



N° d'ordre : 2550

THESE

présentée

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

École doctorale : Transferts, dynamique des fluides, énergétique et procédés

Spécialité : Dynamique des fluides

Par M. KONAN N'Dri Arthur

Titre de la thèse Modélisation numérique stochastique des rebonds de particules sur parois rugueuses

Soutenue le 29 novembre 2007 devant le jury composé de :

M.	Kyle D. SQUIRES	Président
MM.	Olivier SIMONIN	Directeur de thèse
	Benoît OESTERLE	Rapporteur
	Jacques BOREE	Rapporteur
	Martin SOMMERFELD	Membre
	ADOU Kablan Jérôme	Membre

Résumé

Les interactions particules-paroi constituent un important mécanisme partiellement compris dans le cadre des écoulements turbulents diphasiques confinés et à inclusions dispersées. Pour les particules inertielles dont le mouvement est fortement influencé par les rebonds avec la paroi, la bonne prise en compte de ces interactions est cruciale pour une prédiction correcte des propriétés statistiques de l'écoulement. Une première étape à la compréhension des interactions particules/paroi a été de considérer des parois lisses. Cette hypothèse a permis non seulement l'élaboration de base de données de référence, mais aussi la mise en exergue des mécanismes intervenant au cours de ces rebonds et a conduit au développement de modèles eulériens pour les parois lisses (Sakiz & Simonin, 1999). Des investigations expérimentales récentes (Kussin & Sommerfeld, 2004 ; Benson *et al.*, 2005) en canal montrent d'importantes modifications des propriétés statistiques de la phase dispersée d'un écoulement turbulent gaz-particules en raison de la rugosité des parois. Pour modéliser les collisions de particules avec une paroi rugueuse, le mécanisme de "*Shadow Effect*" proposé par Sommerfeld & Huber (1999), est le modèle lagrangien le plus satisfaisant en comparaison avec l'expérience. Dans le cadre de cette thèse, sa mise à contribution pour la dérivation de conditions aux limites eulériennes à la paroi s'est heurtée à un problème de fermeture lié aux très grands nombres de particules rasantes après le rebond, générées par ce modèle. Des simulations LES/DPS à bas nombre de Reynolds réalisées en canal, dans lesquelles l'effet de la rugosité des parois sur les particules est simulé à l'aide du "*Shadow Effect Model*" ont par ailleurs confirmé, à travers les fonctions de distribution des angles de rebonds des particules, cet aspect inattendu de ce modèle de paroi rugueuse. En outre l'interprétation des résultats des simulations, en s'appuyant sur l'approche aux moments (Simonin, 1996), a permis de mieux appréhender et de proposer des mécanismes responsables des modifications des premiers moments de la phase dispersée. Pour palier les insuffisances du "*Shadow Effect Model*", nous avons développé un modèle lagrangien "*Rough-Wall Multi-Collisions Model*", basé sur une description stochastique de l'interaction particule/paroi rugueuse et intègre dans sa formulation des effets de rebonds multiples. Le modèle est d'abord validé par comparaison à des simulations LES/DPS en canal avec des rebonds multiples déterministes des particules sur les parois rugueuses géométriques du canal. Il est ensuite évalué dans le cadre de la simulation de l'étude expérimentale de Sommerfeld & Kussin (2004) en canal, à l'aide de simulations LES/DPS à grand nombre de Reynolds de la phase gazeuse. Le "*Rough-Wall Multi-Collisions Model*" est au final employé pour dériver des conditions aux limites eulériennes aux parois.

Mots clés : collisions particule/paroi paroi rugueuse *shadow effect*
LES/DPS fonctions de distribution canal



Abstract

Particle/wall interactions constitute an important mechanism, that is partially understood in confined two-phase turbulent flows. For inertial particles whose motion is strongly influenced by the rebound from the wall, the correct accounting of particle-wall interactions is crucial in order to more accurately predict properties of the dispersed flow. In order to gain a basic understanding of the controlling mechanisms, research has been mostly directed toward particle bouncing on smooth walls. This assumption allowed not only the development of benchmark database, but also the highlighting of mechanisms which occur during these rebounds, and has provided a basis for the derivation of sophisticated wall boundary conditions for the first-order moments of the dispersed phase (Sakiz & Simonin, 1999). Recent measurements (Kussin & Sommerfeld, 2004 ; Benson *et al.*, 2005) in channel flow have shown that wall roughness has a strong effect on dispersed phase properties. To model particle/rough wall collisions, the "*Shadow Effect*" mechanism, suggested by Sommerfeld & Huber (1999), is the most satisfactory Lagrangian model by comparison to measurements. In the framework of this thesis, its application for derivation of the wall Eulerian boundary conditions failed because of important number of grazing particles generated by the "*Shadow Effect Model*". LES/DPS simulations of turbulent two-phase flows at low Reynolds number in channel flow, in which the wall roughness effects on dispersed phase are simulated by the "*Shadow Effect Model*" borne out its unexpected aspect through the probability distribution functions of the rebound angles of the particles from wall. From PDF approach (Simonin, 1996), mechanisms which drive the influence of wall roughness on dispersed phase were shown. To describe more physically the mechanisms occurring during the rebound process and to correct the deficiencies of the "*Shadow Effect Model*", we developed a new Lagrangian model "*Rough-Wall Multi-Collisions Model*", based on a stochastic description of particule/rough wall interaction and it integrates multiple rebound effects in its formulation. The "*Rough-Wall Multi-Collisions Model*" was first validated by comparison to LES/DPS simulations in channel flows with deterministic multiple rebounds of the particles on geometrical rough walls of the channel. Second, it has been assessed in the framework of the simulation from LES/DPS by comparison with the experiment of Sommerfeld & Kussin (2004). Finally, the "*Rough-Wall Multi-Collisions Model*" was used to derive wall Eulerian boundary conditions.

Keywords : particle/wall collisions rough wall *shadow effect*
LES/DPS probability density function channel



Remerciements

Le travail de thèse présenté dans ce mémoire a été effectué au sein du groupe Écoulements Et Combustion de l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse. Cette étude a été possible grâce à la collaboration entre les Professeurs Olivier SIMONIN (de l'Institut National Polytechnique de Toulouse / ENSEEIHT) et ADOU Kablan Jérôme (de l'Université de Cocody/Abidjan, Côte d'Ivoire, Département de Mathématiques & Informatique). Je voudrais leur exprimer ma profonde gratitude.

Au Professeur Olivier SIMONIN, je tiens à lui exprimer ma sincère et profonde reconnaissance, non seulement pour sa confiance, mais aussi pour son soutien tout azimut et sans faille depuis le début de cette thèse. Je voudrais surtout lui tirer mon chapeau pour l'excellent enseignement des écoulements diphasiques qu'il a su me dispenser avec patience.

Mes chaleureux remerciements vont aussi à l'endroit des membres du jury qui m'ont fait l'honneur de juger ce travail :

- Kyle D. SQUIRES, Président du jury,
- Benoît OESTERLE et Jacques BOREE, rapporteurs,
- Martin SOMMERFELD et ADOU Kablan Jérôme, examinateurs.

Je remercie spécialement le Professeur Kyle D. SQUIRES, que je pourrais considérer comme un co-directeur de cette thèse dans la mesure où, ayant réalisé les simulations numériques de cette thèse à l'aide de son code, j'ai eu des discussions permanentes et des séances de travail fréquentes avec lui, et ce, au sujet de la modélisation et de la simulation numérique des grandes échelles du fluide.

Je tiens à remercier les services généraux : *Cosinus* (Annaïg PEDRONO et Hervé NEAU pour leur promptitude à m'aider à compiler et à "linker" le code de calcul que j'ai utilisé), à la reprographie (Muriel SABATER). Je remercie également Florence COLOMBIES, la gestionnaire du groupe, qui était

constamment confronté au cas administratif que je représentais la plupart du temps, et qui heureusement pour moi, savait toujours trouver les solutions adéquates.

J'adresse mes sincères remerciements à Pascal FEDE qui m'a très souvent éclairé de ses explications des mécanismes physiques dans les écoulements gaz-particules et qui m'a permis de débusquer les quelques coquilles qui traînaient dans les trois premiers chapitres de cette thèse grâce à une lecture minutieuse desdits chapitres.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude à tout ce beau monde que regorge le groupe EEC auprès duquel j'ai su apprécier l'école française sans oublier leur convivialité permanente : Anthony, Virginie, Moïse, Florian, Magalie, Benjamin, Xavier, Eléonore, Brice, Jean-François, Viviane, Nicolas, Gérard, Benoît, Laurent, Roël, Thomas, Mathieu (excellent ami dans la vie de tous les jours), Dirk, Zafer, Ali, Enrica, sans oublier Olivier Kannengieser (du groupe INTERFACE) pour le bon travail de master qui a inspiré la modélisation statistique de l'effet de rebonds multiples des deux derniers chapitres.

Cette ligne spéciale pour la famille BRUYERE auprès de laquelle je découvre avec plaisir, les facettes de la culture française dans son ensemble, et cette fois, pas par documents (livres, films, etc ...) interposés.

Je remercie enfin ma famille qui m'a toujours soutenu. Les derniers BISOUS de remerciements reviennent à mon Epouse, DJO Lou Bouénan Charlotte, qui fait montre d'un soutien de tous les instants.

Table des matières

Nomenclature	1
Lettres latines	1
Lettres grecques	4
Introduction	7
1 Description statistique du mouvement de particules dans un champ fluide turbulent	13
1.1 Introduction	13
1.2 Modélisation eulérienne du mouvement de particules dans un écoulement	15
1.2.1 De l'équation de Liouville à celle de Boltzmann	15
1.2.2 Modélisation aux moments	19
1.2.3 Modèle de fermeture des équations aux moments proposé par Simonin	24
1.3 Modélisation statistique des interactions particules-paroi	29
1.3.1 Modèle en théorie cinétique des écoulements granulaires secs	30
1.3.2 Proposition de Cercignani en théorie cinétique des gaz	31
1.4 Traitement des parois lisses en écoulement gaz-solides	34
1.4.1 Application du modèle de Cercignani	34
1.4.2 Proposition de Derevich et Zaichik (1988)	36
2 Modélisation statistique de l'interaction particules-paroi rugueuse	39
2.1 Introduction	39
2.2 Modélisations des effets de parois rugueuses en simulations lagrangiennes	41
2.2.1 Modèles déterministes de la rugosité des parois	41
2.2.2 Le " <i>Abnormal bouncing model</i> " de Tsuji <i>et al.</i> (1987)	44
2.2.3 Modèle stochastique de Sommerfeld <i>et al.</i> (1999)	47

2.3	Modélisation statistique Eulérienne de rebonds sur paroi rugueuse	53
2.3.1	Modélisation de la probabilité de transition	53
2.3.2	Dérivation eulerienne de conditions aux limites aux parois rugueuses	62
2.3.3	Modèle de corrélation partielle	66
2.3.4	Hypothèse de $\gamma \ll 1$	73
2.3.5	Hypothèse d'un angle minimum de rebond $\alpha_0^+ > 0$	74
2.4	Modèle simplifié	78
2.5	Conclusion du chapitre	82
3	Simulations numériques Euler/Lagrange (LES/DPS) en canal avec parois rugueuses	85
3.1	Introduction	85
3.2	Simulation des grandes échelles du fluide	86
3.2.1	Equations du mouvement des grandes échelles	87
3.2.2	Modèles de fermeture des équations de la LES	88
3.2.3	Méthodes numériques de la simulation des grandes échelles	92
3.3	Simulation de l'écoulement diphasique gas-particules	100
3.3.1	Equations du mouvement de translation des particules	100
3.3.2	Interpolation de la vitesse du fluide à la position des particules	102
3.3.3	Traitement des collisions particules/particules	103
3.3.4	Traitement des rebonds particules/paroi	105
3.3.5	Calcul des moyennes euleriennes de la phase dispersée dans l'écoulement	108
3.3.6	Analyse de l'influence de la rugosité des parois sur la phase dispersée	109
3.4	Validation de la modélisation eulerienne des conditions aux limites à la paroi	128
3.4.1	Calcul des moyennes à la paroi	128
3.4.2	Nouvelles moyennes euleriennes dans l'écoulement	131
3.4.3	Continuité des différents moments incidents, réfléchis et globaux à la paroi	134
3.4.4	Etude des PDF des angles d'incidence et de rebond	135
3.5	Critique du modèle lagrangien de rebond et conclusion du chapitre	140
4	Vers une nouvelle modélisation lagrangienne des interactions particules-paroi rugueuse	143
4.1	Introduction	143
4.2	Etudes préliminaires de base	144
4.3	Simulations LES+DPS à bas Reynolds avec rebonds multiples déterministes	147

4.3.1	Méthode de traitement du rebond particules-paroi rugueuse	147
4.3.2	Analyse des résultats de simulations	148
4.4	Modélisation stochastique Lagrangienne des interactions particules-paroi rugueuse avec effet multi-rebond	151
4.4.1	Bases de la modélisation	151
4.4.2	Validation du modèle d'effet de rebond stochastique	168
4.4.3	" <i>Rough Wall Multi-Collision Model</i> "	170
4.5	Application du " <i>Rough Wall Multi-Collisions Model</i> " en simulation LES+DPS à bas nombre de Reynolds	172
4.5.1	Analyse des résultats des simulations numériques	172
4.6	Simulation LES+DPS en canal à grand Reynolds : application du " <i>Rough Wall Multi-Collisions Model</i> "	173
4.6.1	Présentation sommaire du cas expérimental	180
4.6.2	Simulation des grandes échelles du fluide	181
4.6.3	Traitement Lagrangien de la phase dispersée	185
4.6.4	Etude des distributions des angles et vitesses à la paroi	192
4.7	Conclusion	196
5	Modélisation Eulériennes de conditions aux limites aux parois rugueuses avec effet de rebonds multiples	201
5.1	Introduction	201
5.2	Description Eulérienne théorique de l'interaction particule/paroi rugueuse avec effet multi-rebond : cas général	202
5.2.1	Distribution des vitesses de rebond des particules	202
5.2.2	Dérivation des moments d'ordre quelconque de la fonction de distribution des vitesses à la paroi	204
5.3	Traitement des rebonds inélastiques avec friction	206
5.3.1	Formulation des conditions aux limites	207
5.3.2	Calcul des moments pairs de la vitesse normale à la paroi	209
5.3.3	Fermeture des conditions aux limites	213
5.4	Simulations numériques Euler-Euler de l'étude expérimentale de Sommerfeld & Kussin (2004)	226

5.4.1 Résultats et discussions	227
5.5 Conclusion	227
Conclusion	233
Bibliographie	238
Publications	249

Nomenclature

Lettres latines

A_r	amplitude de rugosité
\underline{c}_p	réalisation de vitesse instantanée d'une particule p dans l'espace des phases
C_L	coefficient de masse ajoutée
C_D	coefficient de traînée [(1.30), p.21]
C_S	constante de Smagorinsky
d_p	diamètre des particules
D^-	espace des vitesses incidentes à la paroi
D^+	espace des vitesses réfléchies à la paroi
e_c	coefficient de restitution lors d'une collision particule/particule [(3.38), p.103]
e_w	coefficient de restitution lors d'une collision particule/paroi [(1.97), p.34]
\underline{F}_A	force de masse ajoutée [(1.34), p.22]
\underline{F}_B	force de Basset ou d'histoire [(1.35), p.22]
\underline{F}_p	force de gradient de pression et flottabilité [(1.33), p.22]
$f_{f p}$	fonction de distribution des vitesses du fluide conditionnée par la présence d'une particule
f_{fp}	fonction de distribution des vitesses jointe fluide-particule
f_p	fonction de distribution des vitesses des particules
f_p^-	fonction de distribution des vitesses des particules incidentes à la paroi
f_p^+	fonction de distribution des vitesses des particules réfléchies à la paroi
f_{py}^-	fonction de distribution des vitesses des particules incidentes à la paroi dans la direction transversale

\underline{g}	accélération de la pesanteur
$G_{fp,ij}$	tenseur de corrélation du schéma de Langevin
H	fonction de Heaviside [(2.20), p.55]
\underline{J}	impulsion exercée lors d'un rebond ou d'une collision (p.103)
k^+	nombre de Reynolds de rugosité
L_x, L_y, L_z	dimension longitudinale, transversale et latérale du canal
L_r	période de rugosité [figure 2.1, p.47]
m_p	masse d'une particule [14]
n_p	densité numérique de particules
n_p^-	densité numérique de particules incidentes
n_p^+	densité numérique de particules réfléchies
\underline{n}	vecteur unitaire normal à la paroi macroscopique
\underline{n}_γ	vecteur unitaire normal à une paroi lisse incliné d'un angle γ
P	loi de distribution probabiliste des angles de rugosité de paroi
P^*	probabilité d'effectuer n rebond avant de quitter la paroi
P_{eff}	distribution effective des angles de rugosité de paroi [(2.11), p.50] (Sommerfeld & Huber (1999) [98])
P_r	probabilité conditionnelle de l'angle de rugosité de paroi par l'angle d'incidence des particules à la paroi [(2.20), p.55]
R	densité de probabilité de transition de rebond particule/paroi sur la paroi macroscopique [(2.17), p.53]
$R_{f,ij}$	composante du tenseur des contraintes de Reynolds du fluide
$R_{fp,ij}$	composante du tenseur des contraintes fluide-particules
$R_{p,ij}$	composante du tenseur des contraintes des contraintes cinétiques des particules
Re_p	nombre de Reynolds particulaire
R_γ	densité de probabilité de transition de rebond particule/paroi sur une paroi lisse incliné d'un angle γ [(2.18), p.53]
Re_τ	nombre de Reynolds du fluide basé sur la vitesse de friction à la paroi [(3.5), p.87]

S_{ij}	tenseur des taux de contraintes [(3.11), p.88]
$S_{p,ijk}$	composante du tenseur des corrélations triples des particules
\underline{u}_f	champ de vitesses instantanées du fluide
$\underline{u}_{f@p}$	champ de vitesses instantanées du fluide non perturbé par les particules [(3.36), p.102]
\underline{U}_f	champ de vitesse moyenne du fluide
\underline{u}'_f	champ de vitesse fluctuante du fluide calculé par rapport à \underline{U}_f
\underline{u}_p	champ de vitesse instantanée des particules en approche eulérienne
\underline{U}_p	champ de vitesse moyenne des particules en approche eulérienne
\underline{u}'_p	champ de vitesses fluctuantes des particules en approche eulérienne calculée par rapport à \underline{U}_p
\underline{V}_d	vitesse de dérive [(1.58), p.26]
\underline{v}_g	vitesse de glissement au point de contact lors du rebond particule/paroi
\underline{v}_p	champ de vitesse instantanée des particules en approche lagrangienne
\underline{x}	vecteur position
$\underline{x}_p(t)$	trajectoire d'une particule en approche lagrangienne
y^+	distance à la paroi [(3.20), p.91]

Lettres grecques

α^-	angle d'incidence d'une particule à la paroi
α^+	angle de rebond d'une particule à la paroi
α_0^+	angle minimum de rebond d'une particule à la paroi
α_p	fraction volumique de la phase particulaire
β_w	coefficient de restitution tangentielle lors d'une collision particule/paroi [(1.97), p.34]
γ	angle de rugosité de paroi
γ_{\max}	angle de rugosité maximal de paroi [(2.7), p.47]
δ	distribution de Dirac
Δ	largeur de filtre en simulation des grandes échelles du fluide [(3.13), p.89]
Δt	pas de temps de la simulation
$\Delta\gamma$	écart type de la distribution des angles de rugosité de paroi [(2.8), p.48]
η	chargement massique du canal
λ	coefficient de normalisation de distributions d'angle de rugosité de paroi [(2.22), p.55], [(5.5), p.202]
μ_f	viscosité dynamique du fluide
μ_w	coefficient de friction lors d'une collision particule-paroi [(1.97), p.defLoideRebond]
ν_f	viscosité dynamique du fluide
ν_T	coefficient de viscosité turbulente
ν_T^*	coefficient de viscosité turbulente d'effet d'anisotropie
ρ_f	masse volumique du fluide
ρ_p	masse volumique des particules
τ_{ij}	tenseur des contraintes de sous-maille [(3.9), p.88]
τ_{ps}	temps de réponse des particules
τ_w	contrainte du fluide à la paroi
Φ	loi de rebond des particules à la paroi sur une lisse [(1.97), p.34]

Φ_γ	loi de rebond des particules à la paroi sur une lisse inclinée d'un angle γ [(2.19), p.54]
$\partial\Omega$	frontière du domaine d'écoulement
χ	coefficient de réflexion de particules à la paroi
Ω	domaine de l'écoulement
$\partial\Omega$	frontière du domaine d'écoulement

Abbreviations et symboles

DPS	Discrete Particles Simulation
PDF	probability density function
LES	Large Eddy Simulation
$\langle \cdot \rangle$	opérateur de moyenne
$\langle \cdot \rangle_f$	opérateur de moyenne sur la phase fluide
$\langle \cdot \rangle_p$	opérateur de moyenne sur les particules [(1.82), p.32]
$\langle \cdot \rangle_p^-$	opérateur de moyenne sur les particules incidentes
$\langle \cdot \rangle_p^+$	opérateur de moyenne sur les particules réfléchies
$\langle \cdot \cdot \rangle$	opérateur de moyenne conditionnée

Introduction

Les transports d'inclusions, telles de poussières de particules organiques (pollens, excréments, ...) et de minéraux (grains de sable à la suite d'éruption volcaniques, tempêtes, ...), par un fluide gazeux ou liquide constituent des écoulements naturels à plusieurs phases qui sont le siège d'importants phénomènes physiques. Ces enjeux physiques sont caractérisés par les interactions entre phases et celles des composants de chaque phase. De telles particules en suspension sont aussi rencontrées dans divers écoulements industriels et révèlent les mêmes enjeux physiques : turbulence, action du fluide sur les inclusions, modification de la turbulence du fluide par les inclusions, interactions inclusions/inclusions, combustion, changements de phase, etc... Un important aspect de ces écoulements industriels est la présence de parois rigides. Dans le cadre des écoulements gaz-solides dans lesquels les collisions particules/paroi sont fréquentes du fait de l'inertie des particules, la bonne prise en compte de ces interactions avec la paroi est cruciale pour une prédiction correcte des propriétés statistiques de l'écoulement. En effet les collisions des particules à la paroi entraînent en plus du changement de direction, une perte de la quantité de mouvement des particules par rebond inélastique ou avec mise en rotation des particules et parfois conduisent à la rupture des particules ou même à l'érosion des parois. Pour un écoulement en canal par exemple, la perte de quantité de mouvement des particules lors de la collision à la paroi est associée à une accélération des particules après le rebond. Ce processus qui entraîne une chute de la pression dans la canalisation s'explique par une extraction de quantité de mouvement du fluide pour effectuer cette accélération. Comme nous pouvons le remarquer, l'interaction particule/paroi s'avère assez complexe. Dans le cadre d'un traitement lagrangien, trois principales hypothèses sont généralement émises afin de simplifier le traitement lors de la collision : 1- l'action de la force de contact intervient pendant une très courte période, 2- le changement de position et d'orientation est négligeable, 3- aucune déformation de la particule ou de la paroi ne se produit. La dernière hypothèse permet l'utilisation du modèle de sphères dures et d'un modèle type Coulomb, par exemple, caractérisé par deux types de rebonds possibles à travers l'impulsion : rebonds avec ou sans glissement (voir par exemple Sakiz, 1999 [82]).

Une importante étape à la compréhension des interactions particules/paroi dans les écoulements diphasiques a été de considérer des parois lisses. Cette hypothèse a permis non seulement l'élaboration de base de données de référence à travers des simulations lagrangiennes mais aussi la mise en exergue des mécanismes intervenant au cours de ces rebonds. Un résumé de ces travaux est effectué par Sommerfeld (2003) [97] et nous pouvons citer entre autres Ottjes (1978) [70] et Oesterlé (1991) [68]. La compréhension des mécanismes se produisant au cours de l'interaction particules/paroi lisse a conduit au développement de modèles eulériens pour les parois lisses en s'appuyant sur les distributions de vitesses incidentes et réfléchies des particules à la paroi (He & Simonin, 1994 [33], Sakiz & Simonin, 1999 [83], Alipchenkov *et al.*, 2001 [1]). Dans la pratique les parois sont rugueuses et leur importance sur la phase dispersée dépend du rapport de la taille des particules aux dimensions caractéristiques des rugosités. De nombreuses investigations expérimentales montrent l'influence de la rugosité des parois sur une phase dispersée (Kussin & Sommerfeld, 2002 [56]; Sommerfeld & Kussin, 2004 [99]; Benson *et al.*, 2005 [5]). Aussi les mesures de Frank *et al.*, 1993 [23] et Schade & Hädrich (1998) [84] amélioraient la compréhension des interactions particules/paroi rugueuse par l'étude des angles de rebond et de l'influence de la variation des coefficients de restitution et de friction. Numériquement, la modélisation des parois rugueuses peut être décomposée en deux parties. La première approche, assez naturelle d'ailleurs, s'appuie sur une construction préalable de parois rugueuses (géométriques) à l'aide d'un processus stochastique (Matsumoto & Saito, 1970 [61],[62]; Frank *et al.*, 1993 [23]; Tsirkunov & Panfilov, 1998 [105]). La seconde description plus pratique de l'interaction particule/paroi rugueuse consiste à considérer que la particule incidente heurte une "*paroi virtuelle*" inclinée d'un certain angle, en lieu et place de la paroi physique rugueuse, au moment de la collision particule/paroi rugueuse. Cette idée initialement introduite par Tsuji *et al.*, 1987 [107],[106] et baptisée "*Abnormal bouncing model*", consiste à tirer de manière aléatoire l'angle de paroi virtuelle à partir d'une formulation empirique. Sommerfeld (1992) [96] puis Sommerfeld & Huber (1999) [98] proposent, à la lumière de leurs mesures et de celles effectuées par Schade & Hädrich [84] au sujet de la distribution des angles de rugosité de la paroi physique rugueuse, d'effectuer le tirage aléatoire de l'angle de paroi à partir d'une distribution gaussienne dont l'écart type (qui dépend du diamètre des particules) est fourni par des mesures préalables. Cependant pour les petits angles d'incidence, la distribution de l'angle de paroi "vue" par la particule est modifiée par un effet d'incidence. Afin de prendre en compte cet effet et assurer en outre un effet de rebond, Sommerfeld & Huber (1999) [98] proposent de modéliser l'effet de paroi rugueuse par le "*Shadow Effect*" traduisant un choix de l'angle de rugosité de paroi dans une gaussienne modifiée par l'incidence. Bien qu'imparfait dans sa mise en œuvre numérique, ce mécanisme permet de réaliser des prédictions numériques satis-

faisantes (Lain *et al.*, 2002 & 2004 [57] & [58]) et des investigations théoriques (Squires & Simonin, 2006 [100]). Remarquons que les mécanismes décrivant l'effet des parois rugueuses sur la phase dispersée d'un écoulement sont insuffisants. Par ailleurs dans le cadre de l'approche eulérienne, la dérivation de conditions aux limites se résument aux travaux de Zhang & Zhou (2004) [116]; Eskin (2005) [20]; Khalij *et al.* (2007) [49].

Le présent mémoire de thèse s'inscrit dans la suite de ces travaux et a pour objectif d'améliorer la compréhension de l'influence de la rugosité des parois sur la phase dispersée d'écoulements gaz-solides confinés. L'influence de la rugosité des parois sur la phase gazeuse a été mise en évidence dans de nombreux travaux (Nikuradse, 1933 [67], Schlichting, 1968 [86], Pope, 2000 [78]). La récente analyse de Jiménez (2004) [42] au sujet de l'influence de la rugosité des parois sur la phase continue a conduit à la définition d'une part du nombre de Reynolds de rugosité ($k^+ = ku_\tau/v_f$, k étant la hauteur de rugosité et u_τ la vitesse de friction à la paroi) qui mesure l'effet de la rugosité sur la "buffer layer" et d'autre part du rapport δ/k de la largeur de la couche limite (δ) par la hauteur de rugosité qui détermine la subsistance de la couche logarithmique, lieu de production d'énergie et où la contrainte cisaillement est beaucoup plus forte. En régime laminaire, aucune influence de la rugosité n'est observée sur l'écoulement quelque soit la valeur de k^+ [78]. Pour un écoulement turbulent, lorsque $k^+ < 4 - 5$, il est démontré (voir par exemple [42]) que l'écoulement moyen n'est pas affecté par la rugosité. Par contre lorsque la rugosité est telle que $k^+ \gg 1$, la loi logarithmique de la vitesse moyenne dans la région logarithmique est modifiée par une certaine contribution, en raison de la modification plus importante de la friction à la paroi dans ces circonstances [67]. La rugosité des parois a aussi une influence sur la structure de la turbulence. Selon Jiménez (2004) [42], le critère à partir duquel la turbulence est modifiée par la rugosité est défini par : $1 + D_{||}/k = 2 - 5$, où $D_{||}$ est la distance moyenne entre les aspérités de la paroi. Le comportement de la turbulence dans la région de paroi dépend énormément du détail de la surface rugueuse. Dans le cadre de nos travaux d'écoulements turbulents en canal, les hauteurs de rugosités maximales auxquelles nous sommes confrontés sont pour les parois les plus rugueuses, de l'ordre de $k_{x,\max} \simeq 8.32\mu\text{m}$ (dans la direction longitudinale) et $k_{z,\max} \simeq 7.83\mu\text{m}$ (dans la direction latérale) (Sommerfeld & Kussin, 2004 [99]); si bien que nous avons $k_{x,\max}^+ \simeq 0.5$ et $k_{z,\max}^+ \simeq 0.47$. Autrement, en accord avec ce qui précède il ne sera en aucun cas question de paroi rugueuse pour la phase gazeuse dans le cadre de cette thèse.

Ce mémoire s'articule autour de cinq chapitres. Le premier est consacré à la description statistique à la fois du mouvement d'un nuage de particules dans un écoulement turbulent et de l'interaction particule/paroi. Les axes de la dérivation eulérienne des conditions aux limites aux parois y sont en conséquence dégagés. Quant au second chapitre dédié à cette modélisation, il passe d'abord en revue l'évolu-

tion et les différentes directions de la modélisation de l'action des parois rugueuses sur un écoulement particulaire, puis après une analyse statistique du modèle de "*Shadow Effect*", une investigation théorique en vue de la dérivation des conditions aux limites s'appuyant sur le "*Shadow Effect*" est proposée. Le troisième chapitre présente des simulations numériques "*Large Eddy Simulation/Discrete Particles Simulation*" (LES/DPS) à bas Reynolds en canal où les rebonds particules/paroi rugueuses sont traitées à l'aide du "*Shadow Effect*". Les résultats de ces simulations permettent d'une part de proposer des mécanismes induits par la rugosité des parois sur l'écoulement particulaire et d'autre part d'apporter des arguments pour une analyse critique du mécanisme de "*Shadow Effect*" proposé par Sommerfeld & Huber (1999) [98]. Les conclusions des deuxième et troisième chapitres conduisent naturellement à l'entame d'un quatrième chapitre qui se propose d'approfondir la compréhension de l'interaction particules/paroi rugueuse à l'aide de simulations déterministes de collisions de particules sur des parois rugueuses géométriques. Les mécanismes mise en évidence sont mis à contribution pour la dérivation d'un nouveau modèle stochastique, "*Rough Wall Multi-Collisions Model*", du traitement lagrangien des interactions particules/paroi rugueuse. Ce modèle est validé à bas nombre Reynolds en canal puis évalué dans le cadre de l'écoulement diphasique expérimental à grand nombre de Reynolds du gaz en canal réalisé par Sommerfeld & Kussin (2004) [99]. Pour finir, un cinquième chapitre revient sur la dérivation eulérienne des conditions aux limites en s'appuyant sur le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*".

Chapitre 1

Description statistique du mouvement de particules dans un champ fluide turbulent

1.1 Introduction

Les particules en suspension dans un écoulement fluide turbulent sont sujettes, de manière constante, à des agitations du fait de leur interaction avec la turbulence du fluide, mais aussi en raison des collisions entre elles, à l'instar des gaz denses (Levich & Myasnikov (1966) [60]). En outre, à une certaine échelle et en fonction de l'inertie des particules mis en jeu, l'agitation de celles-ci peut être due à leur mouvement brownien (Houghthon (1966) [36]). Du fait de ce comportement, l'étude de telles particules en suspension requiert une approche statistique. L'opportunité de l'utilisation d'une telle méthode a depuis été clairement prouvée (Panton (1966) [71], Tam (1969) [102]).

Le formalisme adopté prend appui sur l'analogie entre le mouvement presque aléatoire des particules en suspension (puisque leur mouvement est corrélé avec le fluide) et celui des molécules de gaz. Cela a conduit plusieurs auteurs (tel que Buyevich (1971)[10]) à l'application des mêmes arguments du formalisme statistique de la théorie cinétique des gaz pour la description du mouvement des particules et à la dérivation des équations de conservation de la phase particulaire de l'écoulement diphasique, en accordant une attention particulière à l'interaction des particules avec le fluide, car contrairement aux molécules de gaz, l'interaction entre les particules en suspension dans le fluide n'est pas aussi directe. En effet elle est influencée en outre par l'effet de la turbulence et la pression du fluide environnant. Ce fait a été clairement mis en exergue récemment par Laviéville (1997) [59] en montrant par le biais d'une fonc-

tion de probabilité jointe fluide-particule, une meilleure prédiction des collisions particules/particules en écoulement turbulent gaz-particules.

L'objet de ce travail de thèse étant d'établir des conditions aux limites aux parois rugueuses pour la simulation numérique - dans le cadre de l'approche continue - de la phase dispersée d'un écoulement diphasique gaz-particules ; nous proposons dans ce premier chapitre d'identifier clairement les équations à résoudre afin de formuler les conditions aux limites appropriées. Pour ce faire, nous présentons le formalisme de dérivation de ces équations, puis afin de motiver le choix de la méthode que nous adopterons pour la dérivation de ces conditions à la paroi, nous achevons ce chapitre par une présentation critique de différentes approches utilisées dans la littérature pour le traitement des parois lisses en écoulements particuliers.

L'idée de base étant de partir de la théorie cinétique des gaz pour ensuite décrire le comportement des particules, nous considérons un gaz formé d'un très grand nombre N_p de particules identiques en interaction. On suppose que le gaz est contenu dans un domaine simplement connexe (borné ou non) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (où le cas $n = 3$ correspondant au cas physique est pris en compte) et qu'il est observé sur un intervalle $[0, T[$ (où T est fini ou non). On considérera que le gaz occupe tout le domaine Ω en négligeant les effets de bord. Si l'on restreint la description du comportement d'une particule à la connaissance de sa position $\underline{x}_i \in \mathbb{R}^n$ et de sa vitesse $\underline{v}_i \in \mathbb{R}^n$ ($1 \leq i \leq N_p$), alors l'état du gaz peut être, à chaque instant $t \geq 0$, décrit de façon microscopique par un point $\left((\underline{x}_1, \underline{v}_1), \dots, (\underline{x}_{N_p}, \underline{v}_{N_p}) \right)$ de représentation dans l'espace des phases $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^{N_p}$. D'un point de vue purement théorique, une telle description est possible en résolvant le système différentiel du premier ordre (Eq. (1.1)) :

$$\begin{cases} \frac{d\underline{v}_i}{dt} = \frac{1}{m_{p_i}} \underline{F}_i = \underline{X}_i \\ \frac{d\underline{x}_i}{dt} = \underline{v}_i \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq N_p \quad (1.1)$$

des équations de Newton de la mécanique classique, constitué de $2N_p$ vecteurs position-vitesse $(x_{i_1 \leq i \leq n}, v_{i_1 \leq i \leq n})$ (soit $6N_p$ inconnues avec $n = 3$), dans lesquelles les forces d'interactions entre particules et celles extérieures agissant sur ces particules sont prises en compte par l'intermédiaire du vecteur force $\underline{X}_{i_1 \leq i \leq N}$.

Cependant cette description microscopique présente beaucoup d'inconvénients. Il s'agit entre autre de la connaissance des données initiales à l'instant $t = 0$ nécessaires à la résolution de (Eq. (1.1)), du très grand nombre de paramètres en raison du nombre N_p élevé de particules ; sans oublier que la connaissance des positions $\underline{x}_i(t)$ et vitesses $\underline{v}_i(t)$ ne donnent pas les grandeurs macroscopiques physiques intéressantes que sont la densité moyenne $\rho(\underline{x}, t)$, la vitesse moyenne $u(\underline{x}, t)$ et la température $T(\underline{x}, t)$ du gaz à l'instant

$t \geq 0$ et au point $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, utilisées classiquement pour l'étude du gaz. C'est pourquoi, il faut passer de cette description microscopique exacte au niveau des particules dans un espace des phases très grand à une description macroscopique, en considérant que le gaz se rapproche d'un milieu continu puisqu'il est formé d'un très grand nombre N_p de particules.

1.2 Modélisation eulérienne du mouvement de particules dans un écoulement

1.2.1 De l'équation de Liouville à celle de Boltzmann

Cette dernière alternative due au manque d'informations sur les positions et vitesses initiales exactes de toutes les particules N_p du système, consiste à introduire une densité de probabilité $P_0(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{N_p}, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{N_p}, t = 0)$ qui donne la distribution de probabilité sur les positions et les vitesses à l'instant initial ($t = 0$) pour les N_p particules du système ; si bien que le problème du comportement du gaz se resume en la résolution d'une équation portant désormais sur une densité de probabilité $P(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{N_p}, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{N_p}, t)$ représentant au temps $t \geq 0$, la densité de présence de l'ensemble des particules dans l'espace des phases $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^{N_p}$.

A chaque instant $t \geq 0$, $P(\dots, t)$ est une densité de probabilité dans $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^{N_p}$. Elle est donc à valeur dans $\overline{\mathbb{R}^+}$. Ainsi, pour $\underline{x}^{(N_p)} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{N_p})$ et $\underline{v}^{(N_p)} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{N_p})$ représentant respectivement les positions et les vitesses des N_p particules, la quantité $P(\underline{x}^{(N_p)}, \underline{v}^{(N_p)}, t) d\underline{x}_1 \times \dots \times d\underline{x}_{N_p} \times d\underline{v}_1 \times \dots \times d\underline{v}_{N_p}$ définie sur $\Omega^{N_p} \times (\mathbb{R}^n)^{N_p} \times [0, T]$ est une fonction positive et représente la quantité de particules dans l'élément de volume $d\underline{x}_1 \times \dots \times d\underline{x}_{N_p} \times d\underline{v}_1 \times \dots \times d\underline{v}_{N_p}$ centré en $(\underline{x}^{(N_p)}, \underline{v}^{(N_p)}) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^{N_p}$. On supposera dans tout le mémoire que :

$$P(\dots, t) \in L^1_{loc} \left((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^{N_p} \right) \quad (1.2)$$

L'application du principe de conservation de la masse dans Ω permet d'obtenir l'équation de l'évolution sur $P(\underline{x}^{(N_p)}, \underline{v}^{(N_p)}, t)$ suivante :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \underline{Z} \cdot \frac{\partial P}{\partial \underline{Z}} = 0 \quad , \quad \text{dans } \Omega \quad (1.3)$$

où l'on a posé $\underline{Z} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{N_p}, \underline{X}_1, \dots, \underline{X}_{N_p}) \in \mathbb{R}^{6N_p}$ et $\underline{z} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{N_p}, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{N_p}) \in \mathbb{R}^{6N_p}$. Les vecteurs $\underline{X}_{1 \leq i \leq N_p}$ représentent la résultante des efforts appliqués sur chaque particule.

Cette équation (Eq. (1.3)) appelée "équation de Liouville" peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N_p} \underline{v}_i \cdot \frac{\partial P}{\partial \underline{x}_i} + \sum_{i=1}^{N_p} \underline{X}_i \cdot \frac{\partial P}{\partial \underline{v}_i} = 0 \quad , \quad \text{dans } \Omega \quad (1.4)$$

Cependant, l'objet de notre propos n'étant pas de développer toute la théorie cinétique, il convient d'inviter le lecteur intéressé à consulter (Hirschfelder *et al.*, 1964 [34]; Cercignani, 1975 [13], Bird, 1998 [6]) pour une dérivation mathématiquement plus rigoureuse et complète de cette équation de Liouville.

La connexion entre la description microscopique et celle macroscopique est possible une fois la fonction de distribution $P(\underline{x}^{(N_p)}, \underline{v}^{(N_p)}, t)$ connue. En effet, les grandeurs caractéristiques physiques (la densité moyenne $\rho(\underline{x}, t)$, la vitesse moyenne $u(\underline{x}, t)$) s'obtiennent comme suit :

- pour la densité moyenne $\rho(\underline{x}, t)$:

$$\rho(\underline{x}^{(N_p)}, t) = n_p(\underline{x}^{(N_p)}, t) m_p \quad (1.5)$$

$$n_p(\underline{x}^{(N_p)}, t) = \int_{(\mathbb{R}^n)^{N_p}} P(\underline{x}^{(N)}, \underline{v}^{(N)}, t) d\underline{v}_1 \times \dots \times d\underline{v}_N \quad (1.6)$$

La quantité $n_p(\underline{x}, t)$ étant le nombre de particules à l'instant t en un point de l'espace \underline{x} à $d\underline{x}$ près, tandis que m_p est la masse d'une particule.

- pour une quantité quelconque Ψ , sa moyenne est donnée par :

$$\langle \Psi \rangle(\underline{x}^{(N_p)}, t) = \frac{1}{n_p(\underline{x}^{(N_p)}, t)} \int_{(\mathbb{R}^n)^{N_p}} \Psi P(\underline{x}^{(N)}, \underline{v}^{(N)}, t) d\underline{v}_1 \dots d\underline{v}_N \quad (1.7)$$

L'équation de Liouville¹ (Eq. (1.4)) de la fonction de distribution $f_p^{(N_p)}$ à N_p particules reste néanmoins très complexe à résoudre en raison des $6N_p + 1$ variables qu'elle renferme. Toutefois en faisant l'hypothèse que toutes les particules du gaz sont identiques, la description de toutes les propriétés du gaz peut s'effectuer par la seule connaissance de la fonction de distribution à "une particule" $f_p^{(1)}$ au lieu de celle à N_p particules et elle est définie par :

$$f_p^{(1)}(\underline{x}_1, \underline{v}_1, t) = \int_{(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^{N_p-1}} f_p^{(N_p)}(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_N, t) \prod_{i=2}^{N_p} d\underline{x}_i d\underline{v}_i \quad (1.8)$$

Avec l'introduction de la fonction probabilité à une "particule", nous obtenons désormais :

$$n_p(\underline{x}_1, t) = \int_{\mathbb{R}^n} f_p^{(1)}(\underline{x}_1, \underline{v}_1, t) d\underline{v}_1 \quad (1.9)$$

$$\langle \Psi \rangle_p(\underline{x}_1, t) = \frac{1}{n_p(\underline{x}_1, t)} \int \Psi f_p^{(1)}(\underline{x}_1, \underline{v}_1, t) d\underline{v}_1 \quad (1.10)$$

¹Nous avons changé la fonction de distribution P introduite initialement en $f_p^{(N_p)}$ afin de mieux mettre en évidence qu'il s'agit d'une fonction de distribution à N_p particules (notion qui sera amplement utilisée dans ce chapitre).

Cependant contrairement à la description de Liouville où les interactions entre particules sont occultées, Boltzmann (1872) afin de les prendre en compte considère que :

(a) les particules interagissent via des *collisions binaires*. Une collision est donc le résultat de l'interaction microscopique de deux particules très proche l'une de l'autre en entraînant une forte déviation de leurs trajectoires en un temps très court. Cette hypothèse implique implicitement que le gaz est suffisamment dilué pour pouvoir négliger l'effet des collisions faisant intervenir plus de deux particules.

(b) les collisions sont *localisées* en temps et en espace. Elles se déroulent sur des échelles de temps et d'espace très inférieures aux échelles caractéristiques de la description du gaz.

(c) les collisions sont *élastiques*, si bien que la quantité de mouvement et l'énergie cinétique sont préservées lors de la collision.

(d) les collisions sont *microréversibles*. En d'autres termes, la probabilité que les vitesses d'avant collision $(\underline{v}'_A, \underline{v}'_B)$ soient changées en vitesses d'après collision $(\underline{v}_A, \underline{v}_B)$ est égale à la probabilité que les vitesses d'après collision $(\underline{v}_A, \underline{v}_B)$ soient changées en vitesses d'avant collision $(\underline{v}'_A, \underline{v}'_B)$, où les indices A et B représentent les deux particules qui interagissent par collision.

(e) les collisions satisfont l'hypothèse de *chaos moléculaire* : les vitesses de deux particules qui vont entrer en collision ne sont pas corrélées. Cette dernière hypothèse permet d'exprimer la fonction de distribution de vitesses de paires de particules $f_p^{(2)}$ comme le produit des fonctions de distributions à "une particule" $f_p^{(1)}$ de chaque particule aux points considérés. C'est donc une hypothèse de fermeture.

Sous ces hypothèses, en intégrant l'équation de Liouville (Eq. (1.4)), Boltzmann montre que l'évolution cinétique d'un gaz constitué d'un seul type de particules, s'écrit :

$$\forall t \geq 0, \underline{x}_1 \in \mathbb{R}^n, \underline{v}_1 \in \mathbb{R}^n, \quad \frac{\partial f_p^{(1)}}{\partial t} + \underline{v}_1 \cdot \frac{\partial f_p^{(1)}}{\partial \underline{x}_1} + \underline{X} \cdot \frac{\partial f_p^{(1)}}{\partial \underline{v}_1} = Q\left(f_p^{(1)}, f_p^{(1)}\right) = \left(\frac{\partial f_p^{(1)}}{\partial t}\right)_{coll} \quad (1.11)$$

où $Q(.,.)$ est une forme quadratique modélisant l'effet des collisions inter-particulaires sur la densité probabilité $f_p^{(1)}$ des vitesses des particules. La nature quadratique de l'opérateur $Q(.,.)$ découle du fait que l'on considère des collisions binaires. Avec l'hypothèse (e), cette forme quadratique se modélise par :

$$Q\left(f_p^{(1)}, f_p^{(1)}\right) = \int [f' f'_B - f f_B] \mathcal{B}(V_r, \cos \theta) d\underline{v} d\sigma \quad (1.12)$$

$V_r = |\underline{v}_A - \underline{v}_B|$ étant la vitesse relative des deux particules après collision, tandis que $\theta \in [0, \pi]$ représente l'angle de déviation entre les vitesses avant et après collision. σ modélise l'influence de l'angle sous lequel une particule vient heurter une autre.

f, f', f_B et f'_B désignent respectivement $f_p^{(1)}(\underline{x}, \underline{v}_A, t)$, $f_p^{(1)}(\underline{x}, \underline{v}'_A, t)$, $f_p^{(1)}(\underline{x}, \underline{v}_B, t)$ et $f_p^{(1)}(\underline{x}, \underline{v}'_B, t)$. \mathcal{B} est une fonction positive appelée *noyau de collision* et peut être expliciter dans certains cas tels que pour les collisions de sphères dures ou les collisions pour lesquelles la force d'interaction entre deux particules dérive d'un potentiel (exemple de l'interaction coulombienne). Le lecteur intéressé par le développement de la théorie cinétique pourra consulter Cercignani (1975) [13].

Le problème demeure toujours la détermination de la fonction de densité de probabilité $f_p^{(1)}$ par la résolution de l'équation intégral-différentielle de Boltzmann (Eq. (1.11)-(1.12)). Cependant l'existence, l'unicité et l'obtention de solutions analytiques au problème de Cauchy associé ne sont établies que pour des cas stationnaires, linéaires (Cercignani (1975) [13], Arkeryd & Nouri (1998) [2], Villani (2004) [109]). La principale difficulté dans la recherche de solutions analytiques à cette équation réside en la non-linéarité de l'opérateur de collision \mathcal{Q} . Une solution couramment adoptée consiste alors à distinguer différents régimes en fonction de l'importance des collisions inter-particulaires au sein de l'écoulement ; afin de proposer des solutions pour des cas asymptotiques. Pour ce faire l'équation de Boltzmann (Eq. (1.11)) est écrit sous sa forme adimensionnelle suivante :

$$\forall t \geq 0, \underline{x}_1 \in \mathbb{R}^n, \underline{v}_1 \in \mathbb{R}^n, \quad \frac{\partial \widetilde{f}_p^{(1)}}{\partial \widetilde{t}} + \widetilde{v}_1 \cdot \frac{\partial \widetilde{f}_p^{(1)}}{\partial \widetilde{\underline{x}}_1} + \widetilde{\underline{X}} \cdot \frac{\partial \widetilde{f}_p^{(1)}}{\partial \widetilde{\underline{v}}_1} = \frac{1}{Kn} \widetilde{\mathcal{Q}} \left(\widetilde{f}_p^{(1)}, \widetilde{f}_p^{(1)} \right) \quad (1.13)$$

$$Kn = \frac{\lambda}{L} \quad (1.14)$$

où λ et L sont respectivement le libre parcours moyen particule/particule et une échelle de longueur caractéristique de l'écoulement. Leur ratio $Kn \in]0, \infty[$ est le nombre sans dimension de Knudsen qui détermine les différents régimes de l'écoulement.

Lorsque les collisions sont assez rares, $Kn \rightarrow \infty$, des solutions analytiques sont proposées (Cercignani (1975) [13]). Par contre pour $Kn \rightarrow 0$, Chapman-Enskog proposent de déterminer $f_p^{(1)}$ comme un développement en série des puissances de Kn :

$$f_p^{(1)} = \sum_{s=0}^{\infty} Kn^s f_p^{(1)[s]} \quad (1.15)$$

où le premier terme $f_p^{(1)[0]}$ est une maxwellienne. Cette procédure d'approximations successives relativement simple à mettre en oeuvre reste problématique du fait de la convergence de la série (Hirschfelder et al. (1964) [34]).

Idéalement la détermination analytique de $f_p^{(1)}$ solution de (Eq. (1.11)) permettrait le calcul des grandeurs macroscopiques (densité, vitesses, énergie et température moyennes) souhaitées, qui ne sont d'ailleurs que des moments d'ordre 0, 1 et 2 de la fonction de distribution à une particule $f_p^{(1)}$. Dans le paragraphe suivant, nous montrons comment calculer directement ces différents moments à partir de l'équation de Boltzmann (Eq. (1.11)). Nous présentons par la suite la dérivation des équations aux moments en écoulements gaz-particules et en déduisons les équations de transport des moments d'ordre 0 à 2.

1.2.2 Modélisation aux moments

Equations aux moments de l'équation de Boltzmann

Les moments de l'équation de Boltzmann ne sont rien d'autre que les moyennes d'une quantité Ψ donnée, calculées à partir de la fonction de distribution² à "une particule" solution de l'équation de Boltzmann.

En d'autres termes, pour une variable Ψ donnée, nous avons :

$$\langle \Psi \rangle_p(\underline{x}, t) = \frac{1}{n_p(\underline{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^n} \Psi f_p(\underline{x}, \underline{v}, t) d\underline{v} \quad (1.16)$$

$$n_p(\underline{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} f_p(\underline{x}, \underline{v}, t) d\underline{v} \quad (1.17)$$

$\langle \Psi \rangle_p(\underline{x}, t)$ est un moment d'ordre quelconque et $n_p(\underline{x}, t)$ le moment d'ordre 0 de la fonction de distribution f_p de l'équation de Boltzmann.

Dans la pratique, les moments auxquels nous nous intéressons sont ceux qui nous permettent de calculer la densité volumique moyenne, les vitesses moyennes et l'énergie cinétique des particules dans l'écoulement. Autrement, il s'agit des moments calculés en posant :

$$\Psi = \Psi_\alpha \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \Psi_{\alpha=0} = 1 \\ \Psi_{\alpha>0} = \underline{c}_p \Psi_{\alpha-1} = \underline{c}_p^\alpha, \quad \alpha \in \{1, 2\} \end{cases} \quad (1.18)$$

En multipliant l'équation (Eq. (1.11)) par Ψ_α , puis en intégrant le résultat obtenu sur \mathbb{R}^n , il vient que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi_\alpha \frac{\partial f_p}{\partial t} d\underline{c}_p + \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_\alpha \underline{c}_p \cdot \frac{\partial f_p}{\partial \underline{x}} d\underline{c}_p + \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_\alpha \underline{X} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial \underline{c}_p} d\underline{c}_p = \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_\alpha Q(f_p, f_p) d\underline{c}_p \quad (1.19)$$

²Nous la noterons désormais f_p au lieu de $f_p^{(1)}$ pour simplifier la forme des équations

Avec la définition précédente (Eq. (1.18)), nous pouvons écrire :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi_\alpha \frac{\partial f_p}{\partial t} d\mathcal{C}_p = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^n} (\Psi_\alpha f_p) d\mathcal{C}_p - \int_{\mathbb{R}^n} f_p \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial t} d\mathcal{C}_p = \frac{\partial}{\partial t} (n_p \langle \Psi_\alpha \rangle_p) - n_p \left\langle \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial t} \right\rangle_p \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_{\alpha \mathcal{C}_p} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial \underline{x}} d\mathcal{C}_p &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \underline{x}} (\Psi_{\alpha+1} f_p) d\mathcal{C}_p - \int_{\mathbb{R}^n} f_p \mathcal{C}_p \cdot \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \underline{x}} d\mathcal{C}_p \\ &= \frac{\partial}{\partial \underline{x}} (n_p \langle \Psi_{\alpha+1} \rangle_p) - n_p \left\langle \mathcal{C}_p \cdot \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \underline{x}} \right\rangle_p \end{aligned} \quad (1.21)$$

La troisième intégrale du terme de gauche s'écrit :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi_\alpha \underline{X} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial \mathcal{C}_p} d\mathcal{C}_p = \int_{\mathbb{R}^n} \underline{X} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathcal{C}_p} (\Psi_\alpha f_p) d\mathcal{C}_p - \int_{\mathbb{R}^n} \underline{X} \cdot \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \mathcal{C}_p} f_p d\mathcal{C}_p \quad (1.22)$$

En intégrant par parties le premier terme de droite de l'équation (Eq. (1.22)) et en supposant que la fonction de distribution f_p est nulle sur la frontière de \mathbb{R}^n , nous obtenons :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \underline{X} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathcal{C}_p} (\Psi_\alpha f_p) d\mathcal{C}_p = 0 \quad (1.23)$$

Donc :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi_\alpha \underline{X} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial \mathcal{C}_p} d\mathcal{C}_p = - \int_{\mathbb{R}^n} \underline{X} \cdot \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \mathcal{C}_p} f_p d\mathcal{C}_p = -n_p \left\langle \underline{X} \cdot \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \mathcal{C}_p} \right\rangle_p \quad (1.24)$$

En posant :

$$\mathbb{C}(\Psi_\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_\alpha Q(f_p, f_p) d\mathcal{C}_p \quad (1.25)$$

le terme collisionnel caractérisant le taux de variation de la fonction Ψ_α du fait des collisions interparticulaires, l'équation aux moments s'écrit au final :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (n_p \langle \Psi_\alpha \rangle_p) + \frac{\partial}{\partial \underline{x}} (n_p \langle \Psi_{\alpha+1} \rangle_p) - n_p \left\langle \underline{X} \cdot \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \mathcal{C}_p} \right\rangle_p &= \mathbb{C}(\Psi_\alpha) + \\ n_p \left\langle \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial t} \right\rangle_p + n_p \left\langle \mathcal{C}_p \cdot \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \underline{x}} \right\rangle_p & \end{aligned} \quad (1.26)$$

où $\Psi_{\alpha+1} = \mathcal{C}_p \Psi_\alpha$ et $\underline{X} = \frac{1}{m_p} \underline{F}$; où m_p est la masse de l'unique type de particule constituant le nuage de particule.

L'équation aux moments de Boltzmann (Eq. (1.26)) peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (n_p \langle \Psi_{\alpha_i} \rangle_p) + \frac{\partial}{\partial x_j} (n_p \langle c_{p_j} \Psi_{\alpha_i} \rangle_p) - n_p \left\langle X_j \frac{\partial \Psi_{\alpha_i}}{\partial c_{p_j}} \right\rangle_p &= \mathbb{C}(\Psi_{\alpha_i}) + \\ n_p \left\langle \frac{\partial \Psi_{\alpha_i}}{\partial t} \right\rangle_p + n_p \left\langle c_{p_j} \frac{\partial \Psi_{\alpha_i}}{\partial x_j} \right\rangle_p & \end{aligned} \quad (1.27)$$

Cette équation montre clairement que l'obtention d'un moment d'ordre α exige la connaissance du moment d'ordre supérieur $\alpha + 1$: elle n'est donc pas fermée.

Dérivation des équations aux moments en écoulement turbulent diphasique gaz-particules

En écoulement turbulent gaz-particules, une inclusion donnée subit en plus de la pesanteur, des interactions avec le fluide caractérisées par :

- *la force de traînée* qui est la résultante des contraintes visqueuses exercées par le fluide sur la surface de l'inclusion. Sa modélisation est donnée par :

$$\underline{F}_D = \frac{3}{4} \frac{\rho_f}{\rho_p} \frac{m_p}{d_p} C_D (\underline{u}_{f@p} - \underline{v}_p) |\underline{u}_{f@p} - \underline{v}_p| \quad (1.28)$$

$\underline{u}_{f@p}$ représente la vitesse du fluide localement non perturbé par la présence de l'inclusion à la position de celle-ci (cette vitesse est appelée la vitesse du fluide "vu" par la particule). \underline{v}_p , m_p , d_p et ρ_p sont respectivement la vitesse, la masse, le diamètre et la masse volumique de la particule, tandis que ρ_f est la masse volumique du fluide environnant l'inclusion. La quantité C_D est le coefficient de traînée dont la dépendance au nombre de Reynolds particulaire

$$Re_p = \frac{\rho_f d_p |\underline{u}_{f@p} - \underline{v}_p|}{\mu_f} \quad (1.29)$$

a été établie par les investigations expérimentales de Clift *et al.*(1978) [15]. Sa modélisation est alors effectuée en fonction du régime de l'écoulement établi autour de l'inclusion. Ainsi :

★ pour de petits Reynolds particuliers ($Re_p < 1$), en régime de Stokes, où les effets de viscosité sont dominants, Stokes (1851) [101] propose la solution analytique :

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \quad (1.30)$$

★ lorsque les effets inertiels deviennent plus importants, en régime de transition où $1 < Re_p < 10^3$, Schiller & Naumann (1933) [85] proposent la loi semi-empirique :

$$C_D = \frac{24}{Re_p} f_D, \quad f_D = 1 + 0.15 Re_p^{0.687} \quad (1.31)$$

★ en régime de Newton, lorsque $10^3 \leq Re_p < Re_{p_{crit}} \approx 2.5 \times 10^5$, le sillage de la particule ne change pas, si bien que C_D est presque constant et on a :

$$C_D = 0.44 \quad (1.32)$$

★ lorsque $Re_{p_{crit}} \leq Re_p < 4.0 \times 10^5$, en raison de la transition entre le régime laminaire et turbulent de l'écoulement autour de l'inclusion, le sillage de la particule diminue : C_D décroît brusquement.

★ en régime super-critique où $Re_p > 4.0 \times 10^5$, C_D croît à nouveau.

Il faudra noter que ces modélisations du coefficient de traînée peuvent être altérées par plusieurs effets physiques tels que la turbulence de la phase continue (Torobin & Gauvin (1961) [104]), la rugosité de la surface de l'inclusion (Sawatzki (1961)), la forme de la particule (Haider & Levenspiel (1989) [31], Thompson & Clark (1991) [103]), la compressibilité du fluide (Carlson & Hoglund (1964) [12], Crowe *et al.* (1998) [17]), les effets de parois (Brenner (1961) [9], Goldman *et al.* (1967) [28] [29]).

- *la force de gradient de pression et de flottabilité* : il s'agit de la résultante des contraintes du fluide exercées sur un volume de fluide qui serait à la place de la particule. Ces contraintes se résument au gradient de pression local dans l'écoulement et la contrainte de cisaillement du fluide sur l'inclusion. Ainsi à partir de l'équation de Navier-Stokes, cette force s'écrit :

$$\underline{F}_p = m_p \frac{\rho_f}{\rho_p} \left(\frac{D\underline{u}_f@p}{Dt} - \underline{g} \right) \quad (1.33)$$

Le premier terme de (1.33) représente l'accélération du fluide et le second est la force de flottabilité.

- *la force de masse ajoutée*. Cette force résulte du fait que l'accélération ou la décélération de la particule est la conséquence de l'accélération ou la décélération du fluide l'environnant. Selon Auton *et al.* (1988), dans le cas d'un fluide rotationnel non visqueux :

$$\underline{F}_A = m_p \frac{\rho_f}{\rho_p} C_A \left(\frac{D\underline{u}_f@p}{Dt} - \frac{d\underline{v}_p}{dt} \right) \quad (1.34)$$

Le coefficient de masse ajoutée C_A vaut $\frac{1}{2}$ dans le régime de Stokes. Cette valeur est confirmée par les simulations numériques de Magnaudet *et al.* (1995).

- *la force de Basset* est liée à l'histoire des accélérations passées de la particule et résulte du retard de l'écoulement par rapport aux changements de condition dans la couche limite de la particule et s'écrit :

$$\underline{F}_B = \frac{9m_p \rho_f}{d_p \rho_p} \sqrt{\frac{\rho_f \mu_f}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{d}{d\tau} [\underline{u}_f@p - \underline{v}_p] \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (1.35)$$

Avec toutes ces interactions, l'équation de la quantité de mouvement d'une particule dans un champ turbulent fluide s'écrit :

$$m_p \frac{d\underline{v}_p}{dt} = m_p \underline{g} + \underline{F}_D + \underline{F}_p + \underline{F}_A + \underline{F}_B \quad (1.36)$$

Cependant, en écoulement turbulent gaz-particules où la masse volumique du gaz (ρ_f) est très petite devant celle des particules (ρ_p), les forces \underline{F}_p , \underline{F}_A et \underline{F}_B deviennent négligeables devant la gravité et la

force de traînée. Dans ces circonstances, l'équation de la quantité de mouvement de l'inclusion (qui reste bien influencée par le fluide l'environnant) devient :

$$m_p \frac{dv_p}{dt} = m_p \underline{g} - \frac{3 \rho_f m_p}{4 \rho_p d_p} C_D (v_p - u_{f@p}) |v_p - u_{f@p}| \quad (1.37)$$

En écoulement turbulent gaz-particules les positions et vitesses de deux particules qui entrent en collision sont certainement corrélées à travers leur interaction avec le même écoulement fluide turbulent les environnant : l'hypothèse de chaos moléculaire de la théorie cinétique n'est plus exacte. L'équation (Eq. (1.27)) n'est donc pas entièrement correcte pour la modélisation des écoulements gaz-particules.

La proposition en écoulement gaz-particules consiste à définir la fonction de distribution comme la moyenne des réalisations des variables positions-vitesses par :

$$\rho^i = \delta(v_p^i(t) - \underline{c}_p) \delta(x_p^i(t) - \underline{x}) \quad (1.38)$$

$$f_p(\underline{c}_p, \underline{x}, t) = \left\langle \sum_{i=1}^{N_p} \rho^i \right\rangle \quad (1.39)$$

où $\langle \cdot \rangle$ représente un opérateur de moyenne sur l'ensemble des réalisations et \underline{c}_p est la vitesse des particules dans l'espace des phases.

En différentiant ρ^i puis en appliquant l'opérateur de moyenne d'ensemble, on montre que l'équation de transport de la fonction de distribution s'écrit :

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [c_{p,j} f_p] + \frac{\partial}{\partial c_{p,j}} \left[\left\langle \frac{dv_{p,j}}{dt} \middle| \underline{c}_p \right\rangle f_p \right] = \left(\frac{\partial f_p}{\partial t} \right)_{coll} \quad (1.40)$$

Avec l'équation (Eq. (1.37)), le terme d'accélération de la moyenne conditionnée $\frac{\partial}{\partial c_{p,j}} \left[\left\langle \frac{dv_{p,j}}{dt} \middle| \underline{c}_p \right\rangle f_p \right]$ de l'équation (Eq. (1.40)) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial c_{p,j}} \left[\left\langle \frac{dv_{p,j}}{dt} \middle| \underline{c}_p \right\rangle f_p \right] = \frac{\partial}{\partial c_{p,j}} \left[\left\langle \left(g_j - \frac{3 \rho_f C_D}{4 \rho_p d_p} (c_{p,j} - c_{f@p,j}) |c_p - c_{f@p}| \right) \middle| \underline{c}_p \right\rangle f_p \right] \quad (1.41)$$

En introduisant le temps de réponse τ_p de la particule défini par :

$$\frac{1}{\tau_p} = \frac{3 \rho_f C_D}{4 \rho_p d_p} |c_p - c_{f@p}| \quad (1.42)$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_{p,j}} \left[\left\langle \frac{dv_{p,j}}{dt} \middle| \underline{c}_p \right\rangle f_p \right] &= \frac{\partial}{\partial c_{p,j}} [g_j f_p] - \frac{\partial}{\partial c_{p,j}} \left[\left\langle \frac{1}{\tau_p} (c_{p,j} - c_{f@p,j}) \middle| \underline{c}_p \right\rangle f_p \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial c_{p,j}} [g_j f_p] - \frac{\partial}{\partial c_{p,j}} \left[\left\langle \frac{1}{\tau_p} (c_{p,j} - U_{f,j} - c'_{f@p,j}) \middle| \underline{c}_p \right\rangle f_p \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial c_{p,j}} [g_j f_p] - \frac{\partial}{\partial c_{p,j}} \left[\left\langle \frac{1}{\tau_p} (c_{p,j} - U_{f,j}) \right\rangle f_p \right] - \frac{\partial}{\partial c_{p,j}} \left[\frac{1}{\tau_p} \langle c'_{f@p,j} \middle| \underline{c}_p \rangle f_p \right] \end{aligned} \quad (1.43)$$

Le problème fondamental qui apparaît à ce niveau est celui de la fermeture du terme $\langle c'_{f@p,j} | \underline{c}_p \rangle$ appelé *vitesse de dérive* et notée $V_{d,i}$. Ce dernier est diversement modélisé par Zaichik & Derevich (1988) [19], Reeks (1991) [79], Zaichik & Alipchenkov (2005) [115]. Nous proposons dans la suite de présenter assez succinctement celle proposée par Simonin (1996) [89].

1.2.3 Modèle de fermeture des équations aux moments proposé par Simonin

La proposition de Simonin est de partir de la définition de ce terme en fonction de la fonction de distribution de la vitesse du fluide conditionnée par la vitesse de la particule $f_f(\underline{c}_f | \underline{c}_p; \underline{x}, t)$ par :

$$\langle c'_{f@p,j} | \underline{c}_p \rangle = \int [c_{f,j} - U_{f,j}] f_f(\underline{c}_f | \underline{c}_p; \underline{x}, t) d\underline{c}_f \quad (1.44)$$

Pour la détermination de la fonction de distribution $f_f(\underline{c}_f | \underline{c}_p; \underline{x}, t)$, Simonin introduit la fonction de distribution jointe fluide-particule f_{fp} solution d'une équation de transport de type Boltzmann :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{fp}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [c_{p,j} f_{fp}] = \frac{\partial}{\partial c_{p,j}} \left[\left\langle \frac{dv_{p,j}}{dt} \middle| \underline{c}_p, \underline{c}_f \right\rangle f_{fp} \right] - \frac{\partial}{\partial c_{f,j}} \left[\left\langle \frac{du_{f@p,j}}{dt} \middle| \underline{c}_p, \underline{c}_f \right\rangle f_{fp} \right] \\ + \left(\frac{\partial f_{fp}}{\partial t} \right)_{coll} \end{aligned} \quad (1.45)$$

Et par suite :

$$f_f(\underline{c}_f | \underline{c}_p; \underline{x}, t) = \frac{f_{fp}(\underline{c}_f, \underline{c}_p; \underline{x}, t)}{f_p(\underline{c}_p; \underline{x}, t)} \quad (1.46)$$

$$f_p(\underline{c}_p; \underline{x}, t) = \int f_{fp}(\underline{c}_f, \underline{c}_p; \underline{x}, t) d\underline{c}_f \quad (1.47)$$

Notons que $f_f(\underline{c}_f | \underline{c}_p; \underline{x}, t) \neq f_f(\underline{c}_f; \underline{x}, t)$ et $f_{fp}(\underline{c}_f, \underline{c}_p; \underline{x}, t) \neq f_f(\underline{c}_f; \underline{x}, t) f_p(\underline{c}_p; \underline{x}, t)$.

Le premier terme de droite de l'équation (1.45) est modélisé comme précédemment au niveau de l'équation (1.41). Cette modélisation n'introduit cependant plus de problème de fermeture en raison du double conditionnement fluide-particule de la vitesse. Quant à la vitesse du fluide à la position des particules $u_{f@p,j}$, elle est modélisée par Simonin suivant une équation de type Langevin :

$$\begin{aligned} u_{f@p,j}(\underline{x} + \underline{v}_p \delta t, t + \delta t) = u_{f@p,j}(\underline{x}, t) + g_j \delta t - \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial x_j} \delta t + \frac{\partial}{\partial x_m} \left[v_f \frac{\partial U_{f,j}}{\partial x_m} \right] \delta t \\ + [v_{p,m} - u_{f@p,m}] \frac{\partial U_{f,j}}{\partial x_m} \delta t + G_{fp,jm} [u_{f@p,m} - U_{f,m}] \delta t \\ + C_{fp} \delta W_{fp,j} \end{aligned} \quad (1.48)$$

dans laquelle les quantités $G_{fp,jm}$ et $C_{fp}\delta W_{fp,j}$ dépendent des effets de viscosité, de gradients de fluctuation de pression et d'effets de croisement des trajectoires. C_{fp} est un coefficient positif modélisé en fonction des petites échelles de la turbulence du fluide tandis que $\delta W_{fp,j}$ est un vecteur aléatoire de moyenne nulle défini suivant le processus de Wiener par :

$$\begin{cases} \langle u_{f@p,i}(t') \delta W_{fp,j} \rangle_p = \langle v_{p,i}(t') \delta W_{fp,j} \rangle_p = 0, & t' \leq t \\ \langle \delta W_{fp,i} \rangle_p = 0 \\ \langle \delta W_{fp,i} \delta W_{fp,j} \rangle_p = \delta_{ij} \delta t \end{cases} \quad (1.49)$$

Le tenseur du second ordre $G_{fp,ij}$ des statistiques à un point du champ de vitesse du fluide vu par les particules est modélisé par Simonin dans le cadre d'un modèle intermédiaire par :

$$G_{fp,ij}^{(2)} = G_{fp,ij}^{(1)} + \beta_2 \frac{\partial U_{f,i}}{\partial x_j} \quad (1.50)$$

où $\beta_2 = 0.6$ et le tenseur du second ordre $G_{fp,ij}^{(1)}$ est tel que :

$$G_{fp,ij}^{(1)} = -\frac{1}{\tau_{fp,\perp}^t} \delta_{ij} - \left[\frac{1}{\tau_{fp,\parallel}^t} - \frac{1}{\tau_{fp,\perp}^t} \right] p_i p_j \quad (1.51)$$

$$p_i = \frac{V_{r,i}}{V_r} \quad (1.52)$$

où $\tau_{fp,\perp}^t$ et $\tau_{fp,\parallel}^t$ sont respectivement en turbulence homogène, les échelles Lagrangien de temps intégral mesurés le long des trajectoires des particules dans les directions orthogonale et parallèle à la vitesse relative. En accord avec l'approche de Csanady, ces temps sont tels que :

$$\tau_{fp,\perp}^t = \tau_1^t [1 + C_\beta \zeta_r^2]^{-1/2}, \quad \tau_{fp,\parallel}^t = \tau_1^t [1 + 4C_\beta \zeta_r^2]^{-1/2}, \quad \zeta_r^2 = \frac{3}{2} \frac{|V_r|^2}{q_f^2} \quad (1.53)$$

τ_1^t est le temps intégral Lagrangien du fluide et C_β une constante telle que :

$$\tau_1^t = \frac{1}{\beta_1} \frac{q_f^2}{\varepsilon_f}, \quad C_\beta = \left[\tau_1^t / T_{f,\parallel}^t \right]^2 \quad (1.54)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} C_0 + \frac{\beta_2}{4} \frac{P_{1,ii}}{\varepsilon_f}, \quad P_{1,ii} = -2 \left\langle u'_{f,i} u'_{f,m} \right\rangle_f \frac{\partial U_{f,i}}{\partial x_m}, \quad T_{f,\parallel}^t = L_{f,\parallel}^t / \sqrt{\frac{2}{3} q_f^2} \quad (1.55)$$

$C_0 = 2.1$ tandis que q_f^2 et ε_f sont respectivement l'énergie cinétique de la turbulence et le taux dissipation.

Notons que le tenseur $G_{fp,ij}$ se résume dans le cadre d'un modèle simplifié au tenseur $G_{fp,ij}^{(1)}$, et alors

$$\beta_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} C_0.$$

Avec toutes ces modélisations, le second terme de droite de l'équation (1.45) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_{f,j}} \left[\left\langle \frac{du_{f@p,j}}{dt} \middle| \underline{c}_p, \underline{c}_f \right\rangle f_{fp} \right] &= \frac{\partial}{\partial c_{f,j}} \left[\left(g_j - \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_m} \left[v_f \frac{\partial U_{f,j}}{\partial x_m} \right] \right) f_{fp} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial c_{f,j}} \left[\left([c_{p,m} - c_{f,m}] \frac{\partial U_{f,j}}{\partial x_m} + G_{fp,ij} [c_{f,m} - U_{f,m}] \right) f_{fp} \right] \\ &- \frac{\partial}{\partial c_{f,j}} \left[\frac{\partial}{\partial c_{f,j}} \left(\frac{1}{2} C_{fp} f_{fp} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$G_{fp,ij} = -C_{\theta 1} \frac{\varepsilon_f}{q_f^2} \delta_{ij} + C_{\theta 2} \frac{\partial U_{f,i}}{\partial x_j} \quad (1.57)$$

Puis en modélisant la vitesse de dérive $V_{d,i}$ par :

$$V_{d,i} = \int [c_{f,i} - U_{f,i}] f_{fp}(\underline{c}_f, \underline{c}_p; \underline{x}, t) d\underline{c}_f d\underline{c}_p \quad (1.58)$$

Simonin écrit à partir de la forme fermée de l'équation de la pdf jointe fluide-particule obtenue avec ces deux précédentes modélisations, l'équation de transport sur la vitesse de dérive suivante :

$$\begin{aligned} n_p \left[\frac{\partial}{\partial t} + U_{p,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] V_{d,i} &= -n_p \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\langle u'_{f,i} u_{p,j} \rangle_p - \langle u'_{f,i} u_{f,j} \rangle_f \right] - \langle u'_{f,i} u_{p,j} \rangle_p \frac{\partial}{\partial x_j} n_p \\ &- n_p \frac{\partial U_{f,i}}{\partial x_j} V_{d,j} + n_p G_{fp,ij} V_{d,j} \end{aligned} \quad (1.59)$$

où $C_{\theta 1} = 2.9$ et $C_{\theta 2} = 0.4$.

Quant à la corrélation fluide-particule $\langle u'_{f,i} u_{p,j} \rangle_p$ qui apparaît dans l'équation (Eq. (1.59)), elle est solution de l'équation de transport :

$$\begin{aligned} n_p \left[\frac{\partial}{\partial t} + U_{p,k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right] \langle u'_{f,i} u_{p,j} \rangle_p &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[-n_p \langle u'_{f,i} u_{p,j} u_{p,k} \rangle_p \right] \\ &- n_p \left[\langle u'_{f,i} u'_{p,k} \rangle_p \frac{\partial U_{p,j}}{\partial x_k} + \langle u'_{p,j} u'_{f,k} \rangle_p \frac{\partial \langle u_{f@p,j} \rangle_p}{\partial x_k} \right] \\ &- n_p \frac{1}{\tau_{fp}^F} \left[\langle u'_{f,i} u'_{p,j} \rangle_p - \langle u'_{f,i} u'_{f,j} \rangle_p \right] \\ &+ n_p G_{fp,ik} \langle u'_{f,k} u_{p,j} \rangle_p \end{aligned} \quad (1.60)$$

Le dernier terme à modéliser dans l'équation (1.40) est l'opérateur de collision $\left(\frac{\partial f_p}{\partial t} \right)_{coll}$. Il s'écrit (voir par exemple He & Simonin (1994) [33] et Laviéville *et al.* (1995)) :

$$\left(\frac{\partial f_p}{\partial t} \right)_{coll} = d_p^2 \int \int_{\underline{g} \cdot \underline{k} > 0} \underline{g} \cdot \underline{k} \Delta f_p^{(2)}(\underline{c}_{p1}, \underline{x}, \underline{c}_{p2}, \underline{x} + d_p \underline{k}, t) d\underline{k} d\underline{c}_{p2} \quad (1.61)$$

$$\Delta f_p^{(2)}(\underline{c}_{p_1}, \underline{x}, \underline{c}_{p_2}, \underline{x} + d_p \underline{k}, t) = \frac{1}{e_c^2} f_p^{(2)}(\underline{c}_{p_1}^+, \underline{x}, \underline{c}_{p_2}^+, \underline{x} + d_p \underline{k}, t) - f_p^{(2)}(\underline{c}_{p_1}, \underline{x}, \underline{c}_{p_2}, \underline{x} + d_p \underline{k}, t) \quad (1.62)$$

$$\underline{c}_{p_1}^+ = \underline{c}_{p_1} + \frac{1+e_c}{2e_c} (\underline{g} \cdot \underline{k}) \underline{k} \quad , \quad \underline{c}_{p_2}^+ = \underline{c}_{p_2} - \frac{1+e_c}{2e_c} (\underline{g} \cdot \underline{k}) \underline{k} \quad (1.63)$$

Les vecteurs \underline{c}_{p_1} et \underline{c}_{p_2} sont les vitesses avant collision des deux particules qui se heurtent. Les collisions sont supposées sans friction et inélastiques avec un coefficient de restitution $e_c \in]0, 1]$. $\underline{g} = \underline{c}_{p_1} - \underline{c}_{p_2}$ est la vitesse relative des deux particules et \underline{k} le vecteur unitaire dirigé du centre de la première vers le centre de la seconde. $f_p^{(2)}$ est la fonction de paire de particules.

Pour des particules dont le temps de réponse τ_p est très grand devant le temps d'interaction entre de la turbulence du fluide et les particules τ_{fp}^t , autrement dit les vitesses des particules ne sont pas corrélées avec la turbulence du fluide, et alors l'hypothèse de chaos moléculaire est parfaitement valable. Et alors comme en théorie cinétique nous avons (voir par exemple Laviéville *et al.* (1995)) :

$$\begin{aligned} f_p^{(2)}(\underline{c}_{p_1}, \underline{x}, \underline{c}_{p_2}, \underline{x} + d_p \underline{k}) &= f_p(\underline{c}_{p_1}, \underline{x}) f_p(\underline{c}_{p_2}, \underline{x} + d_p \underline{k}) \\ &= f_p(\underline{c}_{p_1}, \underline{x}) f_p(\underline{c}_{p_2}, \underline{x} + d_p \underline{k}) \end{aligned} \quad (1.64)$$

Cependant lorsque le temps de relaxation τ_p est du même ordre ou inférieur au temps de l'interaction de la turbulence du fluide avec les particules τ_{fp}^t , ils introduisent la fonction de distribution jointe fluide-particule f_{fp} et montrent que :

$$f_p^{(2)}(\underline{c}_{p_1}, \underline{x}, \underline{c}_{p_2}, \underline{x} + d_p \underline{k}) = \int \frac{f_{fp}(\underline{c}_{p_1}, \underline{x}) f_{fp}(\underline{c}_{p_2}, \underline{x} + d_p \underline{k})}{f_{f|p}(\underline{c}_f)} d\underline{c}_f \quad (1.65)$$

où $f_{f|p}$ est la fonction de distribution des vitesses du fluide conditionnée par la présence d'une particule.

L'analyse de l'interaction du fluide lors des collisions binaires en écoulements mono-dispersés a récemment été repris puis étendue aux écoulements bi-solides par Fede (2004) [21].

Avec toutes ces considérations, Simonin montre que l'équation aux moments de la fonction de distribution des vitesses des particules en écoulements gaz-particules s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (n_p \langle \Psi_p \rangle_p) + \frac{\partial}{\partial x_j} (n_p \langle c_{p,j} \Psi_p \rangle_p) - n_p \left\langle \left[g_j - \frac{1}{\tau_{fp}^F} V_{r,j} \right] \frac{\partial \Psi_p}{\partial c_{p,j}} \right\rangle_p &= \mathbb{C}(\Psi_p) \\ &+ n_p \left[\left\langle \frac{\partial \Psi_p}{\partial t} \right\rangle_p + \left\langle c_{p,j} \frac{\partial \Psi_p}{\partial x_j} \right\rangle_p \right] \end{aligned} \quad (1.66)$$

où du fait de la non-linéarité du coefficient de traînée C_D , Simonin (1991), propose d'introduire le temps de relaxation moyen des particules τ_{fp}^F défini par :

$$\frac{1}{\tau_{fp}^F} = \frac{3}{4} \frac{\rho_f}{\rho_p} \frac{\langle C_D \rangle_p}{d_p} \langle |V_r| \rangle_p \quad (1.67)$$

avec :

$$V_r = v_p - \underline{u}_{f@p} \quad (1.68)$$

$$\langle C_D \rangle_p = \frac{24}{\langle Re_p \rangle_p} \left(1 + 0.15 \langle Re_p \rangle_p^{0.687} \right) \quad (1.69)$$

$$\langle Re_p \rangle_p = \frac{d_p \langle |V_r| \rangle_p}{\nu_f} \quad (1.70)$$

Et le taux de variation par collision $\mathbb{C}(\Psi_p)$ de la propriété Ψ_p de la particule est donnée par :

$$\mathbb{C}(\Psi_p) = d_p^2 \int \int \int_{\underline{g} \cdot \underline{k} > 0} \underline{g} \cdot \underline{k} [\Psi_p^+ - \Psi_p] f_p^{(2)}(\underline{c}_{p1}, \underline{x}, \underline{c}_{p2}, \underline{x} + d_p \underline{k}, t) [\underline{g} \cdot \underline{k}] d\underline{k} d\underline{c}_{p1} d\underline{c}_{p2} \quad (1.71)$$

Tout comme l'équation (Eq. (1.27)), l'équation aux moments de f_p n'est pas fermée pour les mêmes raisons. Plusieurs modèles de fermeture sont proposés par Simonin (Simonin & He (1992) [92]) ; cependant nous ne les présenterons pas dans le présent mémoire puisque les conditions aux limites à la paroi qu'il faut modéliser au cours de cette thèse ne concerne pas ces équations de fermeture.

A partir de l'équation aux moments (Eq.(1.66)), en faisant $\Psi_p = 1$, $\Psi_p = u_{p,i}$ et $\Psi_p = u_{p,i}u_{p,j}$, nous obtenons respectivement :

- pour la conservation de la masse

$$\frac{\partial}{\partial t} n_p + \frac{\partial}{\partial x_i} n_p U_{p,i} = \mathbb{C}(1) \quad (1.72)$$

- pour l'équation de transport de la quantité de mouvement

$$n_p \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_{p,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) U_{p,i} = - \frac{\partial}{\partial x_j} n_p R_{p,ij} + n_p g_i - n_p \frac{1}{\tau_{fp}^F} \langle V_{r,i} \rangle_p + \mathbb{C}(u'_{p,i}) \quad (1.73)$$

- pour l'équation de transport des contraintes cinétiques des particules

$$n_p \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_{p,k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) R_{p,ij} = - \frac{\partial}{\partial x_k} n_p S_{p,ijk} - n_p R_{p,ik} \frac{\partial U_{p,j}}{\partial x_k} - n_p R_{p,jk} \frac{\partial U_{p,i}}{\partial x_k} - n_p \frac{2}{\tau_{fp}^F} [R_{p,ij} - R_{fp,ij}] + \mathbb{C}(u'_{p,i} u'_{p,j}) \quad (1.74)$$

où $R_{p,ij} = \langle u'_{p,i} u'_{p,j} \rangle_p$ représente la contrainte cinétique particulière (ou corrélation double particule/particule) et $S_{p,ijk} = \langle u'_{p,i} u'_{p,j} u'_{p,k} \rangle_p$ évoquent les corrélations triples. $R_{fp,ij} = \frac{1}{2} \left[\langle u'_{f,i} u'_{p,j} \rangle_p + \langle u'_{f,j} u'_{p,i} \rangle_p \right]$ représente le tenseur des corrélations turbulentes fluide/particules. La modélisation des ces corrélations fluide/particules $R_{fp,ij}$ constitue une étape assez importante de la fermeture des équations en écoulement diphasique. Simonin propose trois modèles de fermeture : la première est basée sur un modèle de type viscosité turbulente (Simonin (1991) [88]), la seconde est une équation de transport sur la covariance (q_{fp}) des vitesses fluide/particule (Simonin *et al.* (1993) [91]) et un modèle algébrique (Algebraic Fluid-Particle Velocity Correlation Model) sur $R_{fp,ij}$ (Février & Simonin (1998) [26]). Dans les équations (1.72)-(1.74), les taux de variations par collisions sont modélisés par (voir He & Simonin, 1994 [33]) :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(1) &= 0 \\ \mathbb{C}(u'_{p,i}) &= 0 \\ \mathbb{C}(u'_{p,i} u'_{p,j}) &= -n_p \frac{\sigma_c}{\tau_p^c} \left[R_{p,ij} - \frac{2}{3} q_p^2 \delta_{ij} \right] - n_p \frac{1}{3} \frac{(1-e_c)}{\tau_p^c} \frac{2}{3} q_p^2 \delta_{ij} \end{aligned} \quad (1.75)$$

où τ_p^c est le temps caractéristique de collisions interparticulaires et nous avons :

$$\begin{aligned} \tau_p^c &= \left[n_p \pi d_p^2 \sqrt{\frac{16}{\pi} \frac{2}{3} q_p^2} \right]^{-1} \\ \sigma_c &= \frac{1}{5} (1+e_c) (3-e_c) \end{aligned} \quad (1.76)$$

e_c et d_p sont respectivement le coefficient de restitution des collisions particules/particules et le diamètre des particules, tandis que $q_p^2 \left(= \frac{1}{2} R_{p,ii} \right)$ est l'énergie cinétique d'agitation des particules.

1.3 Modélisation statistique des interactions particules-paroi

Résoudre numériquement le système d'équations (Eq. (1.72)-(1.74)) de la description eulerienne de la phase particulaire d'un écoulement diphasique suppose nécessairement d'avoir bien défini le problème aux limites associé. Autrement dit, cela revient à construire des conditions aux limites admissibles physiquement, de sorte que les solutions obtenues dans le domaine d'écoulement se prolongent par continuité jusqu'à la frontière supposée "assez régulière".

Notre argumentation pour montrer l'unicité du problème aux limites associé au système (Eq. (1.72)-(1.74)) sera principalement basée sur des tests à priori effectués à l'aide de simulation numériques LES/DPS, des modèles que nous établirons .

D'une manière générale, la méthode adoptée pour la dérivation des conditions aux limites eulériennes consistera dans un premier temps à définir la trace de la fonction de distribution des vitesses des particules f_p . Ensuite à partir de cette formulation de f_p définie sur $\partial\Omega$, en procédant à un calcul de moyennes analogue que pour la dérivation des équations aux moments, nous dérivons les conditions aux limites. Selon Sakiz (1999), ces conditions aux limites sont de type Dirichlet et flux.

1.3.1 Modèle en théorie cinétique des écoulements granulaires secs

Différentes modélisations des conditions aux limites à la paroi sont effectuées en théorie cinétique des écoulements granulaires. Hui *et al.* (1984) [37], Johnson & Jackson (1987) [44] analysent le rebond particule/paroi par une approche similaire à la réflexion de rayons lumineux sur une interface en optique, en introduisant un coefficient de "spécularité" ϕ qui varie de 0 (pour une paroi lisse) à 1 (pour une paroi rugueuse), tandis que la dissipation de l'énergie lors de collision s'effectue par l'intermédiaire du coefficient de restitution e_w . Cependant, en plus de la quasi-impossibilité de la mesure expérimentale de ce coefficient de "spécularité" ϕ , la méthode de dérivation adoptée ne convient pas à notre étude, car elle n'est pas basée sur une approche aux moments.

Dans le cadre justement de cette approche aux moments, Jenkins & Richman (1986) [40] considèrent une boîte parallélépipédique, connexe à la paroi et d'épaisseur infinitésimale, dans laquelle lors de la collision particule/paroi, une propriété $\psi^- = \psi(\underline{c}_p^-)$ (de la particule) avant la collision passe à $\psi^+ = \psi(\underline{c}_p^+)$ après la collision. En particulier, le changement de vitesse est effectué en supposant lors de la collision que la paroi communique une impulsion \underline{J} à la particule (Jenkins (1992) [38]). Cette impulsion est modélisée selon la proposition de Walton (1988) [110], basée sur les coefficients de restitution incomplète normale e_w et tangentielle β_w et le coefficient de friction μ_w à la paroi. Le taux de variation collisionnel de la quantité ψ est alors défini par :

$$C(\psi) = \int_{\underline{c}_p \cdot \underline{n} \leq 0} [\psi^+ - \psi^-] f_p(\underline{c}_p) \underline{c}_p \cdot \underline{n} d\underline{c}_p \quad (1.77)$$

Avec ce taux de variation d'une propriété ψ (Eq. (1.77)), Jenkins (1992) [38] puis Jenkins & Louge (1997) [39] dérivent des conditions aux limites pour deux cas limites d'écoulements granulaires caractérisés par : une "petite friction/glisement total" et une "grande friction/pas de glissement". L'obtention des écoulements intermédiaires est défini à partir d'une interpolation entre ces deux cas extrêmes (Jenkins & Louge (1997)).

Comme le font remarquer Jenkins & Richman (1986) [40], contrairement à la modélisation de Hui *et al.* (1984) [37] qui ne rend compte que de la dissipation de l'énergie lors de la collision, leur méthode

de taux de variation collisionnel basée sur l'approche aux moments donne la capacité aux conditions aux limites obtenues de fournir de l'énergie fluctuante à l'écoulement ou d'en absorber. Ce qui est accord avec la physique des rebonds. L'approche aux moments est donc particulièrement adaptée pour capturer la physique entière du rebond.

1.3.2 Proposition de Cercignani en théorie cinétique des gaz

Le formalisme que nous présentons dans cette sous-section est tiré des investigations de Cercignani (1975) [13] en théorie cinétique des gaz. La consistance de l'approche assure certainement le prolongement par continuité de l'éventuelle "solution unique" de l'équation de Boltzmann jusqu'à la trace de f_p qui se dégage de cette modélisation.

Nous considérons un nuage de \mathcal{N}_p particules animées d'un mouvement turbulent et en interaction par collision avec la frontière $\partial\Omega$ du domaine d'écoulement. Nous supposons que la durée de la collision particule-paroi est négligeable devant tous les autres temps caractéristiques de l'écoulement diphasique. Ainsi pour une particule qui impacte en un point $\underline{x} \in \partial\Omega$ avec une vitesse \underline{c}_p^- , elle s'en éloigne instantanément depuis le même point \underline{x} avec une vitesse de rebond \underline{c}_p^+ . Cette vitesse de rebond \underline{c}_p^+ peut être calculée exactement par la connaissance du trajet suivi par la particule et des lois de rebond. Cependant, si le nombre de particules \mathcal{N}_p est élevé, un tel calcul s'avère une fois de plus très vite impossible puisqu'il suppose la connaissance de détails tels que la position, la vitesse, ... des particules à la paroi. Ainsi comme pour la dérivation de l'équation de Liouville, nous calculons plutôt la densité de probabilité $R(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+, \underline{x}, t)$ dite de "transition" qu'une particule incidente de vitesse comprise entre \underline{c}_p^- et $\underline{c}_p^- + d\underline{c}_p^-$ au point $\underline{x} \in \partial\Omega$ soit réfléchi à partir du même point avec une vitesse de rebond comprise entre \underline{c}_p^+ et $\underline{c}_p^+ + d\underline{c}_p^+$.

Puisque l'approche ainsi introduite est basée sur une ségrégation, en proche paroi, entre les particules incidentes et celles réfléchies, il convient de décomposer la fonction de distribution "à une particule" f_p en deux contributions :

- une première qui rend compte des particules incidentes est définie par :

$$\forall \underline{c}_p \in \mathbb{R}^3, \quad f_p^-(\underline{c}_p) = H(-\underline{c}_p \cdot \underline{n}) f_p(\underline{c}_p) \quad (1.78)$$

- et une seconde qui décrit le comportement des particules réfléchies par :

$$\forall \underline{c}_p \in \mathbb{R}^3, \quad f_p^+(\underline{c}_p) = H(\underline{c}_p \cdot \underline{n}) f_p(\underline{c}_p) \quad (1.79)$$

où H est la fonction de Heaviside telle que :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (1.80)$$

En posant $D^- = \{\underline{c}_p \in \mathbb{R}^3 / \underline{c}_p \cdot \underline{n} < 0\}$ et $D^+ = \{\underline{c}_p \in \mathbb{R}^3 / \underline{c}_p \cdot \underline{n} > 0\}$, il vient que f_p^- et f_p^+ sont respectivement les restrictions de f_p sur D^- et D^+ . On admettra dans toute la suite que $f_p^- \in L^1_{loc}(D^-)$ et $f_p^+ \in L^1_{loc}(D^+)$; et que :

$$\forall \underline{c}_p \in \mathbb{R}^3, \quad f_p(\underline{c}_p) = f_p^-(\underline{c}_p) + f_p^+(\underline{c}_p) \quad (1.81)$$

Avec cette décomposition, la moyenne à la paroi d'une variable Ψ_p s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_p \rangle_p &= \frac{1}{n_p} \int_{\mathbb{R}^3} \Psi_p(\underline{c}_p) f_p(\underline{c}_p) d\underline{c}_p \\ &= \frac{1}{n_p} \left[\int_{D^-} \Psi_p(\underline{c}_p) f_p^-(\underline{c}_p) d\underline{c}_p + \int_{D^+} \Psi_p(\underline{c}_p) f_p^+(\underline{c}_p) d\underline{c}_p \right] \\ &= \frac{n_p^-}{n_p} \langle \Psi_p \rangle_p^- + \frac{n_p^+}{n_p} \langle \Psi_p \rangle_p^+ \end{aligned} \quad (1.82)$$

où nous avons posé :

$$n_p^- = \int_{D^-} f_p^-(\underline{c}_p) d\underline{c}_p \quad (1.83)$$

$$n_p^+ = \int_{D^+} f_p^+(\underline{c}_p) d\underline{c}_p \quad (1.84)$$

$$n_p^- \langle \Psi_p \rangle_p^- = \int_{D^-} \Psi_p(\underline{c}_p) f_p^-(\underline{c}_p) d\underline{c}_p \quad (1.85)$$

$$n_p^+ \langle \Psi_p \rangle_p^+ = \int_{D^+} \Psi_p(\underline{c}_p) f_p^+(\underline{c}_p) d\underline{c}_p \quad (1.86)$$

Dans l'intervalle de temps t et $t + dt$, la quantité de particules qui entrent en collision avec la paroi sur un élément de surface $d\sigma$ et avec une vitesse incidente comprise entre \underline{c}_p^- et $\underline{c}_p^- + d\underline{c}_p^-$ est définie par :

$$d\phi^- = f_p^-(\underline{x}, \underline{c}_p^-, t) |\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}| dt d\sigma d\underline{c}_p^- \quad (1.87)$$

De même la quantité de particules réfléchies de l'élément de surface $d\sigma$ dans ce même intervalle de temps t et $t + dt$ avec une vitesse comprise entre \underline{c}_p^+ et $\underline{c}_p^+ + d\underline{c}_p^+$ est définie par :

$$d\phi^+ = f_p^+(\underline{x}, \underline{c}_p^+, t) |\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}| dt d\sigma d\underline{c}_p^+ \quad (1.88)$$

En admettant qu'aucune particule n'est capturée par la paroi, nous avons :

$$d\phi^+ = d\mathcal{C}_p^+ \int_{D^-} R(\mathcal{C}_p^- \rightarrow \mathcal{C}_p^+, \underline{x}, t) d\phi^-, \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega, \quad \forall \mathcal{C}_p^+ \in D^+ \quad (1.89)$$

Cela conduit à la **relation fondamentale** suivante :

$$f_p^+(\underline{x}, \mathcal{C}_p^+, t) |_{\mathcal{C}_p^+ \cdot \underline{n}} = \int_{D^-} R(\mathcal{C}_p^- \rightarrow \mathcal{C}_p^+, \underline{x}, t) f_p^-(\underline{x}, \mathcal{C}_p^-, t) |_{\mathcal{C}_p^- \cdot \underline{n}} d\mathcal{C}_p^-, \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega, \quad \forall \mathcal{C}_p^+ \in D^+ \quad (1.90)$$

Cette relation entre f_p^+ et f_p^- par l'intermédiaire de la densité de probabilité de transition montre bien qu'en proche paroi, le comportement des particules réfléchies est déterminé par leur comportement d'avant collision (qui peut être connu) ; mais surtout conditionné par la probabilité de transition R . Autrement, le comportement des particules réfléchies est défini par la nature de l'interaction qui détermine explicitement cette densité de probabilité $R(\mathcal{C}_p^- \rightarrow \mathcal{C}_p^+, \underline{x}, t)$. Ainsi la modélisation de $R(\mathcal{C}_p^- \rightarrow \mathcal{C}_p^+, \underline{x}, t)$ suffirait pour écrire les conditions aux limites sur la fonction de distribution f_p ; et par suite celles du système formé des équations de conservation et de transport (Eq. (1.72)-(1.74)).

Cependant, la modélisation de $R(\mathcal{C}_p^- \rightarrow \mathcal{C}_p^+, \underline{x}, t)$ devra satisfaire à des propriétés qui définissent la physique de l'interaction.

Propriétés sur $R(\mathcal{C}_p^- \rightarrow \mathcal{C}_p^+, \underline{x}, t)$

(i) **Propriété 1** : La paroi considérée étant ni poreuse, ni absorbante, aucune particule n'est capturée par celle-ci, et donc la probabilité totale qu'une particule incidente soit réfléchi est égale à 1 :

$$\int_{D^+} R(\mathcal{C}_p^- \rightarrow \mathcal{C}_p^+, \underline{x}, t) d\mathcal{C}_p^+ = 1 \quad (1.91)$$

(ii) **Propriété 2** : La densité de probabilité de transition est une fonction positive :

$$R(\mathcal{C}_p^- \rightarrow \mathcal{C}_p^+, \underline{x}, t) \geq 0 \quad (1.92)$$

Conséquence : Le flux normal de masse à la paroi est nul.

En effet en raison de la relation fondamentale (Eq. (1.90)) et de la propriété 1, nous avons :

$$\begin{aligned}
 n_p \langle \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p &= \int_D \underline{c}_p \cdot \underline{n} f_p(\underline{c}_p) d\underline{c}_p \\
 &= \int_{D^-} -|\underline{c}_p \cdot \underline{n}| f_p^-(\underline{c}_p) d\underline{c}_p^- + \int_{D^+} |\underline{c}_p \cdot \underline{n}| f_p^+(\underline{c}_p) d\underline{c}_p^+ \\
 &= -\int_{D^-} |\underline{c}_p \cdot \underline{n}| f_p^-(\underline{c}_p) d\underline{c}_p^- + \int_{D^+} \left(\int_{D^-} R(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+, \underline{x}, t) f_p^-(\underline{x}, \underline{c}_p^-, t) |\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}| d\underline{c}_p^- \right) d\underline{c}_p^+ \\
 &= -\int_{D^-} |\underline{c}_p \cdot \underline{n}| f_p^-(\underline{c}_p) d\underline{c}_p^- + \int_{D^-} \left(\int_{D^+} R(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+, \underline{x}, t) d\underline{c}_p^+ \right) |\underline{c}_p \cdot \underline{n}| f_p^-(\underline{c}_p) d\underline{c}_p^- \\
 &= -\int_{D^-} |\underline{c}_p \cdot \underline{n}| f_p^-(\underline{c}_p) d\underline{c}_p^- + \int_{D^-} |\underline{c}_p \cdot \underline{n}| f_p^-(\underline{c}_p) d\underline{c}_p^-
 \end{aligned} \tag{1.93}$$

Donc :

$$n_p \langle \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p = 0 \tag{1.94}$$

1.4 Traitement des parois lisses en écoulement gaz-solides

1.4.1 Application du modèle de Cercignani

He & Simonin (1994) [33] puis Sakiz & Simonin (1999) [83], pour la dérivation des conditions aux limites du système aux moments (Eq. (1.72)-(1.74)) dans le cadre des parois lisses proposent de considérer une collision particule-paroi comme étant un événement totalement déterministe. Une telle approche a conduit à modéliser la probabilité de transition par :

$$R(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+, \underline{x}, t) = \delta(\underline{\Phi}(\underline{c}_p^-) - \underline{c}_p^+) \tag{1.95}$$

où la bijection $\underline{\Phi}$ définie par :

$$\begin{aligned}
 \underline{\Phi} &: D^- \rightarrow D^+ \\
 \underline{c}_p^- &\mapsto \underline{c}_p^+ = \underline{\Phi}(\underline{c}_p^-)
 \end{aligned} \tag{1.96}$$

est la formulation mathématique de la loi de rebond d'une particule sur une paroi.

Cette loi de rebond est définie par analogie au modèle simplifié de Walton (1998) [110] et elle est modélisée par :

$$\begin{aligned}
 &\forall \underline{c}_p^- \in D^-, \\
 \underline{\Phi}(\underline{c}_p^-) &= \begin{cases} \underline{c}_p^- - (1 + e_w) (\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}) \underline{n} + \frac{2}{7} (1 + \beta_w) \underline{v}_g : \text{rebond sans glissement} \\ \underline{c}_p^- - (1 + e_w) (\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}) (\underline{n} - \mu_w \underline{t}) : \text{rebond avec glissement} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{1.97}$$

où \underline{n} est le vecteur unitaire normal à la paroi ;

$\underline{t} = \frac{\underline{v}_g}{|\underline{v}_g|}$ est le vecteur tangent à la paroi,

$\underline{v}_g = \underline{c}_p^- - (\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}) \underline{n}$ est la vitesse de glissement de la particule par rapport à la paroi.

Le rebond est non-glissant lorsque :

$$|\underline{v}_g| < \frac{7}{2} \frac{\mu_w (1 + e_w)}{1 + \beta_w} |\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}| \quad (1.98)$$

et glissant dans le cas contraire.

La modélisation de la probabilité de transition (Eq. (1.95)) vérifie aisément les propriétés (Eq. (1.91)-(1.92)) et l'application de la relation fondamentale (Eq. (1.90)) conduit à :

$$\forall \underline{c}_p^+ \in D^+, \quad f_p^+(\underline{c}_p^+) = \frac{1}{e_w J_{\underline{\Phi}}} f_p^-(\underline{\Phi}^{-1}(\underline{c}_p^+)) \quad (1.99)$$

dans lequel $J_{\underline{\Phi}}$ est le jacobien associé à la transformation et $\underline{\Phi}^{-1}$ est la bijection réciproque de $\underline{\Phi}$.

Avec (Eq. (1.99)), He & Simonin (1994) [33] montrent que les moments globaux s'écrivent en fonction des moments incidents :

- moment d'ordre 0 :

$$n_p = \frac{1 + e_w}{e_w} n_p^- \quad (1.100)$$

- moment d'ordre supérieur ou égal à 1 :

$$\langle \Psi \rangle_p = \frac{e_w}{1 + e_w} \langle \Psi \rangle_p^- + \frac{1}{1 + e_w} \langle \Psi \circ \underline{\Phi} \rangle_p^- \quad (1.101)$$

Dans le cas où le plan de la paroi est orthogonal au plan vertical, He & Simonin (1994) montrent que les conditions aux limites recherchées ne sont rien d'autre que des moments impairs par rapport à la vitesse normale à la paroi. En écrivant un système complet de moments pairs et impairs de la vitesse normale jusqu'à l'ordre quatre, puis en faisant l'hypothèse que la fonction de distribution des vitesses normales à la paroi des particules en proche paroi est une demi-gaussienne :

$$f_{py}^-(c_{py}) = \frac{2n_p^-}{\sqrt{2\pi \langle v'_p v'_p \rangle_p^-}} \exp\left(-\frac{c_{py}^2}{2 \langle v'_p v'_p \rangle_p^-}\right) \quad (1.102)$$

ils proposent le système de conditions aux limites défini par le tableau (1.1).

$n_p V_p = 0$
$\langle u'_p v'_p \rangle_p = -\mu_w \langle v'_p v'_p \rangle_p$
$\langle v'_p w'_p \rangle_p = 0$
$\langle u_p'^2 v'_p \rangle_p = -2\mu_w \langle u'_p v'_p v'_p \rangle_p - \mu_w^2 \langle v_p'^3 \rangle_p$
$\langle v_p'^3 \rangle_p = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-e_w}{\sqrt{e_w}} \langle v_p'^2 \rangle_p^{3/2}$
$n_p \langle v'_p w_p'^2 \rangle_p = 0$
$\langle u'_p v'_p w'_p \rangle_p = -\mu_w \langle v_p'^2 w'_p \rangle_p$

TAB. 1.1 – Conditions aux limites à la paroi (lisse) pour un mouvement de translation (Sakiz, 1999 [82]).

1.4.2 Proposition de Derevich et Zaichik (1988)

La méthode adoptée par Derevich et Zaichik (1988) [19] est assez similaire de celle développée par Cercignani (1975) [13] pour les paroi entièrement réfléchissantes. Ici, afin de prendre en compte les phénomènes de déposition sur une paroi totalement ou partiellement absorbante, l'interaction particules/paroi est modélisée par une densité de probabilité de transition :

$$\pi_w = \text{fonction}(\text{coefficient de réflexion } \chi, \text{ coefficients de rebonds dans chaque direction}) \quad (1.103)$$

Le coefficient de réflexion χ caractérise le phénomène de déposition des particules et définit la probabilité qu'une particule qui a heurté la paroi retourne dans l'écoulement. Le coefficient χ est alors défini comme le rapport du flux réfléchi (J_r) par rapport au flux incident (J_f) de particules à la paroi :

$$\chi = \frac{J_r}{J_f} \quad \text{où} \quad \begin{cases} J_f = -\int_{-\infty}^0 v_y f_p^- dv_y \\ J_r = \int_0^{\infty} v_y f_p^+ dv_y \end{cases} \quad (1.104)$$

Donc dans le cas d'une paroi entièrement absorbante $\chi = 0$ et $\chi = 1$ lorsqu'il n'y a pas de dépôt.

Les conditions aux limites étant des moments impairs de la vitesse normale à la paroi, nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi v_y f_p dv_y = \int_{-\infty}^0 \Psi v_y f_p^- dv_y + \int_0^{+\infty} \Psi v_y f_p^+ dv_y \quad (1.105)$$

Il ne leur reste plus qu'à connaître explicitement f_p^- et f_p^+ pour dériver les conditions aux limites.

Du fait de la continuité de la pdf jusqu'à la paroi, $f_p^-(v_y) = f_p(v_y < 0)$ constitue la solution de l'équation de type Fokker-Planck de la pdf des vitesses (obtenue par Derevich & Zaichik (1988) [19])

pour la description statistique du mouvement des particules dans un écoulement turbulent fluide) en proche paroi. Quant à f_p^+ , elle est déterminée directement à partir de (Eq. (1.104)) et (Eq. (1.103)).

Cependant pour calculer f_p^- , Derevich & Zaichik considèrent en proche paroi, une couche cinétique stationnaire assez mince comme le lieu de toutes les interactions particules/paroi dans laquelle le transport s'effectue uniquement dans la direction normale à la paroi. Si bien qu'ils résolvent, à l'aide d'une méthode de perturbation, l'équation de type Fokker-Planck stationnaire (de leur description statistique) et fonction uniquement des variables dans la direction normale à la paroi. Muni de cette solution f_p^- en quasi-équilibre, puis f_p^+ , Derevich & Zaichik calculent directement à partir de (Eq. (1.105)) tous les moments dont ils ont besoin comme conditions aux limites à la paroi.

D'un point de vue du formalisme adopté pour la dérivation des conditions aux limites à la paroi, la méthode proposée par Derevich & Zaichik (1988) est similaire à celle utilisée par He & Simonin (1994) puis Sakiz & Simonin (1999). L'unique différence se situe au niveau de l'implication d'une formulation analytique de la pdf des vitesses incidentes f_p^- au cours de la dérivation. En effet avec He & Simonin puis Sakiz & Simonin, la dérivation était basée sur deux étapes fondamentales de fermetures, dont la première consiste à écrire les moments impairs (qui constituent les conditions aux limites recherchées) en fonction des moments pairs (qui sont eux bien connus) ; ce qui permet d'écrire les conditions aux limites en fonction de ces moments pairs et quelques moments incidents impairs ; de sorte que l'utilisation d'une formulation analytique de f_p^- (qui constitue la seconde étape de fermeture) est employée comme ultime recours pour la fermeture de ces quelques moments incidents impairs qui restent. Cette manière de repousser le plus loin possible l'utilisation d'une formulation analytique de la pdf incidente peut s'avérer très déterminante. Alipchenkov *et al.* (2001) [1] prouvent à l'aide d'une étude comparée entre les deux méthodes que la proposition de Derevich & Zaichik d'employer au prime abord de la dérivation, une pdf analytique (qui d'ailleurs pourrait ne pas être très réaliste) conduit dans certaines conditions de l'interaction particule/paroi à des résultats erronés.

D'autre part, Sakiz (1999) montre que l'utilisation de la méthode de dérivation proposée par Jenkins & Richman (1986) [40], Jenkins & Louge (1997) [39], en écoulements granulaires pose deux problèmes. Le premier vient du fait qu'il faille dès le départ faire une hypothèse sur la fonction de distribution des vitesses incidentes f_p^- , alors qu'il lui faut faire seulement une hypothèse en fin de dérivation, sur la distribution des vitesses incidentes normales à la paroi $f_{p_y}^-$, pour la fermeture de son système de conditions aux limites. Le second problème est du au fait qu'en faisant une hypothèse sur f_p^- , qui s'exprime nécessairement en fonction de n_p^- , on introduit un rapport supplémentaire $\frac{n_p}{n_p}$ que la méthode de taux de

variation collisionnel ne permet pas de calculer. Sakiz fait aussi remarquer que le coefficient χ (donner dans les papiers de Jenkins & Richman (1986) [40] et Jenkins & Louge (1997) [39]), *supposé connu* et qui prend en compte l'influence de la paroi sur la pdf, n'est rien d'autre que le rapport $\frac{2n_p^-}{n_p}$.

Ce résultat nous conduit, en toute légitimité, à utiliser la méthode adoptée avec succès par He & Simonin (1994) puis Sakiz & Simonin (1999) pour la dérivation des conditions aux limites aux parois rugueuses.

Chapitre 2

Modélisation statistique de l'interaction particules-paroi rugueuse

2.1 Introduction

La compréhension de phénomènes physiques assez importants - tels les collisions inter-particulaires (Laviéville (1997) [59], Fede (2004) [21]), la concentration préférentielle (Février (2000) [25]), le croisement des trajectoires, ... - dans les études théoriques des écoulements diphasiques dilués exige parfois d'isoler ces phénomènes, dans l'optique de mieux les appréhender, en soustrayant par exemple certaines interactions au sein de l'écoulement telles que celles avec les parois. Les conditions aux limites à la paroi sont plutôt remplacées par des conditions de périodicité dans toutes les directions de l'écoulement.

Dans le cadre des écoulements confinés, une telle attitude pourrait s'avérer assez légitime en simulation lagrangiennes lorsque les particules en suspension sont très peu inertielles puisque le mouvement de telles particules est essentiellement piloté par la phase porteuse. En effet pour ces particules dont le temps de réponse tend vers zéro, Zaichik et Alipchenkov (2005) [115] montrent analytiquement, par passage à la limite de l'équation de transport des moments d'ordre 2 que les contraintes turbulentes du fluide et de la phase dispersée coïncident. Ce qui par la suite permet d'écrire le tenseur de diffusivité uniquement en fonction des contraintes cinétiques du fluide et de l'échelle lagrangien de temps intégral. Dans une telle situation les rebonds particules-paroi sont peu importants, et juste après un rebond les particules suivent systématiquement l'écoulement porteur.

Par contre lorsque les particules sont inertielles, leur mouvement est dominé principalement dominé par cette inertie. En raison de cette dernière, leur temps de réponse est assez grand devant les échelles

caractéristiques de la turbulence du fluide. Ainsi de telles particules gardent pendant un temps assez long leur trajectoire après un rebond sur la paroi. Les rebonds sont alors assez fréquents. Par ailleurs, ces rebonds provoquent une perte d'énergie des particules, si bien que celles-ci ralentissent ; ce qui en retour freine de la phase porteuse. Dans un écoulement en canal, une telle situation conduit à une chute de la pression.

