



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du  
**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

**Délivré par :**

Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)

**Discipline ou spécialité :**

Micro-ondes, Électromagnétisme et Optoélectronique

---

**Présentée et soutenue par :**

Mme CAROLINE GIRARD

**le :** jeudi 18 décembre 2014

**Titre :**

HYBRIDATION DE METHODES NUMERIQUES POUR L'ETUDE DE LA  
SUSCEPTIBILITE ELECTROMAGNETIQUE DE CIRCUITS PLANAIRE

---

**Ecole doctorale :**

Génie Electrique, Electronique et Télécommunications (GEET)

**Unité de recherche :**

Laboratoire Plasma et conversion d'Energie (LAPLACE)

**Directeur(s) de Thèse :**

Mme NATHALIE RAVEU

M. STEPHANE LANTERI

**Rapporteurs :**

M. HERBERT DE GERSEM, PROFESSEUR, TECHNISCHE UNIVERSITAT DARMSTADT  
Mme ELODIE RICHALOT, PROFESSEUR, UNIVERSITE PARIS-EST MARNE-LA-VALLEE

**Membre(s) du jury :**

Mme ELODIE RICHALOT, PROFESSEUR, UNIVERSITE PARIS-EST MARNE-LA-VALLEE, Président

M. ERIC KERHERVE, INGENIEUR, DGA BAGNEUX, Membre

Mme NATHALIE RAVEU, PROFESSEUR, INP TOULOUSE, Membre

M. RONAN PERRUSSEL, CHARGE DE RECHERCHE, INP TOULOUSE, Membre

M. STEPHANE LANTERI, DIRECTEUR DE RECHERCHE, INRIA SOPHIA ANTIPOLIS, Membre

# Remerciements

Cette thèse constitue l'aboutissement de huit longues années de travail sans relâche depuis mon entrée en classes préparatoires en 2006. Je tiens à remercier en premier lieu les membres du jury qui ont accepté de rapporter sur mon travail et de participer à la soutenance.

Je remercie énormément la Direction Générale de l'Armement qui a accepté de financer en 2011 ce projet et sans qui cette thèse n'aurait pu exister. Ce projet a été porté par les deux laboratoires auxquels j'appartiens : le LAPLACE et l'INRIA, et ceci par l'intermédiaire de mes trois encadrants que sont Nathalie Raveu, Ronan Perrussel et Stéphane Lanteri. Je les remercie très chaleureusement de m'avoir accordé leur confiance sur cette mission et de m'en avoir donné les moyens. Je les remercie pour leur disponibilité permanente, leur gentillesse et leur patience à mon égard. J'ai mesuré pendant ces trois années l'excellence de la qualité de mon encadrement autant sur le plan professionnel que sur le plan humain. Je les remercie en outre pour m'avoir permis de naviguer entre deux laboratoires, entre deux milieux : celui de la physique et celui des mathématiques appliquées. Cette double facette de la thèse a représenté une opportunité formidable d'apprentissage de la connaissance du monde scientifique. Ainsi, ces trois années ont été extrêmement riches en échanges scientifiques mais également en échanges humains.

Je remercie tous les acteurs de la recherche à l'INRIA Sophia Antipolis Méditerranée notamment tous les membres de l'équipe NACHOS avec qui les discussions étaient toujours très fructueuses : Jonathan, Raphael, Fabien, Montserrat, Quentin, Marie, Clément, Ludovic, Nora, Babette, Nathalie, avec une mention spéciale à Claire avec qui j'ai été plus que ravie de partager le même bureau. Je remercie aussi les acteurs du service informatique que j'ai beaucoup sollicités : un remerciement tout particulier à Francis Montagnac qui m'a rendue experte dans la connexion à distance. Je remercie également tous les acteurs de la recherche au LAPLACE à Toulouse : Cécile pour avoir su composer avec ma situation administrative quelque peu singulière, Léa qui lui a succédé, Valérie, Carine, Cathy, Maurice Fadel mais aussi tous les chercheurs et contractuels ; mes collègues de bureau et de couloir : Aziz, Szymon, Amine, Thomas, Mounir, Raphael, Clément, Mustapha, Benedikt, Julien, Damien, Cédric, Pedro, Olivier C, tous les permanents de l'équipe GREM3 (Jean-François Rouchon, Carole Hénault, Eric Duhayon, Jean-François Llibre, Yvan Lefèvre, Frédéric Messine, François Pigache, Dominique Harribey), Luciana, Wu Li et Priscillia avec qui j'ai eu grand plaisir de partager le même bureau et tous les autres thésards du laboratoire que je ne peux tous citer. Un remerciement particulier à Anne-Laure pour ses nombreux conseils pertinents pour l'après-thèse, son écoute et sa bonne humeur. Merci à tous pour cette formidable ambiance de travail. Je remercie également le service informatique du LAPLACE : David et Jacques qui ont répondu à toutes mes demandes. Enfin,

je remercie tous les acteurs de l'ENSEEIH, notamment le département EN : Cathy, Danielle, Raymond, Hélène, Marie, Annie, Emmanuelle, Jean-René, Junwu.

Cette période demeurera incontestablement un tournant dans ma vie professionnelle mais également personnelle. Malgré les souffrances engendrées par un tel travail, je tiens à en souligner le caractère exceptionnel. Je remercie Ronan pour son encadrement sans faille, ses précieux conseils, son écoute et sa patience. Je remercie également Nathalie pour ses encouragements personnels permanents malgré parfois mon pessimisme prononcé. Je te remercie affectueusement de m'avoir écoutée longuement quand j'étais dans l'impasse et quand je n'arrivais plus à faire la part des choses entre ma vie professionnelle et ma vie privée. Je pense pouvoir dire que l'on peut perdre facilement la foi au cours d'une thèse si personne ne vient la motiver comme tu l'as fait. Je vous remercie profondément tous les deux, Ronan et Nathalie, d'avoir supporté mes petits coups de gueules multiples et d'avoir continué à me soutenir.

Je remercie toute ma famille qui m'a soutenue depuis les classes préparatoires, en particulier mes parents. Et Dieu sait que je vous ai mis à rude épreuve. Alors merci encore pour votre soutien inconditionnel dans ces moments où je ne me sentais pas bien et où je me posais des montagnes de questions, merci d'avoir été disponibles à toute heure du jour et de la nuit, de m'avoir remonté le moral quand il était extrêmement bas. Je mesure la chance de vous avoir. Je remercie mes deux frères David et Vincent et ma soeur Peggy pour leurs soutiens également, c'est formidable d'avoir une telle fratrie.

Enfin, je te remercie toi Olivier qui partages ma vie depuis quelques temps désormais, de me donner tant d'amour et de tendresse. Tu es toujours à l'écoute et tu m'aides à relativiser les choses. Tu as merveilleusement bouleversé ma vie pendant cette thèse et c'est ce bouleversement qui donne à une vie tout son sens.

# Sommaire

<b>Remerciements</b>	<b>2</b>
<b>Introduction</b>	<b>7</b>
0.1 Objectifs . . . . .	7
0.2 Mes contributions . . . . .	8
<b>1 Principes et propriétés des méthodes numériques</b>	<b>10</b>
1.1 Wave Concept Iterative Procedure (WCIP) . . . . .	10
1.1.1 Principes de la méthode . . . . .	10
1.1.2 Système résolu par la méthode . . . . .	15
1.1.3 Performances . . . . .	16
1.2 Transmission Line Matrix (TLM) method . . . . .	19
1.2.1 Principes de la méthode . . . . .	19
1.2.2 Système résolu . . . . .	20
1.2.3 Performances . . . . .	21
1.3 Finite Element Method (FEM) . . . . .	22
1.3.1 Principes de la méthode . . . . .	22
1.3.2 Système résolu . . . . .	24
1.3.3 Performances . . . . .	24
1.4 Hybridizable Discontinuous Galerkin (HDG) method . . . . .	25
1.4.1 Principes de la méthode . . . . .	25
1.4.2 Système résolu . . . . .	26
1.4.3 Performances . . . . .	27
1.5 Conclusions . . . . .	27
<b>2 Techniques d'hybridation 2D</b>	<b>28</b>
2.1 Formalisme général de l'hybridation . . . . .	28
2.2 Déclinaison de l'hybridation selon les méthodes . . . . .	30
2.2.1 FEM . . . . .	30
2.2.2 FDTLM . . . . .	34
2.2.3 HDG . . . . .	38
2.3 Validation numérique et ses enjeux . . . . .	42
2.3.1 Cas test du vide . . . . .	43

2.3.2	Cas test du ruban . . . . .	48
2.3.3	Diélectrique homogène avec permittivité relative $\epsilon_r = 5$ . . . . .	50
2.3.4	Ruban sur un substrat de permittivité relative $\epsilon_r=5$ . . . . .	53
2.3.5	Diélectrique inhomogène . . . . .	55
2.3.6	Ligne microruban imprimée sur un substrat inhomogène . . . . .	59
2.3.7	Comparaison des temps de calcul en 2D . . . . .	63
2.4	Conclusions . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Techniques d'hybridation 3D</b>	<b>65</b>
3.1	Formalisme général de l'hybridation . . . . .	66
3.2	Déclinaison de l'hybridation selon les méthodes . . . . .	66
3.2.1	WCIP-2D/FDTLM-3D . . . . .	66
3.2.2	WCIP-2D/HDG-3D . . . . .	73
3.3	Validation numérique dans le cas 3D . . . . .	74
3.3.1	Cas d'un mode se propageant dans un cube métallique rempli de vide . . . . .	75
3.3.2	Cas d'un mode se propageant dans un cube métallique rempli de diélectrique sans pertes . . . . .	77
3.3.3	Cas d'un mode se propageant dans un cube métallique rempli de diélectrique avec pertes . . . . .	80
3.3.4	Cas d'un mode se propageant sur une ligne microruban . . . . .	82
3.4	Conclusions . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Décomposition de domaines dans HDG</b>	<b>85</b>
4.1	Système dans le cas 3 domaines . . . . .	85
4.1.1	Théorie . . . . .	85
4.1.2	Ecriture de l'algorithme de résolution . . . . .	89
4.2	Algorithme dans le cas $N_d$ domaines . . . . .	90
4.3	Validation numérique . . . . .	91
4.4	Conclusions . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>95</b>
<b>6</b>	<b>Perspectives</b>	<b>96</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>97</b>
	<b>Liste de publications</b>	<b>101</b>
<b>A</b>	<b>Compléments sur les modes pour la WCIP 1D</b>	<b>102</b>
A.1	Mode TE . . . . .	102
A.2	Mode TM . . . . .	103

<b>B</b>	<b>Outils mathématiques pour les calculs numériques.</b>	<b>104</b>
B.1	Définition de l'erreur . . . . .	104
B.1.1	Définition continue . . . . .	104
B.1.2	Définition discrète . . . . .	104
B.2	Définition de l'ordre de convergence . . . . .	105
<b>C</b>	<b>Solutions de référence en 2D et 3D</b>	<b>107</b>
C.1	Références en 2D . . . . .	107
C.1.1	Cas du vide . . . . .	107
C.1.2	Cas du métal . . . . .	109
C.1.3	Références en 3D . . . . .	109
<b>D</b>	<b>Maillage éléments finis</b>	<b>114</b>
<b>E</b>	<b>Discrétisation locale en 2D</b>	<b>115</b>
<b>F</b>	<b>Cas TM en 2D : théorie et résultats</b>	<b>120</b>
F.1	FEM . . . . .	120
F.2	HDG . . . . .	121
F.3	Résultats numériques . . . . .	125
F.3.1	Vide . . . . .	125
F.3.2	Vide et ruban . . . . .	125
F.3.3	Dielectrique homogène . . . . .	126
F.3.4	Diélectrique homogène et ruban . . . . .	127
<b>G</b>	<b>Formules de Green</b>	<b>128</b>
G.1	Première formule de Green . . . . .	128
G.2	Généralisation . . . . .	128
<b>H</b>	<b>Second membre du système hybride en 3D</b>	<b>130</b>
	<b>Résumé/Abstract</b>	<b>132</b>

# Introduction

## 0.1 Objectifs

De multiples sources d'agression électromagnétique extérieures peuvent altérer le fonctionnement d'un dispositif électronique. Pour étudier ces éventuelles altérations, il s'agit de détecter les parties non immunisées contre ces agressions dans un circuit électronique : c'est l'étude de sa susceptibilité électromagnétique. L'anticipation des potentielles zones de faiblesse d'un circuit confronté à ces perturbations permettrait d'améliorer la conception de ce circuit. L'idée pour réaliser cette étude en susceptibilité est de mettre en place un outil de simulation rapide, précis et suffisamment flexible pour intégrer les dernières innovations technologiques. Les circuits sur lesquels s'est portée notre attention sont en technologie planaire, d'où la dénomination de circuit planaire. Cette technologie met en œuvre un substrat, qui correspond à une plaque de diélectrique, sur laquelle un motif est gravé sur une fine couche de métallisation (généralement du cuivre). Cette métallisation peut être située sur au moins l'une des faces externes du substrat. Il peut également y avoir plusieurs couches de métal et de substrat, cela correspond à un circuit dit multicouche (cf. figure 1).

Les méthodes numériques appliquées à l'électromagnétisme répondent au besoin de modélisation de ces circuits afin de calculer des champs électromagnétiques rayonnés ou induits. Ces méthodes peuvent être qualifiées de l'adjectif temporel ou fréquentiel, selon que l'on cherche à calculer une grandeur en fonction du temps ou de la fréquence. Dans ce travail, on s'intéressera à une méthode fréquentielle. Des travaux d'étude de circuits planaires ont déjà été effectués avec une méthode basée sur le concept d'onde (notée WCIP pour Wave Concept Iterative Procedure). Pour les circuits planaires, elle se révèle être l'une des méthodes qui utilise le plus petit nombre d'inconnues pour atteindre une précision donnée : ceci s'explique notamment par le fait que c'est une méthode surfacique. Son formalisme est issu de la méthode des moments avec des améliorations spécifiques pour tenir compte des problèmes de propagation d'onde et des géométries des circuits planaires. Néanmoins, la WCIP n'est pas adaptée à la prise en compte des diélectriques inhomogènes et des trous métallisés (ou vias) d'interconnexion.

L'hybridation avec des méthodes volumiques a alors été envisagée. En première approche, on s'est focalisé sur deux méthodes volumiques particulières que sont les méthodes FDTLM (Frequency Domain Transmission Line Matrix method) et HDG (Hybridizable Discontinuous Galerkin method). Des précisions sur ces méthodes sont données dans le chapitre 1. L'objectif est de généraliser ces deux cas particuliers à n'importe quelle méthode volumique de sorte à en faire une méthode hybride « modulable ». Le choix de la FDTLM (intrinsèquement proche de la

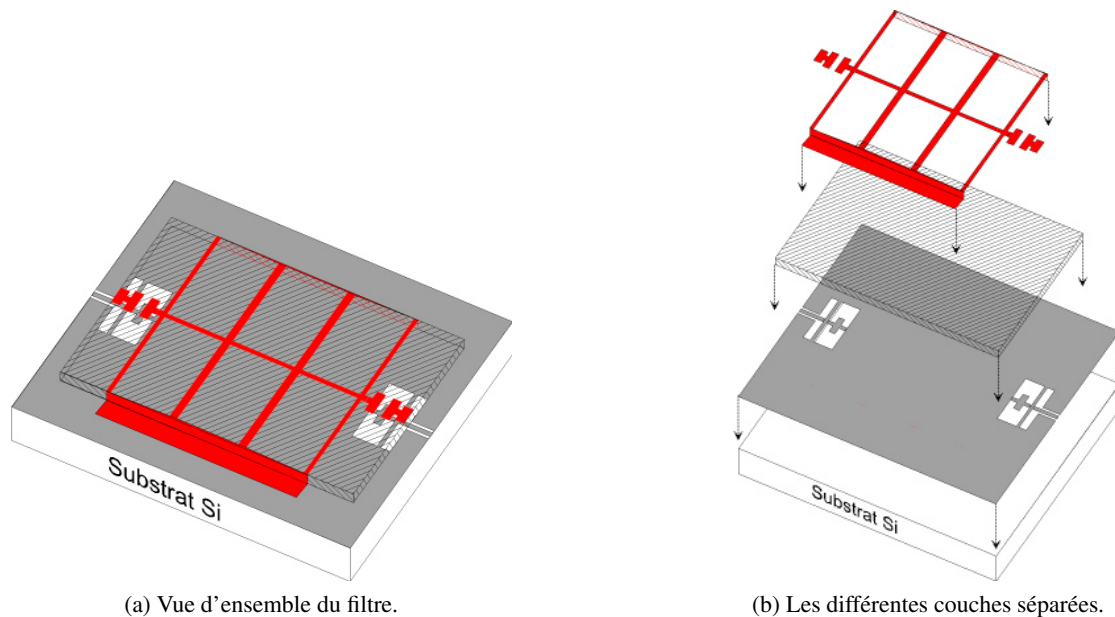


FIGURE 1 – Exemple : filtre passe-bande multicouche.

WCIP) a découlé de travaux de couplage déjà réalisés au sein du GRE-LAPLACE. La méthode HDG qui est une technique d'éléments finis de type Galerkin Discontinu apporte de son côté une flexibilité maximale dans la discrétisation pour les problèmes en régime harmonique. Cette flexibilité est primordiale pour optimiser le rapport précision-coût de calcul dans les problèmes non homogènes. En outre, la collaboration avec l'équipe NACHOS de l'INRIA Sophia Antipolis Méditerranée a contribué au choix de l'hybridation avec HDG.

Dans ce travail de thèse, la présentation des différentes méthodes numériques est évoquée dans le chapitre 1. Dans le chapitre 2, le formalisme de l'hybridation est exposé ainsi que sa déclinaison selon la méthode considérée. Se trouve également dans ce chapitre l'implémentation du couplage de la WCIP avec la FDTLM et la méthode HDG en 2D afin de valider les bases de la démarche. Dans le chapitre 3, un travail identique en 3D a été mené. Cependant, des limitations dans le raffinement de maillage, faisant suite à des problèmes de mémoire, ont conduit à modifier la méthode développée en y intégrant une technique de décomposition de domaines. Ceci constitue l'essence du chapitre 4.

## 0.2 Mes contributions

J'ai contribué à fournir plus d'informations théoriques sur les propriétés de la méthode WCIP, notamment en mettant en place des tests numériques simples visant à mettre un coup de projecteur sur les caractéristiques propres à la méthode. Ainsi, par la recherche de solutions théoriques sur ces cas tests simples, la convergence a été étudiée. Des modifications nécessaires dans l'implémentation d'un opérateur particulier de la méthode ont ainsi pu être révélées.



Le formalisme de l'hybridation de la WCIP avec une méthode volumique ([1]) est innovante et fournit un outil numérique regroupant les avantages des différentes techniques. Les résultats de sa mise en œuvre en 2D et 3D ([2], [3],[4]) ont mis en évidence les propriétés de la méthode hybride ainsi créée.

Enfin l'intégration de la décomposition de domaines ([5]) à la méthode hybride favorise le transfert de connaissances du domaine des mathématiques appliquées vers celui de l'électronique hyperfréquence. L'originalité de ce travail est d'avoir pu exploiter différents savoir-faire très spécifiques pour les agencer de sorte à constituer une méthode numérique prometteuse.

# Chapitre 1

## Principes et propriétés des méthodes numériques

On cherche à résoudre les équations de Maxwell dans le domaine fréquentiel. Plus particulièrement, on s'intéresse à l'équation de Helmholtz scalaire accompagnée de ses conditions aux limites

$$\begin{cases} \Delta u + k_0^2 \epsilon_r \mu_r u = 0 \\ \text{Conditions aux limites} \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $u$  est la grandeur scalaire recherchée (il s'agit d'une composante du champ électrique ou du champ magnétique selon le type de mode considéré) et  $k_0$  est le nombre d'onde dans le vide. Les modes sont les solutions de (1.1). Les sources sont dans les conditions aux limites. Ces modes prennent en compte les conditions aux limites latérales autrement dit les modes sont les solutions du problème exposé sur la figure 1.1. On présente dans ce chapitre les quatre méthodes que l'on va utiliser pour résoudre cette équation. L'une d'entre elles est une méthode surfacique, elle est appelée WCIP (cf. la section 1.1), tandis que les trois autres : la méthode FDTLM (voir la section 1.2), la méthode FEM (voir la section 1.3) et la méthode HDG (voir la section 1.4) sont volumiques.

### 1.1 Wave Concept Iterative Procedure (WCIP)

#### 1.1.1 Principes de la méthode

La méthode WCIP (pour Wave Concept Iterative Procedure) a été introduite en 1995 par le Professeur Henri Baudrand [6]. Il s'agit d'une méthode de type méthode des moments adaptée à l'étude de circuits planaires microondes [7]. Des études ont ainsi été menées sur des antennes couplées [8] ou montées sur des plans de masse [9], sur des guides coplanaires [10] et des circuits multicouches [11], mais aussi des circuits à éléments localisés [12], des problèmes de diffraction [13], à la fois en coordonnées cartésiennes ou cylindriques [14], sur des structures BICMOS [15], des surfaces sélectives en fréquences [16], des structures périodiques [17], légèrement inhomogènes [18] ou avec des vias [19]. Afin d'améliorer la méthode, différentes techniques ont été envisagées : une technique de connexion spectrale [20], une étude sur l'impédance de référence

et la prise en compte de la condition métallique [21], l'hybridation avec d'autres méthodes dont la TLM en 2008 [22, 23], et du préconditionnement en 2010 [24].

Par analogie entre les grandeurs électromagnétiques et les grandeurs de type circuit (schémas équivalents [25]), des ondes diffractées,  $\mathbf{A}$ , et incidentes,  $\mathbf{B}$ , sont définies sur une (ou plusieurs) interface(s) du circuit. Dans le cas où l'on se ramène à une surface dénommée  $\Sigma$ , cette dernière est l'interface entre deux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . La configuration est représentée sur la figure 1.1 où nous ne montrons que deux domaines par souci de simplicité.

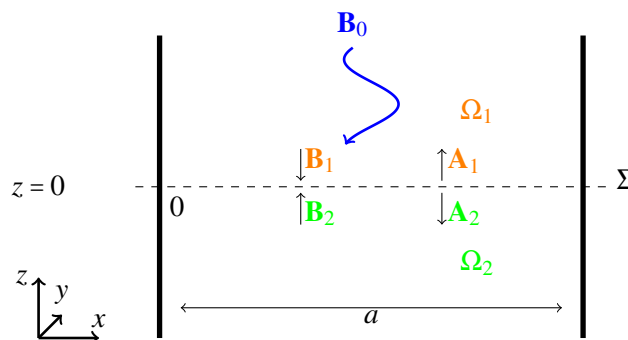


FIGURE 1.1 – Configuration simple 2D pour la WCIP.

Les ondes  $(\mathbf{A}_i)_{(i=1,2)}$  et  $(\mathbf{B}_i)_{(i=1,2)}$  sont définies par :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_i = \frac{\mathbf{E}_{Ti} + Z_0 \mathbf{J}_{Ti}}{2\sqrt{Z_0}}, \\ \mathbf{B}_i = \frac{\mathbf{E}_{Ti} - Z_0 \mathbf{J}_{Ti}}{2\sqrt{Z_0}}, \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $Z_0$  est l'impédance de référence et  $\mathbf{E}_{Ti}$  et  $\mathbf{J}_{Ti}$  sont les champ et courant électriques tangentiels sur  $\Sigma$  vus à la limite du milieu  $i$ . Le plus généralement l'impédance de référence est égale à l'impédance du vide, mais elle peut prendre d'autres valeurs comme le montre l'étude de [21]. D'ailleurs, nous serons amenés dans ce travail à tester cette valeur d'impédance. Les ondes  $\mathbf{A}_i$  et  $\mathbf{B}_i$  appartiennent donc à  $\Sigma$  et elles sont la combinaison linéaire de ces champ et courant électriques tangentiels. La WCIP s'inspire d'une méthode modale c'est-à-dire que les grandeurs électromagnétiques peuvent être exprimées dans une base modale. Elle nécessite donc d'avoir une structure dont on puisse déterminer "analytiquement" les modes, à savoir les  $f_n$  solutions de l'équation (1.1) [25]. Par conséquent, la WCIP ne peut être utilisée que si les conditions aux limites sont des murs électriques, périodiques ou magnétiques en  $x=0$  et  $x=a$  sur la figure 1.1. Dans tout le cadre de la thèse, nous traiterons des cas où les circuits planaires sont enfermés entre des murs électriques. Les modes sur lesquels est faite la décomposition sont ceux du guide de même section que le plan  $(xOy)$  de la figure 1.1. Ils sont deux types [26] : les modes TE et les modes TM. Les modes TE (resp. TM) sont définis comme les solutions telles que la composante du champ électrique (resp. magnétique) selon la direction  $z$  est nulle  $E_z=0$  (resp.  $H_z=0$ ). Les composantes non nulles en 1D pour les modes TE et TM sont précisées dans l'annexe A.

L'onde  $\mathbf{B}_0$  est la source, elle se propage dans le guide depuis le milieu 1. Au niveau de l'interface  $\Sigma$  se trouve une surface de discontinuité, l'onde  $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2)^T$  incidente sur  $\Sigma$  est

alors diffractée en les ondes  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$  dans les domaines respectifs 1 et 2. Pour la discrétisation, la surface  $\Sigma$  est découpée de manière régulière en segments en 2D, en rectangles en 3D, appelés « pixels ». On approche alors  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$  et  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$  par des champs de vecteur constants par pixel, qui s'écrivent pour  $i \in \{1, 2\}$  sous la forme

$$\mathbf{A}_{i,h} = \sum_{p=1}^N A_{i,p} \mathbf{H}_p, \quad \mathbf{B}_{i,h} = \sum_{p=1}^N B_{i,p} \mathbf{H}_p \quad (1.3)$$

où  $\mathbf{A}_{i,h}$  est une approximation de  $\mathbf{A}_i$ ;  $N$  correspond au nombre total de pixels : si l'on est en 3D (la WCIP est 2D),  $N = N_x N_y$  où  $N_x$  est la discrétisation selon  $x$  et  $N_y$  la discrétisation selon  $y$ ;  $\mathbf{H}_p$  correspond à la fonction indicatrice pondérée par un facteur  $h_p$

$$\mathbf{H}_p = h_p \mathbf{1}_{[x_{p-1}; x_p]} \mathbf{y}, \quad (1.4)$$

où  $h_p$  est calculé de manière à ce que les fonctions  $\mathbf{H}_p$  vérifient :

$$\langle \mathbf{H}_p | \mathbf{H}_q \rangle = \delta_{p,q}, \quad (1.5)$$

où  $\langle f | g \rangle$  désigne

$$\int_{\Sigma} \bar{f} g ds, \quad (1.6)$$

produit scalaire  $L^2$  pour les fonctions définies sur  $\Sigma$ . Si les coefficients  $A_{i,p}$  et  $B_{i,p}$  sont regroupés

dans des vecteurs  $A_i$  et  $B_i$  définis par :  $A_i = \begin{pmatrix} A_{i,1} \\ A_{i,2} \\ \dots \\ A_{i,N-1} \\ A_{i,N} \end{pmatrix}$  et  $B_i = \begin{pmatrix} B_{i,1} \\ B_{i,2} \\ \dots \\ B_{i,N-1} \\ B_{i,N} \end{pmatrix}$ , vérifier les conditions de

transmission pour  $(\mathbf{A}_{i,h})_{i=1,2}$  et  $(\mathbf{B}_{i,h})_{i=1,2}$  conduit à la relation matricielle :

$$\begin{cases} A_1 = S_{11} B_1 + S_{12} B_2, \\ A_2 = S_{12} B_1 + S_{11} B_2, \end{cases} \quad (1.7)$$

avec  $(S_{11})_{p,p}$  qui vaut -1 sur un pixel métallique  $p$  et 0 sur un pixel diélectrique  $p$ . Le coefficient  $(S_{12})_{p,p}$  vaut 1 sur un pixel diélectrique et 0 sur un pixel métallique. En l'absence de métal sur la surface  $\Sigma$ ,  $S_{11}$  est la matrice nulle et  $S_{12}$  est la matrice identité.

On doit aussi traduire la réaction des milieux situés de part et d'autre de l'interface  $\Sigma$  (deux demi-espaces). Cette réaction est traduite par les opérateurs  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, N_d$  où  $N_d$  est le nombre de domaines. La relation entre les ondes dans un domaine  $i$  est ainsi donnée par :

$$\mathbf{B}_i = \Gamma_i \mathbf{A}_i. \quad (1.8)$$

On dispose d'une connaissance "analytique" des modes propres  $\mathbf{f}_n$  des opérateurs  $\Gamma_i$ . D'après [25], soit  $\hat{L}$  un opérateur défini sur une base décrite par les fonctions  $\mathbf{f}_n$  et soit  $L_n$  la valeur propre associée à cette fonction  $\mathbf{f}_n$

$$\hat{L} \mathbf{f}_n = L_n \mathbf{f}_n, \quad (1.9)$$

on peut écrire l'opérateur  $\hat{L}$  sous la forme

$$\hat{L} = \sum_n |\mathbf{f}_n\rangle L_n \langle \mathbf{f}_n|. \quad (1.10)$$

**Remarque concernant une notation :**

C'est Dirac qui a introduit la notation de (1.10) appelée notation BRA-KET. On peut écrire l'équivalence :

$$|\mathbf{f}_n\rangle = \mathbf{f}_n. \quad (1.11)$$

Un projecteur sur une fonction  $f$  normée s'écrit alors :

$$\hat{P}_f = |f\rangle\langle f|. \quad (1.12)$$

On utilise souvent le projecteur sur des fonctions  $\mathbf{f}_n$  d'une base orthonormée  $(\mathbf{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Ce projecteur est défini par :

$$\hat{P}_n = |\mathbf{f}_n\rangle\langle \mathbf{f}_n|. \quad (1.13)$$

Soit une fonction  $f$  se décomposant sur la base  $(\mathbf{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,

$$f = \sum_m a_m |\mathbf{f}_m\rangle,$$

alors la projection de cette fonction s'écrit :

$$\hat{P}_n f = |\mathbf{f}_n\rangle\langle \mathbf{f}_n|f\rangle = \sum_m |\mathbf{f}_n\rangle\langle \mathbf{f}_n|\mathbf{f}_m\rangle a_m. \quad (1.14)$$

Comme la base est orthonormée,  $\langle \mathbf{f}_n|\mathbf{f}_m\rangle = \delta_{nm}$ , on en déduit :

$$\hat{P}_n f = a_n |\mathbf{f}_n\rangle. \quad (1.15)$$

Si  $(\mathbf{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base des vecteurs propres d'un opérateur  $\hat{L}$  alors la relation suivante est vérifiée avec  $L_n$  la valeur propre associée au vecteur propre  $\mathbf{f}_n$  :

$$\hat{L}\mathbf{f}_n = L_n |\mathbf{f}_n\rangle. \quad (1.16)$$

L'opérateur  $\hat{L}$  peut alors s'écrire comme une série de projecteurs sur les vecteurs propres associés tel que cela est présenté en (1.10).

Ainsi, l'expression de l'opérateur de diffraction  $\Gamma_i$  est donnée par :

$$\begin{cases} \Gamma_i = \sum_{\alpha \in \{\text{TE}, \text{TM}\}} \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mathbf{f}_n^\alpha\rangle \Gamma_{i,n}^\alpha \langle \mathbf{f}_n^\alpha|, \\ \Gamma_{i,n}^\alpha = \frac{1 - Z_0 Y_{i,n}^\alpha}{1 + Z_0 Y_{i,n}^\alpha}, \end{cases} \quad (1.17)$$

où les admittances (dans le cas infini ou ouvert) sont décrites par :

$$\begin{cases} Y_{i,n}^{\text{TE}} = \frac{p_{i,n}}{j\omega\mu_0}, \\ Y_{i,n}^{\text{TM}} = \frac{j\omega\epsilon_0\epsilon_{r,i}}{p_{i,n}}, \end{cases} \quad (1.18)$$

avec  $p_{i,n}$  la constante de propagation dans le milieu  $i$  de permittivité  $\epsilon_{r,i}$  où :

$$p_{i,k} = \sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 - k_0^2 \epsilon_{r,i}}. \quad (1.19)$$

Pour décrire l'action de l'opérateur  $\Gamma_i$  sur les fonctions  $\mathbf{f}_n^\alpha$  discrétisées, on se restreint à considérer un opérateur approché :

$$\Gamma_{i,N_{\text{modes}}} = \sum_{n \leq N_{\text{modes}}} |\mathbf{f}_n^\alpha\rangle \Gamma_{i,n}^\alpha \langle \mathbf{f}_n^\alpha|, \quad (1.20)$$

où  $N_{\text{modes}}$  est le nombre de modes considérés pour la troncature. Au niveau discret, on devrait obtenir :

$$\mathbf{B}_{i,h} = \Gamma_{i,N_{\text{modes}}} \mathbf{A}_{i,h}, \quad (1.21)$$

ou encore en utilisant le fait que les fonctions  $(\mathbf{H}_p)_{1 \leq p \leq N}$  sont orthonormales pour  $\langle | \rangle$  :

$$B_{i,p} = \sum_{\alpha \in \{\text{TE}, \text{TM}\}} \sum_{n \leq N_{\text{modes}}} \sum_{q \leq N} \langle \mathbf{H}_p | \mathbf{f}_n^\alpha \rangle \Gamma_{i,n}^\alpha \langle \mathbf{f}_n^\alpha | \mathbf{H}_q \rangle A_{i,q}. \quad (1.22)$$

En approchant les termes  $\langle \mathbf{H}_p | \mathbf{f}_n^\alpha \rangle$  et  $\langle \mathbf{f}_n^\alpha | \mathbf{H}_q \rangle$  par une formule de quadrature prenant la valeur au centre de chaque pixel, on constate alors que le passage des coordonnées « spatiales » (développement sur les fonctions  $\mathbf{H}_p$ ) aux coordonnées « modales » (développement sur les fonctions  $\mathbf{f}_p^\alpha$ ) coïncide avec une transformée en mode discrète, opération pour laquelle des algorithmes rapides sont connus. En effet, d'après l'annexe A,

$$\mathbf{f}_n^{\text{TM}} = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \mathbf{y}, \quad \forall n \in \{1, 2, 3, \dots\}, \quad (1.23)$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_n^{\text{TM}} &= \sqrt{\frac{2}{a}} \left( \frac{e^{j\frac{2\pi nx}{2a}} + e^{j\frac{-2\pi nx}{2a}}}{2} \right) \mathbf{y} \\ &= (g_n(x) + g_{-n}(x)) \mathbf{y} \end{aligned} \quad (1.24)$$

en posant

$$g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{j\frac{2\pi nx}{2a}}. \quad (1.25)$$

Cela implique de dupliquer le domaine en passant d'une définition sur  $[0,a]$  à  $[0,2a]$  en prenant en compte les symétries de  $f_n$ . Si l'on cherche le passage spatial-modal en 1D, cela revient à calculer les termes  $\langle g_n, A_{i,h} \rangle$  pour tout  $n$ . On aura :

$$\langle g_n, A_{i,h} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_0^{2a} e^{-j\frac{2\pi nx}{2a}} A_{i,h}(x) dx \quad (1.26)$$

Après discrétisation de  $\Sigma$ , il vient :

$$\langle g_n, A_{i,h} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2a}} \sum_{p=1}^{2N} \int_{x_{p-1}}^{x_p} e^{-j \frac{\pi n x}{a}} A_{i,h}(x) dx. \quad (1.27)$$

L'application d'une formule de quadrature entraîne :

$$\langle g_n, A_{i,h} \rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2a}} \sum_{p=1}^{2N} e^{-j \frac{\pi n x_{p-1/2}}{a}} A_{i,h}(x_{p-1/2}) \int_{x_{p-1}}^{x_p} dx \quad (1.28)$$

avec  $A_{i,h}(x_{p-1/2}) = A_{i,p} h_p$ .

$$\begin{aligned} \langle g_n, A_{i,h} \rangle &\approx \frac{1}{\sqrt{2a}} \sum_{p=1}^{2N} e^{-j \frac{\pi n (p-1/2) a / N}{a}} A_{i,h}(x_{p-1/2}) \frac{a}{N} \\ &\approx \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2N}} \sum_{p=1}^{2N} e^{-j \frac{\pi n}{N} (p-1/2)} A_{i,h}(x_{p-1/2}) \\ &\approx \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2N}} e^{-j \frac{\pi n}{2N}} \sum_{p=1}^{2N} e^{-j \frac{\pi n}{N} (p-1)} A_{i,h}(x_{p-1/2}) \end{aligned} \quad (1.29)$$

où la somme (en rouge) peut se calculer en utilisant un algorithme de transformée de Fourier rapide.

### 1.1.2 Système résolu par la méthode

Si on note FMT (pour Fast Modal Transform) l'opérateur permettant de passer des coordonnées « spatiales » aux coordonnées « modales » (son inverse se notant  $\text{FMT}^{-1}$ ), appliquer la FMT correspond alors à effectuer un changement de base et on peut écrire :

$$\begin{cases} B_1 = \text{FMT}^{-1} \Gamma_1 \text{FMT} A_1 + B_0, \\ B_2 = \text{FMT}^{-1} \Gamma_2 \text{FMT} A_2, \end{cases} \quad (1.30)$$

où  $\Gamma_i$  est la matrice diagonale composée des coefficients modaux de diffraction  $\Gamma_{i,n}^\alpha$ , et  $B_0$  représente les coordonnées de l'onde source décrite dans la base spatiale. On rappelle que l'on a aussi :

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

En conséquence, dans le cas où l'on a deux domaines, le système à résoudre est donné par :

$$\left( \text{I}_d - \begin{pmatrix} S_1^W & 0 \\ 0 & S_2^W \end{pmatrix} S \right) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

où  $I_d$  est la matrice identité,  $(S_i^W)_{i=1,2}$  l'opérateur associé à la WCIP tel que :

$$S_i^W = FMT^{-1}\Gamma_i FMT. \quad (1.33)$$

Historiquement la WCIP consistait à résoudre (1.32) en utilisant une itération de Richardson, c'est-à-dire en appliquant l'algorithme itératif suivant

$$\begin{pmatrix} B_1^{(n+1)} \\ B_2^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1^W & 0 \\ 0 & S_2^W \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} B_1^{(n)} \\ B_2^{(n)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

jusqu'à convergence de l'itéré  $B_i^{(n)}$ . Désormais, on résout le système (1.32) par des méthodes itératives basées sur des projections sur des sous-espaces de Krylov. On peut citer parmi ces dernières le GMRES ou le BICGSTAB.

### 1.1.3 Performances

Dans cette partie, il est intéressant d'étudier la convergence de la méthode et plus précisément son ordre de convergence, tel qu'il est défini dans l'annexe B.2. La WCIP s'apparente à une méthode d'ordre 0 car on décompose les ondes sur des fonctions constantes par élément du maillage. D'après les solutions analytiques en 2D (présentées dans l'annexe C) des cas tests présentés sur la figure 1.2, on peut évaluer certaines propriétés de la WCIP (la WCIP est alors 1D si le problème est 2D). Sur cette figure, la distance entre les plaques  $a$  et la hauteur  $H$  valent 1,27 cm, la fréquence est de 16 GHz et le maillage est de  $N = 256$  segments. Les figures 1.3 et

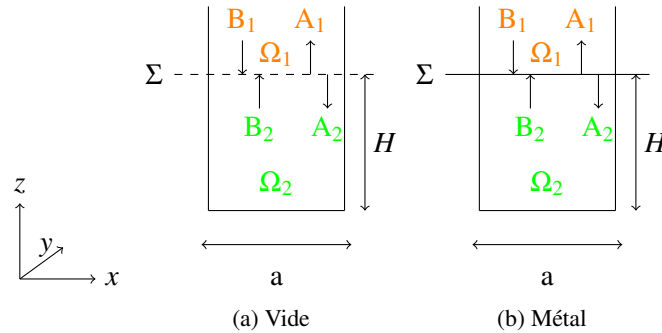


FIGURE 1.2 – Cas tests analytiques et leurs paramètres.

1.4 présentent le tracé de composantes du champ E avec des modes TM et respectivement TE en incidence (au nombre de 9) dans le cas du vide (cas (a) de la figure 1.2).

La valeur de l'erreur de discrétisation correspond à l'erreur machine car elle est de l'ordre de  $10^{-15}$ . Le même travail est effectué dans le cas du métal (cas (b) de la figure 1.2). On obtient alors une erreur de l'ordre de  $10^{-18}$ , autrement dit l'erreur machine. Les courants sont présentés sur les figures 1.5 et 1.6.

On se place désormais dans le cas où l'on met une ligne microruban sur  $\Sigma$ . Dans ce cas là, on ne possède pas de solution analytique. Par conséquent, la référence choisie est obtenue en



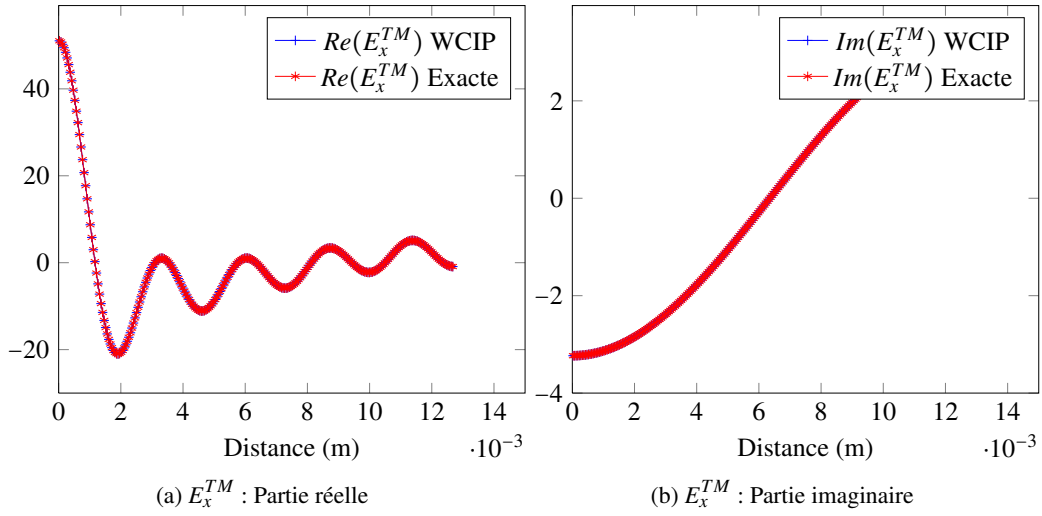


FIGURE 1.3 – Insertion de 9 modes et observation du champ dans le cas TM

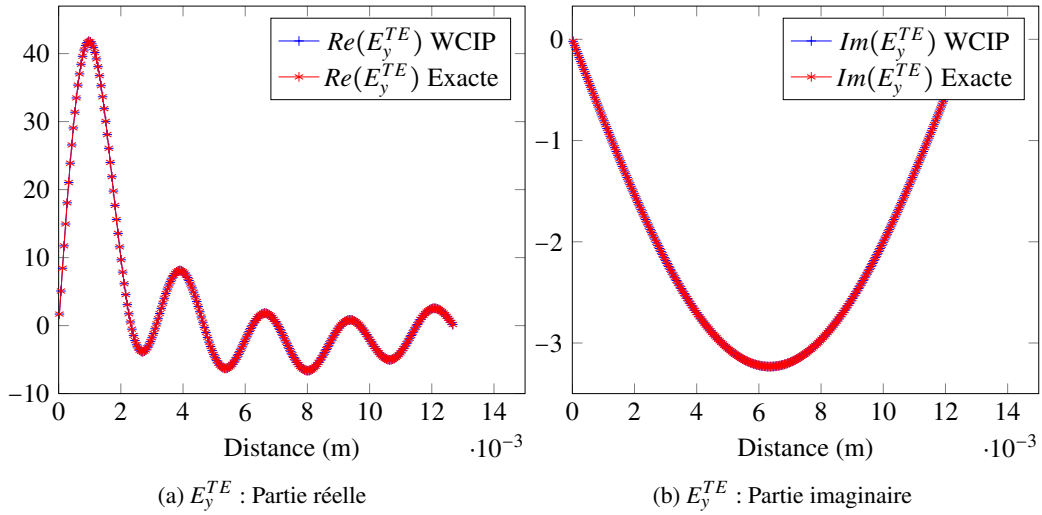


FIGURE 1.4 – Insertion de 9 modes et observation du champ dans le cas TE

maillant à  $N = 2^{15}$  la WCIP seule. Considérant cette solution comme proche de la solution analytique, nous pouvons tracer l'erreur de discrétisation relative en champ électrique, magnétique et en courant dans le cas TE (cf. figure 1.7). On montre ainsi numériquement que les champs électromagnétiques ont un ordre de convergence de 1 dans ce cas, alors que le courant électrique a un ordre de convergence de 0,5.

L'un des intérêts majeurs de la WCIP, en particulier, est la possibilité de traiter la condition de fermeture qui est l'infini. En effet, le vide étant homogène, la WCIP traite de manière exacte cette condition de radiation avec l'opérateur de diffraction modal. Ceci est un avantage

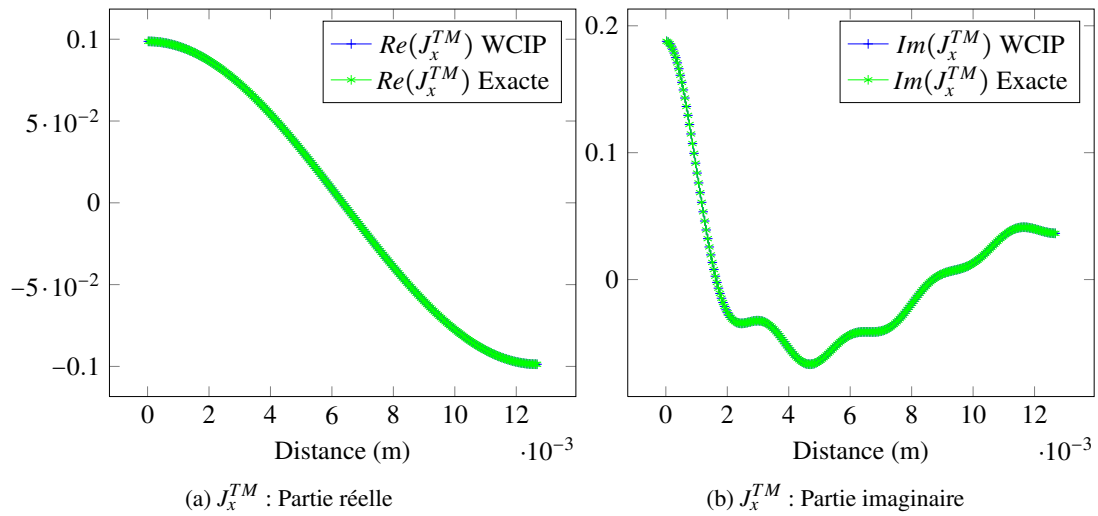


FIGURE 1.5 – Insertion de 9 modes et observation du courant dans le cas TM.

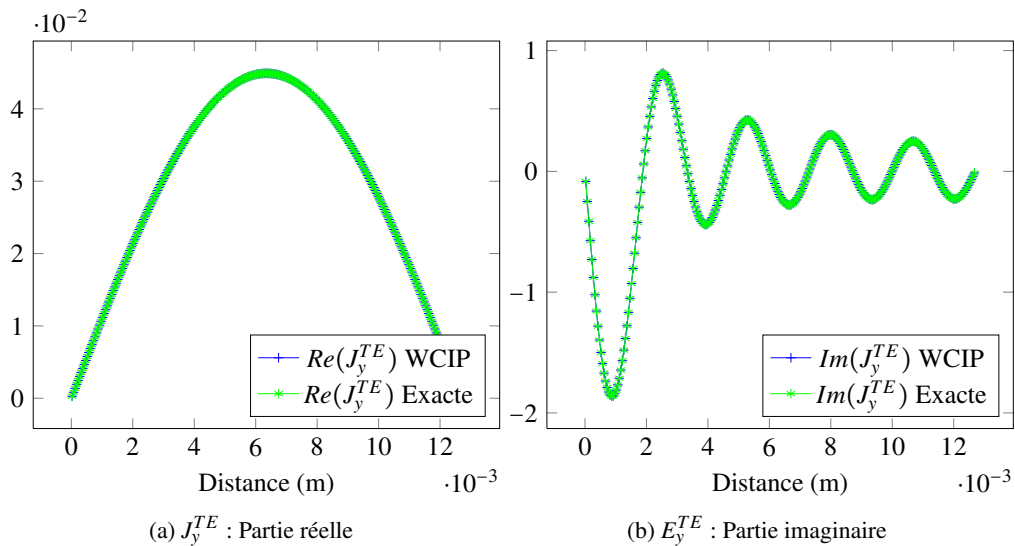


FIGURE 1.6 – Insertion de 9 modes et observation du courant dans le cas TE.

important par rapport aux conditions de Silver Muller ou aux PML (Perfect Matched Layers) qui introduisent une approximation. L'autre avantage est inhérent aux méthodes surfaciques par rapport aux méthodes volumiques : en ne maillant qu'en surface et non en volume, le coût de calcul est de fait réduit. En outre, le gain de la WCIP provient du fait que l'on ne construit pas la matrice du système, on ne la stocke pas en mémoire, on construit le produit matrice-vecteur à la volée. L'inconvénient de la méthode est qu'elle est limitée dans le type de structure qu'elle peut traiter du fait de la nécessité de connaître l'opérateur modal pour la configuration étudiée. Or, dans les cas où le substrat est inhomogène selon un plan ( $xOy$ ) (cf. figure 1.8), cet opérateur

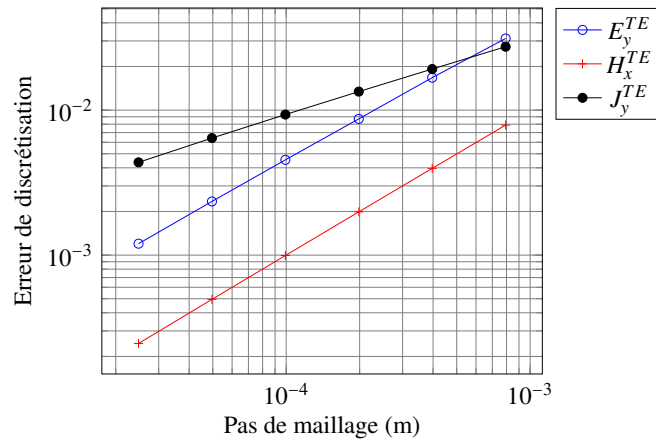


FIGURE 1.7 – Erreur de convergence en norme  $L^2$  pour un mode en excitation dans le cas TE.

n'est pas connu et on ne peut donc pas traiter ce cas avec la WCIP.

