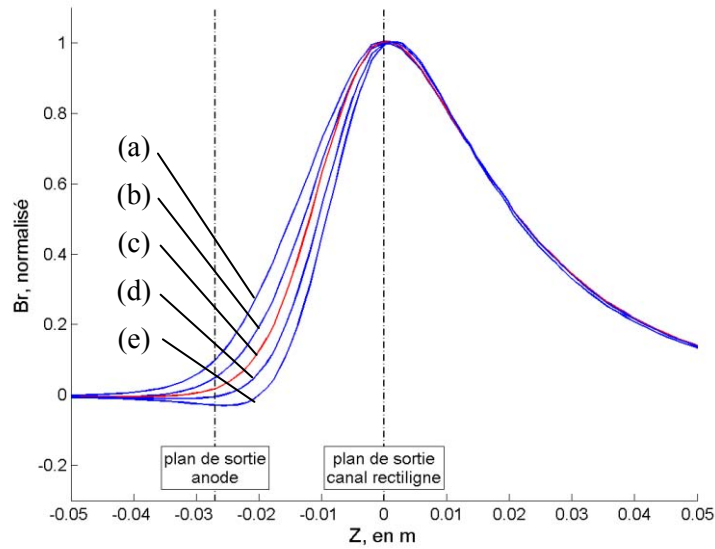


Figure 3-19 : Variation du gradient axial de la composante radiale du champ  $\nabla_z B_r$ , au centre du canal, en amont de la sortie du canal. Profils de champ.

- En aval du plan de sortie du canal rectiligne :

La plage de réglage du gradient aval est illustrée par les topologies a, b, c, d, et e données Figure 3-20 et Figure 3-23. Elle autorise une variation du gradient en aval du plan de sortie du canal rectiligne allant de -34 unité/mm (augmentation de 38% par rapport à la référence) à -22 unité/m (diminution de 10% par rapport à la référence), la topologie de référence se situant autour de -24.5 unité/m.

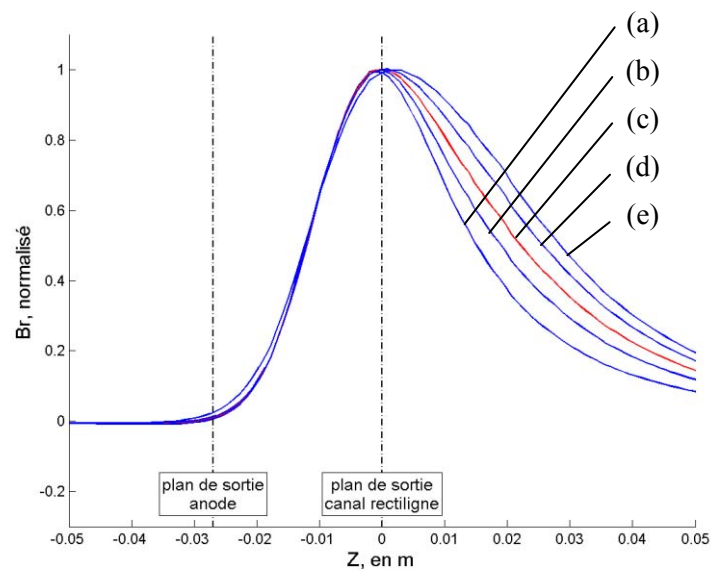


Figure 3-20 : Variation du gradient axial de la composante radiale du champ  $\nabla_z B_r$ , au centre du canal, en aval de la sortie du canal. Profils de champ.

Les cartographies 2D démontrent l'indépendance du réglage de ce paramètre par rapport aux autres caractéristiques de la carte de champ, en particulier en ce qui concerne la topologie à l'intérieur du canal, qui reste strictement identique. En aval du plan de sortie de la zone rectiligne du canal, la forme des lignes de champ n'est pratiquement pas affectée par le réglage et, comme attendu, seule l'amplitude du champ est modifiée.

- Concentration de la zone de champ :

En jouant à la fois sur le gradient amont et aval, il est possible de concentrer la zone de champ magnétique intense sur une bande dimensionnelle étroite.

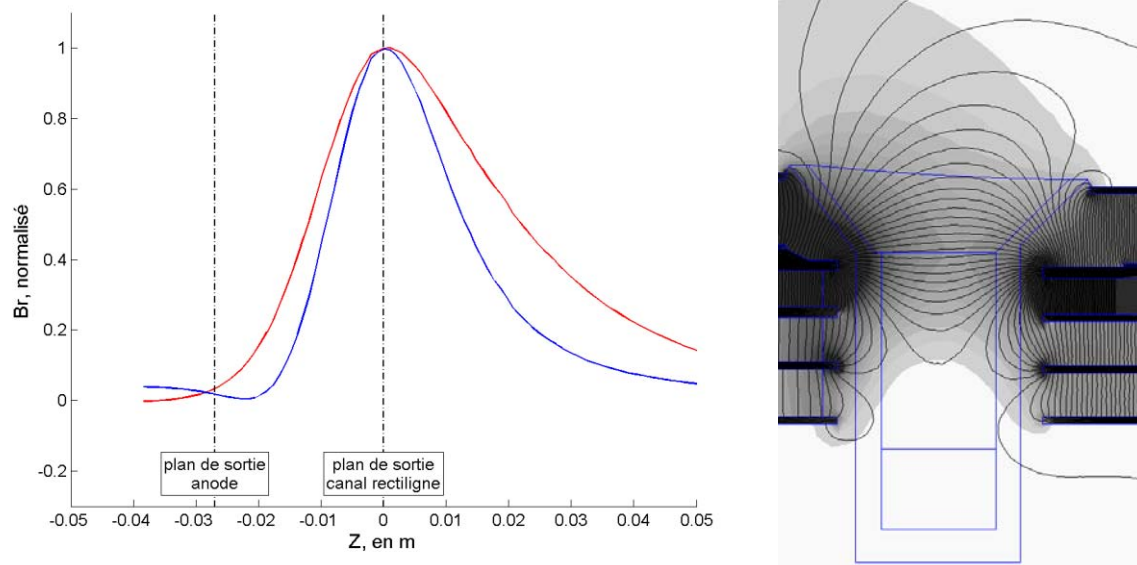


Figure 3-21 : Concentration du flux magnétique au niveau du plan de sortie du canal, afin de limiter au maximum la largeur de la zone de fort champ magnétique. Profils de champ et cartographie 2D.

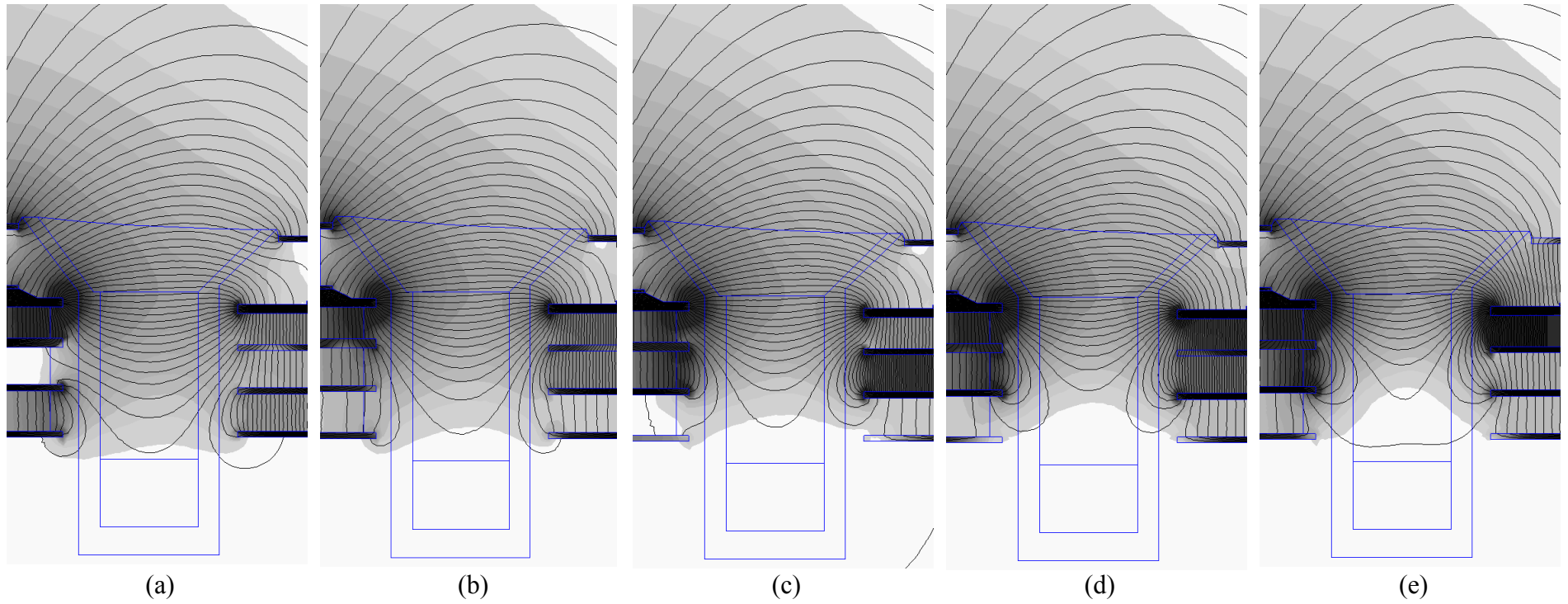
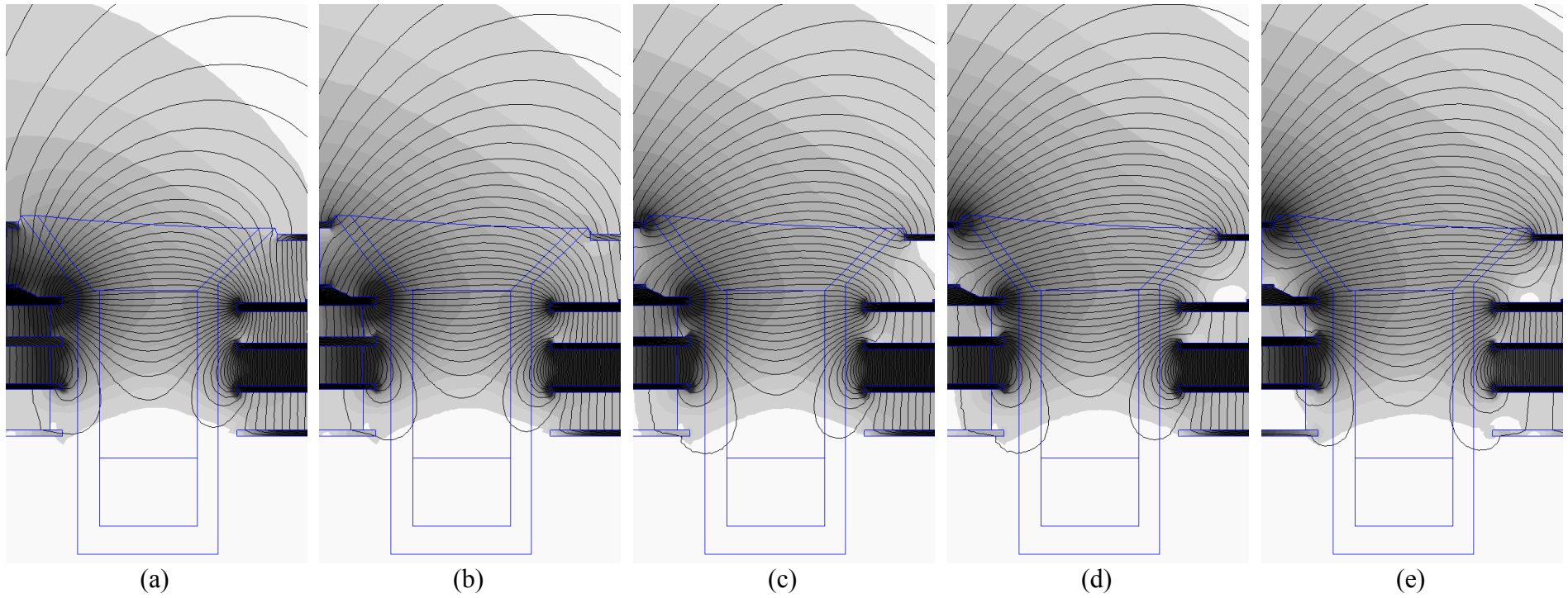


Figure 3-22 : Variation du gradient axial de la composante radiale du champ  $\nabla_z B_r$ , au centre du canal, en amont de la sortie du canal. Cartographies 2D (les figures représentent les lignes de champ magnétique ainsi que l'amplitude du champ  $B$ ).



*Figure 3-23 : Variation du gradient axial de la composante radiale du champ  $\nabla_z B_r$ , au centre du canal, en aval de la sortie du canal. Cartographies 2D.*

➤ Valeur maximale de la composante radiale du champ au centre du canal

L'influence de la valeur du maximum de champ au centre (rayon moyen) du canal du propulseur a été souvent étudiée dans la littérature. En effet, n'importe quel propulseur possédant un circuit magnétique à bobines peut permettre une variation de ce paramètre, en appliquant un coefficient multiplicateur identique aux valeurs de courants parcourant chaque bobine du système. Cependant, ce type de réglage est loin d'être sans conséquence sur le reste des caractéristiques de la topologie, puisque l'ensemble de la cartographie est modifié homothétiquement (à condition de rester dans la zone linéaire des matériaux).

Ce problème peut être évité à l'aide du PPS Flex puisqu'il est possible de moduler la valeur du maximum de champ, en conservant les autres caractéristiques de la topologie constante. Un exemple de plage de variation est illustrée par les topologies a, b, c, d, e et f données Figure 3-24 et Figure 3-25, où la valeur du maximum est modulé de +/-30% par rapport à la valeur de la topologie de référence (d'autres variations sont possibles, en fonctions de la proportion de zone conservée constante).

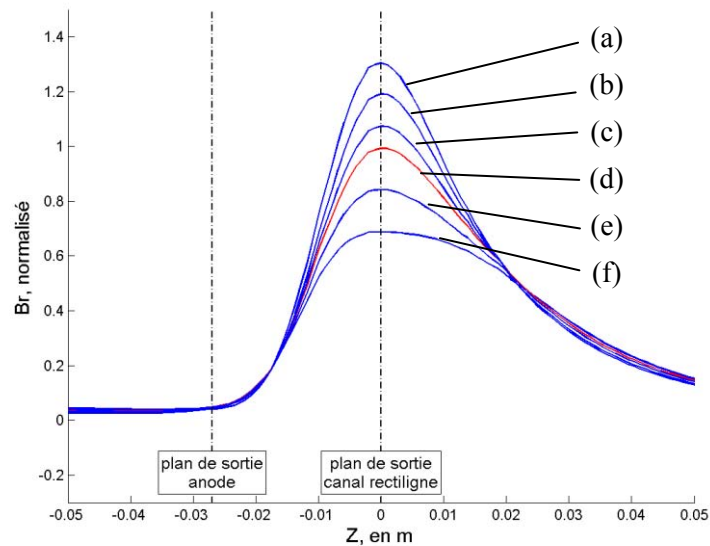
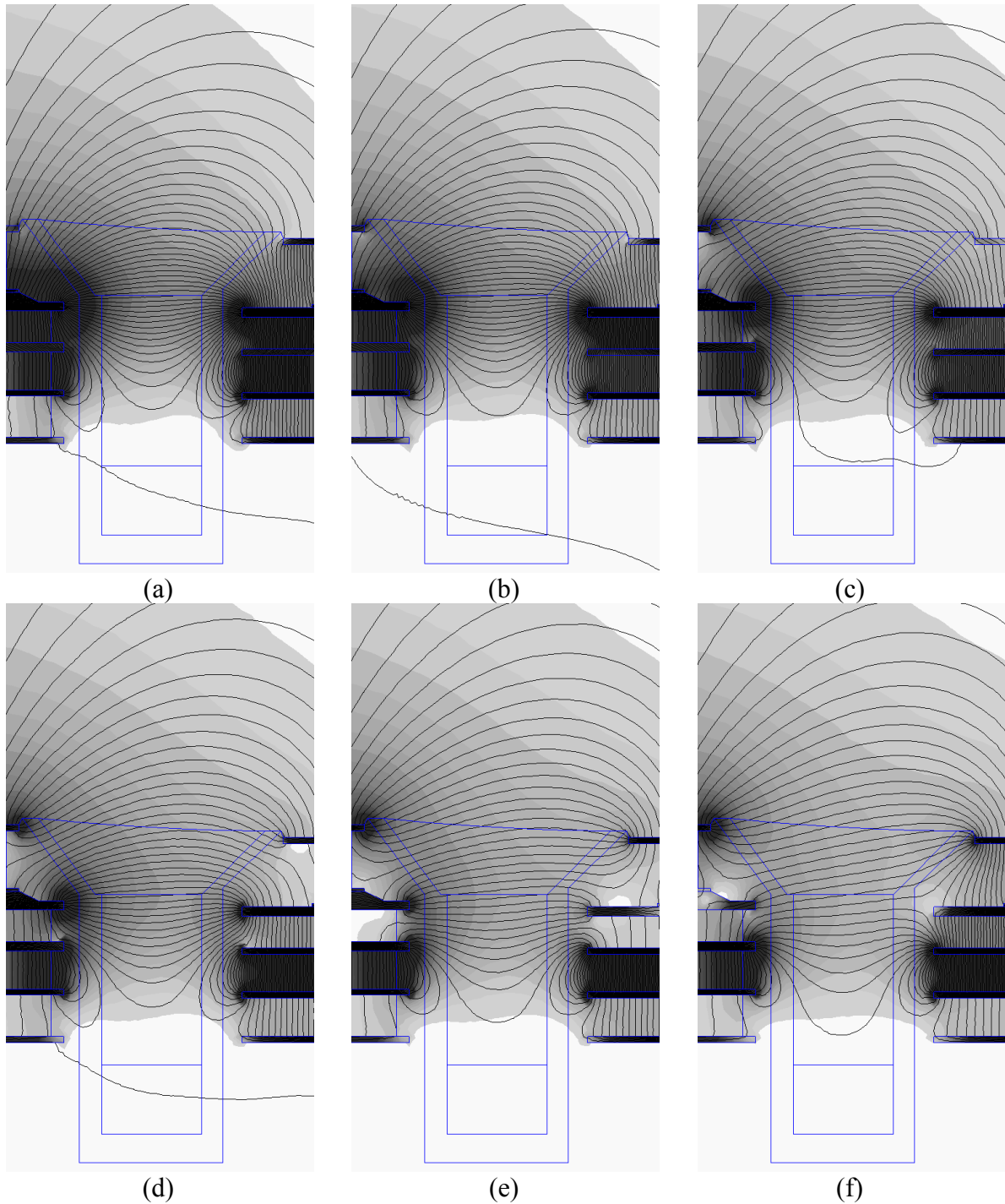


Figure 3-24 : Variation de la valeur maximale de la composante radiale du champ  $B$  au centre du canal. Profils de champ.



*Figure 3-25 : Variation de la valeur maximale de la composante radiale du champ B au centre du canal. Cartographies 2D.*

➤ Position axiale du maximum de champ au centre du canal

La cartographie peut être entièrement décalée axialement sur une plage d'environ 1,5cm. Le maximum de champ peut ainsi être remonté jusqu'à 1 cm en amont du plan de sortie du canal rectiligne ou, à l'inverse, descendre 0,5cm après le plan de sortie, la cartographie étant globalement très peu affectée par cette translation (toutefois, des zones de la topologie normalement non visibles par le plasma le deviennent lorsque la cartographie est déplacée vers l'extérieur du propulseur).



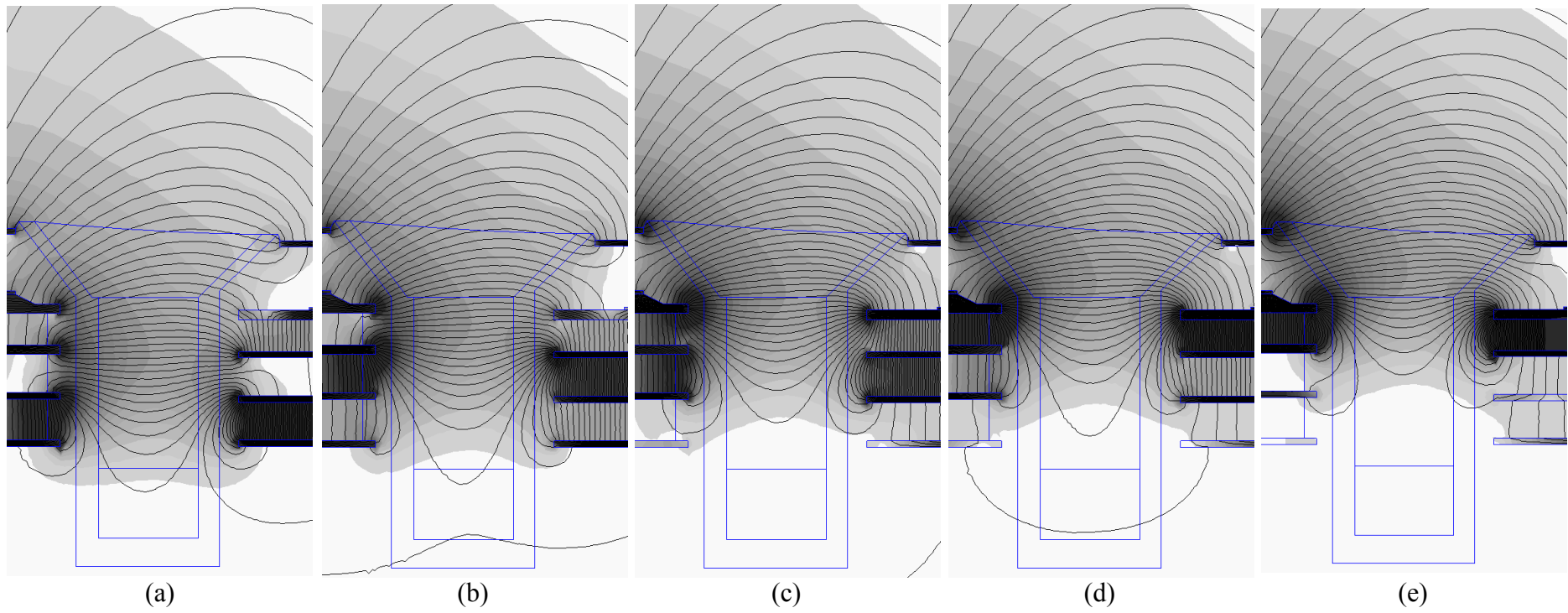


Figure 3-26 : Variation de la valeur maximale de la composante radiale du champ  $B$  au centre du canal. Cartographies 2D

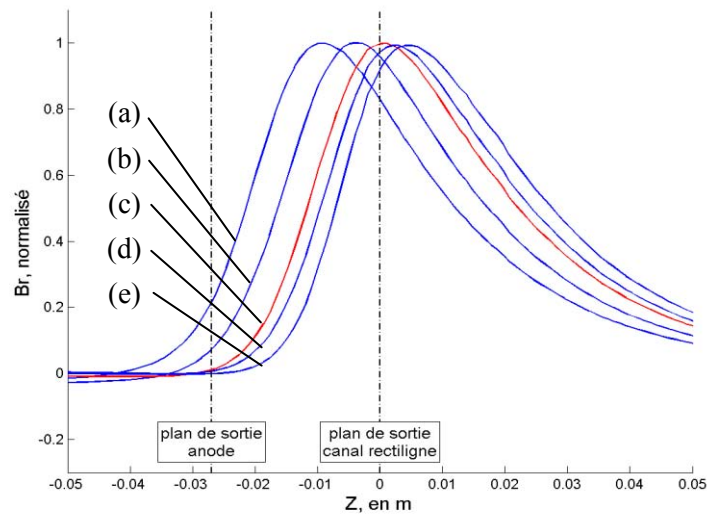


Figure 3-27 : Variation de la valeur maximale de la composante radiale du champ  $B$  au centre du canal. Profils de champ.

➤ Inclinaison de la lentille magnétique au niveau du plan de sortie du canal

L'inclinaison des lignes de champ au niveau du plan de sortie impacte sur la divergence et la direction de la plume. Cette influence sera quantifiable à l'aide du PPS Flex comme en témoignent les topologies a, b, c, d, e, f et g décrites par la Figure 3-28 et la Figure 3-29. De légères différences de comportement (en particulier on observe une variation de la position axiale du maximum de la composante  $B_z$ ) peuvent cependant être observées en fonction de l'angle effectif entre les lignes de champ en sortie du canal et le plan de sortie lui-même. Ces différences sont liées aux positions selon  $z$  des plaques séparant les bobines et au fait que la structure soit axisymétrique (ce qui implique de fait des dissymétries dans le champ généré par la structure, même si cette dernière semble posséder un « plan » de symétrie passant au centre du canal).

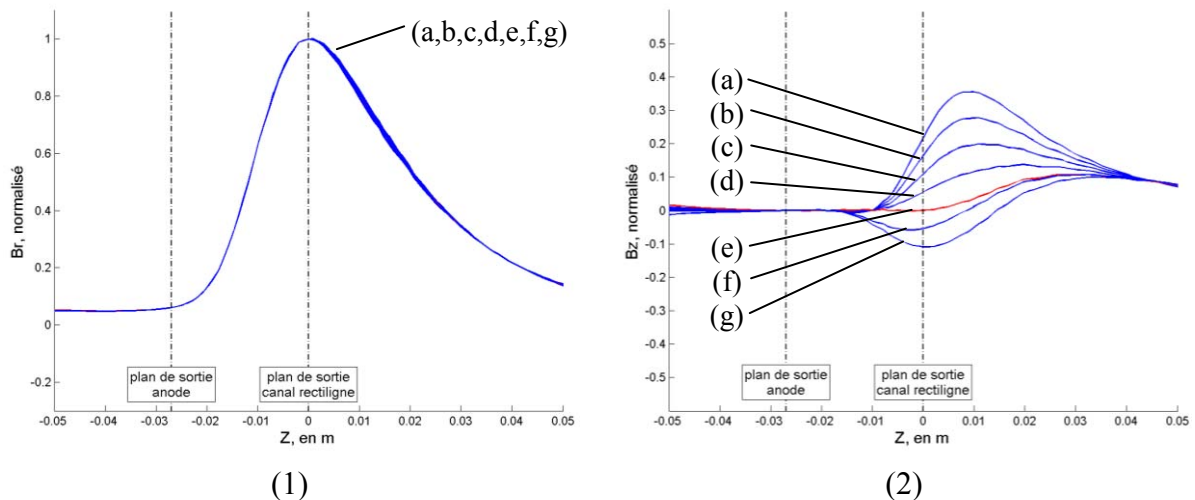


Figure 3-28-1 : Modification de l'inclinaison des lignes de champs magnétique au niveau du plan de sortie du canal rectiligne. Profils de champ. Composante radiale ( $B_r$ ).

Figure 3-28-2 : Modification de l'inclinaison des lignes de champs magnétique au niveau du plan de sortie du canal rectiligne. Profils de champ. Composante axiale ( $B_z$ ).