En simulations euleriennes, principalement utilisées pour l'étude des écoulements industriels ou environnementaux, il serait inconcevable de négliger les interactions avec les parois et en plus la résolution des équations aux moments exige des conditions aux limites mathématiquement bien définies aux parois fixes ou mobiles. La prise en compte de conditions aux limites à la paroi assez sophistiquées (Derevich & Zaichik (1988) [19], He & Simonin (1994) [33], Sakiz & Simonin (1999) [83], Alipchenkov *et al.* (2001) [1]) dans des codes euleriens (tels que Mélodif, Saturne Polyphasique, ...) a montré une amélioration des prédictions numériques. Cependant la dérivation de ces conditions aux limites euleriennes a été possible en supposant que les parois sont lisses. Or des investigations expérimentales détaillées effectuées en canal (Sommerfeld & Huber (1999) [98], Kussin & Sommerfeld (2002) [56], Sommerfeld & Kussin (2004) [99], Benson *et al.* (2005) [5]) ont montré une forte influence de la rugosité des parois sur le transport et l'agitation des particules. Pour Sommerfeld et Huber (1999), l'observation de l'augmentation de la fréquence de collisions (particules-paroi), de la dispersion des particules et la modification de la concentration en particules à travers le canal sont les conséquences des rebonds irréguliers. Les observations de Kussin & Sommerfeld (2002) focalisées sur l'analyse du couplage inverse ont conclu d'autre part à l'existence d'une corrélation entre la modification des caractéristiques du fluide (turbulence et écoulement moyen) et l'importance de la rugosité, outre le chargement du canal en particules et leur nombre de Stokes. En plus, les mesures de Sommerfeld & Kussin (2004) montrent qu'aussi bien la dispersion transverse que les vitesses fluctuantes des particules augmentent avec l'intensité de la rugosité des parois. Avec des conclusions similaires, les investigations en canal de Benson *et al.* (2005) [5] montrent en plus qu'en présence de rugosité, la vitesse moyenne des particules (dans le sens de l'écoulement) est 30% à 40% plus petite qu'en paroi lisse. Un tel résultat s'explique par la perte de quantité de mouvement (dans le sens de l'écoulement au profit de la direction normal à la paroi) au cours des collisions particules-paroi. Pour Benson et ses co-auteurs, les particules "*gardent en mémoire*" les effets d'une précédente collision sur la paroi rugueuse.

La prise en compte de la rugosité s'est donc imposée dans les conditions aux limites à la paroi, dans les simulations lagrangiennes (Fukagata *et al.* (2001) [24], Santiago *et al.* (2004) [58], Squires & Simonin (2006) [100]).

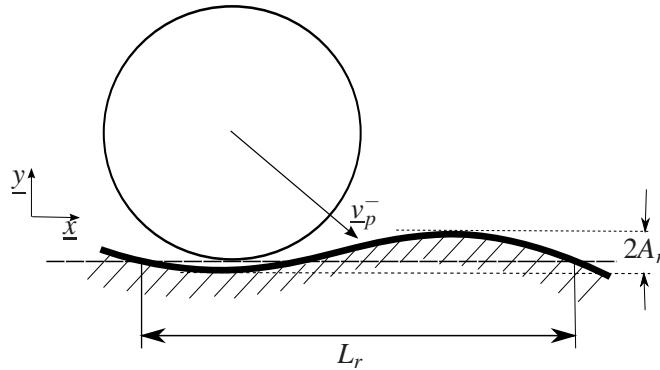


FIG. 2.1 – Modèle de paroi déterministe de Matsumoto & Saito (1970) [61], [62].

Notre propos au cours de ce chapitre sera dans un premier temps de passer en revue l'évolution de la modélisation lagrangienne de la rugosité et enfin d'employer celle qui se compare le mieux aux études expérimentales pour la dérivation eulérienne de conditions aux limites à la paroi. Nous utiliserons pour ce faire le formalisme de Cercignani (1975) [13] présenté au chapitre 1. Ainsi il sera question de modéliser au cours de cette dérivation eulérienne, la probabilité de transition $R(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+, \underline{x}, t)$.

2.2 Modélisations des effets de parois rugueuses en simulations lagrangiennes

2.2.1 Modèles déterministes de la rugosité des parois

L'idée sous-jacente de cette modélisation est la connaissance préalable de la structure rugueuse de la paroi avant la simulation lagrangienne. Nous verrons que cette méthode s'oppose à ceux présentés aux sous-sections § (2.2.2) et § (2.2.3). Les modèles présentés dans cette sous-section vont d'une description approximative à une modélisation plus fine et réaliste de la rugosité de la paroi.

Modèle de Matsumoto & Saito (1970)

Matsumoto & Saito (1970) [61], [62] considèrent que les aspérités d'une paroi rugueuse ont une distribution périodique de longueur L_r dans le plan de la paroi. Ces irrégularités ont toutefois une hauteur, de distribution aléatoire n'excédant pas une certaine amplitude A_r .

En introduisant une phase de rugosité $\varphi \in [0, 2\pi]$, ils modélisent les hauteurs (voir figure 2.1) de rugosité de la paroi par une fonction sinusoïdale :

$$y = A_r \sin\left(\frac{2\pi}{L_r} + \varphi\right) \quad (2.1)$$

La phase φ est tirée aléatoirement selon une distribution uniforme.

L'utilisation de cette modélisation dans des simulations lagrangiennes en canal horizontal avec des particules sphériques inertielles et des rebonds inélastiques avec friction dynamique (Matsumoto & Saito (1970) [61], [62]) leur permettaient de se comparer raisonnablement à leurs données expérimentales aussi bien pour la vitesse moyenne que pour la concentration de la phase dispersée.

Cependant, Sommerfeld (1992) [96] fait remarquer que le bon accord observé entre les résultats numériques et l'expérience ne peut être mis au compte de la modélisation (2.1) à traduire proprement les effets de rugosité d'une paroi, puisque l'expérience menée par Matsumoto & Saito était effectuée avec des parois en verre. Ces dernières devant être considérées comme lisses, les simulations de Matsumoto & Saito sont plutôt celles de l'effet de particules légèrement non-sphériques sur une paroi lisse que l'effet de paroi rugueuse sur une particule sphérique.

Frank *et al.* (1993)

Le modèle géométrique 2D de paroi rugueuse proposé par Frank *et al.* (1993) [23] est basé sur une distribution aléatoire des hauteurs et positions des aspérités sur la surface de la paroi macroscopique. Ils décrivent alors la structure de la paroi en reliant des couples de points (s_n, z_n) par des segments. Un point défini par le couple (s_n, z_n) est obtenu à partir de tirages aléatoires selon une distribution uniforme tels que :

$$s_n \in \left[\frac{1}{2}\bar{S}, \frac{3}{2}\bar{S}\right] \quad \text{et} \quad z_n \in [-z_{max}, z_{max}] \quad (2.2)$$

Les paramètres \bar{S} et z_n du modèle sont à définir à partir d'une analyse microscopique préalable de la paroi. Ils sont fonction du diamètre d_p des particules et des valeurs moyennes de l'amplitude et de la longueur caractéristique entre deux aspérités. La paroi est schématisée par la figure (2.2).

Afin de valider cette modélisation, Frank *et al.* (1993) [23] réalisent des simulations lagrangiennes en canal horizontal de section rectangulaire. Les résultats de prédiction de la vitesse moyenne dans le canal présente un bon accord avec l'expérience pour des particules inertielles de grand diamètre, tandis qu'elle est sur-estimée pour de mêmes particules mais de diamètres moyens et petits. Cette sur-estimation était attribuée aux effets 3D de la rugosité (du fait de canal rectangulaire où l'écoulement ne pouvait être considéré bi-dimensionnel) qui n'influence que les particules inertielles de petits diamètres.

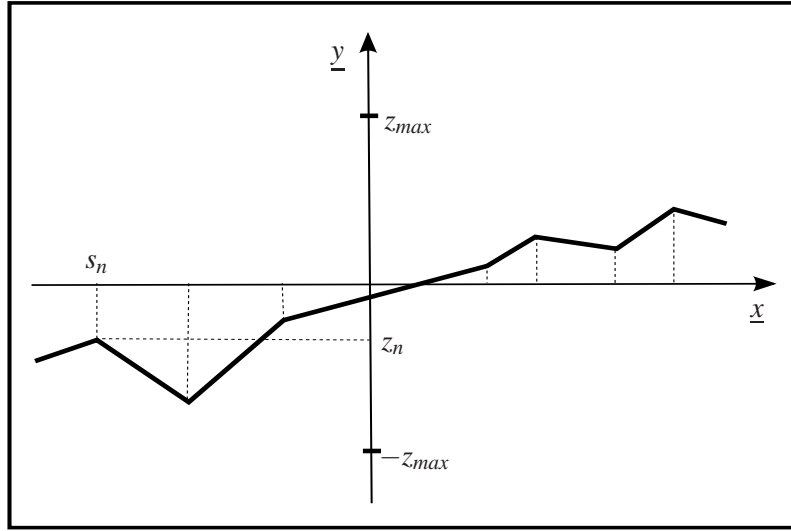


FIG. 2.2 – Modèle géométrique stochastique 2D de paroi rugueuse de Frank *et al.* (1993) [23].

Tsirkunov & Panfilov (1998)

La modélisation de Tsirkunov & Panfilov (1998) [105] est assez identique à celle proposée par Frank *et al.* (1993) [23]. La paroi géométrique est constituée de N points de coordonnées $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$ tel que :

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_i = x_{i-1} + h + \xi, & (i = 2, 3, \dots, N) \\ y_i = \eta, & (i = 1, 2, \dots, N) \end{cases} \quad (2.3)$$

où ξ et η sont des variables aléatoires gaussiennes de la distribution des positions et hauteurs/profondeurs de la paroi rugueuse ; de moyennes nulles et de déviations standards respectives $\Delta\xi$ et $\Delta\eta$. $2h$ est la période moyenne de la rugosité. Le triplet de paramètres $(h, \Delta\xi, \Delta\eta)$ est à déterminer à partir de mesures expérimentales. L'obtention de la structure de la paroi est effectuée en reliant les points générés par l'équation (Eq. 2.3) à l'aide d'une fonction cubique (voir figure 2.3).

Pour la validation du présent modèle géométrique 2D, Tsirkunov & Panfilov (1998) [105] font rebondir un très grand nombre de particules sur trois parois différentes : une paroi sinusoïdale, une seconde définie à partir du modèle (Eq. 2.3) et la dernière est expérimentale ; pour différentes incidences. Ils introduisent pour les simulations, la possibilité pour des particules d'effectuer des collisions multiples lorsque celles-ci pénètrent dans une cavité verticale de la paroi (voir figure 2.3) afin de pouvoir s'en échapper puis rebondir au dessus de la paroi macroscopique.

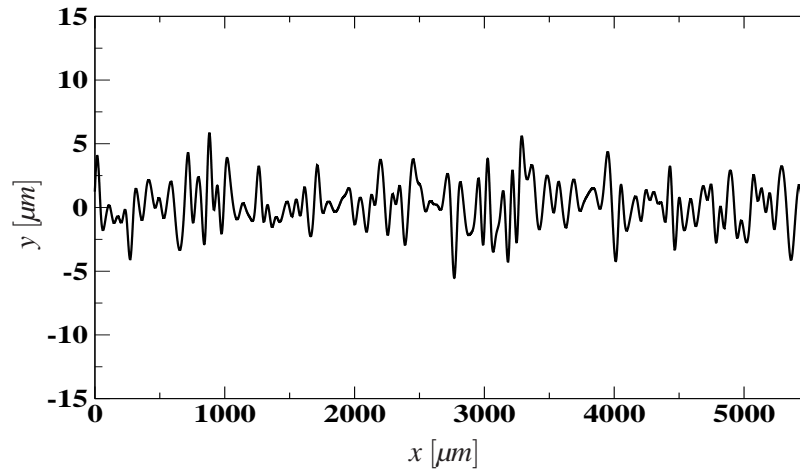


FIG. 2.3 – Modèle géométrique 2D de paroi rugueuse de Tsirkunov & Panfilov (1998) [105].

Deux résultats fondamentaux se dégagent de cette étude. Premièrement la dispersion des directions empruntées par les particules après le rebond montrent qu'avec la paroi sinusoïdale, celles-ci restent confinées dans une bande étroite, tandis qu'elle est élargie et similaire pour la paroi expérimentale et celle issue du modèle (Eq. 2.3). Ce résultat révèle clairement que l'approximation en sinus de la paroi rugueuse est grossière. Deuxièmement, leurs résultats montrent pour la paroi construite à partir de la modélisation (Eq. 2.3) que la probabilité pour une particule de rebondir avec un angle rasant est nulle. Ce qui est assez logique puisque les particules ont la possibilité d'effectuer plusieurs rebonds lorsqu'elles sont rasantes après un rebond précédent avant de retourner dans l'écoulement.

2.2.2 Le "*Abnormal bouncing model*" de Tsuji *et al.* (1987)

Selon leur compréhension du mécanisme de collision particules-paroi, le très grand nombre de particules qui séjournent à la paroi, contrairement à l'expérience, au cours des simulations lagrangiennes avec une paroi lisse et des rebonds inélastiques à la paroi, est la conséquence de particules incidentes rasantes qui glissent le long de la paroi lors des collisions et y demeurent pendant une très longue période.

Le "*Abnormal bouncing model*" [106] basé sur le concept de "*virtual wall*" sur laquelle vient rebondir la particule incidente serait une alternative pour mimer les effets de paroi rugueuse (figure 2.4).

Le principe de cette modélisation est de remplacer au moment de la collision particule-paroi, la paroi macroscopique par une paroi virtuelle inclinée d'un angle γ positif, dont l'estimation est rendue possible à partir de la formulation stochastique empirique suivante :

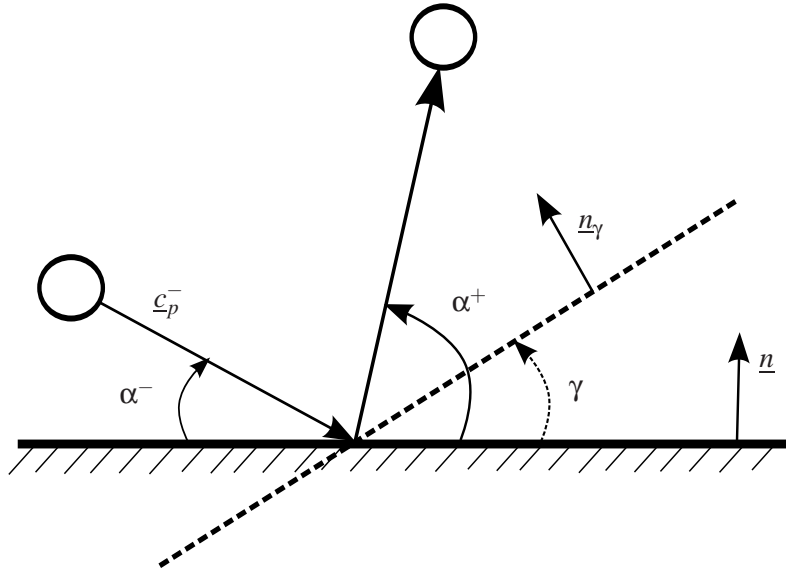


FIG. 2.4 – Illustration du "Abnormal bouncing model" sur la paroi virtuelle (Tsuji *et al.* (1985, 1987) [107], [106].)

$$\gamma = \begin{cases} cR^k\delta_0(\beta - \alpha^-) & \text{si } \alpha^- \leq \beta \\ 0 & \text{si } \alpha^- > \beta \end{cases} \quad (2.4)$$

avec :

α^- : l'angle d'incidence de la particule par rapport à la paroi macroscopique,

β : l'angle empirique au delà duquel la particule impacte sur une paroi lisse ($\beta = 7^\circ$),

R est un nombre aléatoire tel que $R \in]0, 1]$,

c et k sont des constantes à caler avec l'expérience. Dans le cadre de leurs simulations en canal horizontal $c = 5$ et $k = 4$.

δ_0 est une fonction empirique du nombre de Froude (Fr) et définie par :

$$\delta_0 = \begin{cases} \frac{2.3}{Fr} - \frac{91}{Fr^2} + \frac{1231}{Fr^3}, & Fr = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} \\ 0 & \text{en paroi lisse} \end{cases} \quad (2.5)$$

g étant la constante de la pesanteur, \bar{u} est la vitesse moyenne du fluide (dans le sens de l'écoulement) et h la hauteur du canal ou tuyau.

Cette formulation empirique de δ_0 (Eq. 2.5) reste très attachée aux cas d'écoulements horizontaux. Son application à des configurations différentes nécessite certainement une nouvelle formulation ou une adaptation.

D'autre part pour Tsuji *et al.*, l'accumulation en paroi lisse étant le fait de particules rasantes, le modèle de paroi rugueuse n'est valable que pour cette gamme d'incidence des particules. En d'autres termes, seules les particules rasantes sont influencées par la rugosité des parois. Ainsi pour de telles particules, lorsqu'elles entrent en collision avec la paroi virtuelle inclinée de l'angle de rugosité γ , la quantité de mouvement de la particule incidente est transformée (du fait de la collision) en une quantité de mouvement dans la direction normale à la paroi. Ce mécanisme a pour résultat de rediriger la particule dans l'écoulement.

Cette description du mécanisme de rebond par ce modèle suppose clairement que les hauteurs de rugosité sont négligeables.

Une analyse récente des effets de redistribution de la quantité de mouvement par la rugosité de la paroi sur la phase particulaire, dans le cadre d'un écoulement en canal vertical a été menée à l'aide du présent modèle de Tsuji *et al.* par Fukagata *et al.*¹ (2001) [24] dans une *Large Eddy Simulation - Lagrangian Particle Tracking* (LES-LPT). Le triplet de paramètres (c, k, β) était considéré analogue au modèle de base de Tsuji *et al.*, c'est à dire $(c = 5, k = 4, \beta = 7^\circ)$ et seul δ_0 était considéré comme un paramètre variable puisque la formulation empirique (2.5) n'est plus valable.

Les simulations ont montré des résultats très peu satisfaisants en ce qui concerne la vitesse moyenne et l'agitation des particules. Cependant, le modèle a tout de même eu le mérite de réduire l'accumulation en paroi. Il a permis, en jouant sur δ_0 , de tendre raisonnablement vers la distribution des particules dans le canal.

L'utilisation du modèle de Tsuji tel que défini par (Eq. 2.4) pour la modélisation du mécanisme de collision particule-paroi rugueuse reste entièrement subordonnée aux constantes empiriques c , k et δ_0 qui

¹**Remarque** : Fukagata *et al.* (2001) [24] ont montré que la pdf de l'angle de rugosité γ qui découle du modèle stochastique de Tsuji *et al.* (1987) s'écrit :

$$P(\gamma) = \begin{cases} \frac{[c\delta_0(\beta - \alpha^-)]^{-\frac{1}{k}}}{k} \gamma^{(\frac{1}{k}-1)} & 0 < \gamma < c\delta_0(\beta - \alpha^-) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.6)$$

Cette formulation (2.6) montre que le "Abnormal bouncing model" conduit à une forte probabilité de tirer un angle de rugosité très aigu.

sont extrêmement liées à la configuration du confinement. Le second inconvénient majeur du modèle est son incapacité à reproduire les effets de parois rugueuses pour des angles de collisions supérieur à $\beta = 7^\circ$, puisqu'aucun argument physique ne restreint les effets de rugosité qu'aux seules particules d'incidence inférieure ou égale à cette valeur de β . D'autre part, le fait qu'il ne soit pas permis de tirer un angle de rugosité négatif sur lequel rebondirait la particule rend cette modélisation irréaliste. En effet, si nous approximons assez grossièrement une rugosité de la paroi par un triangle dont un des cotés constitue la paroi macroscopique, il n'y a aucune raison physique pour que la probabilité pour une particule d'heurter la facette descendante (caractérisée par des angles de paroi négatifs) soit strictement nulle et égale à 1 pour la facette ascendante.

Au total, ce mécanisme n'est pas adapté pour mimer convenablement les effets de rugosité des parois.

2.2.3 Modèle stochastique de Sommerfeld *et al.* (1999)

L'idée de "*virtual wall*" introduite précédemment par Tsuji *et al.* (1987) [106], sur laquelle rebondit la particule constitue l'ossature du modèle de Sommerfeld (1992) [96]. Cependant, contrairement à Tsuji *et al.*, Sommerfeld propose que :

- quelque soit la trajectoire de la particule incidente, celle-ci rebondit sur une aspérité.
- Cela a pour conséquence de prendre en compte tous les angles d'incidence,
- l'angle de rugosité γ de la paroi soit choisi selon une loi de distribution stochastique (uniforme ou normale de moyenne nulle et d'écart type fixé) dans un domaine borné $[-\gamma_{max}, \gamma_{max}]$.

Le second point permet contrairement au "*Abnormal bouncing model*", de tirer des angles de rugosité négatifs ; de sorte à mieux approximer les effets d'une paroi rugueuse réelle. L'obtention de la borne γ_{max} est subordonnée à deux paramètres caractéristiques de la paroi physique. Il s'agit de :

- la hauteur moyenne de rugosité : H_r
- la période de rugosité : L_r

à partir desquels nous avons :

$$\gamma_{max} = \begin{cases} \arctan\left(\frac{2H_r}{L_r}\right) & \text{si } d_p < L_r \text{ (figure 2.5)} \\ \arctan\left(\frac{H_r}{2L_r}\right) & \text{si } d_p > L_r \text{ (figure 2.6)} \end{cases} \quad (2.7)$$

où d_p est le diamètre de la particule. Le present modèle est illustré par les figures 2.5 et 2.6.

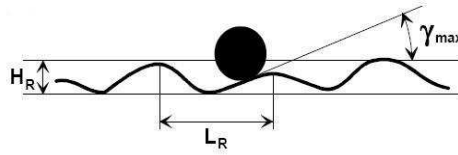


FIG. 2.5 – Rebond sur une paroi d'une particule de taille inférieure aux caractéristiques moyennes de la rugosité de cette paroi.

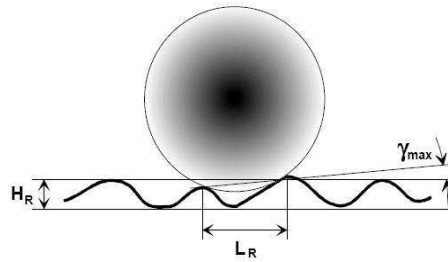


FIG. 2.6 – Rebond sur une paroi d'une particule de taille supérieure aux caractéristiques moyennes de la rugosité de cette paroi.

Les simulations réalisées par Sommerfeld (1992) [96] avec le présent modèle, dans lesquelles il compare d'une part le cas d'un tirage uniforme et d'autre un tirage normal de moyenne nulle, de l'angle de paroi γ ; ont montré pour des particules inertielles, une augmentation de la vitesse fluctuante horizontale qui s'accorde relativement bien avec l'expérience lorsque la distribution de l'angle de paroi est une gaussienne. La vitesse moyenne dans le sens de l'écoulement et le flux de masse des particules restent identiques pour les deux distributions. Ces résultats laissent tout de même supposer que la gaussienne de moyenne nulle est une bonne approximation de la distribution des angles de rugosité d'une paroi rugueuse.

En plus les investigations expérimentales de Schade *et al.* (1998), puis de Sommerfeld *et al.* (1999) valident l'approximation de la distribution des angles de rugosité par une gaussienne de moyenne nulle et dont l'écart type $\Delta\gamma$ dépend de la structure de la rugosité de la paroi et de la taille des particules.

D'autre part à partir de mesures de l'écart type des angles de rugosité $\Delta\gamma$ en fonction du diamètre des particules (Sommerfeld & Huber (1999)); Sommerfeld (2003) postule sa modélisation suivante :

$$\Delta\gamma(d_p) = \begin{cases} 3.4963 + 5.797 \exp\left(-\frac{d_p}{154.12}\right) & : \text{cas de fortes rugosités} \\ 1.551 + 3.438 \exp\left(-\frac{d_p}{161.55}\right) & : \text{cas de faibles rugosités} \end{cases} \quad (2.8)$$

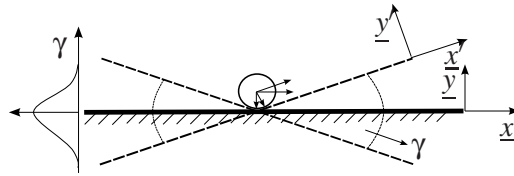


FIG. 2.7 – Illustration du modèle de rebonds irréguliers de Sommerfeld (1992) [96].

Aussi les simulations numériques de Sommerfeld (1992), dans un canal horizontal montrent que les angles d'incidence des particules à la paroi sont très petits : ils sont en moyenne inférieurs à 10° . En outre, il arrive parfois de tirer certaines valeurs d'angle de rugosité $\gamma < 0$, pour lesquels dans le cas de petits angles d'impact α^- , l'on obtient un angle de rebond $\alpha^+ < 0$. Autrement, la particule se retrouve hors du domaine d'écoulement après avoir rebondi sur la paroi virtuelle inclinée de $\gamma < 0$. Dans une telle situation, la solution adoptée par Sommerfeld est de transformer $\gamma < 0$ en $-\gamma > 0$. Cette action a pour conséquence de toujours ramener la particule dans l'écoulement après le rebond. Mais cela signifie aussi que l'on pratique le tirage des angles de paroi avec une distribution quelconque autre qu'une gaussienne de moyenne nulle.

Ainsi, bien que la distribution des angles de paroi puisse être approximée par une gaussienne de moyenne nulle, la reproduction des effets de rugosité par cette approche et des lois de rebond de Coulomb (chapitre 1) ne peut se réduire à la simple gaussienne. Cette constatation a mené à l'amélioration de la description du mécanisme de collision particule-paroi par l'introduction du concept de "*l'angle de rugosité de la paroi "vu" par la particule*".

Désormais, la rugosité est simulée par Sommerfeld & Huber (1999) en supposant que l'angle d'impact α_{imp} est composé :

- de l'angle formé par la trajectoire de la particule et de la paroi macroscopique lisse : α^-
- d'une contribution stochastique due à la rugosité : $\Delta\gamma\xi$

Soit :

$$\alpha_{imp} = \alpha^- + \Delta\gamma\xi \quad (2.9)$$

où ξ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et d'écart type égal à 1.

Cela suppose qu'à chaque trajectoire de particule incidente est associée une projection de la paroi réelle (voir figure 2.8).

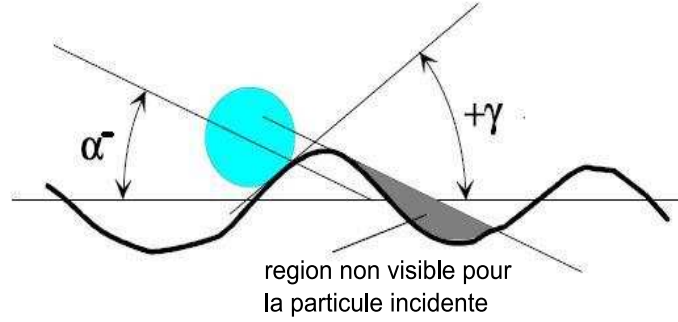


FIG. 2.8 – Illustration du "shadow effect" pour les petits angles d'impact.

Autrement, il existe toute une gamme d'angles de rugosité de paroi $\gamma < 0$ tel que $|\gamma| > \alpha^-$, que ne peut "voir" la particule en fonction de son angle d'incidence α^- . Ce mécanisme sera baptisé par Sommerfeld & Huber (1999) par "shadow effect".

En le caricaturant par le schéma (voir figure 2.9), lorsque l'angle de rugosité γ a au préalable été fourni par une loi de distribution donnée, alors la probabilité pour une particule incidente d'un angle α^- de heurter le segment incliné de l'angle γ est définie selon les trois cas de l'illustration du "shadow effect" par :

$$f(\alpha^-, \gamma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha^- < |\gamma| & \text{: situation 1} \\ \frac{\sin(\alpha^- + \gamma)}{\sin(\alpha^-)} & \text{sinon} & \text{: situation 2 \& 3} \end{cases} \quad (2.10)$$

Au total, Sommerfeld *et al.* obtiennent que la distribution effective (non normalisée) de la rugosité "vue" par une particule incidente s'écrit :

$$P_{eff}(\alpha^-, \Delta\gamma, \gamma) = P(\Delta\gamma, \gamma) f(\alpha^-, \gamma) \quad (2.11)$$

où :

$$P(\Delta\gamma, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\gamma^2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\Delta\gamma^2}\right) \quad (2.12)$$

$$f(\alpha^-, \gamma) = \frac{\sin(\alpha^- + \gamma)}{\sin(\alpha^-)} \quad (2.13)$$

Cet effet est très prononcé pour les petits angles d'impact (voir figure 2.10). Et cela a pour conséquence de faire basculer le domaine de tirage des angles de rugosité vers des valeurs positives, en résolvant ainsi le problème des particules qui sortent du domaine pour ces petits angles d'impact. Pour des

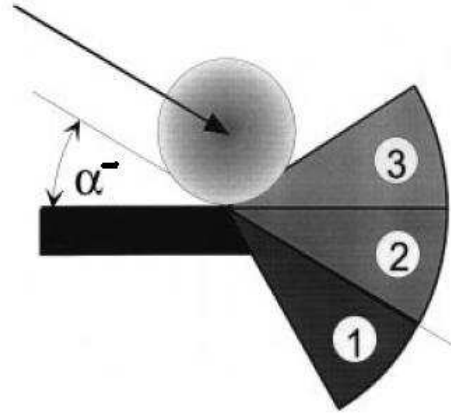


FIG. 2.9 – Illustration du "shadow effect".

angles d'impact plus élevés, la distribution des angles de paroi est extrêmement proche d'une gaussienne (voir figure 2.10).

La conséquence physique de ce phénomène de "shadow effect" est sa propension à réduire raisonnablement, et ce conformément à l'expérience, les particules rasantes (représentées par les particules incidentes avec α^- relativement petit) par un gain en quantité de mouvement pour la composante normale à la paroi.

Ce concept d'angle de rugosité "vu" par la particule était déjà aussi mis en évidence avec Schade *et al.* (1998) par une formulation analogue à (Eq. 2.11) :

$$P(\alpha^-, \gamma) = \frac{1}{K(\alpha^-)} P(\gamma) P_H(\alpha^-, \gamma) \quad (2.14)$$

où :

$$K(\alpha^-) = \int P(\gamma) P_H(\alpha^-, \gamma) d\gamma \quad (2.15)$$

$$P_H(\alpha^-, \gamma) = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha^- - \gamma)}{\cos \gamma} & \text{si } \alpha^- > \gamma \\ 0 & \text{si } \alpha^- \leq \gamma \end{cases} \quad (2.16)$$

Cette modélisation (Eq.(2.14)-Eq.(2.16)) a cependant été formulée dans le cadre d'une paroi rugueuse déterministe construite avec l'utilisation du processus stochastique de Frank *et al.* (1993). Cela assure

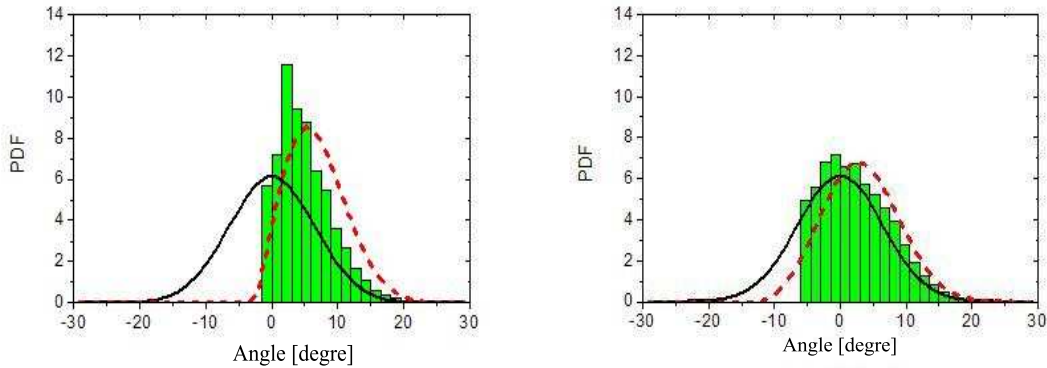


FIG. 2.10 – PDF de l'angle de rugosité de paroi γ pour une incidence donnée (à gauche : $\alpha^- = 2.5^\circ$ et à droite : $\alpha^- = 5.0^\circ$) et $\Delta\gamma = 6.5^\circ$. "Trait plein" : distribution gaussienne des angles de paroi physique; "Histogramme" : distribution issue de la procédure censée reproduire le "shadow effect"; "Tiret" : distribution effective (Eq.2.11). [Figures tirées de Sommerfeld & Huber (1999) [98]]

que le "shadow effect" décrivant le mécanisme des collisions particule-paroi rugueuse n'est pas attaché à la seule approche de paroi virtuelle.

Le mécanisme de rebond tel que proposé par Sommerfeld *et al.* reste celui qui se compare assez raisonnablement à l'expérience et sa prise en compte dans les simulations se fait selon la procédure suivante :

- un angle de paroi γ est tiré de manière aléatoire selon une distribution normale,
- si $\gamma < 0$ tel que $|\gamma| > \alpha^-$, alors un nouvel angle de paroi est systématiquement tiré,
- si après la collision, la particule ne retourne pas dans l'écoulement mais traverse la paroi, cela veut dire que l'angle de rebond $\alpha^+ < 0$, alors un nouvel angle de rugosité est tiré.

Cependant, comme on peut l'observer sur la figure (figure 2.10), l'application de cette procédure engendre un réel décalage par rapport au modèle de la pdf effective (Eq. (2.11)). Cet état de fait semble ne pas influencer pour autant les simulations lagrangiennes (Lain *et al.* (2002) [57], Lain *et al.* (2004) [58]) en produisant des résultats qui se comparent relativement bien à l'expérience.

C'est pourquoi dans la suite, nous utiliserons ladite procédure pour la dérivation des conditions aux limites Eulériennes.

2.3 Modélisation statistique Eulérienne de rebonds sur paroi rugueuse

Tout au long de cette dérivation, dans la mesure où les fonctions que nous manipulerons sous le sous d'intégration sont positives (ou gardent un signe constant), nous utiliserons le théorème de Fubini d'inversion des intégrales.

2.3.1 Modélisation de la probabilité de transition

Le principe de la modélisation de cette probabilité de transition est basé sur le mécanisme de rebond particule-paroi tel que suggéré par Sommerfeld & Huber (1999) [98]. Ce mécanisme stipule que la particule incidente de vitesse \underline{c}_p^- vient rebondir sur une paroi lisse inclinée d'un angle γ tiré aléatoirement à partir d'un processus stochastique. Cependant, si l'angle de rugosité γ tiré n'assure pas le rebond, il convient de tirer un nouvel angle γ jusqu'à la réalisation du rebond. Si bien que rechercher la probabilité qu'une particule incidente de vitesse \underline{c}_p^- soit réfléchiée avec une vitesse \underline{c}_p^+ revient tout simplement à évaluer toutes les situations possibles pour lesquelles la particule incidente qui rebondit sur une paroi lisse inclinée de l'angle γ pris dans l'espace des angles de rugosité $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ puisse effectivement réaliser un rebond physique. La probabilité de transition peut alors se modéliser par :

$$R(\underline{c}_p^- \longrightarrow \underline{c}_p^+) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R_\gamma(\underline{c}_p^- \longrightarrow \underline{c}_p^+) P_r(\gamma|\underline{c}_p^-) d\gamma \quad (2.17)$$

Dans l'équation (Eq. 2.17), $R_\gamma(\underline{c}_p^- \longrightarrow \underline{c}_p^+)$ est la probabilité de transition que la particule incidente de vitesse \underline{c}_p^- rebondisse sur la paroi lisse inclinée de l'angle γ ; tandis que $P_r(\gamma|\underline{c}_p^-)$ est la probabilité conditionnelle du choix de l'angle de rugosité γ par la trajectoire incidente, qui assure de la réalisation effective du rebond physique. Ces deux probabilités peuvent se modéliser séparément.

Modélisation de $R_\gamma(\underline{c}_p^- \longrightarrow \underline{c}_p^+)$

Bien qu'inclinée, la paroi virtuelle inclinée de γ sur laquelle rebondit la particule est belle et bien lisse. Dans ces circonstances, He & Simonin (1994) [33] puis Sakiz & Simonin (1999) [83] proposaient de modéliser une telle probabilité de transition à l'aide d'un Dirac par :

$$R_\gamma(\underline{c}_p^- \longrightarrow \underline{c}_p^+) = \delta(\underline{c}_p^+ - \Phi_\gamma(\underline{c}_p^-)) \quad (2.18)$$

Φ_γ est une fonction bijective qui modélise le rebond sur la paroi inclinée de l'angle γ de normale unitaire \underline{n}_γ (figure 2.11). Elle est définie par :

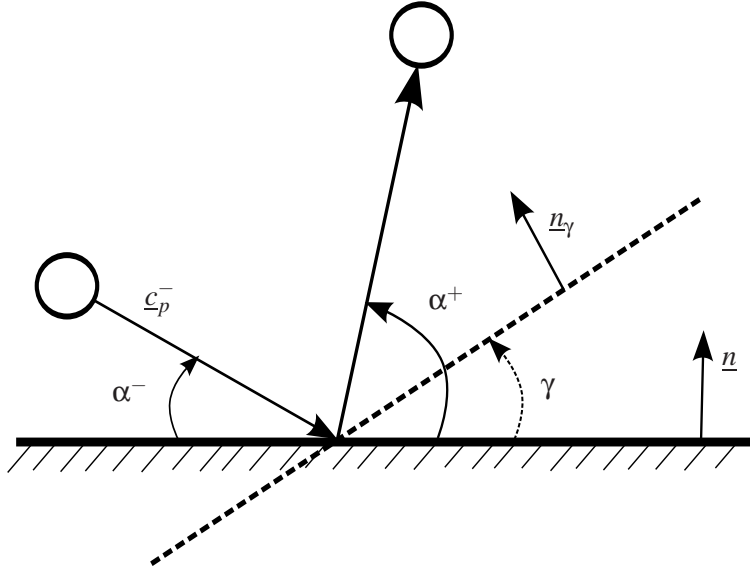


FIG. 2.11 – Rebond de la particule incidente sur la paroi virtuelle.

$$\begin{aligned}
 \Phi_\gamma : D^- &\longrightarrow D^+ \\
 \underline{c}_p^- &\longmapsto \begin{cases} \underline{c}_p^- - (1 + e_w) (\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) \underline{n}_\gamma + \frac{2}{7} (1 + \beta_w) \underline{v}_{g_\gamma} : \text{rebond sans glissement} \\ \underline{c}_p^- - (1 + e_w) (\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) (\underline{n}_\gamma - \mu_w \underline{t}_\gamma) : \text{rebond avec glissement} \end{cases} \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

$\underline{t}_\gamma = \frac{1}{|\underline{v}_{g_\gamma}|}$ est le vecteur tangent à la paroi inclinée,

$\underline{v}_{g_\gamma} = \underline{c}_p^- - (\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) \underline{n}_\gamma$ est la vitesse de glissement de la particule par rapport à la paroi inclinée de γ .

Modélisation et analyse de la probabilité conditionnelle $P_r(\gamma | \underline{c}_p^-)$

Modélisation de $P_r(\gamma | \underline{c}_p^-)$

Selon la modélisation lagrangienne de Sommerfeld *et al.*, l'angle de paroi tiré aléatoirement à partir de la gaussienne doit être subordonnée aux conditions :

(i) la particule incidente doit venir de l'écoulement, c'est à dire : $\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma < 0$.

Cela conditionne la réalisabilité de l'angle virtuel par la vitesse incidente ;

(ii) après la collision sur la paroi virtuelle, la particule retourne dans l'écoulement : $\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n} > 0$,

où \underline{n} est la normale à la paroi macroscopique (voir figure 2.11). Il s'agit là de la condition de réalisabilité du rebond,

pour qu'il soit conservé.

En posant P_r la distribution aléatoire non conditionnelle de l'angle de paroi, il vient que :

$$P_r(\gamma|\underline{c}_p^-) = \lambda(\underline{c}_p^-) H(-\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) H(\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}) P_r(\gamma) \quad (2.20)$$

où H est la fonction de *Heaviside* et λ le coefficient de normalisation de la probabilité $P_r(\gamma|\underline{c}_p^-)$.

La première et la seconde fonction de *Heaviside* de (2.20) modélisent respectivement les conditions (i) et (ii).

Le coefficient λ est obtenu en utilisant la première propriété à remplir par la probabilité de transition $R(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+)$ (chapitre 1).

En effet, en posant :

$$\int_{D^+} R(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+) d\underline{c}_p^+ = 1 \quad (2.21)$$

et en utilisant (2.18) et (2.20), on trouve :

$$\lambda(\underline{c}_p^-) = \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} H(-\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) H(\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}) P_r(\gamma) d\gamma \right]^{-1} \quad (2.22)$$

La pdf de l'angle vu par la particule incidente telle que modélisée par l'équation (2.20) est présentée dans le cas de rebonds élastiques, pour trois différentes incidences et deux déviations standards de rugosité (figure 2.12), afin de mesurer l'influence du degré de rugosité de la paroi (faibles rugosités : $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et fortes rugosités : $\Delta\gamma = 5.0^\circ$) pour une même incidence. La figure montre premièrement une forte prononciation du "shadow effect" pour des angles d'incidence relativement rasantes. Ce phénomène diminue puis disparaît complètement avec des incidences de plus en plus croissantes entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. On observe dans un second temps, dans le cas de l'existence du phénomène de "shadow effect", en comparant les couples de figures ((1-a),(2-a)) et ((1-b),(2-b)) que celui-ci est plus accentué avec l'augmentation du niveau de rugosité de la paroi. Autrement à angle d'incidence égal, le "shadow effect" est déterminé par l'écart type de rugosité de la paroi physique. En somme, plus l'écart type $\Delta\gamma$ est grand et plus le "shadow effect" est fort pour une même incidence. Ces résultats qui sont en accord avec les simulations lagrangiennes de Sommerfeld & Huber (1999) [98] montrent que l'angle de paroi vu par une particule incidente peut se modéliser par une gaussienne tronquée.

Etude théorique de $P_r(\gamma|\underline{c}_p^-)$

L'objet de cette étude est de permettre la compréhension du mécanisme de rebond particule-paroi rugueuse à travers l'analyse entre autre de la dispersion de l'angle de rugosité "vu" par la particule

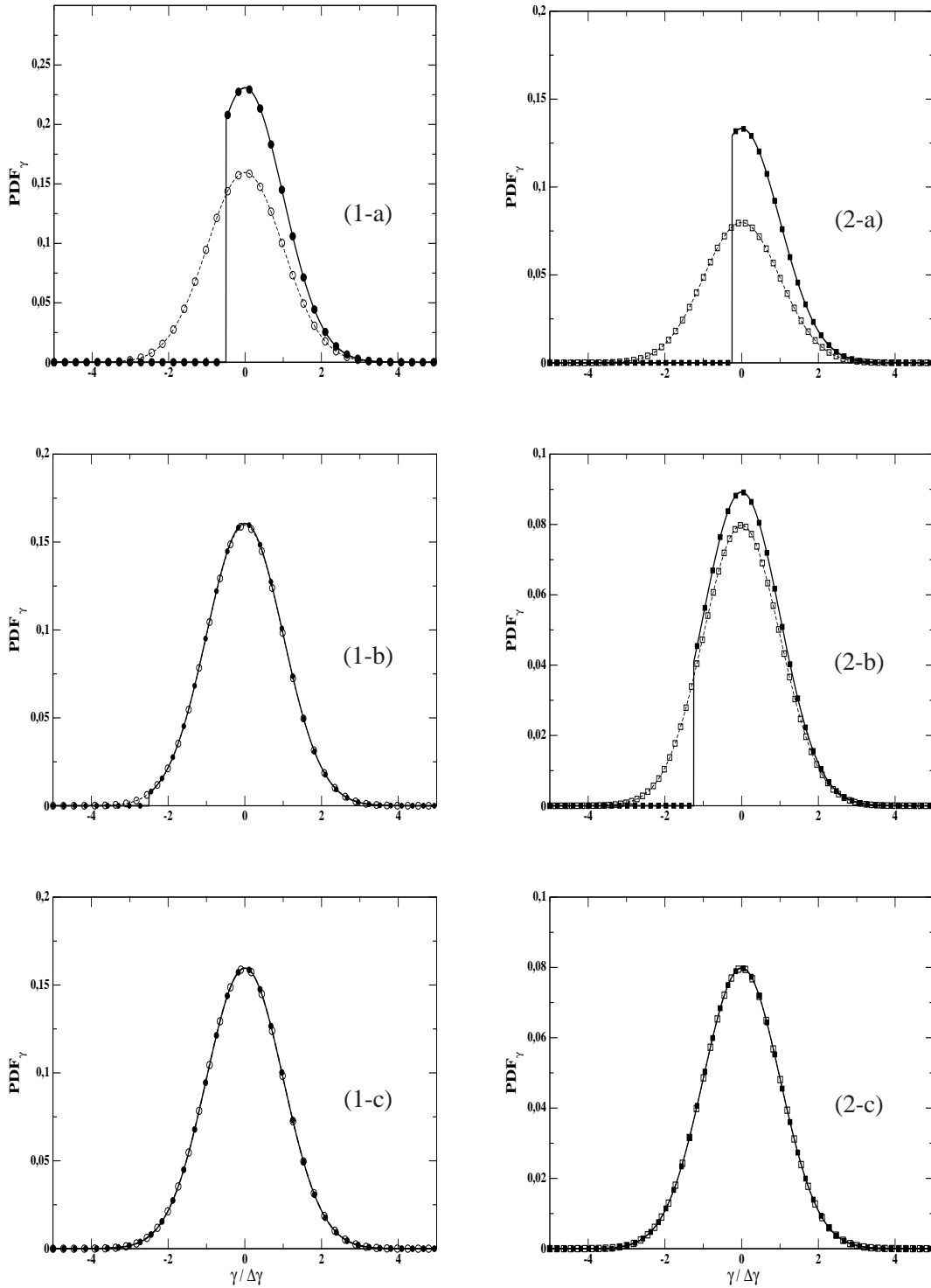


FIG. 2.12 – Fonctions de distribution de l'angle de paroi "vu" par la particule incidente. (-a), (-b) et (-c) représentent respectivement les incidences $\alpha^- = 2.5^\circ$, 12.5° et 32.5° . Faibles rugosités ($\Delta\gamma = 2.5^\circ$, à gauche et symbolisé par les ronds), fortes rugosités ($\Delta\gamma = 5.0^\circ$, à droite et représenté par les carrés) : les symboles creux représentent la distribution normale tandis que les symboles pleins désignent la distribution conditionnelle (2.20).

incidente, mais aussi en analysant la corrélation de l'angle de l'angle de paroi pour cette même trajectoire incidente. Il suffit pour cela d'étudier les deux premiers moments $\langle \gamma | \underline{c}_p^- \rangle$ et $\langle \gamma^2 | \underline{c}_p^- \rangle$ de la probabilité $P_r(\gamma | \underline{c}_p^-)$.

Par souci de simplification de l'étude théorique, les développements analytiques s'effectueront pour des cas de rebonds purement élastiques où :

$$\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-) = \underline{c}_p^- - 2(\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) \underline{n}_\gamma \quad (2.23)$$

avec un effet de rugosité $2D$.

Corrélation de l'angle de paroi $\langle \gamma | \alpha^- \rangle$

Dans tout le mémoire $\langle \gamma | \alpha^- \rangle = \langle \gamma | \underline{c}_p^- \rangle$ et $\langle \gamma^2 | \alpha^- \rangle = \langle \gamma^2 | \underline{c}_p^- \rangle$, puisque les conditionnements par α^- et \underline{c}_p^- définissent exactement le même événement pour une particule incidente à la paroi.

Par définition la corrélation de l'angle s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \gamma | \alpha^- \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \gamma P_r(\gamma | \underline{c}_p^-) d\gamma \\ &= \lambda(\underline{c}_p^-) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} H(-\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) H(\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}) \gamma P_r(\gamma) d\gamma \end{aligned} \quad (2.24)$$

Dans le cas de rebonds élastiques avec effet de rugosité $2D$, nous obtenons :

$$\langle \gamma | \alpha^- \rangle = \lambda(\underline{c}_p^-) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} H(\sin(\alpha^- + \gamma)) H(\sin(\alpha^- + 2\gamma)) \gamma P_r(\gamma) d\gamma \quad (2.25)$$

Tous les calculs faits, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\langle \gamma | \alpha^- \rangle}{\Delta\gamma} = \frac{1}{g(\alpha^-) \sqrt{2}} \left\{ \exp\left[-\frac{(\alpha^-)^2}{8\Delta\gamma^2}\right] - \exp\left[-\frac{(\pi - \alpha^-)^2}{8\Delta\gamma^2}\right] \right\} \\ g(\alpha^-) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\pi - \alpha^-}{\sqrt{8\Delta\gamma^2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha^-}{\sqrt{8\Delta\gamma^2}}\right) \right] \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Les courbes de la figure 2.13 montrent que plus l'incidence est rasante et plus la corrélation est forte. Cette corrélation devient quasiment nulle pour des incidences relativement grandes, mais non rasantes. L'influence de l'écart type de l'angle de rugosité (qui caractérise le degré de rugosité de la paroi) est clairement mis en évidence : la corrélation est plus forte pour des parois plus rugueuses.

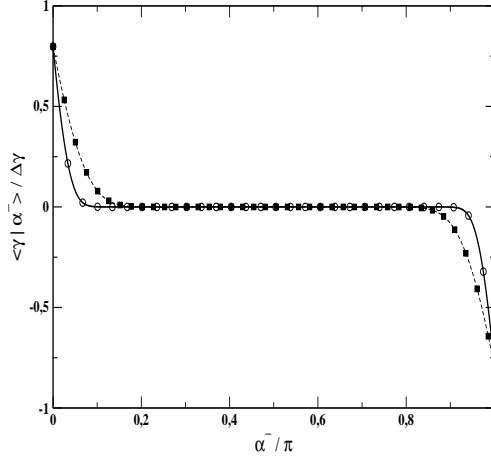


FIG. 2.13 – Variation de la corrélation de l'angle de paroi "vu" par la particule incidente. Faibles rugosités : $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ (symbolisé par les ronds), fortes rugosités : $\Delta\gamma = 5.0^\circ$ (symbolisé par les carrés)

Variance de l'angle de paroi $\langle \gamma^2 | \alpha^- \rangle$

La variance de l'angle de rugosité conditionnée par l'incidence s'écrit par définition :

$$\begin{aligned} \langle \gamma^2 | \alpha^- \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \gamma^2 P_r(\gamma | \underline{c}_p^-) d\gamma \\ &= \lambda(\underline{c}_p^-) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} H(-\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) H(\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}) \gamma^2 P_r(\gamma) d\gamma \end{aligned} \quad (2.27)$$

Comme précédemment, nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{\langle \gamma^2 | \alpha^- \rangle}{\Delta\gamma^2} = 1 - \frac{1}{g(\alpha^-)} \left\{ \frac{\pi - \alpha^-}{\sqrt{8\Delta\gamma^2}} \exp\left[-\frac{(\alpha^-)^2}{8\Delta\gamma^2}\right] - \frac{\alpha^-}{\sqrt{8\Delta\gamma^2}} \exp\left[-\frac{(\pi - \alpha^-)^2}{8\Delta\gamma^2}\right] \right\} \\ g(\alpha^-) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\pi - \alpha^-}{\sqrt{8\Delta\gamma^2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha^-}{\sqrt{8\Delta\gamma^2}}\right) \right] \end{cases} \quad (2.28)$$

La variance de l'angle de paroi est présentée sur la figure 2.14 pour différents écarts types de rugosité $\Delta\gamma$, en fonction de l'angle d'incidence α^- . Ces résultats montrent que ce second moment de l'angle de paroi est fortement influencé par l'angle d'incidence α^- .

Interpretation combinée corrélation/variance de l'angle de paroi vu par la particule

L'intérêt de cette analyse statistique de la probabilité $P_r(\gamma | \alpha^-)$ est de comprendre la distribution des angles de rugosité visibles pour une incidence donnée α^- . En définissant $\sigma(\gamma | \alpha^-)$, l'écart type de la

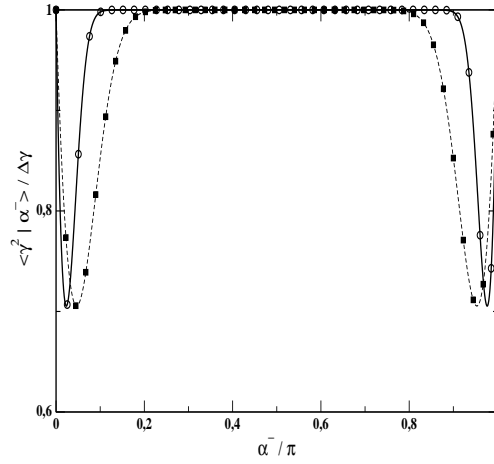


FIG. 2.14 – Variation de la variance de l'angle de paroi "vu" par la particule incidente. Faibles rugosités : $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ (symbolisé par les ronds), fortes rugosités : $\Delta\gamma = 5.0^\circ$ (symbolisé par les carrés)

distribution de l'angle de rugosité γ conditionné par l'incidence α^- , tel que :

$$[\sigma(\gamma|\alpha^-)]^2 = \langle \gamma^2 | \alpha^- \rangle - \langle \gamma | \alpha^- \rangle^2 \quad (2.29)$$

Nous obtenons dans les cas limites :

- de particules rasantes à la paroi ($\alpha^- \rightarrow 0$ et $\alpha^- \rightarrow \pi$) :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\langle \gamma | \alpha^- \rangle}{\Delta\gamma} \xrightarrow{\alpha^- \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ \frac{\langle \gamma | \alpha^- \rangle}{\Delta\gamma} \xrightarrow{\alpha^- \rightarrow \pi} -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ \frac{\langle \gamma^2 | \alpha^- \rangle}{\Delta\gamma^2} \xrightarrow{\alpha^- \rightarrow 0, \pi} 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma(\gamma|\alpha^-) \xrightarrow{\alpha^- \rightarrow 0, \pi} \Delta\gamma \sqrt{1 - \frac{2}{\pi}} \quad (2.30)$$

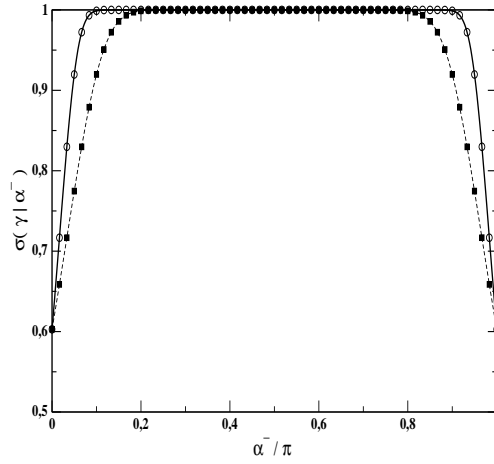


FIG. 2.15 – Variation de l'écart type de l'angle de paroi "vu" par la particule incidente. Faibles rugosités : $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ (symbolisé par les ronds), fortes rugosités : $\Delta\gamma = 5.0^\circ$ (symbolisé par les carrés)

- de particules d'incidence verticale ($\alpha^- \rightarrow \frac{\pi}{2}$) :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\langle \gamma | \alpha^- \rangle}{\Delta\gamma} \rightarrow 0 \\ \alpha^- \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \frac{\langle \gamma^2 | \alpha^- \rangle}{\Delta\gamma^2} \rightarrow 1 \\ \alpha^- \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma(\gamma | \alpha^-) \rightarrow \Delta\gamma \quad (2.31)$$

L'écart type de la distribution des angles de rugosité dans le cas des particules rasantes permet de conclure que pour de telles particules, environ 40% de la distribution gaussienne approximative des angles de paroi physique est occultée. Cela explique dans ces circonstances, la forte corrélation entre les angles de paroi et d'incidence. La distribution des angles de rugosité vus par la particule s'élargie avec l'augmentation de l'incidence (figure 2.15). Au delà d'une certaine incidence, le phénomène de "*shadow effect*" devient inexistant, si bien que la distribution de l'angle de paroi vu par la particule incidente se confond à la distribution des angles de paroi physique : il n'y a donc aucune corrélation entre l'incidence et l'angle de paroi "vu" par la particule. C'est justement une telle situation que relate l'analyse des particules d'incidence verticale (2.31).

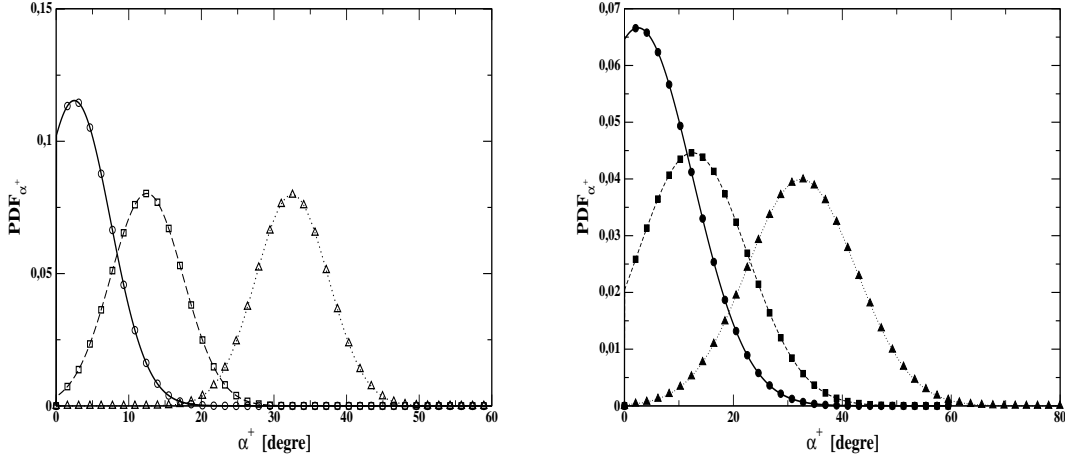


FIG. 2.16 – Fonctions de distribution de l’angle de rebond pour les incidences respectives $\alpha^- = 2.5^\circ$ (\circ), $\alpha^- = 12.5^\circ$ (\square), $\alpha^- = 32.5^\circ$ (\triangle). Les symboles creux représentent le cas de faibles rugosités ($\Delta\gamma = 2.5^\circ$) tandis que les symboles pleins représentent le cas de fortes rugosités ($\Delta\gamma = 5.0^\circ$).

En conclusion à la modélisation de la probabilité de transition $R(\underline{c}_p^- \longrightarrow \underline{c}_p^+)$, nous avons :

$$\begin{aligned} R(\underline{c}_p^- \longrightarrow \underline{c}_p^+) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lambda(\underline{c}_p^-) \delta(\underline{c}_p^+ - \Phi_\gamma(\underline{c}_p^-)) H(-\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) H(\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}) P_r(\gamma) d\gamma \\ &= \lambda(\underline{c}_p^-) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \delta(\underline{c}_p^+ - \Phi_\gamma(\underline{c}_p^-)) H(-\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) H(\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}) P_r(\gamma) d\gamma \end{aligned} \quad (2.32)$$

avec :

$$\lambda(\underline{c}_p^-) = \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} H(-\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) H(\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}) P_r(\gamma) d\gamma \right]^{-1} \quad (2.33)$$

La probabilité R ainsi définie respecte les propriétés 1 & 2 du chapitre 1, puisqu’elle est positive et que l’équation (2.33) permet par construction de réaliser la propriété 2.

En se servant de cette formulation de la probabilité de transition (2.32) & (2.33), nous avons tracé la pdf de l’angle de rebond pour trois incidences ($\alpha^- = \{2.5^\circ, 12.5^\circ, 32.5^\circ\}$), dans le cas de paroi de faible rugosité ($\Delta\gamma = 2.5^\circ$) et de forte rugosité ($\Delta\gamma = 5.0^\circ$) pour des collisions élastiques avec un effet de rugosité $2D$ (figure 2.16). Les résultats montrent que pour des particules incidentes rasantes, celles-ci ont une probabilité très élevée de rebondir rasantes. Cependant pour des incidences plus fortes, la probabilité de repartir rasante est faible.

2.3.2 Dérivation eulerienne de conditions aux limites aux parois rugueuses

D'après Sakiz (1999) [82], les conditions aux limites à la paroi portent sur les moments impairs de $\underline{c}_p \cdot \underline{n}$ de la forme :

- $n_p \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p$ (pour les moments d'ordre supérieur à 1)
- n_p (pour l'unique moment d'ordre nul)

où en accord avec les définitions du chapitre 1, nous avons :

$$n_p \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p = n_p^- \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p^- + n_p^+ \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p^+ \quad (2.34)$$

$$n_p = n_p^- + n_p^+ \quad (2.35)$$

La méthode de dérivation de ces moments se résume en deux étapes :

- **étape 1** : nous écrivons la moyenne réfléchie $n_p^+ \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p^+$ (respectivement n_p^+) en fonction de la moyenne incidente $n_p^- \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p^-$ (respectivement n_p^-). Ensuite, nous calculons $n_p \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p$ (respectivement n_p) en fonction uniquement de moments incidents (respectivement n_p^-).

- **étape 2** : il s'agit de l'étape de fermeture au cours de laquelle, nous écrivons les moments incidents impairs $n_p^- \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p^-$ en fonction de moments globaux d'ordre pair en $\underline{c}_p \cdot \underline{n}$ qui sont connus dans la simulation eulerienne. Les quelques éventuels moments incidents qui resteront seront évalués en présumant la pdf des vitesses incidentes.

Mise en oeuvre de la méthode

En accord avec la méthodologie présentée ci-haut, nous devons calculer $n_p^+ \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p^+$ et n_p^+ . Or par définition :

$$n_p^+ \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p^+ = \int_{D^+} \Psi_p(\underline{c}_p) f_p^+(\underline{c}_p) \underline{c}_p \cdot \underline{n} d\underline{c}_p \quad (2.36)$$

et

$$n_p^+ = \int_{D^+} f_p^+(\underline{c}_p) d\underline{c}_p \quad (2.37)$$

s'explicitent respectivement en fonction du flux réfléchi $f_p^+(\underline{c}_p) \underline{c}_p \cdot \underline{n}$ et de la pdf f_p^+ de rebond.

D'après la relation fondamentale (chapitre 1) et la modélisation de $R(\underline{c}_p^- \longrightarrow \underline{c}_p^+)$ (Eq. 2.32), il vient que :

$$\begin{aligned} & \forall \underline{c}_p^+ \in D^+, \\ & f_p^+(\underline{c}_p) \underline{c}_p^+ \cdot \underline{n} = - \int_{D^-} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lambda(\underline{c}_p^-) \delta(\underline{c}_p^+ - \underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) H(-\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) H(\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}) P_r(\gamma) f_p^-(\underline{c}_p) \underline{c}_p^- \cdot \underline{n} d\gamma d\underline{c}_p^- \end{aligned} \quad (2.38)$$

Cependant, sous réserve de l'existence du rapport :

$$\frac{H(-\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) H(\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n})}{\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}}, \quad \forall \gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \forall \underline{c}_p^- \in D^-, \quad (2.39)$$

nous pouvons écrire d'un point de vue purement formel que :

$$\begin{aligned} & \forall \underline{c}_p^+ \in D^+ \text{ tel que } \underline{c}_p^+ \cdot \underline{n} \neq 0, \\ & f_p^+(\underline{c}_p) = - \int_{D^-} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lambda(\underline{c}_p^-) \delta(\underline{c}_p^+ - \underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) \frac{H(-\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) H(\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n})}{\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}} P_r(\gamma) f_p^-(\underline{c}_p) \underline{c}_p^- \cdot \underline{n} d\gamma d\underline{c}_p^- \end{aligned} \quad (2.40)$$

Avec ces formulations, pour :

- les moments réfléchis d'ordre supérieur ou égal à 1

Il suffit d'utiliser l'équation (Eq. 2.38) et nous obtenons :

$$\begin{aligned} n_p^+ \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p^+ &= \int_{D^+} \Psi_p(\underline{c}_p^+) f_p^+(\underline{c}_p) \underline{c}_p^+ \cdot \underline{n} d\underline{c}_p^+ \\ &= - \int_{D^+} \int_{D^-} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lambda(\underline{c}_p^-) \delta(\underline{c}_p^+ - \underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) H(-\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) H(\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}) P_r(\gamma) \times \\ &\quad \times \Psi_p(\underline{c}_p^+) f_p^-(\underline{c}_p) \underline{c}_p^- \cdot \underline{n} d\gamma d\underline{c}_p^- d\underline{c}_p^+ \\ &= - \int_{D^-} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lambda(\underline{c}_p^-) H(-\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) H(\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}) P_r(\gamma) \Psi_p(\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) \times \\ &\quad \times f_p^-(\underline{c}_p) \underline{c}_p^- \cdot \underline{n} d\gamma d\underline{c}_p^- \\ &= - \int_{D^-} \langle \Psi_p(\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) | \underline{c}_p^- \rangle f_p^-(\underline{c}_p) \underline{c}_p^- \cdot \underline{n} d\underline{c}_p^- \end{aligned} \quad (2.41)$$

où nous avons posé que :

$$\langle \Psi_p(\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) | \underline{c}_p^- \rangle = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Psi_p(\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) P_r(\gamma | \underline{c}_p^-) d\gamma \quad (2.42)$$

Nous obtenons :

$$n_p^+ \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p^+ = -n_p^- \langle \langle \Psi_p(\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) | \underline{c}_p^- \rangle \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p^- \quad (2.43)$$

Il vient que :

$$n_p \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p = n_p^- \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p^- - n_p^- \langle \langle \Psi_p(\Phi_\gamma(\underline{c}_p^-)) | \underline{c}_p^- \rangle \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p^- \quad (2.44)$$

- le moment réfléchi d'ordre nul

En utilisant la forme (Eq. 2.40) :

$$\begin{aligned} n_p^+ &= \int_{D^+} f_p^+(\underline{c}_p) d\underline{c}_p^+ \\ &= \int_{D^+} \int_{D^-} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lambda(\underline{c}_p^-) \delta(\underline{c}_p^+ - \Phi_\gamma(\underline{c}_p^-)) \frac{H(-\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) H(\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n})}{\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}} P_r(\gamma) f_p^-(\underline{c}_p) \underline{c}_p^- \cdot \underline{n} d\gamma d\underline{c}_p^- d\underline{c}_p^+ \\ &= \int_{D^-} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lambda(\underline{c}_p^-) \frac{H(-\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) H(\Phi_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n})}{\Phi_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}} P_r(\gamma) f_p^-(\underline{c}_p) \underline{c}_p^- \cdot \underline{n} d\gamma d\underline{c}_p^- \\ &= \int_{D^-} \left\langle \frac{1}{\Phi_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}} | \underline{c}_p^- \right\rangle f_p^-(\underline{c}_p) \underline{c}_p^- \cdot \underline{n} d\underline{c}_p^- \end{aligned} \quad (2.45)$$

avec :

$$\left\langle \frac{1}{\Phi_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}} | \underline{c}_p^- \right\rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lambda(\underline{c}_p^-) \frac{H(-\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) H(\Phi_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n})}{\Phi_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}} P_r(\gamma) d\gamma \quad (2.46)$$

Finalement, nous obtenons :

$$n_p^+ = -n_p^- \left\langle \left\langle \frac{1}{\Phi_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}} | \underline{c}_p^- \right\rangle \underline{c}_p^- \cdot \underline{n} \right\rangle_p^- \quad (2.47)$$

Dans la suite, pour l'illustration de la méthodologie, nous nous placerons dans le cas où la normale à la paroi est telle que $\underline{n}(0, 1, 0)$ et nous allons considérer des rebonds élastiques avec un effet de rugosité $2D$. Cependant, il convient de remarquer que la présente méthodologie s'étend aisément aux rebonds inélastiques avec ou sans glissement à travers la loi de rebond $\Phi_\gamma(\underline{c}_p^-)$ (Eq. 2.19).

Application aux rebonds élastiques

Dans le cas des rebonds purement élastiques, la loi de rebond (2.19) devient :

$$\begin{aligned} \Phi_\gamma(\underline{c}_p^-) &: D^- \longrightarrow D^+ \\ \underline{c}_p^- &\longmapsto \underline{c}_p^- - 2(\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) \underline{n}_\gamma \end{aligned} \quad (2.48)$$

$n_p V_p = 0$
$n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p = 2n_p^- \langle \langle \sin^2 \gamma \alpha^- \rangle (U_p + u'_p) v'_p \rangle_p^- - 2n_p^- \langle \langle \sin \gamma \cos \gamma \alpha^- \rangle v'_p v'_p \rangle_p^-$
$n_p \langle v'_p w'_p \rangle_p = 0$
$n_p \langle u'_p v'_p w'_p \rangle_p = -2n_p^- \langle \langle \cos \gamma \sin \gamma \alpha^- \rangle v_p'^2 w'_p \rangle_p^- + 2n_p^- \langle \langle \sin^2 \gamma \alpha^- \rangle (u'_p + U_p) v'_p w'_p \rangle_p^- - n_p U_p \langle v'_p w'_p \rangle_p$
$n_p \langle u_p'^2 v'_p \rangle_p = -2n_p U_p \langle u'_p v'_p \rangle_p - n_p \langle v_p'^3 \rangle_p$
$n_p \langle v'_p w_p'^2 \rangle_p = 0$
$n_p \langle v_p'^3 \rangle_p = -n_p^- \langle \langle \sin^2 (2\gamma) \alpha^- \rangle (U_p + u'_p)^2 v'_p \rangle_p^- + n_p^- \langle \langle \sin (4\gamma) \alpha^- \rangle (U_p + u'_p) v_p'^2 \rangle_p^- + n_p^- \langle \langle \sin^2 (2\gamma) \alpha^- \rangle v_p'^3 \rangle_p^-$

 TAB. 2.1 – Conditions aux limites à la paroi avec un effet de rugosité $2D$ dans le cas de rebonds élastiques.

En raison de l'effet de rugosité $2D$, nous avons $\underline{n}_\gamma(-\sin \gamma, \cos \gamma, 0)$ pour une paroi telle que $\underline{n}(0, 1, 0)$.

Dans ces conditions, nous obtenons à partir des équations (2.44) et (2.47), les relations entre les moments globaux et les moments incidents suivantes :

- **pour les moments d'ordre supérieur ou égal à 1** (voir tableau 2.1)

- **pour le moment d'ordre 0**

Nous avons :

$$n_p = n_p^- \left[1 + \frac{n_p^+}{n_p^-} \right] \quad (2.49)$$

avec :

$$\frac{n_p^+}{n_p^-} = - \left\langle \left\langle \frac{1}{\sin(2\gamma + \alpha^-)} | \alpha^- \right\rangle \sin \alpha^- \right\rangle_p^- \quad (2.50)$$

La moyenne $\left\langle \frac{1}{\sin(2\gamma + \alpha^-)} | \alpha^- \right\rangle$ s'écrit :

$$\left\langle \frac{1}{\sin(2\gamma + \alpha^-)} | \alpha^- \right\rangle = \frac{\int_{-\frac{\alpha^-}{2}}^{\frac{\pi - \alpha^-}{2}} \frac{P_r(\gamma)}{\sin(2\gamma + \alpha^-)} d\gamma}{\int_{-\frac{\alpha^-}{2}}^{\frac{\pi - \alpha^-}{2}} P_r(\gamma) d\gamma} \quad (2.51)$$

et :

$$P_r(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\gamma^2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\Delta\gamma^2}\right) \quad (2.52)$$

D'autre part, les valeurs $-\frac{\alpha^-}{2}$ et $\frac{\pi - \alpha^-}{2}$ constituent des bornes impropres pour l'intégrale $\int_{-\frac{\alpha^-}{2}}^{\frac{\pi - \alpha^-}{2}} \frac{P_r(\gamma)}{\sin(2\gamma + \alpha^-)} d\gamma$. En plus la fonction $\gamma \mapsto \frac{P_r(\gamma)}{\sin(2\gamma + \alpha^-)}$ n'est pas prolongeable par continuité en ces deux points. L'intégrale en question diverge. Ainsi, le rapport $\frac{n_p^+}{n_p}$ ne peut être fini.

Il est à remarquer que ces deux points constituent les bornes de troncature de la gaussienne introduits par la modélisation du "shadow effect" par Sommerfeld & Huber (1999) [98]. Ils correspondent aux cas physiques de particules qui repartent rasantes ($\Phi_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n} = 0$) après le rebond. D'autre part avec ce mécanisme de rebond, la probabilité pour une particule de rebondir avec un angle quasiment nul est importante (voir figure 2.16). En d'autres termes, ce mécanisme a tendance à générer une grande quantité de particules rasantes. Ce qui nous amène à conclure à l'impossibilité de la modélisation eulérienne du rapport $\frac{n_p^+}{n_p}$ au regard du mécanisme de collision particule-paroi rugueuse tel que suggéré par Sommerfeld & Huber (1999) [98].

Cependant, la modélisation eulérienne des moments impairs s'étant avérée possible, il convient de l'exploiter afin de voir jusqu'où elle peut être exploitable, avec si possible l'introduction d'hypothèses en renfort.

L'état actuel des moments impairs définis dans le tableau (2.1) présente l'unique intérêt de montrer la capacité de la méthodologie à inclure les effets de rugosité dans les conditions aux limites à la paroi. En effet, ces conditions aux limites ne peuvent être interprétées physiquement puisque les quantités de la forme $\langle \langle \sin^2 \gamma | \alpha^- \rangle (U_p + u'_p) v'_p \rangle_p^-$, $\langle \langle \sin \gamma \cos \gamma | \alpha^- \rangle v'_p v'_p \rangle_p^-$, ... n'ont aucune signification physique et sont en plus inconnues au cours d'une simulation eulérienne. Alors dans l'optique d'exploiter raisonnablement ces moyennes incidentes, il convient d'introduire un modèle de séparation des effets de la rugosité et les moments incidents.

2.3.3 Modèle de corrélation partielle

L'idée de cette modélisation est de supposer une faible corrélation entre les effets de rugosité (relatés par la présence de l'angle de paroi γ dans les expressions du tableau 2.1) et les moments incidents de la phase particulaire. Cette hypothèse semble assez légitime puisque la phase d'incidence ne peut en aucun cas être influencée par le choix de l'angle γ ; ce qui n'est par contre pas le cas de l'angle de paroi γ dont le choix reste subordonné à l'incidence.

Introduisons pour cela deux modèles basés sur le flux de particules incidentes à la paroi par unité de temps, où nous supposons qu'un moment de la forme $\langle \langle \varphi(\gamma) | \alpha^- \rangle v_p \psi_p \rangle_p^-$ s'écrit :

★ soit :

$$\langle\langle\varphi(\gamma)|\alpha^-\rangle v_p \Psi_p\rangle_p^- = \langle\langle\varphi(\gamma)|\alpha^-\rangle\rangle_p^- \langle v_p \Psi_p\rangle_p^- \quad (2.53)$$

★ soit :

$$\langle\langle\varphi(\gamma)|\alpha^-\rangle v_p \Psi_p\rangle_p^- = \{\varphi(\gamma)\}_p^- \langle v_p \Psi_p\rangle_p^- \quad (2.54)$$

avec :

$$\langle\langle\varphi(\gamma)|\alpha^-\rangle\rangle_p^- = \int_0^\pi \varphi(\gamma) g_p^-(\alpha^-) d\alpha^- \quad (2.55)$$

$$\{\varphi(\gamma)\}_p^- = \frac{\langle\langle\varphi(\gamma)|\alpha^-\rangle v_p\rangle_p^-}{\langle v_p\rangle_p^-} = \int_0^\pi \langle\varphi(\gamma)|\alpha^-\rangle h_p^-(\alpha^-) d\alpha^- \quad (2.56)$$

et :

$$\langle\varphi(\gamma)|\alpha^-\rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\gamma) P_r(\gamma|\alpha^-) d\gamma \quad (2.57)$$

La fonction g_p^- est la pdf de l'angle d'impact des particules sur la paroi, tandis que h_p^- est la pdf de l'angle d'impact des particules qui heurtent la paroi par unité de temps.

Donc par définition la quantité $n_p^- g_p^-(\alpha^-) d\alpha^-$ est le nombre moyen de particules incidentes avec un angle d'impact compris entre α^- et $\alpha^- + d\alpha^-$. Si bien qu'on obtient par construction que :

$$\int_0^\pi g_p^-(\alpha^-) d\alpha^- = 1 \quad (2.58)$$

De même la quantité $n_p^- h_p^-(\alpha^-)$ est le nombre de particules qui frappent la paroi par unité de temps avec un angle d'impact compris entre α^- et $\alpha^- + d\alpha^-$. Elle vérifie par définition :

$$\int_0^\pi h_p^-(\alpha^-) d\alpha^- = 1 \quad (2.59)$$

Vu sous cet angle, l'expression $\{\varphi(\gamma)\}_p^-$ n'est rien d'autre que la moyenne de la quantité $\varphi(\gamma)$ conditionnée par le flux de particules qui heurtent la paroi par unité de temps.

Par suite connaissant la pdf des vitesses incidentes f_p^- , nous pouvons écrire en pratiquant les changements de variables convenables que :

$$\forall \alpha^- \in [0, \pi], \quad g_p^-(\alpha^-) = \frac{1}{n_p^-} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} f_p^-(c_p \cos \alpha^-, -c_p \sin \alpha^-, c_{p_z}) c_p dc_p dc_{p_z} \quad (2.60)$$

$$\forall \alpha^- \in [0, \pi], \quad h_p^-(\alpha^-) = -\frac{\sin \alpha^-}{n_p^- \langle v_p \rangle_p^-} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} f_p^-(c_p \cos \alpha^-, -c_p \sin \alpha^-, c_{p_z}) c_p^2 dc_p dc_{p_z} \quad (2.61)$$

Les propositions (2.53) et (2.54) sont d'un point de vue mathématique assez grossières et conduisent en conséquence à d'importantes incertitudes. En attendant d'estimer la qualité de la précision physique

du modèle de corrélation dans le chapitre 3, à l'aide de simulations, nous nous proposons d'étudier théoriquement la pertinence de ces propositions en effectuant des comparaisons avec les moyennes exactes.

Analyse théorique de la précision des deux modèles de corrélation partielle

Le calcul pratique des moments incidents exacts et les différentes approximations exigent la connaissance de f_p^- . Nous allons supposer en première approximation que f_p^- est une demi-gaussienne définie par :

$$f_p^-(\underline{c}_p) = \frac{2n_p^- H(-c_{py})}{\sqrt{8\pi^3 \langle u_p'^2 \rangle_p^- \langle v_p'^2 \rangle_p^- \langle w_p'^2 \rangle_p^-}} \exp \left[-\frac{(c_{px} - U_p^-)^2}{2 \langle u_p'^2 \rangle_p^-} - \frac{c_{py}^2}{2 \langle v_p'^2 \rangle_p^-} - \frac{c_{pz}^2}{2 \langle w_p'^2 \rangle_p^-} \right] \quad (2.62)$$

C'est une hypothèse suffisamment acceptable puisque'elle constitue une approximation au premier ordre de la solution analytique, en quasi-équilibre, obtenue par Derevich et Zaichik (1988) [19] par la résolution de l'équation de type Fokker-Planck de la pdf des vitesses en proche paroi. En plus une pdf incidente similaire était utilisée avec succès par Sakiz & Simonin (1999) [83] pour la fermeture des conditions aux limites aux parois lisses.

Avec l'équation (2.62), les pdf de l'angle d'impact g_p^- et de l'angle d'impact par unité de temps h_p^- des particules sur la paroi s'écrivent respectivement :

$$\forall \alpha^- \in [0, \pi],$$

$$g_p^-(\alpha^-) = \frac{1}{\pi \sqrt{\xi^-}} \int_0^{+\infty} u \exp \left[-\frac{(u \cos \alpha^- - \beta^-)^2}{2\xi^-} - \frac{(u \sin \alpha^-)^2}{2} \right] du \quad (2.63)$$

$$h_p^-(\alpha^-) = \frac{\sin \alpha^-}{\sqrt{2\pi\xi^-}} \int_0^{+\infty} u^2 \exp \left[-\frac{(u \cos \alpha^- - \beta^-)^2}{2\xi^-} - \frac{(u \sin \alpha^-)^2}{2} \right] du \quad (2.64)$$

où les paramètres adimensionnels β^- et ξ^- sont tels que :

$$\beta^- = \frac{U_p^-}{\sqrt{\langle v_p'^2 \rangle_p^-}} \quad (2.65)$$

$$\xi^- = \frac{\langle u_p'^2 \rangle_p^-}{\langle v_p'^2 \rangle_p^-} \quad (2.66)$$

Les courbes de la figure (2.17) donnent la pdf (non normalisée) de l'angle d'incidence α^- associée à la pdf des vitesses incidentes f_p^- (2.62). Les variations simultanées des paramètres β^- et ξ^- confèrent

différentes configurations d'écoulement. En faisant varier l'anisotropie ξ^- de l'écoulement particulaire, on observe au delà d'une certaine valeur de β^- (par exemple : $\beta^- \geq 5$) que l'angle d'impact est indépendant de l'anisotropie. Cependant quelque soit β^- , la probabilité d'avoir une incidente rasante est très élevée. Au total, cette forme de la pdf des vitesses incidentes conduit à une forte probabilité de particules incidentes rasantes, ce qui est bien le cas des écoulements en canal au regard des résultats de Sommerfeld (1992). Dans une telle situation, le phénomène de "shadow effect" est assez important pour presque tous les angles d'impact, si bien que l'utilisation d'une telle pdf s'avère bien adaptée pour effectuer nos tests.

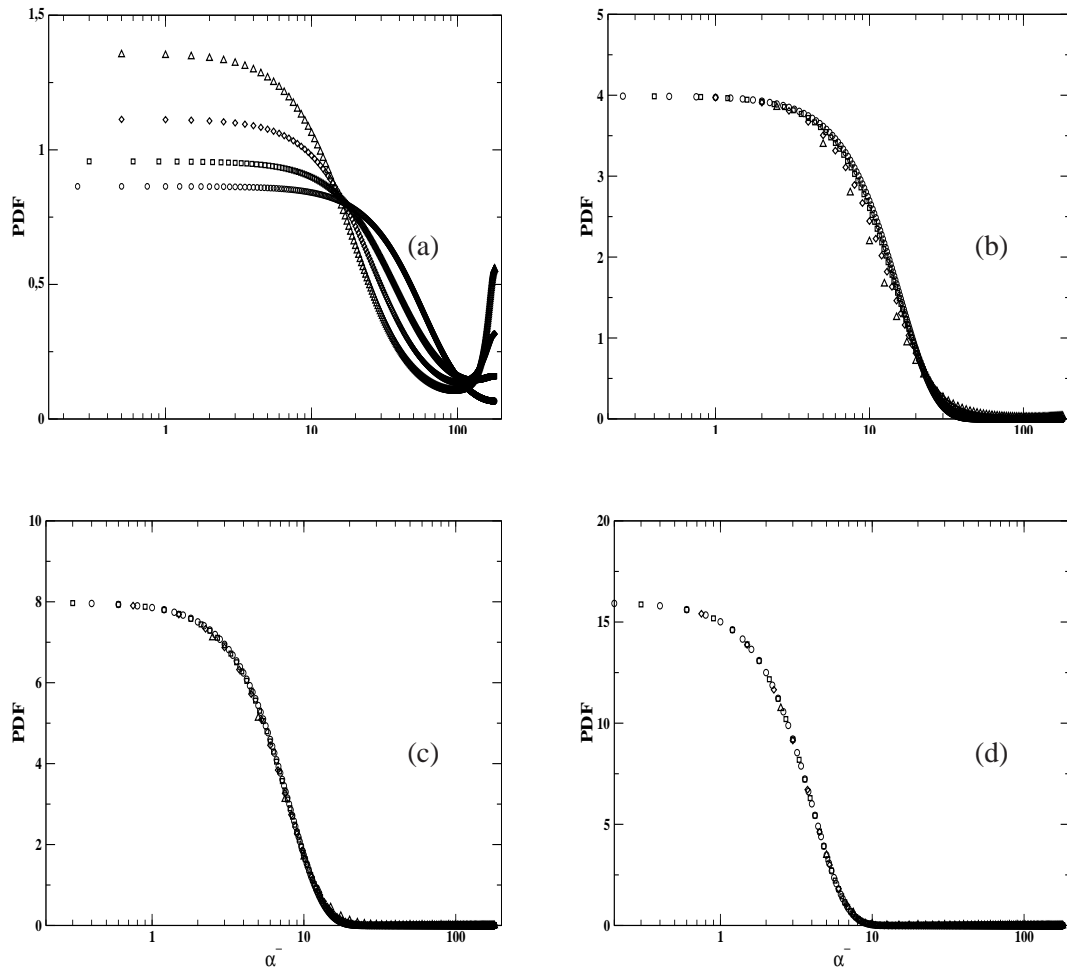


FIG. 2.17 – Fonctions de distribution de l'angle d'incidence obtenues à partir de la forme présumée de la pdf des vitesses incidentes (2.62). (a), (b), (c) et (d) correspondent respectivement aux cas où β^- vaut 1.0, 5.0, 10.0 et 20.0 . Les symboles représentent les cas (\circ) $\xi^- = 1.0$, (\square) $\xi^- = 2.0$, (\diamond) $\xi^- = 4.0$ et (\triangle) $\xi^- = 8.0$.

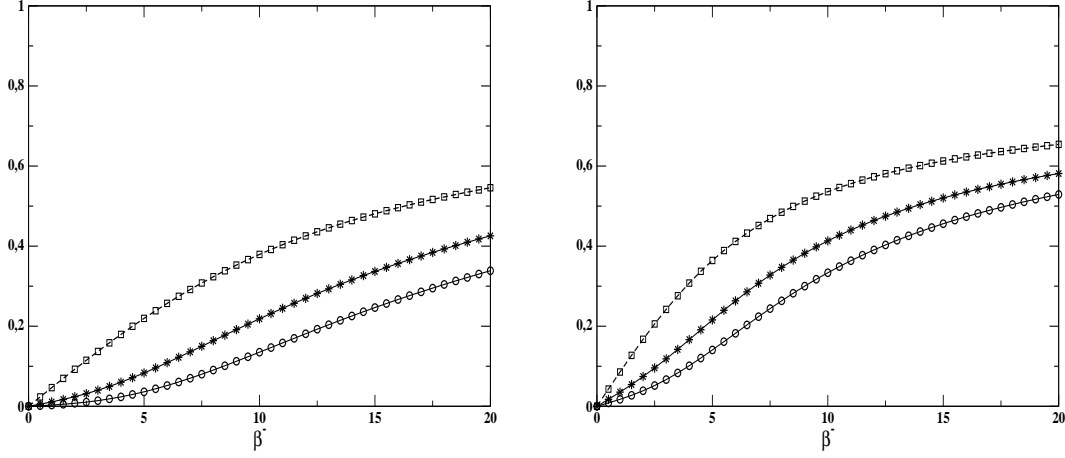


FIG. 2.18 – Comparaison entre le calcul exact de $\langle\langle \sin \gamma \cos \gamma | \alpha^- \rangle \rangle_p^- / \langle v_p^2 \rangle_p^-$ (○) à ses approximations $\langle\langle \sin \gamma \cos \gamma | \alpha^- \rangle \rangle_p^-$ (□) et $\{ \sin \gamma \cos \gamma \}_p^-$ (*). $\Delta \gamma$ vaut respectivement 2.5° à gauche et 5.0° à droite. ($\xi^- = 4.0$)

Les formes (2.63) et (2.64), nous permettent d'obtenir pour tout $\psi_p = \psi_p(\underline{c}_p)$ et $\varphi(\gamma)$ que :

$$\begin{aligned} & \frac{\langle\langle \varphi(\gamma) | \alpha^- \rangle \rangle_p^- \langle v_p \psi_p \rangle_p^-}{\langle v_p \psi_p \rangle_p^-} \\ &= \frac{\int_0^\pi \int_0^{+\infty} \sin \alpha^- \langle \varphi(\gamma) | \alpha^- \rangle \psi_p(u, \alpha^-) u^2 \exp \left[-\frac{(u \cos \alpha^- - \beta^-)^2}{2\xi^-} - \frac{(u \sin \alpha^-)^2}{2} \right] dud\alpha^-}{\int_0^\pi \int_0^{+\infty} \sin \alpha^- \psi_p(u, \alpha^-) u^2 \exp \left[-\frac{(u \cos \alpha^- - \beta^-)^2}{2\xi^-} - \frac{(u \sin \alpha^-)^2}{2} \right] dud\alpha^-} \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\langle\langle \varphi(\gamma) | \alpha^- \rangle \rangle_p^- = \frac{1}{\pi \sqrt{\xi^-}} \int_0^\pi \int_0^{+\infty} \langle \varphi(\gamma) | \alpha^- \rangle_p^- u \exp \left[-\frac{(u \cos \alpha^- - \beta^-)^2}{2\xi^-} - \frac{(u \sin \alpha^-)^2}{2} \right] dud\alpha^- \quad (2.68)$$

$$\{ \varphi(\gamma) \}_p^- = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi^-}} \int_0^\pi \int_0^{+\infty} \sin \alpha^- \langle \varphi(\gamma) | \alpha^- \rangle_p^- u^2 \exp \left[-\frac{(u \cos \alpha^- - \beta^-)^2}{2\xi^-} - \frac{(u \sin \alpha^-)^2}{2} \right] dud\alpha^- \quad (2.69)$$

Finalement, analyser la précision des deux modèles de corrélation partielle, revient à comparer les expressions (2.68) et (2.69) au calcul exact défini par (2.67). Les courbes des figures 2.18 et 2.19

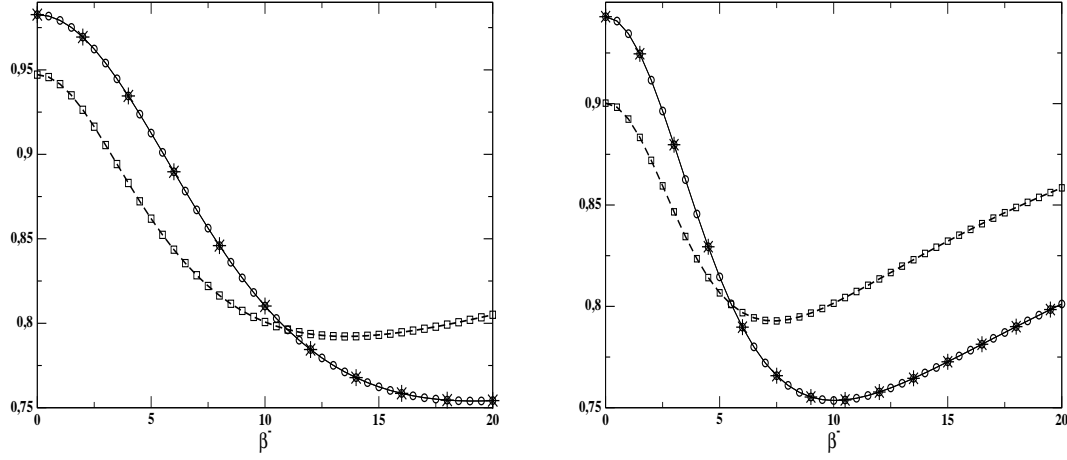


FIG. 2.19 – Comparaison entre le calcul exact du rapport $\langle\langle \sin^2 \gamma | \alpha^- \rangle v'_p \rangle_p^- / \langle v'_p \rangle_p^-$ ("○") à ses approximations $\langle\langle \sin^2 \gamma | \alpha^- \rangle \rangle_p^-$ ("□") et $\{\sin^2 \gamma\}_p^-$ ("*"). $\Delta\gamma$ vaut respectivement 2.5° à gauche et 5.0° à droite. ($\xi^- = 4.0$)

obtenues à partir de cette forme présumée de f_p^- , présentent les résultats entre les valeurs exactes des moyennes incidentes $\langle\langle \sin \gamma \cos \gamma | \alpha^- \rangle v_p^2 \rangle_p^- / \langle v_p^2 \rangle_p^-$ et $\langle\langle \sin^2 \gamma | \alpha^- \rangle v'_p \rangle_p^- / \langle v'_p \rangle_p^-$, et leurs approximations par les propositions (2.68) et (2.69) pour des déviations standards $\Delta\gamma = \{2.5^\circ, 5.0^\circ\}$. La figure 2.18 montre une sur-estimation par les deux approximations et pour les deux parois, du calcul exact $\langle\langle \sin \gamma \cos \gamma | \alpha^- \rangle v_p^2 \rangle_p^- / \langle v_p^2 \rangle_p^-$. Cependant, l'approximation $\langle\langle \sin^2 \gamma | \alpha^- \rangle \rangle_p^-$ engendre deux fois plus d'erreur pour les deux parois que $\{\sin^2 \gamma\}_p^-$. L'approximation de $\langle\langle \sin^2 \gamma | \alpha^- \rangle v'_p \rangle_p^- / \langle v'_p \rangle_p^-$ par $\langle\langle \sin^2 \gamma | \alpha^- \rangle \rangle_p^-$ (figure 2.19) montre pour $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et 5.0° que cette approximation prédit le profil de façon moins précise que l'approximation $\{\sin^2 \gamma\}_p^-$. En conclusion, les résultats montrent, quelque soit le degré de rugosité de la paroi, que l'approximation en $\langle\langle \cdot \rangle \rangle_p^-$ est moins satisfaisante que celle en $\{\cdot\}_p^-$ par rapport au calcul exact. Ainsi le modèle $\{\cdot\}_p^-$ semble plus avisé ; si bien que dans toute la suite, nous l'emploierons pour la modélisation des conditions aux limites.

Dérivation des conditions aux limites eulériennes

Avec l'approximation en $\{\cdot\}_p^-$, les moments du tableau (2.1) deviennent ceux du tableau (2.2). Les équations de ce tableau montrent un transfert d'énergie, induit par la rugosité des parois, dans le sens de l'écoulement vers la direction normale à la paroi. Cependant ce système de conditions aux limites eulériennes (présenté dans ledit tableau) n'est pas fermé puisqu'il est défini à partir de moments incidents qui sont inconnus dans une simulation. La fermeture adoptée consiste à introduire les moments pairs de $\underline{c}_p \cdot \underline{n}$, qui eux sont connus à la paroi au cours de la simulation.

$n_p V_p = 0$
$n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p = 2n_p^- \{ \sin^2 \gamma \}_p^- \langle (U_p + u'_p) v'_p \rangle_p^- - 2n_p^- \{ \sin \gamma \cos \gamma \}_p^- \langle v'_p v'_p \rangle_p^-$
$n_p \langle v'_p w'_p \rangle_p = 0$
$n_p \langle u'_p v'_p w'_p \rangle_p = -2n_p^- \{ \cos \gamma \sin \gamma \}_p^- \langle v_p'^2 w'_p \rangle_p^- - n_p U_p \langle v'_p w'_p \rangle_p + 2n_p^- \{ \sin^2 \gamma \}_p^- \langle (u'_p + U_p) v'_p w'_p \rangle_p^-$
$n_p \langle u_p'^2 v'_p \rangle_p = -2n_p U_p \langle u'_p v'_p \rangle_p - n_p \langle v_p'^3 \rangle_p$
$n_p \langle v_p'^2 w_p'^2 \rangle_p = 0$
$n_p \langle v_p'^3 \rangle_p = -n_p^- \{ \sin^2 (2\gamma) \}_p^- \langle (U_p + u'_p)^2 v'_p \rangle_p^- + n_p^- \{ \sin^2 (2\gamma) \}_p^- \langle v_p'^3 \rangle_p^- + n_p^- \{ \sin (4\gamma) \}_p^- \langle (U_p + u'_p) v_p'^2 \rangle_p^-$

TAB. 2.2 – Nouvelle formulation des conditions aux limites à la paroi issue de l'application du modèle de corrélation partielle, avec l'effet de rugosité de $2D$.

En utilisant une fois encore les equations (2.44) et (2.54), nous pouvons écrire le jeu de moments pairs complémentaires stockés dans le tableau (2.3). Toutefois le calcul de quelques moments pairs tels que $\langle u_p'^2 \rangle_p$, U_p , ... bute sur les problèmes similaires rencontrés lors de la tentative de calcul de n_p^+ .

$n_p \langle v'_p v'_p \rangle_p = -2n_p^- \{ \sin \gamma \cos \gamma \}_p^- \langle (U_p + u'_p) v'_p \rangle_p^- + 2n_p^- \{ \cos^2 \gamma \}_p^- \langle v'_p v'_p \rangle_p^-$
$n_p \langle u'_p v_p'^2 \rangle_p = 2n_p^- [1 - \{ \sin^2 (2\gamma) \}_p^-] \langle (U_p + u'_p) v_p'^2 \rangle_p^- + \frac{1}{2} n_p^- \{ \sin (4\gamma) \}_p^- \langle v_p'^3 \rangle_p^- - n_p U_p \langle v_p'^2 \rangle_p - \frac{1}{2} n_p^- \{ \sin (4\gamma) \}_p^- \langle (U_p + u'_p)^2 v'_p \rangle_p^-$
$n_p \langle v_p'^2 w'_p \rangle_p = -2n_p^- \{ \sin \gamma \cos \gamma \}_p^- \langle (U_p + u'_p) v'_p w'_p \rangle_p^- + 2n_p^- \{ \cos^2 \gamma \}_p^- \langle v_p'^2 w'_p \rangle_p^-$

TAB. 2.3 – Fermeture des conditions aux limites du tableau 2.2.

En effet pour le calcul de U_p^+ (qui devra permettre ensuite de calculer U_p), nous avons :

$$n_p^+ \langle u_p \rangle_p^+ = n_p^+ U_p^+ = -n_p^- \left\langle \left\langle \frac{\Phi_{\gamma,x}(\underline{c}_p^-)}{\Phi_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}} \Big|_{\underline{c}_p^-} \right\rangle_{\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}} \right\rangle_p^- \quad (2.70)$$

Et comme dans le cas du calcul du rapport $\frac{n_p^+}{n_p^-}$, la moyenne $\left\langle \frac{\Phi_{\gamma,x}(\underline{c}_p^-)}{\Phi_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}} \Big|_{\underline{c}_p^-} \right\rangle_{\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}}$ n'est pas finie en raison des mêmes points impropres (pour l'intégrale définissant cette moyenne) introduits par la pdf des angles de rugosité tel que décrit par Sommerfeld & Huber (1999).

Il ressort de toute évidence que l'utilisation du modèle de "shadow effect" tel qu'il est proposé ne peut être utilisé pour la dérivation complète de conditions aux limites eulériennes à la paroi. Alors, en attendant d'explorer d'autres voies et moyens pour tenter une fermeture des conditions aux limites, nous présentons dans la sous-section suivante l'analyse théorique du cas des faibles rugosité de paroi.

2.3.4 Hypothèse de $\gamma \ll 1$

En remarquant que l'écart type de l'angle de rugosité de la paroi physique $\Delta\gamma$ est tel que :

$$\Delta\gamma \ll \pi \quad (2.71)$$

on peut raisonnablement supposer que la plupart des angles de paroi tirés à l'aide du processus aléatoire gaussien conditionné par l'angle d'incidence sont tels que :

$$\gamma \ll 1 \quad (2.72)$$

Ainsi en pratiquant un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions $\gamma \mapsto \sin\gamma$ et $\gamma \mapsto \cos\gamma$, la corrélation $\{\sin\gamma\cos\gamma\}_p^-$ et la variance $\{\sin^2\gamma\}_p^-$ de l'angle de paroi vu par la particule incidente deviennent respectivement $\{\gamma\}_p^-$ et $\{\gamma^2\}_p^-$. En outre, ces deux valeurs $\{\gamma\}_p^-$ et $\{\gamma^2\}_p^-$, sont celles porteuses de véritables informations au sujet de la paroi rugueuse et de la modélisation de ses effets (dans le cadre du présent modèle de Sommerfeld & Huber, 1999 [98]), dans la mesure où globalement la paroi rugueuse est caractérisée par la connaissance de l'écart type de la distribution des angles de rugosité, dont leurs effets sont prises en compte à travers l'angle de paroi vu par les particules incidentes.

Afin de valider théoriquement cette hypothèse, nous considérons la pdf des vitesses incidentes (2.62), et nous présentons des calculs effectués pour $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et $\Delta\gamma = 5.0^\circ$ en utilisant la formulation (2.69). Les résultats présentés sur les figures 2.20 et 2.21 montrent une parfaite superposition pour de faibles écart type $\Delta\gamma$ avec cette approximation. D'autre part, bien que cette approximation semble s'écarter légèrement pour des $\Delta\gamma$ relativement grands, on peut raisonnablement écrire :

$$\forall \Delta\gamma \ll \pi \quad \{\sin\gamma\cos\gamma\}_p^- = \{\gamma\}_p^- \text{ et } \{\sin^2\gamma\}_p^- = \{\gamma^2\}_p^- \quad (2.73)$$

Avec ces approximations, les conditions aux limites des tableaux 2.2 et 2.3 conduisent aux relations du tableau 2.4.

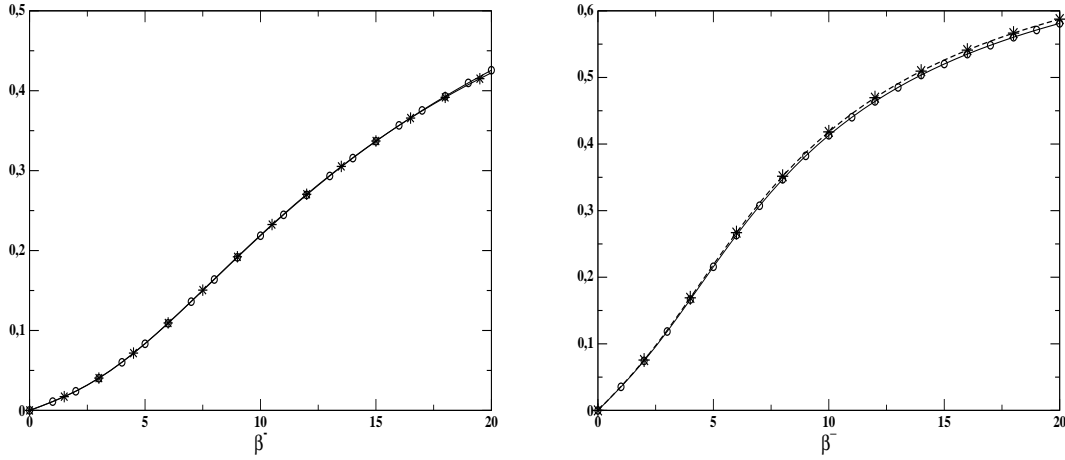


FIG. 2.20 – Evaluation de l'hypothèse $\gamma \ll 1$ sur la corrélation de l'angle de paroi vu par la particule incidente : "○" : $\{\sin \gamma \cos \gamma\}_p^-$ et "*" : $\{\gamma\}_p^-$. ($\Delta\gamma$ vaut 2.5° à gauche et 5.0° à droite).

2.3.5 Hypothèse d'un angle minimum de rebond $\alpha_0^+ > 0$

D'après l'étude théorique précédente, l'impossibilité de la fermeture des conditions aux limites est due à la probabilité très élevée pour une particule de rebondir avec un angle nul par rapport à la paroi macroscopique (voir figure 2.16). Dans la présente étude, nous émettons l'hypothèse que la particule ne peut en aucun cas repartir rasante par l'introduction d'un angle de rebond minimum α_0^+ . Autrement, la probabilité pour une particule réfléchi de repartir rasante est nulle. Cette proposition suppose nécessairement une modification de la pdf de l'angle de paroi γ (2.20).

Toutefois il convient de faire remarquer que l'existence de l'angle de rebond minimum de rebond α_0^+ ne peut en aucun cas être rattaché à un événement physique lors du processus de rebond : il est donc purement spéculatif.

Précédemment avec le modèle originel de Sommerfeld la probabilité de transition pourrait s'écrire :

$$R(\alpha^- \longrightarrow \alpha^+ \geq 0) \quad (2.74)$$

elle devient avec cette hypothèse :

$$R(\alpha^- \longrightarrow \alpha^+ \geq \alpha_0^+ \neq 0) \quad (2.75)$$

Analyse théorique de quelques moments pairs

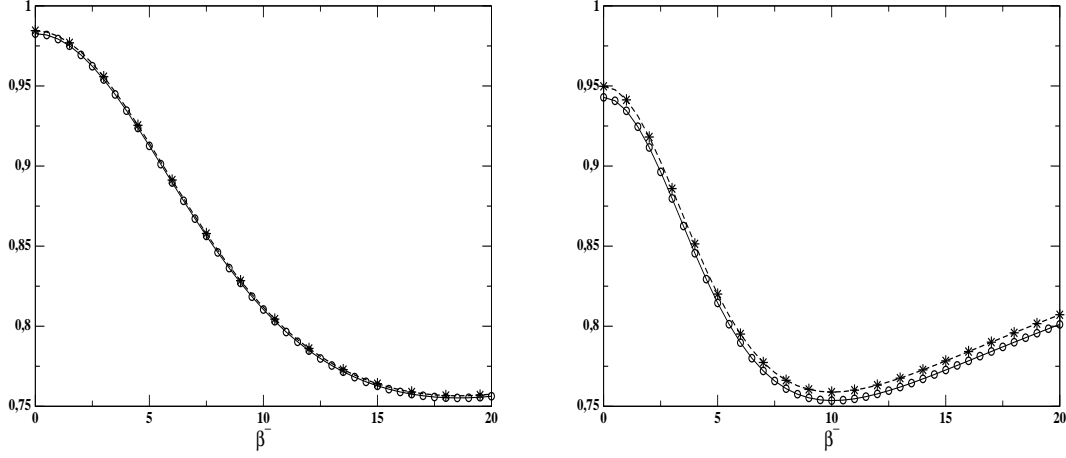


FIG. 2.21 – Evaluation de l’hypothèse $\gamma \ll 1$ sur la variance de l’angle de paroi vu par la particule incidente : "○" : $\{\sin \gamma \cos \gamma\}_p^-$ et "★" : $\{\gamma\}_p^-$. ($\Delta\gamma$ vaut 2.5° à gauche et 5.0° à droite).

Le but de cette partie est d’étudier le comportement des moments pairs avec cette modification du modèle de Sommerfeld & Huber (1999) [98]. Tous les développements se feront directement pour le cas de rebonds élastiques avec une rugosité $2D$ et nous considérerons que la pdf des vitesses incidentes f_p^- est une demi-gaussienne ayant la forme (2.62).

Calcul de $\frac{n_p}{n_p^-}$

Ce rapport s’écrit par définition :

$$\frac{n_p}{n_p^-} = 1 + \frac{n_p^+}{n_p^-} \quad (2.76)$$

Avec l’introduction de α_0^+ , il vient que :

$$\frac{n_p^+}{n_p^-} = \left\langle \left\langle \frac{1}{\sin(2\gamma + \alpha^-)} \middle| \alpha^-, \alpha_0^+ \right\rangle \sin \alpha^- \right\rangle_p^- \quad (2.77)$$

où :

$$\forall \alpha_0^+ > 0, \quad \left\langle \frac{1}{\sin(2\gamma + \alpha^-)} \middle| \alpha^-, \alpha_0^+ \right\rangle = \lambda(\alpha^-) \int_{\frac{\alpha_0^+ - \alpha^-}{2}}^{\frac{\pi - \alpha_0^+ - \alpha^-}{2}} \frac{P_r(\gamma)}{\sin(2\gamma + \alpha^-)} d\gamma \quad (2.78)$$

Avec f_p^- (Eq. (2.62)), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{n_p^+}{n_p^-} &= \frac{1}{\pi\sqrt{\xi}} \int_0^\pi \left(\int_0^{+\infty} u \exp \left[-\frac{(u \cos \alpha^- - \beta)^2}{2\xi} - \frac{u^2 \sin^2 \alpha^-}{2} \right] du \right) \times \\ &\quad \times \left\langle \frac{1}{\sin(2\gamma + \alpha^-)} \middle| \alpha^-, \alpha_0^+ \right\rangle \sin \alpha^- d\alpha^- \end{aligned} \quad (2.79)$$

$n_p V_p = 0$
$n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p = 2n_p^- \{\gamma^2\}_p^- \langle (U_p + u'_p) v'_p \rangle_p^- - 2n_p^- \{\gamma\}_p^- \langle v'_p v'_p \rangle_p^-$
$n_p \langle v'_p w'_p \rangle_p = 0$
$n_p \langle u'_p v'_p w'_p \rangle_p = -n_p U_p \langle v'_p w'_p \rangle_p - 2n_p^- \{\gamma\}_p^- \langle v_p'^2 w'_p \rangle_p^- + 2n_p^- \{\gamma^2\}_p^- \langle (u'_p + U_p) v'_p w'_p \rangle_p^-$
$n_p \langle u_p'^2 v'_p \rangle_p = -2n_p U_p \langle u'_p v'_p \rangle_p - n_p \langle v_p'^3 \rangle_p$
$n_p \langle v'_p w_p'^2 \rangle_p = 0$
$n_p \langle v_p'^3 \rangle_p = 4n_p^- \{\gamma\}_p^- \langle (U_p + u'_p) v_p'^2 \rangle_p^- - 4n_p^- \{\gamma^2\}_p^- \langle (U_p + u'_p)^2 v'_p \rangle_p^- + 4n_p^- \{\gamma^2\}_p^- \langle v_p'^3 \rangle_p^-$
$n_p \langle v'_p v'_p \rangle_p = -2n_p^- \{\gamma\}_p^- \langle (U_p + u'_p) v'_p \rangle_p^- + 2n_p^- [1 - \{\gamma^2\}_p^-] \langle v'_p v'_p \rangle_p^-$
$n_p \langle u'_p v_p'^2 \rangle_p = 2n_p^- [1 - 4\{\gamma\}_p^-] \langle (U_p + u'_p) v_p'^2 \rangle_p^- - n_p U_p \langle v_p'^2 \rangle_p - 2n_p^- \{\gamma\}_p^- \langle (U_p + u'_p)^2 v'_p \rangle_p^- + 2n_p^- \{\gamma\}_p^- \langle v_p'^3 \rangle_p^-$
$n_p \langle v_p'^2 w'_p \rangle_p = -2n_p^- \{\gamma\}_p^- \langle (U_p + u'_p) v'_p w'_p \rangle_p^- + 2n_p^- [1 - \{\gamma^2\}_p^-] \langle v_p'^2 w'_p \rangle_p^-$

TAB. 2.4 – Conditions aux limites à la paroi dans le cadre des petits angles de rugosité.

sachant que :

$$\xi = \frac{\langle u_p'^2 \rangle_p^-}{\langle v_p'^2 \rangle_p^-} \quad (2.80)$$

$$\beta = \frac{U_p^-}{\sqrt{\langle v_p'^2 \rangle_p^-}} \quad (2.81)$$

Les courbes de la figure 2.22 obtenues avec (2.79) montrent qu'avec cette hypothèse, le ratio $\frac{n_p^+}{n_p^-}$ ne diverge plus. En effet en autorisant à la particule de rebondir avec un angle minimum de plus en plus croissant (jusqu'à $\alpha_0^+/\Delta\gamma = 5$), ce rapport décroît premièrement avec une forte pente lorsque $\alpha_0^+/\Delta\gamma$ augmente et semble devenir constant au delà d'une certaine valeur. Ces courbes montrent, en accord avec les simulations lagrangiennes de Squires & Simonin (2006) [100], que le nombre de particules à la paroi diminue avec l'augmentation de $\Delta\gamma$.

Calcul de $\frac{U_p}{U_p^-}$

Par définition :

$$n_p U_p = n_p^- U_p^- + n_p^+ U_p^+ \quad (2.82)$$

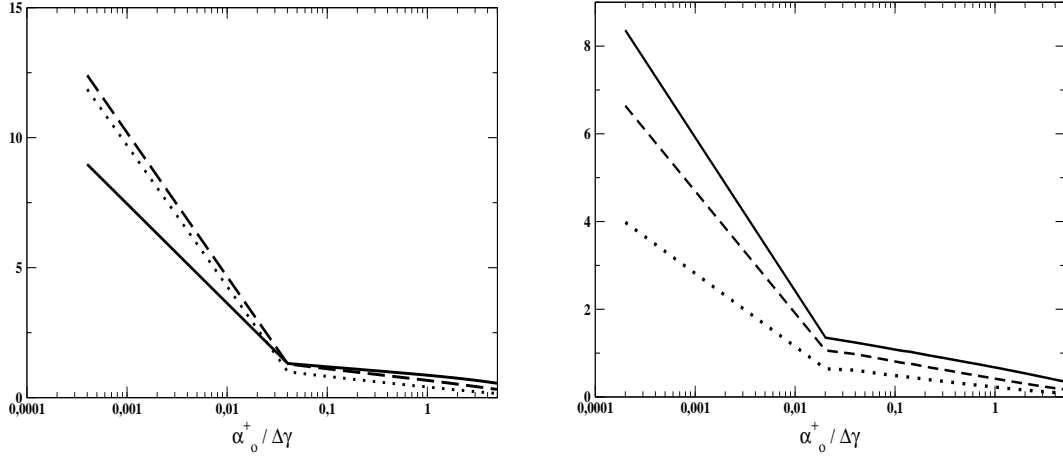


FIG. 2.22 – Variation de rapport $\frac{n_p^+}{n_p^-}$ pour $\xi = 4.0$ et β^- vaut respectivement 20.0 (trait plein), 10.0 (tiret) et 5.0 (pointillés). ($\Delta\gamma$ vaut 2.5° à gauche et 5.0° à droite).