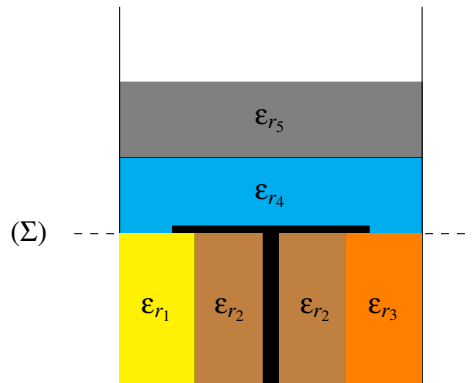


FIGURE 1.8 – Inhomogénéité diélectrique et trou d'interconnexion métallique.

Devant ces limitations, un couplage avec des méthodes volumiques particulières a été envisagé.

## 1.2 Transmission Line Matrix (TLM) method

### 1.2.1 Principes de la méthode

La TLM (Transmission Line Matrix method) est une méthode qui permet de simuler des problèmes de diffusion et de propagation des ondes (acoustique ou électromagnétique). Elle est basée sur le principe de Huygens. En effet, un front d'onde est modélisé comme de multiples sources secondaires, qui émettent, à leur tour, une onde sphérique de même amplitude et de même phase, et qui avancent dans la direction du mouvement de l'onde.

L'ensemble de la structure est constitué de lignes de transmission connectées entre elles et, sur ces lignes, une onde électromagnétique se propage. A l'origine de la méthode, on décrivait

cette ligne en courant et tension et on exprimait des relations entre les tensions incidentes et réfléchies au niveau du réseau de lignes ([27] et [28]). Par la suite, avec le principe d'équivalence entre les champs électromagnétiques et les grandeurs électriques (tensions et courants), la méthode s'est affranchie des représentations avec des circuits et elle repose désormais sur la discrétisation des équations de Maxwell. La TLM a été introduite en 2D en 1971 par P. B. Johns et R. L. Beurle [29], pour des problèmes temporels. Elle est introduite en 3D par P. B. Johns en 1987 [30]. Il introduit alors le nœud symétrique condensé qui remplace le nœud étendu [31], [32]. Le nœud est l'appellation donnée au point de connection entre les lignes (cf. figure 1.9). La structure est donc maillée par un ensemble de nœuds. Avec l'introduction du nœud condensé, on ne représente plus la structure par des circuits mais l'on ne travaille que sur les équations de Maxwell. H. Jin et R. Vahldieck [33] ont également montré que la TLM est un schéma de type différences finies, bien qu'historiquement on ait cherché à opposer le principe d'Huygens aux équations de Maxwell. La TLM nécessite un maillage parallélépipédique du volume où elle est définie. Elle est directement compatible avec les ondes de la WCIP, ce qui explique qu'historiquement, ce fut la première méthode à être hybridée avec la WCIP. L'hybridation entre la TLM et la WCIP est ainsi présentée au chapitre 2.

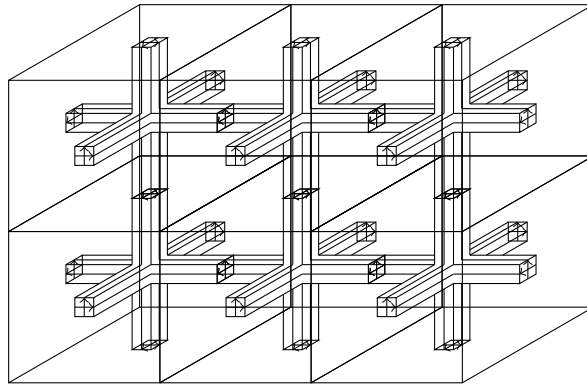


FIGURE 1.9 – Maillage FDTLM.

Les points de discrétisation se présentent donc sous la forme de la figure 1.10.

### 1.2.2 Système résolu

Pour traduire la propagation des ondes, il faut traduire la diffraction des ondes sur le maillage. Pour ce faire, on exprime les relations entre les ondes incidentes  $V^i$  et les ondes réfléchies  $V^r$  sur l'ensemble des nœuds. Ceci fait intervenir une matrice  $S^{FDTLM}$  de diffraction et une matrice de connexion  $C^{FDTLM}$  qui sont définies sur l'ensemble des nœuds et elles vérifient

$$V^r = S^{FDTLM} V^i \quad (1.35)$$

$$V^i = C^{FDTLM} V^r. \quad (1.36)$$

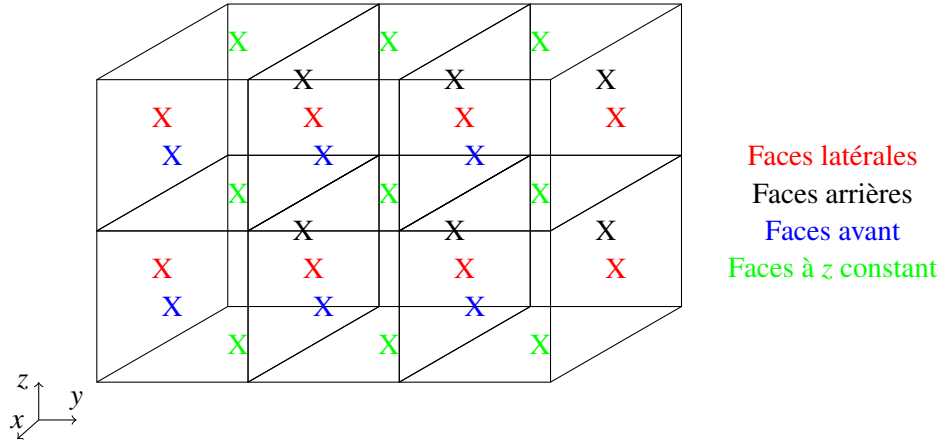


FIGURE 1.10 – Discrétisation TLM.

En conséquence, dans le cas où l'on a deux domaines, le système résolu par la méthode est

$$\left( \mathbf{I}_d - \begin{pmatrix} S_1^{FDTLM} & \\ & S_2^{FDTLM} \end{pmatrix} C^{FDTLM} \right) \begin{pmatrix} V^{r,1} \\ V^{r,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^{r,0} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.37)$$

où  $\mathbf{I}_d$  est la matrice identité,  $(V^{r,i})_{i=1,2}$  les ondes réfléchies dans chacun des domaines,  $V^{r,0}$  la source et  $(S_i^{FDTLM})_{i=1,2}$  l'opérateur associé à la FDTLM tel que

$$S_i^{FDTLM} = \begin{pmatrix} S_e^1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & S_e^2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & S_e^{N_n} \end{pmatrix} V^i, \quad (1.38)$$

où  $S_e$  est une matrice élémentaire de diffraction au niveau d'un nœud et  $N_n$  le nombre de nœuds. De multiples façons existent pour retrouver la matrice de diffraction élémentaire  $S_e$ . Il y a conservation de l'énergie c'est-à-dire que  $S_e \overline{S_e} = \mathbf{I}_d$  (dans le cas sans pertes). En 3D, cette matrice élémentaire  $S_e$  du système à résoudre qui lie les ondes réfléchies aux ondes incidentes est de taille  $12 \times 12$  alors qu'en 2D elle est de taille  $4 \times 4$ .

### 1.2.3 Performances

La FDTLM est une méthode d'ordre de convergence égal à 2 [34]. Elle est contrainte par un maillage parallélépipédique, ce qui n'est pas adapté à l'ensemble des circuits mais ce qui est en adéquation avec la représentation de la WCIP.

## 1.3 Finite Element Method (FEM)

### 1.3.1 Principes de la méthode

C'est l'une des techniques les plus répandues dans le domaine des méthodes numériques pour la résolution d'équations aux dérivées partielles. Au début du 20ème siècle, Ritz approche la solution par une somme finie de fonctions [35]. Cette approche est popularisée par Timoshenko [36], Bubnov et Galerkin. En 1941, Courant introduit une approximation fonctionnelle s'appuyant sur un maillage [37]. A partir des années 1960, elle se développe dans les domaines de la mécanique et du génie civil. Ainsi, les premières applications ont lieu dans l'analyse des structures. En effet, un groupe de chercheurs de Boeing (Turner, Clough, Martin et Topp [38]) utilisent cette méthode pour calculer la déformation de la voilure d'un avion. Elle est nommée « méthode des éléments finis » par Clough dans les années 1960 [39]. Le premier livre sur les éléments finis a été publié par Zienkiewicz et Chung en 1967 [40]. La méthode a été introduite en électromagnétisme dans les années 1970 par Silvester et Chari [41].

La méthode nécessite l'écriture d'une formulation variationnelle que l'on nomme également formulation faible. Cette formulation découle d'une formulation forte dont on cherche à s'affranchir car elle impose trop de contraintes sur la solution (par exemple qu'elle soit de classe  $C^2$ ). Cette formulation s'appuie généralement sur une équation aux dérivées partielles avec des conditions aux limites (et éventuellement des conditions initiales). La formulation faible peut alors se construire en multipliant l'équation aux dérivées partielles par une fonction test « suffisamment régulière » et en intégrant sur le domaine de calcul. Cette formulation prend au final la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ telle que} \\ a(u, v) = l(v), \forall v \in V, \end{cases} \quad (1.39)$$

où  $V$  est un espace de Hilbert. D'après le théorème de Lax-Milgram, si  $a$  est une forme bilinéaire continue et coercive, alors le problème (1.39) a une unique solution dans  $V$ . Prenons l'exemple de l'équation de Helmholtz. Soit  $w$  une fonction test, on a :

$$\int_{\Omega} (\Delta E_y + k_0^2 \epsilon_r \mu_r E_y) w dx dz = 0 \text{ dans le domaine de calcul } \Omega. \quad (1.40)$$

En utilisant la formule de Green (cf. annexe G), l'égalité (1.40) devient

$$- \int_{\Omega} (\nabla E_y \cdot \nabla w) dx dz + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E_y}{\partial n} w dl + \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \mu_r E_y w dx dz = 0, \quad (1.41)$$

où  $n$  est la normale dirigée vers l'extérieur de  $\partial\Omega$ .

On recherche alors un espace de solutions admissibles auquel va appartenir la solution. Comme on effectue une approximation numérique  $u_h$  de la grandeur recherchée  $u$ , la solution discrétisée  $u_h$  va appartenir à un espace de dimension finie,  $V_h$ , afin d'avoir un nombre d'inconnues fini.  $V_h$  est l'espace d'approximation : on peut en définir une base  $(\varphi_i)_{i=1}^N$  et  $u_h$  s'écrit :

$$u_h = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i. \quad (1.42)$$

Les fonctions de base sont polynomiales par élément (polynômes de Lagrange dans un élément ici). Par souci de simplicité, nous choisissons des éléments  $Q_1$ . En prenant comme élément de base le rectangle  $R_1$  (voir la figure 1.11), on définit les fonctions de base en résolvant le système (1.44). On appelle  $d_x$  et  $d_y$  les pas de maillage selon les directions  $x$  et  $y$ . Soit  $a$  la longueur de la zone rectangulaire à mailler et  $b$  sa largeur, soit  $m-1$  le nombre de mailles selon  $x$  et soit  $n-1$  le nombre de mailles selon  $y$  (cf. annexe D), on a les égalités

$$\begin{aligned} a &= d_x(m-1) = d_x N \\ b &= d_y(n-1) = d_y M. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Pour  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , on a

$$\begin{cases} \varphi_i(x_i, y_i) = 1, \\ \varphi_i(x_i, y_i + d_y) = 0, \\ \varphi_i(x_i + d_x, y_i + d_y) = 0, \\ \varphi_i(x_i + d_x, y_i) = 0, \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases} \quad (1.44)$$

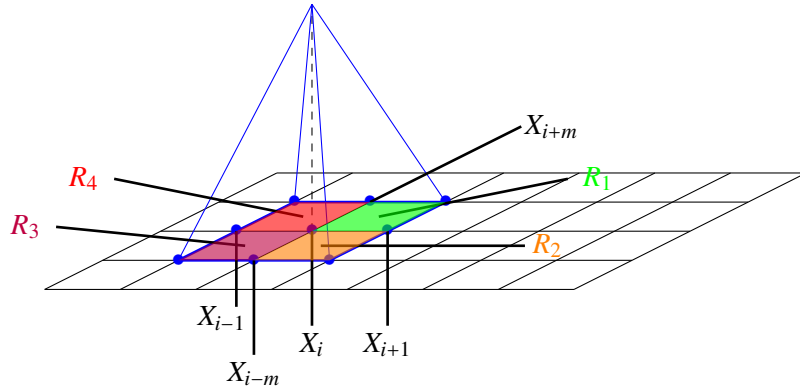


FIGURE 1.11 – Maillage avec des rectangles :  $X_i(x_i, y_i)$ ,  $X_{i+m}(x_i, y_i + d_y)$ ,  $X_{i+m+1}(x_i + d_x, y_i + d_y)$ ,  $X_{i+1}(x_i + d_x, y_i)$ .

Plus explicitement, leur expression est :

$$\begin{cases} \varphi_i(x, y) = \frac{((x_i + d_x) - x)((y_i + d_y) - y)}{d_x d_y} \text{ sur } R_1, \\ \varphi_i(x, y) = \frac{(x - (x_i - d_x))((y_i + d_y) - y)}{d_x d_y} \text{ sur } R_4, \\ \varphi_i(x, y) = \frac{((x_i + d_x) - x)(y - (y_i - d_y))}{d_x d_y} \text{ sur } R_2, \\ \varphi_i(x, y) = \frac{(x - (x_i - d_x))(y - (y_i - d_y))}{d_x d_y} \text{ sur } R_3, \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases} \quad (1.45)$$

### 1.3.2 Système résolu

Le problème à résoudre se formule sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que} \\ a(u_h, \varphi_i) = l(\varphi_i), \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket. \end{cases} \quad (1.46)$$

On est alors amené à résoudre un système linéaire  $AU_h = F$  avec

$$U_h = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_N \end{pmatrix}, \quad (1.47)$$

$$A_{i,j} = a(\varphi_j, \varphi_i) \text{ et } F_i = l(\varphi_i), \quad (1.48)$$

où  $A$  est une matrice symétrique et  $U_h$  est la matrice des inconnues. Ce sont les coefficients pondérateurs des fonctions de base qui représentent une ou plusieurs composantes du champ électrique ou magnétique. Ces coefficients correspondent aux composantes prises aux points du maillage car les fonctions de base vérifient le symbole de Kronecker. Par abus de langage, nous dirons donc que  $U_h$  est le vecteur des champs calculés aux points de discrétisation. Néanmoins, la méthode des éléments finis nous permet de calculer cette grandeur en tout point de la surface ou du volume où est appliquée la méthode.

De manière générale, on partitionne le domaine en différents éléments (en 2D des triangles, rectangles... ou en 3D des tétraèdres, des hexaèdres...). On peut considérer des conditions aux limites de type Dirichlet, Neumann ou mixtes. Pour les conditions de Neumann, ce sont des conditions aux limites dites naturelles, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de traitement particulier. Pour des conditions de Dirichlet, il s'agit de conditions aux limites essentielles c'est-à-dire que l'on impose des contraintes dans la définition des solutions admissibles.

Notons que les fonctions de base sont continues à l'interface entre deux éléments ce qui fait que  $u_h$  sera aussi continue sur toutes les interfaces.

### 1.3.3 Performances

L'ordre de convergence défini dans l'annexe B.2 est lié dans le cas des éléments finis à l'ordre polynomial (si ce sont des polynômes) des fonctions de base utilisées sur chaque élément. Ainsi, prendre des polynômes d'ordre supérieur apporte une convergence d'ordre plus élevée sauf si la solution manque de régularité et si l'on approche des frontières courbes par des maillages polygonaux. Une erreur optimale avec des éléments finis de Lagrange de degré  $p \geq 1$  serait :

$$|u - u_h|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{p+1} \quad (1.49)$$

où  $C$  est une constante et  $h$  est le pas de maillage.

L'avantage de cette méthode réside dans le fait qu'elle nous amène à résoudre un système matriciel « creux ». En outre, elle offre une grande souplesse en terme de maillage et ses propriétés de convergence sont bien connues même dans des cas où les sources sont peu régulières



ou les domaines sont complexes. Par exemple, des problèmes non homogènes, non linéaires ou dépendant du temps peuvent être abordés. On peut également traiter des surfaces courbes, ce qui est problématique avec d'autres méthodes telles que les différences finies.

## 1.4 Hybridizable Discontinuous Galerkin (HDG) method

### 1.4.1 Principes de la méthode

Les méthodes de type Galerkin Discontinu sont des techniques de type éléments finis dans lesquelles on n'impose aucune contrainte de continuité aux fonctions de base à l'interface entre deux éléments. Ce point la distingue de la méthode des éléments finis conformes « classique ». La continuité des champs électromagnétiques à l'interface entre deux éléments sera imposée « faiblement » dans la formulation variationnelle. La flexibilité accrue par rapport à la méthode des éléments finis conformes, permet notamment de changer « simplement » l'ordre d'approximation d'un élément à l'autre. L'inconvénient principal est que le nombre de degrés de liberté est augmenté par rapport aux éléments finis conformes notamment dans le cas des problèmes stationnaires.

On cherche à calculer les champs discrétisés  $\mathbf{E}_h$  et  $\mathbf{H}_h$  dans l'ensemble du domaine, ce qui implique de résoudre les équations de Maxwell fréquentielles. En premier lieu, on se focalise sur un élément  $K_e$  quelconque du maillage sur lequel les équations de Maxwell s'appliquent :

$$\begin{cases} (j\omega\epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E}_h, \mathbf{v})_{K_e} - (\nabla \times \mathbf{H}_h, \mathbf{v})_{K_e} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}^p(K_e), \\ (j\omega\mu_0\mu_r\mathbf{H}_h, \mathbf{v})_{K_e} + (\nabla \times \mathbf{E}_h, \mathbf{v})_{K_e} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}^p(K_e). \end{cases} \quad (1.50)$$

où  $\mathbf{V}^p(K_e)$  est l'espace  $(\mathbb{P}_p(K_e))^2$  des fonctions polynomiales de degré au plus  $p$  sur un domaine  $K_e$ ,  $\omega$  est la pulsation,  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide,  $\epsilon_r$  est la permittivité relative du milieu considéré,  $\mu_0$  est la perméabilité du vide,  $\mu_r$  est la perméabilité relative et  $\mathbf{v}$  est une fonction test. A l'aide des formules de Green (cf. annexe G), on fait apparaître des termes de frontières avec les traces de  $\mathbf{E}_h$  and  $\mathbf{H}_h$ . Pour réaliser le couplage entre les éléments, on va remplacer ces traces par des traces numériques  $\hat{\mathbf{E}}_h$  et  $\hat{\mathbf{H}}_h$ . Il faut également noter dans (1.51) que l'on a fait le changement de variables qui est présenté dans (2.69).

$$\begin{cases} (j\omega\epsilon_r\mathbf{E}_h, \mathbf{v})_{K_e} - (\mathbf{H}_h, \nabla \times \mathbf{v})_{K_e} + \langle \hat{\mathbf{H}}_h, \mathbf{n} \times \mathbf{v} \rangle_{\partial K_e} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}^p(K_e), \\ (j\omega\mu_r\mathbf{H}_h, \mathbf{v})_{K_e} + (\mathbf{E}_h, \nabla \times \mathbf{v})_{K_e} - \langle \hat{\mathbf{E}}_h, \mathbf{n} \times \mathbf{v} \rangle_{\partial K_e} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}^p(K_e). \end{cases} \quad (1.51)$$

Dans les méthodes DG classiques fréquentielles, les traces numériques sont définies de la façon suivante :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{H}}_h = \{\mathbf{H}_h\} + \alpha_E \llbracket \mathbf{E}_h \rrbracket \\ \hat{\mathbf{E}}_h = \{\mathbf{E}_h\} + \alpha_H \llbracket \mathbf{H}_h \rrbracket \end{cases} \quad (1.52)$$

où  $\alpha_E$  et  $\alpha_H$  sont des coefficients de couplage et  $\llbracket \cdot \rrbracket$  désigne un saut, il est défini par :

$$\llbracket \mathbf{v} \rrbracket_F = \mathbf{n}_{K_e^+} \times \mathbf{v}^+ + \mathbf{n}_{K_e^-} \times \mathbf{v}^-, \quad (1.53)$$

où  $F$  désigne une face quelconque (en 2D les éléments sont des triangles et les faces des segments, en 3D les éléments sont des tétraèdres et les faces des triangles). Sur les frontières, il est défini par :

$$\llbracket \mathbf{v} \rrbracket_F = \mathbf{n}_{K_e^+} \times \mathbf{v}^+. \quad (1.54)$$

Dans les méthodes Galerkin Discontinu Hybridées (HDG pour Hybridizable Discontinuous Galerkin), on définit les traces de la façon suivante :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{H}}_h = \lambda_h, \forall F \in \mathcal{F}_h, \\ \hat{\mathbf{E}}_h = \mathbf{E}_h + \tau_{K_e} \mathbf{n} \times (\lambda_h - \mathbf{H}_h), \end{cases} \quad (1.55)$$

où l'on a introduit une variable dite hybride sur les faces des éléments  $\lambda_h$ , un paramètre de stabilisation  $\tau_{K_e}$ , la normale à chacune des faces  $\mathbf{n}$  et les champs électromagnétiques locaux  $\mathbf{E}_h$  et  $\mathbf{H}_h$ .  $\mathcal{F}_h$  est l'ensemble des faces du maillage.

L'étape suivante consiste à additionner les contributions de tous les éléments vérifiant (1.50). En outre, ceci ne suffit pas : dans notre système, on doit imposer la continuité des champs électrique et magnétique calculés. De par la définition de la variable hybride qui est univaluée sur l'interface, le champ magnétique est continu. Par contre, pour imposer la continuité de sa grandeur duale (le champ électrique ici vu que l'on a choisi comme variable hybride le champ magnétique à la frontière des éléments), il est nécessaire d'imposer une condition dite de conservativité [42]. Cette équation est la dernière du système suivant :

$$\begin{cases} (j\omega\epsilon_r \mathbf{E}_h, \mathbf{v})_{\mathcal{T}_h} - (\mathbf{H}_h, \nabla \times \mathbf{v})_{\mathcal{T}_h} + \langle \hat{\mathbf{H}}_h, \mathbf{n} \times \mathbf{v} \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}^p, \\ (j\omega\mu_r \mathbf{H}_h, \mathbf{v})_{\mathcal{T}_h} + (\mathbf{E}_h, \nabla \times \mathbf{v})_{\mathcal{T}_h} - \langle \hat{\mathbf{E}}_h, \mathbf{n} \times \mathbf{v} \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}^p, \\ \langle \llbracket \hat{\mathbf{E}}_h^t \rrbracket, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{F}_h} - \langle \lambda_h, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_a} = \langle g_{inc}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_a}, \end{cases} \quad (1.56)$$

où  $\mathcal{T}_h$  est la triangulation (maillage constitué de triangles) du domaine,  $\Gamma_a$  correspond aux frontières absorbantes et  $g_{inc}$  représente le terme source.

## 1.4.2 Système résolu

On cherche à écrire un système dont l'unique inconnue est la variable hybride. Pour ce faire, il est nécessaire d'écrire deux types de discrétisation : une discrétisation locale et une discrétisation globale. La discrétisation locale est intrinsèque aux équations de Maxwell, elle sera donc inchangée lors de l'hybridation, ce qui n'est pas le cas de la discrétisation globale qui dépend du terme source et donc de la méthode avec laquelle HDG est hybridée. La discrétisation locale 2D est explicitée dans l'annexe E. A partir des équations de Maxwell, on obtient une discrétisation locale à un élément :

$$A^e W^e + C^e \lambda^e = 0 \quad (1.57)$$

où  $W^e$  est le vecteur contenant les champs électrique et magnétique locaux par élément,  $\lambda^e$  la variable hybride dans l'élément considéré et  $A^e$  et  $C^e$  sont explicitées dans l'annexe E. Pour obtenir un système associé à la discrétisation globale, on écrit un système sur l'ensemble des éléments et dont l'inconnue est le vecteur  $\Lambda$  défini sur tous les éléments. On a alors un système du type :

$$K\Lambda = g \quad (1.58)$$

où  $\Lambda$  contient les composantes de la variable hybride sur l'ensemble du maillage,  $g$  est le vecteur source et  $K$  est la matrice du système HDG obtenue à partir de (1.56).

### 1.4.3 Performances

C'est une méthode d'ordre de convergence  $p + 1$  dans la norme  $L^2$  quand des polynômes de degré  $p$  sont utilisés pour représenter les variables [43].

## 1.5 Conclusions

On peut résumer les avantages et inconvénients des différentes méthodes par le tableau 1.1 Avec l'approximation discontinue des grandeurs, HDG est la méthode qui s'adapte le plus facile-

	<b>WCIP</b>	<b>TLM</b>	<b>FEM</b>	<b>HDG</b>
Temps de calcul	+	- -	- -	- -
Inhomogénéités	Impossible	+	+	+
Flexibilité de maillage	Pas de maillage volumique	-	+	+
Nombre d'inconnues	+	-	-	-

TABLE 1.1 – Avantages et inconvénients des différentes méthodes.

ment aux géométries complexes étant donné que c'est une méthode naturellement non conforme. Le raccordement de maillages non conformes ou d'éléments différents (par exemple, des éléments  $P_0$  associés à des éléments  $P_1$ ) ou d'éléments de permittivités différentes (dans le cadre d'une distribution "originale" de permittivité sur un substrat par exemple) est alors facilité par la nature de la méthode vu que l'on traite les éléments indépendamment les uns des autres quand on construit la discrétisation locale.

## Chapitre 2

# Techniques d'hybridation 2D

### 2.1 Formalisme général de l'hybridation

L'hybridation de la WCIP et de méthodes volumiques permet de traiter des cas où les substrats des circuits sont inhomogènes, tout en conservant les avantages de la WCIP. Ces derniers incluent notamment un faible temps de calcul du fait d'un nombre réduit de degrés de liberté (maillage surfacique) et la prise en compte des espaces homogènes par un opérateur analytique ( $\Gamma_i$ ). Les méthodes volumiques quant à elles permettent de traiter des géométries complexes comme les circuits avec des substrats inhomogènes. Pour réaliser l'hybridation, le domaine de calcul est décomposé, en première approche, en deux sous-domaines tels que ceux représentés sur la figure 2.1. Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  les domaines associés respectivement à la WCIP et à la méthode volumique.

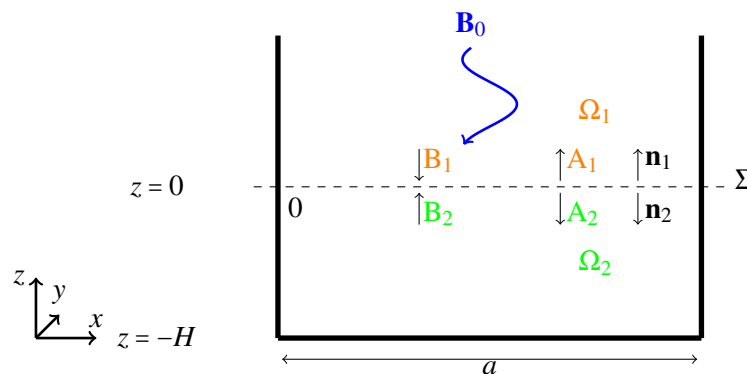


FIGURE 2.1 – Cas d'étude : séparation en deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

Dans la configuration de la figure 2.1, le circuit est éclairé par une source spectrale représentée par l'onde entrante  $\mathbf{B}_0$ . En  $x = 0$  et  $x = a$  se trouvent des murs électriques. Dans le contexte de l'hybridation, la WCIP est appliquée dans le domaine  $\Omega_1$  et une méthode volumique traite le domaine  $\Omega_2$ , les deux méthodes communiquant par l'interface  $\Sigma$ . Le domaine WCIP n'est pas borné alors que celui dans lequel est appliquée la méthode volumique l'est par un mur électrique.

Dans le cas 1D, on n'a pas de propagation selon la direction  $y$  du plan  $(xOy)$  transverse au guide (cf. la figure 1.1). En 1D, les modes s'écrivent sous la forme

$$\mathbf{f}_n e^{-p_n z} \quad (2.1)$$

où les  $\mathbf{f}_n$  sont les fonctions de la base modale et  $p_n$  désigne la constante de propagation modale selon la direction  $z$ .

Tant qu'il n'y a pas d'inhomogénéités dans le milieu  $\Omega_2$ , on peut résoudre avec la WCIP seule en résolvant le système (1.32). Dans le cas contraire, on peut résoudre en remplaçant  $S_2^W$  du système (1.32) par un opérateur  $S_2^F$  associé à la méthode implémentée dans le domaine  $\Omega_2$ . On a ainsi hybridé la WCIP avec une méthode volumique. Le système à résoudre devient alors :

$$\left( \mathbf{I}_d - \begin{pmatrix} S_1^W & 0 \\ 0 & S_2^F \end{pmatrix} \mathbf{S} \right) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Cet opérateur  $S_2^F$  vérifie

$$B_2 = S_2^F A_2. \quad (2.3)$$

Pour la WCIP, le maillage est constitué de segments ; côté méthodes volumiques, quand il s'agit de la FDTLM, le maillage est composé de rectangles et quand il s'agit de la méthode HDG ou des éléments finis, il est composé de triangles ou de rectangles dans nos cas testés. Effectuer la correspondance entre les maillages des deux domaines consiste à prendre les segments de  $\Sigma$  comme bases des rectangles ou des triangles de  $\Omega_2$ . Le schéma global de l'hybridation est résumé sur la figure 2.2.

La méthode volumique permet de calculer  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  dans l'ensemble du domaine  $\Omega_2$  et ensuite, on calcule l'onde  $\mathbf{B}_2$  de deux façons :

$$\begin{cases} B_{x2} = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} \left( Z_0 H_{y2}|_{\Sigma} - \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r} \frac{\partial H_{y2}}{\partial z} \Big|_{\Sigma} \right), \\ B_{y2} = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} \left( E_{y2}|_{\Sigma} - \frac{Z_0}{j\omega\mu_0} \frac{\partial E_{y2}}{\partial z} \Big|_{\Sigma} \right), \end{cases} \quad (2.4)$$

ou :

$$\begin{cases} B_{x2} = \sqrt{Z_0} H_{y2}|_{\Sigma} + A_{x2}, \\ B_{y2} = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} E_{y2}|_{\Sigma} - A_{y2}, \end{cases} \quad (2.5)$$

du fait de la définition des ondes (rappelée dans [23]). L'équation (2.4) a été mentionnée dans [44], mais il est apparu que l'équation (2.5) fournissait des résultats plus précis et que la convergence était améliorée. Cela peut s'expliquer par le fait que l'on n'approche pas avec une précision suffisante la dérivée partielle par rapport à  $z$ . Dans la section suivante, nous déclinons l'hybridation selon chacune des méthodes présentées dans le chapitre 1 dans le cas TE (le cas TM est présenté dans l'annexe F).

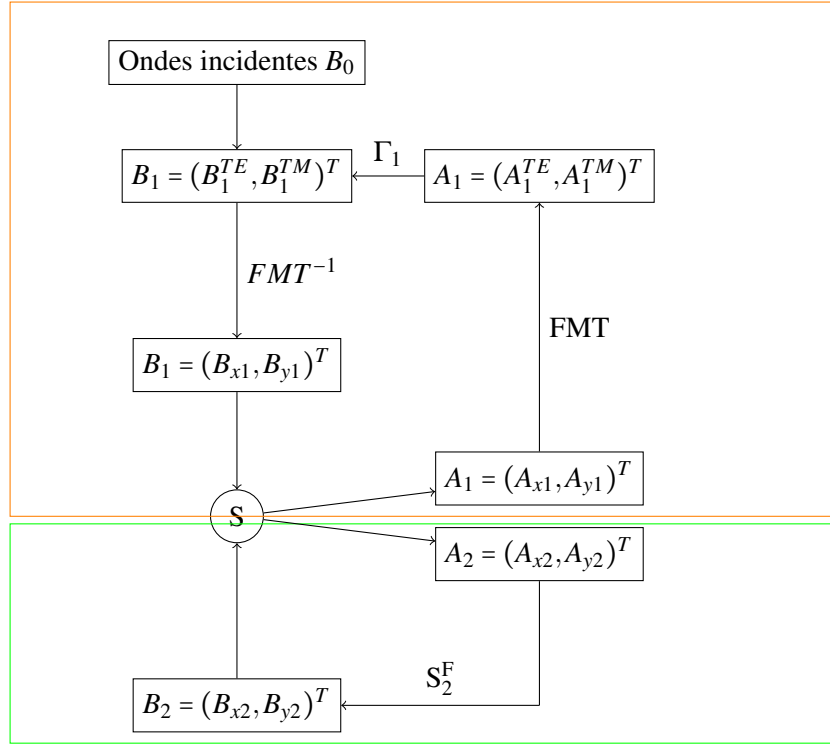


FIGURE 2.2 – Algorithme de l'hybridation

## 2.2 Déclinaison de l'hybridation selon les méthodes

### 2.2.1 FEM

L'intérêt principal de l'hybridation de la WCIP avec la FEM est de poser les bases de l'hybridation avec une méthode volumique simple à implémenter. Celle-ci est d'autant plus simple avec des quadrangles plutôt que des triangles. C'est pourquoi nous avons implémenté des éléments  $Q_1$  tels que ceux présentés dans le chapitre 1. On résout dans le cas TE l'équation (1.1) avec ses conditions aux limites (cf. (1.41)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \int_{\Omega} (\nabla E_y \cdot \nabla w) dx dz + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E_y}{\partial n} w dl + \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \mu_r E_y w dx dz = 0, \\ E_y = 0 \text{ en } x = 0 \\ E_y = 0 \text{ en } x = a \\ E_y = 0 \text{ en } z = -H. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

En conséquence, l'espace des fonctions tests est tel que :

$$W = \{w : w \in H^1 \text{ et } w = 0 \text{ en } x = 0, x = a \text{ et } z = -H\}. \quad (2.7)$$

Cela implique que (2.6) se simplifie en

$$-\int_{\Omega} (\nabla E_y \cdot \nabla w) dx dz + \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial E_y}{\partial n} w dx + \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \mu_r E_y w dx dz = 0. \quad (2.8)$$

La suite consiste à modifier le second terme de (2.8). D'après Maxwell-Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mu_r \mathbf{H}. \quad (2.9)$$

Sachant que seule la composante  $E_y$  du champ électrique est non nulle dans le cas TE, on a :

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{pmatrix} = -j\omega\mu_0\mu_r \begin{pmatrix} H_x \\ 0 \\ H_z \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

ce qui donne :

$$H_x = \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_r} \frac{\partial E_y}{\partial z}. \quad (2.11)$$

On ne considèrera par la suite que la composante tangentielle  $\mathbf{H}_T$ . En outre, la définition des ondes est :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_2 = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} (\mathbf{E}_{T2} + Z_0 \mathbf{J}_{T2}), \\ \mathbf{B}_2 = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} (\mathbf{E}_{T2} - Z_0 \mathbf{J}_{T2}), \end{cases} \quad (2.12)$$

où  $\mathbf{J}_{T2}$  est le courant tangentiel défini par

$$\mathbf{J}_{T2} = \mathbf{H}_{T2} \times \mathbf{n}_2 \quad (2.13)$$

où le sens de la normale  $\mathbf{n}_2$  est défini sur la figure 2.1. Or, on a dans le cas TE

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{T2} = E_{y2} \mathbf{y}, \\ \mathbf{H}_{T2} = H_{x2} \mathbf{x}, \end{cases} \quad (2.14)$$

soit :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_2 = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} (E_{y2} \mathbf{y} + Z_0 H_{x2} \mathbf{x} \times (-\mathbf{z})), \\ \mathbf{B}_2 = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} (E_{y2} \mathbf{y} - Z_0 H_{x2} \mathbf{x} \times (-\mathbf{z})), \end{cases} \quad (2.15)$$

ou encore :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_2 = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} (E_{y2} \mathbf{y} + Z_0 H_{x2} \mathbf{y}), \\ \mathbf{B}_2 = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} (E_{y2} \mathbf{y} - Z_0 H_{x2} \mathbf{y}). \end{cases} \quad (2.16)$$

La projection sur  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  entraîne donc

$$\begin{cases} A_{x2} = 0 \\ A_{y2} = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}}(E_{y2} + Z_0 H_{x2}). \end{cases} \quad (2.17)$$

D'après (2.11), il s'ensuit

$$\frac{\partial E_{y2}}{\partial z} \Big|_{\Sigma} = \frac{j\omega\mu_0\mu_r}{Z_0} (2\sqrt{Z_0}A_{y2} - E_{y2}). \quad (2.18)$$

D'où, en reprenant (2.8), la formulation faible s'écrit

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_2} (\nabla E_{y2} \cdot \nabla w) dx dz + \int_{\Omega_2} k_0^2 \varepsilon_r \mu_r E_{y2} \cdot w dx dz - jk_0 \mu_r \int_{\Sigma} E_{y2} w dx \\ & = -2jk_0 \mu_r \sqrt{Z_0} \int_{\Sigma} A_{y2} w dx. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Avec le maillage de la figure 2.3, la forme matricielle du second membre est présentée ci-après. Pour ce faire, on teste par les fonctions de base  $\varphi_i$  présentées au chapitre 1.

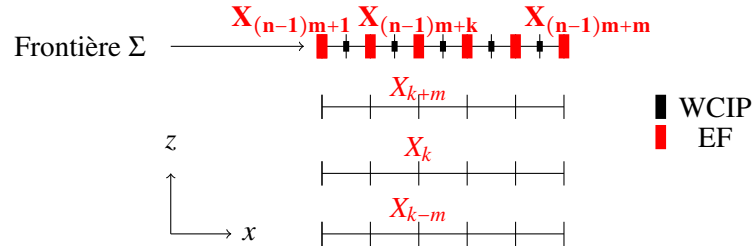


FIGURE 2.3 – Configuration du maillage

Pour faire le calcul du second membre, on s'aide de la figure 2.4. Sur cette figure, on représente les fonctions de base éléments finis d'une part et les fonctions de base WCIP d'autre part sur le maillage linéique de la frontière  $\Sigma$ .

Les composantes  $F_i$  du membre de droite de l'équation (2.19) s'écrivent :

$$F_i = -2jk_0 \mu_r \sqrt{Z_0} \int_{\Sigma} A_{y2} \varphi_i dx. \quad (2.20)$$

La décomposition dans la base  $\mathbf{H}_p$  de l'onde  $A_{y2}$  entraîne

$$F_i = -2jk_0 \mu_r \sqrt{Z_0} \int_{\Sigma} \left( \sum_{p=1}^N A_{y2,p} h_p \right) \varphi_i dx, \quad (2.21)$$

où  $A_{y2,p}$  désigne les composantes de l'onde  $A_{y2}$  et le facteur  $h_p$  est tel que

$$\mathbf{H}_p = h_p \mathbf{1}_{[x_{p-1}; x_p]} \mathbf{y} \quad (2.22)$$



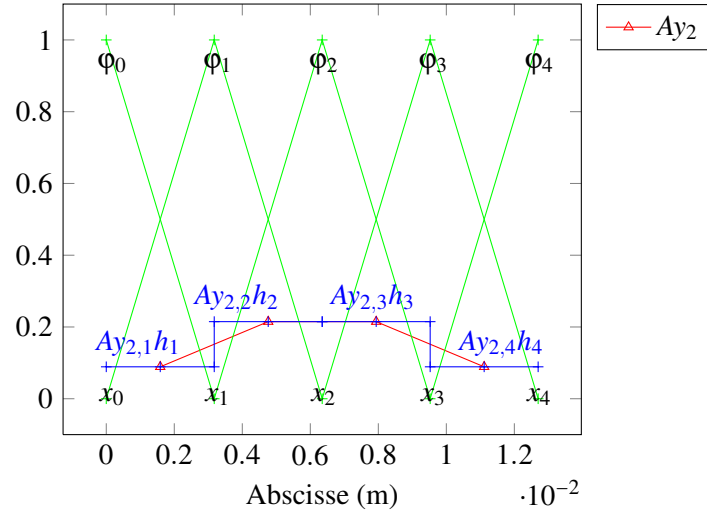


FIGURE 2.4 – Exemple de terme source avec  $n = 5$  et  $m = 5$ .

où

$$\begin{cases} x_p = ph, \\ x_{p+1/2} = \left(p + \frac{1}{2}\right)h, \end{cases} \quad (2.23)$$

avec

$$h = \frac{a}{N}. \quad (2.24)$$

Plus précisément, le terme  $F_0$  s'écrit :

$$\begin{aligned} F_0 &= -2jk_0\mu_r\sqrt{Z_0} \int_{\Sigma} \left(\sum_{p=1}^N A_{y2,p}h_p\right)\phi_0 dx \\ &= -2jk_0\mu_r\sqrt{Z_0} \int_{x_0}^{x_1} A_{y2,1}h_1\phi_{0_{[x_0;x_1]}} dx \end{aligned} \quad (2.25)$$

où  $A_{y2,1}$  est la valeur de  $A_{y2}$  en  $x_{0+1/2}$ . La composante  $F_1$  s'écrit

$$\begin{aligned} F_1 &= -2jk_0\mu_r\sqrt{Z_0} \int_{\Sigma} \left(\sum_{p=1}^N A_{y2,p}h_p\right)\phi_1 dx \\ &= -2jk_0\mu_r\sqrt{Z_0} \left( \int_{x_0}^{x_1} A_{y2,1}h_1\phi_{1_{[x_0;x_1]}} dx + \int_{x_1}^{x_2} A_{y2,2}h_2\phi_{1_{[x_1;x_2]}} dx \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

avec  $A_{y2,2} = A_{y2}(x_{1+1/2})$ .

$$\begin{aligned} F_i &= -2jk_0\mu_r\sqrt{Z_0} \int_{\Sigma} \left(\sum_{p=1}^N A_{y2,p}h_p\right)\phi_i dx \\ &= -2jk_0\mu_r\sqrt{Z_0} \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} A_{y2,i}h_i\phi_{i_{[x_{i-1};x_i]}} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} A_{y2,i+1}h_{i+1}\phi_{i_{[x_i;x_{i+1}]}} dx \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

avec  $A_{y2,i} = A_{y2}(x_{i-1+1/2}) = A_{y2}(x_{i-1/2})$ . Or,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi_{i[x_{i-1};x_i]} dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{\Delta x} dx = \frac{\Delta x}{2}, \quad (2.28)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi_{i[x_i;x_{i+1}]} dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x} dx = \frac{\Delta x}{2}. \quad (2.29)$$

D'où les composantes discrètes du terme source s'écrivent

$$\begin{aligned} F_0 &= -2jk_0\mu_r\sqrt{Z_0}h_1\frac{\Delta x}{2}A_{y2}(x_{0+1/2}), \\ F_i &= -2jk_0\mu_r\sqrt{Z_0}\frac{\Delta x}{2}(h_iA_{y2}(x_{i-1/2}) + h_{i+1}A_{y2}(x_{i+1/2})), \forall i \in [2; m-2] \\ F_{m-1} &= -2jk_0\mu_r\sqrt{Z_0}\frac{\Delta x}{2}h_{m-1}A_{y2}(x_{m-1/2}). \end{aligned} \quad (2.30)$$

## 2.2.2 FDTLM

Pour obtenir l'opérateur FDTLM, on cherche la relation entre les ondes  $\mathbf{A}_2$  et  $\mathbf{B}_2$ , à savoir la matrice  $S_e$  telle que

$$\begin{pmatrix} B_a \\ B_b \\ B_c \\ B_d \end{pmatrix} = S_e \begin{pmatrix} A_a \\ A_b \\ A_c \\ A_d \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont les ports représentés sur la figure 2.5. La première étape consiste à donner les définitions des ondes en fonctions des champs aux différents points du maillage, ces derniers ayant pour coordonnées :  $(i, k + \frac{1}{2})$ ,  $(i, k - \frac{1}{2})$ ,  $(i - \frac{1}{2}, k)$ ,  $(i + \frac{1}{2}, k)$ . Avec ces relations, on exprime alors les champs électromagnétiques du nœud en fonction des ondes entrantes et sortantes. On insère ensuite ces expressions des champs dans les équations de Maxwell, le but étant d'obtenir une expression des champs au point  $(i, k)$  en fonction des ondes de diffraction  $A$ . Pour obtenir l'expression de  $H_x$ , on s'intéresse aux ondes  $\mathbf{A}_a$  et  $\mathbf{B}_a$ . En effet, comme le port  $a$  est selon  $y$  et d'après (2.16) on a

$$\mathbf{A}_a = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} \left( E_y \left( i, k + \frac{1}{2} \right) \mathbf{y} + Z_0 H_x \left( i, k + \frac{1}{2} \right) \mathbf{y} \right). \quad (2.32)$$

La composante du vecteur  $\mathbf{A}_a$  selon  $\mathbf{y}$  s'écrit donc

$$A_a = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} \left( E_y \left( i, k + \frac{1}{2} \right) + Z_0 H_x \left( i, k + \frac{1}{2} \right) \right). \quad (2.33)$$

On fait de même avec l'onde incidente  $\mathbf{B}_a$  et on écrit

$$B_a = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} \left( E_y \left( i, k + \frac{1}{2} \right) - Z_0 H_x \left( i, k + \frac{1}{2} \right) \right). \quad (2.34)$$

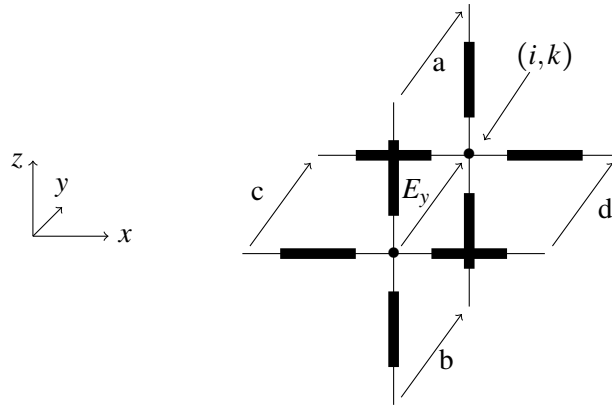


FIGURE 2.5 – Représentation du nœud FDTLM parallèle.

