



THESE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)

Discipline ou spécialité : Océan, Atmosphère, Surfaces Continentales

Présentée et soutenue par **Alice Harang**

Le 22 février 2013

Titre :

**Modélisation numérique de la mise en suspension de sédiments cohésifs
par instabilités de cisaillement**

JURY

Sylvain Guillou	Rapporteur
Laurent Joly	Rapporteur
Chantal Staquet	Rapporteur
Philippe Tordjeman	Président
Carole Nahum	Examineur
Catherine Villaret	Examineur
Olivier Thual	Directeur de thèse

Ecole doctorale : SDU2E
Unité de recherche : IMFT
Directeur de Thèse : Pr. Olivier Thual

Résumé

Ce travail numérique porte sur le comportement de la lutocline (interface entre l'eau et la vase fluide) en écoulement cisailé et vise à une meilleure compréhension des mécanismes de remise en suspension de sédiments cohésifs. La crème de vase, ou vase partiellement solidifiée, est modélisée par un fluide homogène équivalent miscible dans l'eau, de rhéologie newtonienne ou viscoplastique. Une étude de l'hydrodynamique de cet écoulement stratifié en densité ainsi qu'en viscosité est ensuite proposée. Considérant une crème de vase initialement non-turbulente, l'étude se focalise sur le développement des instabilités au niveau de la lutocline et de la transition vers une couche de mélange turbulente.

La particularité de cet écoulement réside dans la forte viscosité de vase et son seuil de mise en mouvement lorsqu'elle présente un caractère viscoplastique. Une étude de stabilité linéaire permet d'évaluer l'influence des différents paramètres de l'écoulement, notamment les stratifications en densité et en viscosité. La stratification en viscosité augmente sensiblement le taux de croissance de l'instabilité pour des nombres de Reynolds intermédiaires. L'évolution non-linéaire de l'écoulement est ensuite étudiée en utilisant des simulations numériques directes, la stratification en viscosité entraînant un épaissement de la couche de mélange finale. Enfin, des simulations numériques directes basées sur un modèle de fluide de Bingham régularisé permettent d'étudier l'influence de la contrainte seuil sur le développement de l'instabilité.

Abstract

This numerical study focuses on the behavior of the lutocline in a shear flow and aims to better understand the mechanism of resuspension of cohesive sediment. Mud flow, or mud partially consolidated, is modeled by an equivalent homogenous fluid miscible in water, with newtonian or viscoplastic rheology. A study of the hydrodynamics of this shear flow, stratified both in density and viscosity, is presented. Considering an initially laminar mud flow, the focus of the study is on the development of instabilities on the lutocline and the transition to a turbulent mixing layer.

The specificity of this flow lies on the large viscosity of the mud and its threshold to be put in motion, when it presents a viscoplastic feature. A linear stability study assesses the influence of the various parameters of the flow, especially of density and viscosity stratification. The viscosity stratification slightly increases the growth rate of the instability for intermediate Reynolds numbers. Then, the non linear evolution of the flow is studied by using direct numerical simulations, viscous stratification leading to a thicker mixing layer. At last, direct numerical simulations based on a Bingham regularized model, permits to study the influence of the critical strain on the development of the instability.

Remerciements

Une thèse étant aussi le fruit d'un travail collectif, je tiens à remercier tout ceux qui ont contribué à cette étude, ainsi que ceux qui m'ont soutenue durant cette période ... et plus particulièrement :

- la DGA (Direction Générale de l'Armement) pour m'avoir financée ces trois années de thèse, ainsi que l'INPT (Institut National Polytechnique de Toulouse) pour m'avoir proposé un ATER afin de finir sereinement ce travail.
- les membres de mon jury dont notamment mes rapporteurs : Laurent Joly, Sylvain Guillou et Chantal Staquet pour leur lecture attentive et leurs remarques constructives ; ainsi que Philippe Tordjman pour avoir accepté de présider mon jury de thèse.
- Olivier Thual, qui a accepté de construire avec moi ce sujet et qui a su me guider à travers les cheminements "tortueux" d'une thèse. Toujours pédagogue, jamais directif, ces trois années de collaboration et d'apprentissage furent, pour ma part, un plaisir.
- l'IMFT (Institut de Mécanique des fluides de Toulouse) et plus particulièrement au groupe OTE (Onde et Turbulence en Environnement) pour m'avoir accueillie durant ces années de thèse, dans une ambiance chaleureuse, conviviale et "démocratique" ; merci à celles et celui qui m'ont montrés la voix, mon co-bureau (jeredief!) et la voisine, les p'tits jeunes qui suivent !
- Pierre, Laurent et Thomas pour leur participation active ... et avisée à cette étude ; ainsi qu'Annaïg pour son aide sur JADIM.
- ce chercheur lambda, permanent accompli ou doctorant hésitant, rencontré en conférence qui m'a fait partager sa passion pour son sujet mais aussi son intérêt pour mes résultats.
- les collègues enseignants de l'Enseeiht et des CPP pour leur confiance et pour m'avoir acceptée de l'autre côté de la barrière.
- les animateurs des ateliers de démonstration scientifique : partager notre passion et notre quotidien avec des étudiants est tellement enrichissant ! Merci Dominique de m'avoir fait découvrir tous ces fluides bizarres !
- enfin à tous les amis m'ayant "supportée" durant cette thèse... les toulousains, les affiliés PSC, les parisiens, la team Clémenceau et les Laonnois sans oublier bien sur les Enseeihtiens, rassemblés sur la capitale ou éparpillés aux confins de la France et depuis peu aux frontières de l'Europe !
- ma famille pour m'avoir soutenue durant ces 24 années d'étude.
- Romain ... pour tout !

Sommaire

1	Introduction	1
2	Des estuaires à la crème de vase	5
2.1	Intérêt géo-stratégique des estuaires	6
2.2	L'estuaire : un système complexe	7
2.2.1	Hydrodynamique de l'estuaire	7
2.2.2	Bouchon vaseux et formation de la crème de vase	9
2.3	Origine, composition et rhéologie des vases	12
2.3.1	Origine et composition des vases	12
2.3.2	Rhéologie de la vase	13
2.4	Processus affectant le transport des sédiments cohésifs	18
2.4.1	Floculation	18
2.4.2	Sédimentation	19
2.4.3	Tassement et consolidation	20
2.4.4	Liquéfaction	21
2.4.5	Courants de turbidité	22
2.4.6	Interactions entre la crème de vase et la houle	23
2.4.7	Transport en suspension	23
2.4.8	Entrainement et érosion	23
3	Instabilités de cisaillement et stratifications	27
3.1	Généralités sur les instabilités de Kelvin-Helmholtz	28
3.2	Mécanisme de l'instabilité	29
3.2.1	Feuille de vorticité	30
3.2.2	Relation de dispersion généralisée en configuration bi-couche	31
3.2.3	Cas d'application classiques	33
3.3	Critères et théorèmes sur la stabilité	34
3.3.1	Théorème du point d'inflexion de Rayleigh	34
3.3.2	Critère de Fj�rtoft (1950)	35
3.3.3	Stabilité des écoulements stratifiés en densité	36
3.4	Instabilités d'écoulements multi-couches cisailés	37
3.4.1	Instabilité de Taylor-Caulfield	37
3.4.2	Instabilité de Holmboe	38
3.4.3	Instabilités d'un multi-couche	39

3.5	Instabilités secondaires et transition vers une ML	40
3.5.1	Développement non-linéaire et saturation d'instabilités de KH à densité variable	40
3.5.2	Développement de modes bi-dimensionnels secondaires	41
3.5.3	Tri-dimensionnalisation de l'écoulement	42
3.5.4	Mélange dans les écoulements stratifiés cisailés	43
3.6	Instabilités visqueuses	45
3.6.1	Instabilités visqueuses de fluides homogènes	45
3.6.2	Instabilités visqueuses d'écoulements multi-couches	46
4	Présentation du solveur de Navier-Stokes <i>JADIM</i>	49
4.1	Description générale de la version bi-phasique du code <i>JADIM</i>	50
4.2	Mise en équation dans la configuration de l'étude	50
4.2.1	Equation de la conservation de la masse et du transport du taux de présence	50
4.2.2	Conservation de la quantité de mouvement	52
4.2.3	Système d'équations utilisé dans notre étude	52
4.3	Tenseur des contraintes visqueuses	52
4.3.1	Tenseur des contraintes visqueuses pour les fluides viscoplastiques	53
4.3.2	Tenseur des contraintes visqueuse pour un mélange de fluide	54
4.4	Discrétisation des équations et résolution numérique	55
4.4.1	Discrétisation des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement	55
4.4.2	Avance en temps	56
4.4.3	Résolution de l'équation de transport de la fraction volumique ϕ	59
5	Code de stabilité linéaire	65
5.1	Fonctionnement général et discrétisation	66
5.1.1	Points de collocation	67
5.1.2	Matrices de dérivation	67
5.1.3	Mappings uniforme pour les domaines finis	69
5.1.4	Mapping algébrique pour les domaines infinis	71
5.2	Développement de nouveaux mappings	71
5.2.1	Mappings basés sur les fonctions arctanh et arcsinh	71
5.2.2	Mappings basés sur les fonctions arctanh et sinh, composées par la fonction exponentielle	73
5.2.3	Mapping complexe basé sur la composition des fonctions arctanh et exponentielle	74
5.3	Linéarisation des équations et conditions aux limites	74
5.3.1	Linéarisation des équations autour d'un état de base	75
5.3.2	Relation de dispersion associée à notre configuration	77
5.3.3	Ajout des conditions aux limites	79
5.4	Test de convergence	82
5.4.1	Résultats fournis par <i>LiSa</i>	82

5.4.2	Critère de convergence	84
5.4.3	Détermination des paramètres du mapping	86
5.4.4	Caractérisation des modes faiblement convergés	88
5.5	Couches critiques d'absorption d'ondes internes	91
5.5.1	Équation de réfraction	91
5.5.2	Vérification de l'appartenance à une couche d'absorption	93
5.6	Développement d'un mapping complexe	96
6	Stabilité d'une vase newtonienne cisailée	99
6.1	Modélisation de l'interface eau - crème de vase.	100
6.1.1	Un modèle de la lutocline	100
6.1.2	Ecoulement de base	101
6.2	Etude de configurations simplifiées	103
6.2.1	Fluide statique stratifié : apparition d'ondes internes	103
6.2.2	Ecoulement bi-couche stratifié linéairement	110
6.2.3	Ecoulement bi-couche général	114
6.3	D'un cas de la littérature vers notre écoulement	117
6.3.1	Comparaison sur le cas d'une couche de mélange cisailé	117
6.3.2	Transition vers notre configuration d'étude	119
6.4	Stabilité de notre écoulement	119
6.4.1	Caractère bi-dimensionnel de l'instabilité primaire	119
6.4.2	Présentation du spectre et des modes les plus instables	121
6.4.3	Sensibilité aux paramètres d'étude	124
7	Evolution vers une couche de mélange	129
7.1	Validation du code de DNS <i>JADIM</i>	130
7.1.1	Validation de la forme du mode instabilité	130
7.1.2	Comparaison des taux de croissance de l'instabilité primaire	133
7.2	Evolution de l'instabilité primaire	136
7.2.1	Méthode utilisée	136
7.2.2	Présentation d'un cas particulier	136
7.2.3	Influence des deux stratifications de densité et de viscosité	139
7.3	Evolution tridimensionnelle de l'écoulement	142
7.3.1	Présentation de la configuration d'étude	142
7.3.2	Développement d'un mode tridimensionnel	143
7.3.3	Structure du mode 3D	145
7.3.4	Evolution finale vers une couche de mélange	146
7.4	Développement de l'instabilité à faibles Reynolds	147
7.4.1	Présentation de la configuration	147
7.4.2	Instabilité primaire	148
7.4.3	Forçage de la couche visqueuse	150
7.4.4	Tri-dimensionnalisation de l'écoulement	153

8	Comportement d'une vase viscoplastique	157
8.1	Validation en écoulement de Poiseuille	158
8.1.1	Présentation de la configuration d'étude	158
8.1.2	Comportement d'un fluide de Bingham	160
8.1.3	Influence des paramètres	161
8.2	Remise en suspension de crème de vase	164
8.2.1	Configuration générale de l'écoulement	164
8.2.2	Cisaillement d'une crème de vase viscoplastique	165
8.2.3	Influence de la contrainte seuil τ_c	167
8.3	Erosion de vase partiellement consolidée	170
8.3.1	Présentation générale de la configuration bi-couche	170
8.3.2	Erosion d'une vase newtonienne	171
8.3.3	Erosion d'une vase viscoplastique et influence de la contrainte seuil.	173
8.3.4	Comparaison entre les deux modèles de viscosité équivalente.	177
9	Conclusion	181
	Annexes	185
A	Mappings développés pour le code <i>LiSa</i>	185
A.1	Mapping algébrique pour les cas à domaine infini	185
A.2	Mappings basés sur les fonctions arctanh et arcsinh	187
A.3	Mappings basés sur les fonctions arctanh et sinh, composées par la fonction exponentielle	190
A.4	Mapping complexe basé sur la composition des fonctions arctanh et exponentielle	192
B	Conférence internationale "International Symposium on Stratified Fluids, 2011"	194
C	Article soumis au "Journal of Environmental Fluid Mechanics"	203
	Bibliographie	236

Liste des symboles

CARACTÈRES ROMANS

At	Nombre d'Atwood
B	Nombre de Bingham
C	Concentration de la vase dans l'eau (g.l^{-1})
c	Vitesse de phase complexe des perturbations ($c = \Omega/k$).
E	Erosion ($\text{kg.s}^{-1}.\text{m}^{-2}$)
E_k	Energie cinétique de la perturbation (J)
$Flux_x$	Flux horizontal de sédiments
G_x	Gradient de pression selon x (Pa.m^{-1})
H	Hauteur du domaine de simulation (m)
h	Position de l'interface définie par les points d'inflexions confondus des profils de vitesse et de taux de présence
L	Longueur du domaine de simulation (m)
l	Largeur du domaine de simulation (m)
N	Fréquence de Brunt-Väisälä (s^{-1})
p	Pression (Pa)
Pr	Nombre de Prandtl
R	Rapport d'épaisseur entre les profils de vitesse et de densité à l'interface ($R = \delta_u/\delta_\rho$)
Re	Nombre de Reynolds calculé à l'interface
Re'	Nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur du fluide visqueux (pour les cas $\delta_\rho = 0$)
Ri	Nombre de Richardson (gradient)
Ri_c	Nombre de Richardson critique (définissant la courbe de stabilité)
s	Points de collocation de l'espace spectral

T	Température (K)
t	Temps (s)
W	Logarithme décimal du rapport de viscosité entre le fluide inférieur (vase) et le fluide supérieur (eau)

CARACTÈRES GRECS

Δ	Épaisseur de la couche de mélange
δ	Épaisseur de l'interface (m)
δ_u	Épaisseur associée au profil de vitesse \bar{u} (m)
δ_ϕ	Épaisseur associée au profil du taux de présence $\bar{\phi}$
$\dot{\gamma}$	Taux de cisaillement (s^{-1})
ϵ	Paramètre de régularisation du modèle de fluide de Bingham
λ	Paramètre d'asymétrie des profils verticaux au niveau de l'interface
μ	Viscosité dynamique (Pa.s)
μ_{ef}	Viscosité dynamique effective (Pa.s)
Ω	Pulsation complexe des perturbations
ω	Pulsation des perturbations (s^{-1})
ϕ	Fraction volumique de la phase 2 (supérieure) dans le fluide
ρ	Masse volumique ($kg.m^{-3}$)
σ	Taux de croissance des perturbations (s^{-1})
τ_b	Contrainte de cisaillement au fond (Pa)
τ_c	Contrainte seuil d'écoulement (Pa)
τ_e	Contrainte d'érosion (Pa)

OPÉRATEURS

$\langle A \rangle_x$	Moyenne de A selon la variable x
\hat{A}	Perturbations de la grandeur A
tA	Transposée de la matrice A
∇	Opérateur nabla
\bar{A}	Grandeur A moyennée (selon x et y)

\tilde{A}	Amplitude des perturbations de la grandeur A
$\underline{\underline{A}}$	Matrice A
\underline{A}	Vecteur A
A^*	Grandeur A adimensionnée
D	Opérateur de dérivation

CARACTÈRES SPÉCIAUX

\mathcal{D}	Diffusion de moléculaire (m.s^{-1})
\mathcal{S}	Surface fermée d'intégration (m^2)
\mathcal{V}	Volume élémentaire d'intégration (m^3)
\mathcal{W}_b	Travail des forces de flotabilité
$\underline{\underline{0}}$	Matrice nulle
$\underline{\underline{D}}$	Tenseur des taux de déformation (s^{-1})
$\underline{\underline{I}}$	Matrice Identité
\underline{g}	Vecteur gravité (m.s^{-2})
\underline{k}	Vecteur d'onde de composantes (k, β, m) (m^{-1})
\underline{u}	Champ de vitesse de composantes (u, v, w) (m.s^{-1})
\underline{x}	Vecteur position de coordonnées (x, y, z)

INDICES

A_1	Propriété A du fluide 1 (vase), situé dans la partie inférieure du domaine
A_2	Propriété A du fluide 2 (eau), situé dans la partie supérieure du domaine
A_h	Propriété A en $z = h$, au niveau de l'interface

Chapitre 1

Introduction

Les estuaires sont des zones présentant un intérêt à la fois économique et écologique. En effet, ces zones concentrent des infrastructures portuaires nécessitant l'entretien de voies de navigations, des zones touristiques, de baignade, de pêche et d'aquaculture exigeant une bonne qualité de l'eau, ainsi qu'un écosystème riche et spécifique à cette zone de mélange et d'alternance entre eau salée et eau douce. L'étude de ce système complexe est donc central pour mieux comprendre les mécanismes hydro-sédimentaires afin de mieux définir notamment le transport et les zones d'accumulation de sédiments fins, souvent chargés en polluants tels que métaux lourds ou pesticides.

Cependant, l'estuaire est un système complexe à modéliser. En effet, l'estuaire est situé à l'interface entre la mer et le fleuve. La différence de salinité entre ces eaux peut entraîner la formation d'un front de densité avec création d'un coin salé au fond de l'estuaire. La structure de l'écoulement entraîne alors une accumulation de sédiments au niveau de l'estuaire entraînant un maximum de turbidité, aussi appelé bouchon vaseux, dans cette zone. La création de ce maximum de turbidité, caractérisé par une forte concentration de particules fines en suspension est souvent accompagnée de la formation, au fond, de couches très concentrées en particules fines, appelées crème de vase. Ces particules fines, de petite taille, présentent un comportement particulier : contrairement aux sables classiques (non-cohésifs) observés en zone littorale ou en rivière, ces particules sont cohésives. Elles forment alors des agglomérats en fonction de l'écoulement et de leur concentration, modifiant leurs propriétés et celles de leur solution appelée vase. Ce comportement cohésif entraîne un comportement rhéologique très complexe des vases, compliquant considérablement la modélisation de ce milieu.

Cependant la vase et notamment les vases fluides très concentrées, appelées crèmes de vase, sont des éléments clé de la compréhension et de la modélisation des estuaires (très concentrés). La crème de vase joue tout d'abord un rôle très important dans le transport sédimentaire. En effet, elle est associée au mécanisme de bouchon vaseux et fournit l'apport sédimentaire mobilisé par la colonne d'eau durant ces épisodes. Cette quantité étant fonction des propriétés de la vase. Très concentrée en sédiment, elle contribue aussi dans de nombreux estuaires au transport sédimentaire par écoulement gravitaire. Mais la crème de vase joue aussi un rôle indirect sur le transport sédimentaire en modifiant la condition hydrodynamique au fond de l'estuaire. En effet, la couche de crème de vase

modifie le cisaillement et donc le profil de vitesse dans la colonne d'eau. Cette couche influe donc sur l'amplitude du courant de marée mais modifie aussi la turbulence générée par ce cisaillement au fond. Comment modélise-t-on un écoulement sur un fond vaseux? Comment calculer les paramètres définissant la vitesse moyenne de l'écoulement (hauteur z_0 de la loi logarithmique, échelle de longueur associée à la variation de concentration, cisaillement au fond)? Il est donc nécessaire de mieux connaître les profils de vitesse et de concentration au fond de l'estuaire afin de pouvoir quantifier les flux de sédiments.

Les profils de vitesse et de concentration au fond de l'estuaire sont difficiles à observer. En effet, la forte turbidité associée à de forts courants et une forte variabilité du fond complique les observations en milieu naturel, que ce soit par méthodes intrusives ou non. Du point de vue numérique, l'approche par compartiments, principalement utilisée, dissociant la colonne d'eau du fond peine à retranscrire toutes les interactions entre la crème de vase et la couche d'eau faiblement concentrée. De plus, les flux de sédiment et de quantité de mouvement sont souvent basés sur des lois empiriques obtenues pour un petit jeu de données. Une revue de l'hydrodynamique des estuaires, présentant les différents processus pilotant le transport sédimentaire, est proposée dans le premier chapitre.

Nous avons donc choisi d'étudier plus en détail l'interface entre la crème de vase et la colonne d'eau, faiblement concentrée en sédiments, en nous concentrant sur les processus hydrodynamiques régissant cette interface, aussi appelée lutocline. Nous allons modéliser la crème de vase par un fluide équivalent homogène et nous focaliser sur les vases fluides type crème de vase ou partiellement consolidées, présentant un comportement newtonien ou viscoplastique. Nous allons aussi faire l'hypothèse que la crème de vase est initialement non-turbulente et nous concentrer sur le développement des instabilités au niveau de la lutocline et de la transition vers une couche de mélange turbulente. Les instabilités de cisaillement ont été déjà très étudiées dans des configurations océaniques ou atmosphériques, stratifiés en densité. Une présentation de ces résultats est proposée dans le second chapitre. En effet, bien que l'instabilité d'un écoulement cisailé soit connue depuis plus d'un siècle, les mécanismes de transition vers une couche de mélange sont encore étudiés, notamment en présence de stratifications diverses. La lutocline a été modélisée par un écoulement bi-couche cisailé, en présence de stratification en densité et en viscosité, le fluide le plus visqueux pouvant, de plus, présenter un caractère viscoplastique. Nous allons donc nous concentrer plus spécifiquement sur le rôle de la viscosité importante, voire du caractère viscoplastique de la vase, sur le développement de la couche de mélange. Pour cette étude, deux outils numériques ont été utilisés. Un code de simulations numériques directes (DNS), présenté au chapitre 4 et résolvant les équations de la mécanique des fluides incompressibles, est utilisé pour étudier le comportement de cette interface. Il est complété par un code de stabilité linéaire, présenté au chapitre 5, permettant une large exploration des paramètres de l'étude. Les résultats sont ensuite organisés en trois grandes parties. La première se focalise sur le comportement linéaire de l'interface (chapitre 6), pour un écoulement composé de fluides newtoniens. La seconde partie traite de l'évolution non-linéaire de ces instabilités et de leur conséquence en terme de mélange et remise en suspension de la vase (chapitre 7). Alors que ces deux parties se concentrent sur l'effet de la viscosité et plus particulièrement de la stratification en viscosité sur ce type d'instabilités, la troisième partie (chapitre 8) se concentrera sur les fluides viscoplastiques

et sur le rôle du seuil de contrainte dans l'évolution de l'interface. Enfin, une dernière partie permettra de conclure sur l'étude.

Chapitre 2

Des estuaires à la crème de vase

Sommaire

2.1	Intérêt géo-stratégique des estuaires	6
2.2	L'estuaire : un système complexe	7
2.2.1	Hydrodynamique de l'estuaire	7
2.2.2	Bouchon vaseux et formation de la crème de vase	9
2.3	Origine, composition et rhéologie des vases	12
2.3.1	Origine et composition des vases	12
2.3.2	Rhéologie de la vase	13
2.3.2.1	La rhéologie : étude des fluides aux comportements complexes	13
2.3.2.2	Rhéologies des vases	17
2.4	Processus affectant le transport des sédiments cohésifs	18
2.4.1	Floculation	18
2.4.2	Sédimentation	19
2.4.3	Tassement et consolidation	20
2.4.4	Liquéfaction	21
2.4.5	Courants de turbidité	22
2.4.6	Interactions entre la crème de vase et la houle	23
2.4.7	Transport en suspension	23
2.4.8	Entrainement et érosion	23

Introduction

Dans cette première partie, nous allons tout d'abord présenter la problématique des estuaires et y associer un état de l'art de l'hydrodynamique sédimentaire des estuaires. Après une brève présentation des enjeux de l'étude du transport sédimentaire estuarien, nous allons détailler l'hydrodynamique des estuaires et les processus aboutissant à la formation du bouchon vaseux. Nous nous concentrerons ensuite sur les sédiments cohésifs, et les processus se déroulant au fond des estuaires. Le concept de rhéologie sera introduit, entraînant la présentation des différents types de fluides et les différents modèles

rhéologiques appliqués aux sédiments cohésifs. L'étude se focalisant sur la lutocline, à l'interface entre sédiments dilués et crème de vase, ou vase partiellement consolidée, nous présenteront les différents mécanismes de transport horizontal et vertical de sédiments.

2.1 Intérêt géo-stratégique des estuaires

Depuis les Directives Cadre sur l'Eau adoptées par la communauté Européenne en 2000 et adaptées à la législation Française en 2004, les collectivités locales doivent caractériser leurs ressources et proposer un plan de gestion et des mesures visant à conserver ou rétablir le "bon état écologique" des milieux aquatiques. Les littoraux et particulièrement les estuaires sont fortement concernés par ces études. En effet la zone littorale concentre 80 % de la population mondiale et 8 des 10 plus grandes villes mondiales, dont 6 sont sur des estuaires d'après des estimations de l'ONU (Olivier, 2007). Ces zones estuariennes, régies par l'alternance et le mélange cyclique d'eau salée et douce, ont permis le développement d'un écosystème riche, unique mais aussi fragile, qu'il faut protéger.

La pression démographique sur ces zones estuariennes entraîne un surplus de pollution et des conflits entre la gestion des zones urbanisées et des zones inondables ou naturelles protégées. De plus, une majorité des polluants rejetés en amont du bassin versant, notamment les métaux lourds et les pesticides, se concentrent et s'accumulent au niveau des estuaires, polluant les fonds vaseux. Les estuaires, nœuds commerciaux, abritent une importante activité économique, entraînant la construction d'aménagements portuaires ainsi qu'une pollution par les hydrocarbures. Cette activité nécessite aussi l'entretien de chenaux de navigation par méthodes de dragage, souvent conditionnés par l'écotoxicité des sédiments vaseux à extraire. Ces zones sont aussi en concurrence avec d'autres activités économiques telles que la pêche, l'aquaculture et le tourisme. Les zones de baignade par exemple, doivent respecter des critères de qualité stricts et sont soumises à des contrôles sanitaires. Pour faire face à aux défis imposés par les nouvelles réglementations et permettre une meilleure gestion, des Groupement d'Intérêt Public spécialisés (GIP Seine-Aval, GIP Littoral Aquitain, etc.) ont été développés autour des bassins versants, afin de permettre de meilleures interactions entre décideurs et chercheurs.

Le rôle des chercheurs est primordial dans la compréhension du fonctionnement de ces zones et dans l'aide à la construction de plans de gestion durables. Ces projets à long terme nécessitent aussi une meilleure compréhension des interactions entre les systèmes estuariens et le changement climatique. En effet, les phénomènes extrêmes (crues, tempêtes) deviennent plus fréquents. Ils entraînent de fortes remises en suspension des sédiments et relâchent les polluants piégés dans ces vases. L'influence de ces événements et du changement du niveau de la mer peu aussi fortement modifier la morphologie de ces zones et donc l'écosystème associé. Inversement, les estuaires peuvent aussi jouer un rôle actif dans le changement climatique. En effet, les estuaires sont considérés depuis longtemps comme des puits de carbone. Mais il a été démontré que lorsqu'ils sont eutrophisés, ce qui correspond souvent à une mauvaise qualité écologique, les estuaires émettent du CO_2 en grande quantité. En Europe, ils représenteraient 5 à 10% du CO_2 émis (Framignoulle et al., 1998). Une meilleure compréhension de ces milieux est donc nécessaire

pour pouvoir les modéliser précisément.

2.2 L'estuaire : un système complexe

Les estuaires sont des milieux complexes à modéliser (voir figure 2.1). Les principaux processus abordés ici concernent son hydrodynamique et le transport de sédiment qui en résulte. Afin de pouvoir mieux comprendre le fonctionnement général du système, une

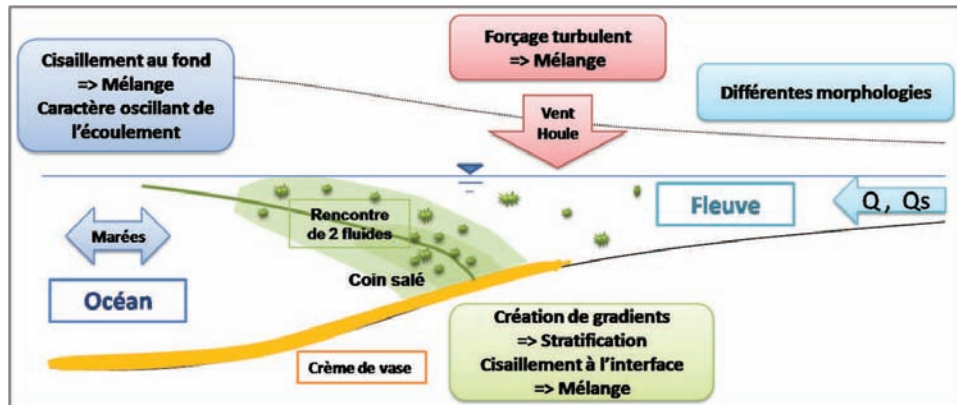


FIGURE 2.1 – Présentation des principaux forçages estuariens.

décomposition en mécanismes simplifiée est souvent nécessaire. Cette approche est aussi utilisée numériquement afin de pouvoir modéliser les mécanismes indépendamment et de les rassembler ensuite dans un modèle de type réaliste. Différentes échelles sont aussi présentes dans ce type de systèmes. Les grandes échelles régissant notamment l'hydrodynamique générale de l'estuaire sont caractérisées par la marée, la morphologie générale du site et le débit du fleuve, et sont basées sur les échelles de longueur d'une centaine de mètre et de temps de l'ordre de l'heure. Les mécanismes régissant le transport sédimentaire sont basés sur des échelles plus petites : la turbulence de longueur caractéristique 1 mm, la taille des grains $1\ \mu\text{m}$ et des agrégats 0, 1 mm, les interfaces entre les différentes couches 10 cm. Cette vision de mécanismes à différentes échelles va être conservée dans la description suivante de l'estuaire, partant de l'hydrodynamique générale et se focalisant sur le fond au niveau du bouchon vaseux.

2.2.1 Hydrodynamique de l'estuaire

L'hydrodynamique de l'estuaire est fortement dépendante du forçage du fleuve à travers son débit Q en amont, et du niveau de la mer en aval régi par la marée. La marée entraîne un mouvement périodique de période semi-diurne, principalement, dont l'amplitude est fortement dépendante de la localisation géographique. En France, l'amplitude, appelée marnage, varie de 14 m au Mont St Michel à quelques centimètres en Méditerranée. L'onde de marée, quasi-périodique au large se déforme lors de sa propagation dans l'estuaire. L'onde est tout d'abord modifiée par la diminution de la colonne d'eau. L'augmentation du confinement va augmenter la dissipation d'énergie par frottement au

fond mais va aussi modifier la forme du signal : la célérité de l'onde étant de l'ordre de \sqrt{gh} , la crête du signal est plus rapide que le creux. Le montant devient alors très raide et le perdant s'aplatit. Lors de la marée montante (flot), les vitesses seront alors plus importantes qu'en marée descendante (jusant) (voir [Le Normant, 1995](#)). D'autre part, la largeur de l'estuaire décroît en général exponentiellement en fonction de la distance à la mer, ce qui tend à amplifier l'énergie du signal de marée, ainsi que son amplitude. Cette tendance est accentuée par la réflexion du signal sur les berges. Dans tous les cas, le frottement au fond devient prépondérant dans la partie amont de l'estuaire ; il étouffe le signal de marée et limite donc sa propagation. La marée et notamment l'asymétrie de son signal a une influence importante sur le transport sédimentaire.

L'estuaire se définit aussi par le mélange de deux fluides de caractéristique (température et salinité) différentes : l'eau douce amenée par le fleuve et l'eau salée de l'océan. La différence de salinité, et donc de masse volumique entre l'eau du fleuve et celle de l'océan crée une interface, appelée halocline, entre les deux milieux. Un écoulement résiduel d'eau salé vers l'amont et d'eau clair vers l'aval se met alors en place, de part et d'autre de la halocline. La position verticale de la halocline diminuant lorsque l'on se dirige vers l'amont de l'estuaire, son intersection avec le fond de l'estuaire est appelé point nodal. Au-delà de ce point, toutes les circulations secondaires sont dirigées vers la mer. La position, la forme et l'épaisseur de la halocline dépendent de l'intensité du signal de marée et du débit du fleuve, et différencient les quatre grandes familles d'estuaires décrites ci-dessous et présentées figure (2.2) :

a) Estuaire à coin salé :

Lorsque le débit induit par la marée est assez faible devant le débit du fleuve, la zone de transition entre les deux milieux est très mince : l'intrusion saline est alors appelée coin salé (voir figure 2.2(a)). Les gradients de densité très importants au niveau de la halocline atténuent la turbulence et stabilisent l'interface : les deux couches se mélangent peu. Cependant, le cisaillement de l'eau douce sur l'eau salée quasiment stationnaire peut entraîner des instabilités de cisaillement et un mélange local de ces eaux.

b) Estuaire partiellement mélangé :

Lorsque le débit de la marée est plus important, le mouvement de va-et-vient entraîne un cisaillement au fond de l'estuaire, ainsi que la création de turbulence. Cette turbulence entraîne alors du mélange dans l'estuaire : la halocline sera moins marquée et plus diffuse (fig. 2.2(b)). Le mélange est dorénavant piloté par la turbulence, les instabilités de cisaillement, ayant un rôle moindre.

c) Estuaire bien mélangé :

Lorsque les courants de marée sont prépondérants, la turbulence peut être suffisamment forte pour mélanger toute la colonne d'eau. La stratification verticale disparaît alors et on observe seulement une stratification horizontale (fig. 2.2(c)). Ces estuaires sont souvent peu profonds. S'ils sont suffisamment larges, la force de Coriolis peut engendrer une circulation résiduelle horizontale.

d) Estuaire inversé :

Cette dernière catégorie peut être observée dans les régions arides lorsque le débit du fleuve est très faible et que le taux d'évaporation est très important. L'évaporation (d'eaux non salées) dans l'estuaire entraîne la plongée d'eaux plus salées que l'eau de mer. Une circulation résiduelle vers l'amont est observée en surface alors des eaux très denses se dirigent au fond vers l'aval (fig. 2.2(d)).

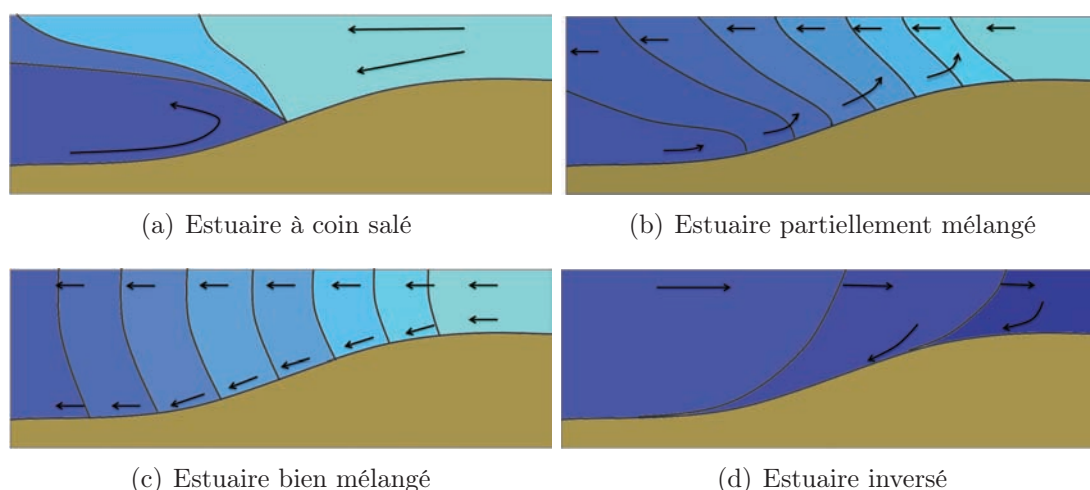


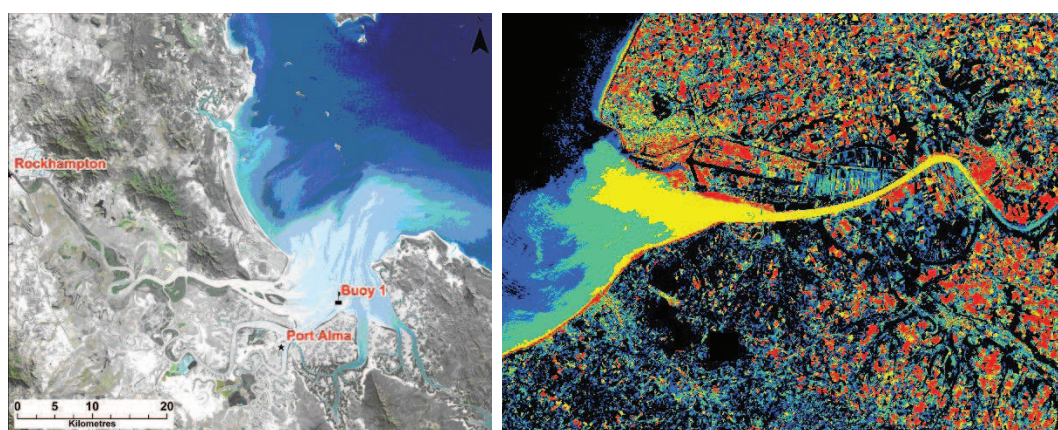
FIGURE 2.2 – Coupes verticales longitudinales d'estuaires idéalisés appartenant aux différentes catégories.

Enfin, il faut aussi noter que certains estuaires peuvent changer de catégorie au cours de l'année, en période de crue ou d'étiage par exemple.

Bien que notre étude se concentre sur le transport sédimentaire dans les estuaires, ces considérations morphologiques sont importantes car elles vont piloter le profil de vitesse verticale et l'intrusion saline fortement liée au phénomène de bouchon vaseux.

2.2.2 Bouchon vaseux et formation de la crème de vase

L'hydrodynamique sédimentaire des estuaires se caractérise par une zone de forte accumulation de sédiments en suspension, appelée bouchon vaseux, présentant une concentration de matières en suspension (MES) de 10 à 100 fois supérieure à la concentration de la rivière en amont et de la mer en aval. La signature de cette accumulation de sédiments en suspension peut être observée sur des images satellites comme présenté figure 2.3 : on observe bien dans ces deux cas, un maximum de turbidité au centre de l'estuaire (caractérisé par la zone plus claire sur l'image Landsat et jaune sur l'image de la Seine). La formation de cette zone fortement concentrée n'est pas seulement due, comme l'explique [Kineke et al. \(1996\)](#) dans le cas de l'Amazone, au seul apport sédimentaire : sans la concentration et le piégeage des sédiments en suspension sous la forme de crème de vase au cœur de l'estuaire, les sédiments seraient dispersés dans l'environnement côtier, très énergétique. La formation du bouchon vaseux et de la crème de vase est due à des



(a) Image Landsat de l'estuaire de Fitzroy (Queensland, Australie; mai 2003) (b) Observation satellite de l'estuaire de la Seine (■ : eaux, eaux profonde, végétation active; ■ : très forte turbidité, sols nus; ■ : Urbain, sols nus, sable)

FIGURE 2.3 – Observation de bouchons vaseux par satellite.

mécanismes propres aux estuaires, dont les deux principaux sont : la convergence des vecteurs vitesse au fond induisant un point d'arrêt au niveau du coin salé et la remise en suspension par les courants de marée. La figure 2.4 présente ces principaux mécanismes responsables de l'accumulation de sédiments au niveau du point nodal. L'asymétrisation

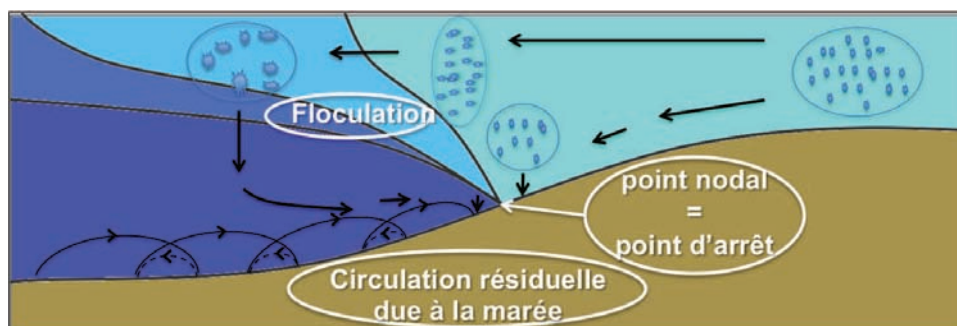


FIGURE 2.4 – Schéma expliquant l'accumulation de sédiments au niveau du point nodal.

de l'onde de marée lors de sa propagation dans l'estuaire, comme présentée dans la partie sur l'hydrodynamique de l'estuaire, se traduit, dans la majorité des cas, par un flot plus court mais présentant des vitesses plus importantes que le jusant. La remise en suspension sera donc plus importante lors du flot. Le transport résiduel des sédiments, présenté figure 2.4, résultant d'un transport de sédiment plus important lors du flot (traits pleins) que lors du jusant (traits pointillés), sera donc vers l'amont, jusqu'au point nodal. D'autre part, la convergence des vecteurs vitesse au point nodal entraîne en amont et en aval de ce point, au fond de l'estuaire de faible vitesse, insuffisantes pour conserver les sédiments en suspension, entraînant une zone de sédimentation autour du point nodal. Enfin, la zone frontale située au niveau du point nodal est propice à la sédimentation. En effet

l'accumulation de sédiments, l'écoulement cisailé et la salinité favorisent la floculation, et donc la sédimentation due à la fois à l'augmentation du diamètre des particules agrégées, et à la stratification en densité réduisant la turbulence. Les sédiments s'accumulent

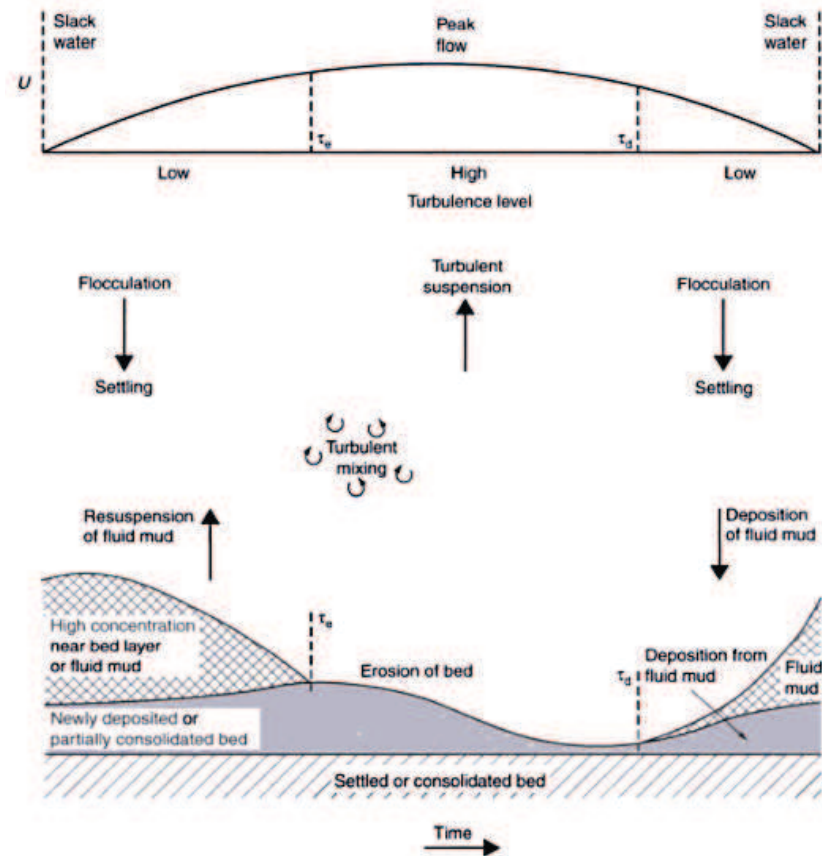


FIGURE 2.5 – Évolution du fond au cours d'un cycle de marée (Whitehouse et al., 2000).

dans cette zone sont cycliquement remis en suspension et sous forme de crème de vase en fonction du cisaillement au fond, et donc de la marée, comme présenté figure 2.5. Lors d'un cycle, la crème de vase est entraînée par l'écoulement pour former une zone dense de sédiments en suspension, le bouchon vaseux ; le fond pouvant lui-même être ensuite érodé si le cisaillement est suffisant (aux grandes marées par exemple). Lorsque les vitesses diminuent de nouveau, les particules sédimentent pour reformer les couches de crèmes de vase, dont une partie pourra se consolider pour former le lit.

La structure du fond, les propriétés et le comportement des différentes couches composant le fond de l'estuaire constituent donc les éléments centraux du transport sédimentaire estuarien.

La figure 2.6 présente ces différentes couches de sédiments définies par Mehta et al. (1989) et présente les processus verticaux définissant les interactions entre ces différentes couches. Les profils schématiques de distribution verticale en sédiment et la vitesse de l'écoulement y sont représentés ; ils permettent de caractériser les différentes couches.

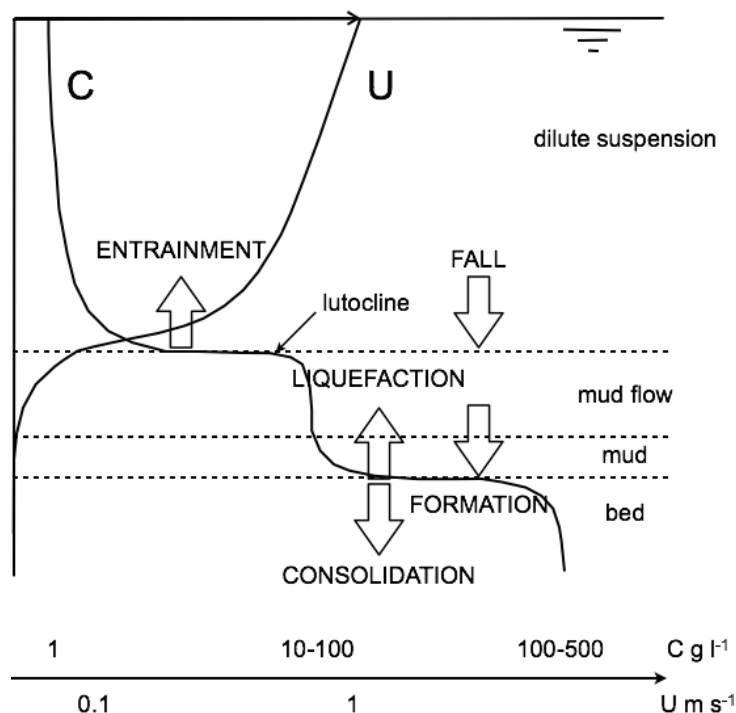


FIGURE 2.6 – Profils verticaux schématiques de la concentration et de la vitesse, d’après [Mehta et al. \(1989\)](#).

D’après cette description schématique, le fond de l’estuaire est composé de trois principales couches séparées par de forts gradients de concentration : une couche de suspension diluée, séparée d’une couche de crème de vase par une lutocline, et enfin un lit solidifié. La couche de crème de vase est ensuite redivisée en deux couches par le gradient de vitesse : une couche mobile est posée sur une couche immobile dans laquelle la vitesse s’annule. Ce schéma montre le rôle central de la crème de vase. En effet, cette zone va conditionner la concentration de la zone de vase mobile et de la suspension diluée, toutes deux responsables du transport de sédiments en estuaire.

Afin de mieux comprendre les mécanismes régissant le transport sédimentaire, nous allons nous pencher dans un premier temps sur la nature de ces sédiments et leurs propriétés.

2.3 Origine, composition et rhéologie des vases

2.3.1 Origine et composition des vases

Les sédiments d’origines diverses sont observés dans les estuaires. Certains sont apportés par les fleuves et piégés au niveau de l’estuaire, d’autres venant du large arrivent avec les marées, d’autres enfin viennent directement de l’érosion des berges. Toutes ces particules ayant une origine commune, leur masse volumique est sensiblement la même :

$\rho_s \sim 2650 \text{ kg m}^{-3}$. Ces sédiments se différencient alors par leur diamètre (D) (voir table 2.1). Leur comportement sédimentaire diffère ensuite en fonction de leur diamètre. Les

Classe	Bloc/Galet	Gravier	Sable	Limon	Argile
Diamètre (D)	$> 63\text{mm}$	$63 - 2\text{mm}$	$2\text{mm} - 63\mu\text{m}$	$63\mu\text{m} - 2\mu\text{m}$	$> 2\mu\text{m}$
Comportement	Non-cohésif			Cohésif	

TABLE 2.1 – Classification granulométrique des sédiments. British Standard ISO 14688 (2002).

sédiments de taille importante à intermédiaire présentent un comportement non-cohésif et sont remis en suspension suivant le diagramme de Shields (reliant le cisaillement critique nécessaire à la mise en suspension au nombre de Reynolds du grain). Les sédiments de plus petite taille ($D < 0.63\mu\text{m}$) présentant un comportement cohésif, sont encore mal compris. Ce comportement cohésif se traduit par la formation de floccs, ou macro-floccs modifiant notamment les propriétés de sédimentation. Alors que l'on retrouve principalement des sédiments de taille importante, type galets, sables en amont d'estuaire et des sables en aval, le fond des estuaires au niveau du point nodal est principalement constitué de sédiments très fins à caractère cohésif. En effet, le caractère peu énergétique de l'estuaire, au niveau notamment de la zone frontale, ne permet pas le transport de sédiments de taille supérieure.

D'après [McAnally et al. \(2007\)](#), la crème de vase observée en estuaires est composée typiquement de 50 à 70 % d'argiles, de limons, de sables et 1 à 2 % de matières organiques. La présence de sable dans cette couche peut être observée dans des environnements assez énergétiques. Cependant, la vitesse de sédimentation des sables étant plus importante, la proportion de sables dans la crème de vase reste généralement inférieure à quelques pourcents. Pour les mélanges de vase et sables, une proportion d'un peu plus de 10% de sédiments argileux est suffisante pour assurer un comportement cohésif du matériel. On peut noter que dans le cas de lacs, la proportion de matière organique peut atteindre plus de 60 %, maintenant le caractère fluide de cette couche. La crème de vase comporte aussi des polluants tels que l'arsenic dans l'estuaire de la Gironde ([Abril et al., 2000](#)), le phosphore, l'arsenic et le zinc dans le port de Zeebrugge, Belgique, et de nombreux métaux lourds dissout dans l'estuaire de Scheldt, Pays-Bas ([Paucot and Wollast, 1997](#)). La remise en suspension de cette couche de sédiment entraîne alors la resuspension des polluants, ainsi qu'une production de nitrogène due aux bactéries, qui peut entraîner une carence en oxygène notamment près du fond.

2.3.2 Rhéologie de la vase

Cette partie présente de manière générale les différents comportements rhéologiques des fluides, puis se concentre sur le comportement des vases.

2.3.2.1 La rhéologie : étude des fluides aux comportements complexes

La rhéologie est l'étude de la déformation et de l'écoulement de matière en présence d'un forçage ([Ancy, 2005](#)). Ce domaine d'étude repose sur la théorie des milieux continus,

elle-même basée sur la séparation des échelles. La théorie des milieux continus suppose qu'il existe des échelles de la matière suffisamment grande pour que les variations microscopiques des propriétés ne soient plus observables ; ce qui revient à avoir un nombre de particules suffisamment important pour définir des propriétés continues telles que la vitesse, la densité, la température, par moyenne au sens de la physique statistique sur ces particules. Il faut d'autre part qu'une de ces échelles puisse être choisie suffisamment petite pour être décorélée des variations macroscopiques de la matière (échelle inférieure à la longueur de Kolmogorov, par exemple, pour un fluide newtonien turbulent). La rhéologie s'applique donc, en se basant sur des observations microscopiques de la matière, à fournir des lois comportementales à l'échelle macroscopique.

Lorsqu'un fluide est soumis à une contrainte de cisaillement τ , il se déforme et s'écoule, ce qui peut se traduire localement par la relation :

$$\tau = \mu_{ef}(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}$$

où μ_{ef} est la viscosité dynamique effective et $\dot{\gamma}$, le taux de cisaillement.

Les fluides sont ensuite classifiés dans différentes grandes familles en fonction de l'évolution de la viscosité dynamique effective. Les différentes classes de fluides sont présentées dans la figure (2.7) selon cette loi et explicitées ensuite.

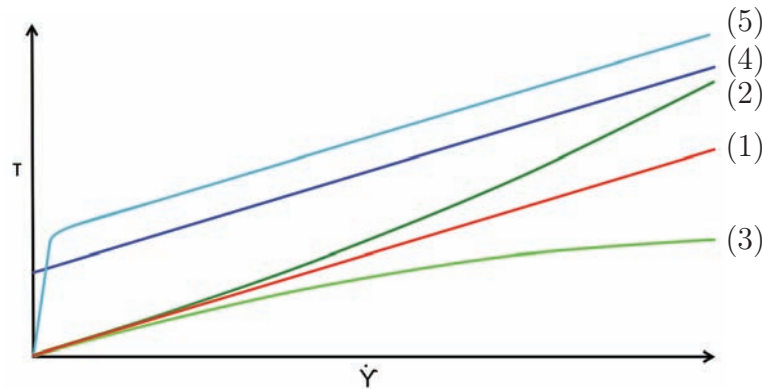


FIGURE 2.7 – Présentation de différents comportement rhéologiques. 1 : fluide newtonien, 2 : fluide rhéo-épaississant, 3 : fluide rhéo-fluidifiant, 4 : fluide viscoplastique de type Bingham, 5 : fluide viscoplastique de type Bingham régularisé.

a) Fluides newtoniens

Par définition, un fluide est appelé newtonien lorsque sa viscosité dynamique effective est constante à température et pression fixées :

$$\tau = \mu(T, p) \dot{\gamma} \quad \text{: fluide newtonien.}$$

Ce comportement, représenté sur la courbe (1) sur la figure 2.7, est généralement partagé par les fluides et les liquides purs, notamment l'eau, l'air et les huiles minérales.

L'effet de la pression sur la viscosité des liquides est négligeable, elle peut cependant faiblement augmenter la viscosité des gaz, en augmentant la concentration et les chocs

entre les particules. La température augmente un peu la viscosité des gaz mais diminue fortement la viscosité des liquides. Pour l'eau, la viscosité dynamique diminue de 1/3 entre 20°C et 40°C, pour le miel, elle est divisée par 10 lorsqu'on augmente de 1°C.

Tous les autres fluides, dont le taux de cisaillement ne varie pas linéairement en fonction de la contrainte, sont appelés non-newtoniens. Nous allons présenter les principaux modèles de ces fluides, observables dans le domaine estuarien.

b) Fluides viscoélastiques

Un fluide viscoélastique présente un comportement intermédiaire entre un solide élastique, modélisé idéalement par un ressort, et un fluide visqueux, modélisable par un amortisseur. Le solide élastique parfait est modélisé par la loi de Hooke :

$$\tau = G\gamma \quad : \text{solide élastique,}$$

et présente la particularité de stocker de l'énergie. Le fluide viscoplastique sera alors une combinaison du caractère visqueux présenté dans la partie fluide newtonien avec le comportement élastique. Une construction en série de ces deux modèles est appelée modèle de Maxwell, la construction en parallèle correspond au modèle de Kelvin-Voight (voir [Ancey, 2005](#)). Ce comportement assez courant concerne des suspensions de polymères notamment, les shampoings, des fluides corporels comme la salive, la pâte à gâteau...

c) Fluides rhéo-épaississant et rhéo-fluidifiant

Les fluides rhéo-épaississants et rhéo-fluidifiants, représentés sur la figure 2.7 par les courbes (2) et (3), ont une viscosité qui augmente ou respectivement diminue lorsque le cisaillement augmente. Ces fluides sont classiquement modélisés par une loi de puissance :

$$\tau = \mu \dot{\gamma}^n \quad \begin{cases} \text{avec } n > 1 : \text{fluide rhéo-épaississant,} \\ \text{avec } n < 1 : \text{fluide rhéo-fluidifiant,} \end{cases}$$

où μ est une constante à température et pression fixées.

Le comportement rhéo-épaississant est assez rare. On l'observe principalement pour des solutions très concentrées comme le sable mouillé ou les solutions saturées de fécule de pomme de terre ou maïzena. Les fluides rhéo-fluidifiants s'observent plus facilement. Ce comportement est partagé par de nombreuses suspensions dont les particules non-sphériques s'orientent dans le sens de l'écoulement lorsque le cisaillement fluide augmente, diminuant ainsi les contacts entre elles et ainsi la viscosité du fluide. Parmi ces fluides, on trouve par exemple le sang, des polymères liquides à longue chaîne, des jus de fruits, la pâte à papier et des colles.

d) Fluides viscoplastiques

Les fluides viscoplastiques, représentés sur la figure 2.7 par la courbe (4), présentent une contrainte seuil τ_c à dépasser pour que le fluide s'écoule. Si la contrainte est inférieure à ce seuil, leur viscosité est infinie : ils se comportent comme un solide (plastique). Le cas d'un fluide viscoplastique idéal est régi par le modèle de Bingham ([Bingham, 1922](#)) :

$$\tau = \tau_c + \mu(T, p) \dot{\gamma} \quad : \text{fluide viscoplastique idéal (Bingham).}$$

Au-delà du seuil de contrainte, le fluide se comporte comme un fluide newtonien. Ce comportement est partagé par différents gels, les dentifrices, des crèmes cosmétiques, les peintures ou encore des yaourts.

Pour l'étude numérique de ces fluides, des méthodes dites de régularisation de la viscosité ont été développées afin d'éviter que celle-ci diverge pour les faibles contraintes (voir Frigaard and Nouar, 2005, pour une comparaison de ces méthodes). Parmi ces modèles figure celui développé par Bercovier and Engelman (1980), présentant de bons résultats, et représenté par la courbe (5) figure 2.7 :

$$\tau = \mu(T, p) \left(1 + \left[\frac{B}{\sqrt{\epsilon^2 + \dot{\gamma}^2}} \right] \right) \dot{\gamma} : \text{fluide viscoplastique régularisé};$$

où ϵ est le paramètre de régularisation, tel que $\epsilon \ll 1$ (le modèle rejoint le fluide viscoplastique idéal ou modèle de Bingham pour $\epsilon = 0$); et B le nombre de Bingham.

e) Fluides thixotropes

Un fluide est thixotrope si sa viscosité, à vitesse de cisaillement constante, diminue, de manière réversible au cours du temps. De nombreux fluides présentant un comportement non-newtonien (particulièrement les fluides viscoplastiques et rhéo-fluidifiants) suite à une réorganisation structurale microscopique, présentent aussi un comportement thixotrope. Par exemple, une argile appelée laponite s'organise en structure comme présenté figure 2.8 à gauche lorsqu'elle est au repos. L'organisation de ces petites plaques est due à des charges opposées entre les surfaces. Au repos, lorsque le cisaillement est faible, on a donc augmentation de la viscosité au cours du temps. Lorsqu'on casse la structure par fort cisaillement ou mélange, la solution suit un comportement de type rhéo-épaississant à cause de la forme des particules. La figure 2.9 représente par exemple ce type de compor-

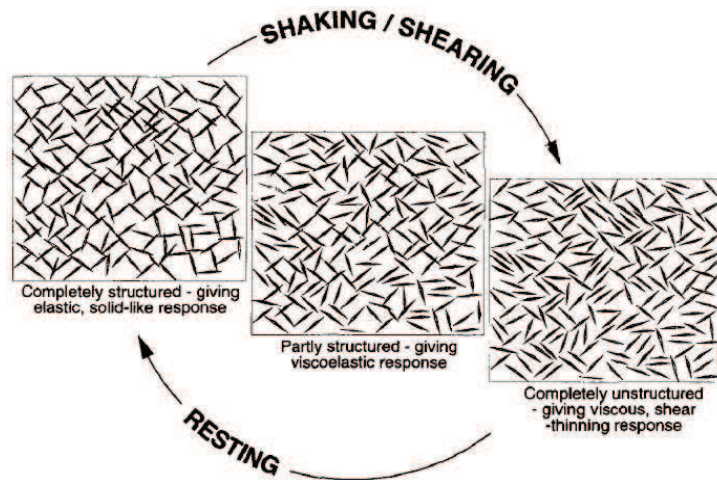


FIGURE 2.8 – Explication d'un comportement thixotrope par une réorganisation structurale à l'échelle microscopique (d'après Barnes, 1997).

tement pour un fluide rhéo-fluidifiant. Ce comportement thixotrope se caractérise alors sur les rhéogrammes par une hystérésis.

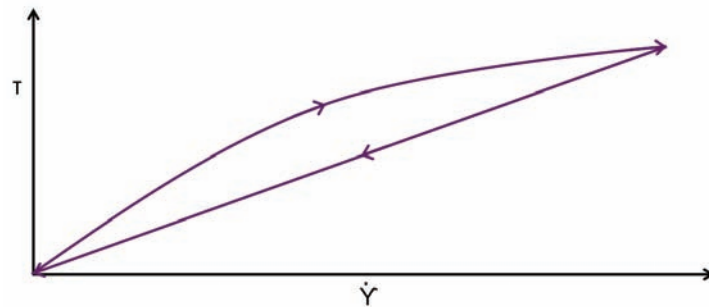


FIGURE 2.9 – Comportement d'un fluide thixotrope (soumis à une contrainte).

2.3.2.2 Rhéologies des vases

Les différentes couches présentées figure (2.6) présentant des concentrations et des dynamiques différentes, leurs comportements rhéologiques vont différer. Comme présenté précédemment, le comportement hydrodynamique reposant principalement sur la structure microscopique, la nature du sédiment et particulièrement de l'argile, va fortement influencer le comportement macroscopique. Selon [McAnally et al. \(2007\)](#) et [Zang et al. \(1993\)](#), la vase et la crème de vase peuvent présenter une grande variété de comportements, ou plus précisément un mélange, en proportions différentes, des classes de comportements présentés dans la partie précédente. Classiquement, la suspension diluée est modélisée comme un fluide newtonien et la vase consolidée comme un solide plastique ou élastique. La crème de vase peut suivant sa concentration et sa composition, s'apparenter principalement à un fluide newtonien, un fluide viscoélastique, un fluide viscoplastique ou un fluide rhéo-fluidifiant, pouvant présenter aussi un comportement thixotrope. Il semblerait que les caractéristiques modélisées de la crème de vase dépendent de l'étude. Les études sur la remise en suspension mettront en avant le caractère viscoplastique du fluide, et donc le seuil de cisaillement nécessaire au mélange et à la mise en suspension. D'autre part, les études portant sur l'interaction de cette couche avec la houle mettront l'accent sur son caractère viscoélastique, et donc ses propriétés en terme d'accumulation et restitution d'énergie.

La figure 2.10 présente un rhéogramme de vase naturelle (du port du Havre) étudiée par [Pham Van Bang et al. \(2007\)](#), et permet d'observer le comportement complexe de la vase. On observe tout d'abord un comportement en hystérésis, caractéristique de la thixotropie. Ensuite, lors de la montée en contrainte, la rupture de pente observée autour d'un gradient de vitesse $\dot{\gamma} = 0.02 \text{ s}^{-1}$ traduit la transition d'un comportement solide à fluide, caractéristique notamment des fluides viscoplastiques. On observe ensuite un comportement rhéo-fluidifiant caractérisé dans ce graphique par une droite de pente inférieure à 1, puis rhéo-épaississant aux grandes contraintes. Ces comportements s'expliquent par la structure microscopique du matériau. La crème de vase est composée d'agrégats, structures d'organisations des grains, expliquant le caractère thixotrope. La destruction des

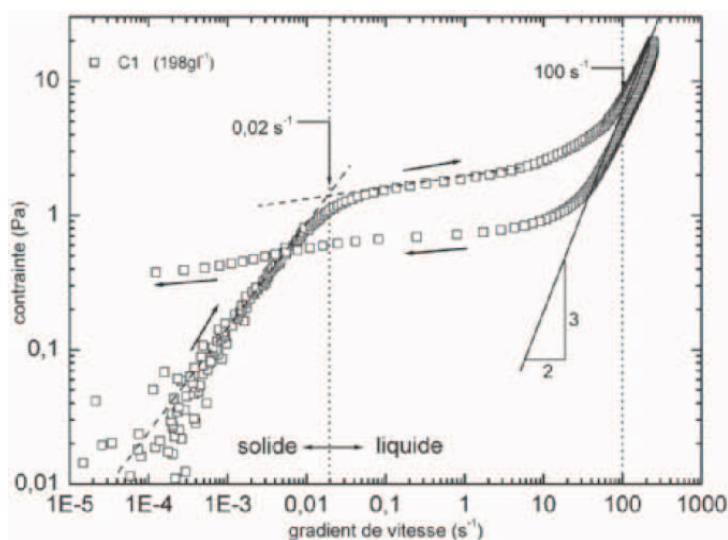


FIGURE 2.10 – Rhéogramme de vase du port du Havre, obtenu lors d’une montée suivie d’une descente en contrainte sur une suspension de concentration égale à 198 gl^{-1} , d’après [Pham Van Bang et al. \(2007\)](#).

agrégats, passé un certain seuil de contrainte, explique le caractère viscoplastique. Enfin, les particules de base étant en forme de plaquettes, leur asymétrie explique le caractère rhéo-fluidifiant.

2.4 Processus affectant le transport des sédiments cohésifs

Après avoir présenté les comportements complexes de la vase, nous allons présenter les différents processus d’interaction entre les couches présentées figure (2.6). Les processus de distribution verticale du sédiment sont importants car ils définissent la quantité de sédiment mobilisée par l’écoulement et donc potentiellement transportable. Nous présenterons ensuite les processus de transport "horizontal" auxquels contribuent ces différentes couches.

2.4.1 Flocculation

Les sédiments fins (argiles et limons) ont tendance à s’agréger (ou flocculer), ce qui modifie de manière significative leur comportement. La flocculation se produit lorsque deux particules passent suffisamment près l’une de l’autre, lors d’une collision par exemple, pour que les forces attractives dépassent les forces répulsives en présence (principalement pression fluide). Ces forces attractives sont principalement dues aux charges électriques surfaciques des particules ou volumiques telles que la force de Van der Waals, et sont d’autant plus importantes que les particules sont petites ; notamment si leur diamètre est inférieur à $40 \mu\text{m}$ (voir [McAnally and Mehta, 2002](#)). Des processus biologiques peuvent

aussi créer des liaisons entre grains, par l'existence de structures fibreuses ou de ponts de polymères. Les conditions favorisant la floculation sont principalement ceux favorisant la collision entre les particules : une concentration élevée, l'agitation turbulente, le cisaillement de l'écoulement, la différence de vitesse de chute et le mouvement brownien. Lorsque la crème de vase commence à se former, la floculation s'intensifie, favorisée par les hautes concentrations. Elle diminue ensuite à l'intérieur de la crème de vase sous l'effet conjoint de diminution de la turbulence et de la vitesse de chute. La crème de vase est une dense suspension d'agrégats, composés de centaines ou milliers de grains. D'un point de vue numérique ou de modélisation, la floculation modifie les caractéristiques des particules en suspension : leur taille augmente, elles deviennent plus poreuses et donc moins denses et plus "fragiles", plus irrégulières et leur vitesse de chute augmente. Krone (1963) proposa

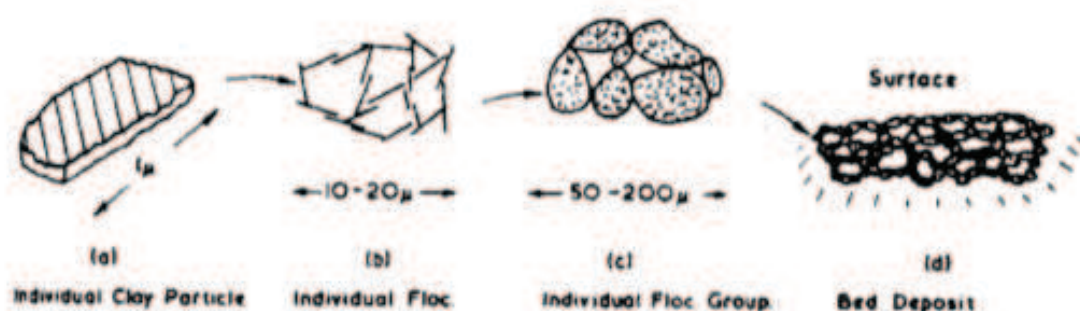


FIGURE 2.11 – Évolution de la taille et de l'organisation des particules en suspension lors de la floculation (D'après Van Rijn, 1993).

un modèle conceptuel, décomposant la floculation en différentes étapes (voir figure 2.11). Des agrégats, appelés d'ordre 0, sont tout d'abord formés à partir des particules d'argile et de limon. La cohérence de ces agrégats, petits et compacts, est assurée par des liaisons fortes. La collision entre agrégats d'ordre 0 va former des agrégats d'ordre 1 de taille plus importante et moins compacts, dont les liaisons seront plus faibles. Les ordres successifs d'agrégats formant des particules plus importantes, aux liaisons plus faibles et moins denses. La floculation étant principalement due à des forces de type électrique entre les particules, elle est influencée par les ions dissous dans l'eau et notamment la salinité. Une forte augmentation de la floculation a été observée par Migniot (1968) lors d'essais de sédimentation, lorsque la salinité dépasse quelques ppm : un maximum de floculation étant observé pour des salinités intermédiaires. Enfin, la crème de vase est composée d'agrégats de différents ordres, ce qui aura des implications sur la fluidification de cette couche.

2.4.2 Sédimentation

La vitesse de sédimentation des agrégats est fonction de leur densité, de leur forme et de leur rugosité, ainsi que des propriétés du fluide. La vitesse de chute, représentée figure 2.12, est souvent décomposée en différents régimes, proposés initialement par Thorn (1981). Lorsque la concentration est inférieure à une dizaine de grammes par litre, les

particules sont en chute libre. Dans ce régime, la vitesse de chute est essentiellement fonction des caractéristiques de la particule. L'augmentation de la concentration entraîne l'agrégation de particules ou floccs, ce qui conduit à une augmentation de la vitesse de chute. Dans cette phase, la vitesse de chute peut être modélisée par une loi de puissance fonction de la concentration en particules.

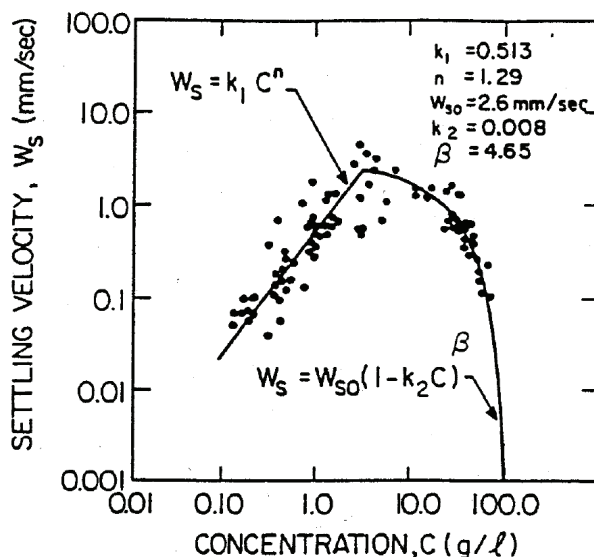


FIGURE 2.12 – Évolution de la vitesse de sédimentation en fonction de la concentration (D'après Thorn, 1981).

Au-delà d'une dizaine de grammes de sédiments par litres, les interactions entre les floccs ne peuvent plus être négligées : l'entravement entre les floccs doit être pris en compte. Des modèles empiriques de sédimentation de vase ont été proposés : la vitesse de chute d'un flocc étant diminuée par un coefficient, fonction de la concentration (voir Figure 2.12). Ross and Mehta (1989) définissent ce coefficient en fonction de la concentration critique dite "de gel", concentration à partir de laquelle les floccs, par des liaisons, créent une matrice cohérente et ne sédimentent plus. Dans le cas de sédiments mixtes aussi composés de sables, une ségrégation en taille peut s'effectuer si le dépôt est rapide et les floccs peu développés. Les grains de sable auraient alors tendance à traverser la couche de vase et se concentrer au fond du dépôt alors que les petits agrégats resteraient en surface.

2.4.3 Tassement et consolidation

Le tassement apparaît lors que la concentration critique de gel a été atteint. Cette valeur varie dans la littérature de 30 à 180 g.l⁻¹ (Gratiot, 2000) suivant les types de vase. Au-delà de cette concentration, Partheniades (1965) explique que les floccs s'organisent en une structure de type nid d'abeille avec une forte densité en eau (voir figure 2.13(a)). Un tassement, d'une vitesse inférieure à 10⁻² mm s⁻¹, de la structure s'effectue sous son propre poids et celui de dépôt plus récents. Les liaisons les plus faibles vont alors se rompre et les agrégats vont tendre vers un nouvel équilibre plus stable, la distance entre les particules

diminuant comme présenté sur la figure 2.13(b). La pression sur la structure augmentant, les liaisons entre agrégats vont continuer à se rompre, et entraîner ainsi l'augmentation de la densité du lit. Durant cette phase de tassement, une partie de la pression effectuée sur le lit est équilibrée par la force (surpression interstitielle) induite par l'expulsion de l'eau initialement piégée dans la structure d'agrégats formant le dépôt initial. Au fur et à mesure que le lit se tasse, la quantité d'eau interstitielle diminue ainsi que son flux, le poids du sol va progressivement être repris en charge par les floes, par contact solide. Le stade de consolidation se déroule lorsque les contraintes effectives commencent à se développer et peut durer plusieurs heures, voire des jours. Lorsque l'eau interstitielle est complètement expulsée du matériau (figure 2.13(c)), la consolidation se poursuit par une phase de déformation plastique du lit, pouvant durer plusieurs semaines ou même mois. Lors de

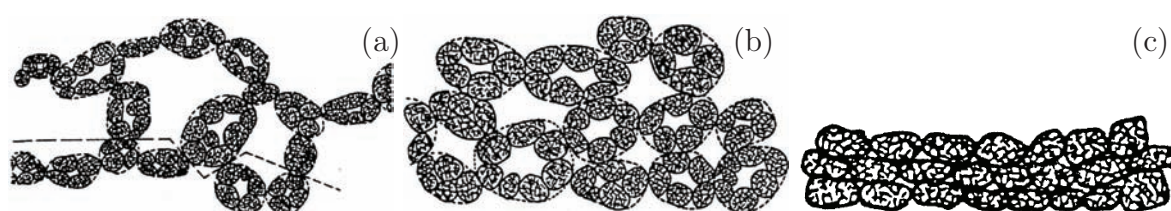


FIGURE 2.13 – Tassement et consolidation du lit. (a) Vase récemment déposée : structure en nids d'abeille. (b) Dépôt en cours de tassement : réarrangement des agrégats. (c) Dépôt consolidé : disparition de l'eau interstitielle (D'après Partheniades, 1965).

ces phases de consolidation, des processus d'origine biologique tels que la bioturbation, dus notamment aux benthos et aux micro-organismes, peuvent modifier le comportement du dépôt consolidé. Par exemple, la construction de tunnels modifiera l'exfiltration de l'eau et facilitera l'érosion, de même que la production de gaz dans le milieu. D'autre part la production de substances appelées EPS (Substance Extracellulaire Polymérique) améliore la cohérence du milieu. Le Hir et al. (2007) ont récemment présenté une revue de ces effets mais très peu de modèles hydrodynamiques les prennent en compte. Ils ont aussi démontré l'importance de la colonisation de vasières par des algues sur l'érosion du fond.

2.4.4 Liquéfaction

Dans notre cas, la liquéfaction est le changement d'état du fond passant d'un comportement initialement solide à un comportement fluide. Dans ce cas, les agrégats de particules composant la vase ne sont plus en appui sur d'autres grains mais en suspension dans le fluide, les liaisons faibles entre agrégats peuvent alors être détruites. Cette liquéfaction est principalement due soit aux gradients de pressions générés dans les pores du lit sédimentaire par la houle, soit au cisaillement du lit par un écoulement de fluide ou par le mouvement de la houle. La liquéfaction se déroule de bas en haut pour les couches peu solidifiées, principalement sous l'effet du cisaillement au fond et de haut en bas pour les couches plus consolidées et les plus épaisses.

2.4.5 Courants de turbidité

Les courants de gravité sont des mouvements de fluides dus à une différence de gravité. Cette différence de gravité est principalement due à une différence de température, de salinité et/ou de concentration de particules en suspension. Dans le cas du transport sédimentaire, nous allons nous concentrer sur les courants de turbidité, principalement dus à une différence de concentration. Dans les estuaires, des courants de gravité peuvent se développer après la remise en suspension rapide d'une grande quantité de sédiments, par liquéfaction ou érosion de masse. Plus denses que le fluide ambiant, ces courants de turbidité se dirigent souvent vers le large, en suivant la pente naturelle du fond de l'estuaire. Suivant la concentration du courant de turbidité et la pente du fond, différents comportements sont identifiés. Les courants de turbidité de concentration faible à modérée vont principalement dépendre de l'agitation turbulente du milieu pour s'entretenir et conserver les particules en suspension. Pour les crèmes de vase présentant une concentration plus importante ($> 200 \text{ kg.m}^{-3}$), [Wright et al. \(2001\)](#) montre que le caractère turbulent ou laminaire du courant de turbidité composé de crème de vase dépend de la pente du fond. Ils définissent une "pente critique" par :

$$\sin \theta_{crit} = C_d / Ri_{crit} ,$$

où θ est l'angle avec l'horizontale, $C_d \sim 0.004$ le coefficient de trainée au fond et $Ri_{crit} \sim 1/4$ le nombre de Richardson critique, ce qui correspond à une pente d'environ 1° . Si l'angle est supérieur à 1° , en l'absence de courants et de houles, le courant de turbidité accélère jusqu'à ce que son cisaillement au fond soit suffisant pour générer de la turbulence. A pente constante, la distance parcourue par le courant de gravité dépendra principalement de l'équilibre entre son approvisionnement en sédiment par érosion du fond et de sa perte de matières en suspension au niveau de sa lutocline par entrainement (voir aussi [Meiburg and Kneller, 2010](#), pour revue récente). Sur des pentes inférieures à 1° , ce qui est souvent le cas sur les plateaux continentaux et dans les estuaires, le courant de turbidité restera laminaire. Certains peuvent aussi rester laminaires pour des pentes supérieures grâce à leur forte viscosité. En l'absence de turbulence extérieur, ces écoulements peuvent ralentir jusqu'à s'arrêter à cause de la sédimentation des particules. La présence de courants et de houle peut fortement modifier ces comportements. La présence de courant, influant sur le cisaillement au niveau de la lutocline peut modifier la vitesse du courant de turbidité, alors que l'agitation par la houle permettra de conserver les sédiments en suspension. Le transport de sédiments par les courants de turbidité peut être deux fois plus important que le transport en suspension (notamment grâce à leur forte concentration). [Kineke et al. \(1996, 2000\)](#) pense que la crème de vase piégée au niveau du coin salée pourrait être régulièrement relâchée dans l'environnement côtier par des courants de turbidité. Les courants de gravité sont aussi très importants pour le transport sur de courtes distances, entraînant le remplissages des canaux de navigations et un dragage régulier pour maintenir les voies navigables.

2.4.6 Interactions entre la crème de vase et la houle

Les interactions entre les ondes se développant à la surface libre et le fond de l'estuaire changent de nature lorsque ce dernier est recouvert de crème de vase (voir [McAnally et al., 2007](#)). Les fonds vaseux sont connus depuis longtemps pour posséder de grandes capacités de dissipation des ondes. Ces fonds dissipent simplement les petites longueurs d'ondes mais dissipent et modifient les grandes longueurs d'ondes, impliquant un cisaillement non négligeable au fond. Cependant la réciproque est fautive, le fond vaseux est modifié à la fois par les petites et grandes ondes de surface. Cependant ces mécanismes de transmission d'énergie entre la surface et le fond sont encore mal compris. Les travaux de [Jamali et al. \(2003\)](#) et [Hill and Foda \(1999\)](#) suggèrent l'excitation de la lutocline par les ondes de surface. L'énergie transférée au niveau de cette interface est ensuite dissipée efficacement au niveau de la crème de vase, dense et visqueuse, pouvant entraîner des flux de densité ou une liquéfaction des couches inférieures.

2.4.7 Transport en suspension

Le transport en suspension est directement dû à l'écoulement moyen, ainsi qu'à l'agitation turbulente permettant la conservation des sédiments dans l'écoulement, en régissant leur répartition verticale. Dans ce but, des modèles 1D verticaux sont utilisés ([Smaoui et al., 2007](#)). Ils sont ensuite couplés à des modèles 2D horizontaux afin de pouvoir comparer les résultats avec les données de terrain. Les modèles de fermeture turbulente les plus communément utilisés sont des modèles de transport de l'énergie cinétique turbulente k et de la longueur de mélange l (modèles k - l , ou k - kl par exemple.) [Blumberg et al. \(1992\)](#) ont dans un premier temps appliqué ce type d'approche aux écoulements en veine hydraulique ouverte, en introduisant l'effet de la surface libre sur les équations régissant la turbulence. Les conditions aux limites au fond ont été développées et améliorées par [Chapalain et al. \(1999\)](#) concernant l'effet de la houle. [Kranenburg and Winterwerp \(1997\)](#) propose un modèle de remise en suspension de la crème de vase. [Celik and Rodi \(1991\)](#) a proposé une relation donnant la capacité de transport de sédiments de l'écoulement en supposant que la sédimentation est proportionnelle à la création d'énergie cinétique, calibrant cette constante sur des données.

2.4.8 Entrainement et érosion

[Mehta \(1991\)](#) distingue 3 grands types de mécanismes de remise en suspension des sédiments dépendant des propriétés de la vase (rigidité) et de la contrainte appliquée par l'écoulement.

a) Erosion en masse :

Lorsque les vases sont très concentrées et consolidées, et que le cisaillement en surface est plus important que la cohésion du sol, on observe une rupture dans le matériau (figure 2.14). On observe dans ce cas, l'arrachement de copeaux de vase. Cette érosion E est

couramment modélisée par la formule de [Partheniades \(1965\)](#) :

$$E = \frac{dm}{dt} = M \frac{\tau_b - \tau_e}{\tau_e},$$

où m est la masse par unité de surface, τ_b le cisaillement au fond et τ_e la contrainte d'érosion, M une constante en $\text{kg.s}^{-1}.\text{m}^{-2}$ comprise entre 10^{-5} et 5.10^{-4} . Pour une vase de densité homogène, la contrainte d'érosion τ_e est constante.

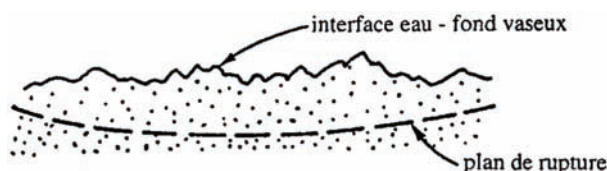


FIGURE 2.14 – Erosion de masse (D'après [Mehta, 1991](#)).

b) Erosion de surface :

Pour des vase de concentrations intermédiaires et donc partiellement consolidées, on observe l'érosion d'agrégats (figure 2.15). Pour ces vases, si le cisaillement dépasse la force de liaison entre deux floes, ceux-ci se détachent. Ces floes sont alors remis en suspension. Pour ces lits dont la densité est croissante ($\tau_e \neq \text{cste}$), la formule de [Parchure and Mehta \(1985\)](#) est préconisée (voir [Van Rijn, 1993](#)) :

$$E = E_0 \exp [\alpha(\tau_b - \tau_e)^{0.5}] \text{ pour } \tau_b > \tau_e,$$

où la constante E_0 est définie par la valeur extrapolée en $\tau_b = \tau_e$ et est comprise pour des vases naturelles en eau salée entre 10^{-5} et $10^{-3} \text{ kg.s}^{-1}.\text{m}^{-2}$. α est un coefficient compris entre 5 et $30 \text{ m}^{-1}.\text{N}^{-0.5}$

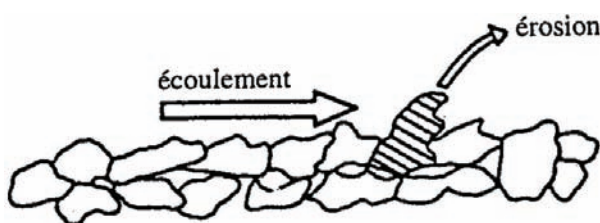


FIGURE 2.15 – Erosion de surface (D'après [Mehta, 1991](#)).

Enfin, [Van Rijn \(1993\)](#) propose de relier la contrainte seuil caractéristique du comportement viscoplastique en la reliant à la concentration de vase, où à la masse volumique à travers la relation :

$$\tau_e = \alpha(\rho_{dry})^\beta,$$

où $\beta \in [1; 2.5]$.

c) Entrainement de la crème de vase :

Enfin, dans le cas de dépôts assez récents, non consolidés, le cisaillement de cette couche de crème de vase par l'eau peut déstabiliser l'interface (figure 2.16). On observe alors sur cette lutocline des ondes de cisaillement, pouvant déferler et remettre une partie des sédiments en suspension. Cette instabilité de cisaillement, en milieu stratifié est pilotée par le nombre de Richardson Ri , quantifiant l'effet déstabilisateur du cisaillement par rapport à la stabilisation par la stratification en densité. Ces mécanismes, au centre de l'étude seront présentés avec plus de détails dans la partie suivante.

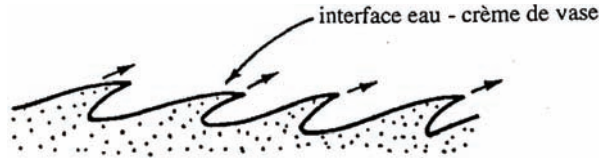


FIGURE 2.16 – Entrainement de la crème de vase (D'après Mehta, 1991).

Odd and Cooper (1989) a proposé la modélisation du flux d'entraînement de la crème de vase par analogie avec l'entraînement d'eau salée au coin salé :

$$\frac{dm}{dt} = -V_e C_m \text{ si } Ri_B < 10,$$

où C_m est la concentration de vase, Ri_B est le nombre de Richardson global :

$$Ri_B = \frac{(\rho_m - \rho_0)gd_m}{\rho_0(\Delta\bar{u}^2 + \Delta\bar{v}^2)},$$

avec d_m l'épaisseur de la couche de crème de vase, ρ_m sa masse volumique et V_e la vitesse d'entraînement de la crème de vase dans le fluide :

$$V_e = \frac{0.1\sqrt{\Delta\bar{u}^2 + \Delta\bar{v}^2}}{(1 + 63Ri_B^2)^{\frac{3}{4}}}.$$

Srinivas and Mehta (1989) ont ensuite proposé une étude expérimentale de l'entraînement de la crème de vase dans un canal à recirculation et proposé une relation entre le flux d'entraînement adimensionnel $Q = \frac{\frac{dM}{dt}}{\bar{u}(\rho_m - \rho_0)}$ et le nombre de Richardson :

$$\frac{dm}{dt} = (\rho_m - \rho_0) \bar{u} \frac{0.27 Ri_B^{-0.9}}{(20^2 - Ri_B^2)^{0.66}}.$$

Ces différentes modélisations sont utilisées afin de définir le flux de sédiment utilisé comme condition limite au fond, par de nombreux modèles. Le Hir et al. (2000) propose une approche différente. Au lieu de ne simuler que la colonne d'eau de faible concentration en sédiments, il utilise une approche "continue" permettant de simuler à la fois la couche d'eau supérieure, peu concentrée en sédiment et les couches de crème de vase ou vase faiblement consolidées pouvant présenter un comportement viscoplastique. Contrairement à l'approche classique multi-compartiments, où l'on modélise les interactions entre ces

"couches", l'approche utilisée permet de mieux modéliser les configuration où la frontière entre colonne d'eau chargée en sédiment et crème de vase est peu marquée. Les auteurs observent la formation de lutocline et de couches de vases. Un modèle de fermeture de la turbulence de type longueur de mélange est utilisé. Il est basé sur le cisaillement, ainsi que sur le nombre de Richardson afin de prendre en compte l'effet d'atténuation de la turbulence par la stratification. La viscosité est alors calculée en prenant en compte la turbulence, la concentration et le cisaillement pour le caractère viscoplastique de la vase. Une comparaison sur le cas de l'estuaire de la Garonne présente de bons résultats et certains comportements, tels que de forts gradients de vitesse au fond, peu observés.

Conclusion

Finalement, cette première partie montre l'importance et la complexité de la modélisation des estuaires. La crème de vase constitue un point central de ce système. De nombreux mécanismes observés dans les estuaires sont reproduits grâce à des modélisation dans les codes réaliste actuels. Cependant, l'approche de type multi-compartiment semble avoir ses limites (voir par exemple [Le Hir et al., 2000](#)). De plus, les modélisations sont souvent basées sur un petit jeu de paramètre et les mécanismes sont encore mal compris. Concernant la modélisation de la lutocline, une meilleur compréhension des mécanismes et des propriétés de l'interface permettra de mieux modéliser les flux de quantité de mouvement et de sédiments. Cette interface étant soumise à un écoulement cisailé, nous allons présenter dans la partie suivante une revue des mécanismes pouvant être observés au niveau d'une interface de type lutocline.

Chapitre 3

Instabilités de cisaillement et stratifications

Sommaire

3.1	Généralités sur les instabilités de Kelvin-Helmholtz	28
3.2	Mécanisme de l'instabilité	29
3.2.1	Feuille de vorticité	30
3.2.2	Relation de dispersion généralisée en configuration bi-couche . .	31
3.2.3	Cas d'application classiques	33
3.3	Critères et théorèmes sur la stabilité	34
3.3.1	Théorème du point d'inflexion de Rayleigh	34
3.3.2	Critère de Fj�rtoft (1950)	35
3.3.3	Stabilité des écoulements stratifiés en densité	36
3.4	Instabilités d'écoulements multi-couches cisailés	37
3.4.1	Instabilité de Taylor-Caulfield	37
3.4.2	Instabilité de Holmboe	38
3.4.3	Instabilités d'un multi-couche	39
3.5	Instabilités secondaires et transition vers une ML	40
3.5.1	Développement non-linéaire et saturation d'instabilités de KH � densité variable	40
3.5.2	Développement de modes bi-dimensionnels secondaires	41
3.5.3	Tri-dimensionnalisation de l'écoulement	42
3.5.4	Mélange dans les écoulements stratifiés cisailés	43
3.6	Instabilités visqueuses	45
3.6.1	Instabilités visqueuses de fluides homogènes	45
3.6.2	Instabilités visqueuses d'écoulements multi-couches	46

Introduction

Notre étude se focalise sur les instabilités de cisaillement se développant au niveau de la lutocline, interface entre vase fluide et eau partiellement chargée en sédiments. Nous

avons, dans cette partie esquissé un aperçu des connaissances actuelles sur les instabilités de cisaillement. Nous allons, dans un premier temps, présenter les instabilités de Kelvin-Helmholtz, le mécanisme associé à cette instabilité, ainsi que les critères utilisés pour définir la stabilité d'écoulements cisailés. Nous compléterons cette présentation en évoquant d'autres instabilités de cisaillement pertinentes pour notre sujet ainsi que la transition vers une couche de mélange à travers le développement d'instabilités secondaires.

3.1 Généralités sur les instabilités de Kelvin-Helmholtz

Les instabilités de Kelvin-Helmholtz font partie des instabilités hydrodynamiques les plus communes. Elles se manifestent à l'interface entre deux fluides se déplaçant à des vitesses différentes. Cisailée, l'interface se déstabilise, puis s'enroule pour former des tourbillons assez caractéristiques de ces instabilités. Ces instabilités sont assez bien connues



(a) *La Grande Vague de Kanagawa*, Hokusai (1830) (b) *La Nuit étoilée*, Van Gogh (1889)

FIGURE 3.1 – Instabilités de Kelvin-Helmholtz pour le grand public.

du grand public. La génération de la houle est une des manifestations les plus communes de ces instabilités (voir figure 3.1(b)), on peut aussi l'observer parfois dans les nuages, comme le matérialise Van Gogh dans son tableau *La nuit étoilée* (3.1(a)).

Cette instabilité est particulièrement présente dans les écoulements stratifiés ou non-homogènes où la différence de densité peut être accompagnée d'une différence de vitesse. Dans les écoulements géophysiques, on observe ces instabilités dans l'atmosphère (voir figure 3.2(a) et 3.2(c)) et l'océan (voir figure 3.2(b) et 3.2(d)). Dans le cas où le gradient de densité est colinéaire à la gravité, on parlera d'écoulements stratifiés. Dans ce cas, la stratification force le fluide à développer un comportement bi-dimensionnel dans des plans perpendiculaires à la stratification. Dans ces configurations, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz est un mécanisme de mélange très important.

Les instabilités de Kelvin-Helmholtz sont aussi observées dans de nombreux autres domaines de la mécanique des fluides. On les observe dans le développement d'autres

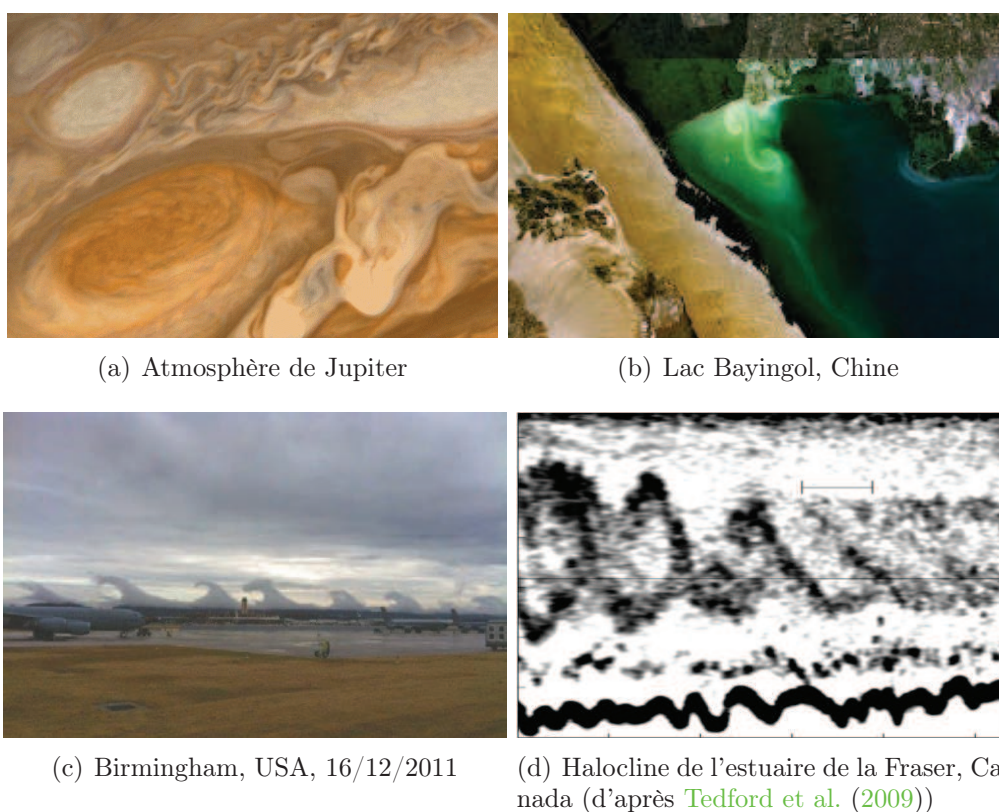
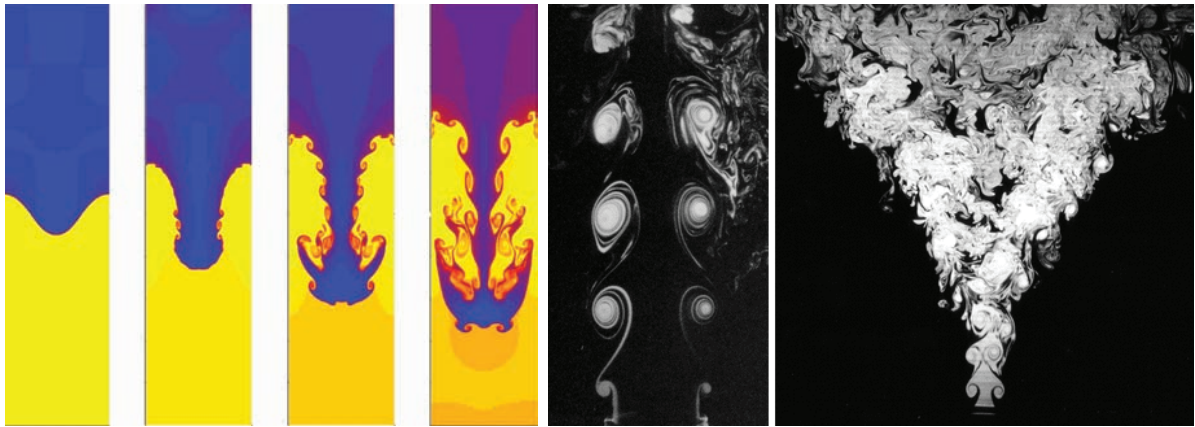


FIGURE 3.2 – Observations d'instabilités de cisaillement dans les écoulements géophysiques.