Soit :

$$\frac{U_p}{U_p^-} = \frac{n_p^-}{n_p} \left(1 + \frac{n_p^+ U_p^+}{n_p^- U_p^-} \right) \quad (2.83)$$

Dans le cadre de nos hypothèses de calculs, nous avons :

$$\frac{U_p}{U_p^-} = \frac{n_p^-}{n_p} \left[1 + \frac{1}{2\pi} Q(\beta, \xi) \frac{1}{\pi} R(\beta, \xi) \right] \quad (2.84)$$

où :

$$Q(\beta, \xi) = \frac{1}{\beta\sqrt{\xi}} \int_0^\pi \int_0^{+\infty} \left\langle \frac{1 - 2\sin^2\gamma}{\sin(2\gamma + \alpha^-)} \middle| \alpha^-, \alpha_0^+ \right\rangle \sin(2\alpha^-) \times \\ u^2 \exp \left[-\frac{(u \cos \alpha^- - \beta)^2}{2\xi} - \frac{u^2 \sin^2 \alpha^-}{2} \right] du d\alpha^- \quad (2.85)$$

$$R(\beta, \xi) = \frac{1}{\beta\sqrt{\xi}} \int_0^\pi \int_0^{+\infty} \left\langle \frac{\sin(2\gamma)}{\sin(2\gamma + \alpha^-)} \middle| \alpha^-, \alpha_0^+ \right\rangle \sin^2 \alpha^- \times \\ u^2 \exp \left[-\frac{(u \cos \alpha^- - \beta)^2}{2\xi} - \frac{u^2 \sin^2 \alpha^-}{2} \right] du d\alpha^- \quad (2.86)$$

Tout comme $\frac{n_p}{n_p^-}$, le rapport $\frac{U_p}{U_p^-}$ converge très vite vers 1 avec l'augmentation de α_0^+ (figure 2.23).

Calcul de $\frac{\langle u_p^2 \rangle_p}{\langle u_p^2 \rangle_p^-}$

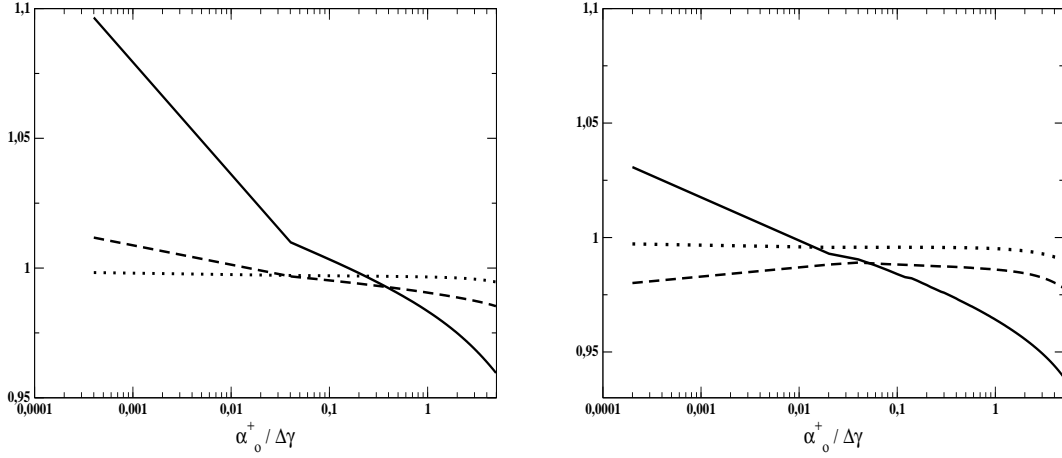


FIG. 2.23 – Variation de rapport $\frac{U_p}{U_p^-}$ pour $\xi = 4.0$ et β^- vaut respectivement 20.0 (trait plein), 10.0 (tiret) et 5.0 (pointillés). ($\Delta\gamma$ vaut 2.5° à gauche et 5.0° à droite).

En procédant de façon analogue que précédemment, nous trouvons :

$$\frac{\langle u_p^2 \rangle_p}{\langle u_p^2 \rangle_p^-} = \left\{ 1 + \frac{1}{\pi \xi \sqrt{\xi}} \left[A(\beta, \xi) + 2\beta \frac{U_p}{U_p^-} B(\beta, \xi) \right] + \frac{n_p^+}{n_p^-} \frac{\beta^2}{\xi} \left(\frac{U_p}{U_p^-} \right)^2 \right\} \frac{n_p^-}{n_p} \quad (2.87)$$

où nous avons posé :

$$A(\beta, \xi) = \int_0^\pi \int_0^{+\infty} \left\{ \left\langle \frac{\cos^2(2\gamma)}{\sin(2\gamma + \alpha^-)} \middle| \alpha^-, \alpha_0^+ \right\rangle \cos^2 \alpha^- \sin \alpha^- + \left\langle \frac{\sin^2(2\gamma)}{\sin(2\gamma + \alpha^-)} \middle| \alpha^-, \alpha_0^+ \right\rangle \sin^3 \alpha^- \right. \\ \left. - \left\langle \frac{\sin(4\gamma)}{\sin(2\gamma + \alpha^-)} \middle| \alpha^-, \alpha_0^+ \right\rangle \sin^2 \alpha^- \cos \alpha^- \right\} u^3 \exp \left[-\frac{(u \cos \alpha^- - \beta)^2}{2\xi} - \frac{u^2 \sin^2 \alpha^-}{2} \right] du d\alpha^- \quad (2.88)$$

et :

$$B(\beta, \xi) = \int_0^\pi \int_0^{+\infty} \left\{ \left\langle \frac{\sin(2\gamma)}{\sin(2\gamma + \alpha^-)} \middle| \alpha^-, \alpha_0^+ \right\rangle \sin^2 \alpha^- - \left\langle \frac{\cos(2\gamma)}{\sin(2\gamma + \alpha^-)} \middle| \alpha^-, \alpha_0^+ \right\rangle \sin \alpha^- \cos \alpha^- \right\} \times \\ u^2 \exp \left[-\frac{(u \cos \alpha^- - \beta)^2}{2\xi} - \frac{u^2 \sin^2 \alpha^-}{2} \right] du d\alpha^- \quad (2.89)$$

Au final, nous venons de prouver qu'en supprimant l'effet des particules rasantes par l'introduction de l'angle de rebond minimum $\alpha_0^+ > 0$, nous sommes capables de réaliser les premières fermetures de la seconde étape de la méthode présentée en § 2.3.2.

2.4 Modèle simplifié

Nous proposons dans la présente section une modélisation très simplifiée des conditions aux limites aux parois rugueuses. Nous considérons pour ce faire un écoulement dans lequel les particules

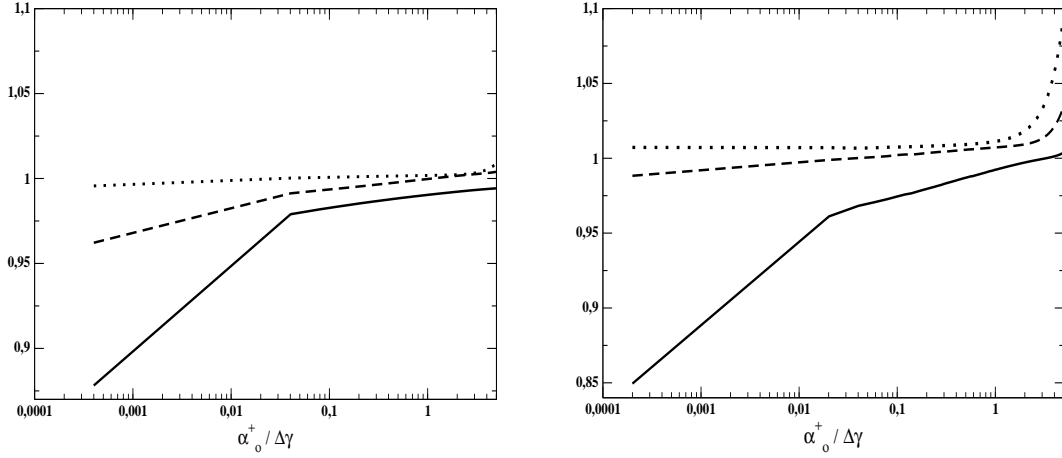


FIG. 2.24 – Variation de rapport $\frac{\langle u_p'^2 \rangle_p}{\langle u_p'^2 \rangle_p^-}$ vaut respectivement 20.0 (trait plein), 10.0 (tiret) et 5.0 (pointillés). ($\Delta\gamma$ vaut 2.5° à gauche et 5.0° à droite).

qui heurtent la paroi rugueuse ne sont pas sujet au "*shadow effect*". Cela veut dire que pour chaque particule incidente, la probabilité qu'elle heurte un angle $\gamma > 0$ est la même que d'heurter l'angle $-\gamma < 0$. Autrement :

$$\langle \gamma | \alpha^- \rangle = 0 \quad \text{pour tout } \alpha^- \quad (2.90)$$

Et alors l'écart type conditionné (2.29) par l'incidence α^- devient :

$$[\sigma(\gamma | \alpha^-)]^2 = \langle \gamma^2 | \alpha^- \rangle = \Delta\gamma^2 \quad (2.91)$$

En raison de la définition de la moyenne incidente $\{ \cdot \}_p^-$, nous avons :

$$\{ \gamma \}_p^- = 0 \quad \text{et} \quad \{ \gamma^2 \}_p^- = \Delta\gamma^2 \quad (2.92)$$

Nous faisons en plus l'hypothèse qu'il n'existe pas de corrélations, au cours de la phase d'incidence, entre les vitesses fluctuantes dans les trois directions en écrivant :

$$\langle u_p' v_p' \rangle_p^- = 0 \quad \text{et} \quad \langle v_p' w_p' \rangle_p^- = 0 \quad (2.93)$$

et en plus :

$$\langle u_p' v_p' w_p' \rangle_p^- = 0 \quad (2.94)$$

$n_p V_p = 0$
$n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p = 2n_p^- \Delta\gamma^2 U_p v'_p$
$n_p \langle v'_p w'_p \rangle_p = 0$
$n_p \langle u'_p v'_p w'_p \rangle_p = 0$
$n_p \langle v'_p w_p^2 \rangle_p = 0$
$n_p \langle v_p^3 \rangle_p = 4n_p^- \Delta\gamma^2 [\langle v_p^3 \rangle_p^- - U_p^2 \langle v'_p \rangle_p^- - \langle u_p^2 v'_p \rangle_p^-]$
$n_p \langle u_p^2 v'_p \rangle_p = -4n_p^- \Delta\gamma^2 [\langle v_p^3 \rangle_p^- - \langle u_p^2 v'_p \rangle_p^-]$
$n_p \langle v'_p v'_p \rangle_p = 2n_p^- [1 - \Delta\gamma^2] \langle v'_p v'_p \rangle_p^-$

TAB. 2.5 – Simplification des conditions aux limites du tableau (2.4) dans l'hypothèse d'un écoulement sans "shadow effect".

Sous ces hypothèses, les conditions du tableau 2.4 et les moments pairs utiles pour la fermeture des conditions aux limites du présent cas deviennent celles du tableau 2.5.

Comme l'inexistence du "shadow effect" suppose clairement que l'angle d'incidence est suffisamment grand, alors en accord avec notre modélisation ((2.32) & (2.33) et figure 2.16), la probabilité pour une telle particule de repartir rasante est nulle. Donc en utilisant les résultats de l'étude théorique avec l'hypothèse de l'angle de rebond minimum, on peut écrire que :

$$n_p^+ = n_p^- \implies n_p = 2n_p^- \quad (2.95)$$

et :

$$\langle u_p^2 \rangle_p = \langle u_p^2 \rangle_p^- \quad (2.96)$$

Pour assurer la fermeture complète des conditions aux limites du tableau 2.5, nous faisons l'hypothèse comme He & Simonin (1994) [33] et Sakiz & Simonin (1999) [83] que :

$$f_{py}^-(c_{py}) = \frac{2n_p^-}{\sqrt{2\pi \langle v'_p v'_p \rangle_p^-}} \exp\left(-\frac{c_{py}^2}{2 \langle v'_p v'_p \rangle_p^-}\right) \quad (2.97)$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$\langle v'_p \rangle_p^- = -\sqrt{\frac{2}{\pi} \langle v_p^2 \rangle_p^-} \quad (2.98)$$

$n_p V_p = 0$
$\langle u'_p v'_p \rangle_p = -\frac{2\Delta\gamma^2}{\sqrt{2\pi}} U_p \sqrt{\langle v_p'^2 \rangle_p}$
$\langle v'_p w'_p \rangle_p = 0$
$\langle u'_p v'_p w'_p \rangle_p = 0$
$\langle v'_p w_p'^2 \rangle_p = 0$
$\langle v_p'^3 \rangle_p = \frac{4\Delta\gamma^2}{\sqrt{2\pi}} [U_p^2 + \langle u_p'^2 \rangle_p - \langle v_p'^2 \rangle_p] \sqrt{\langle v_p'^2 \rangle_p}$
$\langle u_p'^2 v'_p \rangle_p = -\frac{4\Delta\gamma^2}{\sqrt{2\pi}} [\langle u_p'^2 \rangle_p - \langle v_p'^2 \rangle_p] \sqrt{\langle v_p'^2 \rangle_p}$

TAB. 2.6 – Conditions aux limites aux parois rugueuses pratiques dans l'hypothèse d'un écoulement sans "shadow effect".

$$\langle v_p'^3 \rangle_p^- = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \left[\langle v_p'^2 \rangle_p^- \right]^{\frac{3}{2}} \quad (2.99)$$

Cependant :

$$n_p \langle v'_p v'_p \rangle_p = 2n_p^- [1 - \Delta\gamma^2] \langle v'_p v'_p \rangle_p^- \quad (2.100)$$

or :

$$\Delta\gamma^2 \ll 1 \quad (2.101)$$

Donc :

$$\begin{aligned} n_p \langle v'_p v'_p \rangle_p &= 2n_p^- \langle v'_p v'_p \rangle_p^- \\ \Rightarrow \langle v'_p v'_p \rangle_p &= \langle v'_p v'_p \rangle_p^- \quad (\text{d'après (2.95)}) \end{aligned} \quad (2.102)$$

En supposant pour finir que :

$$\langle u_p'^2 v'_p \rangle_p^- = \langle u_p'^2 \rangle_p^- \langle v'_p \rangle_p^- \quad (2.103)$$

nous obtenons d'après (2.96) que :

$$\langle u_p'^2 v'_p \rangle_p^- = \langle u_p'^2 \rangle_p \langle v'_p \rangle_p^- \quad (2.104)$$

Au total avec (2.93) & (2.104), nous obtenons les conditions aux limites aux parois rugueuses (avec l'effet de rugosité 2D) pratique, données dans le tableau 2.6, pour un écoulement où le "shadow effect" est négligé.

Simonin *et al.*, à partir d'une forme présumée gaussienne de la pdf des vitesses incidentes f_p^- et les mêmes hypothèses, proposaient une formulation similaire de conditions aux limites aux parois rugueuses avec un effet de rugosité $3D$, en supposant que l'angle de paroi est le même dans les deux directions tangentes au plan de la paroi macroscopique. En l'adaptant aux cas de rebonds inélastiques avec friction, Konan *et al.* (2006) [54] effectuent des calculs euler/euler (avec le code Mélodif) en canal horizontal, qu'ils comparent aux données expérimentales de Sommerfeld & Kussin (2004) [99]. Les résultats obtenus montraient une assez bonne prédiction du flux de masse. Cependant bien que présentant les bons profils, les vitesses fluctuantes u'_p et v'_p étaient sur-estimées.

2.5 Conclusion du chapitre

L'utilisation du mécanisme de "*shadow effect*" proposé par Sommerfeld & Huber (1999) [98] pour la simulation (par l'approche lagrangienne) de l'interaction *particules/paroi rugueuse* a été mis à contribution pour la dérivation de conditions aux limites euleriennes de la phase dispersée d'un écoulement turbulent gaz-particules. La fermeture des conditions aux limites ainsi obtenues a buté sur l'impossibilité à calculer les moments pairs de la vitesse fluctuante normale des particules à la paroi, utilisés à cette fin. Il est ressorti de nos investigations théoriques, premièrement que cet échec est la conséquence de particules qui demeurent rasantes à la paroi après le rebond, et deuxièmement que le mécanisme de "*shadow effect*" tel que suggéré engendre une forte probabilité d'avoir des particules rasantes à la paroi.

Ce résultat étant en contradiction avec l'expérience, nous avons introduit un angle de rebond minimum afin d'interdire l'obtention de particules rasantes. La suppression de cet effet de particules rasantes a permis d'effectuer les calculs théoriques des moments pairs, en donnant ainsi l'espérance de la dérivation complète des conditions aux limites si le mécanisme de rebond *particules/paroi rugueuse* était proprement décrit.

Il convient aussi de remarquer que ce comportement des moments pairs face à l'hypothèse de l'angle de rebond minimum met en évidence l'existence d'un mécanisme de rebond *particules/paroi rugueuse* encore plus sophistiqué. Aussi comme le fait remarquer Tsirkunov & Panfilov (1998) [105], le principal problème du modèle de Sommerfeld (1992) [96] est son incapacité à prendre en compte l'éventualité d'un rebond multiple conformément à l'expérience.

Afin de vérifier que la modélisation réalisée au cours de ce chapitre était capable de prendre effectivement en compte les effets de parois rugueuses, nous avons dérivé à partir du modèle de base, des

conditions aux limites en effectuant des simplifications. Le modèle obtenu est bel et bien applicable pour prédire les moments de la phase dispersée.

Dès lors nous sommes amenés à nous interroger sur la forme de la modélisation du "*shadow effect*" par Sommerfeld & Huber (1999) [98].

Chapitre 3

Simulations numériques Euler/Lagrange (LES/DPS) en canal avec parois rugueuses

3.1 Introduction

Une des principales difficultés à la compréhension du comportement de particules solides dans une couche limite turbulente de paroi demeure la description de la phénoménologie de la turbulence du fluide dans cette région de paroi. En effet, selon Jiménez (1999) [41], bien que quelques mécanismes assez sophistiqués tels que la naissance et le développement de structures cohérentes, permettent d'aborder la théorie des écoulements fluides turbulents avec paroi, ce champ d'étude reste un problème ouvert. Or, il est ressorti des investigations expérimentales de Young & Hanratty (1991) [114] puis Kaftori *et al.* (1995) [45] [46], que les particules restent piégées entre la paroi et les structures cohérentes dans la sous couche visqueuse de la couche limite pendant une longue période (par exemple jusqu'à la dissipation du vortex si celles-ci ne sont pas à nouveau entraînées dans un autre vortex); ce qui a pour résultat une forte accumulation de particules en proche paroi. Selon Kaftori *et al.*, aussi bien les mécanismes de déposition que d'entraînement des particules sont contrôlés par l'action des structures cohérentes de la couche limite turbulente du fluide. La bonne prise en compte de la dynamique du fluide dans cette région de l'écoulement sur les particules, au cours des simulations est à ce titre très cruciale. Une solution efficace permettant toutefois la capture de l'ensemble des échelles connues de la turbulence du fluide dans cette région est de pratiquer une simulation numérique directe (DNS) des équations de Navier-Stokes. Par exemple, l'étude du comportement des particules dans une couche limite turbulente à l'aide d'une DNS couplée à un traitement lagrangien de la phase dispersée par Soldati (2005) [95], laisse clairement

entrevoir que l'accumulation de particules dans la sous couche visqueuse de la couche limite est reliée au temps caractéristique de la régénération des cycles de turbulence et à l'existence d'une seconde structure cohérente dont l'action conjuguée avec une première empêche nombres de particules de quitter la région de paroi pour le cœur de l'écoulement. Cependant, bien qu'étant d'excellents outils pour la description du fluide, les DNS sont très coûteuses en raison du maillage très raffiné à effectuer dans tout le domaine de calcul, de sorte à capturer toutes les échelles de la turbulence. Une alternative moins onéreuse permettant aussi bien la reproduction des cycles de régénérations des structures cohérentes dans la région de paroi, est la simulation des grandes échelles. Cette approche couplée à un traitement lagrangien de la phase dispersée a été appliquée avec succès à une grande variété d'écoulements à paroi (Wang & Squires (1996) [111], Uijttewaal & Oliemans (1996) [108],).

Dédié à l'analyse des mécanismes induits par la rugosité des parois dans un écoulement fluide turbulent chargé en particules solides, le présent chapitre est subdivisé en deux principales parties. Dans un premier temps, nous abordons quelques aspects de la modélisation et de la simulation des grandes échelles du fluide, puis une analyse qualitative des résultats des simulations est proposée. Dans la seconde partie, nous présentons le traitement lagrangien de la phase dispersée en décrivant les étapes d'interpolation du fluide, de la prise en compte des collisions entre particules et surtout du traitement des rebonds particules/paroi. Une attention particulière est accordée aux méthodes de calcul des propriétés statistiques de la phase dispersée. Pour finir, une vérification de la modélisation eulerienne proposée au chapitre précédent est effectuée à travers, à la fois les formulations analytiques des conditions aux limites aux parois et de la PDF de rebond des particules. Cela a évidemment conduit à une discussion finale au sujet du modèle de rebond irrégulier décrit par le "*shadow effect*".

3.2 Simulation des grandes échelles du fluide

En simulation numérique directe (DNS) des équations de Navier-Stokes d'un écoulement pleinement turbulent, l'on résout toutes les échelles de la turbulence. Cette opération exige un grand nombre de nœuds de maillage afin de capturer toute la gamme d'échelles de la turbulence du fluide, supérieures aux échelles de Kolmogorov. L'idée de la simulation des grandes échelles (SGE) ou *Large Eddy Simulation (LES)* est de s'affranchir de ce coût excessif de nœuds de maillage, en résolvant directement toutes les échelles supérieures à une échelle de séparation entre les grandes et petites structures turbulentes de l'écoulement. Ces grosses structures étant très souvent considérées comme celles principalement por-

teuses d'énergie, elles alimentent les petites ("*forward scatter*"), si bien que ces petites échelles sont alors modélisées en fonction de ces grandes structures.

3.2.1 Equations du mouvement des grandes échelles

L'approche adoptée consiste à appliquer un filtre aux équations de Navier-Stokes et à en déduire les équations du mouvement des grandes structures. Un champ de vitesse est décomposé comme la somme d'un champ dit des grandes échelles et d'un autre champ de sous-maille qui représente les longueurs d'onde non capturées par le filtre.

La procédure de filtrage permettant d'obtenir le champ des grandes échelles est effectuée pour une variable ϕ_j à partir de la formulation :

$$\bar{\phi}_j(\underline{x}, t) = \int_{\Omega} \prod_{i=1}^3 G_i(\underline{x}, \underline{x}'; \Delta_i) \phi_j(\underline{x}', t) d\underline{x}' \quad (3.1)$$

où Ω est le domaine spatial de calcul, G_i est un filtre spatial dans la i^{eme} direction et Δ_i est la largeur de ce filtre. Le champ de sous-maille est donné par :

$$\phi'_j(\underline{x}, t) = \phi_j(\underline{x}, t) - \bar{\phi}_j(\underline{x}, t) \quad (3.2)$$

On vérifie aisément que cette définition du filtrage est linéaire et elle assure la commutativité de l'opération de filtrage avec les dérivations spatiales et temporelle. Cependant, elle n'est pas idempotente.

Dans le cas d'écoulement d'un fluide newtonien incompressible, les équations de bilan de masse et de quantité de mouvement s'écrivent :

$$\frac{\partial u_{f,i}}{\partial x_i} = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u_{f,i}}{\partial t} + u_{f,j} \frac{\partial u_{f,i}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_{\tau}} \frac{\partial^2 u_{f,i}}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3.4)$$

où $u_{f,i}$ est la i^{eme} composante de la vitesse instantanée du fluide, p est la pression du fluide et Re_{τ} le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de friction à la paroi u_{τ} et une longueur caractéristique δ du domaine tel que :

$$Re_{\tau} = \frac{u_{\tau} \delta}{\nu_f} \quad (3.5)$$

où ν_f est la viscosité cinématique du fluide tandis que la vitesse de friction est définie par :

$$u_{\tau} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_f}} \quad (3.6)$$

τ_w étant la contrainte à la paroi et ρ_f la masse volumique du fluide.

Par suite l'application de la procédure de filtrage (3.1)-(3.2) aux équations (3.3)-(3.4) conduit aux équations du mouvement des grandes échelles de la turbulence suivantes :

$$\frac{\partial \bar{u}_{f,i}}{\partial x_i} = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_{f,i}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_{f,i} \bar{u}_{f,j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 \bar{u}_{f,i}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.8)$$

où τ_{ij} est le tenseur des contraintes de sous-maille (SGS) défini par :

$$\tau_{ij} = \overline{u_{f,i} u_{f,j}} - \bar{u}_{f,i} \bar{u}_{f,j} \quad (3.9)$$

Pour sa modélisation, τ_{ij} est décomposé en respectant la propriété d'invariance galiléenne, comme la somme du tenseur de Leonard, des contraintes croisées et des contraintes de Reynolds. Nous n'allons pas nous attarder sur cet aspect et nous invitons le lecteur intéressé à consulter Sagaut (1998) [81].

Dans les sous-sections qui suivent, bien qu'étudiant des écoulements inhomogènes anisotropes (écoulement en canal), nous présentons assez rapidement la fermeture utilisée en turbulence homogène et isotrope, afin de montrer comment cette approche s'avère insuffisante pour une bonne prédiction de l'écoulement par la LES en canal.

3.2.2 Modèles de fermeture des équations de la LES

Modélisation en THI : modèle de Smagorinsky (1963)

L'idée de la modélisation du tenseur de sous-maille τ_{ij} en turbulence homogène isotrope est basée sur le principe de la dissipation d'énergie des grosses structures vers les petites (phénomène connu sous le nom de "forward scatter" dans la littérature). Autrement, l'unique interaction entre les deux structures de la turbulence ne se fait que dans ce sens. Ce phénomène de transfert d'énergie des grandes structures vers les petites est clairement expliqué par la théorie de cascade d'énergie de Kolmogorov. Cette vision conduit Smagorinsky (1963) [94] à modéliser le tenseur de sous-maille τ_{ij} par :

$$\tau_{ij} = -2\nu_T S_{ij} \quad (3.10)$$

où le tenseur des taux de contraintes S_{ij} est défini par :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_{f,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_{f,j}}{\partial x_i} \right) \quad (3.11)$$

et ν_T est la viscosité turbulente.

Pour modéliser cette viscosité turbulente, Smagorinsky [94] suppose que dans l'équation bilan de l'énergie cinétique de sous-maille ($q_{f,SGS}^2 = \overline{u'_i u'_i}$), les seuls effets dominants sont la production et la dissipation. En égalant la production \mathcal{P} et la dissipation ε obtenue en procédant à une analyse dimensionnelle, Smagorinsky [94] montre que :

$$\nu_T = (C_S \Delta)^2 \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad (3.12)$$

où $C_S = 0.23$ est la constante de Smagorinsky et Δ la largeur du filtre défini par :

$$\Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3} \quad (3.13)$$

dans laquelle Δx , Δy et Δz sont respectivement les pas du maillage tridimensionnel, dans les directions longitudinale, transversale et latérale¹. Ce modèle est par construction entièrement dissipatif, et donc n'autorise que les transferts d'énergie des grandes structures vers les petites.

Dans le cadre d'un écoulement de Poiseuille, en faisant clairement remarquer que l'on devrait ajouter à la modélisation (3.10) un second terme pour prendre en compte le caractère inhomogène de la turbulence, Deardorff (1970) [18] suppose cette contribution assez petite pour être négligée. Les résultats de ses simulations LES comparés aux données expérimentales de Laufer (1950) montrent une surestimation de la vitesse longitudinale moyenne U_f et de la corrélation $\langle u'_f u'_f \rangle_f$. La fluctuation de la vitesse normale à la paroi $\langle w'_f w'_f \rangle_f$ et la contrainte de cisaillement $\langle u'_f w'_f \rangle_f$ étaient assez bien prédits au centre du canal en non en proche paroi. L'analyse des hypothèses du modèle et de la fiabilité des simulations de cette étude pionnière de la LES en canal, permettaient principalement de conclure que :

- la modélisation de sous-maille devrait permettre la prise en compte de l'anisotropie,
- ou abandonner la modélisation par le concept de viscosité turbulente au profit des équations de transport pour les contraintes de sous-maille.

D'autre part, un important mécanisme intervenant lors des interactions entre les structures turbulentes de l'écoulement n'est pas traduit par l'étude de Smagorinsky [94]. Il s'agit du transfert d'énergie des petites échelles de la turbulence vers les grandes échelles en un point donné ("*backscatter*" ou "*inverse energy cascade*" dans la littérature, voir par exemple [75], [41]). Selon les travaux de Piomelli *et al.* (1991) [75] en canal, la fraction de points du maillage du domaine concernés par le "*backscattering*" est

¹Dans le cas des écoulements anisotropes (tel qu'en canal) que nous aborderons dans les paragraphes qui suivent, Δx , Δy et Δz sont respectivement les pas du maillage tridimensionnel, dans les directions de l'écoulement ou longitudinale ("*streamwise*"), normale à la paroi ou transversale ("*wall-normal*") et latérale ("*spanwise*").

presque de 50%. Ce mécanisme est presque indépendant de la largeur du filtre utilisé, de la distance à la paroi (dans le cas des écoulements confinés) et croît avec le nombre de Reynolds. Cependant, le type de filtre utilisé influence l'apport des transferts d'énergies des petits tourbillons vers les grands. Piomelli *et al.* font remarquer que les mécanismes de "backscatter" et de "forward scatter" sont maximum dans la région de proche paroi. La conjugaison de ces mécanismes est donc à prendre en compte dans nos simulations en canal.

Modèles de fermeture avec prise en compte de l'inhomogénéité de la turbulence

Modèle de Schumann (1975)

Le modèle proposé par Schumann (1975) [87] est basé sur l'hypothèse que tout écoulement turbulent, à très grand nombre de Reynolds (condition nécessaire), est localement isotrope et possède un sous-domaine inertiel. Toutefois l'hypothèse d'isotropie local n'est plus exact en proche paroi. Alors, Schumann propose de subdiviser la contrainte de sous-maille en deux contributions dont la première pourrait être évaluée en utilisant l'hypothèse d'isotropie local, tandis que la seconde devrait prendre en compte les inhomogénéités, spécialement en proche paroi. Il adopte le concept de viscosité turbulent et écrit :

$$\tau_{ij} = -2\nu_T (S_{ij} - \langle S_{ij} \rangle) - 2\nu_T^* \langle S_{ij} \rangle \quad (3.14)$$

où S_{ij} est donné par (3.11) et $\langle . \rangle$ représente la moyenne par plan effectuée dans le cadre d'un écoulement en canal. La viscosité turbulente de sous-maille est donnée par :

$$\nu_T = l^2 \sqrt{2(S_{ij} - \langle S_{ij} \rangle)(S_{ij} - \langle S_{ij} \rangle)} \quad (3.15)$$

où l est défini par :

$$l = C_S (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3} \quad (3.16)$$

La modélisation de ν_T^* répond à la prise en compte de la production d'énergie cinétique de sous-maille dans la sous-couche visqueuse. Ce coefficient s'écrit :

$$\nu_T^* = l^{*2} \sqrt{2 \langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle} \quad (3.17)$$

l^* représente les structures dans la direction transverse et est défini par :

$$l^* = \min \left[c \sqrt{\Delta x \Delta z}, \kappa y_w \right] \quad (3.18)$$

$\kappa \simeq 0.4$ est la constante de von Kármán, $c = 0.065$ une constante et y_w est la distance à la paroi.

Les résultats obtenus avec cette modélisation se comparent raisonnablement aux données de Laufer (1950) et Comte-Bellot (1965) que ceux de Deardorff (1970). Cependant, comme le fait remarquer Schumann (1975), cette modélisation est restreinte aux cas de grands nombres de Reynolds.

Proposition de Moin & Kim (1982)

Dans l'optique de la prise en compte des faibles nombres de Reynolds en proche paroi, l'idée de Moin & Kim (1982) [64] est de modifier la modélisation (3.15) en la multipliant par une fonction de Van Driest (1956), de sorte à annuler la viscosité à la paroi. Ainsi l devient :

$$l = C_S \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right] (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3} \quad (3.19)$$

où $A^+ = 25$ est une constante et la variable de paroi y^+ défini par :

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu_f} \quad (3.20)$$

En se basant sur le comportement et la forme des structures turbulentes en proche paroi, la prise en compte de l'inhomogénéité de la turbulence est modélisée selon Moin & Kim par le "*residual stress model*" suivant :

$$l^* = c \left(\left[1 - \exp\left(-\frac{y^{+2}}{A^{+2}}\right) \right] \Delta z \right)^2 \quad (3.21)$$

où $c = 0.065$ est une constante et la longueur caractéristique associée à v_T^* est la largeur du filtre Δz dans la direction latérale de l'écoulement.

Horiuti (1987) [35] en affirmant qu'il n'y a aucune raison que le gradient de vitesse moyenne soit pris en compte dans l'évaluation des contraintes locales de sous-maillages, élimine le "*residual stress model*" de la modélisation de Moin & Kim (1982). Ses résultats montrent que la turbulence est soutenue (entretenu) et présentent des statistiques qui se comparent mieux aux données expérimentales que celles de Moin & Kim (1982).

Modèle de Piomelli et al. (1989)

Le modèle proposé par Piomelli *et al.* (1989) [76] néglige aussi le "*residual stress model*". D'autre part à partir de l'étude du comportement en proche de la contrainte de cisaillement τ_{12} , qui est tel que $\tau_{12} \sim y^{+3}$, ils proposent la formulation empirique suivante :

$$v_T = l^2 \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad (3.22)$$

$$l = C_S \left[1 - \exp \left(-\frac{y^{+3}}{A^{+3}} \right) \right]^{1/2} (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3} \quad (3.23)$$

$C_S = \frac{1}{10}$, est une constante empirique.

Une déclinaison de la modélisation (3.22)-(3.23) est proposée par Balaras *et al.* (1996) [3] puis Piomelli & Balaras (2002) [74] en posant dans (3.23) que :

$$C_S (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3} = \kappa y \quad (3.24)$$

κ étant la constante de von Kármán, tandis que y est la distance à la paroi.

Dans le cadre des écoulements inhomogènes anisotropes, il existe dans la littérature une grande variété de modèles de la LES à même de traduire assez proprement les caractéristiques de la turbulence, à savoir les approches mixtes (Bardina *et al.* (1983)[4]), le modèle dynamique de Smagorinsky (Germano *et al.* (1991)[27], Murray *et al.* (1996)[65], Meneveau *et al.* (1996)[63], O’Neil & Meneveau (1997)[69]), et bien d’autres. Pour plus d’informations, nous invitons le lecteur intéressé à consulter ces références.

Bien que le modèle dynamique de Smagorinsky soit implémenté dans le code numérique que nous utilisons, nous ne le développons pas dans le présent manuscrit puisque toutes nos simulations sont effectuées en utilisant le modèle empirique de Piomelli *et al.* (1989)[76]. L’auteur du présent code ayant déjà montré que le modèle de Piomelli *et al.* (1989) conduit à des résultats identiques que ceux du modèle dynamique et en plus non seulement son utilisation permet d’obtenir des statistiques convergées cinq fois plus vite, mais il était aisé à implémenter.

3.2.3 Méthodes numériques de la simulation des grandes échelles

Description des méthodes et schémas numériques

Les simulations numériques des équations de grandes échelles (3.7)-(3.8) fermées, ont été réalisées à partir du code développé par le Prof. Kyle D. Squires (1989). Les équations sont résolues numériquement en utilisant la méthode des pas fractionnaires (voir par exemple Kim & Moin (1985)[51], Perot (1993)[72]). La discrétisation spatiale des équations est basée sur des schémas de différences finies centrées, précis à l’ordre 2, sur un maillage décalé. D’après Kim & Moin (1985)[51], le principal avantage de l’utilisation d’un maillage décalé pour la discrétisation spatiale des écoulements incompressibles est de ne pas avoir besoin de conditions aux limites sur la pression². Les inconvénients de cette méthode

²Traditionnellement, la pression satisfait, à la paroi, des conditions aux limites de type Neumann :

$$\underline{n} \cdot \underline{\nabla} p|_{\partial\Omega} = -\rho_f \underline{n} \cdot [\underline{u} \cdot \underline{\Delta} \underline{u}]|_{\partial\Omega} \quad (3.25)$$

sont par contre dus au fait que certaines composantes de la vitesse ne sont pas définies sur la frontière du domaine et en plus l'extension de la méthode à des ordres supérieurs est difficile. Un schéma d'Adams-Bashforth d'ordre 2 permet d'une part de réaliser l'avancement en temps des termes de convection et de sous-maille. Et d'autre part un schéma de Crank-Nicholson assure l'avancement en temps du terme visqueux. La pression est obtenue au centre de chaque cellule, en résolvant l'équation de Poisson pour la pression dans l'espace de Fourier.

Les méthodes numériques implementées dans ce code ont été validées et plusieurs fois utilisées dans de nombreuses études tant monophasiques que diphasiques (Wang & Squires (1996) [111], [112]; Wang, Squires & Simonin (1998) [113]). Nous n'avons en conséquence effectué aucune modification du code pour la résolution des équations des grandes échelles du fluide. Les résultats que nous présentons dans cette sous section ne sont donc pas dotés d'une mission de validation du code.

Configuration étudiée

Le domaine d'étude est un canal constitué de deux plaques identiques planes, verticales de longueur $L_x = 4\pi\delta$, de largeur $L_z = \frac{4\pi\delta}{3}$ chacune et séparées d'une distance $L_y = 2\delta$; δ étant la demi hauteur du canal (figure 3.1). L'écoulement est descendant et son nombre de Reynolds basé sur la vitesse de friction à la paroi et la demi hauteur du canal vaut $Re_\tau = 180$.

Conditions aux limites aux parois

Un des avantages des simulations LES est la réduction du nombre de points nécessaires pour la résolution des équations de Navier-Stokes par rapport aux simulations DNS, en procédant à une séparation entre les grandes et les petites structures de la turbulence. Cependant, la dynamique de l'écoulement en proche paroi est déterminée par de violentes éruptions du fluide vers la paroi et d'éjection du fluide depuis la paroi vers l'écoulement du fait du passage d'un ou de plusieurs tourbillons. Ces tourbillons qui impactent sur la paroi s'éclatent et s'étalent en stries. En devenant instables, ces stries assurent la régénération des vortex dans la région de paroi. Cette dynamique entraîne le rétrécissement et la naissance de tourbillons, si bien que toutes les structures turbulentes sont très petites dans la zone de paroi. Selon Hamilton *et al.* (1995) [32] le mécanisme complet est composé de trois phases distinctes, à savoir, la formation des stries par les vortex longitudinaux, la destruction des stries et enfin la régénération des vortex longitudinaux. Cette intense activité dans la region de paroi marquée par de fortes variations de la

pour tenir compte de la friction à la paroi; ou dans le cas des études théoriques, à des conditions de périodicité dans les directions sans paroi.

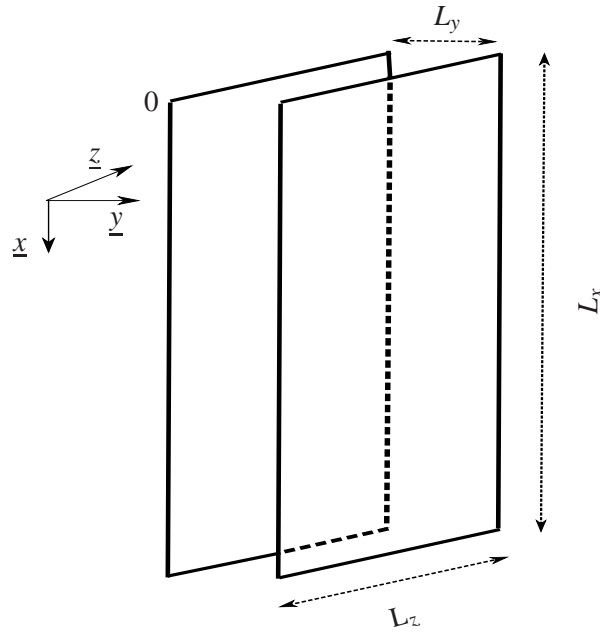


FIG. 3.1 – Domaine de l'écoulement

quantité de mouvement du fluide est diversement analysée par différentes études. Ces différents points de vue sont clairement résumés dans [80]. L'existence de cette dynamique est cependant confirmée par des études expérimentales (Kline *et al.* (1967) [53], Kim *et al.* (1971) [50], Blake (1970) [7], Kreplin & Eckelmann (1979) [55]) qui observent contrairement au cœur de l'écoulement, la naissance de très petites structures turbulentes dans la région de la paroi. La zone de paroi est en conséquence une région de grande production de turbulence auto-entretenu (Jiménez (1999) [41]). Dans ces conditions, pour la prise en compte de cette dynamique, deux situations se présentent :

- soit nous appliquons les conditions d'adhérence à la paroi :

$$\underline{u}_f|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3.26)$$

Et alors nous résolvons proprement la couche limite en raffinant le maillage en très proche paroi pour capturer les petits tourbillons, afin de permettre le "backscatter". Cela se résume en conséquence en la résolution d'un fort gradient de vitesse. Piomelli *et al.* (1989) [76] montrent dans ces circonstances, qu'environ 1/3 des points du maillage occupe environ 7% (représentant la zone de paroi) de la taille du domaine de l'écoulement. Autrement, la résolution de la couche limite exige un très grand nombre de points, ce qui le restreint à des écoulements à nombres de Reynolds relativement faibles ($180 \leq Re_\tau \leq 640$, d'après Piomelli *et al.* (1989) [76]).

Dans la logique du raffinement du maillage en proche paroi, une autre méthode proposée par Balaras *et al.* (1996) [3] et baptisée "*modèle à deux couches*" consiste à subdiviser le domaine d'écoulement tel que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. La frontière entre les deux domaines Ω_1 et Ω_2 est définie par le plan parallèle à la paroi et contenant le premier point de la LES situé dans la zone logarithmique de la couche limite de paroi. Il est ensuite question de résoudre les équations des grandes échelles de l'équation de Navier-Stokes dans le sous-domaine sans paroi Ω_1 . Une seconde équation simplifiée des équations des grandes échelles basée sur les équations 2D de couche limite est résolue dans le domaine Ω_2 connexe à la paroi, avec un maillage uniforme très raffiné. Cette approche a été utilisée aussi bien à bas comme à grand nombre de Reynolds avec d'excellents succès.

- soit nous évitons de résoudre la couche limite en appliquant des lois de paroi (Deardorff (1970) [18], Schumann (1975) [87], Piomelli *et al.* (1989) [76]) pour décrire le comportement du fluide en paroi. Dans la pratique, le premier point du maillage est placé dans la zone logarithmique et les contraintes à la paroi sont calculées en fonction de la vitesse loin de la paroi. Cette méthode est principalement utilisée pour les écoulements industriels à très grand nombre de Reynolds. Nous reviendrons sur ces conditions aux limites dans le chapitre 4, où nous traitons un cas expérimental d'écoulement turbulent gas-particules.

Conditions aux limites artificielles

Dans les directions longitudinale et transverse de l'écoulement, nous employons des conditions de périodicité. L'utilisation de telles conditions, dans ces directions où l'écoulement est homogène, est justifiée par l'objectif de contenir les grandes structures turbulentes dans le domaine d'étude choisi.

Maillage du canal

L'objectif de cette thèse étant d'améliorer la compréhension du mécanisme de rebond particules/paroi rugueuse, il est primordiale de bien capturer toute la physique de l'écoulement fluide en proche paroi. Cela pour s'assurer que les simulations numériques diphasiques à venir ne soient pas biaisées par une mauvaise prise en compte de l'interaction fluide/particule, surtout dans la région de proche paroi qui nous intéresse particulièrement. Nous avons en conséquence opté pour la résolution de la couche limite, soit à raffiner le maillage en proche paroi.

Nous effectuons un maillage irrégulier dans la direction normale à la paroi à partir de la fonction :

$$\begin{cases} y(j) = 1 - \frac{\tanh\left(\gamma\left[1 - (j-1)\frac{L_y}{ny-1}\right]\right)}{\tanh(\gamma)}, & 2 \leq j \leq ny-1 \\ y(1) = 0 \\ y(ny) = L_y \end{cases} \quad (3.27)$$

ny étant le nombre de nœuds dans la direction normale à la paroi et γ une constante fixée à la valeur 2. Le pas du maillage dans la direction normale est donnée par :

$$\Delta y_j = y(j+1) - y(j), \quad 1 \leq j \leq ny-1 \quad (3.28)$$

La formulation analytique (3.27) nous permet de placer le premier point du maillage selon la normale à la paroi à $y^+ = 0.44$, de sorte à être dans la région interne de la couche limite turbulente de la paroi et à obtenir un espacement maximum $\Delta y_{\max}^+ = 11.61$. Dans la simulation numérique directe de Kim *et al.*(1987) [52], le premier point était placé à $y^+ \approx 0.05$ et $\Delta y_{\max}^+ = 4.4$ pour le même nombre de Reynolds $Re_\tau = 180$.

Le maillage est régulier dans les directions verticale et transverse de l'écoulement. Les pas du maillage dans ces directions directions sont donnés respectivement par :

$$\Delta x = \frac{L_x}{nx} \quad ; \quad \Delta z = \frac{L_z}{nz} \quad (3.29)$$

où nx et nz sont respectivement les nombres de nœuds dans les directions verticale et transverse. La dimension du maillage utilisé au cours de nos simulations est de $64 \times 65 \times 64$ et si bien que nous avons $\Delta x^+ = 35.34$ et $\Delta z^+ = 11.78$.

Résultats des simulations

Les statistiques³ présentées dans cette partie ont été obtenues sur la base de stationnarité des corrélations triples $\left\langle u'_{f,i} u'_{f,j} u'_{f,k} \right\rangle_f$ du fluide au cours de la simulation. Le pas de temps utilisé pour toutes ces simulations est constant et vaut $\Delta t = 2 \times 10^{-3}$. Les statistiques sont présentées pour le demi canal, en raison de la symétrie qui caractérise les statistiques des écoulements en canal.

³Lorsque nous écrivons pour une propriété ϕ du fluide la moyenne $\langle \phi \rangle_f$, cela n'est rien d'autre que la moyenne par plan parallèle aux parois de la propriété filtrée $\bar{\phi}$, c'est à dire $\langle \bar{\phi} \rangle_f$. Et la fluctuation ϕ' est celle de la propriété filtrée définie par $\phi' = \bar{\phi} - \langle \bar{\phi} \rangle_f$, qui est bien différente de la définition (3.2).

Vitesse moyenne dans le sens de l'écoulement

La figure 3.2 présente le profil moyen de la vitesse dans la direction longitudinale de l'écoulement comparée aux résultats théoriques de la couche limite turbulente caractérisée par les régions interne, logarithmique et externe. Selon Robinson (1991) [80], toute cette région est habituellement définie par $y^+ \leq 100$.

Marquée par d'importantes forces de cisaillement et des tensions de Reynolds négligeables, la région dite interne de la couche limite est théoriquement décrite par une évolution linéaire de la vitesse moyenne :

$$U_f^+ = \frac{\langle u_f \rangle_f}{u_\tau} = y^+ \quad (3.30)$$

pour $y^+ < 3$. La figure 3.2 montre une parfaite prédiction de la vitesse moyenne dans région $y^+ < 3$, en comparaison avec la loi linéaire (3.30).

Cependant au delà de la région interne, où le profil de vitesse moyenne est comparé à la solution analytique (Clauser (1956) [14]) :

$$U_f^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + 5.5 \quad (3.31)$$

de la zone logarithmique, nous pouvons observer une légère surestimation par la LES de la vitesse moyenne par rapport à la formulation théorique. Ce résultat est la conséquence d'un maillage grossier au centre du canal par rapport à la zone de proche paroi (par exemple $\Delta y^+(1) = 0.44$ et $\Delta y^+(32) = 11.61$, soit une distorsion de 26.34). Cependant, il a fallu faire un tel compromis puisque nous souhaitons principalement mieux prédire la vitesse instantanée et les structures turbulentes en proche paroi. Aussi, ce résultat est exactement identique au profil de vitesse moyen présenté par Piomelli *et al.* (1988)[77] dans le cadre de l'utilisation d'un modèle mixte et d'un filtre gaussien, avec un maillage fin. Il faut noter au passage que Piomelli *et al.* (1988)[77] montraient, au sujet de la consistance entre les choix du modèle de sous-maille et du filtre, que la combinaison "modèle mixte + filtre gaussien" conduit à de bonnes prédictions en comparaison avec des simulations DNS. Autrement, la prédiction du profil de vitesse par notre LES est bonne.

Statistiques de la turbulence du fluide

Les profils de l'intensité de la turbulence dans chaque direction de l'écoulement et la contrainte de cisaillement $\langle u'_f v'_f \rangle_f$ sont présentés sur la figure 3.3. La contrainte de cisaillement $\langle u'_f v'_f \rangle_f$ décroît très rapidement de 0 à la paroi, jusqu'à un extremum dans la région logarithmique (à environ $y^+ \sim 50$) (figure 3.3-d). Ensuite le profil croît linéairement jusqu'au centre du canal. Ce résultat est assez spécifique aux

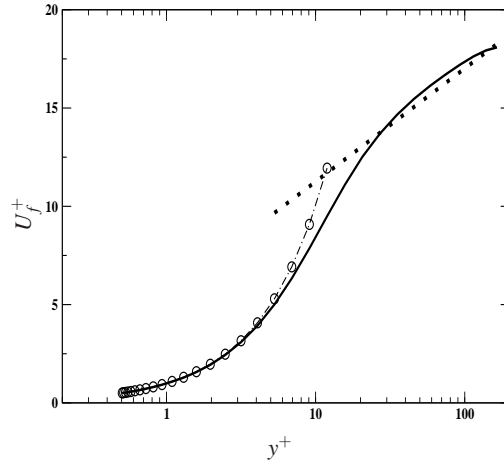


FIG. 3.2 – Vitesse moyenne du fluide dans le sens de l'écoulement. ' - o - ' : $U_f^+ = y^+$; ' . . . ' : $U_f^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + 5.5$ et la ligne continue représente la simulation numérique.

écoulements en canal. Moin & Kim (1982) [64] montrent que la contribution du tenseur de sous-maille est négligeable sur la portion rectiligne du profil de la contrainte de cisaillement, mais elle est significative dans région de la paroi.

En très proche paroi, les fluctuations de la vitesse dans les trois directions ont un comportement assez similaire (figure 3.3 :a-c). Elles partent de zéro à la paroi et augmentent brusquement jusqu'à un maximum avec grande une pente. La pente est cependant plus prononcée pour les fluctuations dans les deux directions d'homogénéité de l'écoulement. En s'éloignant de la paroi, ces fluctuations décroissent. Cette décroissance étant plus brusque pour la fluctuation de la vitesse longitudinale. Dans les mêmes conditions d'écoulement, Kim *et al.* (1987) [52] obtiennent à partir d'une DNS les mêmes profils. Le comportement global des fluctuations de vitesse de la paroi au cœur du canal peut être attribué à l'action de la viscosité du fluide qui est plus importante dans la zone de paroi et à l'origine du gradient de vitesse dans cette région de l'écoulement.

Analyse des structures turbulentes de l'écoulement

La figure 3.4 montre les corrélations à deux points dans les directions longitudinale et latérale calculées au cours de la simulation à partir de la formulation (sans sommation) :

$$R_{ii}(\mathbf{r}) = \frac{\langle u_{f,i}(\mathbf{x}) u_{f,i}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle_f}{\langle u_{f,i}^2(\mathbf{x}) \rangle_f} \quad (3.32)$$

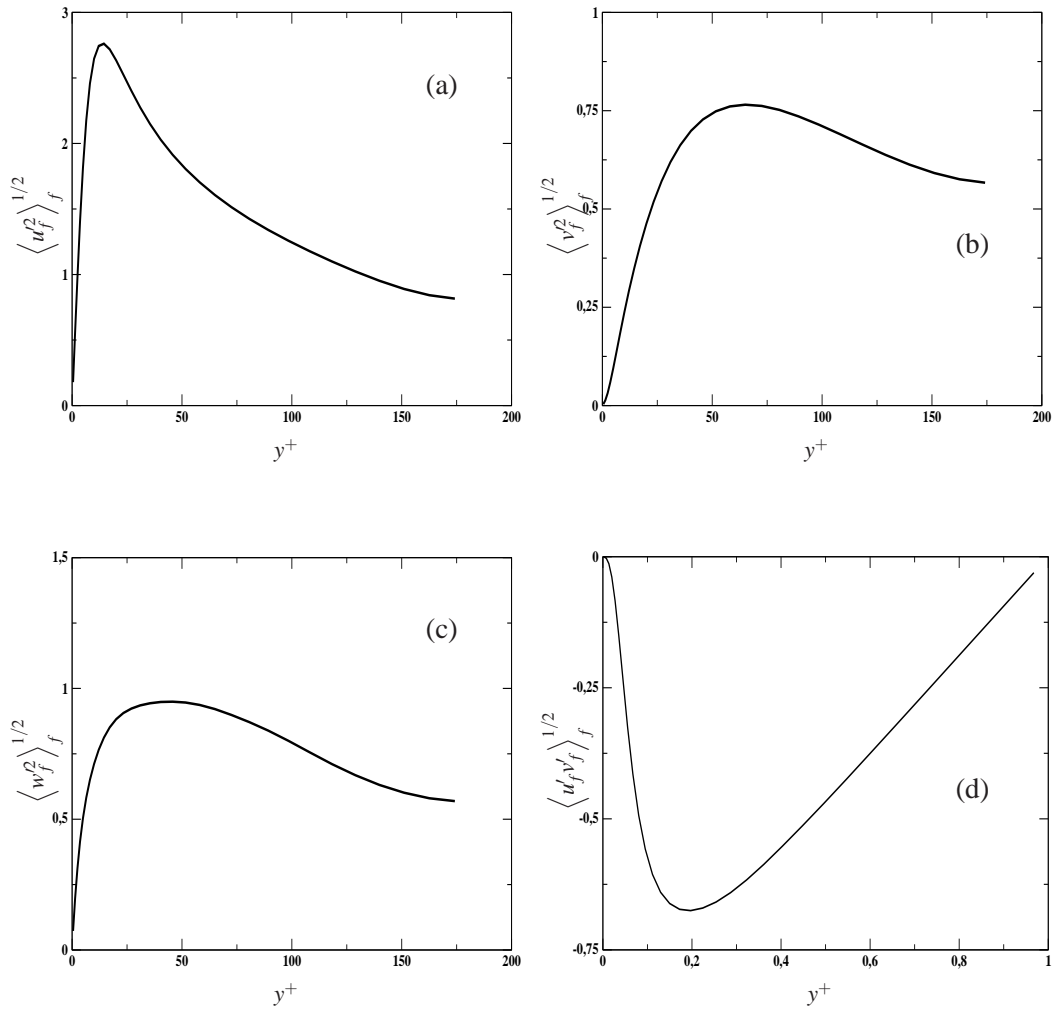


FIG. 3.3 – Vitesses fluctuantes et contrainte de l'écoulement fluide. (a) : la fluctuation longitudinale $\langle u_f'^2 \rangle_f^{1/2}$, (b) : la vitesse fluctuante normale aux parois $\langle v_f'^2 \rangle_f^{1/2}$ et (c) : la vitesse fluctuante transverse $\langle w_f'^2 \rangle_f^{1/2}$. (d) : la contrainte de cisaillement $\langle u_f'v_f' \rangle_f$.

en deux points dans la direction normale à la paroi $y^+ = 14.47$ (en très proche paroi dans la région logarithmique) et $y^+ = 180$ (au centre du canal). Les profils montrent en général que pour de faibles séparations, les fluctuations de la vitesse restent plus corrélées à elles-mêmes dans la direction longitudinale que dans la direction latérale. On observe une baisse puis une annulation des corrélations avec l'augmentation de la séparation. Cette annulation se produit avant la moitié des dimensions du domaine ($L_x/2$ et $L_z/2$) dans les directions d'homogénéité de l'écoulement. Cela indique que les dimensions du domaine sont suffisantes pour permettre la simulation des cycles de régénération des structures turbulentes de l'écoulement.

D'autre part à $y^+ = 14.47$ (figure 3.4-(b)), la corrélation R_{uu} dans la direction latérale devient négative et atteint son minimum à $z_{\min(R_{uu})}^+ \approx 137$, tandis que R_{vv} atteint son minimum à $z_{\min(R_{vv})}^+ \approx 68.5$. Selon Kim *et al.* (1987) [52], la présence du minimum de R_{vv} à la distance $z_{\min(R_{uu})}^+/2$ est consistante avec l'existence de structure tourbillonnaire longitudinale dans la région de paroi. De plus cette distance $z_{\min(R_{uu})}^+/2$ à laquelle R_{vv} atteint son minimum correspond au diamètre moyen ($D_T^+ = 68.5$) de ce vortex. En outre, comme D_T^+ est inférieur à $L_z^+ = L_z Re_\tau / \delta \approx 754$, alors en accord avec Jiménez & Moin (1991) [43], la turbulence reste entretenue dans la région de paroi.

3.3 Simulation de l'écoulement diphasique gas-particules

3.3.1 Equations du mouvement de translation des particules

En raison du fort ratio (voir le tableau 3.3.1) de la masse volumique des particules étudiées par celle du fluide ($\rho_p/\rho_f \gg 1$), et en l'absence de pesanteur, les efforts extérieurs appliqués sur une inclusion dans l'écoulement se résument en la seule force de traînée. Dans ce cas l'équation du mouvement d'une particule s'écrit :

$$\frac{d\underline{x}_p}{dt} = \underline{v}_p \quad (3.33)$$

$$\frac{d\underline{v}_p}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{\rho_f C_D}{\rho_p d_p} (\underline{v}_p - \underline{u}_{f@p}) |\underline{v}_p - \underline{u}_{f@p}| \quad (3.34)$$

où \underline{x}_p et \underline{v}_p sont respectivement les vecteurs position et vitesse de la particule, $\underline{u}_{f@p}$ est la vitesse du fluide à la position de la particule et C_D le coefficient de traînée (voir chapitre 1).

Le suivi Lagrangien est effectué pour $N_p = 10^5$ particules sphériques et identiques de diamètre $d_p^+ = d_p Re_\tau / \delta = 1$ (c'est à dire $d_p / \delta = 5.56 \times 10^{-3}$) dans le canal vertical en résolvant les équations différentielles (3.33) & (3.34) à l'aide de schemas de type Adams-Bashforth d'ordre 2, sachant que les N_p particules sont introduites de manière aléatoire dans tout le canal et que leurs vitesses initiales ne sont

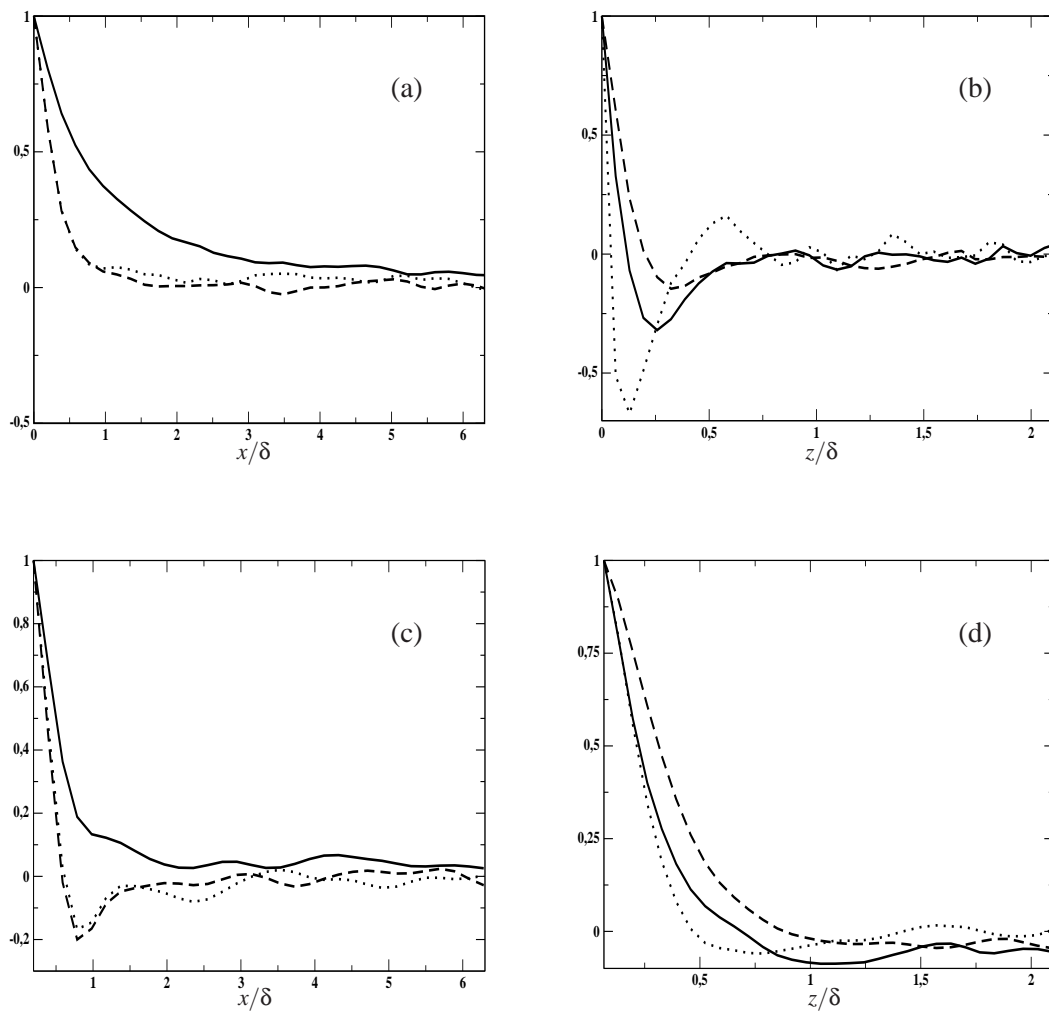


FIG. 3.4 – Correlations à deux points : (a) & (b) à $y^+ = 14.47$ et (c) & (d) à $y^+ = 180$. Trait continu : R_{uu} , pointillés : R_{vv} et tiret : R_{ww} . Direction longitudinale : (a) & (c) et direction latérale : (b) & (d).

ρ_p/ρ_f	2106	4212
$St = \tau_{ps}/(\delta/u_\tau)$	0.65	1.3

TAB. 3.1 – Paramètres des particules étudiées.

rien d'autre que la vitesse du fluide à leurs différentes positions :

$$v_{p,i}(t=0) = u_{f@p,i}(t=0) \quad (3.35)$$

3.3.2 Interpolation de la vitesse du fluide à la position des particules

Les trajectoires des particules étant Lagrangiennes, il y a quasiment aucune chance que les particules soient exactement aux nœuds du maillage de résolution numérique du fluide. En outre, nous négligeons le couplage inverse puisque le taux de présence des particules $\alpha_p = 8.53 \times 10^{-5}$. Dans ces circonstances, l'obtention de la vitesse $u_{f@p,i}$ est assurée via l'interpolation de la vitesse du fluide à la position de chaque particule.

La $i^{\text{ème}}$ composante de la vitesse du fluide à la position d'une particule donnée $u_{f@p,i}$ est dans le cadre de l'approche LES/DPS, la somme des $i^{\text{ème}}$ composantes de la vitesse filtrée du fluide $\bar{u}_{f,i}$ et du champ de sous maille $u'_{f,i}$ à la position de ladite particule :

$$u_{f@p,i} = u_{f,i}(\underline{x}_p(t), t) = \bar{u}_{f,i}(\underline{x}_p(t), t) + u'_{f,i}(\underline{x}_p(t), t) \quad (3.36)$$

Cependant selon Fede & Simonin (2006) [22], la contribution du champ de sous maille est négligeable dans le cas de particules lourdes ($\rho_p/\rho_f \gg 1$) dont le temps de relaxation τ_{ps} est grand devant le temps caractéristique de la turbulence de sous maille. Ainsi, la $i^{\text{ème}}$ composante de la vitesse du fluide vue par la particule $u_{f@p,i}$ n'est que la projection de la vitesse du fluide calculée à partir de la LES à la position de la particule.

Dans le cadre du présent code de calcul, l'examen successif des schémas d'interpolation linéaire et Lagrange d'ordre 4 et 6, ont permis à Wang & Squires (1996) [111] d'obtenir des erreurs de l'ordre de 8% sur les vitesses rms du champ fluide interpolé dans la direction normale à la paroi avec l'interpolation linéaire, tandis l'erreur avec les interpolations de Lagrange d'ordre 4 et 6 était inférieure à 1%. Le schéma d'interpolation utilisé au final dans le code est celui de Lagrange d'ordre 4 basé sur 64 points du maillage Eulerien du fluide, au lieu de 216 points nécessaires pour le schéma de Lagrange d'ordre 6.

3.3.3 Traitement des collisions particules/particules

Modèle de collisions interparticulaires

Le modèle de collisions interparticulaires implémenté dans le code est déterministe et ne prend en compte que les collisions binaires. Lorsque deux particules A et B de masse m_p et de rayon $r_p = d_p/2$ chacune (cas de l'écoulement monodisperse) entrent en collision, en considérant qu'elles restent indéformables et parfaitement sphériques (hypothèse de sphères dures), la cinématique de leur centre d'inertie dans le cas de mouvement de translation est définie par :

$$\begin{cases} \underline{v}_{pA}^* = \underline{v}_{pA} + \frac{1}{m_p} \underline{J} \\ \underline{v}_{pB}^* = \underline{v}_{pB} - \frac{1}{m_p} \underline{J} \end{cases} \quad (3.37)$$

où le symbole $*$ représente la vitesse de la particule après la collision et le vecteur \underline{J} est l'impulsion donnée par la particule B à A . Elle est modélisée selon l'approche de Walton (1988) dans le cas de collision inélastique sans friction et glissant par :

$$\underline{J} = \frac{m_p}{2} (1 + e_c) (\underline{w}_r \cdot \underline{k}) \underline{k} \quad (3.38)$$

où $\underline{w}_r = \underline{v}_{pB} - \underline{v}_{pA}$ est la vitesse relative de B par rapport à A et \underline{k} est le vecteur unitaire liant les centres des particules de A vers B . $e_c \in [0, 1]$ est le coefficient d'inélasticité.

L'absence de la friction lors des collisions est parfaitement justifiée par le fait que nous ne prenons pas en compte la rotation des particules.

Détection et traitement des collisions

La procédure de détection des collisions utilisée est subdivisée en deux parties. La première est dédiée à la détermination des particules voisines. Ces particules étant celles susceptibles d'être entrées en collision au cours du pas de temps Δt de la simulation. La seconde étape permet de déterminer parmi ces particules voisines, celles qui se sont réellement heurtées. Pour ce faire, la méthode initialement implémentée consistait à remonter le long des trajectoires supposées rectilignes de la paires de particules, pour évaluer les caractéristiques cinématiques de chacune d'elles à l'instant précédent. Puis à partir de ces caractéristiques, il y a collision de la paire de particules (A, B) s'il existe une variation de temps $\delta t \in [0, \Delta t]$ telle que la distance relative entre les centres des deux particules vaut exactement $r_{pA} + r_{pB}$ ($= 2r_p$ dans le cas monodisperse ; $r_p = d_p/2$ étant le rayon de la particule).

Après cette étape de détection, le traitement des collisions consiste à appliquer le modèle (3.37) - (3.38) pour évaluer les vitesses des particules au moment de la collision puis à les déplacer pour le reste du pas de temps $\Delta t - \delta t$ restant, en supposant toujours les trajectoires comme rectilignes.

Laviéville (1997) [59] montre que cette procédure permet d'obtenir une distribution de l'angle solide de collision assez proche de la distribution théorique sinusoïdale pour des pas de temps relativement faibles. Autrement, pour des pas de temps relativement faibles, cette méthode permet de ne louper aucune collision. Il fait remarquer qu'aucun changement n'était observé en considérant que les particules ont des trajectoires curvilignes. Cependant, les travaux de Laviéville ont été effectuées dans le cadre d'un écoulement fluide turbulent homogène isotrope. Alors ces conclusions liées au type de trajectoire des particules ne doivent être prises que dans ce cadre. Dans le cas d'un écoulement inhomogène anisotrope tel qu'un canal, les particules sont certainement confrontées à de très forts gradients de vitesses, surtout dans la zone de proche paroi. L'accélération de ces dernières ne peut en aucun cas être considérée nulle, puisque la force de traînée est très variable. En conséquence, la seconde étape de la procédure de détection des collisions jusqu'au déplacement des particules après la collision constituent des sources potentielles d'erreurs dans le traitement des collisions dans le canal turbulent.

L'algorithme que nous avons utilisé pour la prise en compte des trajectoires curvilignes est résumé par les lignes suivantes. Soient $\underline{x}_{p_A}^C$ et $\underline{x}_{p_B}^C$ les positions au moment de la collision des particules A et B . Afin de conserver la consistance des schémas numériques, nous remontons fictivement les trajectoires curvilignes à l'aide du schéma d'Adams-Bashforth d'ordre 2 utilisé pour le calcul des positions des particules. Si le point de collision C intervient au bout de l'instant $\delta t \in [0, \Delta t]$, alors nous avons :

$$\underline{x}_{p_A}^C = \underline{x}_{p_A}^{(n-1)} + \delta t \left[\frac{3}{2} \underline{v}_{p_A}^{(n-1)} - \frac{1}{2} \underline{v}_{p_A}^{(n-2)} \right] \quad (3.39)$$

$$\underline{x}_{p_B}^C = \underline{x}_{p_B}^{(n-1)} + \delta t \left[\frac{3}{2} \underline{v}_{p_B}^{(n-1)} - \frac{1}{2} \underline{v}_{p_B}^{(n-2)} \right] \quad (3.40)$$

où les exposants $(n-1)$ et $(n-2)$ représentent les pas de temps précédent et sur-précédent.

Au moment de la collision, puisque nous considérons que les particules sont indéformables, la distance relative entre les centres de la paire de particules est $2r_p$. Les équations (3.39)-(3.40) conduisent alors à :

$$\left\| \underline{x}_{p_A}^C - \underline{x}_{p_B}^C \right\| = \left\| \underline{r}^{(n-1)} + \delta t \underline{v}^{(n-1, n-2)} \right\| = 2r_p \quad (3.41)$$

où nous avons posé :

$$\underline{r}^{(n-1)} = \underline{x}_{p_A}^{(n-1)} - \underline{x}_{p_B}^{(n-1)} \quad (3.42)$$

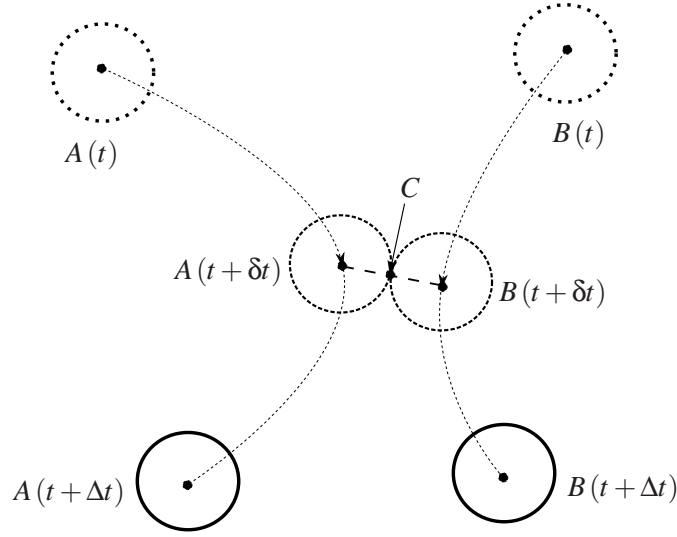


FIG. 3.5 – Illustration du traitement des collisions particule/particule dans le canal.

$$\underline{v}^{(n-1,n-2)} = \frac{3}{2} [\underline{v}_{pA}^{(n-1)} - \underline{v}_{pB}^{(n-1)}] - \frac{1}{2} [\underline{v}_{pA}^{(n-2)} - \underline{v}_{pB}^{(n-2)}] \quad (3.43)$$

En d'autres termes, nous résolvons le trinôme suivant :

$$\left\| \underline{v}^{(n-1,n-2)} \right\|^2 \delta t^2 + 2 \underline{r}^{(n-1)} \cdot \underline{v}^{(n-1,n-2)} \delta t + \left\| \underline{r}^{(n-1)} \right\|^2 - 4r_p^2 = 0 \quad (3.44)$$

pour la détermination de $\delta t \in [0, \Delta t]$ pour chaque paire de particules susceptibles de se heurter. Bien évidemment, la présumée collision n'a pas lieu lorsque δt solution de l'équation (3.44) est négative ou supérieure à Δt ou complexe. Par contre, dans le cas de l'existence de deux solutions comprises entre 0 et Δt , le temps mis avant la collision est le minimum des deux valeurs.

Dans le cas de l'existence de $\delta t \in [0, \Delta t]$, après avoir évalué les vitesses juste après collisions \underline{v}_{pA}^* et \underline{v}_{pB}^* via le système (3.37)-(3.38), nous évaluons les nouvelles vitesses de la paire de particules à partir du modèle (3.34), puis les nouvelles positions associées en utilisant le schéma d'ordre 2 d'Adams-Bashforth pour le reste du pas de temps $\Delta t - \delta t$.

3.3.4 Traitement des rebonds particules/paroi

Au cours de la simulation, une collision particule/paroi est détectée lorsque la coordonnée y_p du vecteur position du centre de la particule est telle que :

- * $y_p \leq r_p$: pour la paroi inférieure
- * $y_p \geq L_y - r_p$: pour la paroi supérieure.

Dans ces circonstances, le traitement du rebond particule/paroi rugueuse est effectué suivant le modèle stochastique de Sommerfeld & Huber (1999) résumé comme suit :

(a) tirage aléatoire d'un angle de paroi virtuel γ à partir d'une distribution normale d'écart type $\Delta\gamma$ fixé, et sur lequel vient rebondir la particule incidente

(b) s'aidant de cet angle, la vitesse de rebond est calculée à partir des lois rebonds. Dans le cas de nos simulations où nous avons considéré des rebonds purement élastiques, elles se résument à :

$$\underline{v}_p^+ = \underline{v}_p^- - 2(\underline{v}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) \underline{n}_\gamma \quad (3.45)$$

où \underline{n}_γ est la normale à la paroi virtuelle inclinée de γ et $\underline{v}_p = (u_p, v_p, w_p)$.

(c) Si après la collision la particule traverse la paroi, c'est à dire $v_p^+ \times v_p^- > 0$, le processus est repris depuis le point (a). Dans le cas contraire la vitesse de rebond \underline{v}_p^+ est conservée et le traitement final du rebond est effectuée en déplaçant les particules après la collision.

Cependant, la procédure de déplacement n'était pas bien pris en compte par le code initial. D'abord, la vitesse incidente (\underline{v}_p^-) des particules était supposée identique à la vitesse à l'instant t considéré, tandis que la vitesse de la particule après le rebond était systématiquement égale à la vitesse de rebond (\underline{v}_p^+) calculée à partir de l'équation (3.45). De plus, les positions après le rebond étaient celles avant le rebond dans les directions x et z de l'écoulement, tandis que dans la direction normale à la paroi, elle était imposée telle que :

- * $y_p = \frac{d_p}{2} + \varepsilon$: à la paroi inférieure
- * $y_p = L_y - \frac{d_p}{2} - \varepsilon$: à la paroi supérieure ;

où de façon pratique $\varepsilon = 10^{-4}$. Autrement, les particules n'était quasiment pas déplacées après le rebond.

Afin de traiter plus proprement les rebonds, nous avons considéré que la particule incidente a une accélération constante non nulle, puis nous avons calculé la trajectoire de la particule à partir du schéma d'Adams-Bahsforth utilisé dans la détermination des positions et vitesses des particules dans tout le domaine. De sorte qu'au point C de la collision (voir figure 3.6), nous avons la coordonnée normale à la paroi y_C tel que :

$$y_p^C = y_p^{(n-1)} + \delta t \left[\frac{3}{2} v_p^{(n-1)} - \frac{1}{2} v_p^{(n-2)} \right] \quad (3.46)$$

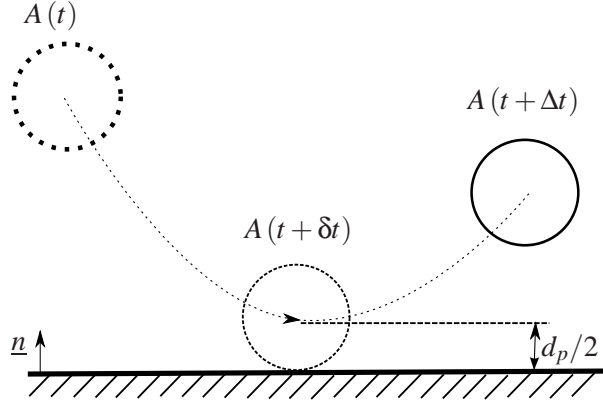


FIG. 3.6 – Illustration du traitement des rebonds particule/paroi.

où y_p^C vaut r_p pour la paroi inférieure et $L_y - r_p$ pour la paroi supérieure. δt est alors estimé à partir de l'équation (3.46). Connaissant δt , la particule est reconduite à la paroi au point de collision C avec :

$$\begin{cases} x_p^C = x_p^{(n-1)} + \delta t \left[\frac{3}{2} u_p^{(n-1)} - \frac{1}{2} u_p^{(n-2)} \right] \\ y_p^C = r_p, \text{ paroi inférieure (resp. } y_p^C = L_y - r_p, \text{ paroi supérieure)} \\ z_p^C = z_p^{(n-1)} + \delta t \left[\frac{3}{2} w_p^{(n-1)} - \frac{1}{2} w_p^{(n-2)} \right] \end{cases} \quad (3.47)$$

Quant à la vitesse d'impact \underline{v}_p^- au point C , elle est calculée à partir du même schéma d'Adams-Bahsforth :

$$\underline{v}_p^- = \underline{v}_p^{(n-1)} + \delta t \left[\frac{3}{2} \frac{f_D^{(n-1)}}{\tau_{ps}} \underline{V}_r^{(n-1)} - \frac{1}{2} \frac{f_D^{(n-2)}}{\tau_{ps}} \underline{V}_r^{(n-2)} \right] \quad (3.48)$$

où f_D , \underline{V}_r sont définis par :

$$f_D = 1 + 0.15 Re_p^{0.687}; \quad Re_p = \frac{d_p \|\underline{V}_r\|}{\nu_f}; \quad \underline{V}_r = \underline{v}_p - \underline{u}_{f@p} \quad (3.49)$$

La vitesse de rebond est automatiquement calculée à partir de l'équation (3.45), tandis que pour le calcul de la vitesse à la nouvelle position, soit à la fin du pas de temps Δt , nous dégradons l'ordre du schéma de résolution en utilisant un schéma d'Adams-Bashforth du premier ordre. Nous obtenons alors :

$$\underline{v}_p^{(n)} = \underline{v}_p^+ + (\Delta t - \delta t) \frac{f_D^+}{\tau_{ps}} \underline{V}_r^+ \quad (3.50)$$

où nous avons posé :

$$f_D^+ = 1 + 0.15 Re_p^{0.687}; \quad Re_p = \frac{d_p \|\underline{V}_r^+\|}{\nu_f}; \quad \underline{V}_r^+ = \underline{v}_p^+ - \underline{u}_{f@p} \quad (3.51)$$

sachant que v_p^+ est donnée par l'équation (3.45).

L'unique hypothèse effectuée au cours de ce processus de rebond fut de considérer que la vitesse du fluide à la position de la particule était constante pendant l'intervalle de temps Δt . Nous avons considéré cela pour éviter d'interpoler à nouveau le champ fluide à la position des particules, sachant que ce calcul occupe environ 30% du temps de calcul total.

Au final, la nouvelle position de la particule est calculée en utilisant un schéma d'Adams-Moulton d'ordre deux :

$$\underline{x}_p^{(n)} = \underline{x}_p^C + \frac{\Delta t - \delta t}{2} [v_p^{(n)} + v_p^+] \quad (3.52)$$

où \underline{x}_p^C et v_p^+ sont respectivement définies par les équations (3.47) et (3.45).

3.3.5 Calcul des moyennes euleriennes de la phase dispersée dans l'écoulement

Le processus de moyennes de la phase dispersée dans l'écoulement est effectué par tranches volumiques délimitées par des plans parallèles à ceux des parois. Le principe du calcul est basé sur la théorie ergodique. Autrement, nous supposons que toutes les propriétés de la phase dispersée sont stationnaires et ne restent pas corrélées à elles-mêmes sur un temps infini (de l'ordre du temps total de la simulation).

Afin de capturer les effets de parois, l'épaisseur des tranches est raffinée à l'approche des parois. A la fin de chaque pas de temps, les propriétés statistiques de l'écoulement particulière sont évaluées avec la contribution de toutes les particules dont le centre se trouve dans une tranche donnée. Le maillage irrégulier permettant de définir les tranches de moyennes est réalisé à l'aide de la fonction suivante :

$$\begin{cases} yvp(1) = \frac{1}{2}d_p \\ yvp(ny) = L_y - \frac{1}{2}d_p \\ yvp(j) = \alpha - \frac{\tanh\left\{\gamma_p \left[1 - (j-1)\frac{L_y}{ny-1}\right]\right\}}{\tanh(\gamma_p)}\beta, \quad \forall j \in \{2, \dots, ny-1\} \end{cases} \quad (3.53)$$

ny étant le nombre de nœuds dans la direction normale à la paroi. Les constantes α , β et γ_p sont calculées à partir d'un système fermé de trois équations conditionnées par le degré de raffinement souhaité. Il faut cependant faire remarquer que plus les tranches sont étroites et plus la convergence des statistiques est longue, si bien qu'en raison du maillage raffiné en proche paroi, il faut en moyenne un mois de calcul (sur PC Linux Pentium 4, 3Ghz, 1 giga de RAM) pour l'obtention de moyennes convergées. La convergence des statistiques est obtenue en vérifiant les équations bilans de différents moments.

Pour une tranche T_j donnée, une propriété statistique $\langle \psi \rangle_p$ de la phase dispersée et la densité volumique de particule n_p sont simplement obtenues, pour $j \in \{1, ny - 1\}$, par :

$$\langle \psi \rangle_p (T_j) = \frac{1}{\mathcal{E}(T_j)} \sum_{h=1}^{\mathcal{E}(T_j)} \psi_h(T_j) \quad ; \quad n_p(T_j) = \frac{\mathcal{E}(T_j)}{N_{moy} L_x L_z \mathcal{E}(T_j)} \quad (3.54)$$

où $\mathcal{E}(T_j)$ est le nombre total de particules dont les propriétés ont été sommées pendant toute la simulation, dans la tranche T_j . N_{moy} est le nombre de moyennes effectuées, tandis que $\mathcal{E}(T_j) = yvp(j+1) - yvp(j)$ définit l'épaisseur de la tranche T_j .

3.3.6 Analyse de l'influence de la rugosité des parois sur la phase dispersée

Etude des premiers moments

Afin d'améliorer la compréhension des effets induits par la rugosité de paroi, nous avons réalisé des simulations numériques pour des écarts types de rugosité de $\Delta\gamma = 0^\circ$ (paroi lisse), $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et $\Delta\gamma = 5.0^\circ$, premièrement dans le cadre d'écoulements sans collisions inter-particulaires et deuxièmement avec les effets conjugués de la rugosité et des collisions entre particules. La sensibilité à la rugosité par rapport à l'inertie des particules à la rugosité est étudiée à travers les deux nombres de Stokes de 0.65 et 1.3 donnés dans le tableau (3.3.1).

- Densité numérique de particules

Les figures 3.7-(a) et 3.9-(a) présentent les profils de la densité numérique de particules dans le canal pour les deux nombres de Stokes 0.65 et 1.3 respectifs, en l'absence de collisions entre particules. Les tendances observées montrent une plus forte accumulation de particules en très proche paroi que dans le reste de l'écoulement, lorsque les parois lisses. Cependant, cette accumulation en très proche paroi décroît progressivement avec l'augmentation de la rugosité des parois. En effet, le passage de $\Delta\gamma = 0^\circ$ à $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ mène à une réduction assez brutale de la densité volumique de particules d'environ 96,92% à $y^+ \simeq 0.5$ (à la paroi) et 80.08% à $y^+ \simeq 1.1$ pour $St = 0.65$; et de 98.19% et 90.61% respectivement à $y^+ \simeq 0.5$ et $y^+ \simeq 1.1$ pour $St = 1.3$. D'autre part l'augmentation du degré de rugosité de $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ à $\Delta\gamma = 5.0^\circ$ a mené à la réduction relativement faible de 37.17% et 40.43% respectivement à $y^+ \simeq 0.5$ et $y^+ \simeq 1.1$ pour $St = 0.65$; et de 28.82% et 29.46% respectivement à $y^+ \simeq 0.5$ et $y^+ \simeq 1.1$ dans le cas avec $St = 1.3$, pour la même variation du degré de rugosité de 2.5° . Autrement, la réduction de la densité de particules en région proche paroi ne décroît pas linéairement en fonction de l'écart type de rugosité $\Delta\gamma$.

On observe en outre, en s'éloignant des parois (au delà de $y^+ > 5$ par exemple), une augmentation de la densité volumique de particule avec l'augmentation de la rugosité. Par exemple, l'augmentation de la rugosité de $\Delta\gamma = 0^\circ$ à $\Delta\gamma = 2.5^\circ$, puis de $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ à $\Delta\gamma = 5.0^\circ$ ont respectivement induit les augmentations relatives de 299.18% puis de 3.83% à $y^+ \simeq 35.28$, et de 403.61% puis de 13.33% à $y^+ \simeq 93.24$ pour les particules de $St = 0.65$. Pour les particules de $St = 1.3$, nous obtenons les augmentations relatives de 163.98% puis de 3.23% à $y^+ \simeq 35.28$, et de 314.97% puis de 4.70% à $y^+ \simeq 93.24$ pour les passages respectifs de $\Delta\gamma = 0^\circ$ à $\Delta\gamma = 2.5^\circ$, puis de $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ à $\Delta\gamma = 5.0^\circ$. En d'autres termes, plus les parois sont lisses et moins il y a de particules dans le cœur de l'écoulement. Au total, la rugosité a eu pour effet la modification de la distribution des particules dans tout le canal en la rendant plus uniforme. Aussi, ces deux figures montrent la sensibilité à la rugosité en fonction de l'inertie des particules sur la densité de particules : plus les particules sont lourdes et plus la rugosité de paroi influence l'accumulation des particules en proche paroi.

En présence de collisions entre particules, les précédentes tendances observées demeurent. Cependant, en comparant les résultats des figures 3.7-(a) et 3.9-(a) respectivement à ceux des figures 3.11-(a) et 3.13-(a), on observe assez nettement la contribution des collisions sur la distribution des particules dans le canal.

-Vitesse moyenne de la phase dispersée

Les quatre figures 3.7-(b), 3.9-(b), 3.11-(b) et 3.13-(b) montrent la vitesse moyenne longitudinale des particules dans le canal en l'absence de collisions entre particules (pour les deux premières) et avec des collisions entre particules (pour les deux dernières). D'une manière générale, les profils de la vitesse moyenne n'ont presque pas changé avec l'augmentation de la rugosité, aussi bien pour les particules de $St = 0.65$ que pour celles où $St = 1.3$. Néanmoins, on observe une certaine augmentation relative (par exemple d'environ 104.08% à $y^+ \simeq 0.5$ et de 0.26% à $y^+ \simeq 93.24$, du passage de $\Delta\gamma = 0^\circ$ à $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ pour le cas sans collisions entre particules avec $St = 0.65$) en région de paroi ($y^+ < 100$), lorsque la rugosité des parois augmente, sans toutefois entraîner de réelles modifications de l'écoulement moyen au delà de cette région de paroi (bien que de très faibles réductions peuvent être observées au centre du canal pour les résultats avec $St = 1.3$: figures 3.9-(b) et 3.13-(b)). L'effet de la rugosité des parois sur la vitesse moyenne produit par le présent modèle semble entièrement localisé dans la région de paroi, puisque la réduction au centre du canal est quasi-inexistante. C'est un résultat insuffisant en comparaison avec les résultats expérimentaux de Sommerfeld & Kussin (2004) [99] (en canal horizontal) et Benson

et al. (2005) (en canal vertical), où l'augmentation de la rugosité de paroi entraîne à la fois une réduction de la vitesse longitudinale des particules au cœur l'écoulement et une augmentation de celle-ci en proche paroi, mais aussi et surtout un aplatissement du profil au centre du canal ; si bien que la vitesse devient presque uniforme à travers le canal entier. Cela suppose que la rugosité devrait induit un important phénomène de dispersion transversale.

- Moments du second ordre

On observe sur les figures 3.7-(d) et 3.9-(d), les profils de l'agitation transversale $\langle v'_p v'_p \rangle_p$ des particules dans le canal, en l'absence de collisions entre particules, pour les Stokes respectifs de 0.65 et 1.3. Ces profils exhibent une importante influence de la rugosité des parois sur l'agitation transverse dans le canal entier. En effet, de l'écoulement en paroi lisse à ceux avec des parois de rugosité successives de $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et $\Delta\gamma = 5.0^\circ$, l'agitation transverse $\langle v'_p v'_p \rangle_p$ augmente en moyenne de 6% à 50% environ pour les particules avec $St = 0.65$; et d'environ 75% à 450% avec les particules de $St = 1.3$. Cependant, l'augmentation n'est pas uniforme dans le canal : elle est plus accentuée dans la région de paroi qu'au cœur de l'écoulement.

La prise en compte des collisions entre les particules augmente la production de l'agitation transversale (figures 3.11-(d) et 3.13-(d)) ; cependant l'effet de paroi rugueuse reste fort appréciable.

L'amplification du degré de rugosité des parois laisse entrevoir à travers les figures 3.7-(c) et 3.9-(c) (respectivement pour les simulations avec $St = 0.65$ et $St = 1.3$ sans collisions entre particules), de réelles modifications du cisaillement $\langle u'_p v'_p \rangle_p$ à travers le canal entier. On observe globalement une augmentation systématique de $\langle u'_p v'_p \rangle_p$ avec de forts maxima dans la région de très proche paroi (à $y^+ \simeq 40$) avec $\Delta\gamma$ croissant. Cette augmentation diminue progressivement à l'approche du centre et des parois du canal. En outre, la prise en compte des collisions entre les particules (voir figures 3.11-(c) et 3.13-(c)), les effets de la rugosité des parois restent toujours bien mis en exergue sur ce moment. D'autre part, remarquons que les modifications sont quasi-inexistantes sur $\langle u'_p v'_p \rangle_p$ à la paroi, pour les quatre configurations.

L'agitation longitudinale $\langle u'_p u'_p \rangle_p$ des particules dans le canal présentée pour les quatre configurations de l'écoulement (figures 3.7-(i), 3.9-(i), 3.11-(i) et 3.13-(i)) montre un comportement identique. On observe une augmentation de l'agitation dans la seule région de paroi (où $y^+ < 30$) avec l'accroissement de l'écart type de rugosité et surtout à la paroi ; tandis qu'en s'éloignant des parois, des modifications

mineures (voir quelque fois inexistantes) sont relevées malgré l'augmentation de l'intensité de la rugosité.

Bien qu'ayant considéré un effet de rugosité $2D$ lors de la collision des particules sur les parois, les figures 3.7-(j), 3.9-(j), 3.11-(j) et 3.13-(j) mettent en évidence un effet de la rugosité des parois sur le moment $\langle w'_p w'_p \rangle_p$. En effet, nous remarquons que contrairement à l'agitation longitudinale, les effets de la rugosité sur $\langle w_p'^2 \rangle_p$ sont beaucoup plus perceptibles au delà de $y^+ < 30$. Les effets de la rugosité ne sont pas localisés à la région de paroi ; et les résultats semblent montrés que quelques effets de la rugosité engendrés depuis la paroi dans les directions longitudinale et normale sont transférés dans la directions latérale de l'écoulement.

- Moments du troisième ordre

L'examen des figures 3.7 à 3.14, de (e) à (h), montrent que l'augmentation de l'écart type de rugosité $\Delta\gamma$ entraîne une augmentation systématique du transport de la vitesse fluctuante normale à la paroi ($\langle u'_p u'_p v'_p \rangle'_p$, $\langle v'_p v'_p v'_p \rangle'_p$, $\langle v'_p w'_p w'_p \rangle'_p$ et $\langle u'_p v'_p v'_p \rangle'_p$) dans tout le canal. En outre, il peut être observé que la corrélation triple $\langle v_p'^3 \rangle'_p$ est beaucoup plus modifiée avec l'intensité de la rugosité, en présentant à la fois une forte augmentation dans le canal entier mais aussi et surtout à la paroi.

Au total, il en ressort un important effet d'anisotropie induit par le présent modèle d'effets de paroi rugueuse, dans la mesure où les plus importantes modifications observées en augmentant l'écart type de rugosité de la paroi, concernent les moments impairs de la vitesse normales à la paroi, aussi bien avec les deux nombres de Stokes, même si ces effets sont encore plus accentués avec l'augmentation du St . Dans la direction longitudinale, l'effet apparu est très localisé en proche paroi (U_p et $\langle u'_p u'_p \rangle_p$), tandis que dans la direction latérale, les effets observés sont relativement importants et se présentent un peu loin des parois (au delà de $y^+ \simeq 30$).

Ces observations peuvent être analysées dans le cadre de l'approche PDF (Simonin (1991)) présentée au chapitre 1, où dans le domaine de l'écoulement Ω , nous avons :

- pour la conservation de la masse

$$\frac{\partial}{\partial t} n_p + \frac{\partial}{\partial x_i} n_p U_{p,i} = 0 \quad (3.55)$$

- pour l'équation de transport de la quantité de mouvement

3.3 Simulation de l'écoulement diphasique gas-particules

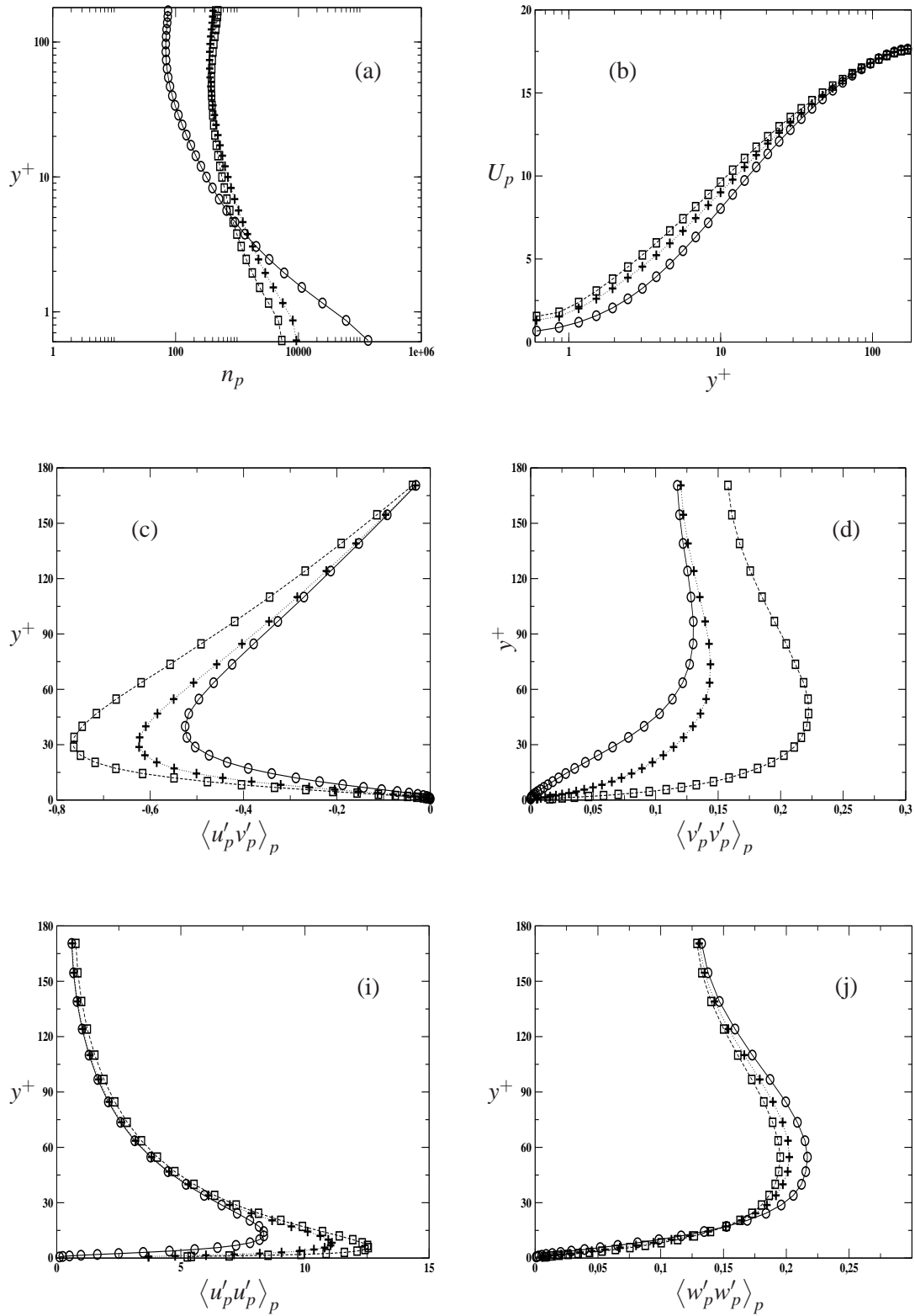


FIG. 3.7 – Modifications des moments d'ordre 0 à 2 de la phase dispersée avec l'augmentation de la rugosité de paroi (\circ : $\Delta\gamma = 0^\circ$, $+$: $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et \square : $\Delta\gamma = 5.0^\circ$). Cas sans collisions entre particules avec $St = 0.65$.

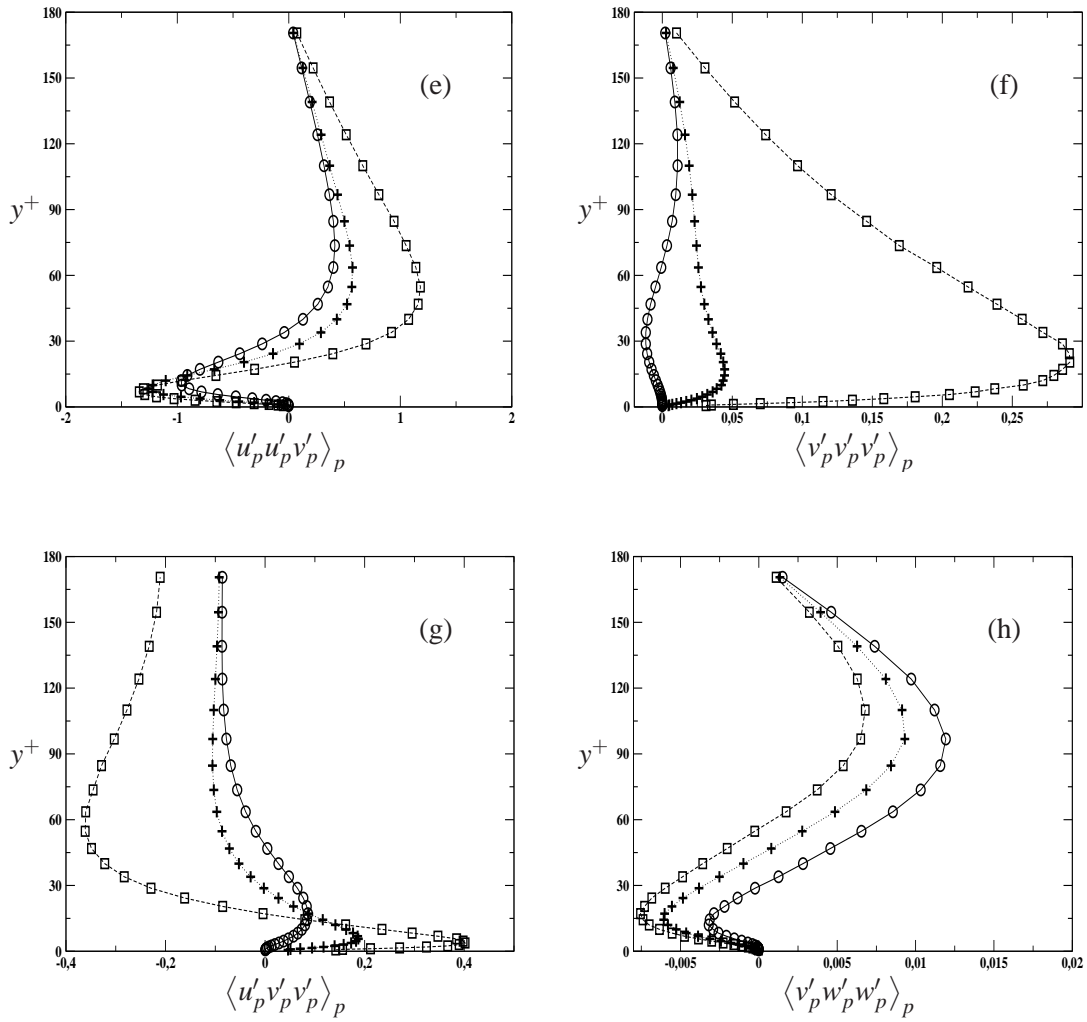


FIG. 3.8 – Modifications des moments d'ordre 3 de la phase dispersée avec l'augmentation de la rugosité de paroi (\circ : $\Delta\gamma = 0^\circ$, $+$: $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et \square : $\Delta\gamma = 5.0^\circ$). Cas sans collisions entre particules avec $St = 0.65$.

3.3 Simulation de l'écoulement diphasique gas-particules

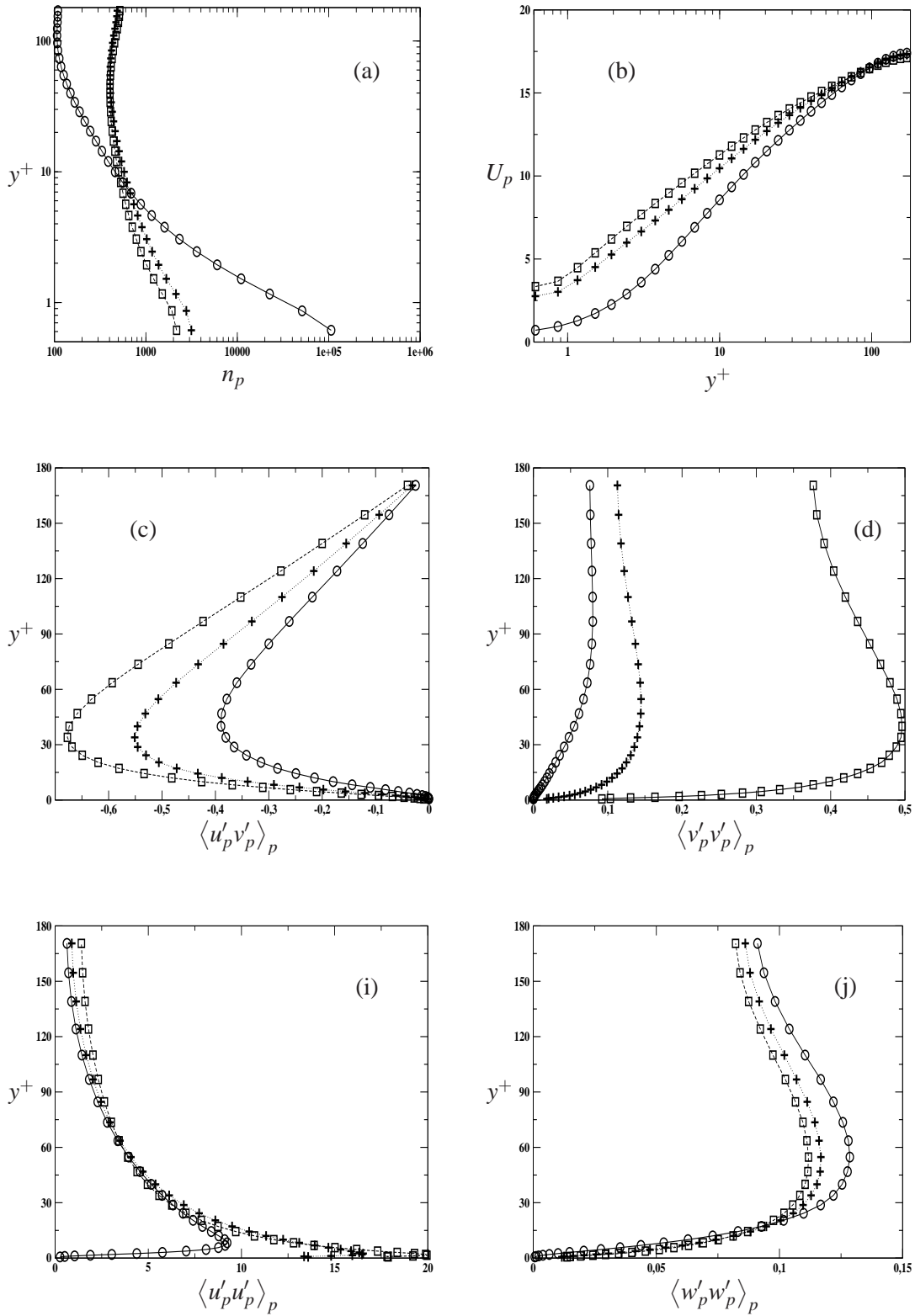


FIG. 3.9 – Modifications des moments d'ordre 0 à 2 de la phase dispersée avec l'augmentation de la rugosité de paroi (\circ : $\Delta\gamma = 0^\circ$, $+$: $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et \square : $\Delta\gamma = 5.0^\circ$). Cas sans collisions entre particules avec $St = 1.3$.

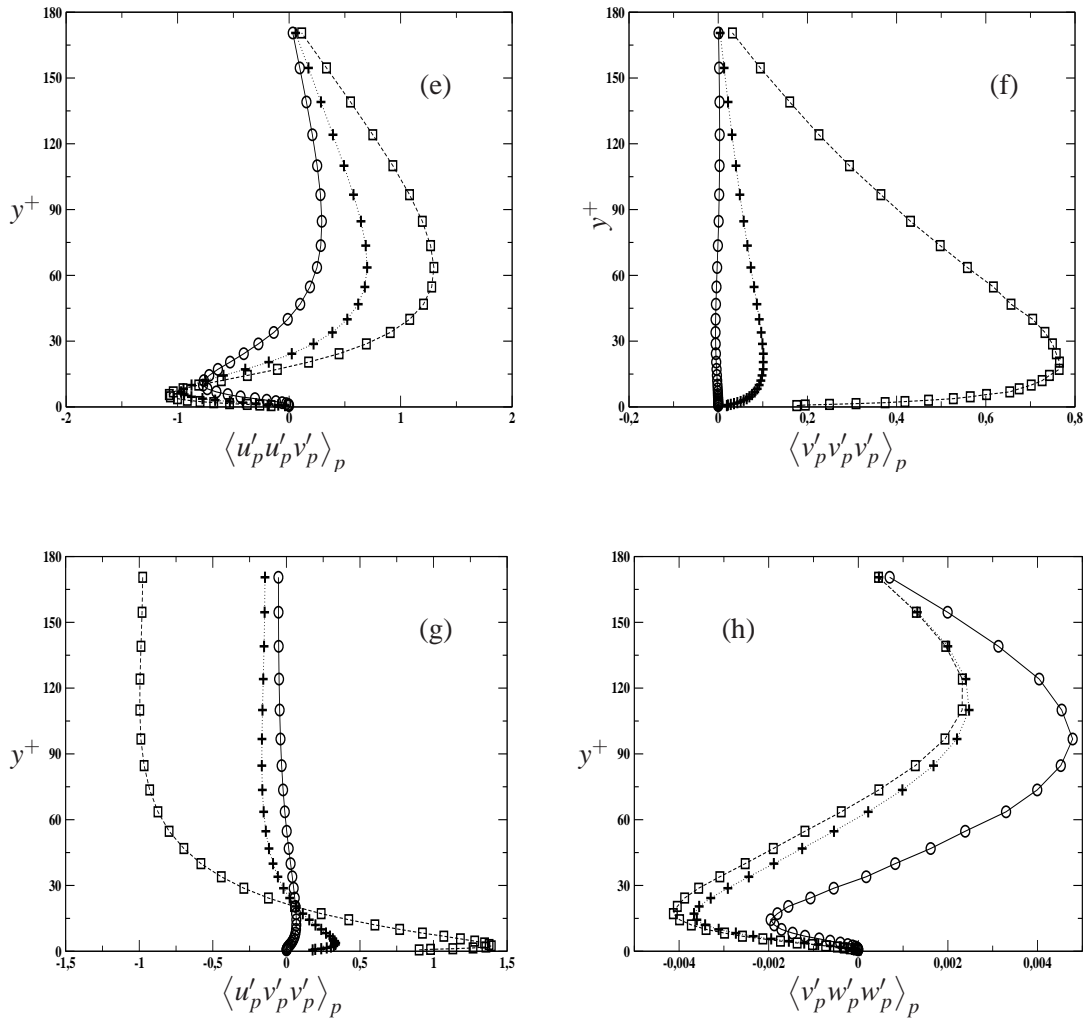


FIG. 3.10 – Modifications des moments d'ordre 3 de la phase dispersée avec l'augmentation de la rugosité de paroi (\circ : $\Delta\gamma = 0^\circ$, $+$: $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et \square : $\Delta\gamma = 5.0^\circ$). Cas sans collisions entre particules avec $St = 1.3$.

3.3 Simulation de l'écoulement diphasique gas-particules

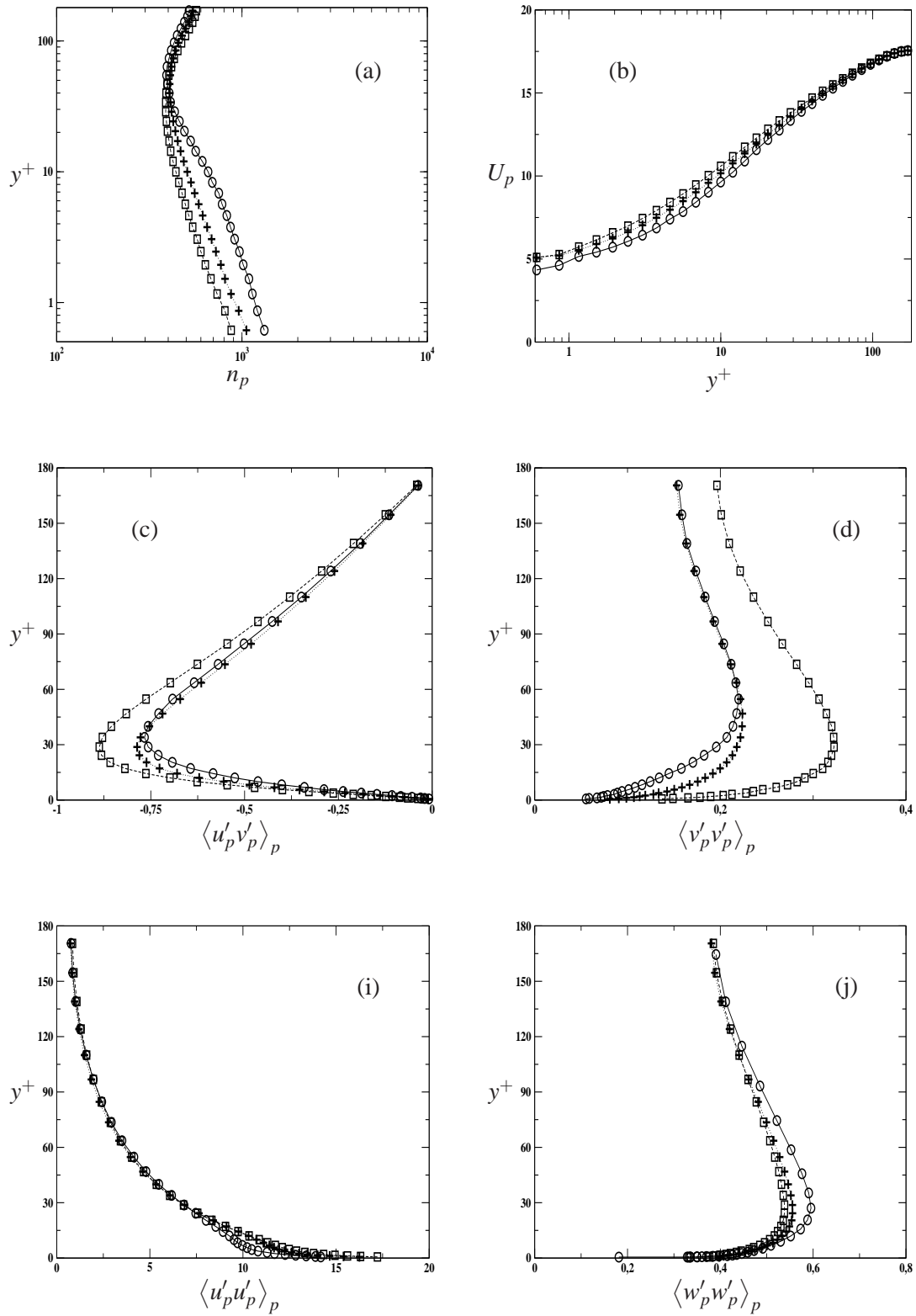


FIG. 3.11 – Modifications des moments d'ordre 0 à 2 de la phase dispersée avec l'augmentation de la rugosité de paroi (\circ : $\Delta\gamma = 0^\circ$, $+$: $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et \square : $\Delta\gamma = 5.0^\circ$). Cas avec collisions entre particules avec $St = 0.65$.