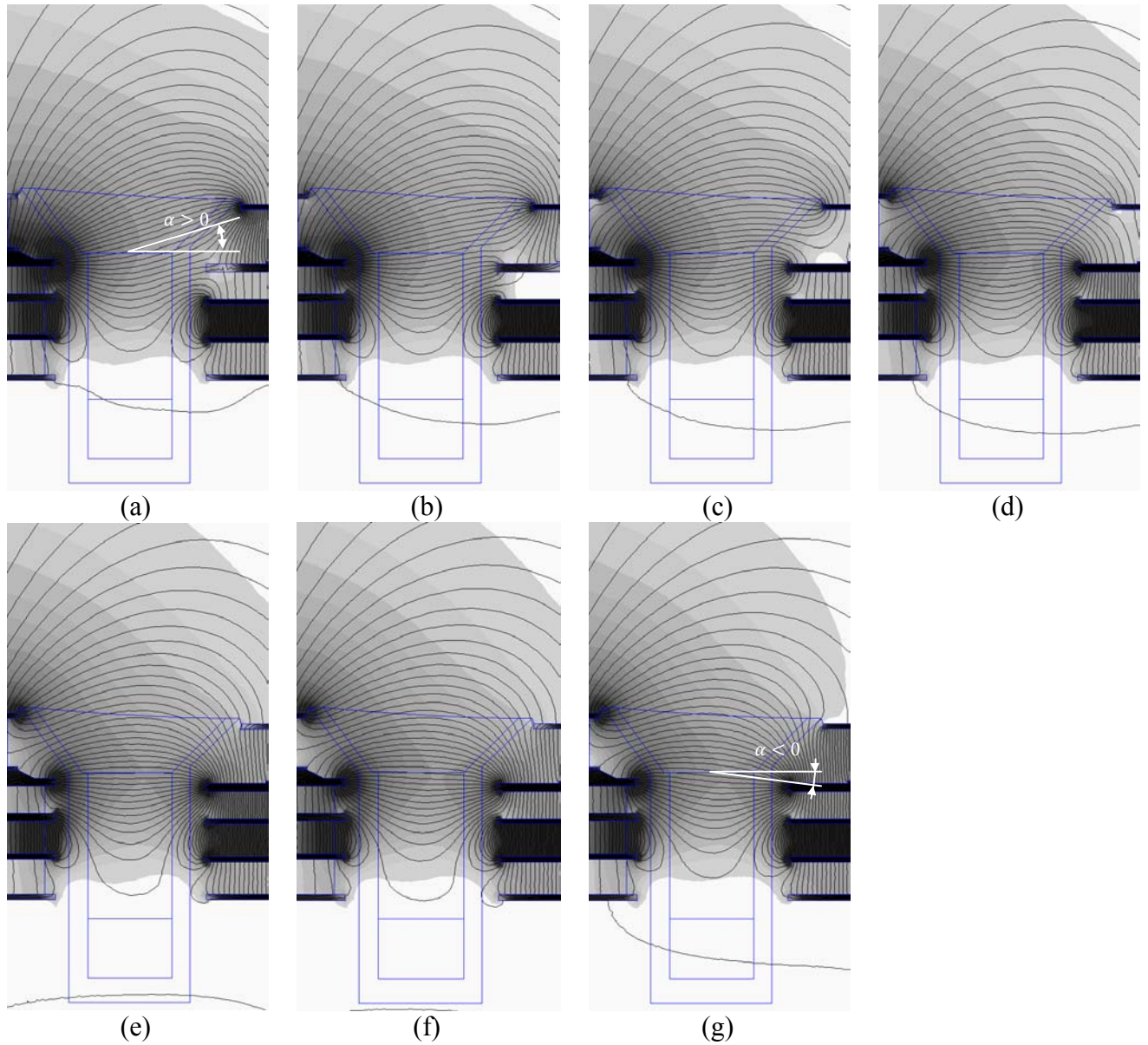


Figure 3-29 : Modification de l'inclinaison des lignes de champs magnétique au niveau du plan de sortie du canal rectiligne. Cartographies 2D.

La plage de variation est d'environ  $-6^{\circ}/+12^{\circ}$  (angle du champ B dans le plan de sortie du canal, au niveau du rayon moyen). Il sera en effet plus aisé d'obtenir des angles positifs (au sens des courants d'alimentation que cela nécessite et des déformations que cela implique) que négatifs, du fait des dissymétries évoquées plus haut.

➤ Zéro de champ dans la zone anodique du canal

Certains propulseurs possèdent un zéro de champ dans la zone anodique du canal ; le zéro de champ permet d'augmenter le gradient axial du champ magnétique. Or, différentes interrogations ont été émises quant au réel impact de ce zéro, qui, par ailleurs, s'accompagne d'une remontée de l'amplitude du champ au niveau de la zone anodique. Le PPS Flex doit apporter une réponse claire à ces questionnements. La Figure 3-30 illustre les possibilités de positionnement du zéro de champ (le nombre de lignes de champ a été augmenté afin de visualiser correctement la position du zéro) que l'on pourra déplacer sur toute la largeur du canal (ce qui implique naturellement une modification de la direction de la lentille magnétique) et avancer jusqu'à 1cm après le plan de sortie de l'anode.

Afin d'obtenir ces topologies incluant un zéro de champ, il est cependant obligatoire de conserver les deux bobines arrières présentes sur le PPS1350, ce qui ajoute deux paramètres de réglages supplémentaires aux huit déjà présents.

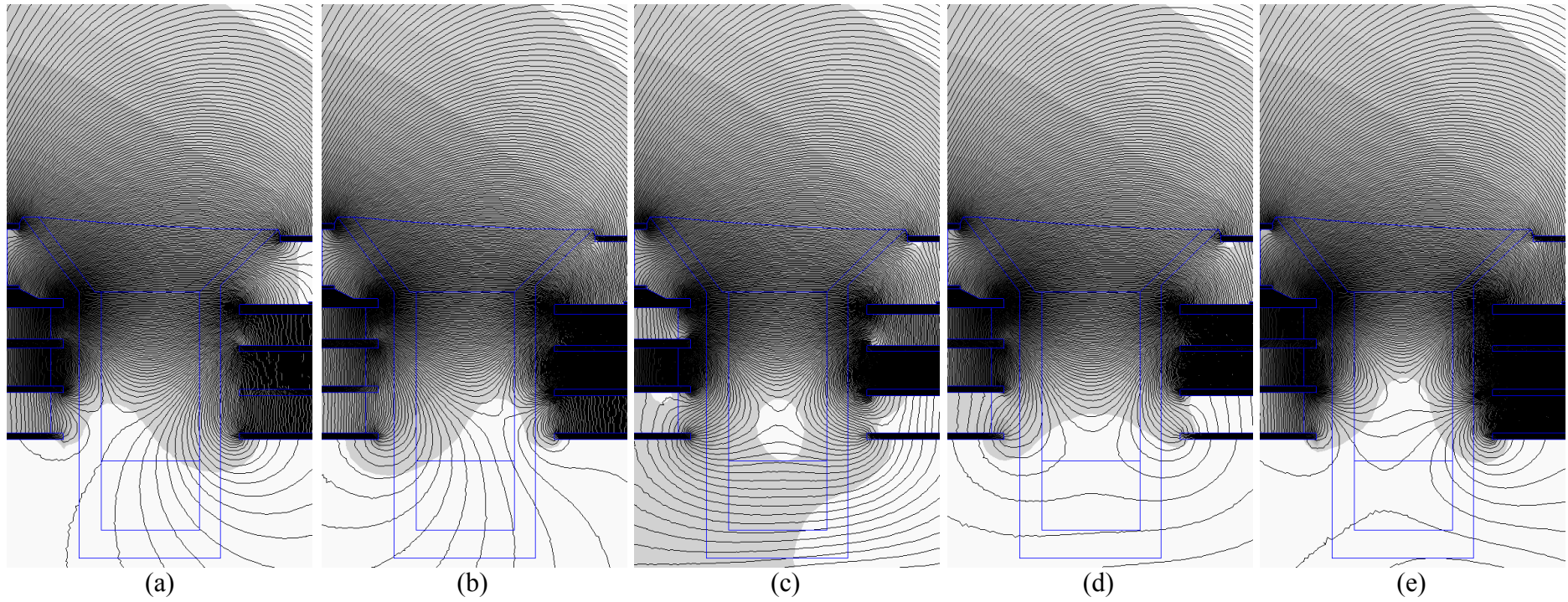


Figure 3-30 : Variation de la position du zéro de champ dans la zone anodique du canal. Cartographies 2D

### 3.2.3.1.b Configuration sans dernier étage

Lorsque le dernier étage est retiré, et les céramiques du canal remplacées par des céramiques rectilignes, le PPS Flex retrouve une géométrie de canal classique, similaire à celle du PPS 1350 ML. Cependant, la perte de deux degrés de liberté n'est pas sans conséquence sur les potentialités de la structure. Cette partie détaille donc les topologies accessibles dans le cas de cette configuration structurelle.

- Gradient axial de la composante radiale du champ  $\nabla_z B_r$ , au centre du canal

La suppression du dernier étage implique la perte de possibilité de réglage du gradient en aval du plan de sortie du canal. Le réglage du gradient amont reste en revanche toujours possible sur une plage équivalente à celle de la version à quatre étages (voir Figure 3-31 et Figure 3-32), soit une variation d'environ  $\pm 25\%$  par rapport à la topologie de référence.

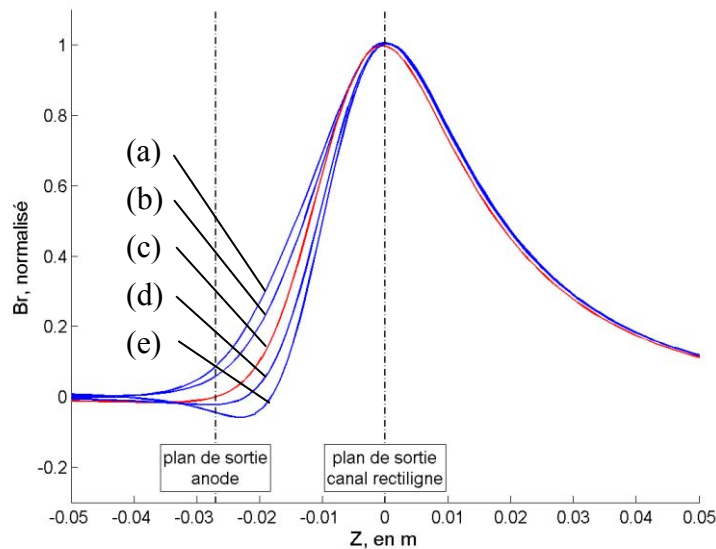


Figure 3-31 : Modification du gradient axial de la composante radiale du champ, en amont du plan de sortie. Profil de champ au centre du canal.

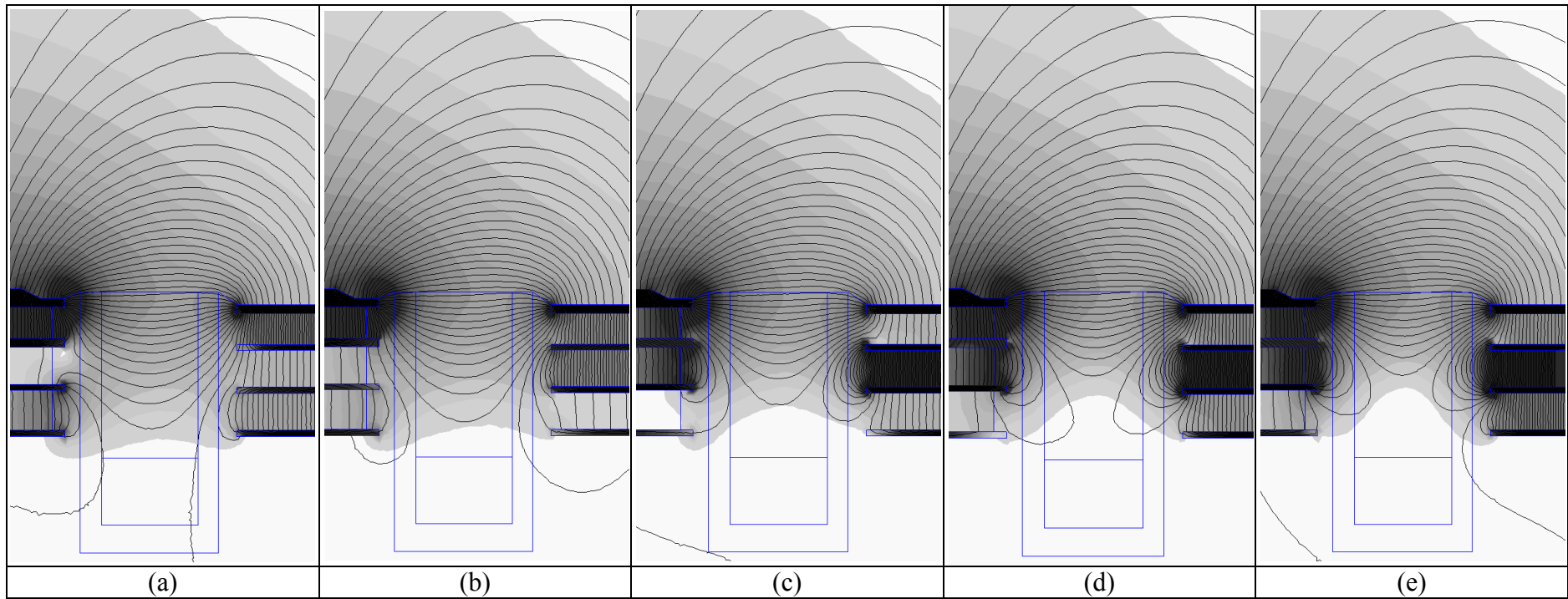


Figure 3-32 : Modification du gradient axial de la composante radiale du champ, en amont du plan de sortie. Cartographies 2D

➤ Valeur maximale de la composante radiale du champ au centre du canal

La valeur maximale du champ au centre du canal est réglable indépendamment de l'étalement de la zone de champ dans le canal (voir Figure 3-33 et Figure 3-34). La plage de variation est identique à celle de la version à 4 étages, mais l'indépendance entre les différentes caractéristiques de la cartographie n'est en revanche plus totalement assurée. Il est en particulier impossible de contrôler le champ à l'extérieur du canal, ce dernier suit donc les variations de la valeur maximale de champ.

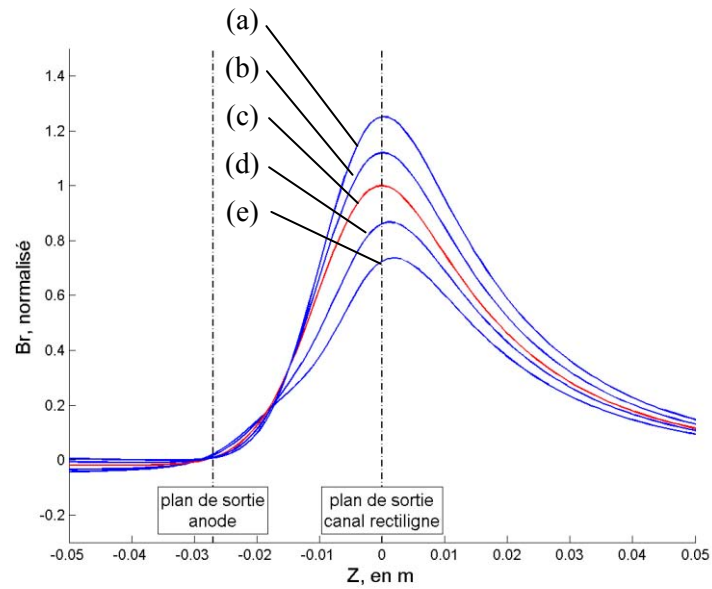


Figure 3-33 : Variation de la valeur maximale de la composante radiale du champ. Profil de champ au centre du canal.



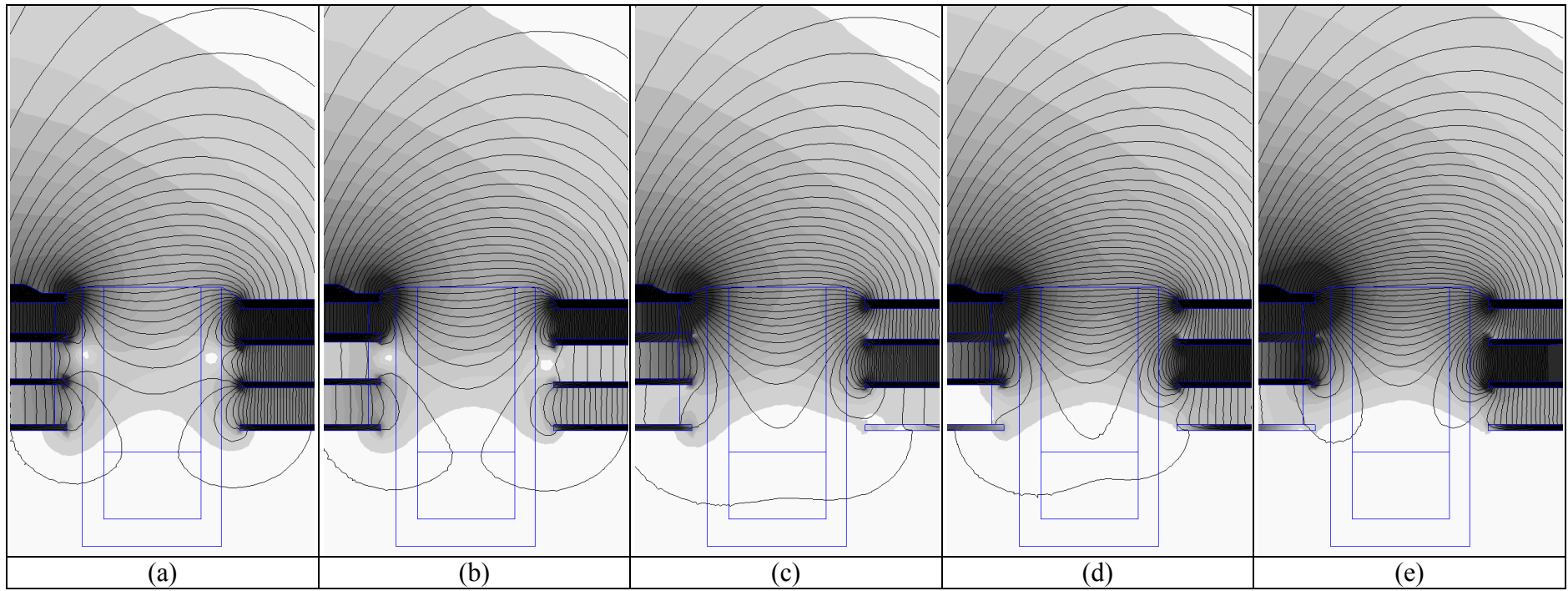


Figure 3-34 : Variation de la valeur maximale de la composante radiale du chap. Cartographies 2D

➤ Position axiale du maximum de champ au centre du canal

La position axiale du maximum de champ peut être décalée selon  $z$  en amont du plan de sortie, sur une plage équivalente à celle de la version à 4 étages du propulseur (jusqu'à 1cm en amont du plan de sortie rectiligne). En revanche, la possibilité de décalage à l'extérieur du canal est définitivement perdue. Le maximum au niveau du rayon moyen du canal ne peut être placé à plus de 1mm en aval du plan de sortie (dans le cas d'une translation de la topologie de référence). Les profils de champ au centre du canal et les cartographies 2D correspondants à ce type de réglage sont données Figure 3-35 et Figure 3-36.

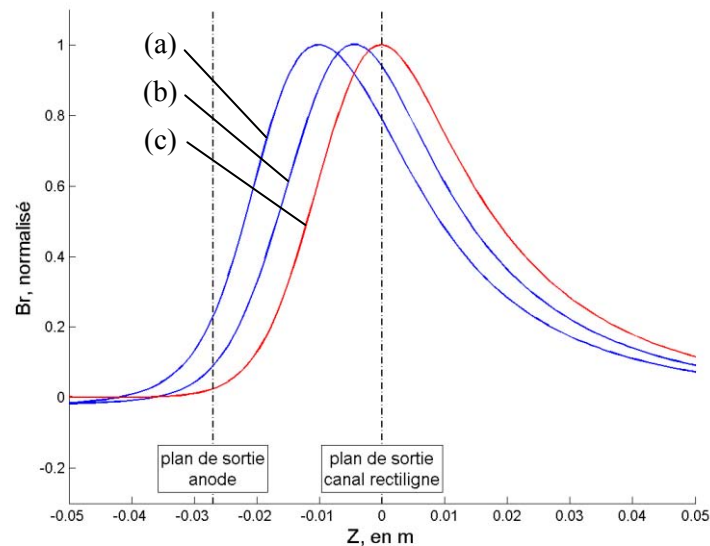


Figure 3-35: Variation de la position axiale du maximum de champ. Profil de la composante radiale du champ au centre du canal.

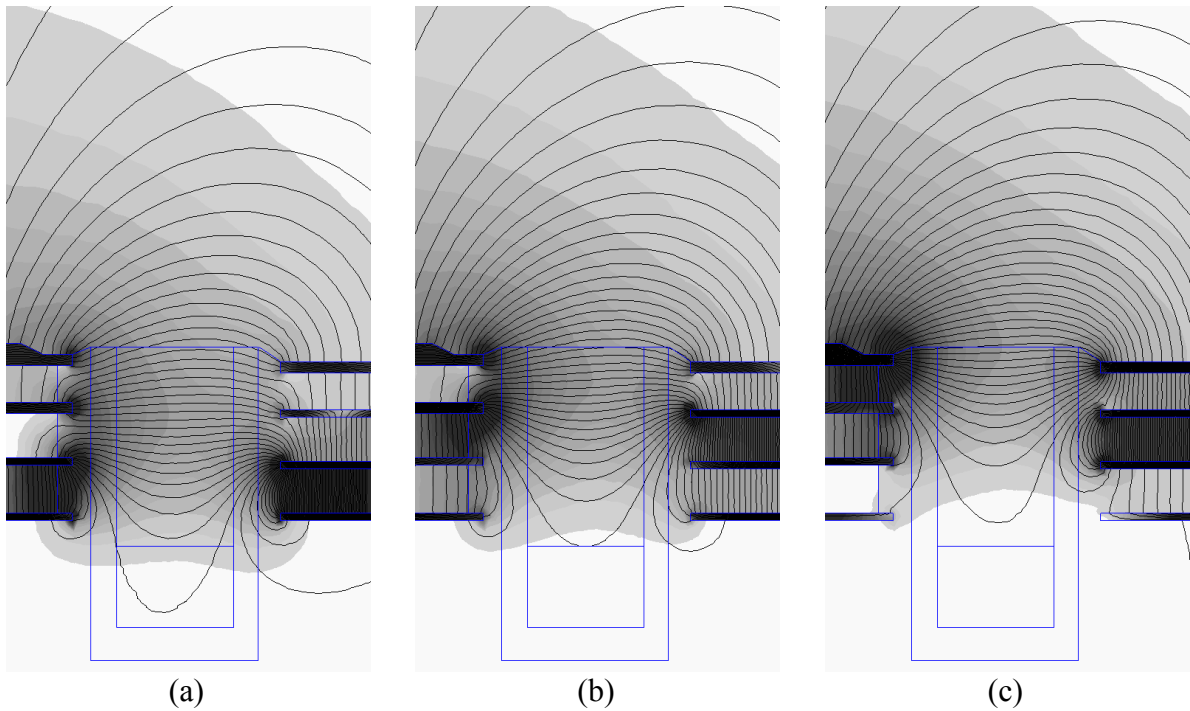


Figure 3-36: Variation de la position axiale du maximum de champ. Cartographies 2D.

➤ Inclinaison de la lentille magnétique au niveau du plan de sortie du canal

La possibilité de réglage de l'angle des lignes de champ en sortie du canal est, elle aussi, impactée par la suppression du dernier étage. L'inclinaison reste possible, mais sur une plage réduite par rapport à la version à quatre étages, allant d'environ  $-3^\circ$  à  $+6^\circ$  (angle du champ B au niveau du rayon moyen du canal, dans le plan de sortie). Une latitude supérieure est bien sûr atteignable, mais au détriment des autres caractéristiques de la topologie du champ (notamment l'inclinaison de lignes de champ à l'intérieur du canal).

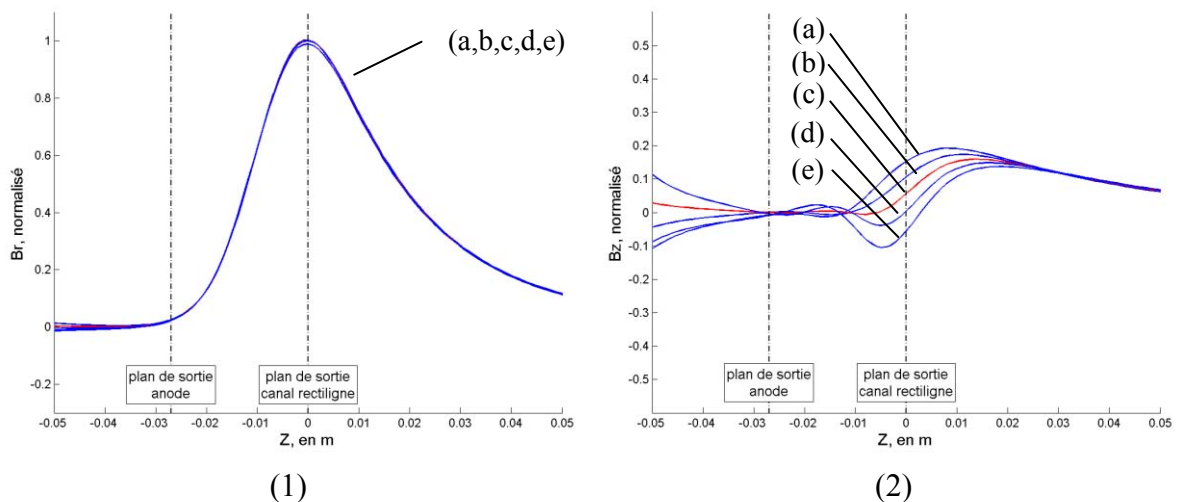


Figure 3-37-1 : Modification de l'inclinaison des lignes de champ magnétique au niveau du plan de sortie du canal rectiligne. Profils de champ. Composante radiale ( $B_r$ ).

Figure 3-37-2 : Modification de l'inclinaison des lignes de champ magnétique au niveau du plan de sortie du canal rectiligne. Profils de champ. Composante axiale ( $B_z$ ).

➤ Zéro de champ dans la zone anodique du canal

Les possibilités de réglages du zéro de champ (existence, positionnement radial et axial) ne sont que peu affectées par le retrait du dernier étage, étant donné que la zone concernée est la plus éloignée du plan de sortie du canal. On obtient donc une plage de réglage équivalente à celle de la version à quatre étages et permettant de réaliser la plupart des investigations nécessaires à une meilleure compréhension de l'impact du zéro de champ et de ses caractéristiques sur le fonctionnement du propulseur.

*3.2.3.1.c Bilan*

Dans sa version à quatre étages, le PPS Flex permet de répondre à l'ensemble des requêtes formulées dans le cahier des charges, au prix toutefois d'une perturbation potentielle du plasma en sortie du canal rectiligne, du fait de l'ajout d'une partie oblique au canal. La version sans le dernier étage permet, quant à elle, l'utilisation d'un canal identique à celui du PPS 1350, mais les possibilités de réglages de paramètres impliquant le réglage du champ magnétique à proximité de la sortie du canal sont réduites. La structure permet malgré tout le réglage, dans des conditions plus ou moins équivalentes à la version à quatre étages, des paramètres suivants:

- gradient magnétique en amont du plan de sortie
- position axiale du maximum de champ au centre du canal (avec une limite de positionnement située à 1mm après le plan de sortie du canal rectiligne)
- inclinaison des lignes de champ au niveau du plan de sortie (sur une plage restreinte)
- présence et positionnement (radial et axial) d'un zéro de champ dans la zone anodique du canal

Soulignons ici la possibilité d'étudier de plus, à l'aide de la structure à 4 étages, l'impact des valeurs de champ au niveau des parois indépendamment du champ au centre du canal, en vue d'observer l'effet d'un éventuel "miroir magnétique". La plage de variation sera cependant limitée (en raison du principe de conservation du flux magnétique), toute modification de la topologie magnétique en bordure du canal ayant tendance à impacter sur le profil de champ au centre de ce dernier. Une définition plus précise des besoins en matière de topologie magnétique à ce niveau est nécessaire afin de définir les configurations envisageables.