Par sommation et soustraction des équations (2.33) et (2.34), on en déduit :

$$\begin{cases} E_y\left(i, k + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{Z_0}(A_a + B_a), \\ H_x\left(i, k + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{Z_0}}(A_a - B_a). \end{cases} \quad (2.35)$$

On fait de même avec les autres composantes non nulles du cas TE calculées aux points du maillage :

$$\begin{aligned} E_y\left(i, k - \frac{1}{2}\right) &= \sqrt{Z_0}(A_b + B_b), \\ H_x\left(i, k - \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{Z_0}}(B_b - A_b), \\ E_y\left(i - \frac{1}{2}, k\right) &= \sqrt{Z_0}(A_c + B_c), \\ H_z\left(i - \frac{1}{2}, k\right) &= \frac{1}{\sqrt{Z_0}}(A_c - B_c), \\ E_y\left(i + \frac{1}{2}, k\right) &= \sqrt{Z_0}(A_d + B_d), \\ H_z\left(i + \frac{1}{2}, k\right) &= \frac{1}{\sqrt{Z_0}}(B_d - A_d). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Afin d'exprimer les champs uniquement en fonction des ondes  $A$  (et donc de s'affranchir des variables  $B$ ), on exprime dans (2.37) les équations de Maxwell fréquentielles 2D d'un problème invariant selon l'axe  $y$  (ce qui se traduit par une dérivée partielle par rapport à  $y$  nulle). Plus précisément, grâce à ce système, on pourra faire apparaître les champs au centre du nœud par

différences centrées issues des dérivées partielles spatiales.

$$\left\{ \begin{array}{l} j\omega\varepsilon_x e_x = -\frac{\partial h_y}{\partial z} - \sigma_{ex} e_x, \\ j\omega\varepsilon_y e_y = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} - \sigma_{ey} e_y, \\ j\omega\varepsilon_z e_z = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \sigma_{ez} e_z, \\ j\omega\mu_x h_x = \frac{\partial e_y}{\partial z} - \sigma_{mx} h_x, \\ j\omega\mu_y h_y = \frac{\partial e_z}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial z} - \sigma_{my} h_y, \\ j\omega\mu_z h_z = -\frac{\partial e_y}{\partial x} - \sigma_{mz} h_z, \end{array} \right. \quad (2.37)$$

où  $\omega$  est la pulsation,  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont respectivement la permittivité et la perméabilité du milieu,  $\sigma_e$  et  $\sigma_m$  sont les conductivités électrique et magnétique,  $e_i$  et  $h_i$ ,  $i \in \{x, y, z\}$  sont les composantes du champ électromagnétique. Soit un pavé élémentaire de dimensions  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  selon les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ , le changement de variables suite à la normalisation est donné par (2.38).

$$\begin{array}{lll} x = dxX, & y = dyY, & z = dzZ, \\ e_x = E_x/dx, & e_y = E_y/dy, & e_z = E_z/dz, \\ h_x = H_x/dx, & h_y = H_y/dy, & h_z = H_z/dz. \end{array} \quad (2.38)$$

La normalisation du système (2.37) conduit au système

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{ex} E_x = -\frac{\partial H_y}{\partial Z}, \end{array} \right. \quad (2.39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{ey} E_y = \frac{\partial H_x}{\partial Z} - \frac{\partial H_z}{\partial X}, \end{array} \right. \quad (2.40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{ez} E_z = \frac{\partial H_y}{\partial X}, \end{array} \right. \quad (2.41)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{mx} H_x = \frac{\partial E_y}{\partial Z}, \end{array} \right. \quad (2.42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{my} H_y = \frac{\partial E_z}{\partial X} - \frac{\partial E_x}{\partial Z}, \end{array} \right. \quad (2.43)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{mz} H_z = -\frac{\partial E_y}{\partial X}, \end{array} \right. \quad (2.44)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{ex} = (\sigma_{ex} + j\omega\varepsilon_x) \frac{dydz}{dx}, \quad G_{mx} = (\sigma_{mx} + j\omega\mu_x) \frac{dydz}{dx}, \\ G_{ey} = (\sigma_{ey} + j\omega\varepsilon_y) \frac{dxdz}{dy}, \quad G_{my} = (\sigma_{my} + j\omega\mu_y) \frac{dxdz}{dy}, \\ G_{ez} = (\sigma_{ez} + j\omega\varepsilon_z) \frac{dxdy}{dz}, \quad G_{mz} = (\sigma_{mz} + j\omega\mu_z) \frac{dxdy}{dz}. \end{array} \right. \quad (2.45)$$

A partir des équations (2.40), (2.42) et (2.44), on écrit les différences centrées au point  $(i, k)$ , donnant les équations différences finies

$$G_{ey}E_y(i, k) = H_x\left(i, k + \frac{1}{2}\right) - H_x\left(i, k - \frac{1}{2}\right) + H_z\left(i - \frac{1}{2}, k\right) - H_z\left(i + \frac{1}{2}, k\right), \quad (2.46)$$

$$G_{mx}H_x(i, k) = E_y\left(i, k + \frac{1}{2}\right) - E_y\left(i, k - \frac{1}{2}\right), \quad (2.47)$$

$$G_{mz}H_z(i, k) = E_y\left(i - \frac{1}{2}, k\right) - E_y\left(i + \frac{1}{2}, k\right). \quad (2.48)$$

En introduisant (2.35) et (2.36) dans (2.46) - (2.48), on déduit les équations liant les champs au centre du nœud avec les ondes en bord de nœud :

$$G_{ey}E_y(i, k) = \frac{1}{\sqrt{Z_0}}(A_a - B_a + A_b - B_b, + A_c - B_c + A_d - B_d), \quad (2.49)$$

$$G_{mx}H_x(i, k) = \sqrt{Z_0}(A_a + B_a - A_b - B_b), \quad (2.50)$$

$$G_{mz}H_z(i, k) = \sqrt{Z_0}(A_c + B_c - A_d - B_d). \quad (2.51)$$

On écrit ensuite la moyenne centrée de la combinaison linéaire  $E_y - Z_0H_x$  selon la direction  $z$

$$E_y(i, k) - Z_0H_x(i, k) = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{l} E_y\left(i, k + \frac{1}{2}\right) - Z_0H_x\left(i, k + \frac{1}{2}\right) \\ + E_y\left(i, k - \frac{1}{2}\right) - Z_0H_x\left(i, k - \frac{1}{2}\right) \end{array} \right). \quad (2.52)$$

En insérant (2.35) et (2.36) dans (2.52), cette moyenne centrée se réduit à

$$E_y(i, k) - Z_0H_x(i, k) = \sqrt{Z_0}(B_a + A_b). \quad (2.53)$$

De même, les combinaisons linéaires  $(E_y + Z_0H_x)$ ,  $(E_y + Z_0H_z)$ ,  $(E_y - Z_0H_z)$  ont pour expression

$$E_y(i, k) + Z_0H_x(i, k) = \sqrt{Z_0}(A_a + B_b), \quad (2.54)$$

$$E_y(i, k) + Z_0H_z(i, k) = \sqrt{Z_0}(A_c + B_d), \quad (2.55)$$

$$E_y(i, k) - Z_0H_z(i, k) = \sqrt{Z_0}(A_d + B_c). \quad (2.56)$$

En additionnant les équations de (2.53)-(2.56), on aboutit à

$$4E_y(i, k) = \sqrt{Z_0}(A_a + A_b + A_c + A_d + B_a + B_b + B_c + B_d). \quad (2.57)$$

soit

$$B_a + B_b + B_c + B_d = \frac{4E_y(i, k)}{\sqrt{Z_0}} - (A_a + A_b + A_c + A_d). \quad (2.58)$$

En introduisant (2.58) dans (2.49), les expressions des champs sont déduites

$$E_y(i, k) = \frac{2\sqrt{Z_0}}{(Z_0 G_{ey} + 4)} (A_a + A_b + A_c + A_d), \quad (2.59)$$

$$H_x(i, k) = \frac{2\sqrt{Z_0}}{(2Z_0 + G_{mx})} (A_a - A_b), \quad (2.60)$$

$$H_z(i, k) = \frac{2\sqrt{Z_0}}{(2Z_0 + G_{mz})} (A_c - A_d). \quad (2.61)$$

A partir de (2.53), on exprime  $B_a$  en fonction de  $A_b$  et en fonction des champs, puis seulement en fonction des ondes  $A_a, A_b, A_c$  et  $A_d$  :

$$B_a = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} (E_y(i, k) - Z_0 H_x(i, k)) - A_b. \quad (2.62)$$

En remplaçant  $E_y(i, k)$  et  $H_x(i, k)$  par (2.59) et (2.60) dans (2.62), on obtient

$$B_a = \left( \frac{2}{4 + Z_0 G_{ey}} - \frac{2Z_0}{2Z_0 + G_{mx}} \right) A_a + \left( \frac{2}{4 + Z_0 G_{ey}} + \frac{2Z_0}{2Z_0 + G_{mx}} - 1 \right) A_b + \frac{2}{4 + Z_0 G_{ey}} (A_c + A_d). \quad (2.63)$$

Par conséquent, la matrice de diffraction du nœud parallèle est une matrice 4x4

$$S_e = \begin{pmatrix} a_{yx} & c_{yx} & d_y & d_y \\ c_{yx} & a_{yx} & d_y & d_y \\ d_y & d_y & a_{yz} & c_{yz} \\ d_y & d_y & c_{yz} & a_{yz} \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

où

$$\begin{aligned} a_{\alpha, \beta} &= d_\alpha - b_\beta, & b_\beta &= \frac{2Z_0}{2Z_0 + G_{m\beta}}, \\ c_{\alpha, \beta} &= b_\beta + d_\alpha - 1, & d_\alpha &= \frac{2}{4 + Z_0 G_{e\alpha}}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

avec  $\beta = z, x$  et  $\alpha = y$ .

### 2.2.3 HDG

Nous prenons un maillage de type triangulaire de sorte que les triangles aient un côté commun avec la discrétisation 1D de la WCIP qui est la frontière  $\Sigma$ . Nous rappelons que les équations de Maxwell s'écrivent dans le cas TE :

$$\begin{cases} j\omega\epsilon_0\epsilon_r E_{y,\text{réel}}\mathbf{y} - \nabla \times \mathbf{H}_{\text{réel}} = \mathbf{0}, & \text{dans } \Omega_2, \\ j\omega\mu_0\mu_r \mathbf{H}_{\text{réel}} + \nabla \times (E_{y,\text{réel}}\mathbf{y}) = \mathbf{0}, & \text{dans } \Omega_2. \end{cases} \quad (2.66)$$

Si l'on remarque que l'égalité suivante est vérifiée :

$$\begin{cases} Z_0 = \frac{1}{c_0 \epsilon_0} \\ \mu_0 = \frac{Z_0}{c_0} \end{cases} \quad (2.67)$$

et que l'on multiplie la première ligne de (2.66) par  $Z_0$  alors on peut écrire

$$\begin{cases} j \frac{\omega}{c_0} \epsilon_r E_{y,\text{réel}} \mathbf{y} - \nabla \times (Z_0 \mathbf{H}_{\text{réel}}) = \mathbf{0}, \text{ dans } \Omega_2, \\ j \frac{\omega}{c_0} Z_0 \mu_r \mathbf{H}_{\text{réel}} + \nabla \times (E_{y,\text{réel}} \mathbf{y}) = \mathbf{0}, \text{ dans } \Omega_2. \end{cases} \quad (2.68)$$

Il faut alors faire le changement de variables présenté dans (2.69) pour passer des grandeurs normalisées (indicées par "calc") aux grandeurs dénormalisées (indicées par "réel") suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{\text{calc}} = Z_0 \mathbf{H}_{\text{réel}}, \\ E_{y,\text{calc}} = E_{y,\text{réel}}, \\ \omega_{\text{calc}} = \frac{\omega_{\text{réel}}}{c_0}. \end{cases} \quad (2.69)$$

Le système normalisé à résoudre dans le cas TE (le cas TM pour lequel la définition de la variable hybride change est présenté dans l'annexe F) est :

$$\begin{cases} j \omega_{\text{calc}} \epsilon_r E_{y,\text{calc}} \mathbf{y} - \nabla \times \mathbf{H}_{\text{calc}} = \mathbf{0}, \text{ dans } \Omega_2, \\ j \omega_{\text{calc}} \mu_r \mathbf{H}_{\text{calc}} + \nabla \times (E_{y,\text{calc}} \mathbf{y}) = \mathbf{0}, \text{ dans } \Omega_2. \end{cases} \quad (2.70)$$

On travaille par la suite avec les grandeurs indicées par "calc". Par souci de simplification des notations, cet indice sera omis. Pour signaler que ce sont des grandeurs discrétisées, elles sont indicées par  $h$ . On omet l'indice "y" sur  $E_y$  que l'on désigne par  $E_h$ .

L'ensemble des faces (segments) du domaine est désigné par  $\mathcal{F}_h$ . L'exposant  $I$  désigne les faces internes de  $\mathcal{F}_h$ . **Sur une face intérieure du maillage**, la condition de conservativité [45] s'écrit :

$$\langle \llbracket \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{H}}_h \rrbracket \cdot \mathbf{y}, \eta \rangle_{\mathcal{F}_h^I} = 0, \forall \eta \in M_h^p, \quad (2.71)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale aux faces, sortante (par rapport à l'orientation de la face) et  $\eta$  une fonction test telle que

$$\eta \in M_h^p = \{\eta \in L^2(\mathcal{F}_h) \mid \eta|_F \in \mathbb{P}_p(F), \forall F \in \mathcal{F}_h \text{ et } \eta|_{\Gamma_m} = 0\}, \quad (2.72)$$

où  $\Gamma_m$  désigne les frontières métalliques et  $\hat{\mathbf{H}}_h$  la trace du champ magnétique. La trace d'une fonction est définie comme la restriction de cette fonction au bord du domaine. La méthode consiste à définir les traces numériques de  $E_h$  et  $\mathbf{H}_h$  par :

$$\begin{cases} \hat{E}_h = \lambda_h, \\ \hat{\mathbf{H}}_h = \mathbf{H}_h + \tau(E_h - \lambda_h) \mathbf{t}, \end{cases} \quad (2.73)$$

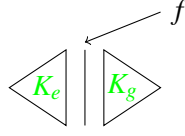


FIGURE 2.6 – Frontière entre deux éléments

où  $\lambda_h$  est la variable hybride,  $\tau$  est un paramètre de stabilisation et  $\mathbf{t}$  est le vecteur unitaire tangentiel associé à chaque face. Soit une face  $F_f$  d'indice  $f$  partagée par les éléments  $K_e$  et  $K_g$ , qui ont pour indices locaux  $l$  et  $k$  (cf. figure 2.6). L'égalité (2.71) s'écrit

$$\begin{aligned}
 \langle \llbracket \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{H}}_h \rrbracket \cdot \mathbf{y}, \eta \rangle_{\mathcal{F}_h^l} &= \langle \llbracket \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_h + \tau(E_h - \lambda_h)\mathbf{t}) \rrbracket \cdot \mathbf{y}, \eta \rangle_{\mathcal{F}_h^l} \\
 &= \langle \llbracket \mathbf{n} \times \mathbf{H}_h \rrbracket \cdot \mathbf{y} - \llbracket \tau(E_h - \lambda_h) \rrbracket, \eta \rangle_{\mathcal{F}_h^l} \\
 &= \left\langle \llbracket \mathbf{n} \times \mathbf{H}_h \rrbracket \cdot \mathbf{y} - (\tau^{(e,l)} E_h^{(e,l)} + \tau^{(g,k)} E_h^{(g,k)}) + (\tau^{(e,l)} + \tau^{(g,k)}) \lambda_h, \eta \right\rangle_{\mathcal{F}_h^l} \quad (2.74) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

où  $E_h$  et  $\mathbf{H}_h$  sont les champs électromagnétiques locaux et on a choisi  $\mathbf{n} \times \mathbf{t} = -\mathbf{y}$ .

**Sur une face appartenant à  $\Sigma$** , on écrit la relation :

$$\langle \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{y}, \eta \rangle_{\Sigma} = \left\langle \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} (\lambda_h + Z_0 \llbracket \hat{\mathbf{H}}_{\text{réel}} \times \mathbf{n}_{wqip} \rrbracket) \cdot \mathbf{y}, \eta \right\rangle_{\Sigma}. \quad (2.75)$$

Le vecteur normal  $\mathbf{n}$  aux faces est sortant par rapport à l'orientation de la face, alors que pour la WCIP le vecteur  $\mathbf{n}_{wqip}$  est entrant dans le domaine 2, ce qui signifie que :

$$\mathbf{n}_{wqip} = -\mathbf{z}. \quad (2.76)$$

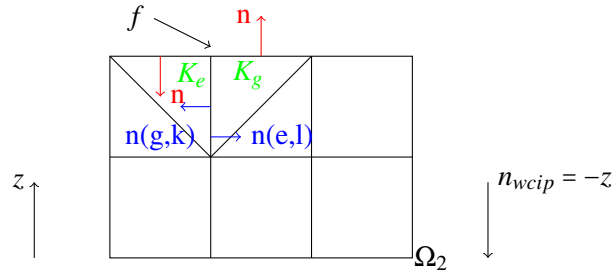


FIGURE 2.7 – Normales

Avec le changement de variables de (2.69) et (2.76), l'équation (2.75) devient :

$$\langle \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{y}, \eta \rangle_{\Sigma} = \left\langle \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} (\lambda_h + \llbracket \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{H}} \rrbracket) \cdot \mathbf{y}, \eta \right\rangle_{\Sigma} \quad \text{si } \mathbf{n}_{wqip} = -\mathbf{n}. \quad (2.77)$$



Donc, on a :

$$\langle [\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{H}}] \cdot \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\Sigma} + \langle \boldsymbol{\lambda}_h, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\Sigma} = 2\sqrt{Z_0} \langle \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\Sigma}. \quad (2.78)$$

**Sur une face interne**, d'après (2.74), la figure 2.7 et la définition de la trace donnée par (2.73), on peut écrire :

$$\begin{aligned} & \left\langle (\mathbf{n}^{(e,l)} \times \mathbf{H}_h^e) \cdot \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta} \right\rangle_{\partial K_l^e} \pm \left\langle (\mathbf{n}^{(g,k)} \times \mathbf{H}_h^g) \cdot \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta} \right\rangle_{\partial K_g^k} - \tau^{(e,l)} \langle E_h^e, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_l^e} - \tau^{(g,k)} \langle E_h^g, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_g^k} + \\ & \tau^{(e,l)} \langle \boldsymbol{\lambda}_h, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_l^e} + \tau^{(g,k)} \langle \boldsymbol{\lambda}_h, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_g^k} = 0. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Or, sur le bord, d'après la figure 2.7, (2.79) devient :

$$\left\langle (\mathbf{n}^{(e,l)} \times \mathbf{H}_h^e) \cdot \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta} \right\rangle_{\partial K_l^e} - \tau^{(e,l)} \langle E_h^e, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_l^e} + \tau^{(e,l)} \langle \boldsymbol{\lambda}_h, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_l^e} = 0. \quad (2.80)$$

Or :

$$\left\langle (\mathbf{n}^{(e,l)} \times \mathbf{H}_h^e) \cdot \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta} \right\rangle_{\partial K_l^e} = \left\langle n_z^{(e,l)} H_x^e - n_x^{(e,l)} H_z^e, \boldsymbol{\eta} \right\rangle_{\partial K_l^e}. \quad (2.81)$$

On pose :

$$H_u^e = \sum_{i=1}^{i=N_p^e} \underline{H_{u,i}}^e \varphi_i^e, \quad (2.82)$$

où les grandeurs soulignées  $\underline{H_{u,i}}$  correspondent aux composantes du vecteur  $H_u^e$  si bien que l'on a

$$\underline{H_u}^e = \begin{pmatrix} H_{u,1}^e \\ H_{u,2}^e \\ \dots \\ H_{u,N_p}^e \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

où  $N_p^e$  est la dimension de  $\mathbb{P}_p(K_e)$ , et  $\varphi_i^e$  est une base de décomposition de  $H_u^e$ . La fonction test  $\boldsymbol{\eta}$  vérifiant

$$\boldsymbol{\eta} = \Psi_j^e, \quad (2.84)$$

l'équation (2.81) peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\left\langle (\mathbf{n}^{(e,l)} \times \mathbf{H}_h^e) \cdot \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta} \right\rangle_{\partial K_l^e} \mathbf{y} = (\mathbb{Q}_{zl}^e)^T \underline{H_x}^e - (\mathbb{Q}_{xl}^e)^T \underline{H_z}^e, \quad (2.85)$$

avec

$$\mathbb{Q}_{ul}^e[i, j] = \left\langle \varphi_i^e, n_u^e \Psi_j^{\sigma(e,l)} \right\rangle_{\partial K_l^e} = \int_{\partial K_l^e} n_u^e \varphi_i^e \Psi_j^{\sigma(e,l)} ds, u \in \{x, z\}. \quad (2.86)$$

Donc pour des **faces intérieures au domaine**, le système matriciel global est :

$$\boxed{(\mathbb{Q}_{zl}^e)^T \underline{H_x}^e - (\mathbb{Q}_{xl}^e)^T \underline{H_z}^e - \tau^{(e,l)} \mathbb{F}_l^e E^e - \tau^{(g,k)} \mathbb{F}_k^g E^g + \tau^{(e,l)} \mathbb{G}^f \boldsymbol{\lambda}^f + \tau^{(g,k)} \mathbb{G}^f \boldsymbol{\lambda}^f = 0} \quad (2.87)$$

où les matrices  $\mathbb{F}$  et  $\mathbb{G}$  sont définies dans l'annexe E.

Pour des **faces appartenant à  $\Sigma$** , ce système matriciel s'écrit :

$$\boxed{(\mathbb{Q}_{zl}^e)^T \underline{H_x}^e - (\mathbb{Q}_{xl}^e)^T \underline{H_z}^e - \tau^{(e,l)} \mathbb{F}_l^e E^e + (\tau^{(e,l)} + 1) \mathbb{G}^f \boldsymbol{\lambda}^f = 2\sqrt{Z_0} \mathbb{H} \underline{A}_2^f}, \quad (2.88)$$

avec :

$$A_2^f = \sum_{j=1}^{N_p^f} A_{2j}^f h_j^f \quad (2.89)$$

$$\langle A_2^f, \eta \rangle = \mathbb{H} A_2^f$$

où  $N_p^f$  est la dimension de  $\mathbb{P}_p(F_f)$ .

$$\langle \lambda_h, \eta \rangle = \mathbb{G}^f \underline{\lambda}^f. \quad (2.90)$$

La variable hybride étant connue, on peut en déduire les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  dans l'ensemble du domaine.

### Changement de l'impédance de référence :

Dans le cas où l'on ne souhaite plus prendre comme référence l'impédance du vide  $Z_0$  mais une impédance  $Z_{02} = \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$  alors certains changements s'imposent dans la résolution. On divise tout le système (2.68) par  $\sqrt{\epsilon_r}$  :

$$\begin{cases} j \frac{\omega}{c_0} \epsilon_r \frac{E}{\sqrt{\epsilon_r}} - \nabla \times \frac{Z_0 \mathbf{H}}{\sqrt{\epsilon_r}} = 0, \text{ dans } \Omega_2, \\ j \frac{\omega}{c_0} \mu_r \frac{Z_0 \mathbf{H}}{\sqrt{\epsilon_r}} + \nabla \times \frac{E}{\sqrt{\epsilon_r}} = 0, \text{ dans } \Omega_2. \end{cases} \quad (2.91)$$

On fait alors le changement de variables :

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{\text{calc}} = Z_{02} \mathbf{H}, \\ E_{\text{calc}} = \frac{E}{\sqrt{\epsilon_r}}, \\ \omega_{\text{calc}} = \frac{\omega}{c_0}. \end{cases} \quad (2.92)$$

En conséquence, il suffit de remplacer  $Z_0$  par  $Z_{02}$  et de faire le changement ci-dessus sur le champ électrique. En effet, on conserve (2.73) et (2.78) devient :

$$\langle (\llbracket \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{H}} \rrbracket) \cdot \mathbf{y}, \eta \rangle_{\Sigma_s} + \langle \sqrt{\epsilon_r} \lambda_h, \eta \rangle_{\Sigma_s} = 2\sqrt{Z_{02}} \langle \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{y}, \eta \rangle_{\Sigma_s}. \quad (2.93)$$

(2.88) devient :

$$\boxed{(\mathbb{Q}_{z_l}^e)^T H_x^e - (\mathbb{Q}_{x_l}^e)^T H_z^e - \tau^{(e,l)} \mathbb{F}_l^e E^e + (\tau^{(e,l)} + \sqrt{\epsilon_r}) \mathbb{G}^f \underline{\lambda}^f = 2\sqrt{Z_{02}} \mathbb{H} A_2^f}. \quad (2.94)$$

## 2.3 Validation numérique et ses enjeux

Dans tous les exemples traités, les couches de métallisation sont considérées sans épaisseur.

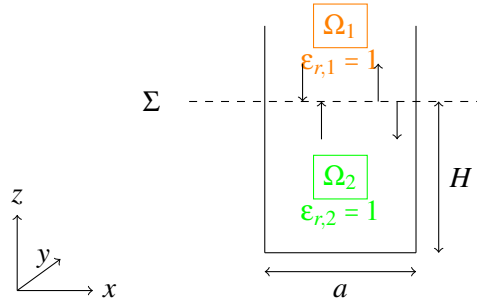


FIGURE 2.8 – Rappel de la géométrie et de ses paramètres

### 2.3.1 Cas test du vide

Ce cas test, bien que simple, permet d'effectuer une première validation sachant que la solution théorique est connue. Les solutions analytiques en champ électrique et magnétique sur  $\Sigma$  ont été décrites dans l'annexe C. Connaissant l'ordre de convergence (son calcul est rappelé dans l'annexe B.2) des éléments finis ou de HDG qui est de 2 avec des polynômes d'ordre 1 ainsi que celui de la TLM et sachant que la WCIP est analytique dans ces cas théoriques, nous pouvons supposer que l'ordre de convergence de la méthode hybride sera également de 2. Ainsi, nous calculons en premier lieu l'erreur relative de discrétisation sur la composante  $E_y$  dans le cas TE pour les méthodes hybrides WCIP/FEM- $Q_1$ , WCIP/FDTLM et WCIP/HDG- $P_1$ . Cette erreur est résumée dans les tableaux 2.1 et 2.2 respectivement pour les composantes tangentielles du champ électrique et magnétique. La fréquence de travail est de 16 GHz. La longueur  $a$  est de 1,27 cm et la hauteur  $H$  est de 1,27 cm. La variable "Mesh size" désigne le ratio entre le pas de maillage considéré et le pas de maillage initial caractérisé par  $d_x = d_z = 794 \mu\text{m}$  dans les deux directions  $x$  et  $z$ . Ainsi, un ratio de 1/2 signifie que le pas de maillage initial a été divisé par 2. L'expression de l'erreur relative  $errrel\_e$  en champ électrique est donnée par :

$$errrel\_e = \left\| \frac{\mathbf{E}_y^{W,TE} - \mathbf{E}_y^{\text{analytique,TE}}}{\max |\mathbf{E}_y^{\text{analytique,TE}}|} \right\|_{L^2}. \quad (2.95)$$

Mesh size	N	WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	16	$2,80 \cdot 10^{-3}$	-	$5,92 \cdot 10^{-3}$	-	$3,45 \cdot 10^{-4}$	-
1/2	32	$7,00 \cdot 10^{-4}$	2,0018	$1,47 \cdot 10^{-3}$	2,0068	$7,58 \cdot 10^{-5}$	2,1844
1/4	64	$1,75 \cdot 10^{-4}$	2,0005	$3,68 \cdot 10^{-4}$	2,0017	$1,78 \cdot 10^{-5}$	2,0932
1/8	128	$4,37 \cdot 10^{-5}$	2,0001	$9,19 \cdot 10^{-5}$	2,0004	$4,30 \cdot 10^{-6}$	2,0463
1/16	256	$1,39 \cdot 10^{-5}$	2,0000	$2,30 \cdot 10^{-5}$	2,0001	$1,06 \cdot 10^{-6}$	2,0230

TABLE 2.1 – Erreur relative sur  $E_y$  quand le mode  $TE_1$  est injecté.

On obtient bien comme attendu un ordre de convergence de 2 sur les champs électrique et magnétique. On constate également que les erreurs dans les cas FEM et FDTLM sont proches

Mesh size	N	WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	16	$7,78.10^{-4}$	-	$1,64.10^{-3}$	-	$9,58.10^{-5}$	-
1/2	32	$1,94.10^{-4}$	2,0018	$4,09.10^{-4}$	2,0068	$2,11.10^{-5}$	2,1849
1/4	64	$4,86.10^{-5}$	2,0005	$1,02.10^{-4}$	2,0017	$4,93.10^{-6}$	2,0936
1/8	128	$1,21.10^{-5}$	2,0001	$2,55.10^{-5}$	2,0004	$1,19.10^{-6}$	2,0469
1/16	256	$3,03.10^{-6}$	2,0000	$6,38.10^{-6}$	2,0001	$2,94.10^{-7}$	2,0235

TABLE 2.2 – Erreur relative sur  $H_x$  quand le mode  $TE_1$  est injecté.

alors qu'avec HDG, l'erreur est plus faible d'un facteur 10. On effectue ensuite le même travail en changeant l'ordre d'approximation côté HDG. On implémente donc les méthodes hybrides WCIP/HDG- $P_0$ , WCIP/HDG- $P_1$  et WCIP/HDG- $P_2$  : la FEM n'étant pas la méthode d'intérêt pour l'hybridation, ce travail n'est pas effectué avec la FEM. Ces résultats sont présentés dans les tableaux 2.3 et 2.4.

Mesh size	N	WCIP/HDG- $P_0$		WCIP/HDG- $P_1$		WCIP/HDG- $P_2$	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	16	$6,48.10^{-2}$	-	$3,45.10^{-4}$	-	$1,63.10^{-4}$	-
1/2	32	$3,69.10^{-2}$	0,8121	$7,58.10^{-5}$	2,1844	$3,70.10^{-5}$	2,1381
1/4	64	$1,97.10^{-2}$	0,9016	$1,78.10^{-5}$	2,0932	$8,79.10^{-6}$	2,0731
1/8	128	$1,02.10^{-2}$	0,9498	$4,30.10^{-6}$	2,0463	$2,14.10^{-6}$	2,0377
1/16	256	$5,20.10^{-3}$	0,9746	$1,06.10^{-6}$	2,0230	$5,28.10^{-7}$	2,0192

TABLE 2.3 – Vide : Erreur relative sur  $E_y$  quand le mode  $TE_1$  est injecté.

Mesh size	N	WCIP/HDG- $P_0$		WCIP/HDG- $P_1$		WCIP/HDG- $P_2$	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	16	$1,80.10^{-2}$	-	$9,58.10^{-5}$	-	$4,52.10^{-5}$	-
1/2	32	$1,02.10^{-2}$	0,8121	$2,11.10^{-5}$	2,1849	$1,03.10^{-5}$	2,1381
1/4	64	$5,48.10^{-3}$	0,9016	$4,93.10^{-6}$	2,0936	$2,44.10^{-6}$	2,0730
1/8	128	$2,84.10^{-3}$	0,9497	$1,19.10^{-6}$	2,0469	$5,94.10^{-7}$	2,0378
1/16	256	$1,44.10^{-3}$	0,9746	$2,94.10^{-7}$	2,0235	$1,47.10^{-7}$	2,0192

TABLE 2.4 – Vide : Erreur relative sur  $H_x$  quand le mode  $TE_1$  est injecté.

Afin de visualiser la comparaison entre les différentes méthodes, on représente les différentes erreurs sur les figures 2.9 et 2.10. Ainsi, on montre numériquement que l'hybridation avec la méthode HDG- $P_0$  donne un ordre de convergence de 1, celle avec  $P_1$  de 2 comme vu précédemment et celle avec  $P_2$  un ordre de 2 également, ce qui nous fait conclure que la WCIP limite la convergence. On montre également que l'hybridation avec HDG- $P_0$  fournit l'erreur de discrétisation la plus élevée, ce qui était attendu. On constate que la WCIP/HDG- $P_1$  est meilleure que la WCIP/FEM- $Q_1$ , ce qui peut s'expliquer par le fait que, pour un même pas de maillage,

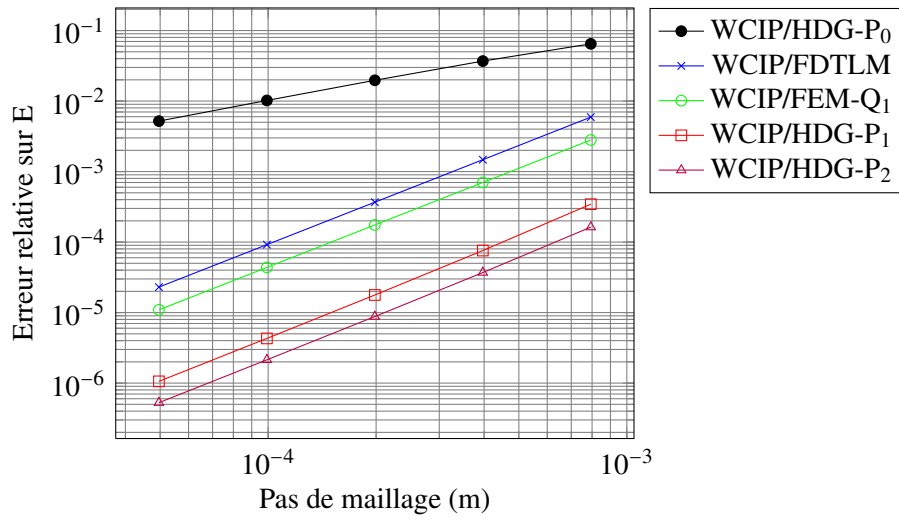


FIGURE 2.9 – Vide : Erreur de discrétisation relative sur  $E_y$

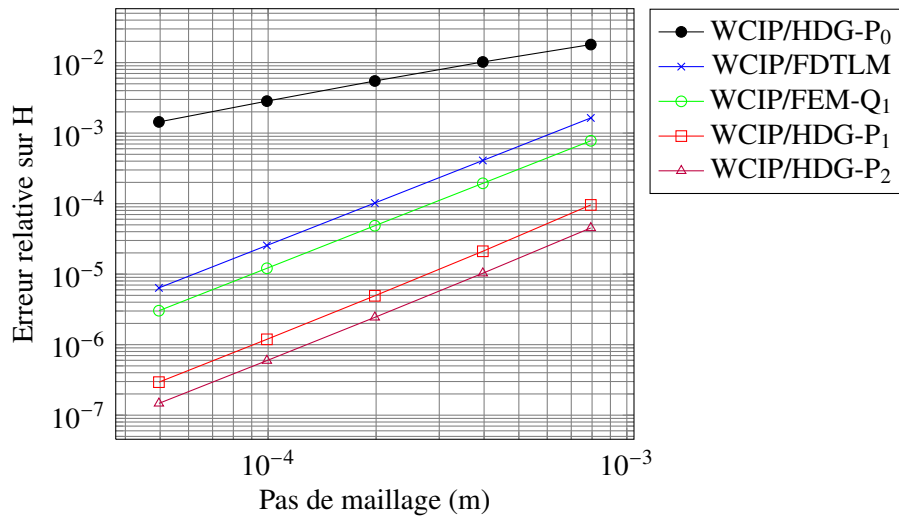


FIGURE 2.10 – Vide : Erreur de discrétisation relative sur  $H_x$

le nombre de degrés de liberté est plus important avec HDG qu'avec la FEM. Ainsi grâce à ce cas test dont l'interface entre les domaines est purement fictive, on trouve des valeurs d'ordre de convergence cohérentes.

De plus, on peut représenter le spectre de l'opérateur  $S_2^F$  (introduit par (2.2)) selon les différentes méthodes. Ainsi, on trace sur la figure 2.11 le spectre de l'opérateur éléments finis noté  $S^{\text{FEM}}$  et celui de la WCIP noté  $S^{\text{WCIP}}$  pour  $N = 128$  dans le cas du vide. La norme 2 de la différence des

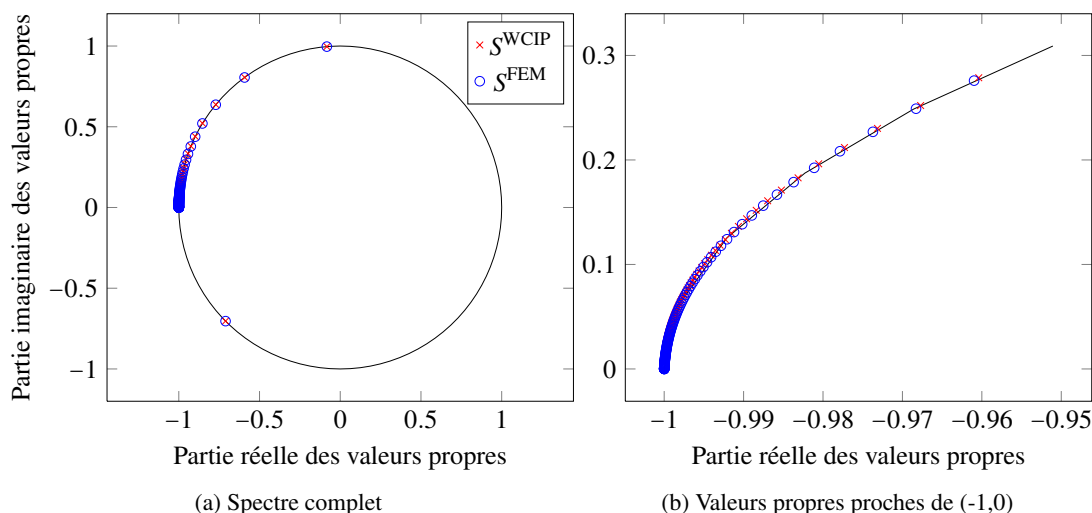


FIGURE 2.11 – Spectre des opérateurs  $S^{\text{FEM}}$  et  $S^{\text{WCIP}}$  dans le cas où  $N = 128$ .

opérateurs pour  $N = 128$  est de  $2,27 \cdot 10^{-2}$ . On constate que les valeurs propres de la FEM d'ordre le plus faible (autrement dit celles qui sont éloignées du point  $(-1,0)$ ) sont superposées à celles de la WCIP. Plus on monte en ordre et moins elles sont bien décrites.

On fait le même travail avec la FDTLM et on trace les spectres des opérateurs volumiques  $S^{\text{WCIP}}$  et  $S^{\text{FDTLM}}$  pour 1024 degrés de libertés, notés  $N_{\text{dof}}$ . On voit ici, comme dans le cas FEM, que toutes les valeurs propres ont un module de 1, ce qui signifie qu'il n'y a pas de dissipation. On constate que les valeurs propres d'ordre le plus faible de la FDTLM sont superposées à celles de la WCIP contrairement à celles d'ordre le plus élevé comme on l'avait vu avec la FEM. On n'effectue pas de tracé de spectre pour HDG, l'opérateur étant complexe à expliciter.

On cherche ensuite à comparer numériquement les opérateurs dans le cas du vide. Les écarts entre opérateurs en norme 2 sont présentés dans le tableau 2.5 où l'acronyme OOM signifie Out Of Memory. Nous allons présenter les erreurs relatives et absolues concernant les champs électrique et magnétique. Ceci nous permet d'étudier la convergence entre la solution exacte et la méthode hybride ainsi établie. L'erreur est calculée sur la ligne interface entre les deux domaines. On a  $N$  mailles selon  $x$  et  $N$  mailles selon  $z$ . On a donc  $(N + 1)^2$  inconnues, auxquelles il faut retirer celles des murs électriques (cf. figure 2.13). En conséquence, le nombre d'inconnues  $N_{\text{dof}}$  est obtenu par la relation :

$$N_{\text{dof}} = (N + 1)^2 - (N + 1) - 2N = N(N - 1). \quad (2.96)$$

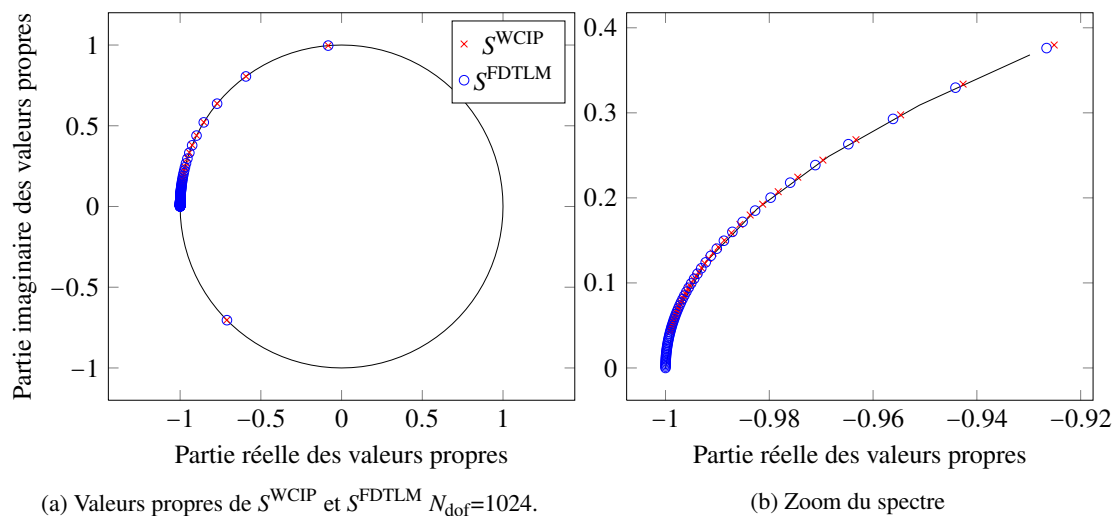


FIGURE 2.12 – Valeurs propres dans le cas TE

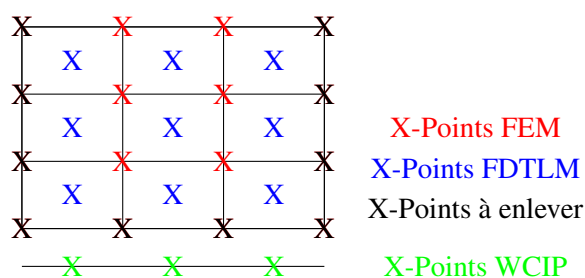


FIGURE 2.13 – Nombre d'inconnues.

Ceci nous permet d'effectuer les comparaisons entre opérateurs WCIP et FEM dans le tableau 2.5 et entre les opérateurs WCIP et FDTLM dans le tableau 2.6. Aucune comparaison n'est

Taille du maillage	N (WCIP)	$N_{\text{dof}}$ (FEM)	$\ S_2^{\text{WCIP}} - S_2^{\text{FEM}}\ _2$	Ordre
1	16	240	$1,810.10^{-1}$	-
1/2	32	992	$9,057.10^{-2}$	0,9989
1/4	64	4032	$4,530.10^{-2}$	0,9995
1/8	128	16256	$2,265.10^{-2}$	1,0000
1/16	256	65280	OOM	OOM

TABLE 2.5 – Ecart entre opérateurs FEM et WCIP.

effectuée avec HDG car il est compliqué de construire explicitement l'opérateur associé à cette méthode.

Mesh size	N	$N_{\text{dof}}$	$\ S_2^{\text{WCIP}} - S_2^{\text{FDTLM}}\ _2$	Ordre
1	16	256	$1,693.10^{-1}$	-
1/2	32	1024	$8,467.10^{-2}$	0,9997
1/4	64	4096	$4,233.10^{-2}$	1,0002
1/8	128	16384	$2,117.10^{-2}$	0,9997
1/16	256	65536	$1,058.10^{-2}$	1,0007

TABLE 2.6 – Ecart entre opérateurs FDTLM et WCIP.

### 2.3.2 Cas test du ruban

On insère désormais une ligne microruban au niveau de la surface de raccordement  $\Sigma$  entre les méthodes comme le montre la figure 2.14. Elle est centrée et sa largeur est de  $a/2$ .  $a$  et  $H$  valent toujours 1,27 cm.

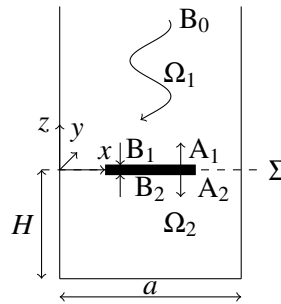


FIGURE 2.14 – Ligne microruban

On éclaire ce ruban avec un mode  $\text{TE}_1$  et on calcule l'erreur sur  $E$  et  $J$  comme dans le cas précédent. Dans ce cas, on ne connaît pas de solution analytique, la référence choisie est la solution obtenue par la WCIP en maillant avec  $N = 2^{15}$  où  $N$  est le nombre de segments de  $\Sigma$ . Cette solution de référence est désignée par  $\mathbf{E}^{\text{Wverymeshed,TE}}$ , il s'agit de la limite mémoire de la WCIP. Les erreurs relatives sur le champ pour les méthodes hybrides WCIP/HDG- $P_0$  et WCIP/HDG- $P_1$  ainsi que WCIP/FEM- $Q_1$  et WCIP/FDTLM sont respectivement décrites dans les tableaux 2.7 et 2.8. Le même travail est effectué sur le courant dans les tableaux 2.9 et 2.10.

Mesh size	N	WCIP/HDG- $P_0$		WCIP/HDG- $P_1$	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	16	$3,09.10^{-2}$	-	$2,91.10^{-2}$	-
1/2	32	$1,72.10^{-2}$	0,8479	$1,58.10^{-2}$	0,8827
1/4	64	$9,08.10^{-3}$	0,9188	$8,23.10^{-3}$	0,9373
1/8	128	$4,76.10^{-3}$	0,9314	$4,31.10^{-3}$	0,9350
1/16	256	$2,46.10^{-3}$	0,9517	$2,23.10^{-3}$	0,9507

TABLE 2.7 – Erreur relative de discrétisation en norme  $L^2$  sur le champ  $E$  avec WCIP/HDG.



Mesh size	WCIP/FEM-Q <sub>1</sub>		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG-P <sub>1</sub>	
	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	2,34.10 <sup>-2</sup>	-	2,65.10 <sup>-2</sup>	-	2,91.10 <sup>-2</sup>	-
1/2	1,34.10 <sup>-2</sup>	0,8025	1,47.10 <sup>-2</sup>	0,8557	1,58.10 <sup>-2</sup>	0,8827
1/4	7,24.10 <sup>-3</sup>	0,8933	7,72.10 <sup>-3</sup>	0,9237	8,23.10 <sup>-3</sup>	0,9373
1/8	3,86.10 <sup>-3</sup>	0,9059	4,06.10 <sup>-3</sup>	0,9262	4,31.10 <sup>-3</sup>	0,9350
1/16	2,03.10 <sup>-3</sup>	0,9282	2,11.10 <sup>-3</sup>	0,9440	2,23.10 <sup>-3</sup>	0,9507

TABLE 2.8 – Erreur relative de discrétisation en norme  $L^2$  sur le champ E avec WCIP/FEM-Q<sub>1</sub>, WCIP/FDTLM et WCIP/HDG-P<sub>1</sub>.

On constate que les ordres de convergence respectifs pour le champ et le courant sont de 1 et 0,5 dans le cas TE quelle que soit la méthode mise en œuvre dans le milieu 2, avec des erreurs relatives très proches pour les différentes méthodes. La réduction d'ordre par rapport au cas précédent vient de la discontinuité entre le diélectrique et le métal qui rend la solution moins régulière au niveau de l'interface. Cela provient aussi du fait que la méthode WCIP est d'ordre 1 dans ce cas. En conséquence, en termes de convergence, hybrider avec HDG-P<sub>0</sub> est suffisant pour ce type de situation.

Mesh size	WCIP/HDG-P <sub>0</sub>		WCIP/HDG-P <sub>1</sub>	
	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	2,74.10 <sup>-2</sup>	-	2,76.10 <sup>-2</sup>	-
1/2	1,92.10 <sup>-2</sup>	0,5114	1,95.10 <sup>-2</sup>	0,5048
1/4	1,34.10 <sup>-2</sup>	0,5173	1,37.10 <sup>-2</sup>	0,5080
1/8	9,34.10 <sup>-3</sup>	0,5254	9,59.10 <sup>-3</sup>	0,5121
1/16	6,44.10 <sup>-3</sup>	0,5373	6,70.10 <sup>-3</sup>	0,5174

TABLE 2.9 – Ligne microruban : erreur relative de discrétisation en norme  $L^2$  sur le courant J avec WCIP/HDG.

Mesh size	WCIP/FEM-Q <sub>1</sub>		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG-P <sub>1</sub>	
	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	2,77.10 <sup>-2</sup>	-	2,76.10 <sup>-2</sup>	-	2,76.10 <sup>-2</sup>	-
1/2	1,95.10 <sup>-2</sup>	0,5037	1,95.10 <sup>-2</sup>	0,5044	1,95.10 <sup>-2</sup>	0,5048
1/4	1,37.10 <sup>-2</sup>	0,5064	1,37.10 <sup>-2</sup>	0,5073	1,37.10 <sup>-2</sup>	0,5080
1/8	9,65.10 <sup>-3</sup>	0,5097	9,61.10 <sup>-3</sup>	0,5111	9,59.10 <sup>-3</sup>	0,5121
1/16	6,76.10 <sup>-3</sup>	0,5139	6,72.10 <sup>-3</sup>	0,5160	6,70.10 <sup>-3</sup>	0,5174

TABLE 2.10 – Ligne microruban : erreur relative de discrétisation en norme  $L^2$  sur le courant J avec WCIP/FEM-Q<sub>1</sub>, WCIP/FDTLM et WCIP/HDG-P<sub>1</sub>.

### 2.3.3 Diélectrique homogène avec permittivité relative $\epsilon_r = 5$

La configuration de calcul est schématisée sur la figure 2.15. La fréquence de travail est 16

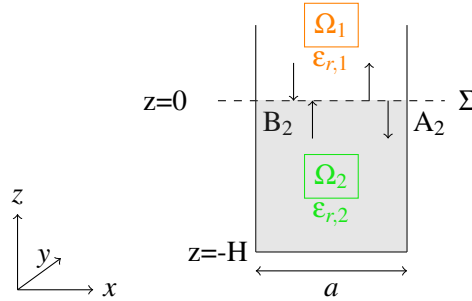


FIGURE 2.15 – Insertion d'un diélectrique homogène.