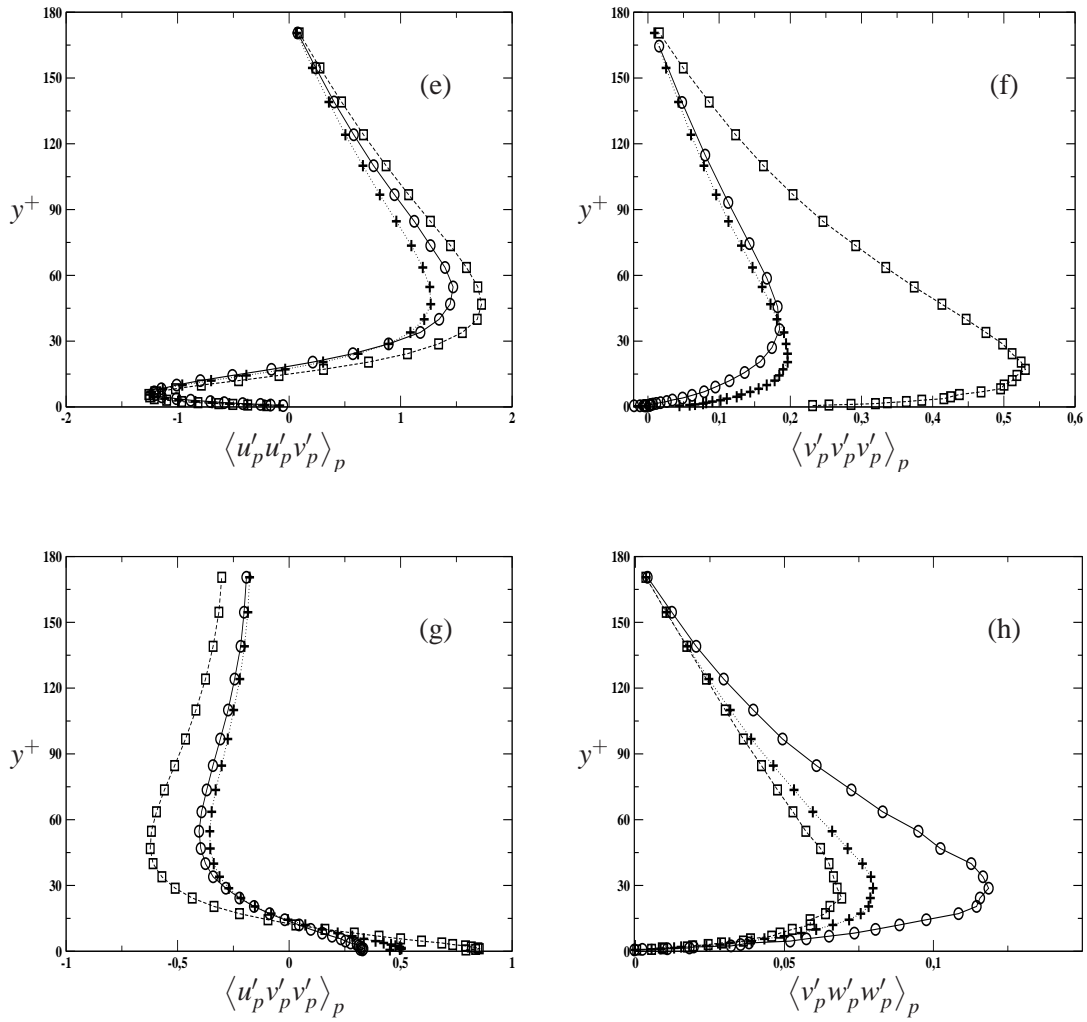


FIG. 3.12 – Modifications des moments d'ordre 3 de la phase dispersée avec l'augmentation de la rugosité de paroi (\circ : $\Delta\gamma = 0^\circ$, $+$: $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et \square : $\Delta\gamma = 5.0^\circ$). Cas avec collisions entre particules avec $St = 0.65$.

3.3 Simulation de l'écoulement diphasique gas-particules

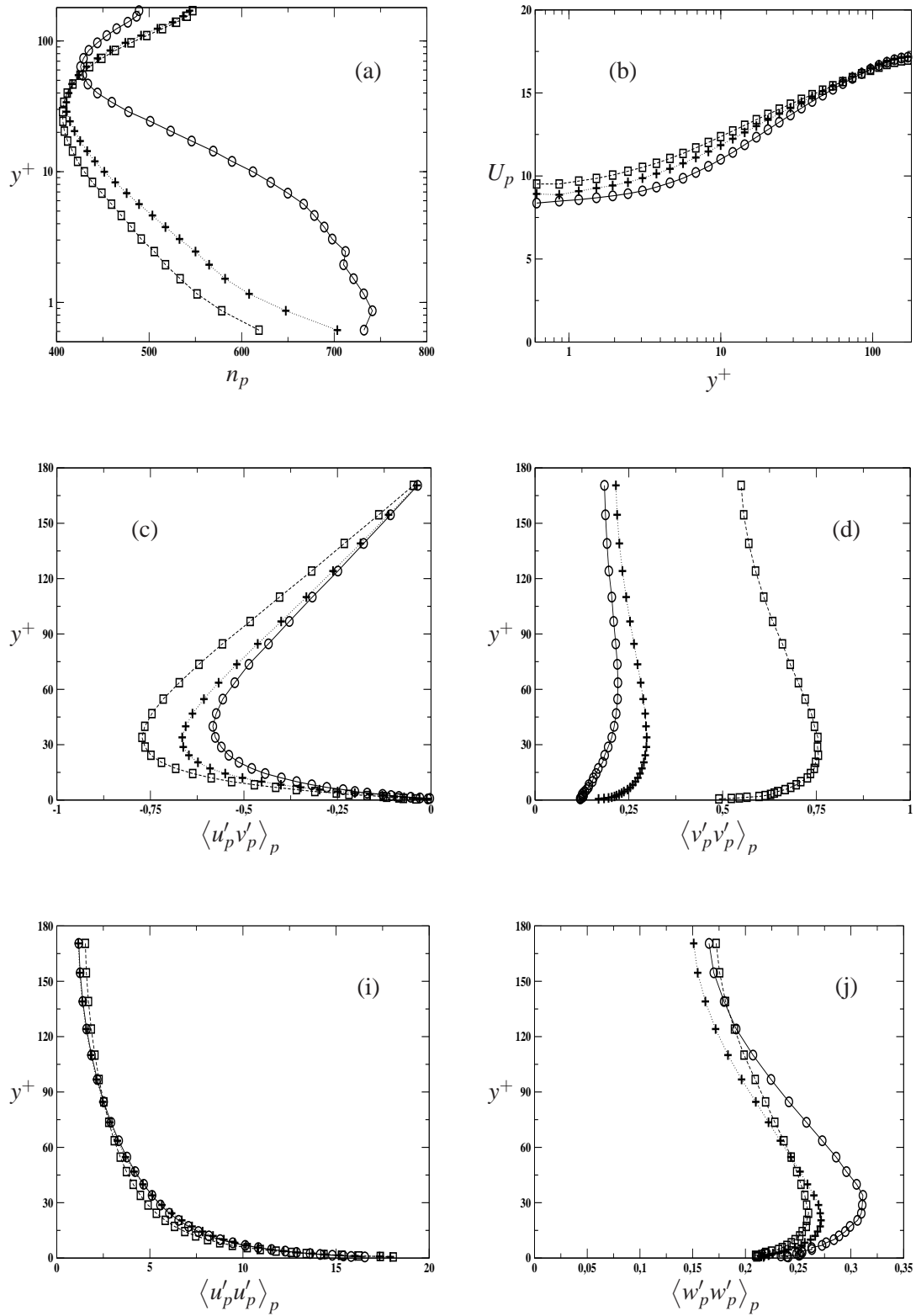


FIG. 3.13 – Modifications des moments d'ordre 0 à 2 de la phase dispersée avec l'augmentation de la rugosité de paroi (\circ : $\Delta\gamma = 0^\circ$, $+$: $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et \square : $\Delta\gamma = 5.0^\circ$). Cas avec collisions entre particules avec $St = 1.3$.

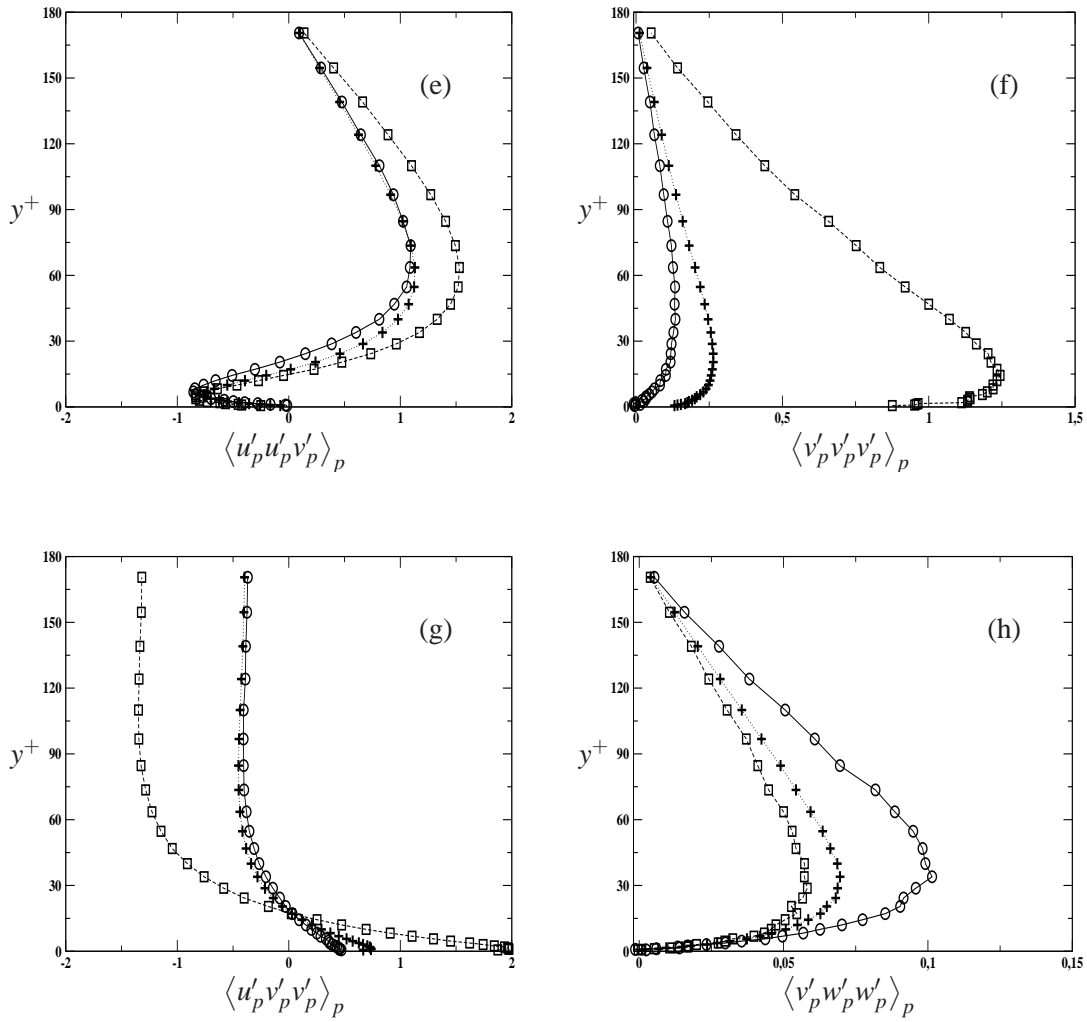


FIG. 3.14 – Modifications des moments d'ordre 3 de la phase dispersée avec l'augmentation de la rugosité de paroi (\circ : $\Delta\gamma = 0^\circ$, $+$: $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et \square : $\Delta\gamma = 5.0^\circ$). Cas avec collisions entre particules avec $St = 1.3$.

$$\frac{\partial U_{p,i}}{\partial t} + \underbrace{U_{p,j} \frac{\partial U_{p,i}}{\partial x_j}}_{\text{Terme de convection}} = \underbrace{-\frac{1}{n_p} \frac{\partial}{\partial x_j} (n_p R_{p,ij})}_{\text{Terme de dispersion turbulente}} + \underbrace{\left\{ g_i - \frac{1}{\tau_{fp}} \langle V_{r,i} \rangle_p \right\}}_{\text{Terme de traînée}} \quad (3.56)$$

- pour l'équation de transport des contraintes cinétiques des particules

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{p,ij}}{\partial t} + \underbrace{U_{p,k} \frac{\partial R_{p,ij}}{\partial x_k}}_{\text{Terme de convection}} &= \underbrace{-\frac{1}{n_p} \frac{\partial}{\partial x_k} (n_p S_{p,ijk})}_{\text{Terme de dispersion turbulente}} - \underbrace{R_{p,ik} \frac{\partial U_{p,j}}{\partial x_k} - R_{p,jk} \frac{\partial U_{p,i}}{\partial x_k}}_{\text{Terme de production}} \\ &\quad - \underbrace{\frac{2}{\tau_{fp}} [R_{p,ij} - R_{fp,ij}]}_{\text{Terme de transfert interphase}} + \underbrace{\frac{1}{n_p} \mathbb{C} (u'_{p,i} u'_{p,j})}_{\text{Terme de collision}} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Selon Simonin *et al.* (1995)[90], le terme de transfert interphase (dans 3.57) a une contribution à la fois de production et de destruction sur la contrainte cinétique particulaire $R_{p,ij}$. Ces termes de production et de destruction sont respectivement approximés par :

$$\Pi_{ij}^p = \frac{2}{\tau_{fp}} R_{fp,ij} \quad (3.58)$$

$$\Pi_{ij}^d = -\frac{2}{\tau_{fp}} R_{p,ij} \quad (3.59)$$

Cette décomposition est complètement vérifiée dans les simulations lagrangiennes en canal vertical de Wang *et al.* (1998)[113].

Avec l'équation (3.55), nous déduisons à l'équilibre que la densité numérique de particule n_p dans l'écoulement est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial y} (n_p V_p) = 0, \quad \text{dans } \Omega \quad (3.60)$$

qui exige pour sa résolution, la définition du flux normal de particules à la paroi :

$$n_p V_p|_{\partial\Omega} \quad (3.61)$$

Or (3.60) conduit à :

$$n_p V_p = \text{constante}, \quad \text{dans } \Omega \quad (3.62)$$

Puisque le flux de particules à la paroi est nulle, c'est à dire $n_p V_p|_{\partial\Omega} = 0$; il vient que

$$n_p V_p = \text{constante} = 0, \quad \text{dans } \Omega \implies V_p = 0, \quad \text{dans } \Omega \quad (3.63)$$

Cependant, cette solution ne donne pas directement d'information sur les mécanismes qui pilotent n_p . Et alors, en revenant à l'équation de V_p , nous obtenons à l'équilibre avec l'équation (3.56) que :

$$V_{d,y} - \frac{\tau_{fp}^F}{n_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(n_p \langle v'_p v'_p \rangle_p \right) = 0, \quad \text{dans } \Omega \quad (3.64)$$

Soit :

$$\tau_{fp}^F \langle v'_p v'_p \rangle_p \frac{\partial \ln n_p}{\partial y} = -\tau_{fp}^F \frac{\partial}{\partial y} \left(\langle v'_p v'_p \rangle_p \right) + V_{d,y} \quad (3.65)$$

Ce qui signifie que la densité numérique de particules n_p est pilotée par la vitesse de dérive normale $V_{d,y}$ et la variance de la vitesse normale $\langle v'_p v'_p \rangle_p$ (Simonin *et al.* (1997) [93]). Or à l'état stationnaire et sans collisions entre particules, l'agitation transverse déduite de l'équation (3.57) s'écrit :

$$\langle v'_p v'_p \rangle_p = \langle v'_{f@p} v'_p \rangle_p - \frac{\tau_{fp}^F}{2n_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(n_p \langle v'_p v'_p v'_p \rangle_p \right), \quad \text{dans } \Omega \quad (3.66)$$

La détermination de $\langle v'_p v'_p \rangle_p$ par la résolution de l'équation ci-dessus impose nécessairement de définir à la paroi le flux $n_p \langle v'_p v'_p v'_p \rangle_p |_{\partial\Omega}$.

On observe d'autre part sur la figure 3.16-(b) que la rugosité n'a aucun effet sur la corrélation double fluide-particule $\langle v'_{f@p} v'_p \rangle_p$. Il en résulte que le principal mécanisme responsable de l'agitation transverse $\langle v'_p v'_p \rangle_p$ des particules en présence de rugosité des parois, et bien évidemment en l'absence de collisions entre particules, est la dispersion turbulente $-\frac{\tau_{fp}^F}{n_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(n_p \langle v_p^3 \rangle_p \right)$. Or la figure 3.15 montre que le flux $n_p \langle v_p^3 \rangle_p$ augmente à la paroi lorsque l'on augmente la rugosité. Ce qui explique en retour l'augmentation de la dispersion turbulente $-\frac{1}{n_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(n_p \langle v_p^3 \rangle_p \right)$ dans tout le canal (se conférer à la figure 3.16-(b)). Et par suite l'augmentation de la dispersion turbulente $-\frac{1}{n_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(n_p \langle v_p^3 \rangle_p \right)$ dans tout le canal avec la rugosité entraîne l'augmentation de l'agitation normale à la paroi $\langle v'_p v'_p \rangle_p$ dans tout le canal avec l'intensité de la rugosité de la paroi et explique en raison de l'équation (3.65), les modifications de n_p avec l'accroissement de $\Delta\gamma$. Au final, le mécanisme exhibé est le suivant :

$$\Delta\gamma \nearrow \implies \underbrace{n_p \langle v_p^3 \rangle_p}_{\text{à la paroi}} \nearrow \implies \underbrace{-\frac{1}{n_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(n_p \langle v_p^3 \rangle_p \right)}_{\text{dans tout le canal}} \nearrow \implies \underbrace{\langle v_p^2 \rangle_p}_{\text{dans tout le canal}} \nearrow \implies \left. \begin{array}{l} n_p \searrow \text{ à la paroi} \\ n_p \nearrow \text{ loin de la paroi} \end{array} \right.$$

Dans le cadre de simulations en apesanteur sans collisions entre particules et où les statistiques sont obtenues à l'état stationnaire, il ressort de l'équation (3.56) que :

$$U_p = U_f + V_{d,x} - \frac{\tau_{fp}^F}{n_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p \right) \quad (3.67)$$

et dont la résolution exige au préalable la définition de la condition à la paroi, du flux $n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p$.

A travers cette équation (3.67), puisque nous ne prenons pas en compte le couplage inverse (donc U_f n'est pas modifiée), nous comprenons clairement que la vitesse moyenne longitudinale des particules est pilotée à la fois par la vitesse de dérive longitudinale ($V_{d,x}$) et la dispersion turbulente transversale.

D'autre part, sur la figure 3.18-(b) sont présentées les modifications de la vitesse de dérive longitudinale et la dispersion turbulente transversale avec l'augmentation de l'écart type de rugosité. Les résultats montrent premièrement que quelque soit le degré de rugosité des parois, le principal mécanisme pilotant l'évolution de la vitesse longitudinale des particules dans le canal est la dispersion turbulente, puisque la vitesse de dérive longitudinale reste quasiment constante et nulle à travers le canal entier. Cette importance considérable de la dispersion turbulente sur la vitesse de dérive longitudinale était en outre déjà mentionnée dans les simulations numériques de Sakiz (1999) [82] et les mesures expérimentales Caraman *et al.* (2003)[11] dans la cadre des écoulements à parois lisses. Et en accord avec leurs résultats, la dispersion turbulente transversale joue nécessairement un rôle prépondérant sur l'évolution de la vitesse longitudinale dans tout le canal en entraînant la réduction de U_p au centre du canal et son augmentation en proche paroi. Une dispersion de plus en plus forte devrait en conséquence conduire à l'aplatissement de la vitesse longitudinale dans tout le canal.

Deuxièmement, on observe que la vitesse de dérive longitudinale reste inchangée avec l'augmentation de la rugosité tandis que plus la rugosité augmente et plus la dispersion turbulente est modifiée. Cependant, il convient de noter que l'accroissement de la rugosité n'a engendré que l'augmentation très localisée dans la région de très proche paroi ($y^+ < 60$) de la dispersée turbulente. En revanche, en s'éloignant des parois (c'est à dire au delà de $y^+ \simeq 60$), l'augmentation successive de la rugosité n'assure que de très faibles modification de la dispersion turbulente transversale. Ces résultats expliquent assez nettement les différentes variations observées sur la vitesse moyenne de la phase dispersée avec l'augmentation de l'effet de paroi rugueuse. En outre, la compréhension des modifications observées sur la dispersion turbulente réside en l'étude du flux $n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p$ à la paroi. La figure 3.17 montre qu'avec l'accroissement de $\Delta\gamma$, le flux $n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p$ augmente dans le canal et très légèrement à la paroi. Cependant dans le cadre des présentes simulations où les rebonds particules/paroi sont totalement élastiques, donc en l'absence de friction, le flux $n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p$ n'est que très faiblement modifié à la paroi. Toutefois les modifications de $n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p$ en proche paroi permettent de comprendre à la fois la légère augmentation de U_p en proche paroi et la très faible réduction dans l'écoulement.

L'importance de la friction dans l'accroissement du flux $n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p$ à la paroi avec l'intensité de la rugosité est, en outre, mis en exergue dans les simulations de cas expérimentaux au chapitre suivant. Si

bien que les mécanismes qui gouvernent la modification de la vitesse longitudinale en fonction du degré de rugosité est :

$$\Delta\gamma \nearrow \implies \underbrace{n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p}_{\text{à la paroi}} \nearrow \implies \underbrace{\frac{1}{n_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p \right)}_{\text{dans tout le canal}} \nearrow \implies \underbrace{U_p}_{\text{dans tout le canal}} \searrow$$

A l'équilibre et en l'absence de collisions inter-particulaires, nous obtenons à partir de l'équation (3.57) que l'agitation longitudinale des particules est obtenue par la résolution de l'équation :

$$\langle u'_p u'_p \rangle_p = \langle u'_{f@p} u'_p \rangle_p - \tau_{fp}^F \langle u'_p v'_p \rangle_p \frac{\partial U_p}{\partial y} - \frac{\tau_{fp}^F}{2n_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(n_p \langle u'_p u'_p v'_p \rangle_p \right) \quad (3.68)$$

avec pour condition à la paroi portant sur le flux $n_p \langle u'_p u'_p v'_p \rangle_p$.

Avec moins de 6% de réduction observée avec les particules dont $St = 0.65$ dans l'intervalle $15 \leq y^+ \leq 120$ sur $\langle u'_{f@p} u'_p \rangle_p$, en dépit de l'augmentation successive de la rugosité (de $\Delta\gamma = 0.0^\circ$ à $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ puis à $\Delta\gamma = 5.0^\circ$), on peut aisément admettre l'insignifiante influence de la rugosité sur cette corrélation double fluide-particule $\langle u'_{f@p} u'_p \rangle_p$ (voir figure 3.20-(b)).

La figure 3.20-(b) montre premièrement une forte production d'énergie cinétique par le gradient de vitesse longitudinale moyenne ($-\tau_{fp}^F \langle u'_p v'_p \rangle_p \frac{\partial U_p}{\partial y}$) et une forte dispersion turbulente ($-\frac{\tau_{fp}^F}{2n_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(n_p \langle u'_p u'_p v'_p \rangle_p \right)$) quelque soit le degré de rugosité de la paroi dans la seule région de paroi ($y^+ < 60$). Les résultats montrent principalement que ces deux mécanismes s'amplifient avec l'augmentation de la rugosité des parois et que cette augmentation demeure tout de même très localisée dans la région définie par $y^+ < 60$. Aussi, l'examen des résultats présentés sur cette figure prouve une réelle compétition entre ces deux mécanismes précédemment évoqués, mais montre surtout une très légère amplification pour le mécanisme de production par le gradient de vitesse longitudinale moyenne. Autrement, la production par les gradients de vitesses longitudinaux s'effectue essentiellement dans la région de très proche paroi avec l'augmentation de l'intensité de la rugosité des parois. L'énergie ainsi produite à la paroi est ensuite transportée vers le cœur de l'écoulement par le phénomène de dispersion turbulente. En accord avec l'équation (3.68), l'augmentation de l'agitation longitudinale des particules avec l'augmentation de la rugosité dans la région localisée de paroi ($y^+ < 60$) trouve ainsi toute son explication. Le mécanisme mis en exergue par ces simulations peut se traduire par le schéma suivant :

$$\Delta\gamma \nearrow \implies \underbrace{-\langle u'_p v'_p \rangle_p \frac{\partial U_p}{\partial y}}_{\text{Production à la paroi}} \nearrow \text{ et } \underbrace{-\frac{1}{n_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(n_p \langle u'_p u'_p v'_p \rangle_p \right)}_{\text{Dispersion turbulente}} \nearrow \implies \underbrace{\langle u'_p u'_p \rangle_p}_{\text{dans le canal}} \nearrow$$

Cependant, l'influence de l'effet de paroi rugueuse reproduit par le "*shadow effect model*" sur l'agitation longitudinale $\langle u'_p u'_p \rangle_p$ est restée localisée qu'en très proche paroi. Ce résultat qui est insuffisant en comparaison avec les résultats expérimentaux disponibles (Sommerfeld & Kussin (2004)[99], Benson *et al.* (2005)[5]) laisse imaginer que la production d'énergie cinétique par le gradient de vitesse longitudinale moyenne n'est pas énorme pour être transportée transversalement jusqu'au centre du canal.

D'après l'équation (3.57), nous pouvons écrire que :

$$\langle u'_p v'_p \rangle_p = \frac{1}{2} \underbrace{\left[\langle u'_{f@p} v'_p \rangle_p + \langle v'_{f@p} u'_p \rangle_p \right]}_{R_{fp,12}} - \frac{\tau_{fp}^F}{2} \langle v'_p v'_p \rangle_p \frac{\partial U_p}{\partial y} - \frac{\tau_{fp}^F}{2n_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(n_p \langle u'_p v'_p v'_p \rangle_p \right) \quad (3.69)$$

Présentant les variations des termes dans l'équation ci-dessus, la figure 3.19-(b) montre trois résultats intéressants. Premièrement, la corrélation double fluide-particule $R_{fp,12}$ reste inchangée malgré l'augmentation de la rugosité de paroi. En conséquence, il ne reste que les mécanismes de production et de dispersion pour piloter les variations du cisaillement dans le canal entier. Deuxièmement, on constate que plus on amplifie la rugosité et plus la production et la dispersion augmentent à la fois. Il est cependant à noter que la région du canal sujette à l'augmentation de ces deux mécanismes reste cohérente avec celle où apparaissent les modifications au niveau de la dispersion turbulente transversale sur la vitesse longitudinale des particules dans le canal, c'est à dire dans la région de proche paroi où $y^+ < 60$. Le dernier résultat est que de $\Delta\gamma = 0.0^\circ$ à $\Delta\gamma = 5.0^\circ$, on observe une compétition assez nette entre ces deux mécanismes de production et de dispersion, car ils demeurent opposés et du même ordre. Seulement, un léger avantage est observable pour le mécanisme de production quelque soit la paroi étudiée. Ces deux derniers résultats conjugués montrent la raison de l'augmentation du cisaillement avec l'augmentation de $\Delta\gamma$.

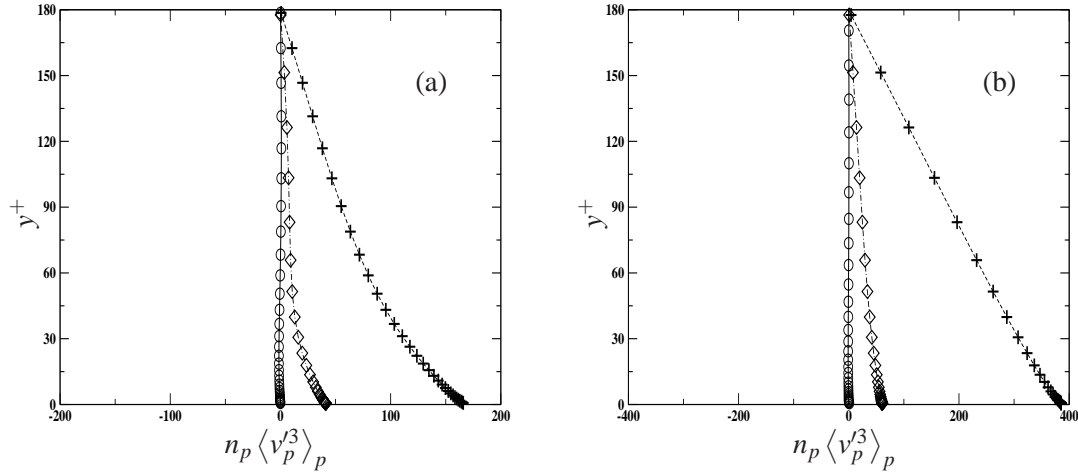


FIG. 3.15 – Modification du flux $n_p \langle v_p^3 \rangle_p$ à la paroi en particulier avec l'augmentation de l'intensité de la rugosité (\circ : $\Delta\gamma = 0.0^\circ$, \diamond : $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et $+$: $\Delta\gamma = 5.0^\circ$). Simulations sans collisions entre particules où (a) et (b) sont respectivement les cas de Stokes 0.65 et 1.3.

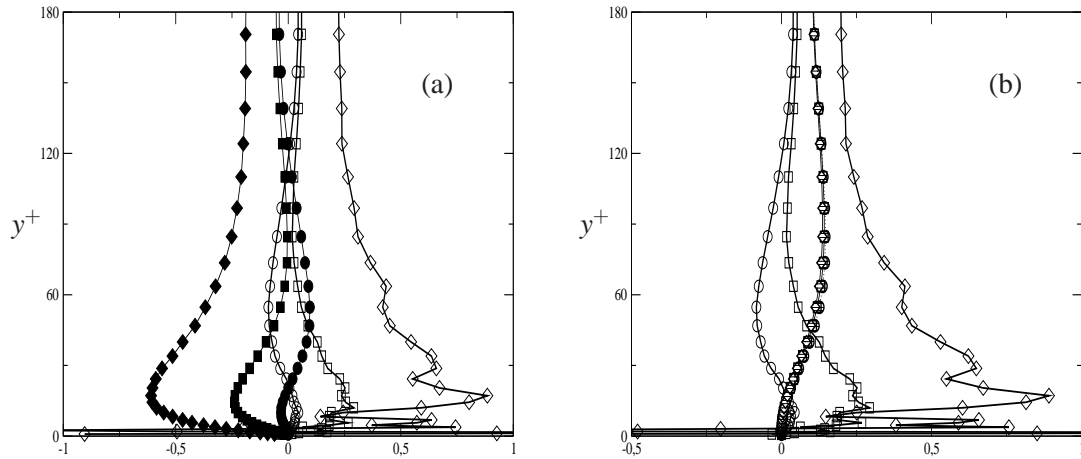


FIG. 3.16 – (a) Termes de dispersion (symbole creux) et de traînée (symbole plein) associée à l'équation bilan de l'agitation transverse (3.57). (b) Correlation double fluide-particule $\langle v'_{f@p} v'_p \rangle_p$: symbole hachuré) et terme de dispersion turbulente $(-\frac{\tau_{fp}^F}{2n_p} \frac{\partial}{\partial y} (n_p \langle v'_p v'_p v'_p \rangle_p))$: symbole creux) de l'équation de l'agitation transverse $\langle v'_p v'_p \rangle_p$ (3.66). Cercle : $\Delta\gamma = 0.0^\circ$, carré : $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et losange : $\Delta\gamma = 5.0^\circ$. Cas de particules dont $St = 0.65$.

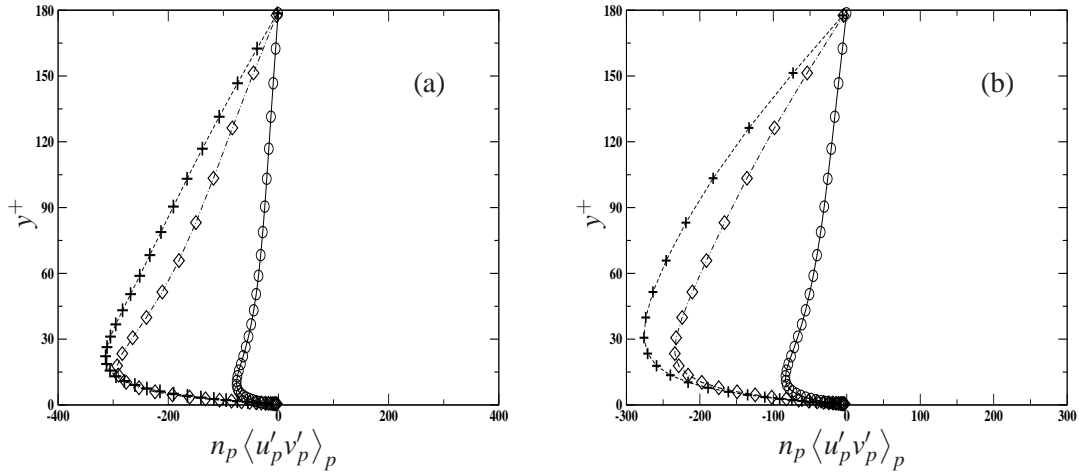


FIG. 3.17 – Modification du flux $n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p$ avec l'augmentation de l'intensité de la rugosité (\circ : $\Delta\gamma = 0.0^\circ$, \diamond : $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et $+$: $\Delta\gamma = 5.0^\circ$). Simulations sans collisions entre particules où (a) et (b) sont respectivement les cas de Stokes 0.65 et 1.3.

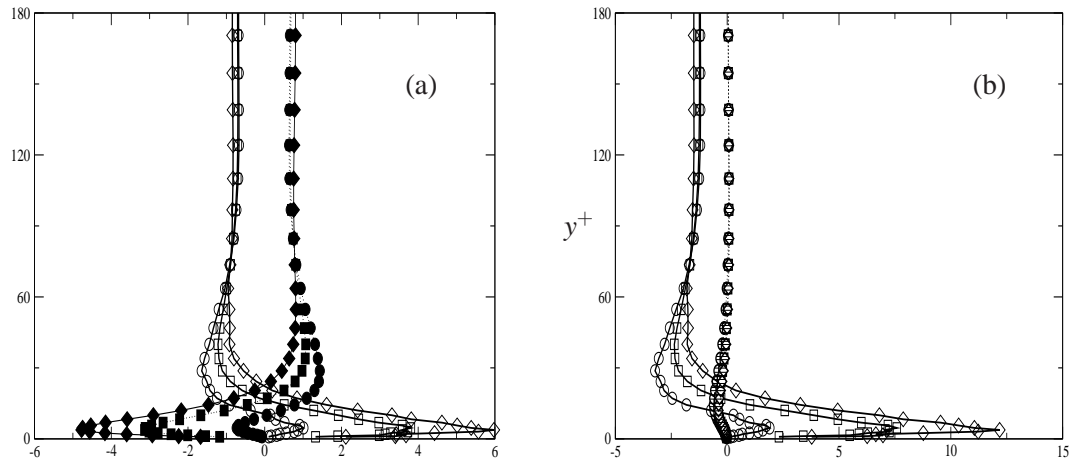


FIG. 3.18 – (a) Termes de dispersion (symbole creux) et de traînée (symbole plein) associée à l'équation bilan de la vitesse longitudinale (3.56). (b) Dispersion turbulente transversale ($-\frac{\tau_{fp}^F}{n_p} \frac{\partial}{\partial y} (n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p)$: symbole creux) et vitesse de dérive longitudinale ($V_{d,x}$: symbole hachuré) de l'équation de \bar{U}_p (3.67). Cercle : $\Delta\gamma = 0.0^\circ$, carré : $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et losange : $\Delta\gamma = 5.0^\circ$. Cas de particules dont $St = 0.65$.

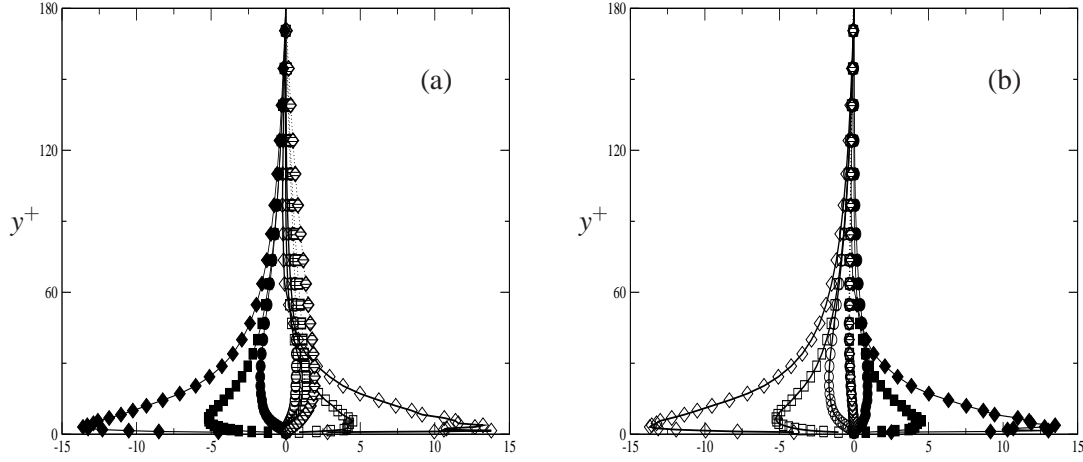


FIG. 3.19 – (a) Termes de dispersion (symbole creux), de traînée (symbole hachuré) et de production (symbole plein) associée à l'équation bilan du cisaillement (3.57). (b) Terme de production $(-\frac{\tau_{fp}^F}{2} \langle v'_p v'_p \rangle_p \frac{\partial U_p}{\partial y})$: symbole creux), terme de dispersion turbulente $(-\frac{\tau_{fp}^F}{2n_p} \frac{\partial}{\partial y} (n_p \langle u'_p v'_p v'_p \rangle_p))$: symbole plein) et corrélation double fluide-particule ($R_{fp,12}$: symbole hachuré) de l'équation sur le cisaillement $\langle u'_p v'_p \rangle_p$ (3.69). Cercle : $\Delta\gamma = 0.0^\circ$, carré : $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et losange : $\Delta\gamma = 5.0^\circ$. Cas de particules dont $St = 0.65$.

3.4 Validation de la modélisation eulerienne des conditions aux limites à la paroi

3.4.1 Calcul des moyennes à la paroi

Par définition, le flux de particules qui entrent en collision avec la paroi (de surface totale $\Delta S = L_x L_z$), avec une vitesse comprise entre \underline{c}_p^- et $\underline{c}_p^- + d\underline{c}_p^-$ pendant un temps dt s'écrit :

$$d\phi^- = f_p^- d\underline{c}_p^- \Delta S dt |\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}| \quad (3.70)$$

\underline{n} étant la normale à la paroi.

Les statistiques étant effectuées sur la base de l'hypothèse d'ergodicité, les variables sont supposées stationnaires. Donc pour une simulation entre t_0 et $t_0 + \Delta T$, le flux total de particules à la paroi est défini par :

$$\int_{t_0}^{t_0 + \Delta T} d\phi^- = f_p^- d\underline{c}_p^- \Delta S |\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}| \Delta T \quad (3.71)$$

En posant $\delta\phi$ le nombre de particule qui heurtent la paroi pendant toute la durée de la simulation avec une vitesse comprise entre \underline{c}_p^- et $\underline{c}_p^- + d\underline{c}_p^-$, le flux de particules (pendant ΔT) à la paroi est $\delta\phi d\underline{c}_p^-$. Et

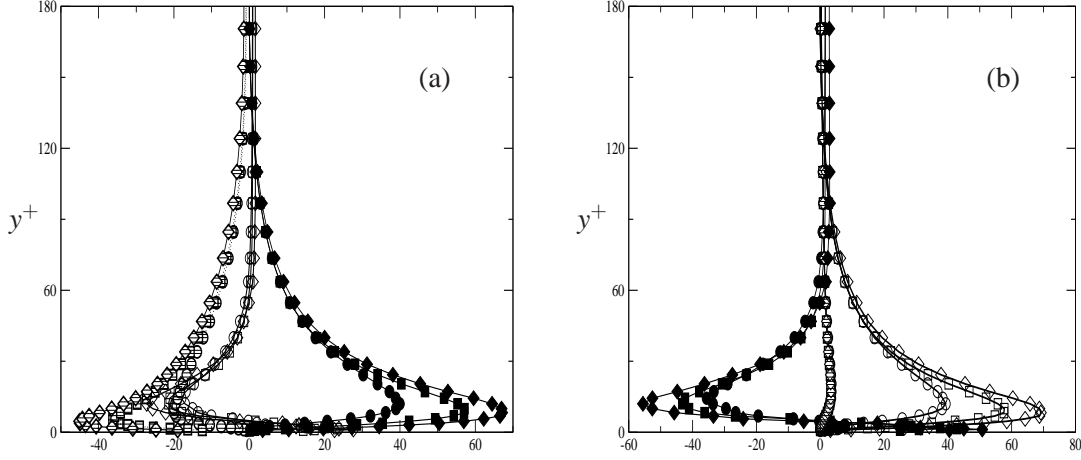


FIG. 3.20 – (a) Termes de dispersion (symbole creux), de traînée (symbole hachuré) et de production (symbole plein) associée à l'équation bilan de l'agitation longitudinale (3.57). (b) Terme de production $(-\tau_{fp}^F \langle u'_p v'_p \rangle_p \frac{\partial U_p}{\partial y})$: symbole creux), terme de dispersion turbulente $(-\frac{\tau_{fp}^F}{2n_p} \frac{\partial}{\partial y} (n_p \langle u'_p v'_p v'_p \rangle_p))$: symbole plein) et corrélation double fluide-particule $(\langle u'_{f@p} u'_p \rangle_p)$: symbole hachuré) de l'équation sur l'agitation longitudinale $\langle u'_p u'_p \rangle_p$ (3.68). Cercle : $\Delta\gamma = 0.0^\circ$, carré : $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et losange : $\Delta\gamma = 5.0^\circ$. Cas de particules dont $St = 0.65$.

par suite :

$$f_p^- d\mathcal{C}_p^- = \frac{\delta\phi d\mathcal{C}_p^-}{\Delta S \Delta T |\mathcal{C}_p^- \cdot \underline{n}|} \quad (3.72)$$

D'autre part la k ème collision d'une particule sur la paroi à un instant donné $t^{(k)}$, avec une vitesse $\mathcal{C}_p^{-(k)}$ comprise entre \mathcal{C}_p^- et $\mathcal{C}_p^- + d\mathcal{C}_p^-$, en un point $\underline{x}_p^{(k)}$ de la surface ΔS , peut être modélisée par le produit de Dirac suivant :

$$\delta(t - t^{(k)}) \times \delta(\mathcal{C}_p^- - \mathcal{C}_p^{-(k)}) \times \delta(\underline{x}_p - \underline{x}_p^{(k)}) \quad (3.73)$$

Dès lors, si \mathcal{N} est le nombre total de collisions à la paroi, alors le flux total incident à la paroi pendant la simulation de durée ΔT s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta\phi d\mathcal{C}_p^- &= \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \delta(t - t^{(k)}) \times \delta(\mathcal{C}_p^- - \mathcal{C}_p^{-(k)}) \times \delta(\underline{x}_p - \underline{x}_p^{(k)}) d\mathcal{C}_p^{-(k)} \\ &= \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \delta(\mathcal{C}_p^- - \mathcal{C}_p^{-(k)}) d\mathcal{C}_p^{-(k)} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Ce qui conduit à :

$$f_p^- d\underline{c}_p^- = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{\delta(\underline{c}_p^- - \underline{c}_p^{-\langle k \rangle}) d\underline{c}_p^{-\langle k \rangle}}{\Delta S \Delta T |\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}|} \quad (3.75)$$

D'autre part, comme nous avons par définition :

$$n_p^- = \int_{D^-} f_p^-(\underline{c}_p) d\underline{c}_p^- \quad (3.76)$$

et :

$$\langle \Psi_p(\underline{c}_p) \rangle_p^- = \frac{1}{n_p^-} \int_{D^-} \Psi_p(\underline{c}_p) f_p^-(\underline{c}_p) d\underline{c}_p^- \quad (3.77)$$

En remplaçant (3.75) dans (3.76) et (3.77) ; et en gardant à l'esprit que les fonctions sous les signes d'intégration et de sommes discrètes sont positives, la densité numérique de particules incidentes n_p^- et une propriété statistique $\langle \Psi_p \rangle_p^-$ de particules incidentes à la paroi s'écrivent :

$$n_p^- = \frac{1}{\Delta S \Delta T} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{1}{|\underline{c}_p^{-\langle k \rangle} \cdot \underline{n}|} \quad (3.78)$$

et :

$$\langle \Psi_p(\underline{c}_p) \rangle_p^- = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{1}{|\underline{c}_p^{-\langle k \rangle} \cdot \underline{n}|}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{\Psi_p^{-\langle k \rangle}}{|\underline{c}_p^{-\langle k \rangle} \cdot \underline{n}|} \quad (3.79)$$

dans lequel nous avons posé $\Psi_p^{-\langle k \rangle} = \Psi_p^-(\underline{c}_p^{-\langle k \rangle})$.

Il est à noter dans les précédentes (resp. suivantes) formulations que pour une variable φ_p^- (resp. φ_p^+) donnée, $\varphi_p^{-\langle k \rangle}$ (resp. $\varphi_p^{+\langle k \rangle}$) n'est rien d'autre que la valeur de φ_p^- (resp. φ_p^+) lors de la k ème collision de la particule incidente (resp. réfléchie de) à la paroi.

En effectuant une analyse similaire pour les particules réfléchies, la densité numérique de particules réfléchies n_p^+ et une propriété statistique $\langle \Psi_p \rangle_p^+$ quelconque de particules réfléchies s'écrivent :

$$n_p^+ = \frac{1}{\Delta S \Delta T} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{1}{|\underline{c}_p^{+\langle k \rangle} \cdot \underline{n}|} \quad (3.80)$$

et :

$$\langle \Psi_p(\underline{c}_p) \rangle_p^+ = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{1}{|\underline{c}_p^{+\langle k \rangle} \cdot \underline{n}|}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{\Psi_p^{+\langle k \rangle}}{|\underline{c}_p^{+\langle k \rangle} \cdot \underline{n}|} \quad (3.81)$$

D'une manière pratique, au cours d'une simulations les moyennes incidentes $\langle\langle \Psi(\gamma) | \alpha^- \rangle \Psi_p \rangle_p^-$ et $\{\Psi(\gamma)\}_p^-$ sont calculées à partir de :

$$\langle\langle \Psi(\gamma) | \alpha^- \rangle \Psi_p \rangle_p^- = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{1}{|v_p^{-(k)}|}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{\langle \Psi(\gamma) | \alpha^- \rangle_k \Psi_p^{-(k)}}{|v_p^{-(k)}|} \quad (3.82)$$

$$\{\Psi(\gamma)\}_p^- = \frac{\langle\langle \Psi(\gamma) | \alpha^- \rangle v_p \rangle_p^-}{\langle v_p \rangle_p^-} = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \langle \Psi(\gamma) | \underline{c}_p^- \rangle_k \quad (3.83)$$

et où la moyenne $\langle \Psi(\gamma) | \alpha^- \rangle_k = \langle \Psi(\gamma) | \underline{c}_p^- \rangle_k$ est intégrée numériquement pour la *kième* collision particule/paroi suivant :

$$\left\| \begin{aligned} \langle \Psi(\gamma) | \underline{c}_p^- \rangle_k &= \lambda(\underline{c}_p^-) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} H(-\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) H(\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}) \Psi(\gamma) P_r(\gamma) d\gamma \\ \lambda(\underline{c}_p^-) &= \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} H(-\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) H(\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}) P_r(\gamma) d\gamma \right]^{-1} \end{aligned} \right. \quad (3.84)$$

où H est la fonction de Heaviside, $P_r(\gamma)$ une gaussienne de moyenne nulle et d'écart type $\Delta\gamma$.

Notons que pour toute quantité ψ_p , nous avons :

$$\psi'_p = \psi_p - \langle \psi_p \rangle_p \quad \text{et} \quad \langle \psi'_p \rangle_p = 0 \quad (3.85)$$

Cependant :

$$\langle \psi'_p \rangle_p^- = \langle \psi_p \rangle_p^- - \langle \psi_p \rangle_p \neq 0 \quad \text{et} \quad \langle \psi'_p \rangle_p^+ = \langle \psi_p \rangle_p^+ - \langle \psi_p \rangle_p \neq 0 \quad (3.86)$$

Et ensuite, pour toutes quantités ψ et ϕ , les corrélations incidentes et réfléchies sont obtenues à partir de :

$$\begin{aligned} \langle \psi'_p \phi'_p \rangle_p^- &= \langle \psi_p \phi_p \rangle_p^- - \langle \phi_p \rangle_p \langle \psi'_p \rangle_p^- - \langle \psi_p \rangle_p \langle \phi'_p \rangle_p^- - \langle \psi_p \rangle_p \langle \phi_p \rangle_p \\ \langle \psi'_p \phi'_p \rangle_p^+ &= \langle \psi_p \phi_p \rangle_p^+ - \langle \phi_p \rangle_p \langle \psi'_p \rangle_p^+ - \langle \psi_p \rangle_p \langle \phi'_p \rangle_p^+ - \langle \psi_p \rangle_p \langle \phi_p \rangle_p \end{aligned} \quad (3.87)$$

3.4.2 Nouvelles moyennes euleriennes dans l'écoulement

L'idée de l'implementation de nouvelles méthodes de calcul des moyennes dans l'écoulement fut principalement motivée par l'analyse, d'un point de vue numérique, de la continuité des différents moments incidents, réfléchis et globaux, de la phase dispersée depuis le centre de l'écoulement jusqu'à la paroi. En outre, ces nouvelles moyennes permettraient de valider la méthode de moyenne précédente.

La moyenne incidente $\langle \Psi \rangle_p^-$ d'une propriété Ψ de l'écoulement particulaire est évaluée à partir du flux des particules incidentes à la paroi macroscopique ; autrement $\langle \Psi \rangle_p^-$ est estimée à l'aide du nombre de particules dans un volume adjacent à la paroi tel que $\underline{v}_p \cdot \underline{n} < 0$ (où \underline{v}_p est la vitesse de la particule et \underline{n} la normale à la paroi macroscopique). De manière analogue, la moyenne réfléchie $\langle \Psi \rangle_p^+$ de la propriété Ψ associée est évaluée à partir de toutes les particules vérifiant $\underline{v}_p \cdot \underline{n} > 0$. Au final, la moyenne globale est calculée suivant :

$$n_p(i) = n_p^-(i) + n_p^+(i) \quad ; \quad \langle \Psi \rangle_p(i) = \frac{n_p^-(i)}{n_p(i)} \langle \Psi \rangle_p^-(i) + \frac{n_p^+(i)}{n_p(i)} \langle \Psi \rangle_p^+(i) \quad (3.88)$$

Deux algorithmes sont proposés pour le calcul de n_p^- , n_p^+ , $\langle \Psi \rangle_p^-$ et $\langle \Psi \rangle_p^+$.

Algorithme de calcul de moyennes volumiques incidentes et réfléchies

Cette méthode de calcul des moyennes volumiques incidentes et réfléchies est exactement la même que celle présentée à la sous-section 3.3.5. L'unique différence est qu'ici une ségrégation entre les particules incidentes et celles réfléchies est assurée dans la tranche T_j pour évaluer distinctement les propriétés statistiques n_p^- , n_p^+ , $\langle \Psi \rangle_p^-$ et $\langle \Psi \rangle_p^+$ de la phase dispersée. Nous avons :

$$\langle \Psi \rangle_p^-(T_j) = \frac{1}{\mathcal{E}_m(T_j)} \sum_{h=1}^{\mathcal{E}_m(T_j)} \Psi_h(T_j) \quad ; \quad n_p^-(T_j) = \frac{\mathcal{E}_m(T_j)}{N_{moy} L_x L_z \mathcal{E}(T_j)} \quad (3.89)$$

$$\langle \Psi \rangle_p^+(T_j) = \frac{1}{\mathcal{E}_p(T_j)} \sum_{h=1}^{\mathcal{E}_p(T_j)} \Psi_h(T_j) \quad ; \quad n_p^+(T_j) = \frac{\mathcal{E}_p(T_j)}{N_{moy} L_x L_z \mathcal{E}(T_j)} \quad (3.90)$$

où $\mathcal{E}_m(T_j)$ (respectivement $\mathcal{E}_p(T_j)$) est le nombre total de particules incidentes (respectivement réfléchies) dont les propriétés ont été sommées au cours de la simulation entière dans la tranche T_j .

On vérifie aisément à partir des équations (3.89) et (3.90) que l'équation (3.88) conduit bien à la moyenne volumique globale et à la densité volumique de particules définies à l'équation (3.54).

Algorithme de calcul de moyennes aux parois fictives

Supposons à un instant t donné qu'une particule P se trouve au point P_t de coordonnée y_0 normale à la paroi, dans une tranche T_1 et qu'à la fin du pas de temps, à l'instant $t + \Delta t$, elle est située dans la maille T_n au point $P_{t+\Delta t}$ d'ordonnée y_n . De P_t à $P_{t+\Delta t}$, la particule a traversé un nombre $n - 1$ de *parois virtuelles* représentées par les délimitations de chaque tranche (voir figure 3.21). En considérant que la particule passe en y_i à l'instant $t + \delta t_i$ (avec $\delta t_0 = 0$ et $\delta t_n = \Delta t$), la vitesse $\underline{v}_p^{\delta t_i}$ de la particule lors de la traversée de

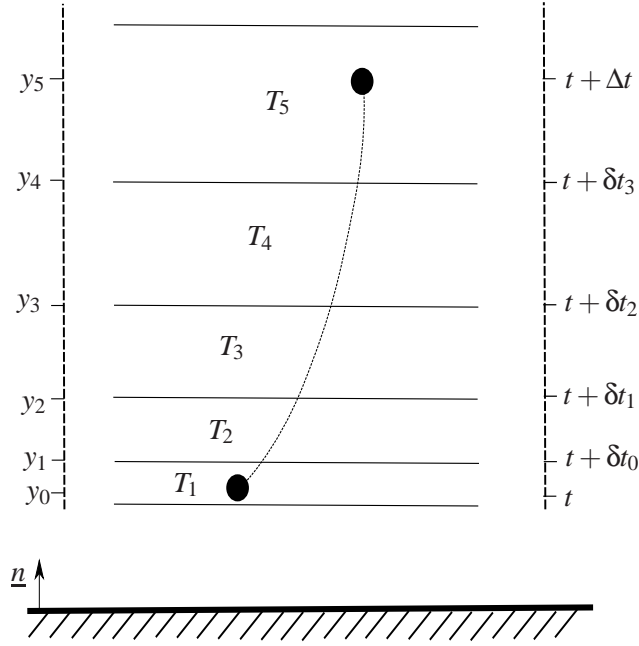


FIG. 3.21 – Illustration de l’algorithme de paroi virtuelle.

la i ème paroi virtuelle définie par le plan $\mathcal{P} = \{(x, y_i, z) / x \in [0, L_x], z \in [0, L_z]\}$ et où y_i est fourni à partir du maillage de moyenne de la phase dispersée (bien sûr pour $1 \leq i \leq n - 1$), est évaluée comme suit :

a- Estimation de δt_i : L’évaluation de δt_i est effectuée à l’aide du schéma d’Adams-Bashforth d’ordre 2 appliqué à l’équation différentielle $dy_p/dt = v_p$. Soit :

$$\delta t_i = \frac{y_p(\delta t_i) - y_p(\delta t_0)}{\frac{3}{2}v_p^{\delta t_0} - \frac{1}{2}v_p^{\delta t_{-1}}}, \quad 1 \leq i \leq n - 1 \quad (3.91)$$

dans laquelle $v_p^{\delta t_0}$ et $v_p^{\delta t_{-1}}$ sont les vitesses normales à la paroi de la particule aux instants t et $t - \Delta t$, tandis que $y_p(\delta t_i) = y_i$.

b- Calcul de la vitesse à la paroi virtuelle : On suppose qu’entre les instants t et $t + \Delta t$, la vitesse du fluide à la position des particules est constante. De même à l’aide du schéma d’Adams-Bashforth d’ordre 2, la vitesse de la particule lors de la traversée de la i ème paroi fictive s’écrit :

$$v_p^{\delta t_i} = v_p^{\delta t_0} + \delta t_i \left[\frac{3}{2}\underline{\mathcal{D}}(\delta t_0) - \frac{1}{2}\underline{\mathcal{D}}(\delta t_{-1}) \right] \quad (3.92)$$

où $\underline{\mathcal{D}}(\delta t_0)$ et $\underline{\mathcal{D}}(\delta t_{-1})$ représentent la force de traînée aux instants t et $t - \Delta t$.

c- Calcul des moyennes : Les moyennes incidentes et réfléchies à une i ème paroi fictive donnée sont calculées exactement de la même manière que pour le calcul de la moyenne à la paroi réelle (voir

sous-section 3.4.1). Cela revient à :

$$n_p^-(i) = \frac{1}{\Delta S \Delta T} \sum_{j=1, \underline{v}_{p_j} \cdot \underline{n} < 0}^{N_m^i} \frac{1}{|\underline{v}_{p_j} \cdot \underline{n}|} ; \quad \langle \Psi \rangle_p^-(i) = \frac{1}{\sum_{j=1, \underline{v}_{p_j} \cdot \underline{n} < 0}^{N_m^i} \frac{1}{|\underline{v}_{p_j} \cdot \underline{n}|}} \sum_{j=1, \underline{v}_{p_j} \cdot \underline{n} < 0}^{N_m^i} \frac{\Psi_{p_j}}{|\underline{v}_{p_j} \cdot \underline{n}|} \quad (3.93)$$

et :

$$n_p^+(i) = \frac{1}{\Delta S \Delta T} \sum_{j=1, \underline{v}_{p_j} \cdot \underline{n} > 0}^{N_p^i} \frac{1}{|\underline{v}_{p_j} \cdot \underline{n}|} ; \quad \langle \Psi \rangle_p^+(i) = \frac{1}{\sum_{j=1, \underline{v}_{p_j} \cdot \underline{n} > 0}^{N_p^i} \frac{1}{|\underline{v}_{p_j} \cdot \underline{n}|}} \sum_{j=1, \underline{v}_{p_j} \cdot \underline{n} > 0}^{N_p^i} \frac{\Psi_{p_j}}{|\underline{v}_{p_j} \cdot \underline{n}|} \quad (3.94)$$

N_m^i (respectivement N_p^i) est le nombre de particules qui traversent la i ème paroi fictive et vérifiant la condition $\underline{v}_{p_j} \cdot \underline{n} < 0$ (respectivement $\underline{v}_{p_j} \cdot \underline{n} > 0$).

3.4.3 Continuité des différents moments incidents, réfléchis et globaux à la paroi

Une étape primordiale du présent travail est de s'assurer de la définition de problèmes aux limites bien posés au sens de Cauchy aux parois. En d'autres mots, il faudrait vérifier que les conditions aux limites eulériennes définies au chapitre 2 permettent l'obtention de la continuité jusqu'à la paroi des moments tant incidents, réfléchis que globaux. Notre argumentation pour atteindre cet objectif sera dans un premier temps de vérifier que les formulations exactes (3.78) à (3.81), des moyennes à la paroi conduisent bel et bien à la continuité des différents moments jusqu'à paroi, puis de comparer les conditions aux limites analytiques du chapitre 2 aux résultats obtenus à partir des formulations exactes. Pour ce faire au cours des simulations, nous évaluons à la fois les moyennes à la paroi à partir des équations (3.78) à (3.81), les moments incidents, réfléchis et globaux à l'aide des nouvelles procédures de calculs de moyennes.

Les figures 3.22 à 3.23 présentent les moments incidents, réfléchis et globaux de quelques propriétés statistiques de la phase dispersée dans le cadre de simulations en parois rugueuses ($\Delta\gamma = 2.5^\circ$) sans collisions entre particules pour les cas de Stokes $St = 0.65$ et $St = 1.3$. Ces résultats montrent dans un premier temps que les algorithmes de calcul de moyennes volumiques incidentes et réfléchies et du calcul de moyennes aux parois fictives conduisent non seulement aux mêmes résultats en ce qui concerne les moments incidents et réfléchis, mais aussi les résultats des moments globaux dont ils permettent l'obtention (à partir de l'équation (3.88)) sont en parfait accord avec les résultats du calcul de moyenne volumique global (3.54).

Dans un second temps, ayant positionné les valeurs à la paroi de ces différents moments sur ces figures, il peut être observé que les différents moments incidents, réfléchis comme globaux [à savoir

$(n_p^-, n_p^+, n_p), (U_p^-, U_p^+, U_p), (\langle v_p' v_p' \rangle_p^-, \langle v_p' v_p' \rangle_p^+, \langle v_p' v_p' \rangle_p)$ et $(\langle u_p' u_p' v_p' \rangle_p^-, \langle u_p' u_p' v_p' \rangle_p^+, \langle u_p' u_p' v_p' \rangle_p)$ sont continus jusqu'à la paroi. Cela signifie que les formulations exactes (3.78) à (3.81) des moyennes à la paroi mènent à un problème bien posé au sens de Cauchy à la paroi.

Tous ces résultats valident au final, non seulement la méthode de calcul de moyennes à la paroi (sous-section § 3.4.1), mais aussi les deux nouvelles procédures de moyennes (sous-section § 3.4.2). Il est important de faire remarquer que l'algorithme de moyennes aux parois fictives converge plus vite que les algorithmes de moyennes volumiques. En effet, dans le cadre de l'algorithme des parois fictives, même avec des tranches très fines (ce qui est le cas en région de proche paroi), puisqu'il n'est plus question du nombre de particules dans une tranche pour l'obtention des statistiques mais plutôt de la vitesse des particules à la traversée des limites des tranches, la taille des tranches ne constitue plus un obstacle dans le processus de moyennes.

Avec la présente validation de la méthode de calcul de moyennes à la paroi, nous estimons maintenant au cours des simulations, les conditions aux limites présentées dans les tableaux 2.1 (conditions aux limites obtenues par la modélisation directe⁴) et 2.4 (conditions aux limites obtenues avec le modèle de corrélation partielle) à partir des équations (3.82), (3.83) et (3.84). Le tableau 3.4.3 exhibe l'erreur relative commise par les deux modélisations des différents moments aux limites par rapport aux moyennes exactes calculées à partir des équations (3.78), (3.79), (3.80) et (3.81). Les pourcentages d'erreurs obtenus montrent des erreurs relatives de 0.0% à 15% environ pour les conditions aux limites obtenues par la modélisation directe (voir tableau 2.1). Ce résultat est la conséquence du d.l à l'ordre 2 effectué sur les fonctions $\gamma \mapsto \sin(\gamma)$ et $\gamma \mapsto \cos(\gamma)$. Les effets conjugués de la linéarisation de ces fonctions et de la corrélation partielle ont conduit à aux erreurs relatives de moins de 2.0% à moins de 25% sur l'ensemble des conditions aux limites. Ce résultat est assez raisonnable en raison de la forte hypothèse de corrélation partielle. Au total, la méthodologie de dérivation des conditions aux limites euleriennes telle que présentée au chapitre 2 est satisfaisante.

3.4.4 Etude des PDF des angles d'incidence et de rebond

La figure 3.24 présente la PDF des angles d'incidence α^- des particules sur les parois. Les résultats montrent que les particules ont une probabilité très élevée d'heurter les parois du canal avec des angles d'incidence très rasants. Il peut être cependant observé que l'augmentation de la rugosité entraîne une

⁴Dans les présentes simulations numériques, nous avons plutôt effectué des d.l à l'ordre 2 des fonctions $\gamma \mapsto \sin(\gamma)$ et $\gamma \mapsto \cos(\gamma)$ contenues dans les conditions aux limites du tableau 2.1.

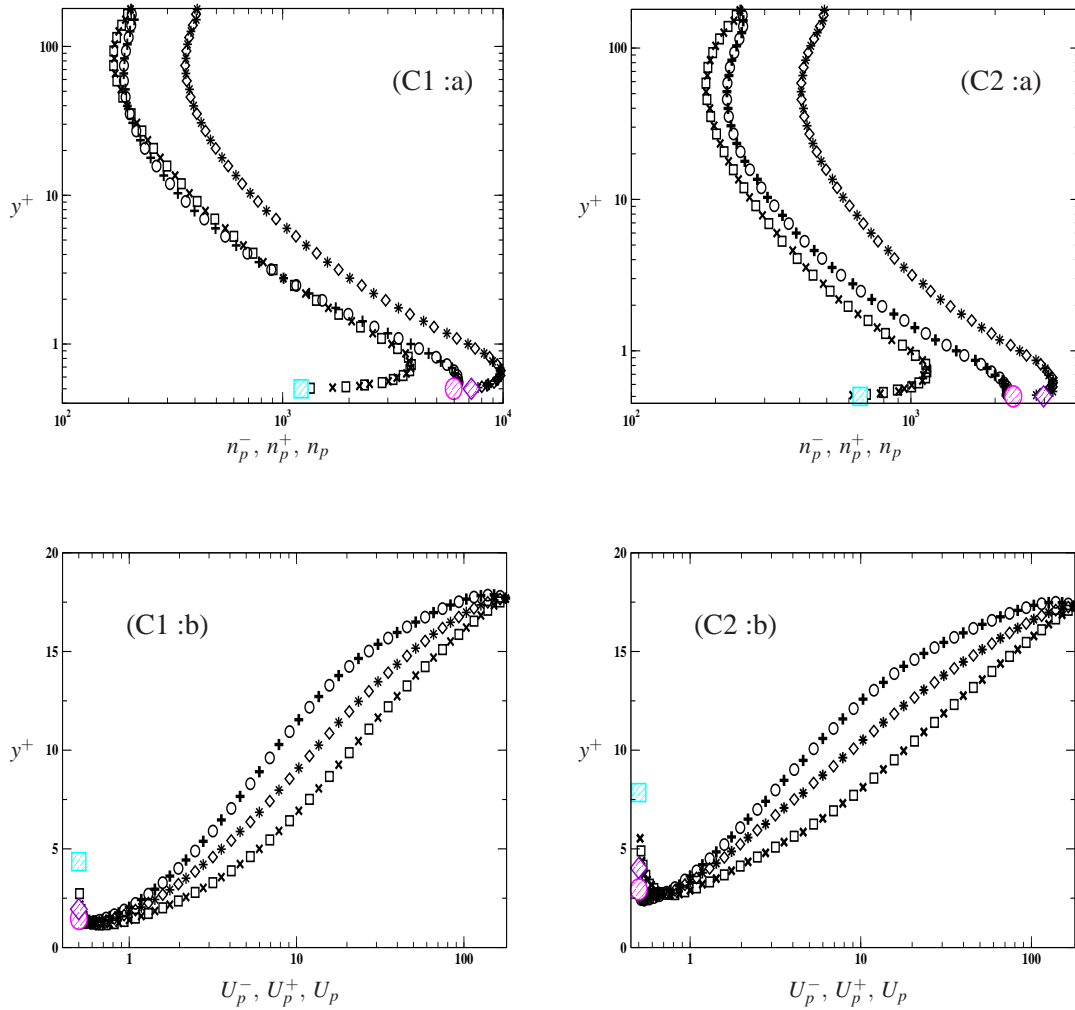


FIG. 3.22 – Quelques moments incidents ($\langle \dots \rangle_p^-$), réfléchis ($\langle \dots \rangle_p^+$) et globaux de la phase dispersée ($\langle \dots \rangle_p$) calculés à partir de différents algorithmes pour le cas de rugosité $\Delta\gamma = 2.5^\circ$. Algorithme de calcul de moyenne volumiques incidentes et réfléchies : (\circ) : $\langle \dots \rangle_p^-$, (\square) : $\langle \dots \rangle_p^+$ et (\diamond) : $\langle \dots \rangle_p$. Algorithme de paroi fictive : (+) : $\langle \dots \rangle_p^-$, (\times) : $\langle \dots \rangle_p^+$ et (*) : $\langle \dots \rangle_p$. Trait continu grisé : moyenne volumique globale classique calculée à partir de (3.54). Les symboles hachurés évoquent les moyennes des différents moments calculés à la paroi : "rond hachuré $\equiv \langle \dots \rangle_p^-$ ", "carré hachuré $\equiv \langle \dots \rangle_p^+$ " et "losange hachuré $\equiv \langle \dots \rangle_p$ ". (C1) & (C2) représentent respectivement les cas avec $St = 0.65$ et $St = 1.3$.

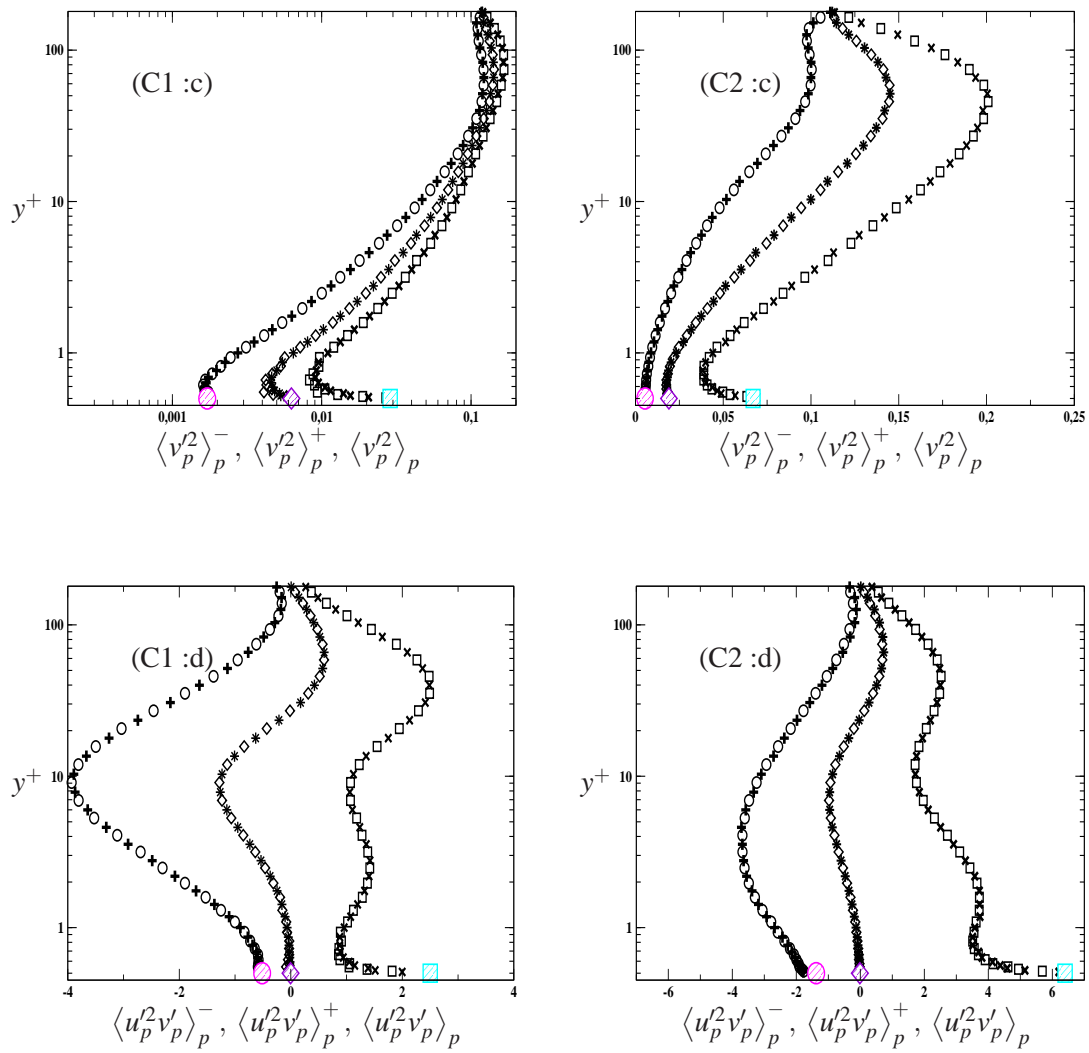


FIG. 3.23 – Même légende que la figure 3.22.

diminution de cette probabilité et qu'en plus il apparaît des angles d'incidence de plus en plus élevés. Par exemple avec $\Delta\gamma = 2.5^\circ$, les résultats montrent que les angles d'incidence demeurent inférieur à 5° ; alors que l'augmentation de l'écart type de rugosité à $\Delta\gamma = 5.0^\circ$ a conduit quelques particules à heurter la paroi avec des incidences de l'ordre de 15° (voir 3.24-(b-1)). Ces mêmes modifications qui demeurent avec les effets conjugués de la rugosité des parois et des collisions entre particules, sont en outre plus accentuées avec l'inertie des particules.

Il convient de faire remarquer que les angles d'incidence étant presque tous rasants, la plupart des collisions particule/paroi rugueuse sont nécessairement concernée par le "*shadow effect*".

D'autre part, la PDF de l'angle de rebond α^+ étant l'un des principaux éléments caractéristiques du modèle de rebond, nous l'avons tracé sur la figure 3.25, à partir des simulations. Ce résultat est comparée à la modélisation de la probabilité de transition proposée par les équations ((2.32)- (2.33)), afin de vérifier la pertinence de ladite modélisation. En outre, en raison de l'impossibilité numérique d'obtenir une valeur fixée de α^- au cours de la simulation, nous avons plutôt calculé la PDF de α^+ sachant que l'angle d'incidence α^- balaye la plage $[\alpha^- - \varepsilon, \alpha^- + \varepsilon]$, où ε doit être petit mais suffisamment grand pour permettre l'obtention de distributions assez raisonnables. Les résultats montrent une forme commune de la PDF de α^+ caractérisée par une très forte probabilité pour une particule à incidence rasante (puisque pour les résultats présentés, $\alpha^- \in [0.8^\circ, 1.0^\circ]$) de rebondir avec un angle rasant. Donc la quasi-totalité des particules incidentes à la paroi ont une probabilité très forte de rester rasante après le rebond. En outre, l'augmentation de l'écart type des angles de rugosité n'a eu pour effet que l'élargissement de la distribution des angles de rebond. En effet, avec $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ la distribution de l'angle de rebond α^+ était confinée dans $]0^\circ, 20.0^\circ]$ (voir figure 3.24-(a)); tandis qu'ayant augmenté l'écart type à $\Delta\gamma = 5.0^\circ$, la plage de α^+ s'est étendue à l'intervalle $]0^\circ, 33.0^\circ]$.

Ce résultat est insuffisant, puisque bien que l'élargissement de la distribution de l'angle de rebond à des valeurs élevées soit une conséquence observée expérimentalement, il demeure un véritable problème : celui des particules qui repartent rasantes.

Aussi, on observe sur la figure 3.25, la parfaite concordance entre la PDF de α^+ obtenue à partir de la simulation et la modélisation de la probabilité de transition (2.32)-(2.33) issue du modèle lagrangien de rebond sur paroi rugueuse de Sommerfeld & Huber [98].

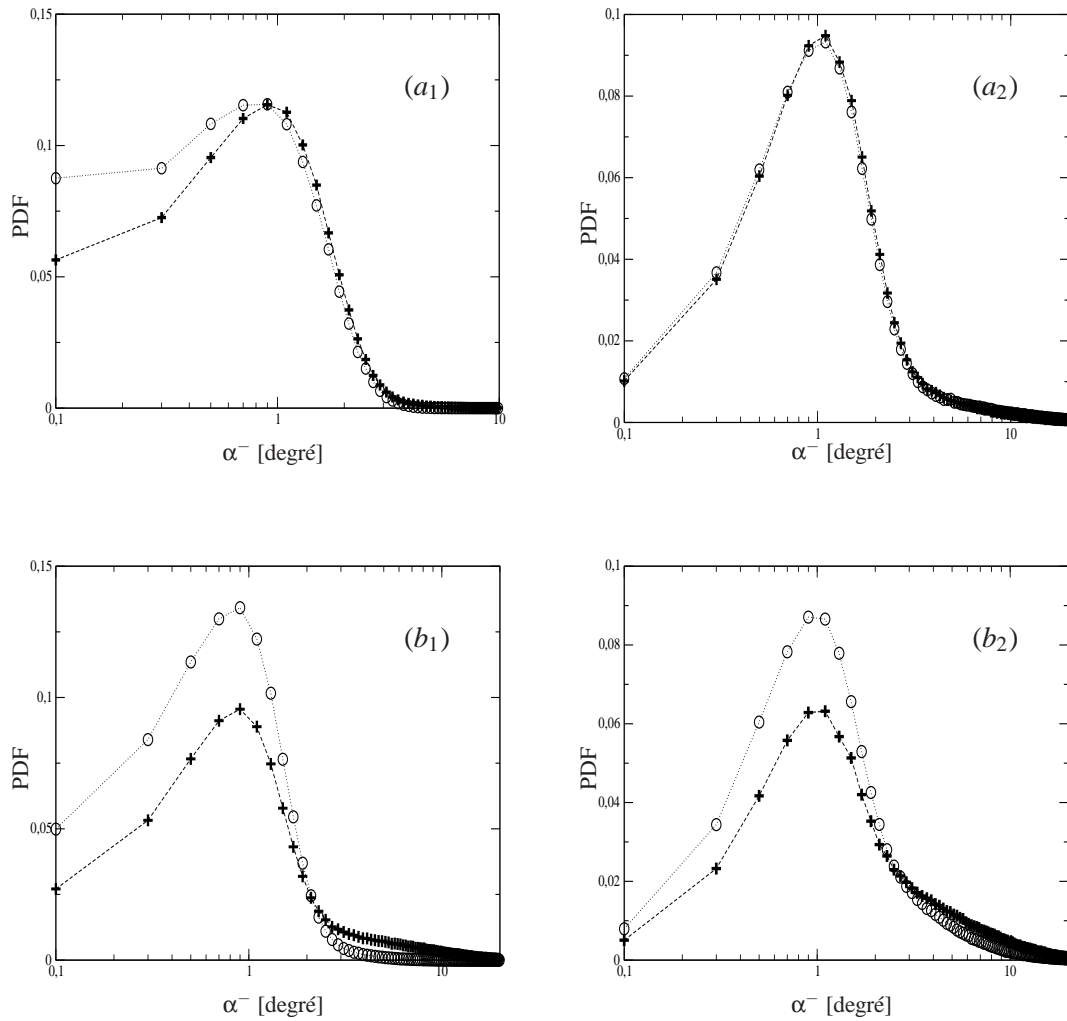


FIG. 3.24 – Distributions de l'angle d'incidence des particules sur les parois mesurées au cours des simulations LES/DPS. (a) $St = 0.65$ et (b) $St = 1.3$. Les indices 1 et 2 correspondent respectivement aux simulations sans collisions entre particules et avec collisions. "○" : $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et "+" : $\Delta\gamma = 5.0^\circ$.

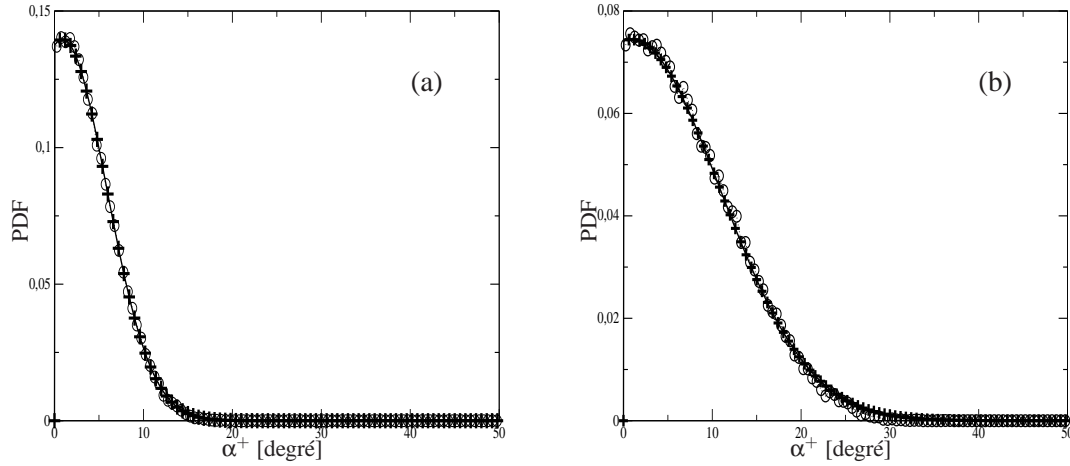


FIG. 3.25 – PDF de l'angle de rebond des particules pour une incidence α^- telle que $\alpha^- \in [0.8^\circ, 1.0^\circ]$. Particules telles que $St = 0.65$: (a) $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et (b) $\Delta\gamma = 5.0^\circ$. "○" : Simulation LES/DPS et "+" : Modélisation de la probabilité de transition (2.32)- (2.33).

3.5 Critique du modèle lagrangien de rebond et conclusion du chapitre

Les simulations LES/DPS présentées dans ce chapitre ont montré la pertinence et la précision de la modélisation eulérienne des conditions aux limites aux parois rugueuses. En effet, les comparaisons des résultats de la DPS à la paroi avec ceux des formulations analytiques ont montré de bons accords, que ce soit pour des simulations avec collisions ou non, et quelque soit l'inertie des particules (bien sûr que les particules sont censées être inertielles). Ainsi, les formulations des conditions aux limites à la paroi permettent la définition de problème bien posé au sens de Cauchy aux parois. En plus, les PDF de rebond des particules obtenues à partir des simulations sont en parfait accord avec la modélisation eulérienne de la probabilité de transition. Ces résultats confirment que la modélisation eulérienne proposée au chapitre 2 retranscrit l'effet de paroi rugueuse tel que suggéré par le "*shadow effect model*" de Sommerfeld & Huber (1999) [98].

Nous avons par ailleurs, obtenu à l'état stationnaire que le rapport $\frac{n_p^+}{n_p^-}$ demeure fini, contrairement à nos résultats eulérien. Cependant les simulations lagrangiennes ont prouvé que les particules ont une très forte probabilité de repartir rasantes après le rebond. Ce résultat qui est en accord avec la modélisation eulérienne, confirme nos précédentes critiques quant au fait que ce modèle favorise énormément des angles de rebonds quasiment nuls. En outre, une particule ne saurait rester indéfiniment rasante à la paroi puisqu'elle pourrait heurter une autre aspérité de la paroi ; ce qui assurerait certainement son retour

dans le cœur de l'écoulement. Or une telle éventualité est inimaginable avec le "*shadow effect model*" dont l'analyse qui a mené à sa conception a ignoré les hauteurs de rugosité d'une paroi (tout comme le "*Abnormal bouncing model*" (Tsuji *et. al* (1987)[107],[106]) ancêtre du "*shadow effect model*"); si bien qu'il n'intègre pas de mécanisme capable de reproduire cet effet. Par ailleurs, en s'appuyant sur l'approche PDF de la description des propriétés statistiques de la phase dispersée (Simonin, 1996 [89]), les mécanismes pilotant l'influence de la rugosité des parois sur les premiers moments de la phase particulaire ont été mis en évidence à l'aide du "*Shadow Effect Model*". Cependant il est ressorti de cette analyse, une sous-estimation des principaux mécanismes responsables des modifications des premiers moments de la phase dispersée, à savoir la dispersion turbulente et la production d'énergie à la paroi par les gradients de vitesses longitudinaux.

Au vu de ces résultats, nous sommes en droit de nous interroger de la validité de la modélisation des interactions particules-paroi rugueuse par le "*shadow effect model*". Dans ces circonstances, il est impératif d'étudier le réel comportement d'une particule qui heurte une paroi rugueuse quelconque afin d'exhiber les mécanismes mis en évidence lors du rebond, en vue de la modélisation.

	$St = 0.65$						$St = 1.3$									
	Sans collisions			Avec collisions			Sans collisions			Avec collisions						
	$\Delta\gamma = 2.5^\circ$	$\Delta\gamma = 5.0^\circ$	$\Delta\gamma = 2.5^\circ$	$\Delta\gamma = 5.0^\circ$	$\Delta\gamma = 2.5^\circ$	$\Delta\gamma = 5.0^\circ$	$\Delta\gamma = 2.5^\circ$	$\Delta\gamma = 5.0^\circ$	$\Delta\gamma = 2.5^\circ$	$\Delta\gamma = 5.0^\circ$	$\Delta\gamma = 2.5^\circ$	$\Delta\gamma = 5.0^\circ$				
$n_p \langle u_p' v_p' \rangle_p$	MD	MCP	MD	MCP	MD	MCP	MD	MCP	MD	MCP	MD	MCP				
$n_p \langle u_p' v_p' w_p' \rangle_p$	3.52	3.64	8.22	7.65	5.25	6.52	1.27	1.80	0.28	5.28	0.50	0.04	6.80	6.74	0.71	2.51
$n_p \langle u_p^2 v_p' \rangle_p$	0.05	-	0.0	-	0.13	-	0.0	-	0.0	-	0.0	-	0.17	-	0.0	-
$n_p \langle v_p^3 \rangle_p$	13.03	5.05	13.47	8.59	4.97	12.92	9.05	3.08	12.63	6.40	8.81	1.13	6.42	6.74	5.97	2.05
$n_p \langle v_p' v_p' \rangle_p$	-	14.31	-	23.19	-	7.79	-	17.44	-	16.25	-	14.02	-	8.83	-	11.45
$n_p \langle v_p^2 w_p' \rangle_p$	-	1.22	-	4.89	-	0.43	-	1.16	-	6.70	-	0.16	-	0.60	-	0.38
$\frac{n_p^+}{n_p^-} [-]$	0.20		0.16		0.82		0.69		0.26		0.55		0.89		0.65	

TAB. 3.2 – Erreur relative (%) commise dans la modélisation des flux à la paroi.

Chapitre 4

Vers une nouvelle modélisation lagrangienne des interactions particules-paroi rugueuse

4.1 Introduction

L'état actuel de la compréhension des mécanismes intervenant au cours de l'interaction des particules avec les parois rugueuses permis à Sommerfeld & Huber (1999) [98] de proposer le "*shadow effect model*". A la fois très sophistiqué et simple dans sa mise en œuvre, ce modèle stochastique nous a permis d'expliquer les mécanismes responsables des modifications des propriétés statistiques de la phase dispersée solide d'un écoulement diphasique confiné, dont les parois sont rugueuses. Cependant les précédentes simulations lagrangiennes réalisées avec ledit modèle ont exhibé un comportement "*non physique*" traduit par une forte génération de particules rasantes juste après le rebond. Cet aspect "*inattendu*" du "*shadow effect model*" a été, en outre, tenu pour responsable de l'échec de la dérivation de conditions aux limites eulériennes à la paroi (chapitre 2). Ces résultats laissent imaginer une compréhension partielle de l'interaction entre la particule incidente et la paroi rugueuse. Ainsi pour l'améliorer, une étude statistique de collisions de particules sur une paroi rugueuse géométrique est réalisée par Kannengieser (2006) [47]. Ce travail est succinctement présenté en mettant l'accent sur les principaux résultats obtenus. Dans une seconde partie, des simulations lagrangiennes à bas nombre de Reynolds du fluide sont réalisées dans un canal vertical où les parois rugueuses sont modélisées par une approche géométrique afin d'évaluer les modifications en comparaison avec "*shadow effect model*". Ensuite, une modélisation stochastique

lagrangienne s'appuyant sur les mécanismes mis en exergue par l'étude de Kannengieser (2006) [47] est proposée. Ce modèle est d'abord validé à partir de simulations lagrangiennes à bas nombre de Reynolds du fluide, puis il est utilisé pour prédire les propriétés statistiques de la phase dispersée de l'écoulement diphasique expérimental gaz/particule réalisé en canal horizontal dont les parois sont rugueuses par Sommerfeld & Kussin (2004) [99].

4.2 Etudes préliminaires de base

Cette étude préliminaire réalisée par O. Kannengieser dans le cadre de son mémoire de master (2006) [47] a consisté à analyser les mécanismes qui apparaissent lors du rebond d'une particule incidente sphérique sur une paroi rugueuse déterministe quelconque. Pour atteindre cet objectif, bien que la rugosité soit en réalité tridimensionnelle, deux types de parois rugueuses bi-dimensionnelles déterministes ont été initialement simulées.

La première paroi était construite suivant le modèle de distribution aléatoire gaussienne des angles de rugosité de la paroi (Sommerfeld (1992) [96]). D'une manière plus pratique, la paroi est simulée en reliant un nombre fini N de points $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$ générés à l'aide du système d'équations :

$$\begin{cases} x_1 = 0, y_1 = 0 \\ x_{i+1} = x_i + \Delta x, & (i = 2, N) \\ y_{i+1} = y_i + \Delta x \cdot \tan \gamma_i, & (i = 2, N) \end{cases} \quad (4.1)$$

où Δx est une distance quelconque fixée dont la modification conduit à une simple transformation homothétique de la paroi rugueuse simulée. γ_i est le $i^{\text{ème}}$ angle de rugosité tiré aléatoirement dans la distribution gaussienne inconditionnelle :

$$P_g(\Delta\gamma, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\gamma^2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\Delta\gamma^2}\right) \quad (4.2)$$

avec $\Delta\gamma$ l'écart type de la distribution des angles de rugosité.

Contrairement à la première paroi rugueuse où les hauteurs et positions des aspérités étaient ignorées, la seconde a été construite à partir du modèle stochastique de paroi géométrique déterministe de Tsirkunov & Panfilov (1998) [105] décrit au chapitre 2.

Afin d'étudier le comportement statistique de l'interaction particule/paroi rugueuse à travers les fonctions de distribution des angles de paroi "vus" par la particule incidente et celles des angles de rebonds,

des milliers de particules étaient lancées sur ces deux parois géométriques pour une incidence α^- donnée, à différentes abscisses x_p choisies de manière aléatoire et ce, au dessus de la plus haute aspérité de chaque paroi (c'est à dire $y_p > \max_{1 \leq i \leq N} (y_i)$).

Tout comme Tsirkunov & Panfilov (1998) [105], il était permis aux particules incidentes qui après un précédent rebond repartaient soit encore vers la paroi (figure 4.1-(a)) ou soit avec un angle très rasant, d'effectuer plusieurs rebonds de sorte à quitter la paroi (figure 4.1-(b)). Cette hypothèse semblait assez raisonnable puisque des tests préalables permettaient de conclure que le temps maximum mis pour réaliser ces multiples rebonds était négligeable devant le temps de relaxation des particules. Pour de plus amples informations sur la réalisation des calculs des rebonds des particules sur ces parois, le lecteur est invité à consulter les références [47] et [48].

Ses simulations numériques ont mis en évidence trois importants résultats, identiques pour les deux parois rugueuses géométriques simulées :

- la distribution de probabilité de l'angle de paroi γ_1 "vu" par une particule incidente au tout premier rebond est exactement reproduite par la *PDF effective* donnée par Sommerfeld & Huber (1999) [98] (voir figure 4.2).

- une particule ayant α_1^+ comme angle au premier rebond a une probabilité non nulle d'effectuer plus d'un rebond, indépendamment de l'angle d'incidence α^- , même lorsque l'angle du premier rebond α_1^+ est positif (voir figure 4.3).

- la PDF de l'angle de rebond final des particules qui réalisent plus d'un rebond est pratiquement la même que celles des particules effectuant un et un seul rebond (figure 4.4).

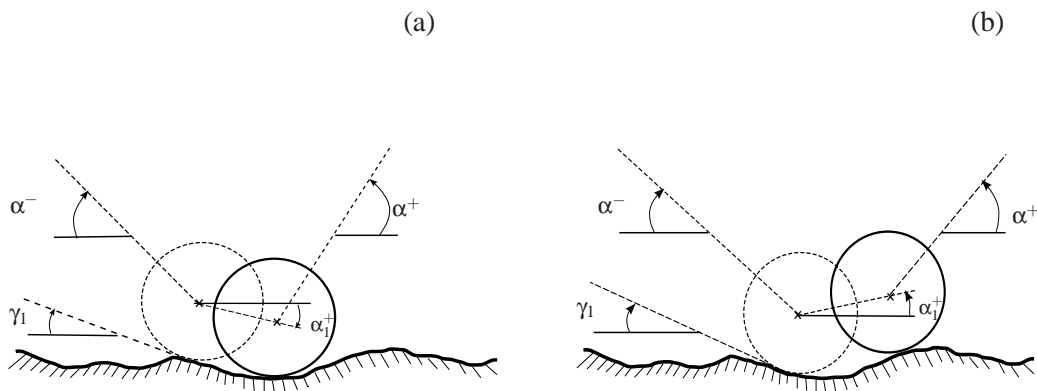


FIG. 4.1 – Illustration des rebonds multiples. (a) Cas où après un premier rebond la particule plonge toujours vers la paroi. (b) Cas où après un premier rebond la particule rebondit avec un angle positif.

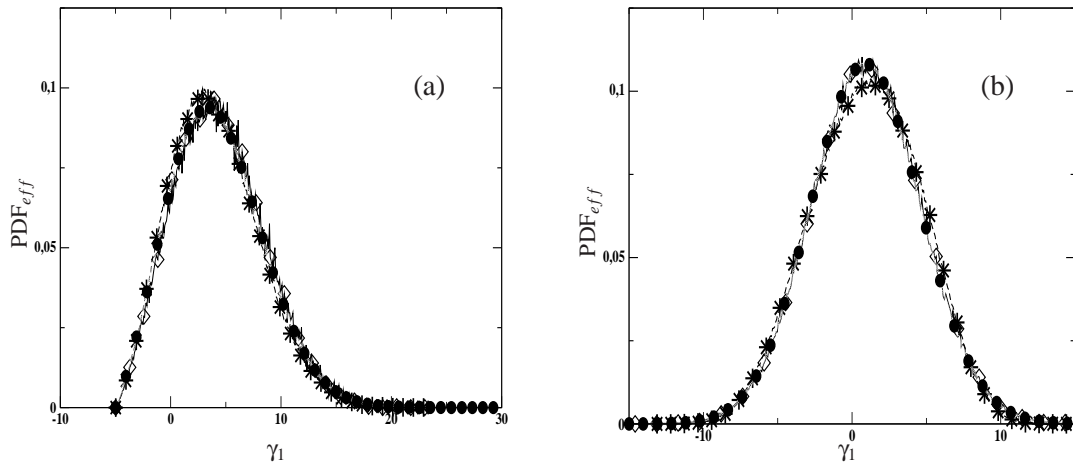


FIG. 4.2 – PDF de l'angle de paroi " γ_1 " vu par une particule incidente au tout premier rebond sur une paroi rugueuse : (\diamond) paroi géométrique avec distribution gaussienne des angles de rugosité (Sommerfeld, 1992) [96], ($*$) paroi géométrique avec distribution gaussienne des hauteurs et positions des aspérités (Tsirkunov & Panfilov, 1998) [105], (\bullet) PDF effective de l'angle de rugosité "vu" par une particule incidente (Sommerfeld & Huber, 1999) [98]. (a) cas de particule de diamètre $d_p = 100\mu\text{m}$ ($\alpha^- = 5.0^\circ$ et $\Delta\gamma = 5.3^\circ$) et (b) cas de particule de diamètre $d_p = 500\mu\text{m}$ ($\alpha^- = 15.0^\circ$ et $\Delta\gamma = 3.8^\circ$)

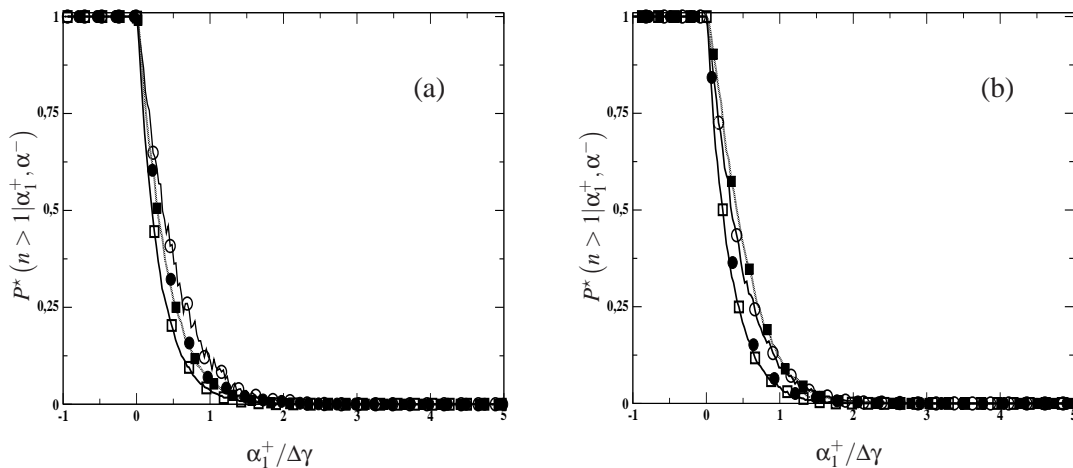


FIG. 4.3 – Probabilité d'effectuer plus d'un rebond en fonction de l'angle de rebond à l'issue de la première collision. (\circ) paroi géométrique avec distribution gaussienne des angles de rugosité (Sommerfeld, 1992) [96], (\square) paroi géométrique avec distribution gaussienne des hauteurs et positions des aspérités (Tsirkunov & Panfilov, 1998) [105]. Les symboles creux et pleins représentent respectivement les incidences $\alpha^- = 5.0^\circ$ et $\alpha^- = 15.0^\circ$. (a) cas de particule de diamètre $d_p = 100\mu\text{m}$ ($\alpha^- = 5.0^\circ$ et $\Delta\gamma = 5.3^\circ$) et (b) cas de particule de diamètre $d_p = 500\mu\text{m}$ ($\alpha^- = 15.0^\circ$ et $\Delta\gamma = 3.8^\circ$)

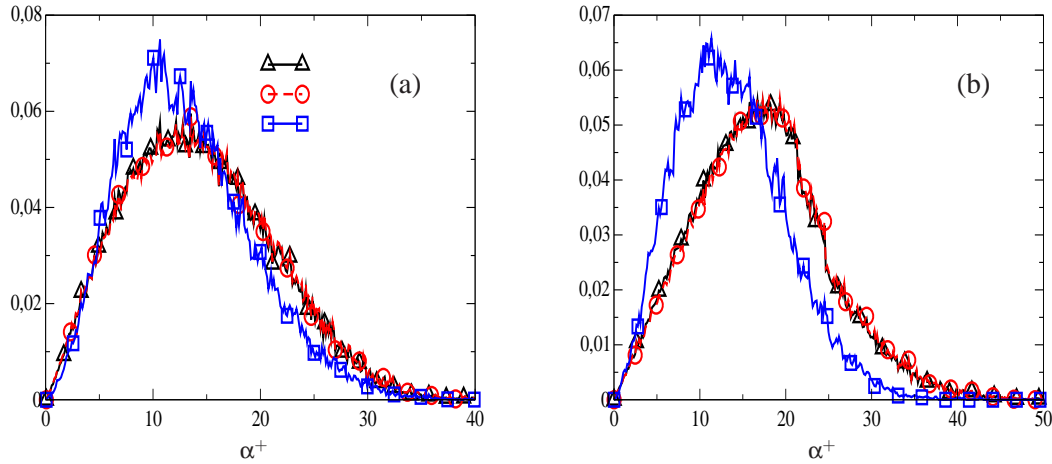


FIG. 4.4 – Distribution de l'angle de rebond final sachant n rebonds effectués avant de quitter la paroi. (\triangle) PDF de rebond de l'ensemble des particules, (\circ) PDF de rebond des particules ayant réalisé qu'un seul rebond ($n = 1$) et (\square) PDF de rebond des particules ayant effectué plus d'un rebond ($n > 1$). Rebonds de particules de diamètre $d_p = 500 \mu\text{m}$ avec (a) : $\alpha^- = 5.0^\circ$ et (b) : $\alpha^- = 15.0^\circ$.

4.3 Simulations LES+DPS à bas Reynolds avec rebonds multiples déterministes

La principale problématique est désormais d'évaluer le réel impact des rebonds multiples sur les propriétés statistiques de la phase dispersée d'un écoulement diphasique gaz-particules. Pour ce faire, nous reprenons la configuration de l'écoulement présenté dans le précédent chapitre avec pour seule différence le traitement des rebonds particules-paroi rugueuse.

4.3.1 Méthode de traitement du rebond particules-paroi rugueuse

La méthode de traitement des rebonds se résume en deux points. Il s'agit dans un premier temps de réaliser une paroi rugueuse déterministe à l'aide de l'une des deux méthodes succinctement présentées à la section précédente. Pour ces simulations, nous avons utilisé le modèle de distribution aléatoire gaussienne des angles de rugosité. Dans un second temps, chaque fois que la particule de diamètre d_p heurte la paroi (c'est à dire $y_p < d_p/2$ ou $y_p > L_y - d_p/2$), nous supposons que celle-ci pénètre avec ces caractéristiques cinématiques dans une "boîte noire", dans laquelle elle effectuera de multiples rebonds tant qu'elle repart rasante ou qu'elle se trouve dirigée vers la paroi après un précédent rebond (voir figure 4.5). Notons que l'abscisse de la particule est définie de manière aléatoire à l'entrée dans la boîte noire, tandis que son ordonnée est prise bien au delà de la plus haute aspérité de la paroi géométrique. Pour

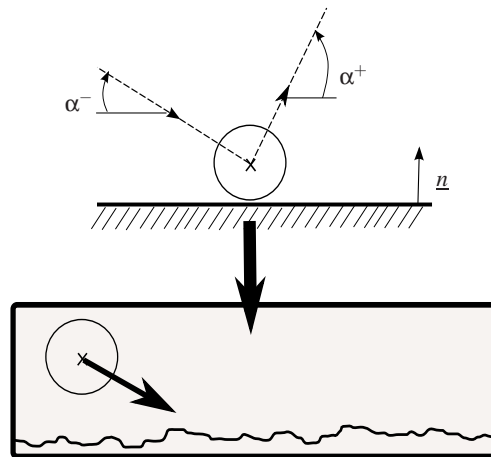


FIG. 4.5 – Illustration du modèle de *boîte noire*.

finir, la particule sort de la "*boîte noire*" avec ses nouvelles caractéristiques cinématiques au même point d'entrée seulement lorsqu'elle n'est plus rasante à la paroi et qu'elle n'est non plus dirigée contre celle-ci.

4.3.2 Analyse des résultats de simulations

Les simulations mono-disperses sont effectuées pour chaque groupe de particules de Stokes de 0.65 et 1.3 étudiés précédemment avec les deux écarts types d'angle de rugosité $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et $\Delta\gamma = 5.0^\circ$. Afin de mettre uniquement en évidence l'effet des rebonds multiples, les collisions entre particules ne sont pas prises en compte dans les présentes simulations. Pour une propriété statistique donnée de la phase dispersée, les figures présentent à la fois les résultats de simulations obtenus par l'application du "*shadow effect model*" et de la nouvelle méthode adoptée pour le traitement de l'interaction particules/paroi rugueuse.

- Densité numérique de particules

D'importantes modifications de la densité numérique de particules dans tout le canal sont observées sur les figures 4.6-(a), 4.8-(a), 4.10-(a) et 4.12-(a) respectivement pour les cas définis par les couples $(St = 0.65, \Delta\gamma = 2.5^\circ)$, $(St = 0.65, \Delta\gamma = 5.0^\circ)$, $(St = 1.3, \Delta\gamma = 2.5^\circ)$ et $(St = 1.3, \Delta\gamma = 5.0^\circ)$. Globalement, en raison des rebonds multiples que peut subir une particule avant de retourner dans l'écoulement, il apparaît une forte réduction d'en moyenne de 60% à la paroi (à $y^+ \simeq 0.509$), et qui décroît progressivement en s'éloignant de la paroi jusqu'à $y^+ \simeq 30$. Au delà de $y^+ \simeq 30$ jusqu'au centre une légère augmentation (par exemple de 12% en moyenne à $y^+ \simeq 103$) est observée sur la densité numérique de particules.

Au total, la distribution des particules dans le canal a subi du fait des rebonds multiples d'importantes transformations aussi bien dans la région de paroi que dans le centre du canal.

- Vitesse longitudinale moyenne de la phase dispersée

Il peut être observé sur les figures 4.6-(b), 4.8-(b), 4.10-(b) et 4.12-(b) que proche de la paroi, la vitesse moyenne des particules augmente d'en moyenne 23 – 60% de ($\Delta\gamma = 2.5^\circ, St = 0.65$) à ($\Delta\gamma = 5.0^\circ, St = 1.3$). Cette augmentation se réduit progressivement en s'éloignant des parois jusqu'à obtenir une réduction relativement faible d'environ 2% au centre du canal par rapport à la vitesse moyenne obtenue à l'aide du "*Shadow Effect Model*". Ces transformations induites par les rebonds multiples ont conduit à un profil plus uniforme de la vitesse moyenne des particules dans le canal.

-Moments du second et du troisième ordre

Les résultats des figures 4.6-4.13 concernant les différents moments du second et du troisième ordre montrent une réelle influence des rebonds multiples sur ces statistiques. En effet avec l'introduction des rebonds multiples, la corrélation $\langle v'_p v'_p \rangle_p$ de la vitesse fluctuante normale à la paroi a systématiquement augmentée depuis la paroi (par exemple d'environ 311% pour le cas défini par le couple [$St = 0.65, \Delta\gamma = 2.5^\circ$] à $y^+ \simeq 0.509$) jusqu'au centre de l'écoulement. De pareilles modifications marquées par de réelles augmentations dans la région de proche paroi sont constatées au sujet du cisaillement $\langle u'_p v'_p \rangle_p$ et des corrélations de la vitesse fluctuante longitudinale $\langle u'_p u'_p \rangle_p$ et transversale $\langle w'_p w'_p \rangle_p$. Les corrélations triples $\langle v'_p v'_p v'_p \rangle_p$, $\langle u'_p u'_p v'_p \rangle_p$ et $\langle v'_p w'_p w'_p \rangle_p$ présentent tout comme les moments d'ordres inférieurs, l'influence des rebonds multiples pour tous les cas simulés. Par exemple pour le cas défini par ($St = 0.65, \Delta\gamma = 2.5^\circ$), le moment $\langle v'_p v'_p v'_p \rangle_p$ augmente non seulement d'environ 477.79% à la paroi (à $y^+ \simeq 0.509$), mais aussi présente une forte amplification du maximum relatif enregistré en très proche paroi (à $y^+ \simeq 15$) tout en conservant le même profil.

En résumé, les rebonds multiples ont eu pour conséquence d'accentuer l'effet de paroi rugueuse en intensifiant l'agitation et la dispersion des particules, tout en assurant une forte réduction du nombre de particules en paroi. Cependant, quels mécanismes justifient ces modifications ?

En accord avec les mécanismes proposés au chapitre précédent, l'augmentation de l'agitation normale à la paroi $\langle v_p'^2 \rangle_p$ dans tout le canal, en entraînant ainsi la réduction de la densité numérique de particules n_p à la paroi et son augmentation dans le centre du canal était entièrement justifié par l'augmentation du flux $n_p \langle v_p'^3 \rangle_p$ à la paroi. Or dans le cadre des présentes simulations, les figures 4.14-(a) à

4.14-(d) montrent pour chaque intensité de rugosité donnée, qu'avec les rebonds multiples le flux $n_p \langle v_p'^3 \rangle_p$ augmente fortement à la paroi. En conséquence, nous obtenons le schéma récapitulatif suivant :

$$\begin{array}{l} \text{Pour } \Delta\gamma \text{ fixé,} \\ \text{les Rebonds Multiples} \end{array} \implies \underbrace{n_p \langle v_p'^3 \rangle_p}_{\text{à la paroi}} \nearrow \implies \underbrace{-\frac{1}{n_p} \frac{\partial}{\partial y} (n_p \langle v_p'^3 \rangle_p)}_{\text{dans tout le canal}} \nearrow \implies \underbrace{\langle v_p'^2 \rangle_p}_{\text{dans tout le canal}} \nearrow \implies \left| \begin{array}{l} n_p \searrow \text{ à la paroi} \\ n_p \nearrow \text{ loin de la paroi} \end{array} \right.$$

Bien qu'étant relativement faible, une augmentation du flux $n_p \langle u_p' v_p' \rangle_p$ apparaît à la paroi avec l'introduction des rebonds multiples des particules sur la paroi (figure 4.15), en dépit de l'absence de friction. Il peut, en outre, être clairement observé une augmentation de la pente de $n_p \langle u_p' v_p' \rangle_p$ au delà de $y^+ \simeq 30$ jusqu'au centre. Ce qui logiquement entraîne une augmentation de la dispersion turbulente à proximité de la paroi (voir figure 4.16). Le mécanisme induit par les rebonds multiples sur la vitesse peut alors se résumer comme suit :

$$\begin{array}{l} \text{Pour } \Delta\gamma \text{ fixé,} \\ \text{les Rebonds Multiples} \end{array} \implies \underbrace{n_p \langle u_p' v_p' \rangle_p}_{\text{à la paroi}} \nearrow \implies \left| \begin{array}{l} \underbrace{-\frac{1}{n_p} \frac{\partial}{\partial y} (n_p \langle u_p' v_p' \rangle_p)}_{\text{proche paroi}} \nearrow \\ \underbrace{-\frac{1}{n_p} \frac{\partial}{\partial y} (n_p \langle u_p' v_p' \rangle_p)}_{\text{au centre}} \searrow \end{array} \right. \implies \left| \begin{array}{l} U_p \nearrow \text{ en proche paroi,} \\ U_p \searrow \text{ au centre} \\ \hline U_p \text{ devenu plus uniforme} \end{array} \right.$$

Les figures 4.17 et 4.18 respectivement de la production d'énergie par les gradients de vitesses longitudinaux en paroi et de la dispersion turbulente, de l'équation de l'agitation longitudinale des particules (3.68), révèlent une l'amplification du mécanisme de production tandis que le mécanisme de dispersion turbulente subit un très léger accroissement, avec la prise en compte des rebonds multiples. Il ressort de cette analyse que l'explication de l'augmentation de l'agitation longitudinale des particules lorsque celles-ci effectuent des rebonds multiples est donnée par le schéma ci-dessous :

$$\begin{array}{l} \text{Pour } \Delta\gamma \text{ fixé,} \\ \text{les Rebonds Multiples} \end{array} \implies \underbrace{-\langle u_p' v_p' \rangle_p \frac{\partial U_p}{\partial y}}_{\text{Production à la paroi}} \nearrow \text{ et } \underbrace{-\frac{1}{n_p} \frac{\partial}{\partial y} (n_p \langle u_p' u_p' v_p' \rangle_p)}_{\text{Dispersion turbulente}} \nearrow \implies \underbrace{\langle u_p' u_p' \rangle_p}_{\text{dans le canal}} \nearrow$$

L'augmentation du cisaillement $\langle u'_p v'_p \rangle_p$ avec la prise en compte des rebonds multiples s'explique par un mécanisme similaire.

Pour récapituler, nous pouvons dire de l'analyse des résultats comparés des simulations numériques théoriques entre le "*shadow effect model*" et la prise en compte des rebonds multiples des particules sur une paroi ; par l'intermédiaire du modèle géométrique de paroi rugueuse avec une distribution aléatoire gaussienne d'angle, qu'elle a mis en exergue une amplification (du fait de ces rebonds multiples) des mécanismes responsables des modifications des propriétés statistiques de la phase dispersée par le biais principalement des conditions aux limites aux parois qui sont modifiées.

4.4 Modélisation stochastique Lagrangienne des interactions particules-paroi rugueuse avec effet multi-rebond

4.4.1 Bases de la modélisation

Les interactions particules/paroi laissent entrevoir deux phases fondamentales : l'incidence puis la réflexion. Afin de les décrire assez correctement dans le cadre des parois rugueuses, les mécanismes identifiés au cours de l'étude préliminaire réalisée par Kannengieser (2006) [47] seront interprétés et mis à contribution pour la dérivation du nouveau modèle Lagrangien du traitement particule-paroi rugueuse. Ainsi, en raison du troisième résultat mis en exergue par cette étude préliminaire, l'argument de base de ladite modélisation est de considérer qu'une particule incidente n'effectue qu'un et un seul rebond sur une paroi virtuelle dont l'angle de rugosité γ est tiré suivant un processus stochastique.