**3.2.3.2 Domaine de validité de l'hypothèse de linéarité du champ**

L'interface utilisateur proposée avec le PPS Flex repose sur le principe de superposition du champ magnétique. Chaque bobine alimentée individuellement par un courant unitaire fait l'objet d'une simulation par éléments finis et les différents champs obtenus sont superposés en les pondérant en fonction du courant d'alimentation souhaité dans chaque bobine.

Le théorème de superposition du champ magnétique n'est valable que dans le cas de matériaux ayant un comportement linéaire vis-à-vis du champ magnétique, ce qui n'est évidemment pas le cas du fer Armco. Des différences devraient donc au minimum apparaître à partir de valeurs suffisamment élevées d'induction.

Les Figure 3-39 et Figure 3-40 représentent les profils de champ au centre du canal, obtenus lors d'une variation homothétique des courants d'alimentations des bobines, pour deux configurations distinctes. La configuration 2 (Figure 3-40), présente un gradient magnétique plus important que la configuration 1 (Figure 3-39) et nécessite donc des densités de courants supérieures dans les bobinages pour obtenir un niveau de champ équivalent au centre du canal. Toutes les courbes sont normalisées par rapport au maximum de la courbe ( $|B|_{\max} = 1T$ ) de la première figure. La légende indique, pour chaque courbe en trait plein, la valeur

maximale d'amplitude de  $B$  sur la totalité de la structure, lorsque le champ est calculé via la méthode de superposition. La courbe en pointillés de couleur correspondante est obtenue en appliquant les mêmes courants et en réalisant une simulation éléments finis non linéaire.

Les différents résultats montrent que le PPS-Flex, en deçà d'une valeur seuil d'induction à préciser, reste dans un régime de fonctionnement linéaire. La valeur seuil diffère cependant en fonction de la configuration d'alimentation. Ainsi, à titre d'exemple, la saturation intervient pour une induction maximale dans le circuit magnétique entre 3 et 4T pour la configuration 1 et entre 2.3 et 3T pour la configuration 2. Ceci correspond dans tous les cas à des niveaux de champ bien plus élevés que ce que laissait présager la courbe  $B(H)$  du fer Armco. Tant que le niveau d'induction dans la totalité du matériau ferromagnétique reste en deçà du coude de saturation, l'hypothèse de linéarité du matériau est valable et les deux courbes sont confondues. Le domaine d'application de la méthode s'étend cependant bien après que certaines zones ponctuelles du matériau aient dépassé la valeur d'induction de saturation. Au-delà, les zones de saturation qui apparaissent dans certaines parties du circuit (notamment au niveau des jonctions entre les noyaux des bobines et les plaques les séparant) modifient la circulation du flux à l'intérieur même de ces parties ferromagnétiques. Cependant, la topologie du champ magnétique dans le canal obéit encore au principe de superposition, tant que ces zones de saturation restent localisées et ne s'étendent pas à la totalité de la section de passage du flux dans les sections en fer Armco. Cela explique par là même la dépendance de la valeur seuil à la configuration magnétique étudiée. En fonction de la configuration, la localisation et la géométrie des zones de forte induction peuvent varier et la saturation de la section complète peut intervenir plus ou moins tôt.

Il n'est donc pas pertinent de chercher à définir une valeur d'induction maximale à ne pas dépasser lors de l'utilisation de la méthode de superposition. La limitation imposée sur les densités de courant, initialement pour des raisons thermiques, est finalement suffisante. Savoir déterminer la justesse des résultats obtenus est toutefois indispensable et la méthode la plus efficace reste une simulation par éléments finis non linéaire pour chaque configuration à forte densité de champ magnétique. La possibilité de réaliser cette simulation directement à partir de l'interface de visualisation, à partir des valeurs de courants sélectionnées, a été implémentée dans cette optique.

En observant attentivement les courbes des deux figures, il peut être observé que l'écart minimum entre les courbes simulées (simulation éléments finis non linéaires) et calculées (méthode de superposition, linéaire) est obtenu pour des valeurs de champ médianes et non minimales. En effet, les matériaux simulés sont pris comme linéaires et la valeur de perméabilité choisie correspond à celle du matériau réel juste avant le coude de saturation (voir schéma Figure 3-38). De fait, pour des valeurs d'induction faibles, la perméabilité exploitée dans le principe de superposition n'est plus représentative de la perméabilité relative inhérente à la courbe  $B(H)$ , ce qui implique de légers écarts entre les courbes obtenues par superposition des différents champs et celles obtenues via simulation non linéaire, dans les cas où les parties ferromagnétiques sont faiblement magnétisées. Ces écarts, cantonnés aux zones de faibles inductions, restent cependant très faibles (de l'ordre de quelques pourcents) et ne sont donc pas problématiques.

Remarquons enfin que la méthode de calcul du champ par superposition se base sur des simulations éléments finis linéaire (la perméabilité des matériaux ferromagnétique est fixe) pour le calcul du champ généré par les bobines alimentées séparément par un courant unitaire. Employer des simulations éléments finis non linéaire à ce niveau n'améliore cependant pas les résultats. Au contraire, les valeurs de champs obtenues après superposition sont alors dépendantes du niveau d'induction dans le matériau et, donc, du courant choisi comme unitaire et présentent, dans tous les cas, une moins bonne concordance avec les simulations éléments finis non linéaires classiques.

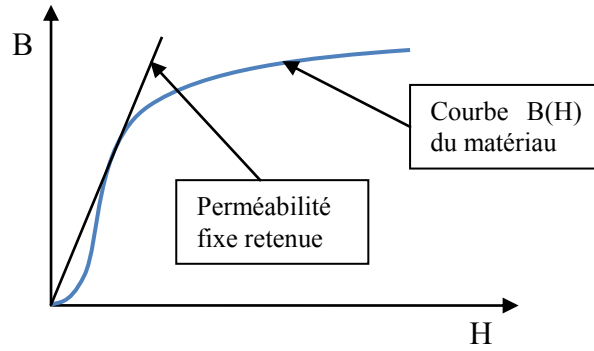


Figure 3-38: Sélection de la perméabilité fixe pour les simulations linéaires

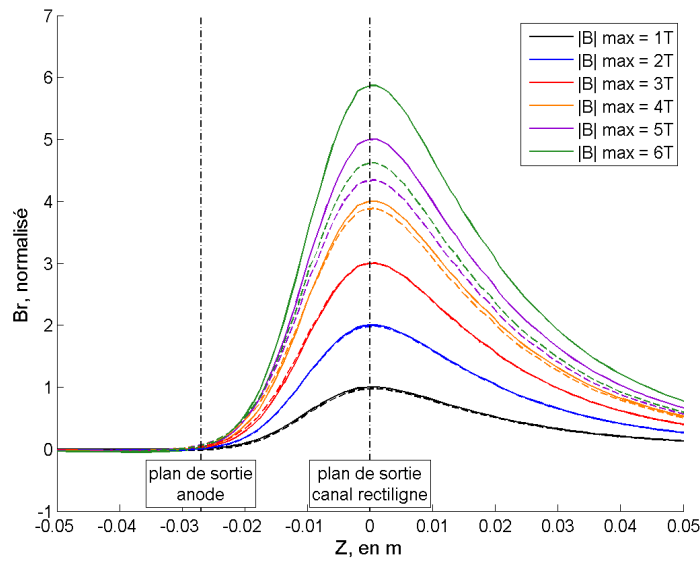


Figure 3-39: Comparaison entre le champ magnétique obtenu via la méthode de superposition des champs (en ligne continue) et celui obtenu à l'aide de simulation éléments finis prenant en compte les caractéristiques non linéaires du fer (en ligne pointillée). Profil de champ au centre du canal. Configuration 1.

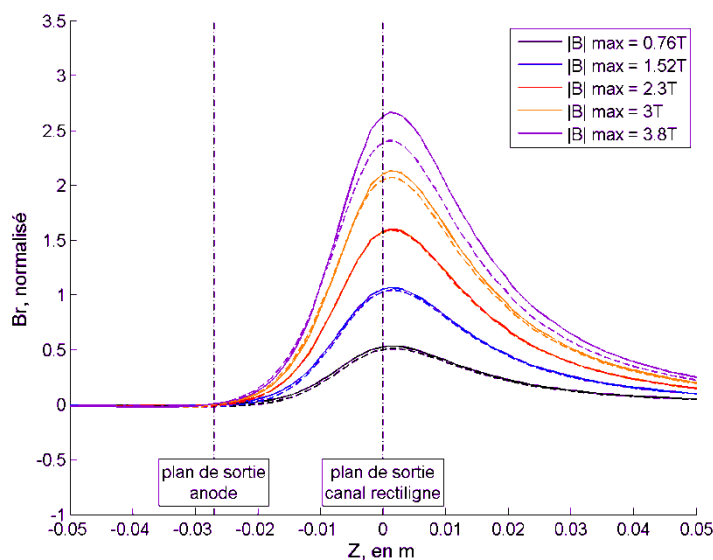


Figure 3-40: Comparaison entre le champ magnétique obtenu via la méthode de superposition des champs (en ligne continue) et celui obtenu à l'aide de simulation éléments finis prenant en compte les caractéristiques non linéaires du fer (en ligne pointillée). Profil de champ au centre du canal. Configuration 2.

### 3.2.4 PPS-Flex : conclusion

Le circuit paramétrable du PPS-Flex doit permettre le réglage indépendant de différents paramètres :

- modification du gradient de champ en amont du plan de sortie du canal
- modification de la valeur maximale du champ magnétique au niveau du rayon médian du canal
- génération et positionnement d'un zéro de champ à proximité de l'anode du canal
- inclinaison des lignes de champs au niveau du plan de sortie du canal
- etc.

Dans sa forme intégrale, le PPS-Flex répond théoriquement parfaitement à ces critères comme en témoignent les différentes courbes présentées. Dans sa version amputée du dernier étage, quelques limitations prévisibles apparaissent, dès lors que les réglages impliquent un contrôle du champ dans la zone en aval du plan de sortie du canal (réglage du gradient aval, inclinaison des lignes de champ au niveau du plan de sortie du canal, décalage de topologie vers l'extérieur du canal, etc.). Le Tableau 3-3 récapitule les principales capacités de chacune des deux versions.

Paramètre de la topologie magnétique à faire varier	Plage de variation possible, par rapport à la grandeur correspondante de la topologie de référence	
	PPS-Flex, version à 4 étages	PPS-Flex, version à 3 étages
Gradient axial de la composante radiale du champ $\nabla_z B_r$ , au centre du canal, en amont de la sortie du canal	+/-25%	+/-25%
Gradient axial de la composante radiale du champ $\nabla_z B_r$ , au centre du canal, en aval de la sortie du canal	-10% à +38%	Non
Amplitude du maximum de la composante radiale du champ au centre du canal	+/-30%	+/-30%, mais certains paramètres de la topologie magnétiques varient conjointement
Décalage axial de la topologie magnétique	-1cm à +0,5cm	-1cm à 0
Inclinaison des lignes de champ dans le plan de sortie du canal (rayon médian)	-6° à +12°	-3° à +6°
Création d'un zéro de champ à proximité de l'anode	Oui. Positionnement possible sur toute la largeur du canal, et jusqu'à 1cm après le plan de sortie de l'anode	Oui. Positionnement possible sur toute la largeur du canal, et jusqu'à 1cm après le plan de sortie de l'anode

Tableau 3-3: Récapitulatif des principales potentialités du PPS-Flex, avec et sans son dernier étage.

Remarquons que la liste des potentialités décrites ici est loin d'être exhaustive et qu'il reviendra à l'utilisateur de moduler le champ dans le canal autour des propositions faites ici. Des changements beaucoup plus drastiques peuvent même être envisagés (absence de gradient, de lentille, etc.) afin d'obtenir des points de fonctionnement originaux, probablement peu avantageux du point de vue du fonctionnement du propulseur, mais riches en information, en vue d'une comparaison avec les données issues des simulations plasma.

### **3.3 Conclusion**

Le dimensionnement du circuit magnétique de deux propulseurs atypiques a été présenté dans ce chapitre. Le premier concernait un propulseur forte puissance, le PPS 20K ML et fut l'occasion de mettre en place une méthode simple et accessible pour le dimensionnement de telles structures, en s'appuyant sur des algorithmes d'optimisation et des logiciels de simulations éléments finis existants. Une géométrie répondant aux divers impératifs du cahier des charges a pu être réalisée, sur la base d'une configuration classique. Le deuxième circuit dimensionné est celui du PPS Flex. Sa vocation est quelque peu particulière puisque l'objectif recherché est la capacité à produire la gamme de topologies magnétiques dans le canal du propulseur la plus large possible. Ceci est, de fait, difficilement conciliable avec la méthode de dimensionnement proposée précédemment, de par sa nature intrinsèquement multi-objectifs, et une méthode de design par essais-erreurs a donc été préférée. Le nombre important de degrés de liberté rendant toutefois cette tâche fastidieuse à l'aide d'outils classiques (scripts appelant un logiciel éléments finis, etc...), un outil de visualisation des champs et de calcul de la configuration d'alimentation optimale a été réalisé. Ce logiciel servira de plus d'interface utilisateur lors de l'utilisation du prototype. Une géométrie modulaire répondant aux objectifs fixés a ainsi pu être proposée. Le circuit magnétique peut-être employé en deux configurations différentes, une première maximisant les possibilités de variations et réglages de la topologie à l'intérieur et à l'extérieur du canal, au prix toutefois de l'ajout d'une protection oblique après le plan de sortie du canal et une deuxième configuration se passant de cet ajout, ce qui réduit les possibilités de réglages, mais permet de retrouver une géométrie identique aux géométries classiques. Le dernier chapitre est consacré à la réalisation pratique du PPS Flex et de son banc d'alimentation et aux caractérisations expérimentales du champ produit par la structure.



## **Chapitre 4**

# **Réalisation du PPS-Flex et caractérisation expérimentale**

Le circuit magnétique du PPS-Flex a été dimensionné et validé par simulations numériques. Il convient donc à présent de passer à sa réalisation technique qui doit prendre en compte toutes les contraintes d'utilisation inhérentes à un propulseur à effet Hall (compatibilité avec le système de génération du plasma, tenue thermique...). Son exploitation en laboratoire nécessite en outre un banc d'alimentation et une interface de pilotage spécifique. Enfin, une étape de validation du prototype et de ses performances doit être effectuée. Ce chapitre détaille ces différentes étapes.

## **4.1** **Réalisation du prototype**

### **4.1.1 Rappels objectifs du PPS-Flex et des contraintes de réalisation**

#### **4.1.1.1 Rappel des objectifs**

Les objectifs du PPS-Flex ont largement été explicités et justifiés dans le chapitre précédent. Rappelons donc simplement les paramètres retenus comme devant être réglables, le plus indépendamment possible les uns des autres :

- Gradient axial de la composante radiale du champ  $\nabla_z B_r$ , au centre du canal, en amont de la sortie du canal
- Gradient axial de la composante radiale du champ  $\nabla_z B_r$ , au centre du canal, en aval de la sortie du canal
- Amplitude du maximum de la composante radiale du champ au centre du canal
- Position axiale du maximum de champ
- Inclinaison de la lentille magnétique au niveau du plan de sortie du canal
- Présence ou absence d'un zéro de champ à proximité de l'anode
- Position radiale et axiale du zéro de champ
- Amplitude de champ au niveau de l'anode

Afin de simplifier le développement du propulseur à effet Hall répondant à ce cahier des charges, le circuit magnétique réalisé devra maximiser les compatibilités avec le propulseur PPS1350 DT développé par la Snecma. En particulier, le bloc canal, l'anode et la cathode seront directement empruntés à ce dernier. De fait, le PPS-Flex devra donc de plus être en mesure de reproduire la topologie magnétique du PPS1350.

Enfin, afin de conclure sur l'influence du zéro de champ localisé à proximité de l'anode, la possibilité de reproduire la cartographie du PPS1350 sans ce zéro (en conservant les valeurs de gradient) devra être réalisable.

#### **4.1.1.2 Rappel des contraintes inhérentes à tout circuit magnétique de propulseurs à effet Hall**

La réalisation d'un circuit magnétique de propulseur à effet Hall est soumise à plusieurs contraintes liées au fonctionnement du moteur et à son utilisation dans le vide.

La principale contrainte concerne les aspects thermiques. La température des parois en céramique du canal atteint 600°C au point de fonctionnement nominal pour un propulseur PPS1350 et peut monter jusqu'à 800°C dans les zones proches du plan de sortie pour un fonctionnement à fort débit [Maz-07]. Cette énergie thermique doit être évacuée, ce qui ne

peut être effectué que par rayonnement vers l'espace, les échanges thermiques via conduction entre le propulseur et le satellite devant être limités au maximum. Le design du propulseur doit donc être pensé, non seulement pour faciliter le rayonnement thermique des céramiques vers l'espace, mais aussi pour protéger ses parties fragiles telles que les bobinages d'un trop fort flux thermique.

La deuxième contrainte concerne la tenue au vide des différents matériaux employés, ainsi que leur comportement en phase de dégazage. Un matériau quelconque placé dans le vide tend à désorber du gaz précédemment emmagasiné et certaines particules ainsi rejetées peuvent alors se redéposer sur différents éléments. Ce dépôt peut-être problématique pour tout système impliquant des phénomènes optiques (appareils de mesure, etc.) et plus généralement tout dispositif influencé par les propriétés surfaciques de ses composants (comme le propulseur à effet Hall par exemple). Il convient donc de le limiter au maximum.

#### 4.1.1.3 Contraintes additionnelles

La principale contrainte supplémentaire concerne la compatibilité avec les composants du PPS 1350. En effet, si ce choix permet à la fois de simplifier le développement du prototype en ne se concentrant que sur l'étude de son circuit magnétique et de limiter les coûts en autorisant au besoin la mutualisation de certaines pièces, cette contrainte se traduit dans les faits par un certain nombre de dimensions imposées. En particulier, le dispositif de fixation du bloc incluant le canal impose la position axiale de l'un des étages du circuit magnétique, ainsi qu'une hauteur minimale pour ce dernier.

De plus, le choix de conserver le canal du PPS 1350 découle aussi d'une volonté de pouvoir comparer les résultats obtenus à l'aide du PPS Flex aux performances bien connues de ce propulseur. Pour cela, il est nécessaire de limiter au maximum les différences de configuration entre les deux propulseurs (emplacement cathode, température de fonctionnement, etc.). Or, il a été montré dans le chapitre précédent que les potentialités du PPS-Flex étaient grandement étendues par l'ajout d'un étage en aval du plan de sortie du canal. Cet étage doit impérativement être protégé du flux d'ions émis par le moteur. Une paroi protectrice doit donc être intégrée, mais elle ne sera a priori pas neutre vis-à-vis du fonctionnement du propulseur. Cet étage supplémentaire est nécessaire, mais doit être amovible afin de pouvoir retrouver la configuration du PPS1350 au besoin (i.e. si les performances et les caractéristiques du plasma du PPS-Flex avec dernier étage diffèrent fortement de celles du PPS1350, au point de rendre difficile l'interprétation des résultats).

Le principe du PPS-Flex est basé sur la multiplication des degrés de liberté. Cependant, cela implique une augmentation de la complexité de pilotage des alimentations du dispositif (nombre d'alimentations indépendantes, connectiques, etc.). C'est pourquoi, l'intérêt d'un point de vue magnétique de l'augmentation du nombre de bobines indépendantes est certes indéniable, mais un compromis doit être trouvé entre complexité du système et potentialités.

Enfin, les contraintes d'instrumentation du propulseur doivent aussi être prises en considération. Il s'agit d'un modèle de laboratoire, dédié à améliorer la compréhension des phénomènes internes lors de son fonctionnement. Il serait donc fortement dommageable de concevoir une structure incompatible avec de futures caractérisations. En particulier, le diagnostic par LIF développé au sein du laboratoire ICARE doit être réalisable en incluant le perçage d'une fente dans la céramique externe du canal.

## 4.1.2 Choix des matériaux

La première étape de cette réalisation pratique du prototype consiste à effectuer le choix des matériaux employés. Le PPS-Flex met principalement en œuvre trois matériaux distincts associés respectivement aux culasses ferromagnétiques, aux bobines et aux écrans thermiques.

### 4.1.2.1 Matériau ferromagnétique

Concernant les culasses ferromagnétiques, le fer Armco (fer pur à plus de 99%) et le fer-cobalt ont été envisagés. Le fer-cobalt possède des valeurs d'induction à saturation légèrement supérieures à celle du fer Armco®, mais est aussi, d'une part, beaucoup plus difficile à usiner du fait de sa dureté supérieure et, d'autre part, plus onéreux.

Le fer Armco, qui est déjà utilisé dans les propulseurs commercialisés par la Snecma, a donc été retenu pour réaliser les parties ferromagnétiques du circuit. Il s'agit cependant d'un matériau relativement ductile, ce qui oblige à prendre quelques précautions lors de l'usinage, le traitement et le bobinage des pièces, afin d'éviter des déformations pénalisantes pour la génération des topologies de champ magnétique.

### 4.1.2.2 Bobinages

Les bobinages seront quant à eux réalisés en Cerafil 500 (résistant à 500°C en fonctionnement continu et à 600°C en pointe), qui est à la fois moins coûteux que les câbles Thermocoax employés sur le PPS 1350 et possède, à volume égal, une section de cuivre plus importante. Ceci permettra d'augmenter le nombre d'ampères tour générés dans un volume donné. Le Cerafil est un câble qui comporte une âme en cuivre protégé par une gaine en céramique de très faible épaisseur. Ce type de câble est très fragile et un simple pli du fil occasionne systématiquement un défaut d'isolation au niveau du coude. Cela oblige à une vigilance importante sur le vieillissement des bobinages qui auront à subir des cyclages thermiques importants et risquent donc de souffrir des contraintes mécaniques. L'apparition d'éventuels courts-circuits entre spires qui en découleraient doit être évitée au maximum. Enfin, il est indispensable de prévoir une isolation supplémentaire entre les parties ferromagnétiques et les bobinages afin de garantir une absence de court-circuit entre les culasses conductrices et les spires.

### 4.1.2.3 Ecrans thermiques

Les bobinages font directement face aux parois en céramique du canal, dont certaines parties atteignent 600° en régime permanent. Des écrans thermiques doivent donc être prévus afin de protéger les bobines du flux thermique rayonné. Ces pièces doivent donc venir s'intercaler entre le circuit magnétique et le canal. L'espace étant très limité, elles doivent être très fines. Une première version de ces écrans a donc été réalisée en acier inox, pour des raisons de simplicité d'usinage. Ce dernier n'est cependant pas totalement amagnétique et des caractérisations magnétiques ultérieures ont montré leur impact non négligeable sur le champ magnétique dans le canal (voir 4.3.2.4). Une deuxième version de ces écrans a donc été réalisée en aluminium.

## 4.1.3 Réalisation du circuit magnétique

### 4.1.3.1 Géométrie retenue

Sur la base du dimensionnement effectué au chapitre 3 et des contraintes technologiques précédemment explicitées, la phase de réalisation technique a pu être initiée. La Figure 4-1

présente une vue d'ensemble du circuit magnétique complet du propulseur avec son dernier étage, en l'absence du bloc canal et de la cathode.

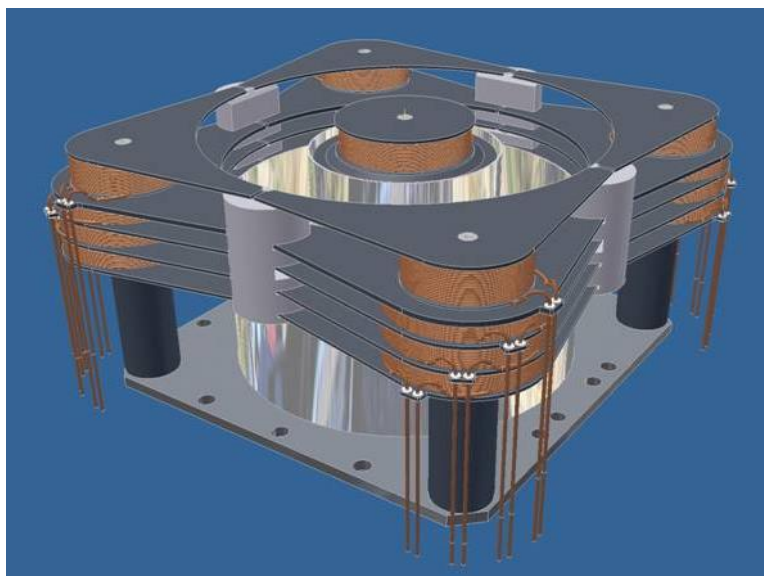


Figure 4-1: Vue du circuit magnétique complet du PPS-Flex

#### 4.1.3.2 Deux méthodes d'assemblage envisagées

##### 4.1.3.2.a Dépendance entre type de circuit magnétique et méthode d'isolation des bobinages

Les deux circuits ferromagnétiques constituant les colonnes externes et la colonne centrale sont des structures géométriques assez complexes avec des dimensions relativement petites (épaisseur des feuillets séparant les bobines variant de 1 à 1.5mm pour des largeurs d'encoches de 5 à 5.5mm). Des vues du circuit magnétique des bobines centrales, ainsi que de l'un des modules du circuit magnétique externe sont données en Figure 4-2.

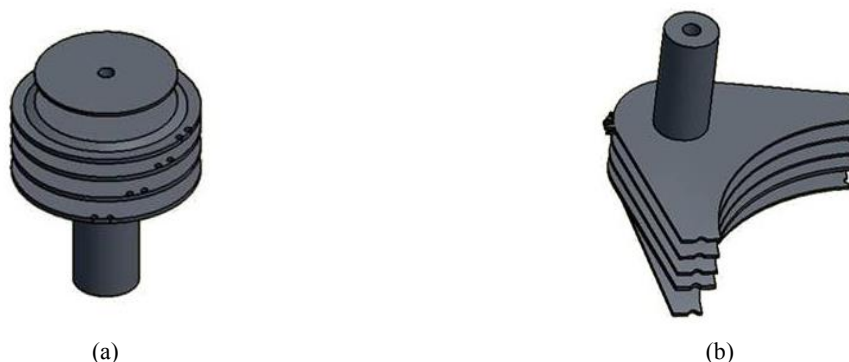


Figure 4-2: (a) pièce ferromagnétique des bobines centrales, (b) pièce ferromagnétique de l'un des modules externes

Deux solutions sont envisageables pour la réalisation de ces pièces en fonction du protocole d'isolation culasse/bobinages utilisé. En effet, comme précisé antérieurement, le choix du Cerafil comme conducteur pour la réalisation des bobines implique une certaine fragilité. Des tests d'isolation électrique ont montré que celle-ci résistait difficilement à l'étape de bobinage. En l'absence d'isolation supplémentaire entre les pièces

ferromagnétiques et les bobines, certaines d'entre elles se trouveront inévitablement au potentiel de la culasse du fait de courts-circuits.

Deux possibilités ont donc été envisagées et expérimentées sur des échantillons usinés spécifiquement:

- La première consiste à réaliser des coques isolantes en MACOR (cf. Figure 4-3). Les coques obtenues se logent aux emplacements des bobines et le bobinage est effectué à l'intérieur de ces coques.

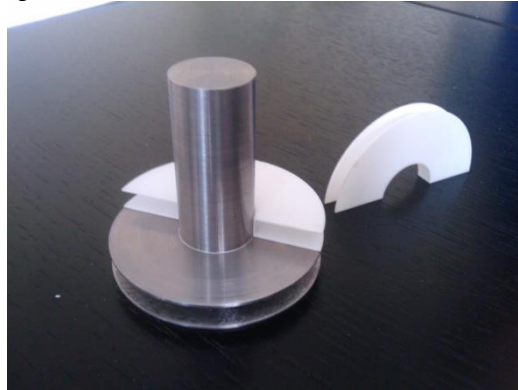


Figure 4-3: Demi-coque isolante en MACOR

- Une seconde solution consiste à isoler toutes les pièces par dépôt d'alumine (cf. exemple Figure 4-4). Cette méthode nécessite cependant un réaménagement du circuit magnétique. En effet, le dépôt d'alumine est réalisé par torche plasma qui doit être placée à la perpendiculaire de la surface à traiter. Il est donc impossible d'effectuer ce dépôt sur un circuit magnétique fait d'une seule pièce, du fait des encoches. La colonne centrale, comme la colonne extérieure, doivent donc être segmentées afin de rendre accessible la totalité des surfaces mises en contact avec les bobines (cf. Figure 4-5).