GHz, la longueur d'onde dans le diélectrique est définie par

$$\lambda_g = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} f_0} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{5} 16 \cdot 10^9} = 8,39 \text{ mm}. \quad (2.97)$$

Il est nécessaire d'avoir  $d_x = \frac{a}{N} < \frac{\lambda_g}{10} = 839 \mu\text{m}$  et  $d_z = \frac{H}{N} < \frac{\lambda_g}{10} = 839 \mu\text{m}$ . Ceci est possible dès  $N = 16$ . La longueur  $a$  et la hauteur  $H$  valent 1,27cm. Dans le domaine dans lequel se trouve le diélectrique, nous testons deux possibilités pour la définition des ondes : l'impédance du vide ( $Z_0$ ) ou l'impédance du milieu ( $Z_{02}$ ). Les erreurs entre opérateurs FEM et WCIP, FDTLM et WCIP sont présentées dans le tableau 2.11 dans le cas où l'on prend  $Z_{02}$ . On retrouve comme dans le cas du vide un ordre de convergence de 1 sur les opérateurs, ce qui semble cohérent avec le fait que le milieu reste homogène. Dans le tableau 2.12, on compare les mêmes opérateurs

Mesh size	N	$\ S_2^{\text{WCIP}} - S_2^{\text{FEM}}\ _2$		$\ S_2^{\text{WCIP}} - S_2^{\text{FDTLM}}\ _2$	
		Ecart	Ordre	Ecart	Ordre
1	16	$4,0440 \cdot 10^{-1}$	-	$4,6455 \cdot 10^{-1}$	-
1/2	32	$2,0247 \cdot 10^{-1}$	0,9981	$1,8932 \cdot 10^{-1}$	1,2950
1/4	64	$1,0129 \cdot 10^{-1}$	0,9992	$9,4660 \cdot 10^{-2}$	1,0000
1/8	128	$5,0648 \cdot 10^{-2}$	0,9999	$4,7330 \cdot 10^{-2}$	1,0000
1/16	256	OOM	OOM	$2,3665 \cdot 10^{-2}$	1,0000

TABLE 2.11 – Erreur entre opérateurs avec  $\epsilon_r=5$  et une impédance de  $Z_{02}$

mais dans ce cas, on prend comme impédance de référence  $Z_0$ . Cette erreur entre opérateurs semble légèrement plus faible à partir de  $N = 64$  dans le cas  $Z_0$ . Avec  $Z_{02}$ , l'ordre de convergence semble plus uniforme.

On s'intéresse ensuite aux erreurs sur le champ électrique dans le tableau 2.13. Comme on ne connaît pas la solution analytique on compare avec la solution WCIP maillée à  $N = 2^{13}$ . On montre que le fait de prendre  $Z_0$  ou  $Z_{02}$  nous donne strictement les mêmes erreurs relatives sur

Mesh size	$N$	$\ S_2^{\text{WCIP}} - S_2^{\text{FEM}}\ _2$		$\ S_2^{\text{WCIP}} - S_2^{\text{FDTLM}}\ _2$	
		Ecart	Ordre	Ecart	Ordre
1	16	$4,2598.10^{-1}$	-	$7,0276.10^{-1}$	-
1/2	32	$1,2503.10^{-1}$	1,7685	$2,3388.10^{-1}$	1,5873
1/4	64	$4,5355.10^{-2}$	1,4629	$6,3450.10^{-2}$	1,8821
1/8	128	$2,2658.10^{-2}$	1,0012	$2,1171.10^{-2}$	1,5835
1/16	256	OOM	OOM	$1,0584.10^{-2}$	1,0002

TABLE 2.12 – Erreur entre opérateurs pour  $\epsilon_r=5$  et une impédance de  $Z_0$

Mesh size	$N$	$\frac{\ E^{\text{H,TE}} - E^{\text{Wverymeshed,TE}}\ }{\max E^{\text{Wverymeshed,TE}} }_{L^2}$					
		WCIP		WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	16	$7,80.10^{-3}$	-	$2,74.10^{-2}$	-	$5,32.10^{-2}$	-
1/2	32	$3,90.10^{-3}$	1,0024	$7,52.10^{-3}$	1,8654	$1,31.10^{-2}$	2,0266
1/4	64	$1,94.10^{-3}$	1,0056	$2,52.10^{-3}$	1,5799	$3,64.10^{-3}$	1,8422
1/8	128	$9,63.10^{-4}$	1,0114	$1,04.10^{-3}$	1,2710	$1,23.10^{-3}$	1,5645
1/16	256	$4,74.10^{-4}$	1,0231	$4,84.10^{-4}$	1,1064	$5,11.10^{-4}$	1,2694

TABLE 2.13 – Erreur sur E des différentes méthodes dans le cas  $Z_0$ .

les champs (le cas  $Z_{02}$  n'est pas explicité car ce sont strictement les mêmes résultats que le cas  $Z_0$ ). Entre la FEM et la FDTLM, la FEM semble fournir des erreurs relatives légèrement moins importantes. Concernant l'ordre de convergence, il est situé entre 1 et 2 (plus proche de 1 quand on raffine). Enfin, pour clore les comparaisons, nous calculons l'erreur relative dans le cas de la méthode hybride WCIP/HDG dans le cas où l'on prend  $Z_0$  et dans les cas où le paramètre de stabilisation  $\tau$  (présenté dans le chapitre 1) vaut  $1/Z_0$  et 1. Les résultats sont présentés dans le tableau 2.14. Il faut également ajouter que quand on modifie le maillage les valeurs d'erreur

Mesh size	$N$	$\frac{\ E^{\text{H,TE}} - E^{\text{Wverymeshed,TE}}\ }{\max E^{\text{Wverymeshed,TE}} }_{L^2}$			
		WCIP/HDG : $\tau=1/Z_0$		WCIP/HDG : $\tau=1$	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	16	$1,34.10^{-2}$	-	$7,88.10^{-3}$	-
1/2	32	$4,73.10^{-3}$	1,4978	$3,90.10^{-3}$	1,0160
1/4	64	$2,05.10^{-3}$	1,2089	$1,94.10^{-3}$	1,0062
1/8	128	$9,74.10^{-4}$	1,0714	$9,63.10^{-4}$	1,0114
1/16	256	$4,74.10^{-4}$	1,0378	$4,74.10^{-4}$	1,0231

TABLE 2.14 – Erreur sur E de WCIP/HDG par rapport à la WCIP très maillée ( $N = 2^{13}$ ).

sont légèrement différentes de même que le nombre d'itérations (cf. tableau 2.15). En effet, "inhomo\_v4" et "mesh\_wcip" sont les noms de deux types de maillage différents. Néanmoins

c'est quand  $\tau$  vaut 1 que le nombre d'itérations est le plus faible.

Mesh size	N	inhomo_v4	inhomo_v4	mesh_wcip	mesh_wcip
		avec $\tau=1/Z_0$	avec $\tau=1$	avec $\tau=1/Z_0$	avec $\tau=1$
1	16	16	14	22	20
1/2	32	22	21	26	23
1/4	64	24	22	28	23
1/8	128	24	18	27	18
1/16	256	20	6	22	8

TABLE 2.15 – Nombre d'itérations du GMRES selon le solveur itératif avec HDG.

Une comparaison est maintenant effectuée entre deux solveurs itératifs : GMRES et BICG-STAB. On prend un paramètre de redémarrage de la méthode GMRES (restart) de 100. On constate qu'on obtient 2 itérations à convergence quel que soit le solveur et quelle que soit la méthode : WCIP seule, WCIP/FDTLM ou WCIP/FEM. On constate aussi que prendre  $Z_{02}$  ou  $Z_0$  ne change pas ces nombres d'itérations. Par contre avec la méthode WCIP/HDG, on n'obtient pas 2 itérations (cf. tableau 2.15).

Les spectres dans le cas diélectrique pour la WCIP, les méthodes FEM et FDTLM sont présentés sur la figure 2.16 avec  $N = 128$ . Comme le montraient les tableaux 2.11 et 2.12, les écarts entre opérateurs sont suffisamment faibles pour que les valeurs propres paraissent superposées sur la figure 2.16.

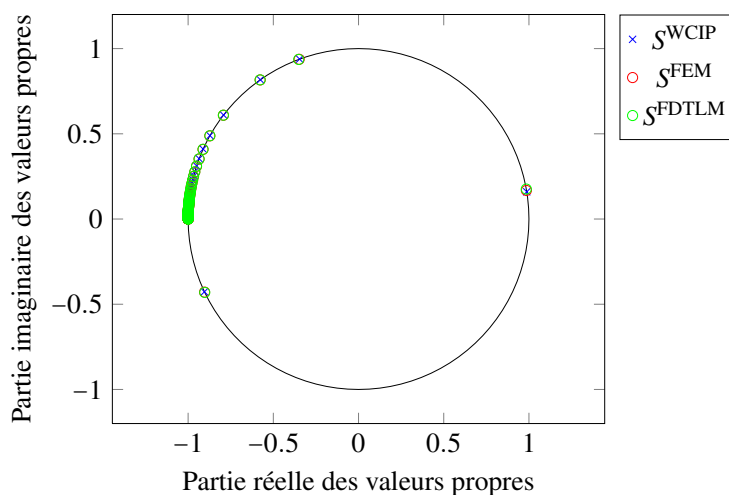


FIGURE 2.16 – Valeurs propres des opérateurs  $S^{\text{WCIP}}$ ,  $S^{\text{FEM}}$  et  $S^{\text{FDTLM}}$  pour  $N = 128$ .

### 2.3.4 Ruban sur un substrat de permittivité relative $\epsilon_r=5$

On insère un ruban sur la surface  $z=0$  (cf. figure 2.17). On travaille à la même fréquence que dans les deux cas précédents et  $a$  et  $H$  ont toujours les mêmes valeurs. On calcule les erreurs

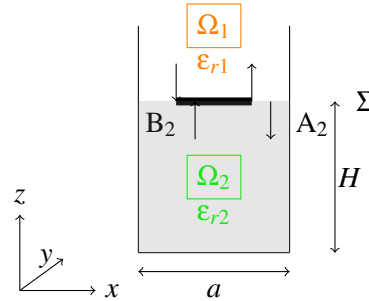


FIGURE 2.17 – Insertion d'un diélectrique homogène.

relatives sur le champ  $E$  (cf. tableaux 2.16 et 2.17) avec toutes les méthodes hybrides. On réalise cette étude avec deux impédances de référence : l'une vaut l'impédance du vide  $Z_0$ , l'autre vaut l'impédance du diélectrique,  $Z_{02} = \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$ . Pour HDG, on prend un paramètre de stabilisation  $\tau$  égal à 1. La référence est la WCIP maillée à  $N = 2^{13}$ . On constate que les différentes techniques ont approximativement les mêmes erreurs relatives.

Mesh size	N	$\left\  \frac{\mathbf{E}^{H,TE} - \mathbf{E}^{W_{verymeshed},TE}}{\max  \mathbf{E}^{W_{verymeshed},TE} } \right\ _{L^2}$							
		WCIP		WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	16	$3,37 \cdot 10^{-2}$	-	$2,41 \cdot 10^{-2}$	-	$2,45 \cdot 10^{-2}$	-	$3,17 \cdot 10^{-2}$	-
1/2	32	$1,67 \cdot 10^{-2}$	1,0127	$1,31 \cdot 10^{-2}$	0,8813	$1,33 \cdot 10^{-2}$	0,8747	$1,59 \cdot 10^{-2}$	0,9922
1/4	64	$8,51 \cdot 10^{-3}$	0,9729	$6,95 \cdot 10^{-3}$	0,9114	$7,12 \cdot 10^{-3}$	0,9059	$8,17 \cdot 10^{-3}$	0,9642
1/8	128	$4,32 \cdot 10^{-3}$	0,9801	$3,62 \cdot 10^{-3}$	0,9404	$3,70 \cdot 10^{-3}$	0,9438	$4,16 \cdot 10^{-3}$	0,9758
1/16	256	$2,17 \cdot 10^{-3}$	0,9923	$1,86 \cdot 10^{-3}$	0,9592	$1,89 \cdot 10^{-3}$	0,9721	$2,09 \cdot 10^{-3}$	0,9904

TABLE 2.16 – Erreur sur  $E$  des différentes méthodes dans le cas  $Z_{02}$ .

On effectue le même travail sur le courant  $J$  (cf. tableaux 2.18 et 2.19). On constate que les cas  $Z_0$  et  $Z_{02}$  sont quasiment les mêmes avec les méthodes WCIP, WCIP/FEM et WCIP/FDTLM et que la méthode WCIP/HDG paraît sensible à la valeur de  $Z_0$ . En outre, on retrouve les ordres de convergence du ruban dans le vide, à savoir 1 sur le champ électrique et 0,5 sur le courant.

Le travail suivant concerne la comparaison des solveurs itératifs GMRES et BICGSTAB dans les cas  $Z_{02}$  et  $Z_0$  (cf. tableaux 2.20 et 2.21). On fixe un restart de 100 dans le cas du GMRES. On peut en déduire que le cas  $Z_0$  fournit un nombre plus faible d'itérations par rapport à  $Z_{02}$ . Pour les maillages les plus raffinés, la méthode WCIP/HDG- $P_1$  est la meilleure en termes de nombre d'itérations par rapport aux autres méthodes dans le cas  $Z_0$ . Néanmoins, il faut préciser que cela ne signifie pas que le temps de calcul est le plus faible pour la méthode WCIP/HDG- $P_1$ .

Mesh size	N	$\left\  \frac{\mathbf{E}^{H,TE} - \mathbf{E}^{Wverymeshed,TE}}{\max \mathbf{E}^{Wverymeshed,TE} } \right\ _{L^2}$							
		WCIP		WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	16	$3,37 \cdot 10^{-2}$	-	$2,40 \cdot 10^{-2}$	-	$2,45 \cdot 10^{-2}$	-	$3,03 \cdot 10^{-2}$	-
1/2	32	$1,67 \cdot 10^{-2}$	1,0127	$1,31 \cdot 10^{-2}$	0,8778	$1,33 \cdot 10^{-2}$	0,8747	$1,53 \cdot 10^{-2}$	0,9822
1/4	64	$8,51 \cdot 10^{-3}$	0,9729	$6,95 \cdot 10^{-3}$	0,9102	$7,12 \cdot 10^{-3}$	0,9059	$7,89 \cdot 10^{-3}$	0,9586
1/8	128	$4,32 \cdot 10^{-3}$	0,9801	$3,62 \cdot 10^{-3}$	0,9400	$3,70 \cdot 10^{-3}$	0,9438	$4,02 \cdot 10^{-3}$	0,9727
1/16	256	$2,17 \cdot 10^{-3}$	0,9923	$1,86 \cdot 10^{-3}$	0,9591	$1,89 \cdot 10^{-3}$	0,9721	$2,03 \cdot 10^{-3}$	0,9888

TABLE 2.17 – Erreur sur E des différentes méthodes dans le cas  $Z_0$ .

Mesh size	N	$\left\  \frac{\mathbf{J}^{H,TE} - \mathbf{J}^{Wverymeshed,TE}}{\max \mathbf{J}^{Wverymeshed,TE} } \right\ _{L^2}$							
		WCIP		WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	16	$2,66 \cdot 10^{-2}$	-	$2,74 \cdot 10^{-2}$	-	$2,73 \cdot 10^{-2}$	-	$2,61 \cdot 10^{-2}$	-
1/2	32	$1,85 \cdot 10^{-2}$	0,5222	$1,93 \cdot 10^{-2}$	0,5083	$1,92 \cdot 10^{-2}$	0,5103	$1,81 \cdot 10^{-2}$	0,5274
1/4	64	$1,28 \cdot 10^{-2}$	0,5357	$1,35 \cdot 10^{-2}$	0,5130	$1,34 \cdot 10^{-2}$	0,5155	$1,24 \cdot 10^{-2}$	0,5428
1/8	128	$8,69 \cdot 10^{-3}$	0,5546	$9,43 \cdot 10^{-3}$	0,5184	$9,35 \cdot 10^{-3}$	0,5216	$8,43 \cdot 10^{-3}$	0,5627
1/16	256	$5,81 \cdot 10^{-3}$	0,5817	$6,55 \cdot 10^{-3}$	0,5243	$6,48 \cdot 10^{-3}$	0,5289	$5,61 \cdot 10^{-3}$	0,5870

TABLE 2.18 – Erreur sur J des différentes méthodes dans le cas  $Z_0$ .

Mesh size	N	$\left\  \frac{\mathbf{J}^{H,TE} - \mathbf{J}^{Wverymeshed,TE}}{\max \mathbf{J}^{Wverymeshed,TE} } \right\ _{L^2}$							
		WCIP		WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	16	$2,66 \cdot 10^{-2}$	-	$2,74 \cdot 10^{-2}$	-	$2,73 \cdot 10^{-2}$	-	$2,72 \cdot 10^{-2}$	-
1/2	32	$1,85 \cdot 10^{-2}$	0,5222	$1,93 \cdot 10^{-2}$	0,5083	$1,92 \cdot 10^{-2}$	0,5103	$1,91 \cdot 10^{-2}$	0,5100
1/4	64	$1,28 \cdot 10^{-2}$	0,5357	$1,35 \cdot 10^{-2}$	0,5130	$1,34 \cdot 10^{-2}$	0,5155	$1,34 \cdot 10^{-2}$	0,5159
1/8	128	$8,69 \cdot 10^{-3}$	0,5546	$9,43 \cdot 10^{-3}$	0,5184	$9,35 \cdot 10^{-3}$	0,5216	$9,31 \cdot 10^{-3}$	0,5232
1/16	256	$5,81 \cdot 10^{-3}$	0,5817	$6,55 \cdot 10^{-3}$	0,5243	$6,48 \cdot 10^{-3}$	0,5289	$6,44 \cdot 10^{-3}$	0,5316

TABLE 2.19 – Erreur sur J des différentes méthodes dans le cas  $Z_0$ .

Mesh size	N	WCIP		WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
		GMRES	BICGSTAB	GMRES	BICGSTAB	GMRES	BICGSTAB	GMRES	BICGSTAB
1	16	16	15	12	13	12	13	23	23
1/2	32	33	29	26	29	26	24	36	31
1/4	64	56	47	50	53	48	46	53	57
1/8	128	76	72	73	89	73	94	74	78
1/16	256	99	105	98	144	97	149	100	136

TABLE 2.20 – Nombre d'itérations avec  $Z_0$  selon le solveur itératif

Mesh size	N	WCIP		WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
		GMRES	BICGSTAB	GMRES	BICGSTAB	GMRES	BICGSTAB	GMRES	BICGSTAB
1	16	16	16	12	13	12	12	18	16
1/2	32	28	25	29	34	26	26	27	28
1/4	64	50	37	49	52	48	57	41	40
1/8	128	65	59	66	80	66	84	55	56
1/16	256	83	103	87	139	84	152	71	88

TABLE 2.21 – Nombre d'itérations avec  $Z_0$  selon le solveur itératif

Enfin, dans le tableau 2.22, nous effectuons une comparaison du nombre d'itérations entre deux choix de restart (abrégé par "res") du GMRES : un restart de 25 et un restart de 50, l'impédance de référence étant celle du vide  $Z_0$ . On constate que pour HDG le cas où le restart vaut 100 reste le plus probant.

Mesh size	N	WCIP/HDG- $P_1$		
		GMRES	GMRES	GMRES
		res=25	res=50	res=100
1	16	18	18	18
1/2	32	31	27	27
1/4	64	50	40	41
1/8	128	84	63	55
1/16	256	134	88	71

TABLE 2.22 – Nombre d'itérations avec  $Z_0$  selon le restart

En résumé, dans le cas WCIP et  $Z_{02}$ , BICGSTAB donne moins d'itérations jusqu'à  $N=256$  (non compris) ; à partir de  $N = 256$ , c'est le GMRES qui donne le moins d'itérations. Dans le cas de la WCIP/FEM- $Q_1$  avec  $Z_{02}$ , quelque soit le maillage testé, le GMRES donne moins d'itérations que le BICGSTAB. Dans le cas de la WCIP/FDTLM avec  $Z_{02}$ , à partir de  $N = 128$  (compris), le GMRES est meilleur. On peut conclure qu'avec  $Z_{02}$ , pour les maillages raffinés, le GMRES est plus performant. Pour  $Z_0$ , on a les mêmes conclusions qu'avec  $Z_{02}$  dans chacun des cas précédents. Pour la WCIP, le nombre d'itérations est moins important quand on prend  $Z_0$ . Pour la WCIP/FEM- $Q_1$ , à partir de  $N=64$  (compris), le nombre d'itérations est moins important quand on prend  $Z_0$ . Il en est de même pour la WCIP/FDTLM à partir de  $N = 128$ . En conclusion, prendre  $Z_0$  et utiliser le GMRES permettrait de diminuer légèrement le nombre d'itérations quand on raffine les maillages. C'est ce qui sera fait par la suite.

### 2.3.5 Diélectrique inhomogène

Le cas traité est représenté sur la figure 2.18. On travaille à 16 GHz et avec  $a = H = 1,27$  cm. La WCIP ne permet pas de traiter ce cas. L'enjeu de ce cas test est donc de montrer que grâce à la méthode hybride mise en œuvre, ce cas peut être traité efficacement. On commence par la méthode hybride WCIP/FEM- $Q_1$ . Dans le cas où les 2 permittivités  $\epsilon_{r,21}$  et  $\epsilon_{r,22}$  étaient égales à

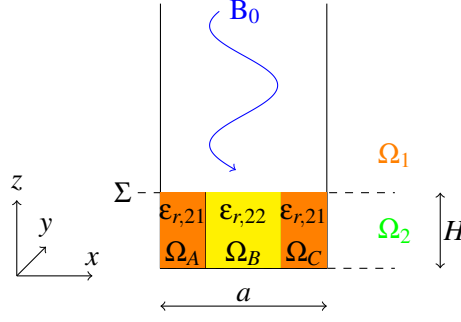


FIGURE 2.18 – Circuit avec un substrat inhomogène.

1, d'après l'égalité (2.19), nous avons

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega_2} (\nabla E_{y2} \cdot \nabla w) dx dz + \int_{\Omega_2} k_0^2 \epsilon_r \mu_r E_{y2} \cdot w dx dz - j k_0 \mu_r \int_{\partial \Omega_2} E_{y2} w dx \\
 & = -2 j k_0 \mu_r \sqrt{Z_0} \int_{\partial \Omega_2} A_{y2} w dx.
 \end{aligned} \tag{2.98}$$

Désormais, le domaine contenant les diélectriques est séparé en trois zones notées  $\Omega_A$ ,  $\Omega_B$  et  $\Omega_C$  et (2.98) n'est plus valable. Nous résolvons les équations de Maxwell dans ces trois zones. Dans  $\Omega_A$ , nous avons donc d'après (1.41)

$$- \int_{\Omega_A} (\nabla E_{y2} \cdot \nabla w) dx dz + \int_{\partial \Omega_A} \frac{\partial E_{y2}}{\partial n} w dl + \int_{\Omega_A} k_0^2 \epsilon_{r,21} \mu_r E_{y2} w dx dz = 0. \tag{2.99}$$

La frontière de  $\Omega_A$ ,  $\partial \Omega_A$ , est constituée de deux frontières où des conditions de Dirichlet homogène sont appliquées (désignées par  $\Gamma_m$ ), d'une frontière de type source qui correspond à  $\Sigma_A$  et d'une autre de type Neumann notée  $\Gamma_{n1}$  (cf. figure 2.19).

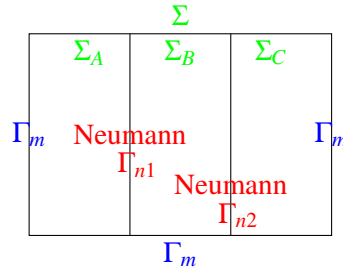


FIGURE 2.19 – Types de frontières.

La fonction test étant nulle sur les frontières de type Dirichlet homogène, (2.99) s'écrit

$$- \int_{\Omega_A} (\nabla E_{y2} \cdot \nabla w) dx dz + \int_{\Gamma_{n1} \cup \Sigma_A} \frac{\partial E_{y2}}{\partial n} w dl + \int_{\Omega_A} k_0^2 \epsilon_{r,21} \mu_r E_{y2} w dx dz = 0. \tag{2.100}$$



D'après la partie (2.2.1), nous avons toujours

$$\frac{\partial E_{y2}}{\partial z} \Big|_{\Sigma} = \frac{j\omega\mu_0\mu_r}{Z_0} (2\sqrt{Z_0}A_{y2} - E_{y2}), \quad (2.101)$$

donc

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_A} (\nabla E_{y2} \cdot \nabla w) dx dz + \int_{\Gamma_{n1}} \frac{\partial E_{y2}}{\partial n} w dl - \int_{\Sigma_A} jk_0\mu_r E_{y2} w dx \\ & + \int_{\Omega_A} k_0^2 \varepsilon_{r,21} \mu_r E_{y2} w dx dz = - \int_{\Sigma_A} 2jk_0\mu_r \sqrt{Z_0} A_{y2} w dx. \end{aligned} \quad (2.102)$$

De même, dans le milieu B, on a

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_B} (\nabla E_{y2} \cdot \nabla w) dx dz - \int_{\Gamma_{n1}} \frac{\partial E_{y2}}{\partial n} w dl + \int_{\Gamma_{n2}} \frac{\partial E_{y2}}{\partial n} w dl \\ & - \int_{\Sigma_B} jk_0\mu_r E_{y2} w dx + \int_{\Omega_B} k_0^2 \varepsilon_{r,22} \mu_r E_{y2} w dx dz = \\ & - \int_{\Sigma_B} 2jk_0\mu_r \sqrt{Z_0} A_{y2} w dx. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Enfin, dans le milieu C, on a

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_C} (\nabla E_{y2} \cdot \nabla w) dx dz - \int_{\Gamma_{n2}} \frac{\partial E_{y2}}{\partial n} w dl - \int_{\Sigma_C} jk_0\mu_r E_{y2} w dx \\ & + \int_{\Omega_C} k_0^2 \varepsilon_{r,21} \mu_r E_{y2} w dx dz = - \int_{\Sigma_C} 2jk_0\mu_r \sqrt{Z_0} A_{y2} w dx. \end{aligned} \quad (2.104)$$

En sommant les équations, on peut s'affranchir des termes situés aux interfaces entre les domaines. Le système hybride à résoudre est :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_A \cup \Omega_B \cup \Omega_C} (\nabla E_{y2} \cdot \nabla w) dx dz - \int_{\Sigma} jk_0\mu_r E_{y2} w dx + \int_{\Omega_A \cup \Omega_C} k_0^2 \varepsilon_{r,21} E_{y2} w dx dz \\ & + \int_{\Omega_B} k_0^2 \varepsilon_{r,22} E_{y2} w dx dz = - \int_{\Sigma} 2jk_0\mu_r \sqrt{Z_0} A_{y2} w dx. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Si l'on résout ce qui est présenté sur la figure 2.18 avec  $\varepsilon_{r,21}=1$  et  $\varepsilon_{r,22}=5$ , alors les erreurs relatives sur les champs électromagnétiques tangentiels  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont présentées dans les tableaux 2.23 et 2.24. Pour ces deux tableaux, la référence, notée  $\mathbf{E}^{\text{Fverymeshed,TE}}$  pour le champ électrique, est la WCIP/FEM- $Q_1$  maillée à  $N = 2^{10}$ . On choisit la FEM par rapport à HDG car la limite mémoire est plus rapidement atteinte avec HDG, ce qui permet d'avoir un pas de maillage plus fin avec la FEM. On aurait pu aussi prendre la WCIP/FDTLM. Pour HDG, le paramètre de stabilisation  $\tau$  vaut 1. On constate que l'ordre de convergence est compris entre 1 et 2.

On s'intéresse ensuite aux écarts entre opérateurs à maillage identique (cf. tableau 2.25). L'ordre de convergence est également compris entre 1 et 2 mais il est irrégulier probablement parce que le maillage n'est pas assez raffiné, et comme la limite mémoire est atteinte pour  $N = 1024$ , on ne peut pas réduire davantage le pas de maillage.

Mesh size	N	$\frac{\  \mathbf{E}^{H,TE} - \mathbf{E}^{Fverymeshed,TE} \ }{\max   \mathbf{E}^{Fverymeshed,TE}  } \ _{L^2}$					
		WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	16	$1,87 \cdot 10^{-2}$	-	$3,46 \cdot 10^{-2}$	-	$7,54 \cdot 10^{-3}$	-
1/2	32	$5,47 \cdot 10^{-3}$	1,7735	$8,28 \cdot 10^{-3}$	2,0621	$3,70 \cdot 10^{-3}$	1,0269
1/4	64	$2,05 \cdot 10^{-3}$	1,4198	$2,53 \cdot 10^{-3}$	1,7088	$1,79 \cdot 10^{-3}$	1,0471
1/8	128	$8,70 \cdot 10^{-4}$	1,2332	$9,45 \cdot 10^{-4}$	1,4229	$8,35 \cdot 10^{-4}$	1,0994
1/16	256	$3,63 \cdot 10^{-4}$	1,2626	$3,74 \cdot 10^{-4}$	1,3382	$3,58 \cdot 10^{-4}$	1,2223

TABLE 2.23 – Erreur relative sur E des différentes méthodes hybrides.

Mesh size	N	$\frac{\  \mathbf{H}^{H,TE} - \mathbf{H}^{Fverymeshed,TE} \ }{\max   \mathbf{H}^{Fverymeshed,TE}  } \ _{L^2}$					
		WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	16	$1,09 \cdot 10^{-2}$	-	$1,70 \cdot 10^{-2}$	-	$7,98 \cdot 10^{-3}$	-
1/2	32	$4,34 \cdot 10^{-3}$	1,3337	$5,15 \cdot 10^{-3}$	1,7183	$3,97 \cdot 10^{-3}$	1,0078
1/4	64	$1,98 \cdot 10^{-3}$	1,1349	$2,09 \cdot 10^{-3}$	1,3037	$1,93 \cdot 10^{-3}$	1,0404
1/8	128	$9,09 \cdot 10^{-4}$	1,1208	$9,24 \cdot 10^{-4}$	1,1752	$9,03 \cdot 10^{-4}$	1,0956
1/16	256	$3,89 \cdot 10^{-4}$	1,2263	$3,91 \cdot 10^{-4}$	1,2417	$3,88 \cdot 10^{-4}$	1,2196

TABLE 2.24 – Erreur sur H des différentes méthodes hybrides.

Mesh size	N	$\  \mathbf{S}_2^{FEM} - \mathbf{S}_2^{FDTLM} \ _2$	Ordre
1	16	$3,6601 \cdot 10^{-1}$	-
1/2	32	$2,3095 \cdot 10^{-1}$	0,6643
1/4	256	$7,9778 \cdot 10^{-2}$	1,5335
1/8	512	$2,1749 \cdot 10^{-2}$	1,8750
1/16	1024	OOM	OOM

TABLE 2.25 – Erreur entre opérateurs pour des diélectriques de permittivités  $\epsilon_{r,21}=1$  et  $\epsilon_{r,22}=10$ .

Une comparaison entre solveurs itératifs dans le cas où l'impédance de référence est  $Z_0$  est présentée dans le tableau 2.26 sachant que le GMRES a un restart de 100.

Mesh size	N	WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
		GMRES	BICGSTAB	GMRES	BICGSTAB	GMRES	BICGSTAB
1	16	16	17	16	15	21	20
1/2	32	30	31	29	30	31	29
1/4	64	40	48	38	37	38	39
1/8	128	47	70	44	60	47	50
1/16	256	53	75	51	76	54	71

TABLE 2.26 – Nombre d'itérations selon le solveur itératif pour  $\epsilon_{r,21}=1$  et  $\epsilon_{r,22}=5$  et une impédance de  $Z_0$ .

Conclusions :

Comme dans le cas diélectrique homogène, le GMRES donne moins d'itérations que le BICGSTAB. Entre la WCIP/FDTLM et la WCIP/FEM- $Q_1$ , on a approximativement les mêmes nombres d'itérations (à 2 ou 3 itérations près).

### 2.3.6 Ligne microruban imprimée sur un substrat inhomogène

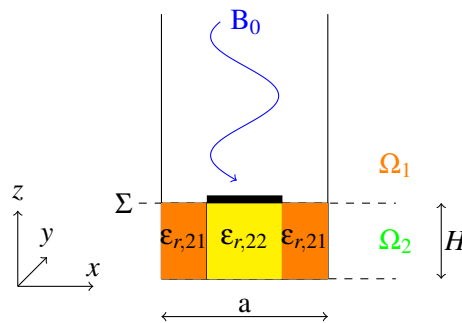


FIGURE 2.20 – Ligne microruban imprimée sur un substrat inhomogène.

On effectue le même travail que précédemment en rajoutant un ruban sur la surface de discontinuité. Dans ce cas, la référence est obtenue avec la méthode WCIP/FEM- $Q_1$  en prenant  $N = 2^{11}$  (valeur obtenue empiriquement et liée à la limite de la machine utilisée). Les erreurs relatives sur E et J sont présentées dans les tableaux 2.27 et 2.28. Le paramètre de stabilisation  $\tau$  de HDG vaut 1. Pour le champ électrique, l'ordre de convergence est proche de 1. Pour le courant, il est compris entre 0,5 et 1.

Le changement de permittivité relative étant concomitante avec la discontinuité métallique de la ligne microruban, il se peut que la discontinuité soit "moins bien vue". Ceci pourrait expliquer l'ordre de convergence proche de 1 du courant. On fait ensuite une comparaison du nombre d'itérations avec GMRES avec deux tests de restarts (20 et 100 dans les tableaux 2.29 et 2.30) et BICGSTAB quand on prend comme impédance de référence  $Z_0$  (cf. tableau 2.30).

Mesh size	N	$\frac{\  \mathbf{E}^{H,TE} - \mathbf{E}^{Fverymeshed,TE} \ }{\max   \mathbf{E}^{Fverymeshed,TE}   }_{L^2}$					
		WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	16	$2,27 \cdot 10^{-2}$	-	$2,54 \cdot 10^{-2}$	-	$2,78 \cdot 10^{-2}$	-
1/2	32	$1,29 \cdot 10^{-2}$	0,8179	$1,39 \cdot 10^{-2}$	0,8690	$1,50 \cdot 10^{-2}$	0,8927
1/4	64	$6,82 \cdot 10^{-3}$	0,9163	$7,23 \cdot 10^{-3}$	0,9462	$7,72 \cdot 10^{-3}$	0,9577
1/8	128	$3,53 \cdot 10^{-3}$	0,9500	$3,69 \cdot 10^{-3}$	0,9698	$3,93 \cdot 10^{-3}$	0,9754
1/16	256	$1,75 \cdot 10^{-3}$	1,0141	$1,81 \cdot 10^{-3}$	1,0268	$1,93 \cdot 10^{-3}$	1,0261

TABLE 2.27 – Erreur sur E des différentes méthodes par rapport à la WCIP/FEM très maillée ( $N = 2^{11}$ ).

Mesh size	N	$\frac{\  \mathbf{J}^{H,TE} - \mathbf{J}^{Fverymeshed,TE} \ }{\max   \mathbf{J}^{Fverymeshed,TE}   }_{L^2}$					
		WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	16	$2,30 \cdot 10^{-2}$	-	$2,27 \cdot 10^{-2}$	-	$2,25 \cdot 10^{-2}$	-
1/2	32	$1,58 \cdot 10^{-2}$	0,5411	$1,55 \cdot 10^{-2}$	0,5486	$1,53 \cdot 10^{-2}$	0,5534
1/4	64	$1,06 \cdot 10^{-2}$	0,5743	$1,03 \cdot 10^{-2}$	0,5857	$1,02 \cdot 10^{-2}$	0,5931
1/8	128	$6,92 \cdot 10^{-3}$	0,6209	$6,64 \cdot 10^{-3}$	0,6382	$6,48 \cdot 10^{-3}$	0,6488
1/16	256	$4,28 \cdot 10^{-3}$	0,6932	$4,04 \cdot 10^{-3}$	0,7181	$3,91 \cdot 10^{-3}$	0,7308

TABLE 2.28 – Erreur sur J des différentes méthodes par rapport à la WCIP/FEM très maillée ( $N = 2^{11}$ ).

Mesh size	N	WCIP/FEM- $Q_1$	WCIP/FDTLM	WCIP/HDG- $P_1$
		GMRES	GMRES	GMRES
1	16	12	12	18
1/2	32	45	34	33
1/4	64	82	75	59
1/8	128	135	130	89
1/16	256	228	213	148

TABLE 2.29 – Nombre d'itérations avec un restart de 20 pour le GMRES.

Mesh size	N	WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
		GMRES	BICGSTAB	GMRES	BICGSTAB	GMRES	BICGSTAB
1	16	12	12	12	12	18	16
1/2	32	27	30	25	26	27	25
1/4	64	48	51	46	49	40	43
1/8	128	66	80	63	90	53	56
1/16	256	84	147	82	128	69	80

TABLE 2.30 – Nombre d'itérations selon le solveur itératif avec un restart de 100 pour le GMRES.

On constate que le nombre d'itérations avec un restart de 20 est plus important pour toutes les méthodes hybrides. On garde donc la valeur de 100 pour les calculs suivants.

**Remarque :**

Il faut néanmoins nuancer ces conclusions sur le restart et le nombre d'itérations. En effet, en termes d'itérations, ne pas prendre de restart permet de réduire le nombre d'itérations. Cependant, la durée d'une itération est alors accrue car le système à résoudre est plus important. Ici le restart pouvant être assez grand (par exemple dans le cas où sa valeur est 100), quand le nombre d'itérations est inférieur à 100, cela signifie que l'on n'a pas fait appel au restart, c'est alors comme si aucun restart n'avait été spécifié. Il est alors logique de constater que ce cas correspond au cas où le nombre d'itérations est le plus faible.

La représentation de l'erreur relative dans le cas du ruban imprimé sur un substrat inhomogène est donnée sur les figures 2.21 et 2.22.

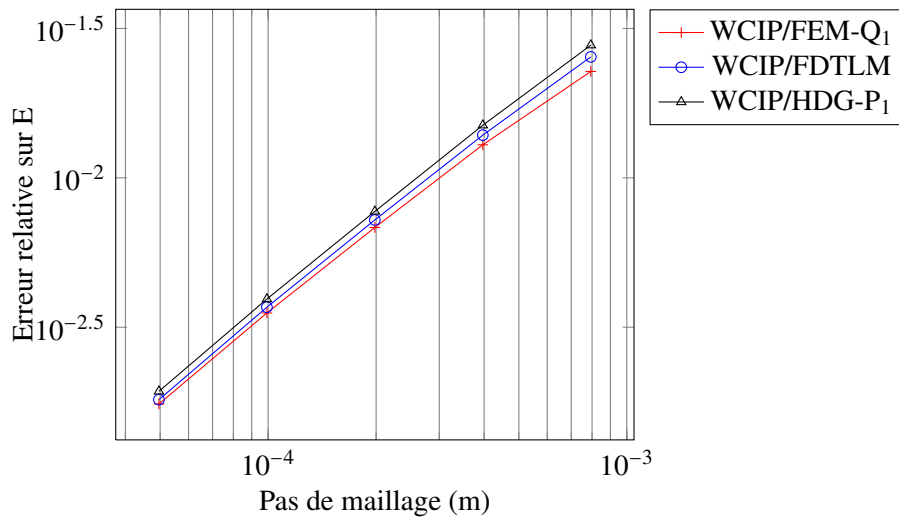


FIGURE 2.21 – Erreur relative sur E

Afin de savoir si le fait que la discontinuité métallique coïncide avec la discontinuité diélectrique intervient dans les résultats, on modifie la largeur de la ligne microruban, elle est désormais de  $3/4 a$  au lieu de  $a/2$  (cf. figure 2.23). On prend un paramètre de stabilisation,  $\tau$ , égal à 1 pour HDG. Le même travail que précédemment est réitéré. Les résultats sont présentés dans les tableaux 2.31 et 2.32.

Cependant, on constate une diminution de l'ordre de convergence minimale sur le courant dans ce cas où le ruban est plus large. On peut supposer que le problème vient de la référence qui n'est pas assez maillée.

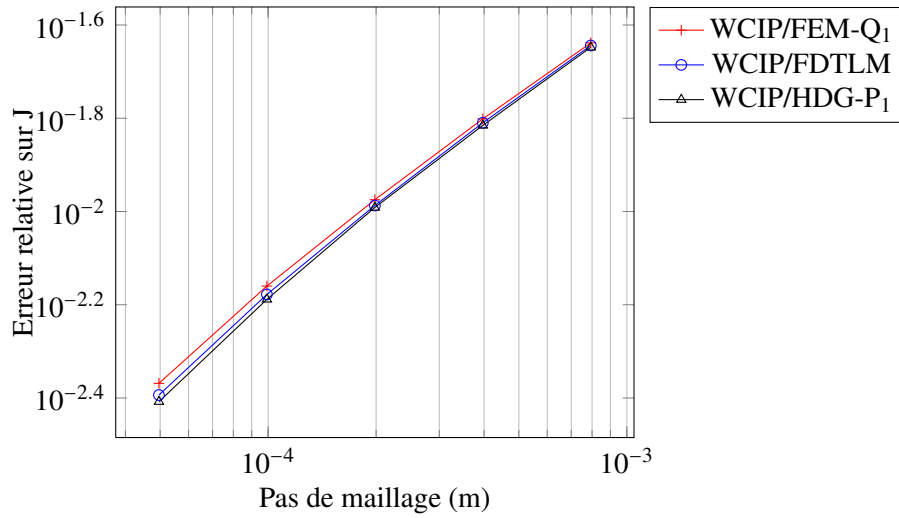


FIGURE 2.22 – Erreur relative sur J

Mesh size	N	$\frac{\ \mathbf{E}^{H,TE} - \mathbf{E}^{Fverymeshed,TE}\ }{\max \mathbf{E}^{Fverymeshed,TE} } \ _{L^2}$					
		WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	16	$2,71 \cdot 10^{-2}$	-	$3,20 \cdot 10^{-2}$	-	$3,74 \cdot 10^{-2}$	-
1/2	32	$1,56 \cdot 10^{-2}$	0,7973	$1,73 \cdot 10^{-2}$	0,8895	$1,91 \cdot 10^{-2}$	0,9705
1/4	64	$8,82 \cdot 10^{-3}$	0,8207	$9,48 \cdot 10^{-3}$	0,8646	$1,03 \cdot 10^{-2}$	0,8940
1/8	128	$4,65 \cdot 10^{-3}$	0,9248	$4,90 \cdot 10^{-3}$	0,9516	$5,25 \cdot 10^{-3}$	0,9652
1/16	256	$2,34 \cdot 10^{-3}$	0,9916	$2,44 \cdot 10^{-3}$	1,0092	$2,60 \cdot 10^{-3}$	1,0128

TABLE 2.31 – Erreur sur E des différentes méthodes par rapport à la WCIP/FEM très maillée ( $N = 2^{11}$ ).

Mesh size	N	$\frac{\ \mathbf{J}^{H,TE} - \mathbf{J}^{Fverymeshed,TE}\ }{\max \mathbf{J}^{Fverymeshed,TE} } \ _{L^2}$					
		WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	16	$2,08 \cdot 10^{-2}$	-	$2,05 \cdot 10^{-2}$	-	$2,03 \cdot 10^{-2}$	-
1/2	32	$1,46 \cdot 10^{-2}$	0,5083	$1,43 \cdot 10^{-2}$	0,5162	$1,41 \cdot 10^{-2}$	0,5201
1/4	64	$9,95 \cdot 10^{-3}$	0,5555	$9,67 \cdot 10^{-3}$	0,5678	$9,50 \cdot 10^{-3}$	0,5747
1/8	128	$6,52 \cdot 10^{-3}$	0,6096	$6,26 \cdot 10^{-3}$	0,6277	$6,10 \cdot 10^{-3}$	0,6379
1/16	256	$4,05 \cdot 10^{-3}$	0,6862	$3,82 \cdot 10^{-3}$	0,7118	$3,70 \cdot 10^{-3}$	0,7243

TABLE 2.32 – Erreur sur J des différentes méthodes par rapport à la WCIP/FEM très maillée ( $N = 2^{11}$ ).

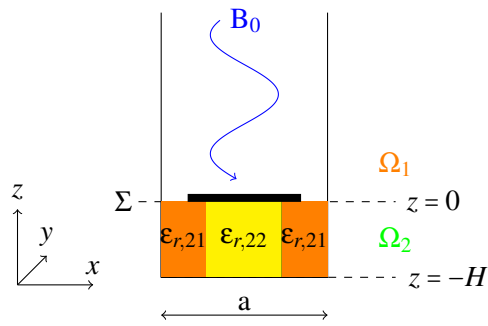


FIGURE 2.23 – Ligne microruban modifiée imprimée sur un substrat inhomogène.

### 2.3.7 Comparaison des temps de calcul en 2D

On présente dans cette sous-partie une comparaison des temps de calcul (cf. tableau 2.33) en 2D dans le cas inhomogène où  $\epsilon_{r,1}=1$  et  $\epsilon_{r,2}=5$  (cf. figure 2.24). On constate que la WCIP/HDG- $P_1$  est moins rapide que les deux autres méthodes. Néanmoins, cette différence peut venir de l'implémentation.

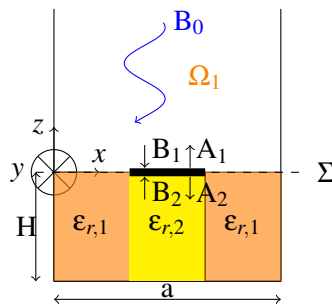


FIGURE 2.24 – Exemple traité pour les temps de calcul en 2D.

Temps en s				
Mesh size	$N$	WCIP/FEM- $Q_1$	WCIP/FDTLM	WCIP/HDG- $P_1$
1	16	0,3	0,3	5
1/2	32	0,7	0,7	26
1/4	64	1,3	4	154
1/8	128	4	31	1094
1/16	256	20	295	10355

TABLE 2.33 – Temps de calcul en 2D dans le cas inhomogène :  $\epsilon_{r,1}=1$ ,  $\epsilon_{r,2}=5$ .

## 2.4 Conclusions

On constate qu'il y a davantage d'itérations quand on insère le ruban par rapport au cas sans ruban. On conserve le choix du GMRES qui semble meilleur que le BICGSTAB dans nos cas testés. La présence du restart ne devient intéressante que dans les cas où le nombre d'inconnues est suffisamment important. Ce travail a permis la mise en place d'un formalisme général concernant l'hybridation. Celui-ci est généralisable à n'importe quelle méthode volumique.



## Chapitre 3

# Techniques d'hybridation 3D

Dans le cas 3D, contrairement au 2D, la propagation selon l'axe y existe. L'expression des modes est donnée par (3.1) dans le cas où le circuit est inséré entre deux plaques infinies.

$$\mathbf{f}_n e^{-p_n z} e^{-\gamma y}. \quad (3.1)$$

L'objectif est de pouvoir traiter des cas 3D où le substrat peut être inhomogène (comme celui présenté sur la figure 3.1).