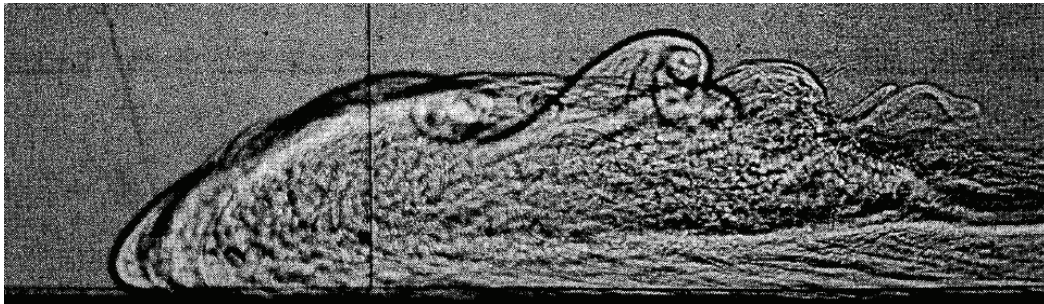
instabilités ou écoulements dus à une différence de densité comme l'instabilité de Rayleigh-Taylor (figure 3.3(a)) ou dans les courants de gravité (figure 3.3(c)), ainsi que dans les écoulements présentant un gradient de vitesse comme les jets (figure 3.3(b)), les sillages et bien sûr les couches de mélange.

3.2 Mécanisme de l'instabilité

La stabilité des écoulements cisailés a été très étudiée, depuis les premiers résultats de [Rayleigh \(1879\)](#), [Kelvin \(1871\)](#) et [Helmholtz \(1868\)](#) à la fin du 19ème siècle, et la stabilité linéaire est maintenant bien comprise. Nous allons, dans cette première partie, rappeler la méthode d'étude de stabilité linéaire, ainsi que les principaux résultats. Pour présenter la technique d'étude de stabilité de tels écoulements, nous allons présenter l'exemple simple d'un écoulement bi-couche bi-dimensionnel non-visqueux. Nous allons nous concentrer dans cette étude sur les couches de mélange miscibles. Après un premier exemple simplifié où l'interface est d'épaisseur nulle, nous nous focaliserons sur les profils verticaux continus. De même, les effets de la tension de surface se développant à l'interface d'un bi-couche non-miscible ne seront pas traités.



(a) Instabilité de Rayleigh-Taylor (Li and Li, 2006), (b) Jets à différents nombres de Reynolds (Reynolds et al., 2003)



(c) Courant de gravité en ombroscopie, (Simpson, 1999)

FIGURE 3.3 – L'instabilité de Kelvin-Helmholtz, présente dans de nombreuses configurations.

3.2.1 Feuille de vorticité

Nous considérons, dans un premier temps, un écoulement bi-couche, dont l'interface est en $z = 0$, avec des fluides de vitesse u_1, u_2 , et de densité ρ_1, ρ_2 , comme présenté sur le schéma de la figure 3.4. On se place dans le cas inviscide et on considère que les deux couches de fluide sont homogènes.

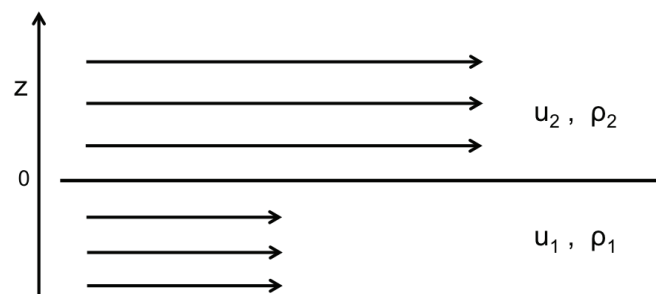


FIGURE 3.4 –  coulement parallèle de deux fluides homogènes, de vitesse et de masse volumique différentes.

Pour cet écoulement, la vitesse est discontinue en $z = 0$ et la vorticité est située uniquement au niveau de l'interface ; on parle de nappe de vorticité.

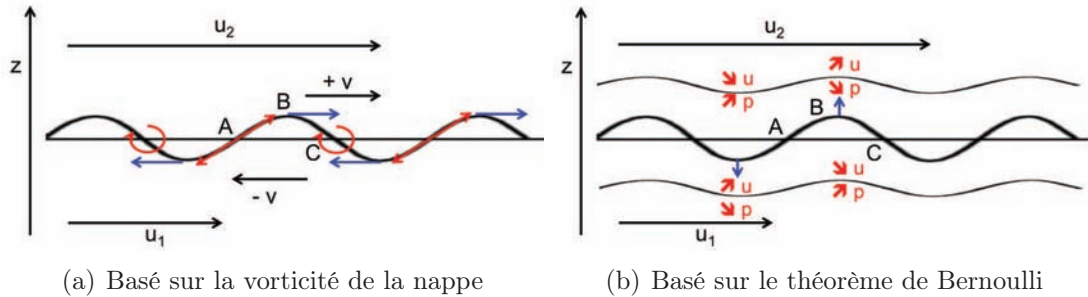


FIGURE 3.5 – Mécanismes expliquant l'instabilité de Kelvin-Helmholtz.

Le mécanisme régissant l'instabilité peut être expliqué, en considérant le comportement de la feuille de vorticité, comme expliqué par [Batchelor \(1967\)](#) et repris par [Drazin and Reid \(1984\)](#). Pour simplifier l'explication, on considère que $\rho_1 = \rho_2$ et que notre référentiel se déplace à la vitesse $U = (u_1 + u_2)/2$, les couches se déplacent maintenant à des vitesses opposées $+v$ dans la couche supérieure et $-v$ dans la couche inférieure, les effets des forces de flottabilité ne sont pas considérés. Si comme représenté sur le schéma 3.4, $u_2 > u_1$, on a alors $v > 0$ et une couche de vorticité positive. On considère maintenant que cette couche de vorticité est légèrement perturbée de manière sinusoïdale. Le déplacement d'une partie de la nappe de vorticité vers les z positifs (resp. négatifs) entraîne une vitesse selon x positive (resp. négative) de cette zone de la nappe. On observe alors un déplacement des points tels que B vers C . Cette déformation initiale entraîne alors la diminution de la vorticité aux points tels que A où la pente de l'interface perturbée est positive et une augmentation de la vorticité au point C où la pente est négative. On observe alors une accumulation de vorticité positive au niveau du point C , entraînant l'amplification de la perturbation initiale, entraînant une croissance exponentielle de l'instabilité. Lorsque la vorticité accumulée dans les points de type C devient trop importante, l'amplification devient non-linéaire et la nappe de vorticité s'enroule autour du point C .

Une autre explication est basée sur le théorème de Bernoulli (voir [Charru, 2011](#), p. 119). On remarque alors qu'au point B , les lignes de courant sont contractés dans l'écoulement du fluide 2, proche de l'interface. Cette augmentation de vitesse entraîne, par le théorème de Bernoulli, une diminution locale de pression qui tend à l'amplification du mécanisme.

3.2.2 Relation de dispersion généralisée en configuration bi-couche

Nous allons maintenant étudier plus précisément le comportement de cette interface. Nous allons faire l'hypothèse que l'écoulement de part et d'autre de la nappe de vorticité est irrotationnel, hypothèse réalisée par Kelvin et justifiée par la conservation du caractère irrotationnel d'un écoulement non-visqueux, et l'hypothèse d'une perturbation initiale

irrotationnelle. Dans le cadre d'étude de stabilité linéaire, nous pouvons donc exprimer les perturbations de l'écoulement de part et d'autre de l'interface par une fonction potentielle ϕ telle que :

$$\underline{u} = \begin{cases} \nabla(u_1x + \phi_1) & \text{si } z < \zeta, \\ \nabla(u_2x + \phi_2) & \text{si } z > \zeta, \end{cases} \quad (3.1)$$

où ζ est l'altitude de l'interface d'équation :

$$F(\underline{x}, t) = z - \zeta(x, t) = 0. \quad (3.2)$$

Le fluide étant incompressible, nous obtenons alors :

$$\Delta\phi_1 = 0 \quad \text{et} \quad \Delta\phi_2 = 0. \quad (3.3)$$

On impose ensuite les conditions limites à l'infini :

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \underline{u}_1 \cdot \underline{e}_z = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \underline{u}_2 \cdot \underline{e}_z = 0, \quad (3.4)$$

où \underline{u}_1 et \underline{u}_2 sont les champs de vitesse. Les conditions limites pour les deux fluides à l'interface sont définies par :

- la continuité des contraintes au niveau de l'interface. Si on suppose l'absence de tension de surface au niveau de l'interface nous obtenons :

$$p_1 = p_2. \quad (3.5)$$

En appliquant le théorème de Bernoulli de chaque côté de l'interface (le fluide étant supposé irrotationnel), on obtient, à l'interface :

$$\rho_1 \left(\frac{1}{2} (\nabla[u_1x + \phi_1])^2 + \frac{\partial\phi_1}{\partial t} + g\zeta - C_1 \right) = \rho_2 \left(\frac{1}{2} (\nabla[u_2x + \phi_2])^2 + \frac{\partial\phi_2}{\partial t} + g\zeta - C_2 \right), \quad (3.6)$$

les constantes C_1 et C_2 étant liées par la relation $\rho_1 \left(\frac{u_1^2}{2} - C_1 \right) = \rho_2 \left(\frac{u_2^2}{2} - C_2 \right)$ définie pour l'écoulement de base, où ϕ_1 , ϕ_2 et ζ sont nuls.

- la continuité du fluide au niveau de l'interface : les particules juste au-dessous et juste au-dessus de l'interface restent proches de l'interface. En dérivant temporellement l'équation de l'interface (3.2), on obtient, pour chaque côté de l'interface :

$$\frac{dF}{dt} = w_1 - \frac{d\zeta}{dt} = w_2 - \frac{d\zeta}{dt} = 0, \quad (3.7)$$

soit, en prenant la dérivée particulaire de ζ :

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \underline{u}_1 \cdot \nabla\zeta = w_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \underline{u}_2 \cdot \nabla\zeta = w_2. \quad (3.8)$$

On linéarise ensuite le système d'équations autour de l'écoulement de base, en ne conservant que les perturbations d'ordre 1 en ζ :

$$\Delta\phi_1 = 0 \quad \text{et} \quad \Delta\phi_2 = 0, \quad (3.9)$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \phi_1 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \phi_2 = 0, \quad (3.10)$$

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + g\zeta \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + g\zeta \right) \quad \text{en } z = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \underline{u}_1 \cdot \nabla \zeta = w_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \underline{u}_2 \cdot \nabla \zeta = w_2 \quad \text{en } z = 0. \quad (3.12)$$

Le système étant invariant par translation selon x et selon t , les solutions sont recherchées sous la forme :

$$(\phi_1, \zeta, \phi_2)(x, z, t) = (\tilde{\phi}_1(z), \tilde{\zeta}(z), \tilde{\phi}_2(z))e^{ikx+st}. \quad (3.13)$$

Le système à résoudre se réduit donc à :

$$\tilde{\phi}_1'' - k^2 \tilde{\phi}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\phi}_2'' - k^2 \tilde{\phi}_2 = 0, \quad (3.14)$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \tilde{\phi}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \tilde{\phi}_2 = 0, \quad (3.15)$$

$$\rho_1 \left((s + iku_1) \tilde{\phi}_1(0) + g\tilde{\zeta}(0) \right) = \rho_2 \left((s + iku_2) \tilde{\phi}_2(0) + g\tilde{\zeta}(0) \right), \quad (3.16)$$

$$(s + iku_1) \tilde{\zeta} = \tilde{\phi}_1(0)' \quad \text{et} \quad (s + iku_2) \tilde{\zeta} = \tilde{\phi}_2(0)'. \quad (3.17)$$

On déduit alors, des deux premières équations, que $\tilde{\phi}_1(z) = A_1 e^{kz}$ et $\tilde{\phi}_2(z) = A_2 e^{-kz}$ avec :

$$\rho_1 \left((s + iku_1) A_1 + g\tilde{\zeta} \right) = \rho_2 \left((s + iku_2) A_2 + g\tilde{\zeta} \right), \quad (3.18)$$

$$(s + iku_1) \tilde{\zeta} = kA_1 \quad \text{et} \quad (s + iku_2) \tilde{\zeta} = -kA_2. \quad (3.19)$$

En remplaçant l'expression des constantes A_1 et A_2 dans l'équation (3.18) et en simplifiant par $\tilde{\zeta}$, on obtient la relation de dispersion :

$$\rho_1 (kg + (s + iku_1)^2) = \rho_2 (kg - (s + iku_2)^2). \quad (3.20)$$

La solution de cette équation est donnée par [Drazin and Reid \(1984\)](#) :

$$s = -ik \frac{\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \left(\frac{k^2 \rho_1 \rho_2 (u_1 - u_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} - \frac{kg(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 + \rho_2} \right)^{1/2}. \quad (3.21)$$

3.2.3 Cas d'application classiques

On peut maintenant observer le comportement de quelques cas classiques.

- Si $\rho_1 < \rho_2$ et $u_1 = u_2 = 0$, on observe l'instabilité de Rayleigh-Taylor. La relation de dispersion devient :

$$s = \pm \sqrt{\frac{kg(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \rho_2}}. \quad (3.22)$$

Toutes les longueurs d'ondes sont instables.

- Si $\rho_1 \gg \rho_2$ et $u_1 = u_2 = 0$, on est dans le cas des ondes de gravité de surface comme la houle. La relation de dispersion devient alors :

$$s \sim \pm \sqrt{kg} \quad (3.23)$$

On obtient des ondes neutres, de vitesse de phase $c \sim is/k = \sqrt{g/k}$.

- Si $\rho_1 = \rho_2$ et $g = 0$, on obtient une instabilité de cisaillement. Dans ce cas, l'équation de dispersion devient :

$$s = k \left(-i \frac{u_1 + u_2}{2} \pm \frac{u_1 - u_2}{2} \right). \quad (3.24)$$

Toutes les longueurs d'ondes sont instables et le taux de croissance dépend du cisaillement $u_1 - u_2$, alors que les instabilités se propagent à la vitesse moyenne $1/2(u_1 + u_2)$.

- Dans le cas général de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, le développement de l'instabilité est un compromis entre les forces d'inerties liées au cisaillement et les forces de flottabilité liées à la stratification en masse volumique. En effet, l'interface est instable si :

$$\frac{k^2 \rho_1 \rho_2 (u_1 - u_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} - \frac{kg(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 + \rho_2} > 0, \quad (3.25)$$

soit :

$$k > \frac{g(\rho_1 + \rho_2)(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 \rho_2 (u_1 - u_2)^2}. \quad (3.26)$$

Il faut donc, à longueur d'onde fixée, que le cisaillement soit suffisamment fort par rapport à la stratification pour que l'écoulement soit instable. Dans cette configuration, si $u_1 \neq u_2$, il existera, en l'absence de dissipation, une longueur d'onde suffisamment petite pour que l'écoulement soit instable.

3.3 Critères et théorèmes sur la stabilité

Les profils moyen de vitesse $\bar{u}(z)$ et de stratification $\bar{\rho}(z)$ pouvant avoir des formes très différentes, des critères de stabilité ont été déterminés, notamment dans le cas 2D non visqueux.

3.3.1 Théorème du point d'inflexion de Rayleigh

Rayleigh (1879) démontra qu'une condition nécessaire pour que le profil de vitesse soit instable dans le cas inviscide est que celui-ci présente un point d'inflexion. Ce théorème est démontrable à partir de l'équation de Rayleigh :

$$(k^2 - D^2) \left(\frac{\omega}{k} - \bar{u} \right) \tilde{w} - \bar{u}'' \tilde{w} = 0. \quad (3.27)$$

où $\bar{u}(z)$ est le profil d'un écoulement parallèle quelconque et D l'opérateur de dérivation et \tilde{w} les perturbations de la vitesse verticale.

En multipliant cette équation par \tilde{w}^* , le complexe conjugué de \tilde{w} , et en l'intégrant de z_1 à z_2 , on obtient :

$$\int_{z_1}^{z_2} \tilde{w}^*(D^2 - k^2)\tilde{w} dz + ik \int_{z_1}^{z_2} \frac{u''(z)|\tilde{w}|^2}{s +iku(z)} dz = 0. \quad (3.28)$$

En intégrant par partie le premier terme avec $\tilde{w}(z_1) = \tilde{w}(z_2) = 0$, on obtient :

$$\int_{z_1}^{z_2} (|D\tilde{w}|^2 + k^2|\tilde{w}|^2) dz + ik[s + ik\bar{u}(z)] \int_{z_1}^{z_2} \frac{\bar{u}''(z)|\tilde{w}|^2}{|s + ik\bar{u}(z)|^2} dz = 0, \quad (3.29)$$

de partie imaginaire :

$$\sigma k \int_{z_1}^{z_2} \frac{\bar{u}''(z)|\tilde{w}|^2}{|s + ik\bar{u}(z)|^2} dz = 0. \quad (3.30)$$

On remarque que la partie imaginaire ne peut être nulle, et donc l'équation respectée, seulement et seulement si $\bar{u}''(z)$ change de signe ou si $\sigma = 0$. Donc pour que l'écoulement soit instable avec $\sigma > 0$, il faut que \bar{u} admette un point d'inflexion.

3.3.2 Critère de Fjørtoft (1950)

Ce critère permet de compléter le critère présenté par Rayleigh. Il est basé sur la même équation que précédemment (3.29) mais s'appuie sur la partie réelle :

$$\int_{z_1}^{z_2} (|D\tilde{w}|^2 + k^2|\tilde{w}|^2) dz + \left(\frac{\omega}{k} - \bar{u}(z)\right) \int_{z_1}^{z_2} \frac{\bar{u}''(z)|\tilde{w}|^2}{|s + ik\bar{u}(z)|^2} dz = 0. \quad (3.31)$$

On ajoute maintenant l'expression suivante (3.32) au deuxième terme de l'équation (3.31) :

$$\left(\frac{\omega}{k} - \bar{u}(z_i)\right) \int_{z_1}^{z_2} \frac{\bar{u}''(z)|\tilde{w}|^2}{|s + ik\bar{u}(z)|^2} dz = 0, \quad (3.32)$$

où z_i est la position de l'interface définie par $\bar{u}''(z_i) = 0$. D'après la démonstration du théorème du point d'inflexion de Rayleigh, l'expression doit être nulle pour que l'écoulement soit instable. On obtient alors l'inégalité :

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\bar{u}''(z)(\bar{u}(z) - \bar{u}(z_i))}{|s + ik\bar{u}(z)|^2} |\tilde{w}|^2 dz = - \int_{z_1}^{z_2} (|D\tilde{w}|^2 + k^2|\tilde{w}|^2) dz < 0. \quad (3.33)$$

Pour que l'équation soit vérifiée, il faut donc que $\bar{u}''(z)(\bar{u}(z) - \bar{u}(z_i)) < 0$ à au moins un endroit dans l'écoulement. Dans le cas où le profil de vitesse est monotone, comme $\bar{u}''(z)$ ne peut s'annuler et changer de signe qu'une fois et que $(\bar{u}(z) - \bar{u}(z_i))$ ne changera aussi qu'une fois de signe, il faut $\bar{u}''(z)(\bar{u}(z) - \bar{u}(z_i)) < 0$ dans tout l'écoulement sauf en z_i où l'expression s'annule.

3.3.3 Stabilité des écoulements stratifiés en densité

Comme expliqué pour l'exemple du bi-couche paragraphe §(3.2.2), la stabilité des écoulements stratifiés en densité dépend de l'équilibre entre le cisaillement déstabilisateur et la stratification stabilisatrice. Le nombre adimensionnel, appelé nombre de Richardson gradient ou Ri local, quantifie l'importance relative de la stabilisation de l'écoulement par les forces de flottabilité dues à la stratification par rapport aux forces d'advection dues au cisaillement de vitesse :

$$Ri(z) = \frac{N^2}{\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2}(z) = \frac{g}{\bar{\rho}} \frac{\frac{d\bar{\rho}}{dz}}{\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2}. \quad (3.34)$$

Miles (1961) et Howard (1961) proposent une condition nécessaire pour que l'écoulement soit instable basée sur ce nombre de Richardson. Pour que l'écoulement soit instable, il faut que pour le déplacement d'une particule fluide donnée, l'énergie cinétique créée (due au cisaillement) soit supérieure à l'énergie potentielle créée (due à la stratification), soit d'après Drazin and Reid (1984) p. 327 :

$$Ri \leq \frac{1}{4}. \quad (3.35)$$

Cette condition peut être démontrée de même manière rigoureuse en s'appuyant sur l'équation d'Orr-Sommerfeld, qui généralise l'équation de Rayleigh pour des écoulement visqueux.

Si on se reporte au cas test du bi-couche présenté précédemment (3.2.2), qui peut être considéré comme la limite du cas présent lorsque l'épaisseur tend vers 0, l'écoulement était instable pour :

$$k > \frac{g(\rho_1 + \rho_2)(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 \rho_2 (u_1 - u_2)^2}. \quad (3.36)$$

On peut remarquer que la condition de stabilité est assez proche de celle basée sur le nombre de Richardson. En effet, si on considère que le nombre d'onde k peut être adimensionnalisé par une longueur δ , l'épaisseur de l'interface par exemple, et que $2\rho_1\rho_2/(\rho_1 + \rho_2)$ est une masse volumique de référence ρ_r , on retrouve :

$$\frac{k^*}{\delta} > \frac{2g(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_r(u_1 - u_2)^2}, \quad (3.37)$$

ce qui correspond à :

$$\frac{k^*}{2} > \frac{g\delta(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_r(u_1 - u_2)^2} \sim Ri. \quad (3.38)$$

Baines (1998) présente le nombre de Richardson de manière plus complète. Selon lui, ce nombre permet aussi de savoir si des ondes internes peuvent se propager dans le milieu. En effet, \sqrt{Ri} mesure le ratio des temps caractéristiques de stratification permettant la propagation des ondes internes et le cisaillement en trainant l'enroulement des lignes de vorticité et donc le mélange et la création de couches homogènes.

3.4 Autres instabilités d'écoulements multi-couches cisailés

Les instabilités de Kelvin-Helmholtz apparaissent lorsque les profils de densité et de vitesse présentent des épaisseurs comparables. Classiquement, le rapport entre ces épaisseurs $R = \delta_u/\delta_\rho$ est de 1 ou 1.1 (voir par exemple [Caulfield and Peltier, 2000](#)). Pour des configurations différentes, deux autres familles d'instabilités sont observées. Les instabilités de Taylor-Caulfield sont observées pour une couche homogène dans un écoulement cisailé, l'épaisseur de cette couche étant la même que celle du cisaillement. Les instabilités de Holmboe apparaissent lorsque l'épaisseur de la couche de mélange est plus importante que celle du cisaillement.

Afin d'expliquer les mécanismes de création de ces instabilités, nous allons revenir à la formation de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz pour une épaisseur d'interface non-nulle, en fluide homogène, le mécanisme étant similaire en fluide non-homogène, avec un ratio entre les profils de densité et de vitesse de 1.

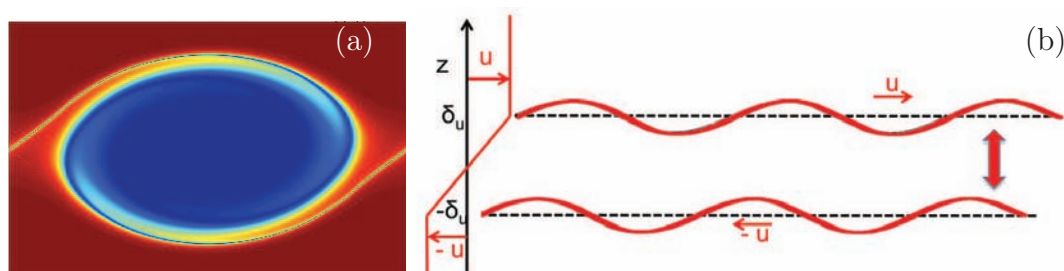


FIGURE 3.6 – Instabilité de Kelvin-helmholtz avec interface non-nulle. (a) Champ de densité ; (b) Mécanisme.

Comme représenté figure 3.6, le profil de vitesse idéalisé comporte deux interfaces de vortacité en $\pm\delta_u$. Des ondes appelées "ondes de Rayleigh" vont se développer sur chacune de ces interfaces. Ces ondes étant stationnaires, elle se déplacent à la vitesse de l'interface $\pm u$. Si ces ondes sont en phase, elles vont "résonner", s'amplifier mutuellement et croître de façon exponentielle. Lorsqu'elles sont en phase et s'amplifient mutuellement, on observe comme résultante un mode d'oscillation stationnaire de l'interface correspondant au mode de Kelvin-Helmholtz.

3.4.1 Instabilité de Taylor-Caulfield

On considère maintenant un tri-couche dont la couche intermédiaire homogène correspond à la couche cisailée, comme présenté figure 3.7. Comme précédemment, des ondes de Rayleigh stationnaires se développent à chaque interface de vortacité. Cependant, le profil de densité entraîne le développement d'un couple d'ondes internes sur chaque interface de masse volumique. Ces ondes se propagent à la vitesse $\pm c$ dans le repère de l'interface. L'instabilité de Taylor-Caulfield est l'interaction entre ces ondes internes, "facilités" par le cisaillement. Pour ces instabilités, un maximum de vortacité n'est pas nécessaire

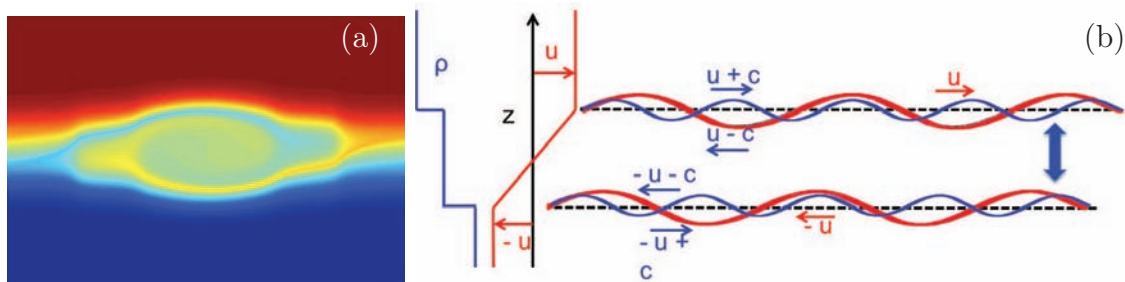


FIGURE 3.7 – Instabilité de Taylor-Caulfield. (a) Champ de densité, (b) Mécanisme.

(voir théorèmes de stabilité), cette instabilité est aussi observée pour des écoulements de cisaillement infini (Roy, 2010).

3.4.2 Instabilité de Holmboe

On considère maintenant un écoulement dont l'épaisseur du profil de densité est moins importante que celle du profil de vitesse, comme présenté figure 3.8(a). Dans ce cas,

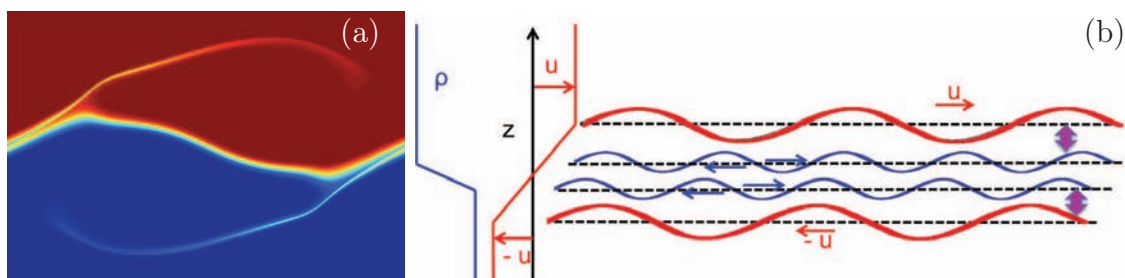


FIGURE 3.8 – Instabilité de Holmboe. (a) Champ de densité, (b) Mécanisme.

comme l'explique Caulfield (1994), nous avons quatre interfaces différentes : deux de vortécité, supportant des ondes de Rayleigh et deux de densité où peuvent se propager des ondes internes. Si le cisaillement est important par rapport à la stratification (pour les faibles nombres de Richardson), on observe deux types de modes instables. Ceux présentant le plus fort taux de croissance sont de type KH et résultent de l'interaction entre les deux ondes de Rayleigh, les interfaces diminuant seulement leur taux de croissance et l'intervalle de longueur d'onde. Le second mode correspond à l'interaction entre les ondes internes. Retardés par le cisaillement très important, ces ondes sont stationnaires et interagissent de manière résonnantes (type Taylor-Caulfield).

En augmentant la stratification, les ondes internes ne seront plus stationnaires et vont interagir avec les ondes de Rayleigh se propageant dans la même direction. On va donc observer deux modes non-stationnaires se propageant dans des sens différents. Comme précédemment des ondes de Rayleigh stationnaires se développent à chaque interface de vortécité. Cependant le profil de densité entraîne le développement d'un couple d'ondes internes sur chaque interface de masse volumique. Ces ondes se propagent à la vitesse

$\pm c$ dans le repère de l'interface. Leur combinaison est appelée instabilité de Holmboe. On observe alors des oscillations "creusées" de densité avec détachement de matière (voir figure 3.8(a)). On peut aussi observer parfois un seul mode de ces ondes : une instabilité de Holmboe unilatérale (one-side Holmboe instability).

3.4.3 Instabilités d'un multi-couche

Si on considère maintenant un tri-couche cisailé de manière générale, Caulfield (1994) montre que ces différentes instabilités peuvent apparaître soit dans des domaines du plan (Ri, k^*) distinct, pouvant se superposer par endroits et donc interagir ensemble. Un exemple de ce type de domaine est représenté figure 3.9. On peut noter que la position

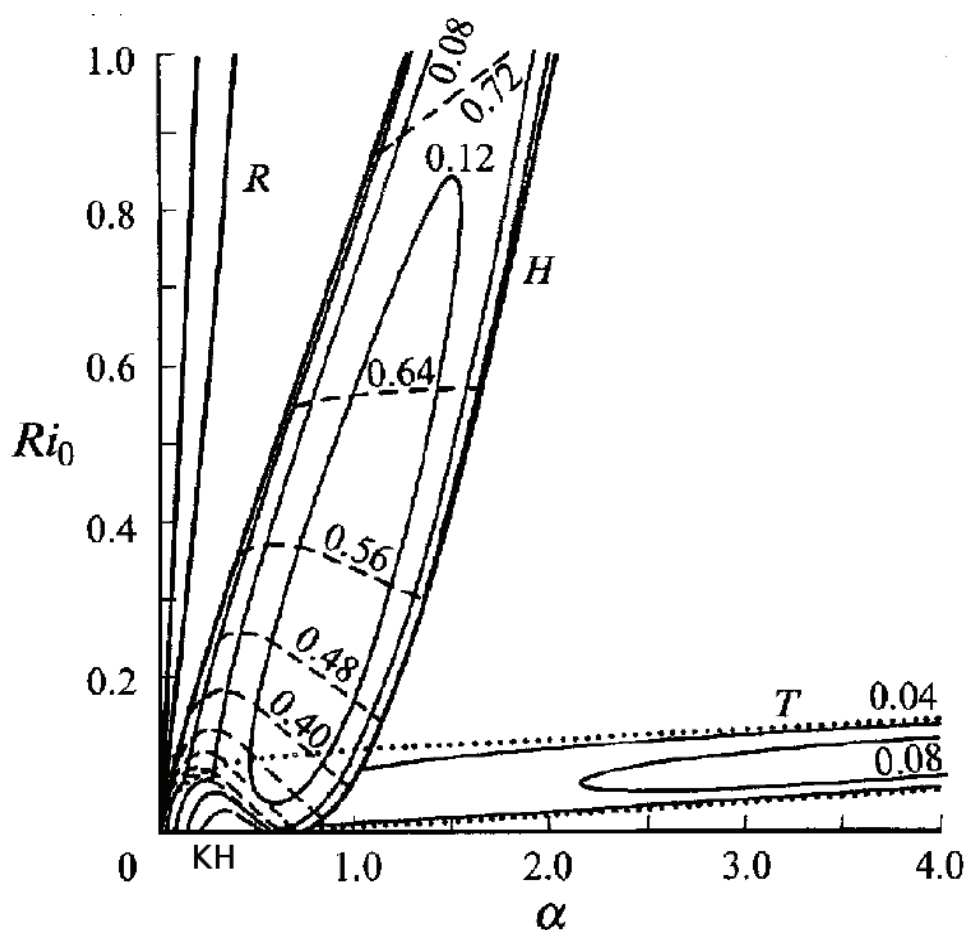


FIGURE 3.9 – Domaine de prédominance de instabilités de cisaillement de type Kelvin-Helmholtz (KH), Holmboe (H) et Taylor-Caulfield (T), dans le plan (Ri, k^*) , pour $R = 0.1$, un cisaillement linéaire et trois couches de densité homogène (voir Caulfield, 1994).

relative des modes T et H n'est pas figée et varie notamment en fonction du rapport d'épaisseur entre la couche intermédiaire de densité et le cisaillement.

Une théorie sur ces instabilités basée sur l'"anomalie" des profils de densité et de vorticité ("Theory of vorticity Defects in Stratified shear flows") est développée actuel-

lement (Balmforth et al., 2012). Ces instabilités peuvent aussi se différencier en fonction de l'énergie pompée ou donnée à l'écoulement de base (voir Baines, 1998, p. 194). En effet, les ondes se développant par paires, de caractéristiques opposées, l'une présente une énergie positive, l'autre une énergie négative (d'après le concept des ondes de d'énergie négative). L'instabilité résultant peut donc se développer sans modifier l'énergie du courant moyen. Les modes de Holmboe et Taylor-Caulfield semblent aussi plus répandus dans le milieu naturel que ce que l'on pensait initialement et ont la particularité d'utiliser une stratification stable comme mécanisme déstabilisateur. L'observation de milieu naturel semblerait en outre montrer que les stratifications linéaires des océans seraient des stratifications multi-couches : ces mécanismes seraient donc prépondérants dans l'évolution de la stratification (voir Balmforth et al., 2012) et donc le mélange, océanique par exemple. Des instabilités de type Holmboe unilatérale ont récemment été observées au niveau du front de l'intrusion de salinité par Tedford et al. (2009) (voir figure 3.2(d)).

3.5 Instabilités secondaires et transition vers une couche de mélange (ML)

L'instabilité de Kelvin-Helmholtz étant un mécanisme important de transition vers la turbulence et de mélange, voici une présentation des différentes phases de transition vers la turbulence.

3.5.1 Développement non-linéaire et saturation d'instabilités de KH à densité variable

Suite à sa phase de croissance linéaire, l'instabilité de KH devient non-linéaire et la couche de vorticité se roule et forme les rouleaux caractéristiques de cette instabilité, observés par exemples dans les expériences de Thorpes (Thorpe, 1971), figure 3.10. Le

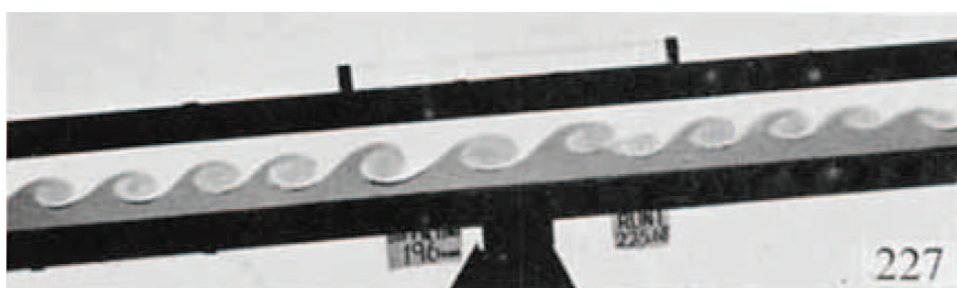


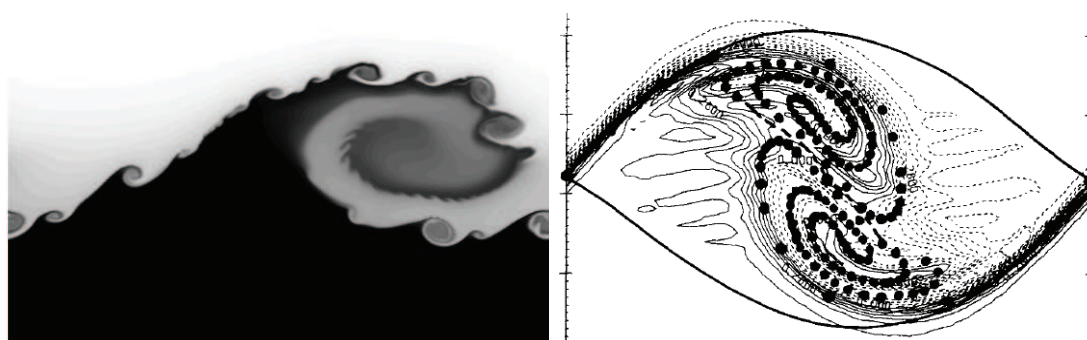
FIGURE 3.10 – Instabilités de KH observées en laboratoire (voir Thorpe, 1971).

mécanisme d'enroulement étant directement lié à l'accumulation de vorticité en certains points (voir explication du mécanisme général). Cette phase est décrite par Corcos and Sherman (1984) dans le cas d'écoulements de faible nombre de Reynolds. La couche de vorticité se roule en spirale, s'accumulant au centre de cette spirale et s'étirant entre les rouleaux appelés "tresses de vorticité" (vorticity braid). Cet enroulement entraîne le

raidissement des gradients de densité. Concernant les lignes de courants, on observe, au niveau des rouleaux, la création de lignes de courant fermées constituant la structure en oeil de chat. Cette structure va grossir à mesure que la nappe va s'enrouler, jusqu'à concentrer à l'intérieur de la structure plus de 95% de la vorticité. Cette caractéristique est retenue par les auteurs pour définir le "climax" correspondant à l'amplitude maximale de l'instabilité et à sa saturation. L'épaisseur de cette structure en oeil de chat est caractéristique de l'épaisseur de la couche de mélange à cette étape. Dans le cas d'un écoulement périodique avec un seul rouleau et pour les faibles nombres de Reynolds, la vorticité va diffuser et se propager de nouveau dans la direction de l'écoulement. Pour les autres configurations, différentes instabilités secondaires vont se développer en fonction des paramètres, en particulier du nombre de Reynolds et de la stratification, ainsi que de la perturbation initiale de l'écoulement.

3.5.2 Développement de modes bi-dimensionnels secondaires

L'instabilité de Kelvin-Helmholtz, initialement 2D, présente majoritairement une première instabilité secondaire bi-dimensionnelle. Les deux instabilités bi-dimensionnelles principales observées sont la déstabilisation de la tresse de vorticité et l'appariement ou la coalescence, et sont présentées figure 3.11. Dans le cas d'écoulement à haut nombre de



(a) Déstabilisation de la tresse de vorticité, obtenue avec *JADIM*. (b) Appariement ou coalescence (Corcos and Sherman, 1984).

FIGURE 3.11 – Instabilités secondaires bi-dimensionnelles.

Reynolds, Fontane and Joly (2008) montrent que l'instabilité se développant le plus rapidement est la déstabilisation de la tresse de vorticité, aussi appelée instabilité barocline, suggérée par Corcos and Sherman (1984). La croissance de l'instabilité primaire entraine l'étirement de la tresse de vorticité, située entre deux rouleaux. Cette tresse peut donc être à son tour le si ge d'instabilités de type KH. Ce mécanisme est expliqué par Renaud et al. (2000) comme un équilibre entre la vorticité déstabilisant la tresse et l'étirement stabilisateur. Le développement de l'instabilité étant fonction du rapport entre ces deux mécanismes, on observe un développement initial aux extrémités de la tresse de vorticité, le centre étant défini par le point à égale distance des coeurs de rouleaux adjacents. Pour

cette instabilité de la tresse de vorticité, la stratification en densité a un rôle déstabilisateur, à travers le développement d'un couple barocline. En effet, lorsque le gradient de densité n'est pas aligné avec la gravité, un torseur barocline est cr , pouvant être à l'origine de la création ou de destruction de vorticité (voir d'autres effets dans [Joly et al. \(2005\)](#)). Cette instabilité peut entraîner la rupture de la tresse de vorticité et de l'interface de densité en différents rouleaux de taille inférieure (voir [Fontane and Joly, 2008](#)). Cette instabilité peut se reproduire sur les tresses secondaires, entraînant une cascade vers les petites échelles et la diffusion de l'énergie. Ces modes peuvent, à travers cette cascade, accélérer et favoriser la transition vers la turbulence.

Un autre mode se développant sur la tresse de vorticité a été observée par [Staquet \(1995\)](#). Il correspond au développement d'un rouleau contre-rotatif au centre de la tresse de vorticité, au point de stagnation.

Lorsque le nombre de Reynolds est moins important, nous observons au contraire une cascade vers les grandes échelles à travers le mécanisme de coalescences des rouleaux. Ce mécanisme est expliqué dans [Corcos and Sherman \(1984\)](#). Cette étude est cependant réalisée en forçant le mode principal et la première sub-harmonique dans un domaine périodique. Dans ce cas, les auteurs observent le rapprochement de deux rouleaux et l'ouverture des deux structures en oeil de chat : la zone de recirculation incluant dorénavant les deux rouleaux. Les vortex vont alors s'enrouler progressivement l'un autour de l'autre, entraînant ainsi l'épaississement de la couche de mélange. Des coalescences de plusieurs rouleaux (3,4,5...) peuvent aussi être observées.

3.5.3 Tri-dimensionnalisation de l'écoulement

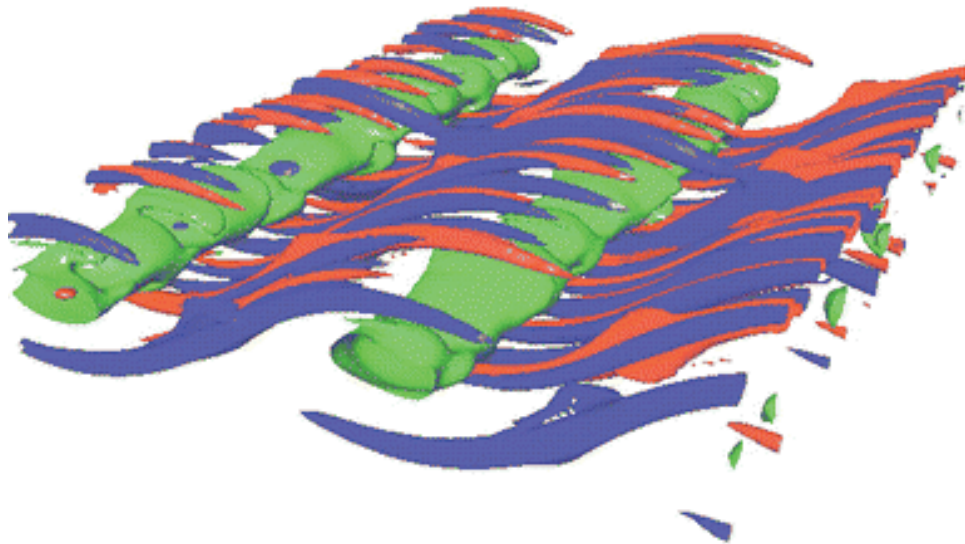


FIGURE 3.12 – Instabilités secondaires tri-dimensionnelles pour un écoulement homogène. Instabilités centrées sur la tresse de vorticité caractérisées par les tourbillons contrarotatifs (rouge et bleu). Instabilité centrée sur le coeur (ondulation du coeur en vert) ([Peltier and Caulfield, 2003](#)).

Deux principaux modes peuvent entraîner la tri-dimensionnalisation de l'instabilité primaire de type KH représentées figure 3.12 (voir par exemple [Corcos and Lin, 1984](#)). Le premier mode consiste en l'ondulation longitudinale du coeur des rouleaux, appelée modes elliptiques ou mode centrés au coeur. Le second mode correspond au développement de rouleaux contra-rotatifs dans le sens de l'écoulement, au sein de la tresse de vorticité, il est appelé mode hyperbolique ou mode centré sur la tresse. [Klaassen and Peltier \(1991\)](#) ont montré que dans le cas d'un écoulement homogène, ces deux instabilités pompaient leur énergie du cisaillement, et avaient une même probabilité d'occurrence. Dans le cas d'écoulements stratifiés, ces mêmes auteurs ont montrés que la tri-dimensionnalisation était dominée par le développement des modes centrés sur la tresse de vorticité. Des mécanismes de type Rayleigh-Taylor apparaissent dans les régions où la stratification est inversée, entrainant les modes centré sur la tresse, tirant leur énergie, dans ce cas, de l'énergie potentielle. Dans le cas d'écoulement à haut nombre de Reynolds et forte stratification, [Fontane and Joly \(2008\)](#) expliquent que le couple barocline casse la symétrie de l'écoulement, tendant à intensifier la vorticité du côté des faibles densités et à l'atténuer de l'autre. Ce couple serait aussi déstabilisant par rapport à l'instabilité centrée sur la tresse. A grand nombre de Reynolds, [Mashayek and Peltier \(2011\)](#) observe l'absence d'appariement des rouleaux initiaux et leur transformation en structures turbulentes par le développement des instabilités secondaires 2D et 3D présentés précédemment. Ces résultats sont en accord avec les observations de [Geyer et al. \(2010\)](#) en zone estuarienne. En effet, il observe au niveau de la lutocline le développement d'une longue chaine de rouleaux de type KH, ne présentant pas de signe de croissance ni d'appariement. Enfin, [Staquet \(2000\)](#) présente les différentes étape de développement d'une couche de mélange 3D. Les instabilités 2D entrainant un fort mélange par enroulement de couches de fluide de densités différentes. Ensuite le développement d'instabilités 3D entraine, par la création de structure de tailles plus petites, une augmentation de la diffusion du champ de densité associé à une forte diminution du taux de mélange. Enfin, l'écoulement se relaxe dans une troisième phase, avec une diminution de l'agitation turbulente, progressivement repoussée en bordure de la couche de mélange.

3.5.4 Mélange dans les écoulements stratifiés cisailés

Si le nombre de Reynolds est suffisamment important ($Re \geq 10^4$), l'écoulement laminaire va entamer une transition vers la turbulence. Cette transition repose principalement sur les modes 3D présentés précédemment, bien que l'instabilité 2D de la tresse puisse être importante pour les écoulements à haut Reynolds. En écoulements stratifiés, comme l'instabilité 3D principale est celle centrée sur la tresse, elle va amener la transition, les rouleaux principaux ayant seulement un rôle de catalyseur pour l'instabilité 3D et pour la transition. De manière générale, cette transition s'op rera par la destruction des rouleaux contrarotatifs de l'instabilité 3D centrée sur la tresse, associée à une forte dissipation visqueuse, détruisant ensuite les rouleaux de l'instabilité initiale. [Peltier and Caulfield \(2003\)](#) proposent une évaluation de l'efficacité de mélange à travers l'étude des flux d'énergie entre énergies cinétique et potentielle. Les auteurs définissent alors l'efficacité du mélange ϵ_m par le rapport entre l'énergie cinétique perdue par l'écoulement contribuant au

mélange et celle dissipée par la viscosité. Ce rapport est proche du nombre de Richardson, qui est un bon indicateur du mélange. Cependant, en considérant seulement le nombre de Richardson, on ne prend pas en compte le fait qu'une partie de l'énergie potentielle est réversible. Une première phase de mélange pré-turbulent est observée juste après la saturation de l'instabilité primaire de KH, et ayant une efficacité de mélange atteignant $\epsilon_m = 0.75$. Se développent ensuite les tourbillons contra-rotatifs de l'instabilité 3D. Leur déstabilisation, entraînant la turbulence, serait due à des interactions classiques entre vortex, appelées instabilité en zigzag de Kelvin. Cette instabilité entraînerait la fragmentation des tourbillons, créant des petites échelles dans l'écoulement. L'échelle dominante d'injection de la cascade turbulente serait donc le diamètre de ces tourbillons contrarotatifs. Enfin, les auteurs montrent, à travers la figure 3.13 que l'efficacité de mélange n'est

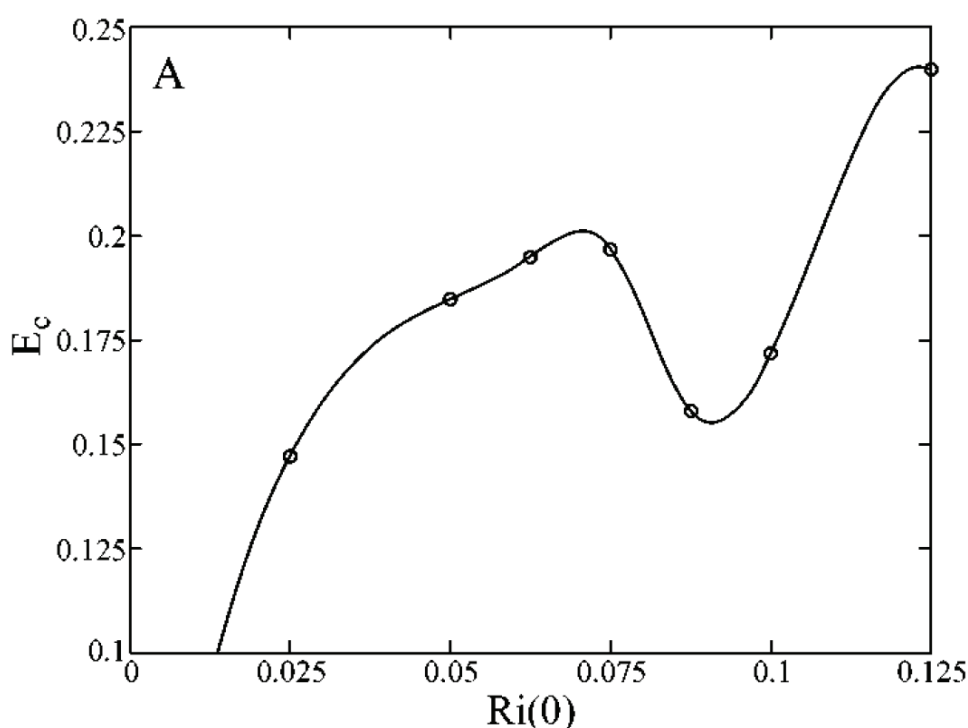


FIGURE 3.13 – Relation entre l'efficacité de mélange et le nombre de Richardson (d'après Peltier and Caulfield, 2003).

pas une fonction monotone du nombre de Richardson. Cette propriété entraîne la formation de multi-couche dans les écoulements stratifiés, par mélange préférentiel de certaines couches plus "stable" (ayant un nombre de Richardson plus élevé).

La couche de mélange résultant de ces instabilités étant composée de différentes couches, séparées par des gradients de densité importants, l'étude du mélange par les instabilités de types Holmboe et Taylor-Caulfield semble très important. Cependant, bien que le mélange résultant semble moins important que celui de l'instabilité KH, ces mécanismes sont encore mal compris à ce jour. Les problèmes d'interaction de ces couches de mélange avec les ondes de gravité interne (Peltier and Caulfield, 2003) et les effets de ségrégation de masse dans ces écoulements (Joly et al., 2005) sont aussi en cours d'étude.

3.6 Instabilités visqueuses

3.6.1 Instabilités visqueuses de fluides homogènes

La viscosité peut présenter, selon les configurations un caractère stabilisant ou déstabilisant sur les écoulements. Le caractère stabilisant est bien connu. Il a été mis en évidence par [Reynolds \(1883\)](#) lors de sa célèbre expérience d'écoulement de Poiseuille. Il remarque que, passé un certain nombre adimensionnel, aujourd'hui appelé nombre de Reynolds : $Re = ud/\nu$, critique, l'écoulement n'est plus laminaire. Des instabilités apparaissent alors au centre de l'écoulement, il devient turbulent. Dans ce cas, un écoulement parallèle laminaire homogène peut être déstabilisé si la diffusion visqueuse stabilisante est inférieure à l'advection déstabilisante dans ce cas. Cependant, la viscosité est aussi déstabilisante pour cet exemple. En effet, si l'écoulement était inviscide, le critère du point d'inflexion de Rayleigh prévoirait qu'un écoulement de Poiseuille serait stable, quelque soit le nombre de Reynolds considéré. La viscosité a donc un rôle fondamental dans le développement de cette instabilité. Cette instabilité, initialement étudiée par Prandtl, porte le nom de instabilité de Tollmien-Schlichting.

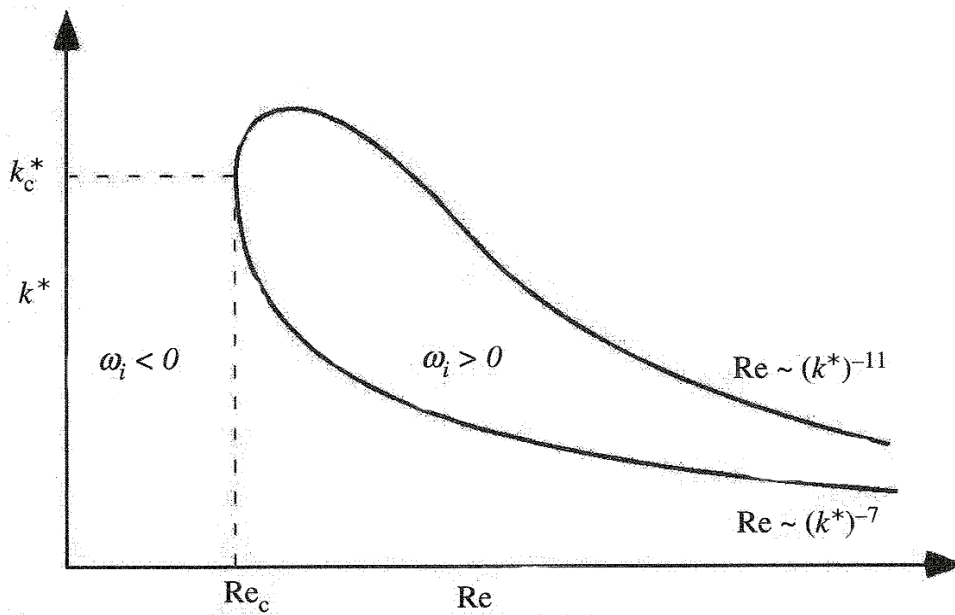


FIGURE 3.14 – Courbe marginale de stabilité d'un écoulement de Poiseuille homogène dans le plan (tiré de [Charru, 2011](#)).

Pour mieux comprendre ce mécanisme, nous allons utiliser l'équation de Reynolds-Orr sous la forme (3.39), correspondant à la conservation de l'énergie cinétique, dérivée de la conservation de la quantité de mouvement, moyennée dans les directions symétriques, et intégrée entre les deux frontières d'un écoulement de Poiseuille plan :

$$\frac{d \langle E_k \rangle_{xy}}{dt} = \int_z \tau_{xz} \frac{dU}{dz} dz - \frac{1}{Re} \int_z \tau_{xy} \langle (\nabla \wedge \tilde{u}) \cdot (\nabla \wedge \tilde{u}) \rangle_{xy} dz, \quad (3.39)$$

avec $\tau_{xz} = - \langle \tilde{u}\tilde{w} \rangle_{xy}$ et $\tau_{xy} = - \langle \tilde{u}\tilde{v} \rangle_{xy}$.

Cette équation traduit l'évolution temporaire de l'énergie cinétique de la perturbation (terme de gauche). On peut remarquer que le terme tout à droite correspond à la diffusion visqueuse : il est toujours positif et donc stabilisant. La déstabilisation de l'écoulement peut donc uniquement découler du second terme. On remarque que :

- si le fluide est non visqueux (hypothèse du fluide parfait), les deux termes \tilde{u} et \tilde{w} sont orthogonaux donc τ_{xz} s'annule.
- si le fluide est visqueux, la viscosité impose au niveau proche du mur présentant une condition de non-glissement, un déphasage entre \tilde{u} et \tilde{w} . τ_{xz} est alors non-nul. S'il est de même signe que $\frac{dU}{dz}$, ce qui est le cas pour cette exemple, le second terme de l'équation sera déstabilisant.

L'instabilité de Tollmien-Schlichting est donc due à l'effet déstabilisant de la viscosité dans un fluide homogène.

3.6.2 Instabilités visqueuses d'écoulements multi-couches

Les instabilités se développant dans les écoulements multi-couches de différentes viscosités ont été explorées principalement par [Yih \(1967\)](#). Il explora toute la gamme d'écoulements compris entre les écoulements de Poiseuille et de Couette pour un bi-couche visqueux, pour de grandes longueurs d'ondes, en s'appuyant sur une approche asymptotique. En plus de l'instabilité de Tollmien-Schlichting déjà connue pour les écoulements homogènes (voir partie précédente), il observa un nouveau mode appelé mode de Yih (ou appelé d'après les termes de Yih, le mode "soft" ou encore "interfacial mode"), dû à la stratification en viscosité. Faisant varier les épaisseurs des deux couches de fluides, il montra que si la couche de fluide la plus visqueuse est aussi la plus fine, l'écoulement est instable quelque soit le nombre de Reynolds, aux grandes longueurs d'ondes qu'il étudie. Le mécanisme de cette instabilité est expliqué par [Hooper and Boyd \(1983\)](#) et [Hinch \(1984\)](#). Dans le cas d'un bi-couche sans tension de surface entre les deux fluides, la vitesse est continue à l'interface. Nous considérerons maintenant une perturbation sinusoïdale de cette interface, comme présenté figure 3.15, avec un fluide plus visqueux au dessus de l'interface. Au niveaux des sommets (point A) et des creux (point B), la continuité de la vitesse impose un ralentissement du fluide supérieur et une accélération du fluide inférieur en A, et inversement en B. On observe donc la création de vorticité positive en A de chaque côté de l'interface, et de vorticité négative en B. Dans le cas où la différence de viscosité entre les deux fluides est importante, l'ajustement des vitesses au niveau de l'interface sera principalement effectué par le fluide le moins visqueux (ici celui de la couche inférieure), la vorticité créée dans cette couche sera donc plus importante. La vorticité produite est alors advectée par l'écoulement moyen : la vorticité de la couche supérieure entraînant une stabilisation de l'interface alors que celle de la couche inférieure a un rôle déstabilisant. La vorticité de la couche inférieure, moins visqueuse, étant plus importante, la résultante des vorticités des deux couches est déstabilisant et entraîne l'amplification de la perturbation. L'inertie joue ainsi un rôle dans ces instabilités. Si celle-ci était totalement négligeable, nous serions dans le cas d'un écoulement de Stokes et l'interface serait fixe (dans l'approximation linéaire) : chaque mouvement de l'interface

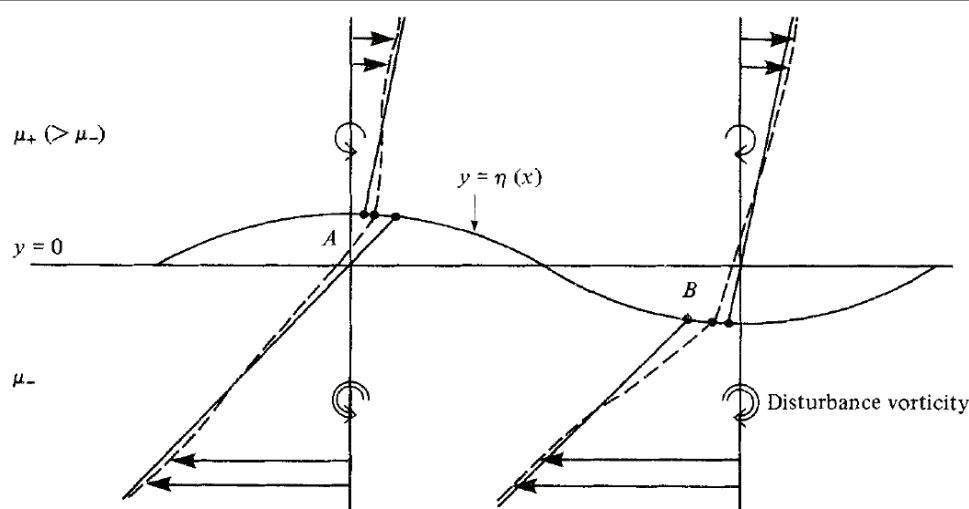


FIGURE 3.15 – Mécanisme de l'instabilité interfaciale (tiré de [Hinch, 1984](#)). Les courbes continues correspondent au cisaillement non-perturbé (écoulement initial), les courbes en pointillés correspondent au cisaillement perturbé (initial + perturbation).

est inversé lorsque que le cisaillement est inversé. Comme observé par [Hooper and Boyd \(1983\)](#), cette instabilité se développe lorsque l'inertie est dominée par la viscosité mais reste cependant non-négligeable. L'effet déstabilisant de la diffusion pour des bi-couches a

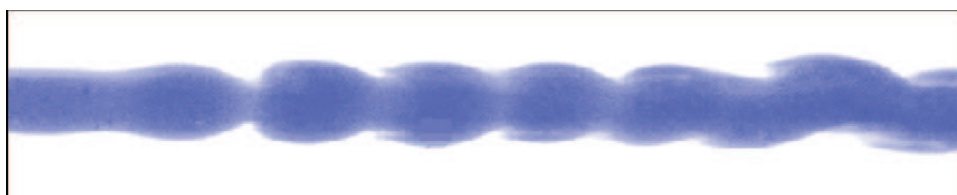


FIGURE 3.16 – Instabilité de Yih pour de l'eau (bleu) injectée dans tube de fluide plus visqueux (d'après la thèse de [d'Olce et al., 2008](#)).

été démontré par [Ern et al. \(2003\)](#) pour un écoulement bi-couche avec une interface continue mais variant rapidement et par [Sahu et al. \(2009\)](#) pour des configurations coaxiales. Dans le cas de configuration coaxiales, [d'Olce et al. \(2008\)](#) a montré l'alternance de la morphologie dite "en champignon" pour les injections de diamètre important aux nombre de Reynolds important (voir figure 3.16), avec la morphologie dite "en perle" pour des paramètres opposés. Enfin dans le cas d'un écoulement coaxial de fluides miscibles de viscosités différentes, [Govindarajan \(2004\)](#) observe, grâce à une étude de stabilité linéaire, en complément du mode de Tollmien-Schlichting et d'un mode de KH à haut nombres de Reynolds, le développement d'un mode se développant dans l'interface de viscosité, nommé "overlaps mode", pendant du mode de Yih pour des fluides miscibles.

Conclusion

Notre analyse bibliographique montre que les études concernant les instabilités se développant dans des fluides à la fois stratifiés en densité et en viscosité sont peu nombreuses. Des études ont été tout d'abord réalisées sur les ondes de surfaces créées par le vent. [Miles \(1962\)](#) présente une interprétation de ces ondes de courtes longueur d'onde comme la résonance entre des ondes de surfaces type KH et des ondes de Tollmien-Schlichting dans l'air. D'autres études ont aussi été réalisées autour de l'application aux fluides de dégel utilisés sur les avions. Cet écoulement est aussi un écoulement bi-couche avec du fluide et de l'air. [Ozgen et al. \(1998\)](#) observe l'influence de nombreux paramètres, dont la stratification en densité sur les instabilités visqueuses, notamment de Yih. Pour les stratifications modérées, avec une densité plus importante pour la couche la plus visqueuse, les auteurs observent un effet déstabilisant de la stratification, qui devient stabilisant si la stratification devient importante. Enfin, [Villermaux \(1998\)](#) a étudié l'influence de la viscosité sur le taux de croissance des instabilités à faibles nombres de Reynolds. Il montre que le taux de croissance est modifié par un facteur dépendant du nombre de Reynolds et de la forme du profil à l'interface.

Dans les chapitres suivants, nous contribuons au progrès de la compréhension des instabilités de type KH dans le cas de fluides stratifiés en densité et en viscosité.

Chapitre 4

Présentation du solveur de Navier-Stokes *JADIM*

Sommaire

4.1	Description générale de la version bi-phasique du code <i>JADIM</i>	50
4.2	Mise en équation dans la configuration de l'étude	50
4.2.1	Equation de la conservation de la masse et du transport du taux de présence	50
4.2.2	Conservation de la quantité de mouvement	52
4.2.3	Système d'équations utilisé dans notre étude	52
4.3	Tenseur des contraintes visqueuses	52
4.3.1	Tenseur des contraintes visqueuses pour les fluides viscoplastiques	53
4.3.2	Tenseur des contraintes visqueuse pour un mélange de fluide . .	54
4.4	Discrétisation des équations et résolution numérique	55
4.4.1	Discrétisation des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement	55
4.4.2	Avance en temps	56
4.4.3	Résolution de l'équation de transport de la fraction volumique ϕ	59

Introduction

Cette partie technique présente le code de simulations numériques directes *JADIM* utilisé pour cette étude. Après avoir présenté de manière générale les schémas numériques utilisés par le code, nous nous concentrerons sur le tenseur des contraintes visqueuses et sur la version viscoplastique implémentée dans le code. Enfin une dernière partie se focalisera sur le choix du schéma utilisé pour le transport "de la vase", utilisée dans ce code en complément des équations classiques de Navier-Stokes.

4.1 Description générale de la version bi-phasique du code *JADIM*

Les deux fluides dont nous étudions l'interface, l'eau et la crème de vase étant miscibles, leur interface est considérée d'épaisseur finie. Notre écoulement peut alors être comparé à une couche de mélange. D'un point de vue numérique, *JADIM* résout cet écoulement en considérant un fluide unique, dont les propriétés physiques varient spatialement et temporairement. Nous allons donc résoudre les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible couplées avec une équation de transport scalaire des propriétés du fluide (ρ et μ), qui vont donc varier de la même façon.

Nous allons nous placer dans le cas de deux fluides miscibles, de densité et de viscosité différentes. Nous pouvons donc définir une fraction volumique ϕ , telle que dans un volume infinitésimal de calcul dV , une fraction de ce volume ϕdV est occupée par le fluide 2, et la fraction complémentaire $(1 - \phi) dV$ est occupée par le fluide 1. Ainsi, la masse totale de fluide dans le volume dV correspond à $\rho_1(1 - \phi) dV + \rho_2 \phi dV$. En définissant la densité de mélange ρ , par la masse volumique associée au volume dV , on obtient une relation linéaire entre la masse volumique ρ et le taux de présence ϕ :

$$\rho = \rho_1(1 - \phi) + \rho_2 \phi. \quad (4.1)$$

La fraction volumique peut donc être interprétée comme un taux de présence, de valeur $\phi = 0$ dans le fluide 1, de valeur $\phi = 1$ dans le fluide 2 ; et continue au niveau de l'interface. Dans notre cas, les deux fluides concernés étant à base d'eau et présentant des propriétés différentes en fonction d'une concentration en particules, ce taux de présence peut aussi être relié à une concentration. Bien que la viscosité dynamique ne soit pas une grandeur extensive, une définition similaire de la viscosité locale sera utilisée ; elle sera justifiée §4.3.2 et testée §8.3.4. De précédents travaux de thèse ont été réalisés avec ce code et permettent un complément d'information sur ses différents modules. Le lecteur peut se reporter à la thèse de Yannick Hallez (Hallez, 2007) pour les écoulements bi-phasiques à densité variables miscibles, à la thèse de Adlène Benkenida (Benkenida, 1999) concernant les écoulements à viscosité variable, ainsi qu'à la thèse de Thomas Bonometti (Bonometti, 2005) pour les écoulements présentant à la fois une densité et une viscosité variable.

4.2 Mise en équation dans la configuration de l'étude

4.2.1 Equation de la conservation de la masse et du transport du taux de présence

L'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0, \quad (4.2)$$

où \underline{u} est la vitesse barycentrique du mélange. En décomposant, dans l'équation (4.2), la masse volumique grâce à l'équation (4.1), on obtient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \underline{u}) = -\frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \nabla \cdot \underline{u}. \quad (4.3)$$

Bien que les fluides 1 et 2 soit considérés indépendamment incompressibles, nous allons voir que la divergence de la vitesse du mélange n'est pas nulle. Au niveau moléculaire, si nous considérons que le mélange est gouverné par une loi de Fick, nous pouvons écrire le transport de la fraction massique X de fluide 2 sous la forme :

$$\frac{\partial \rho X}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho X \underline{u}) = \nabla \cdot (\rho \mathcal{D} \nabla X), \quad (4.4)$$

où \mathcal{D} est le coefficient de diffusion moléculaire entre les espèces 1 et 2. Nous pouvons ensuite relier la fraction massique X à la fraction volumique ϕ . La masse dm_2 de fluide 2 dans un volume de référence dV s'écrit $dm_2 = \rho_2 \phi dV$. Nous obtenons alors la relation suivante entre la fraction volumique ϕ et la fraction massique X :

$$\rho X = \rho_2 \phi. \quad (4.5)$$

En multipliant (4.3) par ρ_2 , afin de pouvoir la comparer à (4.4) en se basant sur la relation (4.5), on obtient l'équation suivante :

$$\nabla \cdot (\rho \mathcal{D} \nabla X) = -\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \nabla \cdot \underline{u}. \quad (4.6)$$

A partir des équations (4.5) et (4.1), on montre que $\rho \nabla X = \rho_2 \nabla \phi = \frac{\nabla \rho}{\rho} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 \rho_1}$. On peut donc écrire l'équation (4.6) sous la forme :

$$\nabla \cdot \underline{u} = -\nabla \cdot \left(\mathcal{D} \frac{\nabla \rho}{\rho} \right). \quad (4.7)$$

Nous pouvons alors remarquer que l'équation de conservation de la masse ne prend pas la forme classique d'un écoulement incompressible. Si la diffusion n'est pas nulle, la divergence de la vitesse barycentrique du mélange n'est pas nulle, un terme de correction doit être apporté. Nous pouvons ensuite écrire l'équation de transport des propriétés du fluide (4.3) sous la forme :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \underline{u}) = \nabla \cdot \left(\mathcal{D} \frac{\rho_1}{\rho} \nabla \phi \right). \quad (4.8)$$

Cette modification ne s'applique qu'aux écoulements miscibles où le terme de diffusion a un sens. Cette partie s'inspire de Hallez (2007) qui apporta les modifications nécessaire à l'utilisation du code pour l'écoulement de deux fluide miscibles. Pour cela, il implémenta dans le code les seconds membres des équations de conservation de la masse (4.7) et de transport des propriétés du fluide (4.8).

4.2.2 Conservation de la quantité de mouvement

Nous résolvons aussi une équation de conservation de la quantité de mouvement du mélange, de densité ρ et de masse volumique μ variant en fonction du taux de présence ϕ . L'équation suivie par le mélange est classique, présentée sous la forme non-conservative :

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}, \quad (4.9)$$

où $\underline{\underline{\tau}}$ est le tenseur des contraintes visqueuses.

4.2.3 Système d'équations utilisé dans notre étude

Nous allons donc résoudre le système :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \left(\mathcal{D} \frac{\nabla \rho}{\rho} \right), \quad (4.10)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) = \nabla \cdot \left(\mathcal{D} \frac{\rho_1}{\rho} \nabla \phi \right). \quad (4.12)$$

Dans notre étude, nous allons explorer des configurations de remise en suspension de la crème de vase pour lesquelles les propriétés du fluide varient en fonction de la concentration en particules. La diffusion moléculaire \mathcal{D} entre les fluides 1 et 2 est donc directement liée à la diffusion de ces particules. Nous avons choisi pour notre étude un nombre de Schmidt infini :

$$Sc \rightarrow \infty,$$

ce qui revient à négliger la diffusion moléculaire \mathcal{D} par rapport à la diffusion de la quantité de mouvement due à la viscosité μ/ρ . Cette hypothèse se justifie dans notre configuration car la diffusion des particules de vase est moins importante (les particules étant de taille plus importante) que la diffusion de sel dans l'eau. Le nombre de Schmidt (ou de Prandtl) est donc plus important que celui d'un écoulement stratifié en salinité, de l'ordre de $Sc \sim 700$ (voir par exemple [Caulfield and Peltier, 2000](#)).

Dans notre configuration, nous pouvons donc considérer que la diffusion moléculaire est nulle, ce qui simplifie fortement les équations (5.21) et (5.23). Cependant numériquement, dans un volume de fluide élémentaire, le fluide est mélangé uniformément. Le nombre de Schmidt est donc de valeur finie dans nos simulations. Son évaluation, dépendante à la fois de la taille des mailles et du type d'écoulement, reste cependant très délicate.

4.3 Tenseur des contraintes visqueuses pour les fluides newtoniens et viscoplastiques

Durant cette étude, une rhéologie viscoplastique a été implémentée dans le code, nécessitant une bonne compréhension du calcul du tenseur des contraintes pour le généraliser

aux cas non newtoniens.

4.3.1 Tenseur des contraintes visqueuses pour les fluides viscoplastiques

L'expression du tenseur des contraintes visqueuse diffère selon la rhéologie du fluide. Dans le cas classique d'un fluide newtonien homogène, en faisant l'hypothèse de Stokes, le tenseur des contraintes visqueuses s'exprime par :

$$\underline{\underline{\tau}} = \mu \left(\nabla \underline{u} + {}^t \nabla \underline{u} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \underline{u}) \underline{\underline{I}} \right), \quad (4.13)$$

où $\underline{\underline{I}}$ est la matrice identité, ${}^t \underline{\underline{A}}$ est la matrice transposée de la matrice $\underline{\underline{A}}$. Si l'écoulement est, de plus, à divergence nulle, le tenseur des contraintes est réduit à :

$$\underline{\underline{\tau}} = \mu (\nabla \underline{u} + {}^t \nabla \underline{u}) = 2\mu \underline{\underline{D}}, \quad (4.14)$$

où $\underline{\underline{D}}$ est le tenseur des taux de déformations.

Dans le cas des fluides newtoniens incompressibles, on remarque que le tenseur des contraintes visqueuses est une fonction linéaire du tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{D}}$. Durant notre étude, nous avons aussi étudié le comportement de fluides viscoplastiques. Pour ces fluides, présentés partie (2.3.2.1), le tenseur des contraintes visqueuses est aussi une fonction du tenseur des taux de déformation mais cette fonction n'est pas linéaire. Pour des fluides viscoplastiques qui suivent le modèle idéal de Bingham (Bingham, 1922), la relation entre le tenseur des contraintes visqueuses et des taux de déformations est une fonction affine :

$$\underline{\underline{\tau}} = \tau_c + 2\mu \underline{\underline{D}}, \quad (4.15)$$

où τ_c est la contrainte seuil d'écoulement, caractéristique du comportement viscoplastique. Des modèles légèrement plus complexes sont aussi observés dans la nature, pour lesquelles le comportement du fluide n'est pas newtonien une fois le seuil dépassé. Nous pouvons citer par exemple le modèle d'Herschel-Bulkley (Herschel and Bulkley, 1926) où le comportement viscoplastique est combiné avec un comportement rhéo-épaississant ou rhéo-fluidifiant ; les contraintes sont alors reliées au tenseur des taux de déformation par une fonction puissance d'exposant quelconque (voir partie (2.3.2.1)). Bien que ce modèle ne présente pas de complication du point de vue numérique, nous avons choisi de nous concentrer, dans cette étude, sur le modèle de Bingham afin d'étudier l'effet uniquement du seuil de contrainte. Par analogie avec les fluides newtoniens, on peut écrire le modèle de Bingham sous la forme :

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu \left(1 + \frac{B}{\dot{\gamma}} \right) \underline{\underline{D}} = 2\mu_{ef} \underline{\underline{D}}, \quad (4.16)$$

où B est le nombre de Bingham, μ_{ef} la viscosité dynamique effective du fluide et $\dot{\gamma}^2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{D}}) = \frac{1}{2} D_{ij} D_{ij}$. Tant que $|\underline{\underline{\tau}}| = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\tau}}} > \tau_c$, la viscosité effective est bien définie,

et ce modèle ne pose pas de problèmes particuliers de résolution numérique. Cependant, lorsque $\underline{\underline{\tau}} \rightarrow \tau_c$, $\mu_{ef} \rightarrow +\infty$ et les équations de la dynamique de fluides ne sont plus pertinentes. D'un point de vue numérique, le problème se pose lorsque la viscosité devient très importante et entraîne une forte contrainte sur le pas de temps (lors de l'utilisation d'un schéma explicite sur le terme visqueux). Des méthodes de régularisation ont donc été développées afin de contourner ce problème (voir [Frigaard and Nouar, 2005](#), pour une comparaison de ces méthodes). Physiquement, ces méthodes consistent à faire tendre la viscosité effective vers de grandes valeurs mais en conservant des valeurs finies lorsque le tenseur des taux de déformation tend vers 0. Un des modèles les plus utilisés et donnant de bons résultats est le modèle proposé par [Bercovier and Engelman \(1980\)](#) est représenté figure (2.7) :

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu \left(1 + \frac{B}{\sqrt{\epsilon^2 + \dot{\gamma}^2}} \right) \underline{\underline{D}}, \quad (4.17)$$

où ϵ est le paramètre de régularisation, tel que $0 < \epsilon \ll 1$. Nous avons donc implémenté ce modèle de fluide viscoplastique dans le code en remplaçant la viscosité (constante dans les modèles newtoniens) par la viscosité effective :

$$\mu_{ef} = \mu \left(1 + \frac{B}{\sqrt{\epsilon^2 + \dot{\gamma}^2}} \right). \quad (4.18)$$

4.3.2 Tenseur des contraintes visqueuse pour un mélange de fluide

Comme présenté précédemment, la viscosité effective du mélange de deux fluides est calculée dans cette étude par l'expression linéaire :

$$\mu = \phi \mu_1 + (1 - \phi) \mu_2, \quad (4.19)$$

de manière similaire au calcul de la masse volumique effective du mélange. Cependant, cette pondération linéaire n'est pas rigoureuse dans le cas de deux fluides quelconques car la viscosité n'est pas une grandeur extensive. [Benkenida \(1999\)](#) a montré que dans le cas d'un écoulement di-phasique, la viscosité effective était fonction de deux viscosités : la viscosité linéaire

$$\mu_l = \phi \mu_1 + (1 - \phi) \mu_2,$$

utilisée dans cette étude et une viscosité définie par moyenne harmonique μ_h telle que

$$\frac{1}{\mu_h} = \frac{\phi}{\mu_1} + \frac{1 - \phi}{\mu_2}.$$

L'auteur, après avoir ré-exprimé le tenseur des contraintes visqueuses en configuration bi-phasique, montre que les termes diagonaux du tenseur des contraintes doivent être associés à la moyenne linéaire alors que les termes non-diagonaux sont associés à la moyenne harmonique lorsque l'interface suit un axe. Le tenseur de contraintes s'exprime dans le cas général par :

$$\tau_{ij} = 2\mu_l D_{ij} + 2(\mu_h - \mu_l) (D_{ij} n_k n_j + D_{jk} n_k n_i - 2D_{km} n_k n_m n_i n_j), \quad (4.20)$$

où \underline{n} est la normale à l'interface entre les deux phases.

Cependant dans notre cas où l'interface est épaisse et où la viscosité est considérée dépendante de la concentration, [Ern et al. \(2003\)](#) justifie l'utilisation du modèle linéaire et fait remarquer que la loi d'Einstein pour les suspensions diluées entraîne une relation linéaire. Des comparaisons entre les résultats obtenus pour ces deux modèles de viscosité μ_l et μ_h ont cependant été réalisées dans le cas d'écoulements di-phasiques à interface fine, pour des configurations plus proches de l'érosion que de l'entraînement, partie (8.3.4).

4.4 Discrétisation des équations et résolution numérique

Les équations présentées précédemment sont résolues grâce au code *JADIM* développé depuis une vingtaine d'années à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT). Ce code est constitué d'un noyau central résolvant les équations tridimensionnelles, instationnaires et incompressibles de la mécanique des fluides (Navier-Stokes), écrites en coordonnées curvilignes. Il a permis par exemple de résoudre les écoulements autour de bulles de gaz ([Legendre and Magnaudet, 1998](#)) ou les interactions hydrodynamiques entre bulles ([Legendre et al., 2003](#)). Différents modules ont ensuite été ajoutés afin de diversifier les utilisations du code, dont notamment un module permettant l'étude d'écoulements turbulents par Simulations des Grandes Echelles (LES : Large Eddy Simulation) développé par [Calmet and Magnaudet \(1997\)](#), le suivi lagrangien de particules et leur interaction avec l'écoulement ([Climent and Magnaudet, 1999](#)) ou plus récemment, l'introduction de frontières immergées mobiles (méthode IBM : Immersed Boundary Method), le comportement tri-phasique ou encore l'introduction d'une rhéologie viscoélastique (encore en cours de validation).

4.4.1 Discrétisation des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement

Les équations (5.21) et (5.22) sont écrites pour les variables primitives : la pression p , la vitesse \underline{u} et la fraction volumique ϕ . Elles sont discrétisées sur un maillage décalé (staggered grid) par une méthode de type volumes finis du second ordre ([Magnaudet et al., 1995](#)). Cette méthode permet de faciliter et d'augmenter la précision du calcul des flux sur les différentes facettes des volumes d'intégration ; faisant ainsi coïncider la localisation des points de pression avec celui de la somme des flux à travers un volume et permettant un meilleur couplage entre vitesse et pression. Comme présenté figure (4.1), le maillage principal est associé aux noeuds de pression. On y calcule aussi la fraction volumique (donc la viscosité et la masse volumique) ainsi que tout autre scalaire nécessaire. Chaque composante de la vitesse u , v , w possède ensuite un volume d'intégration distinct, respectivement \mathcal{V}_u , \mathcal{V}_v et \mathcal{V}_w . Les centres de volumes de vitesse sont positionnés à mi-distance des centres des volumes de pression. Les équations (5.21) et (5.22) sont donc intégrées dans chaque volume élémentaire \mathcal{V} , borné par une surface fermée \mathcal{S} , pour

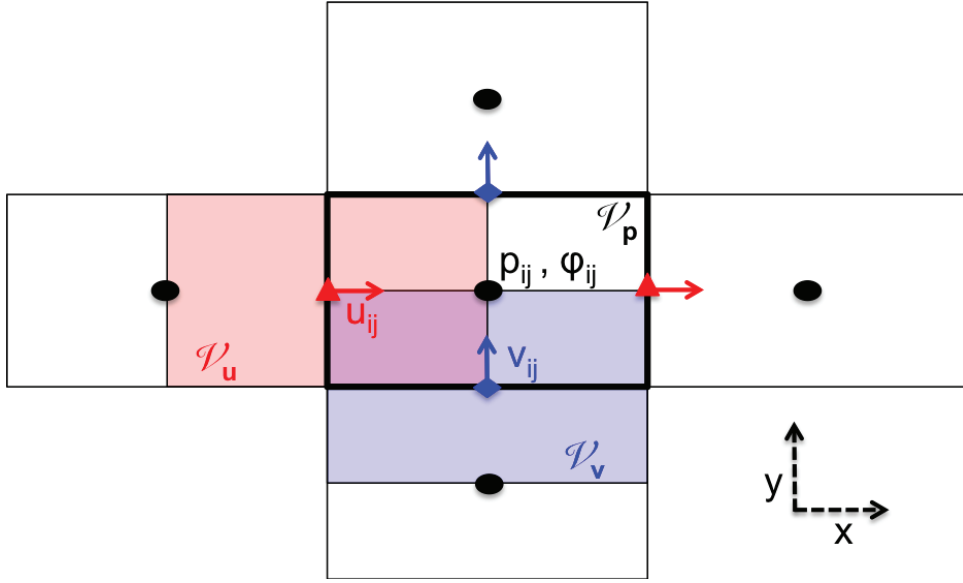


FIGURE 4.1 – Maillage décalé. Représentation des noeuds de pression, de fraction volumique et de vitesse ainsi que leurs volumes associés en deux dimensions.

un maillage cartésien (voir [Hallez, 2007](#), pour la prise en compte des termes curvilignes) :

$$\int_{\mathcal{S}} u_i n_i d\mathcal{S} = - \int_{\mathcal{S}} \frac{D}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} \right) n_i d\mathcal{S}, \quad (4.21)$$

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_i}{\partial t} d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi_i} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} g_i d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{S}} u_i u_j n_j d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}} \frac{1}{\rho} \tau_{ij} n_j d\mathcal{S}, \quad (4.22)$$

où la somme sur l'indice répété j est implicite, ξ_i représentant la $i^{\text{ème}}$ coordonnée cartésienne, et n_i la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur unitaire normal à la surface \mathcal{S} et dirigé vers l'extérieur du volume.

Le tenseur des contraintes τ_{ij} est alors défini par :

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} = \left(\mu_1 \left[1 + \frac{B_1}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \dot{\gamma}^2}} \right] \phi + \mu_2 \left[1 + \frac{B_2}{\sqrt{\epsilon_2^2 + \dot{\gamma}^2}} \right] (1 - \phi) \right) D_{ij}, \quad (4.23)$$

avec $D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \right)$ le tenseur des taux de déformations; B_k , ϵ_k et μ_k étant les caractéristiques rhéologiques du $k^{\text{ème}}$ fluide. Si ce fluide est newtonien, $B_k = 0$.

4.4.2 Avance en temps

Une description complète de l'avancement en temps est proposée dans [Calmet and Magnaudet \(1997\)](#) et [Hallez \(2007\)](#). L'avancement en temps se décompose en trois principales étapes, comme présenté sur la figure (4.2). Tout d'abord, le champ de fraction vo-

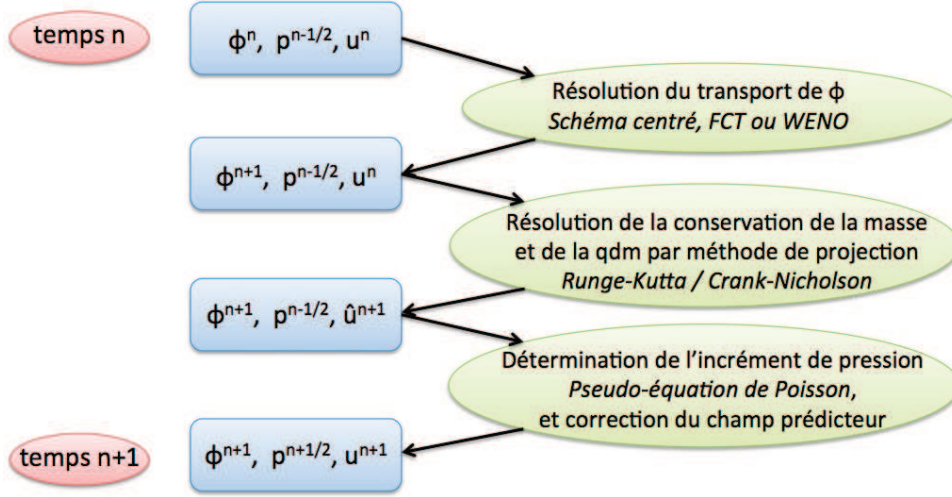


FIGURE 4.2 – Schéma résumant l'algorithme de résolution.

lumique ϕ est transporté par l'écoulement, cette phase sera traitée dans la partie (4.4.3). Un champ prédicteur \hat{u} est ensuite calculé par méthode de projection durant la seconde étape. Durant cette phase, les termes advectifs, les termes sources et une partie des termes visqueux sont traités par un schéma de type Runge-Kutta explicite du troisième ordre. Le terme $\int_S \frac{1}{\rho} \mu \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} n_j dS$ appartenant aux contraintes visqueuses peut être traité par un schéma semi-implicite de type Crank-Nicolson. L'équation de quantité de mouvement peut alors s'écrire :

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_i}{\partial t} d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi_i} d\mathcal{V} + \mathcal{L}[u_i] + \mathcal{N}[u_i], \quad (4.24)$$

avec

$$\mathcal{L}[u_i] = \int_S \frac{1}{\rho} \mu \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} n_j dS, \quad (4.25)$$

$$\mathcal{N}[u_i] = \int_{\mathcal{V}} g_i d\mathcal{V} - \int_S u_i u_j n_j dS + \int_S \frac{1}{\rho} \mu \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} n_j dS \quad (4.26)$$

$$- u_i \int_S u_j n_j dS - \frac{1}{\rho} \mu \frac{\partial}{\partial \xi_j} \int_S u_j n_j dS, \quad (4.27)$$

où \mathcal{N} correspond à la partie pouvant être résolue par méthode semi-implicite et \mathcal{L} correspondant à la méthode résolue explicitement. L'algorithme de Runge-Kutta / Crank-Nicolson est basé sur la réalisation de sous-itérations k pour chaque pas de temps. Pour chaque sous-itération, la méthode s'exprime par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n,k} - u_i^{n,k-1}}{\Delta t_k} \mathcal{V} = & - (\alpha_k + \beta_k) \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n-1/2}}{\partial \xi_i} \mathcal{V} + \alpha_k \mathcal{L}[u_i^{n,k-1}] + \beta_k \mathcal{L}[u_i^{n,k}] \\ & + \gamma_k \mathcal{N}[u_i^{n,k-1}] + \zeta_k \mathcal{N}[u_i^{n,k-2}], \end{aligned} \quad (4.28)$$

où $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \zeta_k$ et Δt_k sont des coefficients définis de manière à obtenir une précision globale d'ordre 2. Ces coefficients sont présentés table (4.1) pour les trois sous-itérations

k	1	2	3
Δt_k	$\frac{8}{15}\Delta t$	$\frac{8}{15}\Delta t$	$\frac{8}{15}\Delta t$
$\alpha_k = \beta_k$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{6}$
γ_k	$\frac{8}{15}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{4}$
ζ_k	0	$-\frac{17}{60}$	$-\frac{5}{12}\Delta t$

TABLE 4.1 – Coefficients utilisés dans l’algorithme Runge-Kutta / Crank-Nicholson.

utilisées dans ce code (Mohan Rai and Moin, 1991). Dans le code *JADIM*, la pression calculée au temps $n-1/2$ est une meilleur approximation de la pression au temps n qu’une pression directement calculée au temps n , d’où les champs ϕ^n , $p^{n-1/2}$ et u^n correspondant au pas de temps n .

On passe alors à la troisième phase de l’avancement en temps. Cette phase consiste à calculer l’incrément en pression \mathcal{P} à partir du champ prédicteur obtenu à la troisième sous-itération $u^{n,3} = \hat{u}^n$. En effet, dans la partie précédente, nous avons calculé la vitesse à partir de la pression au pas de temps précédent ($p^{n-1/2}$). La différence entre le champ prédicteur et le champ réel de vitesse est donc, en différenciant l’équation de quantité de mouvement calculée et l’équation théorique devient :

$$\frac{u_i^{n+1} - \hat{u}_i^{n+1}}{\Delta t} = \frac{1}{\rho^{n+1/2}} \frac{\partial(p^{n+1/2} - p^{n-1/2})}{\partial \xi_i} = \frac{1}{\rho^{n+1/2}} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \xi_i}. \quad (4.29)$$

En prenant la divergence de cette équation, on obtient alors, grâce à l’équation de continuité :

$$\frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \left(\mathcal{D} \frac{\nabla \rho^{n+1/2}}{\rho^{n+1/2}} - \hat{u}_i^{n+1} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^{n+1/2}} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \xi_i} \right). \quad (4.30)$$

On en déduit alors l’incrément de pression \mathcal{P} , puis la pression $p^{n+1/2}$ et enfin le champ de vitesse u^{n+1} . Nous pouvons remarquer que dans le cas d’un fluide homogène ou de deux fluide avec diffusion molaire \mathcal{D} nulle, la correction apportée au champ de vitesse est purement potentielle, le champ prédicteur possédait déjà toute la vorticité du champ final. Dans le cas où la diffusion entre les deux fluides est non-nulle, la correction apporte en plus une contribution rotationnelle barocline.

Enfin le pas de temps est calculé en prenant en compte la contribution des différents termes afin de s’assurer de la stabilité du calcul. Les contraintes de ces termes sont résumées dans le tableau (4.2). Le pas de temps le plus restrictif de tout le maillage est ensuite utilisé. Nous pouvons remarquer que dans le cas d’écoulements de fluides à bas Reynolds, il faut être prudent avec le schéma implicite, n’imposant aucune limitation du pas de temps.

Termes physiques	Contrainte sur le pas de temps
Inertie / Advectifs	$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{u}$
Gravité / Flotabilité	$\Delta t \leq \sqrt{\frac{\Delta x}{g}}$
Viscosité / Diffusifs	Schéma explicite : $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{\nu}$ Schéma semi-implicite : $\Delta t < \infty$

TABLE 4.2 – Contraintes sur le pas de temps (d’après [Bonometti, 2005](#)).

4.4.3 Résolution de l’équation de transport de la fraction volumique ϕ

Nous devons maintenant résoudre l’équation de transport de la fraction volumique ϕ , pouvant être aussi considérée comme un taux de présence :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \underline{u}) = \nabla \cdot \left(\mathcal{D} \frac{\rho_1}{\rho} \nabla \phi \right). \quad (4.31)$$

Différentes méthodes de résolution de l’équation de transport sont proposées dans le code *JADIM*. La méthode la plus classique et la plus simple consiste en un schéma centré du second ordre (utilisée par [Haliez and Magnaudet, 2009](#)). Ce schéma, aussi appelé Lax-Wendroff, est classique en mécanique des fluides pour résoudre les équations de transport. Cependant, ce type de schéma entraîne l’apparition d’oscillations numériques lors de l’advection de forts gradients. Ces oscillations parasites peuvent entraîner des zones où le taux de présence ϕ devient négatif, ce qui peut poser des problèmes de stabilité du calcul.

Deux schéma plus complexes, ayant pour objectif principal de palier à ce type de problèmes, sont donc proposés. Un schéma de type FCT, Flux Corrected Transport, fut utilisé notamment par [Bonometti and Magnaudet \(2007\)](#). Cette famille de schéma, spécialisée dans la conservation de choc, a été initialement développée pour simuler les chocs dans les gaz. La difficulté dans ce type de configuration vient du terme d’advection. Afin de conserver le choc et d’éviter les oscillations, les flux sont calculés en combinant un flux d’ordre faible, évalué avec un schéma dissipatif mais stable ; à un flux d’ordre élevé calculé à partir d’un schéma dispersif mais précis. La difficulté de ce schéma vient de la pondération à appliquer à ces deux flux, cette pondération dépendant des variations du

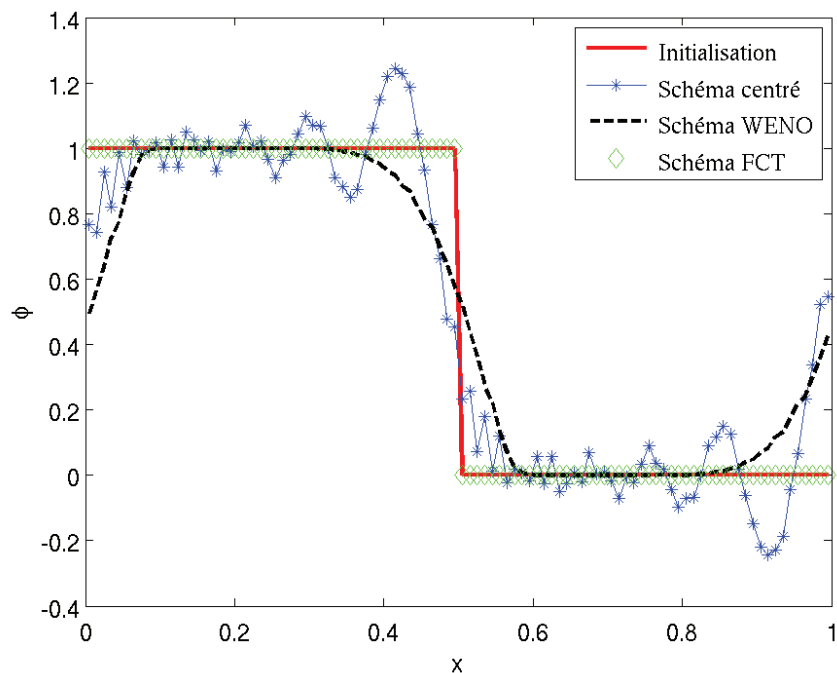


FIGURE 4.3 – Advection pure d’un créneau par les schémas de transport de ϕ , après un temps adimensionné $t^* = 1$.

champ ϕ est recalculée en chaque point. Dans les cas extrêmes, si seul le schéma diffusif est utilisé, le schéma FCT se transforme en schéma amont, stable en cas de choc. Dans le cas contraire, si la pondération entraine uniquement l’utilisation du schéma dispersif de d’ordre élevé, le schéma FCT deviendra un schéma centré d’ordre 8 (en maillage régulier).

Enfin, un troisième type de schéma, aussi dédié au traitement de choc est proposé : un schéma de type WENO (Weighted Essentially Non-Oscillating). Ce schéma a été développé par [Jiang and Shu \(1995\)](#). Il vise à calculer les flux d’advection en se basant sur un ensemble de points. Ces points sont ensuite pondérés de façon différente en fonction du profil de densité alentour. Lorsque des fronts sont détectés, les poids de certains points sont diminués afin de décentrer le schéma et l’approcher d’un schéma amont. Si le profil est lisse, les poids seront équilibrés et le schéma sera comparable à un schéma centré classique. Le schéma WENO utilise donc un grand ensemble de point dont il ajuste la pondération en fonction de la raideur des profils à advecter et du sens de propagation.

Ces différents schémas présentent chacun des avantages et des inconvénients, les spécialisant pour un certain type de configuration.

Nous les avons testés sur les cas classiques d’un créneau et d’une gaussienne, tout deux en advection pure dans le sens des x croissants, pour une résolution de $1/100$ en x .