Figure 4-4 : Dépôt d'alumine sur les faces du circuit magnétique en contact avec les bobines

Les deux méthodes présentent des avantages et des inconvénients: les demi-coques en MACOR sont plus épaisses que le dépôt d'alumine, ce qui diminue d'autant la section disponible pour le bobinage. Elles sont de plus très fragiles. Le dépôt d'alumine oblige quant à lui à diviser le circuit magnétique, ce qui ajoute des entrefers magnétiques entre chacune des pièces le constituant. Par ailleurs cette segmentation s'accompagne de moyens de fixations supplémentaires, tels que des vis logées dans le noyau de certaines bobines.

Des tests ont donc été effectués sur des échantillons afin d'évaluer la faisabilité technique de chaque méthode et de permettre de choisir la plus adaptée au cas présent.

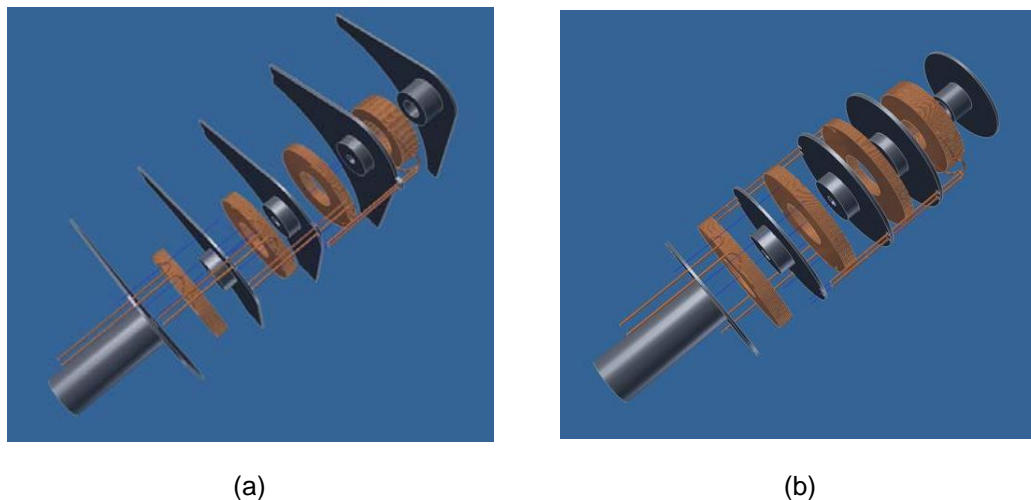


Figure 4-5: Discretisation des circuits magnétiques en vue du dépôt d'alumine (a) circuit magnétique externe (b) circuit magnétique interne

#### 4.1.3.2.b Réalisation de bobines tests

Deux circuits magnétiques, représentatifs respectivement d'une colonne externe et d'une colonne centrale du PPS Flex, ont été réalisés, afin de vérifier l'absence de problème lié au bobinage ou à la tenue en température pour chacune des deux méthodes d'isolation électrique envisagées. La colonne centrale échantillon est faite d'une seule pièce et servira de support aux demi-coques en MACOR avant de procéder au bobinage. La colonne externe échantillon sera, quant à elle, réalisée en deux pièces afin de permettre son isolation par dépôt d'alumine. Ces deux pièces seront ensuite assemblées par des vis passant à travers le noyau de la bobine.

Un premier constat a été effectué à l'issue de l'étape de bobinage. Si le bobinage de la colonne externe, avec dépôt d'alumine, s'est déroulé sans encombre, il n'en va pas de même des pièces incluant les demi-coques en MACOR. Ces dernières n'ont pas résisté aux contraintes exercées et se sont brisées en de multiples fragments (cf. photos Figure 4-6).

Cependant, même si ceci est fortement problématique du point de vue de la fiabilité des pièces, l'isolant remplit malgré tout son rôle et le MACOR, même fragmenté, est maintenu en place par le bobinage. Des tests de tenue en température seront donc maintenus sur ces pièces.

Deux types de tests ont été effectués. La première série de test a consisté à placer les circuits magnétiques bobinés dans un four sans les alimenter pendant des cycles de deux heures à des températures allant croissantes (de 400°C à 600°C). La résistance de chacune des bobines tests est mesurée avant et après chaque cycle, après refroidissement. Le Tableau 4-1 décrit les résultats obtenus.

Une deuxième série de test a été effectuée afin de vérifier la tenue de l'isolation électrique lorsque les bobines sont alimentées. Les colonnes échantillons ont été placées dans un four à 400°C et ont été alimentées par un courant de 1, 2, et 4A. Un thermocouple relevait la température au cœur du bobinage. La température du bobinage a ainsi atteint 440°C en régime permanent, pour une alimentation de 4A. Aucune variation de la valeur de résistance des bobines n'a été relevée à l'issue de cette deuxième série de mesures.

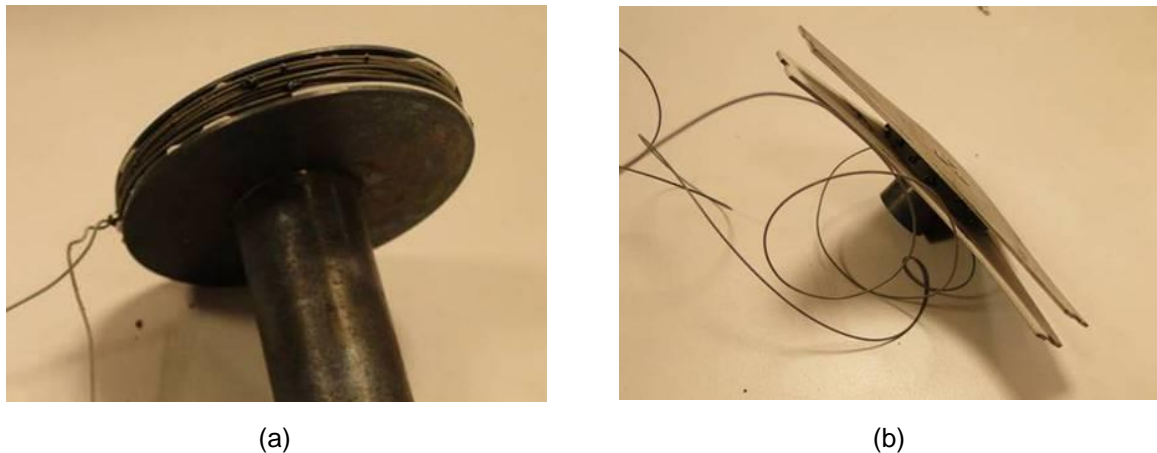


Figure 4-6 Bobines tests réalisées pour vérifier la faisabilité des deux méthodes d'isolation. (a) circuit interne massif et demi-coques en MACOR (b) circuit externe en deux pièces, avec dépôt d'alumine

	avant les tests (T° ambiante)	après 2h à 400°C (T° 50° C environ)	après 2h à 500°C (T° 50°C environ)	après 2h à 600°C (T° 80°C environ)
résistance bobine interne (ohms)	2.5	2.6	2.7	2.9
résistance bobine externe (ohms)	1.6	1.6	1.5	1.9
isolation culasse / fil interne	ok	ok	ok	ok
isolation culasse / fil externe	ok	ok	ok	ok

Tableau 4-1: test de tenue en températures effectués sur les bobinages tests

Les séries de test effectuées ont permis à la fois de valider les méthodes d'isolation électrique culasses/bobinages (les isolations par coque en Macor et par dépôt d'alumine ont toutes deux subi les tests sans présenter de détérioration notable) et de vérifier l'absence de problème relatif au fil employé pour le bobinage, qui est identique à celui retenu pour le PPS Flex (cerafil 0.6mm). Ce dernier est annoncé pouvoir tenir une température de 500°C en régime permanent, et 600°C en pointe, ce qui est confirmé ici puisqu'aucune variation notable de la résistance électrique n'est observée après un cycle de 2 heures à 600°C.

#### 4.1.3.2.c Usinage du circuit magnétique

Les tests précédents ont permis de choisir la solution d'isolation à adopter pour le circuit magnétique. Les demi-coques en MACOR, du fait des exigences de finesse imposées, sont en effet trop fragiles et ne résistent pas aux efforts exercés lors du bobinage des pièces. Le dépôt d'alumine à, quant à lui, bien résisté au bobinage, ainsi qu'à la montée en température. C'est donc ce dernier qui a été choisi. Ce choix implique un circuit magnétique divisé en multiples pièces. Une vue du circuit magnétique assemblé est donnée en Figure 4-7. Soulignons qu'après usinage et avant de procéder au dépôt d'alumine, les pièces en fer Armco ont subi un recuit à 900°C afin de maximiser et stabiliser leurs propriétés magnétiques.



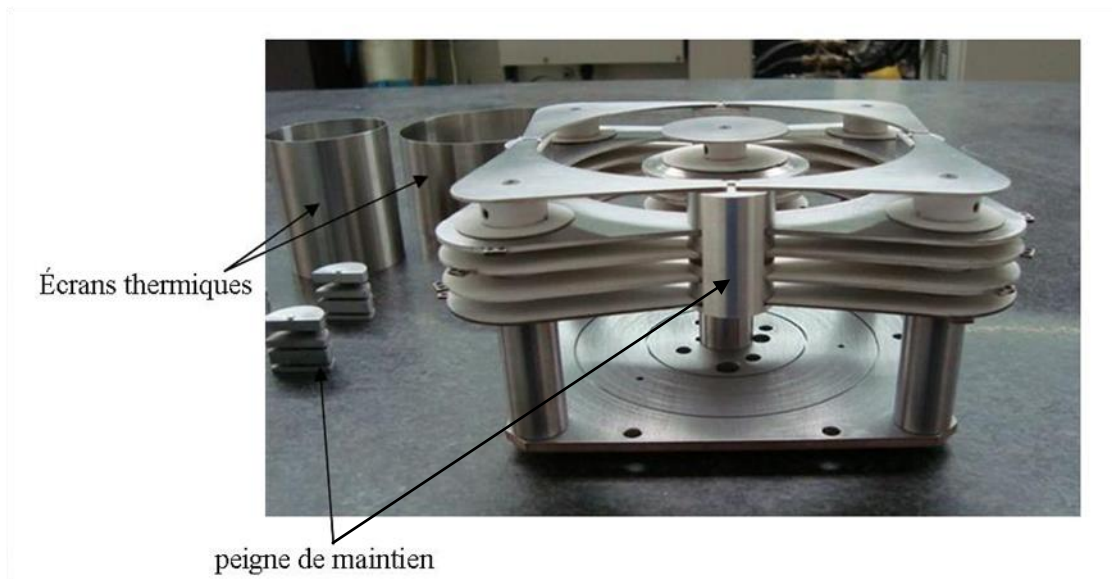


Figure 4-7: Circuit magnétique avant bobinage

### 4.1.3.3 Bobinages

#### 4.1.3.3.a Réalisation

Le bobinage est réalisé à partir de cerafil de 0.6mm de diamètre. Ce fil est certifié pour la tenue au vide sans dégazage et conçu pour des environnements sévères en température (-90°C à 500°C en régime permanent). Il est constitué d'une âme en alliage dont la résistivité est égale à  $0.044\Omega\cdot\text{m}^{-1}$ , enrobée d'un isolant en céramique de très faible épaisseur (0.025mm). Le bobinage du FLEX a été effectué en visant le plus grand nombre de spires dans l'espace disponible pour chacune des bobines. On veille à conserver un nombre de spires identique pour chacune des bobines externes se trouvant sur un même étage, afin de ne pas générer de non homogénéité azimutale au niveau du champ magnétique produit dans le canal.

#### 4.1.3.3.b Isolations additionnelles

Des passages de fil ont été prévus dans le circuit magnétique pour chacune des sorties de bobine. Afin de garantir l'isolation à ce niveau, des bagues en MACOR ont été usinées et intégrées en sortie de chacune des bobines, comme illustré Figure 4-8.

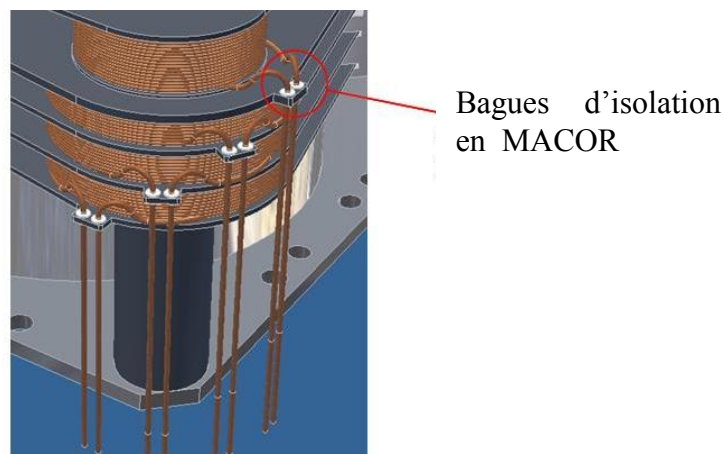


Figure 4-8: Vue des bagues d'isolation en MACOR

Les bobinages seront amenés lors du fonctionnement du propulseur à subir des échauffements importants. Des dilatations des pièces ferromagnétiques et des bobinages sont donc à prévoir. Afin de prévenir toute distorsion et éclatement des bobines lors du fonctionnement du propulseur, des dominos de maintien avec des vis de précontrainte ont été prévus sur chaque colonne. Ils fonctionnent sur le principe d'un domino électrique et ont été usinés à partir de pièces massives en MACOR (Figure 4-9).

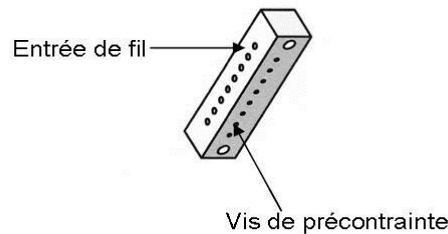


Figure 4-9: Domino de maintien des fils de bobine usiné en MACOR

#### 4.1.3.4 Instrumentation

Le propulseur est équipé de trois thermocouples logés respectivement dans deux bobines externes et une bobine centrale, comme l'indique le schéma ci-dessous. Ces thermocouples (PROSENSOR – couple K) qui sont chemisés avec une jonction indémontable ont une plage de mesure variant de  $-200^{\circ}\text{C}$  à  $1100^{\circ}\text{C}$ .

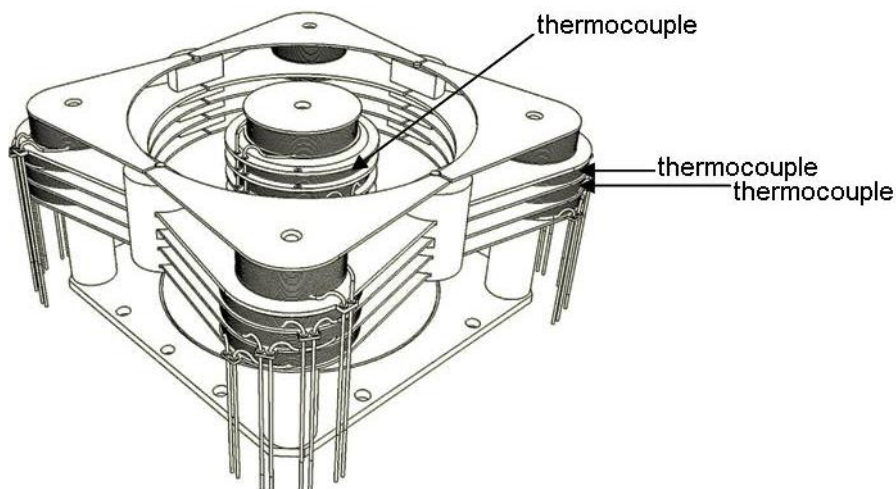


Figure 4-10: Instrumentation du PPS Flex, positionnement des thermocouples

#### 4.1.3.5 Synthèse

La Figure 4-11 présente le circuit magnétique complet du PPS Flex, après bobinage (en l'absence des écrans thermiques et du bloc canal).



Figure 4-11: PPS Flex - Circuit magnétique bobiné complet

Le circuit magnétique étant réalisé, il est à présent nécessaire de développer son alimentation et son interface de pilotage.

## **4.2 Alimentation et pilotage**

### **4.2.1 Réalisation du banc d'alimentation**

#### **4.2.1.1 Configuration d'alimentation**

Les quatre bobinages externes situés à un même étage seront tous alimentés par le même courant. En revanche, les bobines centrales devront être alimentées séparément. Le module d'alimentation comportera donc 8 alimentations de tension régulées en courant.

#### **4.2.1.2 Cahier des charges**

Les bobines sont alimentées par courant continu. Les alimentations à prévoir sont donc de type alimentation stabilisée de tension régulée en courant. Concernant les calibres de tension et de courant, un calcul préalable, basé sur les résistances des bobines et les valeurs maximales des courants d'alimentation, conduit aux caractéristiques d'alimentation nominales récapitulées dans le Tableau 4-2 (les résistances des bobines à 400°C sont évaluées à l'aide des résultats obtenus pour les bobines tests lors des essais de tenues en température).

	Bobines centrales	Bobines externes
Courant maximal (A)	3A	3A
Résistance à 20°C ( $\square$ )	2.6	1.6
Tension nominale 20°C (V)	8	5
Tension évaluée 400°C (V)	16	10

Tableau 4-2: Tensions et courants nominaux d'alimentation des bobines du PPS Flex

Enfin, afin d'élargir au maximum la plage de variation de champ magnétique offerte par le PPS Flex, il est nécessaire de pouvoir alimenter une même bobine par un courant positif ou négatif.

Le cahier des charges des modules d'alimentation se définit donc comme suit :

Bobine centrale :

Alimentation séparée pour chacune des bobines

Alimentation réversible en courant

calibre retenu 3A – ± 30V

Bobine externe :

Alimentation en série des quatre bobines d'un même niveau

Alimentation réversible en courant

Calibre retenu 3A – ± 60V

4.2.1.3 **Choix des alimentations et interfaçage**

D'un point de vue fonctionnel, le module d'alimentation doit être entièrement pilotable par ordinateur en liaison directe avec un logiciel de simulation des cartes de champ générées au sein du canal du propulseur. Ainsi, l'utilisateur pourra, dans un sens, visualiser en temps réel la carte de champ obtenue pour une alimentation donnée et, dans un autre sens, imposer les courants d'alimentation pour une carte des champs imposée. Dans cette optique, les alimentations régulées en courant seront munies d'une liaison ethernet ou gpib pour assurer la liaison avec le PC de pilotage. Par ailleurs, afin de satisfaire à la bidirectionnalité du courant dans les bobines à partir des alimentations stabilisées, un système électromécanique d'inversion de la polarité commandable doit être intégré au module global. La chaîne d'alimentation pilotée ainsi choisie est schématisée Figure 4-12.

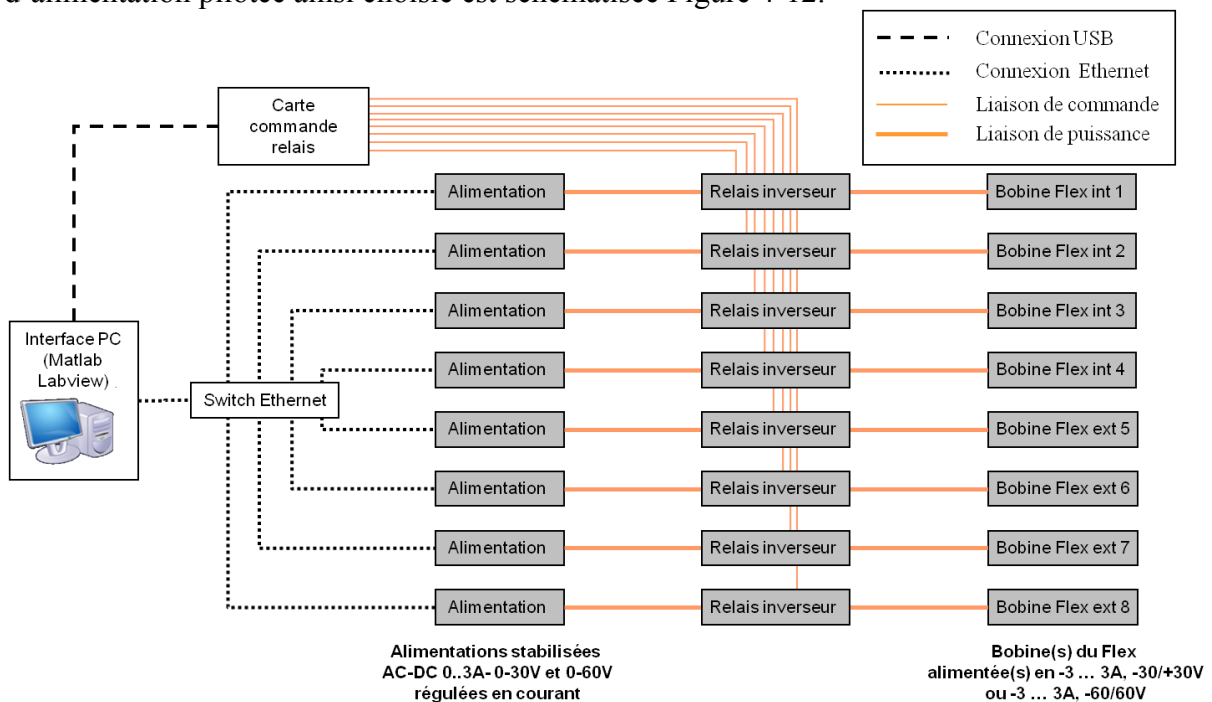


Figure 4-12: Schéma synoptique de la chaîne de commande et d'alimentation du PPS Flex

4.2.2 **Pilotage du PPS Flex**

La gestion d'un tel nombre d'alimentation rend très fastidieux un réglage manuel et individuel de chaque courant parcourant les bobines du propulseur. Une interface de pilotage

ergonomique a donc été conçue de façon à pouvoir tirer profit rapidement et simplement des potentialités maximales de la structure.

#### 4.2.2.1 Interface de définition de cartographies magnétiques

L'idée de cette interface consiste à fournir un outil de visualisation quasi instantané du champ produit dans le canal du propulseur, pour une configuration d'alimentation donnée. Elle doit permettre en outre de définir directement les objectifs en termes de cartographie magnétique, en s'affranchissant d'une procédure de réglage des courants d'alimentation par tâtonnement.

##### 4.2.2.1.a Calcul et affichage du champ magnétique

Une des premières fonctionnalités de cette interface consiste à déterminer et afficher la topologie du champ magnétique générée dans le canal, à partir d'une alimentation donnée.

Le principe de calcul retenu est la méthode de calcul de champ par superposition décrite (cf. partie 3.1.4.1.a). Un modèle éléments finis paramétré 2D du circuit magnétique est réalisé sous le logiciel FEMM 4.2, à l'aide de scripts LUA. Une série de simulation est ensuite effectuée selon le protocole suivant : pour chacune des simulations, une bobine distincte est alimentée par un courant de 1A. Les valeurs de champ magnétique générées par cette configuration d'alimentation sont relevées aux différents points d'une grille prédéfinie.

Ces grilles de valeur constituent une base de référence à partir desquelles peuvent être déduites des cartes de champ générées par tout type de configuration d'alimentation. Il suffit pour cela que l'utilisateur définisse les valeurs d'alimentation qu'il souhaite imposer dans chacun des bobinages. Le champ magnétique total est ensuite calculé par combinaison linéaire des différentes valeurs de champ obtenues pour chaque bobine alimentée séparément, pondérées par la valeur d'alimentation définie par l'utilisateur.

Au final, une visualisation de la carte de champ résultante est fournie sous Matlab.

##### 4.2.2.1.b Détermination de la configuration d'alimentation optimale pour une carte de champ donnée

Un autre attrait de l'outil développé pour la gestion du PPS-Flex réside dans la possibilité d'imposer directement le champ magnétique en différents points de mesure. Le logiciel calcule en effet les valeurs de courants d'alimentation qui permettent de générer ces valeurs de champ.

La méthode employée reprend le principe décrit dans la partie 3.1.4.1.a.

Pour chacun des points de mesure sélectionnés, le champ produit par chacune des bobines seules est calculé par interpolation à partir des grilles de points importées précédemment. La configuration d'alimentation optimale est ensuite obtenue par optimisation linéaire sur le système ainsi décrit.

Certaines précautions sont toutefois à prendre. Il est en particulier nécessaire de vérifier si l'hypothèse de linéarité de champ, indispensable à l'application du principe de superposition, est toujours valable pour les valeurs de courants ainsi obtenues. Un outil de vérification via des simulations éléments finis a été implémenté et permet au besoin d'évaluer le champ produit, même en présence de zone de saturation magnétique dans les parties ferromagnétiques.

#### 4.2.2.2 Commande des alimentations

Pour une carte de champ requise et une fois les valeurs des courants définies, il est nécessaire de transférer ces valeurs vers les alimentations du bobinage du propulseur. Pour cela, une

interface Labview a été développée. Elle permet, à partir d'une ligne de commande générée par l'interface Matlab, d'effectuer un pilotage en courant de toutes les alimentations simultanément (cf. Figure 4-13).

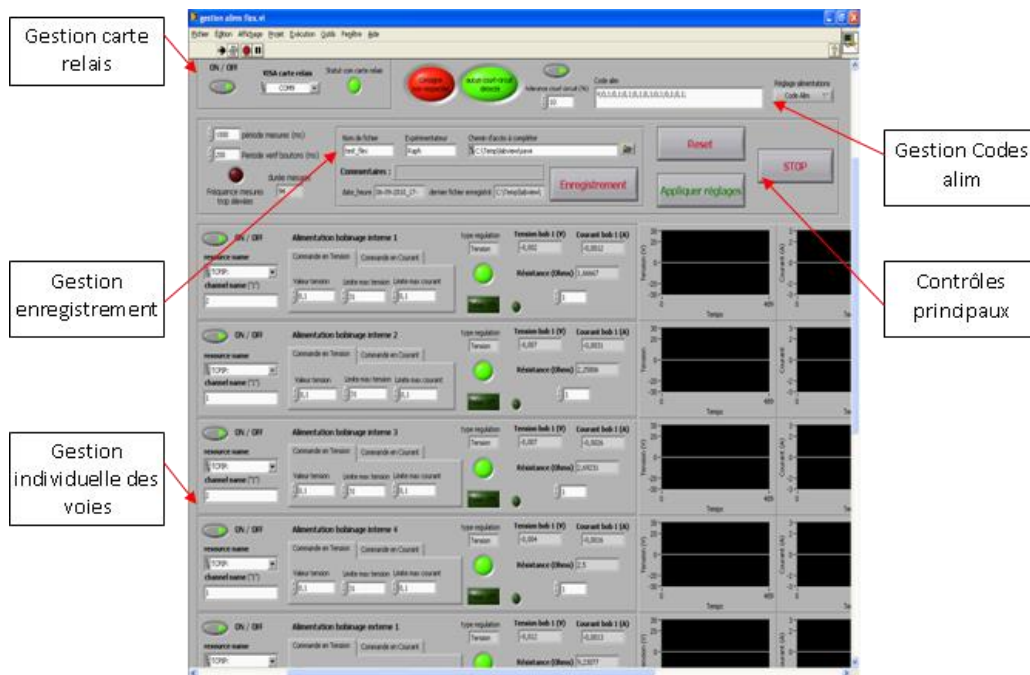


Figure 4-13 : Interface Labview de pilotage des alimentations

## 4.3 Caractérisation magnétique

Le système de pilotage achevé, l'étape de validation du prototype peut être initiée. La validation passe nécessairement par des caractérisations tridimensionnelles du champ produit dans et à l'extérieur de canal. Outre le fait que l'on s'assurera que le Flex satisfasse le cahier des charges en terme de topologies de champ, ceci permettra de vérifier la correspondance entre les valeurs effectivement produites et celles prédites par simulation tout en constituant une série de cartographie de référence. Il paraît en effet indispensable de disposer de cartographies étalons afin de pouvoir régulièrement, après des campagnes de tir, s'assurer de la conformité du circuit magnétique. Cette phase de caractérisation magnétique a nécessité la mise en place d'une platine de mesure motorisée.