Analyse de l'effet d'incidence

L'effet d'incidence est caractérisé par une perspective de la paroi physique rugueuse "vue" par une particule incidente. Cela pourrait facilement se traduire, dans le cadre d'une modélisation stochastique par une modification de la distribution des angles de rugosité de la paroi physique pour chaque incidence donnée. Par exemple l'analyse précédente effectuée au chapitre 2 à propos du "*shadow effect*", a mis évidence un effet d'incidence est sous-jacent, puisque la troncature de la distribution des angles de rugosité des parois physiques (mesurée comme étant une gaussienne par Schade & Hädrich (1998)[84], puis Sommerfeld & Huber (1999)[98]) est le résultat des mécanismes respectifs d'incidence et de rebond

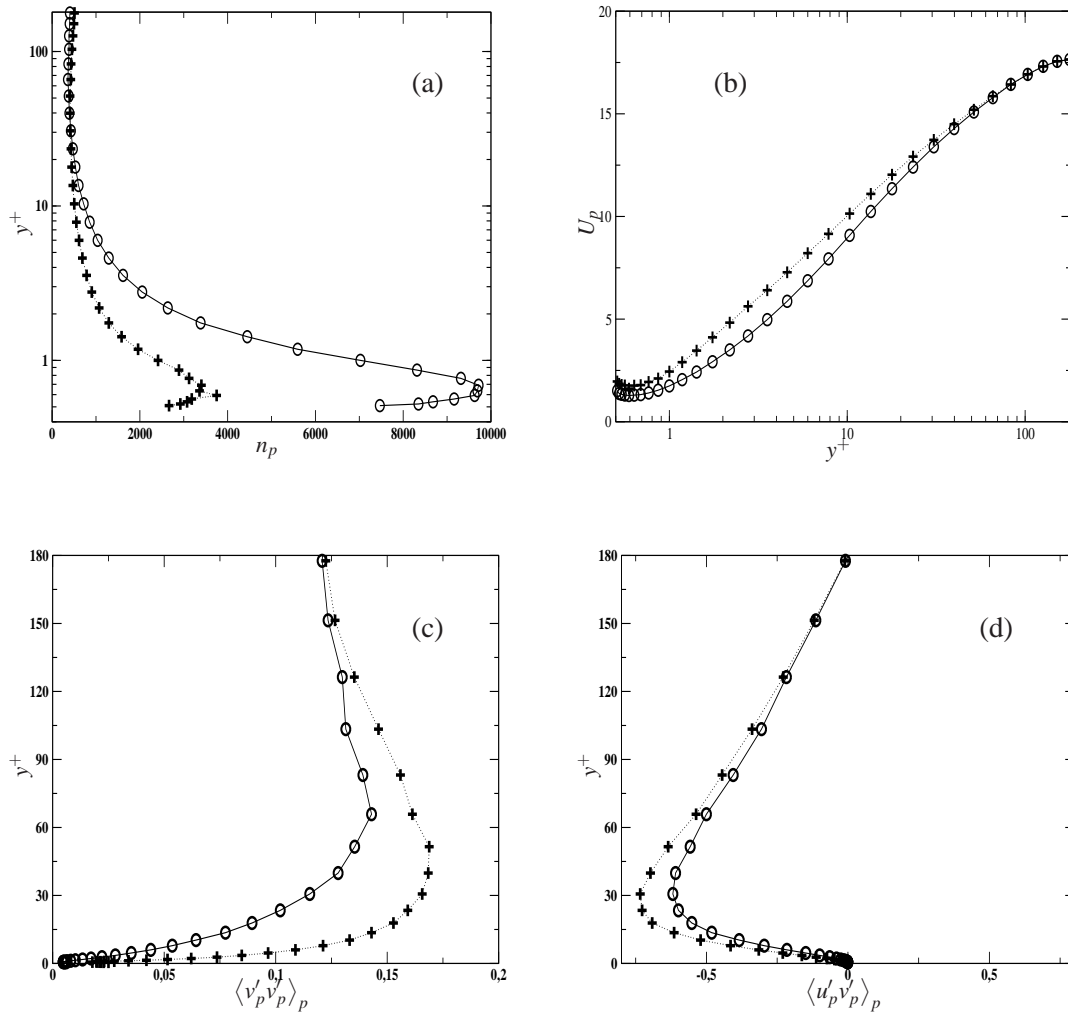


FIG. 4.6 – Modifications de quelques propriétés de la phase dispersée avec la prise en compte des rebonds multiples. (○) "shadow effect model" et (+) modèle de "boîte noire". Cas de particules de $St = 0.65$, sans collisions inter-particulaires et $\Delta\gamma = 2.5^\circ$.

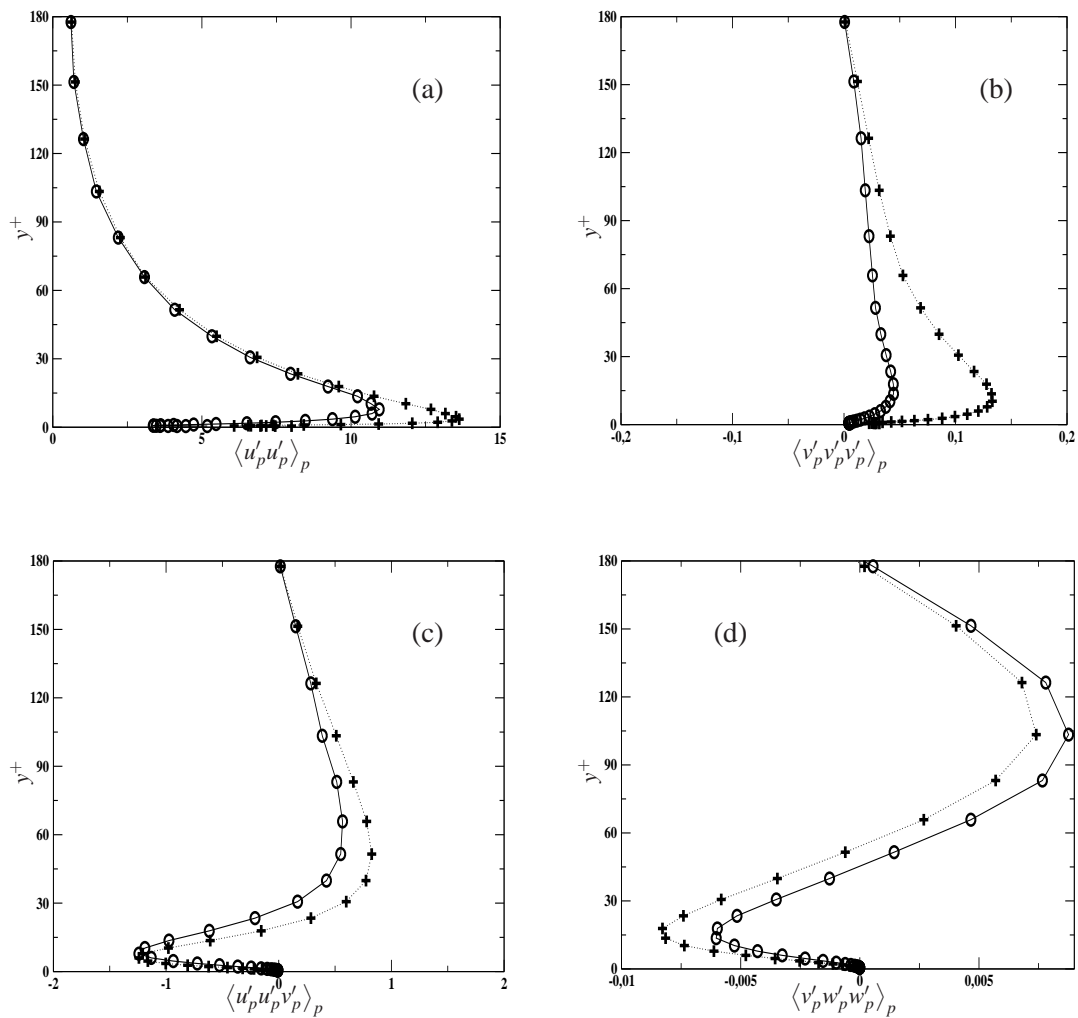


FIG. 4.7 – Même légende que la figure 4.6.

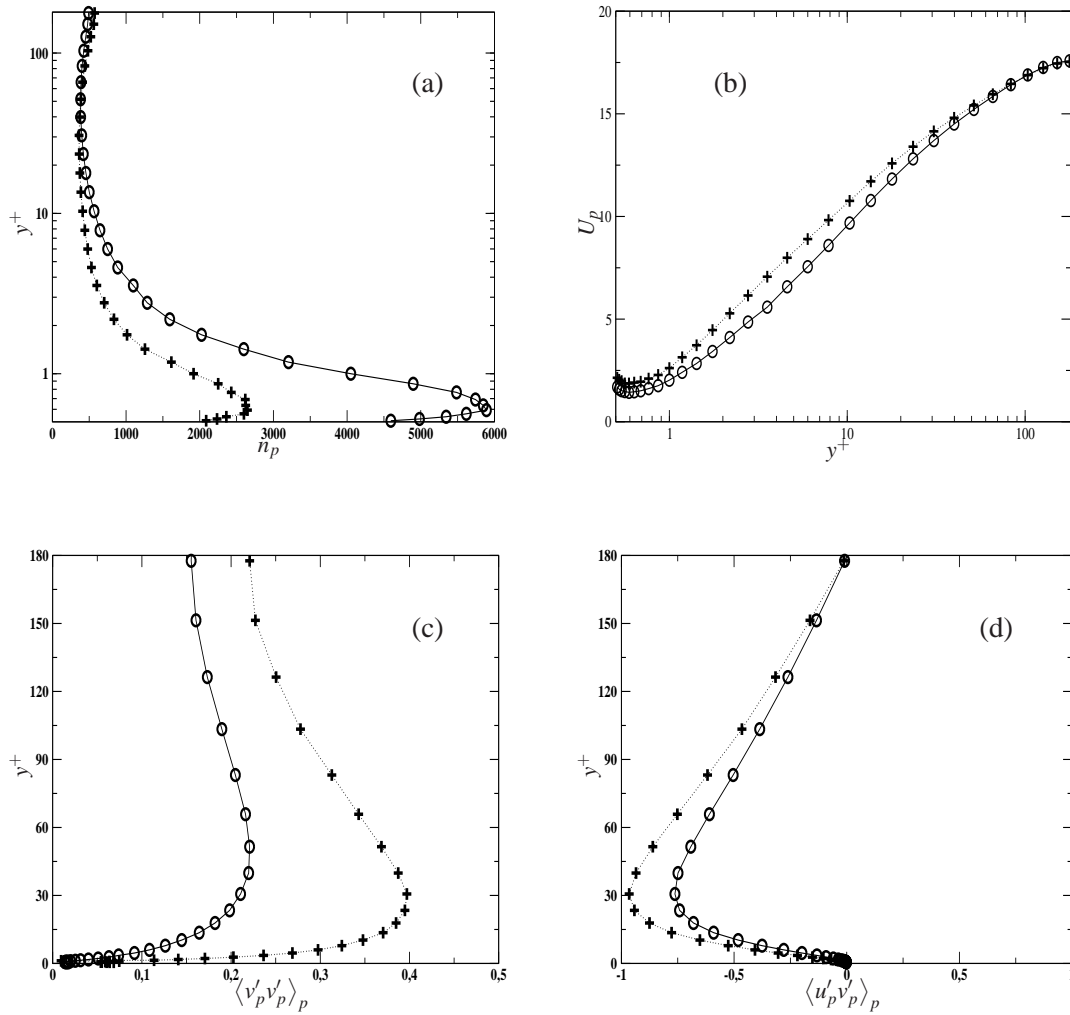


FIG. 4.8 – Modifications de quelques propriétés de la phase dispersée avec la prise en compte des rebonds multiples. (○) "shadow effect model" et (+) modèle de "boîte noire". Cas de particules de $St = 0.65$, sans collisions inter-particulaires et $\Delta\gamma = 5.0^\circ$.

4.4 Modélisation stochastique Lagrangienne des interactions particules-paroi rugueuse avec effet multi-rebond

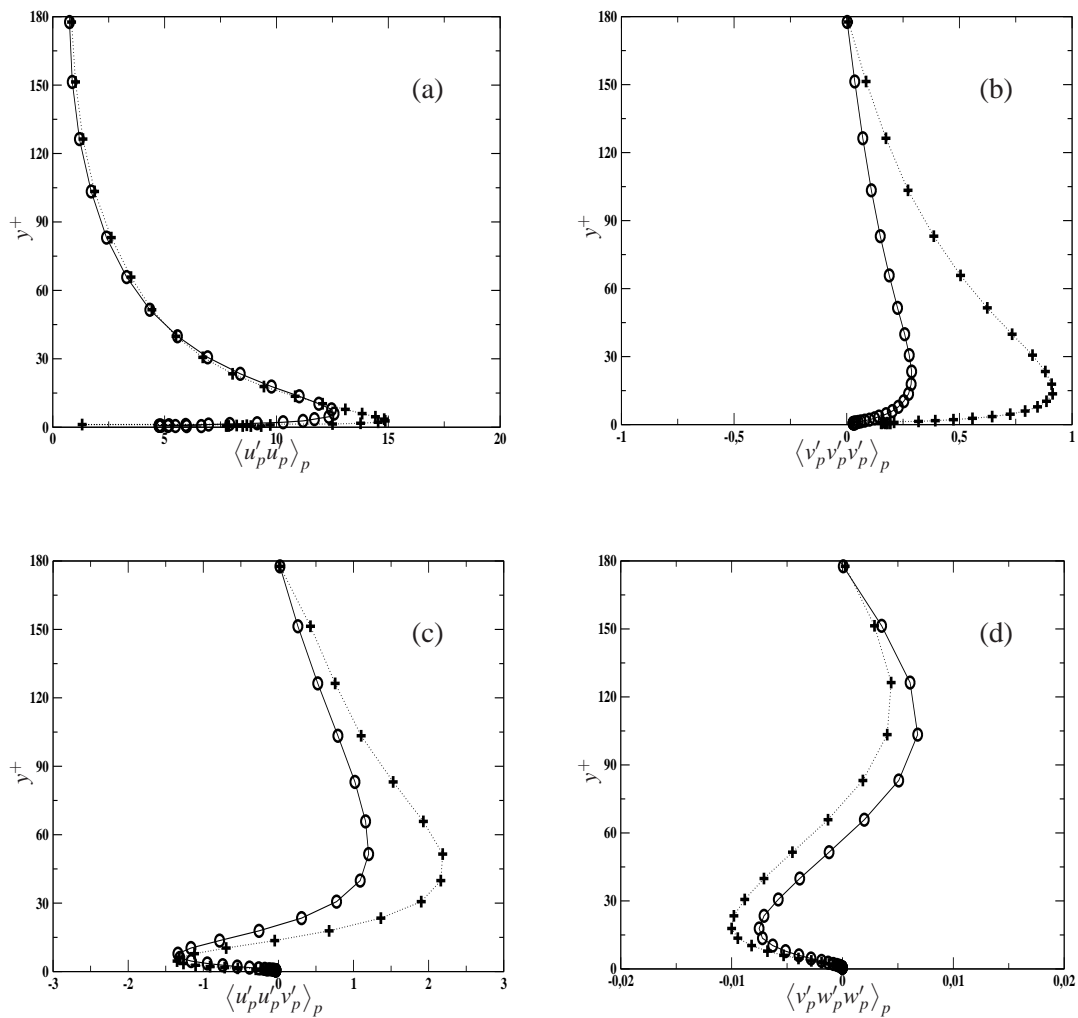


FIG. 4.9 – Même légende que la figure 4.8.

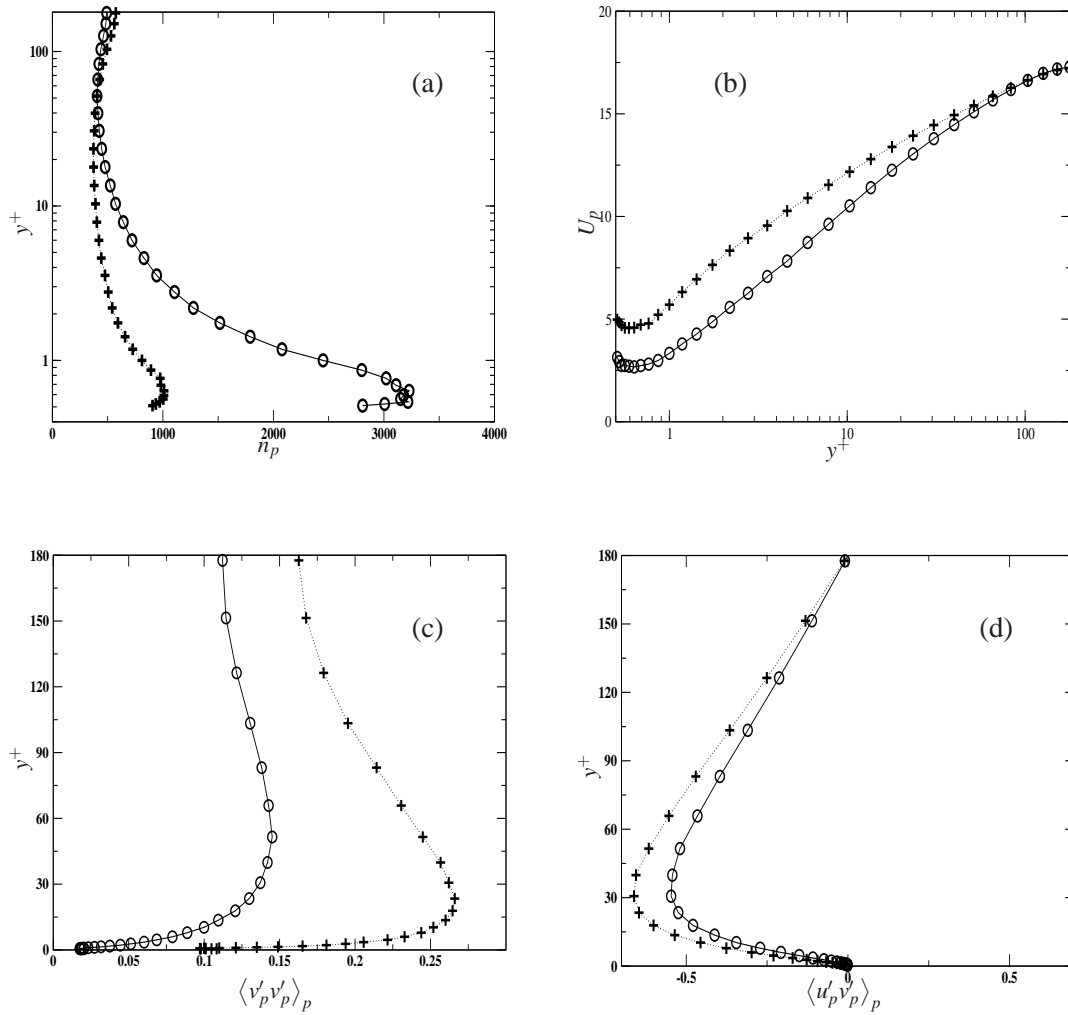


FIG. 4.10 – Modifications de quelques propriétés de la phase dispersée avec la prise en compte des rebonds multiples. (○) "shadow effect model" et (+) modèle de "boîte noire". Cas de particules de $St = 1.3$, sans collisions inter-particulaires et $\Delta\gamma = 2.5^\circ$.

4.4 Modélisation stochastique Lagrangienne des interactions particules-paroi rugueuse avec effet multi-rebond

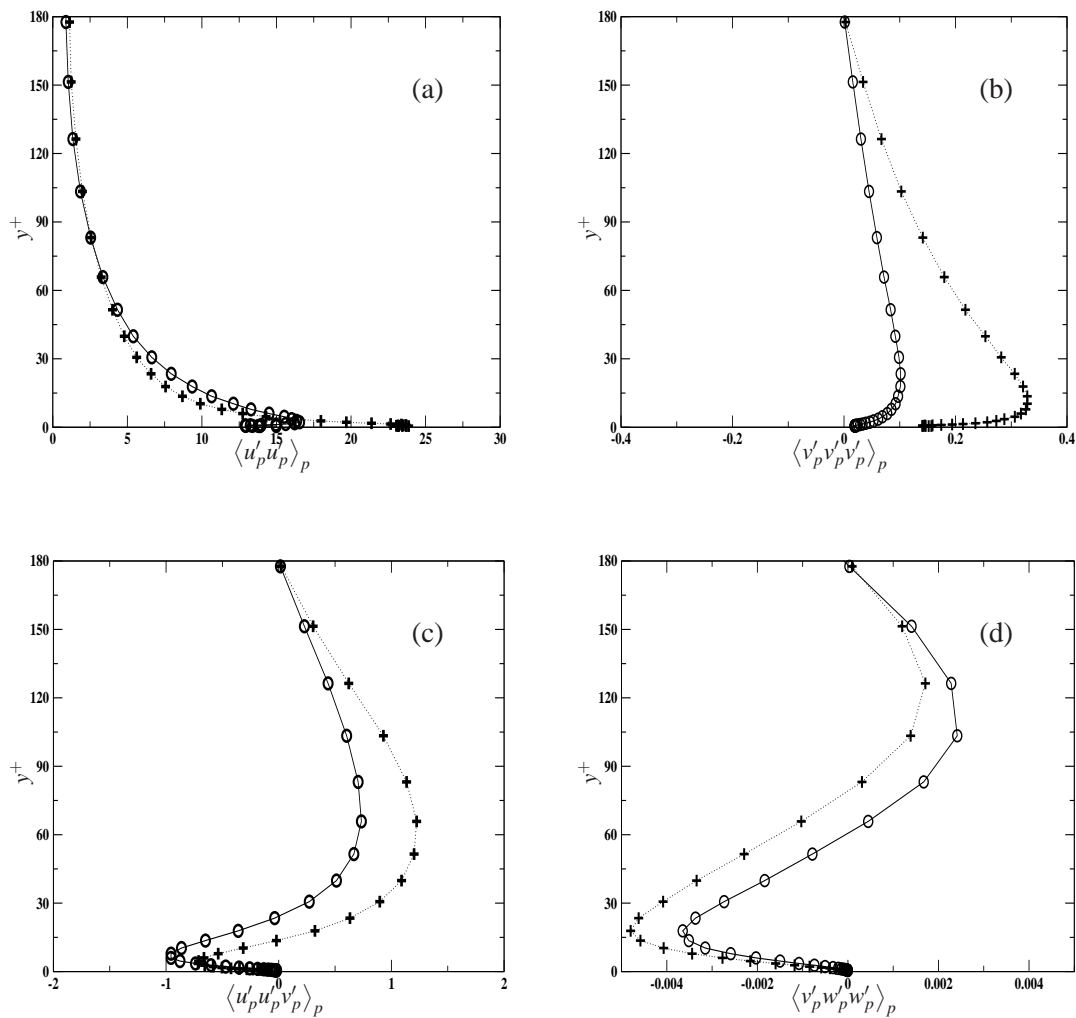


FIG. 4.11 – Même légende que la figure 4.10.

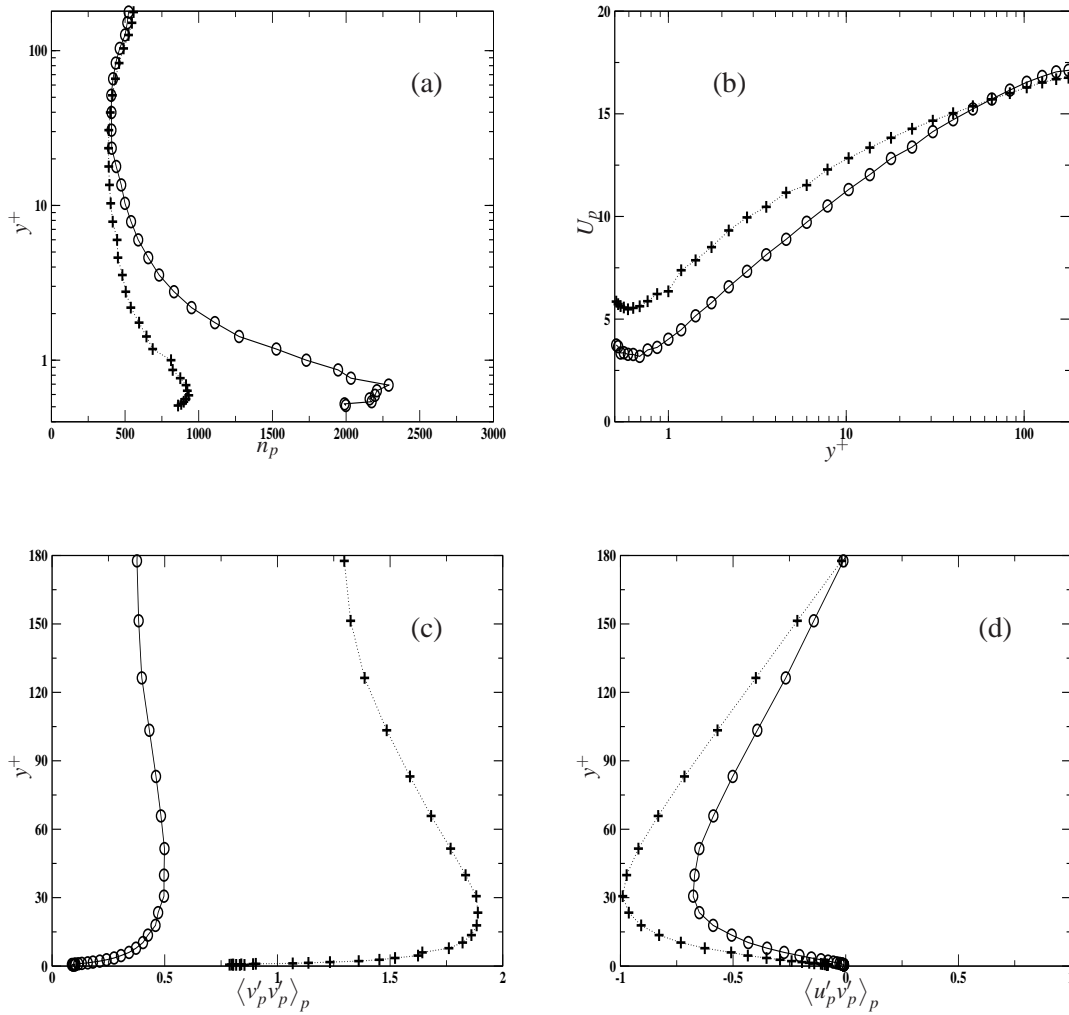


FIG. 4.12 – Modifications de quelques propriétés de la phase dispersée avec la prise en compte des rebonds multiples. (○) "shadow effect model" et (+) modèle de "boîte noire". Cas de particules de $St = 1.3$, sans collisions inter-particulaires et $\Delta\gamma = 5.0^\circ$.

4.4 Modélisation stochastique Lagrangienne des interactions particules-paroi rugueuse avec effet multi-rebond

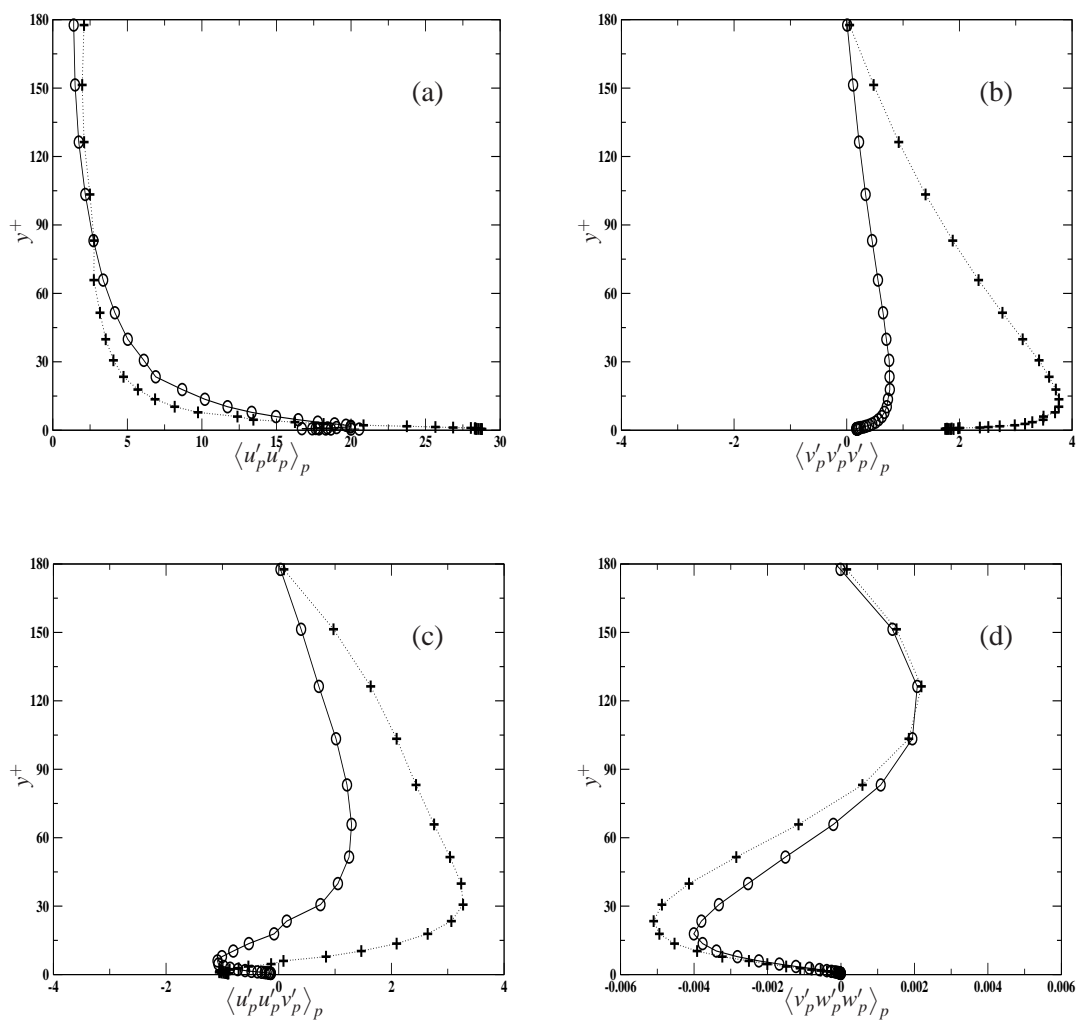


FIG. 4.13 – Même légende que la figure 4.12.

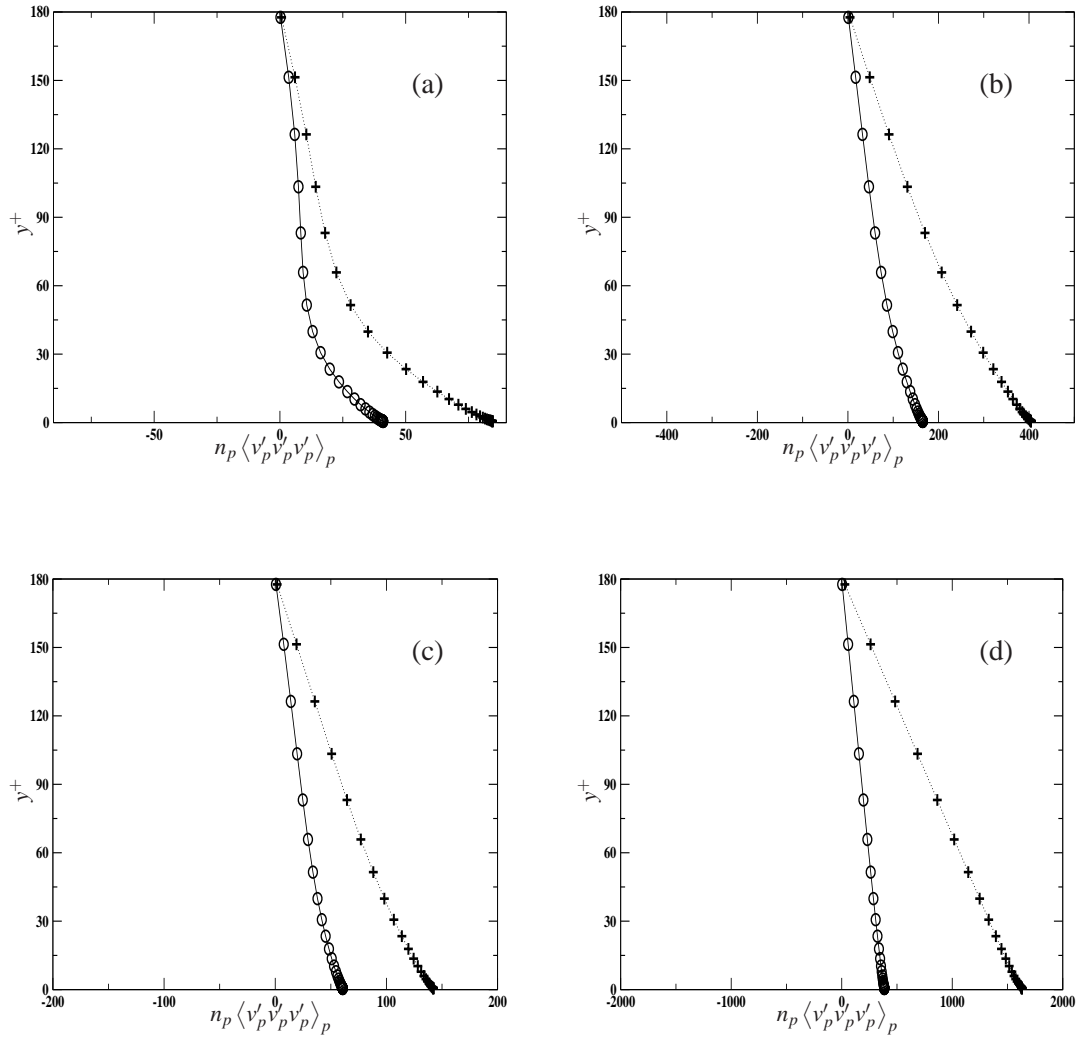


FIG. 4.14 – Modifications dues aux rebonds multiples du flux $n_p \langle v'_p v'_p v'_p \rangle_p$ principalement à la paroi et dans le reste du canal. ○ : "shadow effect model" et + : modèle de paroi géométrique avec distribution aléatoire gaussienne d'angle de rugosité. (a) : $St = 0.65$ & $\Delta\gamma = 2.5^\circ$, (b) : $St = 0.65$ & $\Delta\gamma = 5.0^\circ$, (c) : $St = 1.3$ & $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et (d) : $St = 1.3$ & $\Delta\gamma = 5.0^\circ$

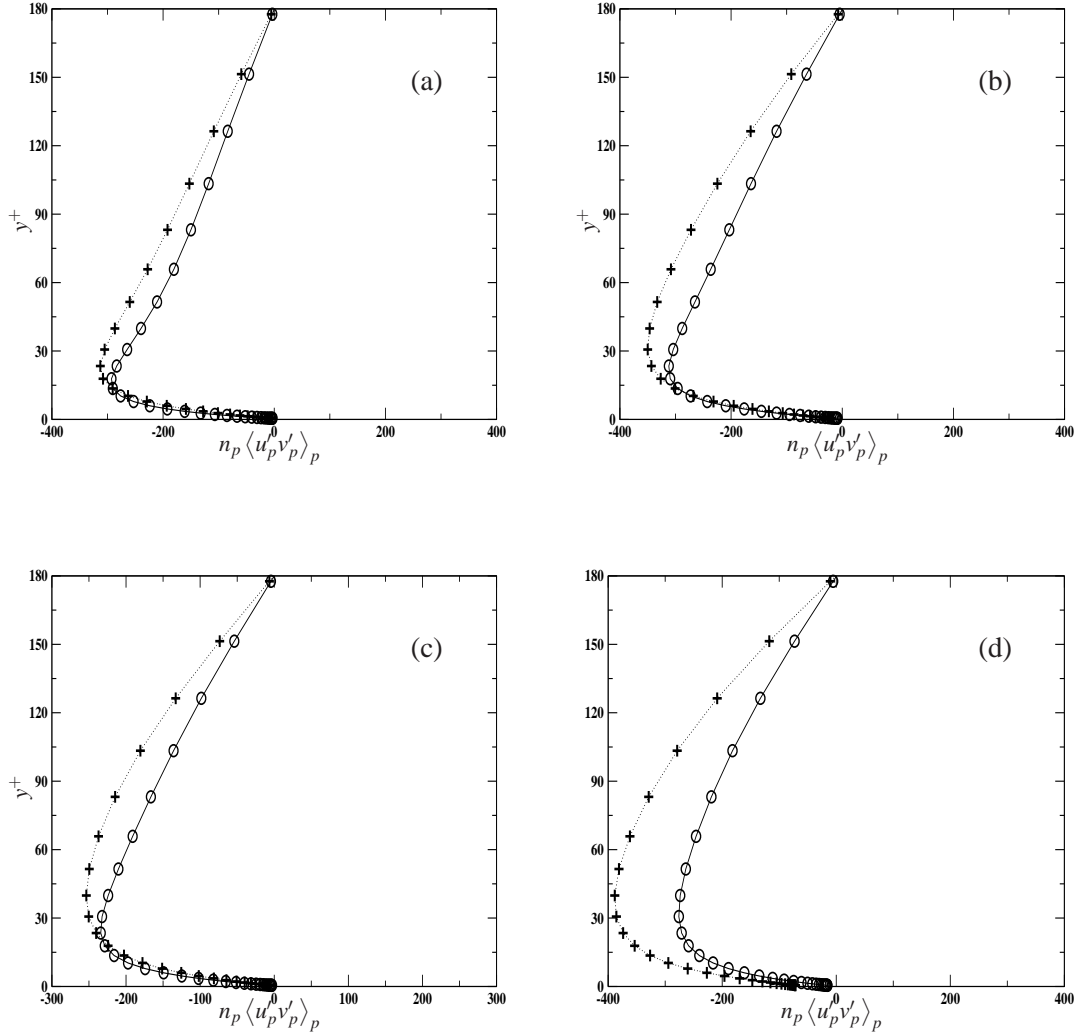


FIG. 4.15 – Modifications dues aux rebonds multiples du flux $n_p \langle u_p' v_p' \rangle_p$ à la paroi et dans le reste du canal. \circ : "shadow effect model" et $+$: modèle de paroi géométrique avec distribution aléatoire gaussienne d'angle de rugosité. (a) : $St = 0.65$ & $\Delta\gamma = 2.5^\circ$, (b) : $St = 0.65$ & $\Delta\gamma = 5.0^\circ$, (c) : $St = 1.3$ & $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et (d) : $St = 1.3$ & $\Delta\gamma = 5.0^\circ$

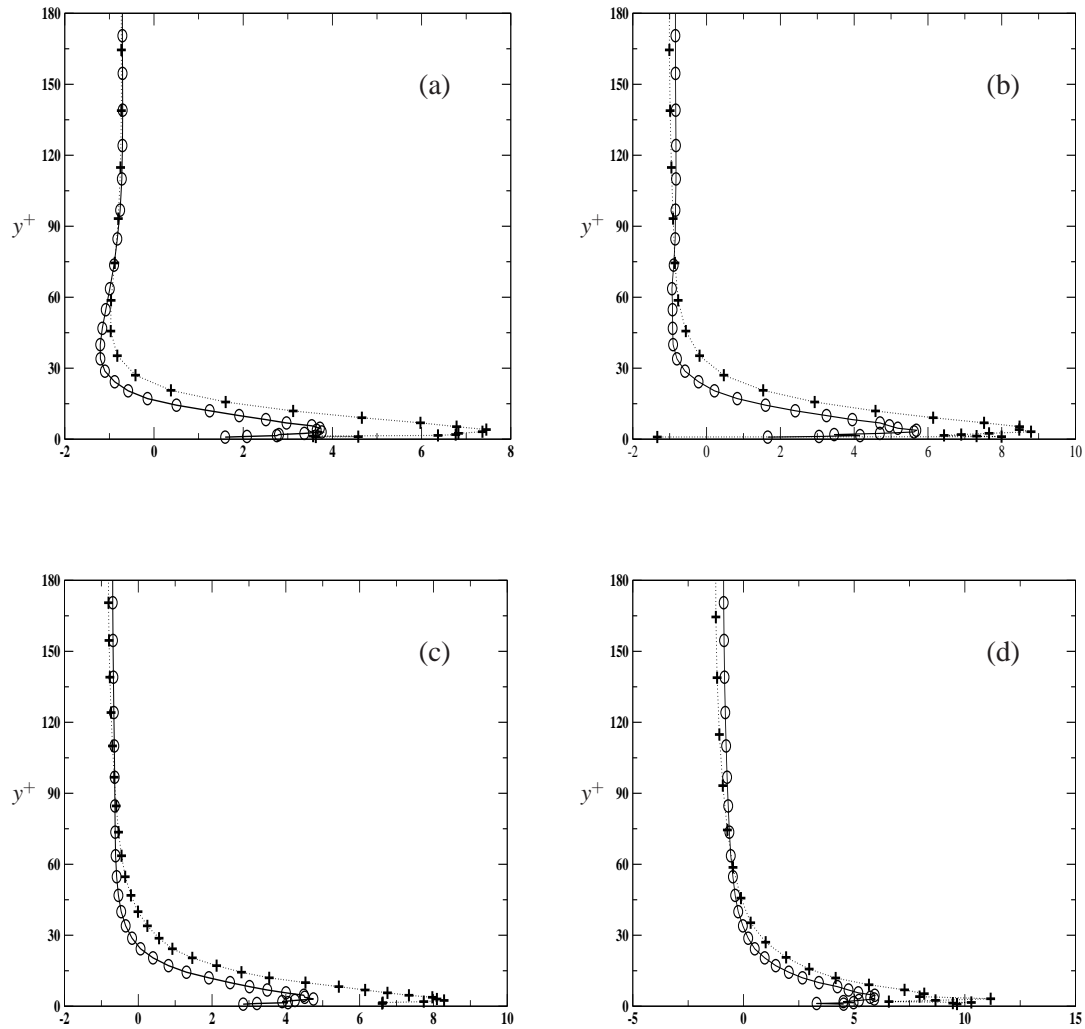


FIG. 4.16 – Modifications de la dispersion turbulente $(-\frac{1}{n_p} \frac{\partial}{\partial y} (n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p))$ de l'équation de la vitesse longitudinale moyenne avec les rebonds multiples des particules à la paroi. \circ : "shadow effect model" et $+$: modèle de paroi géométrique avec distribution aléatoire gaussienne d'angle de rugosité. (a) : $St = 0.65$ & $\Delta\gamma = 2.5^\circ$, (b) : $St = 0.65$ & $\Delta\gamma = 5.0^\circ$, (c) : $St = 1.3$ & $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et (d) : $St = 1.3$ & $\Delta\gamma = 5.0^\circ$

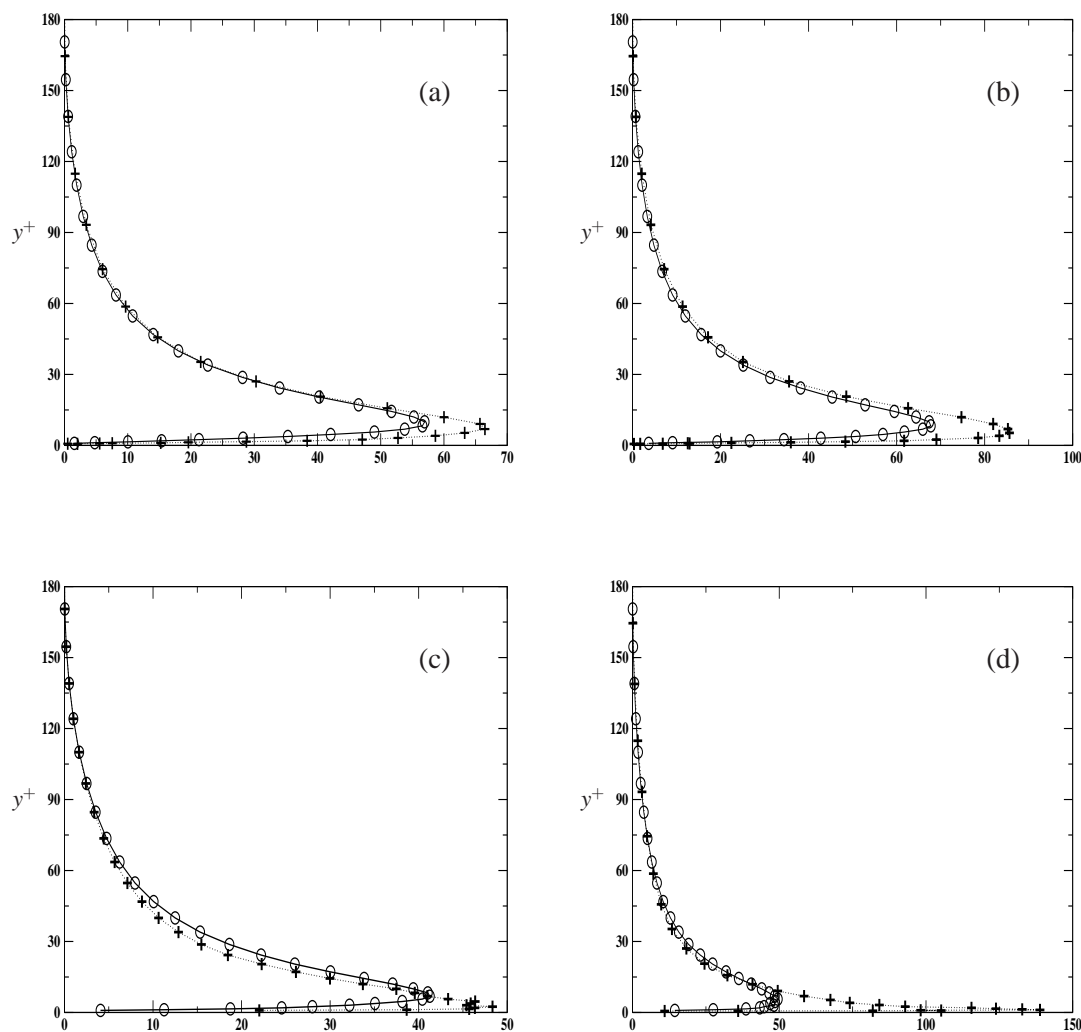


FIG. 4.17 – Modifications de la production d'énergie par les gradients longitudinaux de l'agitation longitudinale des particules avec la prise en compte des rebonds multiples ($-\langle u'_p v'_p \rangle_p \frac{\partial U_p}{\partial y}$). \circ : "shadow effect model" et + : modèle de paroi géométrique avec distribution aléatoire gaussienne d'angle de rugosité. (a) : $St = 0.65$ & $\Delta\gamma = 2.5^\circ$, (b) : $St = 0.65$ & $\Delta\gamma = 5.0^\circ$, (c) : $St = 1.3$ & $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et (d) : $St = 1.3$ & $\Delta\gamma = 5.0^\circ$

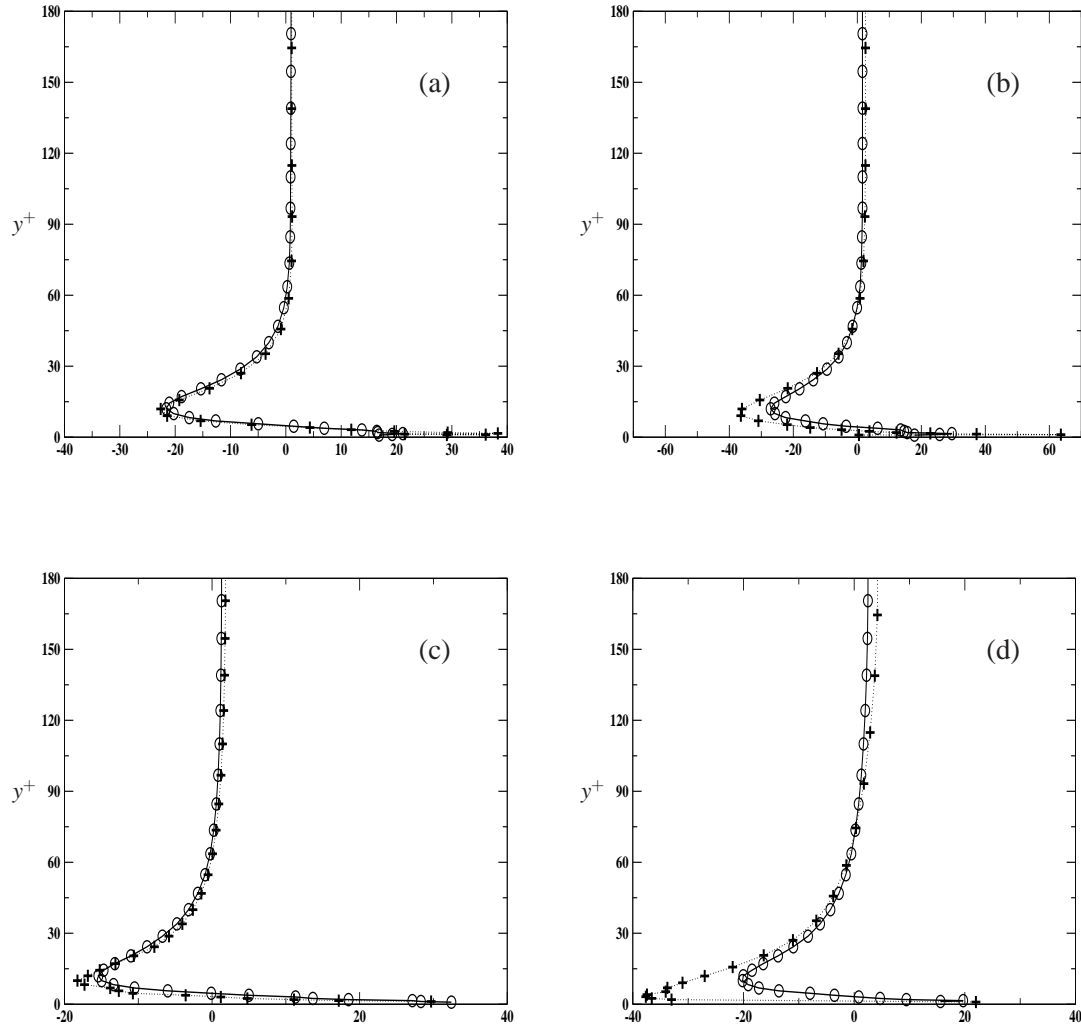


FIG. 4.18 – Modifications de la dispersion turbulente $\left(-\frac{1}{n_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(n_p \langle u'_p u'_p v'_p \rangle_p \right)\right)$ de l'équation de l'agitation longitudinale des particules avec la prise en compte des rebonds multiples. ○ : "shadow effect model" et + : modèle de paroi géométrique avec distribution aléatoire gaussienne d'angle de rugosité. (a) : $St = 0.65$ & $\Delta\gamma = 2.5^\circ$, (b) : $St = 0.65$ & $\Delta\gamma = 5.0^\circ$, (c) : $St = 1.3$ & $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et (d) : $St = 1.3$ & $\Delta\gamma = 5.0^\circ$

décrit par ledit modèle. D'ailleurs nous avons montré avec ce modèle que pour une particule rasante, la distribution des angles de rugosité était réduite à 60% de la distribution gaussienne de base, dans le cadre de rebonds élastiques particules/paroi. Un tel effet était par ailleurs déjà introduit par Tsuji *et al.* (1987) [107] & [106] à travers le "*Abnormal bouncing model*", bien qu'aucun argument physique n'étayait le choix de l'angle de rugosité de la paroi en fonction de l'incidence de la particule.

Quant aux simulations déterministes des collisions des particules sur les deux parois rugueuses distinctes simulées par Kannengieser (2006) [47], elles ont montré que l'effet d'incidence observé lors du premier impact des particules sur la paroi est clairement décrite par la distribution effective donnée par Sommerfeld & Huber (1999) [98].

Dans la mesure où l'argument de base de la nouvelle modélisation est de n'effectuer qu'un unique rebond, alors l'effet d'incidence adopté est modélisé par cette distribution effective. Si bien que l'angle de rugosité de la paroi sera systématiquement tiré de manière aléatoire dans la PDF effective.

Analyse de l'effet de rebond

L'effet de rebond qui devrait être considéré comme la condition de réalisabilité du rebond exige que la particule s'échappe de la paroi quelque soit son angle incidence. Cela implique la condition nécessaire $\underline{v}_p^+ \cdot \underline{n} > 0$ (où \underline{v}_p^+ est la vitesse de rebond de la particule et \underline{n} la normale à la paroi) qui relate tout simplement que la particule retourne dans l'écoulement, est loin d'être suffisante. En effet avant ce retour dans l'écoulement, l'éventualité de rebonds multiples mis en exergue par les simulations déterministes (Tsirkunov & Panfilov (1998) [105] puis Kannengieser (2006) [47]) et dont l'influence s'est avérée assez importante (en raison des résultats de simulations en canal avec les collisions multiples de la section précédente), est crucial pour une description complète de l'effet de rebond. Ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour la réalisation du rebond devrait intégrer à la fois la condition "*naturelle*" de retour dans l'écoulement ($\underline{v}_p^+ \cdot \underline{n} > 0$) et la probabilité d'effectuer plus d'un rebond mis en évidence par Kannengieser (2006) [47].

Étant donné l'éventualité de rebonds multiples encouru par un particule incidente sur une paroi rugueuse avec un angle d'incidence α^- , la probabilité qu'elle quitte cette paroi macroscopique avec un angle de rebond α^+ peut s'écrire sous la forme :

$$R(\alpha^+|\alpha^-) = \sum_{n=1}^{\infty} Q(\alpha^+, n|\alpha^-) \quad (4.3)$$

dans laquelle $Q(\alpha^+, n|\alpha^-)$ représente la probabilité que la particule incidente avec l'angle α^- quitte la région de paroi avec un angle α^+ après avoir effectué n rebonds.

En outre, en considérant les deux événements : "*réaliser un et un seul rebond*" et "*effectuer au moins deux rebonds*", la probabilité (4.3) peut se mettre sous la forme :

$$R(\alpha^+|\alpha^-) = Q(\alpha^+, n=1|\alpha^-) + Q(\alpha^+, n>1|\alpha^-) \quad (4.4)$$

où $Q(\alpha^+, n=1|\alpha^-)$ représente la probabilité conditionnelle qu'une particule incidente d'un angle α^- quitte la paroi avec un angle de rebond α^+ après un et un seul rebond. $Q(\alpha^+, n>1|\alpha^-)$ est la probabilité conditionnelle qu'une particule incidente d'un angle α^- quitte la paroi avec un angle de rebond α^+ après au moins deux rebonds. En définitive, la modélisation de l'effet de rebonds multiples se résume en celles deux probabilités définies ci-haut.

Le processus de rebonds multiples suppose nécessairement que la particule rebondit une première fois avec un angle α_1^+ , et donc la probabilité $Q(\alpha^+, n|\alpha^-)$ qu'une particule incidente avec un angle α^- quitte la zone de paroi avec un angle α^+ après n rebonds s'écrit :

$$Q(\alpha^+, n|\alpha^-) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Q(\alpha^+, n|\alpha_1^+, \alpha^-) R_1(\alpha_1^+|\alpha^-) d\alpha_1^+ \quad (4.5)$$

dans laquelle $R_1(\alpha_1^+|\alpha^-)$ est la probabilité de transition qu'une particule incidente rebondisse avec $\alpha^+ = \alpha_1^+$ sur une paroi lisse inclinée d'un angle γ . D'après le chapitre 2 (voir les équations (2.17) & (2.18)), cette probabilité est modélisée par :

$$R_1(\alpha_1^+|\alpha^-) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta(\alpha^+ - \varphi_{\alpha^-}(\gamma)) P_{eff}(\gamma|\alpha^-) d\gamma \quad (4.6)$$

où φ_{α^-} est la bijection modélisant le rebond sur la paroi lisse inclinée de l'angle γ (voir équation (2.19)) et P_{eff} est la PDF effective de l'angle de rugosité de la paroi au premier rebond.

$Q(\alpha^+, n|\alpha_1^+, \alpha^-)$ représente la probabilité qu'une particule incidente avec un angle α^- quitte la zone de paroi avec un angle α^+ après n rebonds sachant que le premier rebond est réalisé avec un angle α_1^+ . D'autre part en introduisant $P^*(n|\alpha_1^+, \alpha^-)$, la probabilité pour une particule d'effectuer n rebonds sachant à la fois qu'elle était incidence avec α^- et qu'elle a rebondi premièrement avec α_1^+ , nous pouvons écrire écrire $Q(\alpha^+, n|\alpha_1^+, \alpha^-)$ sous la forme :

$$Q(\alpha^+, n|\alpha_1^+, \alpha^-) = Q(\alpha^+|n, \alpha_1^+, \alpha^-) P^*(n|\alpha_1^+, \alpha^-) \quad (4.7)$$

Enfin, à partir des équations (4.5) & (4.7), la probabilité $Q(\alpha^+, n=1|\alpha^-)$ qu'une particule incidente effectue un et un seul rebond avant de quitter la zone de paroi s'écrit :

$$Q(\alpha^+, n=1|\alpha^-) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Q(\alpha^+|n=1, \alpha_1^+, \alpha^-) P^*(n=1|\alpha_1^+, \alpha^-) R_1(\alpha_1^+|\alpha^-) d\alpha_1^+ \quad (4.8)$$

Puisque la particule effectue un seul rebond puis quitte la paroi, alors la probabilité $Q(\alpha^+ | n = 1, \alpha_1^+, \alpha^-)$ vaut de tout évidence $\delta(\alpha^+ - \alpha_1^+)$. Si bien que la probabilité $Q(\alpha^+, n = 1 | \alpha^-)$ de la modélisation (4.4) devient :

$$Q(\alpha^+, n = 1 | \alpha^-) = P^*(n = 1 | \alpha^+, \alpha^-) R_1(\alpha^+ | \alpha^-) \quad (4.9)$$

La seconde probabilité $Q(\alpha^+, n > 1 | \alpha^-)$, de la modélisation (4.4), pour une particule incidente d'effectuer plus d'un rebond avant de quitter la paroi peut de manière similaire, en introduisant la probabilité $P(n > 1 | \alpha^-)$ d'avoir plus d'un rebond sachant que la particule était incidente d'un angle α^- , s'écrire sous la forme :

$$Q(\alpha^+, n > 1 | \alpha^-) = Q(\alpha^+ | n > 1, \alpha^-) P(n > 1 | \alpha^-) \quad (4.10)$$

En outre,

$$P(n > 1 | \alpha^-) = 1 - P(n = 1 | \alpha^-) \quad (4.11)$$

où par définition, nous avons :

$$P(n = 1 | \alpha^-) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P^*(n = 1 | \alpha^+, \alpha^-) R_1(\alpha^+ | \alpha^-) d\alpha^+ \quad (4.12)$$

Avec les équations (4.9) & (4.10), l'équation (4.4) conduit au final à la formulation exacte (puisque aucune hypothèse n'a été nécessaire jusque là pour son obtention) :

$$R(\alpha^+ | \alpha^-) = P^*(n = 1 | \alpha^+, \alpha^-) R_1(\alpha^+ | \alpha^-) + Q(\alpha^+ | n > 1, \alpha^-) P(n > 1 | \alpha^-) \quad (4.13)$$

A ce stade, deux hypothèses sont nécessaires pour fermer l'équation (4.13), car les probabilités $P^*(n = 1 | \alpha^+, \alpha^-)$ et $Q(\alpha^+ | n > 1, \alpha^-)$ sont inconnues.

Nous supposons premièrement que la probabilité conditionnelle $P^*(n = 1 | \alpha^+, \alpha^-)$ que la particule quitte la région de paroi après seulement un et un seul rebond est faiblement conditionnée par l'angle d'incidence. Ce qui nous permet d'écrire que :

$$P^*(n = 1 | \alpha^+, \alpha^-) \approx P^*(n = 1 | \alpha^+) \quad (4.14)$$

Cette hypothèse est supportée par les simulations déterministes de Kannengieser (2006) [47] qui montrent une faible dépendance de la probabilité d'avoir un unique rebond à l'angle d'incidence α^- (voir figure 4.3).

La seconde hypothèse concerne la distribution de l'angle de rebond pour les particules ayant effectué plus d'un rebond $Q(\alpha^+ | n > 1, \alpha^-)$ que nous supposons presque égale à celle des particules ayant effectué un et un seul rebond $Q(\alpha^+ | n = 1, \alpha^-)$, avant de quitter la paroi. Ainsi, nous avons :

$$Q(\alpha^+ | n > 1, \alpha^-) \simeq Q(\alpha^+ | n = 1, \alpha^-) = \frac{Q(\alpha^+, n = 1 | \alpha^-)}{P(n = 1 | \alpha^-)} \quad (4.15)$$

Finalement, à partir des équations (4.9) & (4.15), la formulation exacte (4.13) conduit à la modélisation suivante de l'effet de rebond particules/paroi rugueuse :

$$R(\alpha^+ | \alpha^-) = \frac{P^*(n = 1 | \alpha^+) R_1(\alpha^+ | \alpha^-)}{P(n = 1 | \alpha^-)} \quad (4.16)$$

En outre, il convient de remarquer qu'en utilisant les équations (4.11) & (4.12), on vérifie aisément la première propriété portant sur la probabilité de transition R (chapitre 1 : voir (1.91)) :

$$\int R(\alpha^+ | \alpha^-) d\alpha^+ = 1 \quad (4.17)$$

Avec ces hypothèses, l'erreur absolue réalisée dans la modélisation de la distribution de l'angle de rebond s'écrit :

$$\delta R(\alpha^+ | \alpha^-) = P(n > 1 | \alpha^-) [Q(\alpha^+ | n > 1, \alpha^-) - Q(\alpha^+ | n = 1, \alpha^-)] \quad (4.18)$$

Autrement, l'erreur absolue reste faible en accord avec les résultats des simulations directes.

4.4.2 Validation du modèle d'effet de rebond stochastique

Proposition d'une formulation analytique de la probabilité $P^(n = 1 | \alpha^+)$*

La validation puis l'exploitation de l'effet de rebond modélisé à travers la probabilité de transition $R(\alpha^+ | \alpha^-)$ par l'équation (4.16), exige une modélisation de la probabilité $P^*(n = 1 | \alpha^+)$ qu'une particule n'effectue qu'un et un seul rebond.

Il est apparu à la suite de différents tests que la fonction analytique ci-dessous reproduit parfaitement cette probabilité (voir figure 4.19) :

$$P^*(n = 1 | \alpha^+) = \begin{cases} \tanh\left(\frac{3}{2} \frac{\alpha^+}{\Delta\gamma}\right) & \text{si } \alpha^+ \geq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha^+ \leq 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

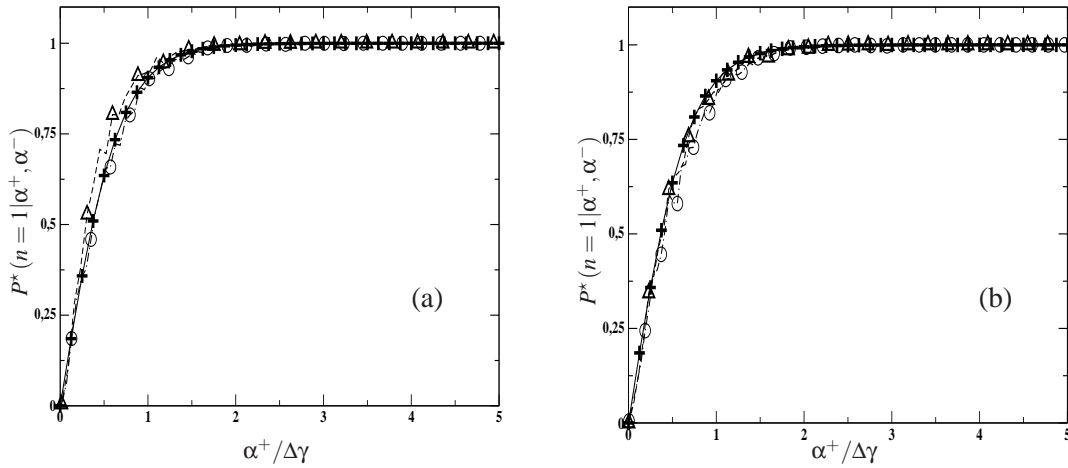


FIG. 4.19 – Proposition d’une formulation analytique de la probabilité de réaliser un et un seul rebond en fonction de l’angle de rebond (+ (4.19)). Deux cas d’incidence sont proposés : \circ $\alpha^- = 2.5^\circ$ et \triangle $\alpha^- = 7.5^\circ$. (a) et (b) définissent les intensités de rugosité de paroi respectives $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et $\Delta\gamma = 5.0^\circ$.

La figure 4.19 montre bien que cette probabilité est indépendante de l’angle d’incidence, mais elle dépend explicitement que de l’angle de rebond.

Il faut cependant remarquer que la différence fondamentale entre cet nouvel effet de rebond et celui issu du "*shadow effect model*" (Sommerfeld & Huber, 1999 [98]) est qu’avec le "*shadow effect model*", il est admis comme événement certain le fait pour une particule d’effectuer un et un seul rebond dès lors que l’angle de rebond est positif. Ainsi, selon le "*shadow effect model*", la probabilité d’effectuer un et un seul rebond peut se modéliser par la fonction de *Heaviside* suivante :

$$P^*(n = 1 | \alpha^+) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha^+ > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.20)$$

La différence entre ces deux probabilités est clairement illustrée par la figure 4.20.

Remarquons, en outre que l’utilisation de (4.20) dans (4.16) permet de retrouver la formulation de la probabilité de transition modélisée par l’équation (2.32) au chapitre 2. Cela signifie que l’effet de rebond modélisé par (4.16) est une généralisation du "*shadow effect model*".

Cas de rebonds élastiques

Afin de valider la modélisation de l’effet de rebond décrit par (4.16), nous nous sommes placé dans le cadre des rebonds totalement élastiques avec des rugosité 2D où il est aisé de calculer exactement la

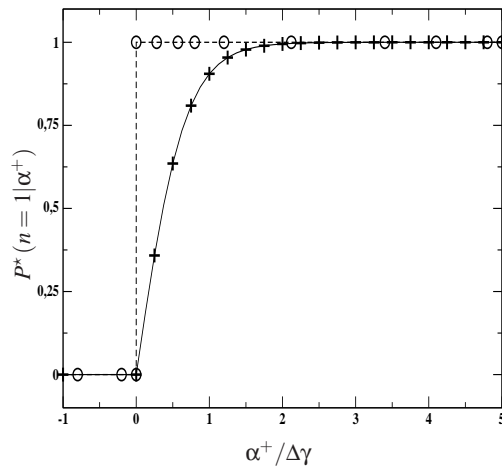


FIG. 4.20 – Illustration comparée entre le "Shadow effect model" (\circ) (4.20) et le nouvel effet de rebond ($+$) (4.19), de la probabilité d'effectuer un et un seul rebond en fonction de l'angle de rebond.

probabilité R_1 (4.6), du fait de la définition plus simple de la bijection φ_{α^-} modélisant le rebond sur la paroi lisse inclinée de l'angle γ .

Dans ce cadre, les résultats du calcul de la PDF de l'angle de rebond par l'équation (4.16), pour les incidences respectives $\alpha^- = 2.5^\circ$, $\alpha^- = 12.5^\circ$ et $\alpha^- = 32.5^\circ$ sont comparés aux simulations déterministes de rebonds de particules sur les parois géométriques dont les écarts types de rugosité valent respectivement $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et $\Delta\gamma = 5.0^\circ$ (voir figure 4.21). Nous pouvons observer sur cette figure qu'aussi bien pour de faibles incidences que pour des incidentes moyennes et élevées, l'effet de rebond proposé par la modélisation (4.16) reproduit exactement la distribution des angles de rebond des particules : ce qui valide en conséquence ce modèle d'effet de rebonds multiples.

Ces résultats montrent, en outre, que quelque soit l'angle d'incidence des particules sur la paroi, celles-ci ont bien une probabilité nulle de repartir rasante.

4.4.3 "Rough Wall Multi-Collision Model"

Principe

L'idée de paroi virtuelle sur laquelle vient rebondir une particule incidente est reprise dans cette nouvelle formulation et il est supposé que la particule n'effectue qu'un et un seul rebond. Par ailleurs, la procédure adoptée pour prendre en compte les mécanismes décrits plus haut est la suivante :

- (a) "*Effet d'incidence*" : l'angle de paroi rugueuse γ "vu" par la particule incidente est tiré aléatoirement, à l'aide d'une méthode de rejection, à partir de la PDF effective normalisée,

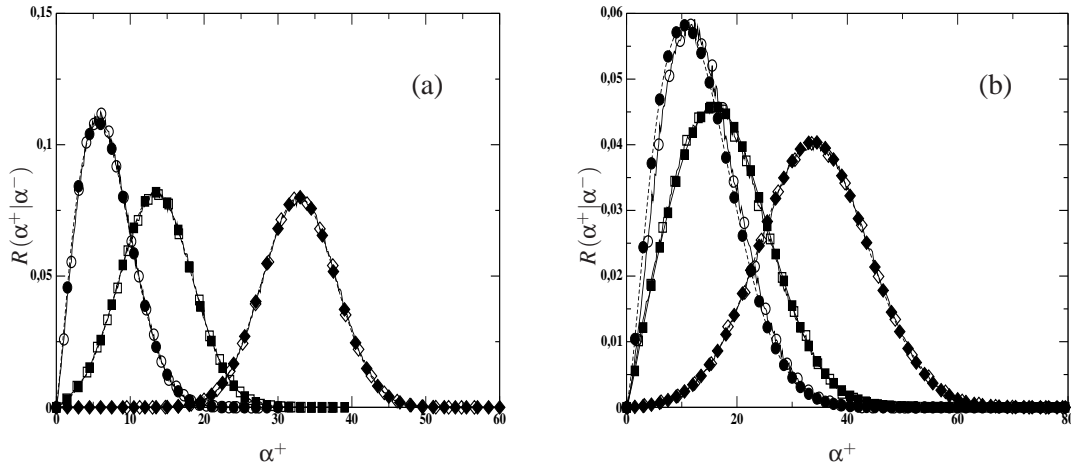


FIG. 4.21 – Validation de la modélisation de l'effet de rebond (symbole plein) dans le cadre de rebonds totalement élastiques ($e_w = 1.0$ et $\mu_w = 0$) par comparaison avec les simulations déterministes de rebond sur rugueuse géométrique (symbole vide). (\circ) $\alpha^- = 2.5^\circ$, (\square) $\alpha^- = 12.5^\circ$ et (\diamond) $\alpha^- = 32.5^\circ$. (a) : $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et (b) : $\Delta\gamma = 5.0^\circ$

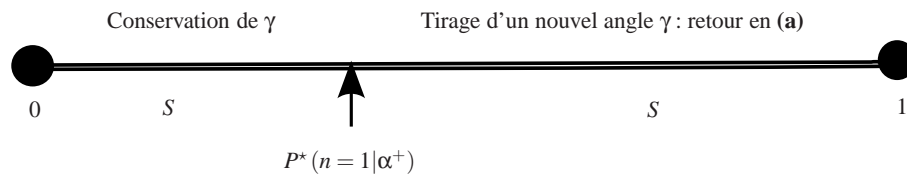
(b) la vitesse de rebond est calculée à partir des lois de rebonds glissants de particules sur des parois lisses (sachant que les coefficients de friction et de restitution à la paroi sont fonctions de l'angle d'incidence α^-) ; l'angle de rebond α^+ est ensuite évalué,

(c) "*Grazing rebound effect*" : calculer la probabilité $P^*(n = 1 | \alpha^+)$ pour une particule d'effectuer un et un seul rebond en fonction uniquement de l'angle au premier rebond à partir de la fonction (4.19).

A ce stade :

- si $P^*(n = 1 | \alpha^+) = 0$ alors un nouvel angle de rugosité de paroi est tiré (c'est à dire un retour inconditionnel à l'étape (a)).
- si $P^*(n = 1 | \alpha^+) > 0$ alors un tirage aléatoire d'un nombre $s \in [0, 1]$ dans une distribution uniforme est réalisé et la décision de la conservation de l'angle est dictée par les points suivants :
 - ★ si $s \in]0, P^*(n = 1 | \alpha^+)]$ alors l'angle de paroi γ est conservé et le rebond est achevé
 - ★ si $s \in [P^*(n = 1 | \alpha^+), 1]$ alors un nouvel angle de paroi est tiré [retour en (a)].

Le dernier point de la procédure permettant la prise de décision de la conservation de l'angle de paroi tiré en (a) (c'est à dire lorsque $P^*(n = 1 | \alpha^+) > 0$) est résumé par la figure 4.22.


 FIG. 4.22 – Résumé de la procédure conduisant au choix de l'angle de rugosité γ à l'étape (c).

4.5 Application du "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" en simulation LES+DPS à bas nombre de Reynolds

L'objectif de ces simulations est d'assurer une première validation du "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" par comparaison aux simulations LES+DPS théoriques, à bas Reynolds, avec rebonds multiples effectifs des particules à la paroi (section § 4.3). Pour ce faire, la même configuration et les mêmes conditions de calcul sont reprises. Cependant, le traitement de l'interaction particules/paroi rugueuse est bien évidemment effectuée via le "*Rough Wall Multi-Collision Model*".

4.5.1 Analyse des résultats des simulations numériques

Une fois de plus les simulations sont réalisées avec des particules de Stokes $St = 0.65$ et $St = 1.3$ en écoulements mono-disperse, sans collisions entre particules afin de n'évaluer que l'effet de la rugosité des parois induit par les deux méthodes. Les deux intensités de rugosité $\Delta\gamma = 2.5^\circ$ et $\Delta\gamma = 5.0^\circ$ sont à nouveau reprises afin d'évaluer l'influence des faibles et forts degrés de rugosité des parois sur le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*".

Les figures 4.23 à 4.28 montrent des comparaisons de quelques moments de la phase dispersée calculés d'une part avec le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" et d'autre part avec le modèle de paroi géométrique de distribution gaussienne d'angle de rugosité. D'une manière générale, il peut être observé sur ces figures que le "*Rough Wall Multi-Collision Model*" reproduit exactement les effets de la paroi rugueuse géométrique. En effet l'excellent accord de la densité numérique de particule n_p entre les deux méthodes de calcul pour les quatre cas étudiés (figures 4.23-(a), 4.25-(a), 4.27-(a)) montrent certainement que le flux $n_p \langle v_p^3 \rangle_p$ à la paroi dans le cas de la paroi géométrique est parfaitement reproduit par le "*Rough Wall Multi-Collision Model*"; ce qui en accord avec les mécanismes pilotant n_p conduit à la même dispersion turbulente $(-\frac{1}{n_p} \frac{\partial}{\partial y} (n_p \langle v_p^3 \rangle_p))$ dans tout le canal. Cela explique clairement le fait que l'agitation normale à la paroi des particules avec le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" présente

des profils en accord ceux des simulations réalisées avec le modèle de paroi géométrique de distribution gaussienne d'angle de rugosité pour les cas présentés (figures 4.23-(c), 4.25-(c), 4.27-(c)). Toutefois, remarquons qu'une très légère sous-estimation de cette agitation par le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" est observable sur la figure 4.25-(c).

Le parfait accord des vitesses longitudinales moyennes des particules entre les deux méthodes présenté sur les figures 4.23-(b), 4.25-(b), 4.27-(b) permet une fois de plus de conclure, en se basant sur le mécanisme responsable des modifications U_p dans le canal, que la dispersion turbulente $\left(\frac{1}{n_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p\right)\right)$ induite par les deux modèles est nécessairement identique dans tout le canal. Si bien que le flux $n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p$ à la paroi est, de tout évidence, identique avec les deux méthodes.

Aussi les figures 4.24-(a), 4.26-(a), 4.28-(a), où l'agitation longitudinale des particules calculée au cours des simulations avec les deux méthodes coïncident parfaitement, il ressort qu'aussi bien les mécanismes de production d'énergie à la paroi par les gradients de vitesses longitudinaux que de dispersion turbulente responsable du transport de l'énergie produite à la paroi dans l'écoulement sont identiques avec les deux modèles. De même le bon accord observé entre ces deux méthodes de traitement des rebonds particules/paroi (figures 4.23-(d), 4.25-(d), 4.27-(d)), pour la contrainte de cisaillement $\langle u'_p v'_p \rangle_p$ inspire la même conclusion quant à la production à la paroi et à la dispersion turbulente.

Les trois moments du troisième ordre : $\langle v_p^3 \rangle_p$, $\langle u_p^2 v_p \rangle_p$ et $\langle v_p w_p^2 \rangle_p$ présentés sur les figures 4.24, 4.26, 4.28 montrent un accord satisfaisant du "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" avec le modèle de paroi géométrique de distribution gaussienne d'angle de rugosité.

En somme, ce jeu de résultats satisfaisants du "*Rough Wall Multi-Collision Model*" en comparaison avec le modèle de paroi géométrique de distribution gaussienne d'angle de rugosité, valide en conséquence la modélisation de l'effet de rebonds multiples proposée par le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*". Un autre résultat très important à noter est que le "*Rough Wall Multi-Collision Model*" reproduit très exactement les conditions aux limites aux parois, qui sont d'ailleurs à l'origine de toutes les modifications des propriétés statistiques de l'écoulement.

4.6 Simulation LES+DPS en canal à grand Reynolds : application du "*Rough Wall Multi-Collisions Model*"

La seconde étape de validation du "*Rough Wall Multi-Collision Model*" a consisté en la réalisation de simulations LES+DPS de la configuration expérimentale de Sommerfeld & Kussin (2004) [99] en

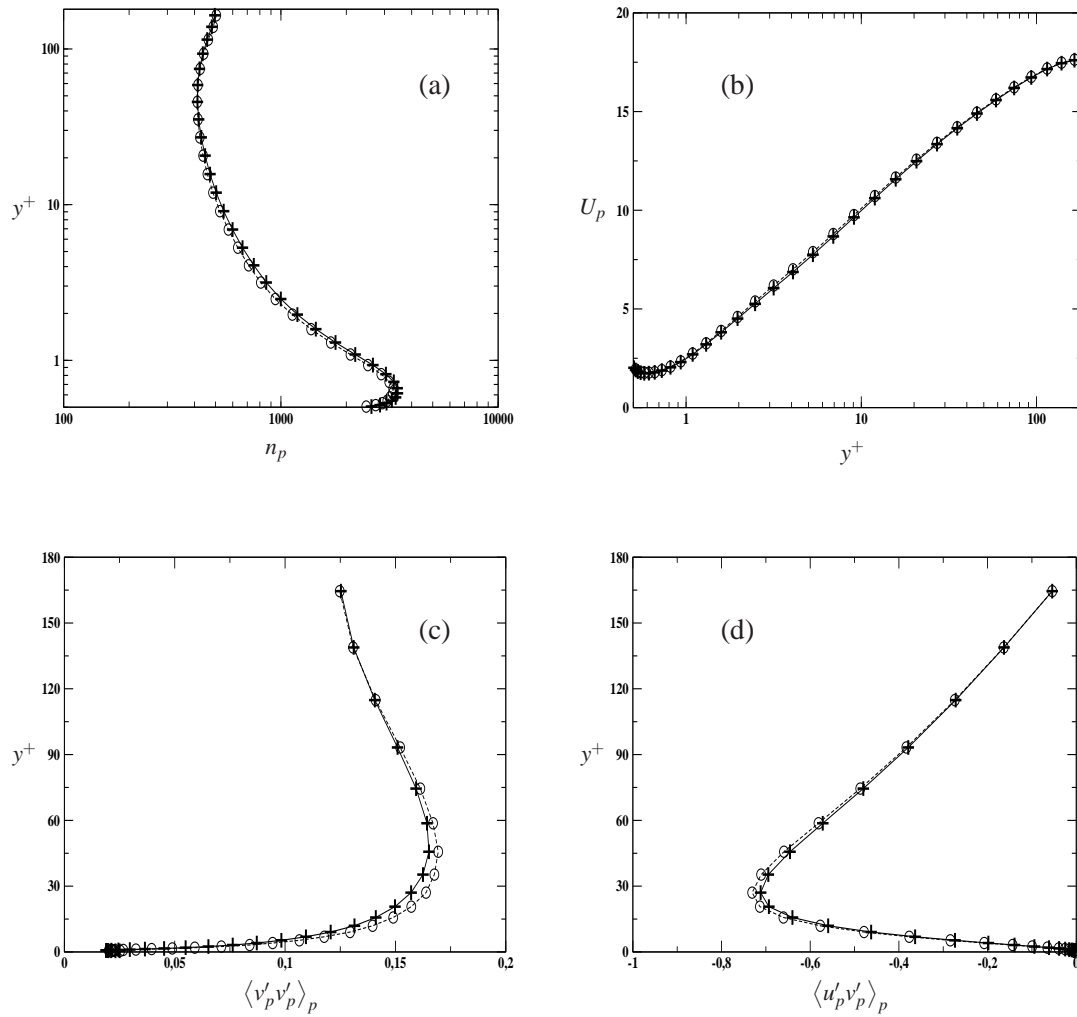


FIG. 4.23 – Comparaison des moments de la phase dispersée calculés d'une part avec le "*Rough Wall Multi-Collision Model*" (+) et d'autre part avec le modèle de paroi géométrique de distribution gaussienne d'angle de rugosité (\circ). Cas sans collisions inter-particulaires de $St = 0.65$ et $\Delta\gamma = 2.5^\circ$.

4.6 Simulation LES+DPS en canal à grand Reynolds : application du "Rough Wall Multi-Collisions Model"

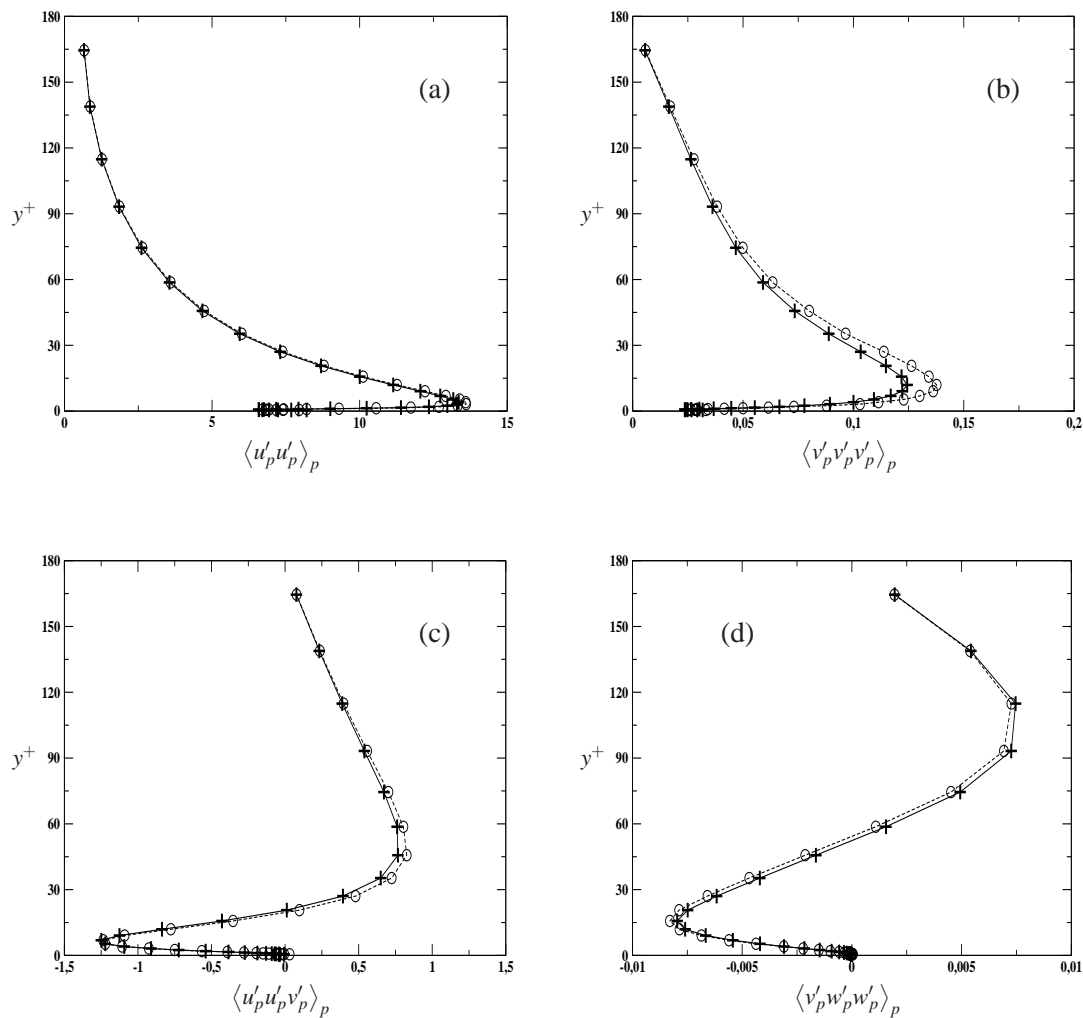


FIG. 4.24 – Même légende que pour la figure 4.23.

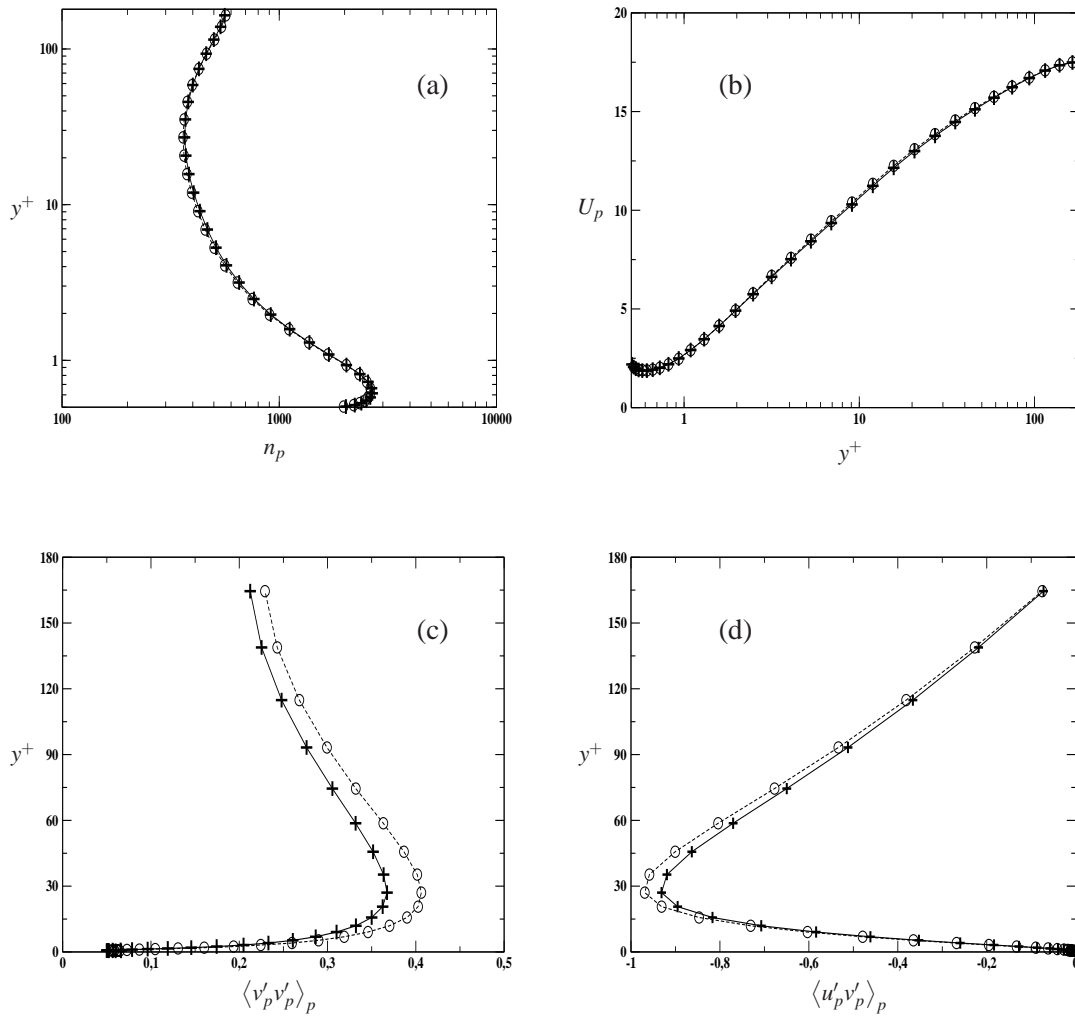


FIG. 4.25 – Comparaison des moments de la phase dispersée calculés d'une part avec le "Rough Wall Multi-Collision Model" (+) et d'autre part avec le modèle de paroi géométrique de distribution gaussienne d'angle de rugosité (○). Cas sans collisions inter-particulaires de $St = 0.65$ et $\Delta\gamma = 5.0^\circ$.

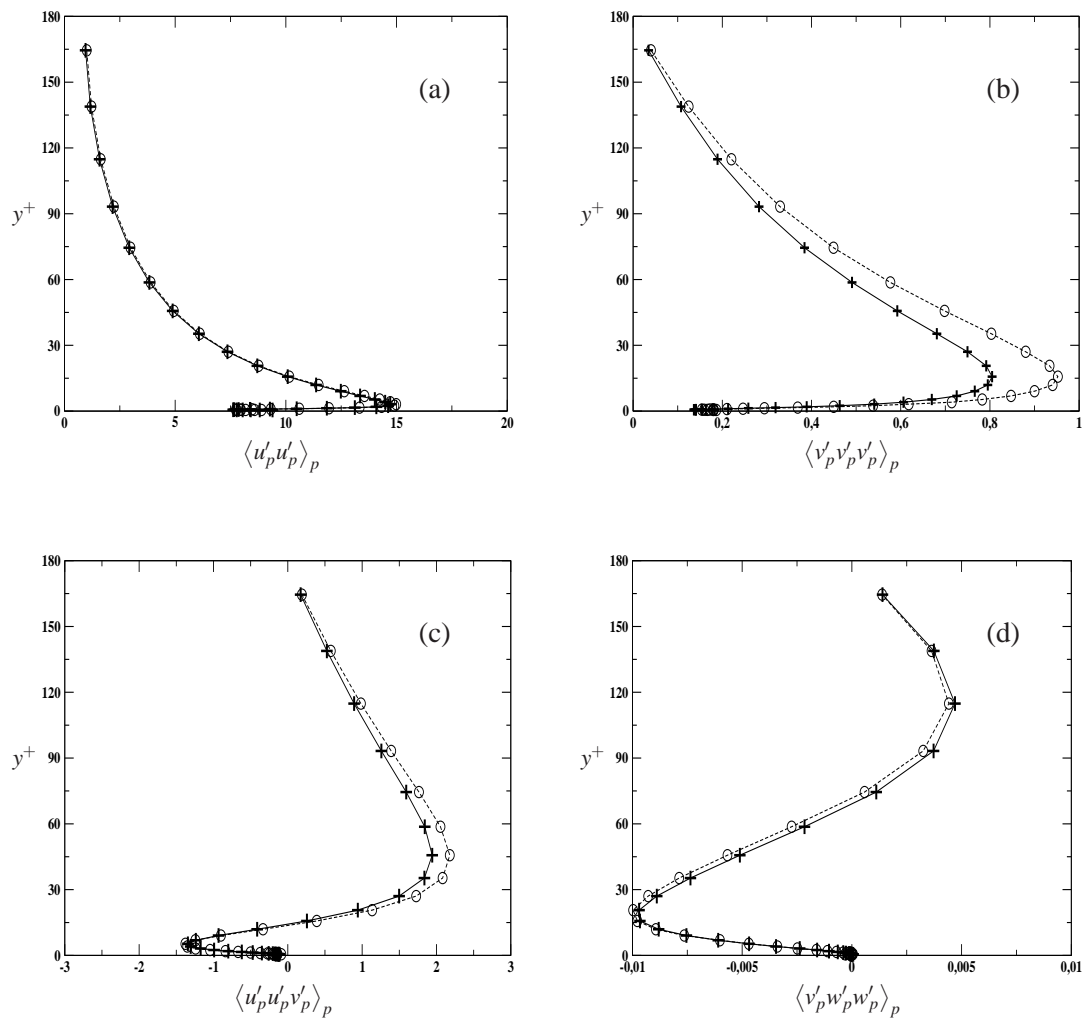


FIG. 4.26 – Même légende que pour la figure 4.25.

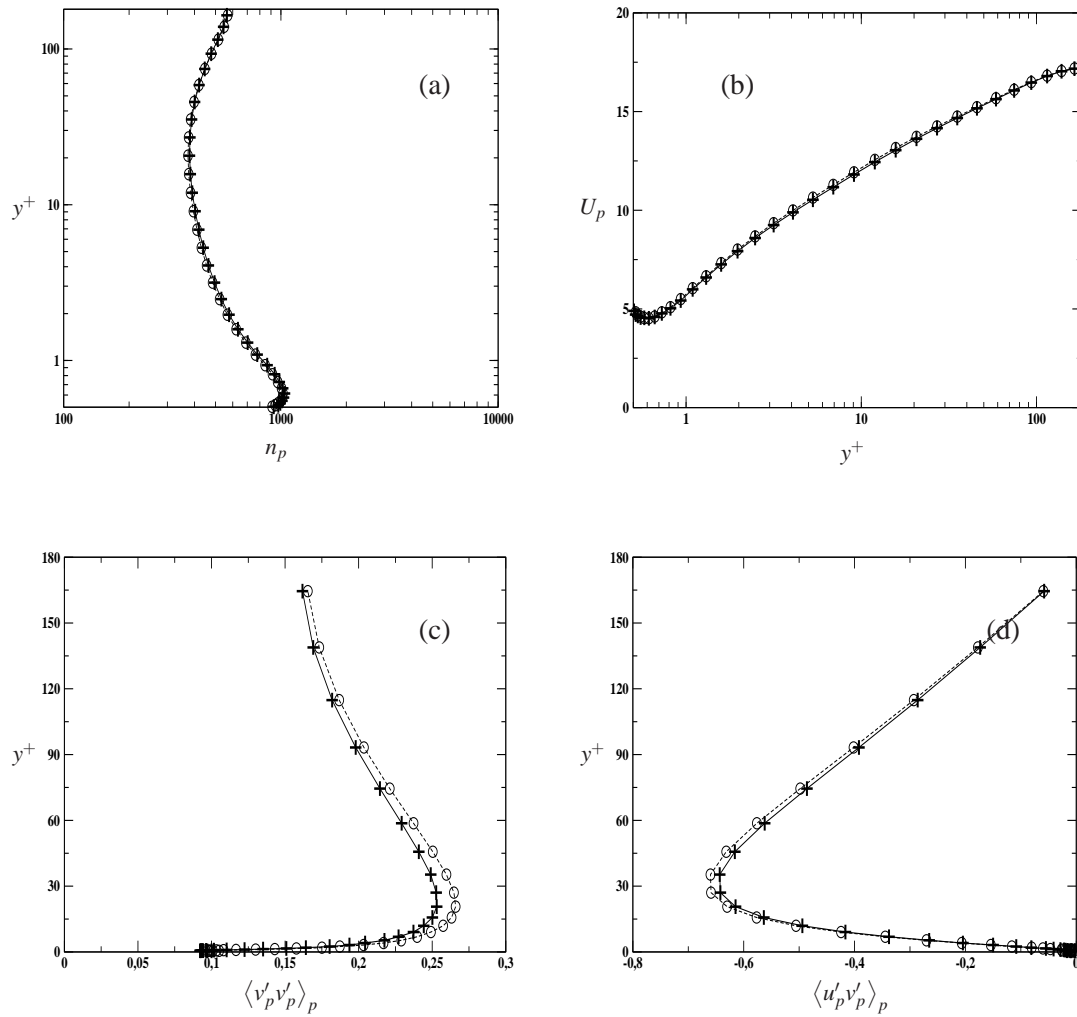


FIG. 4.27 – Comparaison des moments de la phase dispersée calculés d'une part avec le "Rough Wall Multi-Collision Model" (+) et d'autre part avec le modèle de paroi géométrique de distribution gaussienne d'angle de rugosité (O). Cas sans collisions inter-particulaires de $St = 1.3$ et $\Delta\gamma = 2.5^\circ$.

4.6 Simulation LES+DPS en canal à grand Reynolds : application du "Rough Wall Multi-Collisions Model"

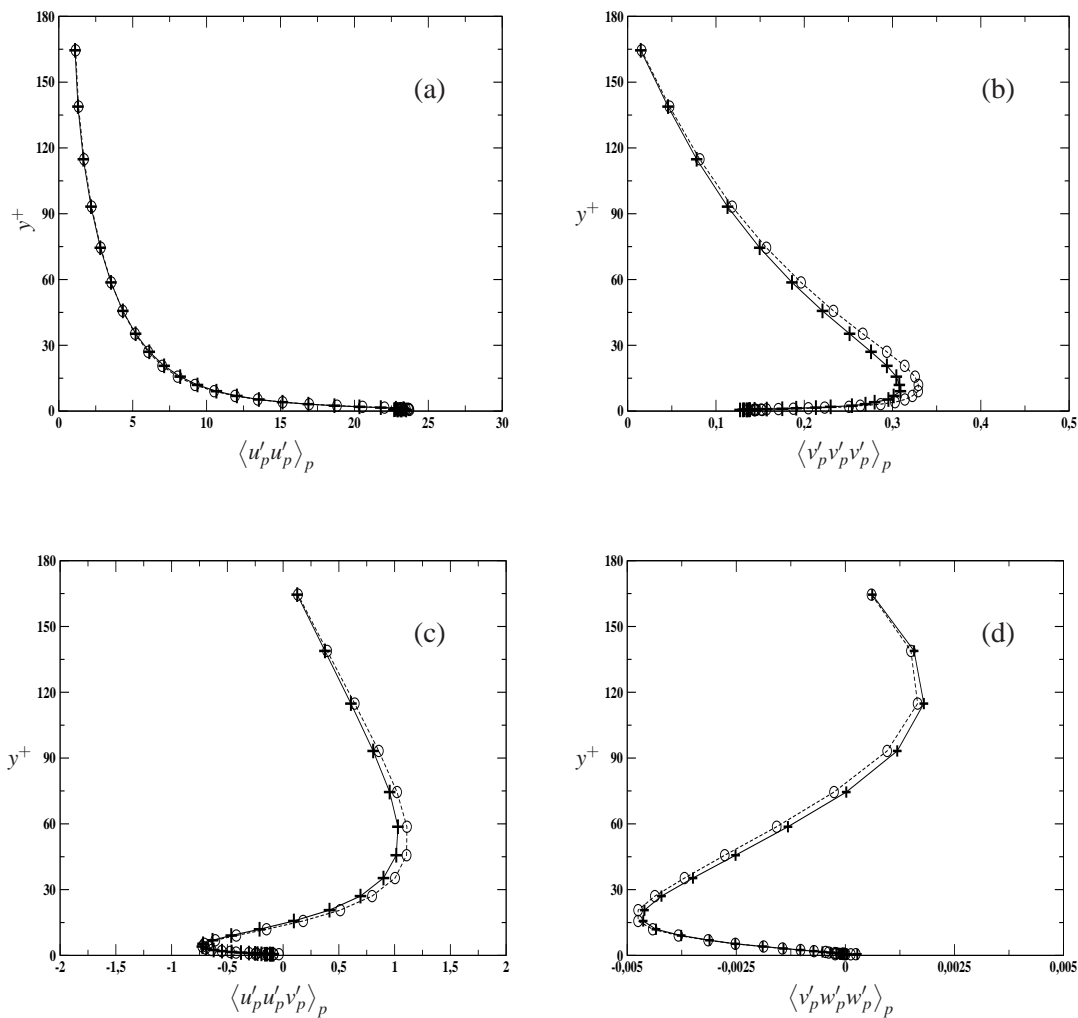


FIG. 4.28 – Même légende que pour la figure 4.27.

canal étroit, dans lequel le comportement des particules était étudié pour différents degrés de rugosité des parois.

4.6.1 Présentation sommaire du cas expérimental

Le dispositif expérimental est un canal horizontal de section rectangulaire, dans lequel est établi un écoulement turbulent diphasique gaz-particules. La phase gazeuse est de l'air tandis que les particules considérées dans l'expérience sont des billes de verre sphériques de diamètres supposés identiques. Les caractéristiques du domaine et des deux phases de l'écoulement sont résumées dans le tableau 4.6.1. Les parois inférieure et supérieure du canal sont faites en acier inoxydable. Le tableau 4.6.1 présente les hauteurs de rugosité moyennes et maximales des parois mesurées dans les directions longitudinale et latérale de l'écoulement. Ces mesures montrent que la taille des particules est d'environ 15 fois la hauteur moyenne de rugosité des parois ; et cela assure qu'il s'agit bel et bien de l'effet de rugosité des parois sur la phase dispersée qui est mis en exergue dans cette expérience.

Dimension du canal	
Longueur	6m
Largeur	350mm
Hauteur (soit demi-hauteur δ)	35mm (17.5mm)
Phase gazeuse (air)	
Masse volumique (ρ_f)	1.15kg.m ⁻³
Viscosité dynamique (μ_f)	18.62 × 10 ⁻⁶ Ns/m ²
Vitesse moyenne (U_{av})	20.0m.s ⁻¹
Vitesse de friction à la paroi (u_τ)	0.972m.s ⁻¹
Nombre de Reynolds basé sur u_τ et δ	1050.56
Phase dispersée (billes de verre sphériques)	
Diamètre (d_p)	100 μ m
Masse volumique (ρ_p)	2450kg.m ⁻³
Charge massique (η)	0.2
Temps de réponse ($\tau_{ps} = \rho_p d_p^2 / (18\nu_f \rho_f)$)	7.31 × 10 ⁻² s
Nombre de Stokes ($St = \bar{\tau}_{ps} = \tau_{ps} / (\delta / u_\tau)$)	4.06

TAB. 4.1 – Conditions expérimentales de Sommerfeld & Kussin (2004) [99].

	Direction longitudinale (μm)		Direction latérale (μm)	
	Moyenne de la rugosité	Hauteur maximale	Moyenne de la rugosité	Hauteur maximale
R2	6.83	8.32	6.89	7.83

TAB. 4.2 – Valeurs des hauteurs de rugosité mesurées par Sommerfeld & Kussin (2004) [99] dans les directions longitudinale et latérale de l'écoulement.

L'écoulement dans le canal est très turbulent ($Re_\tau = 1050.56$), anisotrope et inhomogène. Dans ces circonstances cette turbulence va jouer un rôle déterminant en modifiant la traînée des particules selon qu'elles sont en proche paroi ou dans le centre du canal. En retour, la présence des particules dans cet écoulement modifierait certainement la turbulence du fluide. Cette dynamique des particules motivée par la turbulence a pour résultat une augmentation des collisions entre particules. En outre, puisque les particules sont très lourdes comparativement au gaz, celles-ci ont un mouvement dicté par leur inertie ; si bien que les collisions particules/paroi jouent un rôle assez important dans le calcul de leur trajectoire dans le canal étroit. Ainsi, les phénomènes physiques les plus importants qui se produisent pendant cet écoulement turbulent et qui exigent d'être prise en compte dans la simulation sont : l'interaction fluide/particule (et vice versa), les collisions entre particules et les rebonds des particules sur les parois rugueuses. Cependant, dans un souci de simplification, nous ne prendrons pas en compte le couplage inverse malgré le taux de présence $\alpha_p = 1.05 \times 10^{-4}$.

4.6.2 Simulation des grandes échelles du fluide

Modélisation

L'écoulement du gaz dans le canal est modélisé par les équations filtrées de Navier-Stokes (3.8). La fermeture de cette équation est réalisée à l'aide du modèle empirique de Piomelli *et al.* (1989) [76] (3.23). En outre, les dimensions du canal ont été ramenées à un domaine d'étude théorique de longueur $L_x = 2\pi\delta$, de hauteur $L_y = 2\delta$ et de largeur $L_z = \pi\delta$, où δ est bien sûr la demi-hauteur réelle du canal. Ce qui revient à dire que seules la longueur et la largeur du canal ont été réduites. Dans ces conditions pour atteindre l'équilibre, nous avons utilisé des conditions de périodicité dans ces deux directions (longitudinale et latérale). Finalement les seules conditions aux limites dont nous avons besoin pour la résolution de l'équation filtrée de Navier-Stokes (3.8) résolues sur un maillage décalé sont définies par le modèle de paroi de Schumann (1975) [87]. Ces lois imposent que la contrainte à la paroi, dans les deux directions longitudinale et latérale de l'écoulement, est proportionnelle à la vitesse longitudinale du fluide au tout

premier point y_1 de résolution (en partant biensûr de la paroi) :

$$\begin{aligned}
 \tau_{12}(x, z) &= \frac{\overline{u_f}(x, y_1, z)}{\langle \overline{u_f}(x, y_1, z) \rangle} \langle \tau_w \rangle, \\
 \overline{v_{f,w}}(x, z) &= 0, \\
 \tau_{32}(x, z) &= \frac{2}{Re_\tau} \frac{\overline{w_f}(x, y_1, z)}{\Delta y} \langle \tau_w \rangle
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

La contrainte moyenne $\langle \tau_w \rangle$ à la paroi est soit connue à partir du gradient de pression ou calculée de manière itérative à partir de la vitesse par plan $\langle \overline{u}(x, y_1, z) \rangle$, au premier point, en satisfaisant la loi logarithmique. En résumé, le gradient de proche paroi n'est pas résolu mais la couche limite est modélisée en supposant une corrélation entre la vitesse dans l'écoulement et la contrainte à la paroi.

Il convient de faire remarquer que le choix du présent modèle de Schumann (1975) est motivé par la facilité de son implémentation par rapport aux modèles plus sophistiqués tels que celui de Piomelli et *al.* (1989) [76] similaire au modèle de Schumann, mais où la modélisation des contraintes à la paroi prend en compte l'inclinaison et l'étirement des structures dans les directions longitudinale et latérale de l'écoulement pendant les phénomènes d'éjection et éruption du fluide dans la région de paroi ; ou même le modèle à deux couches de Balaras et *al.* (1996) [3].

D'un point de vue numérique, les équations filtrées sont résolues suivant les méthodes décrites au chapitre 3 - section § 3.2.3, sur un maillage décalé uniforme constitué de 64^3 cellules. En outre, puisque les structures cohérentes productrices d'énergie dans la région de paroi ne sont pas résolues, nous avons choisi les tailles de mailles suivantes : $\Delta x^+ \simeq 103$ ($\Delta x^+ = \Delta x Re_\tau / \delta$), $\Delta y^+ \simeq 40$ et $\Delta z^+ \simeq 52$. Le premier point de résolution est positionné à $y^+ \simeq 20$ au début de la zone logarithmique.

Étant donnée que nous utilisons des conditions de périodicité alors même que nous ignorons la taille (longueur d'onde) des structures de l'écoulement turbulent, il nous est apparu nécessaire d'étudier les corrélations à deux points afin de s'assurer que la turbulence est bien entretenue malgré la réduction du domaine d'étude. Sur la figure 4.29, nous présentons les corrélations à deux points de la vitesse dans les directions longitudinale et latérale. Ces résultats montrent que toutes ces corrélations à deux points décroissent progressivement jusqu'à devenir négligeables à l'approche des demi-dimensions longitudinale $L_x/2$ et latérale $L_z/2$ du domaine théorique que nous nous sommes fixés. Or, selon Moin & Kim (1982) [64], l'utilisation de conditions de périodicité dans ces directions exige d'utiliser des dimensions deux fois plus grandes que les distances à partir desquelles les corrélations deviennent négligeables. En somme, les dimensions du domaine apparaissent suffisamment grandes pour pouvoir capturer les plus larges structures de l'écoulement. Nous pouvons, en outre, observer à $y^+ \simeq 385.85$ que la corrélation

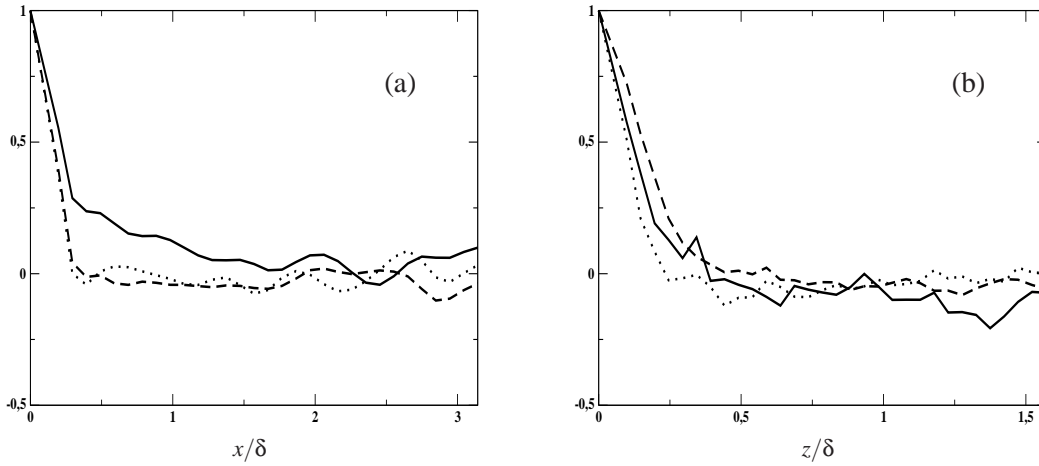


FIG. 4.29 – Correlations spatiales à deux points de la vitesse tracées à $y^+ \simeq 385.85$. Trait continu : R_{uu} , pointillés : R_{vv} et tiret : R_{ww} où (a) est dans la direction longitudinale et (b) dans la direction latérale.

R_{uu} persiste sur une large séparation dans la direction longitudinale avant de devenir négligeable : cela signifie que les structures ont tendance à s'étirer dans le sens de l'écoulement.

Résultats des simulations

La vitesse moyenne longitudinale de l'écoulement comparée aux données expérimentales est présentée sur la figure 4.30-(a). Un bon accord entre la prédiction LES et l'expérience peut être observé jusqu'au dernier point de mesure à $y^+ \simeq 58.23$. Par ailleurs, afin d'évaluer la qualité de la prédiction en dessous du premier point de mesure jusqu'au premier point de la LES (c'est à dire jusqu'à $y^+ \simeq 20$), nous avons aussi tracé le profil de Spalding (1961) qui est un développement en série de puissance reliant la sous-couche linéaire et la région logarithmique de la couche limite. Cette loi de Spalding est définie par :

$$y^+ = u^+ + \exp(-\kappa B) \left[\exp(\kappa u^+) - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2} - \frac{(\kappa u^+)^3}{6} \right] \quad (4.22)$$

avec $\kappa = 0.41$ (la constante de Von Karmàn) et $B = 5.0$.

La comparaison entre le profil de Spalding et la simulation montre que la vitesse longitudinale moyenne est légèrement surestimée en dessous du premier point de mesure. Cette légère sur-estimation explique en partie la légère sur-estimation de la fluctuation longitudinale en très proche paroi (voir figure 4.30-(b)). En outre, il peut être observée une prédiction satisfaisante de cette fluctuation longitudinale en dehors de cette région de très proche paroi. La figure 4.30-(c) présente une prédiction moyennement satisfaisante

de la fluctuation de la vitesse normale à la paroi. La comparaison de la prédiction de la contrainte de cisaillement $\langle u'_f v'_f \rangle_f$ avec les mesures expérimentales montre un excellent accord (figure 4.30-(d)).

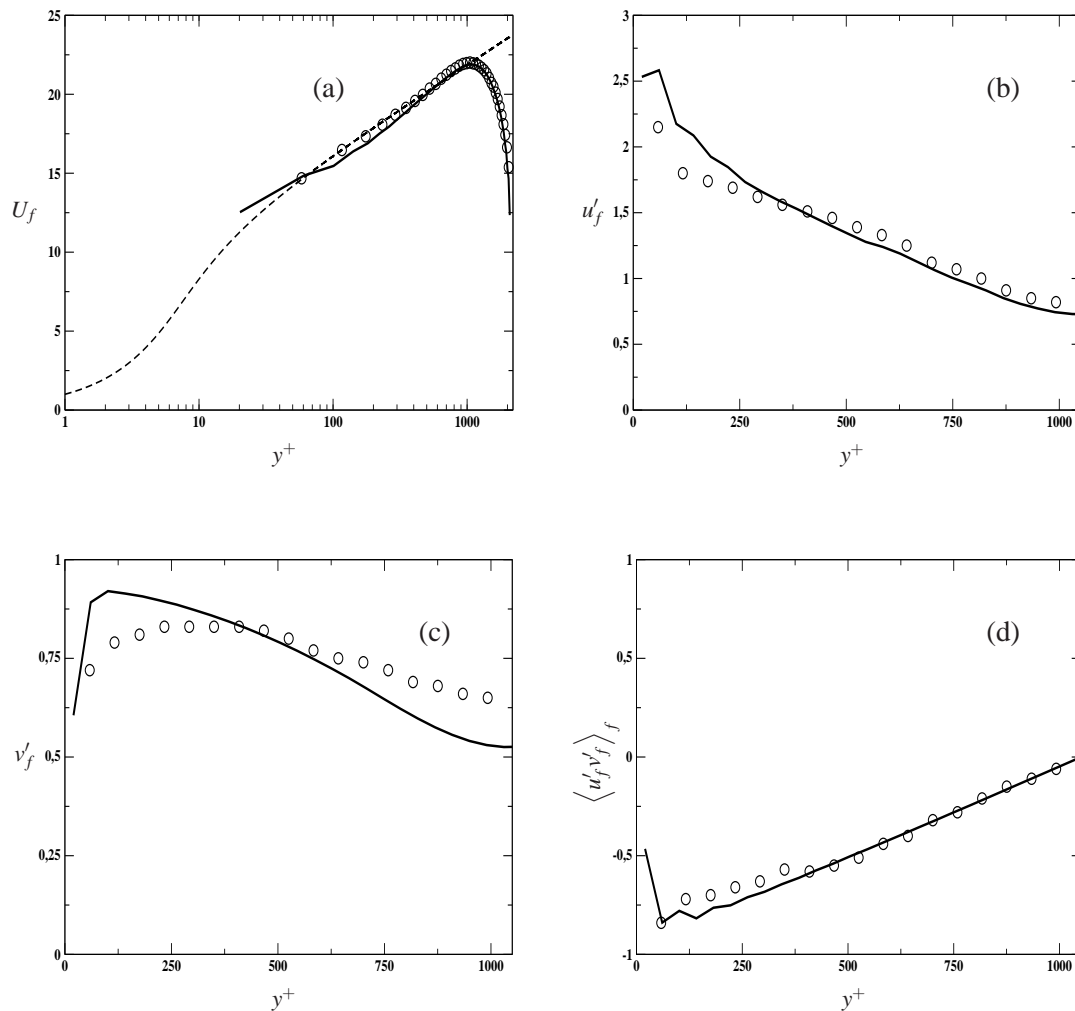


FIG. 4.30 – Comparaison du profil de la vitesse longitudinale et de l'intensité de la turbulence entre la simulation LES du fluide (trait continu) et les données expérimentales (○). Les tirets dans (a) représentent la loi de Spalding (4.22).