Sur la figure (4.3), nous pouvons remarquer tout d’abord que comme attendu, le schéma centré présente des difficultés lors de l’advection de forts gradients. Principalement en amont de l’interface, des oscillations apparaissent, entraînant la formation de densités hors de l’intervalle initial $[\rho_1 \rho_2]$. Ce type de schéma n’est donc pas approprié au transport

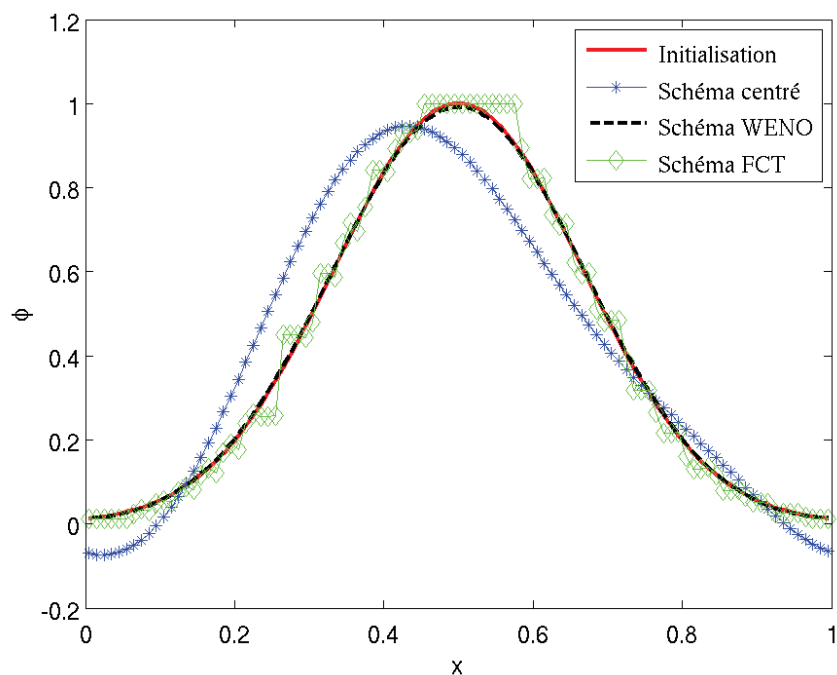


FIGURE 4.4 – Advection pure d’une gaussienne par les schémas de transport de ϕ , après un temps adimensionné $t^* = 50$.

de gradients trop importants. Le schéma FCT, quant à lui, transporte parfaitement le créneau. Le Schéma WENO ne présente pas d’oscillations comme le schéma centré (et comme son nom l’indique). Il tend cependant à lisser les forts gradients, comme nous pouvons l’observer.

Les figures (4.4) et (4.5) présentent l’advection d’une gaussienne par les trois schémas. Afin de pouvoir plus clairement les différencier, nous considérons ici le champs de fraction volumique après $t^* = 50$. Nous pouvons tout d’abord remarquer que le schéma centré présente de mauvais résultats : la gaussienne a perdu sa symétrie, la valeur maximale présente un retard par rapport à l’advection théorique. La courbe semble aussi translatée vers les taux de présence négatifs : les valeurs maximale et minimale de la gaussienne ont diminué d’environ 0.05. Le schéma FCT conserve les valeurs extrêmes (voir figure (4.5)), la forme générale de la gaussienne mais les gradients modérés sont transformés en escaliers ou suite de petits créneaux avec des paliers de 3, 4 mailles environ. Cette méthode, très performante pour le suivi de forts gradients n’est pas adaptée aux gradients modérés. Le troisième schéma de type WENO, transporte assez fidèlement la gaussienne. Contrairement au schéma centré dispersif, il s’apparente à la famille des schémas dissipatifs : on peut noter une atténuation d’environ 1% de la valeur maximale.

Lors de nos simulations, nous allons considérer des fluides miscibles. L’interface entre les fluides sera donc d’épaisseur finie et le gradient de densité sera modéré. Cette interface pourra ensuite être étirée lors du développement des instabilités, et les gradients à traiter seront donc plus importants. Nous avons donc choisi d’utiliser le schéma WENO qui

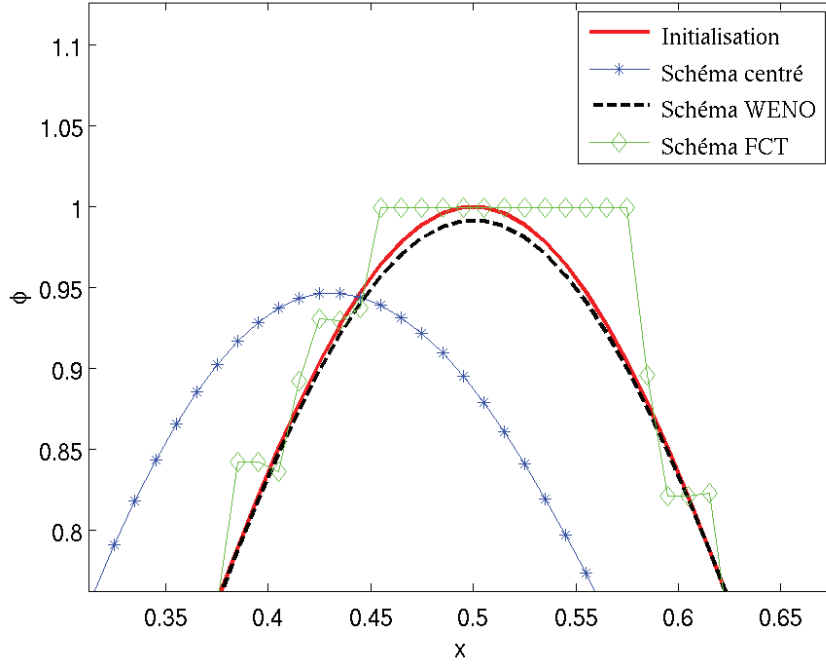


FIGURE 4.5 – Advection pure d’une gaussienne par les schémas de transport de ϕ , après temps adimensionné $t^* = 50$, zoomée autour de la valeur maximale.

présente à la fois de bons résultats pour des gradients modérés et forts. Une validation du schéma sur un cas test de notre cas d’étude est présenté partie (8.3.4).

Nous allons donc détailler le schéma WENO utilisé dans *JADIM*, initialement implémenté par Yannick Hallez, mais pas présenté et peu utilisé par ce dernier.

Nous allons donc maintenant présenter la résolution de l’équation (5.23), rappelée ici :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \underline{u}) = \nabla \cdot \left(\mathcal{D} \frac{\rho_1}{\rho} \nabla \phi \right). \quad (4.32)$$

L’advection en temps est assurée, initialement au calcul des champs prédicteurs (Navier-Stokes), par une méthode de type Runge-Kutta d’ordre 3 :

$$\phi^{n,k} = a_k \phi^{n,k-1} + b_k \phi^{n,1} - c_k \Delta t (\text{Adv} + \text{Diff}), \quad (4.33)$$

où Adv et Diff sont respectivement les termes d’advection et de diffusion et avec les coefficients présentés table (4.3). Ces termes peuvent être décomposées en la somme de 3 composantes Adv_x , Adv_y et Adv_z (et respectivement Diff_x , Diff_y et Diff_z). Sans perdre de généralité, nous allons nous focaliser sur la direction x . Les termes de diffusion sont obtenus de manière classique :

$$\text{Diff}_{x_i} = \frac{1}{\mathcal{V}_i} (\tau_{i-1/2} - \tau_{i+1/2}), \quad (4.34)$$

$$\text{Diff}_{x_i} = \frac{\mathcal{D}\rho_1}{\mathcal{V}_i} \left(\frac{1}{\rho_{i-1/2}} \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x_{i-1/2}} \mathcal{S}_{i-1/2} - \frac{1}{\rho_{i+1/2}} \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x_{i+1/2}} \mathcal{S}_{i+1/2} \right). \quad (4.35)$$

k	1	2	3
a_k	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$
b_k	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
c_k	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$

TABLE 4.3 – Coefficients utilisés dans l’algorithme de type Runge-Kutta, appliqué à l’équation de transport de ϕ .

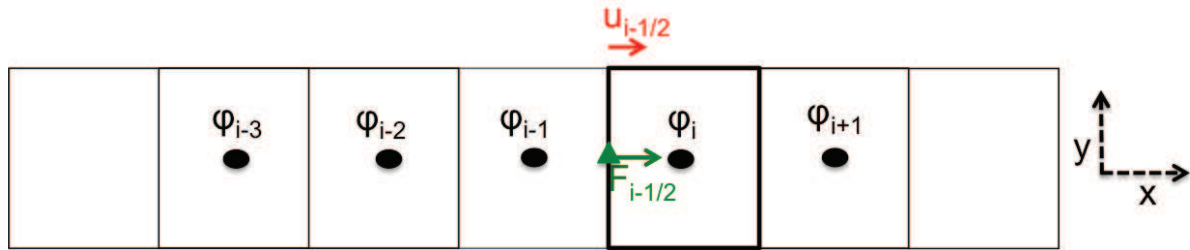


FIGURE 4.6 – Schéma représentant l’ensemble de point utilisé pour le calcul du flux avec le schéma WENO.

Les termes d’advection se décomposent en :

$$\text{Adv}_{xi} = \frac{F_{i-1/2} - F_{i+1/2}}{\delta x_i}, \quad (4.36)$$

où $F_{i-1/2}$ et $F_{i+1/2}$ sont respectivement les flux de ϕ à l’est et à l’ouest du volume élémentaire de pression i , tels que $F_{i-1/2} = (\phi u)_{i-1/2}$ (de même pour le second flux). La méthode WENO est utilisée pour estimer ces flux. Le principe de la méthode est d’évaluer l’aspect du profil de ϕ autour du point considéré. Si le profil est lisse, la pondération des différents termes est effectuée afin d’obtenir un schéma de type centré d’ordre 5 alors que de fortes fluctuations type choc entraîne par pondération, la réduction à d’un schéma ENO (Essentially Non-Oscillating) d’ordre 3 (type amont). Le calcul du flux est donc basé sur 5 points de pression, orientés autour de la surface en fonction du sens de l’écoulement ; soit pour $F_{i-1/2}$, de $(i-3)$ à $(i+1)$ si $u_{i-1/2} > 0$ et de $(i+2)$ à $(i-2)$ si $u_{i-1/2} < 0$ et pour $F_{i+1/2}$, de $(i-2)$ à $(i+2)$ si $u_{i+1/2} > 0$ et de $(i+3)$ à $(i-1)$ si $u_{i+1/2} < 0$ (voir figure 4.6). On calcule ensuite la variable s définissant l’aspect lisse du profil du ϕ :

$$s_1 = \frac{13}{12}(\phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3)^2 + \frac{1}{4}(\phi_1 - 4\phi_2 + 3\phi_3)^2, \quad (4.37)$$

$$s_2 = \frac{13}{12}(\phi_2 - 2\phi_3 + \phi_4)^2 + \frac{1}{4}(\phi_2 - \phi_4)^2, \quad (4.38)$$

$$s_3 = \frac{13}{12}(\phi_3 - 2\phi_4 + \phi_5)^2 + \frac{1}{4}(3\phi_3 - 4\phi_4 + \phi_5)^2. \quad (4.39)$$

On modifie ensuite les poids optimaux (C_n), obtenus pour un profil linéaire, en fonction

des coefficients précédents :

$$a_1 = \frac{C_1}{(\epsilon + s_1)^2} = \frac{1}{10} \frac{1}{(\epsilon + s_1)^2}, \quad (4.40)$$

$$a_2 = \frac{C_2}{(\epsilon + s_2)^2} = \frac{6}{10} \frac{1}{(\epsilon + s_1)^2}, \quad (4.41)$$

$$a_3 = \frac{C_3}{(\epsilon + s_3)^2} = \frac{3}{10} \frac{1}{(\epsilon + s_1)^2}. \quad (4.42)$$

avec ϵ arbitrairement égal à $\epsilon = 10^{-16}$. Ces poids sont ensuite adimensionnés :

$$w_1 = \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3}, \quad (4.43)$$

$$w_2 = \frac{a_2}{a_1 + a_2 + a_3}, \quad (4.44)$$

$$w_3 = \frac{a_3}{a_1 + a_2 + a_3}. \quad (4.45)$$

On calcule ensuite le flux grâce à la formule suivante :

$$F = w_1 \left(\frac{\phi_1}{3} - \frac{7\phi_2}{6} + \frac{11\phi_3}{6} \right) + w_2 \left(\frac{-\phi_2}{6} + \frac{5\phi_3}{6} + \frac{\phi_4}{3} \right) + w_3 \left(\frac{\phi_3}{3} + \frac{5\phi_4}{6} - \frac{\phi_5}{6} \right). \quad (4.46)$$

La comparaison entre ces trois schémas a aussi été réalisée pour des simulations proches du cas classique d'étude §7.1.

Conclusion

Finalement, le code de simulations numériques directe *JADIM* résout les équations incompressibles de la mécanique des fluides couplés à une équation de transport, permettant de modéliser le mélange de deux espèces distinctes en transportant les propriétés (ρ et μ) de ces fluides. Le code a été modifié afin de pouvoir considérer les fluides viscoplastiques, en implémentant une loi de comportement de type Bingham régularisé dans le code. Différents schéma d'advection de l'équation de transport des propriétés des fluides ont été testés. Finalement, un modèle de type WENO, permettant un compromis entre stabilité lors de l'advection de forts gradients et conservation de profils lisses. Le code *JADIM* étant parallélisé, les calculs ont principalement été effectués en parallèle sur 8 à 64 processeurs, sur des centres de calcul régionaux (*CALMIP*) et nationaux (*CINES*, *IDRIS*). Ce code résolvant les équations complètes de Navier-Stokes incompressibles, il est assez gourmand en temps de calcul (~ 2000 h.CPU pour une configuration 2D type). Un code complémentaire de stabilité linéaire, basé sur les équations de N-S simplifiées, a donc été adapté à notre problème. Le temps de calcul étant de l'ordre de la minute pour des paramètres classiques, ce code *LiSa* nous a permis d'explorer un plus grande gamme de paramètres.

Chapitre 5

Développements pour le code de stabilité linéaire *LiSa*

Sommaire

5.1	Fonctionnement général et discrétisation	66
5.1.1	Points de collocation	67
5.1.2	Matrices de dérivation	67
5.1.3	Mappings uniforme pour les domaines finis	69
5.1.4	Mapping algébrique pour les domaines infinis	71
5.2	Développement de nouveaux mappings	71
5.2.1	Mappings basés sur les fonctions arctanh et arcsinh	71
5.2.2	Mappings basés sur les fonctions arctanh et sinh, composées par la fonction exponentielle	73
5.2.3	Mapping complexe basé sur la composition des fonctions arctanh et exponentielle	74
5.3	Linéarisation des équations et conditions aux limites	74
5.3.1	Linéarisation des équations autour d'un état de base	75
5.3.2	Relation de dispersion associée à notre configuration	77
5.3.3	Ajout des conditions aux limites	79
5.4	Test de convergence	82
5.4.1	Résultats fournis par <i>LiSa</i>	82
5.4.2	Critère de convergence	84
5.4.3	Détermination des paramètres du mapping	86
5.4.4	Caractérisation des modes faiblement convergés	88
5.5	Couches critiques d'absorption d'ondes internes	91
5.5.1	Équation de réfraction	91
5.5.2	Vérification de l'appartenance à une couche d'absorption	93
5.6	Développement d'un mapping complexe	96

Introduction

Cette partie présente le code de stabilité linéaire LiSa, utilisé pour étudier la stabilité linéaire de notre configuration. Ce code résout donc les équations de la dynamique de fluides linéarisées autour d'un écoulement de base. Résolvant les petites perturbations, il nous permettra de déterminer la stabilité de notre configuration et nous renseignera sur la croissance linéaire des instabilités. Ce code a été initialement développé par Pierre Brancher et Arnaud Antkowiak (Antkowiak and Brancher (2007) et Antkowiak and Brancher (2004)) pour l'étude d'instabilités d'écoulement en rotation (tourbillons). Différentes versions permettent l'étude de la stabilité spatiale, temporelle, d'obtenir les perturbations optimales. Nous avons modifié ce code afin de l'appliquer à notre cas d'étude : un écoulement parallèle borné avec variation de masse volumique et de viscosité. Après une présentation rapide du fonctionnement du code, nous détaillerons la phase de discrétisation et de mapping, puis le système d'équation linéarisé au cœur du code, le critère de convergence implémenté et enfin sa validation sur des cas classiques.

5.1 Fonctionnement général et discrétisation

Le code de stabilité linéaire LiSa permet d'étudier la stabilité d'une perturbation dans un écoulement de base d'une seule variable (dans notre cas, l'altitude z , et donc invariant par translation selon les autres direction (x, y) et les temps (t)). Ce code est monobloc : un seul système d'équation décrit l'évolution du fluide dans tout le domaine. Ce code est programmé sous Matlab et la résolution des équations se fait dans le domaine spectral. Le fonctionnement du code est présenté Figure (5.1). Les équations du problème

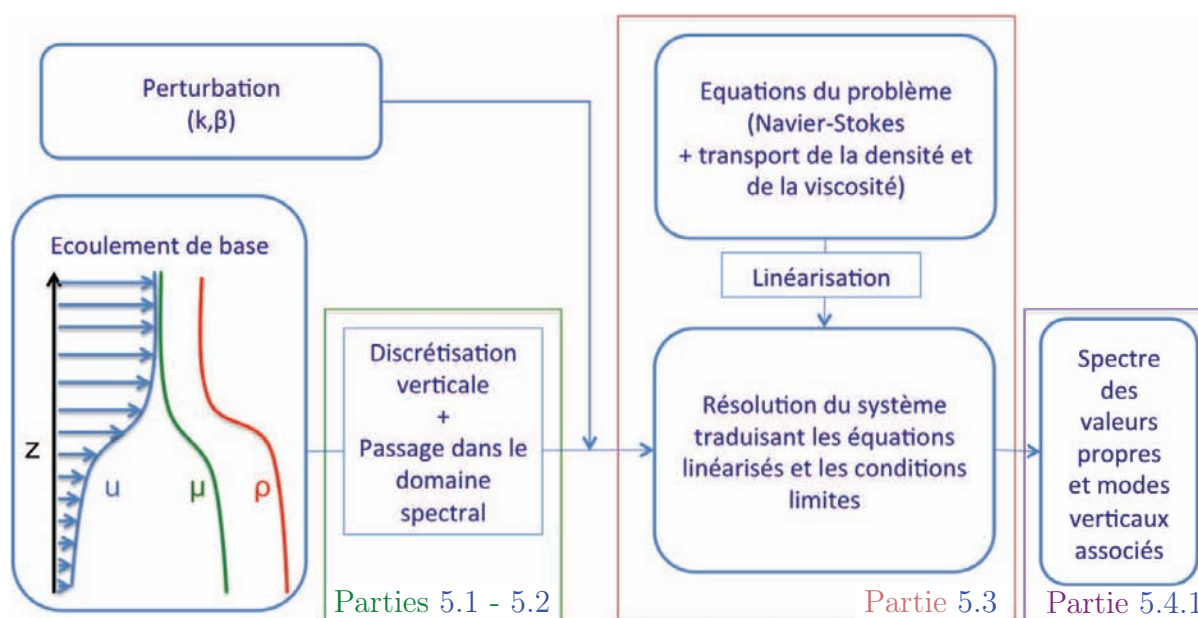


FIGURE 5.1 – Schéma de fonctionnement du code LiSa.

à traiter sont linéarisées autour d'un écoulement de base et introduite dans le code sous

forme de système d'équations. L'écoulement de base, composé de profils verticaux de vitesse, pression, densité et viscosité dans notre cas, est discrétisé suivant la direction variable z , puis projeté sur la base des polynômes de Chebyshev. Cette base est très souvent utilisée car elle permet une bonne résolution au niveau des conditions limites. On recherche ensuite, dans le domaine spectral, les modes et valeurs propres de notre système d'équation, associé à une perturbation donnée.

Lors de l'utilisation de ce type de code de stabilité linéaire, une première étape est de discrétiser l'écoulement selon la variable (ici z), puis de projeter cet ensemble de points physiques dans l'espace spectral, sur un ensemble de points particuliers appelés points de collocation de Gauss-Lobatto, permettant une bonne résolution numérique. Enfin, afin de pouvoir raffiner certaines zones du maillage physique initial, on utilise des fonctions de mapping permettant de projeter les points de collocation de l'espace spectral vers le maillage physique choisi. Le code LiSa est basé sur une méthode de projection spectrale par laquelle les points z de l'espace physique sont projetés sur des points de collocation.

5.1.1 Points de collocation

Dans ce code, nous utilisons les points de collocation de Gauss-Lobatto. Définissons $s_n \in [-1, 1]$ la coordonnée des N points de collocation de Gauss-Lobatto, correspondant aussi aux nœuds du polynôme de Chebyshev de degrés N (voir fig. 5.2)

$$s_n = \cos \theta_n \quad \text{où} \quad \theta_n = \pi \frac{n-1}{N-1}, \quad n = 1 \dots N. \quad (5.1)$$

Notons que le sens de variation est inversé : s_n décroît de $+1$ à -1 lorsque n varie de 1 à N .

Cet ensemble de points de collocation permet, grâce à sa plus grande résolution au niveau des frontières du domaine, d'éviter le phénomène de Runge. En effet, pour des points de collocation uniformément espacés, Runge (1901) a démontré qu'une augmentation du degré du polynôme n'entraîne pas forcément une meilleure approximation polynomiale à cause d'oscillations au niveau des bords du domaine. Orszag (1971) démontre par une étude de la projection de l'équation de Orr-Sommerfeld que la base orthogonale des polynômes de Chebyshev est celle qui présente une meilleure précision.

5.1.2 Matrices de dérivation

Les espaces physique et spectral étant discrétisés, les dérivations par rapport à la variable z apparaissant dans les équations linéarisées (§5.3.1) peuvent être exprimées par la multiplication par une matrice, fonction de l'ensemble de points de collocation choisis et de la fonction de mapping.

Soit $u(s)$ une fonction de $s \in [-1, 1]$. Dans le contexte présent de la méthode spectrale, cette fonction peut être discrétisée sur les points de collocation de Gauss-Lobatto $u_n = u(s_n)$ pour $n = 1 \dots N$. Dans ce cas, la dérivée du/ds de u par rapport à s , représentée par le vecteur $[du/ds(s_n)]_{n=1,N}$, peut être calculée en utilisant une matrice de dérivation

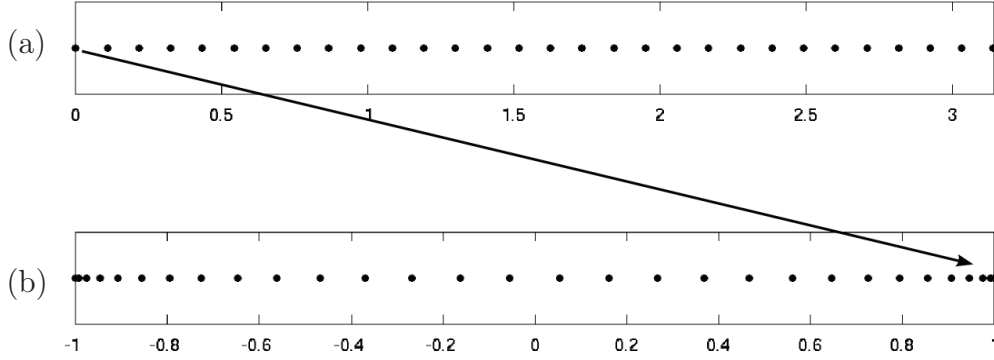


FIGURE 5.2 – Transformation de points de grille régulièrement espacés (a) en points de collocation de Gauss-Lobatto (b).

\mathcal{D}_1 :

$$u(s) \mapsto [u(s_n)]_{n=1,N} \Rightarrow \frac{du}{ds}(s) \mapsto \mathcal{D}_1 u_n = \left[\frac{du}{ds}(s_n) \right]_{n=1,N}, \quad (5.2)$$

Si nous considérons maintenant $u(z)$, une fonction de $z \in [0, H]$, par exemple. Cette fonction peut s'écrire $u(z) = u(f(s))$ où f est une fonction de mapping monotone $s \in [-1, 1]$ dans $z = f(s) \in [0, H]$. On a alors :

$$\frac{du}{dz} = \frac{du}{ds} \frac{ds}{dz} = \frac{du}{ds} \frac{d(f^{-1})}{dz}, \quad (5.3)$$

avec f^{-1} la fonction inverse de f . Comme précédemment, du/ds peut être calculée en utilisant la matrice de dérivation \mathcal{D}_1 . Donc, si la fonction $d(f^{-1})/dz$ est représentée par le vecteur ξ_1 , la dérivée du/dz est donnée par :

$$\left[\frac{du}{dz}(z_n) \right]_{n=1,N} = \text{diag}(\xi_1) (\mathcal{D}_1 u_n) = [\text{diag}(\xi_1) \mathcal{D}_1] u_n = \mathcal{D}_1^* u_n, \quad (5.4)$$

où $\text{diag}(\xi_1)$ correspond à la matrice diagonale dont les termes sont les composants du vecteur ξ_1 , et

$$\mathcal{D}_1^* = \text{diag}(\xi_1) \mathcal{D}_1, \quad (5.5)$$

est la matrice de dérivation associée à la grille z .

Cette technique de dérivation peut être généralisée aux dérivations d'ordre supérieur. Par exemple, pour la matrice de dérivation de second ordre :

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2u}{ds^2} \left(\frac{ds}{dz} \right)^2 + \frac{du}{ds} \frac{d^2s}{dz^2}. \quad (5.6)$$

Donc la matrice de dérivation de second ordre \mathcal{D}_2 et la dérivée seconde de f^{-1} représentée par le vecteur ξ_2 sont nécessaires :

$$\left[\frac{d^2u}{dz^2}(z_n) \right]_{n=1,N} = \text{diag}(\xi_1)^2 (\mathcal{D}_2 u_n) + \text{diag}(\xi_2) (\mathcal{D}_1 u_n) = \mathcal{D}_2^* u_n. \quad (5.7)$$

Ainsi la matrice de dérivation seconde, dans le maillage z , correspond à :

$$\mathcal{D}_2^* = \text{diag}(\xi_1)^2 \mathcal{D}_2 + \text{diag}(\xi_2) \mathcal{D}_1. \quad (5.8)$$

Les matrices de dérivations appliquée à la base des polynômes de Chebyshev sont fournies avec le code LiSa, obtenue à partir d'une boîte à outils proposée par [Weideman and Reddy \(2000\)](#). Ces matrices sont ensuite modifiées, pour les différents mappings, en utilisant les formules ci-dessus (5.5 et 5.8).

5.1.3 Mappings uniforme pour les domaines finis

Dans ce type de code, le système d'équation est résolu dans le domaine spectral sur les points de collocation de Gauss-Lobatto, comme présenté précédemment. Une fonction de mapping f permet alors de remonter du domaine spectrale vers le domaine physique. Cette fonction de mapping peut alors être choisie de manière à améliorer la qualité des résultats, en augmentant par exemple la résolution spatiale dans le domaine physique dans les zones délicates de l'écoulement (de la même manière qu'on augmenterait le nombre de mailles dans des zones critiques en CFD). Différents mappings ont donc été développés et utilisés en fonction des configurations. En partant de mappings simples type maillage régulier, nous avons construit des mappings permettant de raffiner une zone choisie de l'écoulement avec un degrés de raffinement choisi. Un mapping a aussi été créé afin d'améliorer la qualité des résultats. Afin d'alléger cette partie très technique, une description détaillé des mappings est fournie en annexe, paragraphe §A.

Ce premier mapping a pour objectif de transformer les points de l'espace spectral de Gauss-Lobatto en une grille uniforme (bornée) dans l'espace physique. Ce mapping peut se décomposer en deux étapes. Tout d'abord, la construction d'un mapping intermédiaire de $s \in [-1, 1]$ vers la grille uniforme $r \in [0, \pi]$:

$$r = \arccos(s), \quad (5.9)$$

Le mapping final est obtenu en réajustant le domaine final au domaine voulu, de $r \in [0, \pi]$ dans le domaine physique $z \in [0, H]$ (fig. 5.3)

$$z = Hr/\pi. \quad (5.10)$$

Nous calculons ensuite la transformée inverse et ses dérivées d'ordre 1 et 2 nécessaires pour la construction des matrices de dérivation. En utilisant les notations introduites §(5.1.1), nous obtenons pour ce mapping :

$$z = f(s) = \arccos(s)/\alpha \quad \text{avec } \alpha = \pi/H, \quad (5.11)$$

$$s = f^{-1}(z) = \cos(\alpha z), \quad (5.12)$$

$$\xi_1 = d(f^{-1})/dz = -\alpha \sin(\alpha z) = -\alpha \sin(\arccos(s)) = -\alpha \sqrt{1-s^2}, \quad (5.13)$$

$$\xi_2 = d^2(f^{-1})/dz^2 = -\alpha^2 \cos(\alpha z) = -\alpha^2 s. \quad (5.14)$$

Nous pouvons alors remarquer que pour qu'un mapping soit utilisable, il faut qu'il soit inversible et que sa fonction inverse soit \mathcal{C}^2 . Il faut aussi que ces fonctions soient monotones pour permettre une bijection entre les deux espaces physique et spectral ; ainsi que

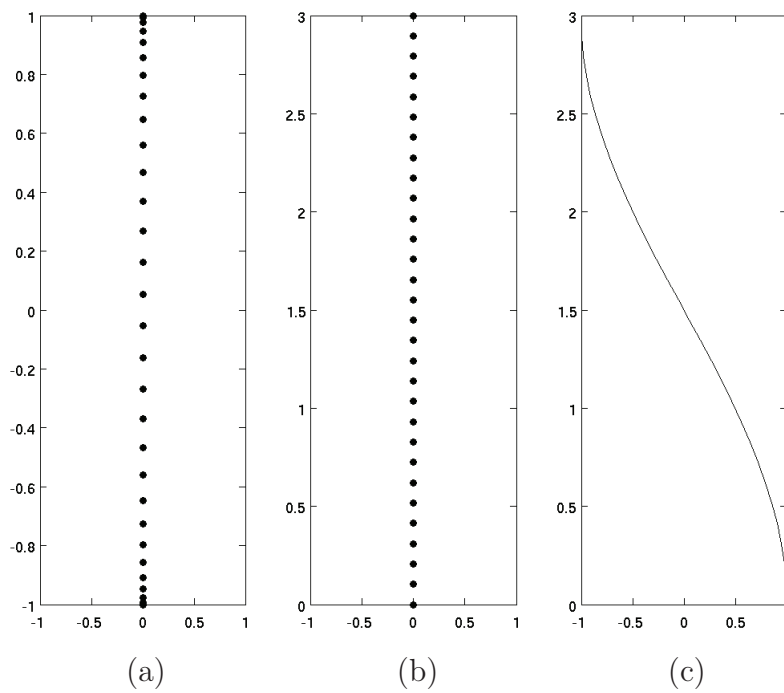


FIGURE 5.3 – Mapping vers une grille uniforme : collocation initiale des points de Gauss-Lobatto s_n (a), collocation finale des points z_n dans l'espace physique (b) et fonction de mapping $z = f(s)$ (c).

croissante pour plus de simplicité. Cependant, pour imposer des conditions aux limites de glissement telles que définies §(5.3.3), il faut aussi que la dérivée de la fonction inverse ξ_1 ne s'annule pas à la frontière, ce qui n'est pas le cas de ce mapping.

5.1.4 Mapping algébrique pour les domaines infinis

Ce mapping, initialement implémenté dans LiSa, est adapté aux domaines infinis. Ce mapping transforme les points de collocation $s \in [-1, 1]$ en la grille infinie $z \in [-\infty, +\infty]$. Le mapping est alors défini en fonction de la position du pénultième point du mapping. Dans un premier temps, s est transformée en une variable intermédiaire $r \in [-\infty, +\infty]$ par le mapping :

$$r = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}. \quad (5.15)$$

On fixe ensuite la position du pénultième point en H par la transformation :

$$z = \frac{\sqrt{1-s_2^2}}{s_2} r, \quad (5.16)$$

où s_2 correspond au second point de collocation de Gauss-Lobatto.

Ce mapping est présenté figure (5.4.(b)) avec les autres mappings développés pour cette étude.

5.2 Développement de nouveaux mappings

Dans le cadre d'études d'interface, il est intéressant d'augmenter la précision des calculs en raffinant le maillage au niveau de l'interface. La figure (5.4) présente, à la suite des mappings précédents, les différents mappings qui ont été développés afin de traiter ce problème de couche de mélange. Ils sont ensuite explicités dans la suite de cette partie, et détaillés en annexe.

5.2.1 Mappings basés sur les fonctions arctanh et arcsinh

Nous avons tout d'abord construit une nouvelle famille de mapping, basés sur les fonctions arctanh et sinh permettant d'utiliser les propriétés de ces fonctions afin de raffiner l'interface. Les deux mappings suivants ont été construits de manière à augmenter la résolution à une position choisie h du domaine spatial. Ils transforment l'espace spectral $s \in [-1, 1]$ en espace physique borné $z \in [0, H]$. Une première fonction de mapping, présentée figure (5.4.(c)), est basée sur la fonction arctanh :

$$z = d(\operatorname{arctanh}[a(s+b)] - c), \quad (5.17)$$

la seconde, présentée figure (5.4.(d)), est basée sur la fonction sinh :

$$z = d(\sinh[a(s+b)] - c), \quad (5.18)$$

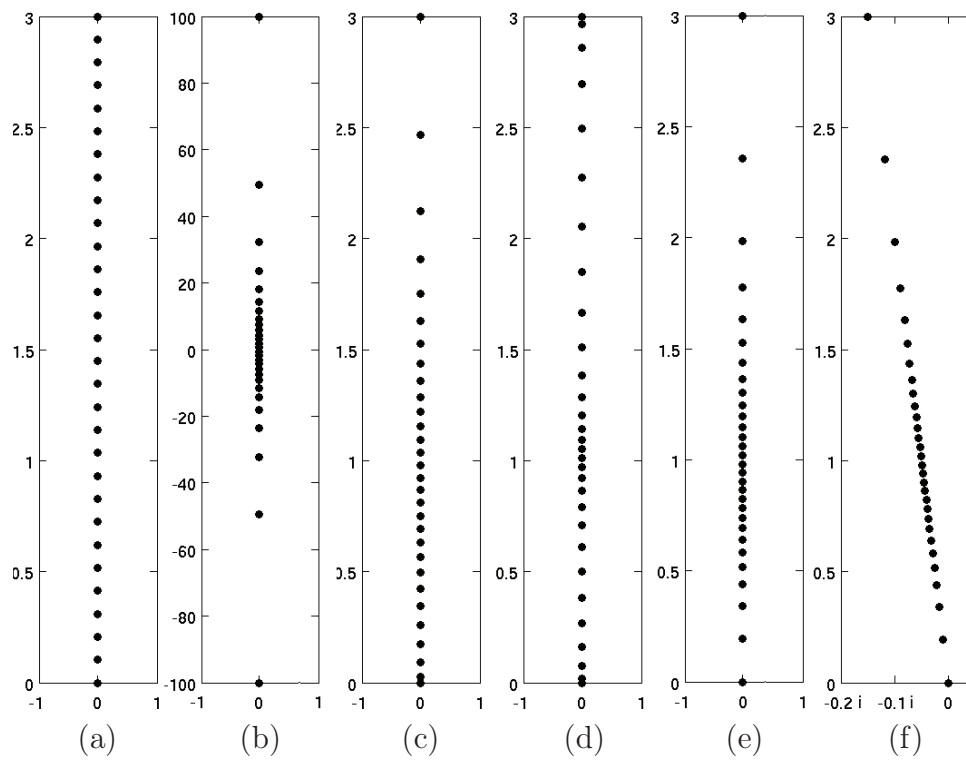


FIGURE 5.4 – Présentation des mappings utilisés, collocation finale des points z_n dans l'espace physique. (a) Mapping uniforme; (b) Mapping algébrique; (c) Mapping arctanh; (d) Mapping sinh; (e) Mapping arctanh-exp; (f) Mapping artanh-exp complexe.

avec a , b , c et d des paramètres détaillés dans la partie annexe. Ces deux fonctions, présentant une morphologie différente au niveau de leur point d'inflexion présentent des avantages différents. La fonction $\operatorname{arctanh}$ présente de meilleurs résultats pour des interfaces assez épaisses, grâce à sa morphologie assez douce. La fonction \sinh permettra d'étudier les interfaces fines, en concentrant une grande quantité de points sur une zone très localisée et en conservant un nombre de points suffisant dans le reste du domaine. Ces fonctions mappings comportent trois degrés de liberté permettant de fixer la pente au point d'inflexion, les bornes du domaine et la position de l'interface. Cependant, n'ayant que trois paramètres, la pente au point d'inflexion est liée à la position des bornes. En revenant au jeu des quatre paramètres précédents, comme cette fonction mapping doit être définie sur tout le domaine et croissante ($\operatorname{arctanh}$ étant périodique), la condition $a(s + b) \in] - 1; 1[$ doit être respectée, soit $|\pm \frac{1}{a} - b| \geq 1$.

Ainsi le manque de degrés de liberté pour fixer les différents paramètres nécessaire à notre étude (les positions de l'interface, sa résolution et la position des bornes) entraîne des conditions, telles que $|\pm \frac{1}{a} - b| \geq 1$, très restrictive et des difficultés lors de l'utilisation de la matrice de dérivation. En effet, pour des interfaces assez raffinées, la dérivée de la fonction inverse s'annule aux bornes, posant des problèmes de conditions aux limites. Nous avons donc choisi de créer une nouvelle famille de mappings à quatre degrés de liberté en composant les fonctions $\operatorname{arctanh}$ et \sinh par la fonction exponentielle. La composition par la fonction exponentielle permettra ainsi de déplacer la position de l'interface indépendamment du positionnement des bornes, après avoir fixé les autres paramètres.

5.2.2 Mappings basés sur les fonctions $\operatorname{arctanh}$ et \sinh , composés par la fonction exponentielle

Nous avons choisi la fonction \exp car cette dernière est une fonction classique, monotone croissante et facilement inversable. Elle est aussi convexe permettant de "baisser" la zone de raffinement, d'altitude plus faible dans notre configuration que le milieu du domaine, classiquement obtenu avec une fonction symétrique type $\operatorname{arctanh}$ ou \sinh .

Comme précédemment, on transforme l'espace spectral $s \in [-1, 1]$ en un espace physique $z \in [0, H]$ en raffinant la grille en h (point d'inflexion de profils dans l'espace physique). On impose donc les quatre conditions sur le mapping f :

- $f(-1) = 0$ et $f(1) = H$ pour fixer les conditions aux limites
- $f(0) = h$ et $f'(0) = p$ pour fixer le point d'inflexion en h et choisir la pente en ce point p .

Quatre paramètres sont donc nécessaires pour remplir ces conditions. Nous obtenons alors la fonction mapping suivante, présentée figure (5.4.(e)), associée à la fonction $\operatorname{arctanh}$:

$$z = d(1 - \exp(a' \operatorname{arctanh}(bs) + c')), \quad (5.19)$$

De même que précédemment, nous pouvons aussi construire la fonction mapping associée à \sinh en écrivant :

$$z = d(1 - \exp(a' \sinh(bs) + c')), \quad (5.20)$$

avec quatre paramètres indépendants a' , b , c' et d . Ainsi, les fonctions $\operatorname{arctanh}$ ou \sinh hyperbolique positionnent les conditions aux limites et la pente au point d'inflexion, en

utilisant 3 paramètres. La fonction \exp est alors simplement utilisée pour placer l'interface à la position souhaitée grâce au dernier paramètre. Une description technique plus détaillée est présentée en annexe. Ce mapping $\operatorname{arctanh}\text{-}\exp$ bien adapté à notre configuration, sera principalement utilisé par la suite.

5.2.3 Mapping complexe basé sur la composition des fonctions $\operatorname{arctanh}$ et exponentielle

Ce mapping est similaire au mapping précédent composé de la combinaison de des fonctions $\operatorname{arctanh}$ et \exp , mais présente en plus une composante complexe. Ce mapping transforme alors l'espace spectral $s \in [-1, 1]$ en l'espace "physique" $z \in [0, H(1 + \alpha i)]$:

$$f(s) = d(1 - \exp(a(\operatorname{arctanh}(bs) + c)))(1 - \alpha i),$$

où $\alpha \geq 0$ est un paramètre déterminé après comparaison à la littérature par $\alpha = 0,010369 - 0,03562 Ri$ où Ri est le nombre de Richardson et i est le nombre imaginaire. La justification de ce mapping et de la valeur du paramètre α sera développé dans la partie §(5.6). Les propriétés (fonction inverse, dérivés de la fonction inverse, etc) sont les mêmes que celles du mapping $\operatorname{arctanh}\text{-}\exp$ (5.2.2). Ce mapping est présenté figure (5.4.(f)).

Finalement, nous avons construit différents types de mappings adaptés aux configurations testées. Les mappings algébriques sont bien adaptées aux couches de mélange en domaine infini. Pour une majorité des cas, les mappings $\operatorname{arctanh}\text{-}\exp$ sont bien appropriés, notamment lorsque l'interface est 10 fois plus fine que le domaine d'étude. Pour les interfaces très fines, le mapping $\sinh\text{-}\exp$ permet de concentrer encore plus de points sur une petite zone tout en conservant un nombre de points suffisant sur le reste du domaine. Enfin, pour faire face à des problèmes de convergence de modes, une version complexe du mapping $\operatorname{arctanh}\text{-}\exp$ a été créée (voir §5.6).

5.3 Linéarisation des équations et conditions aux limites

Maintenant que le maillage est défini dans l'espace physique et spectral, les équations du problème sont linéarisées et l'équation de dispersion associée à notre problème est déduite de ce système. Dans le code, nous conservons cependant le système d'équation, organisé sous forme de matrice afin de pouvoir ensuite calculer numériquement les valeurs propres et modes propres du système d'équation. Les conditions aux limites sont implémentées directement dans le système d'équations linéarisé et discrétisé, avant la résolution numérique. Ces étapes vont être décrites dans cette partie.

5.3.1 Linéarisation des équations autour d'un état de base

Dans le cas d'une crème de vase newtonienne, nous nous intéressons au système d'équation suivant :

$$\rho \frac{d\underline{u}}{dt} = -\nabla p + \rho \underline{g} + \nabla \cdot [\mu (\nabla \underline{u} + {}^t \nabla \underline{u})], \quad (5.21)$$

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0, \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0, \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu \underline{u}) = 0, \quad (5.24)$$

qui couple les équations de Navier-Stokes incompressibles (Eq. 5.21 et 5.22), où \underline{g} est le vecteur gravité, à l'équation de transport de la masse volumique ρ (Eq. 5.23) et de la viscosité dynamique μ (Eq. 5.24).

Nous avons choisi, lors de la construction de ce code, de dissocier l'équation de transport du taux de présence de ϕ , utilisé dans le code DNS *JADIM*, en deux équations de transport de la densité et de la viscosité. Bien que redondantes dans les cas présentés, ces deux équations permettent de dissocier les deux variables et de proposer, par exemple, des initialisations distinctes. Dans le cas présent d'une étude de stabilité linéaire, ce système d'équation permet plus particulièrement d'étudier le développement de petites perturbations autour de profils initiaux de masse volumique et de viscosité différents.

On fait alors l'hypothèse que l'écoulement de base est quasi-stationnaire ; i.e. que le temps de variation de l'écoulement de base est faible devant le temps de développement de possibles instabilités. On décompose les champs de vitesse, de masse volumique et de viscosité en champs initiaux et perturbations de la manière suivante : $\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{\bar{u}}(\underline{x}) + \hat{\underline{u}}(\underline{x}, t)$, $\rho(\underline{x}, t) = \bar{\rho}(\underline{x}) + \hat{\rho}(\underline{x}, t)$ et $\mu(\underline{x}, t) = \bar{\mu}(\underline{x}) + \hat{\mu}(\underline{x}, t)$. On se place dans le cas d'un écoulement de base parallèle porté par \underline{e}_x et invariant suivant x et y ; on a alors : $\underline{\bar{u}}(\underline{x}) = \bar{u}(z)\underline{e}_x$, $\bar{\rho}(\underline{x}) = \bar{\rho}(z)$, $\bar{\mu}(\underline{x}) = \bar{\mu}(z)$. En introduisant la décomposition ci-dessus dans le système d'équations, on obtient la décomposition de la pression : $p(\underline{x}, t) = \bar{p}(x, z) + \hat{p}(\underline{x}, t)$ avec $\bar{p}(x, z) = p_0 + \bar{\rho}gz + (\bar{\mu}'\bar{u}' + \bar{\mu}\bar{u}'')x$, où p_0 est une pression de référence et en notant $A' = \frac{d}{dz}A$. On suppose que $\hat{\underline{u}} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$, \hat{p} , $\hat{\rho}$ et $\hat{\mu}$ sont de petites variations. En ne conservant que les termes linéaires, on obtient :

$$\bar{\rho} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \bar{\rho} \hat{w} \bar{u}' \underline{e}_x = -\nabla \hat{p} + \nabla \cdot [\bar{\mu} (\nabla \hat{\underline{u}} + {}^t \nabla \hat{\underline{u}})] \quad (5.25)$$

$$+ \nabla \cdot [\hat{\mu} (\nabla \underline{\bar{u}} + {}^t \nabla \underline{\bar{u}})],$$

$$\nabla \cdot \hat{\underline{u}} = 0, \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\hat{\rho} \underline{\bar{u}}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \hat{\underline{u}}) = 0, \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial t} + \nabla \cdot (\hat{\mu} \underline{\bar{u}}) + \nabla \cdot (\bar{\mu} \hat{\underline{u}}) = 0. \quad (5.28)$$

En simplifiant les équations et en ne conservant que le premier ordre, on obtient :

$$\bar{\rho} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \bar{\rho} \hat{w} \bar{u}' e_x = -\nabla \hat{p} + \bar{\mu} \Delta \hat{u} + \bar{\mu}' \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} \\ \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \\ 2 \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \bar{u}' \frac{\partial(\hat{\mu})}{\partial z} + \hat{\mu} \bar{u}'' \\ 0 \\ \bar{u}' \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial x} \end{array} \right) \quad (5.29)$$

$$\nabla \cdot \hat{u} = 0, \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} + \hat{w} \bar{\rho}' = 0, \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial x} + \hat{w} \bar{\mu}' = 0. \quad (5.32)$$

Par invariance du système précédent en temps et dans les directions x et y , on cherche des solutions de la forme :

$$[\hat{u}, \hat{p}, \hat{\rho}, \hat{\mu}] = [\tilde{u}(z), \tilde{p}(z), \tilde{\rho}(z), \tilde{\mu}(z)] e^{ikx+i\beta y-i\Omega t}, \quad (5.33)$$

avec $(k, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\Omega \in \mathbb{C}$.

On obtient alors le système suivant :

$$\Phi \tilde{u} + \left(\bar{u}' - ik \frac{\bar{\mu}'}{\bar{\rho}} \right) \tilde{w} + \frac{ik}{\bar{\rho}} \tilde{p} + \frac{-1}{\bar{\rho}} (\bar{u}' D + \bar{u}'') \tilde{\mu} = i\Omega \tilde{u}, \quad (5.34)$$

$$\Phi \tilde{v} - i\beta \frac{\bar{\mu}'}{\bar{\rho}} \tilde{w} + \frac{i\beta}{\bar{\rho}} \tilde{p} = i\Omega \tilde{v}, \quad (5.35)$$

$$\left(\Phi - \frac{\bar{\mu}'}{\bar{\rho}} D \right) \tilde{w} + \frac{D}{\bar{\rho}} \tilde{p} + \frac{g}{\bar{\rho}} \tilde{\rho} - \frac{ik}{\bar{\rho}} \bar{u}' \tilde{\mu} = i\Omega \tilde{w}, \quad (5.36)$$

$$ik\tilde{u} + D\tilde{w} = 0, \quad (5.37)$$

$$\bar{\rho}' \tilde{w} + ik\bar{u} \tilde{\rho} = i\Omega \tilde{\rho}, \quad (5.38)$$

$$\bar{\mu}' \tilde{w} + ik\bar{u} \tilde{\mu} = i\Omega \tilde{\mu}, \quad (5.39)$$

s'exprimant sous la forme d'un produit matriciel par :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Phi & 0 & \bar{u}' - ik \frac{\bar{\mu}'}{\bar{\rho}} & \frac{ik}{\bar{\rho}} & 0 & \frac{-1}{\bar{\rho}} (\bar{u}' D + \bar{u}'') \\ 0 & \Phi & -i\beta \frac{\bar{\mu}'}{\bar{\rho}} & \frac{i\beta}{\bar{\rho}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi - D \frac{\bar{\mu}'}{\bar{\rho}} & \frac{D}{\bar{\rho}} & \frac{g}{\bar{\rho}} & -\frac{ik}{\bar{\rho}} \bar{u}' \\ ik & i\beta & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho}' & 0 & ik\bar{u} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mu}' & 0 & 0 & ik\bar{u} \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ \tilde{p} \\ \tilde{\rho} \\ \tilde{\mu} \end{pmatrix} = i\Omega \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{B}} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ \tilde{p} \\ \tilde{\rho} \\ \tilde{\mu} \end{pmatrix}, \quad (5.40)$$

avec $D = \frac{d}{dz}$ et $\Phi = ik\bar{u} + \frac{\bar{\mu}}{\bar{\rho}}(k^2 + \beta^2 - D^2) - D \frac{\bar{\mu}'}{\bar{\rho}}$.

5.3.2 Relation de dispersion associée à notre configuration

Bien que le système précédent (5.34-5.39) soit implémenté directement dans LiSa, en résolvant à la fois les amplitudes des perturbations de vitesse (\tilde{u}), de pression (\tilde{p}), de densité ($\tilde{\rho}$) et de viscosité ($\tilde{\mu}$), ce système peut être condensé en une équation différentielle, classiquement dans la littérature, sur la perturbation verticale de vitesse (\tilde{w}) ou sur le potentiel de vitesse. Nous avons réalisé cette démarche dans notre cas d'étude afin de pouvoir clairement identifier les différents termes de l'équation de dispersion, et plus particulièrement les contribution des deux stratifications.

Après avoir multiplié les deux équations (5.34) et (5.36) par $\bar{\rho}$ afin de simplifier les calculs, on élimine la pression en multipliant l'équation (5.36) par ik puis en substituant $ik\tilde{p}$ dans l'équation (5.36) grâce à l'équation (5.34), ce qui donne le système suivant :

$$ik(\bar{\rho}\Phi - \bar{\mu}'D)\tilde{w} + D[-\Phi\bar{\rho}\tilde{u} - (\bar{u}'\bar{\rho} - ik\bar{\mu}')\tilde{w} + (\bar{u}'D + \bar{u}'')\tilde{\mu} + i\Omega\bar{\rho}\tilde{u}] \quad (5.41)$$

$$+ ikg\bar{\rho} + k^2\bar{u}'\tilde{\mu} = -k\Omega\bar{\rho}\tilde{w},$$

$$ik\tilde{u} + D\tilde{w} = 0, \quad (5.42)$$

$$\bar{\rho}'\tilde{w} + ik\bar{u}\tilde{\rho} = i\Omega\tilde{\rho}, \quad (5.43)$$

$$\bar{\mu}'\tilde{w} + ik\bar{u}\tilde{\mu} = i\Omega\tilde{\mu}. \quad (5.44)$$

En multipliant à nouveau l'équation (5.41) par ik , on élimine la variable \tilde{u} grâce à l'équation de conservation de la masse (5.42) :

$$-k^2(\bar{\rho}\Phi - \bar{\mu}'D)\tilde{w} + D[\Phi\bar{\rho}D\tilde{w} - (ik\bar{u}'\bar{\rho} + k^2\bar{\mu}')\tilde{w} + ik(\bar{u}'D + \bar{u}'')\tilde{\mu} - i\Omega\bar{\rho}D\tilde{w}]$$

$$- k^2g\bar{\rho} + ikk^2\bar{u}'\tilde{\mu} = -k^2i\Omega\bar{\rho}\tilde{w}, \quad (5.45)$$

$$\bar{\rho}'\tilde{w} + ik\bar{u}\tilde{\rho} = i\Omega\tilde{\rho}, \quad (5.46)$$

$$\bar{\mu}'\tilde{w} + ik\bar{u}\tilde{\mu} = i\Omega\tilde{\mu}. \quad (5.47)$$

Après avoir remplacé Φ par sa valeur, réorganisé l'équation et divisé par ik , on obtient le système suivant :

$$\left(\frac{\Omega}{k} - \bar{u}\right)\bar{\rho}(k^2 - D^2)\tilde{w} - \frac{1}{ik}(k^2 - D^2)(\bar{\mu}(k^2 - D^2)\tilde{w}) - \bar{\rho}\bar{u}''\tilde{w} \quad (5.48)$$

$$- \left(\frac{\Omega}{k} - \bar{u}\right)\bar{\rho}'D\tilde{w} - \bar{\rho}'\bar{u}'\tilde{w} - \frac{k^2}{ik}g\bar{\rho} + (D^2 + k^2)(\bar{u}'\tilde{\mu}) = 0,$$

$$\bar{\rho}'\tilde{w} + ik\bar{u}\tilde{\rho} = i\Omega\tilde{\rho}, \quad (5.49)$$

$$\bar{\mu}'\tilde{w} + ik\bar{u}\tilde{\mu} = i\Omega\tilde{\mu}. \quad (5.50)$$

Enfin, en substituant l'amplitude des perturbations de densité $\tilde{\rho}$ et de viscosité $\tilde{\mu}$ à partir des équations de transport (5.49) et (5.50), on obtient dans le cas général d'un écoulement parallèle bi-dimensionnel, stratifié en densité et viscosité (avec transport pur de la densité et de la viscosité), l'équation :

$$(c - \bar{u})\bar{\rho}(k^2 - D^2)\tilde{w} - \bar{\rho}\bar{u}''\tilde{w} - \frac{1}{ik}(k^2 - D^2)(\bar{\mu}(k^2 - D^2)\tilde{w}) \quad (5.51)$$

$$- (c - \bar{u})\bar{\rho}'D\tilde{w} - \bar{\rho}'\bar{u}'\tilde{w} - k^2g\frac{\bar{\rho}'\tilde{w}}{c - \bar{u}} + ik(D^2 + k^2)\frac{\bar{u}'\bar{\mu}'\tilde{w}}{c - \bar{u}} = 0.$$

en notant $c = \frac{\Omega}{k}$ la vitesse de phase complexe de l'onde. En se plaçant dans le cas où la viscosité est constante ($\bar{\mu}' = 0$), on obtient l'équation dite de Taylor-Golstein :

$$\begin{aligned} (c - \bar{u})^2 [\bar{\rho}k^2 - D(\bar{\rho}D)] \tilde{w} - (c - \bar{u}) D(\bar{\rho}\bar{u}')\tilde{w} &= k^2 g \bar{\rho}' \tilde{w} \\ &= (c - \bar{u}) \frac{\bar{\mu}}{ik} (k^2 - D^2)^2 \tilde{w}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini et que l'on fait l'hypothèse que le fluide est parfait, on remarque que le second membre disparaît. Si on fait de plus l'hypothèse de Bousinesq, qui consiste à ne prendre en compte les variations de densité que dans le terme de flottabilité, l'équation de Taylor-Golstein se résume à :

$$(c - \bar{u})^2 \bar{\rho}(k^2 - D^2)\tilde{w} - (c - \bar{u}) \bar{\rho}\bar{u}''\tilde{w} - k^2 g \bar{\rho}' \tilde{w} = 0. \quad (5.53)$$

Dans le cas où la stratification en densité est constante ($\bar{\rho}' = 0$), on retrouve l'équation de Orr-Sommerfeld :

$$\begin{aligned} (c - \bar{u}) \left[(k^2 - D^2) (c - \bar{u}) \tilde{w} - \bar{u}''\tilde{w} - \frac{1}{ik\bar{\rho}}(k^2 - D^2) (\bar{\mu}(k^2 - D^2)\tilde{w}) \right] \\ + \frac{D}{ik\bar{\rho}} [(\bar{u}'D + \bar{u}'')\bar{\mu}'\tilde{w}] + \bar{u}'\bar{\mu}' \frac{k^2}{ik\bar{\rho}} \tilde{w} = 0. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Dans le cas d'un fluide homogène ($\bar{\mu}' = 0$ et $\bar{\rho}' = 0$), on retrouve l'équation de Orr-Sommerfeld pour les fluides homogènes :

$$(k^2 - D^2) (c - \bar{u}) \tilde{w} - \bar{u}''\tilde{w} - \frac{\bar{\mu}}{ik\bar{\rho}}(k^2 - D^2)^2 \tilde{w} = 0. \quad (5.55)$$

Si de plus, on fait l'hypothèse que ce fluide homogène est un fluide parfait ($\bar{\mu} = 0$), on obtient l'équation de Rayleigh :

$$(k^2 - D^2) (c - \bar{u}) \tilde{w} - \bar{u}''\tilde{w} = 0. \quad (5.56)$$

En revenant au cas général (Eq. 5.51), on peut clairement identifier les différents termes et leurs effets :

$$\begin{aligned} 0 = & (c - \bar{u}) (k^2 - D^2)\tilde{w} - \bar{u}''\tilde{w} && (\text{Cisaillement}) \\ & - k^2 \frac{g}{\bar{\rho}} \left(\frac{\bar{\rho}'}{c - \bar{u}} \right) \tilde{w} - (c - \bar{u}) \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} D\tilde{w} - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} \bar{u}'\tilde{w} && (\text{Densité}) \\ & - \frac{1}{ik\bar{\rho}}(k^2 - D^2)[\bar{\mu}(k^2 - D^2)\tilde{w}] + \frac{ik}{\bar{\rho}}(D^2 + k^2) \left(\frac{\bar{u}'\bar{\mu}'}{c - \bar{u}} \tilde{w} \right). && (\text{Viscosité}) \end{aligned}$$

La première ligne de l'équation correspond à l'équation de Rayleigh et traduit le mécanisme central de ces instabilités : le cisaillement, notamment au travers du terme $-\bar{u}''\tilde{w}$ (voir §3.3.1 sur le Théorème du point d'inflexion). La seconde ligne regroupe les termes présents dans le cas où le fluide est stratifié. On retrouve le terme associé aux forces de flottabilité (1^{er} terme), reconnaissable grâce à la constante d'accélération de la gravité g . Sous forme adimensionné, ce terme fait apparaître la fréquence de Brunt-Väisälä au

carré, $N^2 = \frac{-g\bar{\rho}'}{\bar{\rho}}$. Hors approximation de Bousinesq, deux autres termes traduisent les effets de la stratification en densité sur les termes de l'équation de Rayleigh (voir Eq. 5.52). Les termes de viscosité ont été regroupés sur la troisième ligne. Le premier terme adimensionné fait apparaître le nombre de Reynolds et présente la contribution de la viscosité pour un écoulement homogène en viscosité. Il présente aussi une contribution supplémentaire, s'ajoutant au second terme, lorsque la viscosité est variable verticalement.

La résolution de ces équations peut ensuite s'effectuer par deux principales méthodes. La méthode de tir ou de "shooting" est la plus simple. Elle consiste à rechercher Ω , la pulsation complexe, en ayant fixé la longueur d'onde k . C'est une méthode itérative pour laquelle, à chaque Ω testé, on part d'une borne du domaine et on calcule les profils point par point jusqu'à la condition limite opposée, en intégrant les équations. On évalue l'erreur avec la condition limite imposée ; l'objectif étant de faire tendre cette erreur vers 0. La seconde méthode est de résoudre le système d'équation en entier. Cette méthode est celle que nous avons utilisée grâce au code de stabilité linéaire LiSa. Dans cette méthode, les équations sont complétées de conditions aux limites, dont l'implémentation dans le code *LiSa* est développé dans la partie suivante.

5.3.3 Ajout des conditions aux limites

Suivant les cas, différents types de conditions aux limites sont imposées sur les frontières supérieures et inférieures du domaine. Le domaine est en effet considéré monodimensionnel dans la direction variable z , les directions longitudinales (x) et transverses (y) étant implicitement prise en compte dans la définition de perturbations périodiques (voir Eq. 5.33). Deux types de conditions limites ont été implémentées dans le code, aux frontières en $z = z_f$:

- mur glissant (ou symétrie) : on impose une condition de type Dirichlet homogène, i.e. nulle, sur la composante verticale de la vitesse des perturbations : $\tilde{w}(z_f) = 0$; et une condition de type Neumann homogène sur les composantes longitudinales et transversales de la vitesse, correspondant à un flux nul : $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}(z_f) = 0$ et $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z}(z_f) = 0$.
- mur avec adhérence : on impose des conditions de types Dirichlet homogènes sur toutes les composantes du champ de vitesse : $\tilde{u}(z_f) = 0$, $\tilde{v}(z_f) = 0$ et $\tilde{w}(z_f) = 0$.

Comme dans notre cas, la masse volumique et la viscosité sont seulement advectées par l'écoulement et que le champ de vitesse est à divergence nulle, il n'y a pas d'autres conditions aux limites à spécifier.

Les conditions aux limites sont imposées en travaillant directement sur le système d'équation et plus particulièrement les matrices $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$. L'écoulement étant discrétisé spatialement dans la direction verticale z en N points, les matrices $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ sont de taille $6N \times 6N$.

a) Conditions aux limites de type Dirichlet :

Pour des conditions aux limites de type Dirichlet homogènes (exemple : $\tilde{u}(H) = 0$), on utilise une méthode classique qui consiste à multiplier directement la colonne associée à

la variable par sa valeur. Dans notre cas, on applique des vitesses nulles aux bornes donc on multiplie par zéro la colonne associée. La valeur de la variable étant déjà imposée, il est inutile de la calculer. On peut donc annuler aussi la ligne associée en la multipliant par exemple par zéro. Enfin, la ligne et la colonne de zéros peuvent être supprimés car ils sont inutiles pour le calcul et apportent des valeurs propres marginales. Si on applique la condition limite $\tilde{u}(H) = 0$, avec \tilde{u} première variable, et $z = H$ correspondant au premier point du vecteur position, on obtient la matrice $\underline{\underline{A}}$ suivante :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & A_{11} & \vdots \\ a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & A_{1N} & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{pmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & A_{P1} & \vdots \\ a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & A_{PN} & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (5.57)$$

Pour la matrice $\underline{\underline{B}}$, le même raisonnement entraîne la suppression des ligne et colonnes associés à la condition limite traitée.

b) Conditions aux limites de type Neumann :

Pour des conditions aux limites de type Neumann, nous avons développé une méthode qui consiste à imposer les conditions limites en modifiant de nouveau les matrices $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ à l'aide de la matrice de dérivation.

Prenons comme exemple la perturbation de vitesse projetée sur x , \tilde{u} , qui a des conditions aux limites de type Neumann en $z = H$, $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}(H) = 0$. Par définition de la matrice de dérivation $\underline{\underline{D}}$, on obtient :

$$\tilde{u}' = \begin{pmatrix} \tilde{u}'(z = H) \\ \vdots \\ \tilde{u}'(z = 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}'_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}'_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & \dots & D_{1N} \\ \vdots & D & \vdots \\ D_{N1} & \dots & D_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_N \end{pmatrix}, \quad (5.58)$$

où \tilde{u}' est la dérivée de \tilde{u} . On obtient alors :

$$\tilde{u}'_1 = \sum_{j=1}^N D_{1j} \tilde{u}_j = D_{11} \tilde{u}_1 + \sum_{j=2}^N D_{1j} \tilde{u}_j = 0,$$

soit

$$\tilde{u}_1 = - \sum_{j=2}^N \frac{D_{1j} \tilde{u}_j}{D_{11}}. \quad (5.59)$$

Si on considère maintenant la matrice $\underline{\underline{A}}$ en entier, avec $\underline{\underline{X}}$ le vecteur composé des

variables \tilde{u} , \tilde{w} , \tilde{p} , $\tilde{\rho}$, $\tilde{\mu}$, de longueur $6 \times N$, on obtient, quelque soit i :

$$(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}})_i = \sum_{j=1}^{6N} A_{ij} X_j, \quad (5.60)$$

$$= A_{i1} X_1 + \sum_{j=2}^{6N} A_{ij} X_j, \quad (5.61)$$

$$= -A_{i1} \sum_{j=2}^N \frac{D_{1j} X_j}{D_{11}} + \sum_{j=2}^{6N} A_{ij} X_j. \quad (5.62)$$

$$(5.63)$$

En notant $\underline{\underline{A}}^*$ la matrice $\underline{\underline{A}}$ modifiée pour prendre en compte la condition aux limites de type Neumann homogène $\tilde{u}'_1 = 0$, on montre que :

$$A_{ij}^* = \begin{cases} A_{ij} - A_{i1} \times \frac{D_{1j}}{D_{11}} & \text{si } j \in [2, N], \\ A_{ij} & \text{si } j > N. \end{cases}$$

Implémenter ce type de condition aux limites revient donc à modifier la colonne de sous-matrices associée à la condition aux limites concernée (correspondant pour l'exemple à $j \in [1N]$). On peut remarquer que la colonne correspondant au points d'application de la condition limite (ici $j = 1$) est devenue inutile puisqu'elle n'entre plus dans le calcul (voir Eq. 5.63) : elle peut être supprimée. De même, la ligne associée à ce point est inutile car la valeur calculée est imposée par la condition limite dans l'équation (5.59). On obtient donc, pour l'exemple précédent, l'expression suivante de $\underline{\underline{A}}$ modifiée :

$$\left(\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{ccc} a_{22} - a_{21} \frac{d_{12}}{d_{11}} & \dots & a_{2n} - a_{21} \frac{d_{1n}}{d_{11}} \\ \vdots & A_{11}^* & \vdots \\ a_{p2} - a_{p1} \frac{d_{12}}{d_{11}} & \dots & a_{pn} - a_{p1} \frac{d_{1n}}{d_{11}} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & A_{12}^* & \vdots \\ a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{array} \right) & \dots & \left(\begin{array}{ccc} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & A_{1N}^* & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{array} \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\begin{array}{ccc} a_{12} - a_{11} \frac{d_{12}}{d_{11}} & \dots & a_{1n} - a_{11} \frac{d_{1n}}{d_{11}} \\ \vdots & A_{P1}^* & \vdots \\ a_{p2} - a_{p1} \frac{d_{12}}{d_{11}} & \dots & a_{pn} - a_{p1} \frac{d_{1n}}{d_{11}} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & A_{P2}^* & \vdots \\ a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{array} \right) & \dots & \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & A_{PN}^* & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{array} \right) \end{array} \right), \quad (5.64)$$

La définition des conditions aux limite de type Neumann homogène choisie impose une condition sur la matrice de dérivation $\underline{\underline{D}}$: il faut que celle-ci ne s'annule pas au point concerné (dans l'exemple choisi, $d_{11} \neq 0$). Cette condition est très restrictive pour les mappings : ils ne doivent pas présenter de tangente verticale aux bornes du domaine (pour que la dérivée de l'inverse de la fonction mapping ne s'annule pas).

Remarque : Dans le cas de domaines infinis, on impose des conditions aux limites de type Dirichlet homogène à l'infini ce qui revient à éliminer les lignes et colonnes correspondant aux points placés à l'infini.

Finalement, après imposition des conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann

homogène sur les variables \tilde{u}, \tilde{v} et \tilde{w} , on obtient un système d'équation à résoudre de taille $(3N + 3(N - 2))^2$. On obtient ensuite les valeurs propres et les modes propres de ce système numériquement, en utilisant la fonction *eig* de matlab.

5.4 Test de convergence

5.4.1 Résultats fournis par *LiSa*

Nous utilisons le code *LiSa* afin de réaliser un étude de stabilité temporelle. Le code nous fournis donc comme résultat les champs des perturbations présentés Eq. (5.33) :

$$[\hat{u}, \hat{p}, \hat{\rho}, \hat{\mu}] = [\tilde{u}(z), \tilde{p}(z), \tilde{\rho}(z), \tilde{\mu}(z)] e^{ikx+i\beta y-i\Omega t}, \quad (5.65)$$

avec $(k, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\Omega \in \mathbb{C}$.

Le vecteur d'onde (k, β) étant une donnée d'entrée du problème, le code nous fournit le spectre des valeurs propres du problème : $\Omega = \omega - i\sigma$, où ω représente la pulsation du mode et σ son taux de croissance, ainsi que les profils verticaux des modes $(\tilde{u}(z), \tilde{p}(z), \tilde{\rho}(z), \tilde{\mu}(z))$. Un spectre typique, correspondant aux paramètres ($Ri = 0.15$, $Re = 8 \cdot 10^5$, $W = 1$, $k^* = 0.46$) est présenté figure (5.5).

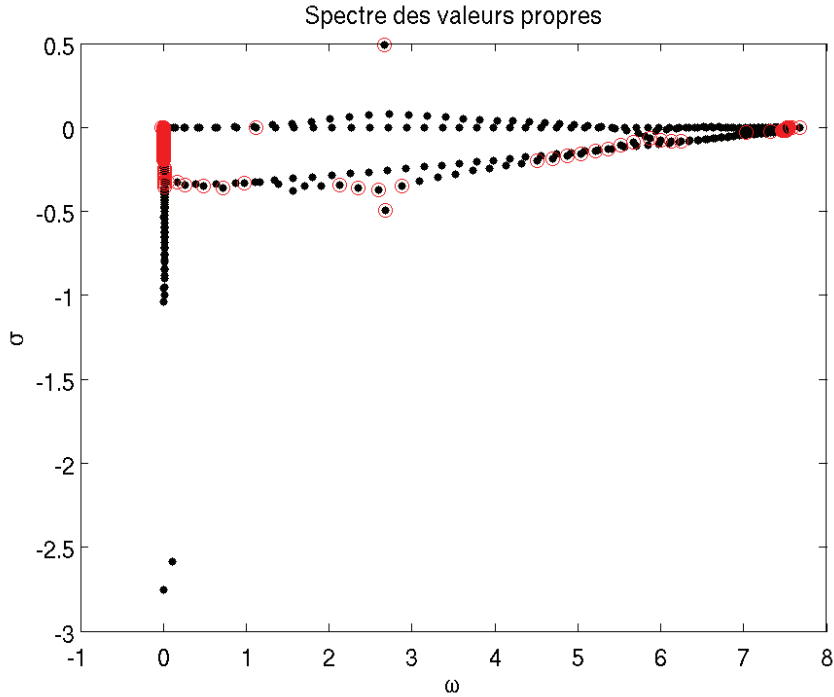


FIGURE 5.5 – Spectre des valeurs propres ($Ri = 0.15$, $Re = 8 \cdot 10^5$, $W = 1$, $k^* = 0.46$).

Les valeurs propres entourées sont celles définies comme convergées grâce à une méthode définie ensuite (§5.4.1). Pour chaque valeur propre, nous pouvons ensuite accéder au mode associé correspondant à $[\tilde{u}(z), \tilde{p}(z), \tilde{\rho}(z), \tilde{\mu}(z)]$ dans l'équation (5.65). Un exemple de ces modes, le mode de KH ($\omega = 2.671s^{-1}$, $\sigma = 0.488s^{-1}$) est représenté figure (5.6).

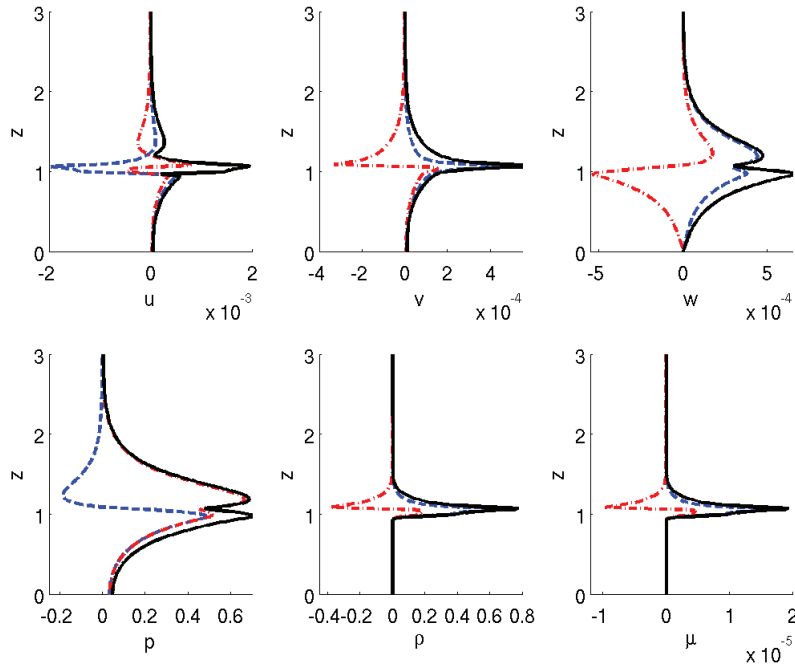


FIGURE 5.6 – Modes propres associés au mode de KH ($Ri = 0.15$, $Re = 8 \cdot 10^5$, $W = 1$, $k^* = 0.46$); $--$: partie réelle, $---$: partie imaginaire, $-$: amplitude.

Ces informations nous permettent ensuite de reconstituer le mode physique, en prenant la partie réelle de l'expression (5.65). La figure (5.7) présente par exemple le mode dans le plan (x, z) , les isocontours présentant les perturbations de masse volumique ($\tilde{\rho}$) (similaires aux isocontours de viscosité $\tilde{\mu}$), et les flèches représentant la perturbation de vitesse (\tilde{u}).

Enfin, nous pouvons obtenir, à partir du code, la décomposition en polynômes de Chebyshev des modes (figure 5.8), ce qui nous permet d'évaluer la convergence des modes. En effet, comme pour tout problème d'interpolation polynomiale, si la résolution n'est pas assez fine (en nombre de polynômes correspondant aussi au nombre de points dans notre cas), la pondération attribués aux polynômes de plus haut degrés sera importante. Si le mode est convergé comme sur la figure (5.8), la pondération de ces polynômes de haut degrés est nulle.

Une méthode basée sur cette propriété de l'interpolation polynomiale a été développée afin d'évaluer la convergence des modes.

Afin de s'assurer de la fiabilité des résultats, un critère de convergence a été développé. Les cas non-convergés ont ensuite été analysés et le mapping complexe présenté ci-dessus §(5.2.3) a été développé pour améliorer la qualité des résultats.

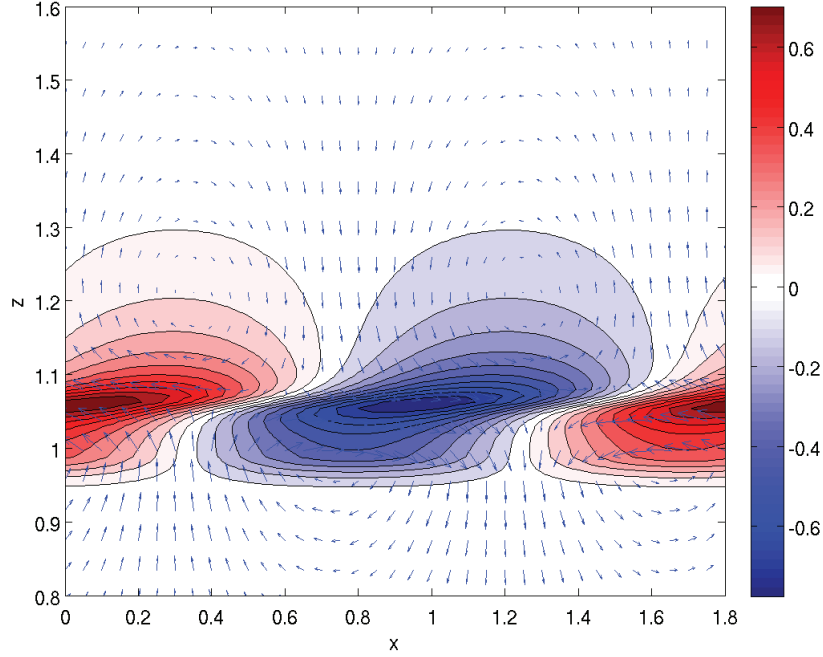


FIGURE 5.7 – Modes propres associés au mode de KH représenté dans le plan (x, z) ; isocontours : $\tilde{\rho}$, flèches : \tilde{u} ($Ri = 0.15$, $Re = 8 \cdot 10^5$, $W = 1$, $k^* = 0.46$).

5.4.2 Critère de convergence

Le critère de convergence utilisé appartient au code LiSa originel et a été proposé par Pierre Brancher. Il consiste à poser, pour chaque valeur propre considérée, un critère sur l'énergie des derniers coefficients de la décomposition en polynômes de Chebyshev. Tout d'abord, les coefficients c_n^v de la décomposition en polynômes de Chebyshev sont calculés pour les N modes propres et pour les V variables (dans notre cas, pour \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{w} , \tilde{p} , $\tilde{\rho}$, $\tilde{\mu}$) :

$$\tilde{u}(z) = \sum_{n=1}^N c_n^1 T_n(s), \quad (5.66)$$

où T_n est le n^{ieme} polynôme de Chebyshev, z est la coordonnée verticale de l'espace physique et s est la coordonnées dans l'espace spectral (points de Gauss-Lobatto).

On choisit alors un pourcentage p permettant de définir une fraction des derniers coefficients de Chebyshev par T_n , $n \in [P, N]$ et $P = \text{int}(1 - p)N$; et un critère ϵ . On définit alors la condition de convergence par :

$$\sum_{n=N-P}^N |a_n|^2 < \epsilon \sum_{n=1}^N |a_n|^2. \quad (5.67)$$

Cette condition doit être vérifiée pour chaque variable pour que la valeur propre et le mode associé soient qualifiés de convergés. Dans les cas où une des variables précédentes

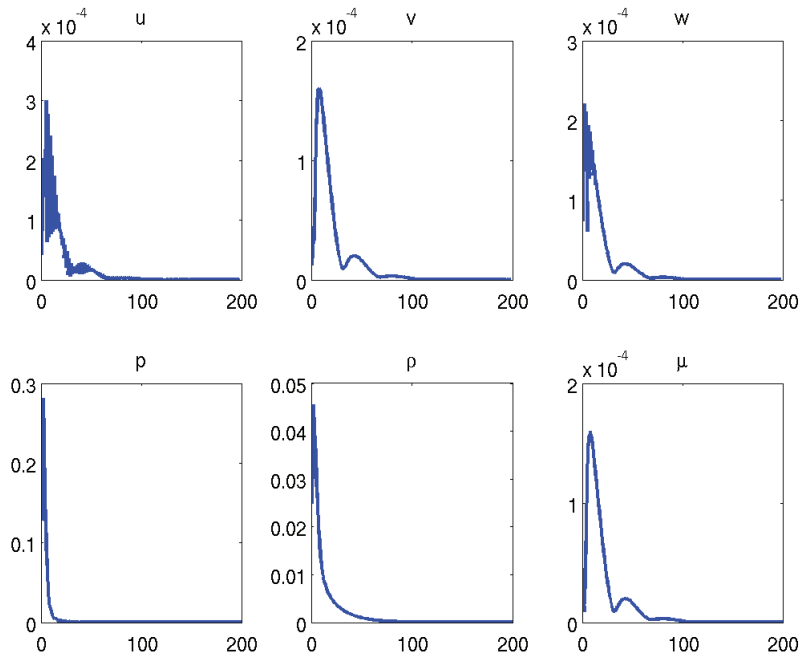


FIGURE 5.8 – Amplitude des coefficients de Chebyshev associés au mode de KH ($Ri = 0.15$, $Re = 8 \cdot 10^5$, $W = 1$, $k^* = 0.46$), en fonction du numéro n du polynôme.

était fixée (\tilde{v} dans un calcul bi-dimensionnel par exemple), cette variable est extraite du critère afin de ne pas le fausser.

Ce critère de convergence est maintenant fixé et utilisé afin de déterminer les paramètres utilisés pour les mappings et la confiance dans les résultats.

Après quelques tests, nous avons choisi de baser le critère de convergence sur les 10 derniers pour cents des modes du spectre : $\frac{P}{N} = 10\%$. Afin de déterminer un seuil de confiance sur la convergence des modes, nous avons comparé l'erreur sur les mesures et la valeur du critère de convergence ϵ obtenu. Pour cela, nous nous sommes placés dans un cas classique d'étude ($Ri = 0.15$, $W = 0$, $Re = 810^5$) et nous avons calculés le taux de croissance pour deux résolutions différentes (avec des paramètres de mapping constants). Ce taux de croissance est représenté figure (5.9). Nous pouvons observer une très bonne adéquation des deux courbes pour des valeurs inférieures à $k^* = 0.7$, caractéristiques d'une bonne convergence des modes pour ces deux résolutions. On définit alors l'erreur estimée sur le taux de croissance, par la différence, en valeur absolue, entre la valeur calculée avec une résolution de 200 points et celle calculée avec une résolution de 400 points, adimensionnée par le taux de croissance maximal pour ces paramètres (Re , Ri , W) :

$$\text{Erreur} = \left| \frac{\sigma_{400\text{pts}} - \sigma_{200\text{pts}}}{\max(\sigma_{400\text{pts}})} \right|.$$

Cette erreur est représentée figure (5.10). Pour $k^* < 0.7$, on observe une erreur inférieure à 2% et elle est inférieure à 0.5% sur la partie qui nous intéresse particulièrement, la zone

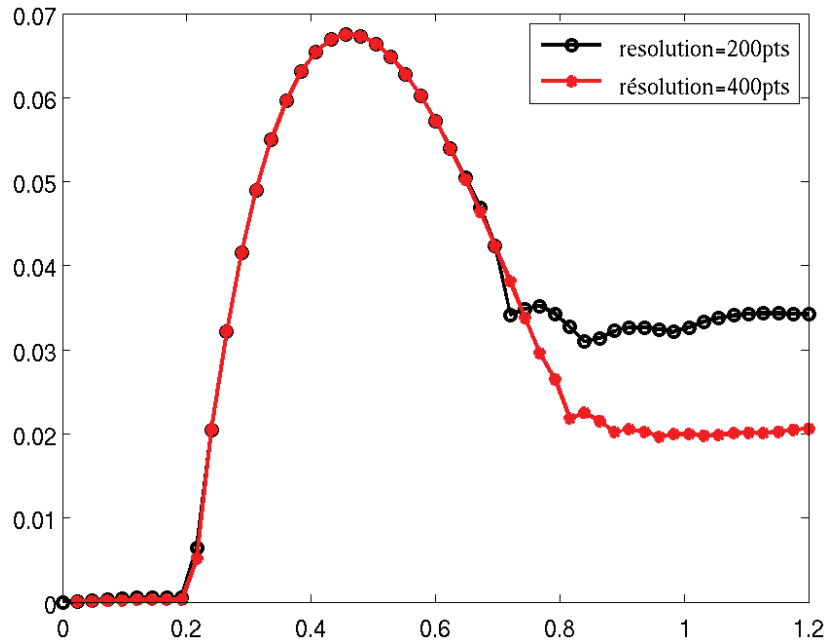


FIGURE 5.9 – Taux de croissance obtenu pour deux résolutions différentes : 200 points et 400 points ($Ri = 0.15$, $W = 0$, $Re = 810^5$).

instable ($k^* \in [0.240.63]$), où le taux de croissance est strictement positif. Pour $k^* > 0.7$, les résultats divergent fortement, l'erreur atteint 20%. Nous pouvons affirmer que les résultats obtenus avec la résolution de 200 points sur cette zone ne sont pas convergés. Nous avons ensuite tracé sur la même figure (5.10) le critère de convergence ϵ_m défini pour chaque point comme le minimum des critères ϵ vérifiant l'équation (5.67), soit :

$$\epsilon_m = \frac{\sum_{n=1}^N |a_n|^2}{\sum_{n=N-P}^N |a_n|^2}.$$

Nous observons alors une bonne corrélation entre l'erreur mesurée et le critère de convergence proposé. Une zone convergée se démarque assez clairement entre $k^* = 0.2$ et $k^* = 0.7$. Nous observons alors qu'en fixant le critère de convergence ϵ à 0.1, nous obtenons une zone de valeurs propres convergés correspondant à une faible erreur, et donc satisfaisante. Le même type de comportement a été observé sur de nombreuses configurations différentes.

Ayant un paramètre de convergence défini, nous l'avons utilisé afin de fixer au mieux les paramètres du mapping arctanh-exp, majoritairement utilisé.

5.4.3 Détermination des paramètres du mapping

Notre objectif étant de travailler sur des couches de mélange asymétriques, nous avons cherché les paramètres de mapping donnant de meilleurs résultats ; c'est à dire pour un

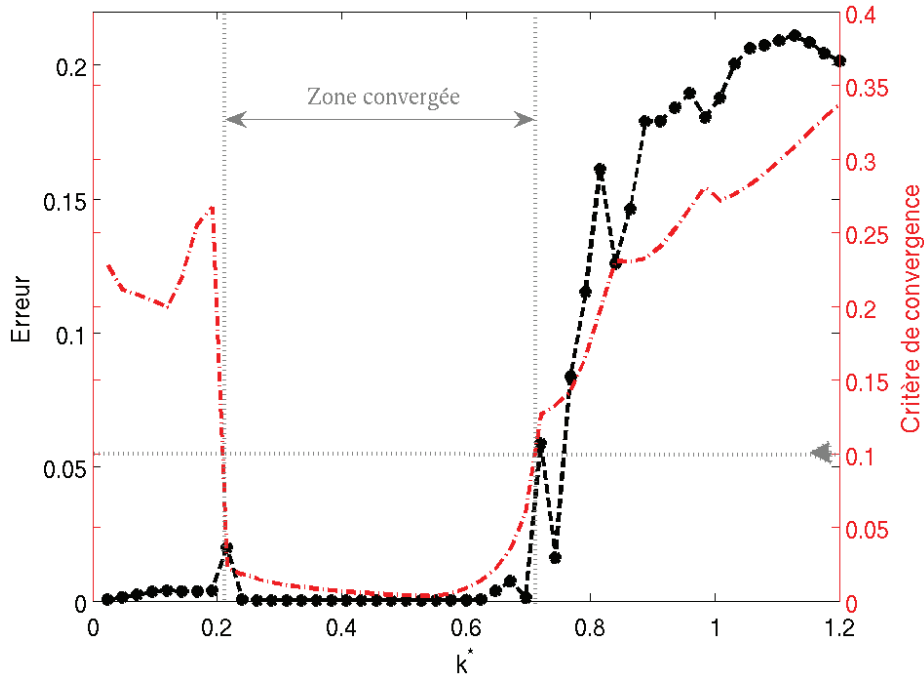


FIGURE 5.10 – Présentation de l’erreur sur le taux de croissance (-●-) et le critère ϵ_m de convergence (-.-).

nombre de points de grille fixé, présentant un plus grand nombre de points convergés ou ayant le plus faible critère de convergence ϵ_m . Nous nous sommes concentrés sur l’utilisation du mapping arctanh-exp, présenté §(5.2.2). Dans notre étude, l’interface entre les deux fluides, définie par le point d’inflexion, est située en $h = 1$. Cependant les profils étant asymétriques, nous avons testé la variation de la position de la zone raffiné ainsi que la variation de la résolution au niveau de l’interface (voir figure 5.11).

Nous nous proposons alors de comparer pour ces trois cas choisis, le critère de convergence ϵ_c et ainsi d’évaluer les différents mappings.

Cas étudiés	Mapping 1	Mapping 2	Mapping 3
$k^* = 0.3$, résolution de 200 points	0.0128	0.0135	0.0116
$k^* = 0.45$, résolution de 200 points	0.00595	0.00589	0.00743
$k^* = 0.65$, résolution de 200 points	0.0412	0.0227	0.0132
$k^* = 0.65$, résolution de 300 points	0.00785	0.00306	0.00193
$k^* = 0.8$, résolution de 400 points	0.0956	0.0775	0.0618
$k^* = 1$, résolution de 400 points	0.260	0.255	0.266

TABLE 5.1 – Convergence obtenue pour différents mappings : mapping 1 ($h = 1.2$ et $b = 0.98$), mapping 2 ($h = 1.1$ et $b = 0.99$), mapping 3 ($h = 1.05$ et $b = 0.99$).

Après étude de la convergence pour ces différents mappings (voir table 5.1), nous avons choisi le mapping 3 ($h = 1.05$ et $b = 0.99$) car celui-ci présente des critères de

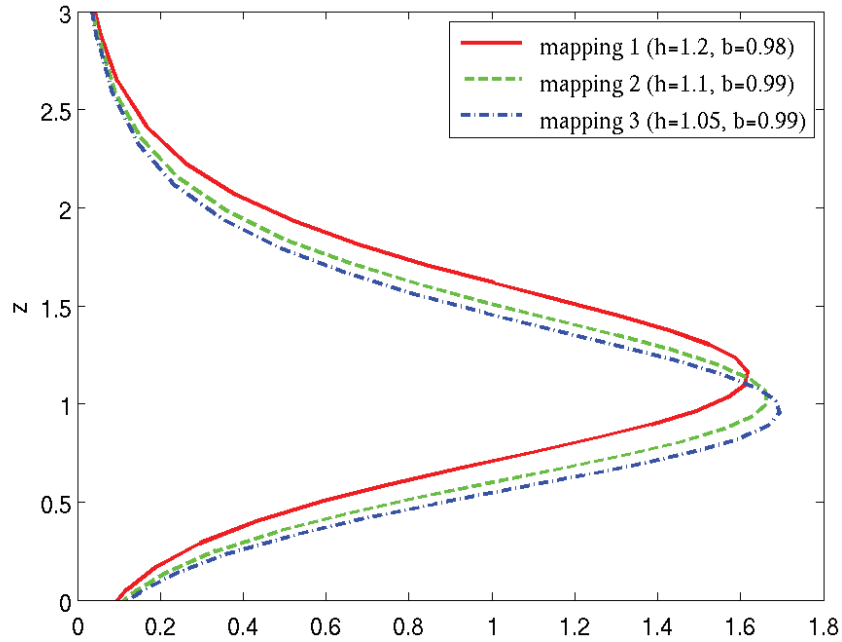


FIGURE 5.11 – Présentation des différents mapping testés : a. mapping 1 ($h = 1.2$ et $b = 0.98$), b : mapping 2 ($h = 1.1$ et $b = 0.99$), c : mapping 3 ($h = 1.05$ et $b = 0.99$).

convergence les plus bas : il est le mieux adapté à notre configuration. Ce mapping est le plus résolu en $z = 1.05$, nous pouvons remarquer que l'asymétrie du profil ne peut être négligée : il est important de bien résoudre la partie basse de l'interface où les gradients de vitesse, de masse volumique et de viscosité sont les plus importants, principalement pour les courtes longueurs d'ondes $k^* \sim 0,8$ posant des problèmes de convergence. D'autre part, les plus grandes longueurs d'ondes sont moins sensibles aux forts gradients, et un mapping encore plus centré sur la partie basse de l'interface diminuerait leur précision (voir Table 5.1, valeur $k^* = 0.45$).

Ces valeurs ($h_m = 1,05$ et $b = 0,99$) seront conservées lors de l'utilisation du mapping arctanh-exp, sauf si une indication contraire est donnée.

5.4.4 Caractérisation des modes faiblement convergés

Comme nous l'avons vu dans la partie (5.4.2) précédente, des problèmes de convergences des modes instables sont observés pour les hauts nombres d'ondes et les faibles taux de croissance. Nous avons donc étudié ces modes pour identifier l'origine de ces problèmes et pouvoir ensuite y remédier.

a) Comparaison entre modes convergés et non-convergés

Dans un premier temps, nous nous proposons de comparer les résultats fournis par le code LiSa pour deux modes, l'un convergé, l'autre non-convergé appartenant à la zone

" k^* important et σ faible" observée précédemment. Nous avons choisi de nous placer dans la configuration précédente ($Ri = 0.15$, $W = 0$, $Re = 8 \cdot 10^5$), et de comparer les modes associés aux nombres d'onde $k^* = 0.25$ et $k^* = 0.75$. Le spectre des valeurs propres est représenté figure (5.12).

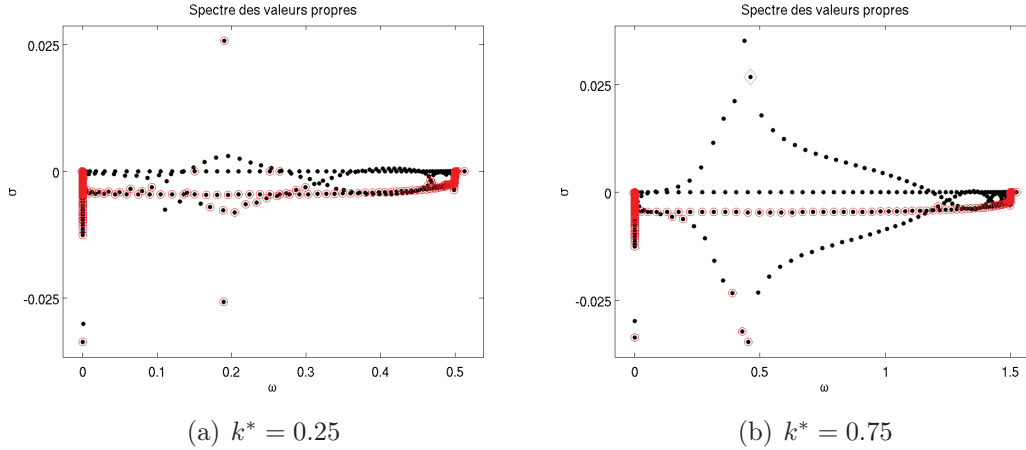


FIGURE 5.12 – Présentation du spectre des valeurs propres pour $k^* = 0$. ($Ri = 0.15$, $W = 0$, $Re = 8 \cdot 10^5$).

Dans le cas du mode convergé, correspondant à $k^* = 0.25$, nous pouvons remarquer que le mode correspondant à l'instabilité de cisaillement qui nous intéresse, type Kelvin-Helmholtz, est clairement détaché des autres modes. Certains autres modes non-convergés sont aussi instables mais leur taux de croissance reste faible. Dans le cas du mode non-convergé, nous pouvons observer, que le spectre continu faiblement instable dans le cas précédent, est plus important : son amplitude, en terme de taux de croissance est du même ordre que l'instabilité de type Kelvin-Helmholtz, et vient perturber celle-ci. Nous pouvons donc supposer que la non-convergence de ces modes caractérisés par un nombre d'onde important est liée à la non convergence du spectre continu instable. La figure (5.13) présente la comparaison entre un mode associé à une de ces valeurs propres appartenant au spectre continu, par exemple celle positionnée en ($\omega = 0.46$, $\sigma = 0.027$), marqué par un \diamond figure (5.12), et un mode de type Kelvin-Helmholtz convergé, par exemple celui associé à $k^* = 0.25$. Cette figure se concentre sur la partie du mode associé à la masse volumique ρ . En effet, il apparait que cette partie est limitante lors du calcul du critère de convergence : c'est sur cette partie du mode que les coefficients de Chebyshev divergent le plus. Nous avons représenté dans un premier temps le mode de densité pour les deux cas choisis, puis la représentation des coefficients de Chebyshev associés au mode de densité. Dans le cas de modes non-convergés, nous pouvons constater que le mode tend vers un Dirac, contrairement au cas convergé. La représentation des coefficients de Chebyshev confirme cette explication. En effet, dans le cas non-convergé, on observe une croissance linéaire des coefficients les plus élevés, la fonction linéaire étant la transformée d'un Dirac sur la base des polynômes de Chebyshev. Donc, les modes de type Kelvin-Helmholtz correspondant aux grandes longueur d'ondes sont "perturbés" par un spectre continu

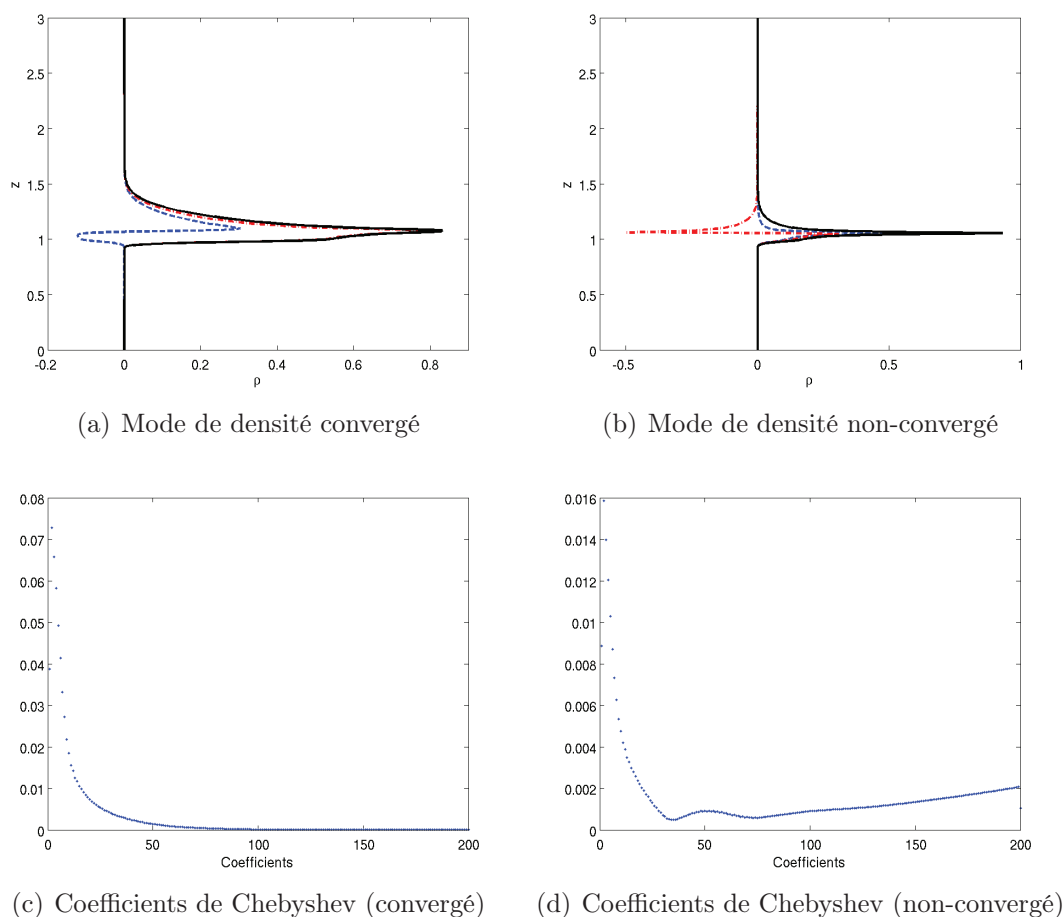


FIGURE 5.13 – Présentation des modes et des coefficients.

non-convergé. Ces modes ont, pour les grandes longueurs d'ondes, un taux de croissance du même ordre que le mode de K-H et leur spectre tend vers un Dirac.

b) Augmentation de la résolution

Si ces modes ne sont pas convergés, peut-être qu'une augmentation de la résolution leur permettra de converger ?