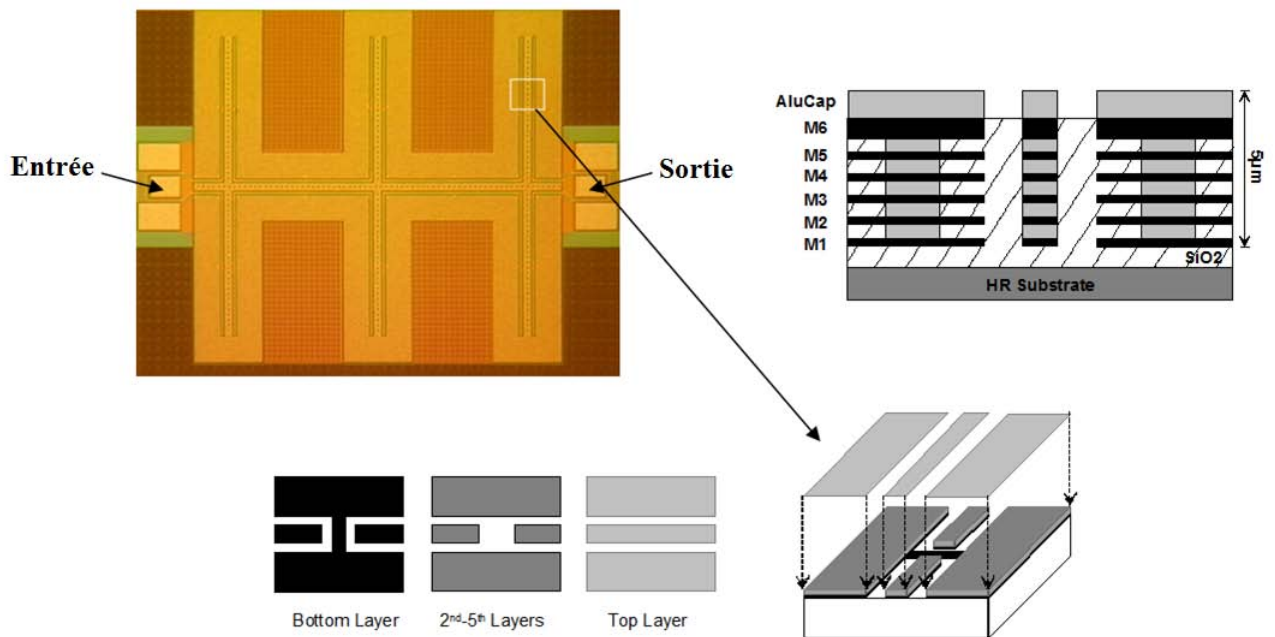


FIGURE 3.1 – Filtre passe-bande (60 : 80 GHz),  $1330\mu\text{m} \times 1186\mu\text{m}$  [46]

### 3.1 Formalisme général de l'hybridation

Le système (2.2) du chapitre 2 est toujours vérifié. De la même façon qu'en 2D, pour obtenir l'opérateur associé à la méthode volumique implémentée, on cherche la relation entre les ondes  $\mathbf{A}_2$  et  $\mathbf{B}_2$ . Le calcul de  $\mathbf{B}_2$  peut s'effectuer de deux manières différentes. Les composantes selon les axes  $x$  et  $y$  des ondes  $\mathbf{A}_2$  et  $\mathbf{B}_2$  s'écrivent selon (3.2) et (3.3). A l'aide du changement de variables défini en (2.69), les composantes des ondes s'écrivent

$$\begin{cases} A_{x2} = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} (\hat{E}_x + n_{wqip} \hat{H}_{y,\text{calc}}) \\ A_{y2} = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} (\hat{E}_y - n_{wqip} \hat{H}_{x,\text{calc}}) \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} B_{x2} = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} (\hat{E}_x - n_{wqip} \hat{H}_{y,\text{calc}}) \\ B_{y2} = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} (\hat{E}_y + n_{wqip} \hat{H}_{x,\text{calc}}) \end{cases} \quad (3.3)$$

avec dans le cas TE et dans le cas de la méthode HDG :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{E}}_h^{TE} = \mathbf{E}_h^{TE} + \tau_K \mathbf{n} \times (\Lambda_h - \mathbf{H}_h^{TE}) \\ \hat{\mathbf{H}}_h^{TE} = \Lambda_h. \end{cases} \quad (3.4)$$

La première façon de calculer l'onde  $\mathbf{B}_2$  est :

$$\begin{cases} B_{x2} = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} \hat{E}_x - A_{x2} \\ B_{y2} = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} \hat{E}_y - A_{y2}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Quant à la deuxième façon de faire le calcul de  $\mathbf{B}_2$ , elle est donnée par (3.6) et les deux méthodes donnent les mêmes résultats.

$$\begin{cases} B_{x2} = A_{x2} - \frac{1}{\sqrt{Z_0}} n_{wqip} \hat{H}_y^{TE} \\ B_{y2} = A_{y2} + \frac{1}{\sqrt{Z_0}} n_{wqip} \hat{H}_x^{TE} \end{cases} \quad (3.6)$$

## 3.2 Déclinaison de l'hybridation selon les méthodes

### 3.2.1 WCIP-2D/FDTLM-3D

Le principe pour trouver  $S^{\text{FDTLM}}$  est le même qu'en 2D. On cherche l'expression de la matrice élémentaire  $S_e$  en 3D correspondant au nœud de la figure 3.2. Ce nœud fait partie du mail-

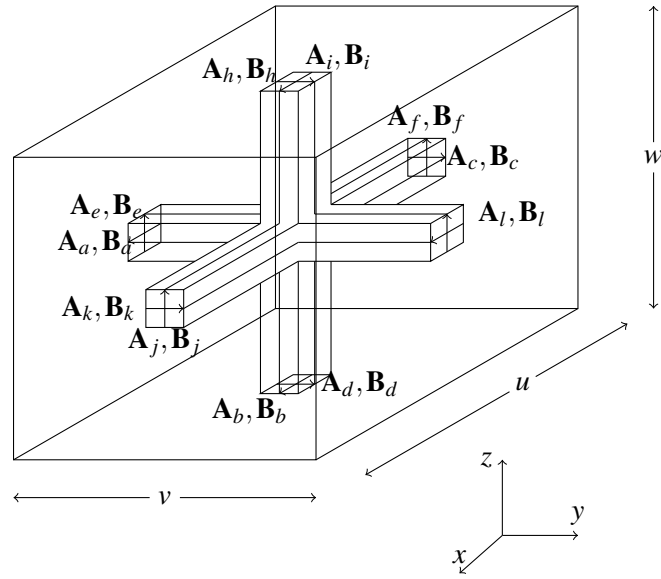


FIGURE 3.2 – Nœud FDTLM adapté à la définition des ondes de la WCIP.

lage de la figure 1.9. On reprend les équations de Maxwell mais on n'a alors plus d'invariance en  $y$  comme en 2D. Les équations de Maxwell en coordonnées cartésiennes s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} j\omega\epsilon_0\epsilon_x E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma_{ex} E_x, \\ j\omega\epsilon_0\epsilon_y E_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma_{ey} E_y, \\ j\omega\epsilon_0\epsilon_z E_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma_{ez} E_z, \\ j\omega\mu_0\mu_x H_x = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \sigma_{mx} H_x, \\ j\omega\mu_0\mu_y H_y = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \sigma_{my} H_y, \\ j\omega\mu_0\mu_z H_z = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \sigma_{mz} H_z. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

On cherche à exprimer les champs électrique et magnétique en fonction des ondes entrantes pour obtenir une relation entre les ondes sortantes et entrantes. Le point de départ est les équations de Maxwell. La **première équation de Maxwell** s'écrit :

$$j\omega\epsilon_0\epsilon_x E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma_{ex} E_x \quad (3.8)$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - (j\omega\epsilon_0\epsilon_x + \sigma_{ex}) E_x = 0. \quad (3.9)$$

On pose

$$G_{ex} = (j\omega\epsilon_0\epsilon_x + \sigma_{ex}). \quad (3.10)$$

On effectue une discrétisation par différences finies. Cette dernière, appliquée à la première équation de Maxwell, aboutit à

$$\frac{H_z(i, j + \frac{1}{2}, k) - H_z(i, j - \frac{1}{2}, k)}{dy} - \frac{H_y(i, j, k + \frac{1}{2}) - H_y(i, j, k - \frac{1}{2})}{dz} - G_{ex}E_x(i, j, k) = 0. \quad (3.11)$$

On introduit la définition des ondes afin d'avoir une première relation entre les champs électriques ou magnétiques en fonction de ces dernières. Ainsi, la normale à la face à laquelle  $\mathbf{A}_a$  appartient étant  $\mathbf{y}$ , la définition des ondes nous donne :

$$\mathbf{A}_a = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}}(E_x\mathbf{x} + Z_0H_z\mathbf{z} \times \mathbf{y}) = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}}(E_x\mathbf{x} - Z_0H_z\mathbf{x}), \quad (3.12)$$

donc

$$\begin{cases} A_a = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} \left( E_x(i, j - \frac{1}{2}, k) - Z_0H_z(i, j - \frac{1}{2}, k) \right) \\ B_a = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} \left( E_x(i, j - \frac{1}{2}, k) + Z_0H_z(i, j - \frac{1}{2}, k) \right), \end{cases} \quad (3.13)$$

ce qui entraîne

$$H_z(i, j - \frac{1}{2}, k) = -\frac{A_a - B_a}{\sqrt{Z_0}}. \quad (3.14)$$

Nous faisons le même travail de sorte à exprimer tous les champs de (3.11) (non situés au centre du cube) en fonction des ondes. Etant donné que l'on a :

$$\begin{cases} A_l = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} \left( E_x(i, j + \frac{1}{2}, k) + Z_0H_z(i, j + \frac{1}{2}, k) \right) \\ B_l = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} \left( E_x(i, j + \frac{1}{2}, k) - Z_0H_z(i, j + \frac{1}{2}, k) \right), \end{cases} \quad (3.15)$$

il s'ensuit :

$$H_z(i, j + \frac{1}{2}, k) = \frac{A_l - B_l}{\sqrt{Z_0}}. \quad (3.16)$$

De même, on obtient

$$H_y(i, j, k + \frac{1}{2}) = -\frac{A_i - B_i}{\sqrt{Z_0}} \quad (3.17)$$

et

$$H_y(i, j, k - \frac{1}{2}) = \frac{A_b - B_b}{\sqrt{Z_0}}. \quad (3.18)$$

Au final, (3.11) devient

$$\frac{A_l - B_l + A_a - B_a}{\sqrt{Z_0}dy} + \frac{A_i - B_i + A_b - B_b}{\sqrt{Z_0}dz} - G_{ex}E_x(i, j, k) = 0. \quad (3.19)$$

L'objectif à terme est d'avoir une expression de  $B_a$  en fonction des ondes entrantes, ce qui nous conduira à l'expression de la première ligne de la matrice de diffraction  $S_e$ .

Un moyennage selon les directions  $y$  et  $z$  est ensuite réalisé sur le champ. En partant de (3.13), on obtient :

$$E_x(i, j - \frac{1}{2}, k) = \sqrt{Z_0}(A_a + B_a). \quad (3.20)$$

De même, à partir de (3.15),

$$E_x(i, j + \frac{1}{2}, k) = \sqrt{Z_0}(A_l + B_l). \quad (3.21)$$

Le moyennage selon  $y$  s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} E_x(i, j, k) &= \frac{1}{2} \left( E_x(i, j - \frac{1}{2}, k) + E_x(i, j + \frac{1}{2}, k) \right) \\ &= \frac{\sqrt{Z_0}}{2} (A_l + B_l + A_a + B_a). \end{aligned} \quad (3.22)$$

De même, le moyennage selon  $z$  s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} E_x(i, j, k) &= \frac{1}{2} \left( E_x(i, j, k - \frac{1}{2}, k) + E_x(i, j, k + \frac{1}{2}, k) \right) \\ &= \frac{\sqrt{Z_0}}{2} (A_b + B_b + A_i + B_i). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ces deux moyennages peuvent se réécrire selon

$$\begin{cases} B_l + B_a = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} 2E_x(i, j, k) - (A_l + A_a) \\ B_i + B_b = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} 2E_x(i, j, k) - (A_i + A_b). \end{cases} \quad (3.24)$$

Ces moyennages ont deux rôles :

**1** : ils permettent d'obtenir une expression du champ électrique  $E_x(i, j, k)$  en fonction des ondes entrantes  $A$  ;

**2** : on peut exprimer  $B_a$  en fonction des ondes  $A$ , des champs  $E_x(i, j, k)$  et  $H_z(i, j, k)$ , inconnues que l'on aura au préalable exprimées en fonction de  $A$  également, ce qui permettra d'écrire la première ligne de la matrice  $S_e$ .

**1** : en insérant (3.24) dans (3.19), et après calculs, l'expression de  $E_x(i, j, k)$  est obtenue :

$$E_x = \frac{2 \left( \frac{A_l + A_a}{dy} + \frac{A_i + A_b}{dz} \right)}{G_{ex} \sqrt{Z_0} + \frac{2}{\sqrt{Z_0}} \left( \frac{1}{dy} + \frac{1}{dz} \right)}. \quad (3.25)$$

On pose

$$bx1 = \frac{2}{G_{ex}Z_0 + 2\left(\frac{1}{dy} + \frac{1}{dz}\right)}. \quad (3.26)$$

$$E_x = \sqrt{Z_0}bx1 \left( \frac{A_l + A_a}{dy} + \frac{A_i + A_b}{dz} \right). \quad (3.27)$$

**2** : en effectuant un moyennage sur la somme  $A_l + B_a$ ,

$$A_l + B_a = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} \left( E_x(i, j + \frac{1}{2}, k) + E_x(i, j - \frac{1}{2}, k) + Z_0 \left( H_z(i, j + \frac{1}{2}, k) + H_z(i, j - \frac{1}{2}, k) \right) \right) \quad (3.28)$$

$$A_l + B_a = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} (E_x(i, j, k) + Z_0 H_z(i, j, k)),$$

et par suite, on obtient bien l'expression de  $B_a$  en fonction des ondes  $A$  et des champs  $E_x(i, j, k)$  et  $H_z(i, j, k)$

$$B_a = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} (E_x(i, j, k) + Z_0 H_z(i, j, k)) - A_l. \quad (3.29)$$

On comprend alors l'intérêt d'exprimer  $E_x(i, j, k)$  uniquement en fonction des ondes  $A$ , l'objectif étant de faire le même travail sur  $H_z(i, j, k)$ , pour obtenir l'expression de  $B_a$  en fonction des ondes  $A$ .

Pour obtenir l'expression d'autres composantes des champs ( $H_z(i, j, k)$  notamment), on s'intéresse aux autres équations de Maxwell et on réitère la même démarche afin de se familiariser avec cette technique. Ainsi, la **sixième équation de Maxwell** nous donne :

$$j\omega\mu_0\mu_z H_z = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \sigma_{mz} H_z. \quad (3.30)$$

On pose :

$$G_{mz} = (j\omega\mu_0\mu_z + \sigma_{mz}). \quad (3.31)$$

Donc :

$$\frac{E_x(i, j + \frac{1}{2}, k) - E_x(i, j - \frac{1}{2}, k)}{dy} - \frac{E_y(i + \frac{1}{2}, j, k) - E_y(i - \frac{1}{2}, j, k)}{dx} - G_{mz} H_z = 0. \quad (3.32)$$

Or, d'après (3.20), (3.21) et les définitions des ondes  $A_c$ ,  $B_c$ ,  $A_k$  et  $B_k$ ,

$$\begin{cases} E_x(i, j - \frac{1}{2}, k) = \sqrt{Z_0}(A_a + B_a), \\ E_x(i, j + \frac{1}{2}, k) = \sqrt{Z_0}(A_l + B_l), \\ E_y(i - \frac{1}{2}, j, k) = \sqrt{Z_0}(A_c + B_c), \\ E_y(i + \frac{1}{2}, j, k) = \sqrt{Z_0}(A_k + B_k). \end{cases} \quad (3.33)$$

En insérant (3.33) dans (3.34),

$$\frac{\sqrt{Z_0}(A_l + B_l) - \sqrt{Z_0}(A_a + B_a)}{dy} - \frac{\sqrt{Z_0}(A_k + B_k) - \sqrt{Z_0}(A_c + B_c)}{dx} - G_{mz}H_z = 0. \quad (3.34)$$

D'après (3.14) et (3.16), le moyennage selon y implique

$$H_z(i, j, k) = \frac{A_l - A_a + B_a - B_l}{2\sqrt{Z_0}}. \quad (3.35)$$

De même, le moyennage selon z entraîne

$$H_z(i, j, k) = \frac{B_k - B_c + A_c - A_k}{2\sqrt{Z_0}}. \quad (3.36)$$

En remplaçant par (3.35) et (3.36) dans (3.34), on obtient :

$$H_z = \frac{2\left(\frac{A_l - A_a}{dy} + \frac{A_c - A_k}{dx}\right)}{\frac{G_{mz}}{\sqrt{Z_0}} + 2\left(\frac{1}{dy} + \frac{1}{dx}\right)}. \quad (3.37)$$

On pose

$$dz1 = \frac{2}{\frac{G_{mz}}{Z_0} + 2\left(\frac{1}{dy} + \frac{1}{dx}\right)}. \quad (3.38)$$

et  $H_z$  se réécrit

$$H_z = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} dz1 \left( \frac{A_l - A_a}{dy} + \frac{A_c - A_k}{dx} \right). \quad (3.39)$$

En introduisant (3.27) et (3.39) dans (3.29), on obtient :

$$B_a = axzA_a + bxyA_b + dyzA_c + bxyA_i - dyzA_k + cxzA_l \quad (3.40)$$

avec

$$\begin{cases} axz = bxz - dxz \\ bxy = 1/dz * bx1 \\ dyz = 1/dx * dz1 \\ cxz = bxz + dxz - 1. \end{cases} \quad (3.41)$$

On pose également :

$$\begin{aligned} bxz &= 1/dy * bx1 \\ byx &= 1/dz * by1 \\ byz &= 1/dx * by1 \\ bzy &= 1/dx * bz1 \\ bzx &= 1/dy * bz1 \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned}
dzy &= 1/dx * dy1 \\
dxz &= 1/dy * dz1 \\
dzx &= 1/dy * dx1 \\
dyx &= 1/dz * dx1 \\
dxy &= 1/dz * dy1
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}
axy &= bxy - dxy \\
ayz &= byz - dyz \\
ayx &= byx - dyx \\
azx &= bzx - dzx \\
azy &= bzy - dzy
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
cxy &= bxy + dxy - 1 \\
cyz &= byz + dyz - 1 \\
cyx &= byx + dyx - 1 \\
czx &= bzx + dzx - 1 \\
czy &= bzy + dzy - 1.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Après calculs, il vient :

$$\left\{ \begin{aligned}
B_b &= bxzA_a + axyA_b + dzyA_f + cxyA_i - dzyA_j + bxzA_l, \\
B_c &= dxzA_a + ayzA_c + byxA_d + byxA_h + cyzA_k - dxzA_l, \\
B_d &= byzA_c + ayxA_d + dzxA_e - dzxA_g + cyxA_h + byzA_k, \\
B_e &= dyxA_d + azxA_e + bzyA_f + czxA_g - dyxA_h + bzyA_j, \\
B_f &= dxyA_b + bzxA_e + azyA_f + bzxA_g - dxyA_i + czyA_j, \\
B_g &= -dyxA_d + czxA_e + bzyA_f + azxA_g + dyxA_h + bzyA_j, \\
B_h &= byzA_c + cyxA_d - dzxA_e + dzxA_g + ayxA_h + byzA_k, \\
B_i &= bxzA_a + cxyA_b - dzyA_f + axyA_i + dzyA_j + bxzA_l, \\
B_j &= -dxyA_b + bzxA_e + czyA_f + bzxA_g + dxyA_i + azyA_j, \\
B_k &= -dxzA_a + cyzA_c + byxA_d + byxA_h + ayzA_k + dxzA_l, \\
B_l &= cxzA_a + bxyA_b - dzyA_c + bxyA_i + dzyA_k + axzA_l.
\end{aligned} \right. \tag{3.46}$$

La matrice élémentaire peut donc s'écrire sous la forme suivante :



$$S_e = \begin{pmatrix} axz & bxy & dyz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & bxy & 0 & -dyz & cxz \\ bxz & axy & 0 & 0 & 0 & dzy & 0 & 0 & cxy & -dzy & 0 & bxz \\ dxz & 0 & ayz & byx & 0 & 0 & 0 & byx & 0 & 0 & cyz & -dxz \\ 0 & 0 & byz & ayx & dzx & 0 & -dzx & cyx & 0 & 0 & byz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & dyx & azx & bzy & czx & -dyx & 0 & bzy & 0 & 0 \\ 0 & dxy & 0 & 0 & bzx & azy & bzx & 0 & -dxy & czy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -dyx & czx & bzy & azx & dyx & 0 & bzy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & byz & cyx & -dzx & 0 & dzx & ayx & 0 & 0 & byz & 0 \\ bxz & cxy & 0 & 0 & 0 & -dzy & 0 & 0 & axy & dzy & 0 & bxz \\ 0 & -dxy & 0 & 0 & bzx & czy & bzx & 0 & dxy & azy & 0 & 0 \\ -dxz & 0 & cyz & byx & 0 & 0 & 0 & byx & 0 & 0 & ayz & dxz \\ cxz & bxy & -dyz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & bxy & 0 & dyz & axz \end{pmatrix}.$$

### 3.2.2 WCIP-2D/HDG-3D

On effectue le même travail avec HDG. On cherche une relation entre les ondes. Pour ce faire, on exprime d'abord une relation entre l'onde  $\mathbf{A}_2$  et la variable hybride  $\Lambda$ . Cette dernière nous permet d'obtenir un système dont l'inconnue est  $\Lambda$ . Enfin, on exprime  $\mathbf{B}_2$  en fonction de  $\mathbf{A}_2$  et  $\Lambda$ , cette dernière variable ayant été calculée par résolution du système. On travaille sur des grandeurs discrétisées indicées par  $h$ . Ainsi, sur  $\Sigma$ , on a :

$$\langle \mathbf{A}_2, \eta \rangle_\Sigma = \left\langle \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} (\hat{\mathbf{E}}_h + Z_0 \hat{\mathbf{H}}_{h,\text{réel}} \times \mathbf{n}_{\text{wcip}}), \eta \right\rangle_\Sigma \quad (3.47)$$

où  $\eta$  appartient à :

$$M_h^p = \{ \eta \in (L^2(\mathcal{F}_h))^3 \mid \eta|_F \in (\mathbb{P}_p(F))^3, (\eta \cdot \mathbf{n})|_F = 0, \forall F \in \mathcal{F}_h \} \quad (3.48)$$

et  $\mathbf{n}_{\text{wcip}}$  est la normale dans le milieu telle que définie par la WCIP dans le chapitre 1. Soit  $\mathbf{n}$  la normale définie sur chacune des faces des tétraèdres du maillage HDG,

$$\langle \mathbf{n} \times \mathbf{A}_2, \eta \rangle_\Sigma = \left\langle \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} (\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{E}}_h + Z_0 \mathbf{n} \times (\hat{\mathbf{H}}_{h,\text{réel}} \times \mathbf{n}_{\text{wcip}})), \eta \right\rangle_\Sigma \quad (3.49)$$

soit avec le changement de variables de (2.69),

$$\langle \mathbf{n} \times \mathbf{A}_2, \eta \rangle_\Sigma = \left\langle \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} (\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{E}}_h + \mathbf{n} \times (\hat{\mathbf{H}}_h \times \mathbf{n}_{\text{wcip}})), \eta \right\rangle_\Sigma. \quad (3.50)$$

Il est à noter que  $\mathbf{n}$  est selon  $\mathbf{z}$  sur la frontière  $\Sigma$  mais que l'on ne connaît pas son signe, ce dernier changeant selon l'orientation des faces (triangles) de  $\Sigma$ . Par contre, on a  $\mathbf{n}_{\text{wcip}} = -\mathbf{z}$ . D'après (3.50),

$$\langle \mathbf{n} \times \mathbf{A}_2, \eta \rangle_\Sigma = \left\langle \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} (\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{E}}_h + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\text{wcip}}) \hat{\mathbf{H}}_h^t), \eta \right\rangle_\Sigma \quad (3.51)$$

où  $\hat{\mathbf{H}}_h^t$  est le champ magnétique tangentiel.

La définition des traces numériques est :

$$\begin{cases} \Lambda_h = \hat{\mathbf{H}}_h^t \\ \hat{\mathbf{E}}_h = \mathbf{E}_h + \tau \mathbf{n} \times (\Lambda_h - \hat{\mathbf{H}}_h^t). \end{cases} \quad (3.52)$$

De par (3.52), on obtient le système à résoudre suivant

$$\langle \mathbf{n} \times \mathbf{E}_h + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{H}'_h - \Lambda_h) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{wcip}) \Lambda_h, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\Sigma} = 2\sqrt{Z_0} \langle \mathbf{n} \times \mathbf{A}_2, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\Sigma}. \quad (3.53)$$

Donc nous aurons un coefficient  $(-\boldsymbol{\tau} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{wcip})$  pondérant  $\Lambda_h$ , coefficient qui apparaît dans l'une des matrices élémentaires intervenant dans la discrétisation globale. La matrice à inverser est le membre de gauche de (3.53) et le terme  $2\sqrt{Z_0} \langle \mathbf{n} \times \mathbf{A}_2, \boldsymbol{\eta} \rangle$  correspond au second membre du système à résoudre. On pose

$$RHS = 2\sqrt{Z_0} \langle \mathbf{n} \times \mathbf{A}_2, \boldsymbol{\eta} \rangle. \quad (3.54)$$

RHS est décrit dans l'annexe H. Pour valider la démarche, en premier lieu, nous avons imposé l'onde analytique  $\mathbf{A}_2$  sur la frontière  $\Sigma$  par l'intermédiaire du champ magnétique ( $\Lambda_h$ ). L'étape suivante a consisté à hybrider avec la WCIP en imposant alors l'onde  $\mathbf{A}_2$  issue de la WCIP. Nous conservons un maillage structuré par simplicité pour imposer le terme source  $\mathbf{A}_2$  au milieu de l'hypoténuse des faces.

Le second membre étant connu, on peut écrire le système général à résoudre sous la forme

$$K\Lambda_h = RHS. \quad (3.55)$$

Dans le cas où l'on a du métal sur la frontière  $\Sigma$  (la partie métallique est alors désignée par  $\Sigma_m$ ), si l'on souhaite imposer la condition métallique dans le domaine HDG, cela se traduit par l'ajout de la condition

$$\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{E}}_h = \mathbf{0}, \quad (3.56)$$

ce qui s'écrit :

$$\langle \mathbf{n} \times \mathbf{E}_h + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{H}'_h - \Lambda_h), \boldsymbol{\eta} \rangle_{\Sigma_m} = \mathbf{0}. \quad (3.57)$$

Il faut donc annuler les termes du second membre dont les inconnues sont situées sur le métal. Pour la validation numérique, des éléments  $P_1$  sont implémentés côté HDG.

### 3.3 Validation numérique dans le cas 3D

Nos cas tests sont basés sur un guide métallique de côtés  $a = 22mm$ ,  $b = 10mm$  et de hauteur  $H = 1,5mm$ , ce qui correspond approximativement à un guide bande X. La fréquence de coupure du premier mode propagatif est celle du  $TE_{1,0}$ . Son expression est donnée par

$$f = \frac{c}{2a} = 6,81 \text{ GHz}. \quad (3.58)$$

Etant donné que l'on a un mur magnétique en  $x = a/2$  et un mur électrique en  $y = b/2$ , les modes impairs seront conservés selon x (car les conditions aux limites sur les parois et la symétrie sont duales [25]) et les modes pairs seront conservés en y (car les conditions aux limites sur les parois et la symétrie sont les mêmes), soit les  $TE_{2p+1,2q}$  et les  $TM_{2p+1,2q}$  (cf. figure 3.3). La fréquence de coupure du  $TE_{3,0}$  est de 20,45 GHz et celle du  $TE_{1,2}$  est de 30,7 GHz. Nous travaillerons donc au maximum sur la bande [ 6,81 : 20,45 ] GHz qui est la bande monomode dans les cas tests suivants.

Symétrie de type mur magnétique → modes impairs

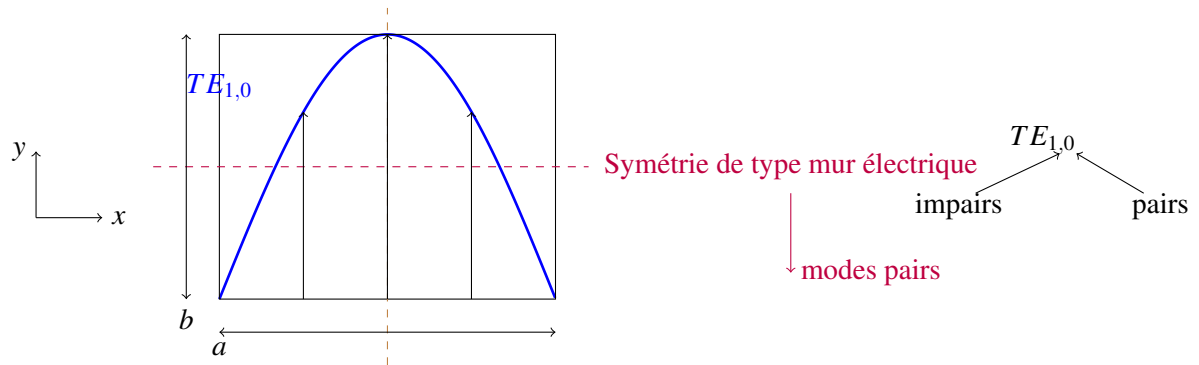


FIGURE 3.3 – Symétries dans le guide.

### 3.3.1 Cas d'un mode se propageant dans un cube métallique rempli de vide

On se place dans le cas où toutes les frontières sont métalliques exceptée celle du haut (cf. figure 3.4).

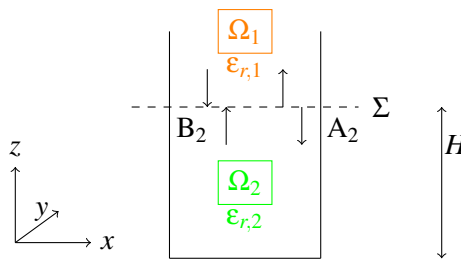


FIGURE 3.4 – Cas du vide.

Le paramètre  $S_{11}$  est défini par

$$S_{11} = \frac{Z - Z_{TE}}{Z + Z_{TE}} \quad (3.59)$$

où  $Z$  est l'impédance de la structure vue depuis la surface  $\Sigma$  et  $Z_{TE}$  est l'impédance du mode  $TE_{1,0}$  injecté qui est ici la référence. En pratique, on calcule  $S_{11}$  au niveau de la surface  $\Sigma$  en faisant :

$$S_{11} = \frac{A_{TE_{1,0}}}{B_{TE_{1,0}}} \quad (3.60)$$

On calcule ce paramètre  $S_{11}$  pour les deux méthodes (WCIP/FDTLM et WCIP/HDG- $P_1$ ) et on compare à l'analytique, à la WCIP seule et à un code commercial d'éléments finis : le logiciel de simulation ANSYS-HFSS, où des éléments  $P_1$  sont choisis. Ainsi, on représente la partie réelle et la partie imaginaire de  $S_{11}$  sur les figures 3.5 et 3.6. On considère  $N$  subdivisions selon l'axe  $x$  et  $M$  subdivisions selon l'axe  $y$ . On prend  $N = M = 8$ . On prend 4 couches selon  $z$  avec HDG et une seule couche selon  $z$  avec la FDTLM. On considère la plage de fréquences [ 7 : 8 ] GHz.

Pour toutes les simulations 3D, on résout avec le solveur GMRES pour lequel on prend un restart de 50. On prend dans ce cas une tolérance du GMRES de  $10^{-6}$ . Concernant HFSS, le paramètre qui permet de moduler la précision du calcul s'appelle  $\Delta S$ . D'après la documentation du logiciel, il est défini par

$$\Delta S = \max_{i,j} |S_{i,j}^P - S_{i,j}^{P-1}|_{(i=1,2),(j=1,2)} \quad (3.61)$$

où  $P$  est le numéro de passe courant (on fait donc la différence entre deux passes consécutives). Il est choisi égal à  $10^{-3}$ .

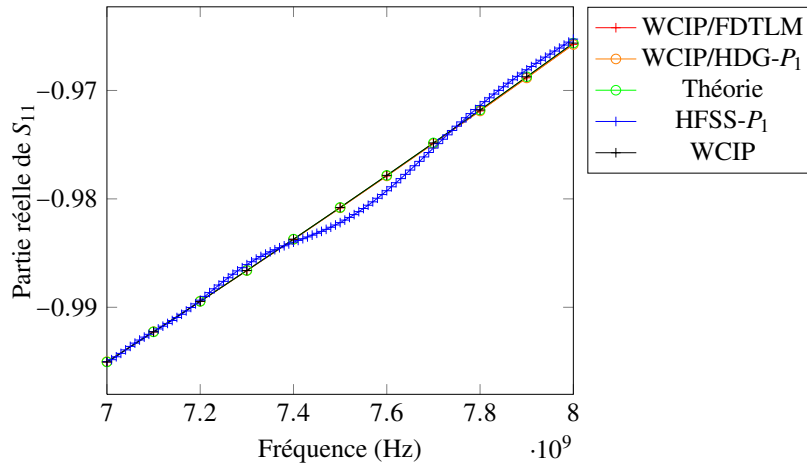


FIGURE 3.5 – Partie réelle de  $S_{11}$  dans le cas du vide

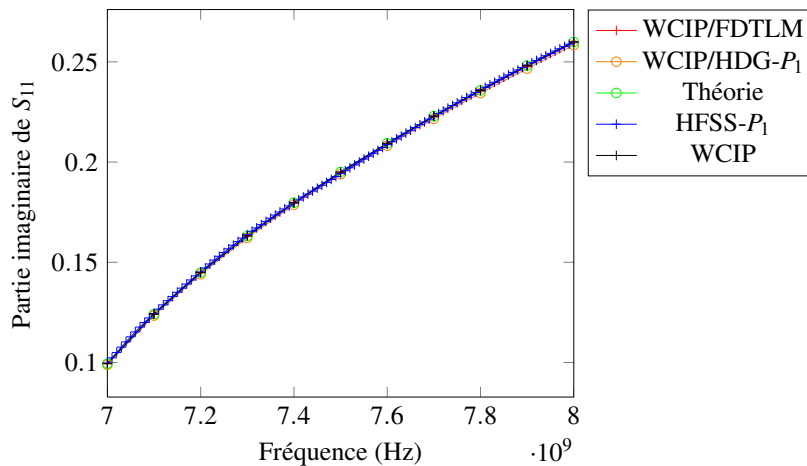


FIGURE 3.6 – Partie imaginaire de  $S_{11}$  dans le cas du vide

On cherche ensuite à quantifier les écarts à la solution théorique dans le cas du vide avec les paramètres de simulation précédents. On effectue d'abord une comparaison entre les trois méthodes suivantes : WCIP/FDTLM, WCIP/HDG- $P_1$  et WCIP seule. Les résultats sont présentés sur la figure 3.7. On constate que la WCIP est analytique dans le cas du vide.

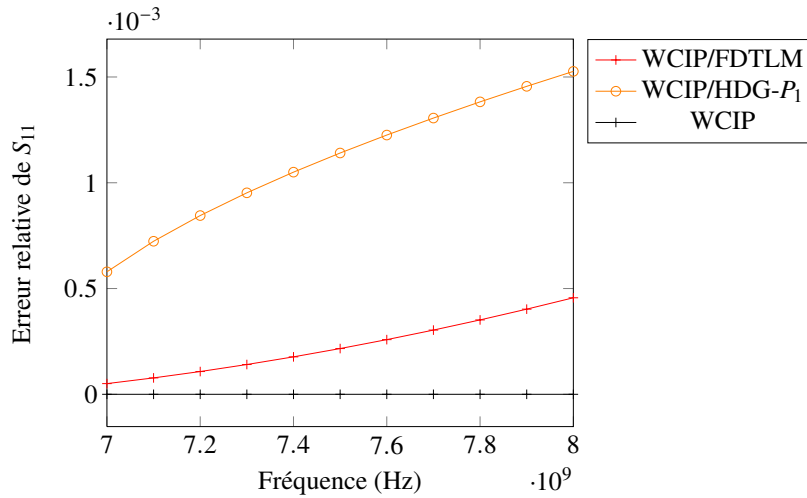


FIGURE 3.7 – Erreur relative de  $S_{11}$  par rapport à la solution analytique.

Ensuite, on construit l'écart à la solution analytique selon trois tolérances du GMRES pour la méthode WCIP/HDG- $P_1$  :  $10^{-2}$ ,  $10^{-6}$  et  $10^{-10}$  (cf. figure 3.8). On constate que pour ce maillage quelle que soit la tolérance du GMRES, l'écart à la solution analytique est identique. L'objectif est de savoir quelle est l'erreur que l'on commet par rapport à la solution analytique en paramètre  $S$  quand on s'impose une tolérance donnée sur le GMRES ou quand on impose  $\Delta S$  dans HFSS. On fait donc le même travail avec HFSS (figure 3.8). On constate que globalement l'écart à la solution analytique en paramètres  $S$  est de l'ordre de grandeur de  $\Delta S$ . On constate que pour ce maillage fixé, la tolérance du GMRES n'influence pas l'écart à la solution théorique. Etant donné que cet écart augmente avec la fréquence, il faudrait encore raffiner le maillage pour s'assurer que l'absence d'influence de la tolérance du GMRES ne provient pas du fait que le maillage est trop grossier.

### 3.3.2 Cas d'un mode se propageant dans un cube métallique rempli de diélectrique sans pertes

On teste l'insertion de couches de diélectriques : la première étape consiste à traiter le cas d'un seul diélectrique et la seconde étape consiste à prendre en compte deux diélectriques (cf. figure 3.9). On fait d'abord ceci dans le cas sans pertes, autrement dit dans le cas où la partie imaginaire de la permittivité relative  $\epsilon_r$  du substrat est nulle. Ainsi, on choisit des substrats tels que  $\epsilon_r = 10, 2$ . Puis, on réitère ce travail dans le cas où l'on inclut les pertes. On calcule le paramètre  $S_{11}$  pour quatre méthodes (HFSS, WCIP seule, WCIP/FDTLM et WCIP/HDG- $P_1$ ) et on compare à l'analytique (cf figure 3.10 pour le module et la phase). On prend encore  $N = M = 8$ , 4 couches selon  $z$  avec HDG et une seule couche selon  $z$  avec la FDTLM. On considère la plage de fréquences [ 7 : 8 ] GHz, une tolérance du GMRES de  $10^{-6}$  pour les méthodes hybrides et la WCIP et un paramètre  $\Delta S$  de  $10^{-3}$  pour HFSS.

On constate sur la figure 3.10 que les techniques éléments finis (méthode WCIP/HDG et HFSS) sont plus précises sur la phase que le module et que la méthode WCIP/FDTLM est plus

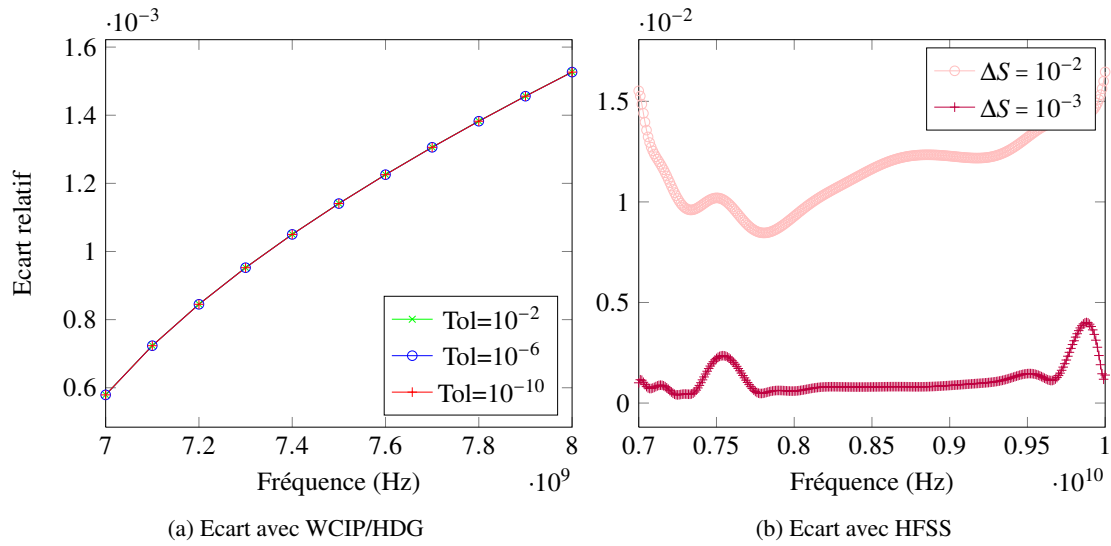


FIGURE 3.8 – Ecart relatif de  $|S_{11}|$  entre la solution théorique et différentes méthodes dans le cas du vide.

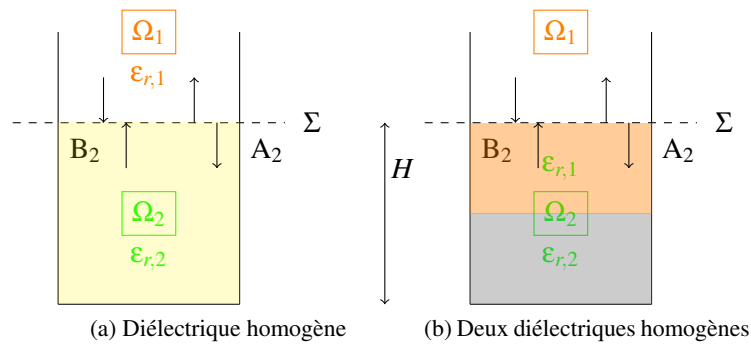


FIGURE 3.9 – Deux cas tests avec diélectrique.

précise sur le module que sur la phase. La figure 3.11 présente l'écart de la méthode hybride WCIP/HDG- $P_1$  à la solution théorique selon la tolérance du GMRES et également l'écart entre HFSS et la solution théorique selon le paramètre  $\Delta S$ . On fait la même chose pour le cas de la figure 3.9b où l'on superpose un substrat de permittivité relative  $\epsilon_{r,1}=4,4$  sur une couche de substrat de permittivité  $\epsilon_{r,2}=10,2$ . Les deux couches ont la même hauteur à savoir  $H/2$ . On prend par défaut une tolérance de  $10^{-6}$  du GMRES pour les méthodes hybrides et la WCIP et un paramètre  $\Delta S$  égal à  $10^{-3}$ . Les résultats sont présentés sur la figure 3.12. Les conclusions sont similaires au cas où il n'y a qu'un seul diélectrique. On constate encore sur la figure 3.13 que pour ce maillage fixé, la tolérance du GMRES n'influence pas les résultats. Il faut également noter que la méthode hybride WCIP/FDTLM n'a pas été représentée suite à des problèmes avec le code ayant plusieurs couches selon  $z$ . Finalement, quel que soit le cas sans pertes (vide

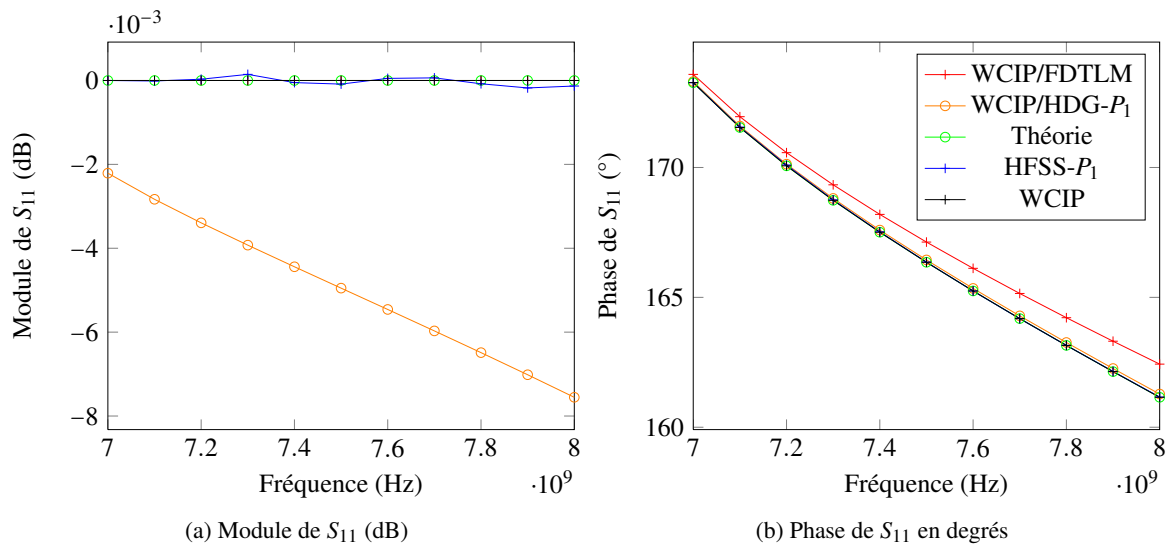


FIGURE 3.10 –  $S_{11}$  dans le cas d'un diélectrique sans pertes.

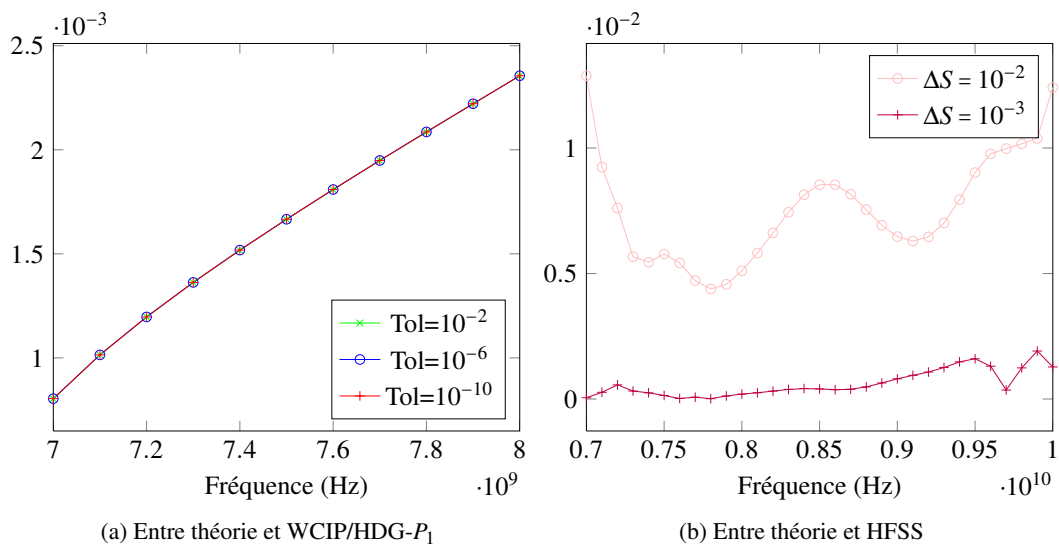


FIGURE 3.11 – Ecart relatif de  $|S_{11}|$  avec la théorie dans le cas d'un diélectrique de permittivité 10,2 sans pertes.

compris), on constate que la tolérance du GMRES n'influence pas et que la FDTLM est plus précise en module et HDG est plus précise en phase.

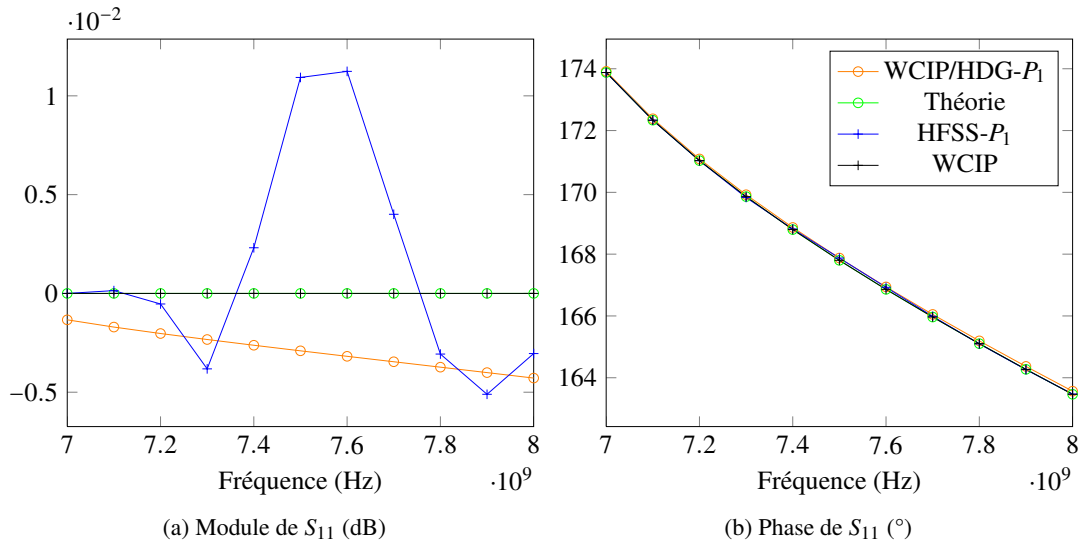


FIGURE 3.12 –  $S_{11}$  dans le cas de deux diélectrique sans pertes.

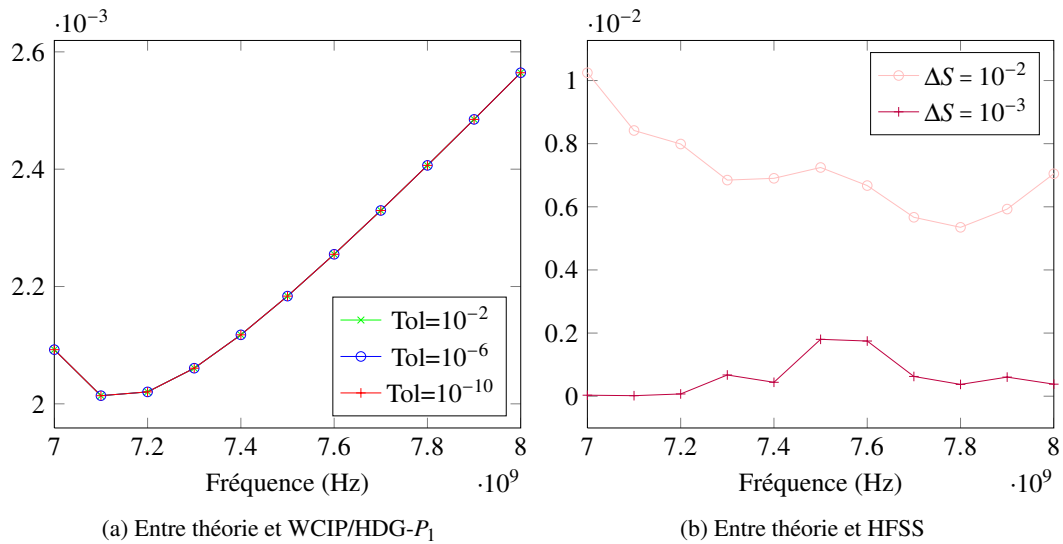


FIGURE 3.13 – Ecart relatif de  $|S_{11}|$  avec la théorie dans le cas d'un diélectrique de permittivité 4,4 sur un diélectrique de permittivité 10,2 sans pertes.