Au total, malgré la non prise en compte du couplage inverse, aussi bien la vitesse longitudinale moyenne que l'intensité de la turbulence sont en bon accord avec l'expérience, même si quelques légers écarts entre les simulations LES et les mesures expérimentales apparaissent en très proche paroi. Cela est certainement dû au fait que ne résolvant pas les structures de l'écoulement dans la région de paroi,

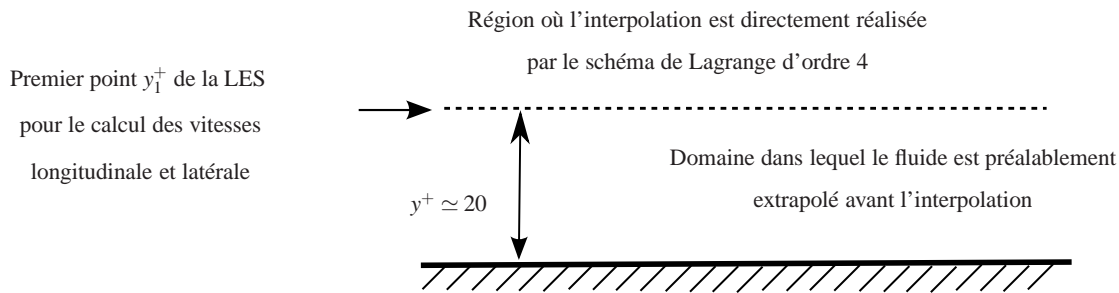


FIG. 4.31 – Procédure interpolation de la vitesse du fluide à la position des particules pour les vitesses longitudinale et latérale ($u_{f@p,i}$, $i = 1, 3$). Extrapolation effectuée par un schéma linéaire ou de Lagrange d'ordre 3.

qui d'ailleurs sont responsables de la plus grande partie de la production de la contrainte de cisaillement par les phénomènes de régénération des vortex, la prédiction LES n'a pu complètement capturer les fluctuations de la vitesse dans cette de très proche paroi.

4.6.3 Traitement Lagrangien de la phase dispersée

Pour ces simulations, nous supposons que les principales forces agissant sur les inclusions se résument à la traînée et à la gravité en raison du large ratio de masse volumique. Si bien que les équations du mouvement d'une particule sont celles définies par les équations (3.33) et (3.34) modifiée par l'ajout de la gravité. Les rotations des particules ne sont pas prises en compte. Les particules sont initialement introduites de manière aléatoire dans l'écoulement avec pour vitesses initiales celle du fluide à leurs différentes positions.

Processus d'interpolation du fluide

Utilisant les mêmes arguments qu'à la section § 3.3.2 du chapitre 3, la vitesse du fluide à la position d'une inclusion est directement obtenue par l'interpolation du fluide à cette position à l'aide du schéma de Lagrange d'ordre 4. Cependant, comme le premier point du maillage décalé pour la résolution des vitesses longitudinale et latérale par la LES est situé à $y^+ \simeq 20$; et qu'en outre le diamètre des particules est $d_p^+ \simeq 6.0$, nous avons effectué dans ces conditions une extrapolation préalable du fluide entre $y^+ \simeq 20$ et la paroi, avant de réaliser l'interpolation du fluide pour les particules se retrouvant dans cet domaine (donc celles interagissant avec la paroi). Cette procédure résumée par la figure 4.31 entraîne certainement un biais dans la prise en compte de la traînée.

Afin d'évaluer l'erreur commise dans la procédure d'interpolation ainsi présentée, nous avons, en instantané, calculé les caractéristiques du champ de vitesse interpolée. La méthode adoptée à cet effet a consisté à positionner de manière aléatoire un très grand nombre de particules dans le canal tout entier (test réalisé avec 10^6 particules), en s'assurant d'avoir quasiment le même nombre de particules par tranches de moyennes afin d'éviter des biais statistiques. Les particules restent fixes pendant la seule itération effectuée pour le test de l'interpolation. Nous avons testé les extrapolations linéaire et de Lagrange d'ordre 3 dans la région $d_p^+/2 \leq y^+ \leq y_1^+$ où les vitesses longitudinale et latérale ne sont pas calculées par la LES. Les courbes de la figure 4.32 montrent les caractéristiques du champ interpolé avec ces deux extrapolations. Nous observons globalement que l'interpolation retranscrit de manière satisfaisante les caractéristiques de l'écoulement dans tout le domaine LES, même si à l'approche de la fin du domaine LES, l'interpolation montre quelques légers écarts sur \overline{u}'_f et \overline{w}'_f aussi bien pour l'extrapolation Lagrangienne que linéaire. Mais ce résultat est totalement logique puisque la méthode d'interpolation de Lagrange d'ordre 4 qui est appliquée utilise nécessairement, à l'approche de la fin du domaine LES, des points extérieurs à ce domaine LES et en lesquels bien sûr la vitesse est au préalable extrapolée. Si bien que l'erreur due à l'extrapolation du champ de vitesse est communiquée aux tous premiers points de l'interpolation dans le domaine LES pour ces deux caractéristiques de l'écoulement. Les résultats montrent que l'extrapolation Lagrangienne extrapole de manière plus correcte la vitesse moyenne longitudinale par rapport à l'extrapolation linéaire (figure 4.32-(a)). Cependant, elle engendre de plus grandes fluctuations du champ de vitesse longitudinale (figure 4.32-(b)). En outre les deux méthodes d'extrapolation conduisent aux effets sur l'interpolation de la vitesse fluctuante latérale (figure 4.32-(e)). Quant à la fluctuation de la vitesse normale à la paroi (figure 4.32-(c)), elle est interpolée avec une précision satisfaisante.

Traitement des collisions

Les collisions particules/particules sont supposées binaires et inélastiques pendant le pas de temps Δt . Elles sont détectées et traitées de manière déterministe comme décrit à la section § 3.3.3 du précédent chapitre.

Quant aux interactions particules/parois rugueuses, elles sont traitées respectivement par "*Shadow Effect Model*" et de "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" afin d'évaluer la capacité de chacun d'eux à reproduire les effets de paroi rugueuse. A chaque collision d'une particule sur la paroi, le rebond est supposé glissant et s'effectue bien évidemment sur une paroi lisse inclinée dont l'angle γ est fourni par

4.6 Simulation LES+DPS en canal à grand Reynolds : application du "Rough Wall Multi-Collisions Model"

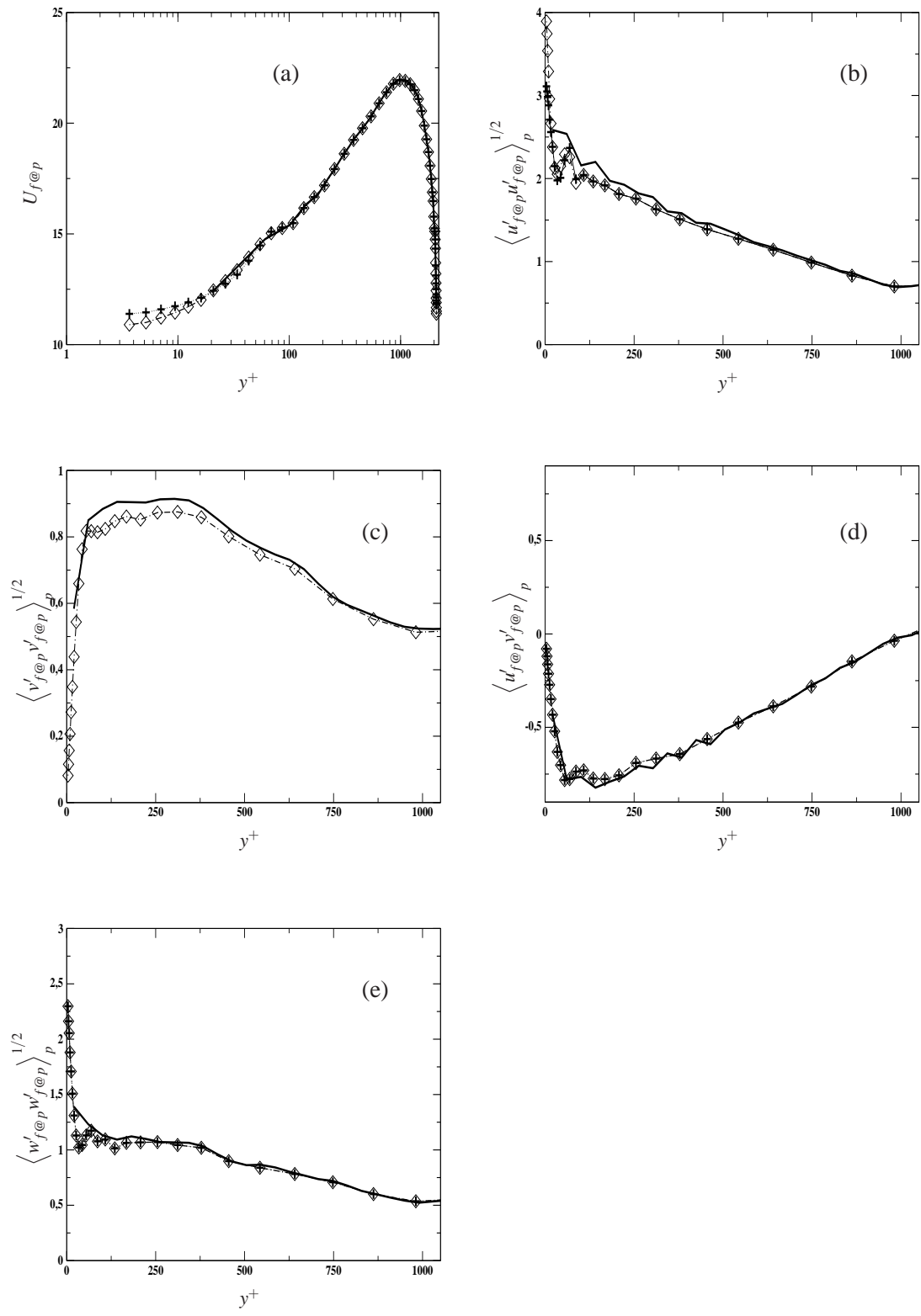


FIG. 4.32 – Effet des procédures conjuguées d'extrapolation préalable dans les directions longitudinale et latérale entre le premier point de la LES et la paroi puis de l'interpolation des caractéristiques du fluide à la position des particules. Trait continu : LES, + interpolation avec extrapolation linéaire et \diamond interpolation avec extrapolation Lagrangienne d'ordre 3.

le modèle utilisé. Ainsi, la vitesse de rebond est définie par :

$$\begin{aligned} \underline{v}_p^+ &= \underline{v}_p^- - (1 + e_w) (\underline{v}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) (\underline{n}_\gamma - \mu_w \underline{t}_\gamma) \\ \underline{t}_\gamma &= \frac{1}{|\underline{v}_g|} \underline{v}_g, \quad \underline{v}_g = \underline{v}_p^- - (\underline{v}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) \underline{n}_\gamma \end{aligned} \quad (4.23)$$

où considérant des effets de rugosité 2D, nous avons supposé que la particule rebondit sur une paroi lisse inclinée de normale $\underline{n}_\gamma = (-\sin\gamma, \cos\gamma, 0)$.

Les coefficients de restitution e_w et de friction μ_w à la paroi sont en accord avec Grant & Tabakoff (1975) [30], fonction de l'angle d'incidence α^- des particules sur une paroi lisse. Ainsi, à la lumière de leurs mesures, Sommerfeld & Huber (1999) [98] proposent de la modélisation suivante :

$$e_w(\alpha^-) = \begin{cases} \frac{e_h - 1}{\alpha_e} \alpha^- + 1 & \text{si } \alpha^- \in [0, \alpha_e] \\ e_h & \text{si } \alpha^- \geq \alpha_e \end{cases} \quad (4.24)$$

et :

$$\mu_w(\alpha^-) = \begin{cases} \frac{\mu_h - \mu_0}{\alpha_\mu} \alpha^- + \mu_0 & \text{si } \alpha^- \in [0, \alpha_\mu] \\ \mu_h & \text{si } \alpha^- \geq \alpha_\mu \end{cases} \quad (4.25)$$

où les coefficients de rebonds e_h , μ_h et μ_0 ; et les angles d'impact α_e et α_μ sont déterminés par des mesures préalables. Il convient de faire remarquer que dans nos simulations, nous remplaçons α^- par $\alpha^- + \gamma$, puisque α^- est l'angle d'incidence par rapport à la paroi macroscopique.

Dans le cadre de l'étude expérimentale, objet de nos simulations et dont les conditions sont résumées dans les tableaux 4.6.1 et 4.6.1, Sommerfeld & Kussin (2004) [99] mesuraient¹ pour les particules de 100 μm de diamètre : $\Delta\gamma = 5.3^\circ$, $e_h = 0.7$, $\alpha_e = 22.0^\circ$, $\mu_h = 0.15$, $\mu_0 = 0.5$ et $\alpha_\mu = 20.0^\circ$. En outre, afin mieux prédire la vitesse moyenne des particules, les paramètres ont été modifié par les investigateurs en proposant entre autre $\Delta\gamma = 6.5^\circ$. Nous avons effectué, en plus de ces deux valeurs d'écart type de rugosité, des simulations numériques dans le cas des parois lisses afin d'évaluer les mécanismes précédemment proposés.

Analyses et interprétations des résultats

Le profil normalisé (par la concentration moyenne C_{av}) de la concentration en particules du canal présenté sur la figure 4.33-(a) confirme dans un premier l'effet très important de la rugosité sur la distri-

¹Bien qu'étant mesurés au cours de cette étude expérimentale, les paramètres de rebonds et de rugosité qui sont donnés ne figurent tous pas ledit papier. Cependant ceux-ci ont été fournis pas Sommerfeld dans le cadre du "11th Workshop on Two-Phase Flow Predictions, April 5-8, 2005, Mersburg, Germany."

bution des particules dans le canal et ensuite l'influence très remarquable de l'effet de rebonds multiples. En effet cette figure montre une forte concentration de particules à la paroi inférieure lorsque les parois lisses. On peut y constater en plus une bonne prédiction de cette concentration par le "*Shadow Effect Model*" tandis que l'effet de rebonds multiples mis en évidence dans le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" conduit à plus grande réduction du nombre de particules en très proche paroi mais un accord parfait avec les mesures dans le reste de l'écoulement. Remarquons tout de même pour chacun des deux modèles d'effet de rugosité, que l'augmentation de l'intensité de la rugosité n'a pas entraînée de grandes réductions de la concentration à la paroi. Cependant, ces résultats sont totalement logiques et en accord avec les mécanismes longuement discutés précédemment. En effet comme nous l'avons montré, une réduction du nombre de particules en paroi est fortement liée à une forte agitation normale à la paroi. Or la figure 4.33-(b) présente de $\Delta\gamma = 0^\circ$ à $\Delta\gamma = 6.5^\circ$ une augmentation systématique de la vitesse fluctuante normale avec cette intensification de $\Delta\gamma$. En outre, deux importants résultats sont mis en évidence par cette figure. Premièrement, le "*Shadow Effect Model*" a conduit une prédiction correcte du profil aussi bien pour la valeur mesurée de l'écart type de distribution de la rugosité $\Delta\gamma = 5.3^\circ$ que pour celle modifiée $\Delta\gamma = 6.5^\circ$; mais les résultats montrent une réelle sous-estimation de la fluctuation mesurée. Deuxièmement, une meilleure prédiction de cette fluctuation est assurée par le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" pour la valeur de l'écart type de rugosité $\Delta\gamma = 5.3^\circ$, même si une plus forte agitation est observé aux parois. L'augmentation l'intensité de la rugosité à $\Delta\gamma = 6.5^\circ$ a plutôt conduit à une sur-estimation.

Afin de confirmer le mécanisme pilotant l'agitation normale puis la concentration des particules dans le canal, dans ce cas expérimental, nous avons présenté sur la figure 4.34-(a), le profil de $n_p \langle v_p^3 \rangle_p$ de sorte à mettre en lumière son augmentation à la paroi en fonction des modèles adoptés. Il peut être observé à intensité de rugosité égale que ce flux $n_p \langle v_p^3 \rangle_p$ est beaucoup plus élevé avec le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" qu'avec le "*Shadow Effect Model*". On constate du passage de $\Delta\gamma = 5.3^\circ$ à $\Delta\gamma = 6.5^\circ$, une légère augmentation de ce flux à la paroi avec le "*Shadow Effect Model*" tandis que cette augmentation est très forte avec le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*". Cela implique une plus forte dispersion turbulente induite par "*Rough Wall Multi-Collisions Model*", si bien que l'augmentation de l'écart type de rugosité conduit à une plus grande augmentation de la vitesse fluctuante normale pour le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" qu'avec le "*Shadow Effect Model*".

La figure 4.33-(c) montre la vitesse longitudinale moyenne des particules dans le canal. Un très bon accord avec l'expérience est observé de manière générale pour la prédiction par le "*Shadow Effect*

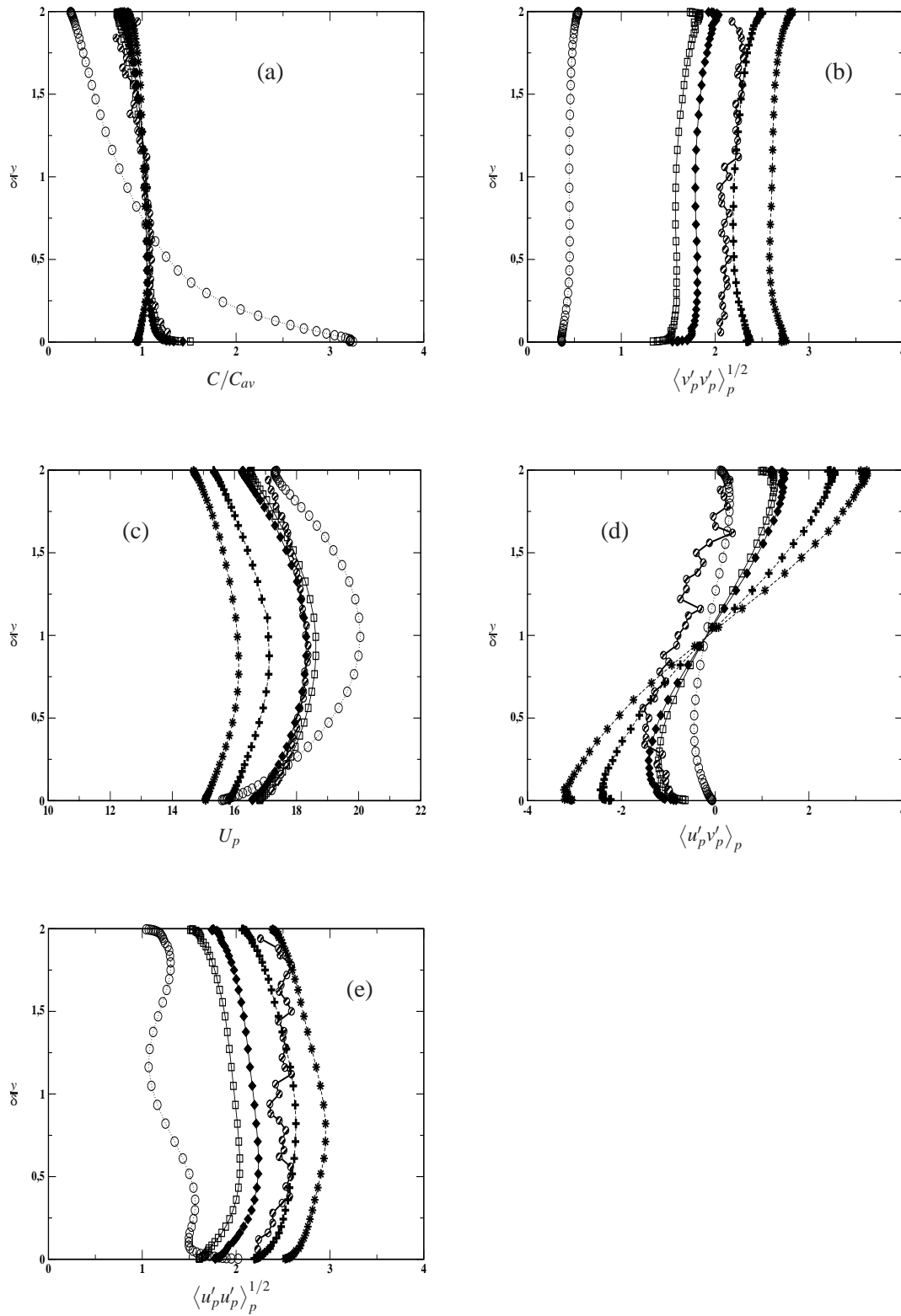


FIG. 4.33 – Simulations LES/DPS gaz-particules en canal à grand Reynolds : statistiques de la phase dispersée. Ronds hachurés : données expérimentales (Sommerfeld & Kussin (2004) [99]); "Shadow Effect Model" : (\square) $\Delta\gamma = 5.3^\circ$ et (\blacklozenge) $\Delta\gamma = 6.5^\circ$; "Rough Wall Multi-Collisions Model" : (+) $\Delta\gamma = 5.3^\circ$ et (*) $\Delta\gamma = 6.5^\circ$; Paroi lisse : (\circ).

Model" lorsque $\Delta\gamma = 6.5^\circ$. Toutefois, il apparaît en très proche paroi une sous-estimation de la vitesse moyenne. L'augmentation de l'intensité de la rugosité a mené à une insignifiante réduction de la vitesse moyenne. Quant aux prédictions obtenues à partir du "*Rough Wall Multi-Collisions Model*", elles montrent des sous-estimations d'environ 7% et 12% respectivement pour $\Delta\gamma = 5.3^\circ$ et $\Delta\gamma = 6.5^\circ$ par rapport aux mesures. Toutefois, les profils prédits sont excellents. Remarquons que de la paroi lisse à la rugosité d'intensité $\Delta\gamma = 6.5^\circ$, la vitesse moyenne des particules diminue dans le canal et présente particulièrement un profil plus uniforme avec le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*". Ce qui permet de conclure à un plus fort cisaillement à la paroi avec ce modèle d'effet de rebonds multiples qu'avec le "*Shadow Effect Model*" (4.33-(d)). En accord avec le mécanisme pilotant cette vitesse moyenne, la figure 4.34-(b) montre non seulement une augmentation du flux $n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p$ à la paroi avec l'augmentation de $\Delta\gamma$, d'ailleurs beaucoup plus effective avec le modèle d'effet de rebonds multiples, mais aussi une amplification de ce flux à la paroi par l'effet de rebonds multiples. Un résultat assez important à faire remarquer est la capacité du "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" à induire une réduction de la vitesse moyenne des particules avec l'augmentation de la rugosité. Ce qui n'est pas véritablement le cas avec le "*Shadow Effect Model*". Une telle réduction de la vitesse moyenne des particules de l'ordre de 30 ~ 40% du passage aux parois lisses à une très grande rugosité est observée expérimentalement par Benson *et al.* (2005)[5]. En se référant à l'approche PDF (Simonin, 1991), il revient que le "*Shadow Effect Model*" conduit à une sous-estimation de la dispersion turbulente de l'équation de la vitesse moyenne (conférer à l'équation (3.56)).

La fluctuation de la vitesse longitudinale des particules est présentée sur la figure 4.33-(e). Un premier constat est d'observer qu'en l'absence de rugosité le profil est serpenté, tandis qu'il est plus "droit" avec les deux modèles d'effet de paroi rugueuse. Cela denote d'un effet de dispersion turbulente plus intense induit par la rugosité des parois. On peut constater que l'augmentation de l'intensité de rugosité entraîne une augmentation de cette agitation aussi bien avec le "*Shadow Effect Model*" que le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*". Cependant, malgré l'augmentation de l'intensité de la rugosité, les deux prédictions obtenues à partir du "*Shadow Effect Model*" (avec les deux intensités de rugosité $\Delta\gamma = 5.3^\circ$ et $\Delta\gamma = 6.5^\circ$) sous-estiment la fluctuation de la vitesse longitudinale. Cela révèle, en outre, une sous-estimation de la production d'énergie à la paroi par les gradients de vitesse moyenne puis de son transport vers le cœur de l'écoulement. Un bon accord est par contre obtenu à partir du "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" pour l'écart type mesuré $\Delta\gamma = 5.3^\circ$. L'augmentation de l'intensité de la rugosité à $\Delta\gamma = 6.5^\circ$ a conduit à une sur-estimation par rapport aux mesures disponibles.

Pour résumer, il convient de noter que les résultats des simulations lagrangiennes de ce cas expérimental montrent que le "*Shadow Effect Model*" conduit à une sous-estimation de l'agitation des particules dans tout le canal, même en augmentant l'intensité de la rugosité des parois. En accord avec l'approche PDF, les mécanismes pilotant les premiers moments de la phase dispersée, il ressort une sous-estimation de la dispersion turbulente et de la production d'énergie par d'énergie à la paroi par les gradients de vitesse moyenne. Quant au "*Rough Wall Multi-Collisions Model*", ces simulations révèlent principalement une amplification des effets de paroi rugueuse en raison d'une plus forte dispersion turbulente et de la production d'énergie par d'énergie à la paroi par les gradients de vitesse moyenne. Cela a eu pour résultat d'amplifier l'agitation des particules dans tout le canal et entraîner la chute de la vitesse longitudinale moyenne. L'utilisation de l'écart type mesuré de la distribution des angles de rugosité a conduit à des résultats satisfaisants, en dépit des coefficients de rebond ($e_h, \alpha_e, \mu_h, \mu_0$ et α_μ) modifiés par les investigateurs pour l'obtention d'une meilleure prédiction de la vitesse longitudinale moyenne à partir du "*Shadow Effect Model*". Il convient donc d'effectuer de nouveaux calculs avec les "vrais" coefficients afin de valider proprement le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" sur l'expérience.

4.6.4 Etude des distributions des angles et vitesses à la paroi

PDF des angles

Sur les figures 4.35-(a) & (b), nous présentons les distributions des angles d'incidence des particules sur la paroi inférieure du canal pour les deux écarts types de rugosité $\Delta\gamma = 5.3^\circ$ et $\Delta\gamma = 6.5^\circ$, à la fois pour le "*Shadow Effect Model*" et le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*". Notons qu'à ces figures, nous avons adjoint la PDF de l'angle d'incidence dans le cas des parois lisses. La première constatation est qu'avec la paroi lisse, les particules ont une forte probabilité de la heurter avec un angle très rasant (d'environ $\alpha^- \simeq 1.0^\circ$), tandis que l'angle d'incidence maximum enregistré se situe autour de $\alpha^- \simeq 10.0^\circ$. L'utilisation du "*Shadow Effect Model*" a conduit à une réduction de la forte probabilité d'heurter la paroi avec un angle aussi rasant, mais aussi elle a entraînée un élargissement de la distribution des angles : des particules entrent désormais en collision avec la paroi avec parfois $\alpha^- > 20.0^\circ$. La distribution mise en évidence avec le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" montre toujours un élargissement de l'espace des angles d'incidence à des valeurs encore plus élevées. En outre, les particules incidentes arrivent beaucoup moins rasantes et elles ont quasiment la même probabilité d'heurter la paroi aussi bien avec un angle rasant qu'avec un angle relativement élevé. Ces résultats montrent que le comportement des

particules incidentes est certainement modifié par le modèle de rebond : les particules se comportent comme si elles ont gardé en mémoire les précédentes collisions avec la paroi.

La deuxième série de résultats porte sur la distribution des angles de rebond des particules, par ailleurs présentés sur la figure 4.36. Un autre élément de la compréhension du comportement imposé par le modèle de rebond aux particules réfléchies est l'analyse de la dispersion de celles-ci pour un angle d'incidence donné. Pour les trois résultats que nous présentons, nous avons choisi au cours de la simulation les angles d'incidence tels que $\alpha^- \in [0.9^\circ, 1.1^\circ]$, $\alpha^- \in [4.9^\circ, 5.1^\circ]$ et $\alpha^- \in [9.9^\circ, 10.1^\circ]$ pour mener l'analyse. Comme, nous l'avons fait remarquer dans le cadre de l'étude théorique à bas nombre de Reynolds, que le "*Shadow Effect Model*" génère systématiquement des particules rasantes à la paroi. Ce comportement est doté une très forte probabilité d'autant plus que les particules incidentes sont très rasantes. Quant au "*Rough Wall Multi-Collisions Model*", il conduit en accord avec sa dérivation, à une probabilité nulle pour les particules de repartir rasantes.

PDF des vitesses

Un important point des présentes simulations est l'étude des distributions des vitesses tant incidentes que réfléchies à la paroi, en raison de leur importance capitale dans la modélisation eulérienne des conditions aux limites. A cet effet, nous présentons les distributions des composantes longitudinale, normale à la paroi et latérale des vitesses, que nous comparons en plus aux distributions classiques (exponentielle et gaussienne), aussi bien en paroi lisse qu'en paroi rugueuse avec les deux modèles d'effet de paroi rugueuse (à savoir "*Shadow Effect Model*" et "*Rough Wall Multi-Collisions Model*").

Les distributions de la composante longitudinale sont montrées sur la figure 4.37. Il nous apparaît dans le cadre des modèles de rugosité, à $\Delta\gamma$ fixé, un élargissement de la distribution aussi bien incidente que réfléchie, en passant du "*Shadow Effect Model*" au "*Rough Wall Multi-Collisions Model*". En outre, on observe un léger élargissement de la distribution des vitesses réfléchies par rapport à celle des vitesses incidente. Pour ce qui de la paroi lisse, la distribution de la composante longitudinale reste quasiment identique à celle d'incidence. Aussi, il peut être remarqué que les formes des distributions ne sont ni gaussiennes et exponentielles. Cependant, les distributions se rapprochent d'une gaussienne, en particulier dans le cadre du "*Rough Wall Multi-Collisions Model*".

Les formes des distributions de la vitesse normale à la paroi que présente la figure 4.38 sont assez complexes dans le cadre des parois rugueuses, en particulier pour la PDF des vitesses de rebond. Cependant, elles ont l'avantage d'exhiber assez nettement les principales caractéristiques des modèles de paroi utilisés et dont nous en avons longuement discuté dans ce chapitre comme ceux antérieurs. En effet, les

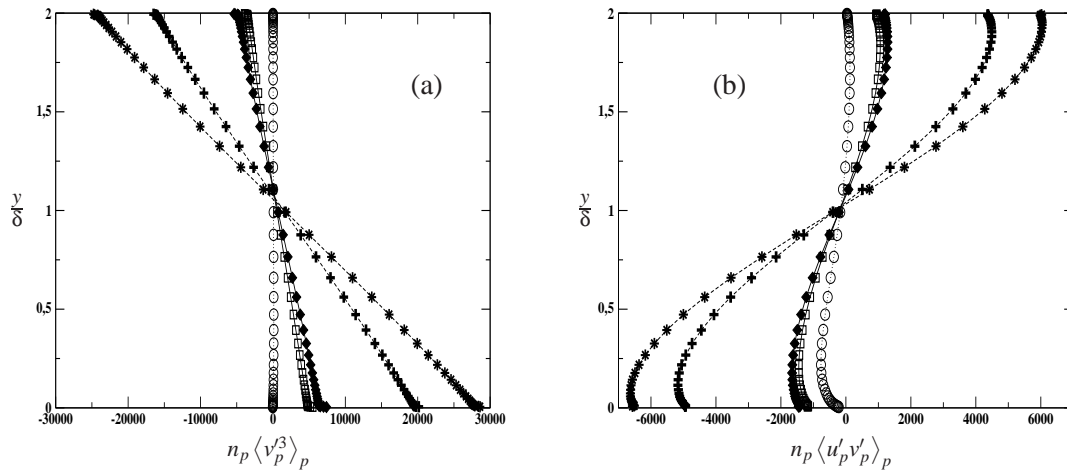


FIG. 4.34 – Modification du flux $n_p \langle v_p^3 \rangle_p$ à la paroi en fonction des modèles d'effet de rugosité. "Shadow Effect Model" : (\square) $\Delta\gamma = 5.3^\circ$ et (\blacklozenge) $\Delta\gamma = 6.5^\circ$; "Rough Wall Multi-Collisions Model" : (+) $\Delta\gamma = 5.3^\circ$ et (*) $\Delta\gamma = 6.5^\circ$; Paroi lisse : (\circ).

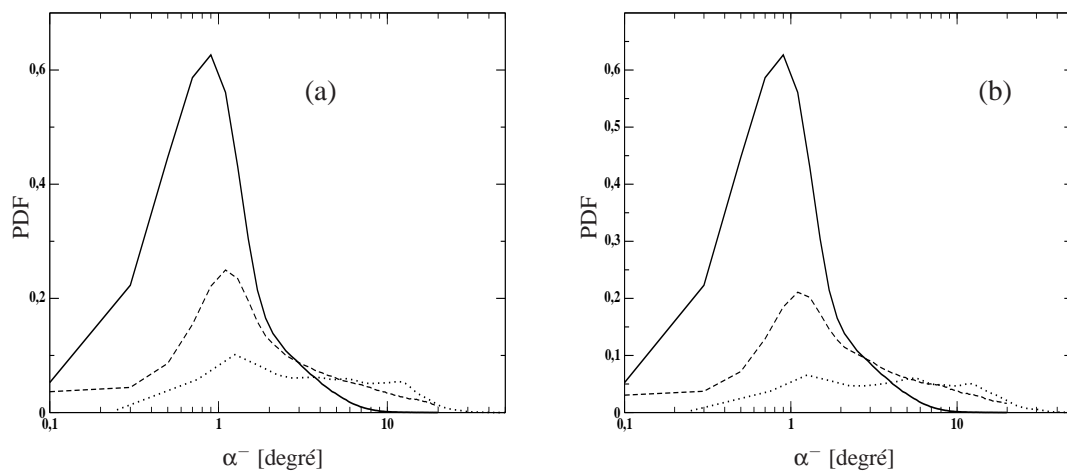


FIG. 4.35 – Fonctions de distribution des angles d'incidence des particules sur la paroi inférieure du canal. "Ligne continue" : paroi lisse, "tiret" : Shadow Effect Model et "pointillé" : Rough Wall Multi-Collisions Model. (a) : $\Delta\gamma = 5.3^\circ$, (b) : $\Delta\gamma = 6.5^\circ$.

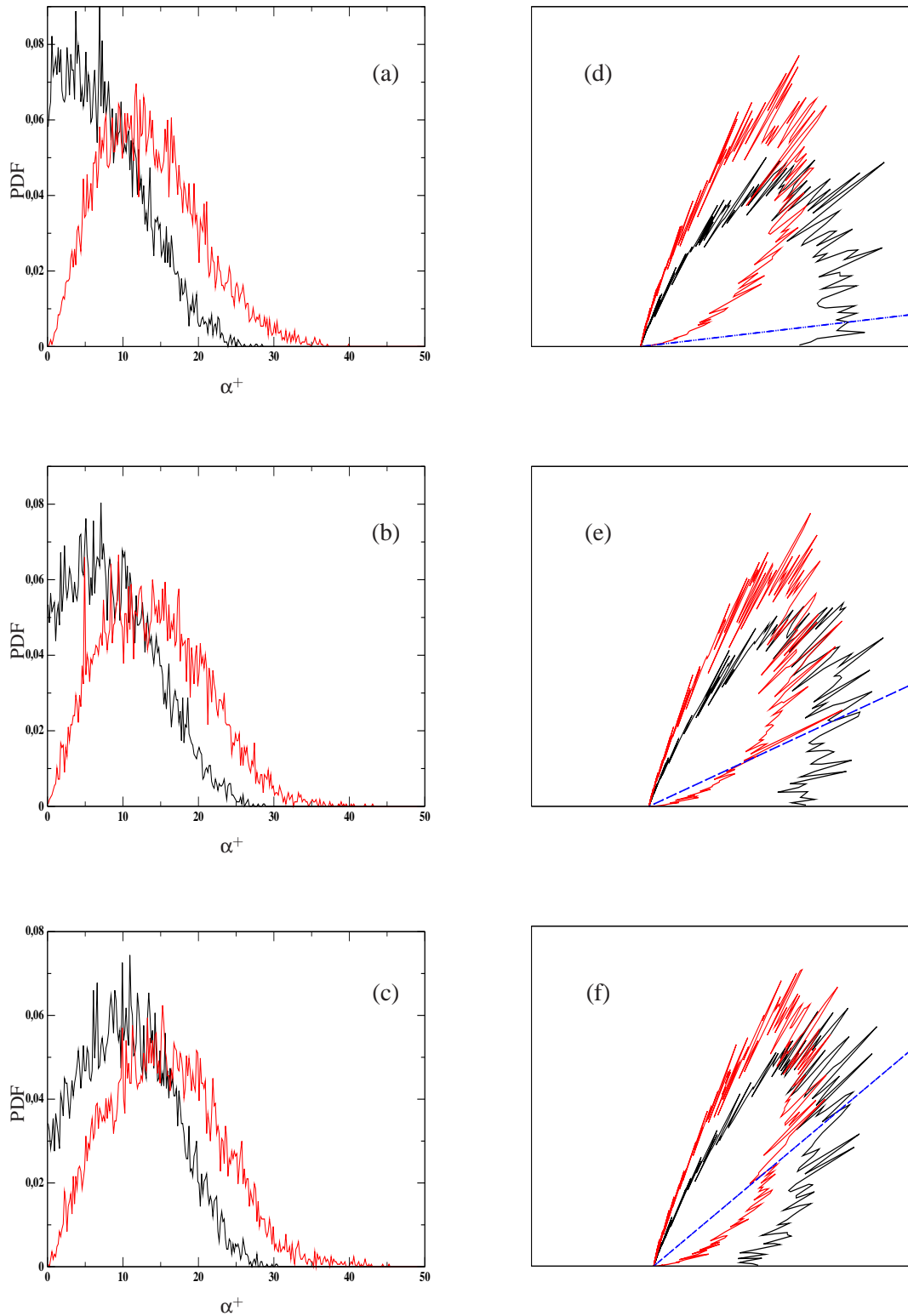


FIG. 4.36 – Distribution des angles rebonds des particules (à gauche) et dispersion probable des particules en fonction de l'angle de rebond (à droite) pour une incidence α^- fixée : les couples ((a),(d)) , ((b),(e)) et ((c),(f)) correspondent respectivement aux situations où $\alpha^- \in [0.9^\circ, 1.1^\circ]$, $\alpha^- \in [4.9^\circ, 5.1^\circ]$ et $\alpha^- \in [9.9^\circ, 10.1^\circ]$. Les traits noir et rouge représentent le "Shadow Effect Model" et le "Rough Wall Multi-Collisions Model" ; tandis que la ligne bleue discontinue montre l'angle de rebond de la particule après une collision sur une paroi lisse.

figures 4.38-(a) & (b) montrent dans le cadre du "*Shadow Effect Model*" que les particules arrivent à la paroi de manière très rasante, mais aussi et surtout elles ont une forte probabilité de repartir avec une faible vitesse normale après leur rebond irrégulier sur la paroi. Nous pouvons par ailleurs observer que la distribution ces vitesses normales de rebond est un peu plus large que celle incidente et ce, avec l'augmentation de $\Delta\gamma$. Cet élargissement est beaucoup plus important avec le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*". En outre avec le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*", il peut être observé que les différentes probabilités d'avoir $\underline{v}_p^- \cdot \underline{n} = 0$ et $\underline{v}_p^+ \cdot \underline{n} = 0$ à la paroi sont nulles [figure 4.38-(c) & (d)]. En paroi lisse, les formes obtenues des simulations sont plus régulières ; cependant elles ne sont ni gaussiennes, ni exponentielles [figure 4.38-(e)].

Ayant considéré des effets de rugosité $2D$ dans les présentes simulations, il vient que la vitesse latérale incidente est inchangée après la collision sur la paroi. Avec le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*", les distributions se confondent avec la distribution exponentielle.

En guise de conclusion, l'élargissement des distributions des composantes des vitesses des particules est le résultat d'une plus forte agitation induite par la rugosité des parois. Par ailleurs comme nous l'avons souligné, le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" communique une plus forte agitation aux particules que le "*Shadow Effect Model*", en raison principalement de l'effet de rebonds multiples. Un autre important impact de l'effet de rebonds multiples est l'annulation de l'éventualité de particules à vitesse normale quasiment nulle.

4.7 Conclusion

Les investigations entreprises dans le cadre de chapitre ont principalement porté sur la compréhension des mécanismes qui interviennent au cours de l'interaction particules/paroi rugueuse. Les analyses des simulations lagrangiennes en canal à bas Reynolds ont mis en évidence une forte influence des rebonds multiples sur les propriétés statistiques de la phase dispersée d'un écoulement diphasique. Ces simulations ont révélé une amplification des effets de paroi rugueuse et des mécanismes pilotant les premiers moments. En raison de ces influences des rebonds multiples, en s'appuyant sur les résultats statistiques des simulations déterministes de collisions de particules sur des parois rugueuses géométriques (Kannengieser (2006) [47]), le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" est proposé. Basé sur le principe de paroi lisse virtuelle inclinée sur laquelle est effectué un unique rebond, ce modèle stochastique incorpore les effets de rebonds multiples. Une validation de celui-ci en comparaison avec des simulations lagrangiennes en canal à bas Reynolds et avec des parois rugueuses géométriques déterministes a été

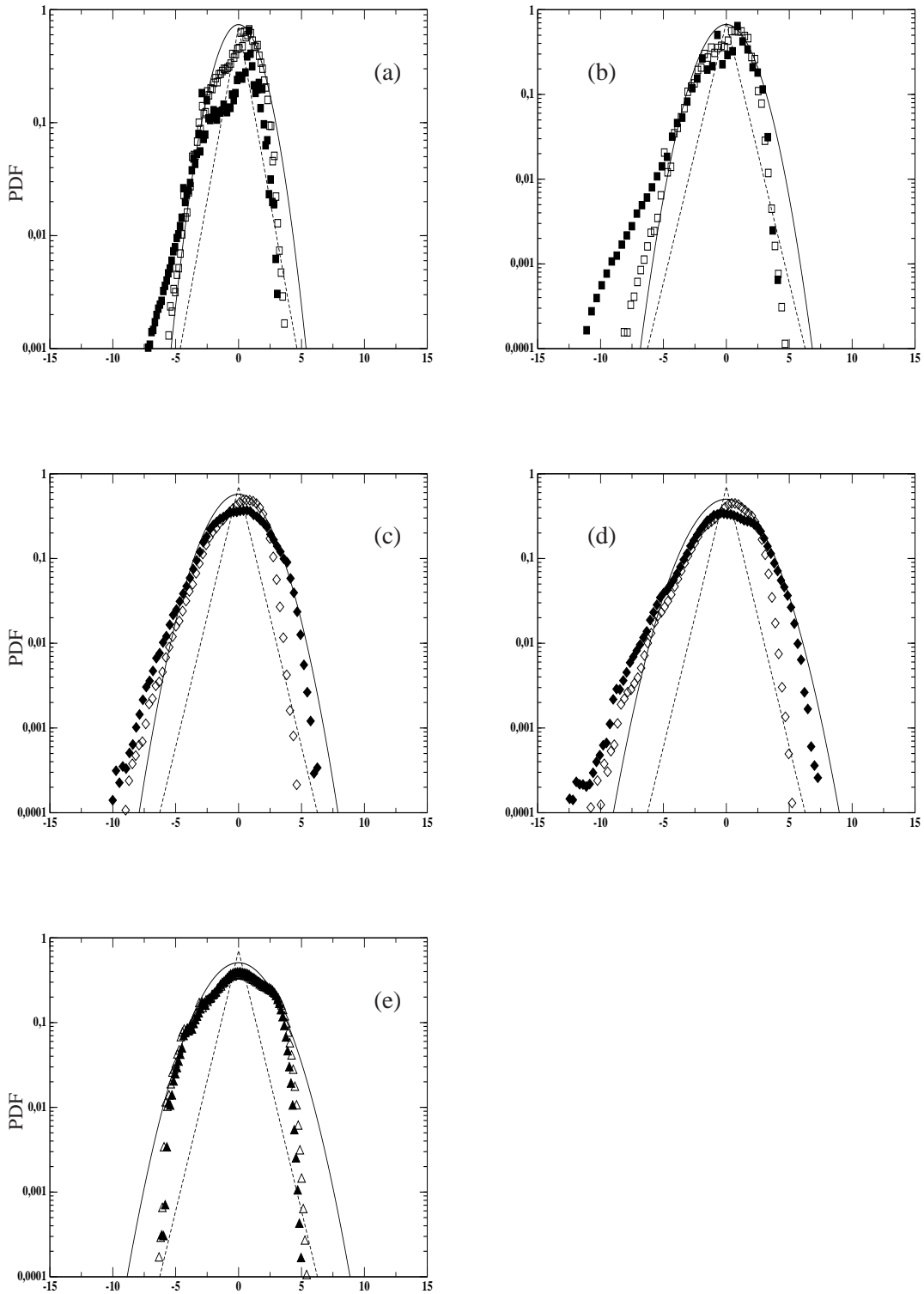


FIG. 4.37 – Distribution de la vitesse longitudinale à la paroi. Les symboles creux et pleins représentent respectivement les distributions des vitesses incidentes ($u_p^- - U_p^-$) et de rebond ($u_p^+ - U_p^+$). (\square) "Shadow Effect Model", (\diamond) "Rough Wall Multi-Collisions Model" et (\triangle) paroi lisse (e). Les traits discontinu et continu représentent respectivement les distributions exponentielle et gaussienne. (a) & (c) : $\Delta\gamma = 5.3^\circ$ et (b) & (d) : $\Delta\gamma = 6.5^\circ$.

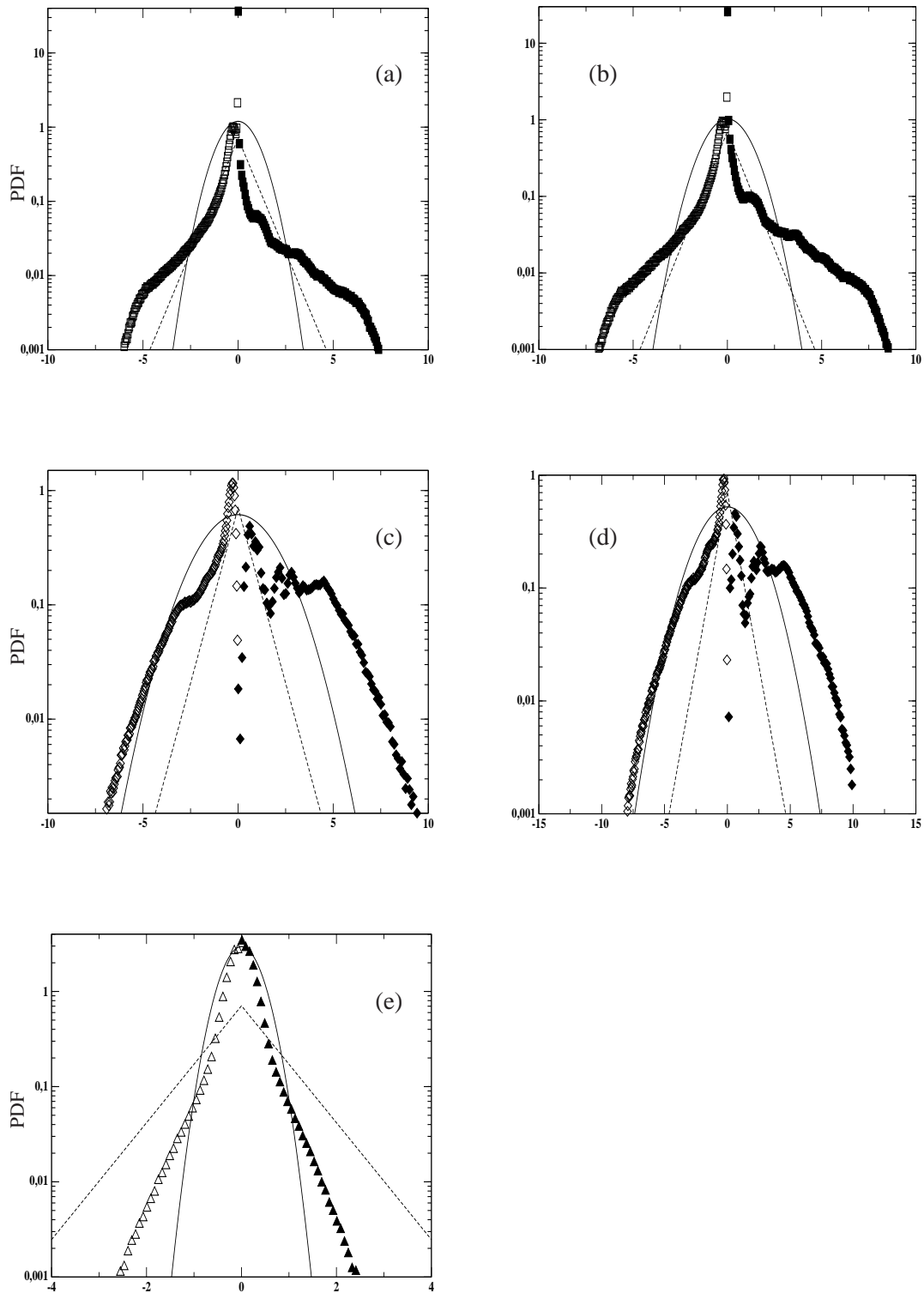


FIG. 4.38 – Distribution de la vitesse normale à la paroi. Les symboles creux et pleins représentent respectivement les distributions des vitesses incidentes (v_p^-) et de rebond (v_p^+). (\square) "Shadow Effect Model", (\diamond) "Rough Wall Multi-Collisions Model" et (\triangle) paroi lisse (e). Les traits discontinu et continu représentent respectivement les distributions exponentielle et gaussienne. (a) & (c) : $\Delta\gamma = 5.3^\circ$ et (b) & (d) : $\Delta\gamma = 6.5^\circ$.

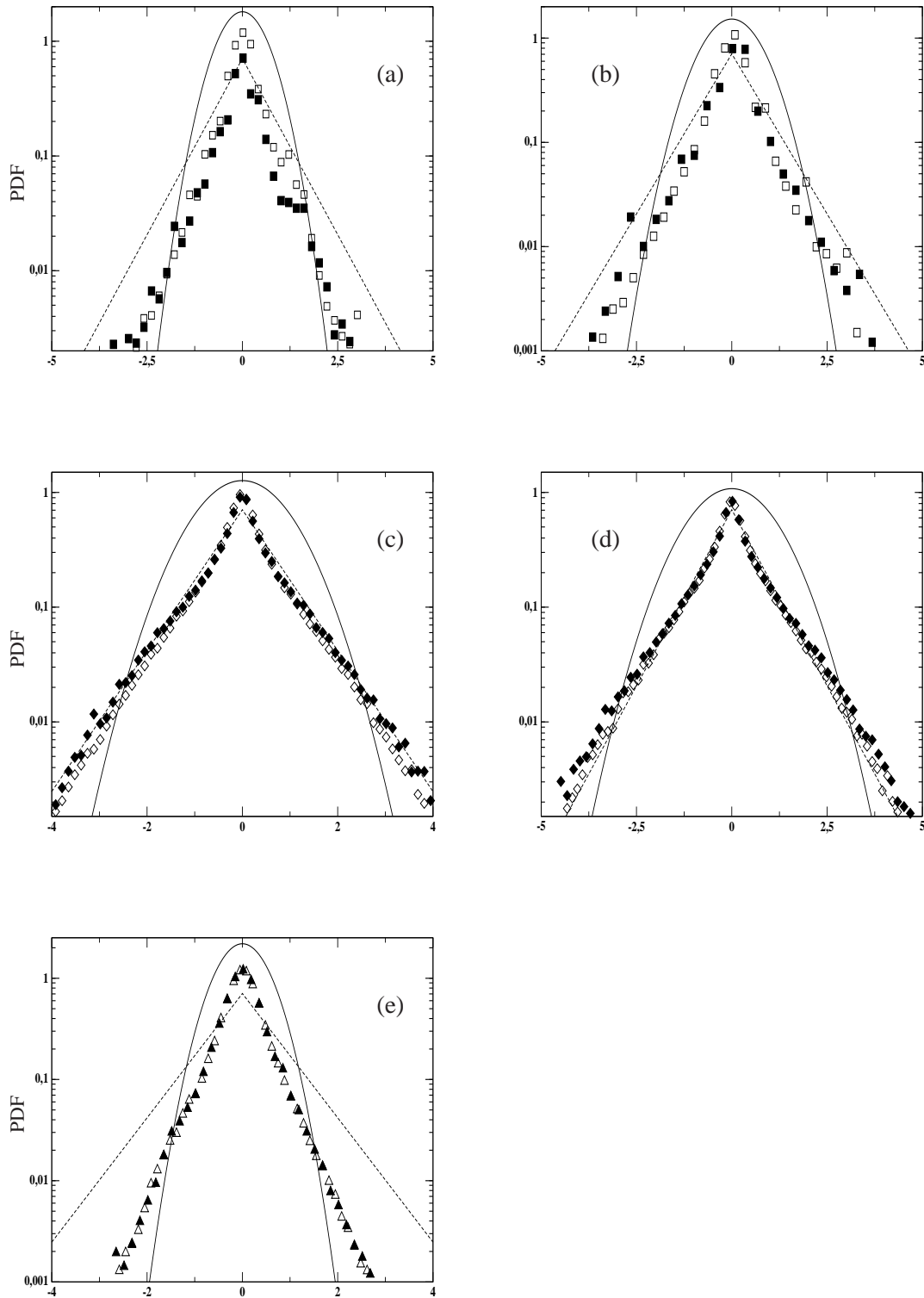


FIG. 4.39 – Distribution de la vitesse latérale à la paroi. Les symboles creux et pleins représentent respectivement les distributions des vitesses incidentes (w_p^-) et de rebond (w_p^+). (\square) "Shadow Effect Model", (\diamond) "Rough Wall Multi-Collisions Model" et (\triangle) paroi lisse (e). Les traits discontinu et continu représentent respectivement les distributions exponentielle et gaussienne. (a) & (c) : $\Delta\gamma = 5.3^\circ$ et (b) & (d) : $\Delta\gamma = 6.5^\circ$.

proposée. Enfin, le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" a été utilisé pour prédire l'écoulement diphasique expérimental à grand nombre de Reynolds étudié par Sommerfeld & Kussin (2004) [99]. D'abord, la simulation du fluide par la LES avec une loi de paroi a montré un bon accord avec l'expérience. En outre, en raison de la loi de paroi pour la LES, une procédure d'interpolation basée sur l'extrapolation préalable du fluide en très proche paroi avant l'interpolation proprement dite a été mise en œuvre. Celle-ci s'est avérée satisfaisante. Les résultats des simulations lagrangiennes ont montré une bonne capture des effets de paroi rugueuse par le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" face aux bonnes prédictions du cas expérimental. En outre, il convient de retenir de cette simulation du cas expérimental qu'aussi bien le "*Shadow Effect Model*" que le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" ont retranscrit les mécanismes induits par la rugosité lorsque l'intensité de la rugosité est modifiée. Cependant, à l'opposé des résultats obtenus à partir du "*Rough Wall Multi-Collisions Model*", ceux issus des simulations avec le "*Shadow Effect Model*" ont à la fois montré une sous-estimation des effets de paroi rugueuse sur l'agitation et la dispersion turbulente en particulier, et une forte génération de particules rasantes à la paroi comme nous l'avons précisé dans le cadre de l'étude théorique à bas nombre de Reynolds.

Chapitre 5

Modélisation Eulériennes de conditions aux limites aux parois rugueuses avec effet de rebonds multiples

5.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est simple : il est à nouveau question de la dérivation eulérienne de conditions aux limites aux parois. Par ailleurs, en raison des résultats des simulations lagrangiennes à la fois des études théoriques qu'expérimentales du précédent chapitre, qui démontrent la capacité du "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" à décrire plus correctement les mécanismes induits par la rugosité des parois, nous retenons ce modèle lagrangien d'effet de rebonds multiples pour effectuer cette dérivation. Une forme très simplifiée du modèle obtenu est ensuite évalué dans le cadre d'une simulation Euler-Euler de l'étude expérimentale réalisée par Sommerfeld & Kussin (2004) [99]. Les résultats des simulations sont comparés à la fois aux mesures expérimentales et aux résultats des simulations lagrangiennes présentées à la section § (4.6) du chapitre 4.

5.2 Description Eulérienne théorique de l'interaction particule/paroi rugueuse avec effet multi-rebond : cas général

5.2.1 Distribution des vitesses de rebond des particules

D'après la proposition de Cercignani [13] (Equation (1.90)), quelque soit le rebond, nous avons :

$$\forall \underline{c}_p^+ \in D^+, \quad f_p^+ (\underline{c}_p^+) \underline{c}_p^+ \cdot \underline{n} = \int_{D^-} f_p^- (\underline{c}_p^-) |\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}| R(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+) d\underline{c}_p^- \quad (5.1)$$

Ce qui montre que la distribution des vitesses de rebond des particules est essentiellement définie par la probabilité de transition R . Dans le cadre du "*Rough Wall Multi-Collision Model*", cette probabilité de transition est définie par l'effet de rebonds multiples modélisé puis validé au chapitre 4. Par ailleurs, afin d'être consistant avec la formulation (5.1), il convient d'exprimer vectoriellement la probabilité R en suivant les mêmes justifications. Nous obtenons :

$$R(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+) = \frac{P^*(n=1|\underline{c}_p^+) R_1(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+)}{\int_{D^+} P^*(n=1|\underline{c}_p^*) R_1(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^*) d\underline{c}_p^*} \quad (5.2)$$

dans laquelle nous avons :

$$R_1(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta(\underline{c}_p^+ - \Phi_\gamma(\underline{c}_p^-)) P_{eff}(\gamma|\underline{c}_p^-) d\gamma \quad (5.3)$$

$$P_{eff}(\gamma|\underline{c}_p^-) = \begin{cases} \frac{\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma}{\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}} P_g(\gamma) & si \quad \underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma \leq 0 \\ 0 & si \quad \underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma \geq 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Le quotient $\frac{\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma}{\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}}$ n'est rien d'autre que la probabilité qu'une particule donnée de vitesse incidente \underline{c}_p^- heurte un segment incliné d'un angle γ par rapport à l'horizontal et qui s'obtient en effectuant une simple analyse géométrique. \underline{n}_γ étant la normal au plan incliné de l'angle γ par rapport à l'horizontal, tandis que \underline{n} est la normal au plan l'horizontal.

En posant :

$$\lambda(\underline{c}_p^-) = \left[\int_{D^+} P^*(n=1|\underline{c}_p^*) R_1(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^*) d\underline{c}_p^* \right]^{-1} \quad (5.5)$$

5.2 Description Eulérienne théorique de l'interaction particule/paroi rugueuse avec effet multi-rebond : cas général

Nous obtenons finalement que :

$$\begin{aligned}
 \forall \underline{c}_p^+ \in D^+, \quad f_p^+(\underline{c}_p^+) \underline{c}_p^+ \cdot \underline{n} &= - \int_{D^-} \lambda(\underline{c}_p^-) P^*(n=1|\underline{c}_p^+) R_1(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+) \underline{c}_p^- \cdot \underline{n} f_p^-(\underline{c}_p^-) d\underline{c}_p^- \\
 &= - \int_{D^-} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \lambda(\underline{c}_p^-) P^*(n=1|\underline{c}_p^+) \delta(\underline{c}_p^+ - \underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) P_{eff}(\gamma|\underline{c}_p^-) \times \\
 &\quad \underline{c}_p^- \cdot \underline{n} f_p^-(\underline{c}_p^-) d\gamma d\underline{c}_p^-
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Cependant puisqu'avec le "*Rough Wall Multi-Collision Model*", la probabilité pour une particule de repartir rasante après le rebond sur la paroi rugueuse est strictement nulle, alors $\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n} \neq 0$ est une condition qui est rigoureusement réalisée pour chaque rebond. Si bien que, nous obtenons :

$$\forall \underline{c}_p^+ \in D^+, f_p^+(\underline{c}_p^+) = - \int_{D^-} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \lambda(\underline{c}_p^-) P^*(n=1|\underline{c}_p^+) \delta(\underline{c}_p^+ - \underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) P_{eff}(\gamma|\underline{c}_p^-) \frac{\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}}{\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}} f_p^-(\underline{c}_p^-) d\gamma d\underline{c}_p^- \tag{5.7}$$

En raison de l'équation (5.4), il vient que :

$$\begin{aligned}
 \forall \underline{c}_p^+ \in D^+, f_p^+(\underline{c}_p^+) &= - \int_{D^-} \int_{\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma \leq 0} \lambda(\underline{c}_p^-) P^*(n=1|\underline{c}_p^+) \delta(\underline{c}_p^+ - \underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) P_g(\gamma) \frac{\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma}{\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}} f_p^-(\underline{c}_p^-) d\gamma d\underline{c}_p^- \\
 &= - \int_{\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma \leq 0} \int_{D^+} \lambda(\underline{\Phi}_\gamma^{-1}(\underline{c}_p^+)) P^*(n=1|\underline{c}_p^+) \delta(\underline{c}_p^+ - \underline{\Phi}_\gamma(\underline{\Phi}_\gamma^{-1}(\underline{c}_p^+))) P_g(\gamma) \times \\
 &\quad \frac{\underline{\Phi}_\gamma^{-1}(\underline{c}_p^+) \cdot \underline{n}_\gamma}{\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}} f_p^-(\underline{\Phi}_\gamma^{-1}(\underline{c}_p^+)) J_{\underline{\Phi}_\gamma} d\underline{c}_p^+ d\gamma
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

où $\underline{\Phi}_\gamma^{-1}$ représente bien sûr la bijection réciproque de D^+ sur D^- de la fonction $\underline{\Phi}_\gamma$ définissant la loi de rebond des particules sur une paroi lisse inclinée de l'angle γ .

Au final, la distribution des vitesses de rebond des particules après la collision sur la paroi rugueuse s'écrit :

$$\forall \underline{c}_p^+ \in D^+, f_p^+(\underline{c}_p^+) = - \int_{\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma \leq 0} \lambda(\underline{\Phi}_\gamma^{-1}(\underline{c}_p^+)) \underline{\Phi}_\gamma^{-1}(\underline{c}_p^+) \cdot \underline{n}_\gamma P_g(\gamma) \frac{P^*(n=1|\underline{c}_p^+)}{\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}} f_p^-(\underline{\Phi}_\gamma^{-1}(\underline{c}_p^+)) J_{\underline{\Phi}_\gamma} d\gamma \tag{5.9}$$

Rappelons que dans le cadre du "*shadow effect model*", cette distribution était donnée d'un point de vue purement formel par la formulation suivante (2.40) :

$$\begin{aligned}
 \forall \underline{c}_p^+ \in D^+ \text{ tel que } \underline{c}_p^+ \cdot \underline{n} \neq 0, \\
 f_p^+(\underline{c}_p^+) &= - \int_{D^-} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \lambda(\underline{c}_p^-) \delta(\underline{c}_p^+ - \underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) \frac{H(-\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) H(\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n})}{\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}} P_g(\gamma) f_p^-(\underline{c}_p^-) \underline{c}_p^- \cdot \underline{n} d\gamma d\underline{c}_p^-
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Une différence fondamentale est à observer entre ces deux formulations. En effet lorsqu'après un rebond, une particule repart dans l'écoulement tel que : $\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n} \longrightarrow 0$, alors dans le :

• **Cas du "*shadow effect model*"** : où cette situation est d'ailleurs un cas quasi-certain comme nous l'avons précédemment montré pour les particules à incidence rasante, nous avons :

$$\delta(\underline{c}_p^+ - \Phi_\gamma(\underline{c}_p^-)) \frac{H(\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) H(\Phi_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n})}{\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}} P_g(\gamma) \xrightarrow{\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n} \rightarrow 0} \infty \implies f_p^+(\underline{c}_p^+) \xrightarrow{\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n} \rightarrow 0} \infty$$

ce qui montre que la distribution des vitesses de rebond f_p^+ ne peut être calculée.

• **Cas du "*rough wall multi-collisions model*"** : cette situation apparaît avec une très faible probabilité, et alors nous avons :

$$\frac{P^*(n=1|\underline{c}_p^+)}{\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}} \xrightarrow{\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n} \rightarrow 0} < \infty \implies \lambda(\Phi_\gamma^{-1}(\underline{c}_p^+)) \Phi_\gamma^{-1}(\underline{c}_p^+) \cdot \underline{n}_\gamma P_g(\gamma) \frac{P^*(n=1|\underline{c}_p^+)}{\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}} \xrightarrow{\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n} \rightarrow 0} < \infty \implies f_p^+ \xrightarrow{\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n} \rightarrow 0} < \infty$$

En effet, en effectuant le calcul du rapport $\frac{P^*(n=1|\underline{c}_p^+)}{\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}}$ en fonction de l'angle de rebond α^+ , on montre que celui-ci est proportionnel à $\frac{3}{2} \frac{1}{\Delta\gamma}$ lorsque $\alpha^+ \rightarrow 0$. Si bien que la distribution des vitesses de rebond f_p^+ est finie et ce qui nous permettra d'effectuer des développements pour le calcul des moments pairs de la vitesse normal à la paroi. On comprend dès lors que ce calcul de la distribution des vitesses de rebond est possible grâce à l'effet de rebonds multiples traduit ici par la probabilité d'avoir un et seul rebond $P^*(n=1|\underline{c}_p^+)$.

5.2.2 Dérivation des moments d'ordre quelconque de la fonction de distribution des vitesses à la paroi

Par définition, un moment d'ordre quelconque de la fonction de distribution f_p des vitesses à la paroi s'écrit pour une variable $\Psi_p(\underline{c}_p)$ donnée :

$$\langle \Psi_p(\underline{c}_p) \rangle_p = \frac{n_p^-}{n_p} \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \rangle_p^- + \frac{n_p^+}{n_p} \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \rangle_p^+ \quad (5.11)$$

Autrement, le flux de $\Psi_p(\underline{c}_p)$ à la paroi s'écrit :

$$n_p \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \rangle_p = n_p^- \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \rangle_p^- + n_p^+ \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \rangle_p^+ \quad (5.12)$$

Toutefois, la méthode adoptée pour la modélisation du flux $n_p \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \rangle_p$ reste la même, c'est à dire qu'il est question de calculer le flux réfléchi $n_p^+ \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \rangle_p^+$ en fonction du flux incident $n_p^- \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \rangle_p^-$.

S'aidant de la définition du flux réfléchi et de l'équation de la distribution des vitesses de rebond (5.9), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 n_p^+ \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \rangle_p^+ &= \int_{D^+} \Psi_p(\underline{c}_p^+) f_p^+ d\underline{c}_p^+ \\
 &= - \int_{D^+} \int_{\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma \leq 0} \lambda(\underline{\Phi}_\gamma^{-1}(\underline{c}_p^+)) P_g(\gamma) \frac{P^*(n=1|\underline{c}_p^+)}{\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n}} \underline{\Phi}_\gamma^{-1}(\underline{c}_p^+) \cdot \underline{n}_\gamma \Psi_p(\underline{c}_p^+) \times \\
 &\quad f_p^-(\underline{\Phi}_\gamma^{-1}(\underline{c}_p^+)) J_{\underline{\Phi}_\gamma} d\gamma d\underline{c}_p^+ \\
 &= - \int_{D^-} \int_{\mathcal{D}_\gamma} \lambda(\underline{c}_p^-) P_g(\gamma) \frac{P^*(n=1|\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-))}{\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}} \underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma \Psi_p(\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) f_p^-(\underline{c}_p^-) d\gamma d\underline{c}_p^-
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

avec : $\mathcal{D}_\gamma = \{\gamma \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mid \underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma \leq 0 \text{ et } \underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n} \geq 0\}$.

En d'autres termes :

$$n_p^+ \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \rangle_p^+ = - \int_{D^-} \left\langle \frac{P^*(n=1|\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-))}{\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}} \underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma \Psi_p(\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) \mid \underline{c}_p^- \right\rangle f_p^-(\underline{c}_p^-) d\underline{c}_p^- \tag{5.14}$$

où nous avons posé :

$$\left\langle \frac{P^*(n=1|\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-))}{\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}} \underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma \Psi_p(\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) \mid \underline{c}_p^- \right\rangle = \lambda(\underline{c}_p^-) \int_{\mathcal{D}_\gamma} \frac{P^*(n=1|\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-))}{\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}} \underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma \times \Psi_p(\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) P_g(\gamma) d\gamma \tag{5.15}$$

Finalement, le flux réfléchi de la paroi s'écrit :

$$n_p^+ \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \rangle_p^+ = -n_p^- \left\langle \left\langle \frac{P^*(n=1|\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-))}{\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}} \underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma \Psi_p(\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) \mid \underline{c}_p^- \right\rangle \right\rangle_p^- \tag{5.16}$$

si bien que le flux à la paroi devient :

$$n_p \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \rangle_p = n_p^- \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \rangle_p^- - n_p^- \left\langle \left\langle \frac{P^*(n=1|\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-))}{\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}} \underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma \Psi_p(\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) \mid \underline{c}_p^- \right\rangle \right\rangle_p^- \tag{5.17}$$

Remarque 1 : On vérifie aisément que le flux normal de particule à la paroi $n_p \langle \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p$ est nul.

En effet, en faisant $\Psi_p(\underline{c}_p) = \underline{c}_p \cdot \underline{n}$ dans l'équation (5.17) et en remarquant que $\Psi_p(\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) = \underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}$, il vient que :

$$\begin{aligned}
 n_p^+ \langle \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p^+ &= -n_p^- \left\langle \left\langle \frac{P^*(n=1|\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-))}{\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}} \underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma \underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n} \mid \underline{c}_p^- \right\rangle \right\rangle_p^- \\
 &= -n_p^- \left\langle \left\langle P^*(n=1|\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) \underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma \mid \underline{c}_p^- \right\rangle \right\rangle_p^-
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

En outre, nous avons :

$$\langle P^*(n = 1 | \Phi_\gamma(\underline{c}_p^-)) \underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma | \underline{c}_p^- \rangle = \lambda(\underline{c}_p^-) \int_{\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma \leq 0} \underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma P^*(n = 1 | \Phi_\gamma(\underline{c}_p^-)) P_g(\gamma) d\gamma \quad (5.19)$$

D'autre part les équations (5.5) et (5.3) conduisent à :

$$[\lambda(\underline{c}_p^-)]^{-1} = \frac{1}{\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}} \int_{\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma \leq 0} \underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma P^*(n = 1 | \Phi_\gamma(\underline{c}_p^-)) P_g(\gamma) d\gamma \quad (5.20)$$

Si bien que :

$$\langle P^*(n = 1 | \Phi_\gamma(\underline{c}_p^-)) \underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma | \underline{c}_p^- \rangle = \underline{c}_p^- \cdot \underline{n} \quad (5.21)$$

Et finalement nous trouvons bien que :

$$n_p^+ \langle \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p^+ = -n_p^- \langle \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p^- \quad (5.22)$$

Remarque 2 : La densité numérique de particule n_p à la paroi obtenue en faisant $\psi = 1$ dans l'équation (5.17), s'écrit :

$$n_p = n_p^- \left[1 - \left\langle \left\langle \frac{P^*(n = 1 | \Phi_\gamma(\underline{c}_p^-))}{\Phi_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}} \underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma | \underline{c}_p^- \right\rangle \right\rangle_p^- \right] \quad (5.23)$$

5.3 Traitement des rebonds inélastiques avec friction

Les développements sont effectués dans le cadre l'effet de rugosité $2D$ où $\underline{n}_\gamma = (-\sin \gamma, \cos \gamma, 0)$ et $\underline{n} = (0, 1, 0)$. Les formulations générales des conditions aux limites sont obtenues en considérant des rebonds glissants tels que :

$$\begin{aligned} \forall \underline{c}_p^- \in D^-, \quad \Phi_\gamma(\underline{c}_p^-) &= \underline{c}_p^- - \underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma (1 + e_w) (\underline{n}_\gamma - \mu_w \underline{t}_\gamma) \\ \underline{t}_\gamma &= \underline{v}_{p,\gamma} / |\underline{v}_{p,\gamma}| \\ \underline{v}_{p,\gamma} &= \underline{c}_p^- - (\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) \underline{n}_\gamma \end{aligned} \quad (5.24)$$

où les coefficients de restitution e_w et de friction μ_w sont définis dans cadre lagrangien par les équations respectives (4.24) et (4.25). Dans le cadre de l'approche eulérienne, nous définissons ces coefficients par :

$$\{e_w\}_p^- = \int_0^\pi \langle e_w(\alpha^- + \gamma) \rangle h_p^-(\alpha^-) d\alpha^- \quad (5.25)$$

$$\{\mu_w\}_p^- = \int_0^\pi \langle \mu_w(\alpha^- + \gamma) \rangle h_p^-(\alpha^-) d\alpha^-$$

dans lesquelles la distribution h_p^- est définie par l'équation (2.61).

5.3.1 Formulation des conditions aux limites

Les conditions aux limites à la paroi portant sur les moments $\langle u'_p v'_p \rangle_p$, $\langle v'_p w'_p \rangle_p$, $\langle u_p^2 v'_p \rangle_p$, $\langle v_p^3 \rangle_p$, $\langle v'_p w_p'^2 \rangle_p$ et $\langle u'_p v'_p w'_p \rangle_p$ sont obtenues en remplaçant ψ respectivement par $u_p v_p$, $v_p w_p$, $u_p^2 v_p$, v_p^3 , $v_p w_p^2$ puis $u_p v_p w_p$ dans l'équation (5.17).

Tous calculs faits, en faisant l'hypothèse de γ petit et en utilisant ensuite le modèle de corrélation partielle introduit au chapitre 2, nous obtenons :

- Pour $\langle u_p v_p \rangle_p$

$$\frac{n_p}{n_p^-} \langle u_p v_p \rangle_p = C_1^{u_p v_p} \langle u_p^2 \rangle_p^- + C_2^{u_p v_p} \langle u_p v_p \rangle_p^- + C_3^{u_p v_p} \langle v_p^2 \rangle_p^- \quad (5.26)$$

avec :

$$\begin{aligned} C_1^{u_p v_p} &= \{\gamma P^*\}_p^- - \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \{\mu_w\}_p^- \{\gamma^2 P^*\}_p^- \\ C_2^{u_p v_p} &= 1 - \{P^*\}_p^- + 2 \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \{\mu_w\}_p^- \{\gamma P^*\}_p^- + \left(\frac{5}{2} + 2\{e_w\}_p^-\right) \{\gamma^2 P^*\}_p^- \\ C_3^{u_p v_p} &= - \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \left[\{P^*\}_p^- \{\mu_w\}_p^- + \{\gamma P^*\}_p^- - \frac{3}{2} \{\mu_w\}_p^- \{\gamma^2 P^*\}_p^- \right] \end{aligned} \quad (5.27)$$

et :

$$\langle u_p v_p \rangle_p = \langle u'_p v'_p \rangle_p \quad (5.28)$$

- Pour $\langle v_p w_p \rangle_p$

$$\frac{n_p}{n_p^-} \langle v_p w_p \rangle_p = C_1^{v_p w_p} \langle v_p w_p \rangle_p^- + C_2^{v_p w_p} \langle u_p w_p \rangle_p^- \quad (5.29)$$

avec :

$$\begin{aligned} C_1^{v_p w_p} &= 1 - \{P^*\}_p^- + \frac{1}{2} \{\gamma^2 P^*\}_p^- \\ C_2^{v_p w_p} &= \{\gamma P^*\}_p^- \end{aligned} \quad (5.30)$$

et :

$$\langle v_p w_p \rangle_p = \langle v'_p w'_p \rangle_p \quad (5.31)$$

- Pour $\langle u_p^2 v_p \rangle_p$

$$\frac{n_p}{n_p} \langle u_p^2 v_p \rangle_p = C_1^{u_p^2 v_p} \langle u_p^3 \rangle_p^- + C_2^{u_p^2 v_p} \langle u_p^2 v_p \rangle_p^- + C_3^{u_p^2 v_p} \langle u_p v_p^2 \rangle_p^- + C_4^{u_p^2 v_p} \langle v_p^3 \rangle_p^- \quad (5.32)$$

avec :

$$\begin{aligned} C_1^{u_p^2 v_p} &= \{\gamma P^*\}_p^- - 2 \left(1 + \{e_w\}_p^- \right) \{\mu_w\}_p^- \{\gamma^2 P^*\}_p^- \\ C_2^{u_p^2 v_p} &= 1 - \{P^*\}_p^- + 4 \left(1 + \{e_w\}_p^- \right) \{\mu_w\}_p^- \{\gamma P^*\}_p^- \\ &\quad + \left[\frac{1}{2} + 4 \left(1 + \{e_w\}_p^- \right) - 3 \left(1 + \{e_w\}_p^- \right)^2 \left(\{\mu_w\}_p^- \right)^2 \right] \{\gamma^2 P^*\}_p^- \\ C_3^{u_p^2 v_p} &= \left(1 + \{e_w\}_p^- \right) \left\{ -2 \{P^*\}_p^- \{\mu_w\}_p^- + \left[3 \left(1 + \{e_w\}_p^- \right) \left(\{\mu_w\}_p^- \right)^2 - 2 \right] \{\gamma P^*\}_p^- \right. \\ &\quad \left. + 3 \{\mu_w\}_p^- \left[1 + 2 \left(1 + \{e_w\}_p^- \right) \right] \{\gamma^2 P^*\}_p^- \right\} \\ C_4^{u_p^2 v_p} &= - \left(1 + \{e_w\}_p^- \right)^2 \left\{ \{P^*\}_p^- \left(\{\mu_w\}_p^- \right)^2 + 2 \{\mu_w\}_p^- \{\gamma P^*\}_p^- + \left[1 - \frac{7}{2} \left(\{\mu_w\}_p^- \right)^2 \right] \{\gamma^2 P^*\}_p^- \right\} \end{aligned} \quad (5.33)$$

et :

$$\langle u_p^2 v_p \rangle_p = \langle u_p'^2 v_p' \rangle_p + 2U_p \langle u_p' v_p' \rangle_p \quad (5.34)$$

• Pour $\langle v_p^3 \rangle_p$

$$\frac{n_p}{n_p} \langle v_p^3 \rangle_p = C_1^{v_p^3} \langle v_p^3 \rangle_p^- + C_2^{v_p^3} \langle u_p v_p^2 \rangle_p^- + C_3^{v_p^3} \langle u_p^2 v_p \rangle_p^- \quad (5.35)$$

avec :

$$\begin{aligned} C_1^{v_p^3} &= 1 - \left(\{e_w\}_p^- \right)^2 \{P^*\}_p^- + 2 \left(1 + \{e_w\}_p^- \right) \{e_w\}_p^- \{\mu_w\}_p^- \{\gamma P^*\}_p^- \\ &\quad + \left[2 \left(1 + \frac{5}{4} \{e_w\}_p^- \right) \{e_w\}_p^- + \left(1 + \{e_w\}_p^- \right)^2 \left(\{\mu_w\}_p^- \right)^2 \right] \{\gamma^2 P^*\}_p^- \\ C_2^{v_p^3} &= \left(2 + 3 \{e_w\}_p^- \right) \{e_w\}_p^- \{\gamma P^*\}_p^- - 2 \left(1 + \{e_w\}_p^- \right) \left(1 + 3 \{e_w\}_p^- \right) \{\mu_w\}_p^- \{\gamma^2 P^*\}_p^- \\ C_3^{v_p^3} &= - \left(1 + \{e_w\}_p^- \right) \left(1 + 3 \{e_w\}_p^- \right) \{\gamma^2 P^*\}_p^- \end{aligned} \quad (5.36)$$

et :

$$\langle v_p^3 \rangle_p = \langle v_p'^3 \rangle_p \quad (5.37)$$

- Pour $\langle v_p w_p^2 \rangle_p$

$$\frac{n_p}{n_p^-} \langle v_p w_p^2 \rangle_p = C_1^{v_p w_p^2} \langle v_p w_p^2 \rangle_p^- + C_2^{v_p w_p^2} \langle u_p w_p^2 \rangle_p^- \quad (5.38)$$

avec :

$$\begin{aligned} C_1^{v_p w_p^2} &= 1 - \{P^*\}_p^- + \frac{1}{2} \{\gamma^2 P^*\}_p^- \\ C_2^{v_p w_p^2} &= \{\gamma P^*\}_p^- \end{aligned} \quad (5.39)$$

et :

$$\langle v_p w_p^2 \rangle_p = \langle v'_p w_p'^2 \rangle_p \quad (5.40)$$

5.3.2 Calcul des moments pairs de la vitesse normale à la paroi

A ce stade, en accord avec la modélisation des conditions aux limites à la paroi telle que présentée au chapitre 2, nous devons calculer les moments incidents pairs de la vitesse normale à la paroi qui apparaissent dans les formulations des conditions aux limites ci-dessus dans l'optique de l'entame de la fermeture desdites conditions. Pour ce faire, nous calculons d'abord les moments globaux pairs.

En revenant à l'équation du flux $n_p \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \rangle_p$ à la paroi (5.17), puisqu'il est assez délicat d'effectuer une simplification du terme $\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}$ pour le calcul de la plupart des moments pairs de la vitesse normale, nous avons plutôt introduit la quantité finie $\Gamma(\gamma | \underline{c}_p^-)$ telle que :

$$\Gamma(\gamma | \underline{c}_p^-) = - \frac{P^* \left(n = 1 | \widehat{(\underline{\Phi}_\gamma, \underline{t})} \right)}{\underline{\Phi}_\gamma \cdot \underline{n}} \underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma \quad (5.41)$$

$$= \frac{P^* \left(n = 1 | \widehat{(\underline{\Phi}_\gamma, \underline{t})} \right)}{\sin \left(\widehat{(\underline{\Phi}_\gamma, \underline{t})} \right)} \sin(\alpha^- + \gamma) \quad (5.42)$$

où $\widehat{(\underline{\Phi}_\gamma, \underline{t})}$ n'est rien d'autre que l'angle de rebond par rapport à la paroi macroscopique et $\underline{t} \cdot \underline{n} = 0$.

Si bien que pour le calcul des moments pairs, nous avons :

$$\frac{n_p}{n_p^-} \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \rangle_p = \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \rangle_p^- + \langle \langle \Gamma(\gamma | \underline{c}_p^-) \Psi_p(\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) | \underline{c}_p^- \rangle \rangle_p^- \quad (5.43)$$

En appliquant à la fois la formulation (5.43) et le modèle de corrélation partielle, nous obtenons :

- Pour n_p

$$\frac{n_p}{n_p^-} = 1 + \{\Gamma\}_p^- \quad (5.44)$$

- Pour $\langle u_p^2 \rangle_p$

$$\frac{n_p}{n_p^-} \langle u_p^2 \rangle_p = C_1^{u_p^2} \langle u_p^2 \rangle_p^- + C_2^{u_p^2} \langle u_p v_p \rangle_p^- + C_3^{u_p^2} \langle v_p^2 \rangle_p^- \quad (5.45)$$

avec :

$$\begin{aligned} C_1^{u_p^2} &= 1 + \{\Gamma\}_p^- - \{\mu_w\}_p^- \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \{\gamma\Gamma\}_p^- \\ &\quad + \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \left[\{\mu_w\}_p^- \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) - 2\right] \{\gamma^2\Gamma\}_p^- \\ C_2^{u_p^2} &= 2 \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \{\mu_w\}_p^- \{\Gamma\}_p^- + 2 \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \left[1 - \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \left(\{\mu_w\}_p^-\right)^2\right] \{\gamma\Gamma\}_p^- \\ &\quad - \{\mu_w\}_p^- \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \left(5 + 4\{e_w\}_p^-\right) \{\gamma^2\Gamma\}_p^- \\ C_3^{u_p^2} &= \left(1 + \{e_w\}_p^-\right)^2 \left[\left(\{\mu_w\}_p^-\right)^2 \{\Gamma\}_p^- + 2\{\mu_w\}_p^- \{\gamma\Gamma\}_p^- + \left(1 - 2\left(\{\mu_w\}_p^-\right)^2\right) \{\gamma^2\Gamma\}_p^-\right] \end{aligned} \quad (5.46)$$

- Pour $\langle v_p^2 \rangle_p$

$$\frac{n_p}{n_p^-} \langle v_p^2 \rangle_p = C_1^{v_p^2} \langle u_p^2 \rangle_p^- + C_2^{v_p^2} \langle u_p v_p \rangle_p^- + C_3^{v_p^2} \langle v_p^2 \rangle_p^- \quad (5.47)$$

avec :

$$\begin{aligned} C_1^{v_p^2} &= \left(1 + \{e_w\}_p^-\right)^2 \{\gamma^2\Gamma\}_p^- \\ C_2^{v_p^2} &= 2 \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \left[-\{e_w\}_p^- \{\gamma\Gamma\}_p^- + \{\mu_w\}_p^- \left(1 + 2\{e_w\}_p^-\right) \{\gamma^2\Gamma\}_p^-\right] \\ C_3^{v_p^2} &= 1 + \left(\{e_w\}_p^-\right)^2 \{\Gamma\}_p^- - 2\{e_w\}_p^- \{\mu_w\}_p^- \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \{\gamma\Gamma\}_p^- \\ &\quad + \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \left[-2\{e_w\}_p^- + \{\mu_w\}_p^- \left(1 + \{e_w\}_p^-\right)\right] \{\gamma^2\Gamma\}_p^- \end{aligned}$$

- Pour $\langle u_p^3 \rangle_p$

$$\frac{n_p}{n_p^-} \langle u_p^3 \rangle_p = C_1^{u_p^3} \langle u_p^3 \rangle_p^- + C_2^{u_p^3} \langle u_p^2 v_p \rangle_p^- + C_3^{u_p^3} \langle u_p v_p^2 \rangle_p^- + C_4^{u_p^3} \langle v_p^3 \rangle_p^- \quad (5.48)$$

avec :

$$C_1^{u_p^3} = 1 + \{\Gamma\}_p^- - 3 \{\mu_w\}_p^- \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \{\gamma\Gamma\}_p^- + 3 \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \left[\left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \left(\{\mu_w\}_p^-\right)^2 - 1 \right] \{\gamma^2\Gamma\}_p^-$$

$$C_2^{u_p^3} = 3 \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \left[\{\mu_w\}_p^- \{\Gamma\}_p^- + \left(1 - 2 \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \left(\{\mu_w\}_p^-\right)^2 \right) \{\gamma\Gamma\}_p^- \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{2} + 4 \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \{\mu_w\}_p^- - \left(1 + \{e_w\}_p^-\right)^2 \left(\{\mu_w\}_p^-\right)^3 \right) \{\gamma^2\Gamma\}_p^- \right]$$

$$C_3^{u_p^3} = 3 \left(1 + \{e_w\}_p^-\right)^2 \left[\left(\{\mu_w\}_p^-\right)^2 \{\Gamma\}_p^- + \{\mu_w\}_p^- \left(2 - \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \left(\{\mu_w\}_p^-\right)^2 \right) \{\gamma\Gamma\}_p^- \right. \\ \left. + \left(1 - \left(5 + 3 \{e_w\}_p^-\right) \left(\{\mu_w\}_p^-\right)^2 \right) \{\gamma^2\Gamma\}_p^- \right]$$

$$C_4^{u_p^3} = \{\mu_w\}_p^- \left(1 + \{e_w\}_p^-\right)^3 \left[\left(\{\mu_w\}_p^-\right)^2 \{\Gamma\}_p^- + 3 \{\mu_w\}_p^- \{\gamma\Gamma\}_p^- + 3 \left(1 - \left(\{\mu_w\}_p^-\right)^2 \right) \{\gamma^2\Gamma\}_p^- \right] \quad (5.49)$$

- Pour $\langle u_p v_p^2 \rangle_p$: (calculé directement à partir de l'équation (5.17))

$$\frac{n_p}{n_p^-} \langle u_p v_p^2 \rangle_p = C_1^{u_p v_p^2} \langle u_p^3 \rangle_p^- + C_2^{u_p v_p^2} \langle u_p^2 v_p \rangle_p^- + C_3^{u_p v_p^2} \langle u_p v_p^2 \rangle_p^- + C_4^{u_p v_p^2} \langle v_p^3 \rangle_p^- \quad (5.50)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 C_1^{u_p v_p^2} &= \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \{\gamma^2 P^*\}_p^- \\
 C_2^{u_p v_p^2} &= -\left(1 + 2\{e_w\}_p^-\right) \{\gamma P^*\}_p^- + \{\mu_w\}_p^- \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \left(4 + 3\{e_w\}_p^-\right) \{\gamma^2 P^*\}_p^- \\
 C_3^{u_p v_p^2} &= 1 + \{e_w\}_p^- - \{\mu_w\}_p^- \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \left(2 + 3\{e_w\}_p^-\right) \{\gamma P^*\}_p^- \\
 &\quad + \left[1 + \frac{1}{2}\{e_w\}_p^- - 3\left(1 + \{e_w\}_p^-\right)^2 \left(1 - \left(\{\mu_w\}_p^-\right)^2\right)\right] \{\gamma^2 P^*\}_p^- \\
 C_4^{u_p v_p^2} &= \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \left\{ \{\mu_w\}_p^- \{e_w\}_p^- + \left[\left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \left(1 - \left(\{\mu_w\}_p^-\right)^2\right) - 1 \right] \{\gamma P^*\}_p^- \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(4 + 7\{e_w\}_p^-\right) \{\mu_w\}_p^- \{\gamma^2 P^*\}_p^- \right\} \tag{5.51}
 \end{aligned}$$

- Pour $\langle u_p w_p \rangle_p$:

$$\frac{n_p}{n_p^-} \langle u_p w_p \rangle_p = C_1^{u_p w_p} \langle u_p w_p \rangle_p^- + C_2^{u_p w_p} \langle v_p w_p \rangle_p^- \tag{5.52}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 C_1^{u_p w_p} &= 1 + \{\Gamma\}_p^- - \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \{\mu_w\}_p^- \{\gamma \Gamma\}_p^- - \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \{\gamma^2 \Gamma\}_p^- \\
 C_2^{u_p w_p} &= \left(1 + \{e_w\}_p^-\right) \left[\{\mu_w\}_p^- \{\Gamma\}_p^- + \{\gamma \Gamma\}_p^- - \frac{1}{2} \{\mu_w\}_p^- \{\gamma^2 \Gamma\}_p^- \right] \tag{5.53}
 \end{aligned}$$

- Pour $\langle u_p w_p^2 \rangle_p$:

$$\frac{n_p}{n_p^-} \langle u_p w_p^2 \rangle_p = C_1^{u_p w_p^2} \langle u_p w_p^2 \rangle_p^- + C_2^{u_p w_p^2} \langle v_p w_p^2 \rangle_p^- \tag{5.54}$$

avec :

$$C_1^{u_p w_p^2} = C_1^{u_p w_p} \quad \text{et} \quad C_2^{u_p w_p^2} = C_2^{u_p w_p} \tag{5.55}$$

5.3.3 Fermeture des conditions aux limites

- Pour $\langle u'_p v'_p \rangle_p$: En utilisant les équations (5.45) et (5.47) dans l'équation (5.26), il vient que :

$$\langle u_p v_p \rangle_p = \mathcal{A}_1^{u_p v_p} \langle u_p^2 \rangle_p + \mathcal{A}_2^{u_p v_p} \langle v_p^2 \rangle_p + \frac{n_p^-}{n_p} \mathcal{A}_3^{u_p v_p} \langle u_p v_p \rangle_p^- \quad (5.56)$$

où nous avons posé :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1^{u_p v_p} &= \frac{C_1^{u_p v_p} C_3^{v_p^2} - C_3^{u_p v_p} C_1^{v_p^2}}{C_1^{u_p^2} C_3^{v_p^2} - C_1^{v_p^2} C_3^{u_p^2}} \\ \mathcal{A}_2^{u_p v_p} &= \frac{C_1^{u_p v_p} C_3^{u_p^2} - C_3^{u_p v_p} C_1^{u_p^2}}{C_3^{u_p^2} C_1^{v_p^2} - C_1^{u_p^2} C_3^{v_p^2}} \\ \mathcal{A}_3^{u_p v_p} &= C_2^{u_p v_p} + C_1^{u_p v_p} \frac{C_3^{u_p^2} C_2^{v_p^2} - C_2^{u_p^2} C_3^{v_p^2}}{C_1^{u_p^2} C_3^{v_p^2} - C_1^{v_p^2} C_3^{u_p^2}} + C_3^{u_p v_p} \frac{C_2^{u_p^2} C_1^{v_p^2} - C_1^{u_p^2} C_2^{v_p^2}}{C_1^{u_p^2} C_3^{v_p^2} - C_1^{v_p^2} C_3^{u_p^2}} \end{aligned} \quad (5.57)$$

- Pour $\langle v'_p w'_p \rangle_p$: En utilisant l'équation (5.52) dans l'équation (5.29), il vient que :

$$\langle v_p w_p \rangle_p = \mathcal{A}_1^{v_p w_p} \langle u_p w_p \rangle_p + \frac{n_p^-}{n_p} \mathcal{A}_2^{v_p w_p} \langle v_p w_p \rangle_p^- \quad (5.58)$$

où nous avons posé :

$$\mathcal{A}_1^{v_p w_p} = \frac{C_2^{v_p w_p}}{C_1^{u_p w_p}} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_2^{v_p w_p} = C_1^{v_p w_p} - \frac{C_2^{v_p w_p} C_2^{u_p w_p}}{C_1^{u_p w_p}} \quad (5.59)$$

- Pour $\langle u_p^2 v_p \rangle_p$: En utilisant les équations (5.48) et (5.50) dans l'équation (5.32), il vient que :

$$\langle u_p^2 v_p \rangle_p = \mathcal{A}_1^{u_p^2 v_p} \langle u_p^3 \rangle_p + \mathcal{A}_2^{u_p^2 v_p} \langle u_p v_p^2 \rangle_p + \frac{n_p^-}{n_p} \mathcal{A}_3^{u_p^2 v_p} \langle u_p^2 v_p \rangle_p^- + \frac{n_p^-}{n_p} \mathcal{A}_4^{u_p^2 v_p} \langle v_p^3 \rangle_p^- \quad (5.60)$$

où nous avons posé :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1^{u_p^2 v_p} &= \frac{C_1^{u_p^2 v_p} C_3^{u_p v_p^2} - C_3^{u_p^2 v_p} C_1^{u_p v_p^2}}{C_1^{u_p^3} C_3^{u_p v_p^2} - C_1^{u_p v_p^2} C_3^{u_p^3}} \\
 \mathcal{A}_2^{u_p^2 v_p} &= \frac{C_1^{u_p^3} C_3^{u_p^2 v_p} - C_1^{u_p^2 v_p} C_3^{u_p^3}}{C_1^{u_p^3} C_3^{u_p v_p^2} - C_3^{u_p^3} C_1^{u_p v_p^2}} \\
 \mathcal{A}_3^{u_p^2 v_p} &= C_2^{u_p^2 v_p} + C_1^{u_p^2 v_p} \frac{C_3^{u_p^3} C_2^{u_p v_p^2} - C_2^{u_p^3} C_3^{u_p v_p^2}}{C_1^{u_p^3} C_3^{u_p v_p^2} - C_1^{u_p v_p^2} C_3^{u_p^3}} + C_3^{u_p^2 v_p} \frac{C_2^{u_p^3} C_1^{u_p v_p^2} - C_1^{u_p^3} C_2^{u_p v_p^2}}{C_1^{u_p^3} C_3^{u_p v_p^2} - C_1^{u_p v_p^2} C_3^{u_p^3}} \\
 \mathcal{A}_4^{u_p^2 v_p} &= C_4^{u_p^2 v_p} + C_1^{u_p^2 v_p} \frac{C_3^{u_p^3} C_4^{u_p v_p^2} - C_4^{u_p^3} C_3^{u_p v_p^2}}{C_1^{u_p^3} C_3^{u_p v_p^2} - C_1^{u_p v_p^2} C_3^{u_p^3}} + C_3^{u_p^2 v_p} \frac{C_4^{u_p^3} C_1^{u_p v_p^2} - C_1^{u_p^3} C_4^{u_p v_p^2}}{C_1^{u_p^3} C_3^{u_p v_p^2} - C_1^{u_p v_p^2} C_3^{u_p^3}}
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

► Pour $\langle v_p^3 \rangle_p$: En utilisant l'équation (5.50) dans l'équation (5.37), il vient que :

$$\langle v_p^3 \rangle_p = \mathcal{A}_1^{v_p^3} \langle u_p^3 \rangle_p + \mathcal{A}_2^{v_p^3} \langle u_p v_p^2 \rangle_p + \frac{n_p^-}{n_p} \mathcal{A}_3^{v_p^3} \langle u_p^2 v_p \rangle_p^- + \frac{n_p^-}{n_p} \mathcal{A}_4^{v_p^3} \langle v_p^3 \rangle_p^- \tag{5.62}$$

où nous avons posé :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1^{v_p^3} &= \frac{C_2^{v_p^3} C_1^{u_p v_p^2}}{C_3^{u_p^3} C_1^{u_p v_p^2} - C_1^{u_p^3} C_3^{u_p v_p^2}} \\
 \mathcal{A}_2^{v_p^3} &= -\frac{C_1^{u_p^3} C_2^{v_p^3}}{C_3^{u_p^3} C_1^{u_p v_p^2} - C_1^{u_p^3} C_3^{u_p v_p^2}} \\
 \mathcal{A}_3^{v_p^3} &= C_3^{v_p^3} + C_2^{v_p^3} \frac{C_1^{u_p^3} C_2^{u_p v_p^2} - C_2^{u_p^3} C_1^{u_p v_p^2}}{C_3^{u_p^3} C_1^{u_p v_p^2} - C_1^{u_p^3} C_3^{u_p v_p^2}} \\
 \mathcal{A}_4^{v_p^3} &= C_1^{v_p^3} + C_2^{v_p^3} \frac{C_1^{u_p^3} C_4^{u_p v_p^2} - C_4^{u_p^3} C_1^{u_p v_p^2}}{C_3^{u_p^3} C_1^{u_p v_p^2} - C_1^{u_p^3} C_3^{u_p v_p^2}}
 \end{aligned} \tag{5.63}$$

► Pour $\langle v_p' w_p'^2 \rangle_p$: En utilisant l'équation (5.54) dans l'équation (5.38), il vient que :

$$\langle v_p w_p^2 \rangle_p = \mathcal{A}_1^{v_p w_p^2} \langle u_p w_p^2 \rangle_p + \frac{n_p^-}{n_p} \mathcal{A}_2^{v_p w_p^2} \langle v_p w_p^2 \rangle_p^- \tag{5.64}$$

où nous avons posé :

$$\mathcal{A}_1^{v_p w_p^2} = \frac{C_2^{v_p w_p^2}}{C_1^{u_p w_p^2}} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_2^{v_p w_p^2} = C_1^{v_p w_p^2} - \frac{C_2^{v_p w_p^2} C_2^{u_p w_p^2}}{C_1^{u_p w_p^2}} \tag{5.65}$$

Remarque : Pour chaque collision d'une particule sur une paroi lisse, l'angle de rugosité γ est nul. Par conséquent, nous obtenons que $\{\gamma\Gamma\}_p^- = 0$ et $\{\gamma^2\Gamma\}_p^- = 0$. En outre sur une paroi lisse, la probabilité P^* pour une particule d'effectuer un et un seul rebond est de façon certaine égale 1. Dans le cadre d'un rebond totalement élastique sur une paroi lisse, où l'on connaît exactement l'angle de rebond, c'est à dire que $\langle \widehat{\Phi_{\gamma,t}} \rangle = \alpha^-$, cela conduit $\{\Gamma\}_p^- = 1$. En remplaçant ces moyennes incidentes dans les formulations (5.56)-(5.64), nous obtenons exactement les conditions aux limites proposées par He & Simonin (1994) [33] puis Sakiz & Simonin (1999) [83], dans le cadre de rebond totalement élastique des particules sur la paroi.

La fermeture précédemment engendrée a par ailleurs laissé des moments incidents impairs inconnus dans les formulations (5.56)-(5.64). Il s'agit de : $\langle u_p v_p \rangle_p^-$, $\langle v_p w_p \rangle_p^-$, $\langle u_p^2 v_p \rangle_p^-$, $\langle v_p w_p^2 \rangle_p^-$ et $\langle v_p^3 \rangle_p^-$. Cependant, comme He & Simonin (1992) [33] puis Sakiz & Simonin (1999) [83], le moment $\langle v_p^3 \rangle_p^-$ peut être évalué en fonction de $\langle v_p^2 \rangle_p^-$ en présumant la forme de la distribution des vitesses normales à la paroi $f_{p_y}^-$ (biensûr à la lumière des simulations numériques précédentes). Quant aux autres moments incidents $\langle u_p v_p \rangle_p^-$, $\langle v_p w_p \rangle_p^-$, $\langle u_p^2 v_p \rangle_p^-$ et $\langle v_p w_p^2 \rangle_p^-$, nous devons les modéliser. En outre, il faut noter que les coefficients $\mathcal{A}_i^{\langle \psi_p \rangle_p}$ dépendent des moyennes incidentes $\{e_w\}_p^-$, $\{\mu_w\}_p^-$, $\{P^*\}_p^-$, $\{\gamma P^*\}_p^-$, $\{\gamma^2 P^*\}_p^-$, $\{\Gamma\}_p^-$, $\{\gamma\Gamma\}_p^-$ et $\{\gamma^2\Gamma\}_p^-$ qui sont connues que par l'intermédiaire de la distribution des vitesses incidentes f_p^- .

A ce stade, trois hypothèses portant sur correlations incidentes impaires vont nous permettre de fermer totalement le système de conditions aux limites (5.56)-(5.64).

Hypothèse 1 : Nous supposons pendant la phase d'incidence que :

$$\langle u'_p v'_p \rangle_p^- = 0 \quad \text{et} \quad \langle v'_p w'_p \rangle_p^- = 0 \quad (5.66)$$

Il vient de cette hypothèse que :

$$\langle u_p v_p \rangle_p^- = U_p \langle v'_p \rangle_p^- \quad (5.67)$$

$$\langle v_p w_p \rangle_p^- = 0 \quad (5.68)$$

$$\langle u_p^2 v_p \rangle_p^- = \langle u_p'^2 v'_p \rangle_p^- + U_p^2 \langle v'_p \rangle_p^- \quad (5.69)$$

En outre, nous avons :

$$\langle v_p w_p^2 \rangle_p^- = \langle v'_p w_p'^2 \rangle_p^- \quad (5.70)$$

Hypothèse 2 : Nous supposons que :

$$\langle u_p'^2 v_p' \rangle_p^- = \langle u_p'^2 \rangle_p^- \langle v_p' \rangle_p^- \quad (5.71)$$

$$\langle v_p' w_p'^2 \rangle_p^- = \langle v_p' \rangle_p^- \langle w_p'^2 \rangle_p^- \quad (5.72)$$

Finalement en raison des équations (5.45) & (5.47) et de l'effet de rugosité 2D (qui induit que $\langle w_p'^2 \rangle_p^- = \langle w_p'^2 \rangle_p$), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle u_p'^2 v_p' \rangle_p^- &= \frac{1}{C_1^2 C_3^2 v_p^2 - C_1^2 C_3^2 u_p^2} \frac{n_p}{n_p} \left[C_3^2 \langle u_p'^2 \rangle_p \langle v_p' \rangle_p^- - C_3^2 \langle v_p'^2 \rangle_p \langle v_p' \rangle_p^- \right] \\ &\quad + \frac{C_3^2 C_2^2 v_p^2 - C_2^2 C_3^2 v_p^2}{C_1^2 C_3^2 v_p^2 - C_1^2 C_3^2 u_p^2} U_p \left(\langle v_p' \rangle_p^- \right)^2 + U_p^2 \langle v_p' \rangle_p^- \end{aligned} \quad (5.73)$$

$$\langle v_p' w_p'^2 \rangle_p^- = \langle v_p' \rangle_p^- \langle w_p'^2 \rangle_p \quad (5.74)$$

Hypothèse 3 : Afin d'évaluer les moments incidents $\langle v_p' \rangle_p^-$ et $\langle v_p'^3 \rangle_p^-$, nous supposons que $f_{p_y}^-$ est une demie-gaussienne définie par :

$$f_{p_y}^-(c_{p_y}) = \frac{2n_p^-}{\sqrt{2\pi \langle v_p'^2 \rangle_p^-}} \exp\left(-\frac{c_{p_y}^2}{2 \langle v_p'^2 \rangle_p^-}\right) \quad (5.75)$$

Il vient que :

$$\langle v_p' \rangle_p^- = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[\langle v_p'^2 \rangle_p^- \right]^{1/2} \quad (5.76)$$

$$\langle v_p'^3 \rangle_p^- = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \left[\langle v_p'^2 \rangle_p^- \right]^{3/2} = \pi \left[\langle v_p' \rangle_p^- \right]^3 \quad (5.77)$$

Nous constatons dès lors que l'unique inconnue est $\langle v_p' \rangle_p^-$. Pour l'évaluer, il suffit de considérer les équations (5.47) & (5.45), puis en utilisant (5.76), il nous faut résoudre le trinôme :

$$\left(\langle v_p' \rangle_p^- \right)^2 - \frac{2}{\pi} \frac{C_1^2 C_2^2 v_p^2 - C_1^2 C_2^2 u_p^2}{C_3^2 C_1^2 v_p^2 - C_3^2 C_1^2 u_p^2} U_p \langle v_p' \rangle_p^- = \frac{2}{\pi} \frac{1}{C_3^2 C_1^2 v_p^2 - C_3^2 C_1^2 u_p^2} \frac{n_p}{n_p} \left[C_1^2 v_p^2 \left(\langle u_p'^2 \rangle_p + U_p^2 \right) - C_1^2 \langle v_p'^2 \rangle_p \right] \quad (5.78)$$

En posant :

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 U_p \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_0 = \frac{1}{\pi} \frac{C_1^2 C_2^2 v_p^2 - C_1^2 C_2^2 u_p^2}{C_3^2 C_1^2 v_p^2 - C_3^2 C_1^2 u_p^2} \quad (5.79)$$

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \left(\langle u_p'^2 \rangle_p + U_p^2 \right) + \mathcal{W}_2 \langle v_p'^2 \rangle_p \quad (5.80)$$

$$\mathcal{W}_1 = \frac{2}{\pi} \frac{C_1^{v_p^2} n_p}{C_3^{u_p^2} C_1^{v_p^2} - C_3^{v_p^2} C_1^{u_p^2} n_p^-}$$

$$\mathcal{W}_2 = -\frac{2}{\pi} \frac{C_1^{u_p^2} n_p}{C_3^{u_p^2} C_1^{v_p^2} - C_3^{v_p^2} C_1^{u_p^2} n_p^-}$$

il vient que :

$$\langle v_p' \rangle_p^- = \mathcal{V} \pm \sqrt{\mathcal{V}^2 + \mathcal{W}} \quad (5.81)$$

Notons que $\langle v_p' \rangle_p^-$ est négatif (voir (5.76)).

Au final, les équations (5.56)-(5.64) conduisent, avec ces hypothèses de fermeture, à :

► Pour $\langle u_p' v_p' \rangle_p$:

$$\langle u_p' v_p' \rangle_p = \mathcal{F}_1^{u_p v_p} \left(\langle u_p'^2 \rangle_p + U_p^2 \right) + \mathcal{F}_2^{u_p v_p} \langle v_p'^2 \rangle_p + \mathcal{F}_3^{u_p v_p} U_p \langle v_p' \rangle_p^- \quad (5.82)$$

avec :

$$\mathcal{F}_1^{u_p v_p} = \mathcal{A}_1^{u_p v_p}$$

$$\mathcal{F}_2^{u_p v_p} = \mathcal{A}_2^{u_p v_p} \quad (5.83)$$

$$\mathcal{F}_3^{u_p v_p} = \frac{n_p^-}{n_p} \mathcal{A}_3^{u_p v_p}$$

► Pour $\langle v_p' w_p' \rangle_p$:

$$\langle v_p' w_p' \rangle_p = \mathcal{F}_1^{v_p w_p} \langle u_p' w_p' \rangle_p \quad (5.84)$$

avec :

$$\mathcal{F}_1^{v_p w_p} = \mathcal{A}_1^{v_p w_p} \quad (5.85)$$

► Pour $\langle u_p'^2 v_p' \rangle_p$:

$$\begin{aligned} \langle u_p'^2 v_p' \rangle_p &= -2U_p \langle u_p' v_p' \rangle_p + \mathcal{F}_1^{u_p^2 v_p} \left(\langle u_p'^3 \rangle_p + 3U_p \langle u_p'^2 \rangle_p + U_p^3 \right) + \mathcal{F}_2^{u_p^2 v_p} \left(\langle u_p' v_p'^2 \rangle_p + U_p \langle v_p'^2 \rangle_p \right) \\ &+ \mathcal{F}_3^{u_p^2 v_p} \left(\langle u_p'^2 \rangle_p + U_p^2 \right) \langle v_p' \rangle_p^- + \mathcal{F}_4^{u_p^2 v_p} \langle v_p'^2 \rangle_p \langle v_p' \rangle_p^- + \mathcal{F}_5^{u_p^2 v_p} U_p \left(\langle v_p' \rangle_p^- \right)^2 \\ &+ \mathcal{F}_6^{u_p^2 v_p} U_p^2 \langle v_p' \rangle_p^- + \mathcal{F}_7^{u_p^2 v_p} \left(\langle v_p' \rangle_p^- \right)^3 \end{aligned} \quad (5.86)$$

où :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_1^{u_p^2 v_p} &= \mathcal{A}_1^{u_p^2 v_p} \quad ; \quad \mathcal{F}_2^{u_p^2 v_p} = \mathcal{A}_2^{u_p^2 v_p} \\
 \mathcal{F}_3^{u_p^2 v_p} &= \frac{C_3^{v_p^2}}{C_1^{u_p^2} C_3^{v_p^2} - C_1^{v_p^2} C_3^{u_p^2}} \mathcal{A}_3^{u_p^2 v_p} \\
 \mathcal{F}_4^{u_p^2 v_p} &= -\frac{C_3^{u_p^2}}{C_1^{u_p^2} C_3^{v_p^2} - C_1^{v_p^2} C_3^{u_p^2}} \mathcal{A}_3^{u_p^2 v_p} \\
 \mathcal{F}_5^{u_p^2 v_p} &= \frac{n_p^- C_3^{u_p^2} C_2^{v_p^2} - C_2^{u_p^2} C_3^{v_p^2}}{n_p C_1^{u_p^2} C_3^{v_p^2} - C_1^{v_p^2} C_3^{u_p^2}} \mathcal{A}_3^{u_p^2 v_p} \\
 \mathcal{F}_6^{u_p^2 v_p} &= \frac{n_p^-}{n_p} \mathcal{A}_3^{u_p^2 v_p} \quad ; \quad \mathcal{F}_7^{u_p^2 v_p} = \pi \frac{n_p^-}{n_p} \mathcal{A}_4^{u_p^2 v_p}
 \end{aligned} \tag{5.87}$$

► Pour $\langle v_p^3 \rangle_p$:

$$\begin{aligned}
 \langle v_p^3 \rangle_p &= \mathcal{F}_1^{v_p^3} \left(\langle u_p^3 \rangle_p + 3U_p \langle u_p^2 \rangle_p + U_p^3 \right) + \mathcal{F}_2^{v_p^3} \left(\langle u_p' v_p'^2 \rangle_p + U_p \langle v_p^2 \rangle_p \right) \\
 &+ \mathcal{F}_3^{v_p^3} \left(\langle u_p^2 \rangle_p + U_p^2 \right) \langle v_p' \rangle_p^- + \mathcal{F}_4^{v_p^3} \langle v_p'^2 \rangle_p \langle v_p' \rangle_p^- + \mathcal{F}_5^{v_p^3} U_p \left(\langle v_p' \rangle_p^- \right)^2 \\
 &+ \mathcal{F}_6^{v_p^3} U_p^2 \langle v_p' \rangle_p^- + \mathcal{F}_7^{v_p^3} \left(\langle v_p' \rangle_p^- \right)^3
 \end{aligned} \tag{5.88}$$

où :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_1^{v_p^3} &= \mathcal{A}_1^{v_p^3} \quad ; \quad \mathcal{F}_2^{v_p^3} = \mathcal{A}_2^{v_p^3} \\
 \mathcal{F}_3^{v_p^3} &= \frac{C_3^{v_p^2}}{C_1^{u_p^2} C_3^{v_p^2} - C_1^{v_p^2} C_3^{u_p^2}} \mathcal{A}_3^{v_p^3} \\
 \mathcal{F}_4^{v_p^3} &= -\frac{C_3^{u_p^2}}{C_1^{u_p^2} C_3^{v_p^2} - C_1^{v_p^2} C_3^{u_p^2}} \mathcal{A}_3^{v_p^3} \\
 \mathcal{F}_5^{v_p^3} &= \frac{n_p^- C_3^{u_p^2} C_2^{v_p^2} - C_2^{u_p^2} C_3^{v_p^2}}{n_p C_1^{u_p^2} C_3^{v_p^2} - C_1^{v_p^2} C_3^{u_p^2}} \mathcal{A}_3^{v_p^3} \\
 \mathcal{F}_6^{v_p^3} &= \frac{n_p^-}{n_p} \mathcal{A}_3^{v_p^3} \quad ; \quad \mathcal{F}_7^{v_p^3} = \pi \frac{n_p^-}{n_p} \mathcal{A}_4^{v_p^3}
 \end{aligned} \tag{5.89}$$

► Pour $\langle v'_p w_p'^2 \rangle_p$:

$$\langle v'_p w_p'^2 \rangle_p = \mathcal{F}_1^{v_p w_p^2} \left(\langle u'_p w_p'^2 \rangle_p + U_p \langle w_p'^2 \rangle_p \right) + \mathcal{F}_2^{v_p w_p^2} \langle w_p'^2 \rangle_p \langle v_p \rangle_p^- \quad (5.90)$$

où nous avons posé :

$$\mathcal{F}_1^{v_p w_p^2} = \mathcal{A}_1^{v_p w_p^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_2^{v_p w_p^2} = \frac{n_p^-}{n_p} \mathcal{A}_2^{v_p w_p^2} \quad (5.91)$$

Proposition d'évaluation des coefficients eulériens de rebond et des moments de l'angle de rugosité

Il s'agit de calculer les moyennes incidentes $\{e_w\}_p^-$, $\{\mu_w\}_p^-$, $\{P^*\}_p^-$, $\{\gamma P^*\}_p^-$, $\{\gamma^2 P^*\}_p^-$, $\{\Gamma\}_p^-$, $\{\gamma\Gamma\}_p^-$ et $\{\gamma^2\Gamma\}_p^-$ dont dépendent les coefficients $\mathcal{F}_i^{\langle \psi_p \rangle_p}$ des équations (5.82)-(5.91). Cependant, comme nous l'avons fait remarquer, ce calcul n'est possible que par la connaissance de la distribution des vitesses incidentes f_p^- . Pour ce faire, nous effectuons une dernière hypothèse : celle que f_p^- est gaussienne. En tenant compte de l'hypothèse 1, nous pouvons considérer à nouveau, comme au chapitre 2 (2.62), que la distribution f_p^- des vitesses incidentes des particules sur la paroi s'écrit :

$$f_p^-(\underline{c}_p) = \frac{2n_p^- H(-c_{py})}{\sqrt{8\pi^3 \langle u_p'^2 \rangle_p^- \langle v_p'^2 \rangle_p^- \langle w_p'^2 \rangle_p^-}} \exp \left[-\frac{(c_{px} - U_p^-)^2}{2 \langle u_p'^2 \rangle_p^-} - \frac{c_{py}^2}{2 \langle v_p'^2 \rangle_p^-} - \frac{c_{pz}^2}{2 \langle w_p'^2 \rangle_p^-} \right] \quad (5.92)$$

Utilisant la définition de la moyenne $\{ \cdot \}_p^-$ (2.56), c'est à dire pour tous $\varphi(\gamma)$, nous avons :

$$\{\varphi(\gamma)\}_p^- = \frac{\langle \langle \varphi(\gamma) | \alpha^- \rangle_{v_p}^- \rangle_p^-}{\langle v_p \rangle_p^-} = \int_0^\pi \langle \varphi(\gamma) | \alpha^- \rangle h_p^-(\alpha^-) d\alpha^- \quad (5.93)$$

où nous avons posé que :

$$\langle \varphi(\gamma) | \alpha^- \rangle = \langle \varphi(\gamma) | \underline{c}_p^- \rangle = \lambda(\underline{c}_p^-) \int \varphi(\gamma) P_g(\gamma) d\gamma \quad (5.94)$$

λ est défini en (5.20) et h_p^- est calculée en fonction des nombres adimensionnels β^- et ξ^- (2.64).