Nous avons vu sur la figure (5.9) que multiplier la résolution par deux augmente la convergence de certains modes de K-H à la limite de cette zone ($k^* \in [0.7 \ 0.8]$) mais une grande partie de ces modes restent divergents. Sur la figure (5.14), nous nous proposons d'observer l'évolution du spectre avec la résolution. Nous pouvons remarquer que l'augmentation de résolution permet de diminuer l'amplitude de ces modes, ce qui entraîne la convergence du mode de K-H. Nous pouvons aussi remarquer que lorsque la résolution augmente, ces modes semblent tendre vers 0, mais très lentement.

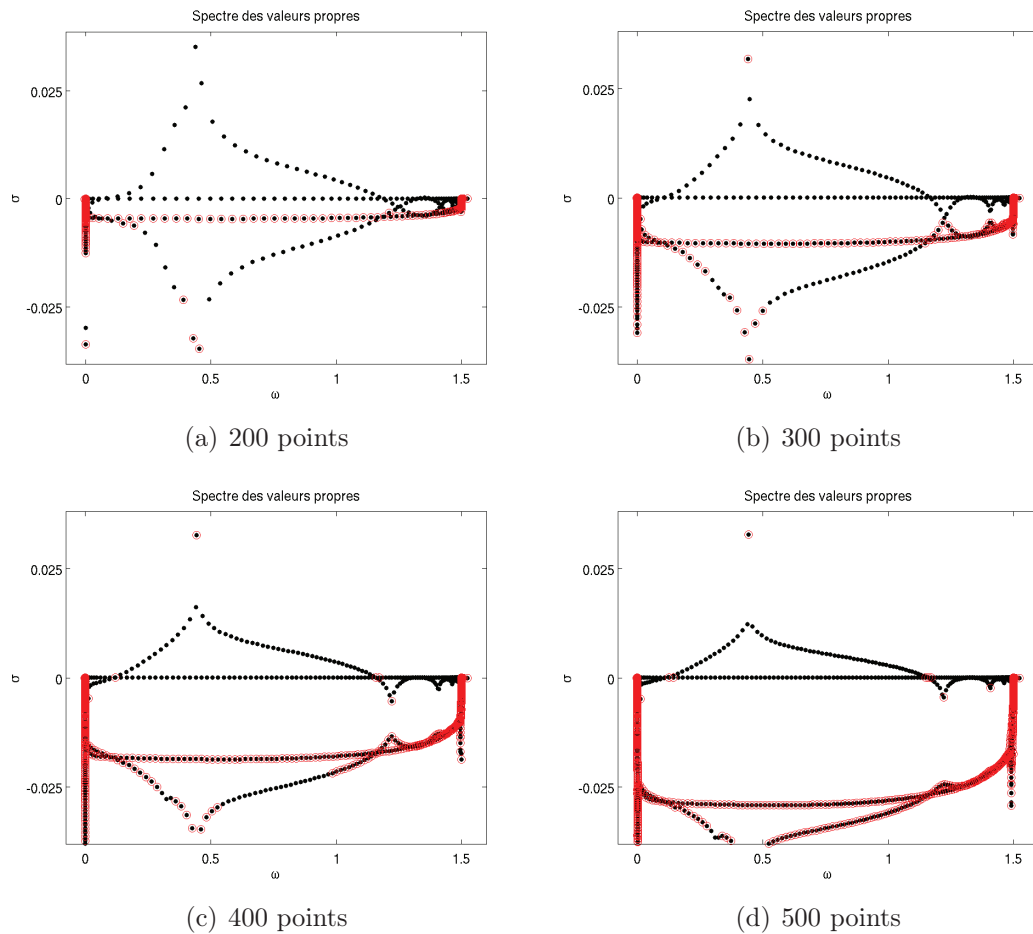


FIGURE 5.14 – Présentation du spectre des valeurs propres pour différentes résolutions ($Ri = 0.15$, $W = 0$, $Re = 8 \cdot 10^5$, $k^* = 0.75$).

5.5 Couches critiques d'absorption d'ondes internes

Ces modes étant observés pour de grands nombres d'ondes, correspondant à des courtes longueurs d'ondes, ces modes pourraient correspondre à un spectre continu d'ondes internes piégés dans des couches critiques. L'énergie de ces ondes se concentre alors dans une couche très fine ce qui pourrait expliquer la forme de Dirac observé sur les modes. Ces couches critiques ont été observés dans de nombreuses études d'écoulements cisailés (voir par exemple [Baines \(1998\)](#) p.209 et [Booker and Bretherton \(1967\)](#)). Ces modes seraient donc physique mais devraient posséder un taux de croissance neutre.

5.5.1 Équation de réfraction

Si des ondes internes se développent dans notre étude, elles seront en interaction avec une stratification non linéaire et un écoulement moyen cisailé, représentés figure (5.15) dans notre configuration de base.

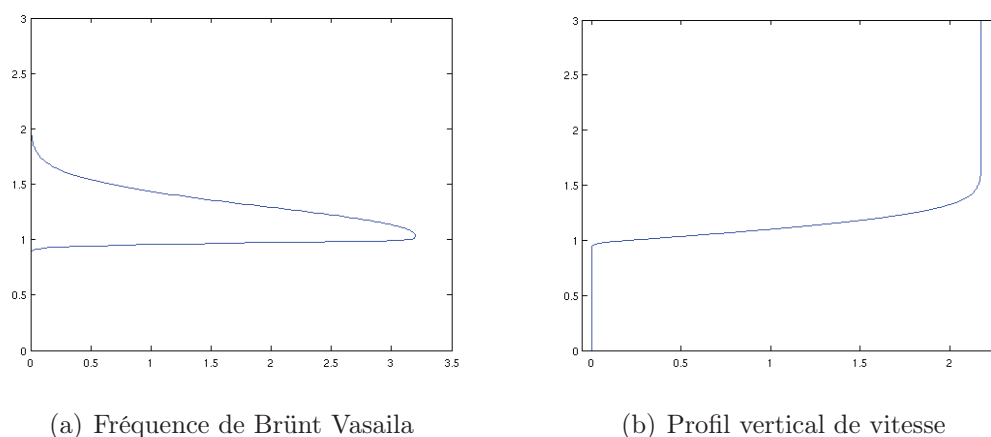


FIGURE 5.15 – Fréquence de Brünt Vasaila (a) et profil vertical de vitesse (b) pour l'écoulement initiale de type erf asymétrique, $\lambda = 0.1$.

A partir de la méthode WKB¹ utilisée dans la théorie de la réfraction, on obtient l'équation :

$$\Omega[k(z), m(z), z] = \Omega_0 \quad \text{avec} \quad \Omega[k, m, z] = \sqrt{\frac{g}{\rho_r} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \frac{k}{\sqrt{m^2 + k^2}}} + k\bar{u}, \quad (5.68)$$

où (k, m) est le vecteur d'onde et ρ_r une masse volumique de référence. Cette équation entraîne alors, en fonction de la stratification et de l'écoulement, l'évolution de la trajectoire des ondes. Les principaux mécanismes sont : la réflexion et l'absorption. Ils sont présentés figure (5.16).

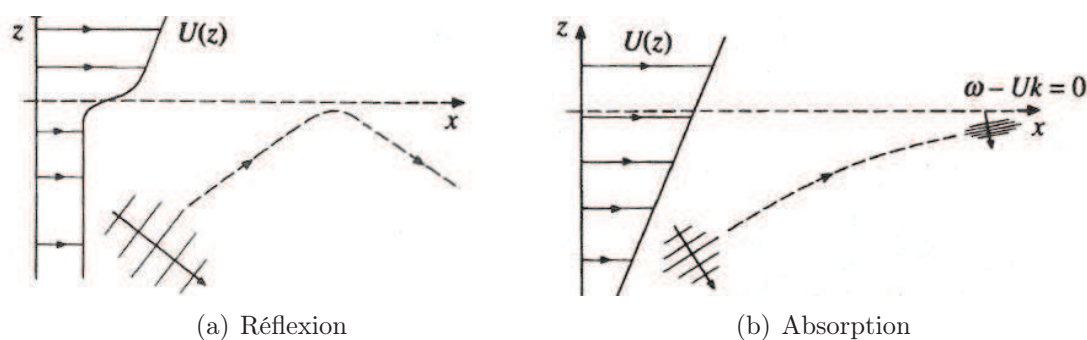


FIGURE 5.16 – Schéma des mécanismes de réflexion (a) et d'absorption (b) pour un écoulement cisailé (d'après Baines, 1998).

On peut alors représenter la réfraction de ces ondes internes par le courant moyen et la stratification en masse volumique, en traçant les iso-contours de la fonction Ω dans le

1. WKB, acronyme de Wentzel-Kramers-Brillouin, est une méthode d'approximation d'équations différentielles linéaires du second ordre, à coefficients lentement variables. Basée sur un développement asymptotique, elle s'appuie sur la séparation de deux échelles de variations temporelles.

plan (m, z) , pour k fixé. Ceci revient à représenter la fonction :

$$m(z) = \frac{m(0)}{|m(0)|} k \left[\left(\frac{N(z)}{\omega_0 - k\bar{u}(z)} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}},$$

définie sur z à condition que $0 < \omega_0 - k\bar{u}(z) < N(z)$. Cette condition correspond à l'exclusion des configurations de réflexion à l'intérieur du domaine ($\omega_0 - k_x U(z) \sim N(z)$) et de couche limite d'absorption ($\omega_0 - k_x U(z) \sim 0$). La figure (5.17) représente la trajectoire des ondes, caractérisées par une pulsation constante, dans le plan (m, z) .

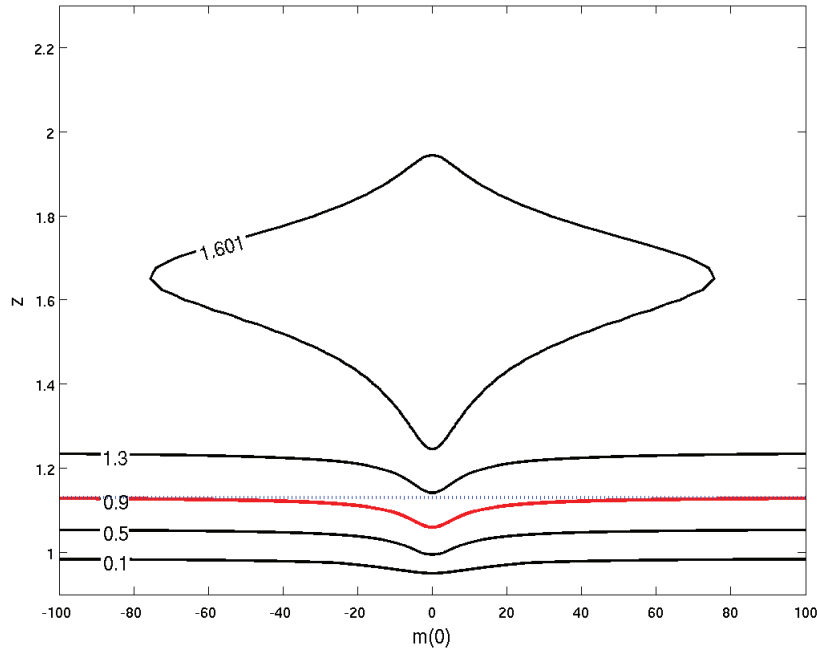


FIGURE 5.17 – Portrait de phase pour $Ri = 0.15$, $k^* = 0.8$, $\lambda = 0.1$.

Nous observons des trajectoires correspondant à des couches critiques (comme par exemple – pour $\omega_0 = 0.9$) avec vers des asymptotes horizontales (...) où $m \rightarrow \infty$ et $z \rightarrow z_c$, correspondant à des couches d'absorptions. Nous observons aussi à l'intérieur de l'interface une zone de réflexion caractérisée par des trajectoires fermées. Les couches d'absorption sont à l'origine des modes continus, de taux de croissance positif.

Afin de valider cette hypothèse, nous avons calculé la pulsation du mode à partir de la formule extraite de la relation de dispersion : $\omega \sim k\bar{u}(z_c)$, avec z_c la position de la couche d'absorption obtenue par observation de modes. Cette valeur est ensuite comparée avec la valeur obtenue par LiSa.

5.5.2 Vérification de l'appartenance à une couche d'absorption

Nous nous plaçons dans le cas d'un écoulement classique de type erf asymétrique, avec sa stratification associée. La viscosité est homogène comme précédemment $W = 0$,

la résolution est de 200 points, le nombre de Richardson étant de $Ri = 0.15$, et $k^* = 0.7$. Nous obtenons alors les valeurs propres présentées figure (5.18). Nous observons ensuite

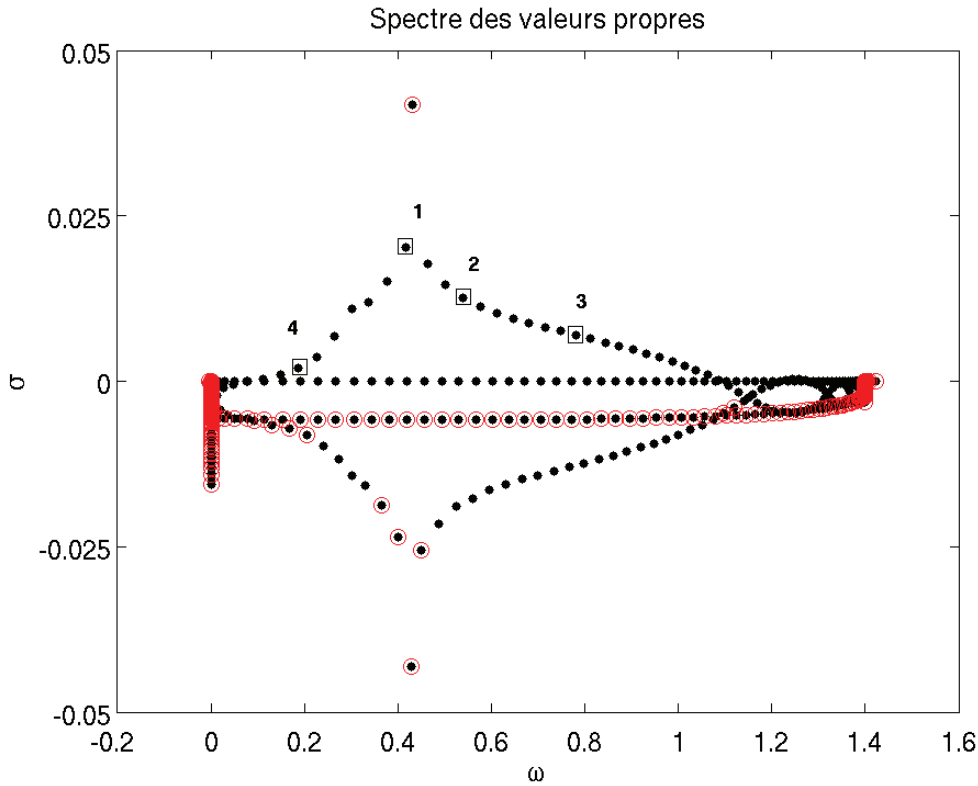


FIGURE 5.18 – Spectre des valeurs propres pour $k^* = 0.7$ ($Ri = 0.15$, $W = 0$, $Re = 8 \cdot 10^5$).

les valeurs propres encadrées figure (5.18), appartenant au spectre continu, suspecté d'être composé d'ondes internes capturées par des couches d'absorptions. Les valeurs dimensionnées de la pulsation sont présentées table (5.2). Pour ce cas, le nombre d'onde dimensionné est $k = 5.2658m$. La position de la couche d'absorption notée z_c est obtenue à partir du mode de masse volumique (voir figure (5.13.b)), en considérant la valeur extraite de la courbe correspondant à l'amplitude maximale. Connaissant l'écoulement en tout point, nous en déduisons ensuite la valeur de l'écoulement moyen en cette position $\bar{u}(z_c)$ afin de vérifier la relation de dispersion : $\omega \sim k\bar{u}(z_c)$.

Point concerné	ω	z_c	$\bar{u}(z_c)$	$k\bar{u}(z_c)$
mode 1	3.415	1.054	0.6509	3.4275
mode 2	4.411	1.076	0.8231	4.3343
mode 3	6.117	1.122	1.148	6.0451
mode 4	1.534	1.01	0.2966	1.5618

TABLE 5.2 – Vérification de la relation de dispersion au niveau des couches d'absorption.

Nous observons bien des valeurs très proches : la différence entre la pulsation ω et le produit $k\bar{u}$ est inférieure, pour les cas testés, à 2%. Cette erreur peut notamment venir de

la discrétisation verticale qui entraîne une erreur d'environ 1% sur la détermination de la valeur z_c à partir du mode de masse volumique.

Afin de vérifier complètement cette hypothèse, nous avons testé l'effet de la viscosité sur ces modes. En effet, dans le visqueux, la couche a une épaisseur définie par $(k^* Re)^{-\frac{1}{3}}$ (voir [Drazin and Reid, 1984](#)). Son épaisseur varie donc en fonction du nombre de Reynolds. En divisant le nombre de Reynolds par 100, nous obtenons cependant une faible influence sur ces modes, une diminution de l'ordre 7% de leur taux de croissance est observée sur ce même cas. Cette épaisseur de la couche d'absorption permet aussi d'avoir une diminution de ces modes avec la résolution. Nous pouvons aussi voir, figure (5.19), que ces modes avaient une influence sur le mode de KH, ou plus précisément que le mode de KH n'est pas convergé si ces modes ont trop d'amplitude. Nous pouvons aussi voir que ces modes sont liés à la stratification car ils tendent vers 0 en même temps que le nombre de Richardson.

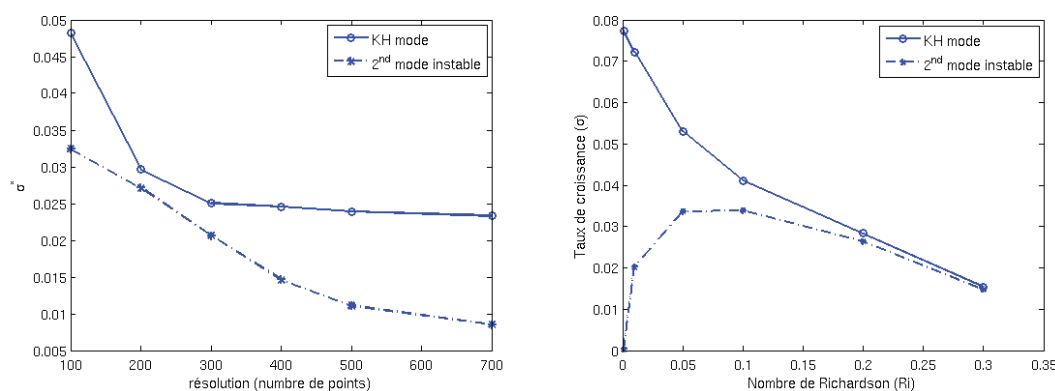


FIGURE 5.19 – Évolution du mode de KH et du 2nd mode le plus instable (appartenant au spectre continu d'absorption) en fonction de la résolution (a) et du nombre de Richardson (b).

Enfin, il n'est pas surprenant que des ondes internes soient associés à un spectre continu. En effet, la longueur d'onde étant fixée et correspondant à la composante longitudinale de leur vecteur d'onde, la composante verticale dépend de la discrétisation verticale. Ainsi, la zone de développement de couches d'absorption est discrétisée suivant z , d'où la discrétisation en pulsation observée, chaque mode correspondant à un point de collocation de cette couche d'absorption (voir schéma figure 5.20).

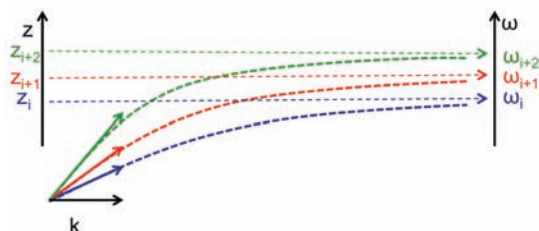


FIGURE 5.20 – Schéma de d'explication du spectre continu discrétisé des ondes internes.

5.6 Développement d'un mapping complexe

L'objectif du mapping complexe est donc d'écarter ce spectre continu non-convergé afin d'observer les modes de KH qui nous intéressent. Cette technique est inspirée de [Fabre et al. \(2006\)](#). Dans ce papier, les auteurs réalisent une étude de stabilité linéaire du tourbillon de Lamb–Oseen. Pour un spectre continu de valeurs propres erronées cachant certains modes physiques, ils mettent au point une technique consistant à "décaler" ce spectre erroné afin de découvrir les modes physiques. La même technique, consistant à repousser le spectre continu associés aux couches critiques est utilisé ici. Ainsi, nous avons construit un mapping complexe :

$$z = f(s) = d(1 - \exp[a(\operatorname{arctanh}(bs) + c)])(1 - \alpha i) \text{ avec } s \in [-1, 1],$$

présenté figure (5.4(f)), qui nous permet de déformer le spectre comme présenté figure (5.21).

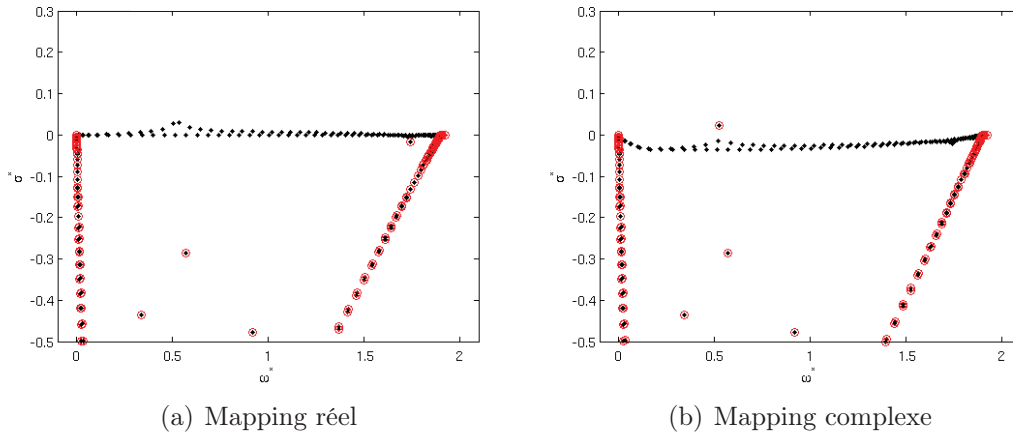


FIGURE 5.21 – Spectre des valeurs propres avec le mapping réel, composé des fonction \exp et $\operatorname{arctanh}$, (a) et le mapping complexe (b).

Nous avons ensuite choisi, après quelques observations, de déterminer le coefficient α en fonction du nombre de Richardson. Pour cela, nous nous sommes placés dans une configuration classique, proche de la courbe marginale où nos modes non-convergés apparaissent. Pour différents nombres de Richardson, nous avons ensuite recherché le paramètre α , le plus petit possible, permettant de ramener le mode non-convergé le plus instable à un taux de croissance nul. Nous obtenons alors les points présentés figure (5.22). Nous avons ensuite choisi une régression linéaire pour relier le paramètre α au nombre de Richardson, et nous obtenons la relation :

$$\alpha = 0.010369 - 0.035621 \cdot \text{Ri} \quad (5.69)$$

Nous choisissons ensuite d'appliquer ce mapping complexe lorsque la convergence est faible, i.e. pour un critère de convergence ϵ_c supérieur à 0.05. Nous obtenons alors pour

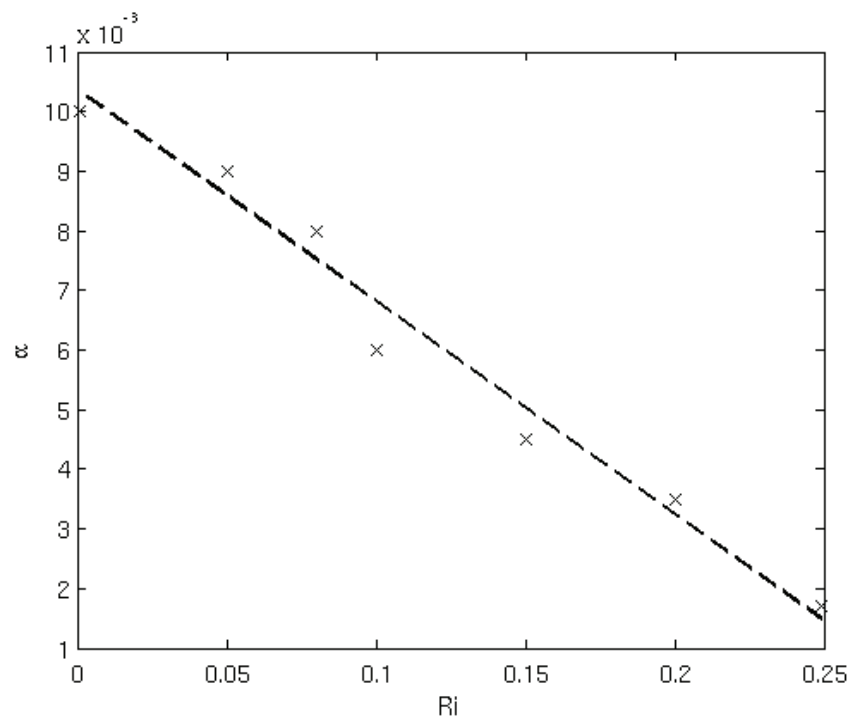


FIGURE 5.22 – Evaluation du paramètre α en fonction du nombre de Richardson

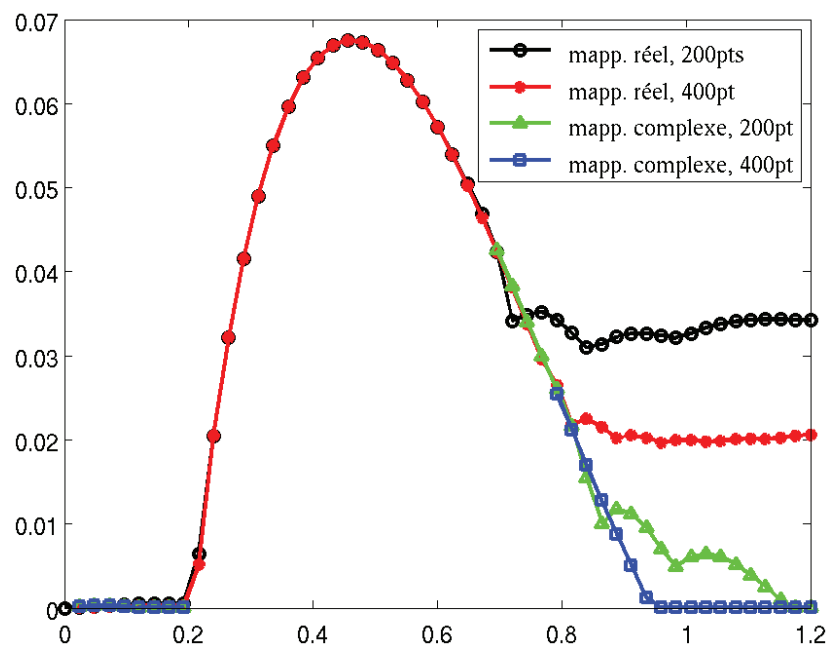


FIGURE 5.23 – Taux de croissance σ^* en fonction du nombre d'onde k^* pour différentes résolutions (200 points et 400 points), avec et sans le mapping complexe.

l'exemple précédent ($Ri = 0.15$, $W = 0$, $Re = 8 \cdot 10^5$) la figure (5.23). Sur cette figure, nous pouvons remarquer que le mapping complexe améliore fortement la qualité des résultats dans la zone à haut nombre d'onde. Les résultats obtenus sont cohérents avec le cas mapping réel : ce mapping ne modifie pas le mode de KH. Enfin, avec une résolution de 400 points et en utilisant le mapping complexe, nous obtenons le taux de croissance de cette instabilité pour tout nombre d'onde choisi k^* .

Conclusion

A partir du code *LiSa* développé par Pierre Brancher et Arnaud Antkowiak, nous avons développé une version du code de stabilité linéaire permettant d'étudier la stabilité d'un écoulement bi-couche 3D parallèle, variable selon la direction z , et stratifié en densité et en viscosité. Cette version du code résout, par projection dans le domaine spectral, un système d'équations linéarisées, composé des équations de Navier-Stokes et de deux équations de transport. Afin d'améliorer la résolution au niveau de l'interface et la convergence des résultats, différents mappings ont été créés. Nous avons ensuite développé une technique permettant d'imposer facilement les conditions aux limites de type Neumann. Un critère de convergence des modes a ensuite été construit et utilisé afin de pouvoir évaluer la qualité des résultats obtenus. Enfin, suite à la perturbation du spectre par modes non convergés, correspondant à des ondes internes piégés dans une couche critique, nous avons mis au point un mapping complexe permettant "d'écarter" ces modes et d'améliorer la convergence du mode de Kelvin-Helmholtz.

Chapitre 6

Stabilité d'une vase newtonienne cisailée

Sommaire

6.1	Modélisation de l'interface eau - crème de vase.	100
6.1.1	Un modèle de la lutocline	100
6.1.2	Ecoulement de base	101
6.2	Etude de configurations simplifiées	103
6.2.1	Fluide statique stratifié : apparition d'ondes internes	103
6.2.2	Ecoulement bi-couche stratifié linéairement	110
6.2.3	Ecoulement bi-couche général	114
6.3	D'un cas de la littérature vers notre écoulement	117
6.3.1	Comparaison sur le cas d'une couche de mélange cisailé	117
6.3.2	Transition vers notre configuration d'étude	119
6.4	Stabilité de notre écoulement	119
6.4.1	Caractère bi-dimensionnel de l'instabilité primaire	119
6.4.2	Présentation du spectre et des modes les plus instables	121
6.4.3	Sensibilité aux paramètres d'étude	124

Introduction

Dans cette partie, nous étudions la stabilité d'écoulements cisailés modélisant la lutocline, interface entre la crème de vase et l'eau, peu concentrée en sédiments. Comme présenté partie 2, la crème de vase est principalement composée de particule fines en suspension. Les particules de vase, dont le diamètre est inférieur à $60\mu\text{m}$, présentent un nombre de Stokes de l'ordre de 10^{-4} . Ainsi, pour des événements rapides tels que la remise en suspension, ces particules peuvent être considérées comme inertielles. La vase est donc modélisée par un fluide homogène de densité et viscosité plus grandes que l'eau. Dans ce chapitre et le suivant, nous allons dans un premier temps nous concentrer sur le comportement de vases newtoniennes. La stabilité est alors étudiée grâce au code de

stabilité linéaire *LiSa*. En effet, ce code, moins coûteux en temps de calcul, permet une exploration plus complète de la gamme de paramètres du problème. Durant cette étude, nous avons choisi de nous placer dans un cas particulier d'un estuaire "type", dimensionné. Cependant, le raisonnement reste général et les conclusions ne sont données qu'en fonction de nombres adimensionnés, dans un cas général, en s'appuyant sur le principe de similitudes. Nous présentons alors une série de configurations simplifiées voisines de notre configuration d'étude puis une transition de la littérature vers notre configuration. Enfin, nous présentons une étude de la sensibilité de l'écoulement aux paramètres d'étude, le nombre de Richardson, le nombre de Reynolds et le rapport de viscosité entre les deux fluides en présence (eau et vase).

6.1 Modélisation de l'interface eau - crème de vase.

Cette partie présente la configuration d'étude retenue en justifiant les paramètres à partir de données sur la crème de vase. Elle détaille aussi les différents nombres adimensionnels pilotant le comportement de l'interface.

6.1.1 Un modèle de la lutocline

Nous considérerons le mélange de deux fluides : l'eau, de densité ρ_2 et viscosité dynamique μ_2 , et la vase, modélisée dans le présent chapitre et le chapitre suivant par un fluide newtonien de densité $\rho_1 > \rho_2$ et de viscosité $\mu_1 \geq \mu_2$. Ce modèle est régi par le système d'équations suivant :

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u})], \quad (6.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu \mathbf{u}) = 0, \quad (6.4)$$

qui couple les équations de Navier-Stokes incompressibles (Eq. (6.1) et (6.2)), où \mathbf{g} est le vecteur gravité, à l'équation de transport de la masse volumique ρ (Eq. (6.3)) et de la viscosité dynamique μ (Eq. (6.4)). Dans cette configuration, la densité et la viscosité sont des fonctions linéaires de la fraction volumique ϕ et varient donc de la même manière. Nous nous sommes placés dans le cas d'un nombre de Schmidt infini : la diffusion de la vase est négligée devant la diffusion de moment. Ceci explique l'absence de termes de diffusion dans le système (5.39) concernant le transport de la fraction volumique de vase. Ce choix est consistant avec le fait que la diffusion de particules de vase est plus faible que la diffusion de sel, qui est elle-même plus importante que la viscosité d'un facteur $Pr \sim 700$, (Caulfield and Peltier, 2000) où Pr est le nombre de Prandtl de l'eau stratifiée en sel.

Dans les hypothèses actuelles, l'écoulement est décrit par les quatre paramètres adimensionnels suivants :

$$At = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}, \quad Re = \frac{4\delta}{\sqrt{\pi}} u_h \frac{\rho_h}{\mu_h}, \quad Ri = 2\delta \frac{g}{\rho_h} \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{(u_2 - u_1)^2}, \quad W = \log_{10} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right), \quad (6.5)$$

où $u_h = \bar{u}(h)$, $\rho_h = \bar{\rho}(h) = (\rho_2 - \rho_1)\lambda + \rho_1$ et $\mu_h = \bar{\mu}(h) = (\mu_2 - \mu_1)\lambda + \mu_1$ sont respectivement la vitesse, la densité et la viscosité du fluide à l'interface en $z = h$. Le nombre de Reynolds Re et le nombre de Richardson gradient Ri sont calculés à l'altitude où le gradient de densité est maximum, i.e. à l'interface. Le rapport de viscosité entre la crème de vase et l'eau est exprimé par son logarithme décimal W . Dans cette étude, le nombre d'Atwood est fixé à $At = 0,15$ et le nombre de Richardson varie dans l'intervalle $Ri \in [0, 0.3]$. Le nombre sans dimension W varie de 0 à 3, ce qui correspond à un rapport de viscosité variant de 1 à 10^3 . Cette gamme de paramètres peut être interprétée dans notre contexte estuarien en prenant $\rho_{eau} = \rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\mu_{eau} = \mu_2 = 10^{-3} \text{ Pa.s}$, une concentration de vase dans l'eau C comprise dans l'intervalle $C \in [0, 580] \text{ g.l}^{-1}$, correspondant à un intervalle de densité $\rho_{vase} = \rho_1 \in [1000, 1360] \text{ kg.m}^{-3}$ et de viscosité $\mu_{vase} = \mu_1 \in [10^{-3}, 1] \text{ Pa.s}$ et de vitesse caractéristiques dans la gamme $u_{eau} = u_2 \in [0, 2.5] \text{ m.s}^{-1}$. Ces valeurs sont typiques de celles observées dans les estuaires ([Hardisty, 2007](#)).

6.1.2 Écoulement de base

Nous allons considérer dans cette étude que l'écoulement de base est bi-dimensionnel, parallèle de direction x et ne varie que dans la direction verticale z . Considérons un domaine de longueur L et de hauteur $H = 3m$. Ce domaine est rempli au fond par une couche horizontale de crème de vase, d'épaisseur caractéristique $h = 1m$. L'écoulement initial est présenté par la figure 6.1.

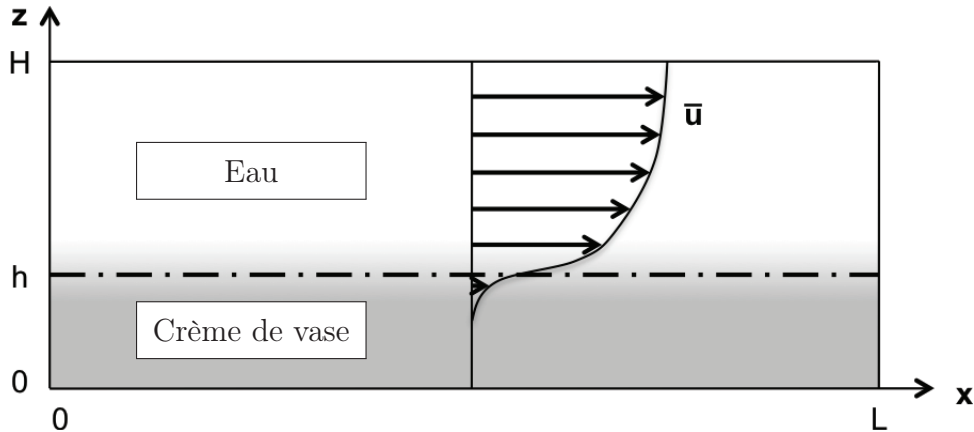


FIGURE 6.1 – Configuration initiale de l'écoulement. La vitesse selon la direction de l'écoulement, la densité et la viscosité sont des fonctions de z .

Nous considérons un écoulement de base de la forme $\underline{u} = (\bar{u}(z), 0, 0)$ et $\phi = \bar{\phi}(z)$, pour lequel la pression est hydrostatique. Nous supposons que $\bar{u}(z)$ et $\bar{\phi}(z)$ sont des fonctions

monotones et différentiables avec des extrema $\bar{u} = u_1$ et $\bar{\phi} = 1$ en bas du domaine, et $\bar{u} = u_2$ et $\bar{\phi} = 0$ en haut de celui-ci, avec $u_1 < u_2$. Nous supposons que les deux profils ont un unique point d'inflexion en $z = h$. En d'autres mots, nous négligeons les effets de friction au niveau des conditions limites en bas et en haut du domaine. Ceci est raisonnable puisque nous nous intéressons à la remise en suspension par cisaillement dans la région de l'interface, autour de $z = h$. Ensuite, nous définissons pour chaque profil (vitesse et fraction volumique) l'épaisseur de l'interface à partir de la pente des profils au niveau du point d'inflexion :

$$\delta_u = \frac{u_2 - u_1}{2\bar{u}'(h)} \quad \text{et} \quad \delta_\phi = \frac{1}{2\bar{\phi}'(h)}, \quad (6.6)$$

où le prime représente la dérivation dans la direction z . Dans ce travail, nous faisons l'hypothèse que δ_u et δ_ϕ sont tous deux égaux à δ . La configuration générale $\delta_u \neq \delta_\phi$ ne sera pas abordée dans ces simulations numériques.

Pour modéliser des écoulements de base représentatifs des champs de vitesse, densité et viscosité observés à la lutocline, interface entre l'eau et la crèmes de vase, nous considérons le groupe de fonctions $F(\lambda, Z)$ définies par :

$$F(\lambda, Z) = \begin{cases} \lambda [1 + \operatorname{erf}(\frac{Z}{\lambda})] & \text{si } Z \leq 0, \\ 1 - (1 - \lambda) [1 - \operatorname{erf}(\frac{Z}{1-\lambda})] & \text{si } Z \geq 0, \end{cases} \quad (6.7)$$

où Z est une coordonnée verticale adimensionnée, dont l'origine est située au niveau de l'interface. Le paramètre sans dimension λ contrôle l'asymétrie entre les deux parties de part et d'autre du point d'inflexion (figure 6.2). Des profils symétriques correspondent à $\lambda = 0.5$. Pour $\lambda < 0.5$ (resp. $\lambda > 0.5$), la partie basse de l'interface est plus fine (resp. plus épaisse) et présente de plus forts gradients que la partie supérieure. La continuité des profils peut être vérifiée facilement, ainsi que la continuité de leur dérivée autour du point. Nous définissons ensuite l'écoulement de base et la fraction volumique par :

$$\bar{u}(z) = u_2 F\left(\lambda, \frac{z - h}{\delta} \frac{\sqrt{\pi}}{4}\right) \quad \text{et} \quad \bar{\phi}(z) = 1 - F\left(\lambda, \frac{z - h}{\delta} \frac{\sqrt{\pi}}{4}\right), \quad (6.8)$$

où $\delta = \delta_u = \delta_\phi$ est consistant avec les définitions des équations (6.6). Ces profils ne sont pas solutions stationnaires de l'écoulement (Eqs. (6.1) à (6.4)), mais peuvent être considérés comme quasi-stationnaire dans les configurations pour lesquelles le taux de croissance de l'instabilité est petit devant le temps caractéristique diffusif. Les fonctions empiriques $\operatorname{erf}(Z)$ modélisent qualitativement un simple cisaillement. Ces profils peuvent être vus comme la réponse transitoire à un gradient imposé en présence de diffusion turbulente. Ils ont aussi été choisis pour ressembler le plus fidèlement possible aux profils observés en situation pratique (see Mehta et al., 1989; Wolanski et al., 1989). Durant cette étude nous avons choisi comme cas de référence $\lambda = 0.1$ et $4\delta/\sqrt{\pi} = 0.3$ m. Une condition d'adhérence est imposée pour la vitesse au niveau du fond et une condition de glissement est imposée en haut du domaine alors qu'une condition de flux nul est imposée pour ϕ , la fraction volumique. Des conditions aux limites périodiques sont imposées dans la direction de l'écoulement. Un zoom, au niveau de l'interface, de ces profils $\bar{u}(z)$, $\bar{\rho}(z)$ et $\bar{\mu}(z)$ est représenté figure 6.2.

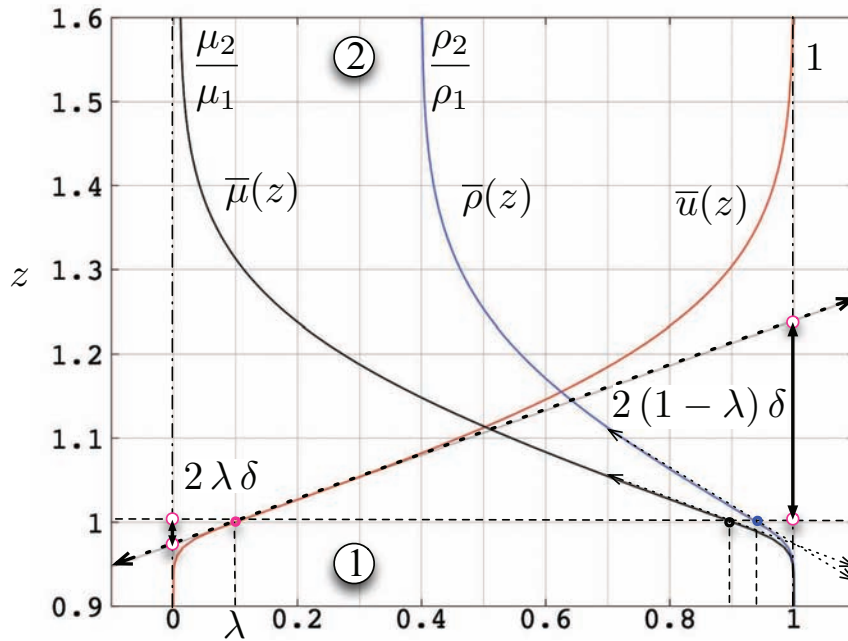


FIGURE 6.2 – Profils initiaux de $\bar{u}(z)$, $\bar{\rho}(z)$ et $\bar{\mu}(z)$ sur un intervalle $z \in [0.9 \text{ m}, 1.6 \text{ m}]$ avec $h = 1 \text{ m}$, $4\delta/\sqrt{\pi} = 0.3 \text{ m}$ et $\lambda = 0.1$.

6.2 Etude de configurations simplifiées

Dans ce second paragraphe, nous présentons l'étude de stabilité linéaire d'écoulements proches de notre configuration, puis une transition d'un cas classique de la littérature vers notre configuration d'étude présentée précédemment, afin de mettre en avant sa spécificité. L'étude de stabilité linéaire de ces écoulements a principalement été réalisée grâce au code *LiSa*. En effet, la linéarisation des équations autour de profils verticaux permet, dans ce type d'étude, de simplifier considérablement les calculs par la suppression de termes non-linéaires (gourmands en temps de calcul) et du nombre de dimension du problème. Le code *LiSa* a donc naturellement été préféré au code *JADIM* dans cette partie, traitant du comportement de petites perturbations.

Nous allons présenter dans cette partie différents écoulements classiques afin de comprendre au mieux les spectres obtenus dans le cas de notre écoulement complexe et valider par la même occasion le code *LiSa*. Pour toutes ces configurations, nous conserverons un fluide plus dense dans la partie inférieure du domaine, appelé fluide 1 et un fluide plus léger dans la partie supérieure, nommé fluide 2.

6.2.1 Fluide statique stratifié : apparition d'ondes internes

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser au spectre obtenu dans le cas où la viscosité est nulle, ainsi que la vitesse, et que le milieu est stablement stratifié

verticalement. Nous nous plaçons dans le cas d'un domaine borné (verticalement), de hauteur $H = 1$ m avec des conditions aux limites de type mur glissant (ou symétrie) en haut et en bas du domaine. Ces simulations sont réalisées pour un fluide parfait ($\mu_1 = \mu_2 = 0$) et pour un écoulement nul ($u_1 = u_2 = 0$). Nous allons présenter les résultats obtenus pour trois configurations différentes, présentées figure 6.3.

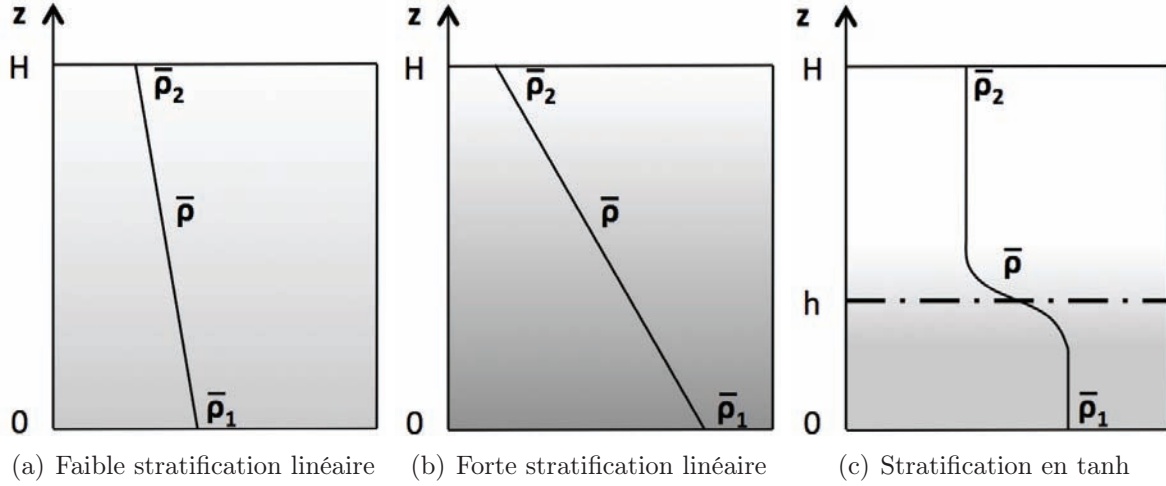


FIGURE 6.3 – Schéma des configurations étudiées pour les ondes internes.

Dans un premier temps, nous nous plaçons dans le cas d'un écoulement stratifié linéairement (schéma (6.3(a))), avec $\rho_1 = 1010 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, soit une fréquence de Brünt-Väisälä $N = \sqrt{\frac{-2g}{\rho_1 + \rho_2} \frac{d\rho}{dz}} = 0,31$ et un nombre d'Atwood $At = 2,5 \cdot 10^{-3}$. Le nombre d'onde horizontal est choisi arbitrairement : $k^* = 1$, adimensionné par la hauteur du domaine, H . On choisit pour cette configuration un nombre de points $N = 300$ et le mapping le plus utilisé dans cette étude : le mapping basé sur la composition des fonctions arctanh et exp (§5.2.2). En effet, un mapping plus classique de type mapping uniforme aurait pu être utilisé pour cette étude ne nécessitant pas de raffinement spécifique dans une zone centrale du domaine. Cependant, les conditions aux limites de glissement aux frontières du domaine sont implémentées grâce à la dérivée du mapping inverse à la frontière, qui ne doit pas s'annuler. Cette condition n'étant pas respectée, le mapping uniforme n'est pas utilisable. Les paramètres du mapping composé des fonctions arctanh et exp ont cependant été modifiés pour s'approcher d'un mapping uniforme, tout en conservant une concentration plus élevée aux frontières, en prenant les paramètres : $h = 0,50033$ et $b = 0.1$. Nous observons alors le spectre présenté figure 6.4 (tous les modes visibles sur ce spectre étant convergés). Ce spectre présente les différentes valeurs propres obtenues par le code *LiSa*, représenté en fonction de leur partie réelle et imaginaire (σ et ω). Ce spectre représente les ondes internes, de taux de croissance nul ($\sigma = 0$), solutions de ces équations linéarisées dans le cas d'un écoulement nul. Ce spectre, initialement continu, est discrétisé par l'imposition de conditions aux limites, imposant notamment $w = 0$ en haut et en bas du domaine. Dans le cas d'une stratification linéaire de faible amplitude, on peut appliquer l'approximation de Boussinesq, ce qui entraîne un système invariant

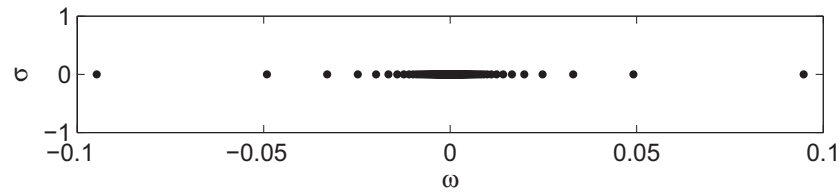


FIGURE 6.4 – Spectre des valeurs propres obtenues pour un fluide parfait statique, faiblement stratifié linéairement ($N = 0,31$ et $At = 2,5 \cdot 10^{-3}$).

n	1	2	3	4	5
<i>LiSa</i>	0.09476	0.04911	0.03296	0.02478	0.01985
Théorie	0.09476	0.04911	0.03296	0.02478	0.01985

TABLE 6.1 – Comparaison entre les pulsations ω des ondes calculées par *LiSa* et théorique, obtenues par la relation de dispersion (Eq. 6.9).

par translation selon z . On observe alors des modes verticaux sinusoïdaux. Dans ce cas, la discrétisation du spectre par les conditions aux limites est directement lié au nombre de demi-périodes verticales et $m = \underline{k}_z = n \times \pi/H$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc dans cette configuration, l'équation de dispersion des ondes internes :

$$\omega = \pm N \left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right) \quad (6.9)$$

On peut alors vérifier la valeur de ω en fonction de k . En observant la relation de dispersion, on remarque que pour k fixé, les modes dont la pulsation est la plus importante correspondent aux vecteurs d'onde tendant vers l'horizontal (m petit). On a donc aux deux extrémités du spectre les modes correspondant à $m = \pi/H$, puis en partant vers le centre, ceux correspondant à $2\pi/H$, puis $3\pi/H$ et ainsi de suite. Comme présenté table 6.1, on retrouve exactement les valeurs de pulsation observées sur la figure 6.4, à partir de l'équation (6.9). Nous pouvons ensuite observer la structure verticale de ces modes, dont certains exemples sont présentés figure 6.6. Sur la figure 6.5 est reconstruit le mode $n = 2$ dans le plan (x, z) . On observe le champ des perturbations de densité et son oscillation verticale. Les perturbations de vitesse sont représentées par les flèches. On observe bien un fort cisaillement aux extrémités verticales du domaine, puis une inversion du sens de déplacement au niveau des maxima de densité et un fort cisaillement au centre du domaine. Nous retrouvons la structure classique d'une onde interne dans un guide d'onde stratifié linéairement. La figure (6.6) représente les modes verticaux obtenus pour plusieurs valeurs de n . Pour tous ces modes, \tilde{u} est verticalement en phase avec \tilde{p} et en opposition de phase avec \tilde{w} et $\tilde{\rho}$. Temporellement, en comparant les figures 6.6(a) et 6.6(b), on retrouve, pour \tilde{u} et \tilde{w} , un changement de signe caractéristique d'une évolution temporelle en cosinus, avec un déphasage temporel de $\pi/2$ entre les deux composantes de la vitesse. Aucune modification entre les modes $-\omega$ et ω pour \tilde{u} et \tilde{w} ne traduit une évolution temporelle en sinus, ces modes étant en phase temporelle avec \tilde{u} . Lorsque $|\omega|$

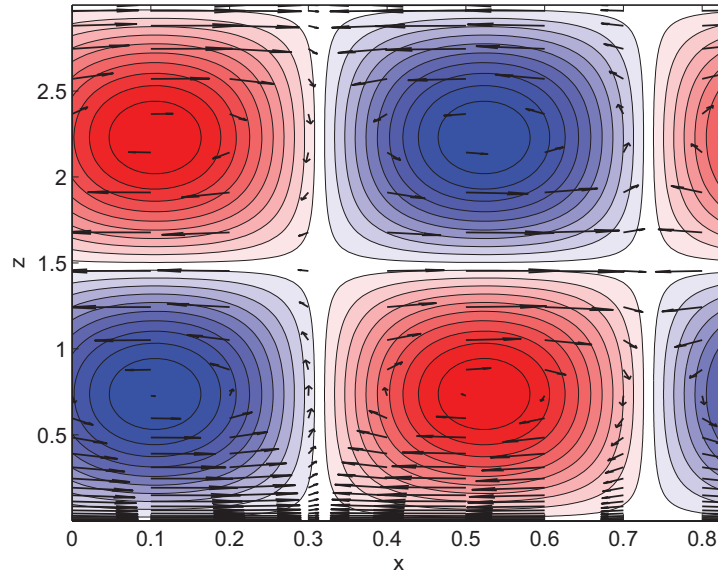


FIGURE 6.5 – Représentation spatiale du mode $n = 2$ pour un fluide parfait statique, dans une stratification linéaire faible. Perturbations de densité : champ coloré. Perturbations de vitesses : flèches.

diminue, on retrouve bien les modes associés aux n croissants, comme représenté figure 6.6(c) pour $n = 2$ et figure 6.6(d) pour $n = 11$.

Si on augmente maintenant la stratification (voir le schéma 6.3(b) précédent) en prenant $\rho_1 = 2000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, soit $N = 2,56$ et $At = 0,33$ (en conservant les autres paramètres de la configuration précédente, on sort de l'approximation de Boussinesq et les profils verticaux des modes ne sont plus sinusoïdaux. Le spectre pour cette configuration est représenté figure (6.7). On observe un spectre d'ondes internes confinées dans un guide d'onde, comparable à celui présenté figure (6.4), avec cependant une pulsation plus importante. Pour le mode $n = 1$, on observait dans le cas $N = 0,31$, une pulsation $\omega = 0,09476\text{s}^{-1}$ avec $\omega/N = 0,3057$, alors que dans le cas présent $N = 2,56$, le mode $n = 1$ a une pulsation $\omega = 1,0356\text{s}^{-1}$ avec $\omega/N = 0,4045$. Si on observe maintenant les modes verticaux présentés figure (6.8), on observe un comportement similaire au cas faiblement stratifié. Cependant, le comportement des ondes n'est plus invariant suivant z . On observe une amplitude plus importante des oscillations de vitesse \tilde{u} et de masse volumique $\tilde{\rho}$ pour les z croissants, lorsque la masse volumique diminue, ainsi qu'une diminution des oscillations de pression \tilde{p} . On observe, d'autre part, pour tous ces modes verticaux, une contraction verticale lorsque la masse volumique diminue (entraînant un rapprochement des noeuds). Ce phénomène disparaît lorsque At est très petit.

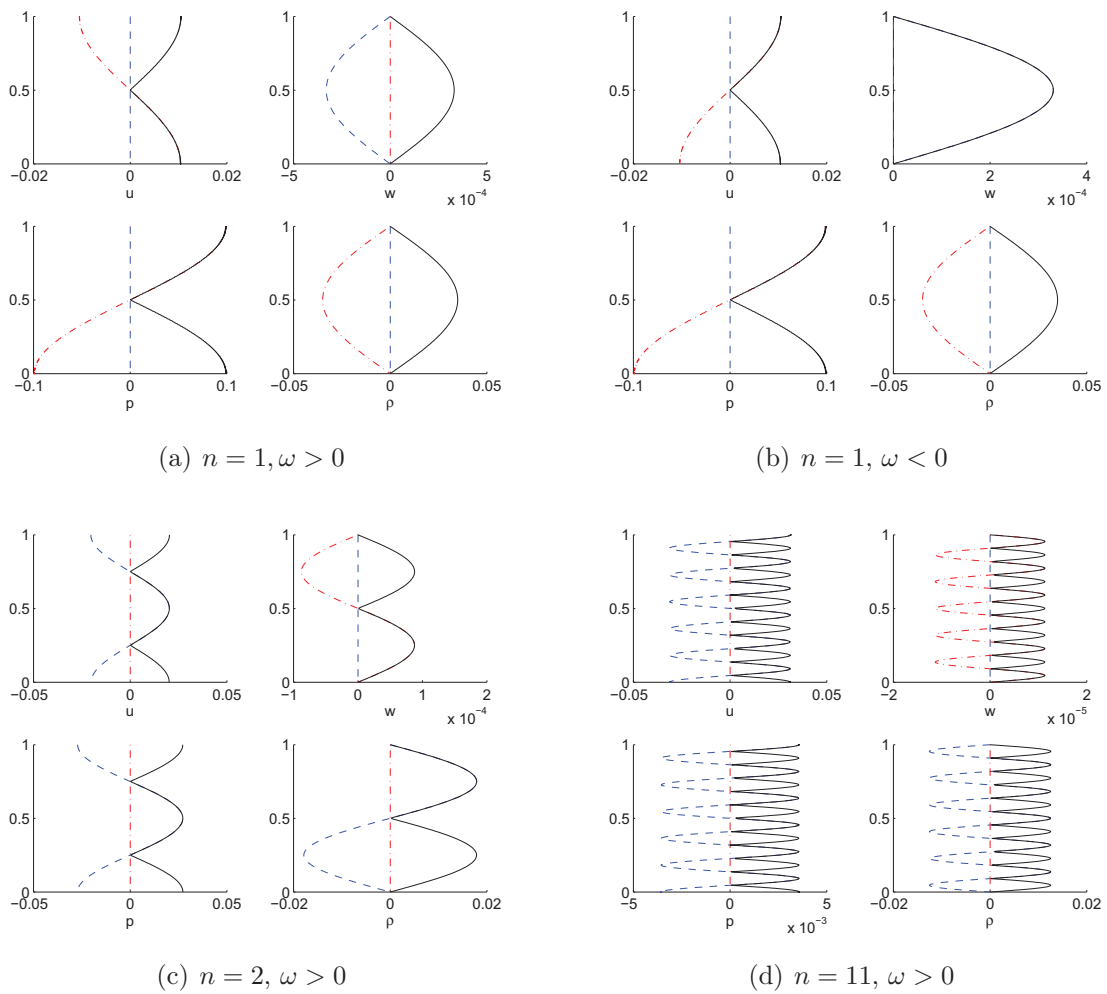


FIGURE 6.6 – Modes verticaux associés aux valeurs propres en stratification linéaire faible ($N = 0,31$ et $At = 2,5 \cdot 10^{-3}$). Partie réelle : - - ; Partie imaginaire : - · - ; Amplitude : - .

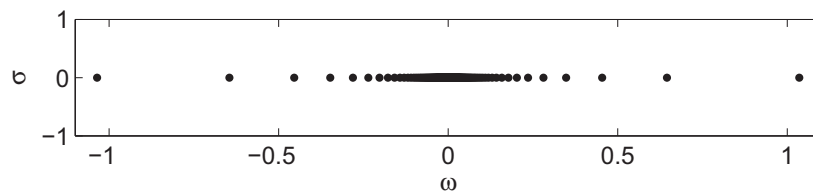


FIGURE 6.7 – Spectre des valeurs propres obtenues pour un fluide parfait statique, fortement stratifié linéairement ($N = 2,56$ et $At = 0,33$).

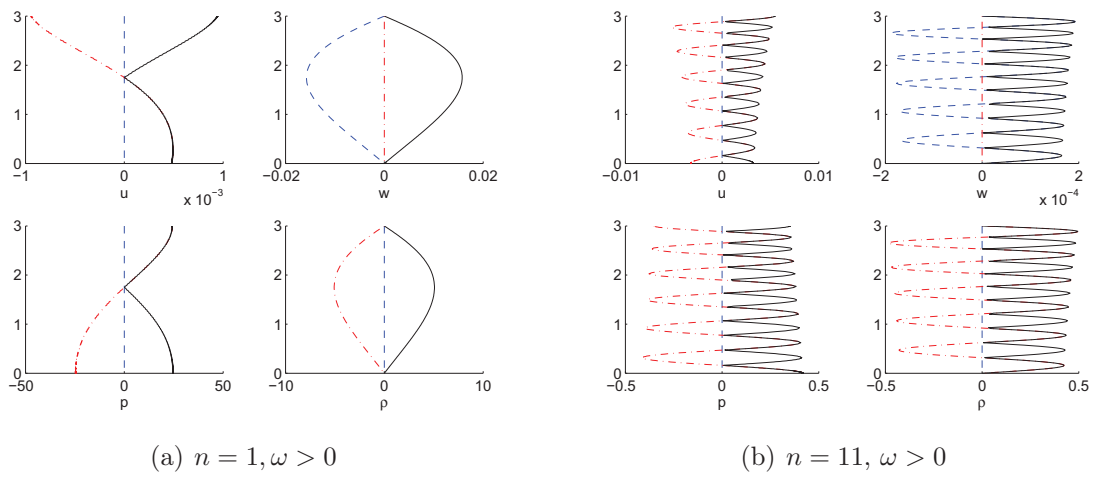


FIGURE 6.8 – Modes verticaux associés aux valeurs propres en forte stratification linéaire ($N = 2,56$ et $At = 0,33$). Partie réelle : - - ; Partie imaginaire : · - ; Amplitude : - .

La troisième configuration (schéma (6.3(c))) consiste à observer les ondes internes se développant dans une couche de mélange classique, où la masse volumique évolue suivant la fonction \tanh , avec :

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{2} \tanh\left(\frac{z - h}{\delta_\rho}\right) + \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}, \quad (6.10)$$

où δ_ρ est la demi-épaisseur associée au profil de masse volumique. Nous reprenons les masses volumiques choisies dans la première configuration ($\rho_1 = 1010 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$), soit une fréquence de Brünt-Väisälä maximum au centre de l'interface : $N = 0,40$ et un nombre d'Atwood $At = 2,5 \cdot 10^{-3}$. Le nombre d'onde horizontal est choisi arbitrairement : $k^* = 1$, adimensionné par la hauteur de la couche de mélange : $2\delta_\rho$. On choisit une hauteur de domaine $H = 3\text{m}$, une interface située en $h = 1\text{m}$ et une demi-épaisseur d'interface $\delta_\rho = 0,15\text{m}$. On conserve des conditions aux limites de glissement en haut et en bas du domaine. La résolution est de 300 points et le mapping est toujours le mapping arctanh-exp avec les paramètres classiques : $h = 1,05$ et $b = 0,99$. Le spectre obtenu est présenté figure (6.9). On peut observer de nouveau un spectre ne comportant que des ondes internes, de taux de croissance nul, et symétrique par rapport à l'axe $\omega = 0$. De nouveau, en partant de l'extérieur vers l'intérieur, on retrouve un mode de demi-onde, puis le mode correspondant à une longueur d'onde, puis 1,5 longueur d'onde et ainsi de suite. Certains de ces modes sont représentés figure (6.11) et le mode $n = 6$ est reconstruit spatialement figure (6.10). Les ondes internes se développant dans les milieux stratifiés, les oscillations se concentrent dans l'interface entre les deux fluides, où la densité varie continuellement d'un fluide à l'autre. On observe une augmentation de l'amplitude des modes de vitesse longitudinale, de pression et de masse volumique au niveau de l'interface où la stratification est la plus forte mais une diminution du mode de vitesse verticale sur cette zone (voir par exemple figure 6.11(d)). En effet, les ondes internes tirent leur énergie de cette stratification mais la stratification a aussi pour propriété de diminuer les mouvements verticaux (d'où le comportement des perturbations de vitesse verticale dans cette zone). L'évolution des ondes au niveau de l'interface peut être aussi visualisée comme le "redressement" du vecteur d'onde, atteignant sa position la plus verticale au centre de l'interface, au point d'inflexion du profil de densité moyenne.

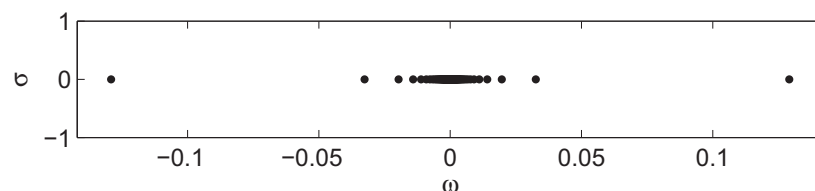


FIGURE 6.9 – Spectre des valeurs propres obtenues pour un fluide parfait statique, au niveau d'une interface de densité.

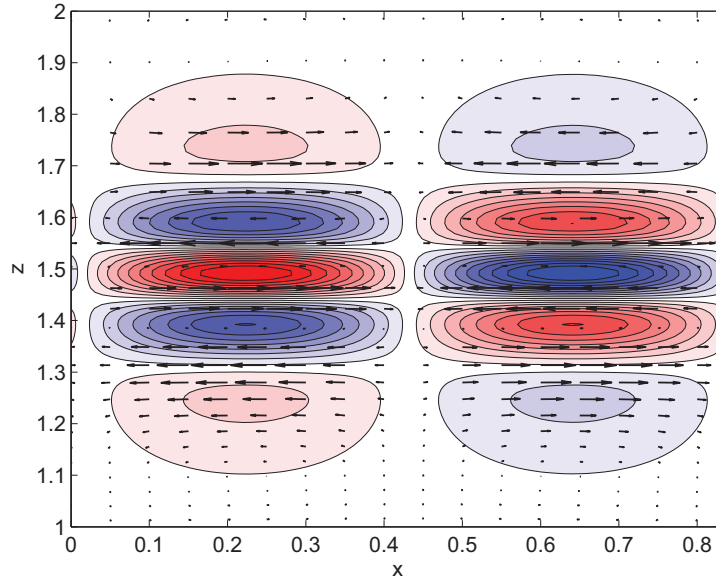


FIGURE 6.10 – Représentation spatiale du mode $n = 5$ pour un fluide parfait statique, au niveau d'une interface de densité. Perturbations de densité : champ coloré. Perturbations de vitesses : flèches. Zoom autour de l'interface en $z \in [1 \ 2]$.

6.2.2 Écoulement bi-couche stratifié linéairement

Nous imposons maintenant un écoulement de type bi-couche dans un fluide parfait stratifié linéairement, comme présenté figure (6.12). Cette configuration correspond à celle étudiée par Chandrasekhar (1961) p494-p498 lorsque la stratification est faible. L'auteur définit alors les profils verticaux de vitesse et de masse volumique par :

$$\bar{u} = \underline{\bar{u}} \cdot \underline{e}_x = u_0 \tanh\left(\frac{z}{\delta_u}\right) \quad \text{et} \quad \bar{\rho} = \rho_0 \exp(-\beta z). \quad (6.11)$$

Les conditions limites d'amplitude nulle des perturbations, correspondant à des conditions d'adhérence, sont situées à l'infini. Dans cette configuration, l'auteur calcule théoriquement la position de la courbe de stabilité (courbe au-delà de laquelle l'écoulement est stable), et obtient l'équation :

$$Ri_c = k^2(1 - k^2). \quad (6.12)$$

Nous avons reproduit cette configuration avec *LiSa* en utilisant la version où les frontières sont à l'infini. Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, pour β suffisamment petit, le profil de densité peut être approximé, autour de $z = 0$, par :

$$\bar{\rho} \sim \rho_0(1 - \beta z). \quad (6.13)$$

Nous avons ensuite fixé les paramètres adimensionnalisés $\delta_u = 1$, $\beta = 0,01$, $\rho_0 = 1000$. Le nombre de Richardson, calculé à partir de la formule : $Ri = \frac{g\beta\delta_u^2}{u_0^2}$, définit la vitesse u_0 . Nous faisons ensuite varier le nombre de Richardson Ri et le nombre d'onde k^* selon :

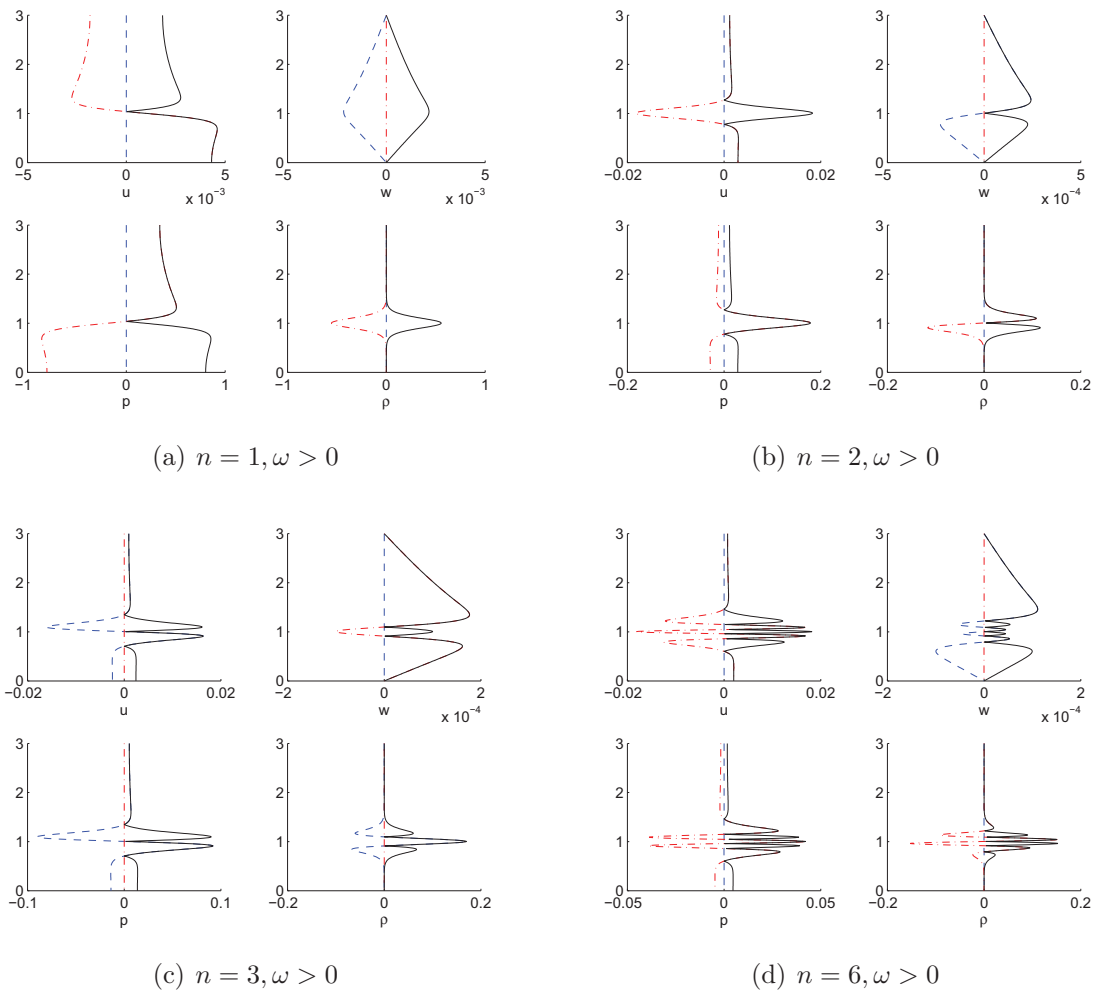


FIGURE 6.11 – Modes verticaux associés aux valeurs propres, configuration interface de densité en \tanh . Partie réelle : - - ; Partie imaginaire : · · ; Amplitude : - .

$Ri = [0, 30 \ 0, 25 \ 0, 20 \ 0, 15 \ 0, 10 \ 0, 05 \ 0, 03 \ 0, 01]$ et $k^* = [0, 1 : 1]$ avec un pas de 0, 1. Nous avons utilisé un mapping de type algébrique (voir §(5.1.4)), permettant de placer les conditions limites à l'infini et de raffiner le centre du mapping (ici en $z = 0$). Ces résultats ont été obtenus avec une résolution de 300 points et en plaçant l'avant dernier point du mapping en $z = 50$, ce qui concentre 298 points dans l'intervalle $[-50, 50]$. La figure 6.13 présente un exemple de spectre obtenu pour les paramètres $k^* = 0.5$ et $Ri = 0, 05$. Nous observons deux modes convergés, de pulsation nulle, dans le repère choisi où la vitesse au point d'inflexion est nulle. Ces deux modes sont de taux de croissance opposés dans cette configuration fluide parfait et sont dus au cisaillement du fluide en $z = 0$. Le mode de taux de croissance positif est un mode instable de type Kelvin-Helmholtz, le deuxième étant son homologue amorti. Ces deux modes sont présentés figure (6.14). On remarque que ces deux modes sont très ressemblants et possèdent la même amplitude. On observe seulement un changement de signe de la partie imaginaire des modes \hat{u} , \hat{p} et $\hat{\rho}$ et de la

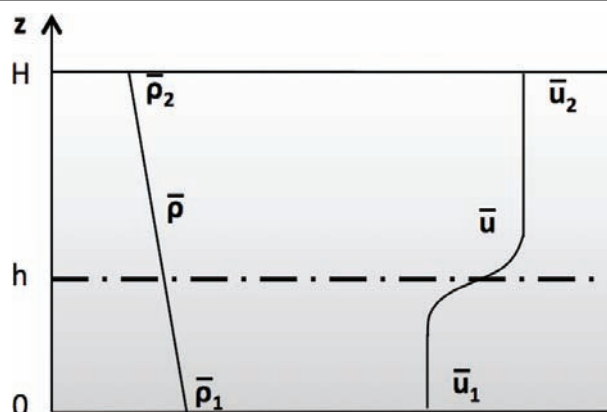


FIGURE 6.12 – Schéma de la configuration étudiée, stratification linéaire en densité et écoulement bicouche avec profil de type tanh à l'interface.

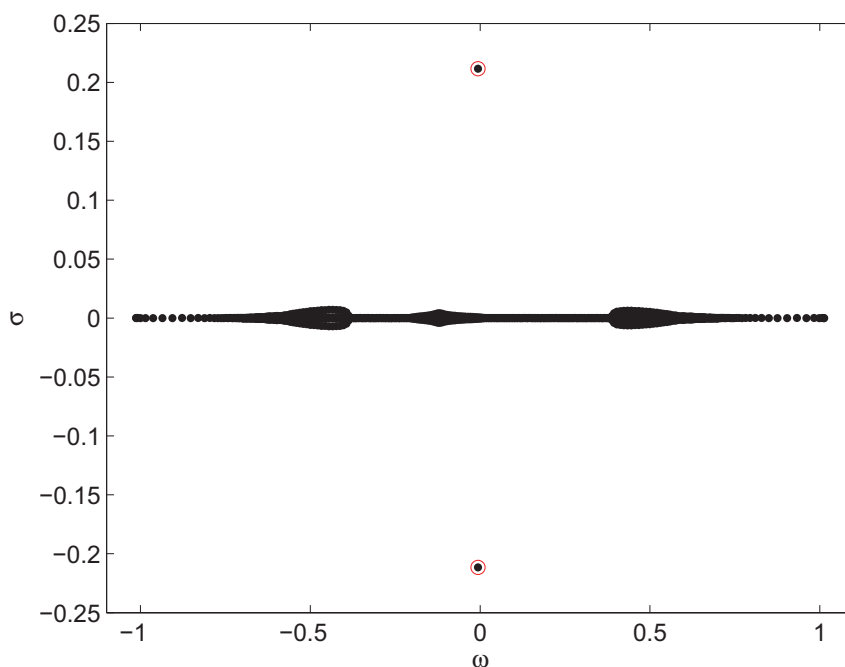


FIGURE 6.13 – Spectre des valeurs propres obtenues pour un écoulement bi-couche stratifié linéairement, dont la vitesse évolue en tanh à l'interface. Modes convergés : \circ .

partie réelle de \hat{w} . Si on considère que l'on passe du mode instable au mode amorti en transformant la pulsation complexe $s = \sigma - i\omega$ en moins s , le comportement observé correspond à un déphasage temporel de $\pi/2$ entre \hat{w} et les autres modes. Le taux de croissance est ensuite représenté en fonction du nombre de Richardson et nombre d'onde en figure (6.15). On observe, malgré la faible résolution du graphique (10×8 points), un bon accord avec la théorie et la courbe de stabilité présentée par Chandrasekhar (1961). On remarque que le taux de croissance positif, correspondant à une instabilité de

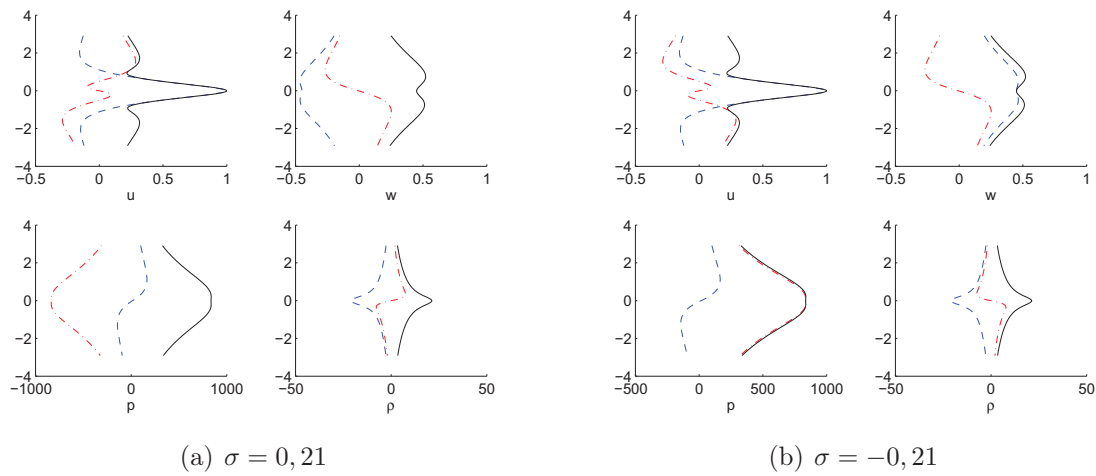


FIGURE 6.14 – Modes verticaux associés aux valeurs propres pour un écoulement bi-couche, donc la vitesse évolue en \tanh à l'interface. Partie réelle : - - ; Partie imaginaire : · - ; Amplitude : — .

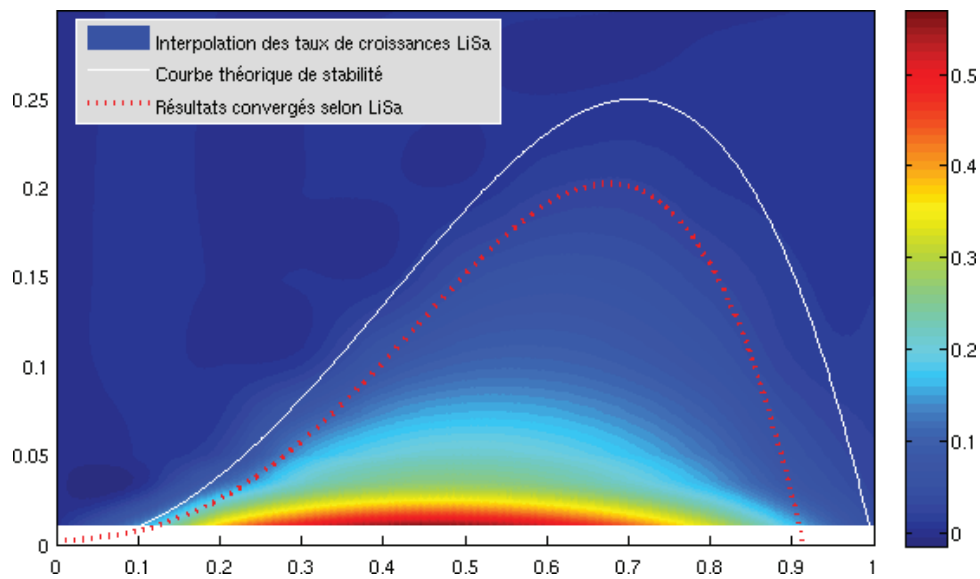


FIGURE 6.15 – Taux de croissance de l'instabilité de cisaillement en fonction du nombre de Richardson et du nombre d'onde.

Kelvin-Helmholtz n'est observé que pour une zone de l'espace des paramètres. Cette zone correspond à un nombre d'onde suffisamment petit, soit des perturbations de période longitudinale suffisamment longue (lorsque l'épaisseur de l'interface tend vers 0, toutes les longueurs d'ondes longitudinales deviennent instables). Elle est aussi définie par un nombre de Richardson suffisamment petit, correspondant à un cisaillement suffisamment important par rapport à la stratification : les taux de croissance les plus importants étant obtenus pour un fluide non-stratifié en densité.

6.2.3 Écoulement bi-couche général

On se place maintenant dans le cas d'un bi-couche général avec une interface de densité et de vorticité, correspondant à la variation de vitesse entre les deux fluides, de taille différentes mais possédant toutes deux un point d'inflexion en $z = h$. Cette configuration, pouvant engendrer la formation d'instabilités de Kelvin-Helmholtz et de Holmboe (§3.4.2) suivant les cas, a été étudiée par [Hogg and Ivey \(2003\)](#). Nous nous

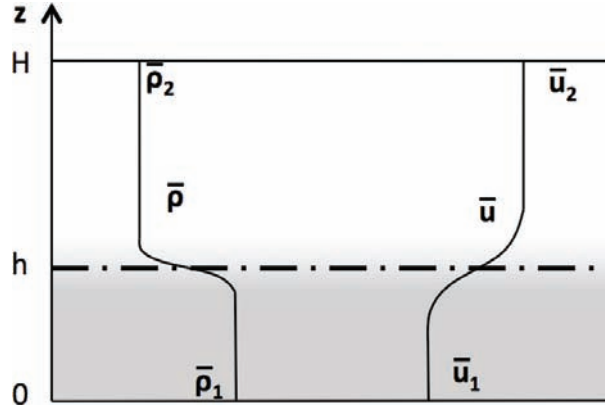


FIGURE 6.16 – Schéma de la configuration étudiée, correspondant à des interfaces de densité et de vitesse d'épaisseur différentes.

plaçons, comme les auteurs, dans le cadre d'un bi-couche de deux fluides de densités et vitesses différentes (voir figure 6.16) dont les interfaces, de tailles différentes varient en \tanh suivant les formules suivantes :

$$\bar{u} = \underline{\bar{u}} \cdot \underline{e}_x = u_0 \tanh\left(\frac{z}{\delta_u}\right) \quad \text{et} \quad \bar{\rho} = \rho_0 \tanh\left(\frac{z}{\delta_\rho}\right) + \rho_1. \quad (6.14)$$

Les longueurs sont adimensionnées par δ_u la demi-épaisseur de l'interface de vorticité. $R = \delta_\rho/\delta_u$ définit le rapport d'épaisseur entre les deux interfaces. Les vitesses sont adimensionnées par la demi-différence de vitesse $u_0/2$. Nous avons reproduit cette situation en fixant $\delta_u = 1$, $u_0 = 1$ et $\rho_1 = 1000$ et en choisissant, comme dans le papier de [Hogg and Ivey \(2003\)](#), $R = 5$ et un nombre de Reynolds infini, soit $\mu = 0$. Le nombre de Richardson, calculé d'après l'expression $Ri = \frac{g}{\rho_1} \frac{2\delta_u \rho_0}{u_0^2}$, parcourt $[0, 0.2]$ en faisant varier ρ_0 et k^* parcourt $[0, 0.8]$ afin d'obtenir le taux de croissance dans le plan (Ri, k^*) . Le domaine est choisi de hauteur $H = 10\delta$ avec les points d'inflexion au centre en $h = H/2$. Des conditions aux limites d'adhérence sont placées en haut et en bas du domaine. Le mapping classique $\arctanh\text{-exp}$ est utilisé avec les paramètres $h = 5, 01$ et $b = 0, 98$. La figure (6.17) représente le spectre obtenu pour les paramètres $k^* = 0, 4$ et $Ri = 0, 1$. Contrairement au cas précédent des instabilités de KH, nous observons deux modes instables, de pulsations non-nulles et opposées. Ils ne sont donc pas stationnaire par rapport à l'écoulement moyen, nul dans cette configuration. Les profils verticaux de ces deux modes ont été représentés figure (6.18). Ces deux mode sont très ressemblant. Nous observons cependant que le maximum de perturbation de la vitesse horizontale est située juste au dessus de

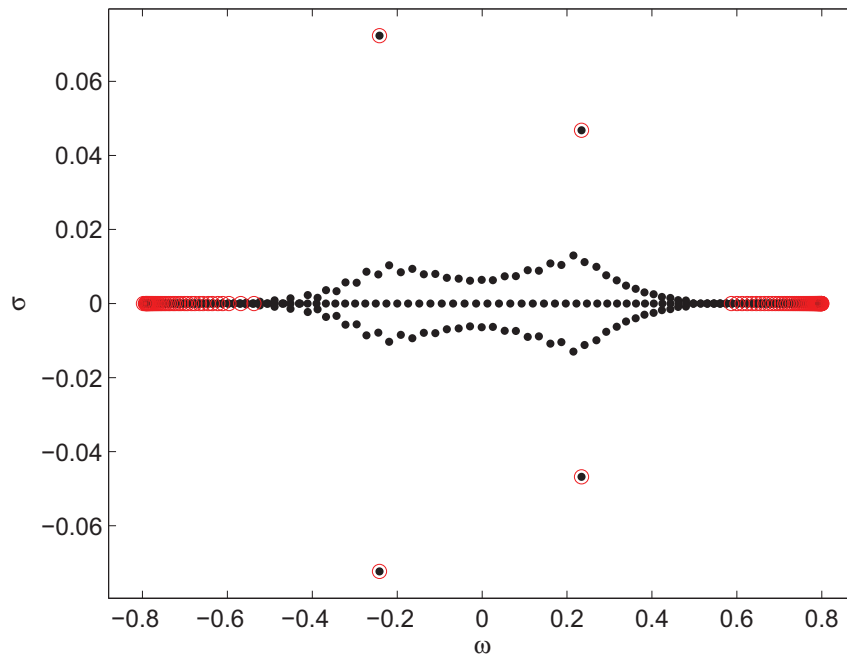


FIGURE 6.17 – Spectre des valeurs propres obtenues pour un écoulement bi-couche général, dont la vitesse et la densité varient en \tanh à l'interface. Modes convergés : \circ .

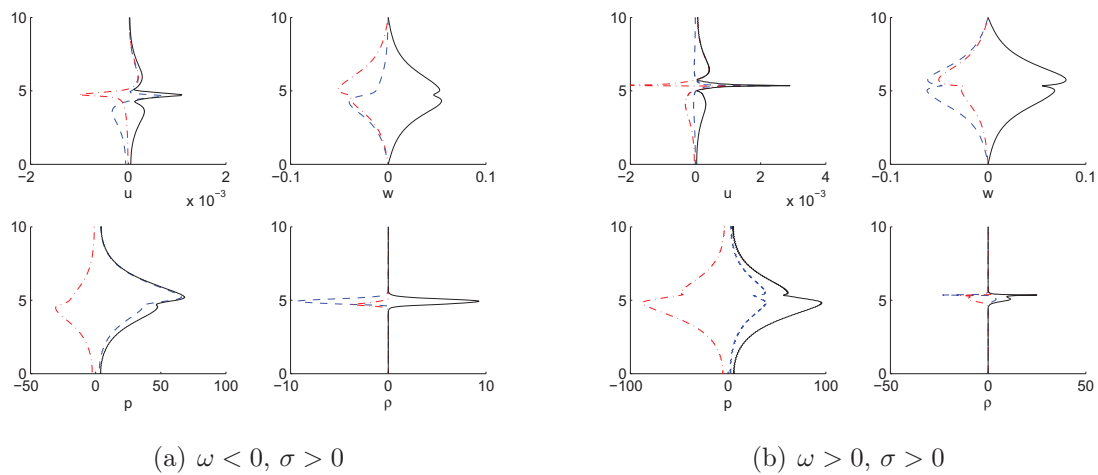


FIGURE 6.18 – Modes verticaux associés aux valeurs propres pour un écoulement bi-couche, donc la vitesse évolue en \tanh à l'interface. Partie réelle : $---$; Partie imaginaire : $-\cdot-$; Amplitude : $-$.

l'interface pour le mode $\omega > 0$ et juste en dessous pour $\omega < 0$. En fait, ces deux modes correspondent au "couple d'onde internes" instable formant ensemble une instabilité de Holmboe. Le taux de croissance dans l'espace (k^*, Ri) , ainsi que la pulsation, sont repré-

sentés figure (6.19). Deux zones distinctes peuvent être observées sur ces figures. Pour les

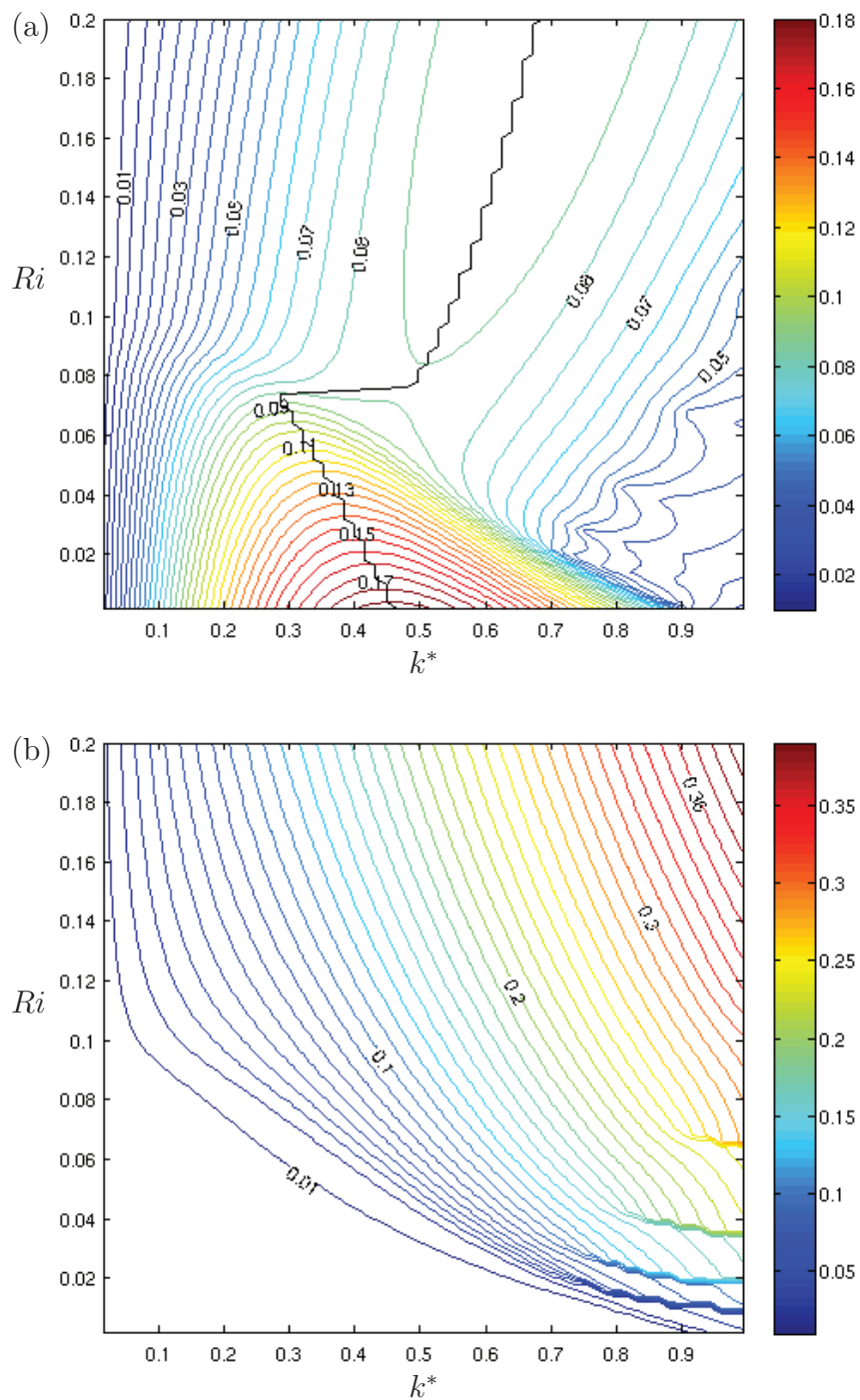


FIGURE 6.19 – Isocontours du taux de croissance de l'instabilité de cisaillement (a) et de la pulsation (b) en fonction du nombre de Richardson et du nombre d'onde. Figure a : - correspond au mode le plus instable à Ri fixé.

nombres d'ondes faibles, associés à un nombre de Richardson faible, on observe le développement d'instabilités de KH, caractérisées par une pulsation nulle. On observe ensuite une deuxième zone caractérisée par une pulsation non-nulle correspondant à l'instabilité de Holmboe. Lors du passage de la zone dominée par les instabilités de KH à celle dominée par les instabilités de H, on observe une discontinuité dans l'évolution du mode le plus instable, caractéristique d'un changement de mode. Enfin, nous pouvons noter que bien que leur taux de croissance soit moins important que celui des instabilités de KH, les instabilités de H se développent à des nombres de Richardson plus importants.

Cependant, nous avons choisi dans notre étude de considérer des profils initiaux de vitesse et de concentration en vase similaire, de même épaisseur initiale. Cette hypothèse est en accord avec les expériences notamment de couches de mélange saumure - eau où le rapport entre les épaisseur des profils communément observé est $R = 1,1$ (voir par exemple [Thorpe, 1985](#)).

6.3 D'un cas de la littérature vers notre écoulement

Nous nous sommes ensuite rapproché de notre configuration. Cette partie présente une comparaison quantitative de taux de croissance avec [Hazel \(1972\)](#), dans le cas d'écoulements bi-couches avec un profil de densité et de viscosité au niveau de l'interface en tanh de même épaisseur, en domaine infini. Une transition vers notre configuration d'étude, dont les profils à l'interface sont basés sur une fonction erf asymétrique, dans un domaine borné, est ensuite proposée.

6.3.1 Comparaison sur le cas d'une couche de mélange cisailé

Le code de stabilité linéaire *LiSa* a été validé dans un premier temps sur le cas d'un écoulement cisailé non-visqueux et stratifié en densité dans un domaine infini.

Pour cette validation, nous allons nous référer à [Hazel \(1972\)](#) qui considère les profils suivants : $\bar{u} = u_0 \tanh(z/\delta)$ et $\bar{\rho} = \rho_0 \exp[-At \tanh(z/\delta)]$ dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. Ici, nous allons considérer à la place $\bar{u} = u_0 + u_0 \tanh(z/\delta)$ ce qui ne modifie pas l'analyse temporelle de stabilité linéaire, à part pour une modification de la vitesse de phase. Nous choisissons un petit nombre d'Atwood ($At = 0.024$) afin d'approximer le profil de densité par $\bar{\rho} \sim \rho_0 [1 - At \tanh(z/\delta)]$. Puisque [Hazel \(1972\)](#) se place dans une configuration non-visqueuse, nous avons choisi une valeur de viscosité faible $\mu = 10^{-3}$ Pa.s, ce qui entraîne un nombre de Reynolds $Re \sim 3 \cdot 10^5$. Le choix $u_0 \sim 1$ m/s (variant avec Ri) et $\rho_0 = 1000$ kg.m⁻³ est arbitraire puisque seuls les nombres adimensionnels sont considérés dans cette validation. La table 6.2 présente la validation du taux de croissance maximum pour différents nombres de Richardson dans le cas d'un domaine infini. Les résultats sont consistants avec [Hazel \(1972\)](#), jusqu'à la précision de la méthode numérique. Les autres taux de croissance sont présentés figure 6.20(a) en fonction du nombre d'onde adimensionné k^* et du nombre de Richardson Ri (les iso-contours sont interpolés à partir d'une grille de 50×50 dans ce diagramme). Seules les valeurs propres convergées sont représentés, ce qui explique le manque de valeurs propres à certains en-

	$Ri = 0.01$	$Ri = 0.05$	$Ri = 0.1$	$Ri = 0.15$	$Ri = 0.2$
Hazel (1972)	0.1838	0.1594	0.1259	0.0889	0.0472
Présent	0.1838	0.1593	0.1259	0.0889	0.0471

TABLE 6.2 – Taux de croissance adimensionné maximum σ^* pour différents nombres de Richardson Ri . Les résultats de Hazel (1972) sont comparés aux résultats du code de stabilité linéaire *LiSa* pour $At = 0.024$.