### 3.3.3 Cas d'un mode se propageant dans un cube métallique rempli de diélectrique avec pertes

Dans cette partie, on introduit une partie imaginaire à la permittivité relative. Cette dernière vaut alors  $\epsilon_r = 10,2(1 - 0,0023i)$ . On réitère les mêmes tests qu'auparavant. Le paramètre  $\Delta S$  vaut ici  $10^{-3}$ . Les résultats sont présentés sur la figure 3.14. On obtient les mêmes conclusions



que précédemment.

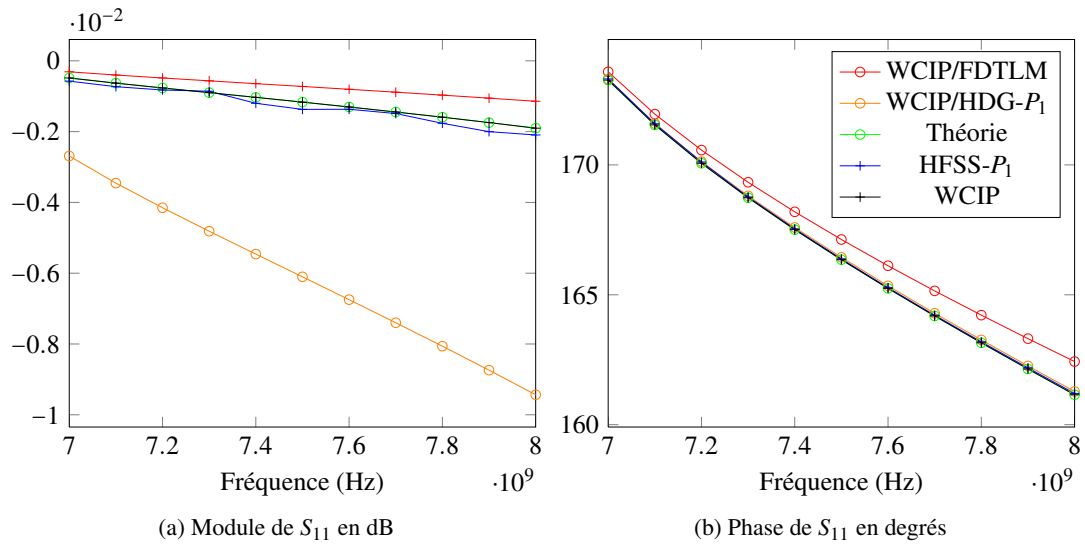


FIGURE 3.14 –  $S_{11}$  dans le cas d'un diélectrique avec pertes.

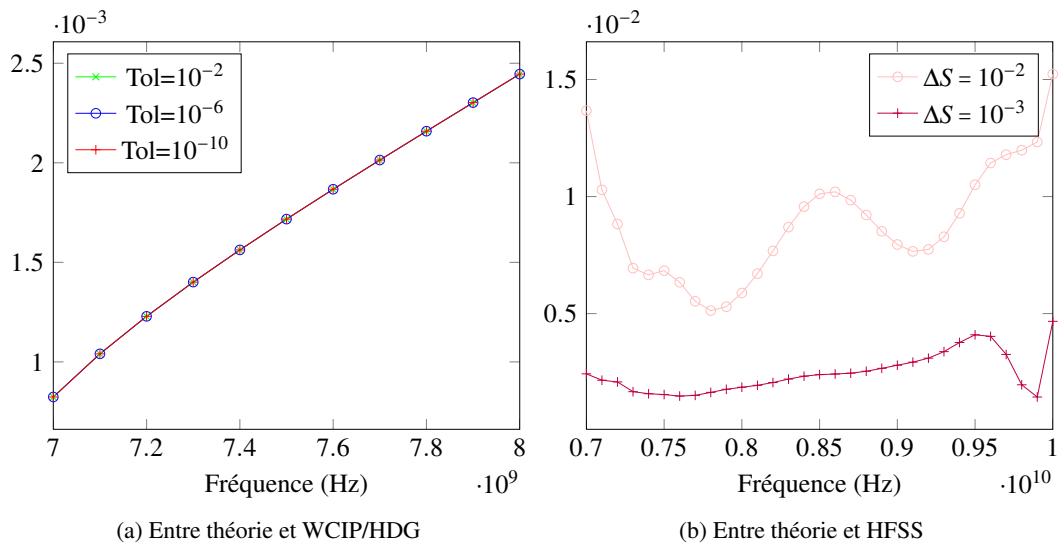


FIGURE 3.15 – Ecart relatif de  $|S_{11}|$  avec la théorie dans le cas d'un diélectrique de permittivité 10,2 avec des pertes.

### 3.3.4 Cas d'un mode se propageant sur une ligne microruban

Le cas testé est présenté sur la figure 3.16. On garde les mêmes dimensions du guide. La ligne a une largeur de 1 mm. Dans le cas de la WCIP ou de la méthode hybride WCIP/HDG- $P_1$ ,

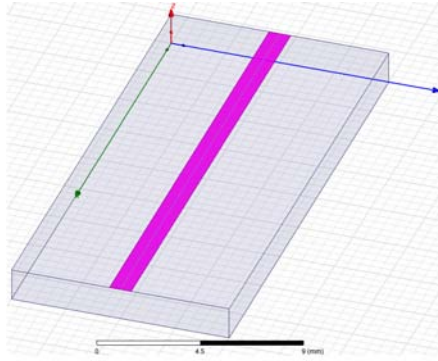
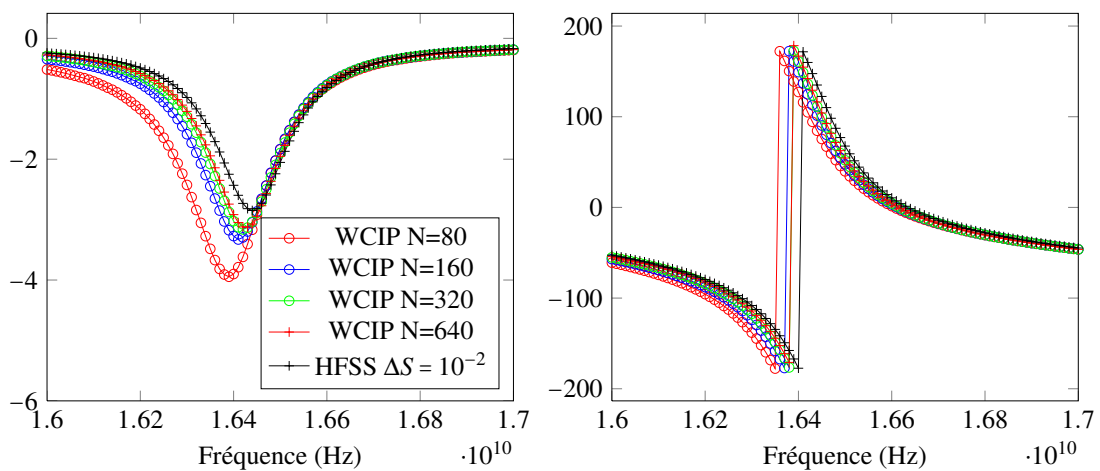


FIGURE 3.16 – Ligne imprimée sur un substrat de permittivité 10,2 avec des pertes.

la tolérance du GMRES est prise par défaut à  $10^{-2}$ . Quand cette dernière est modifiée, cela est explicité. Le maillage en  $x, y$  est toujours caractérisé par les variables  $N$  et  $M$ . Quant au nombre de couches en  $z$  dans la méthode WCIP/HDG- $P_1$ , il est précisé sur les légendes des figures. On réalise cette structure avec le logiciel HFSS où l'on fixe  $\Delta S$  à  $10^{-2}$ . On considère alors que les résultats obtenus avec HFSS constituent notre référence.

Les résultats pour la WCIP seule en module et en phase de  $S_{11}$  sont présentés sur la figure 3.17. On constate qu'à  $N = 640$  la WCIP a convergé. La figure 3.18 montre que l'affaiblissement de la tolérance du GMRES à partir d'une tolérance de  $10^{-2}$  ne change pas le résultat et en conséquence, on conserve cette valeur.



(a) Module de  $S_{11}$  avec la WCIP seule.

(b) Phase de  $S_{11}$  avec la WCIP seule.

FIGURE 3.17 – Module et phase de  $S_{11}$  avec la WCIP seule.

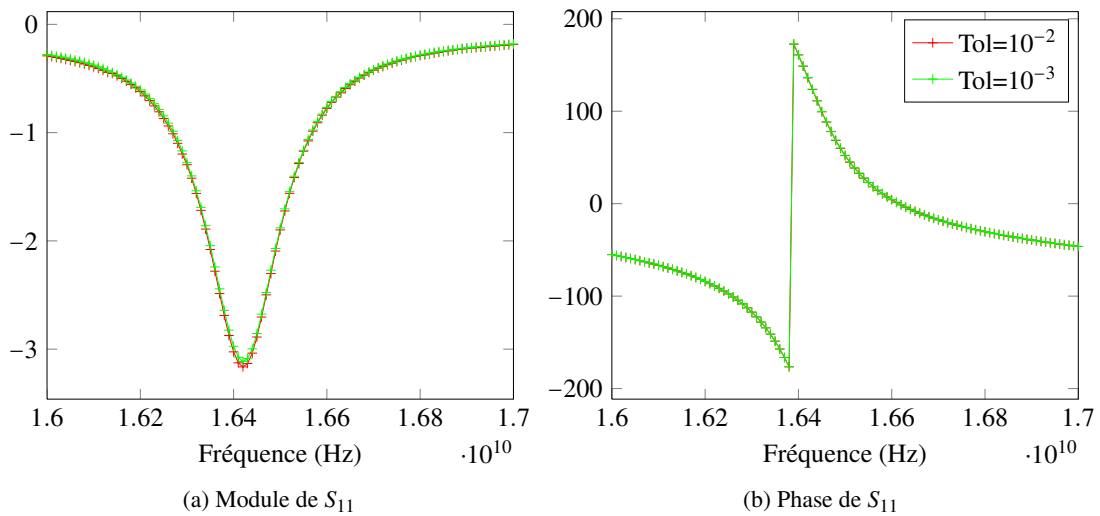


FIGURE 3.18 –  $S_{11}$  avec la WCIP seule selon la tolérance du GMRES pour  $N = 320$ .

On fait un travail identique avec la méthode WCIP/HDG- $P_1$ . Soit  $L$  le nombre de couches en  $z$ . Comme on est rapidement limité par les ressources mémoires, on prend  $N = M = 40$  et on raffine progressivement la méthode en  $z$  pour se rapprocher de la WCIP seule. Les résultats sont présentés sur la figure 3.19. On constate que lorsqu'on raffine en  $z$ , la méthode WCIP/HDG- $P_1$  se rapproche de la méthode WCIP maillée identiquement en  $x, y$ . Dans ce cas où  $N = 40$ , 8 couches en  $z$  suffisent. Néanmoins, comme la WCIP convergée est à  $N = 640$ , il est nécessaire de raffiner encore plus selon  $x, y$ .

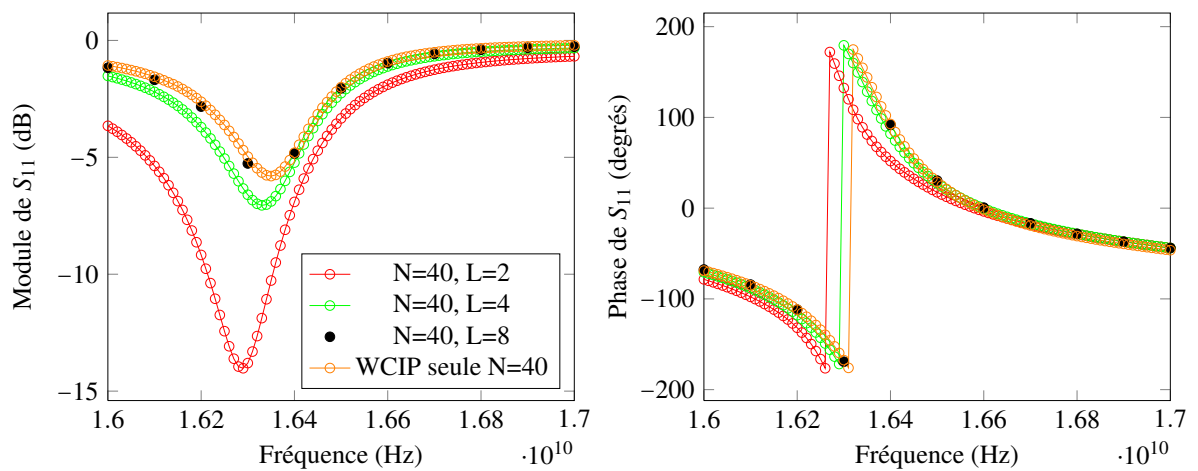


FIGURE 3.19 – Module et phase de  $S_{11}$  avec la WCIP/HDG- $P_1$ .

Sur la figure 3.20, on représente la méthode hybride dans d'autres configurations de maillage. Cette figure 3.20 montre un écart entre la référence HFSS et la méthode hybride. On peut

en conclure que ne raffiner le maillage qu'en  $x,y$  ne suffit pas. Ce raffinement doit être accompagné d'un raffinement en  $z$  (cf. courbe à  $N = 160$  couches en  $x,y$  et une couche en  $z$ ). Mais, on est limité par les ressources mémoires, ce qui nous amène à implémenter une technique de décomposition de domaines.

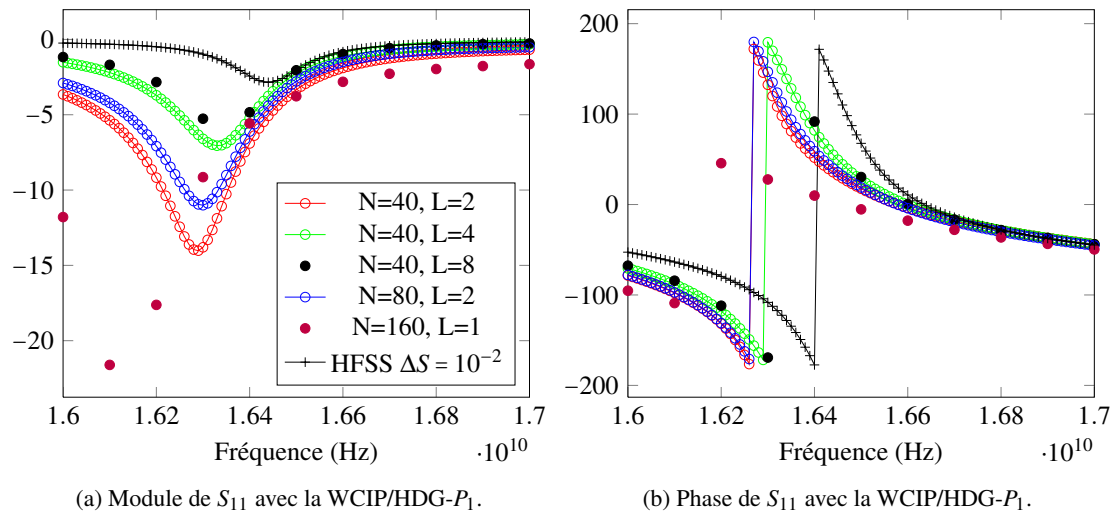


FIGURE 3.20 – Module et phase de  $S_{11}$  avec la WCIP/HDG- $P_1$ .

### 3.4 Conclusions

La ligne microruban génère d'autres modes que le  $TE_{1,0}$  dans le guide. Il faut donc mailler davantage que dans les cas canoniques pour obtenir un test concluant avec la WCIP seule. En conséquence, il en est de même avec les méthodes hybrides. En outre, avec HDG, on constate que raffiner le maillage en  $x,y$  n'est pas suffisant : raffiner selon  $z$  est également fondamental. Cependant, les ressources mémoires limitent le raffinement, c'est pourquoi une décomposition de domaines côté HDG a été mise en place. Cette dernière est abordée dans le chapitre 4.

## Chapitre 4

# Décomposition de domaines dans HDG

Les méthodes de décomposition de domaines sont divisées en deux classes : les méthodes avec recouvrement, également appelées méthodes de Schwarz (car c'est Schwarz qui les a proposées en 1870), et les méthodes sans recouvrement qui sont également appelées méthodes du complément de Schur [47]. Ces dernières consistent à regrouper les inconnues en deux groupes : des inconnues situées à l'interface entre les domaines et des inconnues situées à l'intérieur des sous-domaines. On commence par résoudre un système dont les inconnues sont les variables situées à l'interface puis on peut en déduire les inconnues intérieures aux sous-domaines. On peut faire ce travail pour un nombre de sous-domaines quelconque, mais il faut noter que la vitesse de convergence est dégradée quand le nombre de sous-domaines augmente.

En premier lieu, le domaine HDG est découpé en trois sous-domaines identiques (des couches selon  $z$  cf. figure 4.1). Dans la section suivante, on généralise à  $N_d$  domaines. L'algorithme de décomposition de domaines de type Schwarz adopté ici est présenté dans [48] avec 2 domaines. L'objectif de cette technique est de remplacer la résolution d'un gros système linéaire par la résolution d'une succession de plus petits systèmes, ceci permettant de traiter des systèmes plus gros. On peut également répartir les calculs associés à chaque petit système sur différents processeurs. Ceci fait de la décomposition de domaines une technique particulièrement bien adaptée au calcul parallèle.

### 4.1 Système dans le cas 3 domaines

#### 4.1.1 Théorie

Les notations sont présentées sur la figure 4.1. Le système à résoudre peut s'écrire selon la répartition suivante

$$\begin{pmatrix} K_{i,i}^{(1)} & 0 & 0 & K_{i,g_1}^{(1)} & 0 \\ 0 & K_{i,i}^{(2)} & 0 & K_{i,g_1}^{(2)} & K_{i,g_2}^{(2)} \\ 0 & 0 & K_{i,i}^{(3)} & 0 & K_{i,g_2}^{(3)} \\ K_{g_1,i}^{(1)} & K_{g_1,i}^{(2)} & 0 & K_{g_1,g_1}^{(1)} + K_{g_1,g_1}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{g_2,i}^{(2)} & K_{g_2,i}^{(3)} & 0 & K_{g_2,g_2}^{(2)} + K_{g_2,g_2}^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{h,i}^{(1)} \\ \lambda_{h,i}^{(2)} \\ \lambda_{h,i}^{(3)} \\ \lambda_{h,g_1} \\ \lambda_{h,g_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{h,i}^{(1)} \\ b_{h,i}^{(2)} \\ b_{h,i}^{(3)} \\ b_{h,g_1}^{(1)} + b_{h,g_1}^{(2)} \\ b_{h,g_2}^{(2)} + b_{h,g_2}^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

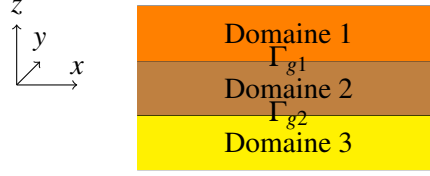


FIGURE 4.1 – 3 domaines

D'après [49], le système 4.1 est équivalent au problème suivant

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} K_{i,i}^{(1)} & K_{i,g_1}^{(1)} \\ K_{g_1,i}^{(1)} & K_{g_1,g_1}^{(1)} + A^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{h,i}^{(1)} \\ \lambda_{h,g_1}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{h,i}^{(1)} \\ b_{h,g_1}^{(1)} + \Sigma_1 \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} K_{i,i}^{(2)} & K_{i,g_1}^{(2)} & K_{i,g_2}^{(2)} \\ K_{g_1,i}^{(2)} & K_{g_1,g_1}^{(2)} + A^{(21)} & 0 \\ K_{g_2,i}^{(2)} & 0 & K_{g_2,g_2}^{(2)} + A^{(22)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{h,i}^{(2)} \\ \lambda_{h,g_1}^{(2)} \\ \lambda_{h,g_2}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{h,i}^{(2)} \\ b_{h,g_1}^{(2)} + \Sigma_2 \\ b_{h,g_2}^{(2)} + \Sigma_3 \end{pmatrix}, \\
 & \begin{pmatrix} K_{i,i}^{(3)} & K_{i,g_2}^{(3)} \\ K_{g_2,i}^{(3)} & K_{g_2,g_2}^{(3)} + A^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{h,i}^{(3)} \\ \lambda_{h,g_2}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{h,i}^{(3)} \\ b_{h,g_2}^{(3)} + \Sigma_4 \end{pmatrix}, \tag{4.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma_1 + \Sigma_2 - (A^{(1)} + A^{(21)})\lambda_{h,g_1}^{(1)} &= 0, \\
 \Sigma_1 + \Sigma_2 - (A^{(1)} + A^{(21)})\lambda_{h,g_1}^{(2)} &= 0, \\
 \Sigma_3 + \Sigma_4 - (A^{(22)} + A^{(3)})\lambda_{h,g_2}^{(2)} &= 0, \\
 \Sigma_3 + \Sigma_4 - (A^{(22)} + A^{(3)})\lambda_{h,g_2}^{(3)} &= 0,
 \end{aligned}$$

où  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  et  $\Sigma_4$  sont des multiplicateurs de Lagrange.  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont des termes de frontières auxiliaires définis de part et d'autre de la frontière  $\Gamma_{g_1}$ .  $\Sigma_3$  et  $\Sigma_4$  sont définis de part et d'autre de  $\Gamma_{g_2}$ . Les matrices  $A^{(1)}$  et  $A^{(21)}$  sont telles que  $A^{(1)} + A^{(21)}$  est inversible. Il en est de même pour  $A^{(3)} + A^{(22)}$ . L'expression de  $A^{(l)}$ , ( $l = 1, 21$ ) est donnée par

$$(A^{(l)})_{i,j} = -Z_r^{(l)} \langle \eta_j, \eta_i \rangle_{\Gamma_{g_l}} \tag{4.3}$$

où  $(\eta_i)_i$  est une base de  $M_h^p$  restreinte à  $\Gamma_{g_1}$  et

$$Z_r^{(l)} = \sqrt{\frac{\mu_r^{(l)}}{\epsilon_r^{(l)}}}. \tag{4.4}$$

Les matrices  $A^{(l)}$ , ( $l = 3, 22$ ) sont définies de manière similaire. Le problème (4.2) nous amène à résoudre un système dont les inconnues sont les variables aux deux interfaces  $\Gamma_{g_1}$  et  $\Gamma_{g_2}$  qui

sont  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  et  $\Sigma_4$ . Pour le résoudre, on introduit un système réduit basé sur le complément de Schur (défini ci après dans (4.6)). Ainsi, soit le système à résoudre suivant :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

le complément de Schur,  $S_{ch}$ , est défini par

$$S_{ch} = A - BD^{-1}C. \quad (4.6)$$

L'une des inconnues  $x$  du système (4.5) a alors pour expression

$$x = S_{ch}^{-1}(a - BD^{-1}b). \quad (4.7)$$

Le premier système de (4.2) a pour complément de Schur  $S_{ch}^{(1)} + A^{(1)}$  où  $S_{ch}^{(1)}$  est le complément de Schur de la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} K_{g_1, g_1}^{(1)} & K_{g_1, i}^{(1)} \\ K_{i, g_1}^{(1)} & K_{i, i}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

c'est-à-dire que l'expression de  $S_{ch}^{(1)}$  est

$$S_{ch}^{(1)} = K_{g_1, g_1}^{(1)} - K_{g_1, i}^{(1)}(K_{i, i}^{(1)})^{-1}K_{i, g_1}^{(1)}. \quad (4.9)$$

Donc

$$\lambda_{h, g_1}^{(1)} = (S_{ch}^{(1)} + A^{(1)})^{-1}(c_{h, g}^{(1)} + \Sigma_1) \quad (4.10)$$

où

$$c_{h, g}^{(1)} = b_{h, g_1}^{(1)} - K_{g_1, i}^{(1)}(K_{i, i}^{(1)})^{-1}b_{h, i}^{(1)}. \quad (4.11)$$

En outre, comme les conditions aux limites sont imposées sur les bords du domaine, on a :

$$\begin{cases} b_{h, g_1}^{(1)} = 0, \\ b_{h, g_1}^{(2)} = 0, \\ b_{h, g_2}^{(2)} = 0, \\ b_{h, g_2}^{(3)} = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

En effet, quand on n'a pas de source locale sur les frontières  $\Gamma_{g_1}, \Gamma_{g_2}$  et  $\Gamma_{g_3}$ , les termes en  $b_{h, g}$  sont nuls. On cherche à faire de même pour le deuxième système de (4.2) en écrivant cette matrice sous la forme

$$\begin{pmatrix} K_{g_1, g_1}^{(2)} + A^{(21)} & K_{g_1, i}^{(2)} & 0 \\ K_{i, g_1}^{(2)} & K_{i, i}^{(2)} & K_{i, g_2}^{(2)} \\ 0 & K_{g_2, i}^{(2)} & K_{g_2, g_2}^{(2)} + A^{(22)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{h, g_1}^{(2)} \\ \lambda_{h, i}^{(2)} \\ \lambda_{h, g_2}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_3 \\ b_{h, i}^{(2)} \\ \Sigma_2 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

On pose la sous matrice

$$A_b = \begin{pmatrix} K_{i,i}^{(2)} & K_{i,g_2}^{(2)} \\ K_{g_2,i}^{(2)} & K_{g_2,g_2}^{(2)} + A^{(22)} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

D'après (4.13) et d'après le résultat sur le complément de Schur énoncé en (4.7), la variable  $\lambda_{h,g_1}^{(2)}$  s'écrit

$$\lambda_{h,g_1}^{(2)} = S_b^{(21)-1} \left( \Sigma_3 - \begin{pmatrix} K_{g_1,i}^{(2)} & 0 \end{pmatrix} A_b^{-1} \begin{pmatrix} b_{h,i}^{(2)} \\ \Sigma_2 \end{pmatrix} \right) \quad (4.15)$$

où  $S_b^{(21)}$  est le complément de Schur de la matrice du système de (4.13). On peut expliciter  $A_b^{-1}$

$$A_b^{-1} = \frac{1}{\det A_b} \begin{pmatrix} K_{g_2,g_2}^{(2)} + A^{(22)} & -K_{i,g_2}^{(2)} \\ -K_{g_2,i}^{(2)} & K_{i,i}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

donc

$$\lambda_{h,g_1}^{(2)} = S_b^{(21)-1} \left[ \Sigma_3 - \frac{1}{\det A_b} K_{g_1,i}^{(2)} \left( (K_{g_2,g_2}^{(2)} + A^{(22)}) b_{h,i}^{(2)} - K_{i,g_2}^{(2)} \Sigma_2 \right) \right]. \quad (4.17)$$

On constate que l'on a

$$\lambda_{h,g_1}^{(2)} / b_{h,i}^{(2)} = S_b^{(21)-1} \left[ \Sigma_3 + \frac{1}{\det A_b} K_{g_1,i}^{(2)} K_{i,g_2}^{(2)} \Sigma_2 \right] \quad (4.18)$$

ainsi que

$$\lambda_{h,g_1}^{(2)} / \Sigma_{2,3} = S_b^{(21)-1} \left[ -\frac{1}{\det A_b} K_{g_1,i}^{(2)} (K_{g_2,g_2}^{(2)} + A^{(22)}) b_{h,i}^{(2)} \right]. \quad (4.19)$$

En conséquence, d'après (4.18) et (4.19), on peut écrire la variable  $\lambda_{h,g_1}^{(2)}$  sous la forme suivante

$$\lambda_{h,g_1}^{(2)} = \lambda_{h,g_1}^{(2)} / b_{h,i}^{(2)} + \lambda_{h,g_1}^{(2)} / \Sigma_{2,3} = 0, \quad (4.20)$$

ce qui a son importance pour l'écriture de l'algorithme de résolution. En appliquant le même procédé que pour la variable  $\lambda_{h,g_1}^{(2)}$ , on peut écrire le système (4.21)

$$\begin{cases} \lambda_{h,g_1}^{(1)} = \lambda_{h,g_1}^{(1)} / b_{h,i}^{(1)} + \lambda_{h,g_1}^{(1)} / \Sigma_1 = 0 \\ \lambda_{h,g_2}^{(2)} = \lambda_{h,g_2}^{(2)} / b_{h,i}^{(2)} + \lambda_{h,g_2}^{(2)} / \Sigma_{2,3} = 0 \\ \lambda_{h,g_2}^{(3)} = \lambda_{h,g_2}^{(3)} / b_{h,i}^{(3)} + \lambda_{h,g_2}^{(3)} / \Sigma_4 = 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

Donc le dernier système en  $\Sigma$  du problème (4.2) devient :

$$\begin{cases} \Sigma_1 + \Sigma_2 - (A^{(1)} + A^{(21)}) \lambda_{h,g_1}^{(1)} / b_{h,i}^{(1)} = (A^{(1)} + A^{(21)}) \lambda_{h,g_1}^{(1)} / \Sigma_1 = 0 \\ \Sigma_1 + \Sigma_2 - (A^{(1)} + A^{(21)}) \lambda_{h,g_1}^{(2)} / b_{h,i}^{(2)} = (A^{(1)} + A^{(21)}) \lambda_{h,g_1}^{(2)} / \Sigma_{2,3} = 0 \\ \Sigma_3 + \Sigma_4 - (A^{(22)} + A^{(3)}) \lambda_{h,g_2}^{(2)} / b_{h,i}^{(2)} = (A^{(22)} + A^{(3)}) \lambda_{h,g_2}^{(2)} / \Sigma_{2,3} = 0 \\ \Sigma_3 + \Sigma_4 - (A^{(22)} + A^{(3)}) \lambda_{h,g_2}^{(3)} / b_{h,i}^{(3)} = (A^{(22)} + A^{(3)}) \lambda_{h,g_2}^{(3)} / \Sigma_4 = 0. \end{cases} \quad (4.22)$$



Le système (4.22) correspond au produit matrice vecteur de l'algorithme de résolution.

#### 4.1.2 Ecriture de l'algorithme de résolution

Dans cette sous-section, on cherche à exprimer le second membre du système (4.22) et son produit matrice-vecteur. En vertu de la construction du second membre de (4.22), on pose :

$$\begin{cases} Y^{(1)} = \lambda_{h,g_1}^{(1)} / \Sigma_1=0 \\ Y^{(2)} = \lambda_{h,g_1}^{(2)} / \Sigma_{2,3}=0 \\ Y^{(3)} = \lambda_{h,g_2}^{(2)} / \Sigma_{2,3}=0 \\ Y^{(4)} = \lambda_{h,g_2}^{(3)} / \Sigma_4=0. \end{cases} \quad (4.23)$$

Le second membre de (4.22) s'écrit de manière complète selon (4.24).

$$\begin{cases} F^{(2)} = (A^{(1)} + A^{(21)})Y^{(1)} \\ F^{(1)} = (A^{(1)} + A^{(21)})Y^{(2)} \\ F^{(4)} = (A^{(22)} + A^{(3)})Y^{(3)} \\ F^{(3)} = (A^{(22)} + A^{(3)})Y^{(4)}. \end{cases} \quad (4.24)$$

On pose également :

$$\begin{cases} X^{(1)} = A^{(1)}Y^{(1)} \\ X^{(2)} = A^{(21)}Y^{(2)} \\ X^{(3)} = A^{(22)}Y^{(3)} \\ X^{(4)} = A^{(3)}Y^{(4)}, \end{cases} \quad (4.25)$$

étant donné que l'on cherche à réécrire (4.24) sous la forme de (4.26).

$$\begin{cases} F^{(1)} = X^{(2)} + A^{(1)}Y^{(2)} \\ F^{(2)} = X^{(1)} + A^{(21)}Y^{(1)} \\ F^{(3)} = X^{(4)} + A^{(22)}Y^{(4)} \\ F^{(4)} = X^{(3)} + A^{(3)}Y^{(3)}. \end{cases} \quad (4.26)$$

Afin d'écrire le produit matrice-vecteur associé, on pose les variables :

$$\begin{cases} Y_m^{(1)} = \lambda_{h,g_1}^{(1)} / b_{h,i}^{(1)}=0 \\ Y_m^{(2)} = \lambda_{h,g_1}^{(2)} / b_{h,i}^{(2)}=0 \\ Y_m^{(3)} = \lambda_{h,g_2}^{(2)} / b_{h,i}^{(2)}=0 \\ Y_m^{(4)} = \lambda_{h,g_2}^{(3)} / b_{h,i}^{(3)}=0. \end{cases} \quad (4.27)$$

Le produit matrice vecteur de (4.22) s'écrit sous la forme de (4.28) avec les variables précédemment définies.

$$\begin{cases} W^{(1)} = \Sigma_1 + \Sigma_2 - (A^{(1)} + A^{(21)})Y_m^{(2)} \\ W^{(2)} = \Sigma_1 + \Sigma_2 - (A^{(1)} + A^{(21)})Y_m^{(1)} \\ W^{(3)} = \Sigma_3 + \Sigma_4 - (A^{(22)} + A^{(3)})Y_m^{(4)} \\ W^{(4)} = \Sigma_3 + \Sigma_4 - (A^{(22)} + A^{(3)})Y_m^{(3)}. \end{cases} \quad (4.28)$$

On pose ensuite les variables  $X_m$  :

$$\begin{cases} X_m^{(1)} = \Sigma_1 - A^{(1)}Y_m^{(1)} \\ X_m^{(2)} = \Sigma_2 - A^{(21)}Y_m^{(2)} \\ X_m^{(3)} = \Sigma_3 - A^{(22)}Y_m^{(3)} \\ X_m^{(4)} = \Sigma_4 - A^{(3)}Y_m^{(4)}. \end{cases} \quad (4.29)$$

Au final, le produit matrice vecteur s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} W^{(1)} = \Sigma_1 + X_m^{(2)} - A^{(1)}Y_m^{(2)} \\ W^{(2)} = \Sigma_2 + X_m^{(1)} - A^{(21)}Y_m^{(1)} \\ W^{(3)} = \Sigma_3 + X_m^{(4)} - A^{(22)}Y_m^{(4)} \\ W^{(4)} = \Sigma_4 + X_m^{(3)} - A^{(3)}Y_m^{(3)}. \end{cases} \quad (4.30)$$

## 4.2 Algorithme dans le cas $N_d$ domaines

On peut généraliser l'approche trois domaines avec un code capable de gérer  $N_d$  domaines. Le cas  $N_d$  domaines est représenté sur la figure 4.2. On définit d'une part le second membre et

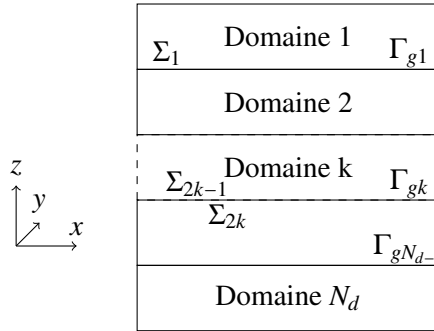


FIGURE 4.2 –  $N_d$  domaines

d'autre part le produit matrice vecteur. Les composantes du second membre sont définies par :

$$\begin{cases} F^{(2k-1)} = X^{(2k)} + A^{(2k-1)}Y^{(2k)} \\ F^{(2k)} = X^{(2k-1)} + A^{(2k)}Y^{(2k-1)} \end{cases} \quad (4.31)$$

où

$$X^{(k)} = A^{(k)} Y^{(k)} \quad (4.32)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} Y^{(1)} = \lambda_{h,g_1}^{(1)} |_{\Sigma_1=0} \\ \dots \\ Y^{2k-1} = \lambda_{h,g_k}^{(k)} |_{\Sigma_{2(k-1),2k-1}=0} \\ Y^{2k} = \lambda_{h,g_k}^{(k+1)} |_{\Sigma_{2k,2k+1}=0} \\ \dots \\ Y^{(2(N_d-1))} = \lambda_{h,g_{N_d-1}}^{(N_d)} |_{\Sigma_{2(N_d-1)}=0}. \end{array} \right. \quad (4.33)$$

Quant au produit matrice vecteur, il s'écrit sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} W^{(2k-1)} = \Sigma_{(2k-1)} + X_m^{(2k)} - A^{(2k-1)} Y_m^{(2k)} \\ W^{(2k)} = \Sigma_{(2k)} + X_m^{(2k-1)} - A^{(2k)} Y_m^{(2k-1)}. \end{array} \right. \quad (4.34)$$

### 4.3 Validation numérique

On travaille à la fréquence de 16 GHz pour diminuer le temps de calcul. On prend toujours un guide métallique de longueur  $a = 22mm$ , de largeur  $b = 10mm$  et de hauteur  $H = 1,5mm$ . Pour s'assurer de la validité de notre implémentation, nous comparons le cas décomposé au cas sans décomposition. Comme nous voulons le faire, dans un premier temps, à la fois pour deux et pour trois domaines, on réalise un maillage qui a six couches en  $z$ , six étant à la fois multiple de deux et trois. Dans toutes les simulations, le restart est pris égal à 50. A la tolérance du GMRES près, les résultats doivent être identiques. On se place dans le cas où toutes les frontières sont absorbantes.



FIGURE 4.3 – 2 domaines

Les deux domaines sont numérotés 1 et 2 (cf. figure 4.3). Plusieurs calculs sont effectués pour s'assurer de la validité de la démarche. Dans ce cas, les écarts sur la variable hybride sont présentés dans le tableau 4.1. Pour voir s'il y a bien continuité au niveau de l'interface  $\Gamma_{g1}$ , on calcule la norme 2 de la différence entre la variable hybride calculée dans le domaine 1 et celle calculée dans le domaine 2 au niveau de  $\Gamma_{g1}$ , elle est notée :  $\|\lambda_{h1}/\Gamma_{g1} - \lambda_{h2}/\Gamma_{g1}\|_2$ . Puis, on veut savoir si les valeurs calculées à la frontière correspondent à celles calculées au même endroit mais

dans le cas où il n'y a qu'un seul domaine. Ainsi, on calcule la norme 2 de la différence entre la variable hybride calculée sur  $\Gamma_{g1}$  dans le cas un seul domaine et celle calculée sur  $\Gamma_{g1}$  dans le domaine 1 (dans le cas deux domaines donc), elle est notée :  $\|\lambda_h/\Gamma_{g1} - \lambda_{h1}/\Gamma_{g1}\|_2$ . On fait le même travail pour les variables internes. On calcule la norme 2 de la différence entre la variable hybride calculée dans un seul domaine restreinte aux variables internes du domaine 1 et celle calculée dans le domaine 1 dans le cas 2 domaines. Elle est notée  $\|\lambda_h/inter1 - \lambda_{h1}/inter1\|_2$ . On fait le même travail dans le domaine 2 :  $\|\lambda_h/inter2 - \lambda_{h2}/inter2\|_2$ . On refait ensuite le même tableau

Tol	Tétras	$\ \lambda_{h1}/\Gamma_{g1} - \lambda_{h2}/\Gamma_{g1}\ _2$	$\ \lambda_h/\Gamma_{g1} - \lambda_{h1}/\Gamma_{g1}\ _2$	$\ \lambda_h/inter1 - \lambda_{h1}/inter1\ _2$	$\ \lambda_h/inter2 - \lambda_{h2}/inter2\ _2$
$10^{-6}$	576	$3,12.10^{-6}$	$8,16.10^{-5}$	$1,17.10^{-3}$	$9,87.10^{-4}$
$10^{-12}$	576	$5,22.10^{-12}$	$7,72.10^{-11}$	$1,21.10^{-9}$	$1,22.10^{-9}$
$10^{-6}$	4608	$7,90.10^{-6}$	$2,42.10^{-4}$	$3,46.10^{-3}$	$3,68.10^{-3}$
$10^{-12}$	4608	$1,46.10^{-11}$	$3,09.10^{-10}$	$6,29.10^{-9}$	$6,12.10^{-9}$

TABLE 4.1 – Norme 2 entre variables hybrides pour la décomposition en 2 domaines.

mais avec la norme infini (cf. tableau 4.2) et l'on montre que, du fait du type de norme, l'erreur est alors toujours plus faible que dans le tableau 4.1 car avec la norme infini, on ne cumule pas les erreurs.

Tol	Tétras	$\ \lambda_{h1}/\Gamma_{g1} - \lambda_{h2}/\Gamma_{g1}\ _\infty$	$\ \lambda_h/\Gamma_{g1} - \lambda_{h1}/\Gamma_{g1}\ _\infty$	$\ \lambda_h/inter1 - \lambda_{h1}/inter1\ _\infty$	$\ \lambda_h/inter2 - \lambda_{h2}/inter2\ _\infty$
$10^{-6}$	576	$6,74.10^{-7}$	$1,80.10^{-5}$	$1,80.10^{-4}$	$1,49.10^{-4}$
$10^{-12}$	576	$1,00.10^{-12}$	$2,03.10^{-11}$	$1,78.10^{-10}$	$2,73.10^{-10}$
$10^{-6}$	4608	$1,35.10^{-6}$	$4,71.10^{-5}$	$3,83.10^{-4}$	$4,14.10^{-4}$
$10^{-12}$	4608	$2,48.10^{-12}$	$4,12.10^{-11}$	$4,87.10^{-10}$	$5,13.10^{-10}$

TABLE 4.2 – Norme infini entre variables hybrides pour la décomposition en 2 domaines.

On refait le même travail avec trois domaines. Ces derniers sont numérotés 1, 2 et 3 (cf. figure 4.1). Dans ce cas, les écarts sur la variable hybride sont présentés dans le tableau 4.3. On procède de la même manière qu'avec deux domaines et on calcule la norme 2 de la différence entre la variable hybride calculée dans le domaine 1 et celle calculée dans le domaine 2 au niveau de la frontière  $\Gamma_{g1}$ . Cette norme est notée  $\|\lambda_{h1}/\Gamma_{g1} - \lambda_{h2}/\Gamma_{g1}\|_2$ . Puis, on cherche à voir si les valeurs calculées de la variable hybride  $\lambda_h$  pour trois domaines sont proches de la valeur de  $\lambda_h$  calculée quand on n'a qu'un seul domaine. Pour ce faire, on calcule la norme 2 de la différence entre la variable hybride calculée sur  $\Gamma_{g1}$  dans le cas un seul domaine et celle calculée sur  $\Gamma_{g1}$  dans le domaine 1 dans le cas 3 domaines. Elle est notée  $\|\lambda_h/\Gamma_{g1} - \lambda_{h1}/\Gamma_{g1}\|_2$ .

On fait ensuite le même travail pour les variables internes, les notations sont définies ci-dessous :  $\|\lambda_h/inter1 - \lambda_{h1}/inter1\|_2$  : norme 2 de la différence entre la variable hybride calculée dans un seul domaine restreinte aux variables internes du domaine 1 et celle calculée dans le domaine 1 dans le cas 3 domaines.

$\|\lambda_h/inter2 - \lambda_{h2}/inter2\|_2$  : norme 2 de la différence entre la variable hybride calculée dans un seul domaine restreinte aux variables internes du domaine 2 et celle calculée dans le domaine 2 dans

le cas 3 domaines.

Tol	Tétras	$\ \lambda_{h1}/\Gamma_{g1} - \lambda_{h2}/\Gamma_{g1}\ _2$	$\ \lambda_h/\Gamma_{g1} - \lambda_{h1}/\Gamma_{g1}\ _2$	$\ \lambda_h/inter1 - \lambda_{h1}/inter1\ _2$	$\ \lambda_h/inter2 - \lambda_{h2}/inter2\ _2$
$10^{-6}$	576	$5,16.10^{-6}$	$4,25.10^{-5}$	$8,44.10^{-4}$	$2,66.10^{-4}$
$10^{-12}$	576	$4,67.10^{-12}$	$4,19.10^{-11}$	$8,50.10^{-10}$	$4,50.10^{-10}$
$10^{-6}$	4608	$1,38.10^{-5}$	$2,10.10^{-4}$	$2,97.10^{-3}$	$2,27.10^{-3}$
$10^{-12}$	4608	$1,39.10^{-11}$	$2,69.10^{-10}$	$5,43.10^{-9}$	$5,23.10^{-9}$

TABLE 4.3 – Norme 2 entre variables hybrides pour la décomposition en 3 domaines.

On refait le même travail au niveau de la frontière  $\Gamma_{g2}$  et au niveau du domaine 3. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.4. On obtient les mêmes conclusions.

Tol	Tétras	$\ \lambda_{h2}/\Gamma_{g2} - \lambda_{h3}/\Gamma_{g2}\ _2$	$\ \lambda_h/\Gamma_{g2} - \lambda_{h2}/\Gamma_{g2}\ _2$	$\ \lambda_h/inter3 - \lambda_{h3}/inter3\ _2$
$10^{-6}$	576	$4,48.10^{-6}$	$5,01.10^{-5}$	$7,27.10^{-4}$
$10^{-12}$	576	$4,99.10^{-12}$	$4,42.10^{-11}$	$8,06.10^{-10}$
$10^{-6}$	4608	$1,34.10^{-5}$	$1,93.10^{-4}$	$2,88.10^{-3}$
$10^{-12}$	4608	$1,38.10^{-11}$	$2,51.10^{-10}$	$4,90.10^{-9}$

TABLE 4.4 – Norme 2 entre variables hybrides pour la décomposition en 3 domaines.

On cherche ensuite à connaître le nombre d'itérations selon le nombre de domaines, selon le maillage et selon la tolérance du GMRES. Ces derniers sont présentés dans le tableau 4.5. Pour remplir la colonne concernant le temps de résolution, on effectue une moyenne sur 10 valeurs de temps de GMRES obtenus. On précise également la taille des sous-systèmes et les inconnues surfaciques. Dans le cas où l'on n'a qu'un seul domaine, on résout directement le système, d'où le non remplissage des cases liées au GMRES. On constate que le temps de résolution pour 36864 tétraèdres et un seul domaine est  $10^5$  fois plus important que dans le cas où le maillage est composé de 4608 tétraèdres. C'est le poids de la factorisation LU et donc son coût de stockage mémoire qui diffère entre les deux cas. En effet, il est probable que dans le cas où le temps de résolution est de 12119 secondes, la mémoire vive ne suffise plus et que des accès au disque dur soient nécessaires. En fait, derrière ce temps de résolution élevé, se cache un problème mémoire. Le problème "Out of Memory" semble se profiler. Grâce à la décomposition de domaines, ce problème peut être contourné et on aboutit à des temps de calcul plus raisonnables (114 secondes pour deux domaines).

Tétraèdres	$N_d$	Tol	Itér	Résolution en s	Taille du sous-système	Inconnues en surface
576	1			0,007	7 680	192
576	2	$10^{-6}$	22	0,2	3 936	192
576	2	$10^{-12}$	51	0,4	3 936	192
576	3	$10^{-6}$	31	0,2	2 688	192
576	3	$10^{-12}$	71	0,5	2 688	192
4608	1			0,1	58 368	768
4608	2	$10^{-6}$	31	4	29 568	768
4608	2	$10^{-12}$	77	9	29 568	768
4608	3	$10^{-6}$	41	4	19 968	768
4608	3	$10^{-12}$	100	9	19 968	768
36864	1			12 119	454 656	3 072
36864	2	$10^{-6}$	39	114	228 864	3 072
36864	2	$10^{-12}$	108	302	228 864	3 072
36864	3	$10^{-6}$	50	105	153 600	3 072
36864	3	$10^{-12}$	134	269	153 600	3 072

TABLE 4.5 – Nombre d’itérations selon le nombre de domaines et le maillage et la tolérance du GMRES.

## 4.4 Conclusions

On constate que le temps de résolution est plus important avec la décomposition de domaines. L’avantage est de pouvoir éviter les problèmes de limite mémoire dans le cas où il n’y a qu’un seul domaine.

## Chapitre 5

# Conclusions

Ce travail de thèse a abouti au développement d'une méthode hybride entre la WCIP et des méthodes volumiques. De par son formalisme générique avec l'opérateur  $S_2^F$  présenté dans le chapitre 2, on montre que n'importe quelle méthode peut remplacer la FEM, HDG ou la FDTLM tant que l'on sait exprimer correctement la relation entre les ondes  $\mathbf{A}_2$  et  $\mathbf{B}_2$  dans le domaine où la méthode volumique est appliquée.

En 2D, les résultats de calculs d'erreurs relatives et de convergence obtenus sont similaires entre les différentes techniques d'éléments finis (tant que l'ordre d'approximation est le même) couplées à la WCIP. Les tests numériques sur les cas canoniques ont permis de valider l'implémentation de la méthode (pour les modes TE et TM), et par la suite, de traiter le cas d'un substrat inhomogène en 2D alors que cela était impossible avec la WCIP seule.