### 4.3.1 Réalisation d'un gaussmètre

La platine de caractérisation a été élaborée sur la base d'un gaussmètre F.W. BELL 7030, couplé à une sonde triaxiale dédiée.

Afin de procéder à des mesures de cartographie magnétique 3D précises et reproductibles, il est indispensable d'automatiser le positionnement de la sonde par rapport au propulseur. Deux possibilités se présentent : soit le déplacement est effectué par la sonde, soit on choisit de déplacer le prototype à caractériser. Pour des raisons de maniabilité et de fragilité de la sonde triaxiale, en particulier au niveau de sa connectique, il est apparu préférable de limiter au maximum son déplacement. La cinématique retenue inclut finalement:

- Deux actionneurs linéaires permettant respectivement la translation selon les axes x et y du propulseur.

- un actionneur rotatif sur lequel repose le circuit magnétique, permettant d'imposer un déplacement angulaire du circuit.
- Un actionneur linéaire en charge du déplacement selon z de la sonde triaxiale.

Une vue 3D de l'ensemble est présentée Figure 4-14. Le pilotage de l'ensemble est assuré par un PC via le logiciel d'interface et d'acquisition Labview.

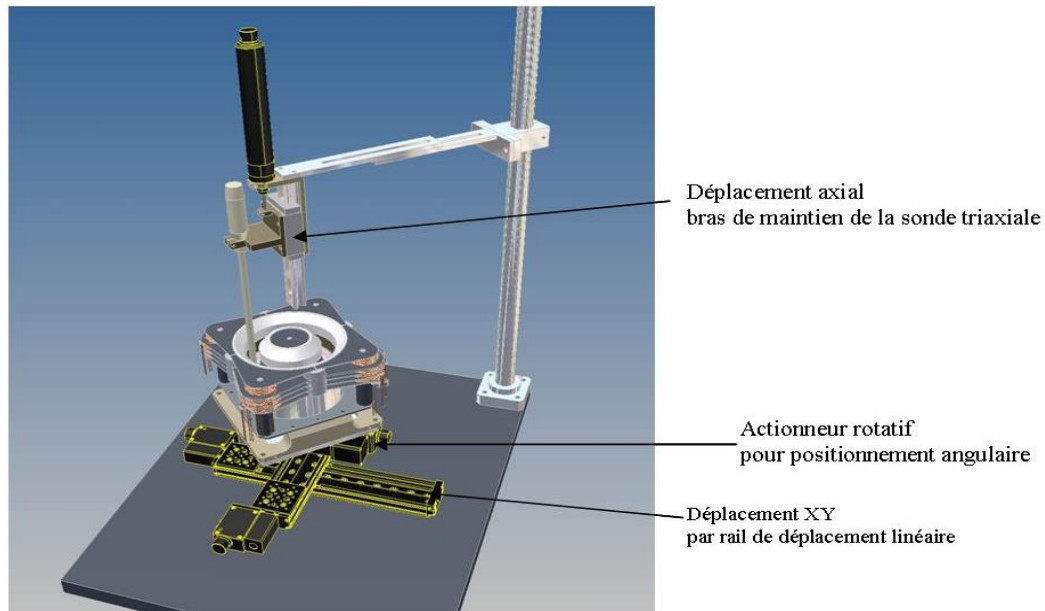


Figure 4-14: Vue 3D du banc de caractérisation magnétique

*Remarque :* La sonde triaxiale employée possède un diamètre total d'environ 8 mm, ce qui limite les zones accessibles à la mesure. De plus, la mesure de chacune des composantes du champ magnétique est effectuée à l'aide d'une sonde à effet Hall différente au sein de la sonde triaxiale, ce qui implique une mesure des trois composantes  $B_r$ ,  $B_\theta$  et  $B_z$  non confondues en un même point de l'espace (les différences sont de l'ordre de plusieurs millimètres et par conséquent non négligeables dans le cas présent, voir Tableau 4-3). En toute rigueur, une mesure des trois composantes du champ en un point, en vue par exemple d'un calcul de norme, nécessite donc trois positionnements différents de la sonde. Afin de contourner ce problème, les cartographies des mesures obtenues sont systématiquement interpolées sur une grille de points commune, en prenant en compte les positions respectives des mesures des trois composantes de champ. La grille commune est définie sur l'intersection des grilles de mesures considérées, en conservant un nombre de points identique (cf. Figure 4-15).

	Mesure Bx	Mesure By	Mesure Bz
décalage selon x par rapport au centre de la sonde (en mm)	1,83	0	0,86
décalage selon y par rapport au centre de la sonde (en mm)	0	0	0
décalage selon z par rapport au bout de la sonde (en mm)	4,06	4,06	1,52

Tableau 4-3: Position des sondes correspondant à chaque composante du champ mesuré au sein de la sonde triaxiale employée

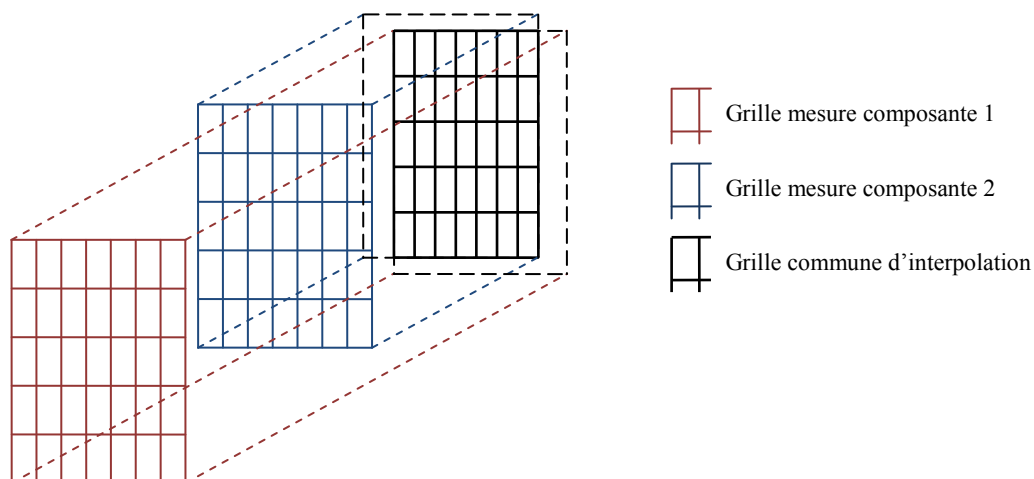


Figure 4-15: Définition de la grille commune d'interpolation des valeurs mesurées. Le nombre de points des grilles initiales est conservé, la zone décrite correspond quant à elle à leur intersection.

## 4.3.2 Mesures sur Gaussmètre

### 4.3.2.1 Méthodologie de mesure et de traitement des résultats

Afin de minimiser les écarts dus aux conditions environnementales entre les différentes mesures, ces dernières sont toutes réalisées après un temps de chauffe du gaussmètre. La mesure est calibrée à l'aide d'une chambre zéro avant chaque campagne de caractérisation. Enfin, la température du circuit magnétique du propulseur est maintenue en deçà de 50°C à l'aide d'un ventilateur.

La Figure 4-16 donne un exemple de la façon dont les résultats seront retranscrits pour un exemple de relevé. Le canal du propulseur est figuré afin de mieux visualiser l'espace couvert par les mesures. Deux représentations du champ sont de plus superposées : un diagramme colorimétrique représentant la variation de l'une des composantes du champ ou de sa norme, ainsi qu'un champ de vecteurs représentés par des flèches, calculé sur une grille arbitraire (les flèches figurent dans tous les cas les deux composantes du champ incluses dans le plan de mesure). Les valeurs numériques servant à définir l'échelle colorimétrique du graphique ainsi que la longueur des flèches ont été normalisées, pour des raisons de confidentialité, par rapport à la valeur de l'amplitude du champ B au centre du canal, au niveau du plan de sortie rectiligne, pour une topologie de référence.

Les cartographies 2D présentées par la suite sont toutes réalisées en suivant une méthode analogue, par assemblage de deux relevés de mesure. En effet, la course de l'actionneur en z étant limitée à 5,6 cm, un système de rallonge a été employé de manière à obtenir une



cartographie plus étendue. Les relevés obtenus avec et sans rallonge sont ensuite assemblés pour obtenir les cartographies présentées.

La cartographie présentée sur la Figure 4-16 met en évidence l'un des aspects à prendre en compte lors de la caractérisation, à savoir les zones non accessibles à la mesure. En effet, le canal ne peut pas être caractérisé dans sa totalité. Des zones noires sont ainsi présentes, notamment au niveau des parties obliques, ainsi qu'à proximité immédiate de la paroi rectiligne interne non accessible à la sonde. En effet, bien que les mesures aient été réalisées en l'absence des céramiques du canal, le diamètre important de la sonde triaxiale et la position dissymétrique de ses trois sondes uniaxiales internes conduisent à des limitations en termes de zones accessibles, sous peine de contact entre la sonde et les différentes plaques du PPS Flex. Il serait possible de réduire les zones noires en jouant sur la dissymétrie de la sonde (en réalisant par exemple une deuxième cartographie après une rotation de  $180^\circ$  de la sonde sur elle-même) ou en utilisant une sonde 1 axe, plus petite, afin d'obtenir la composante radiale du champ dans la partie oblique (la composante axiale ayant déjà été relevée à l'aide de la sonde triaxiale). Cependant, ces deux méthodes obligent à bouger, voire changer la sonde entre deux mesures. Ceci, d'une part, augmente grandement le temps nécessaire aux mesures (chacune des cartographies présentées sur les figures suivantes requiert environ 90 minutes) et, d'autre part, multiplie l'occurrence de la principale source d'écart entre deux sessions de mesure, à savoir le repositionnement au zéro de la sonde (réalisé manuellement). On se contente donc des zones immédiatement accessibles.

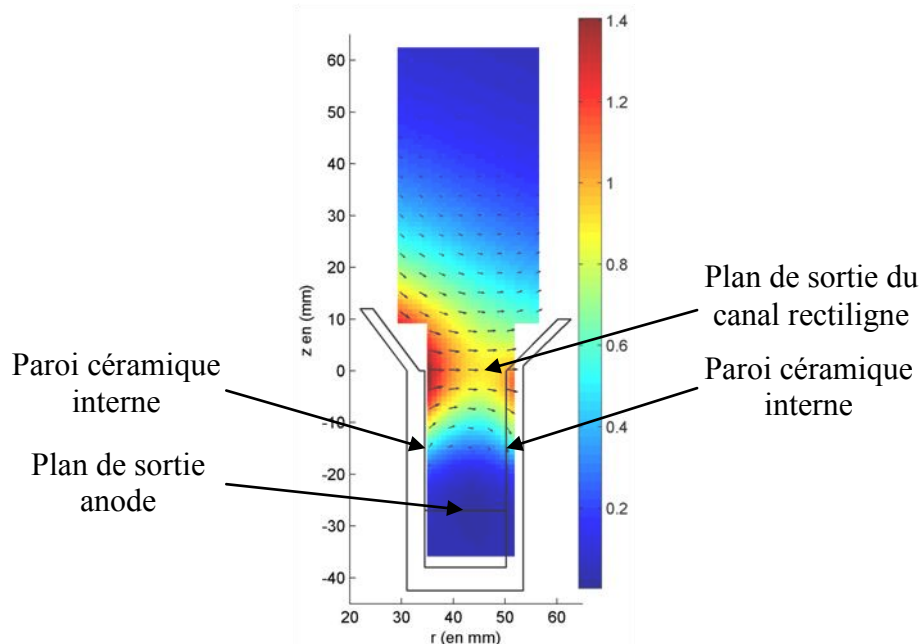


Figure 4-16 : Descriptif d'un exemple de cartographie obtenue après traitement des mesures.

Les résultats sont exprimés dans un repère cylindrique. La position  $z = 0$  est définie au niveau du plan de sortie du canal rectiligne. L'angle  $\theta = 0^\circ$  est choisi entre deux bobines externes (cf. Figure 4-17).

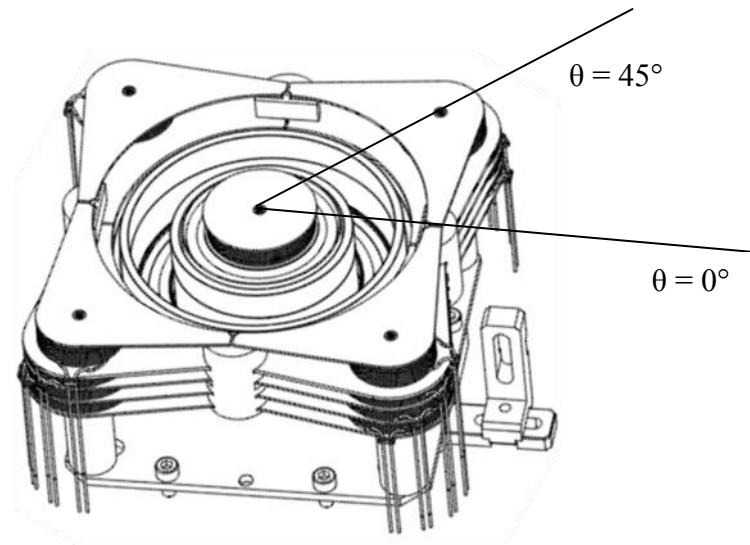
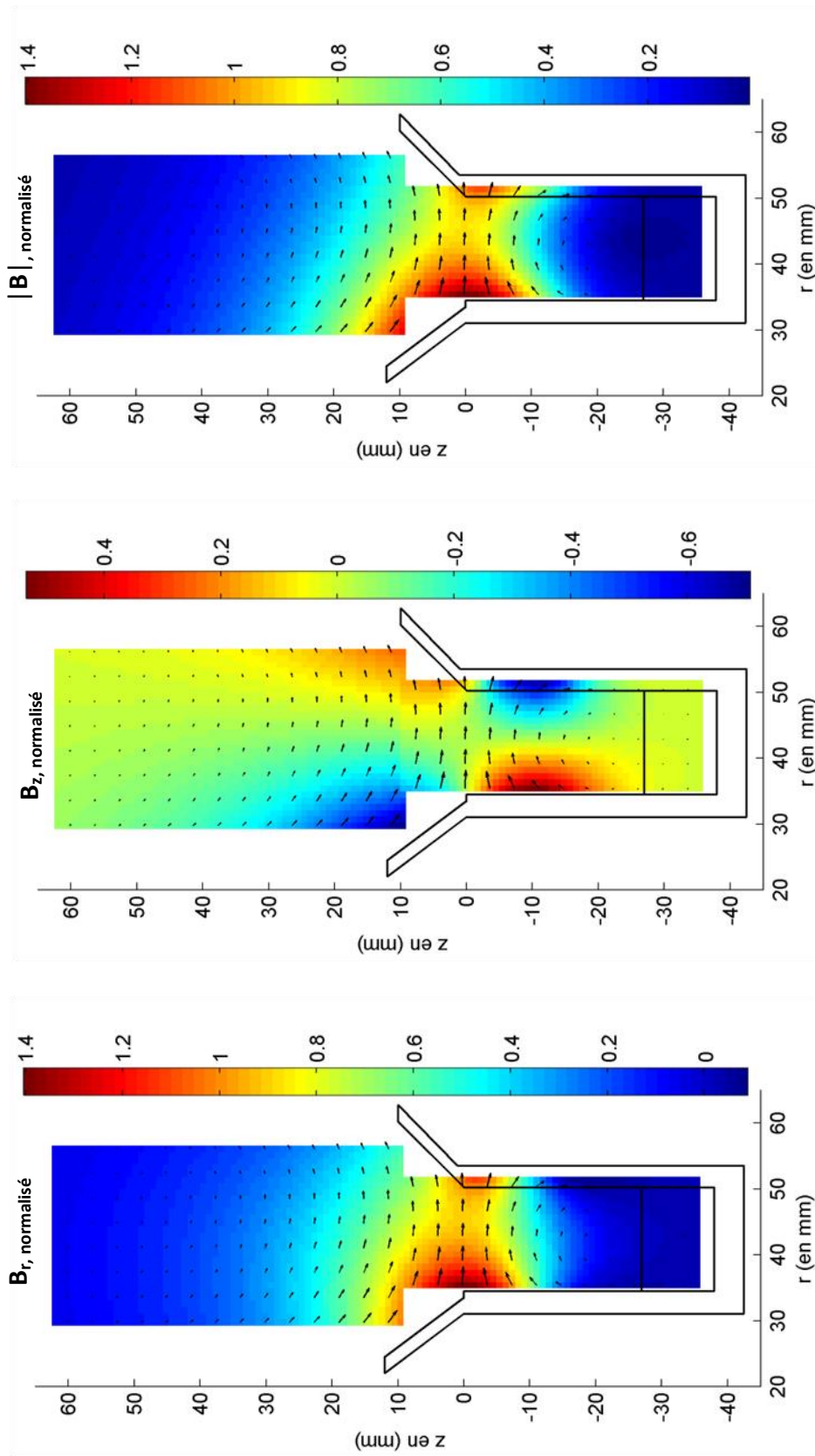


Figure 4-17: Positionnement du repère cylindrique

#### 4.3.2.2 Vérification des possibilités de réglage de la topologie magnétique

##### 4.3.2.2.a Topologie de référence

Les mesures sur gaussmètre permettent tout d'abord de vérifier que les possibilités de réglage de la topologie magnétique au sein du canal sont effectives et satisfont le cahier des charges. La Figure 4-18 montre les résultats obtenus pour une topologie dite de référence, qui servira de point de comparaison pour la suite. Il est à noter que certains ajustements ont été nécessaires au niveau de la configuration d'alimentation afin d'obtenir les cartographies souhaitées, les valeurs de courant issues des simulations ayant tendance à être en deçà de celles requises. Les pages suivantes détaillent les résultats obtenus pour quelques-unes des topologies abordées dans le chapitre précédent, en les comparant avec cette topologie de référence.



(a)

(b)

(c)

Figure 4-18 : Cartographies correspondant à la topologie de base, obtenues expérimentalement, interpolées sur une grille commune. Mesures réalisées dans le plan  $\theta = 45^\circ$ . (a) Composante radiale du champ magnétique ( $B_r$ ), (b) Composante axiale du champ magnétique ( $B_z$ ), (c) Norme du champ magnétique. Les flèches correspondent au vecteur champ magnétique. Les différentes valeurs numériques sont normalisées par rapport à la valeur de  $B_r$  pour la topologie initiale, au centre du canal, dans le plan de sortie.

#### 4.3.2.2.b Modulation du gradient d'entrée de la lentille magnétique

Comme attendu, le gradient d'entrée de la lentille magnétique (à l'intérieur du canal) peut être contrôlé. La Figure 4-19 représente la composante radiale du champ magnétique au centre du canal pour 3 configurations d'alimentations correspondant à 3 gradients différents, respectivement 0.038 unité/mm, 0.052 unité/mm et 0.061 unité/mm. Un léger décrochage peut apparaître sur les courbes à l'abscisse où est opérée la jonction entre les deux cartographies relevées avec et sans rallonge ( $z=9,5\text{mm}$ ), pour lesquelles le positionnement à zéro de la sonde ne fut pas strictement identique (les écarts pouvant atteindre quelques gauss entre deux mesures censées être identiques). D'autre part, les courbes ne se superposent pas parfaitement au niveau de la sortie du canal. Ceci n'est cependant pas dû à une limitation en termes de potentialités du circuit magnétique, mais provient d'un réglage perfectible de la configuration d'alimentation. Les cartes de champs correspondant à chacune de ces cartographies sont visibles Figure 4-20.

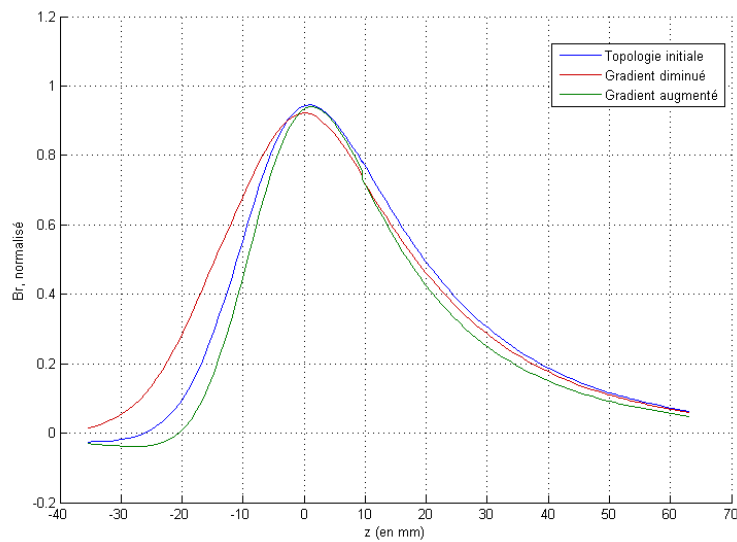
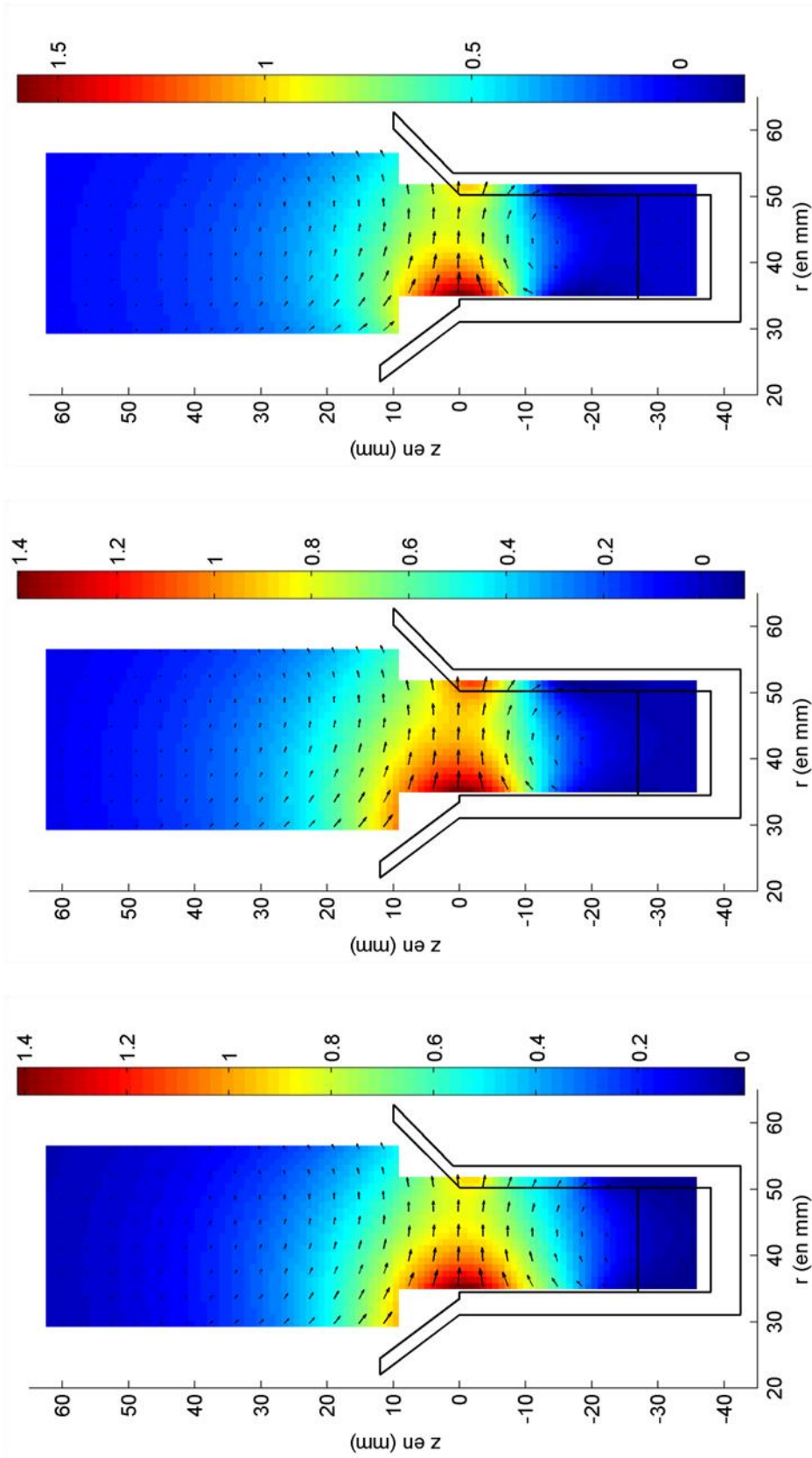


Figure 4-19: Réglage du gradient d'entrée de la lentille magnétique. Comparaison des composantes radiales du champ magnétique au centre du canal  $-B_r(z)-$  pour les 3 configurations d'alimentation distinctes.



(a) (b) (c)

Figure 4-20 : Modification du gradient d'entrée de la lentille magnétique. Mesure de la composante radiale du champ, pour 3 configurations d'alimentation différentes, obtenues expérimentalement et interpolées sur une grille commune. Mesures réalisées dans le plan  $\theta=45^\circ$ . (a) Alimentation correspondant à un gradient inférieur à celui de la topologie de référence (b) topologie de référence (c) Alimentation correspondant à un gradient supérieur à celui de la topologie initiale. Les flèches correspondent au vecteur champ magnétique. Les différentes valeurs numériques sont normalisées par rapport à la valeur de  $B_r$  pour la topologie de référence, au centre du canal, dans le plan de sortie.

#### 4.3.2.2.c Modification de l'angle des lignes de champs par rapport au plan de sortie du canal rectiligne

La Figure 4-23 et la Figure 4-24 montrent les cartographies (respectivement les composantes radiales et axiales du champ) obtenues pour trois réglages possibles de l'angle des lignes de champ par rapport au plan de sortie du canal, qui passe ainsi d'une valeur négative ( $-11^\circ$  au niveau du rayon médian du canal) à une valeur quasi nulle ( $-2^\circ$  pour la topologie initiale) et enfin positive ( $13,8^\circ$ ). La Figure 4-21 et la Figure 4-22 permettent, quant à elles, de vérifier que seule la composante axiale du champ au niveau du rayon médian du canal est affectée par cette modification, la composante radiale restant inchangée.