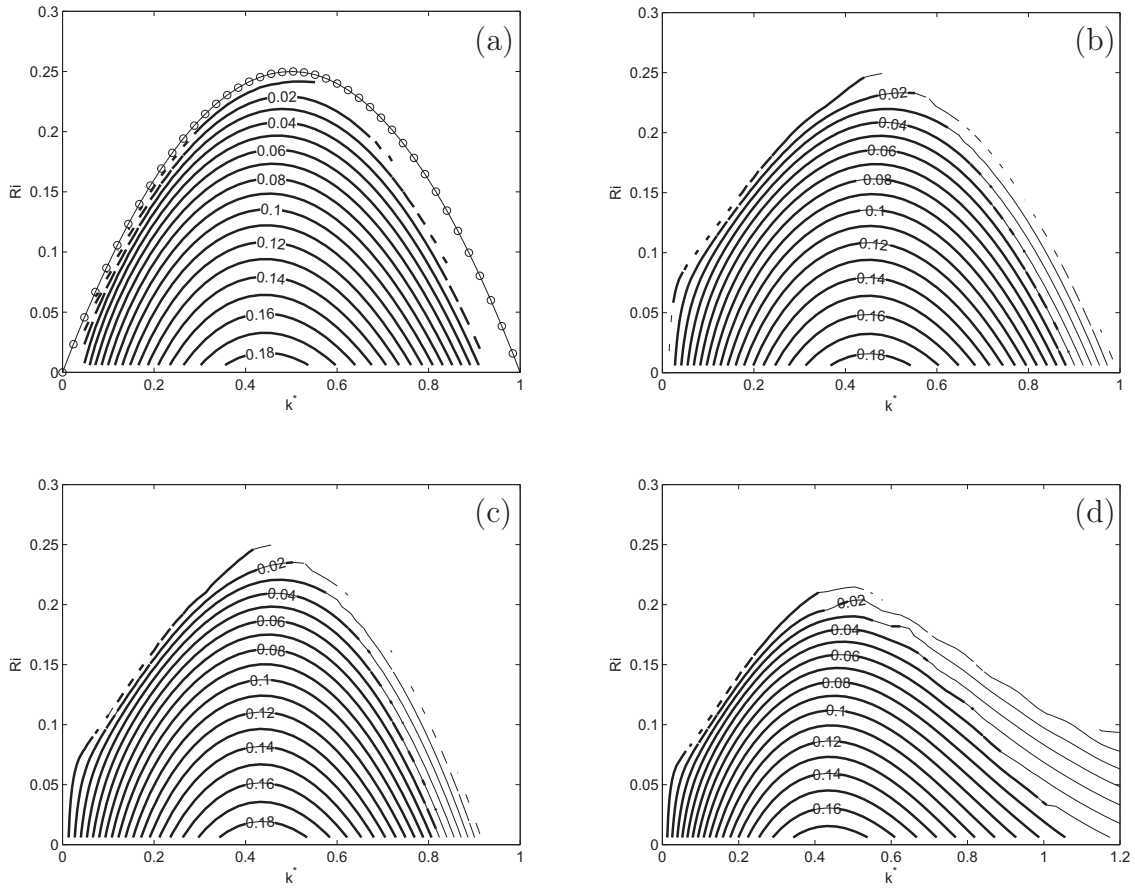


FIGURE 6.20 – Iso-contours du taux de croissance σ^* , fonction de k^* et Ri pour de grands nombres Reynolds. (a) Profils en tanh utilisés dans Hazel (1972) avec des conditions limites à l'infini, (b) profils en tanh en domaine borné, (c) profils en erf symétrique en domaine borné, (d) profils en erf asymétrique en domaine borné. Ligne avec des cercles : courbe neutre théorique, ligne en gras : mapping réel, ligne fine : mapping complexe ; seules les valeurs propres convergées sont présentées.

droits. La ligne avec des cercles sur la figure 6.20(a), définie par l'équation $Ri = k^*(1 - k^*)$ représente la courbe neutre (Hazel, 1972). Un bon accord est observé sur ce cas malgré

quelques difficultés à accéder aux faibles taux de croissance, particulièrement pour les grands nombres d'onde.

6.3.2 Transition vers notre configuration d'étude

A partir de la configuration étudiée par Hazel (figure 6.20(a)), nous avons réalisé une transition progressive (figures 6.20(b) et 6.20(c)) jusqu'à notre cas de référence basé sur des profils en erf asymétrique (figure 6.20(d)). Pour ces nouveaux cas (b, c et d), l'approximation de Boussinesq n'est plus utilisée et le nombre d'Atwood est choisi avec pour valeur $At = 0.15$. Le nombre de Reynolds est fixé à $Re \sim 5 \cdot 10^5$. Pour tous les cas présentés figure 6.20, les iso-contours qui sont représentés en trait gras ont été obtenus avec une discrétisation spatiale basée sur le mapping classique (mapping arctanh-exp, §5.2.2). La partie représentée en trait fin a été calculée avec le mapping complexe (arctanh-exp complexe §5.2.3), pour lequel les coordonnées des points de grille appartiennent au plan complexe.

La figure 6.20(b) concerne les profils en tanh avec des conditions d'adhérence en bas et de glissement en haut d'un domaine borné, comme décrit §6.1.2. Nous avons remarqué que remplacer la condition d'adhérence au fond par une condition de glissement n'entraîne aucune conséquence visible sur les résultats. En accord avec Hazel (1972), confiner l'écoulement augmente le taux de croissance pour de faibles nombres d'ondes. En effet, seules les grandes ondes sont "conscientes" de la présence de la frontière. Sur la figure 6.20(c), la fonction de base des profils a été changé de tanh en erf. La modification de la forme de l'interface agit sur les grands nombres d'ondes. La courbe marginale (ou neutre) n'est plus parabolique comme précédemment et ne passe plus par le nombre d'onde $k^* = 1$ en $Ri = 0$. Finalement, la figure 6.20(d) présente notre configuration d'étude comme présenté au paragraphe §6.1.2. Cette configuration correspond à un profil en erf asymétrique au niveau de l'interface, avec un paramètre d'asymétrie fixée à $\lambda = 0.1$ et la viscosité est homogène ($W = 0$). Dans ce cas, l'asymétrie de l'interface augmente le taux de croissance aux grands nombres d'onde.

6.4 Stabilité de notre écoulement

6.4.1 Caractère bi-dimensionnel de l'instabilité primaire

Nous nous concentrons maintenant sur le cas de référence basé sur un profil en erf avec un paramètre d'asymétrie $\lambda = 0.1$ et des densités fixées à $\rho_1 = 1360 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, correspondant à un nombre d'Atwood $At = 0.15$. Dans le cas d'un écoulement parallèle homogène non-visqueux, Squire (1933) a démontré que, quelque soit le mode instable tri-dimensionnel, il existe au moins un mode bi-dimensionnel qui est plus instable (dont le taux de croissance est plus important). Ce théorème a été généralisé aux écoulement visqueux par Yih (1955) comme suit : quelque soit le mode instable oblique (ou tri-dimensionnel), il existe un mode bi-dimensionnel instable pour un nombre de Reynolds plus faible. Ainsi, le nombre de Reynolds critique peut être déterminé en ne considérant que les modes bi-dimensionnels. Cependant, il n'est pas prouvé que pour un

nombre de Reynolds instable donné, le mode le plus instable soit bi-dimensionnel (voir un exemple dans [Caulfield, 1994](#), concernant des instabilités de Holmboe).

Dans notre configuration, une exploration tri-dimensionnelle a été menée. Elle semble confirmer le caractère bi-dimensionnel de l'instabilité primaire dans notre configuration. La figure (6.21) présente le taux de croissance pour deux nombres d'onde longitudinal fixés $\beta^* = 0.5$ et $\beta^* = 0.01$, et pour un vecteur d'onde d'angle $\frac{\pi}{4}$ par rapport à la direction de l'écoulement (i.e. un nombre d'onde longitudinal β^* égal à au nombre d'onde dans la direction de l'écoulement k^*). Pour ces configurations, le taux de croissance est inférieur à celui obtenu dans le cas 2D. Les instabilités 2D croissent plus rapidement : l'écoulement reste bi-dimensionnel durant le développement de l'instabilité primaire.

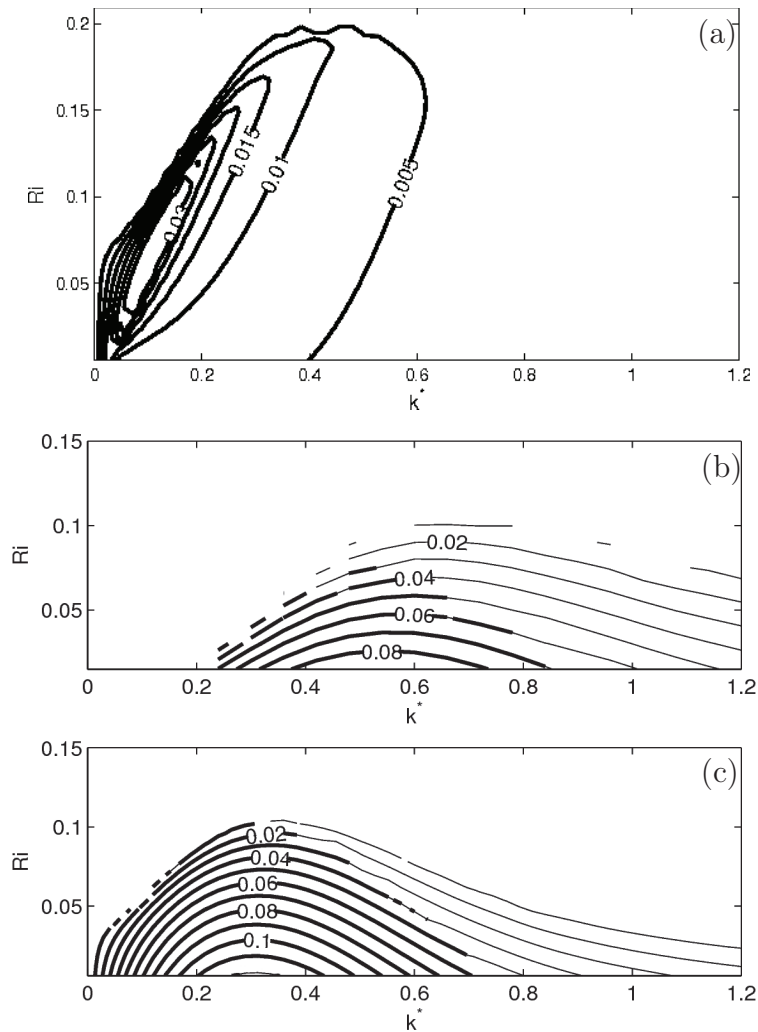


FIGURE 6.21 – Taux de croissance pour des rouleaux 3D de KH, $W = 0$, $Re \sim 10^5$. (a) : Différence entre le cas $\beta = 0$ et $\beta^* = 0.01$, (b) : $\beta^* = 0.5$, (c) : $\beta^* = k^*$.

6.4.2 Présentation du spectre et des modes les plus instables

Le domaine de calcul $z \in [0, H]$, avec $H = 3$ m est borné par une condition de glissement en haut et d'adhérence en bas. L'interface est positionnée en $h = 1$ m et une épaisseur "associée au point d'inflexion" est telle que $4\delta/\sqrt{\pi} = 0.3$ m. Puisque $u_1/u_2 \ll 1$, les variations du nombre de Richardson Ri , du nombre de Reynolds Re et du rapport de viscosité W reflètent seulement les variations de la vitesse u_2 et des viscosités μ_1 et μ_2 . Comme justifié précédemment, nous allons nous concentrer sur les écoulements bi-dimensionnels.

Un spectre typique des valeurs propres obtenues avec *LiSa* est présenté figure 6.22 pour un certain jeu de paramètres. Nous observons tout d'abord une pulsation ω^* comprise

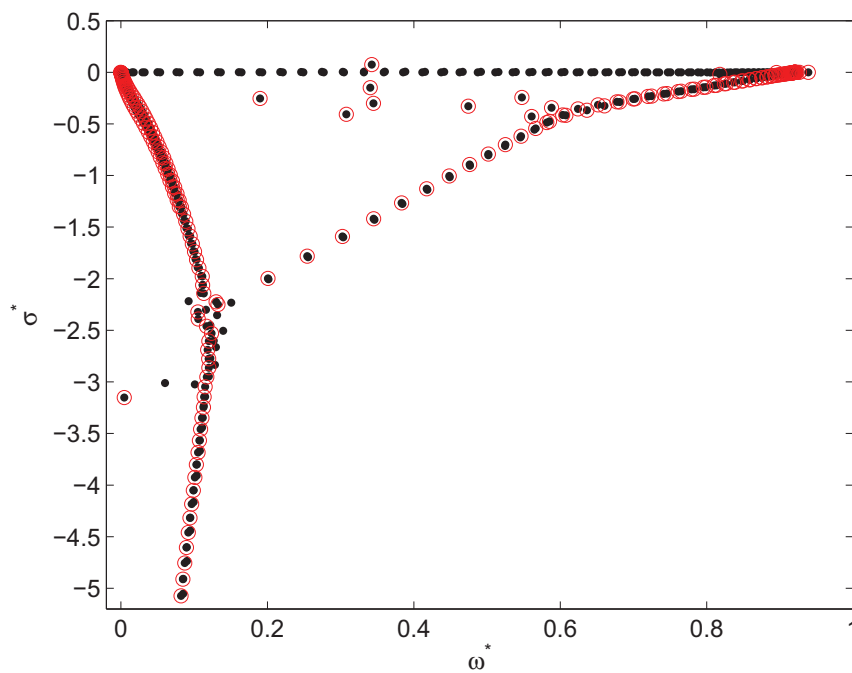


FIGURE 6.22 – Spectre des valeurs propres dans le plan (ω^*, σ^*) pour $Re = 10^2$, $Ri = 0.15$, $W = 3$ et $k^* = 0.46$. Les cercles correspondent aux valeurs propres convergées.

entre 0 et 1, caractéristique d'un écoulement strictement positif selon x . La pulsation non-nulle du mode instable de KH est alors due à son transport par l'écoulement ; la vitesse au point d'inflexion, où se développe l'instabilité, étant non-nulle, contrairement au cas de l'écoulement stratifié général présenté paragraphe §6.2.3. Ainsi, la majorité des modes observés sont des modes stationnaires, advectés par l'écoulement locale, dont la pulsation est directement fonction de la vitesse locale : $\omega^* = k^*(c^* + \bar{u}^*)$ avec c^* la vitesse propre du mode adimensionnée et \bar{u}^* la vitesse de l'écoulement moyen adimensionnée. Ainsi, pour ces modes de vitesse propre nulle, se déplacer vers les ω croissants revient à se déplacer vers les \bar{u} croissants et donc vers les z croissants dans notre configuration. Les modes convergés pour $\omega \sim 0$ correspondent alors à des oscillations amorties dans la couche

inférieure de l'écoulement, et les modes convergés pour $\omega \sim 1$ à des oscillations amorties dans la couche supérieure. Nous observons alors l'asymétrie du profil initial de vitesse selon z dans l'asymétrie du spectre selon ω , notamment pour les modes amortis. Dans le cas d'écoulements tri-dimensionnels, on observe la formation de couples de modes amortis constitué d'un mode d'oscillation 2D et d'un mode d'oscillation selon y seulement. Cette observation s'explique par la possible dissociation du système 3D en deux sous systèmes indépendants, 2D et selon la direction transversale (voir [Schmid and Henningson, 2001](#)). Le taux de croissance associé au mode le plus instable est présenté en figure 6.23. On

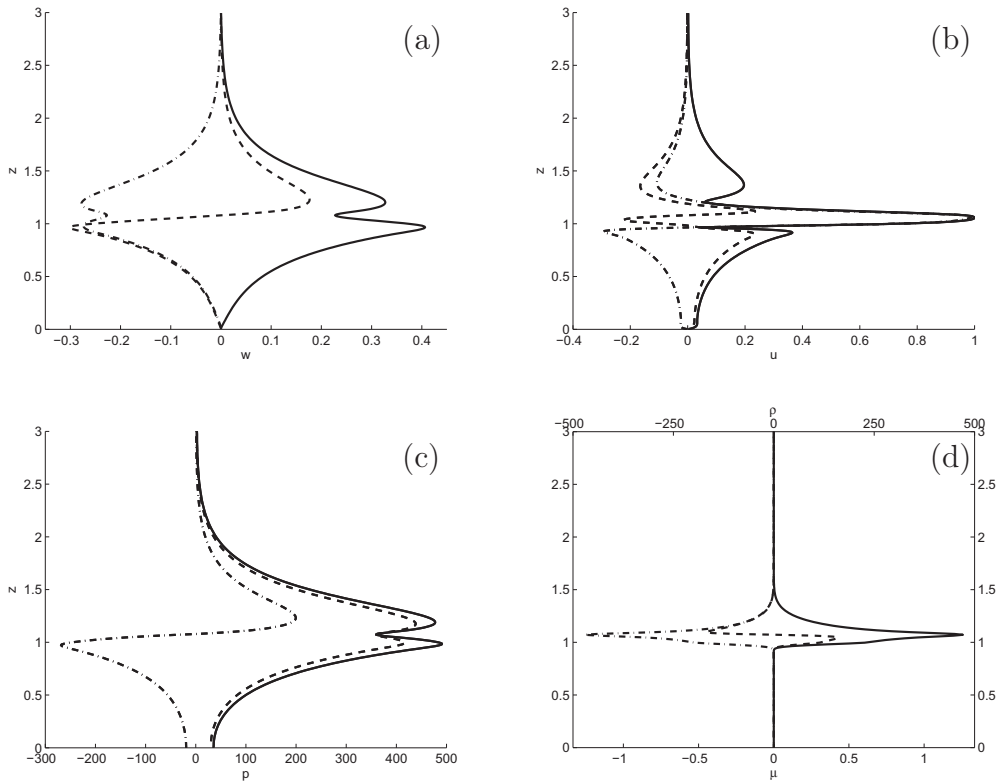


FIGURE 6.23 – Profils verticaux du mode le plus instable pour $Re = 10^2$, $Ri = 0.15$, $W = 3$ and $k^* = 0.46$ pour : (a) vitesse verticale, (b) vitesse dans le sens de l'écoulement, (c) pression et (d) densité, normalisée par le maximum de la perturbation de vitesse dans le sens de l'écoulement. Pointillés - - : partie réelle. Points-pointillés -.- : partie imaginaire. Trait plein - : valeur absolue.

observe un profil similaire mais déphasé entre la pression et la vitesse verticale. Les profils de perturbation de la vitesse horizontale et de la densité se caractérisent par un "pic" au niveau de l'interface. Ces modes ont été comparés, figure (6.24), à ceux obtenus pour un profil symétrique ($\lambda = 0, 5$, $W = 0$) et pour des rapports de viscosité, entre les fluides, plus petit ou nul, à nombre de Reynolds constant au niveau de l'interface. L'asymétrie de l'écoulement de base au niveau de l'interface, introduit par le paramètre λ , est visible sur les modes. L'instabilité n'est pas située au niveau du point d'inflexion en $z = h = 1$ m,

comme cela serait le cas pour $\lambda = 0.5$, mais un petit peu au-dessus en $z = 1.07$ m (voir notamment les profils de perturbation de densité). L'asymétrie entraîne aussi un étirement des modes au-dessus de l'interface et une compression au dessous. Le rapport de viscosité a une faible influence sur la position verticale ou la forme générale des modes. Pour la pression ou la masse volumique, le rapport de viscosité amplifie légèrement l'amplitude des profils. Pour les vitesses, une augmentation du rapport de viscosité diminue légèrement l'amplitude des perturbations au-dessous de l'interface, où la viscosité est augmentée, et diminue leur amplitude au-dessus de l'interface où la viscosité est diminuée. Ces variations entre les profils pour différents rapports de viscosité sont faibles (moins de 10%).

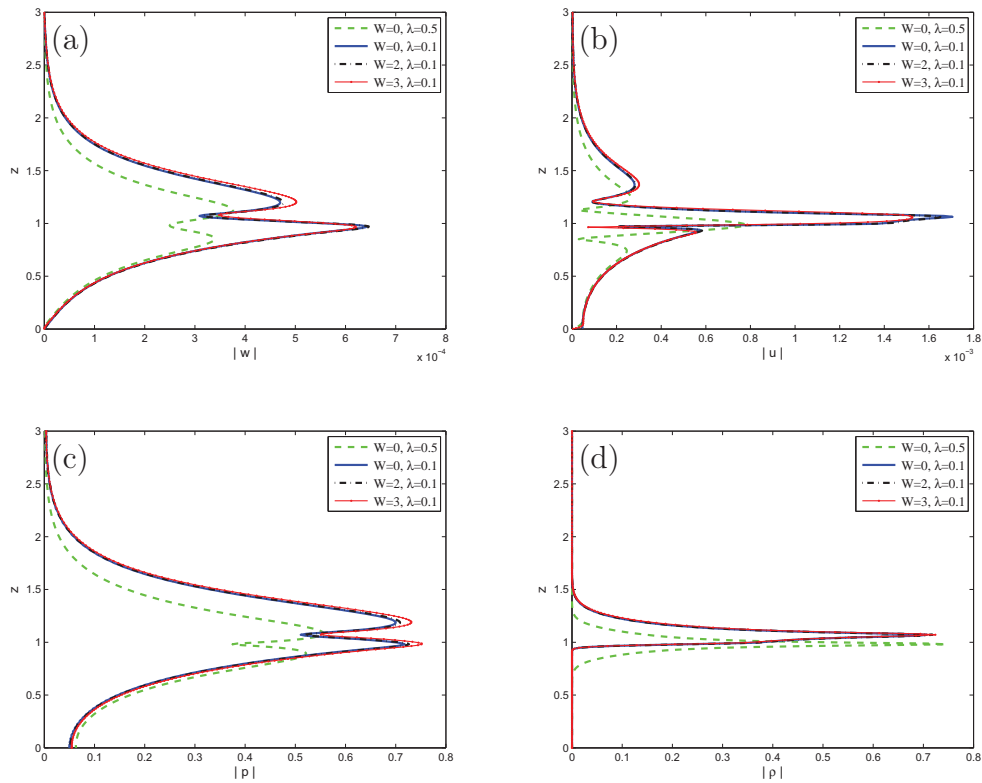


FIGURE 6.24 – Comparaison pour différents W de l'amplitude du mode le plus instable ($Re = 10^2$, $Ri = 0.15$ and $k^* = 0.46$), pour : (a) vitesse verticale, (b) vitesse dans le sens de l'écoulement, (c) pression et (d) densité, normalisée par l'énergie cinétique de la perturbation.

6.4.3 Sensibilité aux paramètres d'étude

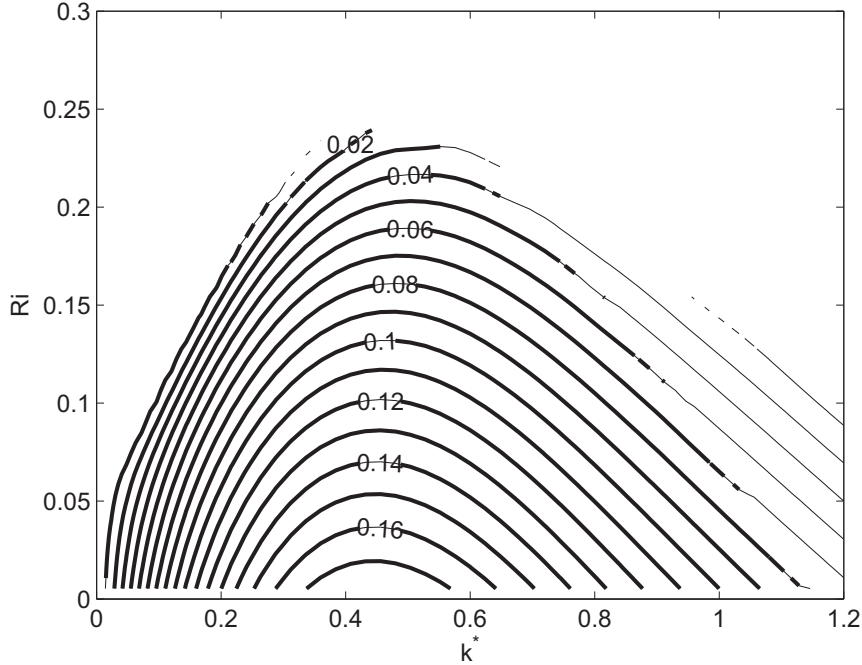


FIGURE 6.25 – Isolignes du taux de croissance adimensionné σ^* , fonction du nombre d'onde adimensionné k^* et du nombre de Richardson Ri pour $W = 3$ et $Re = 10^2$.

La dépendance du taux de croissance σ^* à $Re = 10^2$ par rapport au nombre de Richardson est présentée sur la figure (6.25) pour $W = 3$. Les traits épais et fins correspondent respectivement aux mappings réel (tanh-exp : §5.2.2) et complexe §(5.2.3) présentés dans la description de la figure (6.20). Comme présenté dans la partie précédente, l'augmentation du taux de croissance observée pour de petits nombres d'onde résulte du confinement. Une augmentation de l'asymétrie de l'interface entraîne une augmentation de la gamme des nombre d'onde instable vers les grands nombres d'ondes. Les petites longueurs d'onde sont déstabilisées par le gradient plus important dans la partie inférieure de l'interface, leur longueur caractéristique étant $\lambda\delta$. La figure (6.26), qui présente les isocontours du taux de croissance pour $W = 3$ dans le plan formé par le nombre d'onde et le nombre de Reynolds, illustre l'influence du nombre de Reynolds. Pour des nombres de Reynolds supérieurs à 10^3 , le taux de croissance ne dépend pas de la viscosité, ce qui est une des caractéristiques des instabilités de Kelvin-Helmholtz. Mais pour des nombres de Reynolds plus faibles, nous observons un taux de croissance plus important, accompagné d'un domaine instable plus large : la viscosité a un effet déstabilisant. Sur la figure (6.27) sont présentés les isocontours du taux de croissance pour différents rapports de viscosité W . Pour un nombre de Reynolds supérieur à 10^3 , le taux de croissance ne dépend pas du rapport de viscosité, ce qui est consistant avec le fait que les propriétés de stabilité sont indépendantes de la viscosité pour de grands nombres de Reynolds.

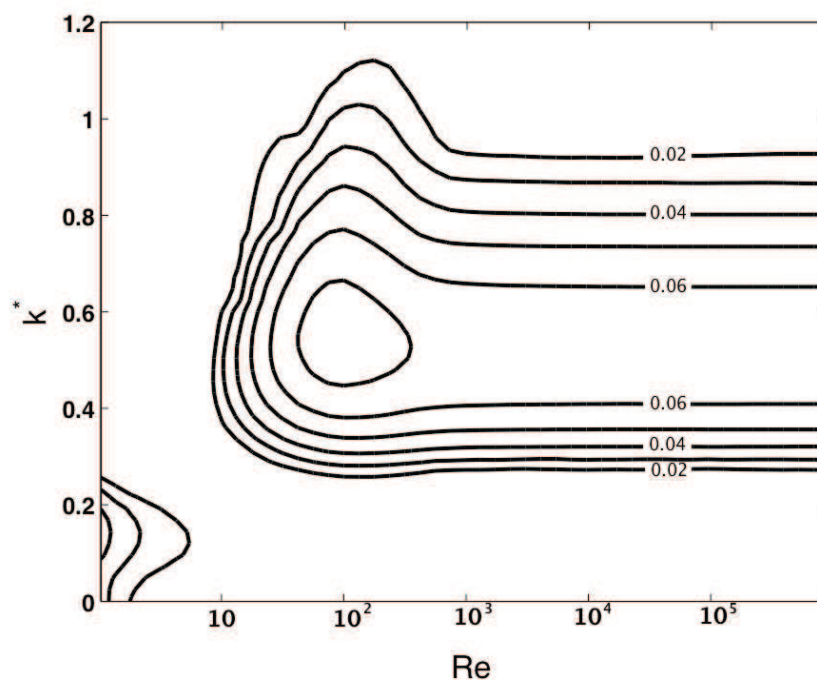


FIGURE 6.26 – Isocontours du taux de croissance adimensionnalisé σ^* , fonction du nombre d'onde adimensionnalisé k^* et du nombre de Reynolds Re pour $Ri = 0.15$ et $W = 3$.

Pour illustrer les propriétés à faible nombre de Reynolds, une section de ce diagramme à $Re = 10^2$ est présentée figure (6.28). Nous pouvons noter que de grands rapports de viscosité entre les fluides augmentent l'effet déstabilisant de la viscosité précédemment observé. La figure (6.29), qui représente l'évolution du taux de croissance maximum de l'instabilité de KH en fonction du nombre de Reynolds, présente la même influence pour la viscosité et le rapport de viscosité entre les deux fluides. Elle suggère aussi un nombre de Reynolds critique de développement de l'instabilité de KH plus faible pour les écoulements présentant un fort gradient de viscosité (pour les faibles nombres de Reynolds). Sur les figures (6.26) et (6.27), nous pouvons noter une instabilité de nature différente pour de faibles nombres de Reynolds et petits nombres d'onde. Comme dans Yih (1967), nous observons des instabilités de grandes longueurs d'ondes dans le cas présent de deux couches de fluides, la plus fine étant aussi la plus visqueuse. Un travail récent de Govindarajan (2004) sur des écoulements concentriques en tube de fluides miscibles de viscosité différentes présente des résultats similaires. Les modes observés seraient des modes de "chevauchement" ("overlap" modes), une déformation des modes de Tollmien-Schlichting se développant dans une région de viscosité variable. Puisque nous nous intéressons à des paramètres observables en estuaires, et donc à nombre de Reynolds suffisamment important, nous n'avons pas étudié plus en détail cette instabilité.

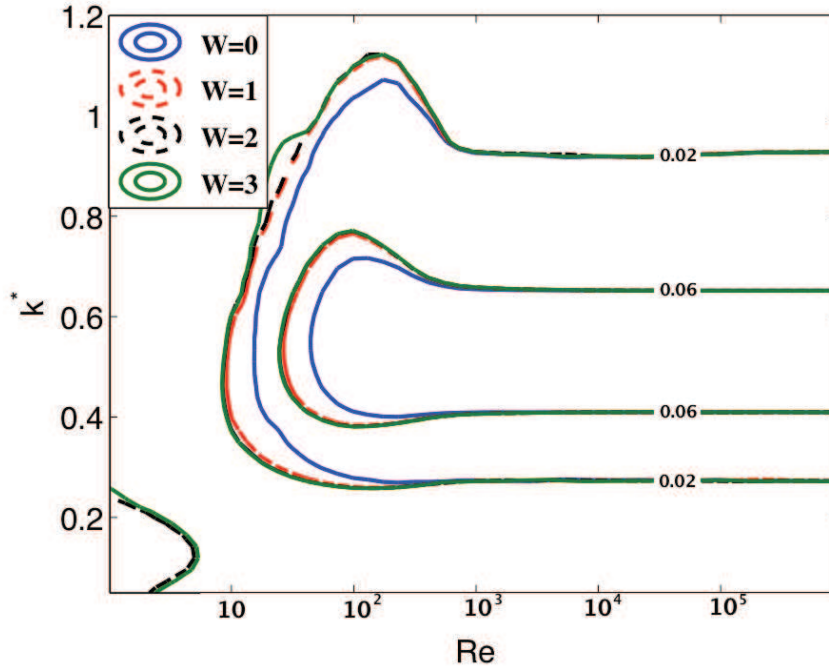


FIGURE 6.27 – Isocontours du taux de croissance adimensionnalisé σ^* , fonction du nombre d'onde adimensionnalisé k^* et du nombre de Reynolds Re pour $Ri = 0.15$ et pour $W \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Conclusion

Finalement, nous avons présenté dans cette partie l'étude de stabilité linéaire d'une interface de type lutocline, dans le cas d'une vase newtonienne. Nous avons dans un premier temps présenté notre configuration d'étude, basée sur des données caractéristiques de celles observées au niveau de la lutocline. Cet écoulement de référence est un écoulement parallèle bi-couche miscible dont les profils de vitesse et de concentration suivent un profil de type erf asymétrique. La densité et la masse volumique sont des fonctions linéaires de la concentration. Différents cas simplifiés, proche de cette configuration sont ensuite présentés. On peut notamment citer le développement d'ondes internes dans une interface de densité ou encore le développement d'instabilités de cisaillement de type Holmboe dans un écoulement dont les épaisseurs des profils de vitesse et de densité sont différentes. Une transition d'un écoulement classique de la littérature vers notre écoulement permet de mettre en avant sa spécificité. Enfin, une étude de sensibilité aux paramètres de l'écoulement est proposée. Nous retrouvons la dépendance classique du taux de croissance en fonction du nombre de Richardson, avec un nombre de Richardson critique autour de $1/4$. Le nombre de Reynolds significatif est celui calculé au niveau du point d'inflexion. On retrouve un taux de croissance constant en fonction Re pour les grands nombre de Reynolds, et la disparition des instabilités de KH aux faibles nombres de Reynolds. Cependant, une légère augmentation du taux de croissance est observée aux Reynolds intermédiaires. Cette augmentation est amplifiée avec l'augmentation de la stratification

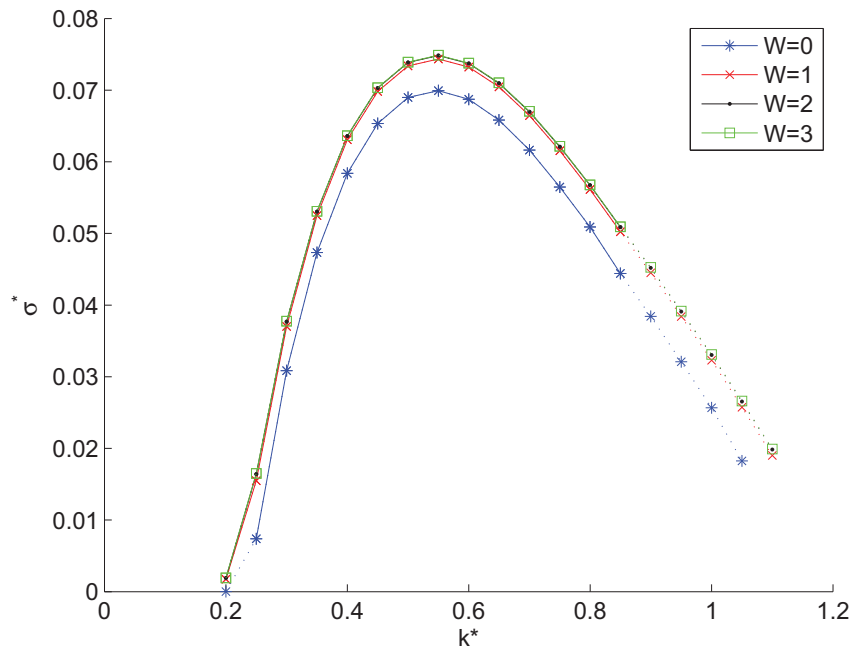


FIGURE 6.28 – Taux de croissance adimensionné σ^* , fonction du nombre d'onde adimensionné k^* , pour $Ri = 0.15$, $Re = 10^2$ et $W \in \{0, 1, 2, 3\}$.

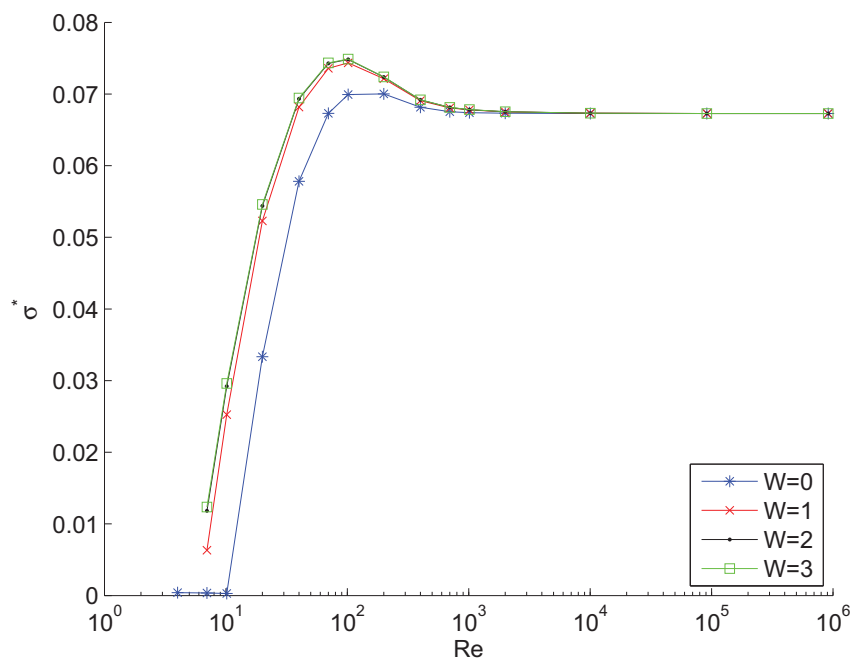


FIGURE 6.29 – Taux de croissance maximum fonction du nombre de Reynolds pour $Ri = 0.15$ et pour $W \in \{0, 1, 2, 3\}$.

en viscosité. La stratification en viscosité ne semble pas présenter d'autre influence sur l'écoulement, hormis l'apparition d'instabilités visqueuses à faibles Re . Ainsi, la lutocline à la surface d'une vase 1000 fois plus visqueuse que l'eau se déstabilise plus légèrement rapidement que prédit par la théorie inviscide.

Chapitre 7

Evolution vers une couche de mélange

Sommaire

7.1	Validation du code de DNS <i>JADIM</i>	130
7.1.1	Validation de la forme du mode instabilité	130
7.1.2	Comparaison des taux de croissance de l'instabilité primaire	133
7.2	Evolution de l'instabilité primaire	136
7.2.1	Méthode utilisée	136
7.2.2	Présentation d'un cas particulier	136
7.2.3	Influence des deux stratifications de densité et de viscosité	139
7.3	Evolution tridimensionnelle de l'écoulement	142
7.3.1	Présentation de la configuration d'étude	142
7.3.2	Développement d'un mode tridimensionnel	143
7.3.3	Structure du mode 3D	145
7.3.4	Evolution finale vers une couche de mélange	146
7.4	Développement de l'instabilité à faibles Reynolds	147
7.4.1	Présentation de la configuration	147
7.4.2	Instabilité primaire	148
7.4.3	Forçage de la couche visqueuse	150
7.4.4	Tri-dimensionnalisation de l'écoulement	153

Introduction

Nous avons présenté dans le paragraphe précédent une étude de stabilité de l'interface entre deux fluides modélisant une lutocline. Nous avons observé une importance relative de la stratification en viscosité pour les nombres de Reynolds intermédiaires. Nous allons maintenant étudier l'évolution non-linéaire de ces instabilités, afin de pouvoir évaluer l'importance de la stratification en viscosité sur le développement des instabilités secondaires ainsi que sur le mélange résultant de ces instabilités. Dans une première partie, nous allons valider l'utilisation de notre code de simulation numérique directe *JADIM* à l'aide de résultats linéaires obtenus grâce au code *LiSa*. Le développement non-linéaire

de l'instabilité de contre écoulement sera ensuite étudié dans un premier temps en écoulement bi-dimensionnel. Le caractère tri-dimensionnel sera ensuite développé dans une partie suivante. Enfin, une dernière partie présentera l'évolution de l'écoulement dans le cas d'une crème de vase très visqueuse.

7.1 Validation du code de simulations numériques directes *JADIM*

Afin de pouvoir étudier le développement non-linéaire de l'instabilité, nous avons choisi de réaliser des simulations numériques directes avec le code *JADIM* présenté chapitre 4. Pour vérifier la pertinence du code, nous avons comparé les résultats du code de simulation numérique directe (DNS) *JADIM* avec ceux du code de stabilité linéaire sur la phase de croissance linéaire de l'instabilité, première étape du développement de l'instabilité. Nous avons ensuite évalué les résultats du code sur un exemple de l'évolution classique d'une instabilité de Kelvin-Helmholtz.

7.1.1 Validation de la forme du mode instabilité

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à la longueur d'ondes des instabilités et la forme des modes obtenus. Pour cela, nous avons utilisé un domaine de longueur L quelconque mais suffisamment grande pour pouvoir contenir plusieurs périodes spatiales. Nous avons choisi $L = 7.263\text{m}$. La périodicité selon x dans la direction de l'écoulement impose le fait que L soit divisible par la période spatiale de l'instabilité. Ainsi, les nombres d'ondes dans la direction de l'écoulement k doivent être de la forme $k = n\frac{2\pi}{L}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Nous nous sommes placés une configuration classique : $W = 2$, $Ri = 0,15$ et $Re = 10^3$. Un écoulement de base classique de type erf asymétrique est utilisé, avec des conditions d'adhérence au fond et de glissement en haut du domaine, en $H = 3\text{m}$ et une interface en $h = 1\text{m}$. Grâce à *LiSa*, nous pouvons obtenir le taux de croissance de l'instabilité de cisaillement en fonction de la longueur d'onde selon x du mode. En reportant sur cette figure les longueurs d'ondes autorisées par la longueur du domaine de calcul, nous obtenons la figure (7.1). Cette figure présente les résultats de *LiSa* en trait fin et les longueurs d'ondes autorisées associées à leur taux de croissance prévu par *LiSa*, par des cercles, après adimensionnalisation par l'épaisseur de l'interface. La longueur d'onde autorisée la plus faible correspond au mode un ($n = 1$ dans l'expression précédente), la période de l'instabilité correspond à la longueur de la boîte de simulation. Ensuite, le mode deux correspond à la seconde longueur d'onde autorisée $k^* \sim 0.25$, et correspond au développement de deux périodes, et finalement deux rouleaux dans la boîte de simulation ; et ainsi de suite. Dans ce cas, nous pouvons remarquer que le taux de croissance le plus important est obtenu pour le mode quatre. Nous allons donc vérifier ces prédictions grâce au code *JADIM*. Pour cela, nous utilisons un domaine de calcul bi-dimensionnel de longueur L , de hauteur H . La grille de simulation utilisée est de résolution 1500×600 . Elle est raffinée au niveau de l'interface et présente une taille de grille de $0.5 \text{ cm} \times 0.5 \text{ cm}$

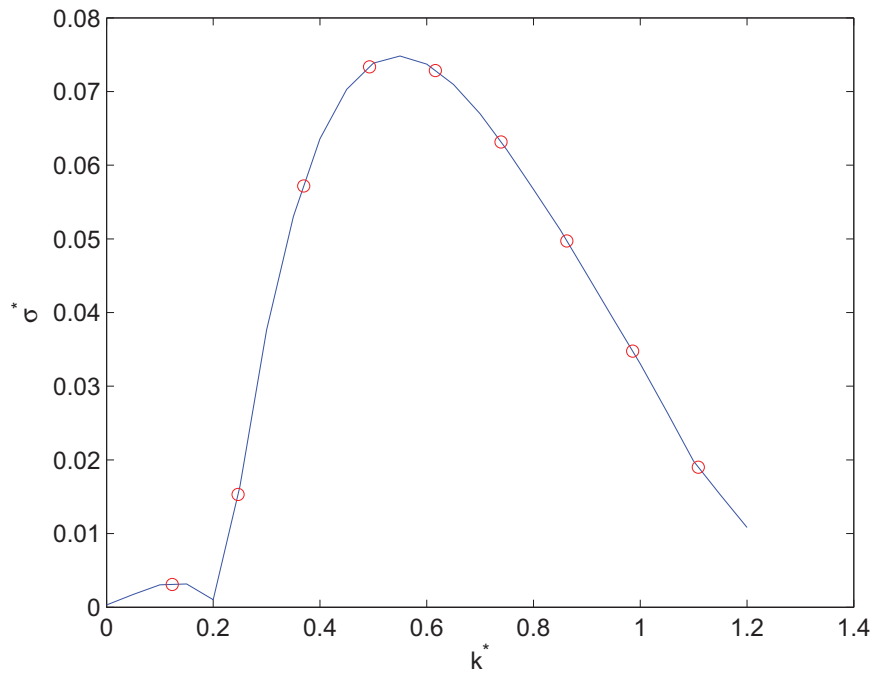


FIGURE 7.1 – Taux de croissance calculés avec *LiSa* en fonction du nombre d’onde pour le cas $W = 2$, $Ri = 0.15$ et $Re = 10^3$. Les symboles \circ correspondent aux différents nombres d’ondes possibles.

pour $z \in [0, 75 \text{ } 1, 5]$, la taille verticale des grille diminuant ensuite linéairement dans les zones supérieure et inférieure du domaine, jusqu’à atteindre une taille de grille de $1, 2 \text{ cm} \times 0.5 \text{ cm}$ aux frontières du domaine.

Afin de se développer (numériquement), l’instabilité nécessite au minimum une infime modification de l’état de base. Au lieu de laisser le bruit numérique perturber l’écoulement de base, nous avons choisi d’imposer un bruit blanc dans la zone de l’interface afin de maîtriser un minimum l’amplitude initiale des perturbations et de diminuer le temps de développement. Ce bruit blanc est imposé sur les différentes composantes de vitesse ainsi que sur le champ de masse volumique. Nous présentons figure (7.2) l’initialisation du champ de vitesse verticale perturbé. La perturbation est concentré au niveau de l’interface en modulant l’amplitude du bruit par une gaussienne centrée en $h = 1\text{m}$. Le choix de ne perturber que la zone autour de l’interface se justifie physiquement par la stabilité des zones supérieures et inférieures du domaine, mais aussi numériquement : des perturbations de vitesse verticale par exemple aux frontières Nord et Sud ne sont pas acceptables.

Après un temps physique $t^* \sim 100$, nous observons clairement le développement du mode quatre, attendu d’après la figure (7.1), aboutissant ensuite au développement de quatre rouleaux dans le domaine de calcul, comme présenté figure (7.3) à $t^* = 167$.

Si nous observons maintenant la formes des modes durant la phase linéaire de développement, nous observons une bonne adéquation avec les résultats du code de stabilité linéaire *LiSa*. Figure (7.4.a), nous avons présenté le champ de vitesse verticale obtenu par

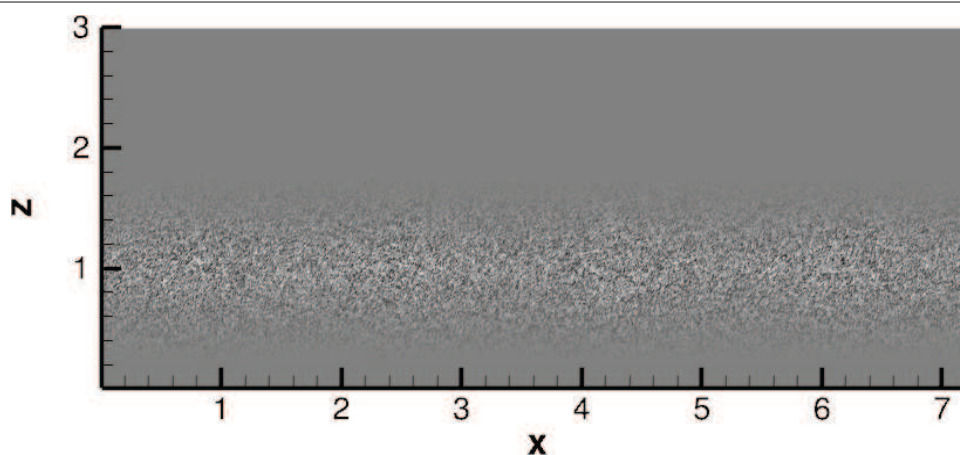


FIGURE 7.2 – Condition initiale de type bruit blanc appliqué au champ de vitesse verticale w et centré au niveau de l'interface en $z = 1$ m.

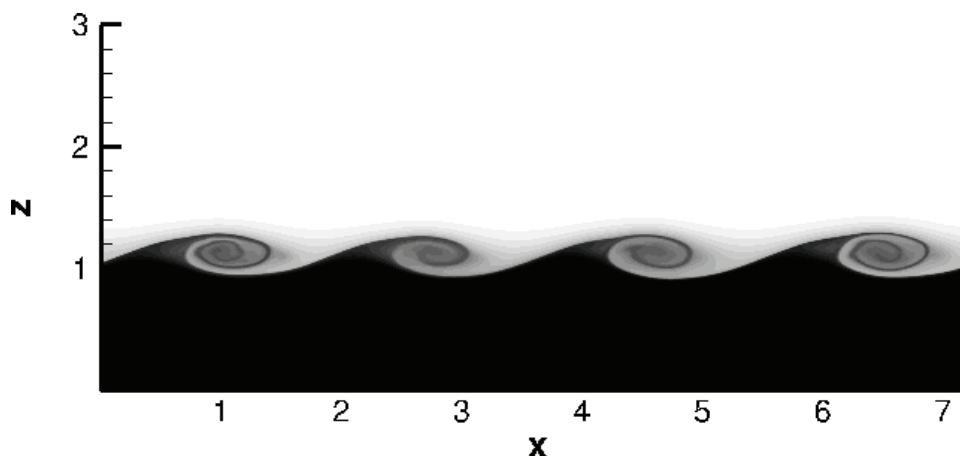


FIGURE 7.3 – Champ de masse volumique à $t^* = 167$: le mode quatre est clairement développé (formation de quatre rouleaux de KH). $W = 2$, $Ri = 0.15$ et $Re = 10^3$.

la simulation numérique initialisée par le bruit blanc à $t^* = 104$. Nous pouvons remarquer que ce champ n'est pas parfaitement périodique car d'autres modes (notamment le mode 5, mais aussi 3 et 6) ont aussi un taux de croissance important et ne sont pas encore négligeables. Cependant, nous remarquons clairement que le mode quatre domine l'écoulement, ce qui se confirmera ensuite figure (7.3) par le développement des 4 rouleaux de KH. Nous avons ensuite représenté figure (7.4.b), le champ de vitesse verticale reconstruit à partir du profil des modes obtenu grâce au code *LiSa*. Nous observons bien une forme similaire des modes. Dans les parties qui suivent, nous allons utiliser cette méthode pour initialiser les simulations numériques directes. Ainsi, nous pourrions directement contrôler l'énergie initiale fournie au mode le plus instable, et forcer uniquement les modes que nous souhaitons. Cette méthode sera par exemple utilisée dans la partie suivante afin de calculer le taux de croissance du mode le plus instable.

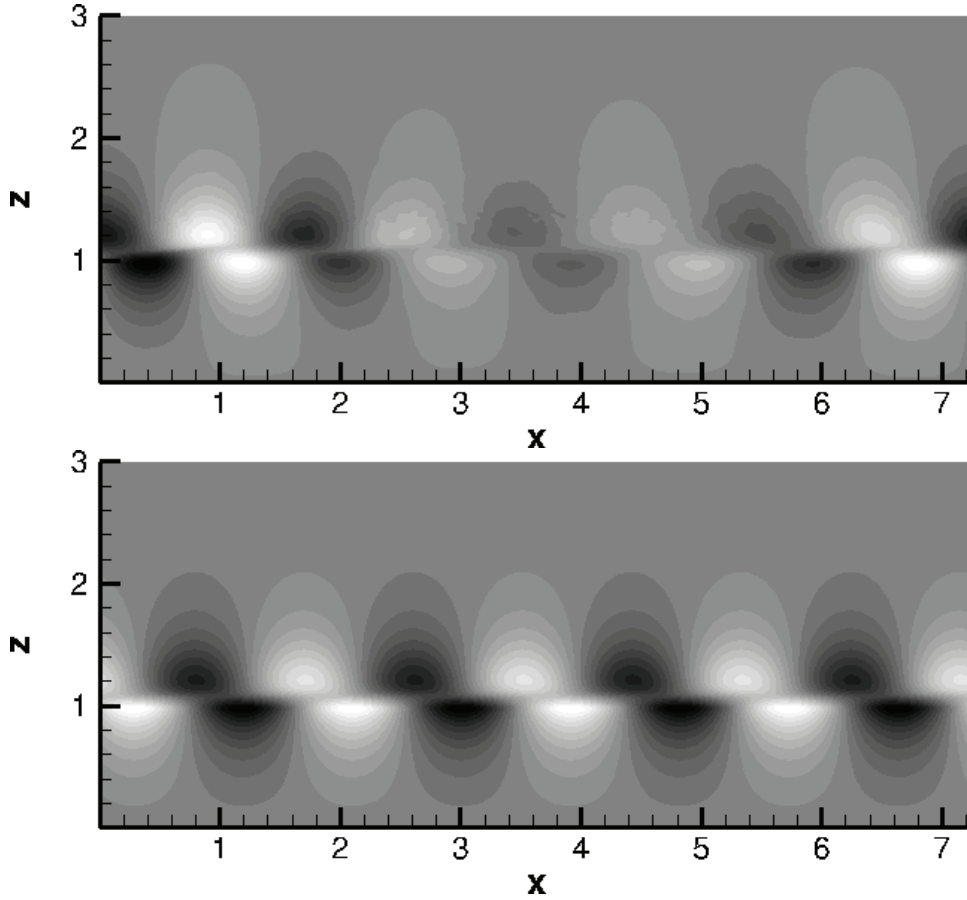


FIGURE 7.4 – Champ de vitesse verticale. a) Développement de l’instabilité à $t^* = 104$, à partir d’un bruit blanc. b) Reconstruction du champ à partir des résultats de *LiSa*. $W = 2$, $Ri = 0.15$ et $Re = 10^3$.

7.1.2 Comparaison des taux de croissance de l’instabilité primaire

Nous avons choisi $k_* = 0.46$, ce qui correspond à une période L selon x : $L = 2\pi/k \sim 1.8$ m puisque $k = k_*/\delta$ et $\delta = 0.3\sqrt{\pi}/4$. La résolution de la grille de calcul est fixée à $0.5 \text{ cm} \times 0.5 \text{ cm}$, ce qui correspond à (x, z) -résolution de 364×600 . Sur la figure 7.5 est représentée l’énergie cinétique des perturbations de vitesse calculée comme le carré des perturbations de vitesse :

$$\|\hat{\underline{u}}\|^2 = \frac{1}{HL} \int_0^H \int_0^L [(u - \langle u \rangle_x)^2 + (v - \langle v \rangle_x)^2] dx dy, \quad (7.1)$$

où $\langle \rangle_x$ représente la moyenne spatiale selon la direction x . Le choix de soustraire l’écoulement moyen calculé au cours du temps, au lieu de soustraire l’écoulement moyen initial, évite de prendre en compte la diffusion de l’écoulement moyen dans l’amplitude des perturbations. Différents nombres de Reynolds ont été étudiés afin de d’évaluer la sensibilité de ce paramètre sur le taux de croissance de l’instabilité. Aux temps courts ($t^* \leq 15$),

Taux de croissance σ^*		$Re = 10^2$	$Re = 10^3$	$Re = 10^4$	$Re = 10^5$	$Re = 10^6$
$W = 0$	Stabilité linéaire	0.5688	0.5532	0.5521	0.5520	0.5520
	DNS	×	0.5039	0.5485	0.5509	0.5511
$W = 3$	Linear stability	0.6098	0.5567	0.5525	0.5521	0.5520
	DNS	0.5848	0.5482	0.5504	0.5507	0.5500

TABLE 7.1 – Taux de croissance adimensionné σ^* pour différents nombres de Reynolds Re et rapports de viscosité W ($Ri = 0.15$ et $k^* = 0.46$), obtenus à partir de la DNS et comparé avec l'analyse de stabilité linéaire.

la croissance de $||\hat{u}||^2$ est exponentielle et indépendante du nombre de Reynolds Re . Ces résultats sont en accord avec les résultats de l'étude de stabilité linéaire qui prédit un taux de croissance σ^* indépendant de Re pour $Re \geq 10^3$ (Figure 6.29). Pour des temps plus longs ($15 \leq t^* \leq 50$), le taux de croissance de l'instabilité suit toujours une tendance exponentielle pour $Re \geq 10^3$ alors que pour des Re plus petits, l'énergie cinétique diminue d'un ordre de grandeur environ. Aux temps longs ($t^* \geq 50$), l'énergie cinétique des perturbations "sature" en oscillant autour d'une valeur plateau de 10^{-2} pour $Re \geq 10^3$ et 10^{-3} pour $Re = 10^2$. Les taux de croissance obtenus grâce aux simulations numériques directes ont été comparés aux résultats de stabilité linéaire du code, et présentés table 7.1.

Comme attendu, lorsque le nombre de Reynolds Re croît, la dépendance avec W n'est plus visible. Pour de grands nombres de Reynolds, le rapport de viscosité n'a aucune influence sur le développement de l'instabilité primaire, de nouveau en accord avec les résultats de l'étude de stabilité linéaire (voir e.g. Figure 6.29). On observe un accord quantitatif avec les résultats de stabilité linéaire, les différences étant inférieures à 1% pour $Re \geq 10^4$. Ceci indique que, pour la résolution choisie, le code de DNS *JADIM* est capable de capturer les instabilités se développant dans une couche de mélange dans la gamme de paramètre étudiée.

Pour de faibles nombres de Reynolds, les simulations DNS diffèrent des prédictions de l'étude de stabilité linéaire car l'hypothèse de quasi-stationnarité de l'écoulement de base n'est plus valide. On peut construire un temps caractéristique de croissance de l'instabilité, basé sur le taux de croissance : $\tau_{inst} = \frac{2\delta}{\sigma^*(u_2 - u_1)}$ et un temps caractéristique de diffusion de l'écoulement de base : $\tau_\nu = \frac{(\lambda\delta)^2 \rho_h}{\mu_h}$. Le rapport entre ces temps caractéristiques est :

$$\frac{\tau_{inst}}{\tau_\nu} = \frac{2\delta}{\sigma^*(u_2 - u_1)} \frac{\mu_h}{(\lambda\delta)^2 \rho_h} = \frac{1}{Re} \frac{8}{\sqrt{\pi} \lambda \sigma^*}.$$

$\tau_{inst}/\tau_\nu \sim 0.9$ pour $Re = 100$, ce qui signifie que l'écoulement de base diffuse sur une échelle de temps comparable à celle du développement de l'instabilité. Contrairement aux régimes correspondant à un Re plus grand, l'écoulement de base ne peut plus être considéré constant durant le développement de l'instabilité. Ceci explique l'observation d'une croissance exponentielle de la perturbation seulement sur un temps très court, rapidement ralentie par la diffusion de l'écoulement de base. Cet écoulement particulier sera présentée partie §7.4.1.

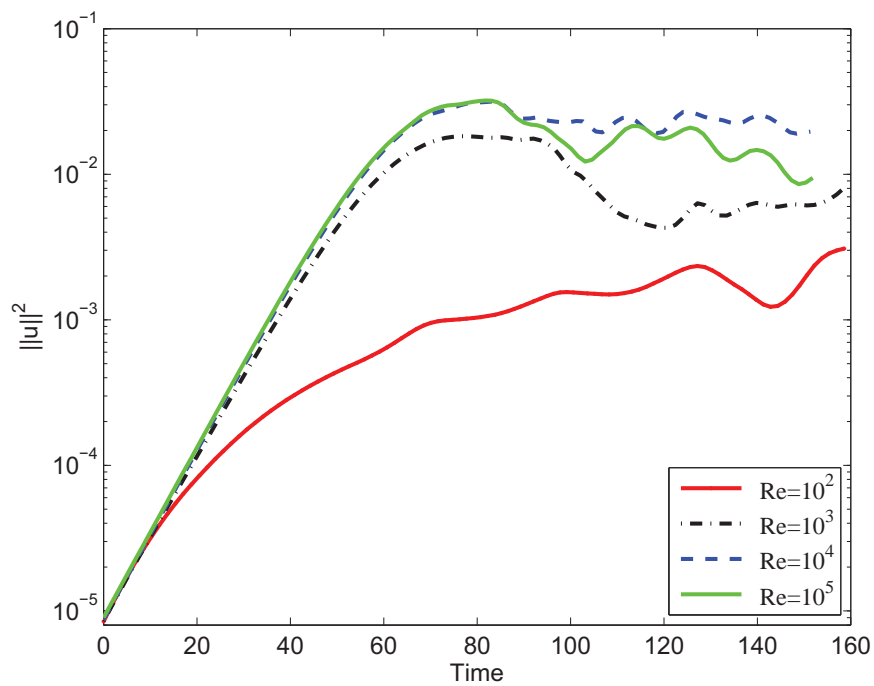


FIGURE 7.5 – Evolution temporelle de l'énergie cinétique des perturbations ($\|\hat{u}\|^2$) for $W = 3$, $Ri = 0.15$, $k^* = 0.46$ et $Re = 10^2, 10^3, 10^4$ et 10^5 . Le temps étant adimensionné par $t^* = 2t\delta/(u_2 - u_1)$.

7.2 Evolution de l'instabilité primaire

7.2.1 Méthode utilisée

L'étude de stabilité linéaire présentée dans le chapitre précédent a permis d'étudier le développement de l'instabilité primaire. Les étapes suivantes de l'évolution de l'instabilité, obtenues grâce au code *JADIM*, sont décrites dans cette partie. Afin de mettre en avant l'influence de la stratification de densité et de viscosité, un cas de référence $Re = 10^3$, $Ri = 0.15$ and $W = 2$ est comparé à un cas $W = 0$ pour lequel la stratification de viscosité est supprimée et un cas $Ri = 0.05$ dans lequel la stratification de densité est diminuée. La longueur du domaine de simulation est maintenant $L = 4 \times 2\pi/k$, correspondant à quatre périodes de l'instabilité ($L = 7.263$ m) dans notre configuration où $k^* = 0.46$.

Les simulations sont réalisées sur une grille de 1496×600 raffinée autour de l'interface : la taille verticale des mailles est $d_z/h = 0.25 \cdot 10^{-3}$ pour $0.75 \leq z/h \leq 1.5$. Dans les régions $0 \leq z/h \leq 0.75$ et $1.5 \leq z/h \leq 3$, d_z varie linéairement de $d_z/h = 2.5 \cdot 10^{-3}$ près de l'interface jusqu'à $d_z/h = 1.25 \cdot 10^{-2}$ en haut et en bas du domaine. Nous définissons l'épaisseur adimensionnée Δ de la couche de mélange par

$$\Delta(t) = \frac{1}{h} \int_0^H \frac{\langle \rho u \rangle_x}{(\rho_2 - \rho_1)(u_2 - u_1)} \left[1 - \frac{\langle u \rangle_x}{(u_2 - u_1)} \right] dz,$$

L'évolution temporelle de Δ est représentée figure 7.6, pour le cas de référence ainsi que les cas sans viscosité ($W = 0$) et avec une faible stratification en densité ($Ri = 0.05$). Pour ces différentes configurations, l'évolution temporelle de l'épaisseur de la couche de mélange n'est pas monotone, elle se caractérise par une succession de plateaux et de périodes de forte croissance. Comme décrits dans la suite de cette partie, cette évolution et, notamment, les zones de forte croissance de l'épaisseur de la couche de mélange peuvent être reliés à des instabilités secondaires, notamment les mécanismes d'appariement (ou encore appelés coalescences) de tourbillons.

7.2.2 Présentation d'un cas particulier

En gardant à l'esprit que l'évolution de l'interface est contrainte par la périodicité du domaine de calcul, nous pouvons relier l'évolution de $\Delta(t)$ aux structures de l'écoulement. Dans cet objectif, les cercles de la figure 7.6 correspondent aux instants pour lesquels les champs de densité et de vorticité sont représentés, pour le domaine de calcul complet, sur les figures (7.7) et (7.8), vorticité étant adimensionnée par u_h/δ . A $t^* \sim 73$ (fig. 7.7(a)), les rouleaux de KH atteignent leur amplitude maximum. Contrairement aux écoulements non-stratifiés, des zones de vorticité positive sont observées. Ce type de vorticité est créée par le couple barocline, dû à de forts gradients de densité associés au champs de vorticité (voir [Staquet, 1995](#)). Les rouleaux de KH se déstabilisent par l'élongation de la tresse de vorticité entre les structures tourbillonnaires (Figure 7.7(b-c)). La tresse se rompt alors que le coeur des rouleaux est encore cohérent. Ce type d'instabilité secondaire, de type "proche du coeur" (voir [Staquet, 1995](#)), consiste en la déstabilisation de la tresse proche du coeur du vortex par un jet (Figure 7.7(c) left), entraînant ensuite la rupture de la

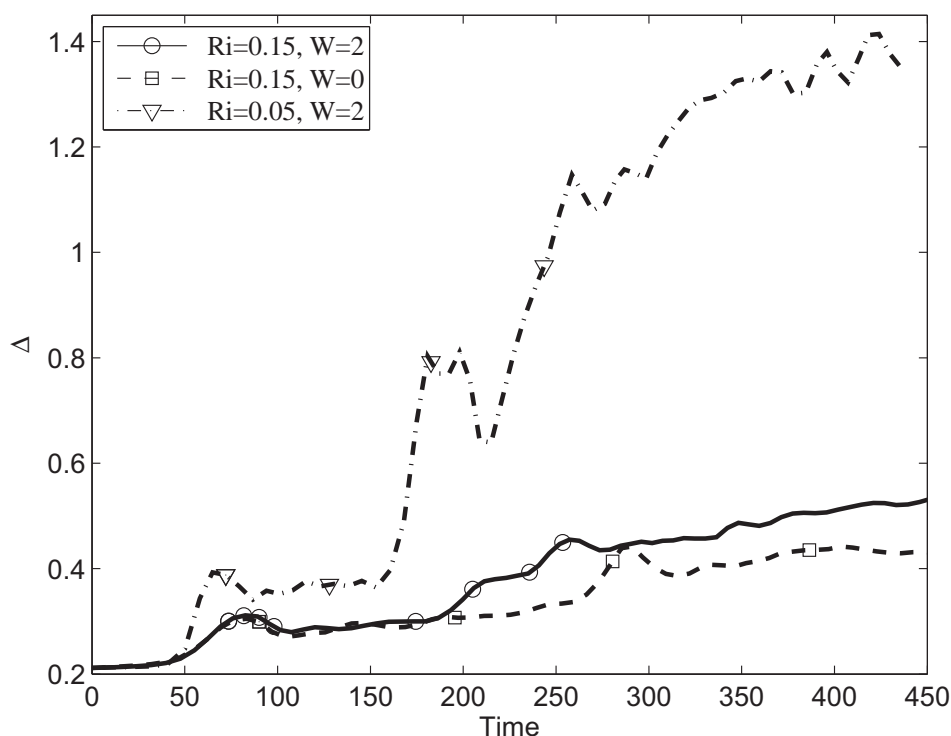


FIGURE 7.6 – Evolution temporelle de l'épaisseur de la couche de mélange $\Delta(t)$. Les résultats sont obtenus par simulations numériques directes pour $Re = 10^3$. Les symboles correspondent aux différents instants des champs de densité et vorticité représentés sur les figures 7.7 à 7.10. Le temps est adimensionné par $t^* = 2t\delta/(u_2 - u_1)$.

trousse de vorticité. Cette déstabilisation est ensuite suivie de la génération de vortex de petite taille (Figure 7.7(d)). Pour un nombre de Reynolds plus important ($Re = 10^5$), on observe directement le développement de cette instabilité secondaire de cisaillement après saturation des rouleaux primaires (voir figure 3.11(a)). Cette évolution diffère aussi des écoulements plus visqueux ou moins stratifiés pour lesquels le développement de sous-harmoniques entraînant l'appariement est observé sans la déformation ou la rupture de la trousse de vorticité. L'écoulement est ensuite désorganisé par des tourbillons secondaires situés sur le bord de la couche de mélange. Ils sont situés là où la vorticité est maximale, c'est-à-dire sur le périmètre de rouleaux primaires de KH. De l'énergie est transférée aux petites longueurs d'ondes et ensuite dissipée par diffusion. Durant cette période ($t^* \geq 150$), l'écoulement se réorganise et les principaux tourbillons migrent vers le centre de la couche de mélange : à $t^* \sim 174$ (Figure 7.8(a)), une zone noire correspondant à un maximum de vorticité apparaît au centre de la couche. A ce moment, l'écoulement est toujours constitué de quatre principales structures tourbillonnaires réminiscentes des rouleaux de KH et l'épaisseur de l'interface n'a pas changé depuis la fin de la croissance linéaire (Figure 7.6). Ensuite, le mécanisme d'appariement (ou coalescence) se développe : les tourbillons s'enroulent les uns autour des autres et se mélangent pour former des

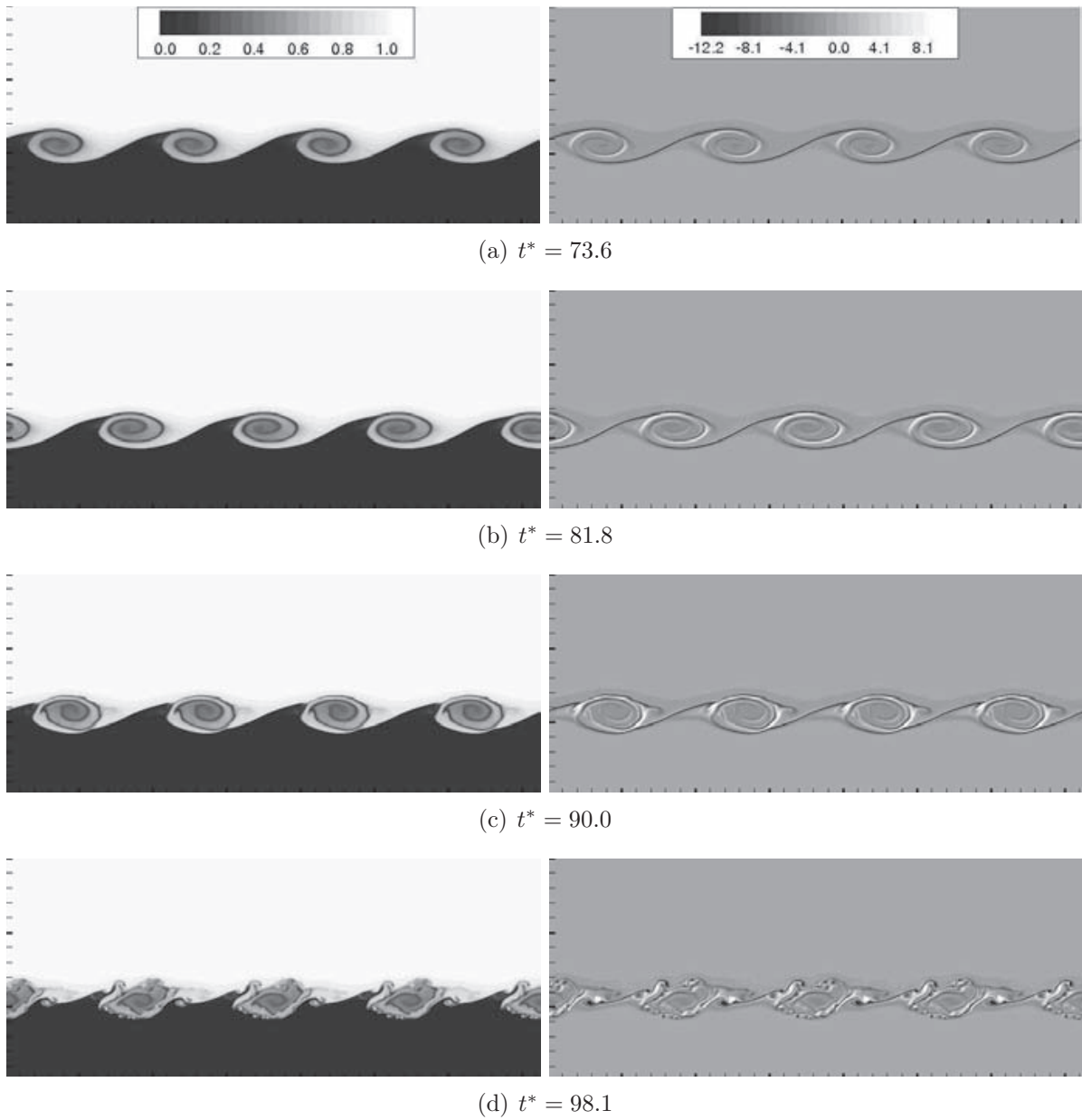


FIGURE 7.7 – Evolution temporelle des rouleaux de KH pour $W = 2$, $Ri = 0.15$ et $Re = 10^3$, $70 \leq t^* \leq 100$. Gauche : densité, droite : vorticité transverses. Le domaine de calcul en entier est présenté.

structures de taille plus importante. A $t^* \sim 205$ (Figure 7.8(b)), sur la partie de droite du champ de vorticité, on peut clairement observer trois tourbillons commençant à s'enrouler les uns autour des autres pour former un tourbillon plus important. Sur la partie droite de la figure, deux autres tourbillons commencent ce processus d'appariement. Cette étape correspond à l'épaississement de l'interface observé sur la figure 7.6 (voir le cercle au temps $t^* = 205.1$). Finalement à $t^* \sim 236$ (Figure 7.8(c)), seulement trois principaux tourbillons sont présent. Un appariement s'est terminé alors que l'autre est toujours en cours. A ce stade, l'épaisseur de l'interface reste constante. A $t^* \sim 254$ (Figure 7.8(d)), le second appariement (au centre de la figure) se termine.

7.2.3 Influence des deux stratifications de densité et de viscosité

La comparaison de l'évolution de la couche de mélange avec les autres configurations, à savoir la configuration sans stratification de viscosité et celle avec une faible stratification de densité, nous renseigne sur l'influence de ces deux stratifications. Nous observons une forte influence de la stratification de densité, représentée par le nombre de Richardson, sur l'épaisseur de l'interface (Figure 7.6). Par exemple, à $t^* \sim 150$ (resp. 400), l'épaisseur de la couche de mélange est environ 30% (resp. 300%) grande dans le cas où la stratification en densité est faible ($\Delta \sim 0.3$ (0.4) à $t^* \sim 150$ et $\Delta \sim 0.4$ (1.4) à $t^* \sim 400$, pour $Ri = 0.15$ (0.05)). Comme présenté dans le chapitre précédent, diminuer le nombre de Richardson diminue l'impact de la stratification sur le développement de l'instabilité primaire et entraîne une augmentation du taux de croissance de l'instabilité et finalement de l'épaisseur de la couche de mélange. Nous retrouvons le même comportement dans les observations présentes.

D'autre part, la stratification en viscosité n'influe pas sur l'épaisseur de la couche de mélange aux temps courts ($t^* \leq 160$) bien qu'il augmente légèrement Δ aux temps plus longs ($t^* > 160$) d'environ 20%, après la phase d'appariement. Pour les deux cas $Ri = 0.15$ et $Ri = 0.05$, la saturation de l'instabilité primaire est suivie du développement de petits tourbillons et de la réorganisation de l'interface. Après une période équivalente pour les deux configurations, on observe une première phase d'appariement, rapidement suivie par une deuxième phase. Dans le cas $Ri = 0.05$, le développement du second appariement est entravé par la taille du domaine de simulation (Figure 7.9(c-d)).

La comparaison entre les deux simulations pour $Ri = 0.15$ avec $W = 2$ et $W = 0$ (viscosité homogène) souligne l'influence de la stratification en viscosité. Le développement de l'instabilité primaire n'est pas influencée par la stratification en densité, l'instabilité secondaire non plus (Figure 7.10(a) et Figure 7.7(c)). Cependant, la stratification en viscosité a une influence sur l'appariement. Alors que le premier appariement est observé à $t^* \sim 280$ (Figure 7.10(c)) pour $W = 0$, et n'est suivi d'aucun autre, pour $W = 2$, le premier appariement est observé à $t^* \sim 200$ et est suivi d'un nouvel appariement à $t^* \sim 250$ (Figure 7.8(d)). Ces rapides et multiples étapes d'appariement, dues à la stratification en viscosité, épaississent l'interface. Finalement, l'épaisseur de la couche de mélange de l'écoulement stratifié en viscosité est 20% plus épaisse que celle de l'écoulement à viscosité uniforme. Ces résultats confirment donc que la stratification en densité, mais aussi en viscosité peuvent avoir un rôle significatif dans le développement non-linéaire d'une

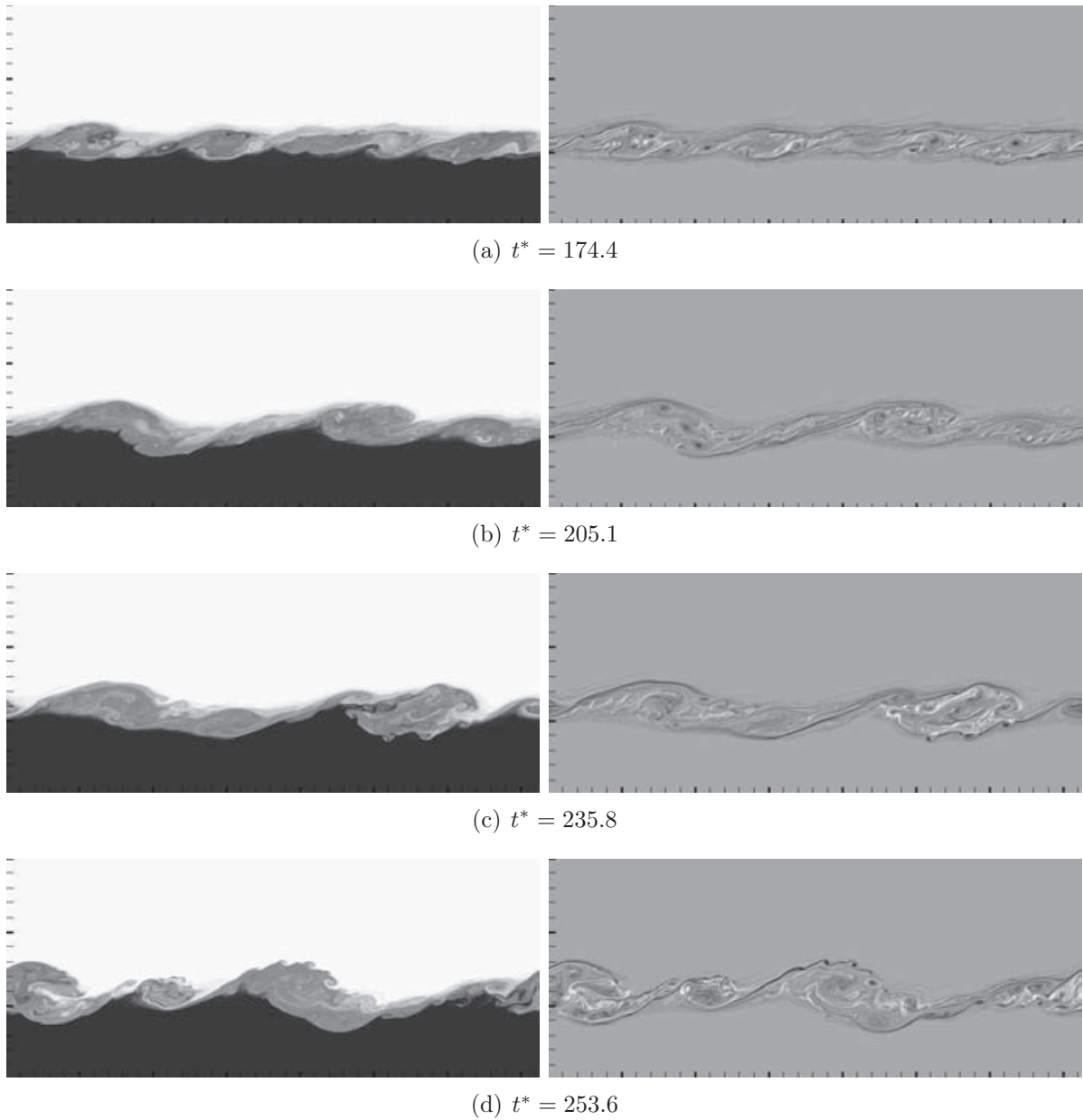


FIGURE 7.8 – Mêmes paramètres que figure 7.7 pour des temps plus longs $150 \leq t^* \leq 300$.

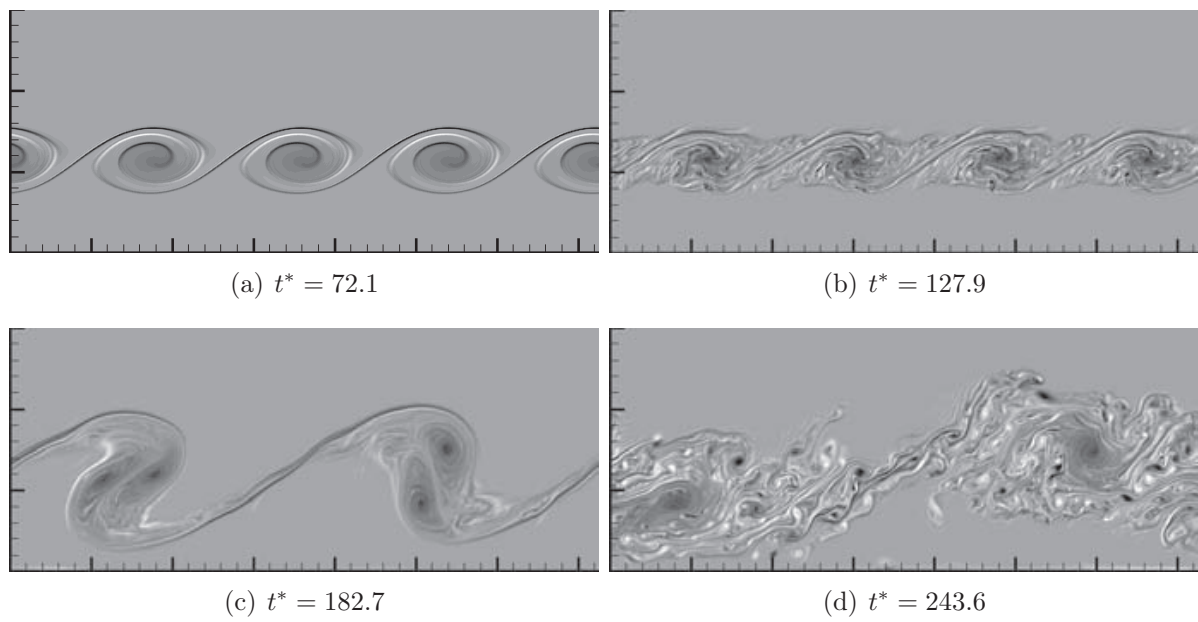


FIGURE 7.9 – Evolution temporelle du champ de vorticité de la couche de mélange pour $W = 2$, $Ri = 0.05$ et $Re = 10^3$. La vorticité est adimensionnalisée par u_h/δ est présentée pour la même échelle de couleur que Fig. 7.7.

couche de mélange, et donc modifier l'épaisseur de l'interface. Cependant, une explo-

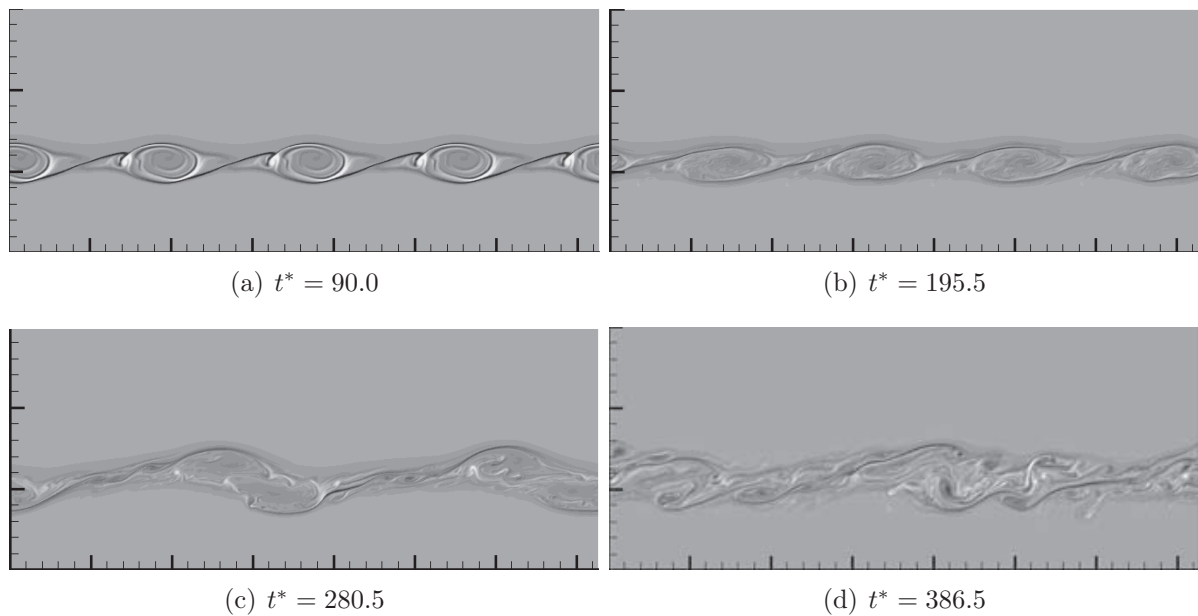


FIGURE 7.10 – Mêmes paramètres que figure 7.9 pour $W = 0$, $Ri = 0.15$ et $Re = 10^3$.

ration rapide de l'évolution de l'influence du paramètre W sur l'épaisseur finale de la couche de mélange a montré que ce résultat ne pouvait être généralisé à d'autres nombres de Richardson.

7.3 Evolution tridimensionnelle de l'écoulement

7.3.1 Présentation de la configuration d'étude

Nous avons ensuite étudié le comportement tri-dimensionnel de l'écoulement. Nous nous sommes pour cela placés dans le cas précédent $W = 2$, $Ri = 0.15$ et $Re = 10^3$. Le domaine de calcul est de même longueur $L = 7,2729$ m, correspondant à 4 périodes de nombre d'onde adimensionné $k^* = 0,46$, de même hauteur $H = 3$ m et de largeur $l = 1$ m. Nous avons alors utilisé un maillage de taille : 364×50 . Ce maillage est raffiné verticalement au niveau de l'interface avec une résolution de 1cm dans la zone $z \in [0,75 \ 1,5]$; la taille verticale des mailles diminue ensuite linéairement jusqu'à une épaisseur de 4 cm aux frontières du domaine de calcul. Bien que ce maillage ne permette pas de résoudre toutes les échelles de l'écoulement, il est comparable en résolution à celui utilisé par [Caulfield and Peltier \(2000\)](#) pour l'étude de couches de mélanges résultant d'instabilités de KH. Le calcul est initialisé en imposant des perturbations de vitesse, densité et viscosité correspondant au mode $k^* = 0,46$, d'amplitude $w_m = 5.10^{-4}$ m.s⁻¹. La configuration initiale est présentée figure 7.4.1.

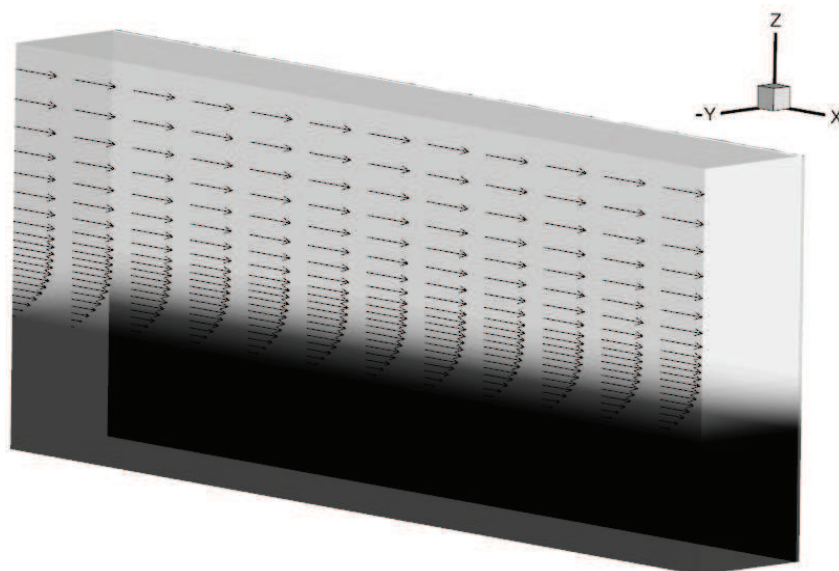


FIGURE 7.11 – Présentation de la configuration d'étude à l'initialisation avec $W = 2$, $Ri = 0.15$ et $Re = 10^3$.

Nous avons ensuite calculé l'évolution de l'épaisseur de l'interface par une formule

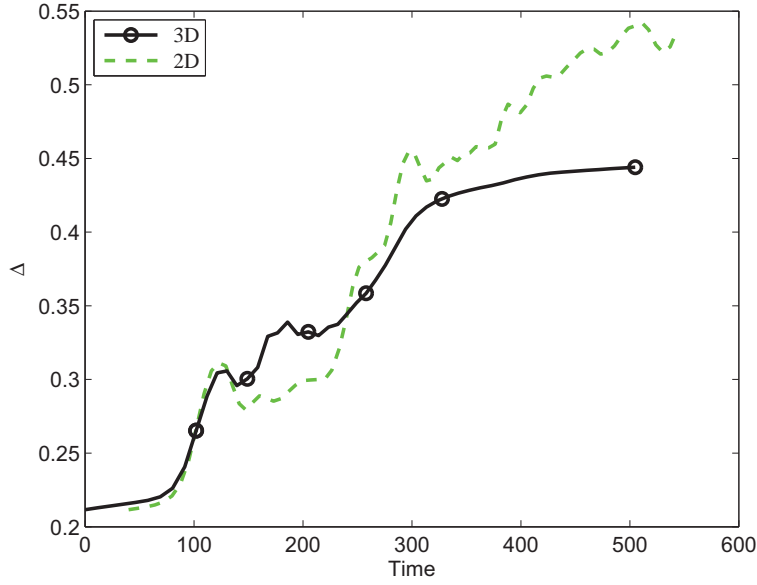


FIGURE 7.12 – Evolution temporelle de l'épaisseur de l'interface pour $W = 2$, $Ri = 0.15$ and $Re = 10^3$. Configuration 3D : — avec les temps présentés figure 7.13 : o. Configuration 2D : - -.

similaire à celle présentée dans la partie précédente :

$$\Delta(t) = \frac{1}{h} \int_0^H \frac{\langle \rho u \rangle_{xy}}{(\rho_2 - \rho_1)(u_2 - u_1)} \left[1 - \frac{\langle u \rangle_{xy}}{(u_2 - u_1)} \right] dz,$$

où $\langle \rangle_{xy}$ correspond à la moyenne du champ selon les direction x et y . L'évolution de l'épaisseur est présentée figure (7.12). Le champ de masse volumique est présenté figure (7.13) avec une coupe en $y = 1$ m et une iso-surface $\rho = (\rho_1 + \rho_2)/2$.

7.3.2 Développement d'un mode tridimensionnel

Comme présenté précédemment (§6.4.1), on observe bien le développement d'une instabilité bi-dimensionnelle. Le taux de croissance est légèrement plus faible dû à une faible diffusion de l'écoulement de base, le forçage étant de plus faible amplitude dans le cas 3D, le temps de développement de l'instabilité est plus important. La figure (7.13(a)) confirme bien le caractère bi-dimensionnel du développement de l'instabilité primaire. On observe alors, comme pour la configuration 2D une saturation de l'instabilité et le développement de tourbillons de petite taille au niveau de la tresse de vorticité. A ce stade, après la saturation, une différence est observée entre le cas 2D et 3D, due à la différence de résolution. En effet, ces petites structures sont très influencées par la taille des mailles si la résolution est supérieure à l'échelle de Kolmogorov. Cependant, on peut remarquer grâce à la figure (7.13(b)), que l'écoulement est toujours 2D   $t^* = 149.0$. Ensuite on observe figure (7.13(c)),   $t^* = 204,9$, l'apparition d'oscillations longitudinales traduisant la tri-dimensionnalisation de l'écoulement. Nous avons tracé figure (7.14) l'évolution de

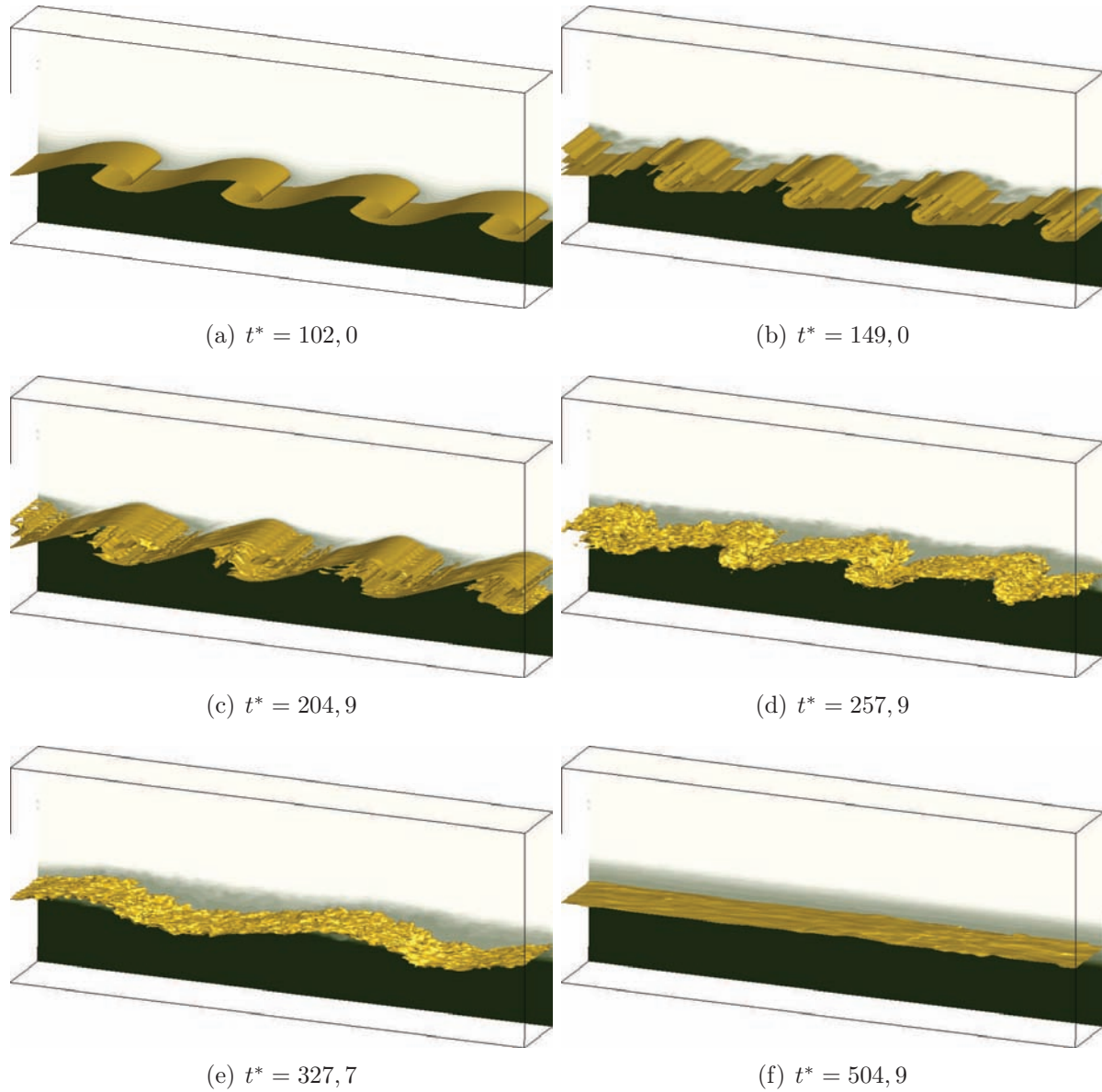


FIGURE 7.13 – Evolution temporelle du champ de masse volumique pour $W = 2$, $Ri = 0.15$ and $Re = 10^3$. Champ de masse volumique en fond à $y = 1\text{m}$. Une iso-surface de densité est représentée pour $\rho = (\rho_1 + \rho_2)/2$.

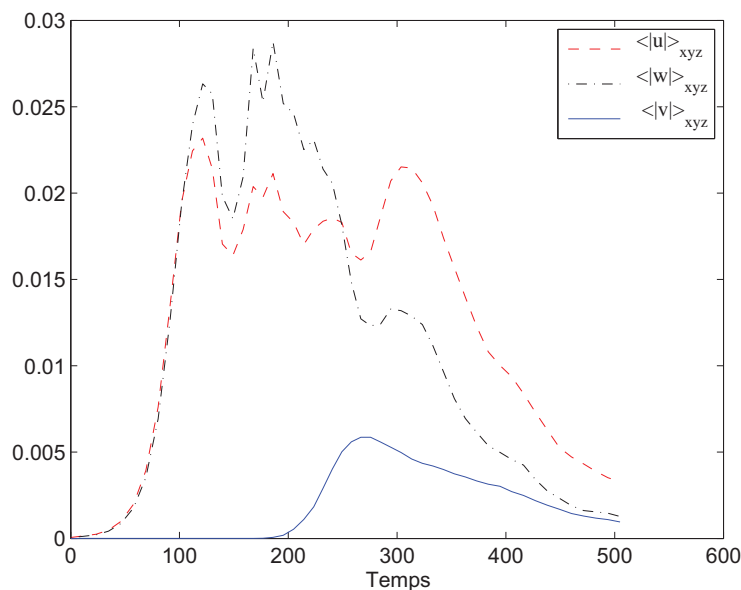


FIGURE 7.14 – Evolution temporelle de l'épaisseur de l'amplitude moyennés des perturbations dans les trois directions de l'écoulement, pour $W = 2$, $Ri = 0.15$ and $Re = 10^3$.

l'amplitude moyenne des perturbations de vitesse selon les trois direction. Nous observons bien, jusqu'à $t^* = 100$, une croissance exponentielle des perturbations de vitesse dans le sens de l'écoulement et verticale. Jusqu'à $t^* = 200$, les perturbations de vitesse latérale sont nulles : l'écoulement est 2D. A partir de $t^* = 200$ (comme observé figure 7.13(c)), on observe la croissance exponentielle du mode tri-dimensionnel et sa saturation autour de $t^* = 270$. L'amplitude des perturbations de vitesse dans les trois directions diminue ensuite après un dernier pic des oscillations de vitesse verticale et dans le sens de l'écoulement en $t^* = 315$. On obtient à la fin de la simulation des perturbations de vitesse du même ordre de grandeur dans les trois directions, avec cependant une amplitude des perturbations plus importantes dans la direction de l'écoulement.