Sur la figure 5.1, nous avons tracé l'évolution des coefficients eulériens de rebond $\{e_w\}_p^-$ et $\{\mu_w\}_p^-$ en faisant varier d'une part le paramètre β^- dans $]0, 40.0]$ et en fixant d'autre part l'anisotropie ξ^- et l'intensité de la rugosité $\Delta\gamma$. Cependant, plusieurs valeurs de ξ^- sont étudiés : 1, 2, 4 et 8 ; et les deux écarts types $\Delta\gamma = 5.3^\circ$ et $\Delta\gamma = 6.5^\circ$ sont repris. Ces résultats montrent premièrement une indépendance

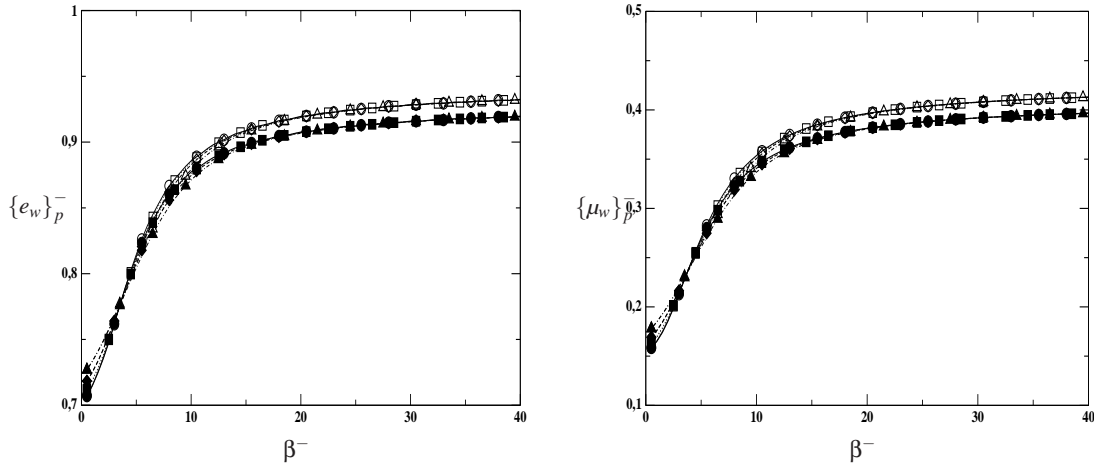


FIG. 5.1 – Evolution des coefficients eulériens incidents de rebond respectives $\{e_w\}_p^-$ et $\{\mu_w\}_p^-$ en fonction du paramètre β^- pour ξ fixé : (○) $\xi = 1$, (□) $\xi = 2$, (◇) $\xi = 4$ et (△) $\xi = 8$. Les symboles creux et plein représentent les cas où $\Delta\gamma = 5.3^\circ$ et $\Delta\gamma = 6.5^\circ$ respectivement.

de ces coefficients par rapport à l'anisotropie de l'agitation de la phase particulaire. En outre, ces deux coefficients de rebond augmentent avec β^- et l'intensité de la rugosité $\Delta\gamma$. Cependant, l'augmentation due à l'intensification de la rugosité de $\Delta\gamma = 5.3^\circ$ à $\Delta\gamma = 6.5^\circ$ n'est effective qu'au delà de $\beta^- \simeq 10$.

Dans les mêmes conditions de paramétrage, nous avons calculé les coefficients $\{P^*\}_p^-$, $\{\gamma P^*\}_p^-$, $\{\gamma^2 P^*\}_p^-$, $\{\Gamma\}_p^-$, $\{\gamma\Gamma\}_p^-$ et $\{\gamma^2\Gamma\}_p^-$ qui sont à la base des coefficients $\mathcal{F}_i^{\langle\psi_p\rangle_p}$ dans les conditions aux limites. Ces derniers sont présentés sur la figure 5.2. En outre tous les coefficients $\mathcal{F}_i^{\langle\psi_p\rangle_p}$ ont par suite été évalués dans le cadre de l'hypothèse de f_p^- gaussienne et sont exhibés de la figure 5.3 à 5.6. D'une manière générale, toutes ces moyennes incidentes montrent une indépendance vis à vis de l'anisotropie ξ de l'agitation lors de la phase d'incidence ; cependant l'augmentation de l'intensité de la rugosité des parois entraîne des modifications de ces coefficients eulériens $\mathcal{F}_i^{\langle\psi_p\rangle_p}$.

Les coefficients \mathcal{V}_0 , \mathcal{W}_1 et \mathcal{W}_2 permettant d'évaluer le moment incident $\langle v'_p \rangle_p^-$ à partir de (5.81) sont aussi présentés sur la figure 5.6. Les résultats montrent que dans le cadre de l'hypothèse gaussienne (5.92), \mathcal{V} est positif puisque \mathcal{V}_0 l'est. Dans l'hypothèse de l'existence d'une solution du trinôme (5.79), c'est à dire $\mathcal{V}^2 + \mathcal{W} \geq 0$, comme $\langle v'_p \rangle_p^-$ est par définition négatif, il vient que :

$$\langle v'_p \rangle_p^- = \mathcal{V} - \sqrt{\mathcal{V}^2 + \mathcal{W}} \quad (5.95)$$

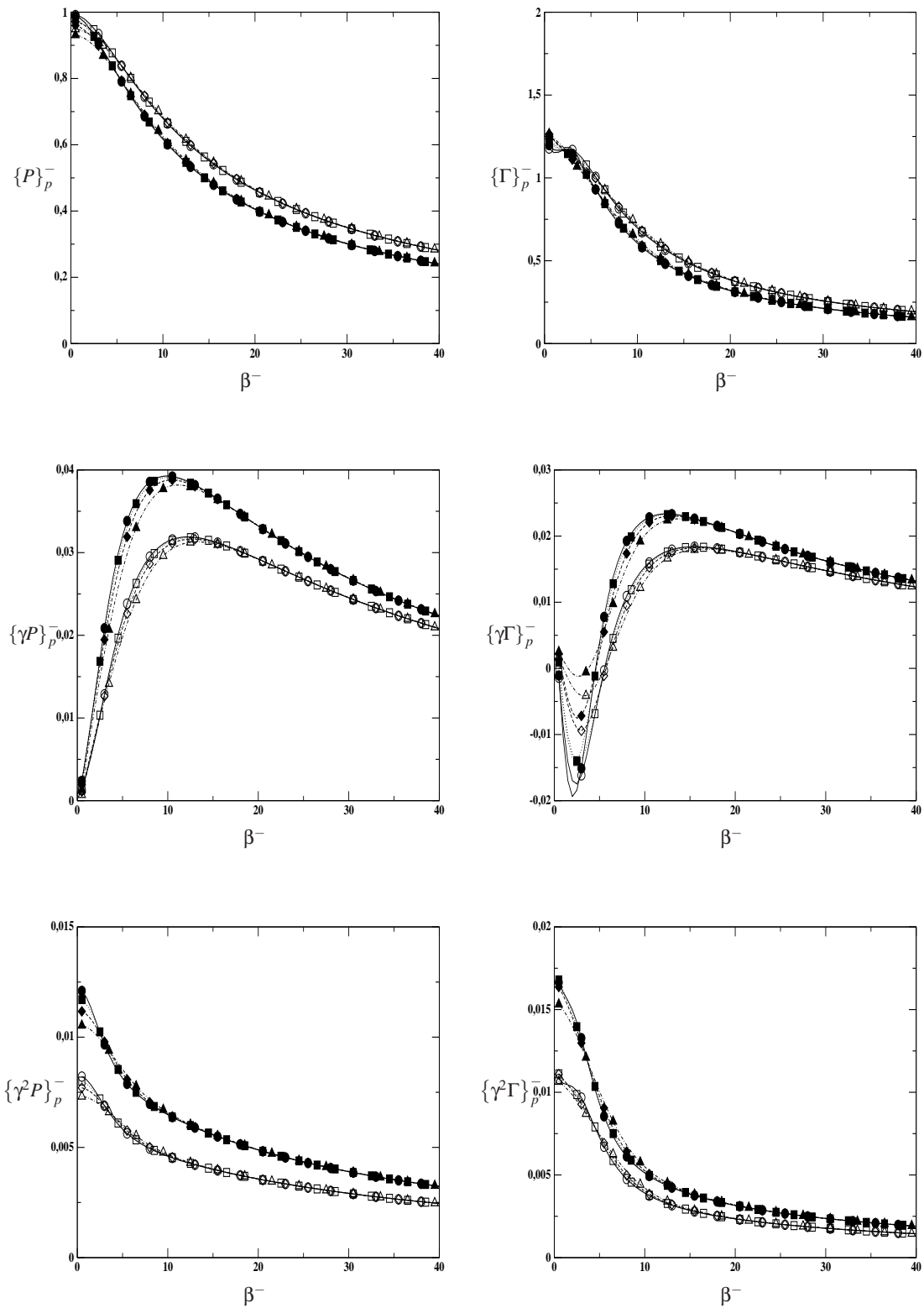


FIG. 5.2 – Evolution des moyennes incidentes respectives $\{P\}_p^-$, $\{\gamma P\}_p^-$, $\{\gamma^2 P\}_p^-$, $\{\Gamma\}_p^-$, $\{\gamma\Gamma\}_p^-$ et $\{\gamma^2\Gamma\}_p^-$ en fonction du paramètre β^- pour ξ fixé : (\circ) $\xi = 1$, (\square) $\xi = 2$, (\diamond) $\xi = 4$ et (\triangle) $\xi = 8$. Les symboles creux et plein représentent les cas où $\Delta\gamma = 5.3^\circ$ et $\Delta\gamma = 6.5^\circ$ respectivement.

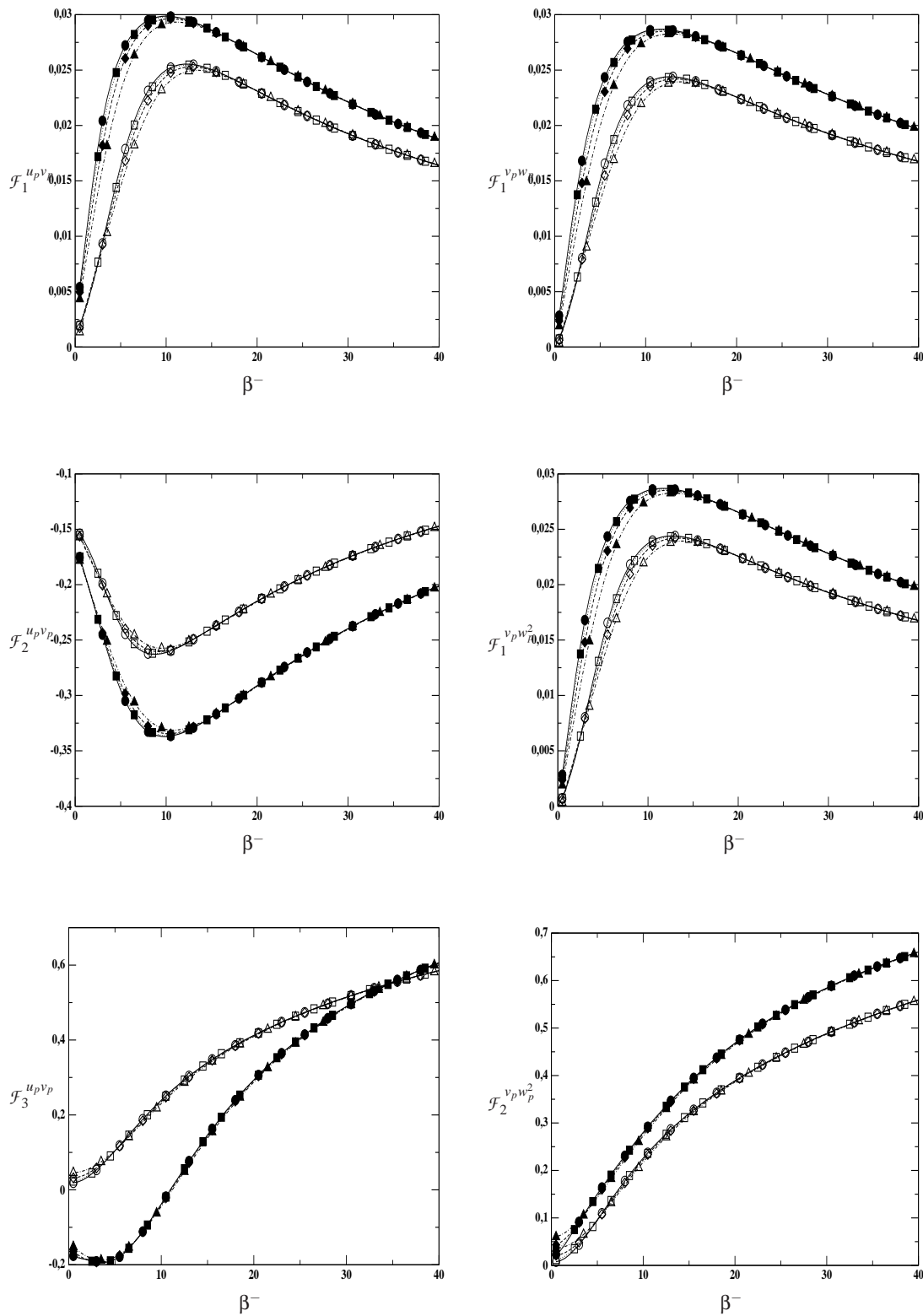


FIG. 5.3 – Evolution des coefficients $\mathcal{F}_{1 \leq i \leq 3}^{u_p v_p}$, $\mathcal{F}_1^{v_p w_p}$ et $\mathcal{F}_{1 \leq i \leq 2}^{v_p w_p^2}$ en fonction du paramètre β^- pour ξ fixé : (○) $\xi = 1$, (□) $\xi = 2$, (◇) $\xi = 4$ et (△) $\xi = 8$. Les symboles creux et plein représentent les cas où $\Delta\gamma = 5.3^\circ$ et $\Delta\gamma = 6.5^\circ$ respectivement.

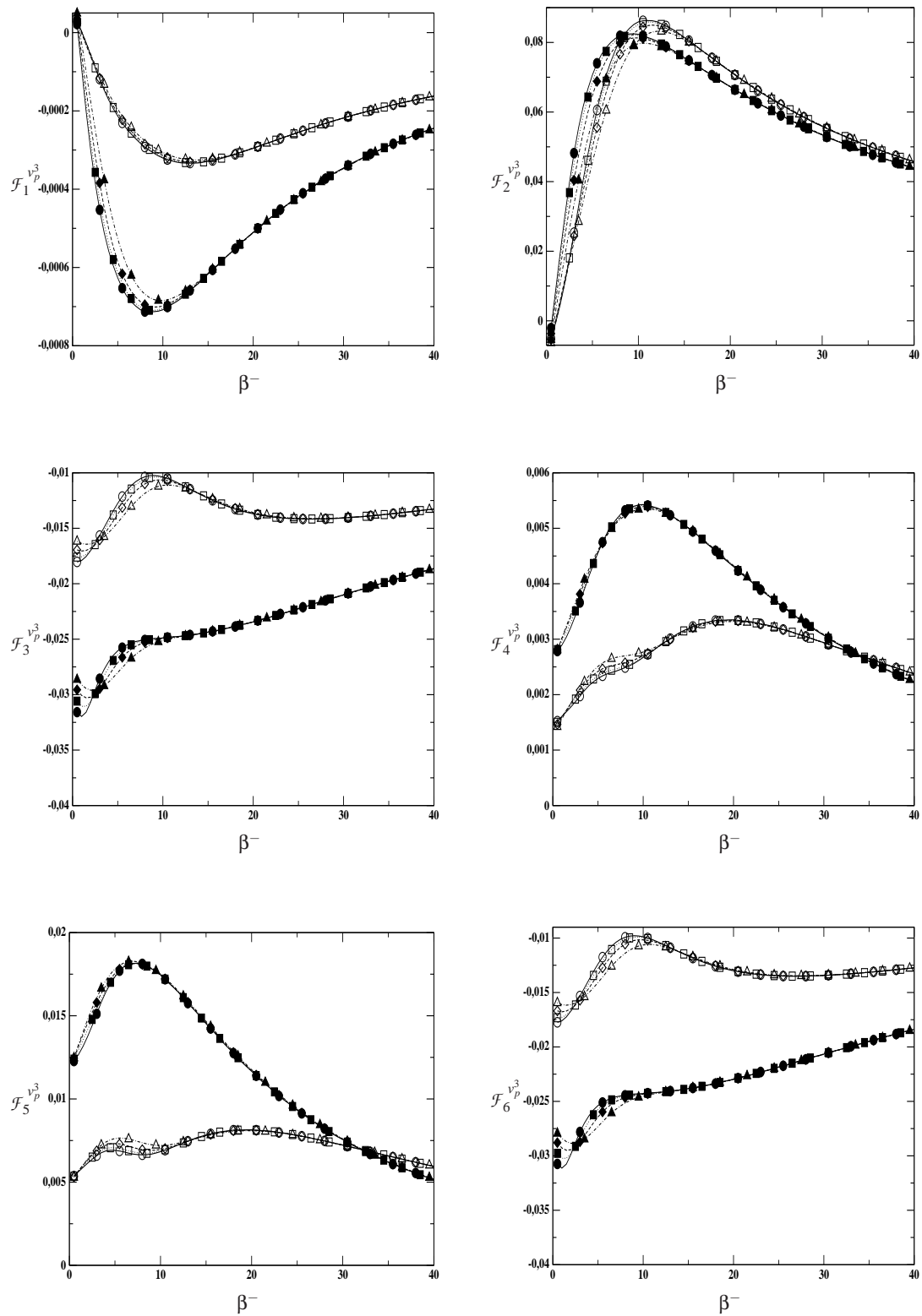


FIG. 5.4 – Evolution des coefficients $\mathcal{F}_{1 \leq i \leq 6}^{v_p^3}$ en fonction du paramètre β^- pour ξ fixé : (○) $\xi = 1$, (□) $\xi = 2$, (◇) $\xi = 4$ et (△) $\xi = 8$. Les symboles creux et plein représentent les cas où $\Delta\gamma = 5.3^\circ$ et $\Delta\gamma = 6.5^\circ$ respectivement.

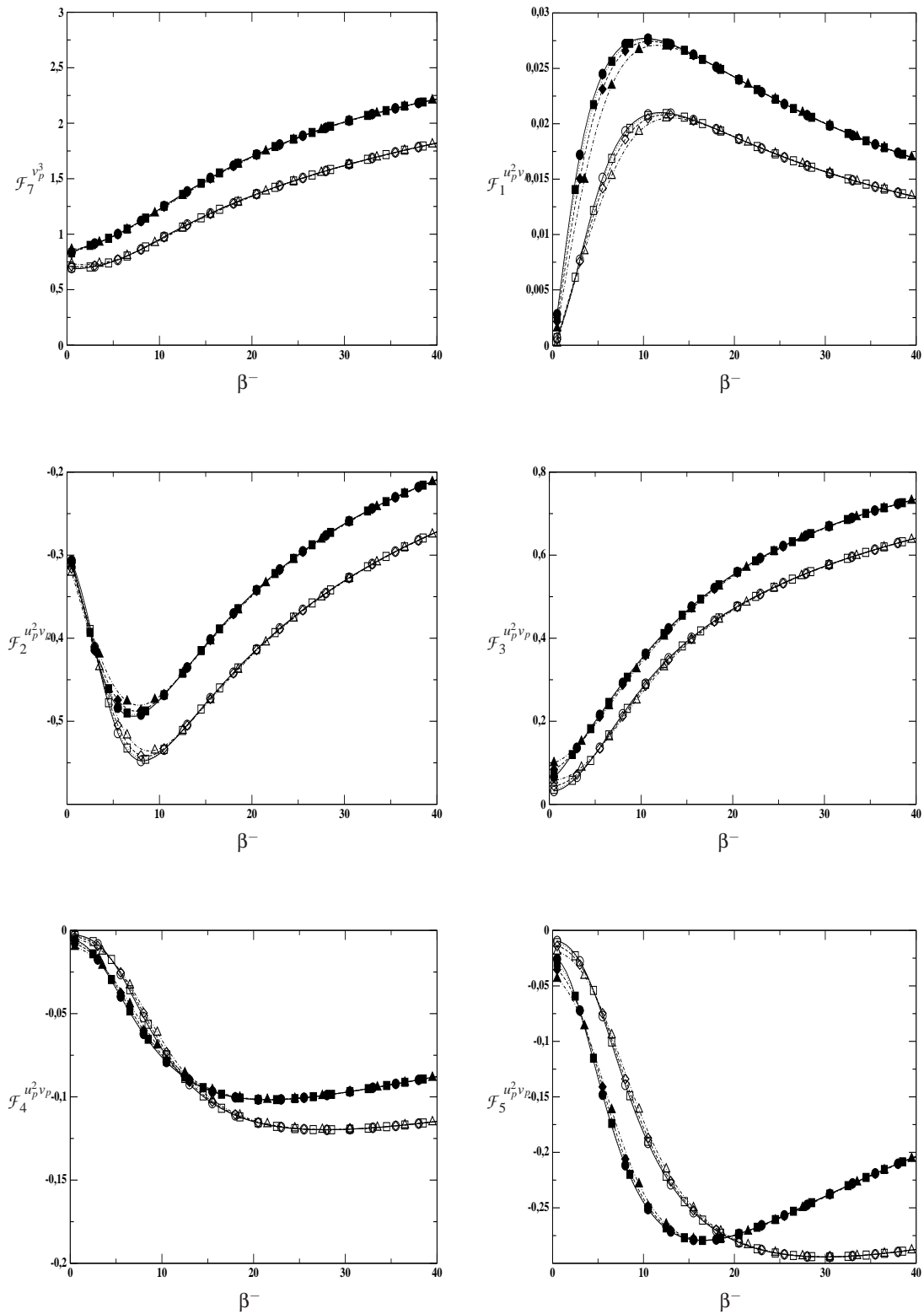


FIG. 5.5 – Evolution des coefficients $\mathcal{F}_7^{v_p^3}$ et $\mathcal{F}_{1 \leq i < 5}^{u_p^2 v_p}$ en fonction du paramètre β^- pour ξ fixé : (○) $\xi = 1$, (□) $\xi = 2$, (◇) $\xi = 4$ et (△) $\xi = 8$. Les symboles creux et plein représentent les cas où $\Delta\gamma = 5.3^\circ$ et $\Delta\gamma = 6.5^\circ$ respectivement.

5.3 Traitement des rebonds inélastiques avec friction

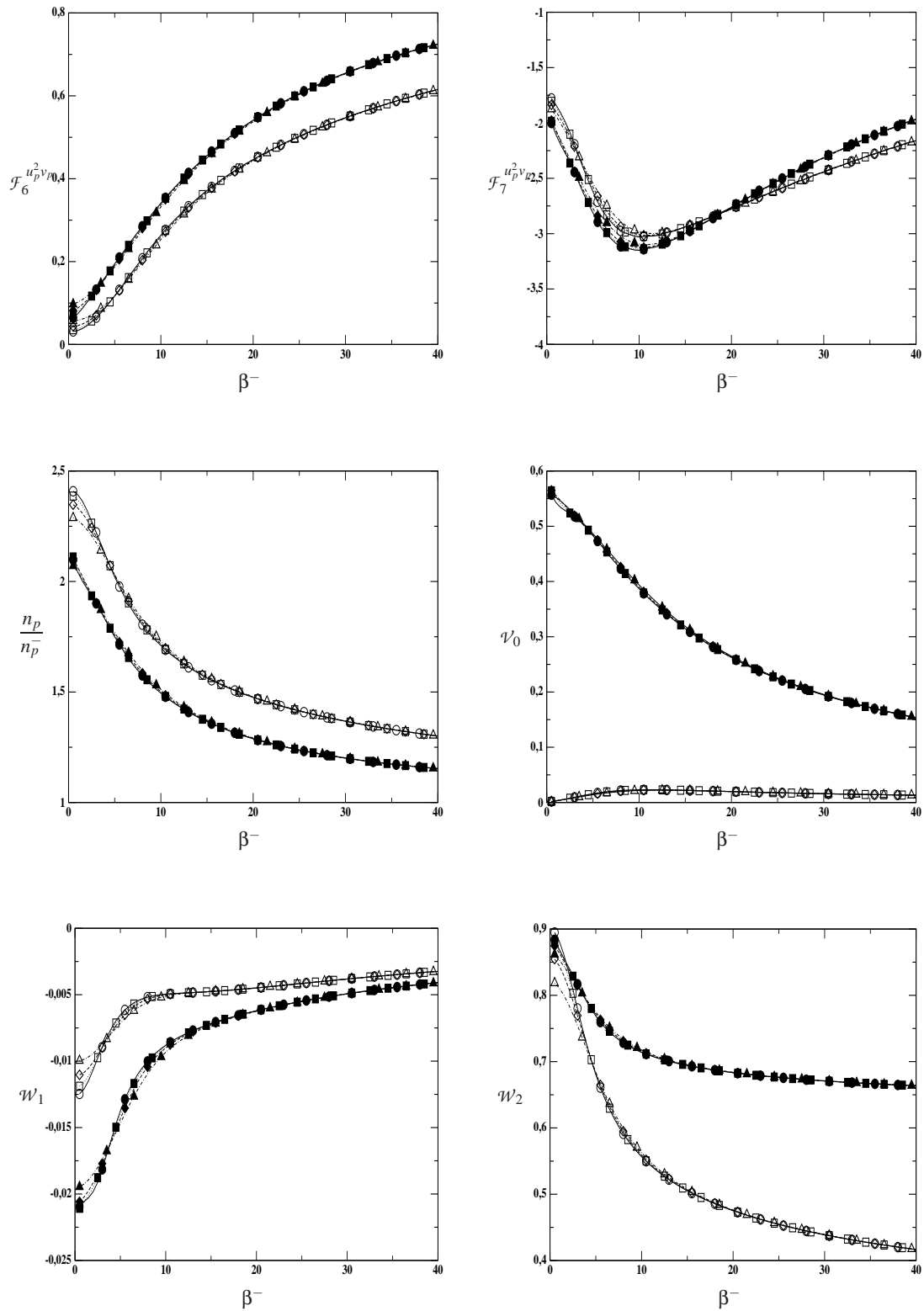


FIG. 5.6 – Evolution des coefficients $\mathcal{F}_{6 \leq i \leq 7}^{u_p^2 v_p}$, $\frac{n_p}{\bar{n}_p}$, ν_0 et $\mathcal{W}_{1 \leq i \leq 2}$ en fonction du paramètre β^- pour ξ fixé : (\circ) $\xi = 1$, (\square) $\xi = 2$, (\diamond) $\xi = 4$ et (\triangle) $\xi = 8$. Les symboles creux et plein représentent les cas où $\Delta\gamma = 5.3^\circ$ et $\Delta\gamma = 6.5^\circ$ respectivement.

5.4 Simulations numériques Euler-Euler de l'étude expérimentale de Sommerfeld & Kussin (2004)

Avant d'évaluer le comportement induit par les précédentes conditions aux limites aux parois rugueuses sur la phase dispersée dans le cadre d'une simulation Euler/Euler, nous avons dans un premier temps choisi de réaliser des simulations de référence avec d'importantes simplifications de la physique de l'interaction particules/paroi rugueuse telle nous l'avons précédemment étudiée. Ainsi, nous supposons que la probabilité P^* d'effectuer un et un rebond vaut toujours 1 et en plus nous négligeons l'effet de perspective de la paroi "vue" par les particules incidentes à la paroi. En d'autres termes $\{\gamma\}_p^- = 0$ et $\{\gamma^2\}_p^- = \Delta\gamma^2$. Cependant les hypothèses de fermeture sont les mêmes que celles émises au chapitre 2 (§ 2.4).

Ce modèle simplifié est employé pour des simulations numériques Euler-Euler de l'étude expérimentale de Sommerfeld & Kussin (2004) [99]. A cet effet, nous utilisons le code Euler-Euler 2D, "Mélodif", développé par le Prof. Olivier Simonin au Laboratoire National d'Hydraulique d'EDF. Validé dans différentes configurations d'écoulements en canal (He & Simonin (1994) [33]), ce code résout les équations du modèle à deux fluides. Sa formulation est basée sur une application directe d'un opérateur de moyenne volumique de phase aux équations locales instantanées. Pour plus d'informations au sujet dudit modèle, le lecteur intéressé peut consulter He & Simonin (1994) [33], Boëlle (1997) [8]. Pour la phase particulaire, ce modèle conduit à résoudre les équations (1.72)-(1.74) multipliées par la constante $\frac{\pi d_p^3}{6}$ (où d_p est le diamètre des particules) et où bien sûr les termes collisionnels sont fermés.

Afin de mieux prédire, le caractère anisotrope et inhomogène de l'écoulement de la phase gazeuse, nous l'avons simulée à partir du modèle $R_{f,ij} - \varepsilon_f$. Quant à la phase dispersée, l'agitation des particules est résolue à l'aide du modèle aux équations de transport sur les contraintes cinétiques ($R_{p,ij}$) couplé à l'équation de transport sur la covariance des vitesses fluide-particules (q_{fp}). Les coefficients de rebonds eulériens à la paroi sont pris, pour $\Delta\gamma = 5.3^\circ$, tels que $\{e_w\}_p^- = 0.9$ et $\{\mu_w\}_p^- = 0.37$. Les collisions particules/particules sont supposées inélastiques avec $e_c = 0.9$. Ce modèle simplifié a fait l'objet d'une précédente étude (Konan *et al.* [54]). Elle présente des résultats Euler-Euler comparés à la fois aux mesures expérimentales de Sommerfeld & Kussin (2004) [99] et aux simulations RANS couplées à un traitement lagrangien de la phase dispersée réalisées par Sommerfeld & Lain. Le papier est présenté à la section suivante.

5.4.1 Résultats et discussions

Sur la figure 5.7, nous présentons les résultats des simulations numériques avec le modèle à deux fluides qui sont comparés à la fois aux simulations LES/DPS et aux données expérimentales de Sommerfeld & Kussin (2004) [99].

Le profil de la vitesse moyenne des particules dans le canal (figure 5.7-(c)) avec le modèle à deux fluides montre premièrement une sous-estimation de la vitesse moyenne dans tout le canal par rapport à l'expérience. Cependant au centre du canal, elle s'accorde relativement bien avec les simulations lagrangiennes. Deuxièmement, il peut être observé que le profil prédit est erroné en raison de l'importante sous-estimation de la vitesse aux parois. En nous référant aux mécanismes pilotant l'action de la rugosité des parois sur la phase dispersée (se conférer aux précédents chapitres), cette sous-estimation de la vitesse à la paroi s'explique par celle de la contrainte de cisaillement à la paroi en comparaison avec les simulations lagrangiennes (figure 5.7-(d)).

Le profil de la concentration présenté sur la figure 5.7-(a) montre un résultat satisfaisant en comparaison avec les simulations lagrangiennes. Mais tout comme la DPS, et ce contrairement aux résultats expérimentaux, les simulations Euler-Euler montrent une importante réduction de la concentration de particules dans la région de la paroi inférieure du canal. En outre, il convient de noter une plus importante réduction de la concentration à la paroi dans le cadre du modèle à deux fluides qu'avec la LES/DPS.

L'agitation transverse des particules ($\langle v'_p v'_p \rangle_p^{1/2}$) obtenue avec les simulations Euler-Euler présentée sur la figure 5.7-(b) est en excellent accord avec l'expérience. Par contre celle longitudinale ($\langle u'_p u'_p \rangle_p^{1/2}$) est sur-estimée malgré un bon profil.

Ces résultats obtenus avec le modèle à deux fluides couplé aux conditions aux limites simplifiées mettent bien en évidence la mauvaise prise en compte de la physique de l'interaction particule/paroi rugueuse. Les conséquences sont nettement observables sur les propriétés longitudinales de l'écoulement. Aussi ces résultats ont l'avantage de montrer la mise en œuvre pratique de ces conditions aux limites aux parois rugueuses ; et dans un second temps l'intérêt de la prise en compte du mécanisme complet de l'interaction particule/paroi rugueuse. Cependant, des études ultérieures de développement et de validations restent encore nécessaires pour permettre l'application du modèle complet.

5.5 Conclusion

Nous avons proposé un modèle eulérien de conditions aux limites aux parois rugueuses à l'aide du "*Rough Wall Multi-Collisions Model*". La formulation du modèle est basée sur la description statistique

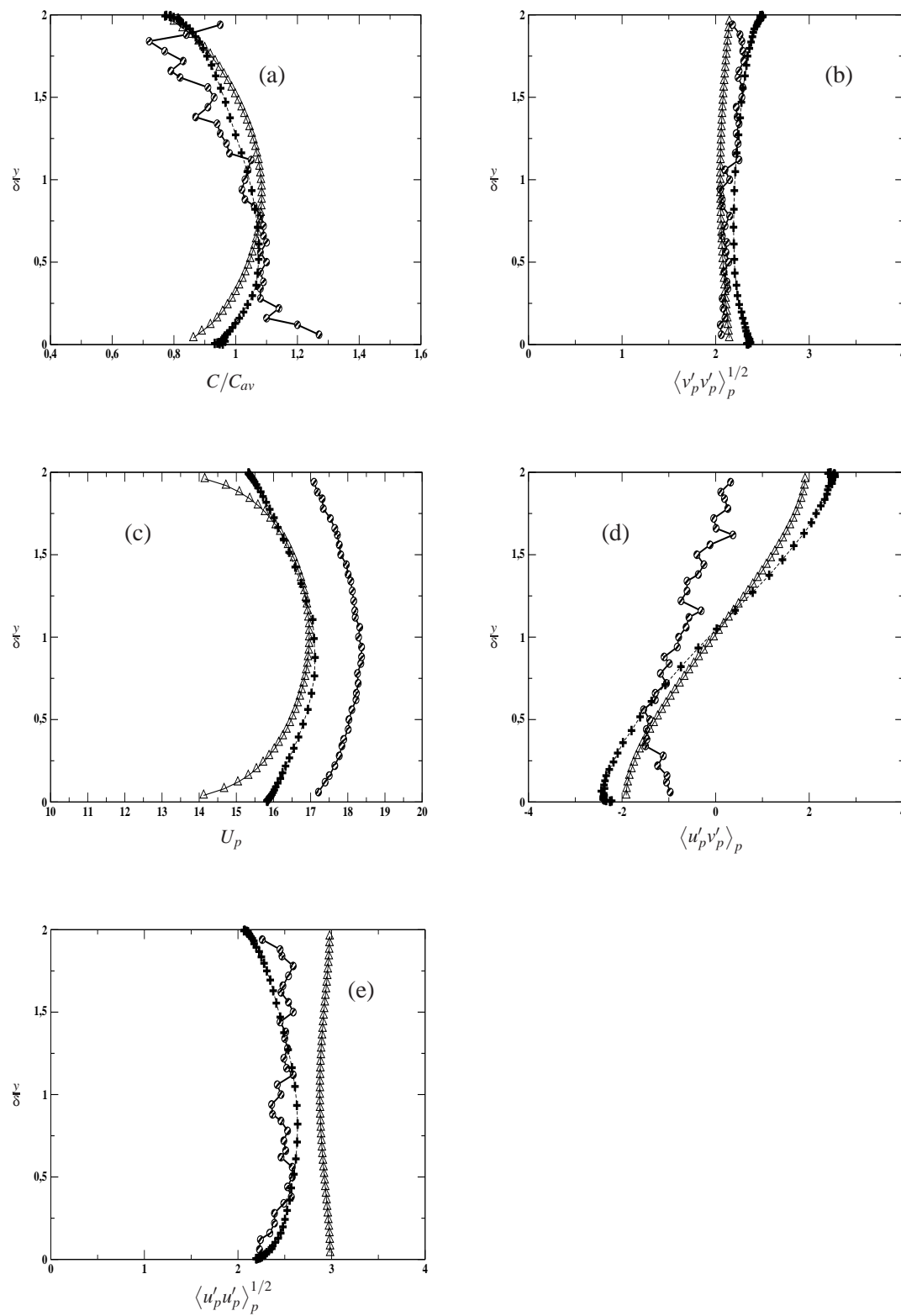


FIG. 5.7 – Simulations Euler-Euler gaz-particules en canal à grand Reynolds : statistiques de la phase dispersée. Ronds hachurés : données expérimentales du cas où le diamètre des particules est $d_p = 100\mu\text{m}$ et $\Delta\gamma = 5.3^\circ$ (Sommerfeld & Kussin (2004) [99]). (+) et (Δ) représentent respectivement les simulations LES/DPS (chapitre 4) et Euler-Euler.

de l'interaction particule/paroi telle que proposée par Cercignani (1975) [13]. L'existence de la probabilité P^* mimant les effets de rebonds multiples dans le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" a permis le calcul de la distribution des vitesses de rebond des particules à la paroi. Ce point était essentiel pour la fermeture des conditions aux limites par le calcul des moments pairs de la vitesse normale à la paroi, dans le cadre de la théorie de Cercignani. La complexité du traitement eulérien des mécanismes dus à la rugosité a introduit des moyennes incidentes qui exigent la connaissance explicite de la distribution des vitesses incidentes à la paroi. Nous avons évalué ces moyennes en faisant l'hypothèse que cette distribution simplifiée d'une distribution gaussienne des vitesses incidentes à la paroi.

FEDSM2006-98263

COMPARISON BETWEEN EULER-EULER AND EULER-LAGRANGE COMPUTATIONS OF GAS-SOLID TURBULENT FLOW IN A HORIZONTAL CHANNEL WITH DIFFERENT WALL ROUGHNESS

N. A. Konan

Institut de Mécanique des Fluides
UMR 5502 CNRS/INPT/UPS
Allée du Professeur Camille Soula
31400 Toulouse, France
konan@imft.fr

S. Laín

Grupo de Investigación en Mecánica de Fluidos
Energetics and Electronics Departement
Universidad Autónoma de Occidente (UAO),
Colombia
slain@cua.edu.co

O. Simonin

Institut de Mécanique des Fluides
UMR 5502 CNRS/INPT/UPS
Allée du Professeur Camille Soula
31400 Toulouse, France
simonin@imft.fr

M. Sommerfeld

Institut für Verfahrenstechnik,
Fachbereich Ingenieurwissenschaften,
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg,
D-06099 Halle (Saale), Germany
martin.sommerfeld@iw.uni-halle.de

ABSTRACT

This paper presents practical eulerian rough wall boundary conditions for particle mean velocity and fluctuating components. The model derives from a pdf approach and the Sommerfeld particle-wall rebound theory [1]. We have implemented these boundary conditions in 2D Euler/Euler code "Mélodif" by neglecting the "shadow effect" [2] and assuming an half-gaussian distribution for wall-normal incident particle velocities. Lagrangian calculations in which the particle-wall collisions are treated following Sommerfeld [1], are carried out. Low and high roughness cases are simulated and both simulations results are compared with Sommerfeld experimental database.

INTRODUCTION

Inertial particle irregular rebounds are well known to influence their behavior, in multiphase flows [3], [4]. That makes

difficult the prediction of particle kinetic stress, of their concentration and of their mean velocities. However, a good representation of particle-wall collision mechanisms is a sure alternative to make this prediction.

With Sommerfeld bouncing model [2], in which the incident particle hits a virtual wall whose the slope angle is sampled following a truncated gaussian distribution ("shadow effect"), one predicts properly particles behavior by using lagrangian formulation. In the framework of continuum approach, by presuming both global and wall-normal incident pdf as gaussian and neglecting "shadow effect", Simonin et al. [5] have proposed rough wall boundary conditions.

In this paper, we present the theory which supports Simonin et al. [5] simplified model. Experiments and lagrangian calculations are carried out for different wall roughness, in an horizontal narrow channel. The accuracy of these eulerian boundary conditions is checked by making comparisons between eulerian re-

sults, lagrangian simulations made without "shadow effect" and experimental databases.

NOMENCLATURE

f_p^- velocity distribution of incident particles at the wall
 f_p^+ velocity distribution of reflected particles at the wall
 n_p particle number density at the wall
 n_p^- incident particle number density at the wall
 n_p^+ reflected particle number density at the wall
 U_p^- streamwise mean velocity of incident particles
 \underline{c}_p particle velocity vector
 U_p, V_p streamwise and wall-normal velocity components
 $R_{p,ij} = \langle u'_{p,i} u'_{p,j} \rangle_p$ double particle velocity correlations
 $S_{p,ijk} = \langle u'_{p,i} u'_{p,j} u'_{p,k} \rangle_p$ third particle velocity correlations
 α^- incidence angle of particle
 α^+ rebound angle of particle
 γ roughness wall angle

ROUGH WALL BOUNDARY CONDITIONS MODEL

Eulerian Boundary Conditions Derivation

Following Sakiz et al. [6], the eulerian wall boundary conditions for dispersed phase are Dirichlet or flux types. In the case where wall-normal unit vector is defined as $\underline{n} = (0, 1, 0)$, these conditions are odd order moments of the wall-normal velocity v_p and they take the form $n_p \langle \Psi_p(\underline{c}_p) v'_p \rangle$, where $\Psi_p(\underline{c}_p)$ is a regular function of particle velocity.

The derivation is based on pdf approach. Thus, we consider a particle velocity probability density function f_p from which, we define the mean value of $\Psi_p(\underline{c}_p)$ by :

$$\langle \Psi \rangle_p = \frac{1}{n_p} \int_{\mathbb{R}^3} \Psi(\underline{c}_p) f_p(\underline{c}_p) d\underline{c}_p \quad \text{with} \quad n_p = \int_{\mathbb{R}^3} f_p(\underline{c}_p) d\underline{c}_p \quad (1)$$

In order to focus on wall effect, we divide the near wall pdf f_p in incident f_p^- and reflected f_p^+ distribution functions respectively on $D^- = \{\underline{c}_p \in \mathbb{R}^3 / \underline{c}_p \cdot \underline{n} < 0\}$ and $D^+ = \{\underline{c}_p \in \mathbb{R}^3 / \underline{c}_p \cdot \underline{n} > 0\}$. We also define incident average by :

$$\langle \Psi \rangle_p^- = \frac{1}{n_p^-} \int_{D^-} \Psi(\underline{c}_p^-) f_p^-(\underline{c}_p^-) d\underline{c}_p^- \quad \text{with} \quad n_p^- = \int_{D^-} f_p^-(\underline{c}_p^-) d\underline{c}_p^- \quad (2)$$

Reflected average is defined by the same method and both incident and reflected averages are linked by :

$$n_p \langle \Psi \rangle = n_p^- \langle \Psi \rangle^- + n_p^+ \langle \Psi \rangle^+ \quad \text{and} \quad n_p = n_p^- + n_p^+ \quad (3)$$

Introducing the transition probability per rebound $R(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+) d\underline{c}_p^+$ that an incident particle is reflected and assuming a non-deposition condition, we can write :

$$\int_{D^+} R(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+) d\underline{c}_p^+ = 1 \quad (4)$$

According to Cercignani (1975), by assuming no resuspension particle, the incident and reflected particle mass fluxes must be equal. So :

$$\forall \underline{c}_p^+ \in D^+, \quad f^+(\underline{c}_p^+) \underline{c}_p^+ \cdot \underline{n} = \int_{D^-} f_p^-(\underline{c}_p^-) |\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}| R(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+) d\underline{c}_p^- \quad (5)$$

Following Sommerfeld (1992), the particle hits a smooth virtual wall whose the slope angle γ is sampled by using a gaussian distribution of zero mean value and given standard deviation, we write :

$$R(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R_\gamma(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+) P_r(\gamma | \underline{c}_p^-) d\gamma \quad (6)$$

where according to Sommerfeld (1999), the probability distribution of virtual wall angle $P_r(\gamma | \underline{c}_p^-)$ is conditioned by the so-called "shadow effect".

Using equations (2) to (6), we obtain :

$$n_p \langle \Psi_p(\underline{c}_p) v'_p \rangle_p = n_p^- \langle \Psi_p(\underline{c}_p) v'_p \rangle_p^- + n_p^+ \langle \Psi_p(\underline{c}_p) v'_p \rangle_p^+ \quad (7)$$

in which :

$$n_p^+ \langle \Psi_p(\underline{c}_p) v'_p \rangle_p^+ = -n_p^- \langle \langle \Psi_p(\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) | \underline{c}_p^- \rangle v'_p \rangle_p^- \quad (8)$$

with :

$$\langle \Psi_p(\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) | \underline{c}_p^- \rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Psi_p(\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) P_r(\gamma | \underline{c}_p^-) d\gamma$$

where $\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)$ is a bijective application from D^- to D^+ defined analytically by the rebound laws.

Applying :

- 3-D elastic bouncing with a main flow in the x-direction ($W_p = 0$)
- formulations (7) and (8), in which we substitute function $\Psi_p(\underline{c}_p)$ by $u_p, w_p, u_p u_p, v_p v_p, w_p w_p, \dots$
- $\Delta\gamma \ll 1$,

we obtain the rough wall averages summarised in Table 1.

The Simplified Model (Simonin et al. [5]) is obtained by :

$n_p V_p = 0$
$n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p = 2n_p^- \langle \langle \gamma^2 \alpha^- \rangle (U_p + u'_p) v'_p \rangle_p^- - 2n_p^- \langle \langle \gamma \alpha^- \rangle v'_p v'_p \rangle_p^-$
$n_p \langle v'_p w'_p \rangle_p = 0$
$n_p \langle u'_p v'_p w'_p \rangle_p = -2n_p^- \langle \langle \gamma \alpha^- \rangle v'_p w'_p \rangle_p^- + 2n_p^- \langle \langle \gamma^2 \alpha^- \rangle (u'_p + U_p) v'_p w'_p \rangle_p^- - n_p U_p \langle v'_p w'_p \rangle_p$
$n_p \langle u'_p v_p^2 \rangle_p = -2n_p U_p \langle u'_p v'_p \rangle_p - n_p \langle v_p^3 \rangle_p$
$n_p \langle v'_p w_p^2 \rangle_p = 0$
$n_p \langle v_p^3 \rangle_p = -4n_p^- \langle \langle \gamma^2 \alpha^- \rangle (U_p + u'_p)^2 v'_p \rangle_p^- + 4n_p^- \langle \langle \gamma \alpha^- \rangle (U_p + u'_p) v_p^2 \rangle_p^- + 4n_p^- \langle \langle \gamma^2 \alpha^- \rangle v_p^3 \rangle_p^-$

Table 1. Rough Wall Boundary Conditions Model with 2D Roughness Effects for Elastic Bouncing

$n_p V_p = 0$
$n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p = 2n_p^- \Delta \gamma^2 U_p \langle v'_p \rangle_p^-$
$n_p \langle v'_p w'_p \rangle_p = 0$
$n_p \langle u'_p v'_p w'_p \rangle_p = 0$
$n_p \langle u_p^2 v'_p \rangle_p = -4n_p^- \Delta \gamma^2 \langle v_p^3 \rangle_p^- + 4n_p^- \Delta \gamma^2 \langle u_p^2 v'_p \rangle_p^-$
$n_p \langle v'_p w_p^2 \rangle_p = -4n_p^- \Delta \gamma^2 \langle v_p^3 \rangle_p^- + 4n_p^- \Delta \gamma^2 \langle w_p^2 v'_p \rangle_p^-$
$n_p \langle v_p^3 \rangle_p = -2n_p U_p \langle u'_p v'_p \rangle_p - n_p \langle u_p^2 v'_p \rangle_p - n_p \langle v'_p w_p^2 \rangle_p$

Table 2. Practical Rough Wall Boundary Conditions Simplified Model (Simonin et al. [5], ICMF'04)

- neglecting the "shadow effect" : $P(-\gamma | \alpha^-) = P(\gamma | \alpha^-)$.
i.e. $\langle \gamma | \alpha^- \rangle = 0$ (Sommerfeld, 1992)
- $\Delta \gamma \ll \pi$ then $\langle \gamma^2 | \alpha^- \rangle \simeq \Delta \gamma^2$, for a gaussian distribution of rough wall angle γ
- assuming that the following incident averages are such as : $\langle u'_p v'_p \rangle_p^- = 0$, $\langle v'_p w'_p \rangle_p^- = 0$ and $\langle u'_p v'_p w'_p \rangle_p^- = 0$,
in all relations related in Table 1.

That leads to the equations of Table 2.

In addition, we assume that the even order moments of v'_p

can be modeled by :

$$\begin{cases} n_p^- = \frac{1}{2} n_p \\ U_p^- = U_p \\ \langle u_p^2 \rangle_p^- = \langle u_p^2 \rangle_p \\ \langle v_p^2 \rangle_p^- = \langle v_p^2 \rangle_p \\ \langle w_p^2 \rangle_p^- = \langle w_p^2 \rangle_p \end{cases} \quad (9)$$

Equations of Table 2 & (9) closure has been possible that assuming an half-gaussian incident velocity pdf f_p^- . That allows us to write :

$$\begin{cases} \langle v'_p \rangle_p^- = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \langle v_p^2 \rangle_p \\ \langle v_p^3 \rangle_p^- = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} [\langle v_p^2 \rangle_p]^{\frac{3}{2}} \\ \langle u_p^2 v'_p \rangle_p^- = \langle u_p^2 \rangle_p \langle v'_p \rangle_p^- \\ \langle v'_p w_p^2 \rangle_p^- = \langle w_p^2 \rangle_p \langle v'_p \rangle_p^- \end{cases} \quad (10)$$

The accuracy of this simplified model has been analysed in [7]. The relations summarised in Table 2 show that the wall roughness induces, through the boundary conditions, a kinetic energy transfer from the mean streamwise motion towards the wall-normal fluctuating motion and a redistribution effect between the wall-normal and streamwise (spanwise) kinetic stresses.

This simplified model, supplemented by the friction effect, was implemented in the eulerian-eulerian code Mélodif. In order to take into account these effects, we use the following restitution and friction model.

Rough Wall Restitution and Friction Model

The dependence of the normal coefficient of restitution on the collision angle was already assumed by Grant & Tabakoff (1975). With our actual understanding of particle-wall collision mechanism, recently Sommerfeld et al. [2] have proposed to model both restitution and friction coefficients as follows :

$$e_w(\alpha^-) = \begin{cases} \frac{e_h - 1}{\alpha_e} \alpha^- + 1 & \text{if } \alpha^- \in [0, \alpha_e] \\ e_h & \text{if } \alpha^- \geq \alpha_e \end{cases} \quad (11)$$

$$\mu_w(\alpha^-) = \begin{cases} \frac{\mu_h - \mu_0}{\alpha_\mu} \alpha^- + \mu_0 & \text{if } \alpha^- \in [0, \alpha_\mu] \\ \mu_h & \text{if } \alpha^- \geq \alpha_\mu \end{cases} \quad (12)$$

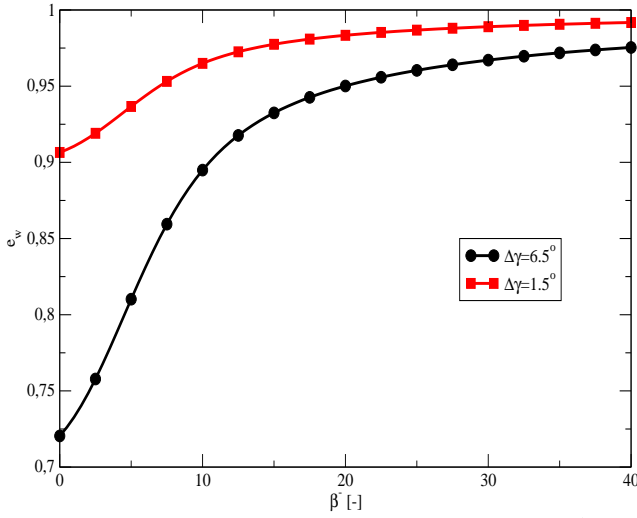


Figure 1. Eulerian rough wall restitution coefficient with ($\Delta\gamma = 1.5^\circ$, $e_h = 0.9$, $\alpha_e = 22.0^\circ$) and ($\Delta\gamma = 6.5^\circ$, $e_h = 0.7$, $\alpha_e = 22.0^\circ$) according to Sommerfeld [2].

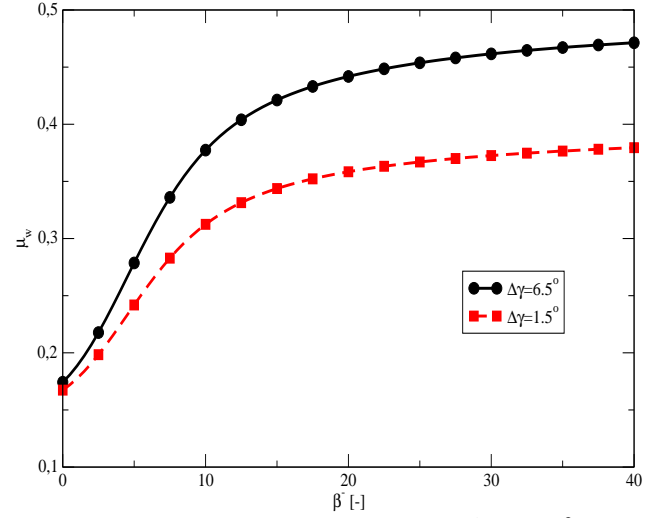


Figure 2. Eulerian rough wall friction coefficient with ($\Delta\gamma = 1.5^\circ$, $\mu_0 = 0.4$, $\mu_h = 0.15$, $\alpha_\mu = 22.0^\circ$) and ($\Delta\gamma = 6.5^\circ$, $\mu_0 = 0.5$, $\mu_h = 0.15$, $\alpha_\mu = 22.0^\circ$) according to Sommerfeld [2].

Applying continuum approach and according to Sommerfeld, we can write :

$$\begin{aligned} \{e_w\}_p^- &= \int_0^\pi e_w(\alpha^-) h_p^-(\alpha^-) d\alpha^- \\ \{\mu_w\}_p^- &= \int_0^\pi \mu_w(\alpha^-) h_p^-(\alpha^-) d\alpha^- \end{aligned} \quad (13)$$

in which h_p^- is the probability distribution function of impacting particle with incident angle α^- and defined by :

$$\begin{aligned} \forall \alpha^- \in [0, \pi], \\ h_p^-(\alpha^-) &= \frac{1}{n_p} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_p^-(c_p \cos \alpha^-, -c_p \sin \alpha^-, c_{p_z}) c_p dc_p dc_{p_z} \end{aligned} \quad (14)$$

where the incident velocity distribution to the wall f_p^- is assumed an half-gaussian. Figures 1 & 2 show respectively the restitution and friction coefficient results in the cases where wall roughness standard deviations are $\Delta\gamma = 1.5^\circ$ and $\Delta\gamma = 6.5^\circ$.

The Two-Fluid Model

Two-fluid model is solved by Mélodif. Its formulation is based on the average equations for each phase, which derive directly from the local conservation equations in single phase flow by density-weighted averaging. These equations are for dilute gas-solid flow:

- Mass budget :

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_k \rho_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_k \rho_k U_{k,j} = 0 \quad (15)$$

- Momentum budget :

$$\begin{aligned} \alpha_k \rho_k \frac{\partial}{\partial t} U_{k,i} + \alpha_k \rho_k U_{k,j} \frac{\partial}{\partial x_j} U_{k,i} &= -\alpha_k \frac{\partial P_1}{\partial x_i} + \alpha_k \rho_k g_i + I'_{k,i} \\ &- \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\alpha_k \rho_k \langle u'_{k,i} u'_{k,j} \rangle_k + \Theta_{k,ij} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

in which, P_1 is the mean pressure of the continuous phase; ρ_k is the mean density of the phase k ($= f$ for fluid, $= p$ for particle), while α_k is the volumetric fraction of the phase k and checks :

$$\alpha_f + \alpha_p = 1 \quad \text{with} \quad \alpha_p = \frac{\pi D_p^3}{6} n_p \quad (17)$$

where D_p is particle diameter. $\Theta_{k,ij}$ is "viscous" part (for $k = f$) and collisional part (for $k = p$) of stress tensor. $I'_{k,i}$ represents the mean momentum transfer term between phases and is written in gas-solid flow by (Bel Fdhila & Simonin, 1992) :

$$I'_{f,i} = -I'_{p,i} = \alpha_p \rho_p \frac{V_{r,i}}{\langle \tau_{fp}^F \rangle} \quad (18)$$

in which $\langle \tau_{fp}^F \rangle$ is the mean relaxation time of dispersed phase and is written by :

$$\langle \tau_{fp}^F \rangle = \frac{4 \rho_p D_p}{3 \rho_f \langle C_D \rangle |\underline{V}_r|} \quad (19)$$

The mean drag coefficient (C_D) is estimated following :

$$C_D = \begin{cases} 24Re_p^{-1} (1 + 0.15Re_p^{0.687}) & Re_p \leq 1000 \\ 0.44 & Re_p > 1000 \end{cases} \quad (20)$$

where $Re_p = D_p|\underline{V}_r|/\mu_f$ is the particle Reynolds number. The term \underline{V}_r which appears in (18) and (19) is the mean relative velocity between the particles and the surrounding fluid flow locally undisturbed by the presence of particles. Simonin (1990) has modeled it as follows :

$$V_{r,i} = U_{p,i} - U_{f,i} - V_{d,i} \quad (21)$$

with the drift velocity \underline{V}_d which relates the correlation between instantaneous distribution of the particles and the turbulent fluid motion. It is modeled by Simonin & Viollet (1990) by :

$$V_{d,i} = -D_{12,ij}^t \frac{1}{\alpha_f \alpha_p} \frac{\partial \alpha_p}{\partial x_j} \text{ with } D_{12,ij}^t = \tau_{12}^t \langle u'_{f,i} u'_{p,j} \rangle_p \quad (22)$$

Simonin et al. (1990) have showed that the characteristic time τ_{12}^t of turbulence-particle interaction corresponds to lagrangian integral scale. According to Csanady (1963), τ_{12}^t may be written :

$$\tau_{12}^t = \frac{\tau_f^t}{\sigma_1} [1 + C_\beta \zeta_r^2]^{-1/2} ; \zeta_r = |\underline{V}_r| / \sqrt{\frac{2}{3} q_f^2} \quad (23)$$

Where q_f^2 is the fluid turbulent kinetic and C_β is a constant equal to 0.45 or 1.8. The term τ_f^t is the fluid turbulent macroscale and is obtained in terms of q_f^2 and dissipation rate ε_f following :

$$\tau_f^t = \frac{1}{2} \frac{q_f^2}{\varepsilon_f} \quad (24)$$

The notation $\langle \cdot \rangle_k$ represents the averaging operator associated to the phase k . Thus, the i^{th} mean velocity $U_{k,i}$ and its fluctuation are :

$$\begin{cases} U_{k,i} = \langle u_{k,i} \rangle_k \\ u'_{k,i} = \langle u_{k,i} \rangle_k - U_{k,i} \text{ with } \langle u'_{k,i} \rangle_k = 0 \end{cases} \quad (25)$$

Equations closure is made by using $R_{f,ij} - \varepsilon$ model for continuous phase and $R_{p,ij} - q_{fp}$ to solve dispersed phase.

- Fluid-particle covariance model

Correlations $q_{fp} = \langle u'_{f,i} u'_{p,i} \rangle_p$ appear in different coupling terms between the phases. Closures used are empirical. Indeed, with the eddy viscosity concept, Simonin (1991) gives a model for the fluid-particle correlations. He writes :

$$\begin{cases} \langle u'_{f,i} u'_{p,j} \rangle_p = -\mu_{fp}^t \left[\frac{\partial U_{f,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{p,j}}{\partial x_i} \right] \\ + \frac{1}{3} \delta_{ij} \left[q_{fp} + \mu_{fp}^t \frac{\partial U_{f,m}}{\partial x_m} + \mu_{fp}^t \frac{\partial U_{p,m}}{\partial x_m} \right] \\ \mu_{fp}^t = \frac{1}{3} q_{fp} \tau_{fp}^t \end{cases} \quad (26)$$

Fluid-particle covariance equation obtained from lagrangian approach equation is :

$$\begin{aligned} \alpha_p \rho_p \frac{\partial q_{fp}}{\partial t} + \alpha_p \rho_p U_{p,j} \frac{\partial q_{fp}}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\alpha_p \rho_p \frac{\mu_{fp}^t}{\sigma_q} \frac{\partial q_{fp}}{\partial x_j} \right] - \alpha_p \rho_p \varepsilon_{fp} \\ &+ \Pi_{q_{fp}} - \alpha_p \rho_p \langle u'_{f,i} u'_{p,j} \rangle_p \frac{\partial U_{p,i}}{\partial x_j} \\ &- \alpha_p \rho_p \langle u'_{f,j} u'_{p,i} \rangle_p \frac{\partial U_{f,i}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (27)$$

where :

$$\begin{cases} \Pi_{q_{fp}} = -\alpha_p \rho_p \frac{1}{\langle \tau_{fp}^t \rangle} \left[(1 + X_{fp}) q_{fp} - 2q_f^2 - 2X_{fp} q_p^2 \right] \\ X_{fp} = \frac{\alpha_p \rho_p}{\alpha_f \rho_f} \\ \varepsilon_{fp} = \frac{q_{fp}}{\tau_{fp}^t} \end{cases} \quad (28)$$

- For dispersed phase

Particle kinetic energy is $q_p^2 = \langle u'_{p,i} u'_{p,i} \rangle_p$ and the kinetic stress model transport equation (or $R_{p,ij} = \langle u'_{p,i} u'_{p,j} \rangle_p$ model) is written by (Simonin, 1994) :

$$\begin{aligned} \alpha_p \rho_p \left[\frac{\partial R_{p,ij}}{\partial t} + U_{p,m} \frac{\partial R_{p,ij}}{\partial x_m} \right] &= \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\alpha_p \rho_p K'_{p,mn} \frac{\partial R_{p,ij}}{\partial x_n} \right] \\ &- \alpha_p \rho_p \left[R_{p,im} \frac{\partial U_{p,j}}{\partial x_m} + R_{p,jm} \frac{\partial U_{p,i}}{\partial x_m} \right] \\ &- \alpha_p \rho_p \frac{\sigma_c}{\tau_p^c} \left[R_{p,ij} - \frac{2}{3} q_p^2 \delta_{ij} \right] \\ &- \alpha_p \rho_p \frac{1}{3} \frac{(1 - e_c^2)}{\tau_p^c} \frac{2}{3} q_p^2 \delta_{ij} \\ &- \alpha_p \rho_p \frac{2}{\tau_{fp}^t} (R_{p,ij} - R_{fp,ij}) \end{aligned} \quad (29)$$

where

$$\begin{cases} K_{p,mn}^t = \left[\frac{\tau_{fp}^F}{\zeta_{fp}^F} R_{p,mn} + \frac{\tau_{fp}^t}{\zeta_{fp}^t} R_{fp,mn} \right] \left(1 + \frac{\tau_{fp}^F \zeta_c}{\zeta_{fp}^t \tau_p^c} \right)^{-1} \\ R_{fp,mn} = \frac{1}{2} \left[\langle u'_{f,i} u'_{p,j} \rangle_p + \langle u'_{f,j} u'_{p,i} \rangle_p \right] \\ \zeta_{fp}^F = \frac{9}{5}; \quad \tau_{fp}^t = \frac{3 C_\mu}{2 C_s'} \quad \text{and} \quad C_s' = 0.22 \end{cases} \quad (30)$$

in which τ_p^c is particle-particle characteristic collision time.

EXPERIMENTAL SET-UP

The test facility has been previously described in detail in [8]; hence only a brief summary of the main characteristics of the system will be given here.

The main component of the experimental rig is a horizontal channel of 6m length which has a height of 35 and a width of 350mm, so almost two-dimensional flow conditions can be established. The upper and lower channel walls were made of stainless plates which could be exchanged in order to study the effect of wall material and wall roughness on the particle behavior. The measurements were performed close to the end of the channel at distance of 5.8m from entrance. A Phase Doppler Anemometer (PDA) was used to determine gas and particle velocities. In all experiments the volume flow was kept constant in order to maintain a fixed gas average velocity of 20m/s and measurements have been conducted for glass particles ($\rho_p = 2500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) with different diameters (130 and 195 μm), mass loadings and also different wall roughness.

LAGRANGIAN APPROACH

The numerical scheme adopted to simulate the two-phase flow developing in a horizontal channel has been also described, in detail previously in Lain et al. [8]. Therefore, only the basic equations and expressions will be presented here in order to make clear the procedure.

The fluid flow calculation was based on the Euler approach by solving the full Reynolds stress turbulence model equations extended in order to account for the effects of the dispersed phase [9]. The time-dependent two-dimensional conservation equations for the fluid may be written in the general form (in tensorial notation) :

$$(\rho_f \phi)_{,i} + (\rho_f U_i \phi)_{,i} = (\Gamma_{ik} \phi_{,k})_{,i} + S_\phi + S_{\phi p} \quad (31)$$

where ρ_f is the liquid density, U_i are the Reynolds-averaged velocity components, and Γ_{ik} is an effective transport tensor. The usual source terms within the continuous phase equations are

ϕ	Γ_{ik}	S_ϕ
1	0	0
U_j	$\mu \delta_{ik}$	$-P_{,j} + (\Gamma_{jk} U_{i,k})_i$ $-\rho_f R_{ij,i} + \rho_f g_j$
R_{jl}	$c_S \rho_f R_{ik} k / \varepsilon$	$P_{jl} - \varepsilon_{jl} + \Pi_{jl}$
ε	$c_\varepsilon \rho_f R_{ik} k / \varepsilon$	$c_{\varepsilon 1} P_{kk} k / \varepsilon - \rho_f c_{\varepsilon 2} \varepsilon_{jl}^2 / k$
		$P_{jl} = -\rho_f (R_{jk} U_{l,k} + R_{lk} U_{j,k})$ $\varepsilon_{jl} = \frac{2}{3} \rho_f \delta_{jl} \varepsilon$ $\Pi_{jl} = -c_1 \rho_f \frac{\varepsilon}{k} (R_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{jl} R_{kk})$ $-c_2 \rho_f (P_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{jl} P_{kk})$ $c_S = 0.22 \quad c_\varepsilon = 0.18 \quad c_{\varepsilon 1} = 1.45$ $c_{\varepsilon 2} = 1.9 \quad c_1 = 1.8 \quad c_2 = 0.6$

Table 3. Summary of terms in the general equation for the different variables that describe the gas phase

summarised in S_ϕ , while $S_{\phi p}$ represents the additional source term due to phase interaction. Table 3 summarises the meaning of this quantities for the different variables ϕ , where P is the mean pressure, μ the gas viscosity and $R_{jl} = \overline{u'_j u'_l}$ the components of the Reynolds stress tensor.

The simulation of the particle phase by the Lagrangian approach requires the solution of the equation of the motion for each computational particle. This equations includes the particle inertia, drag, gravity-buoyancy, slip-shear lift force and slip-rotational lift force. The basset history term, the added mass and the fluid inertia are negligible for high ratios of particle gas densities. The change of the angular velocity along the particle trajectory results from wall collisions and viscous interaction with the fluid (i.e, the torque \vec{T}). Hence, the equations of motions for the particule are given by :

$$\frac{dx_{pi}}{dt} = u_{pi} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} m_p \frac{du_{pi}}{dt} = & \frac{3}{4} \frac{\rho_f}{\rho_p D_p} m_p C_D (u_i - u_{pi}) |\vec{u} - \vec{u}_B| \\ & + m_p g_i \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_p} \right) + F_{lsi} + F_{lri} \end{aligned} \quad (33)$$

$$I_p \frac{d\omega_{pi}}{dt} = T_i \quad (34)$$

Here, x_{pi} are the coordinates of the particle position, u_{pi} are its velocity components, $u_i = U_i + u'_i$ is the instantaneous velocity of the gas, D_p is the particle diameter and ρ_p is the density of the solids. $m_p = (\pi/6)\rho_p D_p^3$ is the particle mass and $I_p = 0.1m_p D_p^2$ is the moment of inertia for a sphere. The drag coefficient is obtained using the standard correlation :

$$C_D = \begin{cases} 24Re_p^{-1} (1 + 0.15Re_p^{0.687}) & Re_p \leq 1000 \\ 0.44 & Re_p > 1000 \end{cases} \quad (35)$$

where $Re_p = \rho D_p |\vec{u} - \vec{u}_p| / \mu$ is the particle Reynolds number.

The slip-shear force is based on the analytical result of Saffman [10] and extended for higher particle Reynolds numbers according to Mei [11] :

$$F_{lsi} = 1.615D_p\mu Re_s^{1/2} c_{ls} (\vec{u} - \vec{u}_p) \times \vec{\omega} \quad (36)$$

where $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$ is the fluid rotation, $Re_s = \rho D_p^2 |\vec{\omega}| / \mu$ is the particle Reynolds number of the shear flow and $c_{ls} = F_{ls} / F_{ls,Saff}$ represents the ratio of the extended lift force to Saffman force :

$$c_{ls} = \begin{cases} (1 - 0.3314\beta^{0.5}) e^{-Re_p/10} \\ \quad + 0.3314\beta^{0.5} & Re_p \leq 40 \\ 0.0524 (\beta Re_p)^{0.5} & Re_p > 40 \end{cases} \quad (37)$$

and β is a parameter given by $\beta = 0.5Re_s / Re_p$.

The applied slip-rotational lift force is based on the relation given Rubinow and Keller [12], which was extended to account for the relative motion between particle and fluid. Moreover, recent measurements by Osterlé and Bui Dinh [13] allowed an extension of this lift force to higher particle Reynolds numbers. Hence, the following form of the slip-rotation lift force has been used :

$$F_{lri} = \frac{\pi}{8} D_p^3 \rho \frac{Re_p}{Re_r} c_{lr} \left[\vec{\Omega} \times (\vec{u} - \vec{u}_p) \right] \quad (38)$$

with $\vec{\Omega} = 0.5\nabla \times \vec{u} - \vec{\omega}_p$ and the Reynolds number of particle rotation is given by $Re_r = \rho D_p^2 |\vec{\Omega}| / \mu$. The lift coefficient according to [13] is given for $Re_p < 2000$ by :

$$c_{lr} = 0.45 + \left(\frac{Re_p}{Re_r} - 0.45 \right) e^{-0.05684Re_r^{0.4} Re_p^{0.3}} \quad (39)$$

For the torque acting on a rotating particule, the expression of Rubinow and Keller [12] was extended to account for the rela-

tive motion between fluid and particle and higher Reynolds numbers :

$$\vec{T} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{D_p}{2} \right)^5 c_R |\vec{\Omega}| \vec{\Omega} \quad (40)$$

where the coefficient of rotation is obtained from [12] and direct numerical simulations of Dennis et al. [14] in the following way :

$$c_R = \begin{cases} \frac{64\pi}{Re_r} & Re_r \leq 32 \\ \frac{12.9}{Re_r^{0.5}} + \frac{128.4}{Re_r} & 32 < Re_r < 1000 \end{cases} \quad (41)$$

The equations to calculate the particle motion are solved by integration of the differential equations (32)-(34). For sufficiently small time steps and assuming that the forces remain constant during this time step, the new particle location, the linear and angular velocities are calculated. The time step for the particle tracking was chosen to 50% of the smallest of the relevant time scales, such as the particle relaxation time, the integral time scale of turbulence and the mean inter-particle collision time.

When a particle collides with a wall, the wall collision model provides the new particle linear and angular velocities and the new location in the computation domain after rebound. The applied wall collision model, accounting for wall roughness, is described in [1]. The wall roughness seen by particle is simulated by sampling randomly an angle following a gaussian distribution with zero mean value and a given standard deviation $\Delta\gamma$, which depends on the structure of wall roughness and particle size.

Inter-particle collisions are modelled by stochastic approach described in detail in [15]. This model relies on the generation of a fictious collision partner and accounts for a possible correlation of the velocities of colliding particles in turbulent flows. For the particle-particle collisions the restitution coefficient has been taken as a constant equal to 0.9 and the static and dynamic friction coefficient were chosen to be 0.4.

The two-way coupling represented by the additional source term $S_{\phi p}$ is modeled :

- for momentum equation by time and ensemble averaging for each control volume in the following form :

$$\overline{S_{U_{ip}}} = -\frac{1}{V_{cv}} \sum_k m_k N_k \times \sum_n \left\{ \left([u_{pi}]_k^{n+1} - [u_{pi}]_k^n \right) - g_i \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right) \Delta t_L \right\} \quad (42)$$

where the sum over n indicates averaging along the particle trajectory (time average) and the sum over k is related to the number

of computational particles passing the considered control volume with the volume V_{cv} . The mass of an individual particle is m_k and N_k is the number of real particles in one computational particle. Δt_L is the langrangian time step which is used in the solution of (33).

- for the conservation equations of the Reynolds stress components, R_{ji} are expressed in the Reynolds average procedure as :

$$S_{R_{jip}} = \overline{u_j S_{U_{ip}}} + \overline{u_i S_{U_{jp}}} - (\overline{U_j S_{U_{ip}}} + \overline{U_i S_{U_{jp}}}) \quad (43)$$

- for ϵ -equation is modelled in the standard way :

$$S_{\epsilon p} = C_{\epsilon 3} \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{k} S_{R_{jip}} \quad (44)$$

with $C_{\epsilon 3} = 1.0$ and the sum is implicit in the repeated subindex j .

RESULTS

The Eulerian and Lagrangian two-phase flow (gas-solid) calculations have been compared with experimental data obtained in an horizontal narrow channel facility described above.

The particle were spherical glass beads with two diameter $D_p = 130$ and $D_p = 195 \mu m$ with a material density of $\rho_p = 2450 kg.m^{-3}$. The dispersed phase has been considered as mono-disperse with mass loading of $\eta \in \{0.3, 0.5, 1.0\}$. The gas was air, and its density and its dynamic viscosity that we used in all calculations are respectively $\rho_f = 1.25 kg.m^{-3}$ and $\mu_f = 1.8 \times 10^{-5} kg.m^{-1}.s^{-1}$.

Eulerian computations (with Mélodif) have been carried out by using the Reynolds stress turbulence Model ($R_{f,ij} - \epsilon$) and the dispersed phase is solved with particle kinetic model which coupled with fluid-particle covariance model ($R_{p,ij} - q_{fp}$). The eulerian rough wall boundary conditions (Table 2) that we have formulated are used. In order to compare them, we make an inelastic bouncing where from the curves (see figures 1 & 2), we have chosen both restitution and friction coefficients respectively equal to $e_w = 0.98$ and $\mu_w = 0.35$ for $\Delta\gamma = 1.5^\circ$; for $\Delta\gamma = 6.5^\circ$ we used $e_w = 0.96$ and $\mu_w = 0.47$.

In the Lagrangian simulations, we used also Reynolds stress turbulence model described in Table 3. The particles were tracked using the lagrangian approach described above and two-way coupling has been accounted by equations (42) to (44). Restitution and friction models used are described by (11) and (12).

According to the experimentations, we have used in our calculations two roughness cases : a very low wall roughness ($\Delta\gamma = 1.5^\circ$) and an high roughness ($\Delta\gamma = 6.5^\circ$). The experimental data have been measured at $5.8m$ of the entrance.

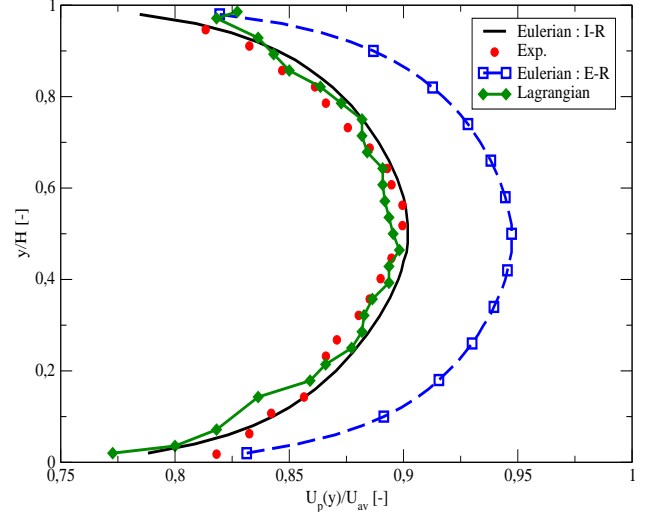


Figure 3. Comparison of particle streamwise mean velocity between data and both eulerian and lagrangian calculations for the low roughness $\Delta\gamma = 1.5^\circ$ with $D_p = 130 \mu m$ and $\eta = 1.0$. (E-R : Elastic rebound; I-R : Inelastic rebound)

In fig. 3, we presented particle streamwise velocity for mass loading $\eta = 1.0$. The particle size was $D_p = 130 \mu m$ and gas velocity in the centerline of channel was $U_{av} = 22 m.s^{-1}$. Far walls, one can see a agreement between inelastic eulerian calculations and data. Near the wall, both inelastic eulerian and lagrangian calculations results move away from experimental data. That could be due to the collision process in which we have neglected the principal mechanism, the so-called "shadow effect". Elastic eulerian simulations surestimate the data, while we observed agreement with inelastic calculations between data and lagrangian calculations. Therefore, the eulerian rough wall conditions coupled to restitution and friction model seem correct.

Figures 4 & 5, in which we present both mass flux and particle fluctuating velocities, show that the lagrangian calculations well predict them, while eulerian simulations surestimate slightly the data. Eulerian profiles are corrects.

CONCLUSION

We have presented in this paper, an eulerian rough wall boundary conditions modelling. Eulerian results compared to our experimental data and our lagrangian simulations, show a practical sight of these conditions that we succeeded to implement in eulerian code Mélodif. By neglecting the principal mechanism of particle-wall collision process such as proposed by Sommerfeld, our results well compare themselves to data. That insures of more interesting results by taking into account the global particle-wall mechanism.

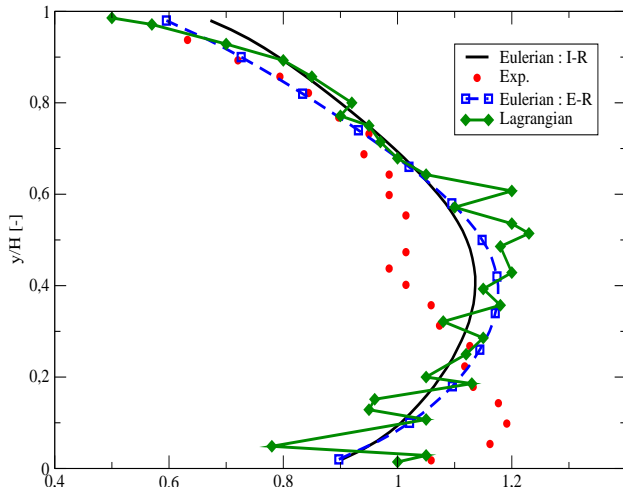


Figure 4. Comparison of particle mass flux between data and both eulerian and lagrangian calculations for the low roughness $\Delta\gamma = 1.5^\circ$ with $D_p = 130\mu\text{m}$ and $\eta = 1.0$. (E-R : Elastic rebound; I-R : Inelastic rebound)

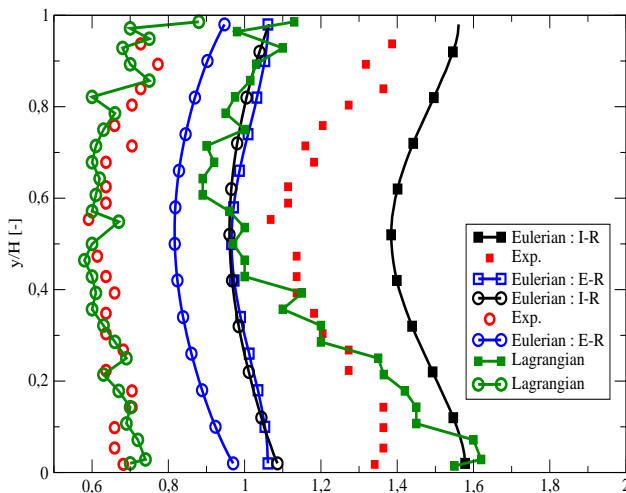


Figure 5. Comparison of particle fluctuating velocities between data and both eulerian and lagrangian calculations for the low roughness $\Delta\gamma = 1.5^\circ$ with $D_p = 130\mu\text{m}$ and $\eta = 1.0$. Square represents u'_p and circle represents v'_p . (E-R : Elastic rebound; I-R : Inelastic rebound)

REFERENCES

[1] Sommerfeld, M., 1992. "Modelling of particle-wall collision in confined gas-particle flows". *Int. J. Multiphase Flow*, **18** (6), pp. 905–926.
 [2] Sommerfeld, M., and Huber, N., 1999. "Experimental analysis and modelling of particle-wall collisions". *Int. J. Multiphase Flow*, **25**, pp. 1457–1489.

[3] Kussin, J., and Sommerfeld, M., 2002. "Experimental studies on particle behaviour and turbulence modification in horizontal channel flow with different wall roughness". *Experiments in Fluids*, **33**, pp. 143–159.
 [4] Squires, K. D., and Simonin, O., 2005. "Les/dps of the effect of wall roughness on dispersed-phase transport in particle-laden turbulent channel flow". *re-submitted to the Int. J. Heat and Fluid Flow*.
 [5] Simonin, O., Fede, P., Patino, G., and Squires, K., 2004. "Mathematical models and closure laws for gas-particle turbulent flows". *Proceedings of the ICFM'04, 5th Int. Conf. Multiphase Flows, Yokohama, Japan*.
 [6] Sakiz, M., and Simonin, O., 1999. "Development and validation of continuum particle wall boundary conditions using lagrangian simulation of a vertical gas/solid channel flow". *3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference, San-Francisco, California, USA, July 18-23*.
 [7] Konan, N. A., Simonin, O., and Squires, K. D., 2006. "Rough wall boundary condition derivation for particle continuum equations : Validation from les/dps of gas-solid turbulent channel flow". *ASME Joint U.S. - European Fluids Engineering Summer Meeting, Miami, Florida, USA, July 17-20*.
 [8] Lain, S., Sommerfeld, M., and Kussin, J., 2002. "Experimental studies and modelling of four-way coupling particle-laden horizontal channel flow". *Int. J. of Heat and Fluid Flow*, **23**, pp. 647–656.
 [9] Kohnen, G., and Sommerfeld, M., 1997. "The effect of turbulence modelling on turbulence modification in two-phase flows using the euler-lagrange approach". *Proc. 11th Symp. on Turbulent Shear Flows, Grenoble, France*, **2, P3**, pp. 23–28.
 [10] Saffman, P., 1965. "The lift on a small sphere in a shear flow". *J. Fluid Mech.*, **2**, pp. 385–400.
 [11] Mei, R., 1992. "An approximate expression for the shear lift force on a spherical particle at finite reynolds number". *Int. J. Multiphase Flow*, **18**, pp. 145–147.
 [12] Rubinow, S. I., and Keller, J. B., 1961. "The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous liquid". *J. Fluid Mech.*, **11**, pp. 447–459.
 [13] Osterlé, B., and Dinh, T. B., 1998. "Experiments on the lift of a spinning sphere in a range of intermediate reynolds numbers". *Experiments in Fluids*, **25**, pp. 16–22.
 [14] Dennis, S. C. R., Singh, S. N., and Ingham, B. D., 1980. "The steady flow due to a rotating sphere at low and moderate reynolds numbers". *J. Fluid Mech.*, **101**, pp. 257–279.
 [15] Sommerfeld, M., 2001. "Analysis of inter-particle collisions in homogeneous isotropic turbulence using a stochastic lagrangian modelling approach". *Int. J. Multiphase Flow*, **27**, pp. 1829–1858.

Conclusion

Ce mémoire de thèse consacré à l'analyse de l'interaction particules/parois rugueuses constitue une nouvelle étape de la chaîne de travaux impulsés par Olivier Simonin, sur la modélisation de l'influence des rebonds sur une phase dispersée solide d'un écoulement diphasique (He & Simonin, 1994 [33]; Sakiz, 1999 [82]; Pialat, 2007 [73]).

Les objectifs assignés à nos travaux étaient doubles et se résument à l'amélioration de la compréhension des rebonds particules/parois rugueuses et la dérivation d'un modèle eulérien de conditions aux limites aux parois rugueuses. Les moyens que nous nous sommes donnés pour remplir cette mission ont été multiples et méthodiquement exploités dans les cinq chapitres de cette thèse.

D'abord, ayant à l'idée l'utilisation de processus stochastiques lagrangiens du traitement des rebonds irréguliers disponibles dans la littérature pour la dérivation des conditions aux limites eulériennes, nous avons retenu le robuste formalisme mathématique de l'interaction particules/paroi proposé par Cercignani, 1975 [13] (chapitre 1). Ce formalisme qui est principalement basé sur la "connaissance" de la distribution des vitesses incidentes à la paroi et de la modélisation d'une probabilité de transition qui détermine explicitement l'interaction permet d'introduire des moyennes eulériennes incidentes et réfléchies à la paroi qui sont compilées pour en déduire la moyenne particulaire globale à la paroi. Cette méthode qui a été employée avec succès dans le cadre de la dérivation de conditions aux limites en paroi lisse (He & Simonin, 1994 [33]; Sakiz, 1999 [82]) assure la définition de problème bien posé au sens de Cauchy aux parois.

Les investigations théoriques menées au chapitre 2, dans le cadre de la dérivation des conditions aux limites, ont conduit préalablement à la modélisation de la distribution conditionnée par l'angle d'incidence, des angles de rugosité de paroi qui se dégage du modèle de "*Shadow Effect*" de Sommerfeld & Huber, 1999 [98]. L'analyse statistique de cette distribution à travers la corrélation, la variance et l'écart type de l'angle de paroi "vu" par une particule incidente dans le cadre d'un rebond totalement élastique, a mis en évidence l'effet d'incidence sous-entendu dans le mécanisme de "*Shadow Effect*". En outre, la

modélisation de la probabilité de transition, puis son application aux cas de rebonds élastiques a souligné l'existence d'une très forte probabilité de rebondir de manière rasante pour toute particule qui heurte la paroi avec un angle rasant, et ce contrairement aux résultats expérimentaux. Par ailleurs la dérivation des conditions aux limites eulériennes s'est heurtée à un problème de fermeture lié aux très grands nombres de particules rasantes induits par le "*Shadow Effect*". La suppression de cet effet inattendu du "*Shadow Effect*" par l'introduction d'un angle minimum de rebond a conduit à une fermeture possible des conditions aux limites et à la conclusion de l'existence d'un mécanisme de rebond plus sophistiqué qui devrait incorporer l'éventualité de rebonds multiples comme le suggéraient Tsirkunov & Panfilov (1998) [105].

Nous avons réalisé dans le troisième chapitre, des simulations des grandes échelles d'un écoulement d'air à bas nombre de Reynolds dans un canal, afin de résoudre correctement la couche limite de sorte à mieux prendre en compte l'action du fluide sur les particules dans cette région de l'écoulement, déterminante dans la présente étude. La phase dispersée de l'écoulement diphasique dilué gaz-solide est traitée par une approche lagrangienne. Pour lever toute ambiguïté sur les statistiques de la phase dispersée à la paroi, nous avons apporté des modifications dans le code sur le traitement des rebonds des particules à la paroi, en les déplaçant avant et après le rebond sur la base qu'elles possèdent une accélération non nulle. Les collisions particules/paroi rugueuse sont traitées à l'aide du modèle de "*Shadow Effect*" et elles sont considérées totalement élastiques dans un souci de simplification. A travers les distributions des angles de rebonds issues de nos simulations, il est ressorti une forte probabilité pour les particules de repartir rasantes après un rebond sur la paroi, confirmant ainsi les critiques formulées au sujet du "*Shadow Effect*" dans le deuxième chapitre. Par ailleurs en s'appuyant sur l'approche PDF de la description des propriétés statistiques de la phase dispersée (Simonin, 1996 [89]), les mécanismes pilotant l'influence de la rugosité des parois sur les premiers moments de la phase particulaire ont été mis en évidence à l'aide du "*Shadow Effect Model*". Cependant il est ressorti de cette analyse, une sous-estimation des principaux mécanismes responsables des modifications des premiers moments de la phase dispersée, à savoir la dispersion turbulente et la production d'énergie à la paroi par les gradients de vitesses longitudinaux. A côté de ces résultats, nous avons à la fois validé la modélisation de la probabilité de transition et la méthode de dérivation des conditions aux limites à la paroi à partir de ces simulations. Aussi, nous avons développé puis validé deux algorithmes de calculs de moyennes incidentes et réfléchies dans tout l'écoulement, dans le même esprit que les moyennes incidente et réfléchie issues de la théorie de Cercignani (cf. chapitre 1). Ces moyennes incidente et réfléchie nous ont permis de démontrer la continuité jusqu'à la paroi des propriétés statistiques incidentes et réfléchies de la phase particulaire dans tout l'écoulement.

Dans le chapitre 4, nous avons d'abord rappelé les principaux résultats des simulations déterministes de collisions de particules sur des parois rugueuses. Ces investigations ont confirmé l'existence de rebonds multiples. Elles ont par ailleurs permis de conclure que l'effet d'incidence lors du premier rebond est bien modélisée par la distribution effective des angles de rugosité proposée par Sommerfeld & Huber, 1999 [98]. Un second effet qui devrait être considéré comme une condition de réalisabilité du rebond a été mis en exergue à travers une probabilité non nulle d'effectuer un autre rebond lorsque l'angle de rebond est positif. Nous avons ensuite montré à travers des simulations LES/DPS à bas nombre de Reynolds que les rebonds multiples des particules sur une paroi rugueuse amplifient les mécanismes responsables des modifications des premiers moments de la phase dispersée en présence de rugosité. En plus, en s'appuyant sur les résultats des simulations déterministes de collisions de particules sur les parois rugueuses géométriques, nous avons proposé un nouveau modèle lagrangien, "*Rough Wall Multi-Collisions Model*", basé sur le principe de rebond unique comme le "*Shadow Effect Model*", cependant il incorpore des effets de rebonds multiples. Ce modèle a été validé par comparaison aux simulations à bas nombre de Reynolds en canal avec des rebonds multiples effectifs sur les parois rugueuses géométriques. Ensuite, le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" a été évalué dans le cadre de la simulation de l'expérience en canal horizontal à grand Reynolds ($Re_\tau \simeq 1050.56$) réalisée par Sommerfeld & Kussin (2004) [99]. Malgré la modifications des coefficients de rebonds par les expérimentateurs pour une meilleure prédiction de la vitesse moyenne avec le "*Shadow Effect Model*", nos résultats avec le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" ont montré une bonne prédiction de l'agitation des particules et une sous-estimation de la vitesse moyenne, en dépit de l'excellente prédiction de son profil. D'autre part, l'analyse des distributions des angles rebonds a montré une probabilité nulle de rebondir avec un angle rasant.

Le dernier chapitre de cette thèse s'est focalisé sur la dérivation eulérienne de conditions aux limites à la paroi dans le cadre de rebonds inélastiques avec friction, en s'aidant du "*Rough Wall Multi-Collisions Model*". L'exposé analytique présenté a montré que la mise en œuvre de cette dérivation n'a été possible qu'en raison du mécanisme de rebonds multiples traduit par la probabilité P^* pour une particule d'effectuer un second rebond lorsque l'angle de rebond est positif. Cependant, les conditions obtenues dans le cadre d'un effet de rugosité $2D$, s'avèrent complexes et difficiles à exploiter directement dans une simulation eulérienne, contrairement à celles proposées pour le cas des parois lisses (He & Simonin, 1994 [33]; Sakiz, 1999 [82]). En effet, les coefficients $\mathcal{F}_i^{\langle \Psi_p \mathcal{L}_p \cdot \mathbb{U} \rangle_p}$ qu'elles introduisent dépendent explicitement de moyennes incidentes caractéristiques d'une part du type de rebond (c'est à dire $\{e_w\}_p^-$ et $\{\mu_w\}_p^-$) et d'autre part d'effets d'incidence des particules (traduits par $\{P^*\}_p^-$, $\{\gamma P^*\}_p^-$, $\{\gamma^2 P^*\}_p^-$, $\{\Gamma\}_p^-$, $\{\gamma \Gamma\}_p^-$ et $\{\gamma^2 \Gamma\}_p^-$) qui exigent d'opérer une hypothèse sur la distribution des vitesses incidentes à la paroi afin

de les calculer à priori pour les introduire dans la simulation. En supposant cette distribution gaussienne, nous avons montré qu'un tel calcul était plausible.

En dépit des travaux réalisés dans les quatre derniers chapitres de cette thèse, beaucoup reste à faire. En effet, dans l'optique d'une évaluation plus propre puis la validation du "*Rough Wall Multi-Collisions Model*", dans le cadre d'écoulements à grand nombre de Reynolds, il est encore primordial de mener des simulations diphasiques dans lesquelles la phase gazeuse est résolue jusqu'à une distance $y^+ < d_p^+/2$, soit par une approche "*Reynolds Average Navier-Stokes*" (RANS), soit une approche "*Detached Eddy Simulation*" (DES) [66],[16], soit par une "*Direct Numerical Simulation*" (DNS). En raison d'une meilleure prise en compte du fluide à la paroi, ces simulations permettraient, en outre, de mieux analyser les fonctions de distributions de vitesses incidentes et réfléchies à la paroi. Par ailleurs, comme nous avons pu le constater au chapitre 5, la modélisation eulérienne est à ce prix. Une autre suite à la modélisation eulérienne entreprise pourrait être l'élaboration d'une méthode pour estimer les moyennes incidentes ($\{e_w\}_p^-$, $\{\mu_w\}_p^-$, $\{P^*\}_p^-$, $\{\gamma P^*\}_p^-$, $\{\gamma^2 P^*\}_p^-$, $\{\Gamma\}_p^-$, $\{\gamma\Gamma\}_p^-$ et $\{\gamma^2\Gamma\}_p^-$) qui définissent explicitement les coefficients $\mathcal{F}_i^{\langle \Psi_{p\mathcal{E}_p, \underline{n}} \rangle_p}$ dans les conditions aux limites aux parois sans avoir à se donner une PDF des vitesses incidentes pour le calcul préalable de ces coefficients. Pour finir, de nombreux tests de validations des conditions aux limites proposées devraient être effectués et il faudrait aussi étudier l'éventualité de conditions aux limites simplifiées à partir de ceux proposés.

En outre, en raison du caractère tridimensionnel de la rugosité de paroi en situation réelle, des investigations langrangiennes complémentaires avec le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*" devraient être réalisées, en tirant par exemple lors de la collision particule/paroi, deux angles de rugosité indépendants, selon la procédure décrite par le "*Rough Wall Multi-Collisions Model*", dans chacune des directions longitudinale et latérale de l'écoulement comme l'ont proposé Squires & Simonin (2006) [100]. Ou alors nous pouvons imaginer une paroi rugueuse encore plus réaliste en supposant une corrélation entre les deux angles de rugosité lors du tirage stochastique dans les directions longitudinale et latérale. Ces investigations permettraient de mieux analyser les effets de redistribution dus aux rebonds irréguliers sur des rugosité 3D.

Un autre aspect intéressant à explorer est d'une part l'étude de l'influence des rugosités sur le mouvement de rotation des particules et d'autre part la dérivation de conditions aux limites eulériennes pour ce mouvement de rotation des particules tel qu'il avait été examiné par Sakiz (1999) [82] dans le cadre des parois lisses.

Bibliographie

- [1] V. M. Alipchenkov, L. I Zaichik, and O. Simonin. A comparison of two approaches to derivation of boundary conditions for continuous equations of particle motion in turbulent flow. *High Temperature*, 39(1) :104–110, 2001.
- [2] L. Arkeryd and A. Nouri. The stationary boltzmann equation in the slab with given weighted mass for hard and soft forces. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 4 :533–556, 1998.
- [3] E. Balaras, C. Benocci, and U. Piomelli. Two-layer approximate boundary conditions for large-eddy simulations. *AIAA Journal*, 34(6) :1111–1119, 1996.
- [4] J. Bardina, J. H. Ferziger, and W. C. Reynolds. Improved turbulence models based on large-eddy simulation of homogeneous, incompressible turbulent flows. *Technical Report TF-19, Stanford University*, 1983.
- [5] M. Benson, T. Tanaka, and J. K. Eaton. Effects of wall roughness on particle velocities in a turbulent channel flow. *Transactions of the ASME*, 127 :250–256, 2005.
- [6] G. A. Bird. *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows*, volume 42. Oxford engineering science series, 1998.
- [7] W. Blake. Turbulent boundary-layer wall-pressure fluctuations on smooth and rough wall. *J. Fluid Mech.*, 44 :637–660, 1970.
- [8] A. Boëlle. Validation d’un modèle à deux fluides appliqué à la simulation des lits fluidisés denses. *Thèse, EDF*, 1997.
- [9] H. Brenner. The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface. *Chem. Engng. Sci.*, 16 :242–251, 1961.

-
- [10] Y. A. Buyevich. Statistical hydromechanics of disperse systems. part1. *J. Fluid Mech.*, 49(3) :489–507, 1971.
- [11] N. Caraman, J. Borée, and O. Simonin. Effect of collisions on the dispersed phase fluctuation in a dilute tube flow : Experimental and theoretical analysis. *Phys. of Fluids*, 15(12), 2003.
- [12] D. J. Carlson and R. F. Hoglund. Particle drag and heat transfer in rocket nozzles. *AIAA J.*, 2 :1980–1984, 1964.
- [13] C. Cercignani. *Theory and application of the Boltzmann equation*. Elsevier, 1975.
- [14] F. H. Clauser. The turbulent boundary layer. *Advances in Applied Mechanics*, IV :2–51, 1956.
- [15] R. Clift, J.R. Grace, and M.E. Weber. Bubbles, drops and particles. *Academic Press, New York*, 1978.
- [16] G. S. Constantinescu and K. D. Squires. Les and des investigations of turbulent flow over a sphere. *AIAA 2000-0540*, 1999.
- [17] C. T. Crowe, M. Sommerfeld, and Y. Tsuji. Fundamentals of gas-particle and gas-droplet flows. *CRC Press, Boca Raton, USA*, 1998.
- [18] J. W. Deardorff. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 41 :453–480, 1970.
- [19] I. V. Derevich and L. I Zaichik. Particle deposition from a turbulent. *Fluid Dynam.*, 23 :722–729, 1988.
- [20] D. Eskin. Modeling dilute gas-particle flows in horizontal channels with different wall roughness. *Chemical Eng. Science*, 60 :655–663, 2005.
- [21] P. Fede. Modélisation et simulation de l'influence de la turbulence sur les collisions dans les écoulements mono- et bi-solides. *Thèse, INP Toulouse*, 2004.
- [22] P. Fede and O. Simonin. Numerical study of the subgrid fluid turbulence effects on the statistics of heavy colliding particles. *Physics of Fluids*, 18, 2006.
- [23] TH. Frank, K.-P. Schade, and D. Petrak. Numerical simulation and experimental investigation of a gas-solid two-phase flow in a horizontal channel. *Int. J. Multiphase Flow*, 19(1) :187–198, 1993.

- [24] K. Fukagata, S. Zahrai, F. H. Bark, and S. Kondo. Effects of wall roughness in a gas-particle turbulent vertical channel flow. *Proc. 2nd Int. Symp. on Turbulence and Shear Flow Phenomena* (Eds. Lingborg et al.) KTH, Stockholm, II :117–122, 2001.
- [25] P. Février. Etude numérique des effets de concentration préférentielle et de corrélation spatiale entre vitesses de particules solides en turbulence homogène isotrope stationnaire. *Thèse, INP Toulouse*, 2000.
- [26] P. Février and O. Simonin. Constitutive relations for fluid-particle velocity correlations in gas-solid turbulent flows. *Third Int. Conference on Multiphase Flow, Lyon, France, June 8-12, 1998*.
- [27] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, and W. H. Cabot. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids A*, 3(7) :1760–1765, 1991.
- [28] A. J. Goldman, R. G. Cox, and H. Brenner. Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall - i. motion through a quiescent fluid. *Chem. Engng. Sci.*, 22 :637–651, 1967.
- [29] A. J. Goldman, R. G. Cox, and H. Brenner. Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall - ii. couette flow. *Chem. Engng. Sci.*, 22 :653–660, 1967.
- [30] G. Grant and W. Tabakoff. Erosion prediction in turbomachinery resulting from environmental solid particles. *J. Aircraft*, 12 :471–478, 1975.
- [31] A. Haider and O. Levenspiel. Drag coefficient and terminal velocity of spherical and nonspherical particles. *Powder Technology*, 58 :63–70, 1989.
- [32] J. M. Hamilton, J. Kim, and F. Waleffe. Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures. *J. Fluid Mech.*, 287 :317–348, 1995.
- [33] J. He and O. Simonin. Modélisation numérique des écoulements turbulents gaz-solides en conduite verticale. *Rapport, EDF*, 1994.
- [34] J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss, and R. B. Bird. *Molecular theory of gases and liquids*. John Wiley & Sons, 1964.
- [35] K. Horiuti. Comparison of conservative and rotational forms in large eddy simulation of turbulent channel flow. *J. Comp. Physics*, 71 :343–370, 1987.

-
- [36] G. Houghton. Particle and fluid diffusion in homogeneous fluidization. *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, 5 :153, 1966.
- [37] K. Hui, P. K. Haff, J. E. Ungar, and R. Jackson. Boundary conditions for high-shear grain flows. *J. Fluid. Mech.*, 145 :223–233, 1984.
- [38] J. T. Jenkins. Boundary conditions for rapid granular flow : flat, frictional walls. *Transactions of the ASME*, 59 :120–126, 1992.
- [39] J. T. Jenkins and M. Y. Louge. On the flux of fluctuation energy in a collisional grain flow at a flat, frictional wall. *Phys. Fluids*, 9 :2835–2840, 1997.
- [40] J. T. Jenkins and M. W. Richman. Boundary conditions for plane flows of smooth, nearly elastic, circular disks. *J. Fluid. Mech.*, 171 :53–69, 1986.
- [41] J. Jiménez. The physics of wall turbulence. *Physica A*, 263 :252–262, 1999.
- [42] J. Jiménez. Turbulent flows over rough walls. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36 :173–196, 2004.
- [43] J. Jiménez and P. Moin. The minimal flow unit in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, 225 :213–240, 1991.
- [44] P. C. Johnson and R. Jackson. Frictional-collisional constitutive relations for granular materials, with application to plane shearing. *J. Fluid. Mech.*, 145 :223–233, 1987.
- [45] D. Kaftori, G. Hetsroni, and S. Banerjee. Particle behavior in the turbulent boundary layer. i. motion, deposition and entrainment. *Phys. Fluids*, 7(5), 1995.
- [46] D. Kaftori, G. Hetsroni, and S. Banerjee. Particle behavior in the turbulent boundary layer. ii. velocity and distribution profiles. *Phys. Fluids*, 7(5), 1995.
- [47] O. Kannengieser. Modélisation statistique du rebond de particules avec une paroi rugueuse en écoulement turbulent gaz-solide. *Mémoire de master, IMFT*, 2006.
- [48] O. Kannengieser, N. A. Konan, and O. Simonin. Influence of multiple particle-wall collisions on rough wall bouncing model. *6th Int. Conference on Multiphase Flow, ICMF 2007, Leipzig, Germany, July 9-13, 2007*.

- [49] M. Khalij, B. M. S. Sagir, and B. Oesterlé. Evaluation of a set of dispersed phase wall boundary conditions in two-fluid modeling. *6th Int. Conference on Multiphase Flow, ICMF 2007, Leipzig, Germany, July 9-13, 2007*.
- [50] H. T. Kim, S. J. Kline, and W. C. Reynolds. The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 50 :133–160, 1971.
- [51] J. Kim and P. Moin. Application of fractional-step method to incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 59 :308–232, 1985.
- [52] J. Kim, P. Moin, and R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 177 :133–166, 1987.
- [53] S. J. Kline, W. C. Reynolds, F. A. Schraub, and P. W. Runstadler. The structure of turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 30 :741–773, 1967.
- [54] N. A. Konan, S. Lain, O. Simonin, and M. Sommerfeld. Comparison between euler-euler and euler-lagrange computations of gas-solid turbulent flow in a horizontal channel with different wall roughness. *ASME Joint U.S. - European Fluids Enigneering Summer Meeting, Miami, Floride, USA, July 17-20, 2006*.
- [55] H.-P. Kreplin and H. Eckelmann. Behavior of the three fluctuating velocity components in the wall region of a turbulent channel flow. *Phys. Fluids*, 22(7) :1233–1239, 1979.
- [56] J. Kussin and M. Sommerfeld. Experimental studies on particle behaviour and turbulence modification in horizontal channel flow with different wall roughness. *Experiments in Fluids*, 33 :143–159, 2002.
- [57] S. Lain, M. Sommerfeld, and J. Kussin. Experimental studies and modelling of four-way coupling particle-laden horizontal channel flow. *Int. J. of Heat and Fluid Flow*, 23 :647–656, 2002.
- [58] S. Lain, M. Sommerfeld, and J. Kussin. Experimental and numerical studies of pressure drop in particle-laden horizontal channel flow. *3rd International symposium on two-phase modelling and experimentation, Pisa, 22-24 Sept, 2004*.
- [59] J. Laviéville. Simulations numériques et modélisations des interactions entre l’entraînement par la turbulence et les collisions interparticulaires en écoulements gaz-solides. *Thèse, EDF, 1997*.

-
- [60] V. G. Levich and V. P. Myasnikov. Kinetic model of boiling bed. *Prikl. Math. Mekh.*, 30 :467, 1966.
- [61] S. Matsumoto and S. Saito. Monte carlo simulation of horizontal pneumatic conveying based on the rough wall model. *J. Chem. Engng Japan*, 3(1) :223–230, 1970.
- [62] S. Matsumoto and S. Saito. On the mechanism of suspension of particles in horizontal pneumatic conveying : Monte carlo simulation based on the irregular bouncing model. *J. Chem. Engng Japan*, 3(1) :83–92, 1970.
- [63] C. Meneveau, T. Lund, and W. Cabot. A lagrangian dynamic subgrid-scale model of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 319 :353–385, 1996.
- [64] P. Moin and J. Kim. Numerical investigation of turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, 118 :341–377, 1982.
- [65] J. A. Murray, U. Piomelli, and J. M. Wallace. Spatial and temporal filtering of experimental data for a priori studies of subgrid-scale stresses. *Phys. Fluids*, 8(7) :1978–1980, 1996.
- [66] N. V. Nikitin, F. Nicoud, B. Wasistho, K. D. Squires, and P. R. Spalart. An approach to wall modeling in large-eddy simulations. *Physics of Fluids*, 12(7) :1629–1632, 2000.
- [67] J. Nikuradse. Strömungsgesetze in rauhen rohren. *VDI-Forsch. (Engl. transl. 1950. Laws of flow in rough pipes. NACA TM 1292)*, (361), 1933.
- [68] B. Oesterlé. Numerical prediction of particle trajectories in a pipe bend. *In Proceedings of the 5th Workshop on Two-phase Flow Predictions, Erlangen*, pages 148–155, 1991.
- [69] J. O’Neil and C. Meneveau. Subgrid-scale stresses and their modelling in a turbulent plane wake. *J. Fluid Mech.*, 349 :253–293, 1997.
- [70] J. A. Ottjes. Digital simulation of pneumatic particle transport. *Chem. Eng. Sci.*, 33 :783–786, 1978.
- [71] R. Panton. Flow properties for the continuum viewpoint of a non-equilibrium gas-particle mixture. *J. Fluid Mech.*, 31 :273–303, 1968.
- [72] J. B. Perot. An analysis of the fractional step method. *Journal of Computational Physics*, 108 :51–58, 1993.

- [73] X. Pialat. Développement d'une méthode hybride eulérienne-lagrangienne pour la modélisation numérique de la phase dispersée dans les écoulements turbulents gaz-particules. *Thèse, SUPAERO-Toulouse*, 2007.
- [74] U. Piomelli and E. Balaras. Wall-layer models for large-eddy simulations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 34 :349–374, 2002.
- [75] U. Piomelli, W. H. Cabot, P. Moin, and S. Lee. Subgrid-scale backscatter in turbulent and transitional flows. *Phys. Fluids A*, 3(7) :1766–1771, 1991.
- [76] U. Piomelli, J. Ferziger, and P. Moin. New approximate boundary conditions for large eddy simulations of wall-bounded flows. *Phys. Fluids*, 1(6) :1061–1068, 1989.
- [77] U. Piomelli, P. Moin, and J. H. Ferziger. Model consistency in large eddy simulation of turbulent channel flows. *Phys. Fluids*, 31(7) :1884–1891, 1988.
- [78] S. B. Pope. *Turbulent flows*. Cambridge University Press, 2000.
- [79] M. W. Reeks. On a kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows. *Phys. Fluids A*, 3 :446–456, 1991.
- [80] S. K. Robinson. Coherent motions in the turbulent boundary layer. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 23 :601–639, 1991.
- [81] P. Sagaut. *Large eddy simulation for incompressible flows*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998.
- [82] M. Sakiz. Simulation numérique lagrangienne et modélisation eulérienne d'écoulement diphasiques gaz-particules en canal vertical. *Thèse, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées*, 1999.
- [83] M. Sakiz and O. Simonin. Development and validation of continuum particle wall boundary conditions using lagrangian simulation of a vertical gas/solid channel flow. *3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference, July 18-23, San-Francisco, Colifornie, USA, (7898)*, 1999.
- [84] K.-P Schade and Th. Hädrich. Investigation of influence of wall roughness on particle-wall collision. *3th International conference on multiphase flow, ICMF'98, Lyon, France, June 8-12*, 1998.
- [85] L. Schiller and A. Nauman. A drag coefficient correlation. *V. D. I. Zeitung.*, 77 :318–320, 1935.