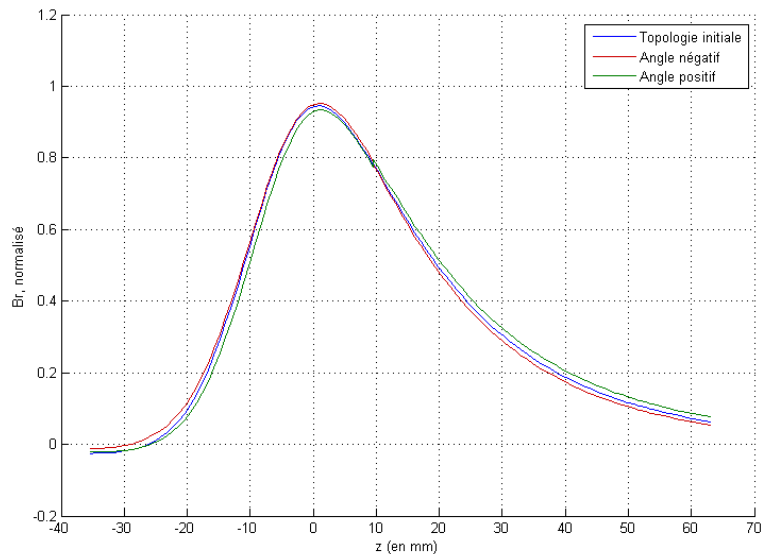


Figure 4-21: Modification de l'angle des lignes de champ en sortie de canal. Composante radiale du champ magnétique, au niveau du rayon médian du canal,  $\theta=45^\circ$

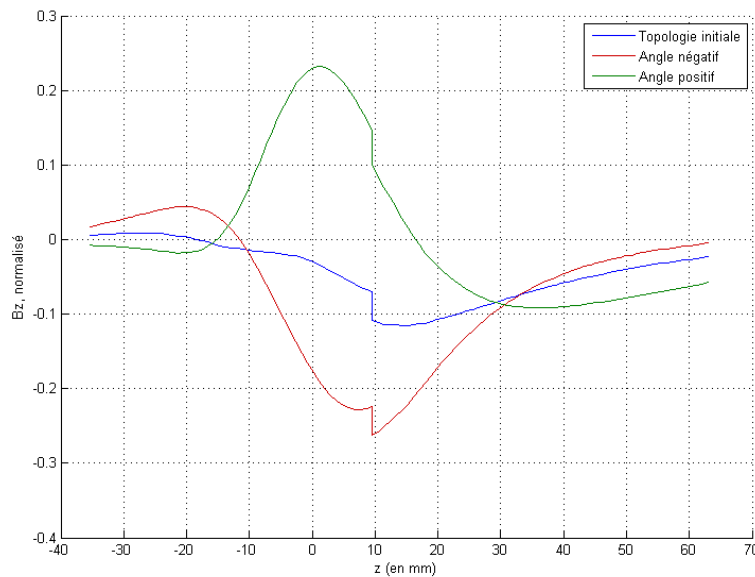
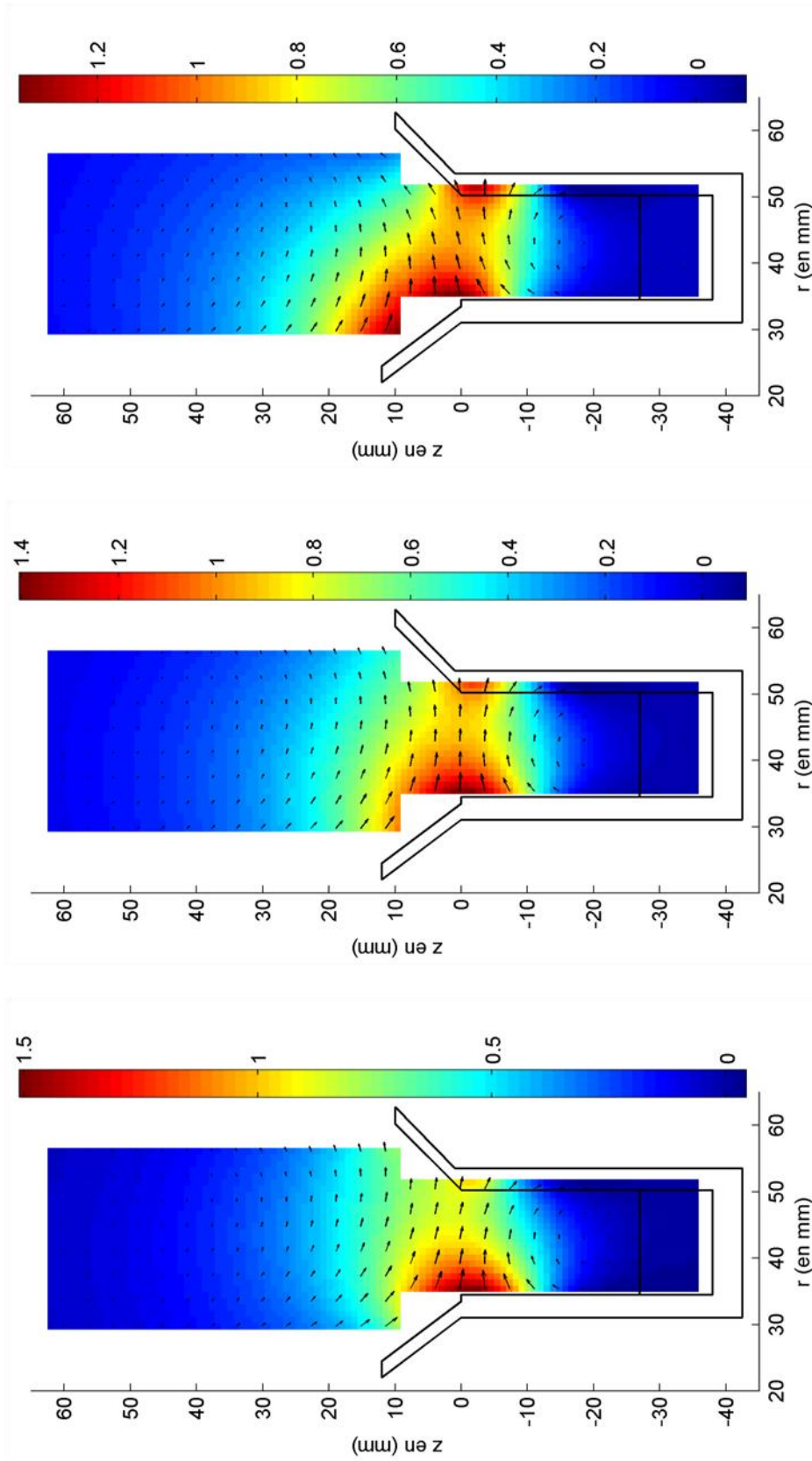
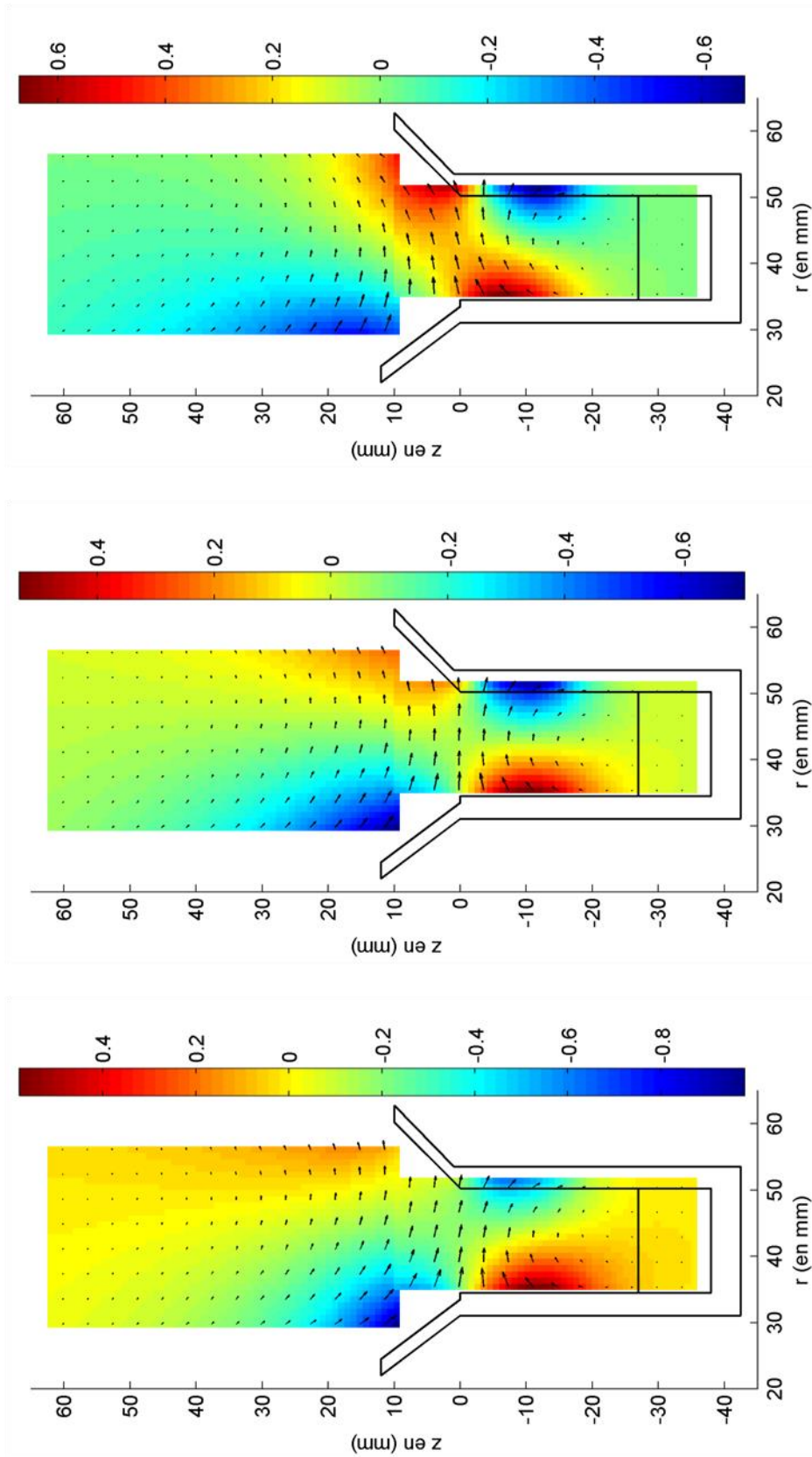


Figure 4-22: Modification de l'angle des lignes de champ en sortie de canal. Composante axiale du champ magnétique, au niveau du rayon médian du canal,  $\theta=45^\circ$



(a) (b) (c)  
 Figure 4-23 : Modification de l'angle des lignes de champ en sortie de canal. Mesure de la composante radiale du champ, pour 3 configurations d'alimentation différentes, obtenues expérimentalement et interpolées sur une grille commune. Mesures réalisées dans le plan  $\theta=45^\circ$ . (a) Alimentation correspondant à un angle des lignes de champs en sortie de canal négatif (b) topologie de référence, correspondant à un angle quasi nul (c) Alimentation correspondant à un angle des lignes de champs en sortie de canal positif. Les flèches correspondent au vecteur champ magnétique. Les différentes valeurs numériques sont normalisées par rapport à la valeur de  $B_r$  pour la topologie initiale, au centre du canal, dans le plan de sortie.



(a) (b) (c)

Figure 4-24 : Modification de l'angle des lignes de champ en sortie de canal. Mesure de la composante axiale du champ, pour 3 configurations d'alimentation différentes, obtenues expérimentalement, interpolées sur une grille commune. Mesures réalisées dans le plan  $\theta=45^\circ$ . (a) Alimentation correspondant à un angle des lignes de champs en sortie de canal négatif (b) topologie de référence, correspondant à un angle quasi nul (c) Alimentation correspondant à un angle des lignes de champs en sortie de canal positif. Les flèches correspondent au vecteur champ magnétique. Les différentes valeurs numériques sont normalisées par rapport à la valeur de  $B_r$  pour la topologie initiale, au centre du canal, dans le plan de sortie.



### 4.3.2.3 Homogénéité azimutale

Le PPS-Flex comporte un circuit magnétique non axisymétrique du fait des bobines externes. Pour générer et stabiliser le plasma dans le canal cylindrique, il faut impérativement créer un champ magnétique indépendant de la position azimutale (à  $r$  et  $z$  fixé, les valeurs de champs sont constantes. Cela équivaut à une composante azimutale du champ nulle). Les simulations magnétostatiques 2D réalisées s'appuient de plus sur cette hypothèse. Il est donc indispensable de vérifier sa validité. La Figure 4-25 présente une cartographie des différences mesurées entre les normes du champ magnétique  $B$  dans les plans  $\theta=0^\circ$  (entre deux des bobines externes),  $\theta=22,5^\circ$  et  $\theta=45^\circ$  (face à l'une des bobines externes). On constate que l'amplitude des écarts mesurés entre ces différentes cartographies reste toujours en dessous du seuil d'acceptabilité (écart maximal de 2,5% de la valeur de normalisation -valeur de champ en sortie de canal, au niveau du rayon médian-). Le circuit magnétique répond donc bien aux exigences d'homogénéité azimutale requises pour la génération du plasma.

Une analyse comparative plus fine montre que les écarts ont logiquement tendance à être supérieurs entre les mesures à  $\theta=45^\circ$  et  $\theta=0^\circ$  par rapports aux écarts entre les mesures à  $\theta=45^\circ$  et  $\theta=22,5^\circ$ . De façon plus surprenante, ces écarts ne sont, d'une part, pas homogènes sur l'ensemble du plan  $r$ - $z$  considéré et, surtout, peuvent prendre à la fois des valeurs positives et négatives dans le même plan. Or, la structure du PPS Flex, constituée d'un ensemble discret de noyaux dont le flux est homogénéisé azimutalement par l'intermédiaire de plaques ferromagnétiques, laissait plutôt présager d'un champ supérieur face aux noyaux des bobines ( $\theta=45^\circ$ ) et moindre au niveau des zones les plus éloignées de ces derniers ( $\theta=0^\circ$ ) (du fait de la perméabilité non infinie du fer et des fuites supplémentaires entre les plaques à mesure que les trajets du flux dans ces dernières s'allongent). Ce comportement peut-être symptomatique d'un léger défaut de concentricité au niveau du circuit magnétique, qui tendrait à localement moduler la largeur de l'entrefer représenté par le canal en introduisant ainsi des inhomogénéités azimutales sur le champ magnétique dans ce dernier.

Ces différences restent dans tous les cas minimales et ne nécessitent pas de rectifications du circuit visant à les compenser. De plus, les ordres de grandeurs présentés sont proches de la limite de significativité, compte tenu des écarts constatés entre les différentes mesures censément identiques (décalage entre des cartographies réalisées avec et sans rallonge, etc...).

Ces mesures ont de plus permis de confirmer que les différentes bobines externes d'un même étage présentaient toutes réellement les mêmes caractéristiques. La Figure 4-26 et la Figure 4-27 montrent des exemples de résultats, dans le cas d'une bobine interne (bobine 3) et de bobines externes (bobines7) alimentées seules. Ce qui est visible sur ces deux figures est représentatif de ce qui peut être constaté pour l'ensemble du bobinage. Les écarts entre mesures pour les bobinages externes en fonction de la position azimutale sont globalement du même ordre que ceux observés pour les bobines internes. Ces dernières devant théoriquement générer un champ parfaitement axisymétrique, il est raisonnable d'attribuer les écarts constatés à des erreurs de mesure et à de légers défauts de positionnement des circuits magnétiques externes plutôt qu'à des différences au niveau des bobinages (spire manquante ou en trop, court-circuit inter-spires, etc.).

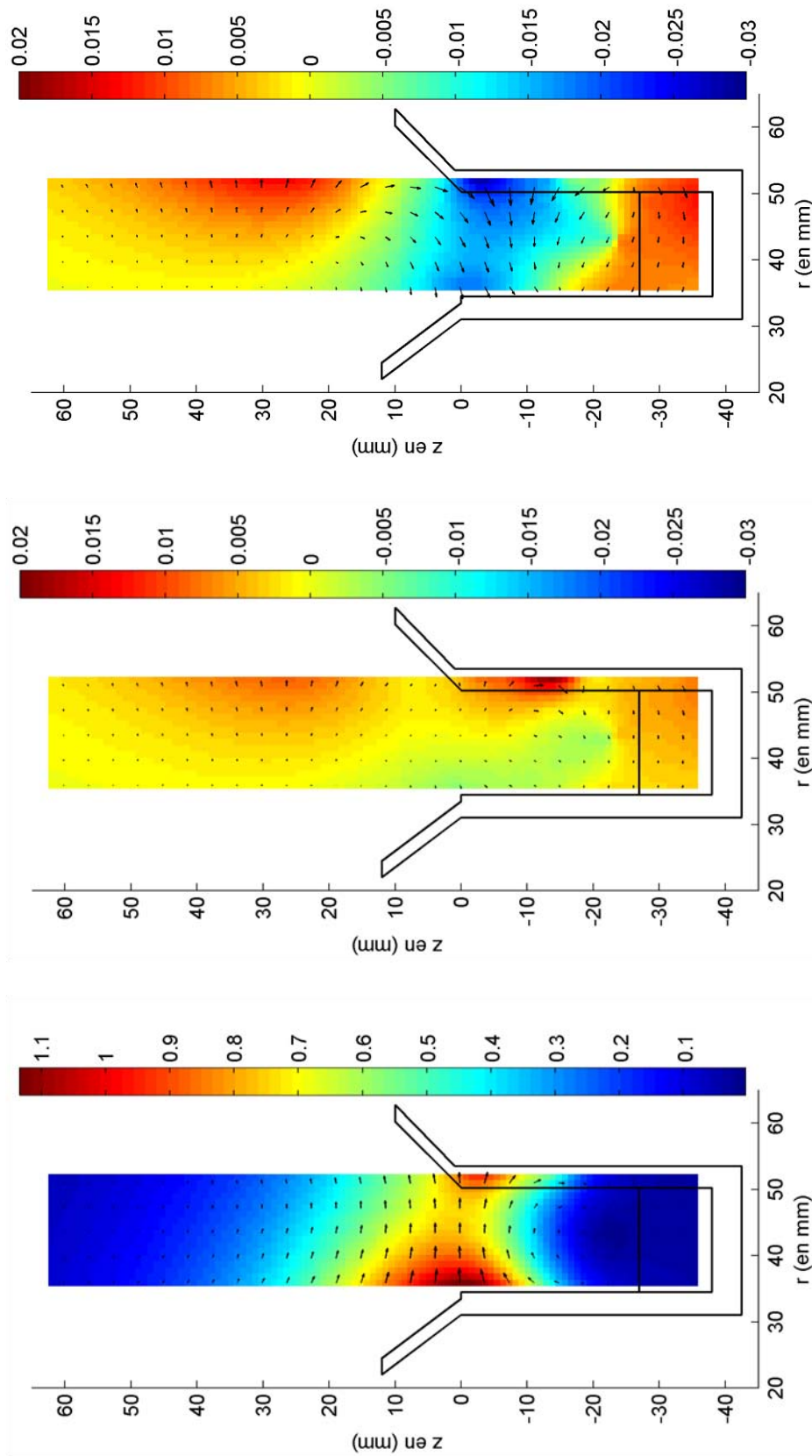


Figure 4-25 : Comparaison des valeurs de champ  $|B|$ , dans les plans  $\theta=0^\circ$ ,  $\theta=22,5^\circ$  et  $\theta=45^\circ$ . (a) Norme du champ magnétique  $B$  dans le plan  $\theta=45^\circ$ . (b) Différence entre  $|B|$  mesuré dans le plan  $\theta=45^\circ$  et  $|B|$  mesuré dans le plan  $\theta=0^\circ$ . (c) Différence entre  $|B|$  mesuré dans le plan  $\theta=22,5^\circ$  et  $|B|$  mesuré dans le plan  $\theta=45^\circ$ . Les flèches correspondent au vecteur champ magnétique (leur norme a été multipliée par 50 dans le cas des différences entre cartographies, de façon à les maintenir visibles). Les différentes valeurs numériques sont normalisées par rapport à la valeur de  $B_r$  pour la topologie initiale, au centre du canal dans le plan de sortie.

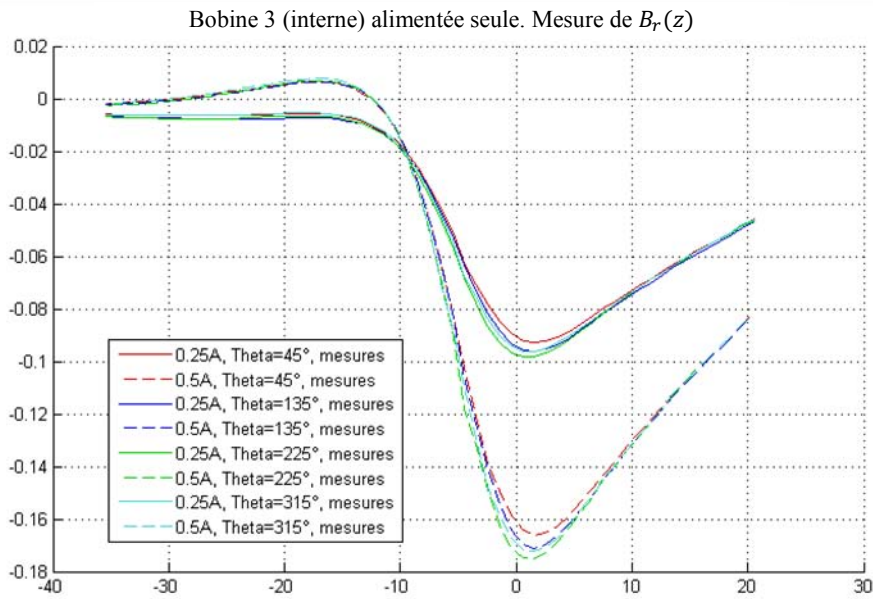


Figure 4-26. Mesures de la composante radiale de champ en fonction de  $z$ , à proximité de la paroi interne ( $r=36$ mm) pour différentes valeurs de  $\theta$  (correspondant à différentes positions faisant face aux bobines externes), lorsque la bobine 3 (bobine interne) est alimentée, par des courants de 0,25 A et 0,5A.

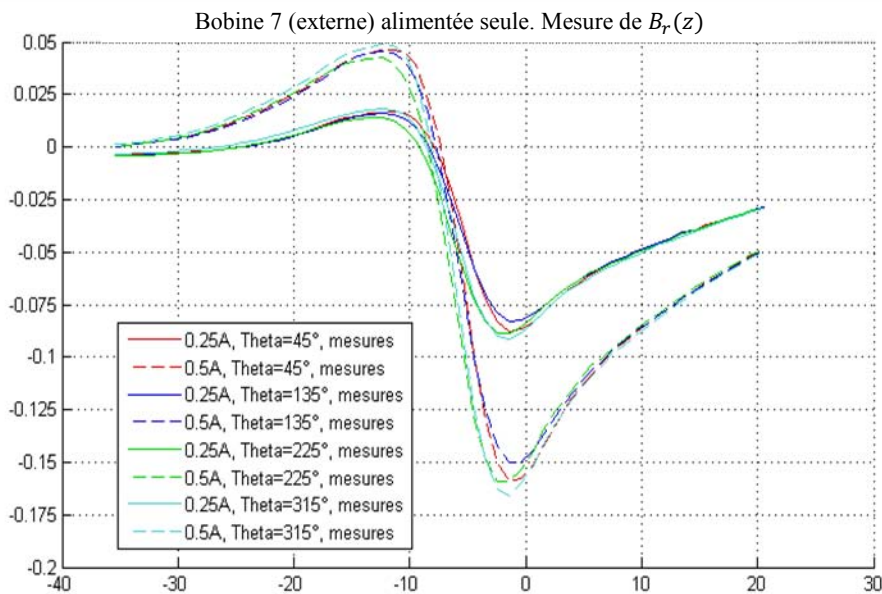
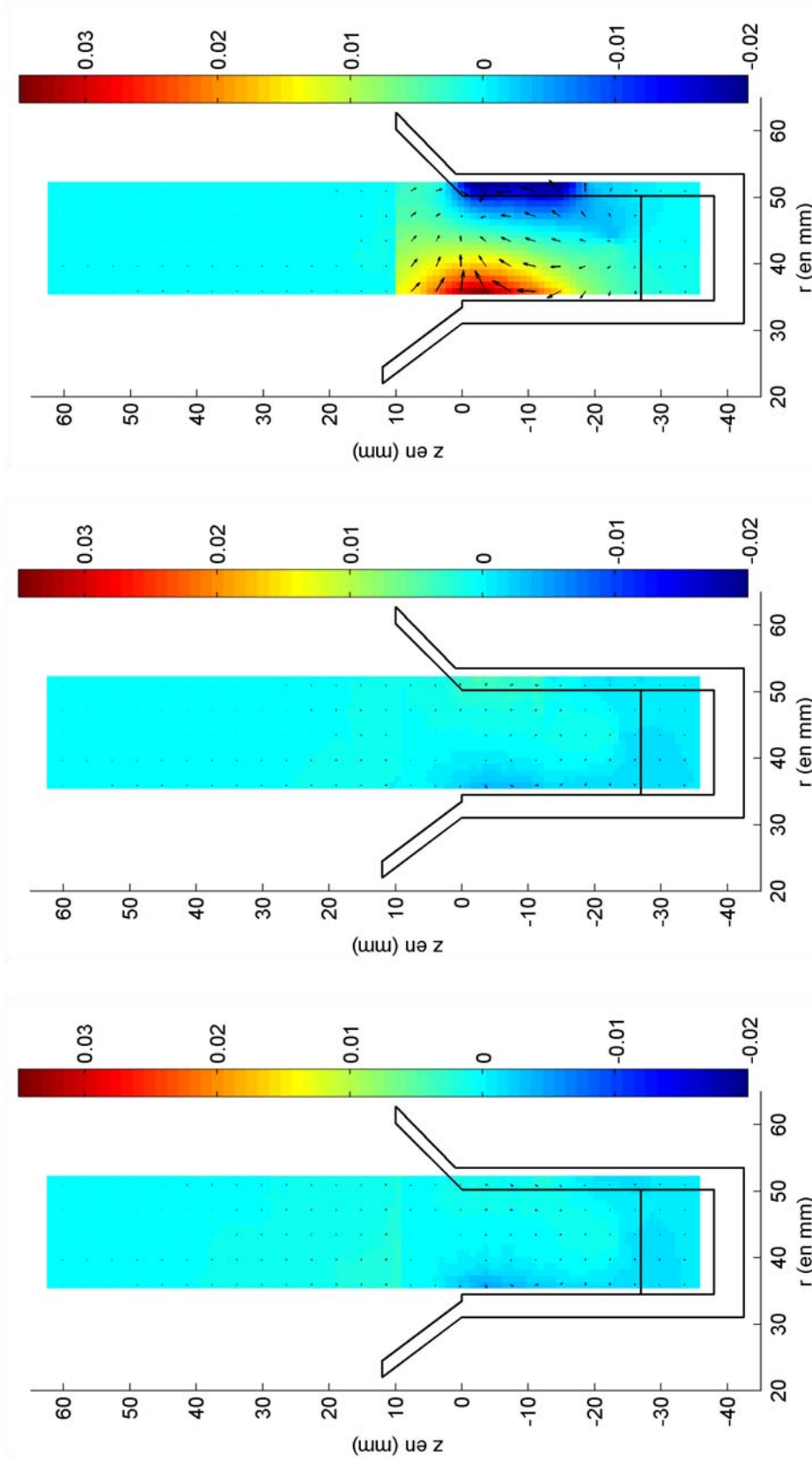


Figure 4-27. Mesures de la composante radiale de champ en fonction de  $z$  à proximité de la paroi externe ( $r=50$ mm), pour différentes valeurs de  $\theta$  (correspondant à différentes positions faisant face aux bobines externes), lorsque la bobine 7 (bobine externe) est alimentée, par des courants de 0,25 A et 0,5A.

#### 4.3.2.4 Impact des écrans thermiques inox

La totalité des cartographies présentées jusqu'à présent a été réalisée en l'absence des écrans thermiques. Ces derniers ont été prévus afin de protéger les bobines du rayonnement issu des céramiques du canal. Ces écrans sont simplement de fins cylindres en métal (0.5mm d'épaisseur) et ils ne doivent pas, dans l'idéal, venir perturber la répartition du champ magnétique. Or, pour des raisons de simplicité d'usinage, une première version de ces écrans a été réalisée en inox, matériau non totalement amagnétique. Il fut donc nécessaire de vérifier l'innocuité d'un tel ajout.