7.3.3 Structure du mode 3D

Afin d'observer la structure du mode tri-dimensionnel, nous avons tracé figure (7.15) des iso-surfaces de vorticité constantes à $t^* = 220$, pendant la phase de croissance initiale du mode (voir figure 7.14). Les deux niveaux de gris représentent la même amplitude de vorticité dans le sens de l'écoulement mais de signes opposé. On observe dans la direction transverse une alternance de tubes de vorticité contra-rotatifs dans la nappe de vorticité. Ce mode correspond au mode classique de tri-dimensionnalisation de bicouche stratifié en densité, observé par exemple par [Klaassen and Peltier \(1991\)](#). En effet, contrairement à l'évolution d'écoulements homogènes, présenté figure (3.12) du chapitre (3), nous observons principalement la création de rouleaux contra-rotatifs. Un second type de mode 3D, consistant en une oscillation longitudinale du coeur des rouleaux initiaux,

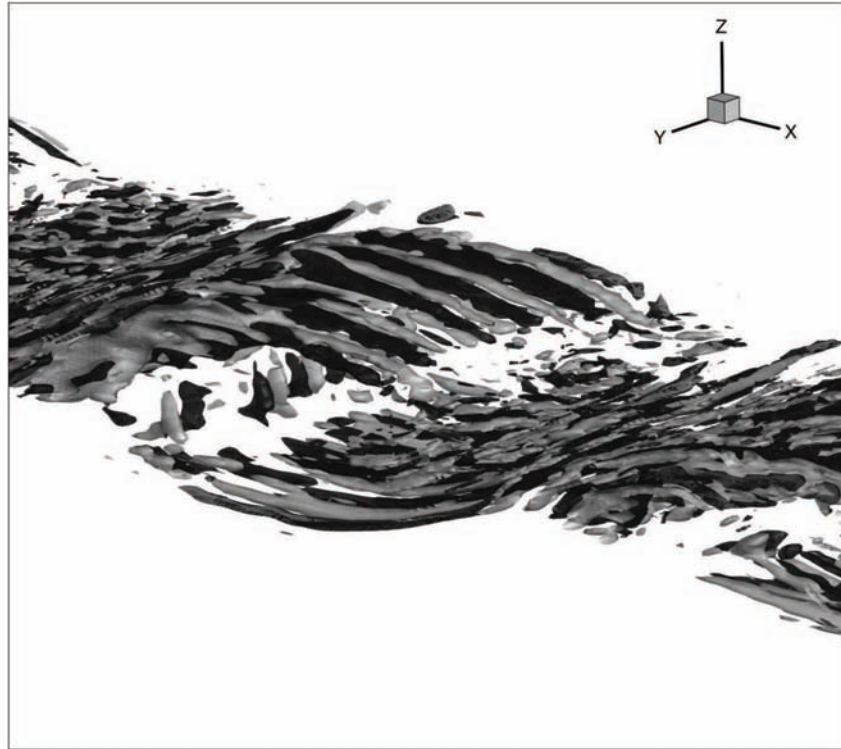


FIGURE 7.15 – Iso-surfaces de la vorticité dans le sens de l’écoulement : évolution tri-dimensionnelle de l’instabilité à $t^* = 220$ pour $W = 2$, $Ri = 0.15$ et $Re = 10^3$.

n’est pas observé. En effet lors de la tri-dimensionnalisation, nous observons un maximum de vorticité transverse situé dans la tresse, en périphérie des rouleaux primaires.

7.3.4 Evolution finale vers une couche de mélange

Sur la figure 7.13(d), on observe une couche de mélange fortement tri-dimensionnelle mais conservant quatre grandes structures, réminiscences de l’instabilité primaire. Ainsi, bien que tri-dimensionnel, l’écoulement est similaire à l’écoulement 2D observé au mêmes instants (soit $t^* = 174.4$, figure 7.8(a)). On observe ensuite la coalescence de ces quatre tourbillons deux à deux pour former à $t^* = 327.7$ (figure 7.13(e)) deux structures plus importantes. Cet appariement entraîne l’augmentation des amplitudes des perturbations observées précédemment figure (7.14) à $t^* = 315$. Cette étape entraîne l’épaississement de l’interface observé figure (7.12) et correspond bien au comportement observé lors des simulations bi-dimensionnelles. Enfin, nous obtenons en fin de simulation (figure 7.13(f)) une stabilisation de l’écoulement avec une diminution de l’amplitude des perturbations et la stabilisation de l’épaisseur de l’interface.

Cependant, ces résultats, bien qu’en accord avec la littérature et les résultats obtenus lors de simulations 2D bien résolues, nécessiteraient d’être confirmés par des simulations plus fines (nécessitant d’importantes ressources numériques). La phase de stabilisation de l’écoulement semble plus rapide dans la configuration 3D que dans le cas 2D. Cela pourrait se justifier par la transmission d’énergie vers l’instabilité tri-dimensionnelle et sa

dissipation ensuite par l'écoulement. Le développement d'instabilités tri-dimensionnelles influe sur l'épaisseur finale des couches de mélange (voir [Peltier and Caulfield, 2003](#)). Dans notre configuration, il semble diminuer l'épaississement de l'interface, en augmentant la dissipation d'énergie. Cependant, les principaux mécanismes responsables de l'épaississement de l'interface sont bi-dimensionnels : développement de l'instabilité primaire et appariement semblent peu modifiés par le caractère tri-dimensionnel de l'écoulement.

7.4 Développement de l'instabilité à faibles nombres de Reynolds

7.4.1 Présentation de la configuration

Dans les parties précédentes, nous avons observé l'évolution non-linéaire des instabilités primaires obtenues dans le cadre de l'étude de stabilité linéaire. Nous avons donc fait l'hypothèse, et vérifié, que ces configurations satisfaisaient les hypothèses effectuées dans le cas de l'étude de stabilité linéaire. L'hypothèse principale est la quasi-stationnarité de l'écoulement de base lors du développement de l'instabilité primaire. Or nous avons vu [§7.1.2](#), que lorsque le nombre de Reynolds au niveau de l'interface est trop faible, le temps caractéristique de diffusion visqueuse devient du même ordre de grandeur que le temps caractéristique de développement de l'instabilité. Pour ce type de configurations, une étude de stabilité linéaire classique n'est plus pertinente. Nous ne pouvons donc étudier ces configurations que par simulations numériques directes.

Nous nous sommes donc basés sur le cas présenté en paragraphe [§\(7.1.2\)](#), pour $W = 3$. Dans cette configuration, la vase est très visqueuse, 1000 fois plus visqueuse que l'eau, d'une masse volumique $\rho_1 = 1360 \text{ kg.m}^3$, avec une interface suivant un profil erf asymétrique comme présenté précédemment (voir figures [6.1](#) et [6.2](#)) d'épaisseur $\delta = 0,3 \text{ m}$ et une vitesse en haut de domaine d'environ 2 m.s^{-1} . Ces paramètres correspondent aux nombres adimensionnés suivants : $Ri = 0,15$, $W = 3$ et $Re \sim 10^2$. Ne pouvant utiliser le code de stabilité linéaire *LiSa* afin de tester la bi-dimensionnalité de cet écoulement, nous sommes restés dans le cas général d'un écoulement tri-dimensionnel. Nous avons donc utilisé le même domaine que pour les simulations tri-dimensionnelles précédentes ([§7.3](#)). La simulation a été initialisée par l'écoulement moyen perturbé à partir des résultats de *LiSa* pour ce cas.

Afin de pouvoir suivre l'évolution de l'interface, nous avons représenté figure [\(7.16\)](#) l'évolution temporelle de l'épaisseur de l'interface. Tout d'abord, contrairement au cas précédent $W = 2$ ([§7.3](#)), l'épaisseur de l'interface ne croit pas exponentiellement mais avec un taux de croissance plus important due à la diffusion du profil initial. Ensuite nous pouvons aussi observer que l'évolution temporelle se déroule sur un temps plus important que dans le cas précédent. Le palier est obtenu à environ $t^* = 330$ alors que dans le cas présent, il est observé après un temps deux fois plus important ($t^* = 670$).

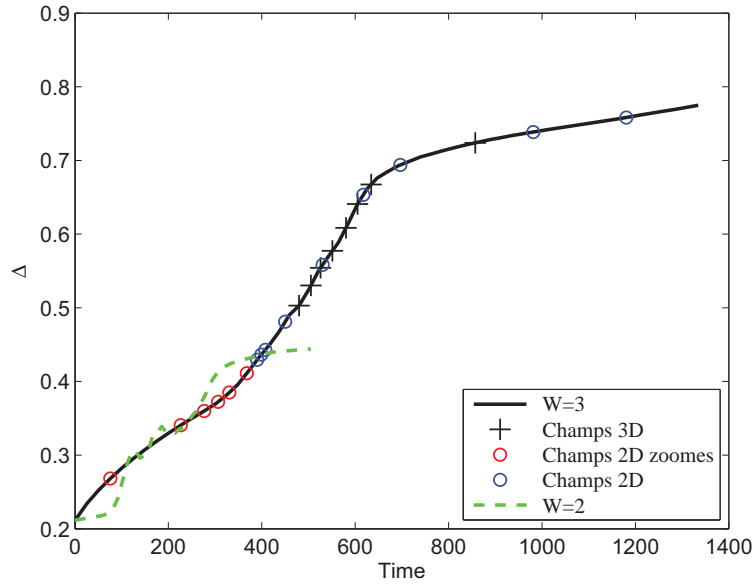


FIGURE 7.16 – Evolution temporelle de l'épaisseur Δ de la couche de mélange pour les paramètres $W = 3$, $Ri = 0.15$ and $Re = 10^3$.

7.4.2 Instabilité primaire

Nous allons, dans un premier temps, nous intéresser à la première étape correspondant à $t^* < 400$. La figure (7.17) présente l'évolution de l'interface zoomée sur un quart du domaine. Figure (7.17(a)), on observe une perturbation de densité, qui s'amplifie et semble remonter dans l'interface et commence à s'enrouler à $t^* = 226.5$ (figure 7.17(b)). A $t^* = 276.6$, on remarque que pendant que la perturbation s'amplifiait, d'autres se sont créées dans des couches supérieures. Figure (7.17(d)), une perturbation située dans la partie supérieure de l'interface commence à s'enrouler, puis s'amplifie, jusqu'à atteindre la partie supérieure de l'interface en $t^* = 367.8$. La formation de ce rouleau dans la partie supérieure de la couche de mélange entraîne une nouvelle phase d'épaississement de l'interface (figure 7.16). La croissance initialement due à la diffusion en racine de x change de pente et tend vers une croissance de type exponentielle, caractéristique de ce type d'instabilités autour de $t^* < 280$. La figure (7.18) présente l'évolution temporelle du nombre de Richardson local.

Nous pouvons remarquer que pour $t^* < 370$, la position du nombre de Richardson maximum de l'écoulement ne cesse de se déplacer vers les z croissants, vers la partie supérieure de l'interface, alors que sa valeur diminue. Cette variation temporelle de la position du point le plus instable de l'écoulement explique la "remontée" observée des perturbations vers la partie supérieure de l'interface; sa valeur diminuant, le taux de croissance des instabilités se développant durant sa traversée de la couche de mélange est de plus en plus grand. Finalement, l'instabilité qui se développe en haut de la couche de mélange présente le plus grand taux de croissance et bien que plus tardive, elle s'impose face aux autres (voir figure 7.17(d) et 7.17(e)).

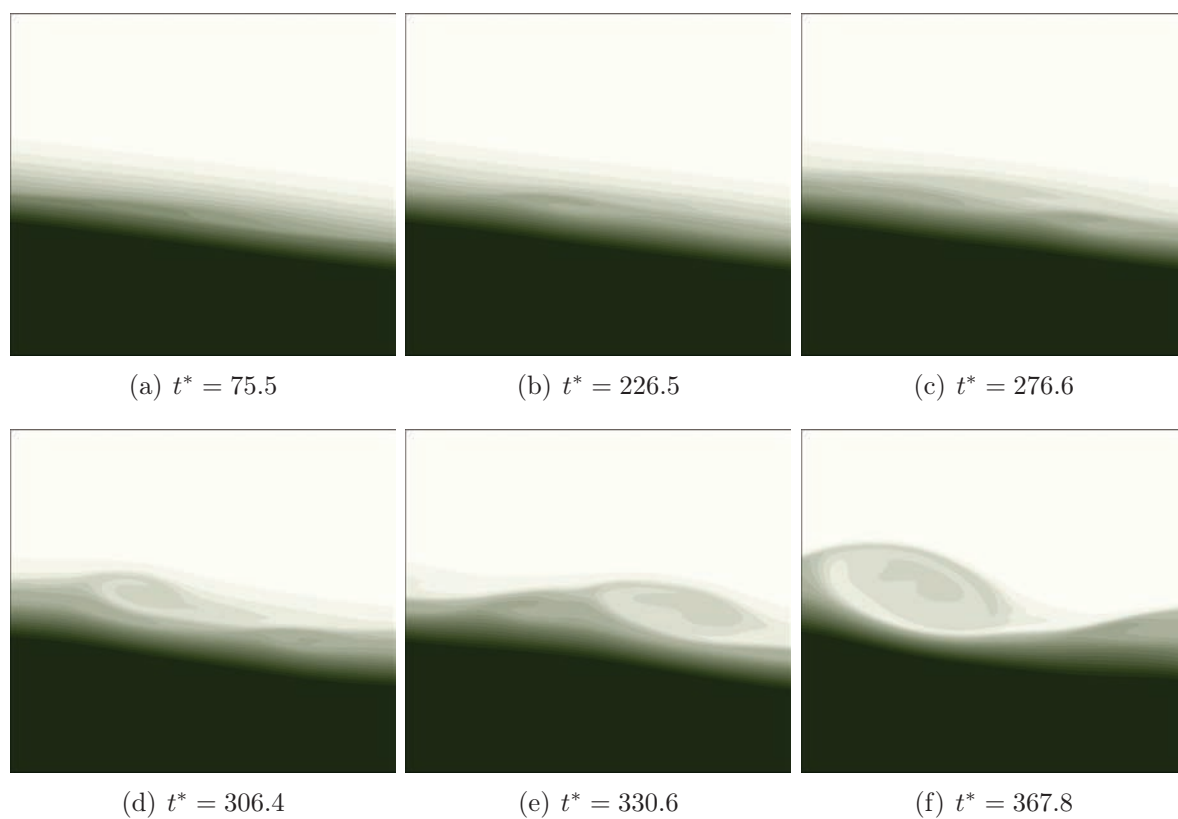


FIGURE 7.17 – Evolution de l'interface jusqu'à $t^* = 370$. Champs de densité, zoomé au niveau de l'interface entre $x = [1, 2, 8]$ et à gauche $y = [0, 38, 1, 92]$, et à droite $y = [0, 61, 2, 14]$. $W = 3$, $Ri = 0.15$ et $Re = 10^2$.

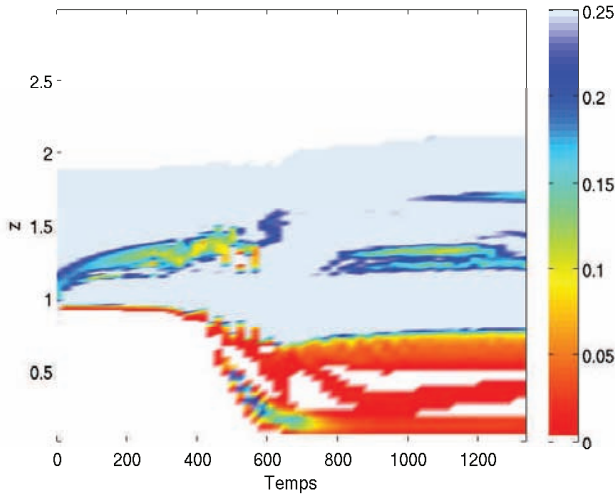


FIGURE 7.18 – Isovaleurs du nombre de Richardson local de l'écoulement (u et ρ) moyenné selon x , dans le plan (t, z) , pour $W = 3$, $Ri = 0.15$ and $Re = 10^2$.

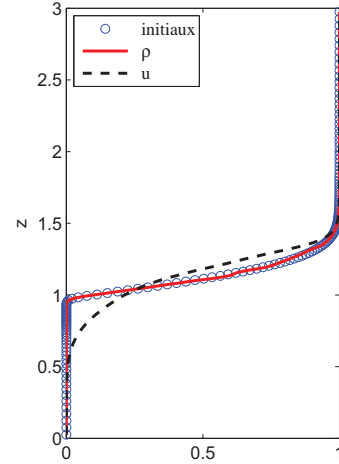


FIGURE 7.19 – Profils verticaux de vitesse et de densité à $t^* = 301.5$. Vitesse moyenne : —. Masse volumique moyenne : - - -. Profils initiaux : o.

Si on observe maintenant les profils de densité et de vitesse figure (7.19) à $t^* = 301.5$, on remarque que le profil de vitesse moyenne a diffusé alors que le profil de densité n'a pas été modifié, il est identique au profil initial. La déformation du profil de vitesse entraîne un cisaillement maximal à une altitude supérieure à la position initiale de l'interface $z = h = 1$ m. La déformation du profil vertical de vitesse moyenne est donc responsable de la translation vers les z croissants du nombre de Richardson minimal de l'écoulement et donc de la zone la plus instable. Cette modification du profil de viscosité entraîne donc le déplacement de l'instabilité vers le haut de l'interface. Si on observe de nouveau les profils, on remarque que le profil de vitesse est devenu très asymétrique et que sa pente maximum n'est plus en phase avec celle du profil de densité. Dans ce cas, on obtient une forte interface de vorticité et une interface de densité "décalée". Cette configuration entraine la formation d'une instabilité dite de Holmboe "one-side". Ce type d'instabilité a notamment été observé récemment en milieu naturel, au niveau de la halocline des estuaires (voir [Tedford et al., 2009](#)). En effet la deuxième interface de vorticité située pour $z < h$ est si diffusée et éloignée de l'interface de densité que son rôle est négligeable.

7.4.3 Forçage de la couche visqueuse

Suite à ce développement d'instabilité de type Holmboe "one-side" en surface de la couche de mélange, on observe figure (7.16), un fort épaississement de l'interface ($t^* \in [400 \ 800]$). Cette phase correspond figure (7.18)   une transmission de l'énergie de l'interface vers le fond de la couche visqueuse. En effet, lors du développement de l'instabilité en surface de l'interface, le champ de vitesse a diffusé dans la couche inférieur de l'écoulement, très visqueuse. L'enroulement de l'instabilité de Holmboe force alors

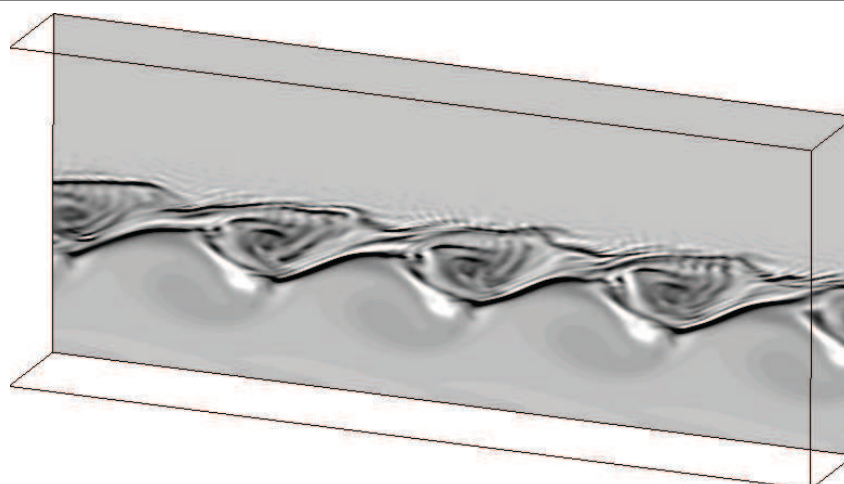


FIGURE 7.20 – Champ de vorticité à $t^* = 530, 1$, pour $W = 3$, $Ri = 0.15$ and $Re = 10^2$.

périodiquement la partie supérieure de la couche visqueuse, soumise à un écoulement cisailé. On observe alors le développement d'instabilité de cisaillement caractérisés par un nombre de Richardson proche de 0 sur la figure (7.18) (la densité dans cette zone de l'écoulement est presque uniforme). Nous avons représenté figure (7.20) le champ de vorticité à $t^* = 530, 1$. Nous observons, en plus de l'instabilité de Holmboe en surface, le développement de rouleaux de grande amplitude mais de faible intensité dans la couche visqueuse. Nous pouvons observer quatre rouleaux, la longueur d'onde est donc la même que celle de l'instabilité en surface de l'interface. Nous avons ensuite représenté figure (7.21) l'évolution de la couche de mélange durant cette phase de l'écoulement. On observe à partir de $t^* = 390$ un schéma cyclique présenté lors de sa première itération observable, par les trois sous-figures (7.21(a)-7.21(c)), se répétant une vingtaine de fois durant cette phase. Ce cycle correspond à une période d'interférence entre les deux instabilités de part et d'autre de l'interface. En effet, la vitesse du fluide dans ces deux régions étant différente, la vitesse de propagation des instabilités diffère et on observe au cours du temps la récurrence du même motif. Nous observons tout d'abord un écrasement des rouleaux de l'instabilité associé à une interface relativement plate, correspondant à un déphasage nul des deux instabilités. Sous l'effet de la vitesse de cisaillement plus importante de la couche supérieure, les instabilités se déphasent, voir figure (7.21(b)) ou figure 7.20, donnant à l'interface un aspect en dents de scie assez éloigné d'un comportement de type cosh que l'on pourrait attendre sous une instabilité de type Holmboe "one-side". Cependant, cette forme d'interface rappelle l'instabilité de Holmboe classique, due aussi à l'interaction de deux modes de vitesses de phase différentes. Enfin on observe figure (7.21(c)) que l'interface s'aplatit tout en conservant un aspect "denté", avec une pointe en amont des coeurs des vortex de partie supérieure, correspondant à un déphasage négatif de l'instabilité supérieure. Au fur et à mesure, l'instabilité inférieure croît et se développe sur toute la couche. Les interférences sont alors plus prononcées. La phase n° 2 présentée initialement figure (7.21(b)) est présentée pour différents cycles sur les figures (7.21(d)) à (7.21(e)). On observe une amplification des oscillations de l'interface, la struc-

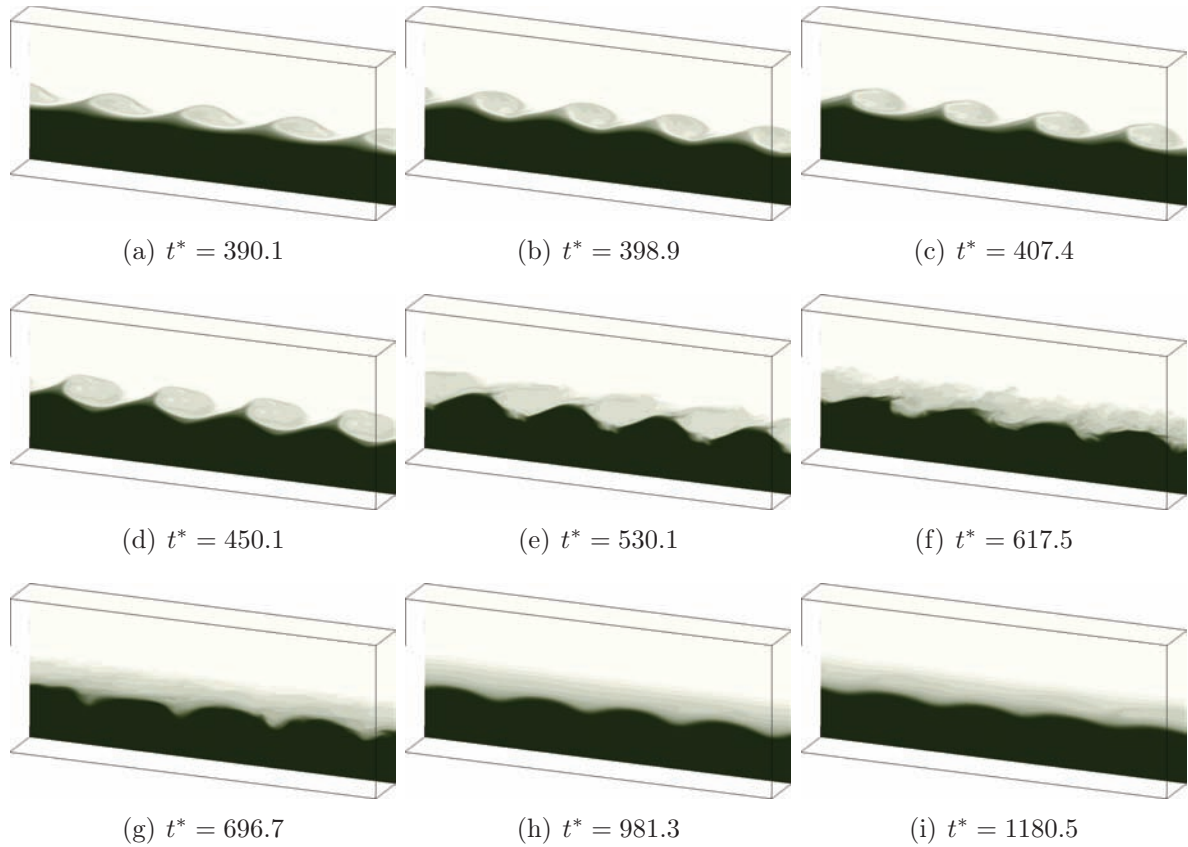


FIGURE 7.21 – Evolution temporelle du champ de fraction volumique pour $t^* > 390$, pour $W = 3$, $Ri = 0.15$ and $Re = 10^2$.

ture en dent de scie s'intensifie. Les instabilités de la partie supérieure de l'interface se désorganisent alors perturbés notamment par le mouvement de l'interface et évoluent vers une couche turbulente. A partir de la figure (7.21(f)), la fin de la cohérence des quatre principaux rouleaux issus des modes de Holmboe semble correspondre à un changement de morphologie de l'interface : celle-ci glisse d'un profil horizontal de perturbations à un profil type cosh inversé, seulement déformée par l'instabilité inférieure. Après $t^* = 696.7$ (figure 7.21(g)), l'écoulement dans la partie supérieure de la couche de mélange se relaxe vers un nouvel écoulement moyen parallèle. En surface de la couche visqueuse, les oscillations persistent, trahissant la persistance de rouleaux cohérents dans la couche inférieure de l'écoulement. Durant cette phase, nous observons donc l'interaction entre l'instabilité de Holmboe "one-side" en surface de l'interface et le développement d'une instabilité de cisaillement dans la couche inférieure, forcée par le mouvement de l'interface. Ces deux instabilités de vitesse de phase différente interagissent au niveau de l'interface pour former des motifs d'interférences, rappelant les instabilités de Holmboe classiques. Alors que les rouleaux de la couche supérieure se désorganisent et que la transition vers la turbulence s'effectue, les rouleaux de la couche inférieure continuent de croître. Ainsi, l'interface ne se déforme que sous l'influence de l'instabilité de la couche inférieure et prend une forme

de type "cosh" inversé, presque stationnaire (la couche visqueuse étant de vitesse proche de 0 à sa surface).

7.4.4 Tri-dimensionnalisation de l'écoulement

Afin d'étudier le développement tridimensionnel de l'instabilité, nous avons représenté figure (7.22) l'amplitude moyennée des perturbations de vitesse dans les trois directions au cours du temps. Des représentations tri-dimensionnels du champ de masse volumique

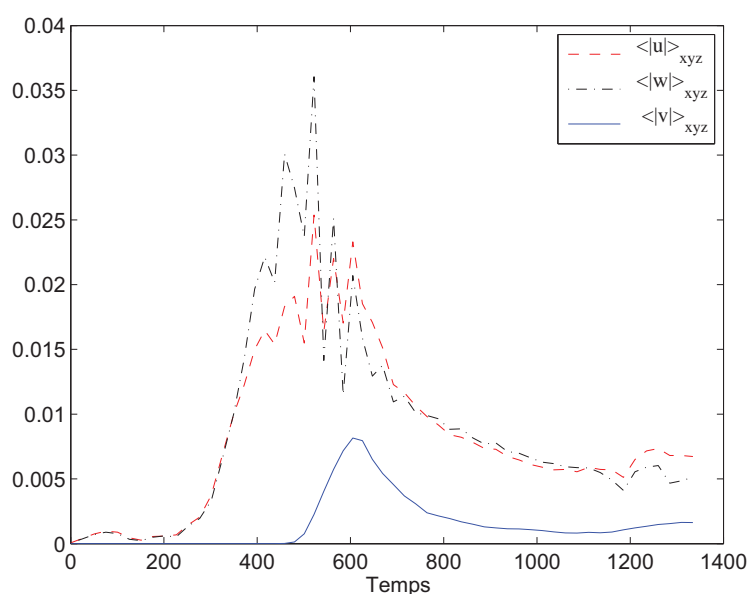


FIGURE 7.22 – Evolution temporelle de l'épaisseur de l'amplitude moyennée des perturbations dans les trois directions de l'écoulement, pour $W = 3$, $Ri = 0.15$ and $Re = 10^2$.

est représenté figure (7.23). Comme présenté sur ces deux figures, avant $t^* \sim 480$, l'écoulement est bi-dimensionnel. On observe ensuite la croissance du mode tri-dimensionnel dans la partie supérieure de l'écoulement. Il se caractérise figure (7.23(a)) par des oscillations longitudinales, comme précédemment, observé dans le cas de la tri-dimensionnalisation des rouleaux de KH classiques. Nous pouvons aussi remarquer que le développement de ce mode transverse se développe après le début des oscillations de l'interface, le mode visqueux se développant dans la couche inférieure de l'écoulement à partir de $t^* = 390$. Ces deux instabilités secondaires semblent donc se développer indépendamment. Une visualisation de ce mode longitudinal est présentée figure (7.24). Nous y avons représenté les iso-surfaces de vorticité selon x , les deux couleurs correspondant à la même valeur de vorticité mais de signe opposé. Comme au paragraphe §7.3, on retrouve le même type de tubes de vorticité contra-rotatifs en alternance dans la direction longitudinale de l'écoulement. On observe aussi une structure verticale en différentes couches pour de vorticité de signe opposé en alternance. Comme dans le cas des instabilités de KH, ces structures longitudinales se développent dans la tresse de vorticité. Etant d'amplitude beaucoup

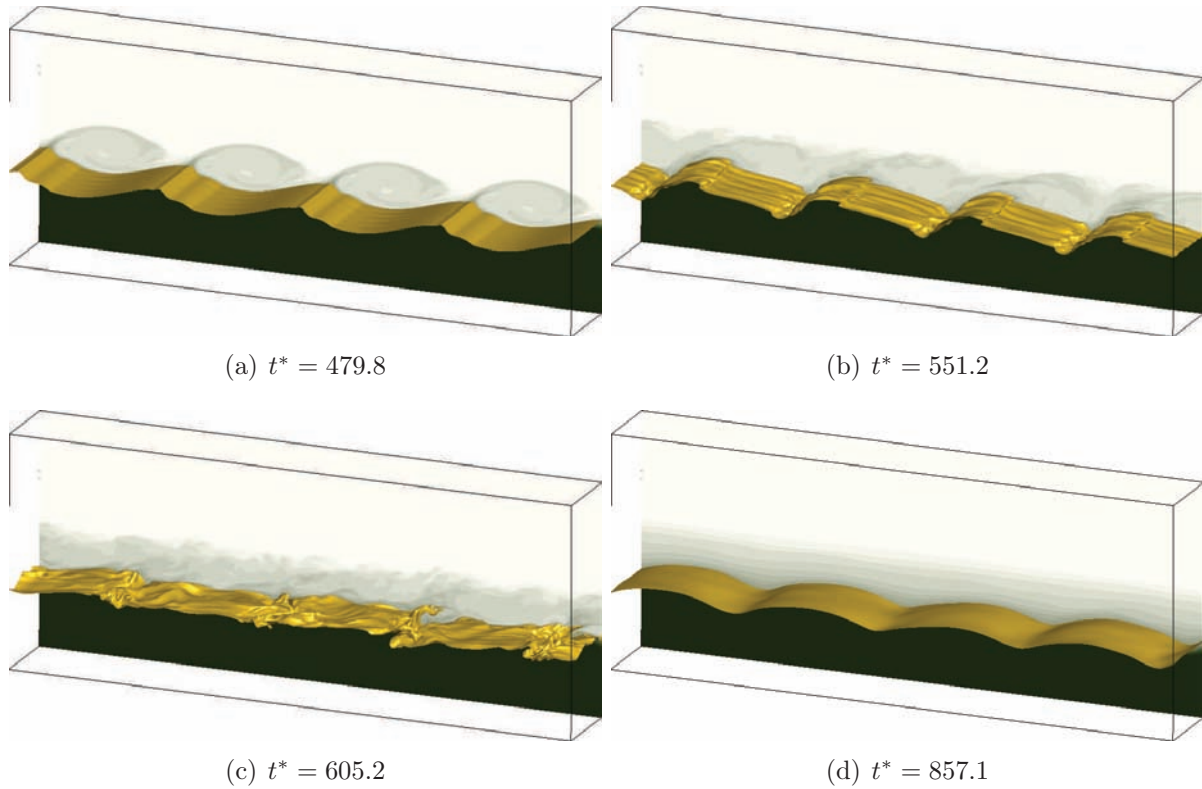


FIGURE 7.23 – Evolution temporelle du champ de masse volumique pour $W = 3$, $Ri = 0.15$ and $Re = 10^2$. Une coupe est située en fond à $y = 1\text{m}$. Une iso-surface de densité est représentée pour $\rho = (\rho_1 + \rho_2)/2$.

moins importante dans la partie supérieure, où le cisaillement et la stratification sont moins importants, on ne les observe que sous les structures principales.

Alors que l'amplitude des instabilités augmente, elles restent encore bien structurées figure (7.23(b)) alors que les rouleaux principaux de l'instabilité de Holmboe sont déjà assez déformés. On remarque figure 7.22 que les perturbations longitudinales atteignent leur amplitude maximale à $t^* \sim 600$ (7.23(c)) puis diminuent. En fin de simulation (figure 7.23(d)), elles deviennent faibles et l'écoulement est quasi bi-dimensionnel. Une légère augmentation des perturbations est observée figure 7.22 à la fin de la simulation. Ce comportement est dû au développement de quelques nouvelles instabilités de cisaillement observables figure (7.21(i)) et correspondant aux zones instables apparaissant figure (7.18) (nombre de Richardson local inférieur à $1/4$).

Finalement, lorsque le nombre de Reynolds est trop faible, la diffusion visqueuse modifie le profil de vitesse et le développement de l'instabilité n'est pas linéaire. Pendant la variation du profil de vitesse, la zone la plus instable de l'écoulement migre vers le haut de la couche de mélange, entraînant le développement de différentes instabilités de cisaillements sur son passage. Le taux de croissance augmentant, l'instabilité finale se développe dans la partie supérieure de la couche de mélange. La modification du profil de

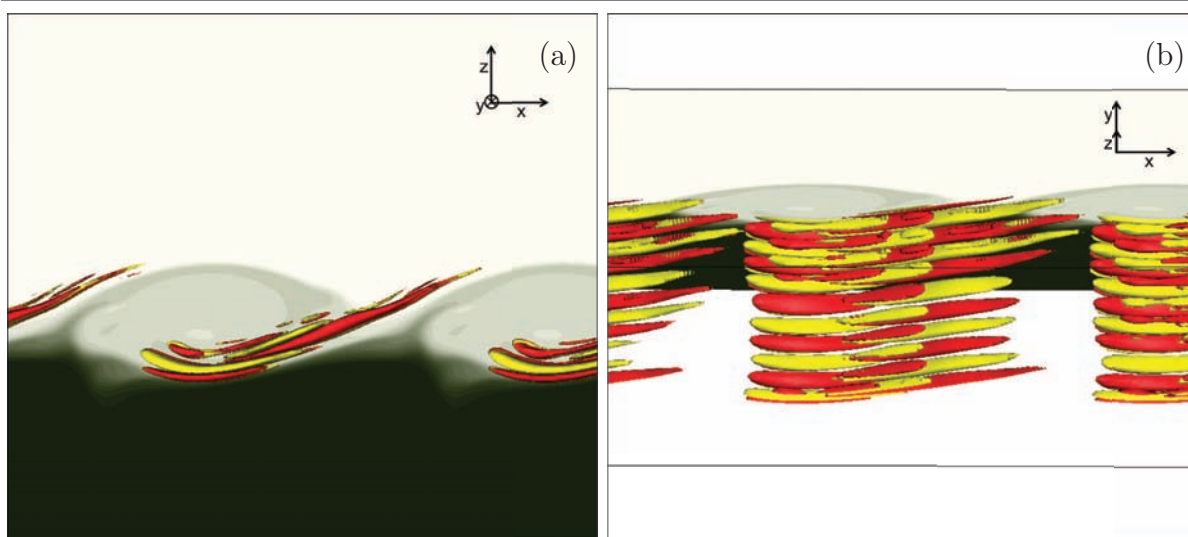


FIGURE 7.24 – Iso-surfaces de la vorticité dans le sens de l'écoulement : évolution tri-dimensionnelle de l'instabilité à $t^* = 479.8$ pour $W = 3$, $Ri = 0.15$ et $Re = 10^2$. Vue transverse : (a). Vue de dessus : (b).

vitesse entraîne le développement d'une instabilité de type Holmboe "one side". Le profil de vitesse ayant diffusé dans la couche inférieure de l'écoulement, les oscillations de l'instabilité sur l'interface forcent ensuite un mode de cisaillement dans la couche visqueuse. Les interactions entre le mode de Holmboe et ce mode "visqueux" entraînent la formation d'oscillations particulières de l'interface. Suite à la désorganisation de l'écoulement dans la partie supérieure de l'interface, seules l'instabilité de la couche visqueuse vont perdurer, entraînant une oscillation type cosh inversé de l'interface jusqu'à la fin de la simulation. Durant cette phase de croissance du mode visqueux, l'écoulement se tri-dimensionnalise dans sa partie supérieure par la formation dans la tresse de vorticité de tubes de direction x contra-rotatifs, principalement sous les structures principales de l'instabilité de Holmboe. Dans cette configuration, on observe une épaisseur finale de l'interface presque deux fois plus importante que dans le cas traité au paragraphe §7.3, dont la viscosité du fluide inférieur est dix fois moins importante (soit pour Re plus grand à l'interface et W plus petit). Quatre principaux mécanismes sont responsables de ce comportement : la diffusion initiale, le développement du mode de Holmboe, le développement du mode de cisaillement dans la couche visqueuse et la tri-dimensionnalisation de l'écoulement (en moindre part).

Conclusion

Après avoir étudié la stabilité linéaire avec le code *LiSa*, nous avons, dans cette partie, simulé l'évolution non-linéaire de l'interface avec le code de DNS *JADIM*. Après avoir présenté notre méthodologie et validé notre code en comparant les résultats de la croissance linéaire avec ceux du code de stabilité linéaire, nous avons présenté l'évolution de la couche de mélange dans un cas particulier. Nous observons dans ce cas fortement stratifié

en densité et en viscosité, le développement de tourbillons de petites tailles sur la tresse de vorticité suite à la saturation du rouleau primaire puis l'appariements des structures principales. Nous retrouvons alors l'influence de la stratification en densité, diminuant le développement de l'instabilité primaire. La stratification en viscosité augmente l'épaisseur finale de la couche en agissant sur le mécanisme d'appariement dans cette configuration. L'évolution 3D de l'interface met en évidence le développement d'un mode 3D basé sur la tresse de vorticité. Ce mode, composé de structures transverses contrarotative, augmente la dissipation turbulente : la couche de mélange finale est donc plus fine que dans le cas 2D. Enfin, une troisième partie présente l'évolution de l'interface pour un nombre de Reynolds plus faible. Dans ce cas où la diffusion du profil de vitesse ne peut être négligée, nous observons le développement d'instabilité de type Holmboe et interagissant avec une instabilité se développant dans la couche visqueuse. Finalement le développement de ces deux instabilités, ainsi que la diffusion du profil de vitesse entraine la formation d'une interface finale assez épaisse. Après avoir étudié le comportement de la couche de mélange dans le cas d'une vase newtonienne et notamment l'importance de la viscosité de la vase, nous allons nous intéresser à l'influence de la contrainte seuil associée au comportement viscoplastique dans la partie suivante.

Chapitre 8

Comportement d'une vase viscoplastique

Sommaire

8.1	Validation en écoulement de Poiseuille	158
8.1.1	Présentation de la configuration d'étude	158
8.1.2	Comportement d'un fluide de Bingham	160
8.1.3	Influence des paramètres	161
8.2	Remise en suspension de crème de vase	164
8.2.1	Configuration générale de l'écoulement	164
8.2.2	Cisaillement d'une crème de vase viscoplastique	165
8.2.3	Influence de la contrainte seuil τ_c	167
8.3	Erosion de vase partiellement consolidée	170
8.3.1	Présentation générale de la configuration bi-couche	170
8.3.2	Erosion d'une vase newtonienne	171
8.3.3	Erosion d'une vase viscoplastique et influence de la contrainte seuil.	173
8.3.4	Comparaison entre les deux modèles de viscosité équivalente.	177

Introduction

Nous nous sommes ensuite intéressé à l'impact de la contrainte seuil sur la remise en suspension de la crème de vase et le mélange s'effectuant au niveau de la lutocline. Pour cela, nous n'avons pas utilisé d'étude de stabilité linéaire. En effet, pour utiliser *LiSa*, il faut que les profils soient continus et dérivables, ce qui est en opposition avec le comportement viscoplastique à seuil. Même en utilisant la méthode de régularisation, le code ne peut fonctionner que pour des perturbations plus petites que l'épaisseur associée au paramètre de régularisation du fluide viscoplastique, ce qui revient à étudier l'impact d'interfaces de viscosité, développé dans la partie précédente. Nous avons donc directement utilisé le code de DNS *JADIM* pour étudier le comportement de ces fluides soumis

à cisaillement par un autre fluide (ici newtonien). L'implémentation de cette rhéologie dans le code a été présentée au paragraphe §4.3.

Dans un premier temps, nous allons nous placer dans le cas d'un écoulement de Bingham pour valider le code sur ce type de rhéologie et mieux comprendre l'effet de la régularisation sur l'écoulement. Puis nous allons étudier l'impact de la contrainte seuil sur la remise en suspension de crème de vase, dans la configuration étudiée précédemment à interface épaisse. Ensuite, partant du principe que le caractère viscoplastique s'applique majoritairement aux vases partiellement consolidées, nous allons étudier pour ce type de fluide l'importance de la contrainte seuil pour un écoulement bi-couche.

8.1 Validation en configuration classique d'un écoulement de Poiseuille

La rhéologie de type visco-plastique, implémentée dans le code, a été validée dans le cas d'un écoulement de Poiseuille bi-dimensionnel présenté figure 8.1.

8.1.1 Présentation de la configuration d'étude

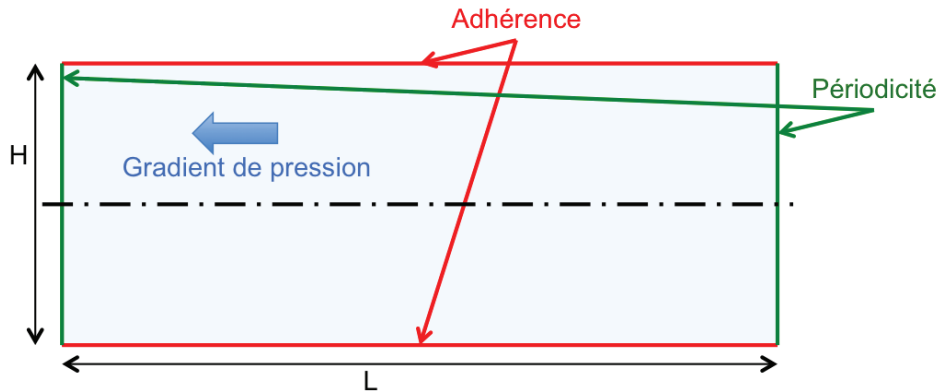


FIGURE 8.1 – Configuration de validation de la rhéologie viscoplastique.

Cette configuration simple a été choisie car elle présente des solutions théoriques dans le cas d'un fluide de Bingham idéal. La rhéologie implémentée correspond à un fluide de Bingham régularisé défini par la formule de [Bercovier and Engelman \(1980\)](#) :

$$\mu_{ef} = \mu \left(1 + \frac{B}{\sqrt{\epsilon^2 + \dot{\gamma}^2}} \right) = \mu + \frac{\tau_c}{\sqrt{\epsilon^2 + \dot{\gamma}^2}}, \quad (8.1)$$

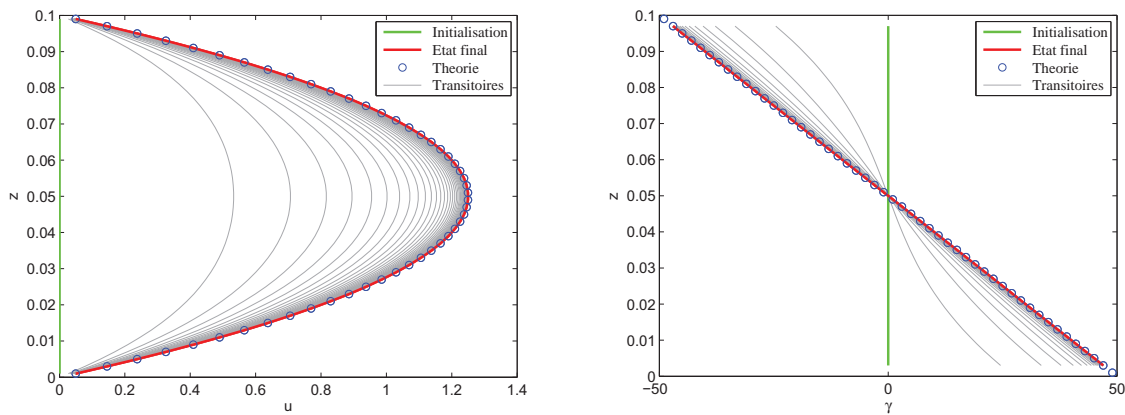
où la viscosité effective μ_{ef} dépend de la viscosité dynamique μ , du nombre de Bingham (dimensionné) B , du paramètre de régularisation ϵ , de la contrainte seuil τ_c où $\tau_c = \mu B$ et du taux de cisaillement $\dot{\gamma} = |\nabla \underline{u} + {}^t \nabla \underline{u}|$ où $|\underline{A}| = \sqrt{1/2 \operatorname{tr}(\underline{A} \times \underline{A})}$.

ρ	$G_x = dp/dx$	μ	τ_c	ϵ	H	L	n_z	n_x
1000	-1000	1	10	10^{-4}	0.1	1	50	100

TABLE 8.1 – Paramètres de la configuration de référence.

Les paramètres de référence choisis pour cette configuration sont présentés table 8.1.

Afin d'éviter les fortes variations de vitesse en début de simulation, l'écoulement est initialisé par l'état d'équilibre de l'écoulement obtenu en $B = 0$. Le champ de vitesse, initialement nul, tend alors vers un profil parabolique classique des écoulements dits de Poiseuille en régime laminaire (voir figure 8.2). On retrouve ce profil à partir de l'équation



(a) Profil vertical de vitesse

(b) Profil vertical du taux de cisaillement

FIGURE 8.2 – Equilibre dans le cas d'un fluide newtonien ($\tau_c = 0$).

du bilan de quantité de mouvement. En effet, en régime permanent, on obtient :

$$0 = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu(\nabla u + {}^t\nabla u)) , \quad (8.2)$$

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dz^2} . \quad (8.3)$$

Soit finalement en notant G_x le gradient de pression selon \bar{x} et en imposant des conditions d'adhérence aux parois en $z = 0$ et $z = H$:

$$u(z) = \frac{G_x}{\mu} z \left(z - \frac{H}{2} \right) . \quad (8.4)$$

Comme présenté figure (8.2.b), le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ est linéaire dans cette configuration. En effet, le gradient de pression appliqué au fluide étant constant, le tenseur des contraintes varie linéairement avec z . Par définition de la loi de comportement d'un fluide newtonien, le taux de cisaillement est une fonction linéaire du tenseur des contraintes, dont une fonction affine de z .

8.1.2 Comportement d'un fluide de Bingham

Une fois le profil de vitesse parabolique du régime newtonien établi, on modifie brusquement les paramètres rhéologiques du fluide afin d'obtenir la configuration présentée table 8.1. On obtient alors les profils de vitesse $u(z)$ et de taux de cisaillement $\dot{\gamma}(z) = \frac{\partial u(z)}{\partial z}$ présentés figure 8.3. On observe donc un comportement fluide dans la partie supérieure

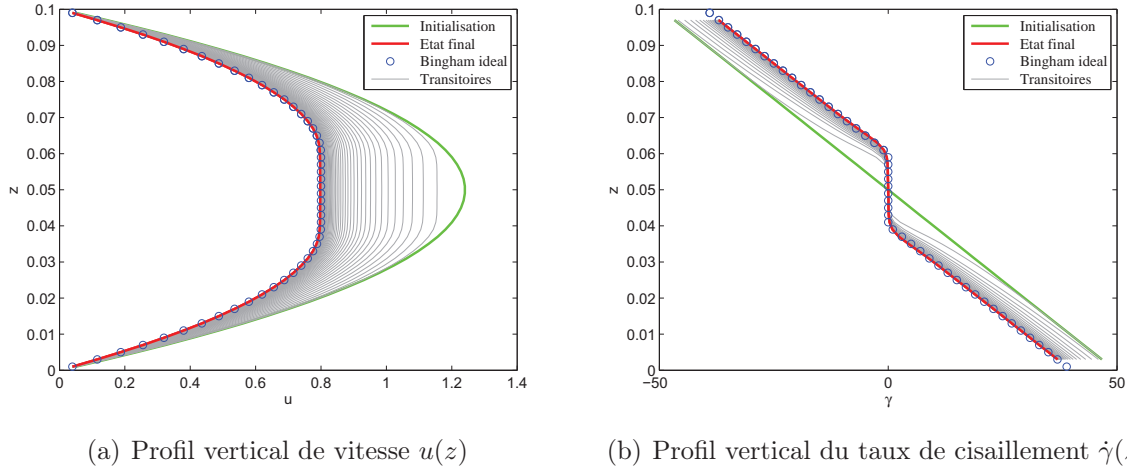


FIGURE 8.3 – Fluide viscoplastique, $\tau_c = 10$, $\epsilon = 10^{-4}$.

et inférieure du domaine, caractérisée par un taux de cisaillement non nul. Cependant, dans la partie centrale du domaine, les contraintes appliquées par le gradient de pression sont inférieures à la contrainte seuil du fluide viscoplastique qui se comporte alors comme un solide. Il présente, dans cette zone, une translation solide caractérisée par une vitesse uniforme et un taux de cisaillement nul.

Dans le cas d'un fluide de Bingham idéal ($\epsilon = 0$), on peut facilement retrouver ce comportement à partir des équations :

$$0 = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}, \quad (8.5)$$

qui s'écrivent ici :

$$0 = -G_x + (\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}) \cdot \underline{\underline{e}}_x, \quad (8.6)$$

soit :

$$\tau = \mu \frac{du}{dz} = \begin{cases} 0 & \text{si } -\tau_c < |\underline{\underline{\tau}}| < \tau_c, \\ G_x(z - \frac{H}{2}) - \tau_c & \text{si } |\underline{\underline{\tau}}| \leq -\tau_c, \\ G_x(z - \frac{H}{2}) + \tau_c & \text{si } |\underline{\underline{\tau}}| \geq \tau_c. \end{cases} \quad (8.7)$$

On cherche ensuite la demi-épaisseur h_c de la zone d'écoulement en bloc, correspondant à $\frac{du}{dz} = 0$. Par définition de la contrainte seuil τ_c du fluide de Bingham et par symétrie de l'écoulement, on a : $|\tau(H/2 \pm h_c)| = \tau_c$, soit $\mu \frac{du}{dz} = 0$. On obtient donc d'après (8.7) :

$|G_x h_c| = \tau_c$, soit $h_c = \frac{\tau_c}{G_x}$, et donc :

$$u = \begin{cases} \frac{-G_x}{8\mu} (H^2 - 4h_c^2) - \frac{\tau_c}{\mu} (H/2 - h_c) & \text{si } |z - \frac{H}{2}| < h_c, \\ \frac{G_x}{\mu} (z - H) \frac{z}{2} - \frac{\tau_c}{\mu} z & \text{si } (z - \frac{H}{2}) \leq h_c, \\ \frac{G_x}{\mu} (z - H) \frac{z}{2} + \frac{\tau_c}{\mu} (z - H) & \text{si } (z - \frac{H}{2}) \geq h_c. \end{cases} \quad (8.8)$$

Les solutions obtenues pour le cas d'un fluide de Bingham idéal ($\epsilon = 0$) ont été représentées sur la figure (8.3). On peut remarquer une bonne adéquation entre les résultats théoriques obtenus pour un fluide de Bingham parfait ($\epsilon = 0$) et les résultats des simulations numériques obtenus pour un fluide viscoplastique régularisé ($\epsilon = 10^{-4}$). Nous

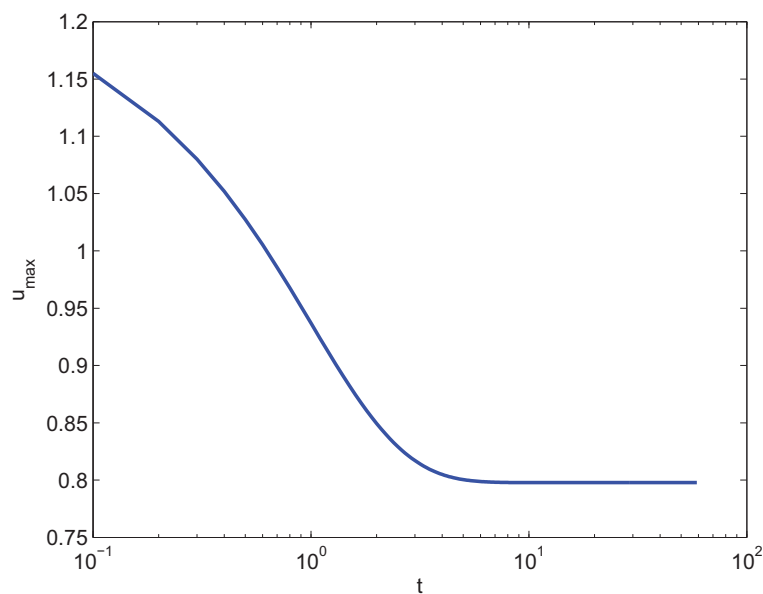


FIGURE 8.4 – Evolution temporelle de la vitesse maximale ($\tau_c = 10$, $\epsilon = 10^{-4}$).

observons maintenant, sur la figure 8.4, l'évolution temporelle de la vitesse maximum de l'écoulement de Poiseuille régularisé présenté figure 8.3. Suite à un transitoire correspondant à l'adaptation de l'écoulement parabolique au comportement viscoplastique du fluide, on obtient un écoulement stationnaire.

8.1.3 Influence des paramètres

Afin d'étudier l'influence du paramètre de régularisation ϵ , nous avons résolu numériquement, par la méthode Ferrari et de Cardan (toutes deux publiées dans [Cardano, 1545](#)), l'équation du 4ème ordre suivante, donnant pour cette configuration le champ de vitesse en fonction des paramètres du problème :

$$\mu^2 u^4 - 2 G_x z \mu u^3 + (G_x^2 z^2 - \tau_c^2 + \epsilon^2 \mu^2) u^2 - 2 G_x z \mu \epsilon u + (G_x z \epsilon)^2 = 0.$$

Nous obtenons alors quatre solutions. En ne conservant sur chaque segment $[0, H/2 - h_c]$, $[H/2 - h_c, H/2]$, $[H/2, H/2 + h_c]$ et $[H/2 + h_c, H]$ que la solution correcte, on obtient pour différents ϵ , la figure 8.5 : Pour observer l'effet du paramètre ϵ , nous avons choisi

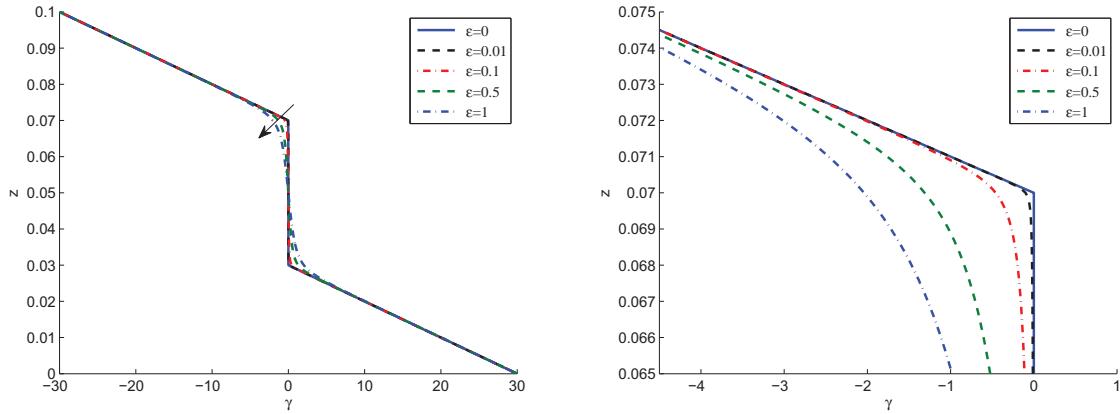


FIGURE 8.5 – Profil vertical du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ ($\tau_c = 20$, $\epsilon = 10^{-4}$). Gauche : flèche donne le sens des ϵ croissants. Droite : zoom autour de $H/2 + h_c$.

$\tau_c = 20$ afin d'avoir un h_c deux fois plus important que dans la configuration précédente. Nous observons que le paramètre ϵ lisse le profil du taux de cisaillement, linéaire par morceaux dans le cas idéal où $\epsilon = 0$. Nous pouvons remarquer que pour que le profil de vitesse de l'écoulement soit proche de celui d'un fluide de Bingham idéal, il faut que ϵ soit de 2 à 3 ordres de grandeur inférieur au maximum de $\dot{\gamma}$. Ce type de critère de contrôle pourrait être retenu afin de bien vérifier la pertinence de cette méthode de régularisation. On remarque que dans le cas précédent, avec $\epsilon = 10^{-4}$ pour $\max(\dot{\gamma}) = 40$, nous obtenons un profil très proche du cas idéal, impossible à différencier à l'oeil nu.

Nous avons ensuite vérifié l'influence des autres paramètres sur les configurations présentées figure 8.6. Nous pouvons remarquer que lorsque τ_c augmente, l'épaisseur de la zone d'écoulement solide s'épaissit, de même lorsque le gradient de pression diminue. Cependant, dans cette configuration, le code présente une meilleure stabilité lorsque l'on diminue le gradient de pression plutôt que lorsqu'on augmente la contrainte seuil. En effet, on remarque dans le cas $\tau_c = 40$ (fig. 8.6.c. et d.) de petites perturbations numériques du profil moyen vertical, alors que ce type de perturbations n'est pas présent dans le cas $G_x = -90$ (fig. 8.6.e. et f.), bien que cette dernière configuration soit plus contraignante car dans tout le domaine, la contrainte visqueuse reste inférieure à la contrainte seuil ; l'écoulement est donc stoppé dans tout le domaine malgré le gradient de pression non nul.

Finalement, malgré les contraintes imposées, le code présente de bons résultats et de bonnes aptitude à la simulation d'écoulements de fluides viscoplastiques. La régularisation, utilisée avec un paramètre ϵ suffisamment faible permet d'approximer de manière satisfaisante le comportement viscoplastique idéal. Pour de fortes contraintes seuil (τ_c), des instabilités peuvent cependant apparaître.

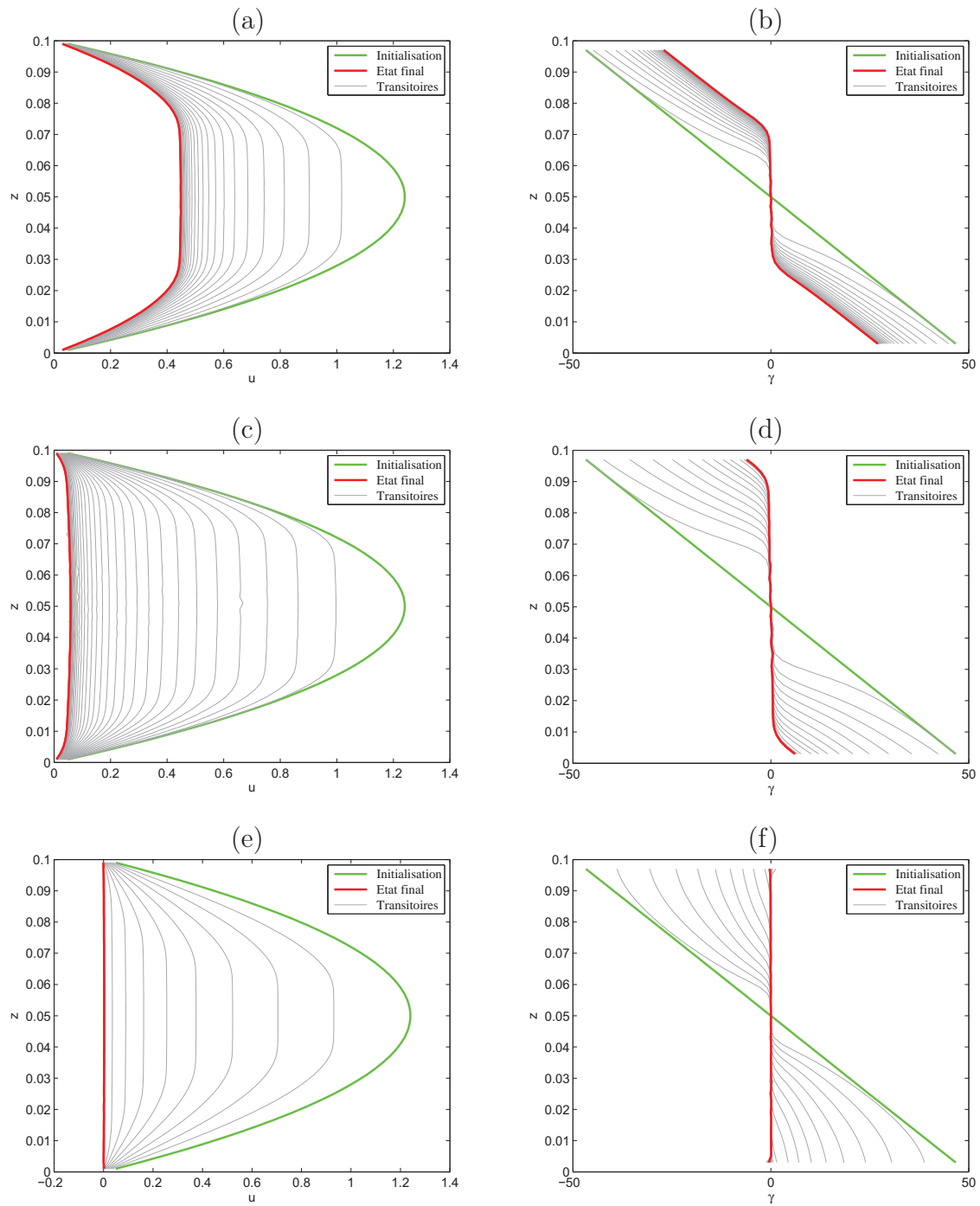


FIGURE 8.6 – Profils verticaux de vitesse (gauche) et de taux de cisaillement (droite). a. et b. ($\tau_c = 20$, $\epsilon = 10^{-4}$, $G_x = -1000$); c. et d. ($\tau_c = 40$, $\epsilon = 10^{-4}$, $G_x = -1000$); e. et f. ($\tau_c = 10$, $\epsilon = 10^{-4}$, $G_x = -80$).

8.2 Remise en suspension de crème de vase

8.2.1 Configuration générale de l'écoulement

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'influence d'une contrainte seuil sur une crème de vase miscible, c'est-à-dire avec une interface continue entre les deux fluides. Nous nous sommes donc placés dans la configuration décrite partie 6.1.2 : le domaine de simulation est de hauteur $H = 3$ m, avec une interface positionnée en $h = 1$ m. Des conditions aux limites de d'adhérence sont appliquées au fond et des conditions de glissement en haut du domaine. Le domaine est bi-dimensionnel, périodique dans la direction de l'écoulement. La longueur du domaine est $L = 1,82$ m, correspondant à une longueur d'onde du mode associé à $k^* = 0,46$ dans le cas newtonien, le calcul étant initialisé par la perturbation associée à ce mode (même initialisation de perturbations "newtoniennes" pour tous les cas). La configuration initiale est représentée figure (8.7). Une grille similaire à celle de la partie de validation des taux de croissance §7.1.2 est

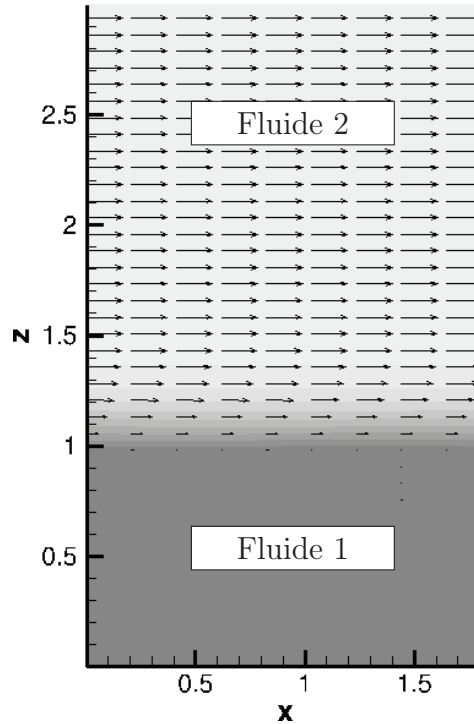


FIGURE 8.7 – Configuration initiale pour la remise en suspension de crème de vase viscoplastique. Taux de présence de la vase : fond. Champs de vitesse : flèches.

utilisée, soit des mailles carrées régulières de taille $0,5 \text{ cm} \times 0,5 \text{ cm}$. Nous avons choisi comme paramètres de l'étude un nombre de Richardson de $Ri = 0,15$, $W = 3$ et $Re = 10^3$, la viscosité du fluide viscoplastique utilisée pour le calcul de Re et W étant la viscosité μ de la formule (8.1) et non la viscosité effective locale μ_{ef} dépendant du cisaillement. Le fluide 1 (bas du domaine) est modélisé par un fluide viscoplastique, alors que le fluide 2 reste newtonien. Nous avons ensuite fait varier la contrainte seuil de mise en mouvement

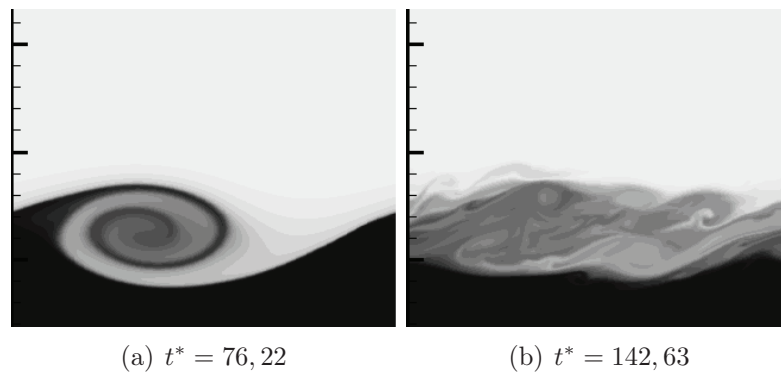


FIGURE 8.8 – Evolution temporelle du champ de fraction volumique pour un fluide newtonien ($\tau_c = 0$ Pa), zoomé au niveau de l'interface : $z \in [0, 4 \ 2, 4]$ m.

du fluide viscoplastique, modélisé par un modèle de Bingham régularisé, avec ϵ fixé à $\epsilon = 10^{-3}$. Les cas $\tau_c = [0 \ 5 \ 50 \ 150]$ Pa seront présentés dans la suite de cette partie. Cette gamme de contrainte seuil correspond aux cas de vase naturelle, testés par exemple dans l'expérience de [Sanchez and Levacher \(2008\)](#) sur des vases naturelles de la Loire.

Dans cette partie, nous avons choisi d'adimensionner le temps comme présenté §6.1, à partir de la différence de vitesse ($u_1 - u_2$) et de la demi-épaisseur de l'interface. L'évolution de l'interface dans le cas d'un fluide newtonien ($\tau_c = 0$) est présentée figure (8.8). Nous obtenons le développement d'une instabilité de type Kelvin-Helmholtz, puis d'une couche de mélange, comme présenté dans les chapitres précédents.

8.2.2 Cisaillement d'une crème de vase viscoplastique

Dans le cas d'un fluide fortement viscoplastique ($\tau_c = 150$), un comportement différent est observé, comme présenté figure (8.9). Nous observons dans ce cas le développement

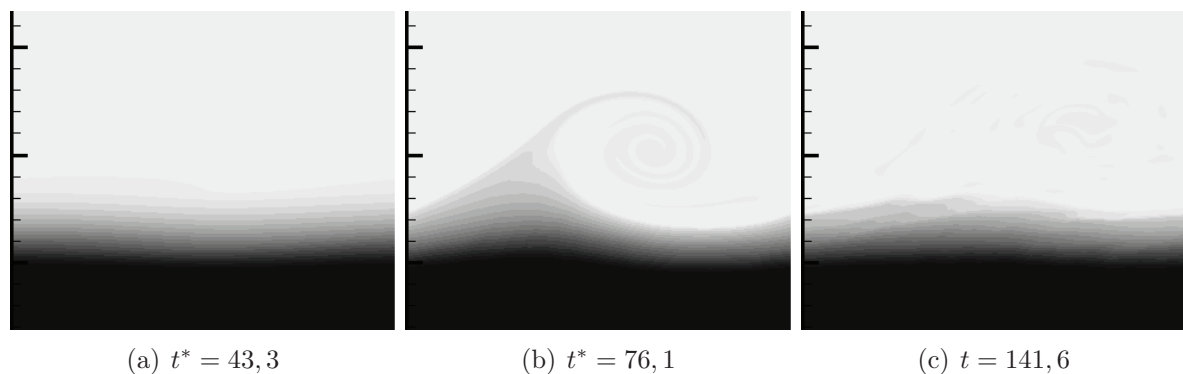


FIGURE 8.9 – Evolution temporelle du champ de fraction volumique pour un fluide viscoplastique ($\tau_c = 150$ Pa), zoomé au niveau de l'interface : $z \in [0, 4 \ 2, 4]$ m.

d'une instabilité de Holmboe "one side" en surface de la couche de mélange. Finalement en $t^* = 141,6$ l'interface initiale a peu changé, elle est toujours laminaire, on observe seulement des traces de l'instabilité dans le fluide supérieur. Nous avons présenté l'évolution temporelle du profil moyen de vitesse et du taux de présence ϕ , figure (8.10). Dans

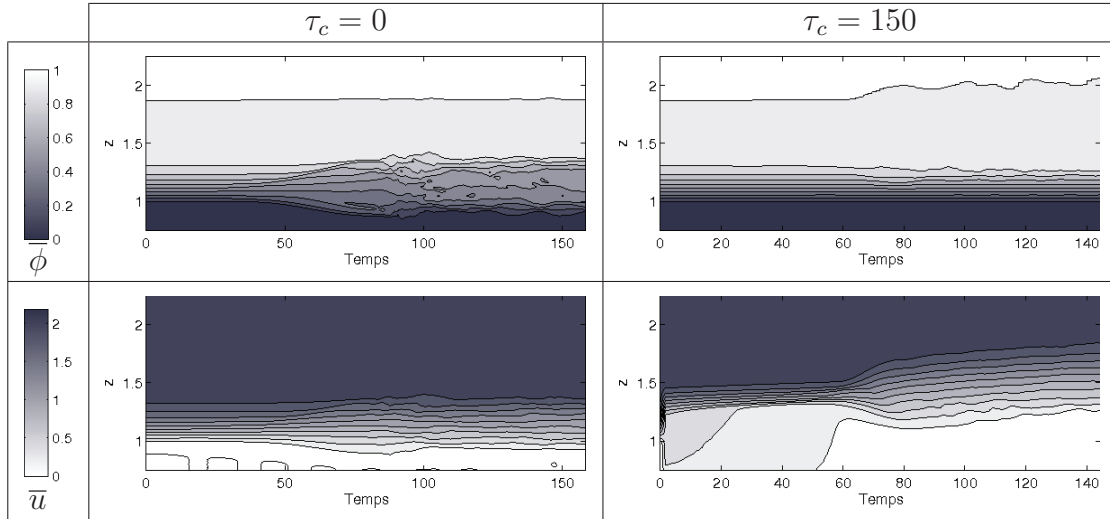


FIGURE 8.10 – Isocontours de la fraction volumique $\bar{\phi}(z, t)$ moyennée selon x en haut, et de vitesse $\bar{u}(z, t)$ moyennée selon x , zoomé au niveau de l'interface : $z \in [0, 7.2, 4]$ m.

le cas newtonien, à droite, on observe l'épaississement de l'interface entre les deux fluides (haut) et simultanément, l'épaississement de la couche de mélange (bas), entre $t^* = 50$ et $t^* = 100$. À droite, dans le cas d'un fluide viscoplastique de contrainte seuil $\tau_c = 150$, nous observons qu'un léger épaississement de l'interface entre les deux fluides (haut), notamment dans la partie supérieure de la couche. L'épaisseur de la partie inférieure de la couche diminue sensiblement. Le champ de vitesse moyenne (bas) subit de grosses modifications. Tout d'abord, dès les premières itérations du calcul, la couche de cisaillement migre de sa position initiale, autour de $z = 1$ m, à $z = 1,4$ m, dans la zone occupée uniquement par le fluide 2. Une partie de la quantité de mouvement imposée au fluide 1 à l'initialisation est conservée par ce fluide qui réagit par un mouvement proche d'une translation en bloc de toute la couche de fluide, caractéristique d'un fluide viscoplastique. Ce mouvement diminue rapidement par dissipation visqueuse, du fait de l'adhérence au fond. Ensuite, vers $t^* = 60$, alors que l'instabilité de Holmboe se développe, l'épaisseur de la couche de cisaillement croît. Elle migre ensuite de nouveau pour se placer, à la fin de la simulation, au-dessus de la couche de mélange entre les deux fluides. Les profils finaux de fraction volumique et de vitesse moyenne pour ces deux configurations ($\tau_c = 0$ Pa et $\tau_c = 150$ Pa) sont présentés figure (8.11). On observe dans le cas d'un écoulement initial composé de deux fluides newtoniens, la création d'une troisième couche homogène en densité et viscosité au niveau de l'interface, ainsi qu'en vorticité (le profil de vitesse moyenne est linéaire au niveau de l'interface). Dans le cas d'un écoulement bi-couche miscible entre un fluide viscoplastique et un fluide newtonien, on observe une translation

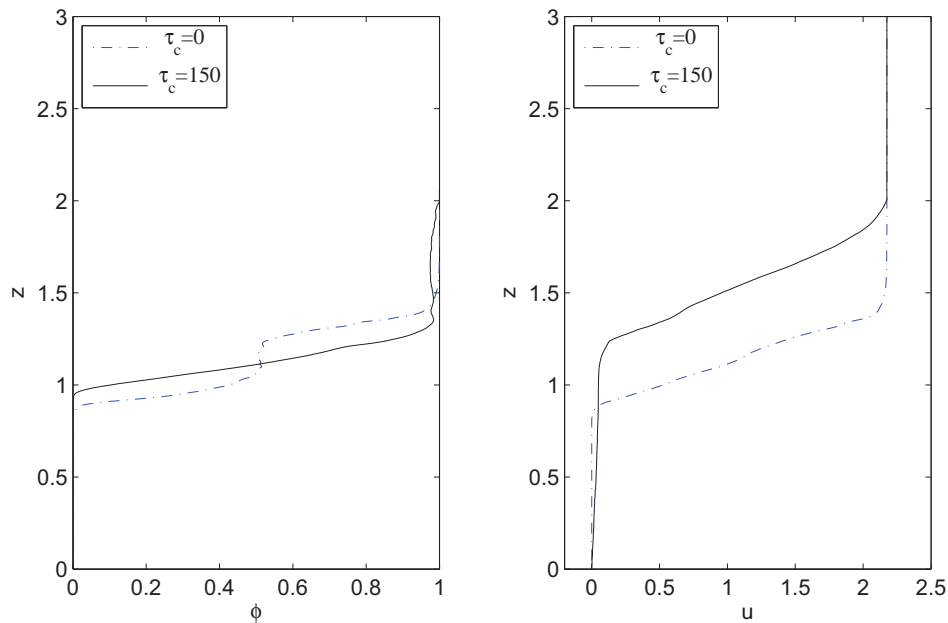


FIGURE 8.11 – Profils finaux ($t^* \sim 150$) de fraction volumique $\bar{\phi}(z)$ et de vitesse moyenne $\bar{u}(z)$ pour les configurations $\tau_c = 0$ Pa et $\tau_c = 150$ Pa.

de la couche de cisaillement vers le fluide newtonien et la création d'une nouvelle couche de mélange de densité et viscosité intermédiaire dans la partie supérieure de l'interface.

8.2.3 Influence de la contrainte seuil τ_c

Les deux cas intermédiaires $\tau_c = 5$ Pa et $\tau_c = 50$ Pa sont présentés figure (8.12), au même temps $t^* \sim 141,6$. Le cas $\tau_c = 50$ Pa est très similaire au cas $\tau_c = 150$ Pa : on observe aussi le développement d'une instabilité de type Holmboe en surface de la couche de mélange. Dans la configuration $\tau_c = 5$ Pa, on observe que l'instabilité (de type Holmboe aussi), se développe dans la partie supérieure de la couche de mélange. Ce cas est donc intermédiaire entre le cas $\tau_c = 0$ Pa où une instabilité de type Kelvin-Helmholtz se développait au centre de la couche et le cas $\tau_c = 50$ Pa où l'instabilité se développe en surface de la couche.

La figure (8.13) présente les profils finaux de fraction volumique, i.e. de masse volumique et de viscosité normalisés, obtenus en régime quasi-stationnaire pour les quatre configurations traitées. On observe, dans le cas où le fluide inférieur est newtonien, la création d'une couche homogène de propriétés intermédiaires ($\phi \sim 0,5$), au niveau de la couche de mélange initiale. Lorsque $\tau_c \neq 0$, i.e. que le fluide 1 est viscoplastique, on observe aussi la création d'une troisième couche de fluide homogène. Lorsque τ_c augmente, on observe la migration de cette couche vers le haut de la couche de mélange, ces propriétés se rapprochant de celles du fluide 2 (ϕ augmente), occupant la partie supérieure du domaine. Nous

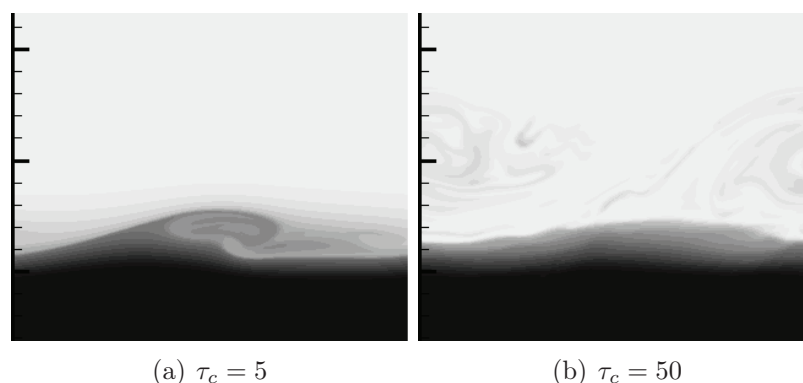


FIGURE 8.12 – Champs de fraction volumique pour un fluide inférieur viscoplastique ($\tau_c = 150$ Pa) à $t^* \sim 141,6$, zoomé au niveau de l'interface : $z \in [0, 4 \ 2, 4]$ m.

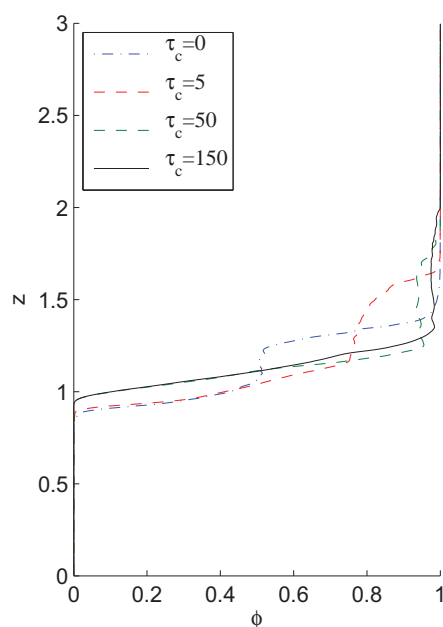


FIGURE 8.13 – Profils finaux de fraction volumique ϕ pour les configurations $\tau_c \in [0 \ 5 \ 50 \ 150]$.

pouvons aussi remarquer que les profils obtenus sont proches de ceux observés en estuaire avec la création de différentes couches de densités homogènes (voir par exemple [Kineke et al. \(1996\)](#) ou [Mehta et al. \(1989\)](#)). A partir de ces profils verticaux de vitesse et de taux de présence de crème de vase, nous avons calculé, pour les différentes configurations, le travail appliqué par l'écoulement sur fond afin de remettre en suspension ces sédiments.

Ce travail des forces de flottabilité est calculé à partir de la formule suivante :

$$\mathcal{W}_b = \frac{1}{h} \int_0^H (\bar{\phi}_{t0} - \bar{\phi}_{tf}) z dz, \quad (8.9)$$

où $\bar{\phi}_{t0}$ et $\bar{\phi}_{tf}$ sont respectivement les profils verticaux de fraction volumique de l'eau dans la vase au début et à la fin de la simulation. Nous avons représenté ce travail sur la figure (8.14(a)). Nous observons une forte diminution de ce travail \mathcal{W}_b entre $\tau_c = 0$

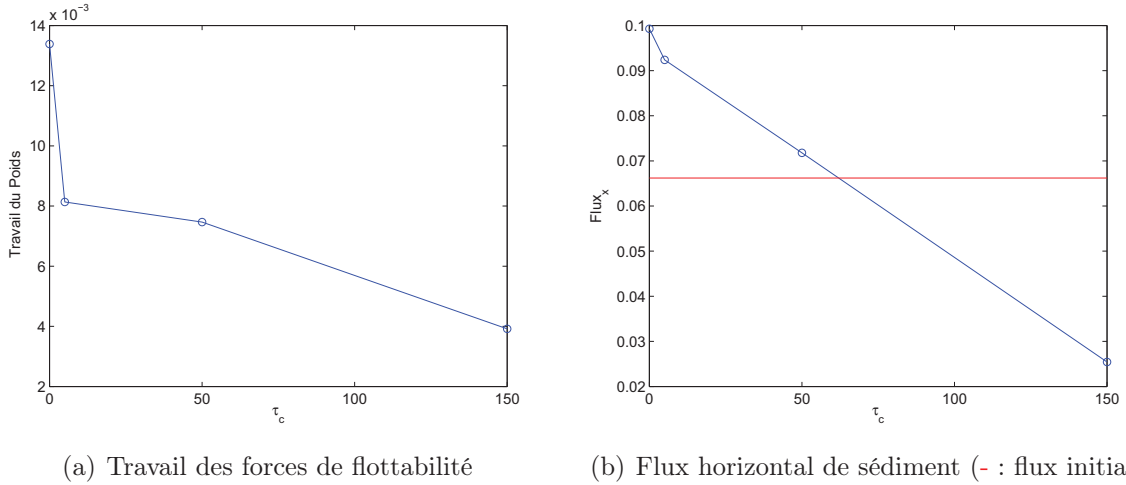


FIGURE 8.14 – Evolution des propriétés de l'écoulement en fonction de la contrainte critique τ_c .

Pa et $\tau_c = 5$, traduisant principalement la densité moins importante de la remise en suspension dans le cas $\tau_c = 5$ Pa. Ce travail continue ensuite à diminuer mais de manière moins prononcée par la suite, la différence de densité entre les couches formées dans ces différentes configurations étant plus proches (voir figure 8.13).

Nous avons ensuite représenté figure (8.14(b)) l'évolution du flux horizontal de l'écoulement en fonction de la contrainte critique. Le flux de sédiment est calculé grâce à la formule suivante :

$$Flux_x = \frac{1}{u_2} \int_0^H \bar{u}_{tf} (1 - \bar{\phi}_{tf}) dz, \quad (8.10)$$

où \bar{u}_{tf} est le profil de vitesse moyenné final. Le flux initial de sédiments étant représenté par la ligne rouge, nous pouvons remarquer que pour $\tau_c < 60$ Pa, le flux final est supérieur au flux initial, l'instabilité contribue au transport de la vase. Pour les valeurs de τ_c supérieures, le profil de vitesse est modifié et la couche de cisaillement migre au dessus de la couche de vase. La capacité de mélange de l'instabilité est donc faible et le transport de sédiment presque nul.

Ainsi, dans le cas d'une crème de vase présentant un comportement viscoplastique, les instabilités de cisaillement se déroulant dans l'interface entre les deux fluides seront affectés par la contrainte seuil de la vase τ_c . Plus cette contrainte sera importante, plus les instabilités vont se développer dans la partie supérieure de l'interface, et moins elle

auront la capacité à créer une épaisse couche de mélange turbulente propice à la remise en suspension des sédiments et à leur transport par l'écoulement.

8.3 Erosion de vase partiellement consolidée

8.3.1 Présentation générale de la configuration bi-couche

Si on considère que la contrainte seuil apparait pour des vases plus consolidées, il est intéressant d'étudier la réaction d'un fluide viscoplastique cisailé par un fluide newtonien. On se place donc, pour cette sous-partie, dans une configuration initiale bi-couche (épaisseur d'interface nulle) avec une interface entre les deux fluides située en $z = h = 1$ m. L'écoulement est initialisé comme présenté figure (8.15), avec :

$$\bar{\phi} = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq h, \\ 1 & \text{si } z > h, \end{cases} \quad \bar{u} = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq h, \\ u_2 \operatorname{erf}(z - h) & \text{si } z > h. \end{cases} \quad (8.11)$$

Pour $z \leq 1$, les propriétés du fluide (ρ , μ , τ_c) sont celles du fluide 1 (pur) ($\phi = 0$) dans la partie inférieure du domaine ($z \leq h$). Dans la partie supérieure ($z > h$), les propriétés sont celles du fluide 2 ($\phi = 1$). Le champ de vitesse est défini par un profil en semi-erf, basé sur l'équation présentée §(6.1.2), avec le paramètre $\lambda = 0$, pour $z > 1$, le fluide étant au repos dans la partie inférieure du domaine ($z \leq 1$). Le domaine de

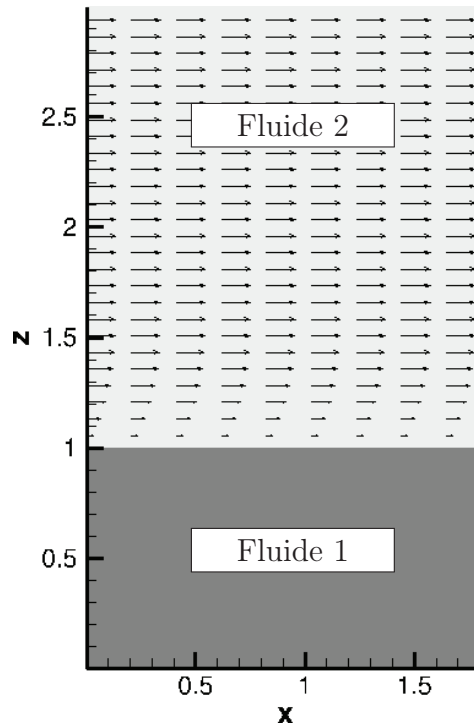


FIGURE 8.15 – Configuration initiale. Taux de présence de la vase : fond. Champs de vitesse : flèches.

calcul est le même qu'utilisé précédemment ($L = 1,82$ m, $H = 3$ m ; mailles de taille $0,5$ cm \times $0,5$ cm ; adhérence en bas, glissement en haut du domaine). L'interface est perturbée par un bruit blanc de faible amplitude (10^{-3} m.s⁻¹), localisé autour de l'interface grâce à une fonction gaussienne centrée en $z = 1$ m. Nous nous sommes replacés dans les mêmes configurations que la partie précédente en terme de vitesses aux frontières du domaine (u_1, u_2), de propriétés initiales des deux fluides utilisés ($\rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2$), ainsi que concernant les contraintes seuil viscoplastiques testées. Dans cette configuration, un nouveau nombre de Reynolds Re' peut être construit, basé sur l'épaisseur de la couche de fluide la plus visqueuse, et dans certains cas, viscoplastique :

$$Re' = \frac{u_2 h \rho_1}{\mu_1}, \quad (8.12)$$

où h est l'épaisseur de fluide 1 (vase), μ_1 et ρ_1 sont respectivement la viscosité et la masse volumique de ce fluide 1 et u_2 la vitesse du fluide 2 (eau) en haut du domaine de calcul. Nous choisirons, de même, d'adimensionner le temps en utilisant les mêmes vitesse et longueur de référence : $t^* = t \times u_2/h$. Dans notre configuration, nous avons un nombre de Reynolds constant de valeur $Re' = 3 \cdot 10^4$ et nous avons choisi un rapport de viscosité $W = 3$.

8.3.2 Erosion d'une vase newtonienne

Dans un premier temps, nous allons présenter les résultats obtenus pour un fluide newtonien ($\tau_c = 0$ Pa), cette configuration n'ayant pas été présentée précédemment.

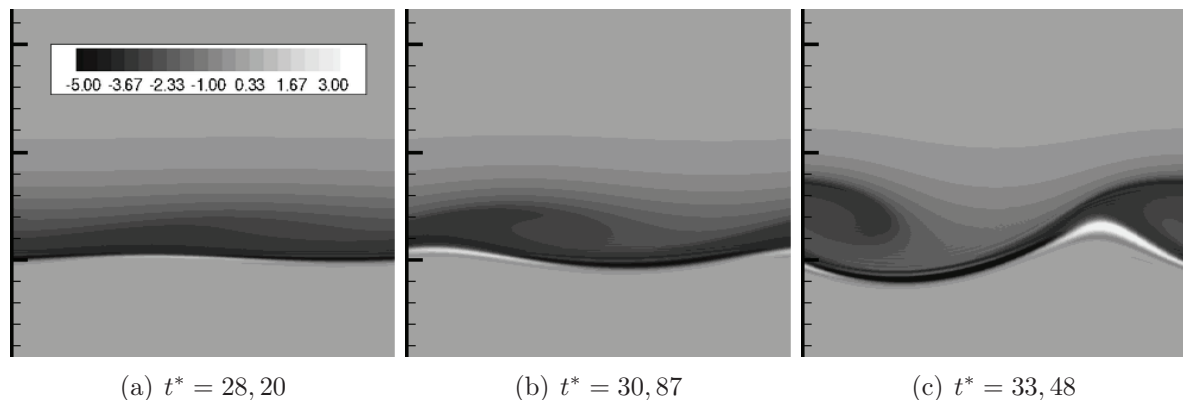


FIGURE 8.16 – Evolution temporelle du champ de vorticité (adimensionné par u_2/h), pour $\tau_c = 0$ Pa, $W = 3$ et $Re' = 3 \cdot 10^4$, zoomés à l'interface pour $z \in [0, 3/2, 2]$.

Nous pouvons observer différentes phases distinctes dans l'évolution de l'interface, représentées chacune sur une ligne des figures (8.16) et (8.17). Sur la figure (8.16), le champ de vorticité est représenté, adimensionné par la vitesse u_2 du fluide à la frontière haute du domaine et l'épaisseur de la couche de fluide visqueux (h), pour $t^* \leq 33,5$. La première

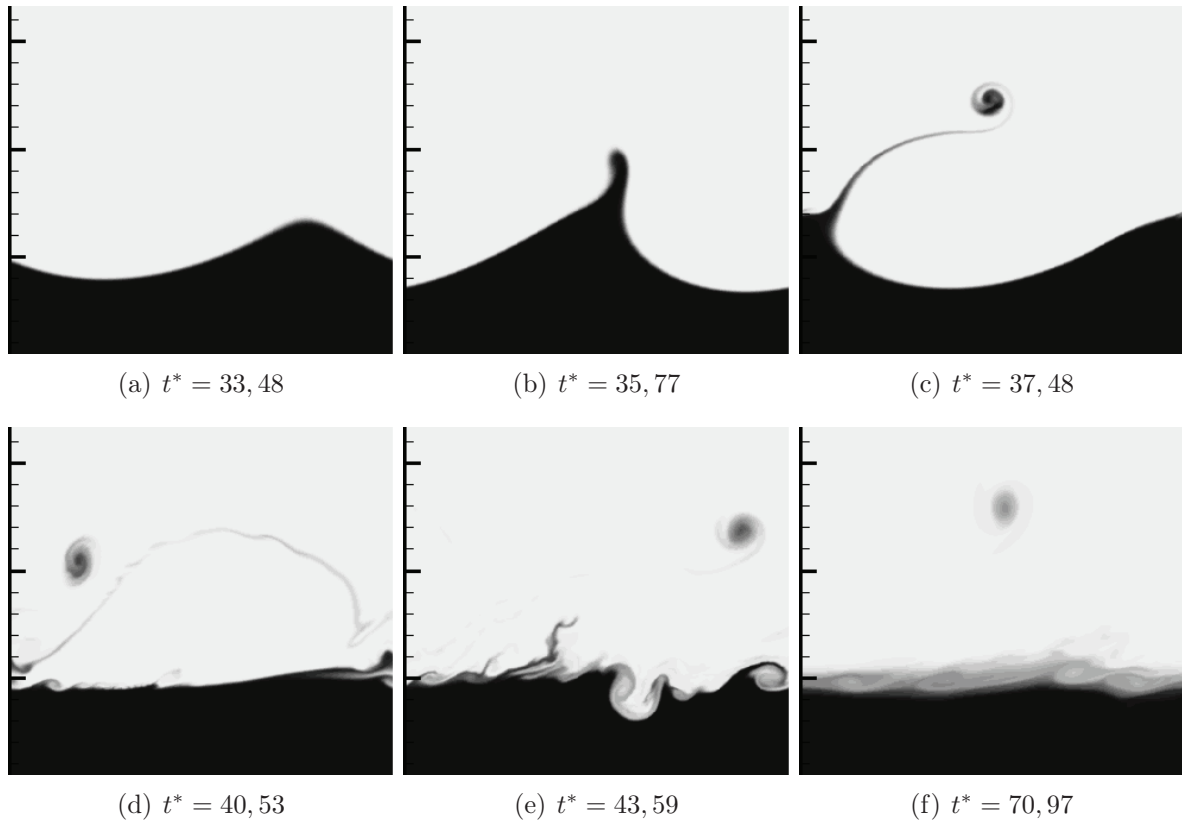


FIGURE 8.17 – Evolution temporelle du champ de fraction volumique, pour $\tau_c = 0$ Pa, $W = 3$ et $Re' = 3 \cdot 10^4$, zoomés à l'interface pour $z \in [0, 3 \cdot 2, 2]$.

phase se développe pour $t^* < 33.5$. Le champs de vitesse imposé entraine la formation d'une couche de vorticité au-dessus de l'interface, dans le fluide homogène 2. Dans cette couche de vorticité se développent des instabilités de cisaillement classiques (fluide homogène). Figure (8.16(c)), nous observons l'enroulement des rouleaux. Au niveau de l'interface, nous observons l'accumulation de vorticité négative (due à l'initialisation et à l'élongation de l'interface) mais aussi positive au niveau de la position haute de l'interface. Ensuite, nous avons présenté figure (8.17) l'évolution du champs de fraction volumique de fluide (ou masse volumique ou encore viscosité) pour $t^* \geq 33,5$. Cette déformation du champ de vorticité entraine la transition d'une interface présentant une oscillation de type sinusoïdale (voir par ex. figure 8.16(a))   un comportement type cosh. On peut l'observer par exemple sur les figures (8.16(c)) et (8.17(a)) présentant respectivement le champ de vorticité et de fraction volumique au même instant. Dans cette seconde phase, nous allons observer l'influence du champ de vorticité observé précédemment sur l'évolution de l'interface. Si on suit maintenant l'évolution de l'interface, on observe une protubérance qui se forme et est étirée par le cisaillement de vitesse présent au-dessus de l'interface, figure 8.17(b). Le comportement atypique de la protubérance semblant remonter à contre courant est due à la vorticité positive du fluide (voir figure 8.16). De même, on observe

figure (8.17(c)) que la protubérance est éjectée de la couche inférieure et suit l'écoulement tourbillonnaire créé par les rouleaux de KH dans la couche supérieure de l'écoulement. Cependant l'extrémité de la protubérance conserve sa vorticité positive, inverse à celle du fluide environnant. L'extrémité de la protubérance se sépare alors de l'interface et est advectée par l'écoulement comme une intrusion de fluide 1, de vorticité positive, et diffuse lentement. Ces instabilités semblent s'apparenter aux instabilités "visqueuses" observées notamment lors d'écoulements concentrique en tube de deux fluides de viscosités différentes. Cette morphologie est qualifiée de "en champignon" (voir par exemple d'Olce et al., 2008).