La validation 2D faite, la procédure de tests en 3D était identique. Pour minimiser les problèmes de raccordement de maillage, on a choisi de prendre un maillage structuré côté HDG. On trouve alors des résultats de convergence similaires à ceux du 2D pour les cas canoniques, ce qui est encourageant. Dans le cas test de la ligne microruban, la méthode WCIP seule converge vers la solution donnée par HFSS. Concernant la méthode hybride, elle se rapproche également de ces deux méthodes. Ce cas test est en cours de validation car les ressources mémoires limitent le raffinement et c'est pourquoi une décomposition de domaines a été mise en place. Cette dernière a montré des gains sur le temps de résolution, le rapport entre ces temps dans le cas un seul domaine et le cas deux domaines étant relativement important dans un cas particulier développé au chapitre 4. Néanmoins, ceci ne suffit pas : pouvoir découper le domaine selon la direction  $x$  en plus de la direction  $z$  apporterait un gain supplémentaire, en permettant d'augmenter encore la taille des problèmes à résoudre.

## Chapitre 6

# Perspectives

Le premier travail à effectuer est l'obtention de résultats en 3D plus complets avec la méthode hybride WCIP/HDG dans le cas du microruban. Pour ce faire, des modifications doivent être apportées au code de décomposition de domaines pour pouvoir décomposer le domaine dans d'autres directions que la direction  $z$ .

Ensuite, il faut disposer d'un code FDTLM qui puisse fonctionner avec plusieurs couches de maillage en  $z$  car les résultats ont montré de manière évidente qu'une seule couche de maillage en  $z$  ne suffit pas.

Une fois ces deux étapes validées, d'autres exemples en 3D de plus en plus complexes doivent être testés et validés : il pourrait s'agir de tester un substrat à profil diélectrique « original » et d'y insérer des vias, exemple que nous n'avons pu traiter par manque de temps.

De plus, comme nous avons choisi un maillage structuré en 3D côté HDG afin de faciliter le raccord de maillage, il serait pertinent d'implémenter un maillage non structuré dans le cadre de l'hybridation. L'intérêt est de pouvoir bénéficier des avantages d'un maillage adaptatif en raffinant selon le comportement local de la physique considérée.

Enfin, pouvoir modifier l'ordre d'approximation de la méthode selon la complexité de la structure (par exemple diminuer l'ordre polynomial près des discontinuités métalliques) et ne raffiner que certaines zones (par exemple les zones de discontinuité) améliorerait la précision de la méthode tout en évitant un effort général de raffinement de maillage, ce qui est non négligeable au vu des ressources requises par le raffinement.



# Bibliographie

- [1] Caroline Girard, Nathalie Raveu, Stéphane Lanteri, Ronan Perrussel, et al. 1D WCIP and FEM hybridization. In *Actes de la 7ème Conférence Européenne sur les méthodes numériques en Électromagnétisme*, pages 74–75, 2012.
- [2] Caroline Girard, Nathalie Raveu, Stéphane Lanteri, Ronan Perrussel, et al. Hybridation entre la WCIP et des méthodes volumiques. *Actes JNM 2013*, 2013.
- [3] Caroline Girard, Asmaa Zugari, and Nathalie Raveu. 2D FDTLM Hybridization with Modal Method. *Progress In Electromagnetics Research B*, 55 :23–44, 2013.
- [4] C. Girard, S. Lanteri, R. Perrussel, and N. Raveu. Toward the Coupling of a Discontinuous Galerkin Method with a MoM for Analysis of Susceptibility of Planar Circuits. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 50(2) :509–512, Feb 2014.
- [5] Caroline Girard, Nathalie Raveu, Ronan Perrussel, Stéphane Lanteri, et al. Coupling of a MoM and a discontinuous Galerkin method. In *Proceedings of the 16th IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation*, 2014.
- [6] M. Azizi, H. Aubert, and H. Baudrand. A new iterative method for scattering problems. In *Microwave Conference, 1995. 25th European*, volume 1, pages 255–258, Sept 1995.
- [7] Nathalie Raveu. *Contribution au développement de la formulation en ondes en coordonnées cylindriques : application à l'étude d'antennes placées sur un cylindre parfaitement conducteur*. PhD thesis, Toulouse, INPT, 2003.
- [8] R.S. N’Gongo, R. Garcia, and H. Baudrand. Full-wave analysis of multilayered electromagnetically coupled microstrip active antennas. In *Antennas and Propagation Society International Symposium, 2000. IEEE*, volume 1, pages 26–29 vol.1, July 2000.
- [9] G. Fontgalland, P. Ferreira, T.-P. Vuong, N. Raveu, and H. Baudrand. Proposal of new EBG ground planes in the electric size reduction design of planar antennas. In *Telecommunications, 2005. advanced industrial conference on telecommunications/service assurance with partial and intermittent resources conference/e-learning on telecommunications workshop. aict/sapir/elete 2005. proceedings*, pages 274–278, July 2005.
- [10] R.S. N’Gongo, L. Cohen, R. Garcia, H. Baudrand, C. Zanchi, and J. Puech. Study of a Novel Broadside Coplanar Waveguide by the Wave Concept using FFT-Algorithm. In *Microwave Conference, 2000. 30th European*, pages 1–4, Oct 2000.
- [11] S. Akatimagool, D. Bajon, and H. Baudrand. Analysis of multi-layer integrated inductors with wave concept iterative procedure (WCIP). In *Microwave Symposium Digest, 2001 IEEE MTT-S International*, volume 3, pages 1941–1944 vol.3, May 2001.

- [12] H. Trabelsi, A. Gharsallah, and H. Baudrand. Analysis of microwave circuits including lumped elements based on the iterative method. *International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering*, 13(4) :269–275, 2003.
- [13] N. Lucanu, H. Baudrand, D. Ceparanu, and P. Gasner. Scattering by a 2D square section metallic obstacle. In *Signals, Circuits and Systems, 2003. SCS 2003. International Symposium on*, volume 2, pages 421–424 vol.2, July 2003.
- [14] N. Raveu, T.-P. Vuong, I. Terrasse, G. P. Piau, G. Fontgalland, and H. Baudrand. Wave concept iterative procedure applied to cylinders. *Microwaves, Antennas and Propagation, IEE Proceedings*, 151(5) :409–416, Oct 2004.
- [15] S. Wane, D. Bajon, H. Baudrand, and P. Gamand. A new full-wave hybrid differential-integral approach for the investigation of multilayer structures including nonuniformly doped diffusions. In *Microwave Symposium Digest, 2004 IEEE MTT-S International*, volume 3, pages 1395–1398 Vol.3, June 2004.
- [16] E.-A. Hajlaoui, H. Trabelsi, A. Gharsallah, and H. Baudrand. Analysis of Novel Dual-Resonant and Dual-Polarized Frequency Selective Surface using Periodic contribution of Wave Concept Iterative Process : PPMS-WCIP. In *Information and Communication Technologies : From Theory to Applications, 2008. ICTTA 2008. 3rd International Conference on*, pages 1–6, April 2008.
- [17] H. Baudrand, M. Titaouine, N. Raveu, and G. Fontgland. Electromagnetic modeling of planar almost periodic structures. In *Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC), 2009 SBMO/IEEE MTT-S International*, pages 427–431, Nov 2009.
- [18] M. Titaouine, N. Raveu, and H. Baudrand. Wave concept iterative procedure for inhomogeneous multi-layered circuits. In *Circuits and Systems and TAISA Conference, 2009. NEWCAS-TAISA '09. Joint IEEE North-East Workshop on*, pages 1–3, June 2009.
- [19] S. Sahli, F. Mejri, and T. Aguil. New Formulation of the Method F.W.C.I.P. for the Modelling of a Planar Circuit Integrating a via-hole. In *PIERS Proceedings, Marrakesh, MOROCCO 2011*, pages 943 – 947, March 20-23 2011.
- [20] N. Raveu, O. Pigaglio, G. Prigent, and H. Baudrand. Improvement in the wave concept iterative procedure through spectral connection. In *Microwave Conference, 2007. European*, pages 28–31, Oct 2007.
- [21] N. Raveu and H. Baudrand. Improvement of the WCIP convergence. In *Antennas and Propagation Society International Symposium, 2009. APSURSI '09. IEEE*, pages 1–4, June 2009.
- [22] N. Fichtner, S. Wane, Damienne Bajon, and P. Russer. Interfacing the TLM and the TWF method using a diakoptics approach. In *Microwave Symposium Digest, 2008 IEEE MTT-S International*, pages 57–60, June 2008.
- [23] A. Zugari, M. Khalladi, M.I. Yaich, N. Raveu, and H. Baudrand. New approach : WCIP and FDTLM hybridization. In *Microwave Symposium (MMS), 2009 Mediterranean*, pages 1–4, Nov 2009.
- [24] N. Raveu, L. Giraud, and H. Baudrand. WCIP acceleration. In *Microwave Conference Proceedings (APMC), 2010 Asia-Pacific*, pages 971–974, Dec 2010.

- [25] Nathalie Raveu, Olivier Pigaglio. *Résolution de problèmes hautes fréquences par les schémas équivalents*. Cépaduès Editions, 2012.
- [26] R. S. N’Gongo and H. Baudrand. A new approach for microstrip active antennas using modal F.F.T-algorithm. In *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1999. IEEE*, volume 3, pages 1700–1703 vol.3, July 1999.
- [27] Christos Christopoulos. *The transmission-line modeling method : TLM*. IEEE/OUP series on electromagnetic wave theory. Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1995.
- [28] Christos Christopoulos. The Transmission-Line Modeling (TLM) Method in Electromagnetics. *Synthesis Lectures on Computational Electromagnetics*, 1(1) :1–132, 2006.
- [29] P.B. Johns and R.L. Beurle. Numerical solution of 2-dimensional scattering problems using a transmission-line matrix. *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of*, 118(9) :1203–1208, September 1971.
- [30] Peter B. Johns. A Symmetrical Condensed Node for the TLM Method. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 35(4) :370–377, April 1987.
- [31] J. C. Liu, Y. C. Wu, J. Y. Lee, and P. T. Jya. A Yee-based expanded node with dielectric boundary conditions for the TLM method. *Microwave and Optical Technology Letters*, 20(6) :398–403, 1999.
- [32] S. Akhtarzad and P.B. Johns. Solution of 6-component electromagnetic fields in three space dimensions and time by the t.l.m. method. *Electronics Letters*, 10(25) :535–536, December 1974.
- [33] Hang Jin and R. Vahldieck. Direct derivations of TLM symmetrical condensed node and hybrid symmetrical condensed node from Maxwell’s equations using centered differencing and averaging. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 42(12) :2554–2561, Dec 1994.
- [34] J.N. Rebel, M. Aidam, and P. Russer. On the convergence of the classical symmetrical condensed node-TLM scheme. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 49(5) :954–963, May 2001.
- [35] Walter Ritz. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 135 :1–61, 1909.
- [36] S. P. Timoshenko. *Strength of Materials, Part I, Elementary Theory and Problems, 3rd Ed.* D. Van Nostrand Company, 1955.
- [37] R Courant. Variational Methods for the Solution of Boundary Value Problems. In *Symposium on the Rayleigh-Ritz Method and Its Applications, American Mathematicial Society*, May 1941.
- [38] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, and L. P. Topp. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aeronautical Society*, 23, 1956.
- [39] R.W. Clough. *The Finite Element Method in Plane Stress Analysis*. American Society of Civil Engineers, 1960.
- [40] Olgierd Cecil Zienkiewicz and Yau Kai Cheung. *The finite element method in structural and continuum mechanics : numerical solution of problems in structural and continuum mechanics*, volume 1. McGraw-Hill London, New York, 1967.

- [41] Peter Silvester and Madabushi VK Chari. Finite element solution of saturable magnetic field problems. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, 7 :1642–1651, 1970.
- [42] B. Cockburn, J. Gopalakrishnan, and R. Lazarov. Unified Hybridization of Discontinuous Galerkin, Mixed, and Continuous Galerkin Methods for Second Order Elliptic Problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 47(2) :1319–1365, 2009.
- [43] N.C. Nguyen, J. Peraire, and B. Cockburn. Hybridizable discontinuous Galerkin methods for the time-harmonic Maxwell’s equations. *Journal of Computational Physics*, 230(19) :7151 – 7175, 2011.
- [44] Caroline Girard, Nathalie Raveu, Stéphane Lanteri, and Ronan Perrussel. 1d WCIP and FEM hybridization. In *Actes de la 7ème Conférence Européenne sur les méthodes numériques en Électromagnétisme*, pages 74–75, Marseille, France, 2012.
- [45] Liang Li, Stéphane Lanteri, and Ronan Perrussel. Numerical investigation of a high order hybridizable discontinuous Galerkin method for 2d time-harmonic Maxwell’s equations. *COMPEL : The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, pages pp. 1112 – 1138, 2013.
- [46] F. Prigent, G. Ganesello, D. Gloria, and C. Raynaud. Bandpass filter for millimeter-wave applications up to 220 GHz integrated in advanced thin SOI CMOS technology on High Resistivity substrate. In *Microwave Conference, 2007. European*, pages 676–679, Oct 2007.
- [47] Andrea Toselli and Olof B Widlund. *Domain Decomposition Methods-Algorithms and Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [48] Liang Li, Stéphane Lanteri, and Ronan Perrussel. A hybridizable discontinuous Galerkin method combined to a Schwarz algorithm for the solution of 3d time-harmonic Maxwell’s equations. *Journal of Computational Physics*, 256 :563–581, January 2014. RR-8251 RR-8251.
- [49] F. Magoules, F. X. Roux, and S. Salmon. Optimal discrete transmission conditions for a non-overlapping domain decomposition method for the Helmholtz equation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(5) :1497–1515, 2004.

# Liste de publications

## *Revue internationale :*

A. Zugari, N. Raveu, **C. Girard**, H. Baudrand and Mohsine Khalladi, « A Fast Hybrid WCIP and FDTLM Approach to Study Inhomogeneous Circuits », Progress In Electromagnetics Research C, 2014, vol. 51, pp. 55-62.

**C. Girard**, S. Lanteri, R. Perrussel and N. Raveu, « Toward the coupling of a discontinuous Galerkin method with a MoM for analysis of susceptibility of planar circuits », IEEE Transactions on Magnetics, 2014, vol. 50, issue 2, pp. 509-512.

**C. Girard**, A. Zugari and N. Raveu, « 2D FDTLM hybridization with modal method », Progress In Electromagnetics Research B, 2013, vol. 55, pp. 23-44.

## *Conférences internationales :*

**C. Girard**, N. Raveu, R. Perrussel, S. Lanteri, « Coupling of a MoM and a discontinuous Galerkin method », CEFC 2014, 25-28 mai, Annecy.

**C. Girard**, S. Lanteri, R. Perrussel and N. Raveu, « Coupling of a method of moments adapted to planar circuit and volumic methods », COMPUMAG 2013, 30 juin-4 juillet, Budapest.

**C. Girard**, N. Raveu, R. Perrussel, J. Li, S. Lanteri, « 1D WCIP and FEM hybridization », EuroEM 2012, 2-6 juillet, Toulouse.

## *Conférences nationales :*

**C. Girard**, N. Raveu, R. Perrussel, S. Lanteri, « Hybridation entre la WCIP et des méthodes volumiques », JNM 2013, 15-17 mai, Paris.

**C. Girard**, N. Raveu, S. Lanteri and R. Perrussel, « 1d WCIP and FEM hybridization », NUM-ELEC 2012, 3-5 juillet, Marseille.

N. Raveu, **C. Girard**, J. Vincent, J.R. Poirier, L. Giraud, « Preconditioned WCIP for 1d formulation », NUMELEC 2012, 3-5 juillet, Marseille.

## Annexe A

# Compléments sur les modes pour la WCIP 1D

En 1D, les expressions des modes sont données par les expressions suivantes dans le cas où le plan transverse est le plan  $(xOy)$  :

$$\begin{cases} \mathbf{f}_n^{\text{TM}} = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \mathbf{x}, \quad \forall n \in \{1, 2, 3, \dots\} \\ \mathbf{f}_n^{\text{TE}} = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \mathbf{y}, \quad \forall n \in \{1, 2, 3, \dots\}, \\ \mathbf{f}^{\text{TEM}} = \sqrt{\frac{1}{a}} \mathbf{x}. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

### A.1 Mode TE

Nous nous intéressons aux composantes non nulles du champ électromagnétique. Il vient pour le champ électrique :

$$\begin{cases} E_x = 0 \text{ d'après l'expression de } \mathbf{f}_n^{\text{TE}}, \\ E_y \neq 0 \text{ d'après } \mathbf{f}_n^{\text{TE}}, \\ E_z = 0 \text{ d'après la définition d'un mode TE.} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Pour le champ magnétique, on a :

$$\begin{cases} H_x \neq 0 \text{ d'après la relation d'impédance de mode (précisée ci-après),} \\ H_y = 0 \text{ d'après la relation d'impédance de mode,} \\ H_z \neq 0 \text{ car c'est la fonction génératrice d'un mode TE.} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Les composantes non nulles sont donc :  $E_y$ ,  $H_x$  et  $H_z$ .

La relation d'impédance de mode est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{Tn} &= \frac{\mathbf{z} \times \mathbf{E}_{Tn}}{Z_n} \\ \mathbf{E}_{Tn} &= Z_n \mathbf{H}_{Tn} \times \mathbf{z} = Z_n \mathbf{J}_{Tn}\end{aligned}\tag{A.4}$$

Elle traduit les relations existant entre les composantes transverses des champs électrique et magnétique ( $E_x, E_y$  et  $H_x, H_y$ ) pour un mode donné.

## A.2 Mode TM

Dans le cas des modes TM, on a :

$$\begin{cases} E_x \neq 0 \text{ d'après } \mathbf{f}_n^{\text{TM}}, \\ E_y = 0 \text{ d'après } \mathbf{f}_n^{\text{TM}}, \\ E_z \neq 0 \text{ d'après TM, } E_z \text{ est la fonction génératrice.} \end{cases}\tag{A.5}$$

$$\begin{cases} H_x = 0 \text{ d'après la relation d'impédance de mode,} \\ H_y \neq 0 \text{ d'après la relation d'impédance de mode,} \\ H_z = 0 \text{ d'après TM.} \end{cases}\tag{A.6}$$

Les composantes non nulles sont donc dans ce cas :  $E_x, E_z$  et  $H_y$ .

## Annexe B

# Outils mathématiques pour les calculs numériques.

### B.1 Définition de l'erreur

Pour développer les méthodes hybrides, il faut les tester en effectuant des calculs d'erreur par rapport à des solutions théoriques existantes ou par rapport à d'autres méthodes performantes. Dans cette section, les calculs d'erreur sont explicités.

#### B.1.1 Définition continue

Dans les cas tests pour lesquels on connaît une solution théorique (ou exacte), on peut alors calculer une erreur absolue de discrétisation (dénomination normalement réservée au cas où une solution théorique est connue) et tracer la courbe de convergence associée. L'erreur de discrétisation est définie en 1D par le vecteur qui a pour coordonnées :

$$e_i = \text{solution\_théorique}(x_i) - \text{solution\_calculée}(x_i). \quad (\text{B.1})$$

On dit alors que le schéma converge en norme  $\|\cdot\|$  si l'erreur de discrétisation tend vers 0 en norme  $\|\cdot\|$  quand le pas de maillage  $h$  ( $h = x_{i+1} - x_i$  en 1D) tend vers 0.

Plusieurs définitions de cette erreur sont possibles car on peut travailler avec trois normes : la norme infini, la norme euclidienne et la norme  $L^2$  qui est la plus fréquemment utilisée. En effet, cette norme est associée à l'espace  $L^2(\Omega)$  qui est l'espace des fonctions de carré intégrable :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int |v|^2(x) dx \right)^{1/2}. \quad (\text{B.2})$$

Le fait d'utiliser cette norme permet de faire des calculs d'erreur dans des cas où la solution et son erreur ne sont pas dérivables.

#### B.1.2 Définition discrète

Il faut distinguer la définition continue de cette norme et sa définition numérique. La notation « ecart » se rapporte à la grandeur continue alors que la notation « ecart\_d » fait référence au



discret. La définition continue de l'erreur en norme  $L^2$  est :

$$erreur = \|ecart\|_{L^2} = \left[ \int_0^a |ecart(x)|^2 dx \right]^{1/2}, \quad (\text{B.3})$$

où :

$$ecart(x) = solution\_analytique(x) - solution\_calculee(x). \quad (\text{B.4})$$

En discret,

$$erreur\_d = \|ecart\_d\|_{L^2} \quad (\text{B.5})$$

où on a

$$\begin{aligned} ecart\_d &= \{ecart_m\}_{1 \leq m \leq N} \\ &= \{ecart(x_m)\}, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

avec les abscisses de discrétisation  $x_m$  qui vérifient  $x_m = mh$  et le pas  $h$  est tel que  $h = \frac{a}{N}$ . Donc :

$$\begin{aligned} erreur\_d &= \sqrt{h} \left[ \sum_{m=1}^N (ecart_m)^2 \right]^{1/2} \\ &= \sqrt{h} \|ecart\_d\|_2 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Lorsque l'on discrétise (B.3) en éléments finis, on peut directement effectuer le calcul présenté par (B.8) :

$$\begin{aligned} erreur &= \sqrt{\int_0^a |ecart(x)|^2 dx} \\ erreur\_d &= \sqrt{\int_0^a \left| \sum_{m=1}^N ecart_m \phi_m(x) \right|^2 dx} \\ erreur\_d &= \sqrt{\int_0^a \left( \sum_{m=1}^N ecart_m \phi_m(x) \right) \left( \sum_{n=1}^N \overline{ecart_n \phi_n(x)} \right) dx} \\ &= \sqrt{ecart\_d^T B_f ecart\_d}, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

où  $B_f$  désigne la matrice de masse éléments finis sur l'interface et ses termes valent :

$$B_f(i, j) = \int_0^a \phi_i(x) \phi_j(x) dx. \quad (\text{B.9})$$

## B.2 Définition de l'ordre de convergence

L'ordre de convergence,  $q$ , de la méthode est défini par :

$$\|E_{\text{théorique}} - E_h\| \leq Ch^q \quad (\text{B.10})$$

où  $C$  est une constante indépendante du pas de maillage  $h$  et  $\|\cdot\|$  désigne une norme à définir. Nous choisissons la norme  $L^2$  qui est la plus communément utilisée. Les expressions théoriques

des champs électrique et magnétique étant connues, l'erreur relative de discrétisation en norme  $L^2$  est définie en continu par

$$Errel = \frac{1}{\max |E_{y \text{ théorique}}|} \left[ \int_0^a |E_y(x) - E_{y \text{ théorique}}(x)|^2 dx \right]^{1/2} \quad (\text{B.11})$$

et en discret par

$$Errel\_h = \frac{\sqrt{h}}{\max |E_{y \text{ théorique}}(x_m)|} \left[ \sum_{m=1}^N |E_y(x_m) - E_{y \text{ théorique}}(x_m)|^2 dx \right]^{1/2} \quad (\text{B.12})$$

L'ordre de convergence est alors calculé par :

$$ordre = \frac{\log(Errel\_h_1) - \log(Errel\_h_2)}{\log(h_1) - \log(h_2)} \quad (\text{B.13})$$

où  $Errel\_h_1$  et  $Errel\_h_2$  correspondent respectivement aux erreurs relatives de discrétisation en norme  $L^2$  pour les pas de maillage  $h_1$  et  $h_2$ .

## Annexe C

# Solutions de référence en 2D et 3D

### C.1 Références en 2D

On traite dans cette sous-section des cas dont la solution analytique en champ ou en courant est connue afin de faire des calculs d'erreurs de discrétisation. Ainsi, on teste le cas où l'interface  $\Sigma$  est totalement isolante ou totalement métallique. Ce cas est présenté sur la figure C.1 où les grandeurs sont définies dans la section 1.1.

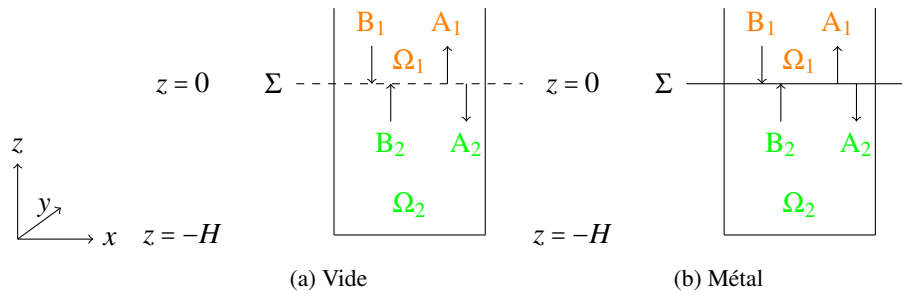


FIGURE C.1 – Cas tests analytiques et leurs paramètres.

#### C.1.1 Cas du vide

Dans le cas du vide et dans les cas TE et TM, les solutions analytiques en champ électrique sur  $\Sigma$  sont découplées et telles que

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{T_n}^{\text{TE}} = E_y^{\text{TE}} \mathbf{y} \\ \mathbf{E}_{T_n}^{\text{TM}} = E_x^{\text{TM}} \mathbf{x}. \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

En  $z = 0$ , le champ est proportionnel à un mode porté par  $\mathbf{f}_n^\alpha$  et en  $z = -H$ , on a un mur électrique, ce qui se traduit par

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{T_n}^\alpha(x, 0) = V_n^\alpha \mathbf{f}_n^\alpha \\ \mathbf{E}_{T_n}^\alpha(x, -H) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

où  $\alpha$  désigne soit un mode TE soit un mode TM. Or, nous pouvons aussi écrire le champ tangentiel sous la forme

$$\mathbf{E}_{T_n}^\alpha(x, z) = \mathbf{E}_n^{\alpha-}(x) e^{p_{0,n}z} + \mathbf{E}_n^{\alpha+}(x) e^{-p_{0,n}z} \quad (\text{C.3})$$

où  $p_{0,n}$  désigne la constante de propagation dans le vide du mode d'ordre  $n$  injecté et

$$p_{0,n} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - k_0^2}. \quad (\text{C.4})$$

Donc nous pouvons réécrire (C.2) sous la forme suivante

$$\begin{cases} \mathbf{E}_n^{\alpha-}(x) + \mathbf{E}_n^{\alpha+}(x) = V_n^\alpha \mathbf{f}_n^\alpha \\ \mathbf{E}_n^{\alpha-}(x) e^{-p_{0,n}H} + \mathbf{E}_n^{\alpha+}(x) e^{p_{0,n}H} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Après résolution de ce système, nous obtenons

$$\begin{cases} \mathbf{E}_n^{\alpha-}(x) = \frac{V_n^\alpha \mathbf{f}_n^\alpha e^{p_{0,n}H}}{2 \sinh(p_{0,n}H)} \\ \mathbf{E}_n^{\alpha+}(x) = \frac{-V_n^\alpha \mathbf{f}_n^\alpha e^{-p_{0,n}H}}{2 \sinh(p_{0,n}H)}. \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

Donc le champ tangentiel s'exprime en fonction de  $V_n^\alpha$  par

$$\mathbf{E}_{T_n}^\alpha(x, z) = \frac{V_n^\alpha \mathbf{f}_n^\alpha \sinh(p_{0,n}(H+z))}{\sinh(p_{0,n}H)}. \quad (\text{C.7})$$

On a une source en  $z = 0$ , on impose donc la condition suivante sur le champ incident  $\mathbf{E}_{T_n}^{\alpha_{inc}}$

$$\mathbf{E}_{T_n}^{\alpha_{inc}}(x, 0) = E_0 \mathbf{f}_n^\alpha \quad (\text{C.8})$$

où  $E_0$  est l'amplitude de l'onde incidente fixée par l'utilisateur et

$$\mathbf{E}_{T_n}^{\alpha_{inc}}(x, z) = \mathbf{E}_n^{\alpha-}(x) e^{p_{0,n}z}. \quad (\text{C.9})$$

Donc, d'après (C.6),  $V_n^\alpha$  s'écrit :

$$V_n^\alpha = E_0 2 \sinh(p_{0,n}H) e^{-p_{0,n}H}. \quad (\text{C.10})$$

En conséquence, d'après (C.7), l'expression du champ tangentiel est

$$\mathbf{E}_{T_n}^\alpha(x, z) = E_0 2 \sinh(p_{0,n}(H+z)) e^{-p_{0,n}H} \mathbf{f}_n^\alpha. \quad (\text{C.11})$$

De manière plus explicite, on a

$$\begin{cases} E_y^{\text{TE}}(x, z) = \sum_{k=2}^N E_0 2 \sinh(p_{0,k-1}(H+z)) e^{-p_{0,k-1}H} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{(k-1)\pi x}{a}\right) \\ E_x^{\text{TM}}(x, z) = E_0 \sinh(p_{0,0}(H+z)) e^{-p_{0,0}H} \sqrt{\frac{1}{a}} \\ \quad + \sum_{k=2}^N E_0 2 \sinh(p_{0,k-1}(H+z)) e^{-p_{0,k-1}H} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{(k-1)\pi x}{a}\right). \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

Avec les ondes, le champ électrique tangentiel total s'écrit

$$\mathbf{E}^\alpha = \sum_n \mathbf{E}_{T_n}^\alpha = \frac{\sqrt{Z_0}}{2} (\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1). \quad (\text{C.13})$$

Le champ magnétique est calculé par

$$\mathbf{H}_T^\alpha = \mathbf{H}_{T_1} + \mathbf{H}_{T_2}, \quad (\text{C.14})$$

$$\mathbf{H}_T^\alpha = (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{J}_{T_1} - \mathbf{n}_1 \times \mathbf{J}_{T_2}), \quad (\text{C.15})$$

car  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2 = \mathbf{z}$ . Dans le cas TE,  $\mathbf{J}_{T_1} = J_{y1}\mathbf{y}$  et  $\mathbf{J}_{T_2} = J_{y2}\mathbf{y}$ . En conséquence, la composante selon l'axe  $x$  du champ magnétique est

$$H_x^{\text{TE}} = (J_{y2} - J_{y1}). \quad (\text{C.16})$$

D'après Maxwell appliqué au cas TE, on a également

$$H_x^{\text{TE}}(x, z) = \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial z}(x, z). \quad (\text{C.17})$$

En conséquence, la composante non nulle du champ magnétique dans les cas TE et TM a pour expressions :

$$\begin{cases} H_x^{\text{TE}}(x, z) = \frac{1}{j\omega\mu_0} \sum_{k=2}^N E_0 p_{0,k-1} (p_{0,k-1}(H+z)) e^{-p_{0,k-1}H} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{(k-1)\pi x}{a}\right), \\ H_x^{\text{TM}}(x, z) = \partial_z E_x^{\text{TM}}(x, z) - \partial_x E_z^{\text{TM}}(x, z). \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

### C.1.2 Cas du métal

La solution analytique en courant est donnée par le système

$$\begin{cases} J_y^{\text{TE}} = \sum_{k=2}^N -E_0 2 \cosh(p_{0,k-1}z) \frac{p_{0,k-1}}{j\omega\mu_0} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{(k-1)\pi x}{a}\right), \\ J_x^{\text{TM}} = -E_0 \cosh(p_{0,0}z) \frac{j\omega\epsilon_0}{p_{0,0}} \sqrt{\frac{1}{a}} + \sum_{k=2}^N -E_0 2 \cosh(p_{0,k-1}z) \frac{j\omega\epsilon_0}{p_{0,k-1}} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{(k-1)\pi x}{a}\right). \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

### C.1.3 Références en 3D

#### Cas du vide

Il s'agit du cas test 3D d'un mode se propageant dans un cube métallique de côté  $H$  rempli de vide. Pour déterminer cette solution analytique, nous savons que notre cas test impose :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{Tm,n}(x, y, -H) = \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_{Tm,n}(x, y, 0) = V_{m,n} \mathbf{f}_{m,n}^\alpha. \end{cases} \quad (\text{C.20})$$

Or, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{E}_{Tm,n}(x, y, z) = \mathbf{E}_{m,n}^+(x, y)e^{\gamma_{m,n}z} + \mathbf{E}_{m,n}^-(x, y)e^{-\gamma_{m,n}z} \quad (\text{C.21})$$

où

$$\gamma_{m,n} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k_0^2}. \quad (\text{C.22})$$

Donc en  $z = 0$  et  $z = -H$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{Tm,n}(x, y, 0) &= \mathbf{E}_{m,n}^+(x, y) + \mathbf{E}_{m,n}^-(x, y) = V_{m,n} \mathbf{f}_{m,n}^\alpha, \\ \mathbf{E}_{Tm,n}(x, y, -H) &= \mathbf{E}_{m,n}^+(x, y)e^{-\gamma_{m,n}H} + \mathbf{E}_{m,n}^-(x, y)e^{+\gamma_{m,n}H} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\gamma_{m,n}H} & e^{+\gamma_{m,n}H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{m,n}^+(x, y) \\ \mathbf{E}_{m,n}^-(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{m,n} \mathbf{f}_{m,n}^\alpha \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.24})$$

La résolution de ce système nous donne :

$$\mathbf{E}_{m,n}^+(x, y) = \frac{V_{m,n} \mathbf{f}_{m,n}^\alpha e^{+\gamma_{m,n}H}}{2 \sinh(\gamma_{m,n}H)}, \quad (\text{C.25})$$

$$\mathbf{E}_{m,n}^-(x, y) = \frac{-V_{m,n} \mathbf{f}_{m,n}^\alpha e^{-\gamma_{m,n}H}}{2 \sinh(\gamma_{m,n}H)}. \quad (\text{C.26})$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{Tm,n}(x, y, z) &= \frac{V_{m,n} \mathbf{f}_{m,n}^\alpha (e^{+\gamma_{m,n}(H+z)} - e^{-\gamma_{m,n}(H+z)})}{2 \sinh(\gamma_{m,n}H)} \\ &= \frac{V_{m,n} \mathbf{f}_{m,n}^\alpha \sinh(\gamma_{m,n}(H+z))}{\sinh(\gamma_{m,n}H)}. \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

La source spectrale est imposée en  $z = 0$  ce qui implique :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{Tm,n}^{inc}(x, y, 0) &= \mathbf{f}_{m,n}^\alpha, \\ \text{et } \mathbf{E}_{Tm,n}^{inc}(x, y, z) &= \mathbf{E}_{m,n}^+(x, y)e^{\gamma_{m,n}z}. \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

En conséquence, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{Tm,n}^{inc}(x, y, 0) &= \mathbf{E}_{m,n}^+(x, y) = \frac{V_{m,n} \mathbf{f}_{m,n}^\alpha e^{+\gamma_{m,n}H}}{2 \sinh(\gamma_{m,n}H)} \\ \text{donc } V_{m,n} &= 2 \sinh(\gamma_{m,n}H) e^{-\gamma_{m,n}H}. \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

Donc :

$$\mathbf{E}_{Tm,n}(x, y, z) = e^{-\gamma_{m,n}H} \mathbf{f}_{m,n}^\alpha 2 \sinh(\gamma_{m,n}(H+z)). \quad (\text{C.30})$$

Les composantes du champ électrique dans le cas TE vérifient donc :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{Tm,n}(x,y,z) = 2 \sinh(\gamma_{m,n}(H+z)) e^{-\gamma_{m,n}H} \mathbf{f}_{m,n}^\alpha \\ E_z(x,y,z) = 0. \end{cases} \quad (\text{C.31})$$

Dans le cas de l'insertion d'un mode TE, nous avons :

$$\begin{aligned} f_{m,nx}^{\text{TE}}(x,y) &= A_{m,n}^{\text{TE}} \frac{-n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ f_{m,ny}^{\text{TE}}(x,y) &= A_{m,n}^{\text{TE}} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

avec

$$A_{m,n}^{\text{TE}} = \frac{\sqrt{\frac{\tau_m \tau_n}{ab}}}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} \quad (\text{C.33})$$

avec

$$\begin{cases} \tau_p = 1 \text{ si } p = 0 \\ \tau_p = 2 \text{ si } p \neq 0. \end{cases} \quad (\text{C.34})$$

Vu que nous avons la relation

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = -j\omega\mu_0 \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}, \quad (\text{C.35})$$

nous pouvons en déduire le champ magnétique solution :

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \frac{j}{\omega\mu_0} \begin{pmatrix} -2\gamma_{m,n} \cosh(\gamma_{m,n}(H+z)) e^{-\gamma_{m,n}H} f_{m,ny}^{\text{TE}}(x,y) \\ 2\gamma_{m,n} \cosh(\gamma_{m,n}(H+z)) e^{-\gamma_{m,n}H} f_{m,nx}^{\text{TE}}(x,y) \\ 2 \sinh(\gamma_{m,n}(H+z)) e^{-\gamma_{m,n}H} A_{m,n}^{\text{TE}} C_{m,n} \end{pmatrix} \quad (\text{C.36})$$

avec

$$C_{m,n} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (\text{C.37})$$

### Cas d'un diélectrique

Soit un mode  $\text{TE}_{m_1, n_1}$  se propageant dans un diélectrique de permittivité  $\epsilon_r$  (cf. figure C.2), la constante de propagation dans ce milieu,  $\gamma_{\text{dielec}}$ , est définie par :

$$\gamma_{\text{dielec}} = \sqrt{\left(\frac{m_1\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_1\pi}{b}\right)^2 - k_0^2 \epsilon_r} \quad (\text{C.38})$$

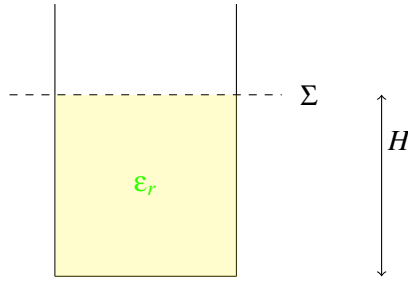


FIGURE C.2 – Diélectrique homogène.

où l'on rappelle que le nombre d'onde dans le vide  $k_0$  a pour expression :

$$k_0 = \frac{2\pi f_0}{c_0} = \frac{\omega}{c_0}. \quad (\text{C.39})$$

L'impédance du mode  $\text{TE}_{m_1, n_1}$  dans le diélectrique s'écrit alors :

$$Z_{\text{TE}, m_1, n_1} = \frac{j\omega\mu_0}{\gamma_{\text{dielec}}}. \quad (\text{C.40})$$

L'impédance ramenée au niveau de la surface  $\Sigma$  s'écrit :

$$Z_r = Z_{\text{TE}, m_1, n_1} \tanh(\gamma_{\text{dielec}} H). \quad (\text{C.41})$$

De plus, on a :

$$Z_{\text{TE}, m_1, n_1, \text{air}} = \frac{j\omega\mu_0}{\gamma_{\text{air}}} \quad (\text{C.42})$$

avec

$$\gamma_{\text{air}} = \sqrt{\left(\frac{m_1\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_1\pi}{b}\right)^2 - k_0^2}. \quad (\text{C.43})$$

Finalement, l'expression théorique de  $S_{11}$  s'écrit :

$$S_{11, \text{théorique}} = \frac{Z_r - Z_{\text{TE}, m_1, n_1, \text{air}}}{Z_r + Z_{\text{TE}, m_1, n_1, \text{air}}}. \quad (\text{C.44})$$

### Cas de deux diélectriques

Soit un mode  $\text{TE}_{m_1, n_1}$  qui se propage sur deux couches de hauteurs  $H/2$  et de diélectrique de permittivités respectives  $\epsilon_{r,1}$  et  $\epsilon_{r,2}$  (cf. figure C.3). L'impédance de ce mode dans la deuxième couche est définie par

$$Z_{\text{TE}2, m_1, n_1} = \frac{j\omega\mu_0}{\gamma_{\text{dielec}2}} \quad (\text{C.45})$$

avec

$$\gamma_{\text{dielec}2} = \sqrt{\left(\frac{m_1\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_1\pi}{b}\right)^2 - k_0^2 \epsilon_{r2}}. \quad (\text{C.46})$$



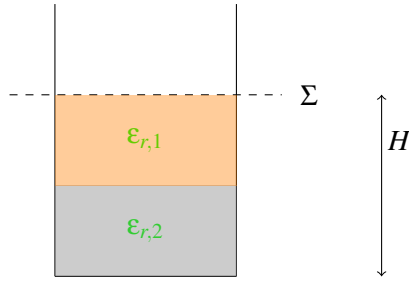


FIGURE C.3 – Deux diélectriques homogènes.

Soit  $Y_{TE2,m_1,n_1}$  l'admittance associée, l'admittance ramenée par cette couche au niveau de l'autre couche est définie par

$$Y_{r,2} = Y_{TE2,m_1,n_1} \coth\left(\gamma_{dielec2} \frac{H}{2}\right). \quad (C.47)$$

L'admittance de mode dans la première couche est donnée par

$$Y_{TE1,m_1,n_1} = \frac{\gamma_{dielec1}}{j\omega\mu_0} \quad (C.48)$$

avec

$$\gamma_{dielec1} = \sqrt{\left(\frac{m_1\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_1\pi}{b}\right)^2 - k_0^2\epsilon_{r1}}. \quad (C.49)$$

L'admittance ramenée par l'ensemble des deux couches s'écrit

$$Y_{TEr,m_1,n_1} = Y_{TE1,m_1,n_1} \frac{Y_{TE1,m_1,n_1} + Y_{r,2} \coth\left(\gamma_{dielec1} \frac{H}{2}\right)}{Y_{r,2} + Y_{TE1,m_1,n_1} \coth\left(\gamma_{dielec1} \frac{H}{2}\right)}. \quad (C.50)$$

Le paramètre  $S_{11}$  théorique s'écrit

$$S_{11,\text{théorique}} = \frac{1 - Z_{TE,m_1,n_1,\text{air}} Y_{TEr,m_1,n_1}}{1 + Z_{TE,m_1,n_1,\text{air}} Y_{TEr,m_1,n_1}}. \quad (C.51)$$

## Annexe D

# Maillage éléments finis

La numérotation globale est présentée sur la figure D.1.

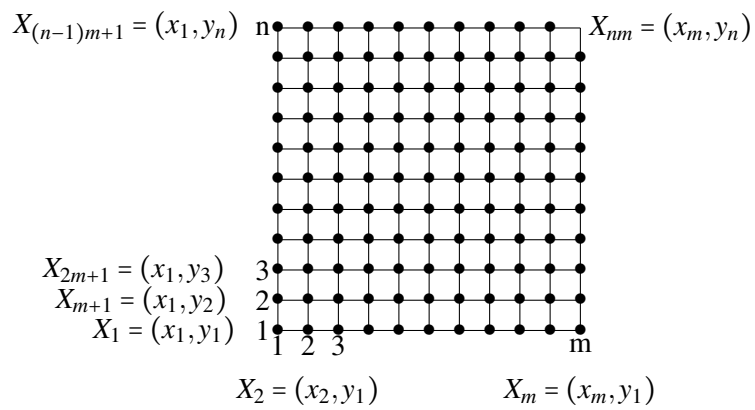


FIGURE D.1 – Explication de la numérotation.