La Figure 4-28 représente la différence entre la norme du champ magnétique au sein du canal, avec et sans écrans en inox, pour trois positions angulaires ( $0^\circ$ ,  $22,5^\circ$  et  $45^\circ$ ). Alors qu'un effet d'homogénéisation azimutale était attendu en présence des écrans, les mesures indiquent un comportement opposé. L'impact des écrans est ainsi restreint à la zone faisant face aux bobines externes ( $\theta=45^\circ$ ) et a tendance à amplifier les inhomogénéités azimutales existantes. Si les ordres de grandeurs restent encore trop faibles pour conclure réellement quant à la cause d'un tel comportement, la présence des écrans, en accentuant les inhomogénéités existantes (ces dernières atteignant localement 6% de la valeur de normalisation) est suffisamment gênante pour envisager une solution de correction. Une deuxième version des écrans thermiques a donc été réalisée en aluminium et sera employée à présent.



(a)

(b)

(c)

Figure 4-28 : Différence mesurée entre la norme du champ  $B$  avec écrans inox et la norme du champ  $B$  sans écran, dans les plans  $\theta=0^\circ$ ,  $\theta=22,5^\circ$  et  $\theta=45^\circ$ . (a) Différence pour  $\theta=0^\circ$ . (b) Différence pour  $\theta=22,5^\circ$  (c) Différence pour  $\theta=45^\circ$ . Les flèches correspondent au vecteur champ magnétique (leur norme a été multipliée par 50 de façon à les maintenir visibles). Les différentes valeurs numériques sont normalisées par rapport à la valeur de  $B_r$  pour la topologie initiale, au centre du canal dans le plan de sortie.

### 4.3.3 Conformité simulations – mesures

Le prototype a donc été validé et répond au cahier des charges en matière de possibilités de réglage du champ et de caractéristiques des topologies générées. Le logiciel permettant le contrôle simple du PPS Flex étant fortement basé sur l'emploi de simulations éléments finis, il est à présent nécessaire de vérifier le degré de prédictivité de ces dernières.

#### 4.3.3.1 Comparaison des valeurs obtenues par simulations et mesures

Deux types de résultats de simulation seront présentés sur les figures suivantes :

- Les simulations linéaires sont calculées par combinaison linéaire des résultats obtenus via un modèle éléments finis pour chaque bobine alimentée séparément.
- Les simulations non linéaires sont issues d'un modèle éléments finis classique simulant l'ensemble des bobines alimentées simultanément et employant les caractéristiques  $B(H)$  propres aux matériaux constituant le PPS-Flex.

Les résultats obtenus à l'aide de la première version du modèle éléments finis (qui a été employé dans un premier temps pour évaluer les performances potentielles du PPS Flex) sont comparés aux mesures sur les graphes des Figure 4-29 et Figure 4-30. Ces résultats issus du premier modèle éléments finis sont loin d'être satisfaisants, que ce soit au niveau des simulations linéaires ou non linéaires (les deux étant quasiment confondus sur l'exemple choisi). Les écarts avec les valeurs mesurées atteignent en effet jusqu'à 30% avec les valeurs mesurées. La Figure 4-30 montre de plus que des différences existent, non seulement sur les amplitudes, mais aussi sur la forme des courbes. Les simulations ne pouvant dans ces conditions pas être considérées comme prédictives, l'usage à son plein potentiel de l'interface de réglage développée est compromis.

Il est donc indispensable de tenter d'améliorer la correspondance entre simulations et mesures.

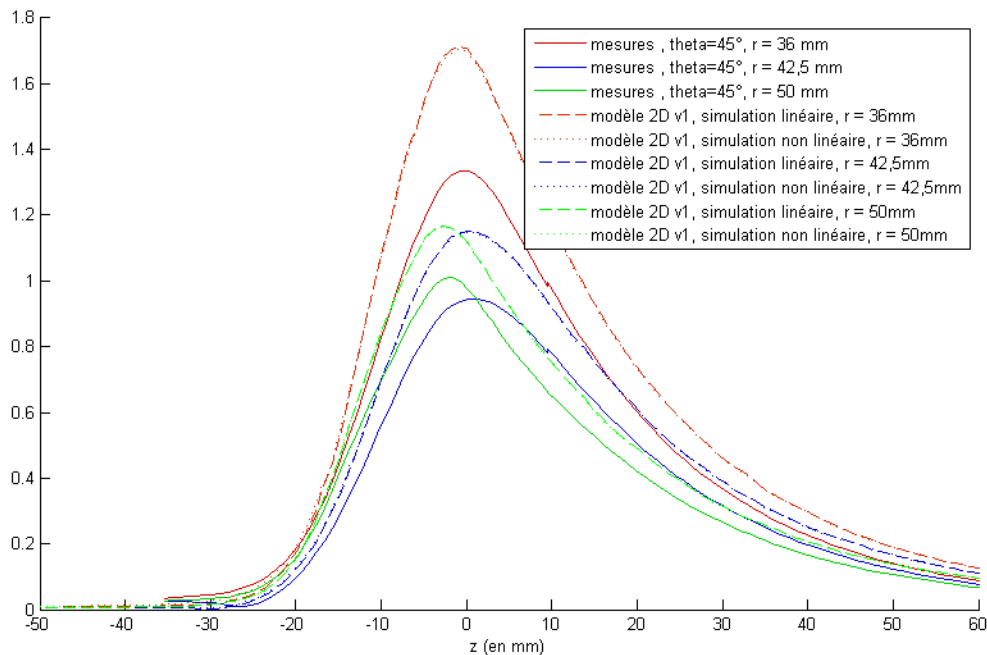


Figure 4-29: Exemple de comparaison des résultats issus des mesures et des simulations pour la première version du modèle éléments finis. Norme du champ magnétique en fonction de  $z$  pour la topologie initiale, normalisée.

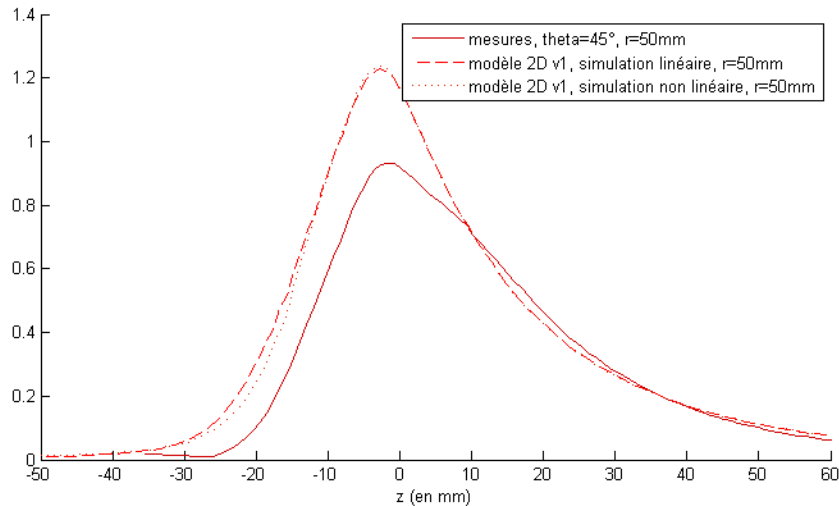


Figure 4-30: Exemple de forte incohérence entre les résultats de mesures et de simulation. Norme de B en fonction de z, topologie magnétique présentant un angle des lignes de champ en sortie du canal négatif.

#### 4.3.3.2 Correction du modèle 2D

Les erreurs constatées précédemment peuvent avoir plusieurs origines :

- Des défauts inhérents à la modélisation éléments finis 2D liés à l'assimilation d'une structure quasi axisymétrique à une structure parfaitement axisymétrique.
- Les caractéristiques B(H) des matériaux employés dans la simulation ne correspondant pas aux caractéristiques réelles de ceux utilisés pour la réalisation du prototype, du fait d'un traitement thermique différent ou de l'impact de l'usinage.
- La présence d'une certaine proportion de spires en court-circuit qui conduirait à réduire le champ généré par un courant donné (les thermocouples placés au centre des bobinages peuvent, par exemple, occasionner des défauts d'isolement).
- Des simplifications réalisées lors de l'élaboration du modèle. La non prise en compte des volumes correspondant aux vis d'assemblage ou des entrefers se situant entre chacune des différentes pièces du circuit peut être source d'erreurs aux niveaux des résultats de simulation.
- Des imprécisions au niveau des dimensions du circuit magnétique (tolérance d'usinage, décalage dans le positionnement de certaines pièces, etc.)
- Des erreurs liées à la mesure (étalonnage du gaussmètre, positionnement à zéro de la sonde).

Un seul de ces points ne suffit pas a priori à expliquer les écarts constatés et il est probable que chacun intervienne à des degrés divers. La correction du modèle en vue d'améliorer sa prédictivité n'est donc pas triviale.

Une première itération a été réalisée en cherchant à améliorer la correspondance entre le modèle 2D axisymétrique et la structure réelle 3D. En effet, le circuit magnétique 3D présente un effet non pris en compte dans la modélisation 2D actuelle. Les noyaux des bobines externes sont représentés dans le cas de la structure parfaitement axisymétrique par des couronnes de fer, de section dans le plan  $r-\theta$  égales à la somme de celle des 4 noyaux. Si les niveaux d'induction au sein des couronnes sont ainsi égaux à ceux des noyaux, il en va tout autrement des sections d'échanges entre les noyaux et les plaques qui leur sont adjacentes. La somme des périmètres des noyaux du circuit réel vaut ainsi 22 cm, alors que le périmètre correspondant de la couronne vaut 52cm, soit près d'un ratio de 2. Il se produit donc en

pratique sur la circulation du flux magnétique un effet de goulot d'étranglement dans les plaques externes à l'approche des noyaux, qui n'est pas pris en compte dans le modèle 2D.

Une deuxième version du modèle a donc été implémentée, en modulant l'épaisseur des plaques externes de façon à respecter les valeurs de sections aux niveaux des jonctions noyaux – plaques. La Figure 4-31 montre une vue du modèle 2D ainsi corrigé.

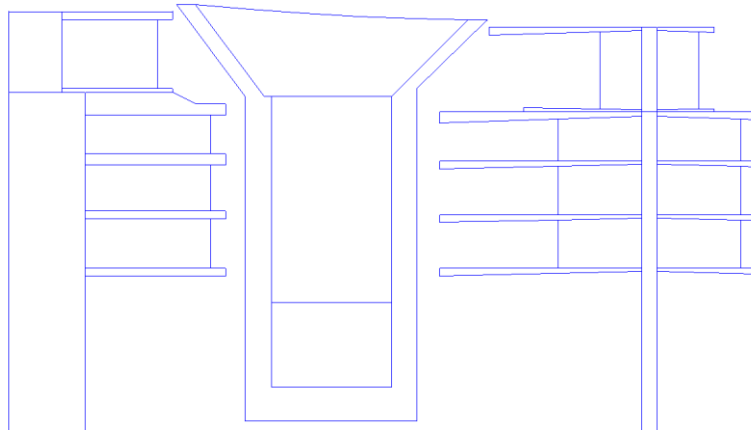


Figure 4-31: Modification des plaques externes du modèle 2D en vue d'une meilleure correspondance avec la géométrie réelle.

Cette modification a conduit à une nette amélioration de la correspondance entre les résultats de simulation et les mesures, en particulier au niveau des formes des courbes qui sont à présent très proches, y compris à proximité des parois externes du canal. Cependant, l'écart d'amplitude, même s'il a légèrement diminué, reste encore important (jusqu'à 20%) (cf. Figure 4-32).

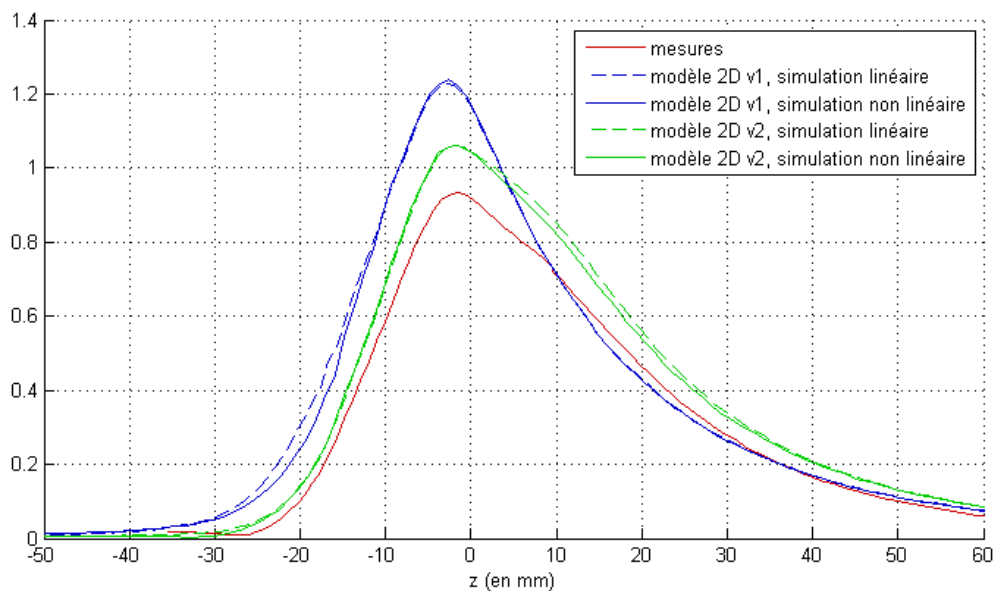


Figure 4-32: Comparaison des résultats obtenus avant et après correction du modèle 2D élément finis. Norme de  $B$  en fonction de  $z$ , topologie magnétique présentant un angle des lignes de champ en sortie du canal négatif,  $r=50\text{mm}$  (proche de la paroi externe du canal).



Dans l'idéal, il faudrait donc envisager des modifications supplémentaires du modèle, afin de corriger d'éventuels défauts répertoriés dans la liste donnée en début de paragraphe.

Certains peuvent a priori être écartés. Un calcul analytique simple (théorème d'Ampère et conservation du flux) permet ainsi de vérifier que la nature discrète du circuit magnétique, et les entrefers qu'elle implique entre chacune des pièces qui compose la structure, n'a théoriquement pas d'impact significatif sur le champ généré. Ainsi, pour des dimensions correspondant globalement à celle du circuit du PPS Flex, la prise en compte d'un entrefer de 0.2mm conduit à une variation du champ entre les plaques de 1%. La variation du champ au niveau du canal sera quant à elle encore inférieure. Ce n'est donc clairement pas cette approximation qui est à l'origine de l'écart constaté.

De même, la présence de vis dans les noyaux peut sembler de prime abord pénalisante. Cependant, la somme des sections des vis représente moins de 10% de la section totale des noyaux internes et externes. Les effets de ces dernières ne doivent donc se faire sentir qu'uniquement pour des valeurs proches de la saturation du fer des noyaux. Or, les écarts sont constatés bien avant cela. De plus, les vis ont été usinées dans de l'acier doux, ce qui réduit encore fortement l'impact de leur présence et permet d'affirmer que les ordres de grandeurs des écarts observés ne sont, là encore, pas compatibles avec cette explication.

Enfin, des tests ont été réalisés afin de déterminer quel degré de variation au niveau des caractéristiques des matériaux, en particulier au niveau de leur courbe  $B(H)$ , serait à même de conduire aux écarts observés. Là encore, les ordres de grandeurs semblent incompatibles avec des potentielles dégradations des caractéristiques magnétiques, du fait de l'usinage ou du traitement thermique (perméabilité divisée par 5, etc.).

Les explications possibles restantes sont plus difficiles à confirmer ou infirmer et nécessiteront encore des investigations supplémentaires. L'explication la plus vraisemblable est un problème persistant lié à la modélisation 2D. Une simulation 3D est en cours de réalisation afin de vérifier ce point. Le PPS Flex étant avant tout un outil de travail, une approche pragmatique peut toutefois être envisagée dans l'attente de ces résultats, en mettant en place une correction des valeurs de courants avant simulation, les facteurs correctifs étant issus des comparaisons entre simulations et mesures pour chacune des bobines du circuit.

## **4.4 Bilan - Perspectives**

La première partie de ce chapitre est consacrée à la réalisation pratique du PPS Flex. Choix des techniques d'assemblage, matériaux employés, protections à mettre en œuvre y sont détaillés et justifiés. Un circuit magnétique composé de pièces multiples a ainsi été retenu. Ce choix complexifie considérablement la structure finale, mais permet le dépôt d'alumine sur les zones en contacts avec les bobinages et garantit ainsi l'isolation des bobines par rapport aux parties ferromagnétiques. Les contraintes supplémentaires amenées par le contexte de réalisation du prototype, telles que l'adaptabilité au bloc canal existant du PPS 1350 ont été intégrées au design, en itérant au besoin le processus de dimensionnement théorique.

Une fois la fabrication du prototype achevée, il fût nécessaire de procéder à sa validation expérimentale. Pour cela, un gaussmètre automatisé a été réalisé, de façon à garantir la précision nécessaire au type de mesures à effectuer. La capacité du PPS Flex à répondre au cahier des charges en termes de variabilité du champ généré au sein du canal a pu donc être vérifiée.

Enfin, une comparaison entre les résultats obtenus par simulation et ceux mesurés a été opérée. Si la forme du champ produit est respectée, un écart important apparaît au niveau de l'amplitude, les simulations ayant tendance à fortement surestimer le champ produit. De nombreuses pistes pour expliquer cette différence ont été envisagées et successivement écartées et une étude supplémentaire sera nécessaire afin d'élucider la ou les raisons de cet écart, qui, même s'il n'empêche en rien l'utilisation du PPS Flex, peut rendre l'usage plus laborieux.

La réalisation du prototype n'est que le début des travaux impliquant le PPS Flex. L'étape suivante consistera à effectuer les essais en fonctionnement en chambre à vide, qui n'ont pu être effectués jusqu'à présent, faute de disponibilité du moyen d'essai. Dans un second temps, les campagnes d'utilisation du PPS Flex interviendront ou il sera un outil afin d'améliorer la compréhension des phénomènes d'interaction plasma et champ magnétique.

Différents points peuvent être améliorés en parallèle de ces opérations.

L'aspect le plus critique est l'amélioration de la prédictivité des simulations éléments finis par rapport aux mesures. Les études réalisées jusqu'à présent poussent à envisager un problème au niveau de la retranscription en un modèle 2D d'une structure non parfaitement axisymétrique. Une simulation éléments finis 3D permettrait de vérifier la présence d'éventuels phénomènes non pris en compte à l'heure actuelle, qui conduirait aux écarts observés. En cas d'incohérences avérées, il serait alors possible d'employer les données issues de la simulation 3D comme entrées du logiciel de visualisation et réglage et ainsi de l'utiliser à son plein potentiel.

Les outils de caractérisation peuvent aussi être améliorés et, en particulier ; quelques opérations simples permettraient d'augmenter sensiblement la précision du gaussmètre. Le remplacement de l'actionneur selon l'axe z par un rail identique aux actionneurs x ou y permettrait de gagner en course et simplifierait grandement la procédure de mesure en s'affranchissant de l'utilisation d'une rallonge, ce qui serait bénéfique en terme de précision. D'autre part, une procédure de positionnement à zéro de la sonde de façon systématique devrait être mise en place. En effet, le réglage étant à l'heure actuelle manuel, il s'agit de la principale source d'imprécisions au niveau des mesures.

## **Conclusion générale**

L'objet de ces travaux de thèse a consisté à étudier deux problématiques liées à la configuration magnétique des propulseurs à effet Hall. Il s'agissait ainsi, d'une part, de proposer un moyen expérimental permettant de mieux appréhender l'influence du champ magnétique sur le fonctionnement du propulseur et, d'autre part, d'identifier une méthodologie de conception optimale des circuits magnétiques propres aux propulseurs (la complexité des topologies magnétiques requises dans le canal d'un propulseur en faisant un objet de choix pour l'étude et l'application de telles méthodes).

La première étape de ce travail a permis de se familiariser avec la propulsion spatiale en général et de dégager les atouts de la technologie des propulseurs à effet Hall en particulier. Après avoir posé les enjeux à court et long termes de la propulsion spatiale, les deux grandes solutions techniques actuellement opérationnelles, à savoir la propulsion chimique et la propulsion électrique, ont été présentées et comparées. Les avantages du propulseur à effet Hall ont ainsi été mis en évidence via sa capacité à produire une poussée importante, tout en maintenant des valeurs d'Isp élevées. Si cette technologie qui date maintenant des années 1970 revêt un intérêt certain, sa déclinaison sur des missions à moyenne et très longue distance nécessite cependant des adaptations qui requièrent une meilleure connaissance des interactions entre le champ magnétique généré dans le canal plasma et le plasma lui-même.

Différents paramètres définissant la topologie magnétique ont été identifiés comme ayant une influence sur les performances et le vieillissement du propulseur, mais des incertitudes demeurent quant au rôle exact de chacun d'entre eux. Les études expérimentales menées dans ce contexte ne bénéficiaient pas en effet d'un moyen d'essai permettant de contrôler réellement et indépendamment les paramètres de la topologie magnétique. Citons à ce titre l'importance de mieux quantifier notamment l'impact de l'amplitude maximale du champ dans le canal, du gradient axial de champ magnétique en amont du plan de sortie du canal ou encore de l'angle d'inclinaison de la lentille magnétique au niveau du plan de sortie du canal. La définition d'un moyen expérimental comportant un circuit magnétique de propulseur dont les degrés de liberté permettent de contrôler finement le champ magnétique s'avère dans ce contexte désormais incontournable.

Afin de mieux appréhender la définition du circuit magnétique, une première analyse de l'existant a été effectuée. Le circuit magnétique d'un propulseur commercialisé par la SNECMA, le PPS1350, a été plus précisément étudié, ce qui a permis, d'une part, de présenter les méthodes de modélisation employées pour ce type de problème et, d'autre part, de mettre en évidence les défauts inhérents à la structure du circuit magnétique classiquement utilisé. Le PPS1350 comporte notamment des écrans magnétiques qui viennent conformer le

champ magnétique pour garantir le gradient de champ axial requis dans le canal. Cependant, ceci est réalisé au prix d'une augmentation importante des fuites magnétiques (les écrans absorbent environ la moitié du flux magnétique total produit par le circuit). La reconsidération de ce circuit dans un processus de conception optimale pourrait consister, par exemple, à diminuer de moitié le flux total produit en s'affranchissant, si cela est possible, des écrans magnétiques, ce qui permettrait de diminuer significativement la masse totale du circuit. Dans un contexte où le prix de masse envoyée dans l'espace est évalué à environ 10 k€/kg, l'enjeu revêt un intérêt certain.

Dans cette optique, le deuxième chapitre s'est focalisé sur les méthodologies envisageables pour l'élaboration d'un outil de conception optimale de dispositifs magnétostatiques. Ce type de problème peut être formulé comme un problème inverse de conception et résolu sous la forme d'un problème d'optimisation. Compte tenu de la diversité des approches envisageables, quelques pistes ont été dégagées pour la conception d'un tel outil, avec la volonté de conférer au maximum à la méthode des qualités déterministes et globales.

Dans un premier temps, un balayage assez général des notions et méthodes d'optimisation a été effectué, afin de préciser les bases nécessaires à la compréhension des problématiques abordées (définition par rapport au cahier des charges de fonctions objectifs, de contraintes d'égalité ou d'inégalités). Les méthodes de conception optimale de dispositifs magnétostatiques ont ensuite pu être plus largement analysées. Trois types de méthodes peuvent être distingués : les méthodes d'optimisation paramétriques, géométriques et topologiques correspondant respectivement à la recherche de valeurs optimales pour certains paramètres dimensionnants de la structure prédéfinie, pour la forme des frontières de la structure et enfin, pour la répartition de matériaux formant la structure. Le type de méthode présentant le plus d'intérêt dans l'optique d'une adaptation au design d'un circuit magnétique de propulseur étant a priori la dernière, puisque l'optimisation topologique permet de s'affranchir de la définition d'une géométrie initiale. Les structures optimales obtenues peuvent ainsi être très différentes des géométries usuelles et, éventuellement, n'avoir même jamais été imaginées par le concepteur qui a tendance en première approche à se référer à son expérience antérieure et à définir des structures proches de l'existant.

La résolution par approche topologique fait appel aux méthodes numériques pour obtenir un calcul des grandeurs physiques solutions de l'équation aux dérivées partielles représentatives du problème. Ceci rend d'une manière générale difficile le calcul du gradient qui est souvent nécessaire dans le processus d'optimisation. Deux méthodes sont cependant envisageables.

La première consiste à employer des algorithmes métaheuristiques comme les algorithmes génétiques ou les algorithmes d'essaim particulaire qui ne nécessitent aucun calcul de dérivée. L'inconvénient réside cependant dans le nombre important d'évaluations du critère d'optimisation qu'ils requièrent (ce qui peut rapidement être problématique compte tenu du temps parfois important nécessaire à la résolution du problème numérique) et d'autre part leur difficulté à converger vers une géométrie directement utilisable. Ces dernières sont souvent fortement discontinues et irrégulières et un travail d'interprétation et d'amélioration par le concepteur est généralement indispensable.

La deuxième approche (la plus employée) consiste à utiliser des algorithmes de descente couplés à des calculs de sensibilité (calcul du gradient de la fonction objectif en fonction des variables du problème). Cette dernière approche, qui est déterministe, donne généralement des géométries ne nécessitant que très peu de travail de réinterprétation pour devenir réalisables. Cette approche doit donc être à privilégier pour l'élaboration de l'outil de conception.

La formulation implicite du critère d'optimisation en fonction des variables d'optimisation interdit, a priori, l'utilisation de méthodes déterministes globales. Une alternative proposée a consisté à résoudre conjointement le problème aux équations aux dérivées partielles et le problème de conception optimale dans un seul et même problème d'optimisation. Le nombre de variables s'en trouve nécessairement fortement augmenté, mais cela permet en contrepartie d'obtenir une formulation explicite du problème et d'élargir ainsi considérablement l'ensemble des algorithmes de résolution utilisables. La méthode a été validée en la testant sur un problème d'optimisation d'une structure élémentaire magnétostatique de répartition de sources (variables potentiel vecteur et densité de courant).

Ces méthodes de conception optimale ont trouvé une première application dans le troisième chapitre pour le dimensionnement de deux circuits magnétiques dédiés à deux propulseurs à effet Hall. Le premier a concerné dans le cadre du projet européen Hiper le dimensionnement d'un circuit magnétique pour un propulseur de 20kW. Après avoir exposé les éléments du cahier des charges en termes d'objectifs et de contraintes, une méthode d'optimisation paramétrique basée sur l'utilisation d'un algorithme de descente d'ordre 0 a été proposée et mise en œuvre. Une comparaison entre les performances de la structure optimale ainsi obtenue et celles requises par le cahier des charges a permis de valider le dimensionnement. Le prototype de propulseur utilisant ce circuit magnétique à été testé avec succès en juillet 2011 dans le moyen d'essai PIVOINE du laboratoire ICARE.

Le deuxième circuit magnétique a eu trait à la problématique de l'analyse de l'impact du champ magnétique sur le plasma. Dans ce contexte, les travaux réalisés dans le cadre du GDR propulsion plasma ont largement dépassé le stade de la définition et la réalisation d'un circuit magnétique, puisqu'il s'agissait de développer à la fois le circuit, son module d'alimentation et son module de contrôle du champ magnétique. L'outil final doit répondre à deux objectifs distincts. D'une part, il doit être employé afin de déterminer s'il existe une topologie magnétique conduisant à de meilleures performances du propulseur en fonction des conditions d'utilisation de ce dernier. D'autre part, il pourra être utilisé pour générer des topologies ne présentant pas d'intérêt du point de vue des performances, mais constituant une source d'information riche pour la compréhension fine des interactions plasma/champ magnétique. La définition et le dimensionnement du circuit n'a pu être réalisé via les méthodes de conception automatisées définies précédemment, les objectifs en termes de cartes de champs étant trop diversifiés. Le design final a été obtenu par itération manuelle de la géométrie, en s'appuyant sur des modèles numériques paramétrés pour le calcul des champs et sur un outil d'aide à la conception développé spécifiquement (cet outil sera ensuite à la base de l'interface de pilotage du prototype).