Une dernière phase de l'évolution de l'interface est présentée par les figures (8.17(d)-8.17(f)), pour $t^* > 39$. L'interface redevenue quasi-horizontale, se déstabilise de nouveau par le développement d'instabilités de cisaillement classiques en $z = h$. Figure (8.17(d)), on peut observer, sur la gauche du domaine de simulation, la formation d'une série de rouleaux, leur croissance figure (8.17(e)) et le début de leur transition vers une couche de mélange turbulente, localisée au niveau de l'interface (figure 8.17(f)). A la fin de la simulation, le patch de vase, légèrement diffusé témoigne toujours du développement de la première instabilité (figure 8.17(f)). Finalement, dans le cas d'un fluide newtonien cisailé par un autre fluide moins dense et moins visqueux, on observe le développement d'une instabilité de cisaillement dans la couche supérieure de l'écoulement. Cette instabilité entraîne la formation de vorticité positive au niveau de l'interface, entraînant une déformation de l'interface de type "champignon", et l'éjection d'une petite quantité de fluide visqueux dans la couche supérieure. Cette instabilité est ensuite suivie du développement d'une instabilité de cisaillement de type KH au niveau de l'interface, entraînant la formation d'une couche de mélange au niveau de l'interface.

8.3.3 Erosion d'une vase viscoplastique et influence de la contrainte seuil.

Nous avons ensuite étudié la réaction d'un fluide viscoplastique au cisaillement par un fluide newtonien. Nous avons donc conservé la configuration précédente, en ajoutant une contrainte seuil de mise en suspension au fluide occupant la partie inférieure du domaine. Le cas $\tau_c = 50$ Pa est présenté figures (8.18) et (8.19). Comme dans le cas d'une vase très visqueuse, nous obtenons tout d'abord le développement d'une instabilité de cisaillement dans la couche supérieure de l'écoulement (voir figures 8.18(a) et 8.18(b)). Cependant, contrairement au cas newtonien, tant que l'instabilité n'est pas suffisamment développée et que sa contrainte sur la couche visqueuse n'est pas suffisante, la couche visqueuse ne se déforme pas et se comporte comme un mur (voir figure 8.18(b)), ce qui entraîne le développement d'une instabilité de forme assez particulière. Ensuite le seuil étant atteint, la couche visqueuse se déforme, ainsi que l'interface. Comme précédemment, elle se met à osciller et prendre une forme de type cosh sous l'effet de vorticité négative et positive, en alternance, au niveau de l'interface. On observe ensuite au sommet de l'oscillation de l'interface, la liquéfaction d'une partie de la vase et la formation d'une protubérance. Dans ce cas, le mouvement de la couche viscoplastique nécessitant le dépassement du seuil de contrainte, l'instabilité de cisaillement est d'avantage développée lorsque la protubérance

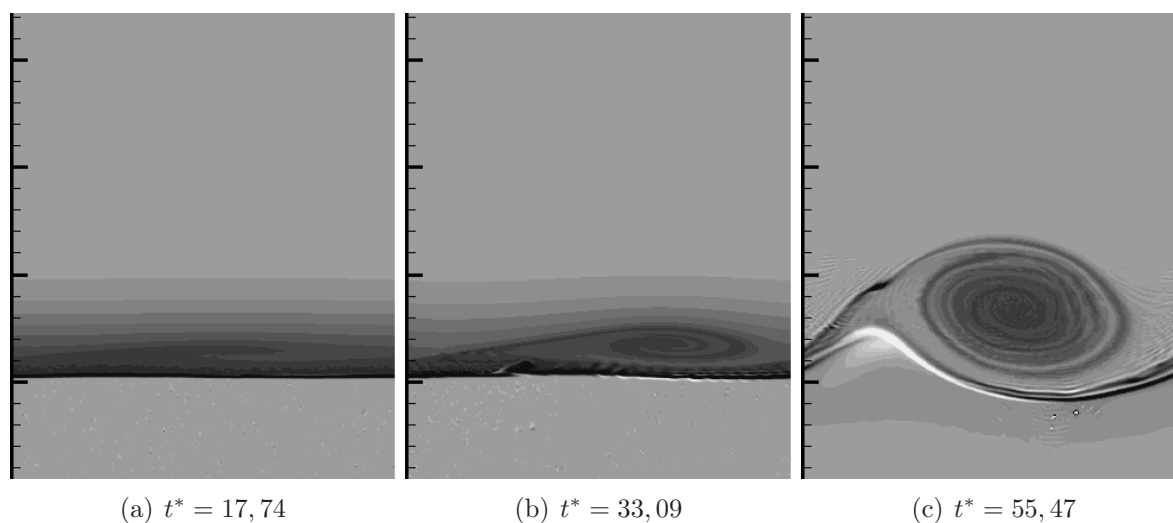


FIGURE 8.18 – Evolution temporelle du champ de vorticité (adimensionné par u_2/h), pour $\tau_c = 50$ Pa, $W = 3$ et $Re' = 3 \cdot 10^4$, zoomés à l'interface pour $z \in [0, 3 \ 2, 7]$.

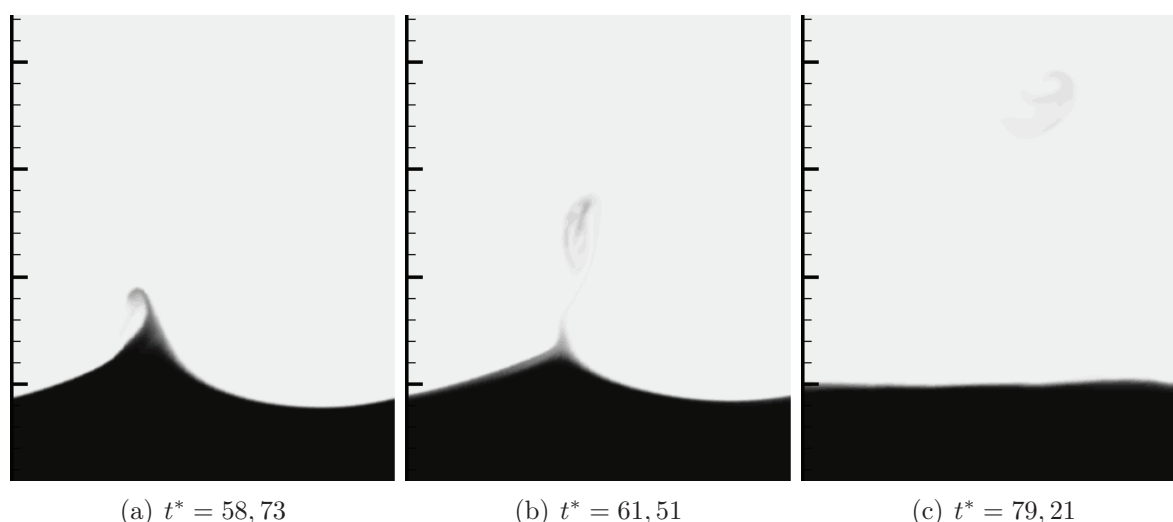


FIGURE 8.19 – Evolution temporelle du champ de fraction volumique, pour $\tau_c = 50$ Pa, $W = 3$ et $Re' = 3 \cdot 10^4$, zoomés à l'interface pour $z \in [0, 3 \ 2, 7]$.

se forme. Lorsque cette protubérance se sépare de l'interface, elle migre ainsi plus haut dans le domaine que dans le cas newtonien. L'interface reprend alors sa morphologie initiale, bien horizontale. Dans ce cas, nous n'observons pas le développement d'instabilités de cisaillement secondaires, l'interface entre les deux fluides reste très fine. Seule une petite intrusion de vase dans la couche supérieure est observable en fin de simulation et diffère de la configuration initiale en matière de répartition des deux fluides.

Nous avons ensuite effectué la même simulation pour une contrainte seuil intermédiaire

$\tau_c = 5$ Pa. Dans ce cas, on observe comme pour les deux cas précédents le développement d'une instabilité de cisaillement dans la couche fluide supérieure. Cette instabilité entraîne comme pour les autres cas, une déformation de l'interface associée ensuite à la création d'une intrusion apparentée à la morphologie type "champignon". La suite de l'évolution de l'interface présente un comportement intermédiaire entre les deux vus précédemment, newtonien et fortement viscoplastique, est présenté figure (8.20). En effet,

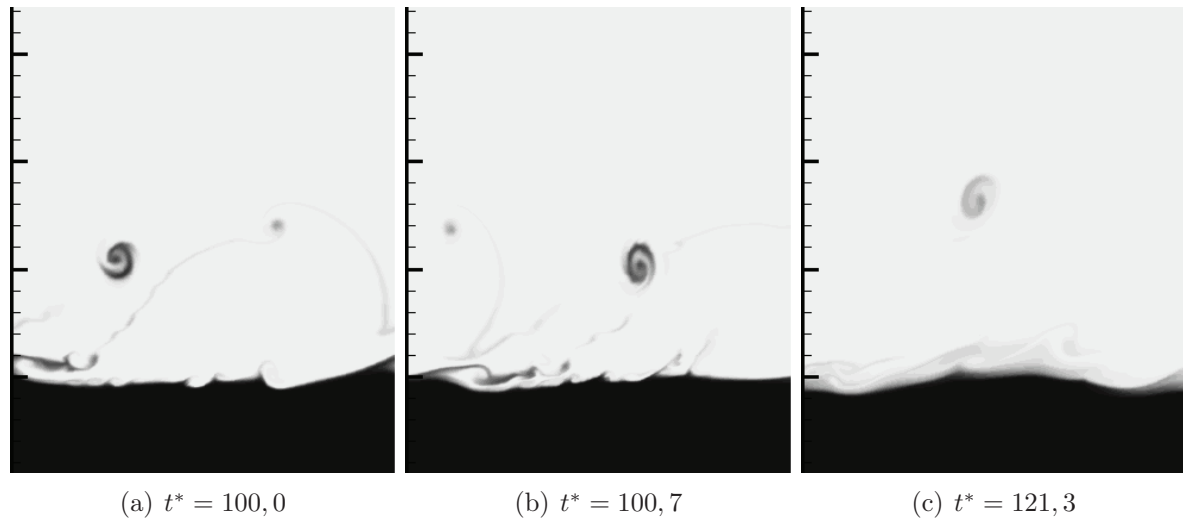


FIGURE 8.20 – Evolution temporelle du champ de fraction volumique entre un fluide viscoplastique ($\tau_c = 5$ Pa) et un fluide newtonien, pour $W = 3$ et $Re' = 3 \cdot 10^4$, zoomés à l'interface pour $z \in [0, 3 \cdot 2, 7]$.

comme présenté à $t^* = 100,0$ figure (8.20(a)), des instabilités de cisaillement se développent au niveau de l'interface. Mais contrairement au cas newtonien, elles sont juste au-dessus, et déforment peu l'interface. Ainsi, ces instabilités de cisaillement entraînent comme visible juste après figure (8.20(b)) dans la partie centrale de l'interface, des intrusions ou "jet" de matière; contrairement à la couche de mélange observé dans le cas newtonien. Finalement, on observe la création d'une nouvelle couche diffuse, au-dessus de l'interface, résultant de reliquats de l'instabilité en "champignon" mais aussi des jets secondaires observés ensuite.

Nous avons enfin représenté figure (8.21) les profils finaux de répartition des deux fluides (à travers ϕ la fraction volumique de fluide 2 dans le mélange). Nous observons tout d'abord une faible variation du profil initial quelque soit la contrainte seuil de la vase. Cependant moins la contrainte seuil est importante, plus le mélange est développé. Nous devons cependant noter que pour la configuration fluide newtonien, la couche de mélange est encore en développement à la fin de la simulation et n'a pas atteint sa morphologie finale. Pour ces trois configurations, nous observons l'intrusion de vase. Comme expliqué précédemment, plus la contrainte seuil est importante, plus cette intrusion est haute. Nous observons pour $\tau_c = 0$ Pa une intrusion de vase en $z = 1,78$ m, pour $\tau_c = 5$ Pa une intrusion en $z = 1,85$ m et pour $\tau_c = 50$ Pa une intrusion en $z = 2,34$ m. En

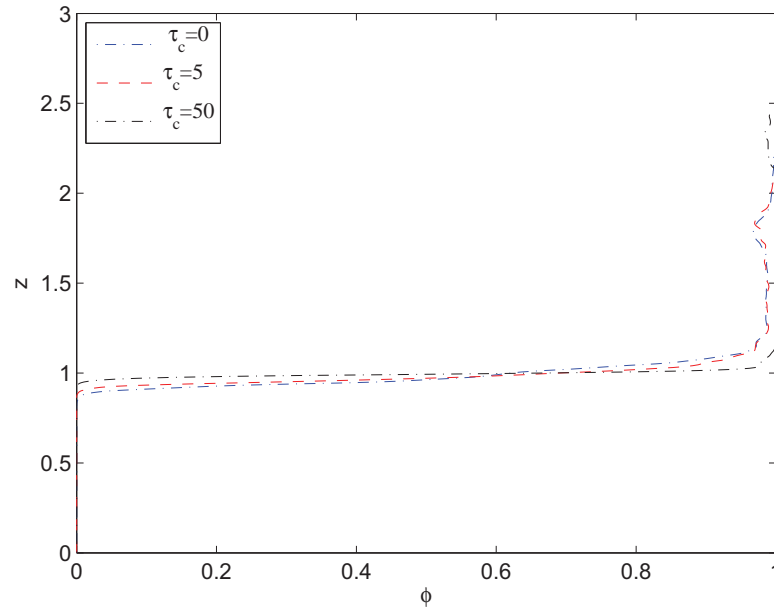


FIGURE 8.21 – Profils finaux de fraction volumique ϕ pour les configurations $\tau_c \in [0 \ 5 \ 50]$ Pa.

effet, l'instabilité de cisaillement initiale au-dessus de l'interface se développe de la même manière quelque soit τ_c mais la réaction de la couche inférieure à son forçage dépend de τ_c . L'instabilité initiale de cisaillement est donc plus développée et plus "épaisse" pour les fluides très viscoplastiques, entraînant alors l'intrusion de vase dans la partie haute du domaine.

Comme dans la partie précédente, nous pouvons, à partir de ces profils, associés au profils moyens de vitesse, évaluer l'énergie utilisée par l'écoulement pour la remise en suspension des sédiments et le flux final de transport horizontal. Lors que nous observons le travail des forces de flottabilité (obtenu grâce à l'équation 8.9), nous observons dans un premier temps une diminution de celui-ci alors que τ_c augmente. Cette diminution est principalement due au développement dans le cas $\tau_c = 0$ Pa de fortes instabilités de cisaillement remettant une quantité assez importante de vase en suspension, bien que proche de l'interface. Ensuite nous observons un travail plus important des forces de flottabilité dans le cas $\tau_c = 50$ Pa que dans le cas $\tau_c = 5$ Pa. Cette différence est principalement due à la position finale de "l'intrusion de vase" dans l'écoulement final. En effet, pour des contraintes seuil plus importantes, les instabilités dans la couche de cisaillement doivent être plus développées pour entraîner le "jet" de matière. Elles projettent donc la matière plus haut dans l'écoulement, le rayon de ces structures étant plus important. Le flux horizontal de sédiments, calculé grâce à l'équation (8.10), est ensuite représenté figure (8.22(b)). Contrairement à la configuration précédente, le flux horizontal initial de vase est nul, car l'écoulement est nul dans la couche de vase. Nous observons une évolution du flux horizontal très similaire au travail des forces de flottabilité. Ainsi, dans

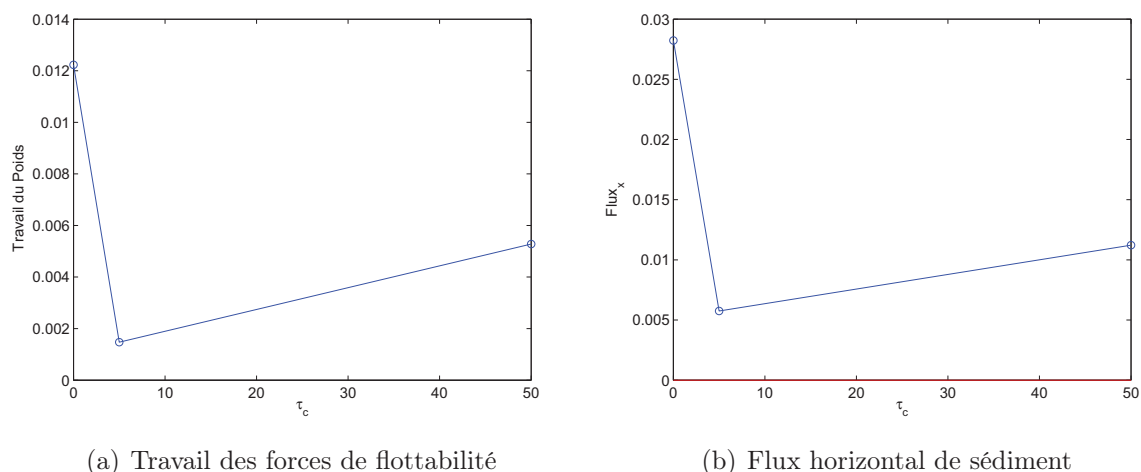


FIGURE 8.22 – Evolution des propriétés de l'écoulement en fonction de la contrainte critique τ_c .

cette configuration, le flux horizontal est fortement dépendant du travail des forces de flottabilité et dépend peu du profil de vitesse final. Quelque soit la contrainte seuil de la vase, un flux de sédiments est observé. Il reste cependant moins important que dans la configuration précédente.

Finalement, nous observons que bien que le cisaillement initial à l'interface ne soit pas suffisant pour mettre en mouvement la vase, le développement d'instabilités dans la couche de cisaillement, par une augmentation de la contrainte à l'interface parvient à remettre de la vase en suspension. Ainsi, il semble qu'utiliser la contrainte définie à partir du profil de vitesse moyen ne soit pas suffisant pour déterminer la remise en suspension de sédiments. D'un point de vue théorique, [Thual and Lacaze \(2010\)](#) montre que la frontière fluide / solide pour les fluides de Bingham est difficile à modéliser à partir des lois comportementales et que la notion de contrainte critique doit être redéfinie.

8.3.4 Comparaison entre les deux modèles de viscosité équivalente.

Nous avons choisi cette configuration pour tester la seconde formule de calcul de la viscosité équivalente d'un mélange de deux fluides, dite moyenne harmonique et précédemment présentée §4.3.2. Nous avons de plus choisi le cas $\tau_c = 50$ Pa car il semble très discriminant sur le calcul de la viscosité équivalente du mélange. En effet, l'interface étant très raide, les différences entre les deux modèles sont plus marquées. D'autre part, comme les deux fluides présentent un comportement différent (newtonien et viscoplastique prononcé), la différence entre les deux viscosités est plus marquée (d'autant que nous avons choisi $W = 3$). Pour ce cas avec moyenne harmonique, l'évolution temporelle d'un champ de fraction volumique est représentée figure (8.23). Si nous comparons ces résultats avec les champs présentés figure (8.19), nous remarquons que l'évolution de l'in-

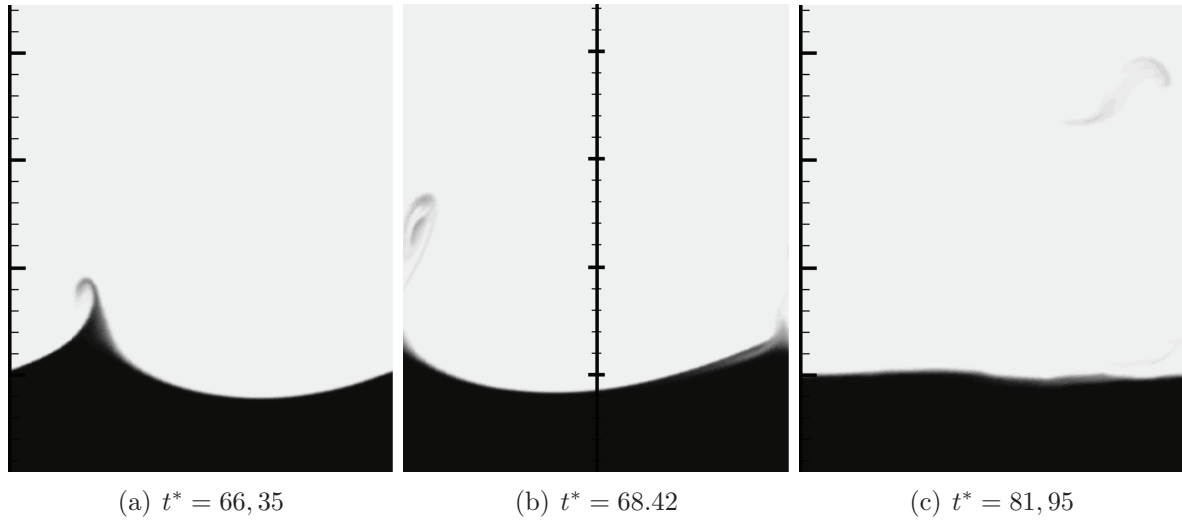


FIGURE 8.23 – Evolution temporelle du champs de fraction volumique pour un fluide 1 viscoplastique ($\tau_c = 50$ Pa) avec calcul de la viscosité de mélange par moyenne harmonique, pour $W = 3$ et $Re' = 3 \cdot 10^4$.

terface est identique. Le développement de l'instabilité est légèrement plus rapide dans le cas de la moyenne linéaire (modélisation classique), que dans le cas de la moyenne harmonique. Cependant cette petite différence peut aussi être due à une perturbation initiale légèrement différente par le bruit blanc. Nous obtenons à la fin la même position verticale l'intrusion de vase.

Conclusion

Afin d'étudier le l'effet de la contrainte seuil, un modèle de type Bingham régularisé a été implémenté dans le code *JADIM*. Une évaluation de ce modèle est réalisée dans un premier paragraphe. Nous avons alors comparé le modèle viscoplastique avec des résultats théoriques obtenus pour un fluide idéal de Bingham, puis étudié l'influence du paramètre de régularisation. Ensuite, nous avons étudié l'influence de la contrainte seuil dans notre écoulement de référence (interface continue), en considérant la vase comme viscoplastique. Nous observons dans le cas du cisaillement d'une vase viscoplastique le développement d'une instabilité dans la partie supérieure de l'interface. Ainsi, plus la contrainte seuil est élevée, plus l'instabilité se développe haut dans l'interface, et moins elle a d'impact sur le flux sédimentaire. Le caractère viscoplastique étant communément observé pour des vases partiellement consolidées, nous avons ensuite étudié la réaction d'un bi-couche d'interface nulle à un cisaillement. Nous observons dans ce cas le développement d'instabilité de cisaillement au-dessus de l'interface. Ces instabilités déforment ensuite l'interface, entraînant la création d'un "jet" de vase. Pour des contraintes seuil faibles, des instabilités de cisaillement classiques se développent ensuite. Pour des vases ayant un caractère viscoplastique plus prononcé, l'augmentation de la contrainte seuil en-

traine alors l'augmentation de la vitesse verticale du jet et donc un flux sédimentaire plus important.

Chapitre 9

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié numériquement la réaction de la lutocline à un cisaillement. Le comportement de cette interface, centrale dans les mécanismes de transport de sédiments estuariens, est encore mal compris à cause notamment du comportement complexe de la vase. Afin de mieux comprendre ces mécanismes, notamment dans le cadre de la remise en suspension des sédiments, nous avons modélisé la vase par un fluide équivalent miscible dans l'eau, de rhéologie newtonienne ou viscoplastique. Un modèle de la lutocline a été proposé. Il consiste en un écoulement bi-couche cisailé, stratifié en densité et en viscosité, et dont le fluide inférieur peut présenter une contrainte seuil de mise en mouvement.

Pour étudier cet écoulement, deux outils numériques ont été utilisés. Un code de stabilité linéaire a été modifié pour être appliqué au cas d'écoulements cisailés. Le système d'équations au coeur du code a été modifié et complété par des outils techniques adéquats, tels que de nouveaux mappings, une implémentation innovante des conditions ou la définition d'un critère de stabilité. Un second code résolvant les équations incompressibles de la mécanique des fluides a aussi été utilisé. Initialement développé pour des fluides newtoniens, l'étude du comportement de la vase a nécessité l'implémentation de la rhéologie viscoplastique dans le code, en utilisant un modèle de comportement de type Bingham régularisé.

Dans un premier temps, nous avons utilisé le code de stabilité linéaire pour étudier le développement linéaire des instabilités de cisaillement se développant au niveau de l'interface eau - crème de vase. En effet, bien que la stabilité de couches de mélanges soit étudiée depuis longtemps, certains aspects spécifiques de la lutocline, tels que la stratification en viscosité, sont peu traités. Après une étude d'écoulements similaires, nous avons défini la spécificité de notre configuration, basées sur un profil en erf asymétrique au niveau de l'interface, commun aux profils moyens de la vitesse, de la masse volumique et de la viscosité. Nous avons montré que, pour un nombre d'Atwood fixé, les paramètres centraux du comportement linéaire de lutocline étaient le nombre de Richardson gradient et le nombre de Reynolds calculé au niveau de l'interface et le rapport de viscosité entre les deux fluides. Nous retrouvons alors aux grands nombres de Reynolds une invariance de l'écoulement par rapport au nombre de Reynolds (caractérisant l'effet de la viscosité) et au rapport de viscosité. Cependant, pour les nombres de Reynolds intermédiaires,

nous observons un effet déstabilisant de la viscosité. Dans le cas d'un écoulement stratifié en viscosité, cet effet déstabilisant est amplifié. Ainsi, le taux de croissance initial des instabilités se développant à la surface d'une vase très visqueuse (1000 fois plus visqueuse que l'eau) sera plus important qu'obtenu en ne prenant pas en compte la viscosité de la vase. Cependant, l'influence de la viscosité et du rapport de viscosité reste faible devant l'influence du nombre de Richardson, pilote du mécanisme de base.

Dans un second temps, nous avons étudié l'évolution non-linéaire de ces instabilités et la transition de cet écoulement initial parallèle vers une couche de mélange turbulente. Nous avons pour cela utilisé le code de simulations numériques directes et validé son comportement sur la phase de croissance linéaire. Dans le cas d'un écoulement bi-dimensionnel, nous observons une phase de croissance de l'épaisseur de l'interface jusqu'à la saturation des rouleaux initiaux de Kelvin-Helmoltz. Ensuite une déstabilisation de type "near-core" du rouleau initial est observée, suivie par la création de structures de petites tailles sur la tresse de vorticité. Enfin, nous observons des appariements, responsables d'une nouvelle phase de croissance de l'interface. Alors que la stratification joue un rôle important dans le développement initial de l'instabilité, et influe fortement sur l'épaisseur finale de la couche de mélange, nous avons montré que le rapport de viscosité pouvait aussi avoir son influence sur l'épaisseur finale, en agissant sur le mécanisme d'appariement. Des simulations 3D ont permis d'identifier le développement d'un mode 3D suite à la saturation des rouleaux initiaux et à la formation de structures de petite taille. Ayant peu d'influence sur le mécanisme d'appariement, on observe finalement une interface moins épaisse que dans le cas 2D. Nous avons ensuite traité les cas des faibles nombres de Reynolds, où l'écoulement de base diffuse durant la phase de développement de l'instabilité primaire. Dans le cas de forts gradients de viscosité, on observe la migration de l'instabilité vers la partie supérieure de l'interface où le fluide est moins visqueux. On observe alors le développement d'instabilités de Holmboe "one side", forçant ensuite un mode d'oscillation visqueuse de l'interface. Ces mécanismes, associés à une forte diffusion des profils initiaux entraînent un épaississement important de l'interface.

Enfin, nous nous sommes intéressés dans une troisième partie, à l'effet de la contrainte seuil, caractérisant les fluides viscoplastique, sur le développement des instabilités de la lutocline. Dans le cas d'une interface initiale continue entre le deux fluides, l'augmentation de la contrainte seuil entraine la migration des instabilités vers la partie supérieure de l'interface. On observe alors la formation d'une couche de mélange dont la concentration en vase diminue alors que la contrainte seuil augmente, correspondant à des profils observé en milieu naturel. Le comportement viscoplastique étant plus communément observé dans le cas de vases partiellement consolidées, nous avons aussi étudié le cas d'un bi-couche dont l'épaisseur initiale de l'interface est nulle. Dans ce cas, le cisaillement par le fluide supérieur entraine la formations d'instabilités de cisaillement. Ces instabilités vont alors s'amplifier et finir par appliquer une contrainte suffisante à la déstabilisation du fluide viscoplastique, aboutissant à une intrusion de vase dans le fluide supérieur. Si la contrainte seuil est suffisamment faible, on observe ensuite le développement d'instabilités de cisaillement classiques au niveau de l'interface. Cependant ces configurations viscoplastiques nécessitant un temps de calcul plus important, les mécanismes d'appariement, obtenus pour un domaine plus étendu, ou le développement de modes 3D, n'ont

pas été étudiés en profondeur.

Ce travail ouvre de nombreuses perspectives. Tout d'abord, une loi plus générale reliant l'épaisseur finale de la couche de mélange aux propriétés initiales de la vase permettrait une implémentation de ces mécanismes dans les modèles réalistes d'estuaires. Ensuite, il serait aussi intéressant de traiter la stabilité d'une couche de crème de vase turbulente dans un écoulement turbulent. Cette configuration, étudiée expérimentalement par Gratiot et al. (2005) pour les flux de sédimentation, demande cependant des ressources numériques très importantes. Enfin, il serait très intéressant de développer une expérience sur le développement de ces instabilités à la surface de la lutocline. En effet, les expériences de remise en suspension cherchant à obtenir des flux moyens, se concentrent principalement sur les mécanismes de remise en suspension turbulente et non sur la phase initiale de déstabilisation de l'interface. Faute de relevés précis et très détaillés temporellement et spatialement, une expérience serait un apport significatif pour une meilleure compréhension de ces mécanismes.

Annexes

A Mappings développés pour le code *LiSa*

Les détails techniques concernant les mappings développés pour le code de stabilité linéaire ont été placés dans cette première partie, en complément des paragraphes §(5.1) et §(5.2).

A.1 Mapping algébrique pour les cas à domaine infini

Ce mapping, initialement implémenté dans *LiSa*, est adapté aux domaines infinis. Ce mapping transforme les points de collocation $s \in [-1, 1]$ vers la grille infinie $z \in [-\infty, +\infty]$. Le mapping est alors défini en fonction de la position du pénultième point du mapping (fig. A.1). Dans un premier temps, s est transformée en une variable intermédiaire $r \in [-\infty, +\infty]$ par le mapping :

$$r = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} \quad (9.1)$$

On fixe ensuite la position du pénultième point en H par la transformation :

$$z = \frac{\sqrt{1-s_2^2}}{s_2} r \quad (9.2)$$

où s_2 correspond au second point de collocation de Gauss-Lobatto.

Ce mapping est alors défini par :

$$z = f(s) = \alpha \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} \quad \text{avec } \alpha = \frac{\sqrt{1-s_2^2}}{s_2} \quad (9.3)$$

$$s = f^{-1}(z) = \frac{z}{\sqrt{z^2 + \alpha^2}} \quad (9.4)$$

$$\xi_1 = d(f^{-1})/dz = \frac{\alpha^2}{(z^2 + \alpha^2)^{3/2}} \quad (9.5)$$

$$\xi_2 = d^2(f^{-1})/dz^2 = -3 \frac{z \alpha^2}{(z^2 + \alpha^2)^{5/2}} \quad (9.6)$$

Dans le cadre d'études d'interface, il est intéressant d'augmenter la précision des calculs en raffinant au niveau de cette l'interface. Nous avons donc construit une nouvelle

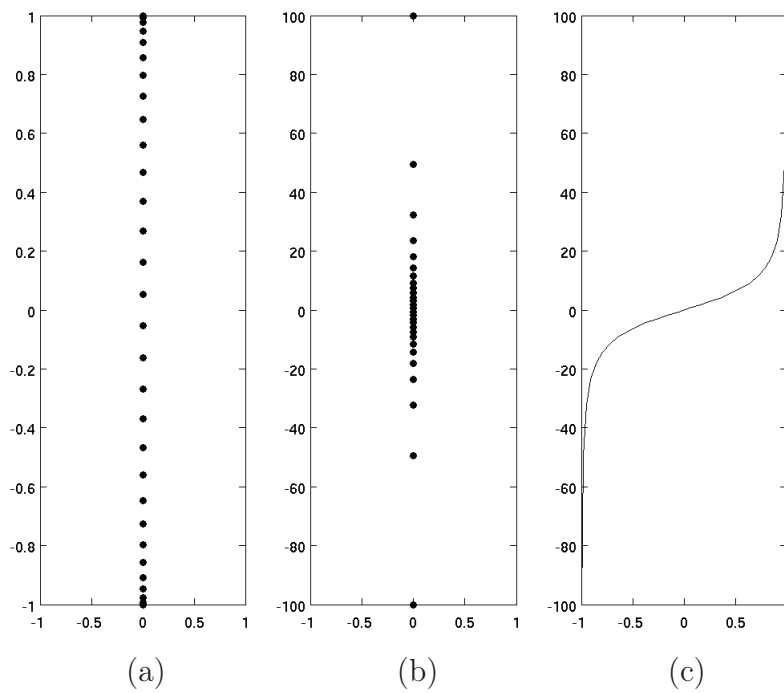


FIGURE A.1 – Mapping algébrique vers une grille infinie ($H=100$) : collocation initiale des points de Gauss-Lobatto s_n (a), collocation finale des points z_n dans l'espace physique (b) et fonction de mapping $z = f(s)$ (c).

famille de mapping, basés sur les fonctions $\operatorname{arctanh}$ et \sinh permettant d'utiliser les propriétés de ces fonctions afin de raffiner l'interface.

A.2 Mappings basés sur les fonctions $\operatorname{arctanh}$ et $\operatorname{arcsinh}$

Les deux mappings suivants ont été construits de manière à augmenter la résolution au centre du domaine spatial. Ils transforment l'espace spectral $s \in [-1, 1]$ en espace physique borné $z \in [0, H]$. Une première fonction de mapping est basée sur la fonction $\operatorname{arctanh}$:

$$z = d (\operatorname{arctanh}[a(s + b)] - c) \quad (9.7)$$

avec $c = \operatorname{arctanh}[a(-1 + b)]$ et $d = H/(\operatorname{arctanh}[a(1 + b)] - \operatorname{arctanh}[a(-1 + b)])$. Cette fonction mapping (fig. A.2) comporte 4 paramètres mais trois degrés de liberté ; c et b pouvant être rassemblés en une seule constante $c' = d \operatorname{arctanh}(b) - c$. Un degré de liberté fixe la pente de la fonction à l'interface, les deux autres fixent les positions des bornes et de l'interface. En revenant à l'expression à 4 paramètres utilisée, les paramètres c et d sont utilisés pour fixer les bornes du domaine physique $z \in [0, H]$. $a \in]0, 1[$ et b sont respectivement utilisés pour fixer la concentration maximum en fixant la pente au point d'inflexion et en positionnant le point d'inflexion en décalant l'axe s . Comme cette fonction mapping doit être définie sur tout le domaine et croissante ($\operatorname{arctanh}$ étant périodique), la condition $a(s + b) \in]-1, 1[$ doit être respectée, soit $|\pm \frac{1}{a} - b| \geq 1$. Le mapping de $s \in [-1, 1]$ dans $z \in [0, H]$ est alors défini par :

$$z = f(s) = d (\operatorname{arctanh}[a(s + b)] - c) \quad (9.8)$$

$$s = f^{-1}(z) = \frac{1}{a} \tanh\left(\frac{z}{d} + c\right) - b \quad (9.9)$$

$$\xi_1 = d(f^{-1})/dz = \frac{1 - \tanh^2\left(\frac{z}{d} + c\right)}{a d} \quad (9.10)$$

$$\xi_2 = d^2(f^{-1})/dz^2 = \frac{-2 \tanh\left(\frac{z}{d} + c\right) (1 - \tanh^2\left(\frac{z}{d} + c\right))}{a d^2} \quad (9.11)$$

La transformation basée sur la fonction \sinh est très similaire à celle basée sur la fonction \tanh . Elle est basée sur la fonction suivante, transformant l'espace spectral $s \in [-1, 1]$ en l'espace physique $z \in [0, H]$:

$$z = d (\sinh[a(s + b)] - c) \quad (9.12)$$

avec $c = \sinh[a(-1 + b)]$ et $d = H/(\sinh[a(1 + b)] - \sinh[a(-1 + b)])$.

Ce mapping comporte lui aussi 4 paramètres (pour trois degrés de liberté) utilisés de la même manière que pour le mapping précédent : fixer les conditions aux limites, la position et la résolution au point d'inflexion. Ce mapping, représenté figure (A.3), est alors défini

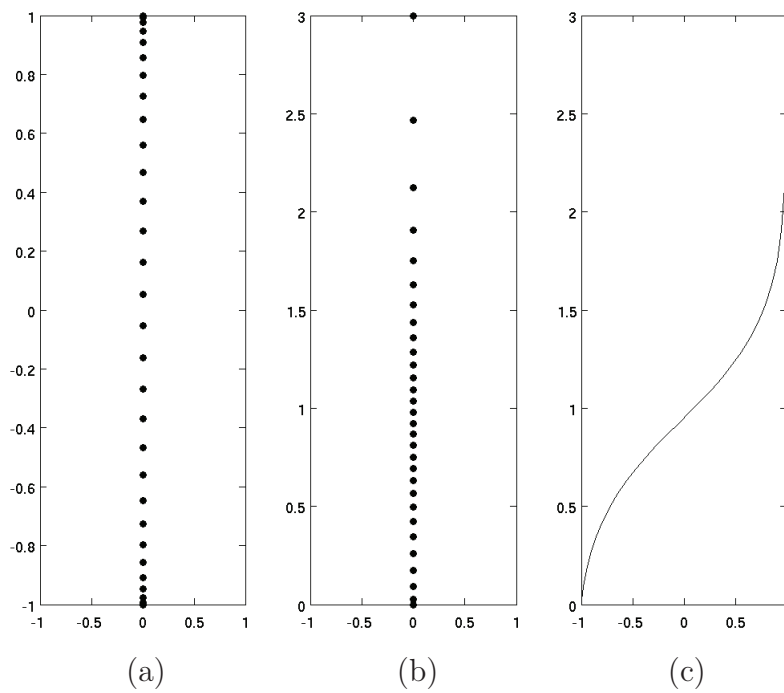


FIGURE A.2 – Mapping d’une grille non-monotone non-uniforme basé sur $\operatorname{arctanh}$ pour $a = 0.97$, $b = 0.003$: collocation initiale des points de Gauss-Lobatto s_n (a), collocation finale des points z_n dans l’espace physique (b) et fonction de mapping $z = f(s)$ (c).

par :

$$z = f(s) = d(\sinh[a(s+b)] - c) \quad (9.13)$$

$$s = f^{-1}(z) = \frac{1}{a} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{z}{d} + c\right) - b \quad (9.14)$$

$$= \frac{1}{a} \ln\left(\left(\frac{z}{d} + c\right) + \sqrt{\left(\frac{z}{d} + c\right)^2 + 1}\right) - b$$

$$\xi_1 = d(f^{-1})/dz = \frac{1}{a d \sqrt{\left(\frac{z}{d} + c\right)^2 + 1}} \quad (9.15)$$

$$\xi_2 = d^2(f^{-1})/dz^2 = \frac{-\left(\frac{z}{d} + c\right)}{a d^2 \left(\left(\frac{z}{d} + c\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (9.16)$$

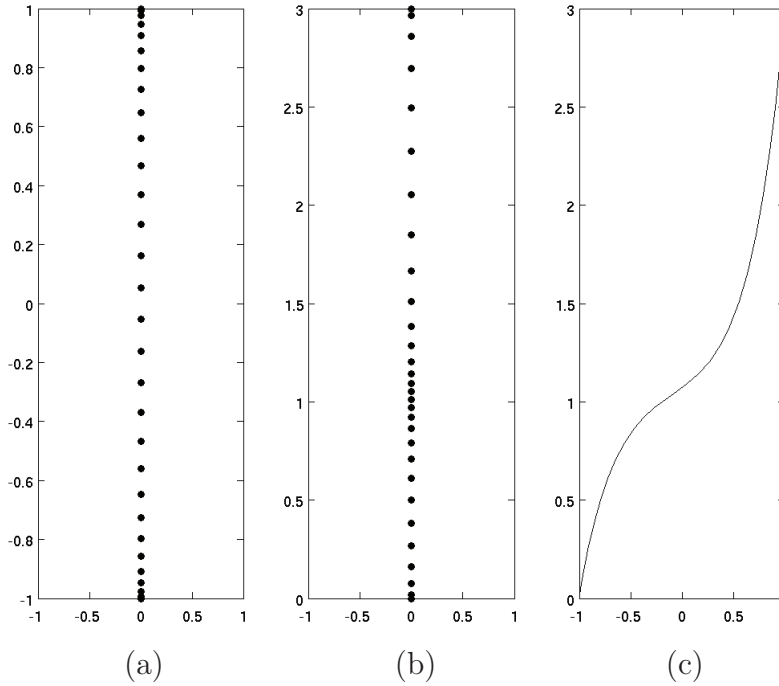


FIGURE A.3 – Mapping d’une grille non-monotone non-uniforme basé sur \sinh pour $a = 3.2$, $b = 0.1$: collocation initiale des points de Gauss-Lobatto s_n (a), collocation finale des points z_n dans l’espace physique (b) et fonction de mapping $z = f(s)$ (c).

Cependant les positions de l’interface et des bornes étant fixées avec deux degrés de liberté, elles entraînent des conditions, telles que $|\pm \frac{1}{a} - b| \geq 1$, très restrictives et des difficultés lors de l’utilisation de la matrice de dérivation. En effet, pour des interfaces assez raffinées, la dérivée de la fonction inverse s’annule aux bornes, posant des problèmes de conditions aux limites. Nous avons donc choisi de créer une nouvelle famille de mappings à quatre degrés de liberté en composant les fonctions $\operatorname{arctanh}$ et \sinh par la fonction

exponentielle. La composition par la fonction exponentielle permettra ainsi de déplacer la position de l'interface indépendamment du positionnement des bornes, après avoir fixé les autres paramètres.

Les parties suivantes reprennent la description (chap. 5) des principaux mappings utilisés dans cette étude en la complétant, notamment de remarques techniques.

A.3 Mappings basés sur les fonctions arctanh et sinh, composées par la fonction exponentielle

Nous avons choisi la fonction exp car cette dernière est une fonction classique, monotone croissante et facilement inversable. Elle est aussi convexe permettant de "baisser" la zone de raffinement, d'altitude plus faible dans notre configuration que le milieu du domaine, classiquement obtenu avec une fonction symétrique type arctanh ou sinh.

Nous allons présenter dans un premier temps le mapping basé sur la fonction arctanh. Comme précédemment, on transforme l'espace spectral $s \in [-1, 1]$ en un espace physique $z \in [0, H]$ en raffinant la grille en h (point d'inflexion de profils dans l'espace physique). On impose donc les quatre conditions sur le mapping f :

- $f(-1) = 0$ et $f(1) = H$ pour fixer les conditions aux limites
- $f(0) = h$ et $f'(0) = p$ pour fixer le point d'inflexion en h et choisir la pente en ce point p .

Quatre paramètres sont donc nécessaires pour remplir ces conditions (mais nous en utilisons 5 pour plus de commodité). Nous avons donc choisi de composer les deux fonctions arctanh et exp : $f = f_2 \circ f_1$ avec $f_1(x) = a(\arctanh(bs)) + c$ et $f_2(x) = d(1 - \exp(ex))$, les paramètres pouvant être réduits à $a' = ae$ et $c' = ce$.

f_1 remplit les conditions : $f(s = -1) = H$, $f(s = 1) = 0$ et $f'(s = 0) = p$. Nous obtenons donc :

$$f_1(x) = a(\arctanh(bs)) + c$$

où b contrôle la pente en $x = 0$; $a = \frac{H}{2\arctanh(b)}$ et $c = \frac{H}{2}$ positionne les limites de la grille. f_2 est alors utilisé pour positionner le point d'inflexion en $z = h$. En conservant les conditions aux limites : $f_2(0) = 0$, $f_2(H) = H$ (ne nécessitant qu'un seul paramètre car f_1 est symétrique) et en imposant $f_2(H/2) = h$, nous obtenons :

$$f_2(x) = d(1 - \exp(ex))$$

avec les paramètres : $e = \frac{2}{H} \ln\left(\frac{H}{h} - 1\right)$ et $d = \frac{H}{1 - \exp(eH)}$.

Finalement, ce mapping de $s \in [-1, 1]$ dans $z \in [0, H]$ est résumé par le système

suivant :

$$z = f(s) = f_2 \circ f_1(s) = d(1 - \exp(a' \operatorname{arctanh}(bs) + c')) \quad (9.17)$$

$$s = f^{-1}(z) = F(z) = F_1 \circ F_2(z) = \frac{1}{b} \tanh\left(\frac{1}{a'} \ln\left(1 - \frac{z}{d}\right) - c'\right) \quad (9.18)$$

$$\xi_1 = F' = (F_1' \circ F_2) \cdot F_2' = \frac{-1}{a'b(d-z)} \left(1 - \tanh^2\left(\frac{1}{a'} \ln\left(1 - \frac{z}{d}\right) - c'\right)\right) \quad (9.19)$$

$$\begin{aligned} \xi_2 = F'' &= (F_1'' \circ F_2) \cdot (F_2')^2 + (F_1' \circ F_2) \cdot F_2'' \\ &= \frac{-(1 - \tanh^2(\frac{1}{a'} \ln(1 - \frac{z}{d}) - c'))}{a'b(d-z)^2} \\ &\quad \times \left(\frac{2}{a'} \tanh\left(\frac{1}{a'} \ln\left(1 - \frac{z}{d}\right) - c'\right) + 1\right), \end{aligned} \quad (9.20)$$

en notant $f^{-1} = F$.

Ce mapping est représenté pour différents paramètres figure (A.4).

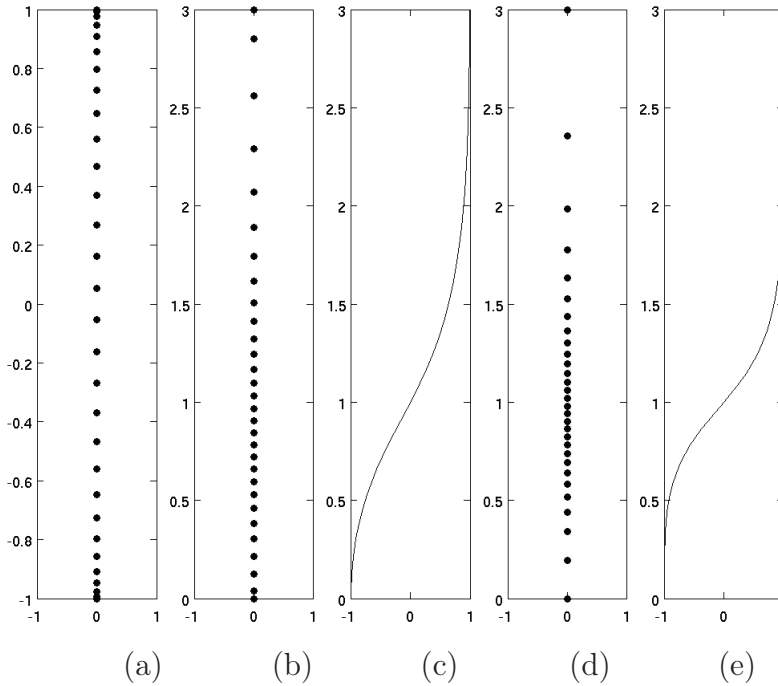


FIGURE A.4 – Mapping basé sur la composition des fonctions $\operatorname{arctanh}$ et \exp pour $h = 1$: collocation initiale des points de Gauss-Lobatto s_n (a); collocation finale des points z_n dans l'espace physique (b) et (d) et fonction de mapping finale $z = F(r)$ (c) et (e) respectivement pour $b = 0.98$ et $b = 0.999$.

Le même mapping a été développé à partir de la fonction \sinh . A la différence de la fonction $\operatorname{arctanh}$, la fonction \sinh permet de raffiner fortement une zone en conservant

un nombre de points suffisant dans le reste du domaine. Cette fonction sera donc choisie pour les configurations à interface très fine.

De même que précédemment, on transforme l'espace spectral $s \in [-1, 1]$ en un espace physique $z \in [0, H]$ en plaçant un point d'inflexion en h (dans l'espace physique) et en choisissant la pente en ce point ce qui entraîne quatre conditions à imposer sur le mapping f ($f(-1) = 0$ et $f(1) = H$ pour fixer les conditions aux limites; $f(0) = h$ et $f'(0) = p$ pour fixer le point d'inflexion en h et choisir la pente en ce point).

Comme précédemment, nous décomposons le mapping en deux fonctions basées sur \sinh et \exp : $f = f_2 \circ f_1$ avec $f_1(x) = a(\sinh(bs)) + c$ et $f_2(x) = d(1 - \exp(ex))$, les paramètres pouvant être réduits à 4 en prenant $a' = ae$ et $c' = ce$.

f_1 remplit les conditions : $f(s = -1) = H$, $f(s = 1) = 0$ et $f'(s = 0) = p$. Nous obtenons donc :

$$f_1(x) = a \sinh(bs) + c$$

où b contrôle la pente en $x = 0$; $a = \frac{c}{\sinh(b)}$ et $c = \frac{H}{2}$ positionne les limites de la grille.

f_2 est alors utilisé pour positionner le point d'inflexion en $z = h$. En imposant les conditions : $f_2(0) = 0$, $f_2(H) = H$ et $f_2(H/2) = h$ (car f_1 est symétrique), nous obtenons :

$$f_2(x) = d(1 - \exp(ex))$$

avec les paramètres : $e = \frac{2}{H} \ln\left(\frac{H}{h} - 1\right)$ et $d = \frac{H}{1 - \exp(eH)}$.

Finalement, ce mapping est défini par :

$$z = f(s) = f_2 \circ f_1(s) = d(1 - \exp(a' \sinh(bs) + c')) \quad (9.21)$$

$$s = f^{-1}(z) = F(z) = F_1 \circ F_2(z) = \frac{1}{b} \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{a'} \ln\left(1 - \frac{z}{d}\right) - \frac{c'}{a'}\right) \quad (9.22)$$

$$\xi_1 = F' = (F_1' \circ F_2) \cdot F_2' = \frac{-1}{a'b(d-z)} \left(1 + \left(\frac{1}{a'} \ln\left(1 - \frac{z}{d}\right) - \frac{c'}{a'}\right)^2\right)^{-1/2} \quad (9.23)$$

$$\xi_2 = F'' = (F_1'' \circ F_2) \cdot (F_2')^2 + (F_1' \circ F_2) \cdot F_2'' \quad (9.24)$$

$$= \frac{-1}{(a')^2 b (d-z)^2} \left(\frac{1}{a'} \ln\left(1 - \frac{z}{d}\right) - \frac{c'}{a'}\right) \left(1 + \left(\frac{1}{a'} \ln\left(1 - \frac{z}{d}\right) - \frac{c'}{a'}\right)^2\right)^{-3/2} \quad (9.25)$$

$$+ \frac{-1}{a'b(d-z)^2} \left(1 + \left(\frac{1}{a'} \ln\left(1 - \frac{z}{d}\right) - \frac{c'}{a'}\right)^2\right)^{-1/2}, \quad (9.26)$$

en notant $f^{-1} = F$.

A.4 Mapping complexe basé sur la composition des fonctions $\operatorname{arctanh}$ et exponentielle

Ce mapping est similaire au mapping précédent composé de la combinaison des fonctions $\operatorname{arctanh}$ et \exp , mais présente en plus une composante complexe. Ce mapping transforme alors l'espace spectral $s \in [-1, 1]$ en l'espace "physique" $z \in [0, H(1 + \alpha i)]$:

$$f(s) = d(1 - \exp(a(\operatorname{arctanh}(bs) + c)))(1 - \alpha i)$$

où $\alpha \geq 0$ est un paramètre déterminé après comparaison à la littérature par $\alpha = 0,010369 - 0,03562 Ri$ où Ri est le nombre de Richardson et i est le nombre imaginaire. La justification de ce mapping et de la valeur du paramètre α sera développé dans la partie §(5.6). Les propriétés (fonction inverse, dérivés de la fonction inverse, etc) sont les même que celles du mapping arctanh-exp, paragraphe §(A.3). Ce mapping est présenté figure (A.5).

Finalement, ces différents mappings ont permit de traiter de manière adaptée les confi-

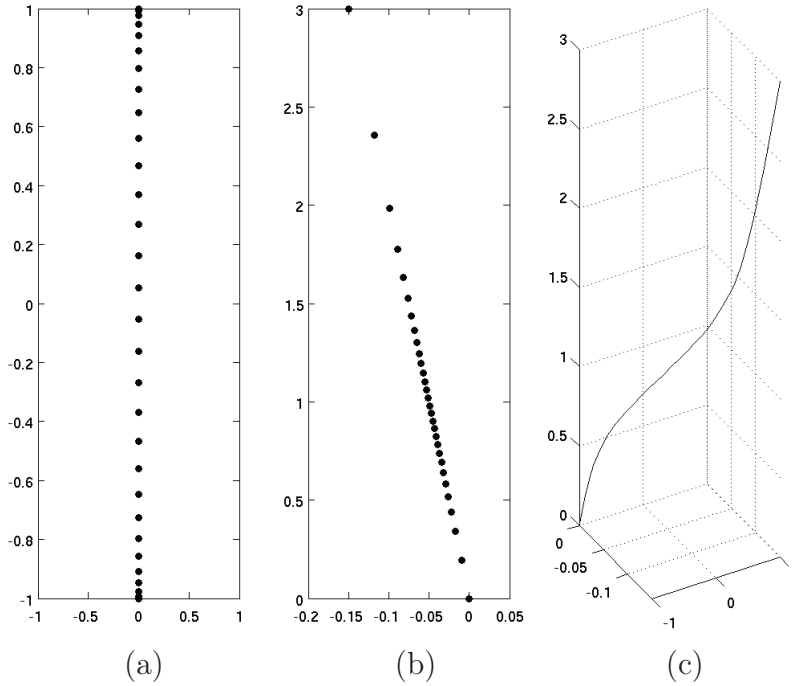


FIGURE A.5 – Mapping basé sur la composition des fonctions arctanh et exp pour $h = 1$ et $b = 0.999$ dans l'espace complexe : collocation initiale des points de Gauss-Lobatto s_n (a) ; collocation finale des points z_n dans l'espace physique (b) et fonction de mapping finale $z = F(r)$ (c).

gurations testées. Le mapping algébrique s'adapte facilement aux couches de mélange en domaine infini. Pour une majorité des cas traités, les mappings arctanh-exp permettent de raffiner l'interface, quelque soit sa position, notamment lorsque l'interface est environ 10 fois plus fine que le domaine d'étude. Pour les interfaces très fines, le mapping sinh-exp permet de concentrer encore plus de points sur une petite zone tout en conservant un nombre de points suffisant sur le reste du domaine. Enfin, pour faire face à des problèmes de convergence de modes, une version complexe du mapping arctanh-exp a été créée (voir §5.6), afin de modifier le chemin d'intégration et ainsi de séparer les modes instables non convergés des modes instables physiques.

**B Conférence internationale "International Symposium
on Stratified Fluids, 2011"**

Présentation des actes de conférence associés à la présentation.

Stability of a shear and stratified flow with complex rheology

A. Harang^{1,2}, O. Thual^{1,2}, P. Brancher^{1,2}, T. Bonometti^{1,2}

¹ Université de Toulouse; INPT, UPS; IMFT, Allée C. Soula, F-31400 Toulouse, France

² CNRS; IMFT; F-31400 Toulouse, France

olivier.thual@imft.fr

Abstract

The temporal stability of a two-dimensional shear flow, modelling miscible fluid layers of different density and viscosity, is computed through both linear eigenmode analysis (IMFT LiSa code) and direct numerical simulations (IMFT JADIM code). The rheology of this newtonian fluid mixing can be seen as a simplified model of the behaviour of mud flow at the bottom of estuaries for suspension studies. Sensitivity analyses are performed with respect of control parameters (Richardson and Reynolds numbers, viscosity ratio) values relevant for such applications.

1 Introduction

Numerical models of estuaries, such as TELEMAC.3D, SIAM-3D or MARS 3D for example, are used to deal with pollution or coastal settlement. In these models, the erosion at the estuary bottom is often represented through parameterizations such as the one proposed by Partheniades (1965) or Parchure and Mehta (1985). More complex parameterization have been proposed, such as the one used by Le Normant (2000) for the code TELEMAC.3D. Kranenburg and Winterwerp (1997) present a model validated by experiments, computing mud flow erosion by turbulence produced by wind or convected from other locations in the flow, based on the turbulent kinetic energy. The erosion flux computed in these models depend of hydrodynamic fields at the mud water interface such as the velocity shear or the density stratification. In order to improve the understanding of the underlying processes of such erosion, we present here a bi-dimensional study of the hydrodynamical processes governing this interface.

Mud flows present a very complex behaviour (see McAnally et al., 2007a). It is usually modelled as a newtonian, a visco-plastic or a visco-elastic fluid, depending on its concentration and its often thixotropic origin (McAnally et al., 2007b). Laboratory experiments, such as those of Sanchez and Levacher (2008), point out the variability of results and the need to have a better understanding of the phenomenon. For the present study, we choose a Newtonian fluid model with strong density and viscosity variations to get a first understanding of the response of the system to complex rheology.

Stability studies of stratified shear flows are abundant in the literature and we point out here those which are relevant for the present configuration. Ern et al. (2003) concentrate on shear flows with strongly stratified viscosity. Stability and mixing of stratified shear flow have been studied by Corcos and Sherman (1984). Corcos and Lin (1984) and Fontane and Joly (2008) study secondary instabilities as well as Caulfield and Peltier (2000) who emphasise on their 3D nature. According to the model of mud flow vertical distribution proposed by Mehta et al. (1989), the thickness of the shear profile can be much larger than that of the density profile. In such cases, Holmboe instabilities can develop at the interface (Hogg and Ivey, 2003). Here, we study the case for which the shear thickness of both density and viscosity profiles are the same, in order to focus on Kelvin-Helmoltz instabilities.

2 Methodology

Mean profiles, relevant for estuarine mud-water interfaces, are defined and used as quasi-stationary states for linear stability analyses or perturbed initial conditions for direct numerical simulations of the incompressible Navier-Stokes equations.

2.1 Model equations

In the presence of gravity \underline{g} , our study is based on the following equations:

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \underline{g} + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot [\mu(\nabla\underline{u} + {}^t\nabla\underline{u})], \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi\underline{u}) = 0, \quad (2)$$

$$\rho = \phi\rho_1 + (1 - \phi)\rho_2, \quad \mu = \phi\mu_1 + (1 - \phi)\mu_2, \quad (3)$$

which links incompressible Navier-Stokes equations to the transport equation of volume fraction ϕ of the mud flow in the fluid. Local properties of the fluid, in particular the density ρ and the dynamic viscosity μ , are calculated from this volume fraction ϕ . The two following fluids are considered: water, of density $\rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, and dynamic viscosity $\mu_2 = 10^{-3} \text{ Pa.s}$, and mud flow, modeled by a newtonian fluid of density ρ_1 and dynamic viscosity μ_1 . In this study, we have chosen to set $\rho_1 = 1360 \text{ kg.m}^{-3}$ and to let μ_1 vary from 10^{-3} Pa.s to 1 Pa.s . In these simulations, the density and the viscosity are linear functions of the volume fraction and then vary in the same way.

To model vertical profiles of the concerned quantities (density, viscosity and velocity) near water-mud flow interface, we consider the group of functions $F(\lambda, Z)$ defined by:

$$F(\lambda, Z) = \begin{cases} \lambda [1 + \operatorname{erf}(\frac{Z}{\lambda})] & \text{if } Z \leq 0, \\ 1 - (1 - \lambda) [1 - \operatorname{erf}(\frac{Z}{1-\lambda})] & \text{if } Z \geq 0, \end{cases} \quad (4)$$

where Z is the non-dimensional vertical coordinate to be specified later, the origin of which is located at the interface. The parameter λ controls the asymmetry of the fields located on both side of the inflexion point (Figure 1), which ensure continuity of the profile and its derivatives around this point.

We consider the vertical profiles of longitudinal velocity $\bar{u}(z)$, density $\bar{\rho}(z)$ and dynamic viscosity $\bar{\mu}(z)$ given by the relations:

$$\bar{u}(z) = U_2 F\left(\lambda, \frac{z-h}{\delta_u}\right), \quad (5)$$

$$\bar{\rho}(z) = (\rho_2 - \rho_1) F\left(\lambda, \frac{z-h}{\delta_\rho}\right) + \rho_1, \quad (6)$$

$$\bar{\mu}(z) = (\mu_2 - \mu_1) F\left(\lambda, \frac{z-h}{\delta_\mu}\right) + \mu_1, \quad (7)$$

where δ_u , δ_ρ and δ_μ are the thicknesses associated to the profiles $u(z)$, $\rho(z)$ and $\mu(z)$, respectively. We consider here the case where these three thicknesses are equal to $\delta = 0.3 \text{ m}$.

The corresponding profiles are presented in Figure 1. These profiles are not steady states of the model, but they can be considered as quasi-steady states close to the ones which are observed in practical situations with strong asymmetries.

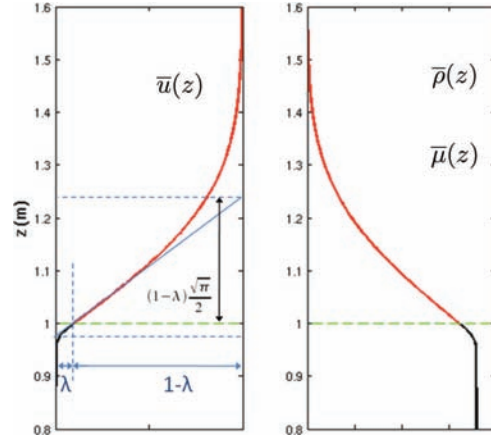


Figure 1: Initial profiles of $\bar{u}(z)$, $\bar{\rho}(z)$ and $\bar{\mu}(z)$ on a portion $z \in [0, 8 \text{ m}, 1, 6 \text{ m}]$ of the domain $z \in [0, 3h]$, with $h = 1 \text{ m}$, $\delta = 0.3 \text{ m}$ and $\lambda = 0.1$.

The boundaries of the simulation field are located at $z = 0$ and $z = H$ with $H = 3 \text{ m}$, the height $z = h$ being the interface location with $h = 1 \text{ m}$. A no-slip (resp. free-slip) condition is imposed at the bottom (resp. top) boundary. In addition, we choose $\lambda = 0.1$, since diffusion is assumed to be larger in water than in mud flow.

The relevant dimensionless numbers for this study are defined by:

$$At = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}, \quad Re = \frac{\delta U_2 \rho_2}{\mu_2}, \quad Ri = \frac{g (\rho_2 - \rho_1) \delta \sqrt{\pi}}{\rho_h 2U_2^2} \quad \text{and} \quad W = \log_{10} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right), \quad (8)$$

where $\rho_h = \bar{\rho}(h) = (\rho_2 - \rho_1)\lambda + \rho_1$ is the fluid density at the interface. In our configurations, the Atwood number At is of the order of 0.15. The Reynolds number Re is based on the water viscosity. The Richardson number Ri is computed at the location of maximum density gradient i.e. at the interface $z = h$. The viscosity ratio between mud flow and water is expressed by its decimal logarithm W . The Reynolds number associated to mud flow is a function of both the viscosity ratio W and the Reynolds number Re associated to the water.

2.2 Description of the Navier-Stokes and linear stability codes

The JADIM code, developed at IMFT (Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse), solves Navier-Stokes equations for variable-density incompressible flows. Equations for the primitive variables (velocity, pressure) and are solved by a finite volume method. The code is 2nd order accurate in space and time, thanks to a 3rd order Runge-Kutta temporal scheme and a semi-implicit Crank-Nicolson scheme for diffusive terms. The equations are discretized using a 2nd order centered scheme with staggered variables (Calmet and Magnaudet, 1997; Legendre and Magnaudet, 1998). The version used in the present study solves the system (3) and has been validated for a viscosity gradient by Ern et al. (2003) and for a density gradient by Hallez and Magnaudet (2009).

The linear stability code LiSa, developed by Antkowiak and Brancher (2007), is used to obtain a global vision of the problem. This code solves the system (3) linearized around the base flow given of the system (5-7). Given a parallel base flow, a perturbation (defined by its wave vector) and specific numerical parameters, LiSa provides the eigenvalues and their associated modes, using a spectral method based on Chebyshev polynomials. So, for each wave length, LiSa predicts the more unstable mode and its growth rate.

3 Results

For the simulations presented in the following, the mud flow density is fixed, and we vary the characteristic velocity U_2 , which modifies both Richardson Ri and Reynolds Re numbers. We also vary the viscosity of the mud flow to modify the parameter W . Sensitivity to Re for fixed Ri and W can be obtained by artificially varying the viscosity of water.

3.1 Linear stability study

A linear stability study is carried out with the LiSa code using parameters which are relevant for flows observed in real estuaries. For homogeneous flows, Squire theorem ensures that the most unstable modes first appear in the spanwise direction. Since such a theoretical result does not exist for the present stratified flow, we have performed a summary exploration of 3D configurations which hints that this might be still the case here. For this reason, we restrict the present study to 2D configurations. The code provide different eigenvalues of the system (see Figure 2) associated to their eigenmodes (Figure 3).

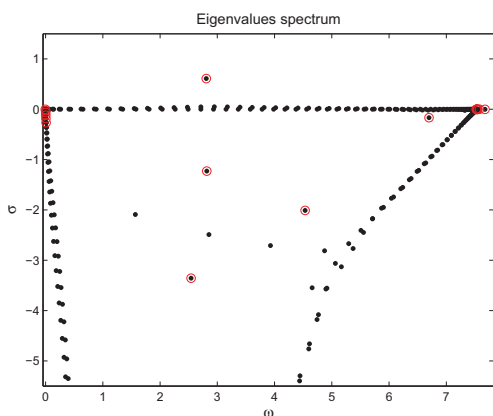


Figure 2: Eigenvalues $\sigma - i\omega$ in the plane $(\omega, \sigma) \in [0, 8] \times [-5.5, 1.5]$ for parameters ($Re = 6.5 \cdot 10^5$, $Ri = 0.15$, $W = 2$, $k^* = 0.46$). The red circles \circ point out converged eigenvalues.

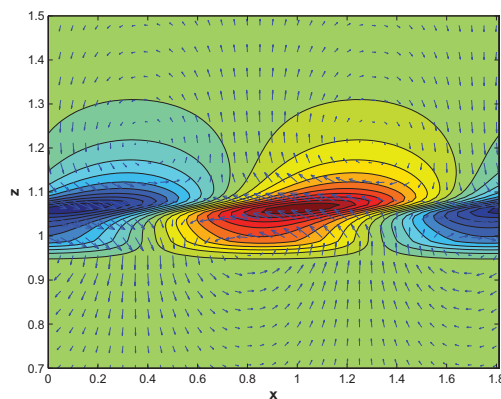


Figure 3: Most unstable mode in the $(x, z) \in [0, 1.8] \times [0.7, 1.5]$ plane for parameters ($Re = 6.5 \cdot 10^5$, $Ri = 0.15$, $W = 2$, $k^* = 0.46$). Colored field represents perturbations of density or viscosity and arrows represent perturbation velocity vectors.

The growth rate σ of the most unstable mode is then computed for fifty values of the wavenumber of the perturbation k as presented in Figure 4 for $Ri = 0.15$, $Re = 6.5 \cdot 10^5$ and $W \in \{0, 1, 2, 3\}$, where $k^* = k\delta\sqrt{\pi}/4$ is the normalized wavevector and $\sigma^* = \sigma(\delta\sqrt{\pi}/2)/U_2$ is the normalized growth rate. The dependency with the Richardson number is displayed in Figure 5 for $W = 2$. These computations show that these growth rates become sensitive to the mud viscosity at around $W = 3$, corresponding to a dynamic viscosity of mud flow 1000 times higher than that of water. For this value, the growth rate is larger by $\sim 10\%$ as for the most unstable wave number (0.456 for $W = 0$ and 0.480 for $W = 3$). When k^* comes close to 1, non-converged but physic modes pollute the results because of a lack of resolution. These continuous modes come from the trap of internal waves in critic layers, generated by both the density stratification and the profile of velocity. As expected, when the water Reynolds number Re is artificially increased,

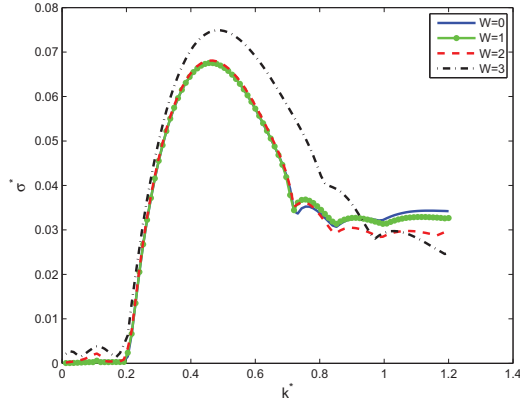


Figure 4: Representation of the normalized growth rate σ^* as a function of the normalized wave number k^* for the Richardson number $Ri = 0.15$ and the Reynolds number $Re = 6.5 \cdot 10^5$.

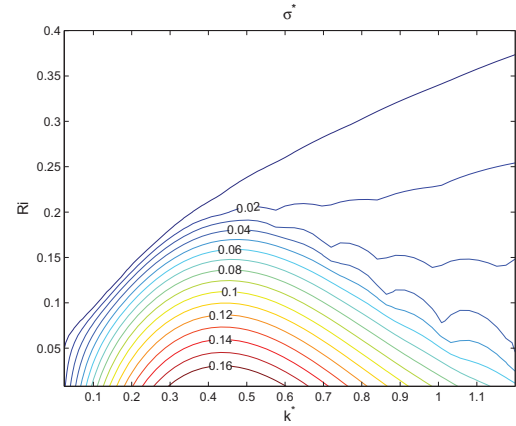


Figure 5: Isolines of normalized growth rate σ^* , as a function of the non-dimensional wave number k^* and the Richardson number for $W = 2$ and $Re = 6.5 \cdot 10^5$.

the dependency with W is no longer visible, as shown on Table 1. In the asymptotic case where the Reynolds number tends to infinity, the viscosity ratio have no influence on the development of the primary instability.

Growth rate σ^*		$W = 0$	$W = 1$	$W = 2$	$W = 3$
JADIM	$Re = 6.5 \cdot 10^5$	0.5430	0.5364	0.5150	×
LiSa	$Re = 6.5 \cdot 10^5$	0.5520	0.5524	0.5569	0.6098
LiSa	$Re = 6.5 \cdot 10^7$	0.5520	0.5520	0.5521	0.5525
LiSa	$Re = 6.5 \cdot 10^9$	0.5520	0.5520	0.5520	0.5520

Table 1: Normalized growth rate σ^* for various Reynolds number Re and viscosity ratio W ($Ri = 0.15$ and $k^* = 0.46$), computed with LiSa. For comparison, we include the results obtained with the Navier-Stokes solver JADIM (1st line).

3.2 Non-linear study

These linear stability results are compared to the initial value problem of direct numerical simulations with the JADIM code, and completed with the subsequent nonlinear regime. 2D simulations, with a resolution of $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$, are initialized with velocity, density and viscosity fields (perturbated mean flow) obtained from LiSa, in a x -periodic domain of length $L = 4 \times (2\pi/k)$.

Figure 6 corroborates the exponential growth of the instability which saturates for $t = 12\text{s}$. The growth rate obtained from the evolution of the kinetic energy (Figure 6) are presented Table 1. The lower values as compared to the ones given by LiSa can be explained by both numerical diffusion stemming from the numerical scheme use for the density transport (of WENO kind) and, by the fact that the initial mean profiles evolved on a diffusive time scale of the order of the instability time scale, when W is greater than 2.

The developpement of the instability is represented on the Figure 7 at different times. The rolls saturate and a secondary instability appears (Figure 7d): rolls grow due to a

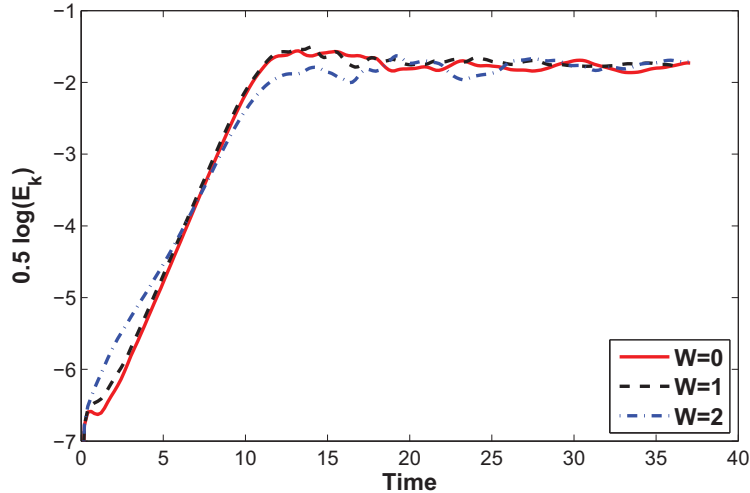


Figure 6: Representation of the logarithm of the kinetic energy ($0.5 \cdot \log E_c$) as a function of time for $Re = 6.5 \cdot 10^5$, $Ri = 0.15$, $W = 1$ and $k^* = 0.46$.

primary Kelvin-Helmholtz instability. Then a second instability occurs: rolls pair with each other. This is clearly seen in frames 7d to 7g for which the number of rolls decrease from 4 down to one. The length of the box and periodic boundary conditions in the flow direction, force the instability on discrete values corresponding to k_n such as $k_n = 2\pi n/L$ with $n \in N$ and L the length of the box. Therefore, pairing instability is stopped when the size of roll is identical to that of the simulation box. Eventually, a relatively well-mixed third density layer forms within the flow as observed in Figure 7h. This is in agreement with observations of Caulfield and Peltier (2000).

4 Conclusion

We have set an idealized model, based on the incompressible Navier-Stokes equations, to represent the hydrodynamic processes which destabilize the interface between mud and water at the bottom of estuaries. In this model, the mean velocity, density and viscosity profiles are represented by asymmetric erf-shaped functions. A linear stability analysis (LiSa code) allowed to compute the Kelvin-Helmholtz growth rate instability for values of k , Ri , Re and W relevant of estuarine configurations. Direct numerical simulations (JADIM code) validated the quasi-static hypothesis made for the mean profiles in the linear analysis, and document the nonlinear regime leading to a three-layer structure of the mixing flow.

5 acknowledgements



The first author is supported by a scholarship intended for PhD students funded by the DGA (Direction Générale de l'Armement). This work has benefited from CICT and GENCI computational means.

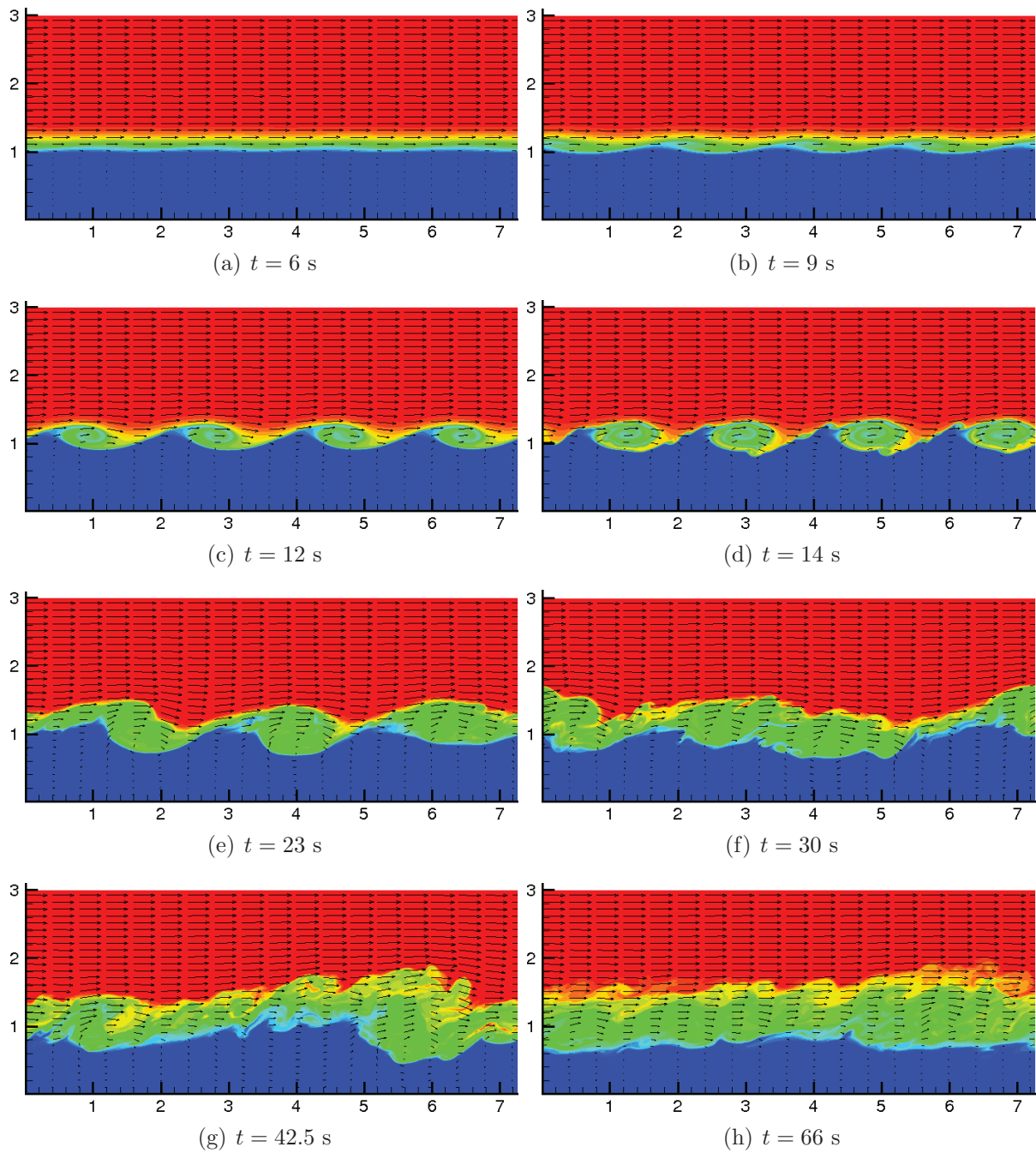


Figure 7: Representation of the growth of the instability at different times, background represents the density or viscosity field and arrows stands for velocity.

References

- Antkowiak, A. and Brancher, P. (2007). On vortex rings around vortices: an optimal mechanism. *Journal of Fluid Mechanics*, 578:295–304.
- Calmet, I. and Magnaudet, J. (1997). Large-eddy simulation of high-schmidt number mass transfer in a turbulent channel flow. *Physics of Fluids*, 9(2):438–455.
- Caulfield, C. P. and Peltier, W. R. (2000). The anatomy of the mixing transition in homogeneous and stratified free shear layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 413(-1):1–47.

- Corcos, G. M. and Lin, S. J. (1984). The mixing layer: deterministic models of a turbulent flow. part 2. the origin of the three-dimensional motion. *Journal of Fluid Mechanics*, 139:67–95.
- Corcos, G. M. and Sherman, F. S. (1984). The mixing layer: deterministic models of a turbulent flow. part 1. introduction and the two-dimensional flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 139:29–65.
- Ern, P., Charru, F., and Luchini, P. (2003). Stability analysis of a shear flow with strongly stratified viscosity. *Journal of Fluid Mechanics*, 496(-1):295–312.
- Fontane, J. and Joly, L. (2008). The stability of the variable-density kelvin?helmholtz billow. *Journal of Fluid Mechanics*, 612:237–260.
- Hallez, Y. and Magnaudet, J. (2009). A numerical investigation of horizontal viscous gravity currents. *Journal of Fluid Mechanics*, 630:71–91.
- Hogg, A. M. and Ivey, G. N. (2003). The kelvin-helmholtz to holmboe instability transition in stratified exchange flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 477(-1):339–362.
- Kranenburg, C. and Winterwerp, J. C. (1997). Erosion of fluid mud layers. i: Entrainment model. *Journal of Hydraulic Engineering*, 123(6):504–511.
- Le Normant, C. (2000). Three-dimensional modelling of cohesive sediment transport in the Loire estuary. *Hydrological Processes*, 14(13):2231–2243.
- Legendre, D. and Magnaudet, J. (1998). The lift force on a spherical bubble in a viscous linear shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 368:81–126.
- McAnally, W. H., Friedrichs, C., Hamilton, D., Hayter, E., Shrestha, P., Rodriguez, H., Sheremet, A., and on Management of Fluid Mud, A. T. A. T. C. (2007a). Management of fluid mud in estuaries, bays, and lakes. i: Present state of understanding on character and behavior. *Journal of Hydraulic Engineering*, 133(1):9–22.
- McAnally, W. H., Teeter, A., Schoellhamer, D., Friedrichs, C., Hamilton, D., Hayter, E., Shrestha, P., Rodriguez, H., Sheremet, A., and on Management of Fluid Mud, R. K. A. T. C. (2007b). Management of fluid mud in estuaries, bays, and lakes. ii: Measurement, modeling, and management. *Journal of Hydraulic Engineering*, 133(1):23–38.
- Mehta, A. J., Hayter, E. J., Parker, W. R., Krone, R. B., and M., T. A. (1989). Cohesive sediment transport. i: Process description. *Journal of Hydraulic Engineering*, 115:1076.
- Parchure, T. M. and Mehta, A. J. (1985). Erosion of soft cohesive sediment deposits. *Journal of Hydraulic Engineering*, 111(10):1308–1326.
- Partheniades, E. (1965). Erosion and deposition of cohesive soils. *J. Hydraulics Division, ASCE*, 91(1):105–137.
- Sanchez, M. and Levacher, D. (2008). Erosion of a mud from the loire estuary by a flow. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, 67:597–605.

C Article soumis au "Journal of Environnemental Fluid Mechanics"

Cet article a été soumis au journal EFM le 26 octobre 2012.

Kelvin-Helmholtz instability in the presence of variable viscosity for mudflow resuspension in estuaries

Alice Harang · Olivier Thual · Pierre Brancher · Thomas Bonometti

Received: date / Accepted: date

Abstract The temporal stability of a parallel shear flow of miscible fluid layers of different density and viscosity is investigated through a linear stability analysis and direct numerical simulations. The geometry and rheology of this Newtonian fluid mixing can be viewed as a simplified model of the behavior of mudflow at the bottom of estuaries for suspension studies. A parametric analysis is performed by varying the values of three control parameters, namely the viscosity ratio, the Richardson and Reynolds numbers, in the case of initially identical thickness of the velocity, density and viscosity profiles. The range of parameters has been chosen so as to mimic a wide variety of real configurations. This study shows that the Kelvin-Helmholtz instability is controlled by the local interfacial Reynolds and Richardson numbers. For high Reynolds numbers, the viscosity stratification has no influence on the onset of instability, while for moderate Reynolds numbers, the onset is enhanced at high viscosity ratio. In all cases, we show that the thickness of the mixing

Alice Harang

Université de Toulouse; INPT, UPS; IMFT, Allée Camille Soula, F-31400 Toulouse, France
CNRS; IMFT ; F-31400 Toulouse, France

Olivier Thual

Université de Toulouse; INPT, UPS; IMFT, Allée Camille Soula, F-31400 Toulouse, France
CNRS; IMFT ; F-31400 Toulouse, France

Tel.: +33-5-34-32-29-45

Fax: +33-5-34-32-28-99

E-mail: thual@imft.fr

Pierre Brancher

Université de Toulouse; INPT, UPS; IMFT, Allée Camille Soula, F-31400 Toulouse, France
CNRS; IMFT ; F-31400 Toulouse, France

Thomas Bonometti

Université de Toulouse; INPT, UPS; IMFT, Allée Camille Soula, F-31400 Toulouse, France
CNRS; IMFT ; F-31400 Toulouse, France

layer (and thus resuspension) is increased by high viscosity stratification, in particular during non-linear development of the instability. This suggests that viscosity stratification must be included in resuspension parametrizations in order to get relevant predictions.

Keywords Estuaries · Mudflow · Instability, Stratified flows · Transition to turbulence · Mixing and dispersion · Geophysical Flows

1 Introduction

The motivation of this article is to complement experiments and observations on the lutocline (the interface between mudflow and water) at the bottom of estuaries, in order to get a better understanding of its dynamics and to improve the parameterizations of the entrainment mass and momentum fluxes. Numerical models of estuaries (Le Normant, 2000; Cugier and Le Hir, 2002; Le Hir et al, 2011) deal with pollution or coastal settlement. These models of sedimentary transport use parameterization of suspended matter fluxes at the bottom boundary condition. Non-cohesive materials (sands) present a more complex behavior than cohesive ones (muds) and are much more documented (see McAnally et al, 2007a). As explained by McAnally et al (2007b), the behavior of mud flows and their dynamical processes are still misunderstood since “the formulation of constitutive relations are dependent on empirical relationships based on small data sets”. Concerning mud erosion, the models use the parameterizations proposed by Partheniades (1965), Parchure and Mehta (1985) or Odd and Cooper (1989), depending on sediments concentration. The erosion fluxes computed in these models depend of the hydrodynamic fields at the mud-water interface such as the velocity shear or the density stratification. To improve the understanding of the underlying processes such as erosion, a study of the hydrodynamical processes governing this interface is necessary.

Shear instability studies of stratified shear flows are abundant in the literature. Helmholtz (1868) and Kelvin (1871) investigated the configuration of two layers with vanishing thickness. Rayleigh (1879) showed that the velocity profile needs to have an inflectional point to be possibly unstable in the unstratified case and generalized the stability analysis to non-zero stratification thickness. From the theoretical works of Orr (1907) and Sommerfeld (1908), the equation of perturbations in a parallel flow, known as the Orr-Sommerfeld equation were derived. Drazin and Reid (1984) proposed an overview of this commonly named “Kelvin-Helmholtz” or KH instability. It was shown that a density stratification stabilizes shear flows, as for non-viscous that are stable when the local Richardson number remains smaller $1/4$ everywhere (Miles, 1961).

Confinement was first explored by Rayleigh (1879): he showed that symmetric boundary conditions have a stabilizing effect on inviscid KH instability. If the confinement is sufficiently strong, the flow becomes stable (Drazin and Reid, 1984). Healey (2009) presented the possible destabilizing effect of asym-

metric confinement on absolute instability, although negligible for temporal stability.

The evolution of initial billow and the development of secondary instabilities has been addressed through both laboratory and numerical experiments. The two-dimensional evolution of the instability was presented in Corcos and Sherman (1984) and Patnaik et al (1976). KH rolls evolve with the development of sub-harmonics and pairing. Fontane and Joly (2008) focused on the stability for variable density KH rolls. They located the development of a secondary instability in the vorticity-enhanced braid by computing possible modes of this secondary instability. Three-dimensionnalisation of the flow was considered by Corcos and Lin (1984) and mixing efficiency of these instabilities was presented in Peltier and Caulfield (2003). Staquet (1995) explored 2D configuration finding a new kind of secondary instability, consisting in the development of a vortex at the inflectional point of the braid. 3D simulations to study secondary instabilities had been carried by Staquet (2000) and Mashayek and Peltier (2011). By using observations of an estuarian pycnocline, Geyer et al (2010) proposed a different behavior of primary billows. Mainly, experiments and simulations were carried out for low or intermediate Reynolds number whereas in the ocean or in the atmosphere, the Reynolds numbers are important (of the order of 10^6). In their observations, the authors observed a turbulent braid and the conservation of the primary structure, supposed by action of some secondary instabilities.

When the thickness of the density profile is larger than the one of the shear, as often observed in stratified natural fields (Carpenter et al, 2010), the KH instability can coexist with two other main kinds of instabilities, namely the Taylor and Holmboe instabilities. Following the initial work of Taylor (1931) and Holmboe (1962), (Caulfield, 1994) defined their domain of development and the characteristic of their linear growth. Focus is now on their evolution and mixing properties (see Balmforth et al, 2012).

Alongside with stratified shear instability, instabilities of viscous layered flows were explored, initially by Yih (1967). For plane Poiseuille-Couette flows of different viscosities, he observed two different modes: the Tollmien-Schlichting instability and a “soft mode”, also denoted by “Yih mode” or “interfacial mode”. For all Reynolds numbers, the Yih mode is unstable for long wave disturbances, if the more viscous layer is also the thinner layer. The mechanism of the viscous instability, studied by Hinch (1984) and Hooper and Boyd (1983), involves the continuity of shear stress at the interface. Malik and Hooper (2005) explored the behavior of miscible flow layer by opposition to two-fluid flows. He showed that, contrarily to the case of two-fluid flow, the miscible flow layer behaves like a homogeneous flow when the viscosity ratio vanishes. If miscible flow layers present an interface larger than $(k^* Re)^{1/3}$, there is no interfacial modes and the stability is determined by shear modes. Govindarajan (2004) also studied miscible flow layer and observed a third kind of instability, the overlap mode, in addition the the shear and interfacial modes. Diffusion can be destabilizing, as seen in Ern et al (2003) for continuous but rapidly varying stratification profiles, or in Sahu et al (2009) for coaxial

configurations. In a study of the two layer interface of fluids with different viscosities and rheologies, Ozgen et al (1998) explored the influence of density stratification on the Yih modes.

As KH instability is a non-viscous process, viscosity have few influence on the development of the primary billows. However, when viscous diffusion can no longer be neglected in front of inertia, the development of this instability is inhibited for intermediate Reynolds numbers. To our knowledge, the influence of viscous and density stratifications on the evolution of the instability and its final mixing is not documented in the literature. Some works like Govindarajan (2004) give informations on the influence of miscible interface of viscosity in coaxial configurations, but do not focus on its influence on KH modes.

In order to improve the understanding of the processes acting at the lutocline, such as erosion, we present here a two-dimensional study of the hydrodynamical processes governing this interface, by modeling the mud flow by a dense and viscous Newtonian fluid. In the present work, we focus on profiles of same thickness for density, viscosity and velocity in order to examine, more particularly, the influence of viscosity stratification on Kelvin-Helmholtz instabilities and final thickness of the interface. The model of equations, the flow configuration and numerical solvers are presented in Section 2. Results of the linear development of the instability are presented in Section 3. Section 4 presents the non-linear evolution of the instability through 2D direct numerical simulations, including a discussion on possible three-dimensional effects. Conclusions are given in the final section and a detailed description of the method used for the linear stability study is given in the appendix.

2 Equations and numerical approaches

2.1 Equations for the modeling of mud flows

Mud particles, which diameter is under $60\mu\text{m}$, present a Stokes number of the order of 10^{-4} . However, for rapid events such as resuspension, they can be considered inertial. Thus, in the present work, mud is modeled by a homogeneous fluid of higher density and viscosity than water, in the presence of gravity \mathbf{g} . With these assumptions, the flow is governed by the following equations:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u})], \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) = 0, \quad (2)$$

$$\rho = \phi \rho_1 + (1 - \phi) \rho_2, \quad \mu = \phi \mu_1 + (1 - \phi) \mu_2, \quad (3)$$

which links the incompressible Navier-Stokes equations (1) for the pressure p and the velocity field $\mathbf{u} = (u, v, w)$, to the transport equation of volume fraction ϕ of the mud flow in the fluid. Local properties of the fluid, such as density ρ and dynamic viscosity μ , are calculated from this volume fraction ϕ . The two following fluids are considered: water, of density ρ_2 and dynamic viscosity μ_2 ,

and mud flow, modeled by a Newtonian fluid of density $\rho_1 > \rho_2$ and viscosity $\mu_1 \geq \mu_2$. In this configuration, density and viscosity are linear functions of the volume fraction ϕ and, therefore, vary in the same manner. We have chosen the case of an infinite Schmidt number: mud diffusion in water is neglected compared to momentum diffusion. This explains the absence of diffusion term in Equation (2) dealing with the transport of the volume fraction. This choice is consistent with the fact that mud particle diffusion is weaker than salt diffusion, which is itself less important than viscosity by a factor of $Pr \sim 700$, where Pr is the salt-stratified water Prandtl number.

2.2 Flow configuration

Lets us consider au domain of length L and height $H = 3$ m. Here x (resp. z) is the streamwise (resp. vertical) direction. This domain is filled at the bottom by a horizontal layer of mud, the characteristic thickness of which being $h = 1$ m. The initial flow configuration is depicted in figure 1.

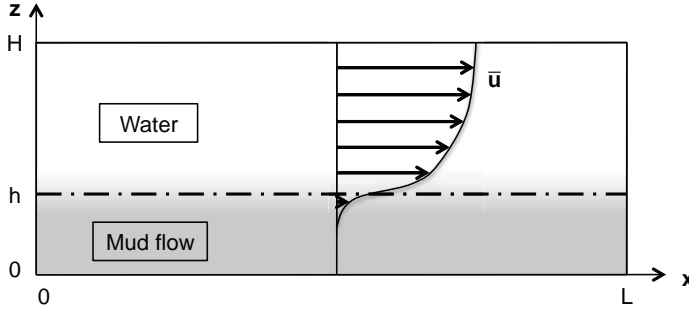


Fig. 1 Initial flow configuration. Streamwise velocity \bar{u} , density $\bar{\rho}$ and viscosity $\bar{\mu}$ are function of z .

We consider a base flow of the form $\mathbf{u} = (\bar{u}(z), 0, 0)$ and $\phi = \bar{\phi}(z)$, in which the pressure is hydrostatic. We suppose that $\bar{u}(z)$ and $\bar{\phi}(z)$ are monotonous and differentiable functions with respective extreme values $\bar{u} = u_1$ and $\bar{\phi} = 1$ at the bottom of the domain, and $\bar{u} = u_2$ and $\bar{\phi} = 0$ at its top, with $u_1 < u_2$. We assume that the two profiles have a single inflection point at $z = h$. In other words, we neglect the effect of friction at the bottom and top boundary. This is reasonable since we are interested by shear-induced resuspension in the region close to the interface $z = h$. We then define the “inflection point thicknesses” associated with each velocity and volume fraction profile by

$$\delta_u = \frac{u_2 - u_1}{2\bar{u}'(h)} \quad \text{and} \quad \delta_\phi = \frac{1}{2\bar{\phi}'(h)}, \quad (4)$$

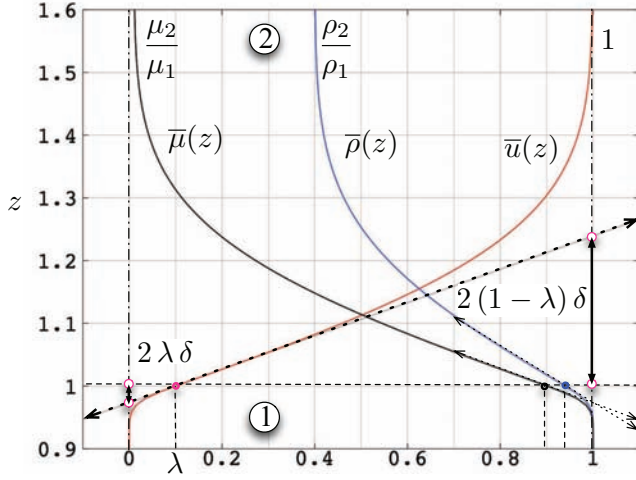


Fig. 2 Initial profiles of $\bar{u}(z)$, $\bar{\rho}(z)$ and $\bar{\mu}(z)$ on a portion $z \in [0.9 \text{ m}, 1.6 \text{ m}]$ with $h = 1 \text{ m}$, $4\delta/\sqrt{\pi} = 0.3 \text{ m}$ and $\lambda = 0.1$.

where the prime denotes the z -derivation. In the present work, we assume δ_u and δ_ϕ to be equal to a same value denoted by δ . The most general case of $\delta_u \neq \delta_\phi$ is left for future work.

To model base flows representative of the density, viscosity and velocity fields observed at water-mud flow interface, we consider the group of functions $F(\lambda, Z)$ defined by:

$$F(\lambda, Z) = \begin{cases} \lambda \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{Z}{\lambda}\right) \right] & \text{if } Z \leq 0, \\ 1 - (1 - \lambda) \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{Z}{1-\lambda}\right) \right] & \text{if } Z \geq 0, \end{cases} \quad (5)$$

where Z is a non-dimensional vertical coordinate, the origin of which is located at the interface. The dimensionless parameter λ controls the asymmetry between both sides of the inflection point (figure 2). Symmetrical profiles of the gradient correspond to $\lambda = 0.5$. For $\lambda < 0.5$ (resp. $\lambda > 0.5$), the lower part is thinner (resp. thicker) than the upper part. One can easily check the continuity of the profiles and its derivatives around this point. We then defined the base flow and volume fraction by

$$\bar{u}(z) = u_2 F\left(\lambda, \frac{z - h\sqrt{\pi}}{\delta} \frac{\sqrt{\pi}}{4}\right) \quad \text{and} \quad \bar{\phi}(z) = 1 - F\left(\lambda, \frac{z - h\sqrt{\pi}}{\delta} \frac{\sqrt{\pi}}{4}\right), \quad (6)$$

where $\delta = \delta_u = \delta_\phi$ is consistent with the definitions of Equation (4).