## Annexe E

### Discrétisation locale en 2D

En 2D, dans le cas TE, le vecteur d'inconnues est défini par :  $(H_x, H_z, E_y)^T$  (on conserve les orientations définies dans le chapitre 2). La composante  $E_y$  est notée  $E_h$  dans le cas discrétisé. Soit  $\mathcal{T}_h$  la triangulation du domaine  $\Omega_2$ , constitué de  $N_t$  éléments (triangles)  $K_e$  et  $N_f$  faces (segments)  $F_f$ . La discrétisation locale est obtenue à partir du système normalisé :

$$\begin{cases} j\omega\epsilon_r E_y \mathbf{y} - \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, & \text{dans } \Omega_2, \\ j\omega\mu_r \mathbf{H} + \nabla \times (E_y \mathbf{y}) = \mathbf{0}, & \text{dans } \Omega_2. \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

La multiplication par une fonction test donne :

$$\begin{cases} (j\omega\epsilon_r E_h, v)_{K_e} - ((\nabla \times \mathbf{H}_h) \cdot \mathbf{y}, v)_{K_e} = 0, & \text{dans } \Omega_2, \\ (j\omega\mu_r \mathbf{H}_h, \mathbf{v})_{K_e} + (\nabla \times (E_h \mathbf{y}), \mathbf{v})_{K_e} = 0, & \text{dans } \Omega_2. \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

D'après l'annexe G, les formules de Green nous permettent d'écrire :

$$\begin{cases} ((\nabla \times \mathbf{H}_h) \cdot \mathbf{y}, v)_{K_e} = (\mathbf{H}_h, \nabla \times (v_y \mathbf{y}))_{K_e} + \langle (\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{H}}_h) \cdot \mathbf{y}, v \rangle_{\partial K_e} \\ (\nabla \times (E_h \mathbf{y}), \mathbf{v})_{K_e} = (E_h, (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{y})_{K_e} - \langle \hat{E}_h, (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{y} \rangle_{\partial K_e}. \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

La formulation variationnelle est :

$$\begin{cases} (j\omega\epsilon_r E_h, v)_{K_e} - (\mathbf{H}_h, \nabla \times (v_y \mathbf{y}))_{K_e} - \langle (\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{H}}_h) \cdot \mathbf{y}, v \rangle_{\partial K_e} = 0, & \text{dans } \Omega_2, \\ (j\omega\mu_r \mathbf{H}_h, \mathbf{v})_{K_e} + (E_h, (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{y})_{K_e} - \langle \hat{E}_h, (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{y} \rangle_{\partial K_e} = 0, & \text{dans } \Omega_2. \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

Or en 2D, dans le cas TE, la variable hybride est définie par :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{H}}_h = \mathbf{H}_h + \tau_{K_e} (E_h - \lambda_h) \mathbf{t} \text{ sur } \partial K_e, \\ \hat{E}_h = \lambda_h \text{ sur } \partial K_e, \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

ce qui entraîne :

$$\begin{cases} (j\omega\epsilon_r E_h, v)_{K_e} - (\mathbf{H}_h, \nabla \times (v_y \mathbf{y}))_{K_e} - \langle (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_h) \cdot \mathbf{y}, v \rangle_{\partial K_e} + \tau_{K_e} \langle E_h - \lambda_h, v \rangle_{\partial K_e} = 0, & \forall v \in V^p(K_e) \\ (j\omega\mu_r \mathbf{H}_h, \mathbf{v})_{K_e} + (E_h, (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{y})_{K_e} - \langle \lambda_h, (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{y} \rangle_{\partial K_e} = 0, & \forall \mathbf{v} \in V^p(K_e), \end{cases} \quad (\text{E.6})$$

car on a choisi  $\mathbf{n} \times \mathbf{t} = -\mathbf{y}$ . Puis il vient :

$$\begin{cases} (j\omega\epsilon_r E_h, v)_{K_e} - ((\nabla \times \mathbf{H}_h) \cdot \mathbf{y}, v)_{K_e} + \tau_{K_e} \langle E_h - \lambda_h, v \rangle_{\partial K_e} = 0, & \forall v \in V^p(K_e) \\ (j\omega\mu_r \mathbf{H}_h, \mathbf{v})_{K_e} + (E_h, (\nabla \times \mathbf{v}))_{K_e} - \langle \lambda_h, (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{y} \rangle_{\partial K_e} = 0, & \forall \mathbf{v} \in V^p(K_e). \end{cases} \quad (\text{E.7})$$

On pose les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_h^e = \sum_{j=1}^{N_p^e} E_j^e \Phi_j^e(x, z) \\ H_h^e = (H_x^e H_z^e)^T \\ H_{h,u}^e = \sum_{j=1}^{N_p^e} H_{uj}^e \Phi_j^e(x, z) \\ \lambda_h^f = \sum_{j=1}^{N_p^f} \lambda_j^f \Psi_j^f(x, z) \\ \mathbb{M}^e[i, j] = \int_{K_e} \Phi_i^e \Phi_j^e dx \\ \mathbb{D}_u^e[i, j] = \int_{K_e} (\partial_u \Phi_i^e) \Phi_j^e dx, u \in \{x, z\} \\ \mathbb{E}^{(e,l)}[i, j] = \langle \Phi_j^e, \Phi_i^e \rangle_{\partial K_e^l} = \int_{\partial K_e^l} \Phi_i^e \Phi_j^e dx \\ \mathbb{F}^{(e,l)}[i, j] = \langle \Psi_j^{\sigma(e,l)}, \Phi_i^e \rangle_{\partial K_e^l} = \int_{\partial K_e^l} \Phi_i^e \Psi_j^{\sigma(e,l)} ds \\ \mathbb{G}^{(e,l)}[i, j] = \langle \Psi_j^{\sigma(e,l)}, \Psi_i^{\sigma(e,l)} \rangle_{\partial K_e^l} = \int_{\partial K_e^l} \Psi_i^{\sigma(e,l)} \Psi_j^{\sigma(e,l)} ds \end{array} \right. \quad (\text{E.8})$$

Le deuxième terme de la première ligne de (E.7) s'écrit matriciellement :

$$\begin{aligned} ((\nabla \times \mathbf{H}_h) \cdot \mathbf{y}, v)_{K_e} &= \int_{K_e} (\partial_z H_x^e - \partial_x H_z^e) v_y ds \\ &= (\mathbb{D}_z^e)^T \underline{H_x^e} - (\mathbb{D}_x^e)^T \underline{H_z^e}. \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

On cherche ensuite à calculer le troisième terme de la première ligne de (E.7) :

$$\tau_{K_e} \langle E_h, v \rangle_{\partial K_e} - \tau_{K_e} \langle \lambda_h, v \rangle_{\partial K_e}. \quad (\text{E.10})$$

On va parcourir tous les éléments et sur chaque élément on parcourt les faces. Soit la face  $F_f$  partagée par les éléments  $K_e$  et  $K_g$  (c'est donc une face interne) avec pour indices de faces locaux  $l$  et  $k$  (c'est-à-dire que  $f = \sigma(e, l) = \sigma(g, k)$ ) et en conséquence, on met un exposant  $\sigma(e, l)$  sur les grandeurs associées pour signifier que l'on travaille sur la face  $l$  de l'élément  $K_e$ , l'équation

(E.10) devient :

$$\begin{aligned}
\tau_{K_e} \langle E_h, \mathbf{v} \rangle_{\partial K_e} - \tau_{K_e} \langle \lambda_h, \mathbf{v} \rangle_{\partial K_e} &= \sum_{l=1}^3 \left( \tau^{\sigma(e,l)} \langle E_h, \mathbf{v} \rangle_{\partial K_e} - \tau^{\sigma(e,l)} \langle \lambda_h^{\sigma(e,l)}, \mathbf{v} \rangle_{\partial K_e} \right) \\
&= \sum_{l=1}^3 \left( \tau^{\sigma(e,l)} \int_{\partial K_e} \left( \sum_{j=1}^{N_p^e} E_j^e \varphi_j^e(x, z) \right) \varphi_i^e(x, z) ds - \tau^{\sigma(e,l)} \int_{\partial K_e} \lambda_h^{\sigma(e,l)} \varphi_i^e(x, z) ds \right) \\
&= \sum_{l=1}^3 \left( \tau^{\sigma(e,l)} \int_{\partial K_e} \left( \sum_{j=1}^{N_p^e} E_j^e \varphi_j^e(x, z) \right) \varphi_i^e(x, z) ds \right. \\
&\quad \left. - \tau^{\sigma(e,l)} \int_{\partial K_e} \sum_{j=1}^{N_p^f} \lambda_j^{\sigma(e,l)} \psi_j^{\sigma(e,l)}(x, z) \varphi_i^e(x, z) ds \right).
\end{aligned} \tag{E.11}$$

En sommant on obtient :

$$= \sum_{l=1}^3 \tau^{(e,l)} \mathbb{E}^{(e,l)} \underline{E}^e - \sum_{l=1}^3 \tau^{(e,l)} \mathbb{F}^{(e,l)} \underline{\lambda}^{\sigma(e,l)}. \tag{E.12}$$

Donc la première ligne de (E.7) peut s'écrire matriciellement sous la forme :

$$j\omega_r \mathbb{M}^e \underline{E}^e - (\mathbb{D}_z^e)^T \underline{H}_x^e + (\mathbb{D}_x^e)^T \underline{H}_z^e + \sum_{l=1}^3 \tau^{(e,l)} \mathbb{E}^{(e,l)} \underline{E}^e - \sum_{l=1}^3 \tau^{(e,l)} \mathbb{F}^{(e,l)} \underline{\lambda}^{\sigma(e,l)} = 0. \tag{E.13}$$

Concernant les termes de la deuxième équation de (E.7), il vient :

$$\begin{aligned}
(j\omega \mu_r H_h, \mathbf{v})_{K_e} &= j\omega \mu_r \int_{K_e} \left( \sum_{j=1}^{N_p^e} H_{uj}^e \varphi_j^e(x, z) \right) \varphi_i^e(x, z) dx \\
&= j\omega \mu_r \mathbb{M}^e.
\end{aligned} \tag{E.14}$$

De plus,

$$(E_h, (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{y})_{K_e} = \int_{K_e} E_h (\partial_z v_x - \partial_x v_z) dx. \tag{E.15}$$

Dans le cas où  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{x}$ , on a l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
(E_h, (\nabla \times (v_x \mathbf{x})) \cdot \mathbf{y})_{K_e} &= \int_{K_e} E_h (\partial_z v_x) dx \\
&= \mathbb{D}_z^e \underline{E}
\end{aligned} \tag{E.16}$$

et

$$\langle \lambda_h, (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{y} \rangle_{\partial K_e} = \int_{K_e} \lambda_h n_z v_x dx. \tag{E.17}$$

Donc la deuxième ligne de (E.7) peut s'écrire matriciellement sous la forme :

$$j\omega \mu_r \mathbb{M}^e \underline{H}_x^e + \mathbb{D}_z^e \underline{E} - \sum_{l=1}^3 n_z^{(e,l)} \mathbb{F}^{(e,l)} \underline{\lambda}^{\sigma(e,l)} = 0. \tag{E.18}$$

Puis en prenant  $\mathbf{v} = v_z \mathbf{z}$ , on écrit :

$$j\omega\mu_r \mathbb{M}^e \underline{H}_z^e - \mathbb{D}_x^e \underline{E} + \sum_{l=1}^3 n_x^{(e,l)} \mathbb{F}^{(e,l)} \underline{\lambda}^{\sigma(e,l)} = 0. \quad (\text{E.19})$$

Finalement, le système à résoudre est :

$$\left\{ \begin{array}{l} j\omega\mu_r \mathbb{M}^e \underline{H}_x^e + \mathbb{D}_z^e \underline{E} - \sum_{l=1}^3 n_z^{(e,l)} \mathbb{F}^{(e,l)} \underline{\lambda}^{\sigma(e,l)} = 0 \\ j\omega\mu_r \mathbb{M}^e \underline{H}_z^e - \mathbb{D}_x^e \underline{E} + \sum_{l=1}^3 n_x^{(e,l)} \mathbb{F}^{(e,l)} \underline{\lambda}^{\sigma(e,l)} = 0 \\ j\omega\epsilon_r \mathbb{M}^e \underline{E} - (\mathbb{D}_z^e)^T \underline{H}_x^e + (\mathbb{D}_x^e)^T \underline{H}_z^e + \sum_{l=1}^3 \tau^{(e,l)} \mathbb{E}^{(e,l)} \underline{E} - \sum_{l=1}^3 \tau^{(e,l)} \mathbb{F}^{(e,l)} \underline{\lambda}^{\sigma(e,l)} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{E.20})$$

Ce système peut s'écrire :

$$A^e W^e + C^e \begin{pmatrix} \lambda^{\sigma(e,1)} \\ \lambda^{\sigma(e,2)} \\ \lambda^{\sigma(e,3)} \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{E.21})$$

avec

$$W^e = \begin{pmatrix} \underline{H}_x^e \\ \underline{H}_z^e \\ \underline{E}^e \end{pmatrix} \quad (\text{E.22})$$

et

$$A^e = \begin{pmatrix} j\omega\mu_r \mathbb{M}^e & 0 & +\mathbb{D}_z^e \\ 0 & j\omega\mu_r \mathbb{M}^e & -\mathbb{D}_x^e \\ -(\mathbb{D}_z^e)^T & +(\mathbb{D}_x^e)^T & j\omega\epsilon_r \mathbb{M}^e + \sum_{l=1}^3 \tau^{(e,l)} \mathbb{E}^{(e,l)} \end{pmatrix} \quad (\text{E.23})$$

et

$$C^e = \begin{pmatrix} -n_z^{(e,1)} \mathbb{F}^{(e,1)} & -n_z^{(e,2)} \mathbb{F}^{(e,2)} & -n_z^{(e,3)} \mathbb{F}^{(e,3)} \\ +n_x^{(e,1)} \mathbb{F}^{(e,1)} & +n_x^{(e,2)} \mathbb{F}^{(e,2)} & +n_x^{(e,3)} \mathbb{F}^{(e,3)} \\ -\tau^{(e,1)} \mathbb{F}^{(e,1)} & -\tau^{(e,2)} \mathbb{F}^{(e,2)} & -\tau^{(e,3)} \mathbb{F}^{(e,3)} \end{pmatrix}. \quad (\text{E.24})$$

Puis l'injection de la relation de conservativité nous permet d'obtenir un système en  $\lambda$  seul. La relation de conservativité nous donne :

$$\left\langle (\mathbf{n}^{(e,l)} \times \mathbf{H}_h^e) \cdot \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta} \right\rangle_{\partial K_e^l} + \left\langle (\mathbf{n}^{(g,k)} \times \mathbf{H}_h^g) \cdot \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta} \right\rangle_{\partial K_g^k} - \tau^{(e,l)} \langle E_h^e, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_e^l} - \tau^{(g,k)} \langle E_h^g, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_g^k} + \tau^{(e,l)} \langle \lambda_h, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_e^l} + \tau^{(g,k)} \langle \lambda_h, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_g^k} = 0. \quad (\text{E.25})$$

Sur le bord, cette dernière devient :

$$\left\langle (\mathbf{n}^{(e,l)} \times \mathbf{H}_h^e) \cdot \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta} \right\rangle_{\partial K_e^l} - \tau^{(e,l)} \langle E_h^e, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_e^l} + \tau^{(e,l)} \langle \lambda_h, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_e^l} = 0. \quad (\text{E.26})$$

Le premier terme de (E.26) s'écrit :

$$\left\langle (\mathbf{n}^{(e,l)} \times \mathbf{H}_h^e) \cdot \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta} \right\rangle_{\partial K_e^l} = n_z^{(e,l)} (\mathbb{F}^{(e,l)})^T \underline{H}_x^e - n_x^{(e,l)} (\mathbb{F}^{(e,l)})^T \underline{H}_z^e = (\mathbb{Q}_{zl}^e)^T \underline{H}_x^e - (\mathbb{Q}_{xl}^e)^T \underline{H}_z^e \quad (\text{E.27})$$

et les deux derniers termes de (E.26) s'écrivent :

$$\begin{aligned}\langle E_h, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_e^l} &= (\mathbb{F}^{(e,l)})^T \underline{E}^e \\ \langle \boldsymbol{\lambda}_h, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_e^l} &= (\mathbb{G}^{(e,l)})^T \underline{\boldsymbol{\lambda}}^{\sigma(e,l)}.\end{aligned}\tag{E.28}$$

Matriciellement, cela s'écrit :

$$(\mathbb{Q}_{z,l}^e)^T \underline{H}_x^e - (\mathbb{Q}_{x,l}^e)^T \underline{H}_z^e - \boldsymbol{\tau}^{(e,l)} (\mathbb{F}^{(e,l)})^T \underline{E}^e + \boldsymbol{\tau}^{(e,l)} (\mathbb{G}^{(e,l)})^T \underline{\boldsymbol{\lambda}}^{\sigma(e,l)} = \mathbf{0},\tag{E.29}$$

ce qui peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$n_z^{(e,l)} (\mathbb{F}^{(e,1)})^T \underline{H}_x^e - n_x^{(e,l)} (\mathbb{F}^{(e,l)})^T \underline{H}_z^e - \boldsymbol{\tau}^{(e,l)} (\mathbb{F}^{(e,l)})^T \underline{E}^e + \boldsymbol{\tau}^{(e,l)} (\mathbb{G}^{(e,l)})^T \underline{\boldsymbol{\lambda}}^{\sigma(e,l)} = \mathbf{0}.\tag{E.30}$$

## Annexe F

### Cas TM en 2D : théorie et résultats

Dans le cas TM, la composante étudiée est  $H_y$ . D'après Maxwell-Ampère, on peut écrire

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0\mathbf{E}. \quad (\text{F.1})$$

Dans le cas TM, seule la composante  $H_y$  est non nulle pour le champ magnétique, on a donc

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial H_y}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} \end{pmatrix} = j\omega\epsilon_0\epsilon_r \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix}, \quad (\text{F.2})$$

ce qui donne :

$$E_x = \frac{-1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r} \frac{\partial H_y}{\partial z}. \quad (\text{F.3})$$

#### F.1 FEM

Dans le milieu  $\Omega_2$  décrit sur la figure 2.1, on a

$$-\int_{\Omega_2} (\nabla H_{y2} \cdot \nabla w) dx dz + \int_{\partial\Omega_2} \frac{\partial H_{y2}}{\partial n} w dl + \int_{\Omega_2} k_0^2 \epsilon_r H_{y2} w dx dz = 0. \quad (\text{F.4})$$

Sur les murs électriques, le champ magnétique vérifie :

$$\frac{\partial H_{y2}}{\partial n} = 0. \quad (\text{F.5})$$

En conséquence, d'après (F.4) et (F.5)

$$-\int_{\Omega_2} (\nabla H_{y2} \cdot \nabla w) dx dz + \int_{\Sigma} \frac{\partial H_{y2}}{\partial n} w dx + \int_{\Omega_2} k_0^2 \epsilon_r H_{y2} w dx dz = 0. \quad (\text{F.6})$$



Or,

$$\begin{cases} \mathbf{A}_2 = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}}(\mathbf{E}_{T2} + Z_0\mathbf{J}_{T2}), \\ \mathbf{B}_2 = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}}(\mathbf{E}_{T2} - Z_0\mathbf{J}_{T2}). \end{cases} \quad (\text{F.7})$$

Donc :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_2 = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}}(E_{x2}\mathbf{x} + Z_0H_{y2}\mathbf{y} \times -\mathbf{z}), \\ \mathbf{B}_2 = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}}(E_{x2}\mathbf{x} - Z_0H_{y2}\mathbf{y} \times -\mathbf{z}), \end{cases} \quad (\text{F.8})$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}_2 = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}}(E_{x2}\mathbf{x} - Z_0H_{y2}\mathbf{x}), \\ \mathbf{B}_2 = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}}(E_{x2}\mathbf{x} + Z_0H_{y2}\mathbf{x}). \end{cases} \quad (\text{F.9})$$

D'après (F.3),

$$\begin{cases} A_{x2} = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}}\left(\frac{-1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r} \frac{\partial H_{y2}}{\partial z} - Z_0H_{y2}\right), \\ B_{x2} = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}}\left(\frac{-1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r} \frac{\partial H_{y2}}{\partial z} + Z_0H_{y2}\right). \end{cases} \quad (\text{F.10})$$

Donc :

$$\frac{\partial H_{y2}}{\partial z}\Big|_{\Sigma} = -j\omega\epsilon_0\epsilon_r(2\sqrt{Z_0}A_{x2} + Z_0H_{y2}). \quad (\text{F.11})$$

D'où (F.12) devient :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_2} (\nabla H_{y2} \cdot \nabla w) dx dz - j\omega\epsilon_0\epsilon_r \int_{\Sigma} (2\sqrt{Z_0}A_{x2} + Z_0H_{y2}) w dx \\ + \int_{\Omega_2} k_0^2 \epsilon_r H_{y2} w dx dz = 0, \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

soit :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_2} (\nabla H_{y2} \cdot \nabla w) dx dz - j\omega\epsilon_0\epsilon_r Z_0 \int_{\Sigma} H_{y2} w dx + \int_{\Omega_2} k_0^2 \epsilon_r H_{y2} w dx dz = \\ 2j\omega\epsilon_0\epsilon_r \sqrt{Z_0} \int_{\Sigma} A_{x2} w dx. \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

## F.2 HDG

Nous définissons la variable hybride par :

$$\begin{cases} \lambda_h = \hat{\mathbf{H}}_h \\ \hat{\mathbf{E}}_h = \mathbf{E}_h + \boldsymbol{\tau}\mathbf{n} \times (\lambda_h - \mathbf{H}_h). \end{cases} \quad (\text{F.14})$$

Contrairement au cas TE, dans le cas TM, la variable hybride correspond au champ magnétique. Les équations de Maxwell normalisées s'écrivent sous la forme de (F.15).

$$\left\{ \begin{array}{l} (j\omega\epsilon_r \mathbf{E}_h, \mathbf{v})_{K_e} - (H_h, (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{y})_{K_e} + \langle \lambda_h, (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{y} \rangle_{\partial K_e} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V^P(K_e) \\ (j\omega\mu_r H_h, v)_{K_e} + ((\nabla \times \mathbf{E}_h) \cdot \mathbf{y}, v)_{K_e} + \langle \boldsymbol{\tau} \times (H_h - \lambda_h), (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{y} \rangle_{\partial K_e} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V^P(K_e) \\ \langle (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_h) \cdot \mathbf{y}, v \rangle_{\partial K_e} + \langle \boldsymbol{\tau} (H_h^t - \lambda_h), v \rangle_{\partial K_e} - \langle \lambda_h, v \rangle_{\Gamma_a} = \langle g_{inc}, v \rangle_{\Gamma_a} \end{array} \right. \quad (\text{F.15})$$

où  $\omega$  est la pulsation normalisée,  $\epsilon_r$  la permittivité relative du milieu,  $E_h$  le champ électrique local discrétisé,  $\mathbf{v}$  et  $v$  des fonctions tests,  $H_h$  le champ magnétique local normalisé,  $\mu_r$  la perméabilité relative,  $\mathbf{n}$  la normale aux faces,  $\boldsymbol{\tau}$  un paramètre de stabilisation pris égal à 1,  $\Gamma_a$  les frontières absorbantes et  $\Gamma_m$  les frontières métalliques. La dernière équation de (F.15) implique que sur du métal, on vérifie

$$\langle (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_h) \cdot \mathbf{y}, v \rangle_{\Gamma_m} + \langle \boldsymbol{\tau} (H_h^t - \lambda_h), v \rangle_{\Gamma_m} = 0. \quad (\text{F.16})$$

La première équation de (F.15) se réécrit sous la forme suivante :

$$(j\omega\epsilon_r \mathbf{E}_h, v_x \mathbf{x} + v_z \mathbf{z})_{K_e} - (H_h, (\nabla \times (v_x \mathbf{x} + v_z \mathbf{z})) \cdot \mathbf{y})_{K_e} + \langle \lambda_h, (\mathbf{n} \times (v_x \mathbf{x} + v_z \mathbf{z})) \cdot \mathbf{y} \rangle_{\partial K_e} = 0. \quad (\text{F.17})$$

En prenant  $v_x$  dans la première équation,

$$(j\omega\epsilon_r \mathbf{E}_h, v_x \mathbf{x})_{K_e} - (H_h, (\nabla \times (v_x \mathbf{x})) \cdot \mathbf{y})_{K_e} + \langle \lambda_h, (\mathbf{n} \times (v_x \mathbf{x})) \cdot \mathbf{y} \rangle_{\partial K_e} = 0. \quad (\text{F.18})$$

On écrit la décomposition sur les fonctions de base des champs discrétisés. On pose les notations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} H_h^e = \sum_{j=1}^{n_p^e} \underline{H_j^e} \varphi_j^e(x, z) \\ E_h^e = (\underline{E_x^e} \underline{E_z^e})^T \\ E_{h,u}^e = \sum_{j=1}^{N_p^e} \underline{E_{uj}^e} \varphi_j^e(x, z). \end{array} \right. \quad (\text{F.19})$$

On utilise également les termes  $\lambda_h^f$ ,  $\mathbb{M}^e[i, j]$ ,  $\mathbb{D}_u^e[i, j]$ ,  $\mathbb{F}^{(e,l)}[i, j]$  et  $\mathbb{G}^{(e,l)}[i, j]$  définis dans l'annexe E. Le premier terme de la première équation de (F.15) s'écrit

$$\begin{aligned} (j\omega\epsilon_r \mathbf{E}_h, v_x \mathbf{x})_{K_e} &= j\omega\epsilon_r \int_{K_e} \left( \sum_{j=1}^{N_p^e} \underline{E_{xj}^e} \varphi_j^e(x, z) \right) \varphi_i^e(x, z) dx dz \\ &= j\omega\epsilon_r \sum_{j=1}^{N_p^e} \underline{E_{xj}^e} M[j, i] \\ &= j\omega\epsilon_r \mathbb{M}^e \underline{E_x^e}. \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

Le deuxième terme s'écrit

$$\begin{aligned}
(H_h, (\nabla \times (v_x \mathbf{x})) \cdot \mathbf{y})_{K_e} &= H_{hy} \partial_z v_x \\
&= \int_{K_e} \left( \sum_{j=1}^{N_p} \underline{H}_{yj}^e \varphi_j^e(x, z) \right) (\partial_z \varphi_i^e(x, z)) dx dz \\
&= \int_{K_e} \sum_{j=1}^{N_p} \underline{H}_{yj}^e \mathbb{D}_z^e [i, j] dx dz \\
&= (\mathbb{D}_z^e)^T \underline{H}_y^e.
\end{aligned} \tag{F.21}$$

Le troisième terme s'écrit

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_h, (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{y} \rangle &= \int_{K_e} \lambda_h n_z v_x dx \\
&= \sum_{l=1}^3 n_z^{(e,l)} \mathbb{F}^{(e,l)} \underline{\lambda}^{\sigma(e,l)}.
\end{aligned} \tag{F.22}$$

Le système à résoudre est :

$$\begin{cases}
j\omega \epsilon_r \mathbb{M}^e \underline{E}_x^e - (\mathbb{D}_z^e)^T \underline{H}_y^e + \sum_{l=1}^3 n_z^{(e,l)} \mathbb{F}^{(e,l)} \underline{\lambda}^{\sigma(e,l)} = 0 \\
j\omega \epsilon_r \mathbb{M}^e \underline{E}_z^e + (\mathbb{D}_x^e)^T \underline{H}_y^e - \sum_{l=1}^3 n_x^{(e,l)} \mathbb{F}^{(e,l)} \underline{\lambda}^{\sigma(e,l)} = 0 \\
j\omega \mu_r \mathbb{M}^e \underline{H}_y^e + (\mathbb{D}_z^e)^T \underline{E}_x^e - (\mathbb{D}_x^e)^T \underline{E}_z^e + \sum_{l=1}^3 \tau^{(e,l)} \left( (n_x^{(e,l)})^2 + (n_z^{(e,l)})^2 \right) \mathbb{E}^{(e,l)} \underline{H}_y^e \\
- \sum_{l=1}^3 \tau^{(e,l)} \left( (n_x^{(e,l)})^2 + (n_z^{(e,l)})^2 \right) \mathbb{F}^{(e,l)} \underline{\lambda}^{\sigma(e,l)} = 0.
\end{cases} \tag{F.23}$$

Matriciellement, (F.23) s'écrit

$$A^e W^e + C^e \begin{pmatrix} \lambda^{\sigma(e,1)} \\ \lambda^{\sigma(e,2)} \\ \lambda^{\sigma(e,3)} \end{pmatrix} = 0, \tag{F.24}$$

où

$$W^e = \begin{pmatrix} \underline{E}_x^e \\ \underline{E}_z^e \\ \underline{H}_y^e \end{pmatrix}, \tag{F.25}$$

$$A^e = \begin{pmatrix} j\omega \epsilon_r \mathbb{M}^e & 0 & -\mathbb{D}_z^e \\ 0 & j\omega \epsilon_r \mathbb{M}^e & +\mathbb{D}_x^e \\ +(\mathbb{D}_z^e)^T & -(\mathbb{D}_x^e)^T & j\omega \mu_r \mathbb{M}^e + \sum_{l=1}^3 \tau^{(e,l)} (1 - (n_y^{(e,l)})^2) \mathbb{E}^{(e,l)} \end{pmatrix}, \tag{F.26}$$

et

$$C^e = \begin{pmatrix} +n_z^{(e,1)} & +n_z^{(e,2)} & +n_z^{(e,3)} \\ -n_x^{(e,1)} & -n_x^{(e,2)} & -n_x^{(e,3)} \\ -\tau^{(e,1)}(1 - (n_y^{(e,1)})^2)\mathbb{F}^{(e,1)} & -\tau^{(e,2)}(1 - (n_y^{(e,2)})^2)\mathbb{F}^{(e,2)} & -\tau^{(e,3)}(1 - (n_y^{(e,3)})^2)\mathbb{F}^{(e,3)} \end{pmatrix}. \quad (\text{F.27})$$

Puis l'injection de la relation de conservativité nous permet d'obtenir un système en  $\lambda$  seul. La relation de conservativité nous donne :

$$\begin{aligned} & \langle (\mathbf{n}^{(e,l)} \times \mathbf{E}_h^e) \cdot \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_l^e} + \langle (\mathbf{n}^{(g,k)} \times \mathbf{E}_h^g) \cdot \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_g^k} + \tau^{(e,l)} \langle H_h^e, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_l^e} + \tau^{(g,k)} \langle H_h^g, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_g^k} - \\ & \tau^{(e,l)} \langle \lambda_h, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_l^e} - \tau^{(g,k)} \langle \lambda_h, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_g^k} = 0. \end{aligned} \quad (\text{F.28})$$

Sur le bord, (F.28) devient :

$$\langle (\mathbf{n}^{(e,l)} \times \mathbf{E}_h^e) \cdot \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_l^e} + \tau^{(e,l)} \langle H_h^e, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_l^e} - \tau^{(e,l)} \langle \lambda_h, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_l^e} = 0. \quad (\text{F.29})$$

Matriciellement, le premier terme de (F.29) s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{n}^{(e,l)} \times \mathbf{E}_h^e) \cdot \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_l^e} &= n_z^{(e,l)} (\mathbb{F}^{(e,l)})^T \underline{E}_x^e - n_x^{(e,l)} (\mathbb{F}^{(e,l)})^T \underline{E}_z^e \\ &= (\mathbb{Q}_{zl}^e)^T \underline{E}_x^e - (\mathbb{Q}_{xl}^e)^T \underline{E}_z^e \end{aligned} \quad (\text{F.30})$$

et les deux derniers termes de (F.29) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \langle H_h^e, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_l^e} &= (\mathbb{F}^{(e,l)})^T \underline{H}_y^e \\ \langle \lambda_h, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial K_l^e} &= (\mathbb{G}^{(e,l)})^T \underline{\lambda}^{\sigma(e,l)}. \end{aligned} \quad (\text{F.31})$$

Finalement, (F.29) s'exprime d'un point de vue matriciel par :

$$(\mathbb{Q}_{zl}^e)^T \underline{E}_x^e - (\mathbb{Q}_{xl}^e)^T \underline{E}_z^e + \tau^{(e,l)} (\mathbb{F}^{(e,l)})^T \underline{H}_y^e - \tau^{(e,l)} (\mathbb{G}^{(e,l)})^T \underline{\lambda}^{\sigma(e,l)} = 0 \quad (\text{F.32})$$

ou sous la forme suivante :

$$n_z^{(e,l)} (\mathbb{F}^{(e,l)})^T \underline{E}_x^e - n_x^{(e,l)} (\mathbb{F}^{(e,l)})^T \underline{E}_z^e + \tau^{(e,l)} (\mathbb{F}^{(e,l)})^T \underline{H}_y^e - \tau^{(e,l)} (\mathbb{G}^{(e,l)})^T \underline{\lambda}^{\sigma(e,l)} = 0. \quad (\text{F.33})$$

On pose

$$B^e = \begin{pmatrix} +n_z^{(e,1)} (\mathbb{F}^{(e,1)})^T & -n_x^{(e,1)} (\mathbb{F}^{(e,1)})^T & +\tau^{(e,1)} (\mathbb{F}^{(e,1)})^T \\ +n_z^{(e,2)} (\mathbb{F}^{(e,2)})^T & -n_x^{(e,2)} (\mathbb{F}^{(e,2)})^T & +\tau^{(e,2)} \mathbb{F}^{(e,2)} \\ +n_z^{(e,3)} (\mathbb{F}^{(e,3)})^T & -n_x^{(e,3)} (\mathbb{F}^{(e,3)})^T & +\tau^{(e,3)} \mathbb{F}^{(e,3)} \end{pmatrix} \quad (\text{F.34})$$

et

$$G^e = \begin{pmatrix} -\tau^{(e,1)} \mathbb{G}^{(e,1)} & 0 & 0 \\ 0 & -\tau^{(e,2)} \mathbb{G}^{(e,2)} & 0 \\ 0 & 0 & -\tau^{(e,3)} \mathbb{G}^{(e,3)} \end{pmatrix}. \quad (\text{F.35})$$

D'après (F.24),

$$W^e = -(\mathbb{A}^e)^{-1} (C^e) \lambda^e. \quad (\text{F.36})$$

A partir de  $\lambda^e$ , on peut déduire les champs locaux à l'aide de (F.36).

## F.3 Résultats numériques

### F.3.1 Vide

Mesh size	N	WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	16	$3,08.10^{-3}$	-	$5,28.10^{-3}$	-	$1,41.10^{-3}$	-
1/2	32	$7,71.10^{-4}$	1,9992	$1,32.10^{-3}$	1,9983	$3,44.10^{-4}$	2,0353
1/4	64	$1,93.10^{-4}$	1,9998	$3,31.10^{-4}$	1,9996	$8,49.10^{-5}$	2,0184
1/8	128	$4,82.10^{-5}$	2,0000	$8,27.10^{-5}$	1,9999	$2,11.10^{-5}$	2,0093
1/16	256	$1,21.10^{-5}$	2,0000	$2,07.10^{-5}$	2,0000	$5,26.10^{-6}$	2,0052

TABLE F.1 – Erreur relative sur  $E_x$  quand le mode  $TM_1$  est injecté.

Mesh size	N	WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	16	$8,56.10^{-4}$	-	$1,47.10^{-3}$	-	$3,91.10^{-4}$	-
1/2	32	$2,14.10^{-4}$	1,9992	$3,67.10^{-4}$	1,9983	$9,54.10^{-5}$	2,0353
1/4	64	$5,35.10^{-5}$	1,9998	$9,18.10^{-5}$	1,9996	$2,36.10^{-5}$	2,0184
1/8	128	$1,34.10^{-5}$	2,0000	$2,29.10^{-5}$	1,9999	$5,85.10^{-6}$	2,0094
1/16	256	$3,34.10^{-6}$	2,0000	$5,74.10^{-6}$	2,0000	$1,46.10^{-6}$	2,0047

TABLE F.2 – Erreur relative sur  $H_y$  quand le mode  $TM_1$  est injecté.

### F.3.2 Vide et ruban

Mesh size	WCIP		WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	$2,74.10^{-2}$	-	$2,73.10^{-2}$	-	$2,73.10^{-2}$	-	$2,74.10^{-2}$	-
1/2	$1,92.10^{-2}$	0,5110	$1,91.10^{-2}$	0,5123	$1,91.10^{-2}$	0,5106	$1,92.10^{-2}$	0,5114
1/4	$1,34.10^{-2}$	0,5174	$1,33.10^{-2}$	0,5201	$1,34.10^{-2}$	0,5187	$1,34.10^{-2}$	0,5179
1/8	$9,32.10^{-3}$	0,5262	$9,23.10^{-3}$	0,5302	$9,26.10^{-3}$	0,5287	$9,31.10^{-3}$	0,5269
1/16	$6,42.10^{-3}$	0,5387	$6,33.10^{-3}$	0,5444	$6,36.10^{-3}$	0,5423	$6,40.10^{-3}$	0,5396

TABLE F.3 – Erreur relative de discrétisation en norme  $L^2$  sur le champ E dans le cas du ruban.

Mesh size	WCIP		WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	$3,05 \cdot 10^{-2}$	-	$2,70 \cdot 10^{-2}$	-	$2,95 \cdot 10^{-2}$	-	$2,94 \cdot 10^{-2}$	-
1/2	$1,65 \cdot 10^{-2}$	0,8874	$1,48 \cdot 10^{-2}$	0,8708	$1,55 \cdot 10^{-2}$	0,9252	$1,60 \cdot 10^{-2}$	0,8765
1/4	$8,61 \cdot 10^{-3}$	0,9390	$7,77 \cdot 10^{-3}$	0,9257	$8,07 \cdot 10^{-3}$	0,9450	$8,39 \cdot 10^{-3}$	0,9339
1/8	$4,50 \cdot 10^{-3}$	0,9357	$4,09 \cdot 10^{-3}$	0,9265	$4,22 \cdot 10^{-3}$	0,9345	$4,40 \cdot 10^{-3}$	0,9334
1/16	$2,33 \cdot 10^{-3}$	0,9509	$2,12 \cdot 10^{-3}$	0,9446	$2,19 \cdot 10^{-3}$	0,9486	$2,28 \cdot 10^{-3}$	0,9498

TABLE F.4 – Erreur relative de discrétisation en norme  $L^2$  sur le courant J dans le cas du ruban.

### F.3.3 Dielectrique homogène

Mesh size	N	$\left\  \frac{\mathbf{E}^{H, TM} - \mathbf{E}^{Wverymeshed, TM}}{\max  \mathbf{E}^{Wverymeshed, TM} } \right\ _{L^2}$							
		WCIP		WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	16	$7,82 \cdot 10^{-3}$	-	$2,42 \cdot 10^{-2}$	-	$4,92 \cdot 10^{-2}$	-	$8,44 \cdot 10^{-3}$	-
1/2	32	$3,91 \cdot 10^{-3}$	1,0003	$6,99 \cdot 10^{-3}$	1,7924	$1,26 \cdot 10^{-2}$	1,9671	$3,95 \cdot 10^{-3}$	1,0965
1/4	64	$1,95 \cdot 10^{-3}$	1,0013	$2,43 \cdot 10^{-3}$	1,5221	$3,56 \cdot 10^{-3}$	1,8203	$1,95 \cdot 10^{-3}$	1,0138
1/8	128	$9,74 \cdot 10^{-4}$	1,0028	$1,04 \cdot 10^{-3}$	1,2269	$1,23 \cdot 10^{-3}$	1,5391	$9,74 \cdot 10^{-4}$	1,0046
1/16	256	$4,85 \cdot 10^{-4}$	1,0057	$4,94 \cdot 10^{-4}$	1,0749	$5,20 \cdot 10^{-4}$	1,2387	$4,85 \cdot 10^{-4}$	1,0060

TABLE F.5 – Erreur sur E des différentes méthodes dans le cas TM et  $Z_0$ .

Mesh size	N	$\left\  \frac{\mathbf{H}^{H, TM} - \mathbf{H}^{Wverymeshed, TM}}{\max  \mathbf{H}^{Wverymeshed, TM} } \right\ _{L^2}$							
		WCIP		WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	16	$7,82 \cdot 10^{-3}$	-	$1,02 \cdot 10^{-2}$	-	$1,61 \cdot 10^{-2}$	-	$7,83 \cdot 10^{-3}$	-
1/2	32	$3,91 \cdot 10^{-3}$	1,0003	$4,24 \cdot 10^{-3}$	1,2626	$5,24 \cdot 10^{-3}$	1,6236	$3,91 \cdot 10^{-3}$	1,0026
1/4	64	$1,95 \cdot 10^{-3}$	1,0013	$2,00 \cdot 10^{-3}$	1,0884	$2,14 \cdot 10^{-3}$	1,2930	$1,95 \cdot 10^{-3}$	1,0012
1/8	128	$9,74 \cdot 10^{-4}$	1,0028	$9,80 \cdot 10^{-4}$	1,0266	$9,98 \cdot 10^{-4}$	1,0983	$9,74 \cdot 10^{-4}$	1,0027
1/16	256	$4,85 \cdot 10^{-4}$	1,0057	$4,86 \cdot 10^{-4}$	1,0118	$4,88 \cdot 10^{-4}$	1,0317	$4,85 \cdot 10^{-4}$	1,0056

TABLE F.6 – Erreur sur H des différentes méthodes dans le cas TM et  $Z_0$ .

### F.3.4 Diélectrique homogène et ruban

Mesh size	N	$\left\  \frac{\mathbf{E}^{H, TM} - \mathbf{E}^{Wverymeshed, TM}}{\max  \mathbf{E}^{Wverymeshed, TM} } \right\ _{L^2}$							
		WCIP		WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	16	$2,72 \cdot 10^{-2}$	-	$2,80 \cdot 10^{-2}$	-	$2,80 \cdot 10^{-2}$	-	$2,80 \cdot 10^{-2}$	-
1/2	32	$1,90 \cdot 10^{-2}$	0,5181	$1,97 \cdot 10^{-2}$	0,5071	$1,97 \cdot 10^{-2}$	0,5034	$1,93 \cdot 10^{-2}$	0,5330
1/4	64	$1,33 \cdot 10^{-2}$	0,5087	$1,37 \cdot 10^{-2}$	0,5237	$1,38 \cdot 10^{-2}$	0,5150	$1,34 \cdot 10^{-2}$	0,5319
1/8	128	$9,28 \cdot 10^{-3}$	0,5225	$9,34 \cdot 10^{-3}$	0,5504	$9,48 \cdot 10^{-3}$	0,5412	$9,28 \cdot 10^{-3}$	0,5276
1/16	256	$6,40 \cdot 10^{-3}$	0,5366	$6,30 \cdot 10^{-3}$	0,5676	$6,40 \cdot 10^{-3}$	0,5662	$6,38 \cdot 10^{-3}$	0,5394

TABLE F.7 – Erreur sur E des différentes méthodes dans le cas TM et  $Z_0$ .

Mesh size	N	$\left\  \frac{\mathbf{J}^{H, TM} - \mathbf{J}^{Wverymeshed, TM}}{\max  \mathbf{J}^{Wverymeshed, TM} } \right\ _{L^2}$							
		WCIP		WCIP/FEM- $Q_1$		WCIP/FDTLM		WCIP/HDG- $P_1$	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
1	16	$2,42 \cdot 10^{-1}$	-	$4,92 \cdot 10^{-2}$	-	$4,78 \cdot 10^{-2}$	-	$5,10 \cdot 10^{-2}$	-
1/2	32	$5,04 \cdot 10^{-2}$	2,2614	$4,36 \cdot 10^{-2}$	0,1745	$4,53 \cdot 10^{-2}$	0,0783	$3,52 \cdot 10^{-2}$	0,5342
1/4	64	$1,92 \cdot 10^{-2}$	1,3946	$3,17 \cdot 10^{-2}$	0,4567	$3,75 \cdot 10^{-2}$	0,2710	$1,51 \cdot 10^{-2}$	1,2252
1/8	128	$8,57 \cdot 10^{-3}$	1,1599	$1,55 \cdot 10^{-2}$	1,0331	$2,16 \cdot 10^{-2}$	0,7992	$6,77 \cdot 10^{-3}$	1,1525
1/16	256	$4,08 \cdot 10^{-3}$	1,0705	$5,53 \cdot 10^{-3}$	1,4871	$7,79 \cdot 10^{-3}$	1,4695	$3,25 \cdot 10^{-3}$	1,0612

TABLE F.8 – Erreur sur J des différentes méthodes dans le cas TM et  $Z_0$ .

## Annexe G

# Formules de Green

En 2D, elles sont "l'équivalent" de l'intégration par parties en 1D.

### G.1 Première formule de Green

En écrivant l'identité,

$$\nabla \cdot (u \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v, \quad (\text{G.1})$$

en intégrant sur  $\Omega$ ,

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v) + u \Delta v dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot (u \nabla v) dx, \quad (\text{G.2})$$

et en utilisant le théorème de la divergence, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot (u \nabla v) dx &= \int_{\partial \Omega} u \nabla v \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} ds. \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

D'où la première formule de Green s'écrit :

$$\int_{\Omega} (u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) dx = \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} ds. \quad (\text{G.4})$$

### G.2 Généralisation

On cherche dans cette partie à démontrer l'égalité :

$$(\nabla \times \mathbf{A}, \mathbf{v}) = (\mathbf{A}, \nabla \times \mathbf{v}) - \langle \hat{\mathbf{A}}, \mathbf{n} \times \mathbf{v} \rangle. \quad (\text{G.5})$$

On a l'identité vectorielle suivante :

$$\nabla(\mathbf{A} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}). \quad (\text{G.6})$$



En intégrant (G.6), on obtient :

$$\int_V \nabla(\mathbf{A} \times \mathbf{v}) dV = \int_V \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) dV. \quad (\text{G.7})$$

D'après le théorème de la divergence,

$$\int_V \nabla(\mathbf{A} \times \mathbf{v}) dV = \int_S (\mathbf{A} \times \mathbf{v}) \mathbf{n} dS. \quad (\text{G.8})$$

En égalisant le terme de droite de (G.7) avec celui de (G.8), on aboutit à l'égalité :

$$\int_V \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) dV = \int_S (\mathbf{A} \times \mathbf{v}) \mathbf{n} dS. \quad (\text{G.9})$$

Or, le second membre de (G.9) correspond à l'intégrale d'un produit mixte :

$$\begin{aligned} \int_S (\mathbf{A} \times \mathbf{v}) \mathbf{n} dS &= \int_S [\mathbf{n}, \mathbf{A}, \mathbf{v}] dS \\ &= \int_S -[\mathbf{A}, \mathbf{n}, \mathbf{v}] dS \\ &= \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \mathbf{A} dS. \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

ce qui s'écrit avec les notations  $(\cdot), \langle \cdot, \cdot \rangle$  :

$$(\nabla \times \mathbf{A}, \mathbf{v})_V = (\mathbf{A}, \nabla \times \mathbf{v})_V - \langle \hat{\mathbf{A}}, \mathbf{n} \times \mathbf{v} \rangle_S. \quad (\text{G.11})$$

## Annexe H

# Second membre du système hybride en 3D

Soit la décomposition de la composante selon  $x$  de  $\mathbf{A}_2$  dans la base spatiale  $H_p$ ,

$$\begin{aligned} A_{x2}(x,y) &= \sum_{i,j} A_{x2}[i,j] H_p(i,j) \\ &= \sum_{i,j} A_{x2}[i,j] \Pi(x+x_s(i), y+y_s(j)) \end{aligned} \quad (\text{H.1})$$

où  $\Pi$  est la fonction porte et

$$\begin{aligned} x_s(i) &= i \frac{d_x}{2}, \\ y_s(j) &= j \frac{d_y}{2}. \end{aligned} \quad (\text{H.2})$$

En conséquence, pour une triangulation  $\mathcal{T}_h$ , on peut écrire

$$\langle \mathbf{n} \times \mathbf{A}_2, \boldsymbol{\eta} \rangle = \langle \mathbf{n} \times (A_{x2}(x,y) \mathbf{x} + A_{y2}(x,y) \mathbf{y}), \overline{\boldsymbol{\eta}}_u \mathbf{u} + \overline{\boldsymbol{\eta}}_w \mathbf{w} \rangle \quad (\text{H.3})$$

où  $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$  est une base (non orthonormée) associée à chaque face : soient  $n_1, n_2$  et  $n_3$  les vecteurs coordonnées des nœuds composant une face,  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{w}_1$  sont définis par

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= n_1 - n_3 \\ \mathbf{w}_1 &= n_2 - n_3. \end{aligned} \quad (\text{H.4})$$

Puis  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{w}$  sont obtenus par normalisation

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}, \mathbf{w} = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|}. \quad (\text{H.5})$$

On appelle **fNormal** la normale aux faces définie par :

$$\mathbf{fNormal} = (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{w}_1) \text{tmpS} \quad (\text{H.6})$$

où  $\text{tmpS}$  indique l'orientation de la face dans l'élément, ce terme vaut donc +1 ou -1. On définit alors la normale unitaire  $\mathbf{n}$  par

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{fNormal}}{\|\mathbf{fNormal}\|}. \quad (\text{H.7})$$

Sur la frontière  $\Sigma$ ,  $\mathbf{n} = n_z \mathbf{z}$  où  $n_z$  vaut 1 ou -1. En conséquence, il vient

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n} \times \mathbf{A}_2, \boldsymbol{\eta} \rangle &= \int_{\mathcal{T}_h} n_z A_{x2}(x, y) [\bar{\eta}_u u_y + \bar{\eta}_w w_y] dx dy \\ &+ \int_{\mathcal{T}_h} -n_z A_{y2}(x, y) [\bar{\eta}_u u_x + \bar{\eta}_w w_x] dx dy. \end{aligned} \quad (\text{H.8})$$

Pour une face quelconque, on prend successivement  $\eta_u = \psi_k$  et  $\eta_w = \psi_k$  afin d'obtenir les composantes selon  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{w}$  du second membre *RHS*.

$\eta_u = \psi_k$  et  $\eta_w = 0$  :

$$\begin{aligned} RHS_u &= n_z u_y \sum_{i,j} A_{x2}[i, j] \int_{\mathcal{T}_h} \Pi(x + x_s(i), y + y_s(j)) \bar{\psi}_k(x, y) dx dy \\ &- n_z u_x \sum_{i,j} A_{y2}[i, j] \int_{\mathcal{T}_h} \Pi(x + x_s(i), y + y_s(j)) \bar{\psi}_k(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (\text{H.9})$$

Par changement de variables, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}_h} \Pi(x + x_s(i), y + y_s(j)) \bar{\psi}_k(x, y) dx dy &= \int_{K_e} \psi_k(x, y) dx dy \\ &= 2\text{aire}(K_e) \int_{\hat{K}_e} \hat{\psi}_k(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} \end{aligned} \quad (\text{H.10})$$

où  $K_e$  est un triangle quelconque et  $\hat{K}_e$  le triangle de référence. La définition des fonctions de base élémentaires étant :

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1(\hat{x}, \hat{y}) &= 1 - \hat{x} - \hat{y}, \\ \hat{\psi}_2(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x}, \\ \hat{\psi}_3(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{y}, \end{aligned} \quad (\text{H.11})$$

on obtient :

$$\forall j, \int_{\hat{K}_e} \hat{\psi}_j(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} = \frac{1}{6}. \quad (\text{H.12})$$

Donc :

$$\int_{\mathcal{T}_h} \Pi(x + x_s(i), y + y_s(j)) \bar{\psi}_k(x, y) dx dy = 2\text{aire}(K_e) \frac{1}{6}. \quad (\text{H.13})$$

Donc :

$$RHS_u = (n_z u_y \sum_{i,j} A_{x2}[i, j] - n_z u_x \sum_{i,j} A_{y2}[i, j]) 2\text{aire}(K_e) \frac{1}{6}. \quad (\text{H.14})$$

Pour obtenir l'autre composante *RHS<sub>w</sub>*, on pose  $\eta_w = \psi_k$  et  $\eta_u = 0$  :

$$RHS_w = (n_z w_y \sum_{i,j} A_{x2}[i, j] - n_z w_x \sum_{i,j} A_{y2}[i, j]) 2\text{aire}(K_e) \frac{1}{6}. \quad (\text{H.15})$$

**Résumé** : L'étude de la susceptibilité électromagnétique de circuits électroniques nécessite l'utilisation d'un outil de simulation rapide, précis et suffisamment flexible pour intégrer les dernières innovations technologiques. La méthode itérative basée sur le concept d'onde (notée WCIP pour Wave Concept Iterative Procedure) initialement proposée par H. Baudrand est particulièrement adaptée pour la modélisation numérique de circuits multicouches à plusieurs niveaux de métallisation. Pour ce type de circuit, elle se révèle être l'une des méthodes qui utilise le plus petit nombre d'inconnues pour atteindre une précision donnée. Néanmoins, la WCIP n'est pas adaptée à la prise en compte des diélectriques inhomogènes et des trous d'interconnexion. L'objectif de la thèse est de s'affranchir de ces limitations par un couplage avec des méthodes numériques volumiques. En premier lieu, l'hybridation a été mise en œuvre avec une méthode basée sur la théorie des lignes de transmission pour des raisons de correspondance de maillages. Par la suite, le couplage avec une technique d'éléments finis de type Galerkin Discontinu (notée GD) Hybridée permet d'atteindre des objectifs de précision et de rapidité car GD apporte une flexibilité dans la discrétisation. En effet, c'est une méthode d'éléments finis non conforme qui permet notamment de faire varier d'un élément à l'autre l'ordre polynomial d'approximation. On a ainsi développé une nouvelle méthode numérique hybride couplant la WCIP avec des méthodes volumiques qui offrent plus de souplesse pour la prise en compte des milieux complexes. Enfin, une stratégie de résolution par décomposition de domaines est également abordée à la fin du manuscrit.

**Mots-clés** : électromagnétisme, micro-ondes, circuits planaires, techniques éléments finis, WCIP, FDTLM, Galerkin Discontinu.

**Abstract** : Electromagnetic susceptibility study of electronic circuits requires the use of a simulation tool which is fast, accurate and flexible enough to incorporate the latest technological innovations. The Wave Concept Iterative Procedure (WCIP) initially proposed by H. Baudrand is particularly adapted for numerical modeling of multilayered circuits with multilevel metallization. For this kind of circuit, it turns out to be one of the methods that uses the smallest number of unknowns to reach a given accuracy. However, the WCIP is not appropriate for inhomogeneous dielectric substrates and metallized via holes. The aim of this PhD thesis is to overcome these limitations coupling the WCIP with volume numerical methods. First, hybridization is carried out with the Frequency Domain Transmission Line Matrix (denoted FDTLM) assuming matching meshes at the interface between computational domains of both methods. Subsequently, the coupling with a finite element technique like a Hybridized Discontinuous Galerkin (denoted DG) method is considered to achieve the objectives of accuracy and speed because DG brings flexibility in the discretization. Indeed, it is a nonconforming finite element method which allows in particular changing the polynomial approximation order from one element to another. Therefore, a new hybrid method is developed coupling the WCIP with volume numerical methods which offer more flexibility for dealing with complex environments. Finally, a domain decomposition solution strategy is also discussed at the end of the manuscript.

**Keywords** : electromagnetism, microwaves, planar circuits, finite element techniques, WCIP, FDTLM, Discontinuous Galerkin method.