La structure retenue dénommée PPS-Flex est une géométrie étagée, sans écrans magnétiques. Le circuit magnétique complet comporte 4 étages et 9 valeurs de courant réglables (4 bobinages internes, 4 bobinages externes et un bobinage arrière). Le dernier étage de la structure est cependant prévu pour être amovible afin de revenir à une géométrie de canal conventionnelle (identique à celle du PPS1350). Les capacités de réglage de la topologie à l'intérieur et en sortie du canal offertes par la structure ont été vérifiées à l'aide de simulations éléments finis. Elles incluent entre autres le contrôle indépendant du gradient axial du champ magnétique en amont et en aval du plan de sortie du canal, de l'amplitude maximale du champ dans le canal, de l'inclinaison des lignes de champs au niveau du plan de sortie ou encore de la présence d'un zéro de champ dans la zone anodique.

Le quatrième et dernier chapitre a été consacré à la réalisation pratique du PPS-Flex. Le circuit magnétique étant dimensionné autour de pièces issues d'un propulseur existant (le PPS1350), des contraintes mécaniques additionnelles ont dues être prises en compte afin de

garantir la compatibilité des géométries. A ces contraintes s'ajoutent celles inhérentes à tout propulseur à effet Hall. Citons notamment la température de fonctionnement, puisque le circuit magnétique est soumis au rayonnement des céramiques du canal, ces dernières pouvant atteindre 700°C. Le design 3D du circuit magnétique, incluant le choix des matériaux employés et les méthodes d'isolation électrique retenues a ainsi pu être finalisé

Le nombre important de degrés de libertés (valeurs de courants) du prototype, s'il constitue un atout par rapport à la flexibilité et à la variété des topologies magnétiques accessibles, induit indubitablement une complexité de réglage élevée. Afin de minimiser au maximum cet inconvénient, un logiciel permettant de directement piloter le prototype à partir de cartes de champ souhaitées a été développé. Ce dernier utilise des cartes de champs, calculées préalablement par simulations numériques, et un algorithme d'optimisation linéaire pour calculer la configuration de courant optimale en fonction de la cartographie souhaitée.

La validation expérimentale des performances du PPS-Flex a finalement été menée à l'aide d'une platine motorisée de mesure de champ magnétique spécifiquement réalisée. Les mesures confirment les capacités de réglages du PPS-Flex, même s'il subsiste des écarts entre les performances simulées et mesurées. Ces écarts proviennent du fait que les simulations numériques ont été initialement effectuées avec un modèle 2D du circuit magnétique idéalisé sous une forme axisymétrique. Une simulation 3D doit pouvoir résoudre ces écarts et valider complètement l'interface de pilotage du banc.

Ces travaux ouvrent un champ relativement large de perspectives, qui se divisent en deux axes. Une première phase d'étude primordiale consiste à mettre à profit le PPS-Flex. Il conviendra, en premier lieu, de vérifier son bon fonctionnement et ses performances, avec son dernier étage et la prolongation du canal qu'il nécessite. Si ces performances sont trop éloignées de celles obtenues par le PPS1350, il sera probablement préférable de procéder au retrait du dernier étage. Une fois ces vérifications faites, les possibilités d'études sont très variées et la liste ci-dessous est loin d'être exhaustive :

- L'étude de l'impact de chacun des paramètres du champ magnétique évoqués au chapitre 1 sur le fonctionnement du propulseur reste la priorité ;
- Des études concertées avec les équipes en charge du développement des modèles plasma peuvent être menées afin de confirmer ou infirmer certaines hypothèses de modélisation ;
- Des tests de topologies magnétiques non conventionnelles en vue d'une amélioration des performances du propulseur sont aussi possibles.

L'étude portant sur la conception optimale de dispositifs magnétostatiques laisse, elle aussi, entrevoir des perspectives nombreuses. Deux voies se distinguent particulièrement pour la suite des travaux :

- La première doit permettre d'aboutir rapidement à un outil de conception automatisée de structures magnétostatiques optimales. L'utilisation conjointe d'algorithmes de descente et de calcul de sensibilité peut dans cette optique résoudre de nombreux types de problème d'optimisation et, en particulier, des problèmes d'optimisation paramétriques, géométriques ou topologiques. En s'appuyant sur des méthodes d'homogénéisation et pénalisation, il est possible d'obtenir des designs de structures optimales ne nécessitant que très peu de modifications. Un premier code se basant sur l'utilisation d'un logiciel commercial de calcul de champ par éléments finis (du type FEMM) est en cours de réalisation et permettra de valider la méthode pour la conception de circuits magnétiques de propulseurs. Il est toutefois préférable d'avoir

directement accès aux matrices descriptives du problème et il sera à terme judicieux d'employer un code élément finis dédié à la méthode.

- La deuxième approche consiste à mettre à profit les méthodes permettant de formaliser le problème d'optimisation sous une forme explicite, afin de permettre l'utilisation d'algorithmes de résolution normalement non appropriés à ce genre de problème. Le principe a été validé sur des problèmes linéaires et l'étape suivante consiste à l'appliquer aux cas non linéaires (perméabilité des milieux matériels considérée comme variable) En particulier, il sera intéressant de vérifier la possibilité d'exploiter des méthodes déterministes.

Ces deux voies concernent des domaines bien distincts et peuvent être abordées de manière totalement indépendante. Mais à l'image de ce qui a été initié lors de ces travaux, il serait bénéfique de les mener conjointement. Les avancées originales naissent souvent à la confluence de deux domaines, en tirant parti des différences de point de vue et des méthodes propres à chacun. Les méthodes d'optimisation n'avaient encore jamais été appliquées à la conception de propulseurs à effet Hall et les perspectives que cette rencontre offrent sont innombrables.

## Références

### Références web

---

- [NAS] <http://www.nasa.gov> et <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/>
- [NOM] M.A Abramson, C. Audet, G. Couture, J.E. Dennis, Jr., and S. Le Digabel. The NOMAD project. Software available at <http://www.gerad.ca/nomad>
- [FEM] D. C. Meeker, Finite Element Method Magnetics (FEMM), Version 4.2, <http://www.femm.info>

### Livres

---

- [All-05] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation*. Les éditions de l'école polytechnique, 2005.
- [All-07] G. Allaire, *Conception optimale de structures*. Springer, 2007.
- [Cia-88] P.G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. 1988.
- [Cor-10] Jean-Pierre Corriou, *Méthodes numériques et optimisation : Théorie et pratique pour l'ingénieur*. Tec & Doc Lavoisier, 2010.
- [Cul-94] J.-C. Culioli, *Introduction à l'optimisation*. Ellipses, 1994.
- [Dur-68] É. Durand, *Magnétostatique*. Masson et Cie, 1968.
- [Jah-68] R. G. Jahn, *Physics of electric propulsion*. McGraw-Hill, 1968.
- [Moo-66] R. E. Moore, *Interval analysis*. Prentice-Hall, 1966.
- [Nei-96] P. Neittaanmäki, M. Rudnicki, et A. Savini, *Inverse problems and optimal design in electricity and magnetism*, vol. 35. Oxford University Press, USA, 1996.
- [She-99] H. D. Sherali et W. P. Adams, *A reformulation-linearization technique for solving discrete and continuous nonconvex problems*, vol. 31. Kluwer Academic Publishers, 1999.



## Thèses

---

- [Bar-02] J. Bareilles, « Modélisation 2D hybride d'un propulseur à Effet Hall pour satellites », Université Paul Sabatier, 2002.
- [Bon-06] C. Boniface, « Modélisation et diagnostics d'un Propulseur à Effet Hall pour Satellites », Université Paul Sabatier, 2006.
- [Dar-99] Darnon F., « Comportements transitoires d'un propulseur à plasma de type SPT 100. », Université d'Orléans, 1999.
- [Fon-07] J. Fontchastagner, « Résolution du problème inverse de conception d'actionneurs électromagnétiques par association de méthodes déterministes d'optimisation globale avec des modèles analytiques et numériques », Institut national Polytechnique de Toulouse, 2007.
- [Gar-98] L. Garrigues, « Modélisation d'un propulseur à plasma stationnaire pour satellite », Université Paul Sabatier, 1998.
- [Hof-04] R.R.Hofer, «Development and Characterization of High-Efficiency, High-Specific Impulse Xenon Hall Thrusters», University of Michigan, 2004.
- [Law-98] T. J. Lawrence, « Research into Resistojet Rockets for Small Satellite Applications. », 1998.
- [Nin-10] J. Ninin, « Optimisation Globale basée sur l'Analyse d'Intervalles », Institut national Polytechnique de Toulouse, 2010.
- [Per-08] J. Perez-Luna, « Modélisation et diagnostic d'un propulseur à effet Hall », Université de Toulouse, Paul Sabatier 2008.

## Articles

---

- [Ahe-04] E. Ahedo et D. Escobar, « Influence of design and operation parameters on Hall thruster performances », *Journal of Applied Physics*, vol. 96, n<sup>o</sup>. 2, p. 983, 2004.
- [Bia-98] N. Bianchi et S. Bolognani, « Design optimisation of electric motors by genetic algorithms », *Electric Power Applications, IEE Proceedings -*, vol. 145, n<sup>o</sup>. 5, p. 475-483, sept. 1998.
- [Bli-05] N. V. Blinov, O. A. Gorshkov, et A. A. Shagayda, « Experimental Investigation of Magnetic Field Topology Influence on Structure of Accelerating Layer and Performance of Hall Thruster », *Proc. of 29th IEPC*.
- [Boe-03] J.-P. Boeuf et A. Bouchoule, « Les propulseurs à plasma pour satellite », *Images de la physique*, 2004-2003.

- [Bou-07] A. Bouchoule, O. Duchemin, M. Dudeck, et S. Mazouffre, « La propulsion électrique pour les missions spatiales », *Lettre 3AF*, n° 6, 2007.
- [Bou-90] N. Boules, « Design optimization of permanent magnet DC motors », *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 26, n° 4, p. 786-792, août 1990.
- [Bur-97] Burczynski T., Kane J. H., et Balakrishna C., « Comparison of shape design sensitivity analysis formulations via material derivative-adjoint variable and implicit differentiation techniques for 3-D and 2-D curved boundary element », *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 142, n° 1-2, p. 88-109, 1997.
- [Byu-99] Jin-Kyu Byun, Song-Yop Hahn, et Il-Han Park, « Topology optimization of electrical devices using mutual energy and sensitivity », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 35, n° 5, p. 3718-3720, sept. 1999.
- [Byu-04] J. K. Byun, J. H. Lee, et I. H. Park, « Node-based distribution of material properties for topology optimization of electromagnetic devices », *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 40, n° 2, p. 1212–1215, 2004.
- [Cam-07] F. Campelo, K. Watanabe, et H. Igarashi, « 3D topology optimization using an immune algorithm », *COMPEL: Int J for Computation and Maths. in Electrical and Electronic Eng.*, vol. 26, n° 3, p. 677-688, 2007.
- [Cha-04] O. Chadebec, J. L. Coulomb, G. Cauffet, et J. P. Bongiraud, « How to well pose a magnetization identification problem », *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 39, n° 3, p. 1634–1637, 2003.
- [Cho-04] E. Y. Choueiri, « A Critical History of Electric Propulsion: The First 50 Years (1906 - 1956) », *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 20, No. 2, pp. 193-203, avr-2004.
- [Chu-97] Jang-Sung Chun, Min-Kyu Kim, Hyun-Kyo Jung, et Sun-Ki Hong, « Shape optimization of electromagnetic devices using immune algorithm », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 33, n° 2, p. 1876-1879, mars 1997.
- [Cou-89] S. Gitosusastro, J. L. Coulomb, et J. C. Sabonnadiere, « Performance derivative calculations and optimization process », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 25, n° 4, p. 2834-2839, juill. 1989.
- [Cve-09] G. V. Cvetkovski et L. B. Petkovska, « Weight reduction of permanent magnet disc motor for electric vehicle using genetic algorithm optimal design procedure », in *IEEE EUROCON 2009, EUROCON '09*, 2009, p. 881-888.
- [Day-97] M. Day, V. Kim, V. Kozlov, A. Lazurenko, G. Popov, et A. Skrylnikov, « Investigation of the possibility to reduce SPT plume divergence by optimization of the magnetic field topology in the accelerating channel », *International Electric Propulsion Conference*, 1997.
- [Dea-11] De Andrade «Integrated Optimal Design of Electrical Environmental Conditioning Systems (ECS) » *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, en attente de publication.

- [Deh-08] B. Dehez, J. Denies, et H. Ben Ahmed, « Design of electromagnetic actuators using optimizing material distribution methods », in *18th International Conference on Electrical Machines, 2008. ICEM 2008*, 2008, p. 1-7.
- [Den-10] J. Denies, B. Dehez, F. Glineur, et H. Ben Ahmed, « Impact of the Material Distribution Formalism on the Efficiency of Evolutionary Methods for Topology Optimization », in *Recent Advances in Optimization and its Applications in Engineering*, M. Diehl, F. Glineur, E. Jarlebring, et W. Michiels, Éd. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010, p. 461-470.
- [DIF] M. Lajoie-Mazenc et R. Carlson, « Calcul du champ magéntique dans les machines électriques par résolution directe du système d'équations aux différences finies (programme DIFIMEDI) », archives du LEEI, 1975
- [Dig-11] S. Le Digabel. « Algorithm 909 : NOMAD : Nonlinear optimization with the MADS algorithm ». *ACM. Transactions on mathematical Software*, 37(4):44:1-44:15, 2011
- [Dor-01] N. Dorval et al., « Determination of the ionization and acceleration zones in a stationary plasma thruster by optical spectroscopy study: Experiments and model », *Journal of Applied Physics*, vol. 91, n<sup>o</sup>. 8, p. 4811-4817, avr. 2002.
- [Dor-06] L. Dorf, Y. Raitses, et N. Fisch, « Effect of magnetic field profile on the anode fall in a Hall-effect thruster discharge », *Physics of plasmas*, vol. 13, p. 057104, 2006.
- [Duf-00] S. Dufour, G. Vinsard, et B. Laporte, « Generating rotor geometries by using a genetic method », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 36, n<sup>o</sup>. 4, p. 1039-1042, juill. 2000.
- [Dyc-94] D. Dyck, D. Lowther, et E. Freeman, « A method of computing the sensitivity of electromagnetic quantities to changes in materials and sources », *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 30, n<sup>o</sup>. 5, p. 3415–3418, 1994.
- [Dyc-96] D. Dyck, D. Lowther, et E. Freeman, « Design of electromagnetic devices using sensitivities computed with the adjoint variable method », in *Computation in Electromagnetics, 1994. Second International Conference on*, 1993, p. 231–234.
- [Fit-04] E. Fitan, F. Messine, et B. Nogarede, « The electromagnetic actuator design problem: A general and rational approach », *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 40, n<sup>o</sup>. 3, p. 1579–1590, 2004.
- [Fri-03] R. H. Frisbee, « Advanced Propulsion for The XXI Century », *AIAA Paper*, vol. 2589, p. 2003, 2003.
- [Gan-08] A. A. Ganjovi et N. Gupta, « Parametric investigation of stationary plasma thruster performance », *Electrical Engineering*, vol. 90, n<sup>o</sup>. 8, p. 551-558, déc. 2008.

- [Gar-03] L. Garrigues, G. J. M. Hagelaar, J. Bareilles, C. Boniface, et J. P. Boeuf, « Model study of the influence of the magnetic field configuration on the performance and lifetime of a Hall thruster », *Physics of Plasmas*, vol. 10, n<sup>o</sup>. 12, p. 4886, 2003.
- [Gar-11] L. Garrigues, et P. Coche, «Electric propulsion: comparisons between different concepts», *Plasma Physics and Controlled Fusion*, en cours de publication.
- [Gaw-08] D. Gawron, S. Mazouffre, N. Sadeghi, et A. Héron, « Influence of magnetic field and discharge voltage on the acceleration layer features in a Hall effect thruster », *Plasma Sources Science and Technology*, vol. 17, n<sup>o</sup>. 2, p. 025001, mai 2008.
- [Gor-06] Gorshkov, A. Shagayda, et S. Irishkov, « The Influence of the Magnetic Field Topology on Hall Thruster Performance », p. AIAA-2006-4472, 2006.
- [Has-11] H. M. Hasanien, « Particle Swarm Design Optimization of Transverse Flux Linear Motor for Weight Reduction and Improvement of Thrust Force », *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 58, n<sup>o</sup>. 9, p. 4048-4056, sept. 2011.
- [Hof-01] R. R. Hofer, P. Y. Peterson, A. D. Gallimore, et R. S. Jankovsky, « A high specific impulse two-stage Hall thruster with plasma lens focusing », in *27th International Electric Propulsion Conference, Pasadena, CA*, 2001.
- [Hof-02] R. R. Hofer et A. D. Gallimore, « The Role of Magnetic Field Topography in Improving the Performance of High-Voltage Hall Thrusters », *38th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference Exhibit*, vol. 4111, n<sup>o</sup>. July, p. 2002, 2002.
- [Hof-03] R. R. Hofer et R. S. Jankovsky, « The influence of current density and magnetic field topography in optimizing the performance, divergence, and plasma oscillations of high specific impulse Hall thrusters », in *Internal Electric Propulsion Conference, IEPC-03-142, Toulouse, France*, 2003.
- [Hor-01] M. Horii, N. Takahashi, et J. Takehara, « 3-D optimization of design variables in x-, y- and z-directions of transformer tank shield model », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 37, n<sup>o</sup>. 5, p. 3631-3634, sept. 2001.
- [Hu-10] J. Hu, J. E. Mitchell, et J. S. Pang, « An LPCC approach to nonconvex quadratic programs », *Mathematical Programming*, p. 1–35, 2010.
- [Im-03] Chang-Hwan Im, Hyun-Kyo Jung, et Yong-Joo Kim, « Hybrid genetic algorithm for electromagnetic topology optimization », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 39, n<sup>o</sup>. 5, p. 2163- 2169, sept. 2003.
- [Ish-11] T. Ishikawa, K. Yonetake, et N. Kurita, « An Optimal Material Distribution Design of Brushless DC Motor by Genetic Algorithm Considering a Cluster of Material », *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 47, n<sup>o</sup>. 5, p. 1310–1313, 2011.
- [Kei-05] M. Keidar et I. D. Boyd, « On the magnetic mirror effect in Hall thrusters », *Applied Physics Letters*, vol. 87, p. 121501, 2005.

- [Kim-98] V. Kim, « Main physical features and processes determining the performance of stationary plasma thrusters », *Journal of Propulsion and Power*, vol. 14, n° 5, p. 736–743, 1998.
- [Kim-99] V. Kim et al., « SPT-115 development and characterization », *35th AIAA Joint propulsion conference and Exhibit, Los Angeles, 1999*.
- [Kim-07] D. H. Kim, J. K. Sykulski, et D. A. Lowther, « Design optimisation of electromagnetic devices using continuum design sensitivity analysis combined with commercial EM software », *Science, Measurement & Technology, IET*, vol. 1, n° 1, p. 30–36, 2007.
- [Kir-83] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, et M. P. Vecchi, « Optimization by simulated annealing », *science*, vol. 220, n° 4598, p. 671, 1983.
- [Koh-97] Chang Seop Koh, Hee Soo Yoon, Ki Woong Nam, et Hong Soon Choi, « Magnetic pole shape optimization of permanent magnet motor for reduction of cogging torque », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 33, n° 2, p. 1822-1827, mars 1997.
- [Kon-93] A. Kone, B. Nogarede, et M. Lajoie Mazenc, « Le dimensionnement des actionneurs électriques: un problème de programmation non linéaire », *Journal de Physique III*, vol. 3, n° 2, p. 285–301, 1993.
- [Lab-10] T. Labbe et B. Dehez, « Convexity-oriented mapping method for the topology optimization of electromagnetic devices composed of iron and coils », *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 46, n° 5, p. 1177–1185, 2010.
- [Lag-05] V. Lago, P. Lasgorceix, D. E. A. Lebehot, et J.P. Martin, « The Experimental Facilities at Laboratoire d’Aérothermique », in *AIP Conference Proceedings*, Bari (Italy), 2005, p. 1337-1340.
- [Lee-11] J. Lee, E. Dede, et T. Nomura, « Simultaneous Design Optimization of Permanent Magnet, Coils, and Ferromagnetic Material in Actuators », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. PP, n° 99, p. 1-1, 2011.
- [Lin-06] J. A. Linnell et A. D. Gallimore, « Internal plasma potential measurements of a Hall thruster using plasma lens focusing », *Physics of plasmas*, vol. 13, p. 103504, 2006.
- [Lon-11] B. W. Longmier, M. Ballenger, C. S. Olsen, J. P. Squire, et F. R. C. Díaz, « Performance studies of the VASIMR® VX-200 ».
- [Luk-04] M. Lukaniszyn, M. JagieLa, et R. Wrobel, « Optimization of permanent magnet shape for minimum cogging torque using a genetic algorithm », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 40, n° 2, p. 1228- 1231, mars 2004.
- [Mar-08] F. Marchandise, N. Cornu, F. Darnon, et D. Estublier, « PPS1350-G Qualification status 10500 h », *Journal of Technical Physics*, vol. 49, n° 3-4, p. 303–313, 2008.
- [Maz-07] S. Mazouffre, P. Echegut, et M. Dudeck, « A calibrated infrared imaging study on the steady state thermal behaviour of Hall effect thrusters », *Plasma Sources Science and Technology*, vol. 16, n° 1, p. 13-22, février 2007.

- [Mes-98] F. Messine, B. Nogarede, et J.-L. Lagouanelle, « Optimal design of electromechanical actuators: a new method based on global optimization », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 34, n° 1, p. 299-308, janv. 1998.
- [Mes-06] F. Messine, « L'Optimisation Globale par Intervalles: de l'Etude Théorique aux Applications », *Habilitation à diriger des recherches*, Institut National Polytechnique de Toulouse, Toulouse, France, 2006.
- [Mik-11] I. G. Mikellides, I. Katz, R. R. Hofer, D. M. Goebel, K. de Grys, et A. Mathers, « Magnetic shielding of the channel walls in a Hall plasma accelerator », *Physics of Plasmas*, vol. 18, n° 3, p. 033501, 2011.
- [Mes-98] F. Messine, B. Nogarede, et J.-L. Lagouanelle, « Optimal design of electromechanical actuators: a new method based on global optimization », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 34, n° 1, p. 299-308, janv. 1998.
- [Moh-97] O. A. Mohammed et G. F. Uler, « A hybrid technique for the optimal design of electromagnetic devices using direct search and genetic algorithms », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 33, n° 2, p. 1931-1934, mars 1997.
- [Mor-72] A.I. Morozov, Yu.V. Esipchuk, A.M. Kapulkin, V.A. Nevrovskii, et V.A. Smirnov, « Effect of the magnetic field on a closed-electron-drift accelerator », *Soviet Physics - Technical Physics*, vol. 17, n° 1, p. 38-45, 1972.
- [Nin-10] Ningning Chen, S. L. Ho, et W. N. Fu, « Optimization of Permanent Magnet Surface Shapes of Electric Motors for Minimization of Cogging Torque Using FEM », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 46, n° 6, p. 2478-2481, juin 2010.
- [Oka-06] Y. Okamoto et N. Takahashi, « Investigation of topology optimization of magnetic circuit using density method », *Electrical Engineering in Japan*, vol. 155, n° 2, p. 53-63, avr. 2006.
- [Ouy-06] Wen Ouyang, D. Zarko, et T. A. Lipo, « Permanent Magnet Machine Design Practice and Optimization », in *Conference Record of the 2006 IEEE Industry Applications Conference, 2006. 41st IAS Annual Meeting*, 2006, vol. 4, p. 1905-1911.
- [Par-09] S. Park, J. Yoo, et J. S. Choi, « Simultaneous Optimal Design of the Yoke and the Coil in the Perpendicular Magnetic Recording Head », *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 45, n° 10, p. 3668-3671, 2009.
- [Rac-01] Racca Giuseppe D, « Capability of solar electric propulsion for planetary missions », *Planetary and Space Science*, vol. 49, n° 14-15, p. 1437-1444, déc. 2001.
- [Ram-73] R. Ramarathnam, B. G. Desai, et V. Subba Rao, « A Comparative Study of Minimization Techniques for Optimization of Induction Motor Design », *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 92, n° 5, p. 1448-1454, sept. 1973.

- [Ryu-06] Jae Seop Ryu, Yingying Yao, Chang Seop Koh, et Young Jun Shin, « 3-D optimal shape design of pole piece in permanent magnet MRI using parameterized nonlinear design sensitivity analysis », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 42, n<sup>o</sup>. 4, p. 1351-1354, avr. 2006.
- [Smi-93] R. D. Smith, S. E. Yano, K. Armbruster, C. R. Roberts, D. A. Lichtin, et J. W. Beck, « Flight qualification of a 1.8 kW hydrazine arcjet system », *IEPC Paper*, p. 93-007, 1993.
- [Tsi-05] M. A. Tsili, A. G. Kladas, P. S. Georgilakis, A. T. Souflaris, et D. G. Pappas, « Geometry optimization of magnetic shunts in power transformers based on a particular hybrid finite-element boundary-element model and sensitivity analysis », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 41, n<sup>o</sup>. 5, p. 1776- 1779, mai 2005.
- [Val-06] D. Valentian, A. Bugrova, et A. Morozov, « Development Status of the SPT MK II Thruster », presented at the proc of 23th IEPC, Seattle, 1993.
- [Vil-09] R. Vilamot, C. Henaux, et B. Nogarede, « Using a direct field calculation method to solve magnetostatic design inverse problem », proceedings of Compumag 2009, Florianoplois
- [Wat-07] K. Watanabe, F. Campelo, et H. Igarashi, « Topology optimization based on immune algorithm and multigrid method », *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 43, n<sup>o</sup>. 4, p. 1637-1640, 2007.
- [Wei-06] P. J. Weicker et D. A. Lowther, « A sensitivity-driven parametric electromagnetic design environment », *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 42, n<sup>o</sup>. 4, p. 1199-1202, 2006.
- [Yok-00] Y. Yokose, V. Cingoski, et H. Yamashita, « Genetic algorithms with assistant chromosomes for inverse shape optimization of electromagnetic devices », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 36, n<sup>o</sup>. 4, p. 1052-1056, juill. 2000.
- [Yoo-00] J. Yoo et N. Kikuchi, « Topology optimization in magnetic fields using the homogenization design method », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48, p. 1463-1479, août 2000.
- [Yoo-04] J. Yoo, « Modified method of topology optimization in magnetic fields », *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 40, n<sup>o</sup>. 4, p. 1796-1802, 2004.
- [Yu-09a] D. R. Yu, J. Li, H. Liu, Z. X. Ning, et Y. Li, « Study on the Relation Between Discharge Voltage and Magnetic Field Topography in a Hall Thruster Discharge Channel », *Contributions to Plasma Physics*, vol. 49, n<sup>o</sup>. 6, p. 413-421, août 2009.
- [Yu-09b] Yu Daren, Li Jie, Li Hong, Li Yong, et Jiang Binhao, « Experimental Study on the Effects of Magnetic Field Configuration near the Channel Exit on the Plume Divergence of Hall Thrusters », *Plasma Science and Technology*, vol. 11, p. 714-720, déc. 2009.

- [Zio-08] M. Ziolkowski et S. R. Gratkowski, « Genetic Algorithm and Bezier Curves-Based Shape Optimization of Conducting Shields for Low-Frequency Magnetic Fields », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 44, n<sup>o</sup>. 6, p. 1086-1089, juin 2008.