These profiles are not steady states solutions of (1)-(3), but they can be considered as quasi-steady states for configurations such that the growth time of the instability is small compared to the diffusion time. The empirical $\operatorname{erf}(Z)$ functions qualitatively model a simple shear. These profiles can be seen as

describing a transient response to an imposed gradient in the presence of turbulent diffusion. They are also chosen because they closely mimic the ones observed in practical situations (see Mehta et al, 1989; Wolanski et al, 1989).

In the following, we choose as a reference case $\lambda = 0.1$ and $4\delta/\sqrt{\pi} = 0.3$ m. A no-slip (resp. free-slip) condition is imposed for the velocity at the bottom (resp. top) boundary while zero normal gradient is imposed for ϕ . Periodic boundary conditions are imposed along the streamwise direction. A zoom of the corresponding profiles for $\bar{u}(z)$, $\bar{\rho}(z)$ and $\bar{\mu}(z)$ is displayed in figure 2.

With the present assumptions, the flow is described by four dimensionless parameters, namely,

$$At = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}, \quad Re = \frac{4\delta}{\sqrt{\pi}} u_h \frac{\rho_h}{\mu_h}, \quad Ri = 2\delta \frac{g}{\rho_h} \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{(u_2 - u_1)^2}, \quad W = \log_{10} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right), \quad (7)$$

where $u_h = \bar{u}(h)$, $\rho_h = \bar{\rho}(h) = (\rho_2 - \rho_1)\lambda + \rho_1$ and $\mu_h = \bar{\mu}(h) = (\mu_2 - \mu_1)\lambda + \mu_1$ are respectively the velocity, the density and the viscosity of the fluid at the interface $z = h$. The Reynolds number Re and the gradient Richardson number Ri are computed at the location of maximum density gradient, i.e. at the interface. The viscosity ratio between mud flow and water is expressed by its decimal logarithm W . Excepted otherwise mentioned, the Atwood number is fixed to $At = 0.15$ in this study and the Reynolds number ranges in $Re \in [1, 10^6]$. Since we focus on instabilities, the Richardson number will be varied in a range $Ri \in [0, 0.3]$. The dimensionless number W varies from 0 to 3, which correspond to a viscosity ratio varying from 1 to 10^3 . This present range of parameters can be view as taking $\rho_{water} = \rho_2 = 1000$ kg.m⁻³ and $\mu_{water} = \mu_2 = 10^{-3}$ Pa.s, a concentration in the range $[0, 580]$ g.l⁻¹ corresponding to a range of density $[0, 1360]$ kg.m⁻³ and viscosity $[10^{-3}, 1]$ Pa.s and a characteristic velocity in the range $[0, 2.5]$ m.s⁻¹. These values are typical of what is measured in estuaries (Hardisty, 2007).

2.3 Description of the two numerical approaches

2.3.1 Linear stability solver

The linear stability code LiSa, developed by Antkowiak and Brancher (2007), is used to obtain a global vision of the problem. This code solves the system (1-3) linearized around the base flow given by Equation (6). Given such a parallel base flow and fixed values for the control parameters and the horizontal wavelength, LiSa computes the eigenvalues and their associated modes. The matrices to diagonalize are built through a spectral method based on a Chebyshev polynomials decomposition of the profile in the vertical direction. Therefore, one can extract from the spectrum the most unstable mode and its growth rate. Two versions of the code are used. The first one relies on a real mapping between the Gauss-Lobatto grid points and the physical domain, developed for this specific problem. The second version, following the idea of Fabre et al (2006), uses a complex mapping between the physical and spectral

spaces which allows to improve the numerical convergence for the eigenvalues in some configurations (see Appendix for more detail).

2.3.2 Navier-Stokes solver

JADIM code, developed at IMFT (Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse), solves the Navier-Stokes equations (1-3) for variable-density, variable-viscosity and incompressible flows. Equations for the primitive fields (velocity, pressure) are solved by a finite-volume method. The code is second order accurate in space and time (Calmet and Magnaudet, 1997; Legendre and Magnaudet, 1998). A third order Runge-Kutta temporal scheme is combined to a semi-implicit Crank-Nicolson scheme for diffusive terms. The equations are discretized using second-order centered differences with staggered variables. The transport equation of the volume fraction is discretized using a WENO (Weighted Essentially Non Oscillatory) scheme (Jiang and Shu, 1996). The present version of the solver has been validated for a viscosity gradient by Bonometti et al (2008) and for a density gradient by Hallez and Magnaudet (2009) in a context of gravity currents. As Bonometti et al (2008) use a FCT (Flux Corrected Transport) scheme and Hallez and Magnaudet (2009) a centered scheme for transport equation of the volume fraction, the choice of a WENO scheme is justified by coexistence in our configuration of smooth and steep gradients. This choice allows for both stability of the scheme and accurate transport of the volume fraction.

3 Linear development of the instability

3.1 Notations for the temporal stability analysis

Linear stability analyses are performed by linearizing Equations (1-3) around the general base flows $\bar{u}(z)$ and $\bar{\phi}(z)$ defined at the beginning of Section 2.2. Because of the invariance of the system with time, streamwise and spanwise directions, small perturbations are sought as superpositions of modes of the form:

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \mathbf{a}(z) e^{i(kx + \beta y)} e^{\sigma t - i\omega t},$$

where $\mathbf{A} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}, \hat{\phi})$ is the perturbation field, k and β the wavenumbers in the streamwise and spanwise directions, ω the frequency and σ the growth rate and $\mathbf{a}(z)$ an unknown vectorial profile. Perturbations are represented by the velocity field $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$, the pressure \hat{p} , the density $\hat{\rho}$ and the viscosity $\hat{\mu}$.

In the following, normalization is performed with $(u_2 - u_1)/2$ for velocity units and δ for length units. The wave vector is then normalized as $k^* = k \delta$ and $\beta^* = \beta \delta$, the frequency as $\omega^* = 2\omega \delta / (u_2 - u_1)$, the growth rate as $\sigma^* = 2\sigma \delta / (u_2 - u_1)$ and the time as $t^* = 2t \delta / (u_2 - u_1)$.

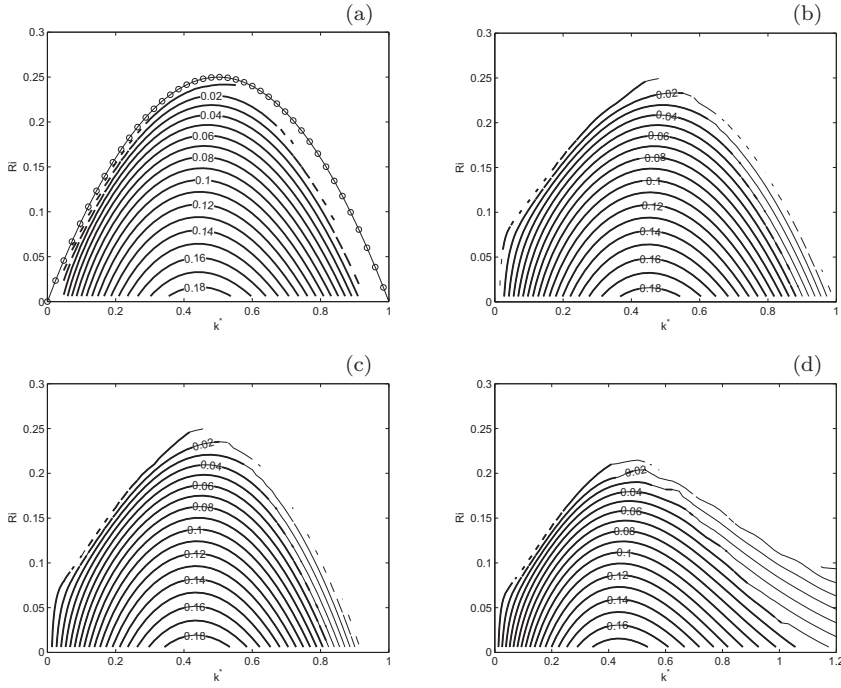


Fig. 3 Isocontours of the growth rate σ^* as a function of k^* and Ri for high Reynolds numbers. (a) Hazel (1972)'s tanh profiles with vanishing boundary conditions at infinity, (b) tanh profiles in a bounded domain, (c) symmetric erf profiles in a bounded domain, (d) asymmetric erf profiles in a bounded domain. Line with circles: theoretical neutral curve, bold line: real mapping, thin line: complex mapping; only converged eigenvalues are shown.

3.2 LiSa validation and series of profiles

The linear stability code LiSa has been first validated on the case of an inviscid and density stratified shear flow in an unbounded domain.

For this validation, we refer to Hazel (1972) who considers the following profiles: $\bar{u} = u_0 \tanh(z/\delta)$ and $\bar{\rho} = \rho_0 \exp[-At \tanh(z/\delta)]$ under the Boussinesq approximation. Here, we consider instead $\bar{u} = u_0 + u_0 \tanh(z/\delta)$ which does not change the temporal stability analysis, except for a shift in the phase velocity. We choose a small Atwood number ($At = 0.024$) in order to approximate the density profile by $\bar{\rho} \sim \rho_0 [1 - At \tanh(z/\delta)]$. Since Hazel (1972) focuses on inviscid fluid, we choose a small viscosity value $\mu = 10^{-3}$ Pa.s, which leads to $Re \sim 3 \cdot 10^5$. The choice $u_0 \sim 1$ m.s $^{-1}$ (varying with Ri) and $\rho_0 = 1000$ kg.m $^{-3}$ is arbitrary since only the dimensionless numbers are considered for this validation.

Table 1 presents a validation on the maximum growth rate for different Richardson numbers in the case of unbounded boundary conditions. The re-

	$Ri = 0.01$	$Ri = 0.05$	$Ri = 0.1$	$Ri = 0.15$	$Ri = 0.2$
Hazel (1972)	0.1838	0.1594	0.1259	0.0889	0.0472
LiSa code	0.1838	0.1593	0.1259	0.0889	0.0471

Table 1 Maximum normalized growth rate σ^* for various Richardson numbers Ri . The results of Hazel (1972) are compared to the results of the linear stability code LiSa for $At = 0.024$.

sults are consistent with Hazel (1972), up to the precision of the numerical method.

The other growth rates are shown on Figure 3(a) as a function of the wavenumber k^* and the Richardson number Ri (iso-contours are interpolated from a 50×50 grid in this diagram). Only converged eigenvalues are represented, which explains lack of eigenvalues at some locations. The thin parabolic line with circles in Figure 3(a) described by the equation $Ri = k^*(1 - k^*)$ represents the neutral curve (Hazel, 1972). Good agreement on this case is observed in spite of some expected difficulties to access the low growth rates, particularly for large wavenumbers.

Starting with the Hazel’s configuration (Figure 3(a)), we have then considered a progressive transition (Figures 3(b) and 3(c)) towards our reference case with asymmetric erf functions (Figure 3(d)). For these new cases (b, c and d), the Bousinesq approximation is no longer used and the Atwood number is set to $At = 0.15$. The Reynolds number is set to $Re \sim 5 \cdot 10^5$. For all cases of Figure 3, the iso-contours that are represented with bold lines are obtained with a distribution of spatial grid points obtained with a classical mapping (“real mapping”, see Appendix). The part represented with thin lines has been computed with a different mapping (“complex mapping”, see Appendix), in which the coordinates of the grid points lie in the complex plane.

Figure 3(b) deals with tanh profiles in a bottom no-slip and top free-slip bounded domain described in Section 2.2. We have noticed that replacing no-slip by free-slip boundary conditions at the bottom led to no visible difference in the results. In agreement with Hazel (1972), confining the flow increases the growth rate for small wavenumbers and only the large waves are “aware” of the presence of the boundary. On Figure 3(c), the base function is changed from tanh to erf. The modification of the sharpness of the interface acts on higher wavenumbers. The marginal curve is no longer parabolic and does not pass through wavenumber $k^* = 1$. Finally, Figure 3(d) presents our reference study case as introduced at the end of Section 2.2. This configuration corresponds to an asymmetric erf function at the interface for which the asymmetry parameter fixed to $\lambda = 0.1$ and the viscosity is homogenous ($W = 0$). In this case, the asymmetry of the interface increases the growth rate at large wavenumbers.

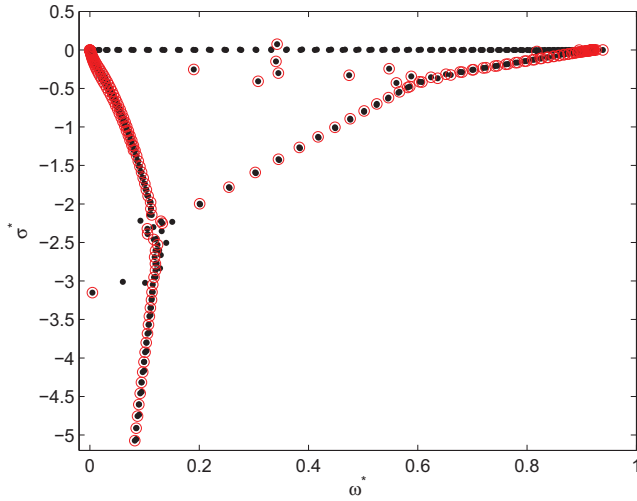


Fig. 4 Eigenvalues spectrum in the plane (ω^*, σ^*) for $Re = 10^2$, $Ri = 0.15$, $W = 3$ and $k^* = 0.46$. The circles correspond to converged eigenvalues.

3.3 Characterization of the stability of the interface

We now focus on the reference erf profile case with $\lambda = 0.1$ and densities fixed to $\rho_1 = 1360 \text{ kg.m}^{-3}$ and $\rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, corresponding to an Atwood number $At = 0.15$. No-slip (resp. free-slip) boundary conditions at the bottom (resp. top) of the $z \in [0, H]$ domain with $H = 3 \text{ m}$ are considered. The interface lies at $h = 1 \text{ m}$ and “inflexion point thickness” is such that $4\delta/\sqrt{\pi} = 0.3 \text{ m}$. Since $u_1/u_2 \ll 1$, the variations of the Richardson number Ri , the Reynolds number Re and the viscosity ratio W only trace back the variations of the velocity u_2 and the viscosities μ_1 and μ_2 .

For homogeneous flows, the Squire theorem (Squire, 1933) ensures that the most unstable perturbations first appear as 2D modes ($\beta = 0$). Since such a theoretical result does not exist for the present stratified flow, we have performed an exploration of 3D configurations which suggests that this might be still the case here (see Section 4.3). For this reason, we restrict the present study to 2D perturbations.

A typical spectrum of eigenvalues computed with LiSa is displayed in Figure 4 for a particular set of parameters. The eigenmodes associated to the most unstable eigenvalue are displayed in Figure 5. The asymmetry of base flow profiles, introduced by the parameter λ , is observed on modes. The instability is not situated on the inflexion point of the profile at $z = h = 1 \text{ m}$, as it would be the case for $\lambda = 0.5$, but a little higher at $z = 1.07 \text{ m}$. Asymmetry also leads to a stretching of the modes above the interface and to a contraction below.

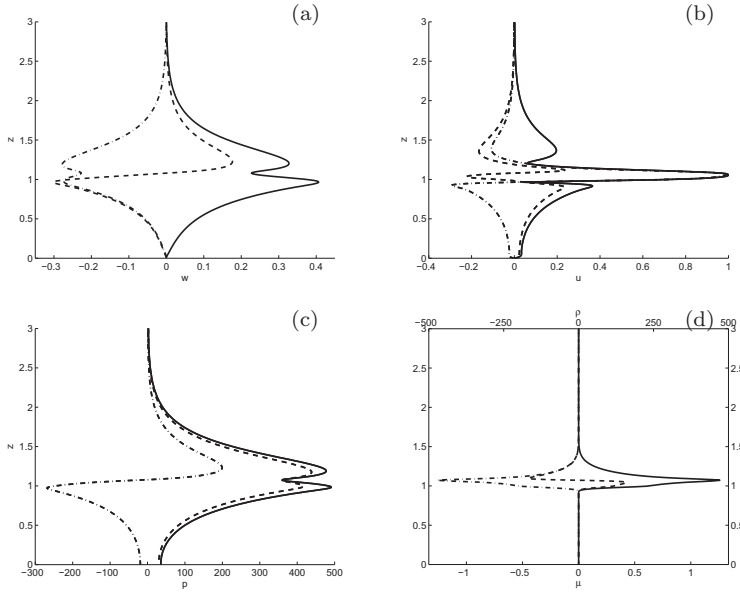


Fig. 5 Vertical profiles of the most unstable mode at $Re = 10^2$, $Ri = 0.15$, $W = 3$ and $k^* = 0.46$ for: (a) vertical velocity, (b) streamwise velocity, (c) pressure and (d) density, normalized by the maximum of the streamwise perturbation. Dashed - - : real part. Dotted-dashed --- : imaginary part. Plain - : absolute value.

These modes have been compared to modes obtained with a smaller and no viscosity ratio between fluids, for a constant Reynolds number at the interface. The viscosity ratio only has a small influence on the vertical position or the general shape of the modes. For pressure and density, the viscosity ratio slightly increases the amplitude of perturbation profiles. For velocities, the increase of the viscosity ratio slightly decreases the amplitudes of perturbation under the interface where the fluid viscosity is increased, and increases these amplitudes over the interface where viscosity is decreased. These variations between different viscosity ratios are small (less than 10%).

3.4 Parameters sensitivity

The dependency of the growth rate σ^* at $Re = 10^2$ with the Richardson number is displayed on Figure 6 for $W = 3$. Bold and thin lines correspond respectively to the real and complex mappings as described for Figure 3. As pointed out in the previous section, the increase in the growth rate observed for small wavenumbers comes from confinement. Increasing profiles asymmetry at the interface implies a larger range of unstable wavenumbers for large wavenumbers. Smaller wavelengths are destabilized by the sharper gradient in the lower part of the interface, their characteristic length being $\lambda\delta$ (not

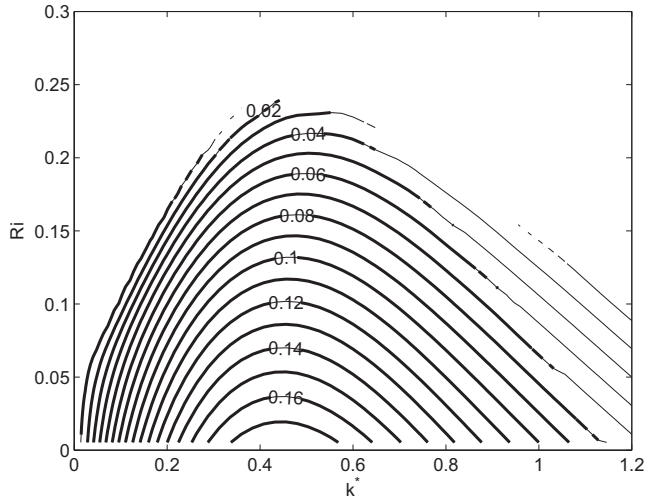


Fig. 6 Isolines of the normalized growth rate σ^* , as a function of the non-dimensional wavenumber k^* and the Richardson number Ri for $W = 3$ and $Re = 10^2$.

shown). Figure 7, which shows isocontours of the growth rates for $W = 3$ in the wavenumber and Reynolds number plane, illustrates the influence of the Reynolds number. For Reynolds number higher than 10^3 , the growth rate no longer depends on the viscosity, which is a known feature of KH instabilities. But for Reynolds numbers smaller than this value, we observe a greater growth rate accompanied by a larger interval of unstable wavenumbers: the viscosity has a destabilizing influence. On Figure 8, isocontours of the growth rate for different viscosity ratios W are presented. For Reynolds numbers higher than 10^3 , the growth rate does not depend on the viscosity ratio, which is consistent with the fact that the stability properties are independent of viscosity at high Reynolds numbers. To illustrate the small Reynolds number features, a section of this diagram at $Re = 10^2$ is shown on Figure 9. We can note that a larger viscosity ratio between fluids increases this destabilizing effect previously observed for viscosity. Figure 10, which represents the evolution of the maximum KH growth rate with the Reynolds number, exhibits the same influence of both viscosity and viscosity ratio. It also suggests a higher critical Reynolds for the development of the instability for strong viscosity gradients and low Reynolds numbers.

On Figures 7 and 8, one can notice an instability of different nature for low Reynolds numbers and low wavenumbers. As in Yih (1967), we observe a long wave instability in the present case of two layers of fluids with the thinner being the more viscous. Recent work of Govindarajan (2004) on concentric pipe flow of miscible fluid of different viscosities presents similar results. The mode observed in our configuration might be the “overlap” mode, a deformation of the Tollmien-Schlichting developing in a variable viscosity region. Since

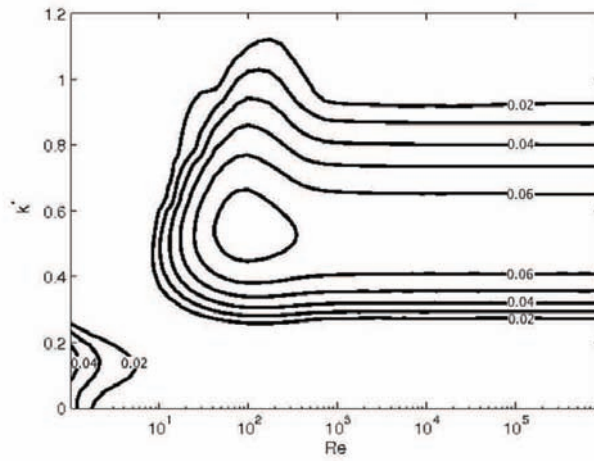


Fig. 7 Isocontours of the normalized growth rate σ^* , as a function of the non-dimensional wavenumber k^* and the Reynolds number Re for $Ri = 0.15$ and $W = 3$.

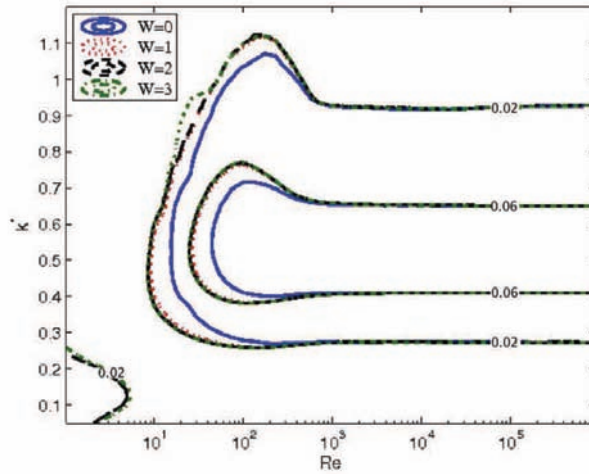


Fig. 8 Isocontours of the normalized growth rate σ^* , as function of the non-dimensional wavenumber k^* and the Reynolds number Re , for $Ri = 0.15$ and for $W \in \{0, 1, 2, 3\}$.

we focus on the KH instability, no further investigation of this instability is presented here.

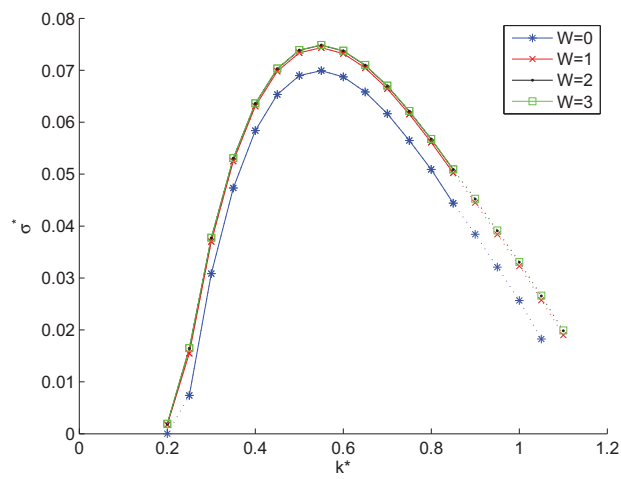


Fig. 9 Normalized growth rate σ^* as function of the non-dimensional wavenumber k^* , for $Ri = 0.15$, $Re = 10^2$ and $W \in \{0, 1, 2, 3\}$.

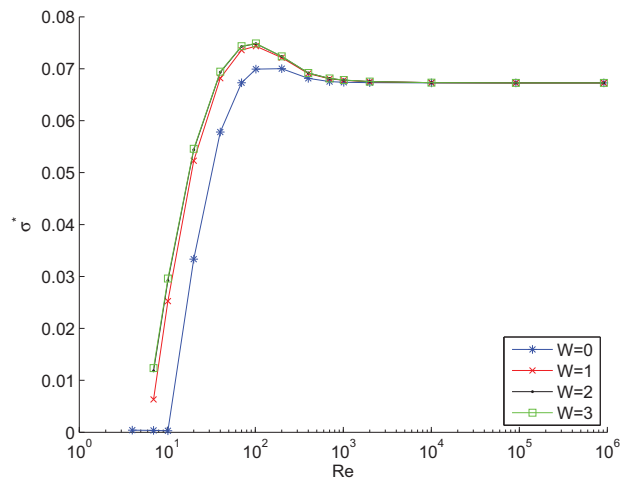


Fig. 10 Maximum growth rates as functions of the Reynolds number at $Ri = 0.15$ and for $W \in \{0, 1, 2, 3\}$.

4 Non-linear evolution of the instability

The linear stability analysis of the previous section is now complemented with direct numerical simulations (DNS). The velocity, density and viscosity fields of the most unstable mode are used to initialize 2D simulations in a streamwise periodic domain. The nonlinear regime subsequent to the linear growth is investigated.

4.1 Preliminary comparison between Navier-Stokes simulations and linear stability results

We first focus on the linear growth, i.e. the first stage of development of the instability. We choose $k_* = 0.46$, which leads to a x -period $L = 2\pi/k \sim 1.8$ m since $k = k_*/\delta$ and $\delta = 0.3\sqrt{\pi}/4$. The mesh size is fixed to $0.5 \text{ cm} \times 0.5 \text{ cm}$, which corresponds to a (x, z) -resolution of 364×600 . In Figure 11 is represented the kinetic energy of velocity perturbations computed as the square of the velocity perturbations:

$$\|\hat{u}\|^2 = \frac{1}{HL} \int_0^H \int_0^L [(u - \langle u \rangle_x)^2 + (v - \langle v \rangle_x)^2] dx dy, \quad (8)$$

where where $\langle \cdot \rangle_x$ represent space average in the x direction. The choice to subtract the mean flow computed at the given time, instead of subtracting the initial mean flow, avoid to take into account diffusion of the mean flow in the amplitude of perturbations. Various Reynolds numbers were investigated in order to assess the sensibility of this parameter on the instability growth rate. At early times ($t^* \leq 15$), the increase of $\|\hat{u}\|^2$ is exponential and independent of Re . This is in agreement with linear stability results which predict the growth rate σ^* to be independent of the Re for $Re \geq 10^3$ (Figure 10). At longer times ($15 \leq t^* \leq 50$), the growth rate of the instability still follows an exponential trend at $Re \geq 10^3$ while at lower Re , the kinetic energy is significantly lower by an order of magnitude, approximately. At long times ($t^* \geq 50$), the kinetic energy of the perturbations “saturates” and oscillates around a plateau value at 10^{-2} for $Re \geq 10^3$ and 10^{-3} for $Re = 10^2$. The growth rates obtained from the direct numerical simulations of the linear stability analysis are presented in Table 2. As expected, when the Reynolds number Re increases, the dependency with W is no longer visible. For large Reynolds numbers, the viscosity ratio has no influence on the development of the primary instability again in agreement with linear stability analysis results (see e.g. Figure 10). A quantitative agreement is observed with linear stability results, the differences being less than 1% for $Re \geq 10^4$. This indicates that, with the present resolution, the Navier-Stokes solver is able to accurately capture the instability of the mixing layer within the investigated range of parameters.

For low Reynolds numbers, the Navier-Stokes simulations slightly differ from the linear stability predictions because the hypothesis of a quasi-steady base flow is no longer valid. A characteristic time of the instability, based

Growth rate σ^*		$Re = 10^2$	$Re = 10^3$	$Re = 10^4$	$Re = 10^5$	$Re = 10^6$
$W = 0$	Linear stability	0.5688	0.5532	0.5521	0.5520	0.5520
	DNS	×	0.5039	0.5485	0.5509	0.5511
$W = 3$	Linear stability	0.6098	0.5567	0.5525	0.5521	0.5520
	DNS	0.5848	0.5482	0.5504	0.5507	0.5500

Table 2 Normalized growth rate σ^* for various Reynolds numbers Re and viscosity ratios W ($Ri = 0.15$ and $k^* = 0.46$), obtained from DNS and compared with the linear stability analysis.

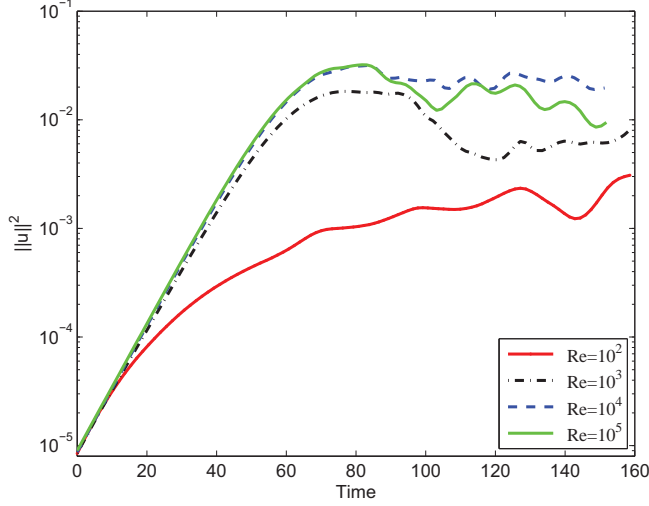


Fig. 11 Time evolution of the perturbation kinetic energy ($\|\hat{u}\|^2$) for $W = 3$, $Ri = 0.15$, $k^* = 0.46$ and $Re = 10^2, 10^3, 10^4$ and 10^5 . Time being normalized as $t^* = 2t\delta/(u_2 - u_1)$.

on growth rate, is $\tau_{inst} = \frac{2\delta}{\sigma^*(u_2 - u_1)}$ while a characteristic time for base flow diffusion is $\tau_\nu = \frac{(\lambda\delta)^2 \rho_h}{\mu_h}$. The ratio between those characteristic times is:

$$\frac{\tau_{inst}}{\tau_\nu} = \frac{2\delta}{\sigma^*(u_2 - u_1)} \frac{\mu_h}{(\lambda\delta)^2 \rho_h} = \frac{1}{Re} \frac{8}{\sqrt{\pi}\lambda\sigma^*}.$$

$\tau_{inst}/\tau_\nu \sim 0.9$ for $Re = 100$, which means that the mean flows diffuses on a time scale comparable to the one of the instability development. Contrary to the higher Re regimes, the base flow can no longer be considered as steady during the development of the instability. Therefore, the growth rate of the perturbation is exponential only during a short times and is rapidly impeded by the diffusion of the base flow long before the non-linear saturation observed for high Reynolds numbers occurs.

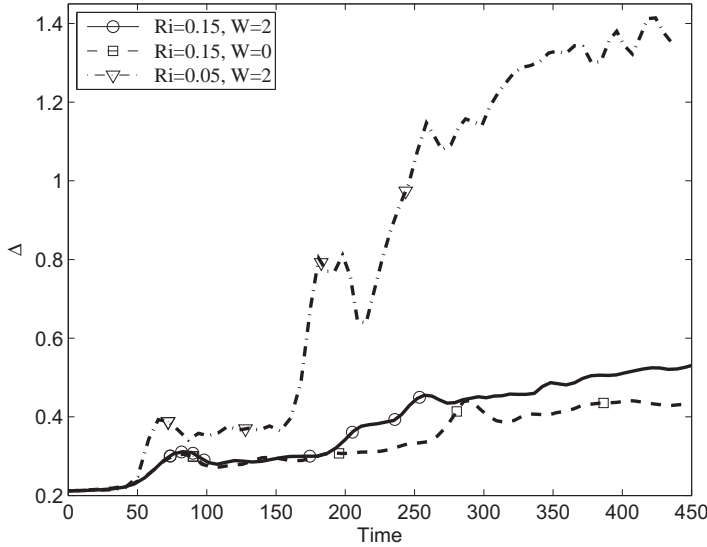


Fig. 12 Time evolution of the mixing layer thickness $\Delta(t)$. Results obtained from direct numerical simulations for $Re = 10^3$. The symbols corresponds to the different instants of the density and vorticity fields displayed in figures 13 to 16. Time being normalized as $t^* = 2t\delta/(u_2 - u_1)$.

4.2 Saturation and non-linear evolution of the instability

The subsequent stages of the evolution of the instability are described in this section. To highlight the influence of both viscosity and density stratifications, the reference case $Re = 10^3$, $Ri = 0.15$ and $W = 2$ is compared to the $W = 0$ case in which the viscosity stratification is removed and the $Ri = 0.05$ in which the density stratification is decreased. The length of the simulation box is now $L = 4 \times 2\pi/k$, corresponding to four spatial wavelengths of the instability ($L = 7.263$ m) in our configuration where $k^* = 0.46$.

The simulations are realized on a 1496×600 mesh which is refined near the interface: vertical grid size $d_z/h = 0.25 \cdot 10^{-3}$ for $0.75 \leq z/h \leq 1.5$. In the regions $0 \leq z/h \leq 0.75$ and $1.5 \leq z/h \leq 3$, d_z varies linearly from $d_z/h = 2.5 \cdot 10^{-3}$ close to the interface to $d_z/h = 1.25 \cdot 10^{-3}$ at the top and bottom boundaries. We define the mixing layer Δ thickness by

$$\Delta(t) = \frac{1}{h} \int_0^H \frac{\langle \rho u \rangle_x}{(\rho_2 - \rho_1)(u_2 - u_1)} \left[1 - \frac{\langle u \rangle_x}{(u_2 - u_1)} \right] dz,$$

The temporal evolution of Δ is displayed in Figure 12, for the reference case together with a case of no viscosity (weak density) stratification, i.e. $W = 0$ ($Ri = 0.05$). In all cases, the temporal evolution of the mixing layer thickness is not monotonous but is characterized by a succession of plateaus and rapid

growths which are sometimes followed by a peak. As described later, these peaks are observed during vortex pairing phenomenon.

Keeping in mind that the evolution of the interface is constrained by the periodicity of the simulation domain, we can relate the evolution of $\Delta(t)$ to the structure of the flow. For this purpose, circles of Figure 12 correspond to the times at which density and vorticity fields are extracted for the whole domain and plotted in Figure 13 and Figure 14, vorticity being normalized by u_h/δ . At $t^* \sim 73$ (fig. 13(a)), the KH rolls reach their maximum of amplitude. Contrarily to non-stratified configurations, positive vorticity is observed. This vorticity is created by the baroclinic torque, associated to strong density gradients and the vorticity fields (see Staquet, 1995). The KH rolls destabilize through an elongation of vorticity braids between the vortices (Figure 13(b-c)). The braids break up while the vortices are still coherent. This secondary instability, of the “near-core” type (see Staquet, 1995), consists in the destabilization by a jet (Figure 13(c) left) near the core of the vortex, leading to the break up of the braid. This destabilization is followed by the generation of small vortices (Figure 13(d)). This evolution significantly differs from the case of more viscous flows, for which the development of sub-harmonics and subsequent pairing is observed without deformation nor breaking of the vorticity braid (not show here). The flow is then disorganized with secondary vortices located on the border of the mixing layer. They are located at a maximum of vorticity which is more intense on the perimeter of the primary KH eddies. Some of the energy is transferred to small lengthscales and then dissipated by diffusion. At later times ($t^* \geq 150$), the flow reorganizes and the main eddies move toward the center of the mixing layer: at $t^* \sim 174$ (Figure 14(a)), a dark patch of vorticity appears inside the layer. At this stage, the flow is still composed of four main structures reminiscent of the initial KH rolls and the thickness of mixing layer has not changed since the end of the linear growth (Figure 12). Then pairing, or coalescence, occurs: vortices roll around each other and mix to form larger structures. At $t^* \sim 205$ (Figure 14(b)), on the left part of vorticity field cartoon, three eddies are clearly seen and begin to roll-up around each other to form a bigger eddy. On the right side, two others begin the process of pairing. This stage corresponds to the thickening of the interface observed on Figure 12 (see the circle at time $t^* = 205.1$). Finally at $t^* \sim 236$ (Figure 14(c)), only three main vortices are present. One pairing has ended while the other are still going on. During this stage, the thickness of the mixing layer is constant. At $t^* \sim 254$ (Figure 14(d)), a second pairing (in the center of the figures) is ending.

The comparison of the evolution of the mixing layer with the other configurations, namely no-viscosity stratification and weak density stratification, give indications on the influence of the two stratifications. The density stratification, represented by the Richardson number, is observed to be very influent on the thickness of the interface (Figure 12). For instance, at $t^* \sim 150$ (resp. 400), the thickness of the mixing layer is about 30% (resp. 300%) larger in the weak density stratification case ($\Delta \sim 0.3$ (0.4) at $t^* \sim 150$ and $\Delta \sim 0.4$ (1.4) at $t^* \sim 400$, for $Ri = 0.15$ (0.05)). As shown in §3, decreasing the Richard-

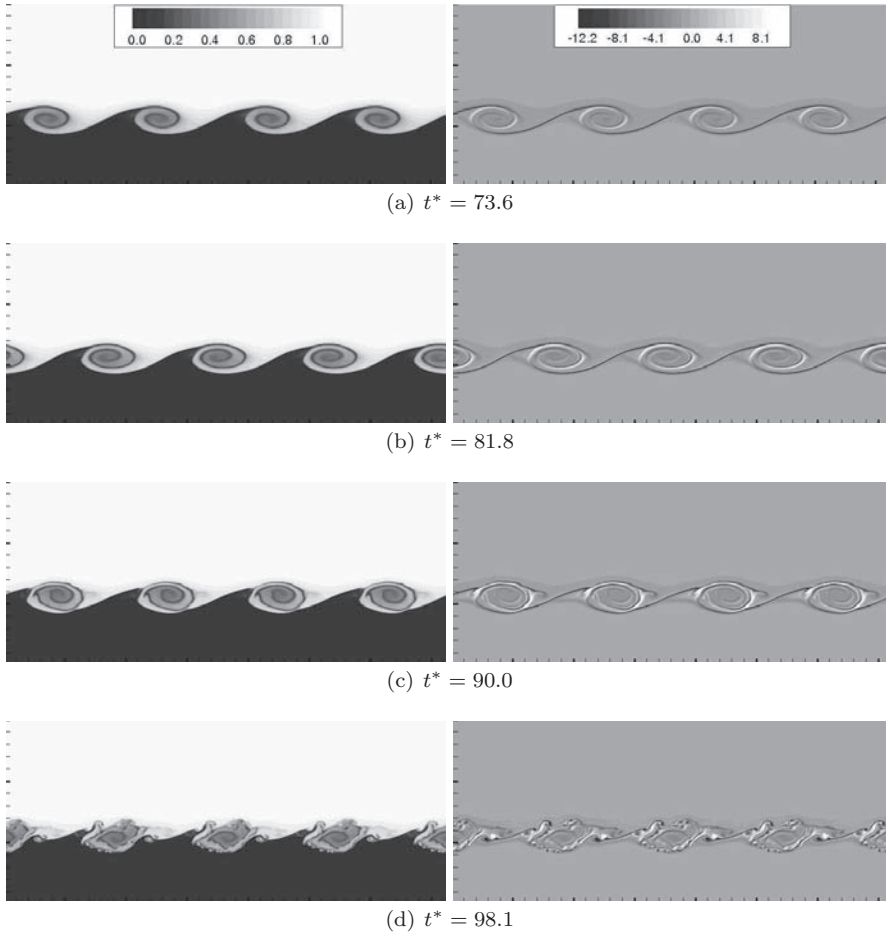


Fig. 13 Temporal evolution of KH rolls for $W = 2$, $Ri = 0.15$ and $Re = 10^3$, $70 \leq t^* \leq 100$. Left: density, right: spanwise vorticity. The whole computational domain is shown.

son number decreases the impact of the stratification on the development of primary instability and leads to an increase of the growth rate and eventually to a thicker mixing layer. This is in agreement with present observations. The viscosity stratification does not affect the thickness of the mixing layer at early times ($t^* \leq 160$) while it slightly increase Δ at the later times ($t^* > 160$) by about 20%, after vortex pairing has occurred. In both $Ri = 0.15$ and $Ri = 0.05$ cases, the saturation of primary instability is followed by the development of small vortices and a reorganization of the interface. After a time period that is equivalent for both cases, a first stage of coalescence, rapidly followed by a second stage, are observed. In the $Ri = 0.05$ case, the development of secondary pairing is hampered by the size of the simulation box (Figure 15(c-d)).

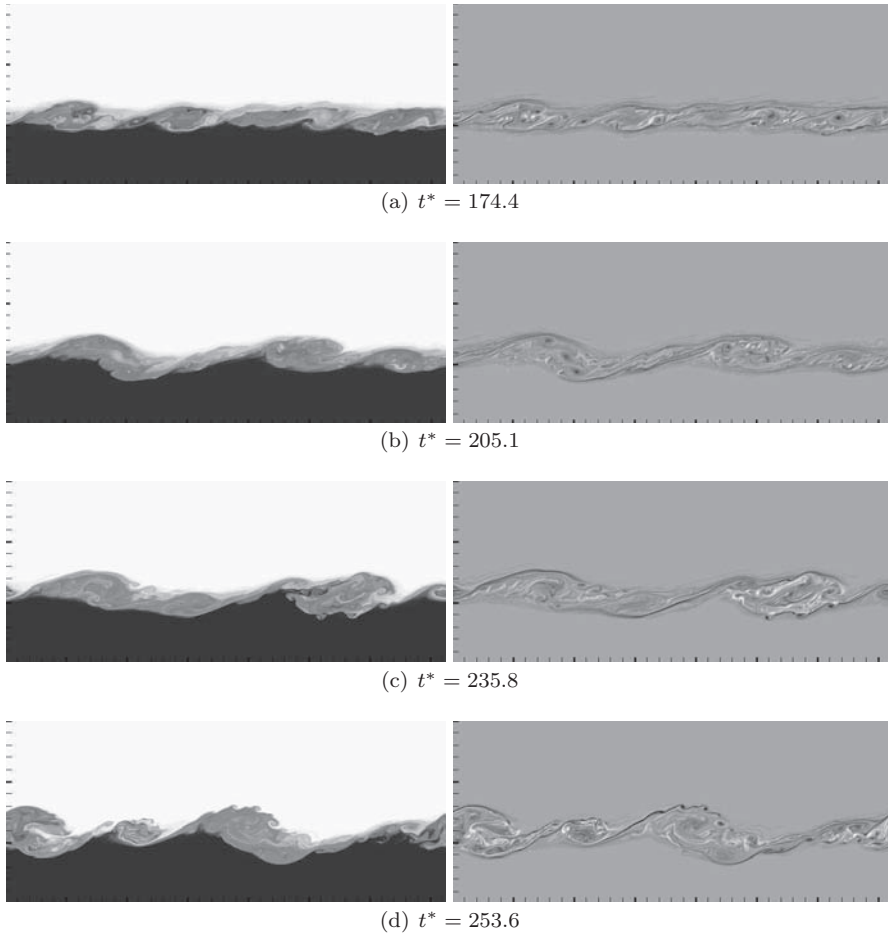


Fig. 14 Same as in figure 13 for later times $150 \leq t^* \leq 300$.

The comparison between the two $Ri = 0.15$ simulations with $W = 2$ and $W = 0$ (homogeneous viscosity) traces back the influence of viscosity stratification. The development of the primary instability is not influenced by the viscosity stratification, nor is the secondary instability (Figure 16(a) and Figure 13(c)). However, the viscosity stratification has an influence on the pairing. While a first pairing is observed at $t^* \sim 280$ (Figure 16(c)) for $W = 0$, with no subsequent coalescences, for $W = 2$, the first pairing is observed at $t^* \sim 200$ and is followed by a new pairing at $t^* \sim 250$ (Figure 14(d)). These faster sequence of pairings, enhanced by the viscosity stratification, widens the interface. Eventually, the thickness of the mixing layer in the viscous-stratified flow is 20% thicker than in the uniform viscosity case. This present results confirm that density and viscosity stratification can have a significant influ-

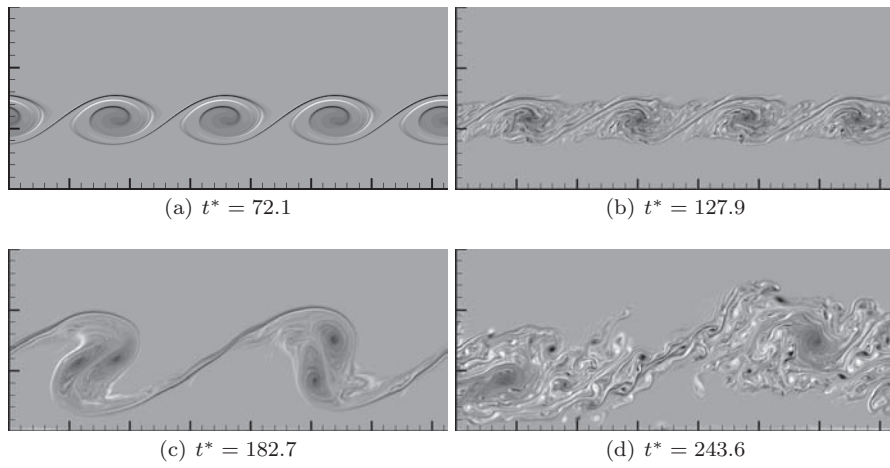


Fig. 15 Temporal evolution of vorticity field of KH rolls for $W = 2$, $Ri = 0.05$ and $Re = 10^3$. Vorticity being normalized by u_h/δ and presenting the same color-bar as Fig. 13.

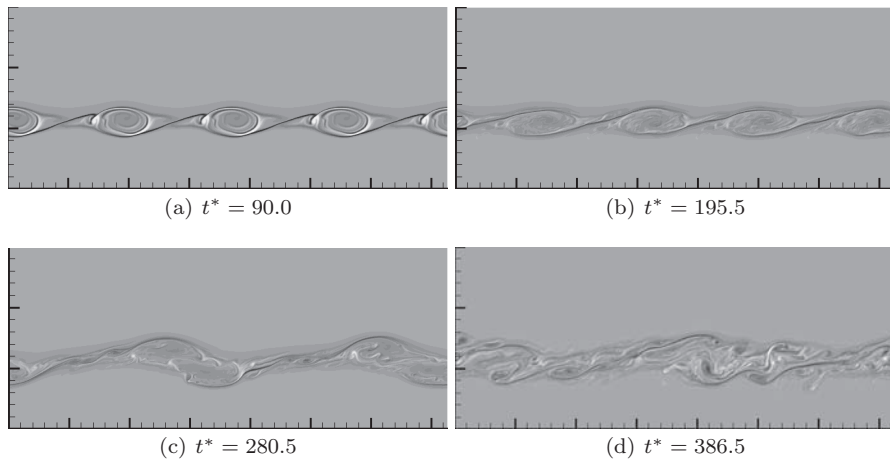


Fig. 16 Same as in figure 15 for $W = 0$, $Ri = 0.15$ and $Re = 10^3$

ence on the non-linear development of the mixing layer, thus modifying the thickness of the interface accordingly.

4.3 On three-dimensionalisation

In the case of inviscid flows, Squire (1933) has demonstrated that, given a three-dimensional unstable mode, there exists at least one two-dimensional mode which is more unstable. This theorem has been generalized to viscous flow (Yih (1955)) as follows: given an unstable oblique mode, one can find a more unstable two-dimensional mode at a lower Reynolds number. Therefore, the critical Reynolds number can be determined considering only 2D-modes. Nevertheless, it is not demonstrated that for a given unstable Reynolds number, the most unstable mode will be two-dimensional (see examples in Caulfield (1994) regarding Holmboe instabilities).

In our configuration, a crude three-dimensional exploration has been performed and tends to confirm the two-dimensional character of primary instability. Figure 17 displays the growth rate for a finite spanwise wavenumber $\beta^* = 0.5$, and for the wave vector angle of $\frac{\pi}{4}$ with respect to the streamwise direction (i.e. a spanwise wavenumber β^* equal to the streamwise wavenumber k^*). For these configurations, the growth rates are lower than in the 2D case. 2D instabilities grow more quickly: the flow remains two-dimensional in the primary instability phase.

Nevertheless, the flow eventually becomes three-dimensional at later time. A series of 3D numerical simulations have been carried out to evaluate the limits of the 2D approach.

The occurrence of streamwise vortices is observed at $t^* \sim 220$ through the creation of streamwise tubes of counter-rotating vorticity on vortex sheets. Figure 18 shows isovalues of the streamwise vorticity: each grey level represents the same amplitude for vorticity of opposite sign. Comparing with Figure 14(b), it seems that three-dimensionalisation inhibits vortex pairing. This is in agreement with recent observations in the ocean by Geyer et al (2010) who observed conservation of a kind of turbulent primary vortices under the action of secondary instabilities at large Reynolds number. This suggests that three-dimensional structures may play a role in the subsequent phase following the initial transient growth of the instability, and can therefore modify the final thickness of the mixing layer (see Peltier and Caulfield (2003)). Exploring such effects requires substantial computational resources. This topic is beyond the scope of the present paper and is left for future work.

5 Conclusion

We have set an idealized model of two layers mud-water flow, based on the incompressible Navier-Stokes equations with variable density. This model aims at representing the hydrodynamic processes that destabilize the interface between mud flow and water at the bottom of estuaries. In the present study, mud flow is considered as a Newtonian fluid of high density and viscosity, miscible in water. At the interface, the mean velocity, density and viscosity profiles are represented by asymmetric erf-shaped functions. We have performed a linear

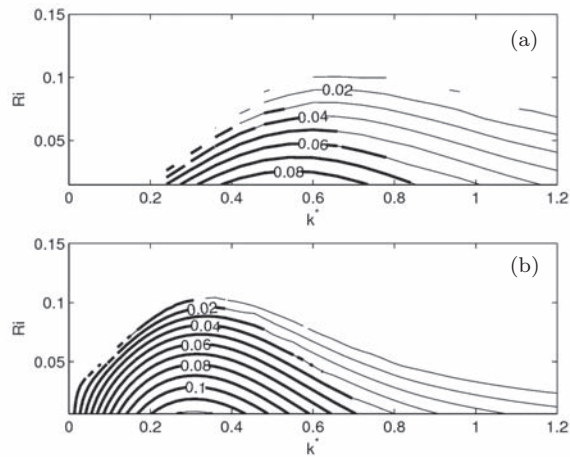


Fig. 17 Growth rate for 3D KH rolls, $W = 0$, $Re \sim 10^5$. (a): $\beta^* = 0.5$, (b): $\beta^* = k^*$

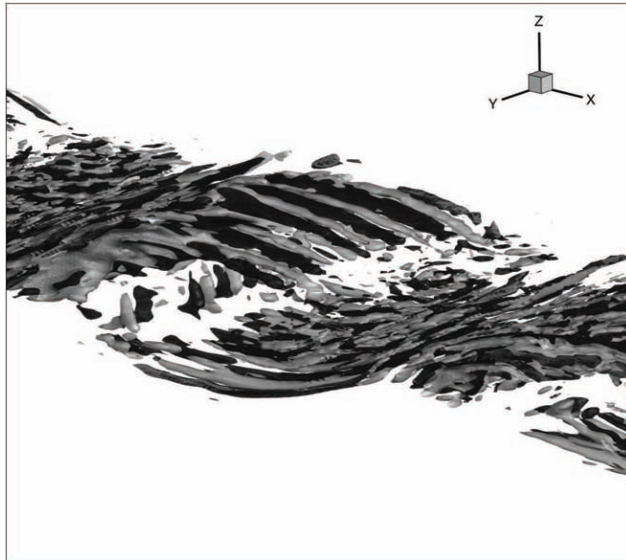


Fig. 18 Isosurfaces of streamwise vorticity: three-dimensionalisation of the instability at $t^* = 220$ of $W = 2$, $Ri = 0.15$ and $Re = 10^3$.

stability analysis by exploring a relevant range of control parameters k , Ri , Re and W and documented the influence of these parameters on the flow. We have complemented this linear approach with direct numerical simulations, and extended the study to the subsequent nonlinear development of the primary Kelvin-Helmholtz instability.

Results suggest that the instability is mainly controlled by the local Reynolds and Richardson numbers at the interface. The Richardson number

at the interface, balancing stratification and shear effect, controls the development of the Kelvin-Helmholtz instability: Richardson numbers lower than the critical Richardson number ($Ri_c \sim 1/4$) lead to instability. For large Reynolds number, we show that there is no influence of the viscosity ratio nor of the Reynolds number on the linear development of the instability. For values lower than 10^3 approximately, the Reynolds number at the interface play a role: in particular, the viscosity has a destabilizing influence. Increasing the viscosity ratio W promotes this destabilizing effect. Direct numerical simulations reproduce these results in the short timed linear phase and complement the analysis: for small Reynolds numbers, the hypothesis of quasi-steady state of the mean flow is no longer justified. Evolution of the mixing layer with destabilization of the K-H rolls and pairing in the case of strong viscosity variation has also been presented. As commonly known, the final thickness of the interface is influenced by the Richardson number. The effect of viscosity stratification is also observed: for a given interfacial Reynolds number, viscosity stratification enhance the thickening the interface by about 20%. Viscosity ratio influences the first destabilization of rolls and enhance the pairing occurrence in 2D configurations. Even though the pairings seems to be inhibited for 3D configurations, it is likely that the viscosity stratification still enhances the growth of the mixing layer thickness. Highly resolved 3D simulations are needed to further document the evolution of the mixing layer and the influence of viscosity stratification.

In realistic configurations, mud flow can be 100 times more viscous than water, $W \simeq 2$. Therefore, the local interfacial Reynolds number is significantly decreased. According to the present work, the growth rate of the instability is likely to be different from a crude estimation with a constant viscosity. Additionally mixing will be increased by viscosity stratification. Thus viscosity of the mud cannot be neglected in resuspension parameterisations. To obtain even more precise results, the viscoplastic rheological behavior of the mud should also be taken into account, not only as a threshold for resuspension, but also in the evolution of the interface.

Acknowledgment

The first author is supported by a scholarship intended for PhD students funded by the DGA (Direction Générale de l'Armement). This work has benefited computational means from the Scientific Groupement CALMIP (projet P1016), CINES (imf6359) and IDRIS (projet 99651), the contribution of which are greatly appreciated.

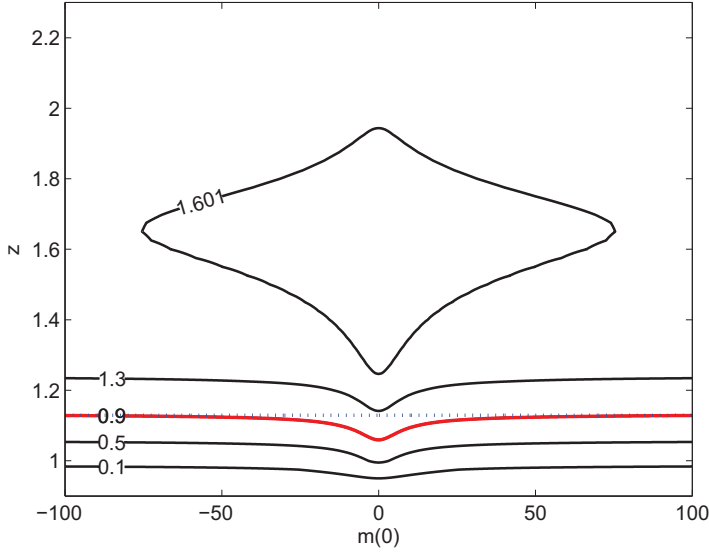


Fig. 19 Isovalues of $\Omega[k, m(z), z]$ in the (m, z) plane for $Ri = 0, 15$, $k^* = 0, 8$, zoomed on $z \in [0.9, 2.3]$

Appendix

In this appendix, we describe the method that we have developed to identify the discretised K-H modes among spurious modes tracing back the continuous spectrum of the linear problem.

Characterization of the spurious modes

Spurious modes are characterized by a Chebyshev decomposition of the z -profiles that is not converged. The associated spurious eigenvalues stand close to the marginal curve of null growth rate $\sigma^* = 0$. We interpret them as a continuous spectrum of internal waves trapped in critical layers. A physical hint of these modes can be caught by considering the refraction of plane internal waves by density stratification and shear. The WKB method describes the evolution of wave packets of the wave vector $k, m(z)$ in the two-dimensional plane (x, z) . They form a solution of the Eikonale equation $\Omega[k, m(z), z] = \Omega_0$ with $\Omega(k, m, z) = \sqrt{\frac{g}{\rho_r} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \frac{k}{\sqrt{m^2 + k^2}}} + k \bar{u}(z)$ and Ω_0 constant, where ρ_r is the reference density used in the framework of a Bousinesq approximation of the Navier-Stokes equations.

Figure 19 presents isovalues of the frequency for fixed wave number, representing rays of internal waves, in the (m, z) plane. Divergent trajectories are observed and characterized by horizontal asymptotes (as dotted line for

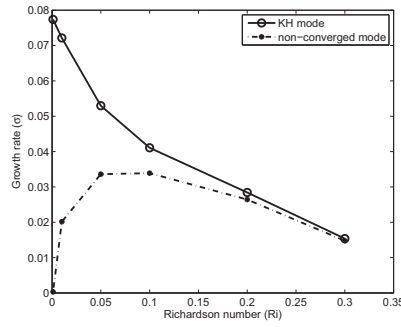


Fig. 20 Growth rate of the two most unstable eigenmodes as a function of the Richardson number for $W = 0$, $k^* = 1.1$

$\omega = 0.9$) with $m \rightarrow \infty$ and $z \rightarrow z_c$. These asymptotes correspond to absorption critical layers of internal waves. Due to viscosity, equation does not degenerate as Rayleigh equation for $\bar{u} = c$. Yet, very high resolution is needed since these layers present a thickness of $(k^* Re)^{-1/3}$ (see Drazin and Reid (1984)). Non-converged but physical modes with positive growth rate have their origin in these critical layers. To validate this hypothesis, the relation of dispersion $\omega \sim k \bar{u}(z_c)$ have been verified. Frequency of modes are compared to $k \bar{u}(z_c)$, by obtaining z_c from vertical profiles of the mode. Figure 21 shows that the growth rate of these modes decreases when resolution grows: they are under-resolved. Figure 20 shows that these modes also decrease around $Ri = 0$. This evolution corroborate the relation between modes and internal waves.

Complex mapping function

The elimination of these spurious modes at the profit of the searched K-H modes is achieved through the use of a complex mapping in the LiSa code. This stability code is based on a spectral decomposition using Chebyshev polynomials with a collocation method using a mapping transforming the spectral variable $s \in [-1, 1]$ (Gauss-Lobatto collocation points) into the physical variable z . A first real mapping $z = \varphi_0(s)$ reads:

$$\varphi_0(z) = C_1 \left[1 - e^{C_2 \operatorname{arctanh}(C_3 s) + C_4} \right],$$

where the constants C_1 , C_2 , C_3 and C_4 are adjusted to match the positions of the interface and the two boundaries as well as to adjust the refinement of the collocation grid near the interface. Based on an idea of Fabre et al (2006), we have extended it to the complex mapping $\varphi_\alpha(z) = \varphi_0(s) (1 - i \alpha)$ with $\alpha = 0.010369 - 0.035621 Ri$. As presented on Figure 21(b), α can be determined through a sensitivity analysis of the eigenvalues with respect to its value. We choose the lowest value of α for which growth rate of spurious eigenvalues pass horizontal neutral axes (corresponding to their supposed position).

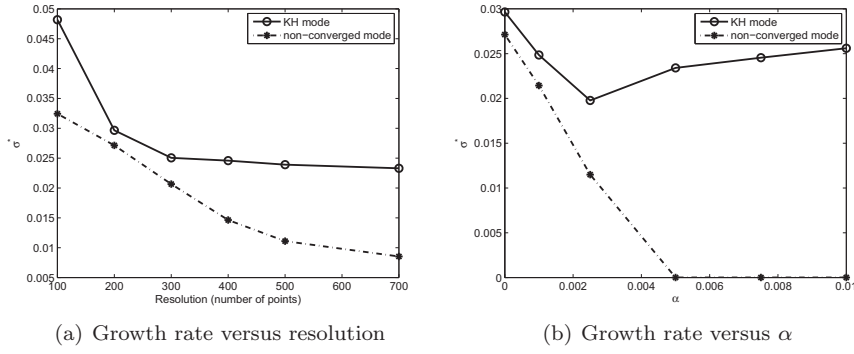


Fig. 21 Growth rate of the two most unstable eigenmode, for $W = 3$, $k^* = 0.95$, $Re = 100$, $Ri = 0.15$. (a) Variation with the resolution. (b) Variation with α .

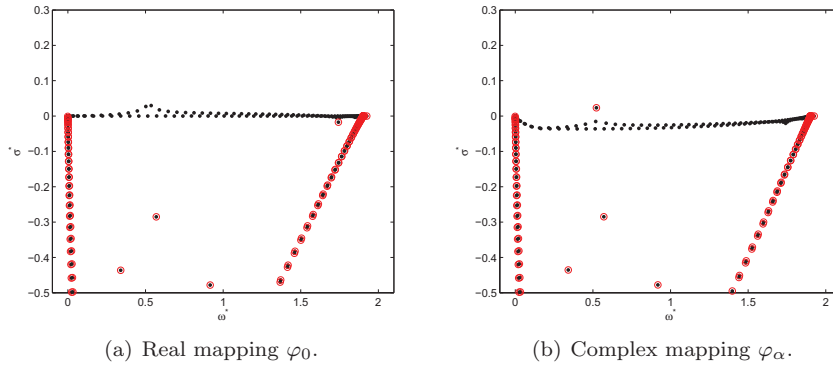


Fig. 22 Eigenvalues spectra for $Ri = 0.15$, $W = 3$, $Re = 10^2$, $k^* = 0.95$. Comparison of the real and complex mappings. Eigenvalues with red circles correspond to converged modes.

Figure 22 presents the eigenvalues spectrum for the two mappings. With the real mapping φ_0 , the KH mode is “hidden” in a continuous spectrum of non-converged mode corresponding to internal waves trapped in absorption critical layers as presented earlier. With the complex mapping φ_α , the continuous spectrum is pushed below while the unstable KH-mode subsists and exhibit a converged Chebyshev decomposition. The use of the complex mapping is equivalent to a deformation of the integration path in the complex plane, which avoids the singularities at the z real points corresponding to the critical layers. The error done with a constant α mapping, which does not bring back the integration path towards the real axes, appears to be negligible for the eigenvalue precision looked at in the present work.

References

- Antkowiak A, Brancher P (2007) On vortex rings around vortices: an optimal mechanism. *Journal of Fluid Mechanics* 578:295–304, DOI 10.1017/S0022112007005198
- Balmforth NJ, Roy A, Caulfield CP (2012) Dynamics of vorticity defects in stratified shear flow. *Journal of Fluid Mechanics* 694:292–331, DOI 10.1017/jfm.2011.548
- Bonometti T, Balachandar S, Magnaudet J (2008) Wall effects in non-boussinesq density currents. *Journal of Fluid Mechanics* 616:445–475, DOI 10.1017/S002211200800414X, URL <http://dx.doi.org/10.1017/S002211200800414X>
- Calmet I, Magnaudet J (1997) Large-eddy simulation of high-schmidt number mass transfer in a turbulent channel flow. *Physics of Fluids* 9(2):438–455, DOI 10.1063/1.869138
- Carpenter JR, Balmforth NJ, Lawrence GA (2010) Identifying unstable modes in stratified shear layers. *Physics of Fluids* 22(5):054,104, DOI DOI:10.1063/1.3379845
- Caulfield CP (1994) Multiple linear instability of layered stratified shear flow. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive* 258(-1):255–285, DOI 10.1017/S0022112094003320
- Corcos GM, Lin SJ (1984) The mixing layer: deterministic models of a turbulent flow. part 2. the origin of the three-dimensional motion. *Journal of Fluid Mechanics* 139:67–95, DOI 10.1017/S0022112084000264
- Corcos GM, Sherman FS (1984) The mixing layer: deterministic models of a turbulent flow. part 1. introduction and the two-dimensional flow. *Journal of Fluid Mechanics* 139:29–65, DOI 10.1017/S0022112084000252
- Cugier P, Le Hir P (2002) Development of a 3d hydrodynamic model for coastal ecosystem modelling. application to the plume of the seine river (france). *Estuarine Coastal And Shelf Science* 55(5):673–695
- Drazin PG, Reid WH (1984) *Hydrodynamic Stability*. Cambridge Mathematical Library, Cambridge Univ Press, DOI 10.2277/0521525411
- Ern P, Charru F, Luchini P (2003) Stability analysis of a shear flow with strongly stratified viscosity. *Journal of Fluid Mechanics* 496:295–312, DOI 10.1017/S0022112003006372
- Fabre D, Sipp D, Jacquin L (2006) Kelvin waves and the singular modes of the Lamb–Oseen vortex. *Journal of Fluid Mechanics* 551:235–274, DOI 10.1017/S0022112005008463
- Fontane J, Joly L (2008) The stability of the variable-density kelvin-helmholtz billow. *Journal of Fluid Mechanics* 612:237–260, DOI 10.1017/S0022112008002966
- Geyer WR, Lavery AC, Scully ME, Trowbridge JH (2010) Mixing by shear instability at high reynolds number. *Geophys Res Lett* 37, DOI 10.1029/2010GL045272
- Govindarajan R (2004) Effect of miscibility on the linear instability of two-fluid channel flow. *International Journal of Multiphase Flow* 30(10):1177 –

- 1192, DOI 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2004.06.006
- Hallez Y, Magnaudet J (2009) A numerical investigation of horizontal viscous gravity currents. *Journal of Fluid Mechanics* 630:71–91, DOI 10.1017/S0022112009006454
- Hardisty J (2007) *Estuaries: Monitoring and Modeling the Physical System*. Blackwell Publishing, DOI 10.1002/9780470750889.fmatter, URL <http://dx.doi.org/10.1002/9780470750889.fmatter>
- Hazel P (1972) Numerical studies of the stability of inviscid stratified shear flows. *Journal of Fluid Mechanics* 51:39–61, DOI 10.1017/S0022112072001065
- Healey JJ (2009) Destabilizing effects of confinement on homogeneous mixing layers. *Journal of Fluid Mechanics* 623:241–271, DOI 10.1017/S0022112008005284
- Helmholtz Hv (1868) über discontinuirliche flüssigkeitsbewegungen. *Monats Königl Preuss Akad Wiss Berlin* 23:215–228
- Hinch EJ (1984) A note on the mechanism of the instability at the interface between two shearing fluids. *Journal of Fluid Mechanics* 144:463–465, DOI 10.1017/S0022112084001695
- Holmboe J (1962) On the behaviour of symmetric waves in stratified shear layers. *Geofffs Publ* 24:67–113
- Hooper AP, Boyd WGC (1983) Shear-flow instability at the interface between two viscous fluids. *Journal of Fluid Mechanics* 128:507–528, DOI 10.1017/S0022112083000580
- Jiang GS, Shu CW (1996) Efficient implementation of weighted ENO schemes. *Journal of Computational Physics* 126:202–228
- Kelvin L (1871) Hydrokinetic solutions and observations. *Phil Mag* 42(4):362–377
- Le Hir P, Cayocca F, Waeles B (2011) Dynamics of sand and mud mixtures: a multiprocess-based modelling strategy. *Continental Shelf Research* 10:S135–S149
- Le Normant C (2000) Three-dimensional modelling of cohesive sediment transport in the Loire estuary. *Hydrological Processes* 14(13):2231–2243
- Legendre D, Magnaudet J (1998) The lift force on a spherical bubble in a viscous linear shear flow. *Journal of Fluid Mechanics* 368:81–126, DOI null
- Malik SV, Hooper AP (2005) Linear stability and energy growth of viscosity stratified flows. *Physics of Fluids* 17(2):024101, DOI 10.1063/1.1834931
- Mashayek A, Peltier WR (2011) Three-dimensionalization of the stratified mixing layer at high reynolds number. *Physics of Fluids* 23(11):111701, DOI 10.1063/1.3651269
- McAnally WH, Friedrichs C, Hamilton D, Hayter E, Shrestha P, Rodriguez H, Sheremet A, Teeter A, Task Committee on Management of Fluid Mud A (2007a) Management of fluid mud in estuaries, bays, and lakes. i: Present state of understanding on character and behavior. *Journal of Hydraulic Engineering* 133(1):9–22, DOI 10.1061/(ASCE)0733-9429(2007)133:1(9)
- McAnally WH, Teeter A, Schoellhamer D, Friedrichs C, Hamilton D, Hayter, Shrestha P, Rodriguez H, Sheremet A, Kirby R, Task Committee on

- Management of Fluid Mud A (2007b) Management of fluid mud in estuaries, bays, and lakes. ii: Measurement, modeling, and management. *Journal of Hydraulic Engineering* 133(1):23–38, DOI 10.1061/(ASCE)0733-9429(2007)133:1(23)
- Mehta AJ, H EJ, Parker WR, Krone RB, Teeter AM (1989) Cohesive sediment transport. i: Process description. *Journal of Hydraulic Engineering* 115:1076
- Miles JW (1961) On the stability of heterogeneous shear flows. *Journal of Fluid Mechanics* 10(04):496–508, DOI 10.1017/S0022112061000305
- Odd NV, Cooper AJ (1989) A two-dimensional model of the movement of fluid mud in a high energy turbid estuary. *Journal of Coastal Research* pp pp. 185–193
- Orr WW (1907) The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. *Proceedings of the Royal Irish Academy Section A: Mathematical and Physical Sciences* 27:9–68 and 69–138, URL <http://www.jstor.org/stable/20490590>
- Ozgen S, Degrez G, Sarma GSR (1998) Two-fluid boundary layer stability. *Physics of Fluids* 10(11):2746–2757, DOI 10.1063/1.869798
- Parchure TM, Mehta AJ (1985) Erosion of soft cohesive sediment deposits. *Journal of Hydraulic Engineering* 111(10):1308–1326, DOI 10.1061/(ASCE)0733-9429(1985)111:10(1308)
- Partheniades E (1965) Erosion and deposition of cohesive soils. *J Hydraulics Division, ASCE* 91(1):105–137
- Patnaik PC, Sherman FS, Corcos GM (1976) A numerical simulation of kelvin-helmholtz waves of finite amplitude. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive* 73(02):215–240, DOI 10.1017/S0022112076001353
- Peltier WR, Caulfield CP (2003) Mixing efficiency in stratified shear flows. *Annual Review of Fluid Mechanics* 35(1):135–167, DOI 10.1146/annurev.fluid.35.101101.161144
- Rayleigh L (1879) On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proceedings of the London Mathematical Society* s1-11(1):57–72, DOI 10.1112/plms/s1-11.1.57
- Sahu KC, Ding H, Valluri P, Matar OK (2009) Linear stability analysis and numerical simulation of miscible two-layer channel flow. *Physics of Fluids* 21(4):042104, DOI 10.1063/1.3116285
- Sommerfeld A (1908) Ein beitrage zur hydrodynamischen erklarung der turbulenten fluessigkeitsbewegungen. *Proceedings 4th International Congress of Mathematicians, Rome* 3:116–24
- Squire HB (1933) On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls. *Proceedings of the Royal Society of London Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 142(847):pp. 621–628
- Staquet C (1995) Two-dimensional secondary instabilities in a strongly stratified shear layer. *Journal of Fluid Mechanics* 296:73–126, DOI 10.1017/S0022112095002072
- Staquet C (2000) Mixing in a stably stratified shear layer: two- and three-dimensional numerical experiments. *Fluid Dynamics Research* 27(6):367

-
- Taylor G (1931) Effect of variation in density on the stability of superposed streams of fluid. *Proceedings of the Royal Society of London Series A* 132(820):499–523
- Wolanski E, Asaeda T, Imberger J (1989) Mixing across a lutocline. *Limnology and Oceanography* 34(5):pp. 931–938
- Yih CS (1955) Stability of two-dimensional parallel flows for three-dimensional disturbances. *Quart Appl Math* 4:434–425
- Yih CS (1967) Instability due to viscosity stratification. *Journal of Fluid Mechanics* 27(02):337–352, DOI 10.1017/S0022112067000357

Bibliographie

- G. Abril, S. A. Riou, H. Etcheber, M. Frankignoulle, R. De Wit, and J. J. Middelburg. Transient, tidal time-scale, nitrogen transformations in an estuarine turbidity maximum–fluid mud system (the gironde, south-west france). *Estuarine, coastal and shelf science*, 50(5) :703–715, 2000.
- C. Ancey. Introduction to fluid rheology. *LHE École Polytechnique Fédérale de Lausanne*, 2005.
- A. Antkowiak and P. Brancher. Transient energy growth for the lamb–oseen vortex. *Physics of Fluids*, 16(1) :L1–L4, 2004. doi : 10.1063/1.1626123. URL <http://link.aip.org/link/?PHF/16/L1/1>.
- A. Antkowiak and P. Brancher. On vortex rings around vortices : an optimal mechanism. *Journal of Fluid Mechanics*, 578 :295–304, 2007. doi : 10.1017/S0022112007005198. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112007005198>.
- P. G. Baines. *Topographic Effects in Stratified Flows*. Cambridge Monographs on Mechanics. Cambridge Univ Press, 1998. doi : 10.2277/0521629233.
- N. J. Balmforth, A. Roy, and C. P. Caulfield. Dynamics of vorticity defects in stratified shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 694 :292–331, 2012. doi : 10.1017/jfm.2011.548. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112011005489.
- H. A. Barnes. Thixotropy—a review. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 70 (1-2) :1–33, 1997.
- G. K. Batchelor. *An introduction to fluid mechanics*. Cambridge University Press, 1967.
- A. Benkenida. *Développement et validation d’une méthode de simulation d’écoulements diphasiques sans reconstruction d’interfaces. Application à la dynamique des bulles de Taylor*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1999. URL <http://oa.imft.fr/1455/>.
- M. Bercovier and M. Engelman. A finite-element method for incompressible non-newtonian flows. *Journal of Computational Physics*, 36(3) :313–326, 1980.
- E. C. Bingham. Fluidity and plasticity. *McGrawhill, New York*, page 86, 1922.

- A. F. Blumberg, B. Galperin, and D. J. O'Connor. Modeling vertical structure of open-channel flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 118(8) :1119–1134, 1992.
- T. Bonometti. *Développement d'une méthode de simulation d'écoulements à bulles et à gouttes*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2005. URL ethesis.inp-toulouse.fr/archive/00000195/01/bonometti.pdf.
- T. Bonometti and J. Magnaudet. An interface-capturing method for incompressible two-phase flows. validation and application to bubble dynamics. *International Journal of Multiphase Flow*, 33(2) :109 – 133, 2007. ISSN 0301-9322. doi : 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2006.07.003. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932206001315>.
- J. R. Booker and F. P. Bretherton. The critical layer for internal gravity waves in a shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 27(03) :513–539, 1967. doi : 10.1017/S0022112067000515. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112067000515>.
- I. Calmet and J. Magnaudet. Large-eddy simulation of high-schmidt number mass transfer in a turbulent channel flow. *Physics of Fluids*, 9(2) :438–455, 1997. doi : 10.1063/1.869138. URL <http://link.aip.org/link/?PHF/9/438/1>.
- Girolamo Cardano. *Ars Magna*. Cardano, G., 1545.
- C. P. Caulfield. Multiple linear instability of layered stratified shear flow. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 258(-1) :255–285, 1994. doi : 10.1017/S0022112094003320. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112094003320.
- C. P. Caulfield and W. R. Peltier. The anatomy of the mixing transition in homogeneous and stratified free shear layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 413(-1) :1–47, 2000. doi : 10.1017/S0022112000008284. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112000008284.
- I. Celik and W. Rodi. Suspended sediment-transport capacity for open channel flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, 117 :191, 1991.
- S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover publications, 1961.
- G. Chapalain, L. Thais, and H. Smaoui. Modeling of a tidal bottom boundary layer with suspended sediment. *Hydrobiologia*, 414 :1–12, 1999.
- F. Charru. *Hydrodynamic instabilities*, volume 37. Cambridge University Press, 2011.
- E. Climent and J. Magnaudet. Large-scale simulations of bubble-induced convection in a liquid layer. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :4827–4830, Jun 1999. doi : 10.1103/PhysRevLett.82.4827. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.4827>.

- G. M. Corcos and S. J. Lin. The mixing layer : deterministic models of a turbulent flow. part 2. the origin of the three-dimensional motion. *Journal of Fluid Mechanics*, 139 : 67–95, 1984. doi : 10.1017/S0022112084000264. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112084000264>.
- G. M. Corcos and F. S. Sherman. The mixing layer : deterministic models of a turbulent flow. part 1. introduction and the two-dimensional flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 139 :29–65, 1984. doi : 10.1017/S0022112084000252. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112084000252>.
- M. d’Olce, J. Martin, N. Rakotomalala, D. Salin, and L. Talon. Pearl and mushroom instability patterns in two miscible fluids’ core annular flows. *Physics of Fluids*, 20(2) : 024104, 2008. doi : 10.1063/1.2838582. URL <http://link.aip.org/link/?PHF/20/024104/1>.
- P. G. Drazin and W. H. Reid. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge Univ Press, 1984. doi : 10.2277/0521525411.
- P. Ern, F. Charru, and P. Luchini. Stability analysis of a shear flow with strongly stratified viscosity. *Journal of Fluid Mechanics*, 496(-1) :295–312, 2003. doi : 10.1017/S0022112003006372. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112003006372.
- D. Fabre, D. Sipp, and L. Jacquin. Kelvin waves and the singular modes of the lamb–oseen vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, 551 :235–274, 2006. doi : 10.1017/S0022112005008463. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112005008463>.
- J. Fontane and L. Joly. The stability of the variable-density kelvin-helmholtz billow. *Journal of Fluid Mechanics*, 612 :237–260, 2008. doi : 10.1017/S0022112008002966. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112008002966>.
- M. Frankignoulle, G. Abril, A. Borges, I. Bourge, C. Canon, B. Delille, E. Libert, and J.-M. Théate. Carbon dioxide emission from european estuaries. *Science*, 282(5388) : 434–436, 1998. doi : 10.1126/science.282.5388.434. URL <http://www.sciencemag.org/content/282/5388/434.abstract>.
- I. A. Frigaard and C. Nouar. On the usage of viscosity regularisation methods for viscoplastic fluid flow computation. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 127(1) : 1–26, 2005.
- W. R. Geyer, A. C. Lavery, M. E. Scully, and J. H. Trowbridge. Mixing by shear instability at high reynolds number. *Geophys. Res. Lett.*, 37, 11 2010. doi : 10.1029/2010GL045272. URL <http://dx.doi.org/10.1029/2010GL045272>.
- R. Govindarajan. Effect of miscibility on the linear instability of two-fluid channel flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 30(10) :1177 – 1192, 2004. ISSN 0301-9322. doi : 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2004.06.006. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932204001041>.

- N. Gratiot. *Etude expérimentale de la formation des couches de crème de vase turbulentes = an experimental study of the formation of turbulent fluid mud*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier Grenoble1, 2000. URL <http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=168788>.
- N. Gratiot, H. Michallet, and M. Mory. On the determination of the settling flux of cohesive sediments in a turbulent fluid. *J. Geophys. Res.*, 110(C6) :C06004, 2005. URL http://www.lthe.fr/PagePerso/gratiot/publi/Gratiot_etal_JGR05.pdf.
- Y. Hallez. *Mélange gravitationnel de fluides en géométrie confinée*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2007. URL <http://ethesis.inp-toulouse.fr/archive/00000520/>.
- Y. Hallez and J. Magnaudet. A numerical investigation of horizontal viscous gravity currents. *Journal of Fluid Mechanics*, 630 :71–91, 2009. doi : 10.1017/S0022112009006454. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112009006454>.
- J. Hardisty. *Estuaries : Monitoring and Modeling the Physical System*. Blackwell Publishing, 2007. ISBN 9780470750889. doi : 10.1002/9780470750889.fmatter. URL <http://dx.doi.org/10.1002/9780470750889.fmatter>.
- P. Hazel. Numerical studies of the stability of inviscid stratified shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 51(01) :39–61, 1972. doi : 10.1017/S0022112072001065. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112072001065>.
- H. von Helmholtz. über discontinuirliche flüssigkeitsbewegungen. *Monats. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 23 :215–228, 1868.
- W. Herschel and R. Bulkley. Konsistenzmessungen von gummi-benzollösungen. *Colloid & Polymer Science*, 39 :291–300, 1926. ISSN 0303-402X. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01432034>. 10.1007/BF01432034.
- D. F. Hill and M. A. Foda. Effects of viscosity and elasticity on the nonlinear resonance of internal waves. *Journal of geophysical research*, 104(10) :951–10, 1999.
- E. J. Hinch. A note on the mechanism of the instability at the interface between two shearing fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 144 :463–465, 1984. doi : 10.1017/S0022112084001695. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112084001695>.
- A. McC. Hogg and G. N. Ivey. The kelvin-helmholtz to holmboe instability transition in stratified exchange flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 477(-1) :339–362, 2003. doi : 10.1017/S0022112002003397. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112002003397.
- A. P. Hooper and W. G. C. Boyd. Shear-flow instability at the interface between two viscous fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 128 :507–528, 1983. doi : 10.1017/S0022112083000580. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112083000580>.

- L. N. Howard. Note on a paper of John W. Miles. *Journal of Fluid Mechanics*, 10(04) : 509–512, 1961. doi : 10.1017/S0022112061000317. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112061000317>.
- M. Jamali, G. A. Lawrence, and B. Seymour. A note on the resonant interaction between a surface wave and two interfacial waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 491 :1–9, 2003.
- G.-S. Jiang and C.-W. Shu. Efficient implementation of weighted ENO schemes. Contractor rept., Institute for computer applications in science and engineering Hampton Va, October 1995. URL <http://www.dtic.mil/cgi-bin/GetTRDoc?AD=ADA301993>.
- L. Joly, J. Fontane, and P. Chassaing. The Rayleigh–Taylor instability of two-dimensional high-density vortices. *Journal of Fluid Mechanics*, 537 :415–431, 2005. doi : 10.1017/S0022112005005495. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112005005495>.
- Lord Kelvin. Hydrokinetic solutions and observations. *Phil. Mag. (4)*, 42 :362–377, 1871.
- G. C. Kineke, R. W. Sternberg, J. H. Trowbridge, and W. R. Geyer. Fluid-mud processes on the Amazon continental shelf. *Continental Shelf Research*, 16(5-6) :667 – 696, 1996. ISSN 0278-4343. doi : DOI:10.1016/0278-4343(95)00050-X. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6VBJ-3Y2FWNC-18/2/d9addf7be96234c2c8132391976d25ba>.
- G. C. Kineke, K. J. Woolfe, S. A. Kuehl, J. D. Milliman, T. M. Dellapenna, and R. G. Purdon. Sediment export from the Sepik River, Papua New Guinea : evidence for a divergent sediment plume. *Continental Shelf Research*, 20(16) :2239 – 2266, 2000. ISSN 0278-4343. doi : 10.1016/S0278-4343(00)00069-8. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0278434300000698>.
- G. P. Klaassen and W. R. Peltier. The influence of stratification on secondary instability in free shear layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 227 :71–106, 1991. doi : 10.1017/S0022112091000046. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112091000046>.
- C. Kranenburg and J. C. Winterwerp. Erosion of fluid mud layers. I : Entrainment model. *Journal of Hydraulic Engineering*, 123(6) :504–511, 1997. doi : 10.1061/(ASCE)0733-9429(1997)123:6(504). URL <http://link.aip.org/link/?QH/123/504/1>.
- R. B. Krone. A study of rheologic properties of estuarial sediments, September 1963.
- P. Le Hir, P. Bassoullet, and H. Jestin. Application of the continuous modeling concept to simulate high-concentration suspended sediment in a macrotidal estuary. In William H. McAnally and Ashish J. Mehta, editors, *Coastal and Estuarine Fine Sediment Processes*, volume 3 of *Proceedings in Marine Science*, pages 229 – 247. Elsevier, 2000. doi : DOI:10.1016/S1568-2692(00)80124-2. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1568269200801242>.

- P. Le Hir, Y. Monbet, and F. Orvain. Sediment erodability in sediment transport modelling : Can we account for biota effects? *Continental Shelf Research*, 27(8) :1116 – 1142, 2007. ISSN 0278-4343. doi : DOI:10.1016/j.csr.2005.11.016. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6VBJ-4MSXT96-6/2/1bfd813616ac73062c3dc5caa455f67b>. Natural Coastal Mechanisms - Flume and Field Experiments on Links between Biology, Sediments and Flow.
- C. Le Normant. *Modélisation numérique tridimensionnelle des processus de transport des sédiments cohésifs en environnement estuarien = Three dimensional numerical modelling of cohesive sediment transport in estuaries*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1995.
- D. Legendre and J. Magnaudet. The lift force on a spherical bubble in a viscous linear shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 368 :81–126, 1998. doi : null. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112098001621>.
- D. Legendre, J. Magnaudet, and G. Mougine. Hydrodynamic interactions between two spherical bubbles rising side by side in a viscous liquid. *Journal of Fluid Mechanics*, 497 :133–166, 2003. doi : 10.1017/S0022112003006463. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112003006463>.
- S. Li and H. Li. Compressible mhd or hd equations. Technical report, Los Alamos National Laboratory, 2006. URL <http://math.lanl.gov/Research/Highlights/amrmhd.shtml>.
- J. Magnaudet, M. Rivero, and J. Fabre. Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. part 1. steady straining flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 284 :97–135, 1995. doi : 10.1017/S0022112095000280. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112095000280>.
- A. Mashayek and W. R. Peltier. Three-dimensionalization of the stratified mixing layer at high reynolds number. *Physics of Fluids*, 23(11) :111701, 2011. doi : 10.1063/1.3651269. URL <http://link.aip.org/link/?PHF/23/111701/1>.
- W. H. McAnally and A. J. Mehta. Significance of aggregation of fine sediment particles in their deposition. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, 54(4) :643 – 653, 2002. ISSN 0272-7714. doi : 10.1006/ecss.2001.0847. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0272771401908479>.
- W. H. McAnally, C. Friedrichs, D. Hamilton, E. Hayter, P. Shrestha, H. Rodriguez, A. Sheremet, and A. ASCE Task Committee on Management of Fluid Mud Teeter. Management of fluid mud in estuaries, bays, and lakes. i : Present state of understanding on character and behavior. *Journal of Hydraulic Engineering*, 133(1) :9–22, 2007. doi : 10.1061/(ASCE)0733-9429(2007)133:1(9). URL <http://link.aip.org/link/?QHY/133/9/1>.

- A. J. Mehta. Understanding fluid mud in a dynamic environment. *Geo-Marine Letters*, 11(3-4) :113–118, 1991. doi : 10.1007/BF02430995. URL <http://www.springerlink.com/content/f761t65201307127/?MUD=MP>.
- A. J. Mehta, E. J. Hayter, W. R. Parker, R. B. Krone, and A. M. Teeter. Cohesive sediment transport. i : Process description. *Journal of Hydraulic Engineering*, 115 :1076, 1989. URL http://ascelibrary.org/hyo/resource/1/jhend8/v115/i8/p1076_s1.
- E. Meiburg and B. Kneller. Turbidity currents and their deposits. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 42(1) :135–156, 2010. doi : 10.1146/annurev-fluid-121108-145618. URL <http://www.annualreviews.org/doi/abs/10.1146/annurev-fluid-121108-145618>.
- C. Migniot. Etude des propriétés physiques de différents sédiments très fins et de leur comportement sous des actions hydrodynamiques. *La houille blanche*, 7(7) :591–620, 1968.
- J. W. Miles. On the stability of heterogeneous shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 10(04) :496–508, 1961. doi : 10.1017/S0022112061000305. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112061000305>.
- J. W. Miles. On the generation of surface waves by shear flows. part 4. *Journal of Fluid Mechanics*, 13(03) :433–448, 1962. doi : 10.1017/S0022112062000828. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112062000828>.
- M. Mohan Rai and P. Moin. Direct simulations of turbulent flow using finite-difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 96(1) :15 – 53, 1991. ISSN 0021-9991. doi : 10.1016/0021-9991(91)90264-L. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002199919190264L>.
- N. V. M. Odd and A. J. Cooper. A two-dimensional model of the movement of fluid mud in a high energy turbid estuary. *Journal of Coastal Research*, pages pp. 185–193, 1989. ISSN 07490208. URL <http://www.jstor.org/stable/25735376>.
- A. Olivier. Homme et littoral : les liaisons houleuses. *Journal du CNRS*, 210 :Juillet–Août, 2007.
- S. A. Orszag. Accurate solution of the orr–sommerfeld stability equation. *Journal of Fluid Mechanics*, 50(04) :689–703, 1971. doi : 10.1017/S0022112071002842. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112071002842>.
- S. Ozgen, G. Degrez, and G. S. R. Sarma. Two-fluid boundary layer stability. *Physics of Fluids*, 10(11) :2746–2757, 1998. doi : 10.1063/1.869798. URL <http://link.aip.org/link/?PHF/10/2746/1>.
- T. M. Parchure and A. J. Mehta. Erosion of soft cohesive sediment deposits. *Journal of Hydraulic Engineering*, 111(10) :1308–1326, 1985. doi : 10.1061/(ASCE)0733-9429(1985)111:10(1308). URL <http://link.aip.org/link/?QHY/111/1308/1>.

- E. Partheniades. Erosion and deposition of cohesive soils. *J. Hydraulics Division, ASCE*, 91(1) :105–137, 1965.
- H. Paucot and R. Wollast. Transport and transformation of trace metals in the scheldt estuary. *Marine Chemistry*, 58(1-2) :229–244, 1997.
- W. R. Peltier and C. P. Caulfield. Mixing efficiency in stratified shear flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 35(1) :135–167, 2003. doi : 10.1146/annurev.fluid.35.101101.161144. URL <http://www.annualreviews.org/doi/abs/10.1146/annurev.fluid.35.101101.161144>.
- D. Pham Van Bang, G. Ovarlez, and L. Tocquer. Effets de la densité et de la structuration sur les caractéristiques rhéologiques de la vase. *La Houille Blanche*, 2(2) :85–93, apr 2007. doi : 10.1051/lhb:2007023. URL <http://dx.doi.org/10.1051/lhb:2007023>.
- Lord Rayleigh. On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s1-11(1) :57–72, 1879. doi : 10.1112/plms/s1-11.1.57. URL <http://plms.oxfordjournals.org/content/s1-11/1/57.short>.
- J. Reinaud, L. Joly, and P. Chassaing. The baroclinic secondary instability of the two-dimensional shear layer. *Physics of Fluids*, 12(10) :2489–2505, 2000. doi : 10.1063/1.1289503. URL <http://link.aip.org/link/?PHF/12/2489/1>.
- O. Reynolds. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Proceedings of the Royal Society of London*, 35(224-226) :84–99, 1883. URL <http://rspl.royalsocietypublishing.org/content/35/224-226/84.full.pdf>.
- W. C. Reynolds, D. E. Parekh, P. J. D. Juvet, and M. J. D. Lee. Bifurcating and blooming jets. *Annual review of fluid mechanics*, 35(1) :295–315, 2003.
- M. A. Ross and A. J. Mehta. On the mechanics of lutoclines and fluid mud. *Journal of Coastal Research*, pages pp. 51–62, 1989. ISSN 07490208. URL <http://www.jstor.org/stable/25735365>.
- A. Roy. Dynamics of vorticity defects in stratified shear. Technical report, DTIC Document, 2010.
- C. Runge. Über empirische funktionen und die interpolation zwischen äquidistanten ordinaten. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 46(224-243) :20, 1901.
- K. C. Sahu, H. Ding, P. Valluri, and O. K. Matar. Linear stability analysis and numerical simulation of miscible two-layer channel flow. *Physics of Fluids*, 21(4) :042104, 2009. doi : 10.1063/1.3116285. URL <http://link.aip.org/link/?PHF/21/042104/1>.
- M. Sanchez and D. Levacher. Erosion of a mud from the loire estuary by a flow. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, 67 :597–605, 11 2008. doi : 10.1007/s10064-008-0159-9. URL <http://www.springerlink.com/content/J780437848576V58>.

- P. J. Schmid and D. S. Henningson. *Stability and Transition in Shear Flows*. New York : Springer-Verlag, 2001.
- J. E. Simpson. *Gravity currents : In the environment and the laboratory*. Cambridge Univ Pr, 1999.
- H. Smaoui, F. Boughanim, and G. Chapalain. 1d vertical model for suspended sediment transport in turbulent tidal flow : Application to the english channel. *Computers & Geosciences*, 33(9) :1111 – 1129, 2007. ISSN 0098-3004. doi : DOI:10.1016/j.cageo.2006.11.016. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V7D-4NP983G-1/2/76e775f2b0a4a586fee52a234819f452>.
- H. B. Squire. On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 142(847) :pp. 621–628, 1933. ISSN 09501207. URL <http://www.jstor.org/stable/96239>.
- R. Srinivas and A. J. Mehta. Observations on estuarine fluid mud entrainment. *Int. J. Sed. Res.*, 5(1) :15–22, 1989.
- C. Staquet. Two-dimensional secondary instabilities in a strongly stratified shear layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 296 :73–126, 1995. doi : 10.1017/S0022112095002072. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112095002072>.
- C. Staquet. Mixing in a stably stratified shear layer : two- and three-dimensional numerical experiments. *Fluid Dynamics Research*, 27(6) :367, 2000. URL <http://stacks.iop.org/1873-7005/27/i=6/a=A02>.
- E. W. Tedford, J. R. Carpenter, R. Pawlowicz, R. Pieters, and G. A. Lawrence. Observation and analysis of shear instability in the fraser river estuary. *Journal of Geophysical Research*, 114, 2009. doi : 10.1029/2009JC005313. URL <http://www.agu.org/pubs/crossref/2009/2009JC005313.shtml>.
- M. F. C. Thorn. Physical processes of siltation in tidal channels. *Proceedings of Hydraulic Modelling Applied to Maritime Engineering Problems, ICE, London*, pages 47–55, 1981.
- S. A. Thorpe. Experiments on the instability of stratified shear flows : miscible fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 46(02) :299–319, 1971. doi : 10.1017/S0022112071000557. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112071000557>.
- S. A. Thorpe. Laboratory observations of secondary structures in kelvin-helmholtz billows and consequences for ocean mixing. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 34(1-4) :175–199, 1985. doi : 10.1080/03091928508245442. URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/03091928508245442>.
- O. Thual and L. Lacaze. Fluid boundary of a viscoplastic Bingham flow for finite solid deformations. *Journal of Non-newtonian Fluid Mechanics*, 165(3-4) :84–87, FEB 2010. ISSN 0377-0257. doi : {10.1016/j.jnnfm.2009.09.005}.

- L. C. Van Rijn. *Principles of sediment transport in rivers, estuaries and coastal seas*. Aqua publications, 1993.
- E. Villermaux. On the role of viscosity in shear instabilities. *Physics of Fluids*, 10(2) :368–373, 1998. doi : 10.1063/1.869529. URL <http://link.aip.org/link/?PHF/10/368/1>.
- J. A. Weideman and S. C. Reddy. A matlab differentiation matrix suite. *ACM Trans. Math. Softw.*, 26(4) :465–519, December 2000. ISSN 0098-3500. doi : 10.1145/365723.365727. URL <http://doi.acm.org/10.1145/365723.365727>.
- R. Whitehouse, R. Soulsby, W. Roberts, and H. Mitchener. *Dynamics of Estuarine Muds*. Inst of Civil Engineers Pub, 2000. doi : 9780727728647.
- E. Wolanski, T. Asaeda, and J. Imberger. Mixing across a lutocline. *Limnology and Oceanography*, 34(5) :pp. 931–938, 1989. ISSN 00243590. URL <http://www.jstor.org/stable/2837143>.
- L. D. Wright, C. T. Friedrichs, S. C. Kim, and M. E. Scully. Effects of ambient currents and waves on gravity-driven sediment transport on continental shelves. *Marine Geology*, 175(1–4) :25 – 45, 2001. ISSN 0025-3227. doi : 10.1016/S0025-3227(01)00140-2. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0025322701001402>.
- C.-S. Yih. Stability of two-dimensional parallel flows for three-dimensional disturbances. *Quart. Appl. Math*, 4 :434–425, 1955.
- C.-S. Yih. Instability due to viscosity stratification. *Journal of Fluid Mechanics*, 27 (02) :337–352, 1967. doi : 10.1017/S0022112067000357. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112067000357>.
- Y. Zang, R. L. Street, and J. R. Koseff. A dynamic mixed subgrid-scale model and its application to turbulent recirculating flows. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 5(12) :3186–3196, 1993. doi : 10.1063/1.858675. URL <http://link.aip.org/link/?PFA/5/3186/1>.