-
- [86] H. Schlichting. Boundary layer theory. *New York, McGraw-Hill, 6th Ed.*, 1968.
- [87] U. Schumann. Subgrid scale model for finite difference simulations of turbulent flows in plane channels and annuli. *J. Comp. Physics*, 18 :376–404, 1975.
- [88] O. Simonin. Prediction of the dispersed phase turbulence in particulate laden jet. *Fourth Int. Symp. on Gas-Solid Flows, ASME FED*, 121 :197–206, 1991.
- [89] O. Simonin. Continuum modelling of dispersed two-phase flows. *Combustion and Turbulence in Two-Phase Flows, Lecture Series 1996-02, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Rhode Saint Genèse, Belgium*, 1996.
- [90] O. Simonin, E. Deutsch, and M. Boivin. Large eddy simulation and second-moment closure model of particle fluctuating motion in two-phase turbulent shear flows. *Turbulent Shear Flow 9, Springer, Heidelberg. In : Durst, F., Kasagi, N., Launder, B.E., Schmidt, F.W., Whitelaw, J.H. (Eds.)*, 1995.
- [91] O. Simonin, E. Deutsch, and J. P. Minier. Eulerian prediction of the fluid/particle correlated motion in turbulent dispersed two-phase flows. *Applied Scientific Research*, 51 :275–283, 1993.
- [92] O. Simonin and J. He. Eulerian prediction on the particle behaviour in a turbulent boundary layer. *6th Two-Phase Flow Predictions, Erlangen, March 30 - April 2*, pages 154–165, 1992.
- [93] O. Simonin, Q. Wang, and K. D. Squires. Comparison between two-fluid model predictions and large eddy simulation results in a vertical gas-solid turbulent channel flow. *ASME Fluid Engineering Division Summer Meeting, FEDSM'97, June 22-26*, 1997.
- [94] J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations. i- the basic experiment. *Monthly Weather Review*, 91(3), 1963.
- [95] A. Soldati. Particles turbulence interactions in boundary layers. *ZAMM-J. Appl. Math. Mech.*, 85, 2005.
- [96] M. Sommerfeld. Modelling of particle-wall collision in confined gas-particle flows. *Int. J. Multiphase Flow*, 18(6) :905–926, 1992.
- [97] M. Sommerfeld. Analysis of collision effects for turbulent gas-particle flow in a horizontal channel : Part i. particle transport. *Int. J. Multiphase Flow*, 29 :675–699, 2003.

BIBLIOGRAPHIE

- [98] M. Sommerfeld and N. Huber. Experimental analysis and modelling of particle-wall collisions. *Int. J. Multiphase Flow*, 25 :1457–1489, 1999.
- [99] M. Sommerfeld and J. Kussin. Wall roughness effects on pneumatic conveying of spherical particles in a narrow horizontal channel. *Powder Technology*, 142 :180–192, 2004.
- [100] Kyle D. Squires and O. Simonin. Les-dps of the effect of wall roughness on dispersed-phase transport in particle-laden turbulent channel flow. *Int. J. of Heat and Fluid Flow*, 2006.
- [101] G. G. Stokes. On the effect of the internal frictions of fluids on the motion of pendulums. *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, 9 :8–106, 1851.
- [102] C. K. W. Tam. The drag on a cloud of spherical particles in low reynolds number flow. *J. Fluid Mech.*, 38 :537–546, 1969.
- [103] T. L. Thompson and N. N. Clark. A holistic approach to particle drag prediction. *Powder Technology*, 67 :57–66, 1991.
- [104] L.B. Torobin and W.H. Gauvin. The drag coefficient of single spheres moving in steady and accelerated motion in a turbulent fluid. *AIChE J.*, 7 :615–619, 1961.
- [105] Yu. M. Tsirkunov and S. V. Panfilov. Modelling of particle-wall interaction in two-phase flows at moderate and high particle impact velocity. *Third Int. Conference on Multiphase Flow, ICMF'98, Lyon, France, June 8-12, 1998*.
- [106] Y. Tsuji, Y. Morikawa, T. Tanaka, N. Nakatsukasa, and M. Nakatani. Numerical simulation of gas-solid two-phase flow in a two-dimensional horizontal channel. *Int. J. Multiphase Flow*, 13 :671–684, 1987.
- [107] Y. Tsuji, T. Oshima, and Y. Morikawa. Numerical simulation of pneumatic conveying in horizontal pipe. *KONA*, 3 :38–51, 1985.
- [108] W. S. Uijtewaal and R. V. A. Oliemans. Particle dispersion and deposition in direct numerical simulation and large eddy simulation of vertical pipe flows. *Phys. Fluids*, 1996.
- [109] C. Villani. A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. *Handbook of Math. Fluid Dynamics*, 2002.

- [110] O. R. Walton. Granular solid flow project. *Quarterly Report, January-March 1988, UCID-20297-88-1, Lawrence Livermore National Laboratory*, 1998.
- [111] Q. Wang and K. D. Squires. Large eddy simulation of particle deposition in a vertical turbulent channel flow. *Int. J. Multiphase Flow*, 22 :667–683, 1996.
- [112] Q. Wang and K. D. Squires. Large eddy simulation of particle-laden turbulent channel flow. *Phys. Fluids*, 8(5) :1207–1223, 1996.
- [113] Q. Wang, K. D. Squires, and O. Simonin. Large eddy simulation of turbulent gas-solid flows in a vertical channel and evaluation of second-order models. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 19 :505–511, 1998.
- [114] J. B. Young and T. J. Hanratty. Trapping of solid particles at a wall in a turbulent flow. *AIChE Journal*, 37(10), 1991.
- [115] L. I. Zaichik and V. M. Alipchenkov. Statistical models for predicting particle dispersion and preferential concentration in turbulent flows. *Inter. J. of Heat and Fluid Flow*, 26 :416–430, 2005.
- [116] Xia Zhang and Lixing Zhou. Simulation of gas-particle channel flows using a two-fluid particle-wall collision model accounting for wall roughness. *5th International conference on multiphase flow, ICMF'04, Yokohama, Japan, May 30 - June 4, paper Number 162*, 2004.

Publications

- Konan, N. A., Simonin, O. and Squires, K. D. "*Rough wall boundary condition derivation for particle continuum equations : validation from LES/DPS of gas-solid turbulent channel flow*". In Proceedings of FEDSM2006 ASME Joint U.S.-European Fluids Engineering Summer Meeting, Miami, Florida, USA, July 17-20 (2006)

- Kannengieser, O., Konan, N. A. and Simonin, O. "*Influence of multiple particle-wall collisions on rough wall bouncing model*". 6th Int. Conference on Multiphase Flow, ICMF 2007, Leipzig, Germany, July 9-13 (2007)

- Konan, A., Badarayani, S., Simonin, O. and Squires, K. "*LES/DPS of Horizontal Gas-Solid Channel Flow with Particle-Particle Collision and Wall Roughness Effects*". 6th Int. Conference on Multiphase Flow, ICMF 2007, Leipzig, Germany, July 9-13 (2007)

FEDSM2006-98267

ROUGH WALL BOUNDARY CONDITION DERIVATION FOR PARTICLE CONTINUUM EQUATIONS : VALIDATION FROM LES/DPS OF GAS-SOLID TURBULENT CHANNEL FLOW

N. A. Konan

Institut de Mécanique des Fluides
UMR 5502 CNRS/INPT/UPS
Allée du Professeur Camille Soula
31400 Toulouse, France
konan@imft.fr

O. Simonin

Institut de Mécanique des Fluides
UMR 5502 CNRS/INPT/UPS
Allée du Professeur Camille Soula
31400 Toulouse, France
simonin@imft.fr

K. D. Squires

Department of Mechanical and
Aerospace Engineering
Arizona State University,
Tempe, Arizona 85287, USA
squires@asu.edu

ABSTRACT

This paper presents a theoretical approach leading to the establishment of practical rough wall boundary conditions within the framework of continuum approach for the dispersed phase simulation in two-phase flows. The study is based on a similar statistical description of the rebounds on the wall adopted by Sakiz et al. [1] and take into account "the shadow effect" as proposed by Sommerfeld et al [2]. The validity of these eulerian rough wall boundary condition formulations is checked by carrying out LES of carrier phase flow in channel and coupled with DPS, with a given wall roughness standard deviation.

INTRODUCTION

Current industrial manufacturing refer to devices that have very small dimensions in which run out complex multiphase flows. These flows can be considered as a mixing of gas, particles, drops, bubbles, ..., whose their flows are complicated to predict. In the case of two-phase flows, where the motion of particles is governed by a number of physical effects, such as turbulence, gravity, lift forces and particle-wall collisions; a well prediction of dispersed phase needs to know properly the wall-particle collision mechanisms and take wall as rough.

Indeed, Sommerfeld et al. [2]- [3] experimental studies showed that the behavior of particles was considerably modified after a rebound on a rough wall, which leads in a re-dispersion

of particles in horizontal pipe and tends to increase the wall collision frequency. Their measurements [4] have allowed to show the effect of roughness on pressure loss, particle mass flux, particle mean and fluctuating velocities along a narrow channel. All these studies have allowed Sommerfeld to understand particle-wall collision process and thus to propose a model which takes into account wall roughness that he so-called "*shadow effect*" [5]. The above similar effects have been observed by Squires et al. [6], in their LES/DPS simulations, in which the particle-wall collisions have been treated by Sommerfeld bouncing model. In the framework of two-fluid model approach, Zhang and Zhou [7] simulations show that a good representation of wall roughness leads to more convincing results. With a model based on the kinetic theory of granular flow, Eskin [8] incorporates wall roughness in boundary conditions by introducing the tangential particle restitution coefficient defined as the ratio of the axial components of the particle velocity before and after a collision. His results validated by comparison to lagrangian results and experimental databases of Sommerfeld confirm the wall roughness importance in boundary conditions.

In this study, we propose firstly, a formalism based on a pdf approach, which takes wall roughness effects into account in order to close different moments at wall, within an Euler / Euler model framework. We restrict the present study to the only translation motion of the particles and hence, we do not take into account their rotation. To check the validity of these rough wall

boundary conditions, we have carried out lagrangian simulations for particles and LES for fluid in a narrow vertical channel. In the last section, we discuss of Sommerfeld particle-wall collisions process.

NOMENCLATURE

f_p^-	velocity distribution of incident particles to the wall
f_p^+	velocity distribution of reflected particles to the wall
n_p	particle number density to the wall
n_p^-	incident particle number density to the wall
n_p^+	reflected particle number density to the wall
U_p^-	streamwise mean velocity of incident particles
\underline{c}_p	particle velocity vector
U_p, V_p	streamwise and wall-normal velocity components
α^-	incidence angle of particle
α^+	rebound angle of particle
γ	wall roughness angle

PDF APPROACH OF PARTICLE BOUNCING

Generalities

PDF approach for the description of dispersed phase is based on an analogy between particles motion in a turbulent gas-solid flow and gas molecules motion (Buyevich [9]). Its principle consists to introduce a probability density function (pdf) which follows a Boltzmann type equation and which accounts for the interactions of the fluid on the particles, the influence of the external fields (gravity) and interparticle collisions (Simonin [10]). This equation is then used to establish equations governing the first moments (particle number density, particle mean velocities and particle kinetic stresses) [10] of translation velocities. These continuum equations of particles motions described by a complex PDE system require in addition an adequate mathematical formulation of boundary conditions. These boundary conditions may be either Dirichlet or flux types.

We adopt a similar approach than the one proposed by Sakiz & Simonin [1] for derivation of smooth wall boundary conditions. This approach consists in the breaking of the distribution f_p of the particles near the wall into three contributions f_p^+ , f_p^- and g_p^0 , which are respectively defined on ensembles $D^+ = \{\underline{c}_p^+ \in \mathbb{R}^3 / \underline{c}_p^+ \cdot \underline{n} > 0\}$, $D^- = \{\underline{c}_p^- \in \mathbb{R}^3 / \underline{c}_p^- \cdot \underline{n} < 0\}$ and $\partial D^0 = \{\underline{c}_p^0 \in \mathbb{R}^3 / \underline{c}_p^0 \cdot \underline{n} = 0\}$ such as :

$$\forall \underline{c}_p \in \mathbb{R}^3, \\ f_p(\underline{c}_p) = H(\underline{c}_p \cdot \underline{n}) f_p^+(\underline{c}_p) + H(-\underline{c}_p \cdot \underline{n}) f_p^-(\underline{c}_p) + \delta(\underline{c}_p \cdot \underline{n}) g_p^0(\underline{c}_p) \quad (1)$$

where H is Heaviside function defined as :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

and \underline{n} the wall-normal unit vector turned towards the core of the flow (see fig.1).

We assume that $f_p^- \in \mathcal{L}^1(D^-)$, $f_p^+ \in \mathcal{L}^1(D^+)$ and $g_p^0 \in \mathcal{L}^1(\partial D^0)$. So f_p is summable on $D = \mathbb{R}^3$. In the following, we shall assume that the density of deposited particles ($\underline{c}_p \cdot \underline{n} = 0$) is equal to zero. Therefore : $g_p^0(\underline{c}_p) = 0$

The averages on D^- , D^+ and D , are written:

$$\langle \Psi \rangle_p^- = \frac{1}{n_p^-} \int_{D^-} \Psi(\underline{c}_p^-) f_p^-(\underline{c}_p^-) d\underline{c}_p^- \quad \text{with } n_p^- = \int_{D^-} f_p^-(\underline{c}_p^-) d\underline{c}_p^- \\ \langle \Psi \rangle_p^+ = \frac{1}{n_p^+} \int_{D^+} \Psi(\underline{c}_p^+) f_p^+(\underline{c}_p^+) d\underline{c}_p^+ \quad \text{with } n_p^+ = \int_{D^+} f_p^+(\underline{c}_p^+) d\underline{c}_p^+ \\ n_p \langle \Psi \rangle_p = n_p^- \langle \Psi \rangle_p^- + n_p^+ \langle \Psi \rangle_p^+ \quad \text{and } n_p = n_p^- + n_p^+ \quad (3)$$

Statistic Description of Rebounds

The probable number flux of particles moving away from a wall surface element $d\underline{\sigma}$ with a velocity between \underline{c}_p and $\underline{c}_p + d\underline{c}_p$ during a small time-step dt is:

$$d\Phi^+(\underline{x}, \underline{c}_p, t) = f_p^+(\underline{x}, \underline{c}_p, t) \underline{c}_p \cdot \underline{n} d\underline{\sigma} d\underline{c}_p dt \quad (4)$$

And the probable number flux of particles approaching the wall is:

$$d\Phi^-(\underline{x}, \underline{c}_p, t) = -f_p^-(\underline{x}, \underline{c}_p, t) \underline{c}_p \cdot \underline{n} d\underline{\sigma} d\underline{c}_p dt \quad (5)$$

Let us introduce the transition probability per rebound, $R(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+) d\underline{c}_p^+$, which represents the probability that an incident particle with a velocity \underline{c}_p^- rebounds with a velocity between \underline{c}_p^+ and $\underline{c}_p^+ + d\underline{c}_p^+$.

Assuming no deposition of particles, all the incident particle will be reflected with a positive normal-velocity ($\underline{c}_p^+ \cdot \underline{n} > 0$). This condition leads to :

$$\int_{D^+} R(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+) d\underline{c}_p^+ = 1 \quad (6)$$

That gives, in the case where there are not deposit of particles during the flow, the following relation :

$$\forall \underline{c}_p^+ \in D^+, \\ f_p^+(\underline{c}_p^+) \underline{c}_p^+ \cdot \underline{n} = \int_{D^-} f_p^-(\underline{c}_p^-) |\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}| R(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+) d\underline{c}_p^- \quad (7)$$

The functions under the integration operators take their values in $\overline{\mathbb{R}^+}$. Consequently, we may apply the Fubini theorem of integrals inversion in all expressions.

Rough Wall Bouncing Model

The development of a numerical model which accounts for the effects of the wall roughness requires some knowledge of the microscopic structure. This structure can be characterized by several parameters whose the most significant are the height and the correlation length scale of roughness. With these informations, it is possible to build a virtual rough wall (Matsumoto et al. [11], Tsuji et al. [12]). Matsumoto suggests to approach the rough wall structure by a sinusoid. Tsuji replaces the straight wall by a virtual wall inclined of an angle γ at the time of the collision between the particle and the wall. From his viewpoint, if the particle incidence angle is less than a certain specified value, the particle hits the virtual wall; and it collides to a smooth wall otherwise (*Abnormal Bouncing Model*). Sommerfeld [13] uses this idea of virtual wall introduced by Tsuji as a support of his model. With these same relevant parameters, Sommerfeld proposes a stochastic modelling of the rough wall by determining the range of possible values of roughness angle γ according to the particle size.

Sommerfeld's model Unlike Tsuji's model in which a particle which hits wall with an incidence angle upper of a given value "sees" a smooth wall, Sommerfeld suggests that for each impact angle of particle, a wall roughness angle γ should be randomly chosen with respect to a probabilistic distribution law. In his numerical study [13], a uniform distribution law for the slope γ of the virtual wall between $\pm\gamma_{\max}$ was tested. That leads to improve results in his simulations which respect to available experimental results in comparison to the model of Tsuji. In a later study [5], in which Sommerfeld compares Matsumoto models, his model with uniform distribution, and the same model with a gaussian distribution, of zero mean value and standard deviation $\Delta\gamma$ which depends on wall roughness structure and on particle size; he shows that his model coupled with gaussian distribution improves the results and takes more account for the roughness effects. Sommerfeld [2] notices that the incident particles can only "see" a given range of roughness angle γ with respect to the impact angle. Therefore, the roughness angle distribution function is sometimes limited to a "truncated gaussian". Sommerfeld thus gives evidence the so-called "shadow effect" (especially for small incidence angles α^- ; see fig. 1 for incidence angles α^-). His procedure to account for this mechanism in the simulations is as follows :

- The roughness angle is sampled from a gaussian distribution function with a zero mean value.
- If a negative roughness angle with an absolute value being than α^- is sampled, an unphysical collision results, namely the particle would come from behind the wall and hence a new roughness angle is sampled.

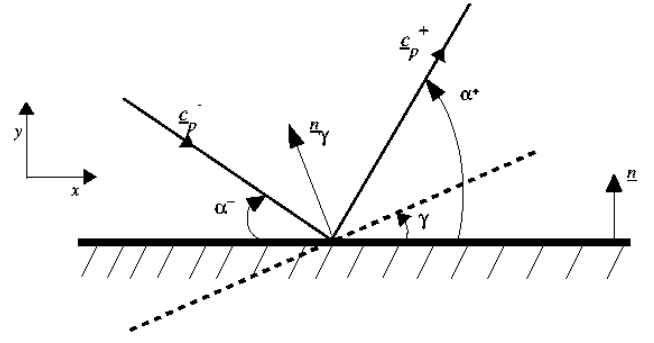


Figure 1. Particle rebound on virtual wall inclined of γ

Model setup Based on numerical (Euler / Lagrange) and experimental works of Sommerfeld et al. ([5], [2] and [14]), each impacting particle collides a inclined smooth wall whose the slope angle γ is sampled by statistic distribution law. Therefore, the transition probability per rebound $R(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+) d\underline{c}_p^+$ can be modeled as follows:

$$R(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R_\gamma(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+) P_r(\gamma|\underline{c}_p^-) d\gamma \quad (8)$$

where $R_\gamma(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+)$ is the transition probability per determinist rebound on smooth wall such as:

$$R_\gamma(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+) = \delta(\underline{c}_p^+ - \Phi_\gamma(\underline{c}_p^-)) \quad (9)$$

in which the bijective application Φ_γ from D^- to D^+ associates to all $\underline{c}_p^- \in D^-$ a $\underline{c}_p^+ = \Phi_\gamma(\underline{c}_p^-)$ is analytically defined by the rebound laws of one particle on a smooth wall inclined with angle γ with respects to an horizontal wall. For example, considering only sliding collisions :

$$\begin{aligned} \Phi_\gamma(\underline{c}_p^-) &= \underline{c}_p^- - \underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma (1 + e_w) (\underline{n}_\gamma - \mu_w \underline{t}_\gamma) \\ \underline{t}_\gamma &= \underline{v}_{p,\gamma} / |\underline{v}_{p,\gamma}| \\ \underline{v}_{p,\gamma} &= \underline{c}_p^- - (\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) \underline{n}_\gamma \end{aligned} \quad (10)$$

where e_w and μ_w are respectively the normal restitution and friction coefficients for wall-particle interaction, \underline{n}_γ the normal vector to virtual wall.

For elastic bouncing without dynamic friction ($e_w = 1, \mu_w = 0$):

$$\Phi_\gamma(\underline{c}_p^-) = \underline{c}_p^- - 2(\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) \underline{n}_\gamma \quad (11)$$

And $P_r(\gamma|\underline{c}_p^-)$ in (8) is the probability that a given incident particle with a velocity \underline{c}_p^- impacts on a random virtual wall inclined of an angle γ .

By taking into account the "shadow effect" such as proposed by Sommerfeld [2], the probability $P_r(\gamma|\underline{c}_p^-)$ is written :

$$P_r(\gamma|\underline{c}_p^-) = \lambda(\underline{c}_p^-) H(-\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) H(\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}) P_r(\gamma) \quad (12)$$

where:

$$\lambda(\underline{c}_p^-) = \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} H(-\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) H(\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}) P_r(\gamma) d\gamma \right]^{-1} \quad (13)$$

is the normalization coefficient of the pdf conditioned by the incident velocity of the particle. This coefficient is obtained from relations (6), (8) and (12).

The first Heaviside function of (12) conditions the realisability of virtual wall angle by the velocity of the incident particle : a particle must impact the wall while coming from the flow ($\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma < 0$). The second one ensures the return of particle towards the flow after the rebound ($\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n} > 0$). $P_r(\gamma)$ is the unconditional random distribution law of wall virtual angle.

For a Gaussian distribution:

$$P_r(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\gamma^2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\Delta\gamma^2}\right) \quad (14)$$

with the standard deviation defined by :

$$\Delta\gamma^2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \gamma^2 P_r(\gamma) d\gamma \quad (15)$$

Figure 2 shows the conditioned pdf of the roughness angle γ given by the equation (12) for low roughness ($\Delta\gamma = 1.0^\circ$) and high roughness ($\Delta\gamma = 6.5^\circ$) cases from Sommerfeld studies [4] and [15].

Finally the transition probability per rebound introduced previously is written under the general form :

$$R(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+) = \lambda(\underline{c}_p^-) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \delta(\underline{c}_p^+ - \underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-)) \mathcal{H}(\underline{c}_p^-, \underline{n}, \underline{n}_\gamma) P_r(\gamma) d\gamma \quad (16)$$

where :

$$\mathcal{H}(\underline{c}_p^-, \underline{n}, \underline{n}_\gamma) = H(-\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) H(\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}) \quad (17)$$

In the case of an elastic rebound, (17) is written :

$$\mathcal{H}(\underline{c}_p^-, \underline{n}, \underline{n}_\gamma) = H(\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}) = H(-\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_{2\gamma}) \quad (18)$$

This formulation of $R(\underline{c}_p^- \rightarrow \underline{c}_p^+)$ is introduced in equation (7) and the result is used in the following section.

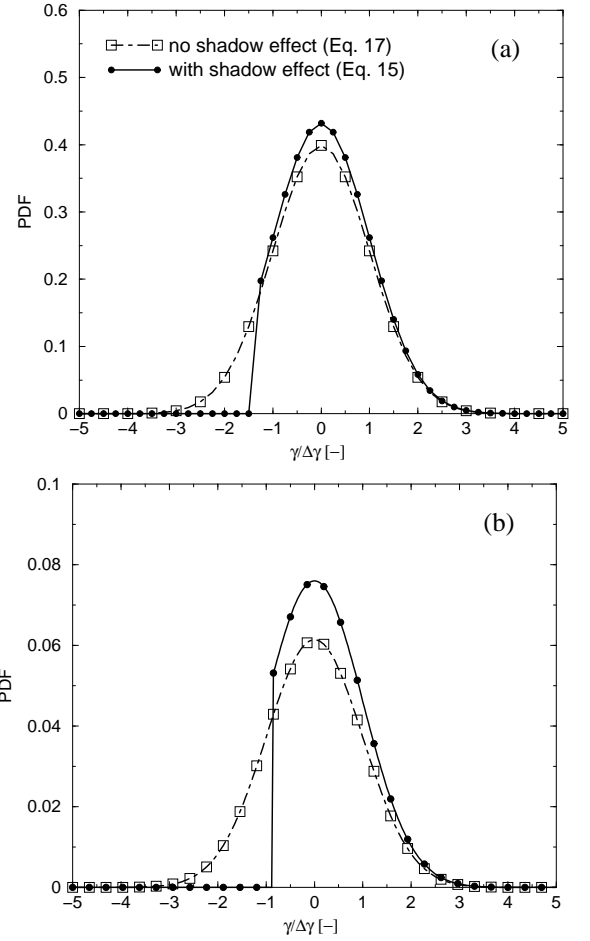


Figure 2. Roughness angle distribution viewed by incident particles with an impact angle α^- . Case (a) : $\Delta\gamma = 1.0^\circ$ (Low Roughness), $\alpha^- \approx 2.86^\circ$ and Case (b) : $\Delta\gamma = 6.5^\circ$ (High Roughness), $\alpha^- \approx 11.31^\circ$.

EULERIAN WALL BOUNDARY CONDITIONS

In the following, in order to simplify the notations, we consider horizontal walls such as the wall-normal unit vector $\underline{n} = (0, 1, 0)$. Following Sakiz & Simonin [1], wall boundary conditions are expressed either by given values of the variables to the wall (Dirichlet condition) for the computed odd order moments of the wall-normal velocity v_p : V_p , $\langle u'_p v'_p \rangle_p$ and $\langle v'_p w'_p \rangle_p$, or by given wall-normal fluxes for the computed even order moments of v_p : n_p , $n_p U_p$, $n_p W_p$, $n_p \langle u'_p u'_p \rangle_p$, $n_p \langle v'_p v'_p \rangle_p$, $n_p \langle w'_p w'_p \rangle_p$ and $n_p \langle u'_p w'_p \rangle_p$, such fluxes are written : $n_p V_p$, $n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p$, $n_p \langle v'_p w'_p \rangle_p$, $n_p \langle u'_p u'_p \rangle_p$, $n_p \langle v'_p v'_p \rangle_p$, $n_p \langle w'_p w'_p \rangle_p$ and $n_p \langle u'_p v'_p w'_p \rangle_p$, respectively.

So, practical boundary conditions are obtained by deriving explicit forms of the odd order moments of v_p , in terms of given parameters and computed variables. In first step the odd order

moments are written in terms of the incident particle velocity correlations with the help of (7). Indeed, from (3), the correlations of the form $n_p \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p$ may be written as :

$$n_p \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p = n_p^- \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p^- + n_p^+ \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p^+ \quad (19)$$

From (7) and (16), we can derive:

$$n_p^+ \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p^+ = -n_p^- \langle \langle \Psi_p(\Phi_\gamma(\underline{c}_p^-)) | \underline{c}_p^- \rangle \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p^-$$

with :

$$\langle \Psi_p(\Phi_\gamma(\underline{c}_p^-)) | \underline{c}_p^- \rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Psi_p(\Phi_\gamma(\underline{c}_p^-)) P_r(\gamma | \underline{c}_p^-) d\gamma \quad (20)$$

Finally using (19) and (20), any correlations of the form $n_p \langle \Psi_p(\underline{c}_p) \underline{c}_p \cdot \underline{n} \rangle_p$ can be written in terms of incident particle averaging.

Application to Elastic Bouncing

To illustrate the methodology for the derivation of practical boundary conditions we consider elastic rebounds of particles with 2-D roughness effect, such as $\underline{n}_\gamma = (-\sin \gamma, \cos \gamma, 0)$. But, the derivation of boundary conditions for inelastic frictional rebounds with 3-D roughness effect is a direct extension of the proposed approach.

From relations (19) and (20), we obtain the wall boundary conditions summarised in Table 1.

These boundary conditions can be numerically computed for any given incident velocity distribution to the wall f_p^- . For instance, following Sakiz & Simonin [1], we can assume an half-gaussian PDF:

$$f_p^-(\underline{c}_p) = \frac{2n_p^- H(-c_{py})}{\sqrt{2\pi} \langle u_p^2 \rangle_p^- \sqrt{2\pi} \langle v_p^2 \rangle_p^- \sqrt{2\pi} \langle w_p^2 \rangle_p^-} \exp\left(-\frac{[c_{px} - U_p^-]^2}{2\langle u_p^2 \rangle_p^-} - \frac{c_{py}^2}{2\langle v_p^2 \rangle_p^-} - \frac{c_{pz}^2}{2\langle w_p^2 \rangle_p^-}\right) \quad (21)$$

But, such presumed form of f_p^- requires the modelling of even order moments of incident particle velocity v_p : n_p^- , U_p^- , $\langle u_p^2 \rangle_p^-$, $\langle v_p^2 \rangle_p^-$ and $\langle w_p^2 \rangle_p^-$, in terms of flow parameters and computed variables.

Therefore, we present a first order model based on an assumption of partial correlation between the roughness wall angle and the velocity fluctuations, in order to link more directly the odd order moment to the wall to the even order moments following the methodology proposed by Sakiz & Simonin [1].

Partial Correlation Modelling

For this purpose, let us introduce the average $\{\cdot\}_p^-$ based on incident particles flux to the wall per time unit, in order to

$n_p V_p = 0$
$n_p \langle u_p' v_p' \rangle_p = 2n_p^- \langle \langle \sin^2 \gamma \alpha^- \rangle (U_p + u_p') v_p' \rangle_p^- - 2n_p^- \langle \langle \sin \gamma \cos \gamma \alpha^- \rangle v_p' v_p' \rangle_p^-$
$n_p \langle v_p' w_p' \rangle_p = 0$
$n_p \langle u_p' v_p' w_p' \rangle_p = -2n_p^- \langle \langle \cos \gamma \sin \gamma \alpha^- \rangle v_p'^2 w_p' \rangle_p^- + 2n_p^- \langle \langle \sin^2 \gamma \alpha^- \rangle (u_p' + U_p) v_p' w_p' \rangle_p^- - n_p U_p \langle v_p' w_p' \rangle_p$
$n_p \langle u_p'^2 v_p' \rangle_p = -2n_p U_p \langle u_p' v_p' \rangle_p - n_p \langle v_p'^3 \rangle_p$
$n_p \langle v_p' w_p'^2 \rangle_p = 0$
$n_p \langle v_p'^3 \rangle_p = -n_p^- \langle \langle \sin^2(2\gamma) \alpha^- \rangle (U_p + u_p')^2 v_p' \rangle_p^- + n_p^- \langle \langle \sin(4\gamma) \alpha^- \rangle (U_p + u_p') v_p'^2 \rangle_p^- + n_p^- \langle \langle \sin^2(2\gamma) \alpha^- \rangle v_p'^3 \rangle_p^-$

Table 1. Rough Wall Boundary Conditions with 2-D Roughness Effects for Elastic Bouncing

approximate the expressions of the form $\langle \langle \phi(\gamma) | \alpha^- \rangle v_p \Psi_p \rangle_p^-$ by $\{\phi(\gamma)\}_p^- \langle v_p \Psi_p \rangle_p^-$, and defined by :

$$\{\phi(\gamma)\}_p^- = \frac{\langle \langle \phi(\gamma) | \alpha^- \rangle v_p \rangle_p^-}{\langle v_p \rangle_p^-}, \quad \langle \phi(\gamma) | \alpha^- \rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \phi(\gamma) P_r(\gamma | \alpha^-) d\gamma \quad (22)$$

The accuracy of this partial correlation assumption will be evaluated in the LES/DPS simulations.

With this partial correlation model and making the assumption of small values of roughness angle variance ($\Delta\gamma \ll 1$), relations of the Table 1 become those of Table 2.

Equations of Table 2 is not yet closed, because odd order moments of v_p are written in terms of incident even order moments of v_p : n_p^- , $\langle v_p v_p' \rangle_p^-$, $\langle v_p'^2 w_p' \rangle_p^-$ and $\langle u_p' v_p'^2 \rangle_p^-$ and of incident odd order moments: $\langle v_p' \rangle_p^-$, $\langle u_p' u_p' v_p' \rangle_p^-$ and $\langle v_p' v_p' v_p' \rangle_p^-$.

To estimate these incident even order moments which appear in equations of Table 2, we may use (19), (20) and the partial correlation model, and try to link incident correlation to full correlation (which should be available in the Eulerian computation). Thus we obtain the closure model presented in Table 3.

At this stage, it remains to calculate all incident even order moments of the wall-normal velocity v_p such as : n_p^- , $\langle u_p'^2 \rangle_p^-$, $\langle v_p' v_p' \rangle_p^-$, ..., in order to close completely the wall roughness model defined in Table 2. As we will discover it on n_p^- calculation in the next subsection, the modelling of these incident even moments is strongly linked to the full knowledge of rebound pdf

$n_p V_p = 0$
$n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p = 2n_p^- \{\gamma^2\}_p^- \langle (U_p + u'_p) v'_p \rangle_p^- - 2n_p^- \{\gamma\}_p^- \langle v'_p v'_p \rangle_p^-$
$n_p \langle v'_p w'_p \rangle_p = 0$
$n_p \langle u'_p v'_p w'_p \rangle_p = -n_p U_p \langle v'_p w'_p \rangle_p - 2n_p^- \{\gamma\}_p^- \langle v_p^2 w'_p \rangle_p^- + 2n_p^- \{\gamma^2\}_p^- \langle (u'_p + U_p) v'_p w'_p \rangle_p^-$
$n_p \langle u_p^2 v'_p \rangle_p = -2n_p U_p \langle u'_p v'_p \rangle_p - n_p \langle v_p^3 \rangle_p$
$n_p \langle v_p^2 w'_p \rangle_p = 0$
$n_p \langle v_p^3 \rangle_p = 4n_p^- \{\gamma\}_p^- \langle (U_p + u'_p) v_p^2 \rangle_p^- - 4n_p^- \{\gamma^2\}_p^- \langle (U_p + u'_p)^2 v'_p \rangle_p^- + 4n_p^- \{\gamma^2\}_p^- \langle v_p^3 \rangle_p^-$

Table 2. Rough Wall Boundary Conditions assuming Partial Correlation approximation and 2-D Roughness Effects for Elastic Bouncing

$n_p \langle v'_p v'_p \rangle_p = -2n_p^- \{\gamma\}_p^- \langle (U_p + u'_p) v'_p \rangle_p^- + 2n_p^- [1 - \{\gamma^2\}_p^-] \langle v'_p v'_p \rangle_p^-$
$n_p \langle u'_p v_p^2 \rangle_p = 2n_p^- [1 - 4\{\gamma\}_p^-] \langle (U_p + u'_p) v_p^2 \rangle_p^- - n_p U_p \langle v_p^2 \rangle_p - 2n_p^- \{\gamma\}_p^- \langle (U_p + u'_p)^2 v'_p \rangle_p^- + 2n_p^- \{\gamma\}_p^- \langle v_p^3 \rangle_p^-$
$n_p \langle v_p^2 w'_p \rangle_p = -2n_p^- \{\gamma\}_p^- \langle (U_p + u'_p) v'_p w'_p \rangle_p^- + 2n_p^- [1 - \{\gamma^2\}_p^-] \langle v_p^2 w'_p \rangle_p^-$

Table 3. Closure of Wall Boundary Conditions of Table 2.

f_p^+ , and so of the well understanding of particle-wall rebound mechanism.

Number Density of Incident Particles

By definition the number of particles near the wall is written:

$$n_p = n_p^- + n_p^+ \quad \text{with} \quad n_p^+ = \int_{D^+} f_p^+(\underline{c}_p^+) d\underline{c}_p^+ \quad (23)$$

From equations (7) and (16), we can write :

$$n_p^+ = - \int_{D^-} \lambda(\underline{c}_p^-) \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Psi(\gamma|\alpha^-) P_r(\gamma) d\gamma \right] f_p^-(\underline{c}_p^-) d\underline{c}_p^-$$

with :

$$\Psi(\gamma|\alpha^-) = H(-\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) H(\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}) \frac{\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}}{\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}} \quad (24)$$

The modelling of the "shadow effect" by Heaviside functions insures that the particle bouncing velocity is always strictly positive : $\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n} > 0$. So :

$$\frac{n_p^+}{n_p^-} = - \left\langle \left\langle \frac{1}{\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}} \Big|_{\underline{c}_p^-} \right\rangle_{\underline{c}_p^-} \cdot \underline{n} \right\rangle_p \quad (25)$$

In the case of 2-D roughness effects for elastic rebounds, equation (25) leads to :

$$\frac{n_p^+}{n_p^-} = \left\langle \left\langle \frac{1}{\sin(2\gamma + \alpha^-)} \Big|_{\alpha^-} \right\rangle_{\alpha^-} \sin \alpha^- \right\rangle_p \quad (26)$$

where:

$$\left\langle \frac{1}{\sin(2\gamma + \alpha^-)} \Big|_{\alpha^-} \right\rangle = \lambda(\alpha^-) \int_{-\frac{\alpha^-}{2}}^{\frac{\pi - \alpha^-}{2}} \frac{P_r(\gamma)}{\sin(2\gamma + \alpha^-)} d\gamma \quad (27)$$

In Sakiz & Simonin model [1] on smooth wall, it's obvious to link f_p^+ and f_p^- . That allows the exact calculation of n_p^- according to n_p . But in rough wall case, the ratio $\frac{\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}}{\underline{\Phi}_\gamma(\underline{c}_p^-) \cdot \underline{n}}$ introduces the function $\gamma \mapsto \frac{P_r(\gamma)}{\sin(2\gamma + \alpha^-)}$ which is neither continuous, nor prolongeable by continuity in $-\frac{\alpha^-}{2}$ and $\frac{\pi - \alpha^-}{2}$. Thus the integral $\int_{-\frac{\alpha^-}{2}}^{\frac{\pi - \alpha^-}{2}} \frac{P_r(\gamma)}{\sin(2\gamma + \alpha^-)} d\gamma$ diverges. Consequently $\frac{n_p^+}{n_p^-}$ diverges.

This effect is due to the probability distribution of the wall roughness angle γ conditioned by "shadow effect" as defined by Sommerfeld [2] which allows to many particles to rebound with very small angles.

Since the difficulties observed on the analytical calculation of the ratio n_p^+/n_p^- are clearly due to the continuity problems of the truncature points of the roughness angles pdf; it would be envisageable to modify the shape of this conditional pdf proposed

$n_p V_p = 0$
$n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p = 2n_p^- \Delta \gamma^2 U_p \langle v'_p \rangle_p^-$
$n_p \langle v'_p w'_p \rangle_p = 0$
$n_p \langle u'_p v'_p w'_p \rangle_p = 0$
$n_p \langle u_p'^2 v'_p \rangle_p = -4n_p^- \Delta \gamma^2 \langle v_p'^3 \rangle_p^- + 4n_p^- \Delta \gamma^2 \langle u_p'^2 v'_p \rangle_p^-$
$n_p \langle v_p'^2 w'_p \rangle_p = -4n_p^- \Delta \gamma^2 \langle v_p'^3 \rangle_p^- + 4n_p^- \Delta \gamma^2 \langle w_p'^2 v'_p \rangle_p^-$
$n_p \langle v_p'^3 \rangle_p = -2n_p U_p \langle u'_p v'_p \rangle_p - n_p \langle u_p'^2 v'_p \rangle_p - n_p \langle v_p'^2 w'_p \rangle_p$

Table 4. Practical Rough Wall Boundary Conditions Simplified Model (Simonin et al. [16], ICMF'04)

by Sommerfeld; but be sure to take into account the "shadow effect".

Owing to our present impossibility to calculate analytically the incident even order moments of v_p (as we have shown it on particle number density calculation) for the complete closure of wall boundary conditions (see Table 2 and Table 3), this approximation technique may not be properly applicable for the moment. However, by making simplification assumptions, whose their accuracies will be evaluated in the LES/DPS simulations, Simonin et al. [16] derived a practical model.

SIMPLIFIED MODEL

This simplified model is obtained by considering a 3D flow in which the main flow is in x -direction with elastic bouncing of the particles on the rough wall. It based mainly on the following assumptions :

- neglect the "shadow effect" (Sommerfeld [5]).

That returns to $P(-\gamma|\alpha^-) = P(\gamma|\alpha^-) \Rightarrow \langle \gamma|\alpha^- \rangle = 0$ for each incident particle. So $\{\gamma\}_p^- = 0$

- the wall roughness standard deviation $\Delta\gamma \ll \pi$. That leads to $\langle \gamma^2|\alpha^- \rangle \simeq \Delta\gamma^2$, for a gaussian distribution of rough wall angle γ . Thus $\{\gamma^2\}_p^- \simeq \Delta\gamma^2$.

- assume that the following incident averages are such as : $\langle u'_p v'_p \rangle_p^- = 0$, $\langle v'_p w'_p \rangle_p^- = 0$ and $\langle u'_p v'_p w'_p \rangle_p^- = 0$.

By applying these three points to the equations of Table 2, that leads of the equations of Table 4.

Owing to the same difficulties of previous section, we assume in addition that the even order moments of v'_p can be mod-

eled by :

$$\begin{cases} n_p^- = \frac{1}{2}n_p \\ U_p^- = U_p \\ \langle u_p'^2 \rangle_p^- = \langle u_p'^2 \rangle_p \\ \langle v_p'^2 \rangle_p^- = \langle v_p'^2 \rangle_p \\ \langle w_p'^2 \rangle_p^- = \langle w_p'^2 \rangle_p \end{cases} \quad (28)$$

Equations of Table 4 & (28) closure has been possible that assuming an half-gaussian incident velocity pdf f_p^- . That allows us to write :

$$\begin{cases} \langle v'_p \rangle_p^- = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \langle v_p'^2 \rangle_p \\ \langle v_p'^3 \rangle_p^- = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} [\langle v_p'^2 \rangle_p]^{3/2} \\ \langle u_p'^2 v'_p \rangle_p^- = \langle u_p'^2 \rangle_p \langle v'_p \rangle_p^- \\ \langle v'_p w_p'^2 \rangle_p^- = \langle w_p'^2 \rangle_p \langle v'_p \rangle_p^- \end{cases} \quad (29)$$

The relations summarised in Table 4 show that the wall roughness induces, through the boundary conditions, a kinetic energy transfer from the mean streamwise motion towards the wall-normal fluctuating motion and a redistribution effect between the wall-normal and streamwise (spanwise) kinetic stresses. The first comparisons of this model between lagragian calculations and experimental data [17] are very promising.

In order to check the the accuracy of our eulerian formulations, we have carried out lagrangian simulations. In the next section, we remember briefly the approaches that we used and we present the "a priori" tests.

LAGRANGIAN SIMULATIONS LES and Dispersed Particle Simulation (DPS)

The flow considered in simulations is vertical and dilute two-phase flow (gas-solid), in which the carrier flow is incompressible fully-developed turbulent flow between parallel walls and dispersed phase is spherical particles of identical diameter. Particles used are inertial ($\rho_f \ll \rho_p$) and their response time is large compared to the Kolmogorov timescale of the undisturbed flow. Two-way coupling and particle-particle collisions are neglected. The dimensions of the channel are $L_x = 4\pi\delta$, $L_y = 2\delta$ and $L_z = 4\pi\delta/3$ respectively in the streamwise, wall-normal and spanwise directions. The fluid Reynolds number Re_τ based on the wall friction velocity u_τ and halfwidth δ , is 180; where this relatively low value of Re_τ has the advantage to reduce modelling errors. Periodic boundary conditions are applied in streamwise and spanwise directions, and no-slip boundary conditions for the

velocity to the channel walls. When a particle collides with a wall, we use Sommeferld procedure to account for the wall roughness.

The subgrid-scale stress arising from the filtering of the Navier-Stokes equations is closed using the eddy viscosity model of Piomelli et al. [18]. Numerical schemes adopted are described in [6].

Wall Averages

The wall averages are estimated following the same method which those used for mathematical formalism presented in the previous sections, in order to remain logical with the theory.

Indeed, the probable number flux of particles which collide at wall (of surface ΔS), with a velocity between \underline{c}_p^- and $\underline{c}_p^- + d\underline{c}_p^-$ during the step dt , is (5) :

$$d\Phi^-(\underline{x}, \underline{c}_p, t) = -f_p^-(\underline{x}, \underline{c}_p, t) \underline{c}_p \cdot \underline{n} d\underline{\sigma} d\underline{c}_p dt \quad (30)$$

Thus, the number flux of particles which hit wall over the simulation time ΔT is $\int_{t_0}^{t_0+\Delta T} d\Phi^-$. Since the statistics are computed by using ergodic theory (so all variables are stationary) and modelling a particle-wall collision as a product of Dirac, we have :

$$f_p^- d\underline{c}_p^- = \frac{1}{\Delta S \Delta T} \sum_{i=1}^{NC} \frac{\delta(\underline{c}_{pi}^- - \underline{c}_{pi}^-)}{|\underline{c}_{pi}^- \cdot \underline{n}|} d\underline{c}_{pi}^- \quad (31)$$

$$n_p^- = \frac{1}{\Delta S \Delta T} \sum_{i=1}^{NC} \frac{1}{|\underline{c}_{pi}^- \cdot \underline{n}|} \quad \text{and} \quad \langle \Psi \rangle_p^- = \frac{\sum_{i=1}^{NC} \Psi_i^-}{\sum_{i=1}^{NC} \frac{1}{|\underline{c}_{pi}^- \cdot \underline{n}|}} \quad (32)$$

Using the same method, we calculate the reflected averages and we obtain :

$$n_p = \frac{1}{\Delta S \Delta T} \left(\sum_{i=1}^{NC} \frac{1}{|\underline{c}_{pi}^- \cdot \underline{n}|} + \sum_{i=1}^{NC} \frac{1}{|\underline{c}_{pi}^+ \cdot \underline{n}|} \right) \quad \text{and} \quad (33)$$

$$\langle \Psi \rangle_p = \frac{\sum_{i=1}^{NC} \frac{\Psi_i^-}{|\underline{c}_{pi}^- \cdot \underline{n}|} + \sum_{i=1}^{NC} \frac{\Psi_i^+}{|\underline{c}_{pi}^+ \cdot \underline{n}|}}{\sum_{i=1}^{NC} \frac{1}{|\underline{c}_{pi}^- \cdot \underline{n}|} + \sum_{i=1}^{NC} \frac{1}{|\underline{c}_{pi}^+ \cdot \underline{n}|}}$$

in equations (31) to (33), the subscript i represents the i^{th} particle which hits the wall, while Ψ_i^- and Ψ_i^+ are respectively the inci-

	case 1	case 2	case 3
$\Delta\gamma$	2.5	5.0	5.0
St	0.65	0.65	1.5

Table 5. Particle and roughness simulation parameters. $St = \tau_{ps} / (\delta / u_\tau)$ is a particle Stokes number based on the Stokes relaxation timescale of the particle τ_{ps} .

	case 1		case 2		case 3	
lhs	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂
$n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p$	0.37	6.01	0.85	3.80	0.95	22.34
$n_p \langle u_p'^2 v'_p \rangle_p$	0.0	-	0.0	-	0.0	-
$n_p \langle v_p'^3 \rangle_p$	1.02	8.82	3.29	7.63	3.68	27.05
$n_p \langle v'_p v'_p \rangle_p$	-	2.88	-	2.36	-	1.59
$n_p \langle v_p'^2 w'_p \rangle_p$	-	12.13	-	22.24	-	1.92
$\frac{n_p^+}{n_p^-} [-]$	0.22		0.15		0.24	

Table 6. Errors (%) made on the eulerian rough wall boundary conditions derivation with different approximation techniques. (R₁ \equiv rhs_M and R₂ \equiv rhs_{PCM})

dent and reflected values for a Ψ_i . The total number of collision at the wall is NC .

Simulation Results

The particle and roughness simulation parameters are summarised in the Table 5. In the Table 6, we compare for the different cases of simulation, respectively the right-hand-side of relations related in Table 1 (rhs_M) and the right-hand-side of those summarised in Table 2 (rhs_{PCM}) to the left-hand-side of the equations of Table 1. (lhs), in order to check, firstly if the modelling of wall global averages by incident averages is fine and secondly the accuracy of partial correlation assumption.

Table 6 results show that the errors made on the modelling by incident averages are relatively acceptable. Sakiz et al. [1] have obtained more interesting results by using the same approach for smooth wall boundary conditions derivation. However, we think that the errors made - in the columns R₁ of Table 6 - result from the linearisation of the functions $\gamma \mapsto \sin \gamma, \cos \gamma$; that we have used in the calculations of the averages. Errors made by the partial correlation model seem reasonable, because in reality this assumption is very strong, since Simonin et al. [16] have showed that the wall roughness induces, through the boundary

	case 1	case 2	case 3
$\{\gamma\}_p^- / \Delta\gamma$	0.67	0.72	0.59
$\{\gamma^2\}_p^- / \Delta\gamma^2$	0.87	0.92	0.86
$\langle u'_p v'_p \rangle_p^-$	-6.18×10^{-2}	-1.02×10^{-1}	-3.98×10^{-1}
$\langle v'_p w'_p \rangle_p^-$	-1.11×10^{-5}	3.04×10^{-5}	2.80×10^{-4}
$\langle u'_p v'_p w'_p \rangle_p^-$	-8.6×10^{-5}	1.68×10^{-4}	2.21×10^{-3}

Table 7. Estimation of Simplified Model Assumptions Accuracy

	case 1	case 2	case 3
$2n_p^- / n_p$	1.63	1.74	1.61
U_p^- / U_p	0.79	0.75	0.74
$\langle u_p'^2 \rangle_p^- / \langle u_p'^2 \rangle_p$	0.66	0.65	0.82
$\langle v_p'^2 \rangle_p^- / \langle v_p'^2 \rangle_p$	0.28	0.17	0.39
$\langle w_p'^2 \rangle_p^- / \langle w_p'^2 \rangle_p$	0.65	0.66	0.74
$\frac{\langle v_p' \rangle_p^-}{-\sqrt{\frac{2}{\pi} \langle v_p'^2 \rangle_p}}$	0.14	0.13	0.18
$\frac{\langle v_p'^3 \rangle_p^-}{-\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \left[\langle v_p'^2 \rangle_p \right]^{\frac{3}{2}}}$	0.77	0.37	1.70
$\frac{\langle u_p'^2 v_p' \rangle_p^-}{\langle u_p'^2 \rangle_p \langle v_p' \rangle_p^-}$	1.16	0.77	0.39
$\frac{\langle v_p' w_p'^2 \rangle_p^-}{\langle w_p'^2 \rangle_p \langle v_p' \rangle_p^-}$	1.03	0.76	0.41

Table 8. Estimation of Simplified Model Closure Assumptions Accuracy

conditions, a kinetic energy transfer from the mean streamwise motion towards the wall-normal fluctuating motion and a redistribution effect between the wall-normal and streamwise (spanwise) kinetic stresses.

Beyond the accuracy analysis of the general approximation technique, we have evaluated through Tables 7 and 8, the accuracy of assumptions which support simplified model. Table 7 shows that the assumption made on the wall roughness variance shows oneself a good fit. But, it shows however that the "shadow effect" can not be neglected. Tables 8 and 9 show the differences between DPS simulation results and those of simplified model. These differences explain themselves by the fact that in the Lagrangian simulations, the calculations take necessarily into ac-

	case 1		case 2		case 3	
	A	B	A	B	A	B
$n_p \langle u'_p v'_p \rangle_p$	-1.94	-0.23	-7.84	-1.04	-17.82	-4.02
$n_p \langle u_p'^2 v_p' \rangle_p$	-33.23	-14.40	-130.52	-55.72	-274.73	-92.38
$n_p \langle v_p'^3 \rangle_p$	40.60	15.27	167.12	60.53	466.01	131.50
$n_p \langle v_p' w_p'^2 \rangle_p$	0.0	-0.003	0.0	0.03	0.0	4.03

Table 9. Comparison between Averages calculated directly from DPS and from Simplified Model. (A = from DPS Simulation; B = from Simplified Model)

count the "shadow effect", while this mechanism is neglected in simplified model.

DISCUSSION

The utilisation of Sommerfeld same particle-wall collision process in lagrangian simulations and continuum rough wall boundary conditions derivation, leads us to ask us some questions. In fact :

1- why lagrangian simulations lead to converged values for the ratio n_p^+ / n_p^- , while it is not possible to calculate it with continuum approach by using the same particle-wall collision process?

2- how to modify the continuum assumptions (shape of incident velocity pdf or the "shadow effect") in order to allow the closure of eulerian rough wall boundary conditions model.

All these interrogations lead us to see again the particle-wall collision mechanism such as proposed by Sommeferld [2]. Indeed his model favours enormously the null rebound angles and so the particles remain grazing. But in reality a particle can not remain boring during a long time, because it could hit an asperity on which it could rebound. Finally it should be envisage to consider a multi-rebound model in order to evaluate the real "shadow effect".

CONCLUSION

Eulerian rough wall boundary conditions of dispersed phase, in the framework of two-phase flows, have been derived in this paper. Their formulation was based on the pdf approach and the stochastic particle-wall collision process proposed by Sommerfeld. However, some difficulties remain on the calculations of even order moments of the wall-normal velocity and the incident number density, in order to close properly this eulerian model.

We have also made LES/DPS simulations with which we have compared our formulation. Comparison results have allowed to lead a discussion about the particle-wall collision mechanism. It emerges that the so-called "shadow effect" should be seen again by incorporating a multi-rebond model.

REFERENCES

- [1] Sakiz, M., and Simonin, O., 1999. "Development and validation of continuum particle wall boundary conditions using lagrangian simulation of a vertical gas/solid channel flow". *3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference, San-Francisco, California, USA, July 18-23* .
- [2] Sommerfeld, M., and Huber, N., 1999. "Experimental analysis and modelling of particle-wall collisions". *Int. J. Multiphase Flow*, **25** , pp. 1457–1489.
- [3] Kussin, J., and Sommerfeld, M., 2002. "Experimental studies on particle behaviour and turbulence modification in horizontal channel flow with different wall roughness". *Experiments in Fluids*, **33** , pp. 143–159.
- [4] Sommerfeld, M., and Kussin, J., 2004. "Wall roughness effects on pneumatic conveying of spherical particles in a narrow horizontal channel". *Powder Technology*, **142** , pp. 180–192.
- [5] Sommerfeld, M., 1992. "Modelling of particle-wall collision in confined gas-particle flows". *Int. J. Multiphase Flow*, **18** (6) , pp. 905–926.
- [6] Squires, K. D., and Simonin, O., 2005. "Les/dps of the effect of wall roughness on dispersed-phase transport in particle-laden turbulent channel flow". *re-submitted to the Int. J. Heat and Fluid Flow* .
- [7] Zhang, X., and Zhou, L., 2004. "Simulation of gas-particle channel flows using a two-fluid particle-wall collision model accounting for wall roughness". *5th International conference on multiphase flow, ICMF'04, Yokohama, Japan, May 30 - June 4, paper Number 162* .
- [8] Eskin, D., 2005. "Modeling dilute gas-particle flows in horizontal channels with different wall roughness". *Chemical Eng. Science*, **60** , pp. 655–663.
- [9] Buyevich, Y., 1971. "Statistical hydromechanics of disperse systems. part1.". *J. Fluid Mech.*, **49** , pp. 489–507.
- [10] Simonin, O., 1996. "Continuum modelling of dispersed two-phase flows". *Combustion and Turbulence in Two-Phase Flows, Lecture Series 1996-02, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Rhode Saint Genèse, Belgium* .
- [11] Matsumoto, S., and Saito, S., 1970. "Monte carlo simulation of horizontal pneumatic conveying based on the rough wall model". *J. Chem. Engng Japan*, **3** , pp. 223–230.
- [12] Tsuji, Y., Morikawa, Y., Tanaka, T., Nakatsukasa, N., and Nakatani, M., 1987. "Numerical simulation of gas-solid two-phase flow in a two-dimensional horizontal channel". *Int. J. Multiphase Flow*, **13** , pp. 671–684.
- [13] Sommerfeld, M., 1990. "Numerical simulation of the particle dispersion in turbulent flows including particle lift forces and different particle/wall collision models". *Numerical Methods for Multiphase Flows, ASME FED, ASME New York*, **91** , pp. 11–18.
- [14] Kussin, J., and Sommerfeld, M., 2003. "Analysis of collision effects for turbulent gas-particle flow in a horizontal channel. Part II. integral properties and validation". *Int. J. Multiphase Flow*, **29** , pp. 701–718.
- [15] Lain, S., Sommerfeld, M., and Kussin, J., 2004. "Experimental and numerical studies of pressure drop in particle-laden horizontal channel flow". *3rd International symposium on two-phase modelling and experimentation, Pisa, 22-24 Sept* .
- [16] Simonin, O., Fede, P., Patino, G., and Squires, K., 2004. "Mathematical models and closure laws for gas-particle turbulent flows". *Proceedings of the ICFM'04, 5th Int. Conf. Multiphase Flows, Yokohama, Japan* .
- [17] Konan, N. A., Lain, S., Simonin, O., and Sommerfeld, M., 2006. "Comparison between euler-euler and euler-lagrange computations of gas-solid turbulent flow in a horizontal channel with different wall roughness". *ASME Joint U.S. - European Fluids Enigneering Summer Meeting, Miami, Floride, USA, July 17-20* .
- [18] Piomelli, U., Ferziger, J., and Moin, P., 1989. "New approximate boundary conditions for large eddy simulations of wall-bounded flows". *Phys. Fluids*, **1** (6) , pp. 1061–1068.

Olivier Kannengieser, Arthur Konan and Olivier Simonin

Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, UMR 5502 CNRS/INPT/UPS

31400 Toulouse, France

E-mail : konan@imft.fr

Keywords: gas-solid flows, particle-wall collision, rough wall, shadow effect

Abstract

This paper is dedicated to the analysis and modeling of mechanisms which occur during the particle-rough wall interactions. The behavior of the previous modeling of wall roughness effects on a particle flows are briefly reviewed by emphasizing the reproduced mechanisms. To improve the understanding of these interactions, numerical experiments were carried out by impinging many particles on digital rough walls. Results of these investigations are used to propose a new Lagrangian treatment of particle-rough wall interactions to improve the treatment of particles bouncing with a grazing angle.

Introduction

Particle-wall interactions within confined two-phase flows constitute an essential component of the study of particle trajectories, and hence the prediction of the statistical properties of dispersed phase. Actually the particle collisions on the wall induce besides the velocity direction change, a loss of momentum and sometimes the particle fractures. However, these effects can be observed only for inertial particles. Indeed for this kind of particles, since their response time is large compared to fluid phase characteristic time scales, their motion is dominated by the wall collisions. In these conditions, the particle-wall collision influence differs in terms of the wall surface. Benson *et al.* (2005) experimental investigations in vertical canal showed that the particle streamwise mean velocity is reduced up to 40% and the fluctuating velocities are nearly doubled near the channel center in presence of wall roughness. The early detailed measurements performed in horizontal channel with different wall roughness degrees by Kussin & Sommerfeld (2002) and Sommerfeld & Kussin (2004) shown, furthermore, the increase of particle-particle and particle-wall collision frequency and a modification of particle dispersion across the channel. They also observed the increase of the pressure loss with the wall roughness.

These measurements highlight the influence of the wall roughness on dispersed phase statistical properties. And then, the following question is how to take the wall roughness into account in simulations? Answer to this interrogation assumes either a well understanding of the mechanisms occurring during the particle-wall interactions with a view to modeling or a geometrical representation of rough wall on which the incident particle bounces.

Matsumoto & Saito (1970a), (1970b) assumed that there is no correlation between the position of the incident particle and the wall roughness structure. The wall roughness was

also assumed to have a uniform distribution. Thus, with these assumptions, the wall roughness structure was modeled as the following sine function :

$$y = A_r \sin\left(\frac{2\pi}{L_r}x + \alpha\right) \quad (1)$$

in which α is the phase of the roughness treated randomly following a uniform distribution in $[0, 2\pi]$. A_r and L_r are respectively the amplitude and the cycle of the wall roughness.

The wall surface structure is schematically described by Frank *et al.* (1993) from a polygon with the elements $\{z_n, s_n\}$, where z_n and s_n are random variables distributed uniformly over $[-z_{\max}, z_{\max}]$ and $[\frac{1}{2}\bar{S}, \frac{3}{2}\bar{S}]$ respectively. The model parameters z_{\max} and \bar{S} , which must be determined by a prior microscopic examination of the wall material specimens, are functions of the particles diameter d_p and of the mean values of the length scale and the amplitude of the wall surface roughness.

A two-dimensional stochastic roughness profile was simulated by Tsirkunov & Panfilov (1998) by connecting with help of the cubic spline, the following random N points $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_i = x_{i-1} + h + \xi, & (i = 2, 3, \dots, N) \\ y_i = \eta, & (i = 1, 2, \dots, N) \end{cases} \quad (2)$$

where $2h$ is the mean cycle of roughness, and the random values ξ and η are sampled from Gaussian distribution with a mean zero value and standard deviations $\Delta\xi$ and $\Delta\eta$. $\Delta\eta$ defines the mean height of asperities of a surface or the mean roughness depth. The parameters h , $\Delta\xi$ and $\Delta\eta$ should be determined from measurements.

These geometrical representations of the wall structure can allow to carry out Lagrangian simulations, even if the determination of the contact point on the geometrical wall and

the new position of the particle after the bounce, whenever a particle hits the wall could be tedious. Furthermore, these simulations could ignore some effects if the real mechanisms which occur are unknown. However, like Tsirkunov & Panfilov (1998), these representations can be used to improve the understanding of the particle-wall collisions.

One of the first modeling approaches based on an incident effect taken into account during the particle-rough wall interaction was introduced by Tsuji *et al.* (1987), as the "*Abnormal bouncing model*". The incident particle is assumed to collide with the flat wall or an inclined wall with respect to its incident angle. Actually, if the particle incident angle α^- is less than a certain specified value, the macroscopic wall is replaced by a smooth virtual one with an inclined angle γ . The inclined virtual wall angle is provided by the following empirical formulation :

$$\gamma = \begin{cases} c R^k \delta_0 (\beta - \alpha^-) & \text{if } \alpha^- \leq \beta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

where R is a random number between $]0, 1]$, $\beta = 7^\circ$, $c = 5$, $k = 4$ and :

$$\delta_0 = \frac{2.3}{Fr} - \frac{91}{Fr^2} + \frac{1231}{Fr^3}, \quad Fr = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} \quad (4)$$

in which \bar{u} is the mean fluid velocity and h the channel height.

However, the incident effect occurred in the "*Abnormal bouncing model*" which reduces the wall roughness effects to the only small collision angles can not be joined to physical arguments. In addition, this model assumes that the incident particle can not hit a negative wall roughness. These drawbacks were corrected by Sommerfeld (1992) by providing for each incident angle α^- a random virtual inclined wall whose the inclination γ is sampled from a normal distribution. However, the incident effect vanished in this last formulation. Indeed, the wall roughness distribution is assumed to be independent of the particle incident angle. Tsirkunov & Panfilov (1998) pointed out that this independence does not agree with the experiments for the small particle incident angles. Schade & Hädrich (1998) measurements confirm, however, that the distribution of the physical wall roughness can be approximated by a Gaussian with zero mean while the standard deviation $\Delta\gamma$ depends on the step width of the scan of the rough wall. Furthermore, Schade & Hädrich (1998) pointed out also that the effective pdf of the roughness angle "seen" by the particles should be modified by an incident effect. According to Sommerfeld & Huber (1999) there exists a so-called "*shadow effect*" for the small incident angles which results from the combination of two phenomena. The first one is occurring before particle-wall collision and is due to a perspective of the physical rough wall for a given incident particle. Sommerfeld & Huber (1999) give the normalized effective distribution function of the wall roughness inclination seen by the particles by :

$$P_{eff}(\alpha^-, \Delta\gamma, \gamma) = \frac{P_g(\Delta\gamma, \gamma) \sin(\alpha^- + \gamma)}{\int_{-\alpha^-}^{\pi/2} P_g(\Delta\gamma, \gamma) \sin(\alpha^- + \gamma) d\gamma} \quad (5)$$

where $P_g(\Delta\gamma, \gamma)$ is the unconditional normal distribution given by :

$$P_g(\Delta\gamma, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\gamma^2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\Delta\gamma^2}\right) \quad (6)$$

The second effect is occurring after the particle-wall collision rebound and is due to the assumption that the particle should return in the flow.

The procedure proposed by Sommerfeld & Huber (1999) to account for this late "*shadow effect*" in Lagrangian particle simulations is as follows :

- the roughness angle is sampled from the normal distribution function (Eq. 6).
- if a negative roughness angle with an absolute value being larger than α^- is sampled, an unphysical collision results, namely the particle comes from behind the wall and hence a new value is sampled for γ .
- if the collision leads to a rebound velocity directed towards the wall, a new roughness angle is sampled.

This method rather leads to sample randomly the wall roughness angle from a truncated normal distribution (Konan *et al.* (2006)) and does not account for the first mechanism since the wall roughness is not sampled from the effective pdf (Eq. 5).

The second effect which should be seen as a realisability condition of the rebound of the particle is partially described by the second point of the above procedure suggested by Sommerfeld & Huber (1999). Actually, this procedure ignores the fact that after one rebound, the particle can collide with an hollow of the rough wall, and then it should make new rebounds so as to return in the core of the flow or it could hit another asperity after a previous bouncing, when the rebound angle $\alpha^+ > 0$. This eventuality of multiple rebounds was clearly emphasized by Tsirkunov & Panfilov (1998) with their geometrical wall (Eq. 2) and they early pointed out its absence as one of the major problem in Sommerfeld (1992) stochastic model.

It should be noticed that the use of Sommerfeld & Huber (1999) "*shadow effect*" model by Konan *et al.* (2006) to derive Eulerian boundary conditions in the framework of the continuum approach has knocked itself to closure problem due to many grazing particles at the wall strongly favoured by the shape of the wall roughness angle distribution. This high probability for incident particles to remain grazing after their bouncing is also clearly shown in Konan *et al.* (2007) from LES-DPS simulations in experimental horizontal narrow channel and it has been shown as a result of an underestimation of wall-normal velocity variance. The absence of the mechanisms which would allow the grazing particles to return in flow is most probably the responsible of these spurious effects.

In total, both incident and rebound effects which occur during the particle-rough wall interactions are not fully taken into account by Sommerfeld & Huber (1999) "*shadow effect*" model, especially for bouncing grazing particles.

In this paper, the behavior of an incident particle on a rough wall is studied by making many impingements on two

different realistic rough walls. Probability density function of wall roughness and rebound angles obtained from these simulations are shown and discussed. The mechanisms are interpreted and used to derive a new Lagrangian treatment of particle-rough wall interactions.

Nomenclature

\underline{c}_p^-	particle incident velocity vector
\underline{n}	wall normal unit vector
\underline{n}_γ	inclined virtual wall normal unit vector
P_{eff}	effective wall roughness PDF
P_g	normal probability distribution function
\underline{v}_p^-	particle incident velocity vector
\underline{v}_p^+	particle rebound velocity vector
<i>GDWRA</i>	Gaussian Distribution of Wall Roughness Angle
<i>GDRHP</i>	Gaussian Distribution of Roughness Height and Position
<i>SEM</i>	<i>shadow effect model</i> (Sommerfeld & Huber (1999))
<i>ISEM</i>	<i>improved shadow effect model</i>

Greek letters

α^-	incident angle
α^+	rebound angle
α_1^+	first rebound angle
γ	wall roughness angle
γ_1	first collision wall roughness angle seen by the particle
$\Delta\gamma$	wall roughness angle standard deviation

Subscripts

p	particle
---	----------

Direct simulations of particle bouncing on geometrical rough walls

The purpose of this study is to analyse the particle-rough wall interactions so as to better understand the mechanisms which occur. To achieve this aim, although the wall roughness is three-dimensional, we have simulated two stochastic two-dimensional rough walls on which many particles are impinged.

Procedure description

The former is based on gaussian distribution of wall roughness angles (Sommerfeld (1992)). The rough wall is built by connecting a finite number N of points by segments (*GDWRA*). These points are generated following :

$$\begin{cases} x_1 = 0, y_1 = 0 \\ x_{i+1} = x_i + \Delta x, & (i = 2, N) \\ y_{i+1} = y_i + \Delta x \cdot \tan \gamma_i, & (i = 2, N) \end{cases} \quad (7)$$

in which Δx is the sampling distance of real rough wall. The change of the value of Δx consists in an homothetic transformation of the simulated wall. Therefore the angular measurements that will be done after this transformation will not change. γ_i is wall roughness angle sampled from the normal distribution (Eq. 6) with the standard deviation $\Delta\gamma$. According to Sommerfeld & Huber (1999), this standard deviation is correlated with the particle diameter d_p ; therefore the built

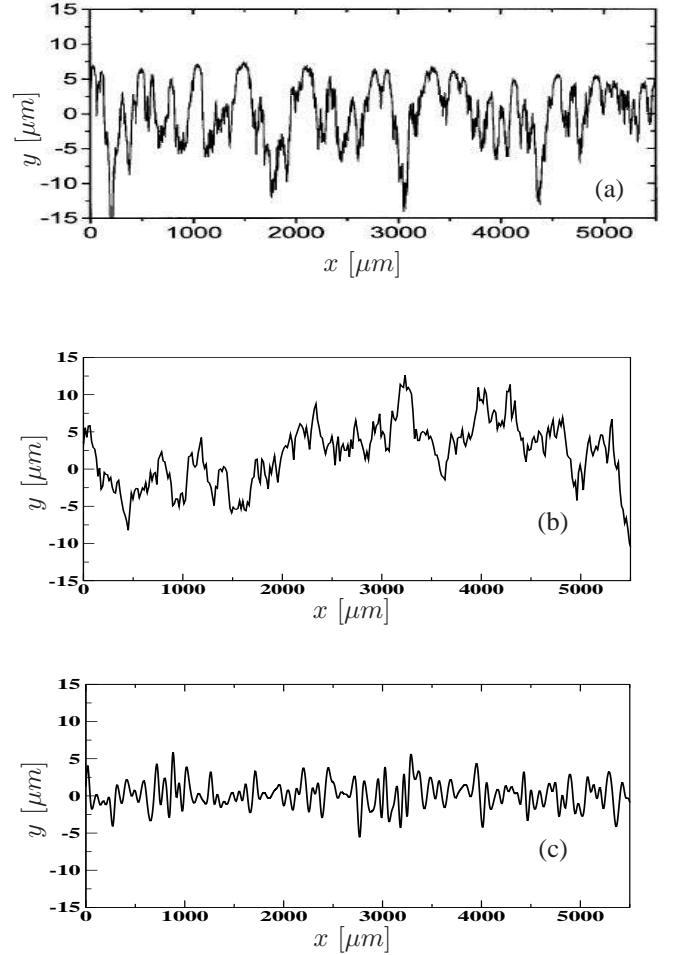


Figure 1: Wall roughness structure profile. (a) stainless steel scanned structure Sommerfeld & Huber (1999), (b) and (c) are respectively the profiles obtained from random normal distribution of wall roughness angle (Eq. 7) and Tsirkunov & Panfilov (1998) geometrical rough wall model (Eq. 2).

rough wall is a transformation of the physical wall by the circle of the diameter d_p . This assumes that this wall represents the geometrical locus of the center of the particle when the particle goes along the rough wall. Therefore, for this realistic rough wall model, the particle will be modeled by its center point. For this geometrical rough wall model, since the rough wall represents the locus of the center of the particle, the modeling of the real wall changes with the particle diameters.

The latter is simulated from Tsirkunov & Panfilov (1998) rough wall geometrical model (Eq. 2) (*GDRHP*). The incident particles are modeled by circle of diameter d_p . An empirical procedure is used to determine the model parameters h , $\Delta\xi$ and $\Delta\eta$.

To study statistically the particle rebound processes on these simulated rough walls, the particles are thrown from a line over the highest point of the rough wall, while their abscissas are randomly sampled along the wall length. Their trajectories are assumed rectilinear uniforms. The study is performed for different incident angles α^- and for each inci-

	$ V^- (m.s^{-1})$	ΔV^-	$\omega_p^- (tr.s^{-1})$	$\Delta\omega$	$\Delta\gamma_m$	$\Delta\gamma_c$	e_h	α_e	μ_h	μ_0	α_μ
Glass $100\mu m$	13.5	2.5	3×10^4	1×10^4	5.3	6.5	0.7	22.0	0.15	0.5	20.0
Glass $500\mu m$	5.91	1.16	2600	900	3.8	4.0	0.7	22.0	0.15	0.4	20.0

Table 1: Particle and rough wall parameters. (Angles are given in degree)

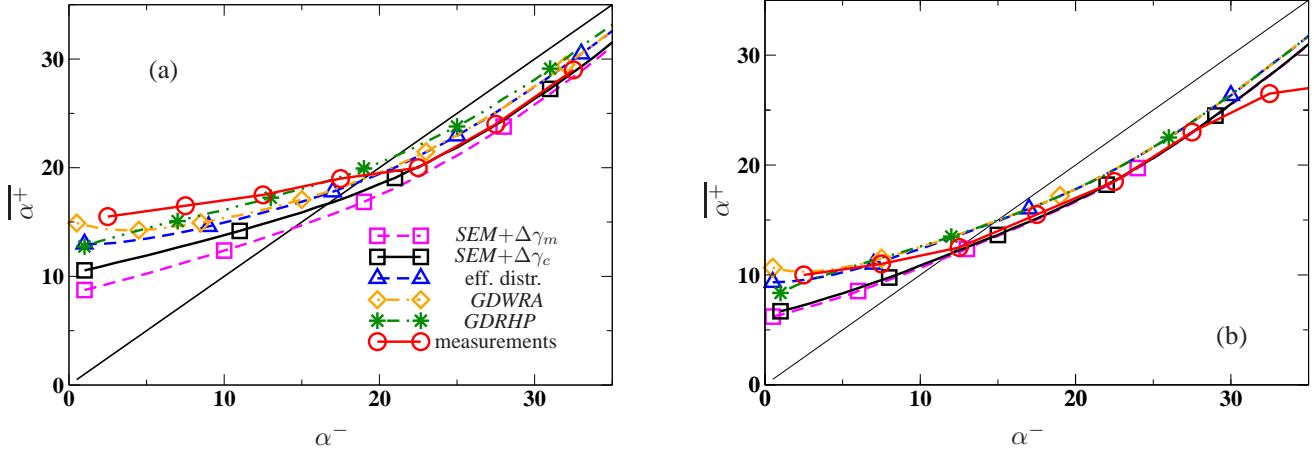


Figure 3: Mean value of the rebound angle in terms of the collision angle. (a) $d_p = 100\mu m$ and (b) $d_p = 500\mu m$.

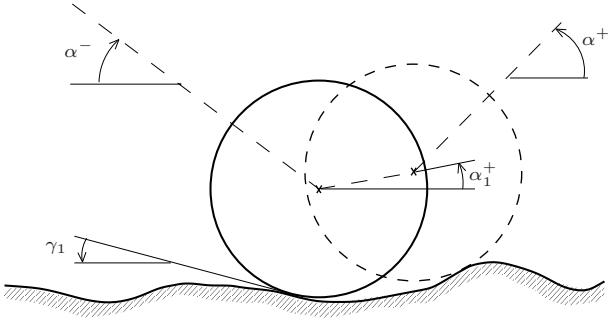


Figure 2: Illustration of the multiple rebound process.

dent angle the statistical behavior is studied for half a million of particles. For each incident particle, the point of collision with the modeled wall is computed. The calculation of the rebound velocity and the angular velocity (ω_p), uses the laws of inelastic frictional rebound:

- if $\left|u_p^- - \frac{d_p}{2}\omega_p^-\right| < \frac{7}{2}\mu_0(1+e_w)v_p^-$, a non-sliding collision occurs and then :

$$\begin{cases} u_p^+ = \frac{1}{7}(5u_p^- + d_p\omega_p^-) \\ v_p^+ = -e_w v_p^- \\ \omega_p^+ = 2\frac{u_p^+}{d_p} \end{cases} \quad (8)$$

- otherwise the sliding rebound is given by :

$$\begin{cases} u_p^+ = u_p^- - \mu_w(1+e_w)\varepsilon v_p^- \\ v_p^+ = -e_w v_p^- \\ \omega_p^+ = \omega_p^- + 5\mu_w(1+e_w)\varepsilon\frac{v_p^+}{d_p} \\ \varepsilon = \text{sign}\left(u_p^- - \frac{d_p}{2}\omega_p^-\right) \end{cases} \quad (9)$$

in which the superscripts (-) and (+) denote respectively the particle properties before and after rebound. e_w and μ_w are restitution and friction coefficients at wall modeled by Sommerfeld & Huber (1999) as follows :

$$e_w(\alpha^-) = \begin{cases} \frac{e_h - 1}{\alpha_e}\alpha^- + 1 & \text{if } \alpha^- \in [0, \alpha_e] \\ e_h & \text{if } \alpha^- \geq \alpha_e \end{cases} \quad (10)$$

$$\mu_w(\alpha^-) = \begin{cases} \frac{\mu_h - \mu_0}{\alpha_\mu}\alpha^- + \mu_0 & \text{if } \alpha^- \in [0, \alpha_\mu] \\ \mu_h & \text{if } \alpha^- \geq \alpha_\mu \end{cases} \quad (11)$$

where the rebound coefficients e_h , α_e , μ_h and μ_0 ; and the angles α_e and α_μ which appear in (10)- (11) are given from experiments.

After a bouncing, if the particle may hit once more the wall, the new collision point is computed and then a new rebound occurs (see figure 2). So, in our study, the particles may rebound many times on the wall. It should be noticed that the influence of the fluid on the particle is not taken into account in simulations. Nevertheless, the measured maximum time T that the particle takes to make multiple rebounds will be compared to the particle response time.

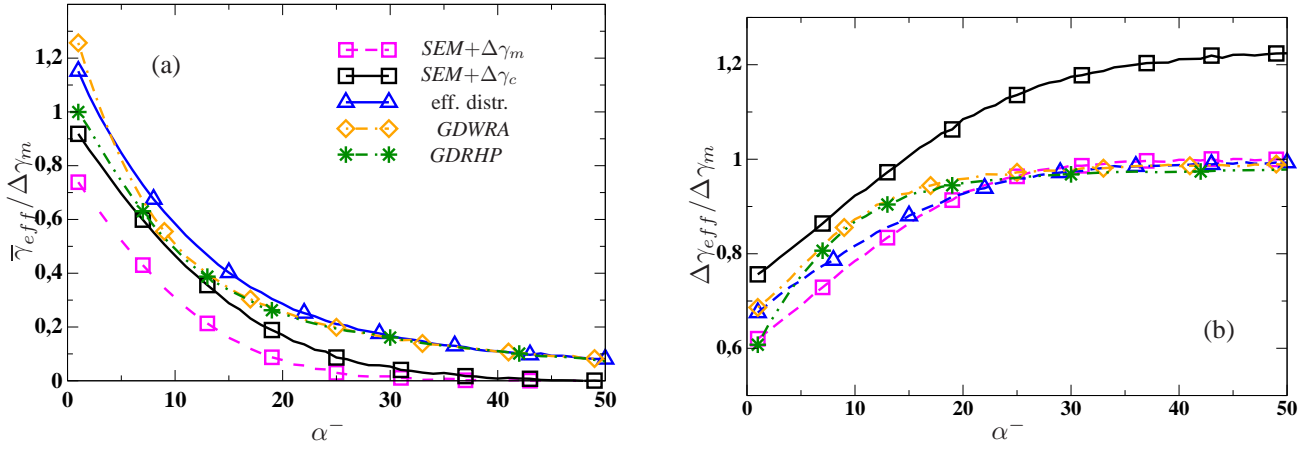


Figure 4: Mean value and standard deviation of the wall roughness angle experimented by incident particle.

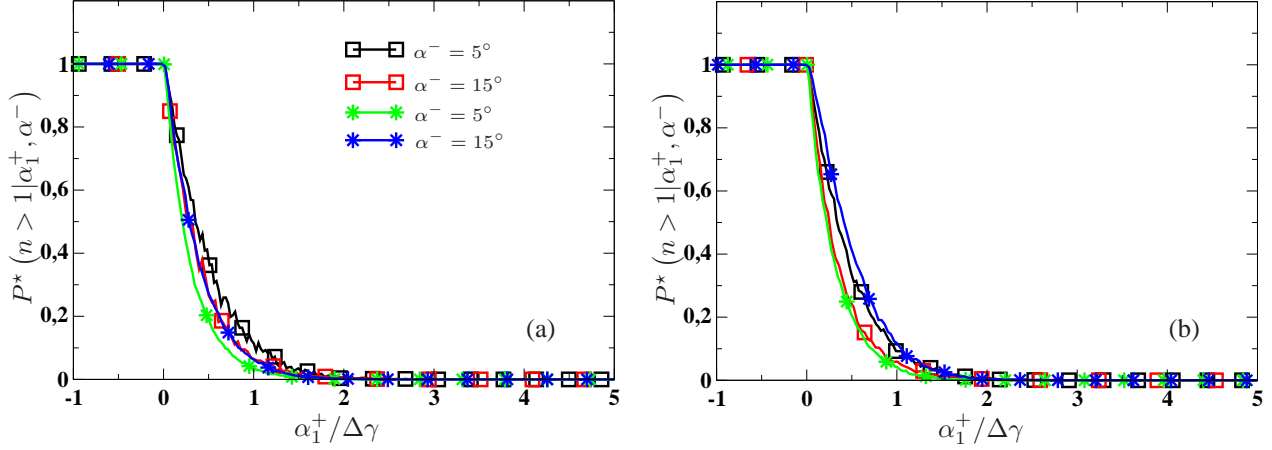


Figure 7: Probability to get over one rebound in terms of the first rebound angle α_1^+ obtained with the two geometrical rough wall : *GDWRA* (square) and *GDRHP* (star). (a) : $d_p = 100\mu m$ and (b) : $d_p = 100\mu m$.

Results and discussions

Rebounds of two different particles of diameters d_p on a stainless steel rough wall are studied. The rough wall and particles parameters used in simulations are summarized in table 1. The statistical behaviors of the particles obtained by throwing them on the two simulated geometrical rough walls are compared to Sommerfeld & Huber (1999) measurements. In addition, we have performed simulations on the one hand with the above procedure given by Sommerfeld & Huber (1999) to reproduce the "shadow effect" model (*SEM*), and on the other hand with a slight improvement of the "shadow effect" model by accounting of the incidence effect : the wall roughness γ is rather sampled following Eq. 5 (*ISEM*).

The different parameters used for the simulations are those given in Sommerfeld & Huber (1999) (see table 1). However in Sommerfeld & Huber (1999) the value of $\Delta\gamma$ used for the

"shadow effect" model Lagrangian computation is slightly increased compared to the measurements. This increased value of $\Delta\gamma$ is used in order to improve results obtained with the "shadow effect" model. In the present work, the "shadow effect" model is studied for both the measured value $\Delta\gamma_m$ and the modified value $\Delta\gamma_c$ of the wall roughness standard deviation used in their simulations. In all the simulations, we rather use the measured value of $\Delta\gamma$. To model the stainless rough wall used in the experimental study with *GDRHP*, we determined empirically the parameters h , $\Delta\xi$ and $\Delta\eta$ which lead to better measurements of $\Delta\gamma$ for the two particle diameters. We begun by choosing arbitrary the parameters h , $\Delta\xi$ and $\Delta\eta$ to build the rough wall. We thrown thousands of particles on this wall for the two diameter particles, from abscissas randomly sampled. The incident angle α^- was taken equal to 90° so as to avoid the incident effect. The parameter values are changed until we get the better standard deviation value for each particle diameter. We obtained : $h = 32\mu m$,

$\Delta\xi = 1.89\mu\text{m}$ and $\Delta\eta = 3\mu\text{m}$. The scanned profile of the stainless steel wall structure (Sommerfeld & Huber (1999)) and the simulated rough wall are shown on figure 1.

The influence of the change of the value of $\Delta\gamma$ can be seen on the figure 4. This figure shows the evolution of $\Delta\gamma_{eff}/\Delta\gamma_m$ and $\bar{\gamma}_{eff}/\Delta\gamma_m$ in terms of α^- . $\Delta\gamma_{eff}$ represents the standard deviation of the wall roughness angle, γ , that the particle can hit, while $\bar{\gamma}_{eff}$ is the mean value of γ . We can see on this figure that using $\Delta\gamma_c$ enables $\bar{\gamma}_{eff}$ obtained with the model *SEM* to be nearer to the *ISEM* model and the geometrical rough walls (*GDWRA* and *GDRHP*) obtained with the measured standard deviation $\Delta\gamma_m$. We can also notice the influence of the collision angle α^- on both $\Delta\gamma_{eff}$ and $\bar{\gamma}_{eff}$. When $\alpha^- = 90^\circ$, there is no incident effect, $\Delta\gamma_{eff} = \Delta\gamma$ and $\gamma_{eff} = 0$. When α^- decreases the incident effect becomes important, and then $\Delta\gamma_{eff}$ decreases while γ_{eff} increases.

In the case of the geometrical rough walls *GDWRA* and *GDRHP*, the particle rebound angle α^+ is computed when the particles have done all their bounces and move away from the wall. Figure 3 shows the evolution of the mean value of α^+ in terms of the impact angle α^- . For high incident angles, all the models are in good agreement with the measurements. However, when α^- is small (e.g. $\alpha^- < 10^\circ$), the *SEM* model underestimates the particle rebound angle α^+ while the models *GDWRA*, *GDRHP* and *ISEM* show a good agreement compared to measurements. The change of the standard deviation from $\Delta\gamma_m$ to $\Delta\gamma_c$ in the *SEM* model improves slightly the value of α^+ .

The accurate behavior of the geometrical rough wall models appears on the pdf of rebound angle plotted on figure 5. Indeed, according to the measurements, when α^+ tends to zero angle, the pdf obtained with the geometrical rough wall models tends also towards zero, whereas this pdf is overestimated by *SEM* and *ISEM* models for the small rebound angles (see figure 5-(a) & (b) for respectively the incidence $\alpha^- = 5^\circ$ and $\alpha^- = 15^\circ$). When $\alpha^- = 25^\circ$ all the models give approximately the same results and are in good agreement with experimental results (see figure 5-(c)).

As shown previously the difference between the geometrical rough walls (*GDWRA* and *GDRHP*) and the *SEM* model occurs for the small incident angles, so when the incident effect is strong. This incident effect is due to the perspective of the rough wall seen by the particles. On figure 6 is plotted the pdf of wall roughness γ_1 seen at the first bouncing for three incident angles by using the geometrical rough wall models. In addition, it has been plotted on the same figure the effective pdf given by Sommerfeld & Huber (1999). For the different incident angles, we can noticed that the pdf of γ_1 for the models *GDWRA* and *GDRHP* are in very good agreement with the effective distribution function of wall roughness angles P_{eff} (Eq. 5). This means that the incident effect is well accounted for by the effective distribution function P_{eff} at the first bouncing. The influence of this distribution function on the *SEM* model is represented by the *ISEM* model. Indeed, in the *ISEM* model, the angle γ is sampled in P_{eff} whereas in the *SEM* model γ is sampled in the centered Gaussian distribution. The *ISEM* model is then, an improvement

of the *SEM* model to better account for the incident effect. On the figure 5, we can see that the better treatment of the incident effect leads to an improvement of the pdf of rebound angle α^+ , since the high probability for an incident particle to rebound with a grazing angle is reduced. Nevertheless the improvement of the incident effect is not sufficient to reproduce the zero probability at $\alpha^+ = 0$ as shown by measurements and both geometrical rough wall models.

Detailed analysis of the simulation results obtained with the two geometrical rough wall models shows that the very small probability to measure grazing particles is due to the multiple rebound effect (see figure 2). To quantify this mechanism, the figure 7 shows the probability $P(n > 1 | \alpha_1^+, \alpha^-)$ that a particle is colliding twice, at least, with the wall in terms of its first rebound angle α_1^+ for a given incident α^- . Obviously, this probability is equal to one when α_1^+ is less than zero. But less obviously, this probability is non zero when $\alpha_1^+ > 0$ and can be very large when α_1^+ is less than $\Delta\gamma$, for example: when $\alpha_1^+ = \Delta\gamma/2$, $P(n > 1 | \alpha_1^+, \alpha^-) \simeq 0.4$ and when $\alpha_1^+ = \Delta\gamma/4$, $P(n > 1 | \alpha_1^+, \alpha^-) \simeq 0.7$. So, it means that after a first rebound with a small angle, leading to a trajectory grazing the macroscopic wall, a particle has a strong probability to be deflected another time by a collision. Then, as shown by figure 5, the probability of a particle to quit the wall region with a grazing α^+ angle is strongly reduced when accounting for the multiple rebound effect. In contrast, as the *SEM* and the *ISEM* models do not take into account the probability of multiple rebounds when the particle is bouncing with a small first rebound angle α_1^+ , the number of grazing particles which move away from the wall region is too large for $\alpha^+ < \Delta\gamma/2$ with respect to the experimental measurements. In conclusion, taking into account the multiple rebound effect is crucial to have an accurate modeling of small particle rebound angle probability distribution.

The study of the multiple rebound effect, from the results obtained with the geometrical models, shown three important points which are crucial for the development of the modeling approach.

The first is that this effect seems to be universal: it weakly depends on the parameters of the simulations. Indeed on the figure 7 we can see that the probability $P(n > 1 | \alpha_1^+/\Delta\gamma, \alpha^-)$ weakly depends on the geometrical wall model, the parameter $\Delta\gamma$, the collision treatment or the incident angle α^- .

The second point is that this multiple rebound effect can be considered instantaneous and very local: between its first and its last rebound the distance covered by a particle is smaller than the radius of the particle and the time δt to cover this distance is one hundred smaller than its response time.

The last point, but not the least, is that, as shown by figure 8, the particles which realize only one rebound move away from the wall with an angle distribution nearly identical to the one unconditioned by the number of rebounds. For incident angles α^- close to the roughness distribution angle, $\alpha^- \leq \Delta\gamma$, this result is due to the fact that the α^+ pdf of the particles enduring multiple rebounds is approximately equal to the ones which endure only one collision as shown by figure 8. In contrast, when the incident angle α^- is larger, figure 8 shows that the α^+ pdf of the particles which make multiple rebounds is strongly different from the α^+ pdf of the parti-

cles which make only one rebound. Nevertheless, when the incident angle is large with respect to the roughness distribution angle $\Delta\gamma$, the probability to have a grazing particle after the first rebound is very small and the contribution of particles enduring more than one rebound to the α^+ unconditioned pdf becomes negligible. Indeed, Figure 9 shows the probability $P(n > 1|\alpha^-)$ of multiple rebounds for particles in terms of the incident angle α^- , measured from the simulations with the geometrical rough wall models. The percentage of particles enduring several rebounds is found to be always smaller than 10% with the maximum value for an incident angle α^- of the order of $2\Delta\gamma$. This percentage decreases strongly when the incident angle increases and, for example, less than 1% of particles are enduring several collisions with incident angle α^- greater than $5\Delta\gamma$.

New Rough Wall Multi-Collision Model

Basics of the modeling

The basic argument of this modeling is to consider that the incident particle makes one and only one rebound on a virtual inclined smooth wall, whose the angle is sampled from a stochastic process. The main mechanisms highlighted during particle-rough wall interactions which must be accounted for are both the incident and the multiple rebound effects.

In the light of the direct simulations carried out in the previous section, the incident effect occurred at the first rebound process is clearly described by the effective function proposed by Sommerfeld & Huber (1999).

The rebound phase, after the first incidence has pointed out the existence of multiple rebounds. Thus, for a given incident particle with a collision angle α^- , the probability that it moves away from the macroscopic wall with a rebound angle α^+ , can be written as follows :

$$R(\alpha^+|\alpha^-) = \sum_{n=1}^{\infty} Q(\alpha^+, n|\alpha^-) \quad (12)$$

in which $Q(\alpha^+, n|\alpha^-)$ represents the probability that the incident particle which collides the wall with the angle α^- leaves the wall region with a rebound angle α^+ after n rebounds.

However, the sum in Eq. 12 can be split up into two probabilities, so as to get :

$$R(\alpha^+|\alpha^-) = Q(\alpha^+, n = 1|\alpha^-) + Q(\alpha^+, n > 1|\alpha^-) \quad (13)$$

The first term $Q(\alpha^+, n = 1|\alpha^-)$ represents the conditioned probability by the incident angle α^- that the incident particle leaves the wall region with the angle α^+ after one and only one rebound. The second one, $Q(\alpha^+, n > 1|\alpha^-)$, is the probability that the incident particle moves away from the wall after at least two rebounds. The modeling of the multiple rebound effect described by $R(\alpha^+|\alpha^-)$ is then reduced to the modeling of the two probability distributions.

Since the multiple rebound process assumes necessarily that the particle rebounds first once with an angle α_1^+ , the

probability $Q(\alpha^+, n|\alpha^-)$ may be written as :

$$Q(\alpha^+, n|\alpha^-) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Q(\alpha^+, n|\alpha_1^+, \alpha^-) R_1(\alpha_1^+|\alpha^-) d\alpha_1^+ \quad (14)$$

in which $R_1(\alpha_1^+|\alpha^-)$ is the transition probability that the incident particle rebounds the first once on an inclined smooth wall with $\alpha^+ = \alpha_1^+$. According to Konan *et al.* (2006), this probability is given by :

$$R_1(\alpha_1^+|\alpha^-) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta(\alpha^+ - \varphi_{\alpha^-}(\gamma)) P_{eff}(\gamma|\alpha^-) d\gamma \quad (15)$$

where φ_{α^-} is a function derived from the rebound laws 8 and 9 on a smooth wall inclined by γ .

$Q(\alpha^+, n|\alpha_1^+, \alpha^-)$ is the probability that the incident particle leaves the wall region with α^+ after n rebounds conditioned by both the first rebound angle α_1^+ and the incident angle α^- . Furthermore, this conditioned probability may be written as :

$$Q(\alpha^+, n|\alpha_1^+, \alpha^-) = Q(\alpha^+|n, \alpha_1^+, \alpha^-) P^*(n|\alpha_1^+, \alpha^-) \quad (16)$$

where $P^*(n|\alpha_1^+, \alpha^-)$ is the conditioned probability by both the first rebound angle α_1^+ and the incident angle α^- , that the particle leaves the wall region after n rebounds.

From Eq. 14 and Eq. 16, the probability $Q(\alpha^+, n = 1|\alpha^-)$ that the incident particle makes one and only one rebound before leaving the wall region becomes :

$$Q(\alpha^+, n = 1|\alpha^-) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Q(\alpha^+|n = 1, \alpha_1^+, \alpha^-) \times P^*(n = 1|\alpha_1^+, \alpha^-) R_1(\alpha_1^+|\alpha^-) d\alpha_1^+ \quad (17)$$

The conditioned probability $Q(\alpha^+|n = 1, \alpha_1^+, \alpha^-)$ is, of course, equal to $\delta(\alpha^+ - \alpha_1^+)$. So,

$$Q(\alpha^+, n = 1|\alpha^-) = P^*(n = 1|\alpha^+, \alpha^-) R_1(\alpha^+|\alpha^-) \quad (18)$$

The second probability $Q(\alpha^+, n > 1|\alpha^-)$, in (Eq. 13), for the incident particle to make over one rebound before leaving the wall may be written :

$$Q(\alpha^+, n > 1|\alpha^-) = Q(\alpha^+|n > 1, \alpha^-) P(n > 1|\alpha^-) \quad (19)$$

in which $P(n > 1|\alpha^-)$ represents the conditioned probability to get over one rebound by the incident angle α^- .

Furthermore,

$$P(n > 1|\alpha^-) = 1 - P(n = 1|\alpha^-) \quad (20)$$

with, by definition :

$$P(n = 1|\alpha^-) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P^*(n = 1|\alpha^+, \alpha^-) R_1(\alpha^+|\alpha^-) d\alpha^+ \quad (21)$$

With Eq. 18 and Eq. 19, Eq. 13 leads to the exact equation :

$$R(\alpha^+|\alpha^-) = P^*(n = 1|\alpha^+, \alpha^-) R_1(\alpha^+|\alpha^-) + Q(\alpha^+|n > 1, \alpha^-) P(n > 1|\alpha^-) \quad (22)$$

Two assumptions are needed to close (Eq. 22), since the probabilities $P^*(n = 1|\alpha^+, \alpha^-)$ and $Q(\alpha^+|n > 1, \alpha^-)$ are unknown.

First, we assume that the conditioned probability $P^*(n = 1|\alpha^+, \alpha^-)$ that the particle leaves the wall region after one and only one rebound is very weakly conditioned by the incident angle, so that :

$$P^*(n = 1|\alpha^+, \alpha^-) \approx P^*(n = 1|\alpha^+) \quad (23)$$

This assumption is supported by the rough wall geometrical model simulations which show the weak dependance of the probability to get one and only rebound on the incident angle α^- (see figure 7).

The second assumption is about the α^+ pdf of the particles enduring multiple rebounds $Q(\alpha^+|n > 1, \alpha^-)$ which is assumed to be nearly equal to the one of particles which endure only one collision $Q(\alpha^+|n = 1, \alpha^-)$, so :

$$Q(\alpha^+|n > 1, \alpha^-) \simeq \frac{Q(\alpha^+, n = 1|\alpha^-)}{P(n = 1|\alpha^-)} \quad (24)$$

Finally, using Eq. 18 and Eq. 24, the equation Eq. 22 leads to:

$$R(\alpha^+|\alpha^-) = \frac{P^*(n = 1|\alpha^+) R_1(\alpha^+|\alpha^-)}{P(n = 1|\alpha^-)} \quad (25)$$

Using Eq.20 and Eq. 21, we get:

$$\int R(\alpha^+|\alpha^-) d\alpha^+ = 1 \quad (26)$$

We can notice that the absolute error on the modeling of the α^+ unconditioned pdf $R(\alpha^+|\alpha^-)$ is written using Eq. 24 in Eq.22:

$$\delta R(\alpha^+|\alpha^-) = P(n > 1|\alpha^-) [Q(\alpha^+|n > 1, \alpha^-) - Q(\alpha^+|n = 1, \alpha^-)] \quad (27)$$

This error remains small as shown in the previous section, according to simulation results with the rough wall geometrical models (figures 8 and 9).

Proposition of an analytical formulation of the probability to make only one rebound

The proposed "*grazing rebound effect*" is essentially based on the probability to get one and only rebound by miming the multiple rebound effects from $P^*(n = 1|\alpha^+)$. Its analytical formulation is so needed.

We found that this probability is well-fitted by the following formulation (see figure 10):

$$P^*(n = 1|\alpha^+) = \begin{cases} \tanh\left(\frac{3}{2} \frac{\alpha^+}{\Delta\gamma}\right) & \text{if } \alpha^+ \geq 0 \\ 0 & \text{if } \alpha^+ \leq 0 \end{cases} \quad (28)$$

We can notice that one of the essential differences between the Sommerfeld & Huber (1999) "*shadow effect*" model and

the present one is that in the "*shadow effect*" model, the probability to make a only rebound is modeled by the following Heaviside function :

$$P^*(n = 1|\alpha^+) = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha^+ > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (29)$$

since the analysis which led to this modeling ignored the eventuality of multiple rebounds for a particle which rebounds, with $\alpha^+ > 0$.

The difference between both approaches is highlighted on figure 11. However, as we will see it, the new formulation is a generalization of Sommerfeld & Huber (1999) model.

From Eq. 25, Eq. 28 and Eq. 15, we have plotted a few rebound angle pdf in the case of fully elastic rebounds that we compare to the previous direct simulations performed by assuming elastic rebounds. Figures 12-a and 12-b show a very good agreement between this new approach and the direct simulations. Therefore, the formulation (Eq. 28) allows to reproduce properly the "*grazing rebound effect*", mainly characterized by the pdf of rebound angles (Eq. 25).

New Lagrangian particle-rough wall interaction model setup

The new Lagrangian particle-rough wall interaction treatment is similar enough to Sommerfeld & Huber (1999) stochastic model, since the incident particle does make only one rebound. However, the condition $\alpha^+ > 0$ on rebound angle, which describes the rebound effect in the "*shadow effect*" model, is not sufficient enough to keep the sampled value of the wall roughness γ . Actually after the bouncing, the particle has a non-zero probability to make another rebound, especially this probability is high if it remains grazing at the wall. An stochastic process is then used to reproduce this effect.

The procedure used to reproduce both the incident and rebound effects occurring during the particle-rough wall interaction is summarized by the following points :

(a) : the incident shadow effect : the wall roughness angle γ is sampled from the normalized form of the "*effective pdf*" (Sommerfeld & Huber (1999)) given by :

$$P_{eff}(\gamma|\underline{c}_p^-) = \begin{cases} \frac{\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma}{\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}} P_g(\gamma) & \text{if } \underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma \leq 0 \\ 0 & \text{if } \underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma \geq 0 \end{cases} \quad (30)$$

where \underline{c}_p^- is particle incident velocity, \underline{n} and \underline{n}_γ are respectively unit normal vector to the macroscopic wall and the virtual wall inclined of the angle γ (see figure 13). It should be noticed that $\underline{c}_p^- \cdot \underline{n} < 0$, since the particle shall come from the flow. $P_g(\gamma)$ is the unconditional gaussian distribution given by (Eq. 6).

The sampling of the wall roughness angle γ in terms of the normalized form of Eq. 30 is achieved by using a rejection method.

(b) : for this sampled wall roughness angle γ , we calculate the rebound velocity and rebound angle α^+ .

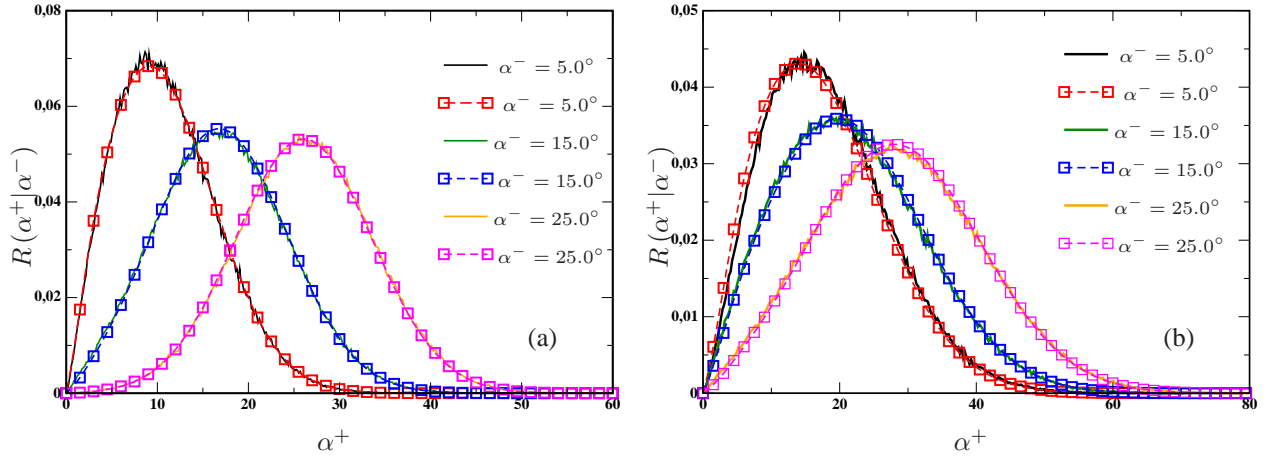


Figure 12: Particle rebound angle probability density function. Fully elastic rebound cases ($e_w = 1, \mu_w = 0$). (a) : $\Delta\gamma = 3.8^\circ$ and (b) : $\Delta\gamma = 6.5^\circ$. Comparison between direct simulations (single line) and modeling given by Eq. 25-Eq. 28 (square and dashed line), for three collision angles α^- .

(c) : "**grazing rebound effect**" : in terms of α^+ calculated in (b), we use the analytical formulation (Eq. 28) to estimate the probability to make one and only one rebound : $P^*(n = 1|\alpha^+)$.

- if $P^*(n = 1|\alpha^+) = 0$: we must sample a new value γ . Therefore, we return to (a). This is equivalent to Sommerfeld & Huber (1999) model when the particles bounce towards the wall.
- if $P^*(n = 1|\alpha^+) > 0$: we sample one number S randomly from uniform distribution between 0 and 1. If $S \in [0, P^*(n = 1|\alpha^+)]$ we keep γ , otherwise if $S \in]P^*(n = 1|\alpha^+), 1]$, a second collision should occur and we must sample a new value of γ , and then we return to (a). This decision procedure is summarized by figure 16.

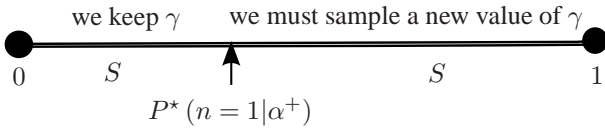


Figure 16: Summarized of procedure use to choose the wall roughness γ at point (c).

The ability of this new modeling to reproduce the effects of wall roughness during the particle-rough wall interactions is checked. For that, many particles are impinged with different incident angles on rough wall, where the roughness effects were simulated from the above points (a) to (c), while the inelastic collisions on the wall are modeled by Eq. 10-Eq. 11 in which the coefficients are those given in table 1. Figures 14 and 15 show respectively the mean value of the rebound angle and the pdf of the rebound angle α^+ . The obtained results are compared to Sommerfeld & Huber (1999) measurements and the *SEM* and *ISEM* models. The comparisons

show an improvement in agreement with measurements with the new modeling, especially for the small incident angles for both the pdf and the mean value of the rebound angle.

This new modeling is used to simulate Sommerfeld & Kussin (2004) experimental study in horizontal narrow channel with stainless rough wall from LES/DPS simulations in Konan *et al.* (2007).

Conclusion

We have analyzed the mechanisms occurring during particle-rough wall interactions. Direct simulations of particles rebounds have been carried out on simulated rough walls modeled on the one hand following the random normal distribution of wall roughness Sommerfeld (1992) approach and on the other hand from Tsirkunov & Panfilov (1998) geometrical rough wall model. These investigations have confirmed the existence of multiple rebounds and they emphasized the both incident and multiple rebound effects as the main mechanisms which drive these interactions. It has been shown that the incident effect is well-modeled for the first collision by Sommerfeld & Huber (1999) wall roughness effective pdf. It was shown, however, that the use of this effective pdf in Sommerfeld & Huber (1999) "*shadow effect*" model did not sufficient to clearly describe the particle-rough wall interactions, since the rebound effect was partially treated by the "*shadow effect*" model. This rebound effect which should be considered as a realisability condition of particle rebound emphasized the existence of a non-zero probability to hit the rough wall once more even when the rebound angle is greater than zero. This effect is especially high for the particles which rebound with a grazing rebound angle. In the light of these results, we have proposed an only one rebound model based on the multiple rebound effects.

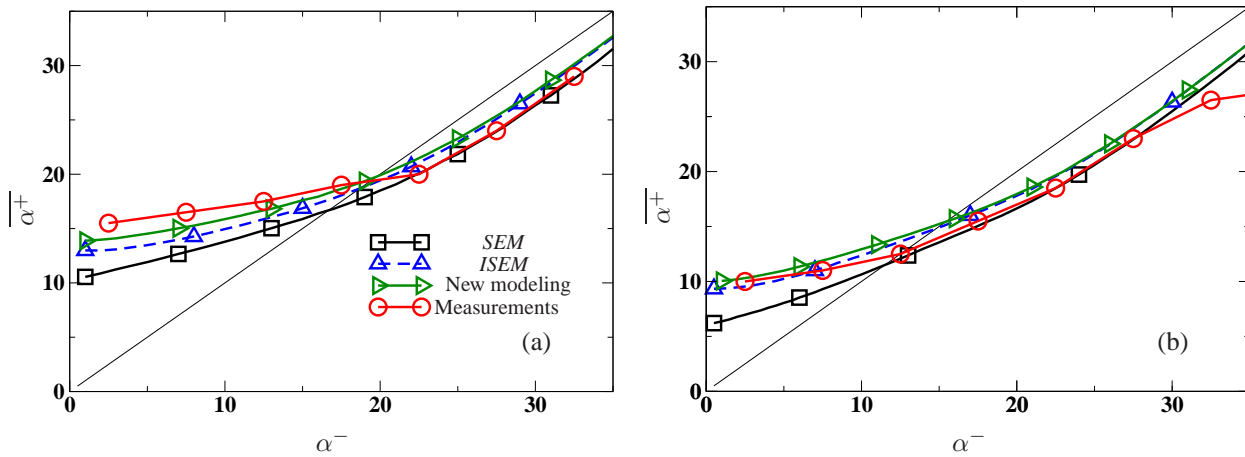


Figure 14: Mean value of rebound angle in terms of the collision angle. Comparison between Sommerfeld & Huber (1999) measurements, *SEM*, *ISEM* and the new proposed modeling. (a) $d_p = 100\mu m$ and (b) $d_p = 500\mu m$.

References

- Benson, M., Tanaka, T. & Eaton, J. K. Effects of wall roughness on particle velocities in a turbulent channel flow. Transactions of the ASME. Vol.127, 250 – 256 (2005)
- Frank, TH., Schade, K.-P. and Petrak, D. Int. J. Multiphase Flow. Vol.19, N°1, 187 – 198 (1993)
- Konan, N. A., Simonin, O. & Squires, K. D. Rough wall boundary condition derivation for particle continuum equations : validation from LES/DPS of gas-solid turbulent channel flow. In Proceedings of FEDSM2006 ASME Joint U.S.-European Fluids Engineering Summer Meeting, Miami, Floride, USA, July 17-20 (2006)
- Konan, A., Badarayani, S., Simonin, O. & Squires, K. LES/DPS of Horizontal Gas-Solid Channel Flow with Particle-Particle Collision and Wall Roughness Effects. 6th Int. Conference on Multiphase Flow, ICMF 2007, Leipzig, Germany, July 9-13 (2007)
- Kussin, J. & Sommerfeld, M. Experimental studies on particle behaviour and turbulence modification in horizontal channel flow with different wall roughness. Experiments in Fluids. Vol.33, 143 – 159 (2002)
- Matsumoto, S. & Saito, S. On the mechanism of suspension of particles in horizontal pneumatic conveying : Monte Carlo simulation based on the irregular bouncing model. J. Chem. Engng Japan. Vol.3, N°1, 83 – 92 (1970a)
- Matsumoto, S. & Saito, S. Monte Carlo simulation of horizontal pneumatic conveying based on the rough wall model. J. Chem. Engng Japan. Vol.3, N°2, 223 – 230 (1970b)
- Schade, K.-P. & Hädrich, Th. Investigation of influence of wall roughness on particle-wall collision. Third Int. Conference on Multiphase Flow, ICMF'98, Lyon, France, June 8-12 (1998)
- Sommerfeld, M. Modelling of particle-wall collision in confined gas-particle flows. Int. J. Multiphase Flow. Vol.18, N°6, 905 – 926 (1992)
- Sommerfeld, M. & Huber, N. Experimental analysis and modelling of particle-wall collisions. Int. J. Multiphase Flow. Vol.25, 1457 – 1489 (1999)
- Sommerfeld, M. & Kussin, J. Wall roughness effects on pneumatic conveying of spherical particles in a narrow horizontal channel. Powder Technology. Vol.142, 180 – 192 (2004)
- Tsirkunov, Yu. M. & Panfilov, S. V. Modelling of particle-wall interaction in two-phase flows at moderate and high particle impact velocity. Third Int. Conference on Multiphase Flow, ICMF'98, Lyon, France, June 8-12 (1998)
- Tsuji, Y., Morikawa, Y., Tanaka, T., Nakatsukasa, N. & Nakatani, M. Numerical simulation of gas-solid two-phase flow in a two-dimensional horizontal channel. Int. J. Multiphase Flow. Vol.13, N°5, 671 – 684 (1987)

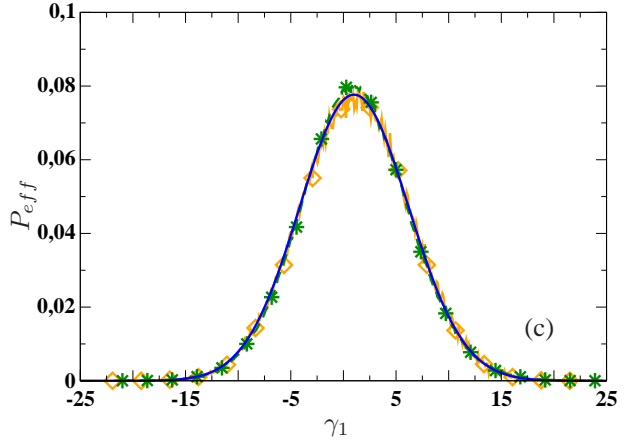
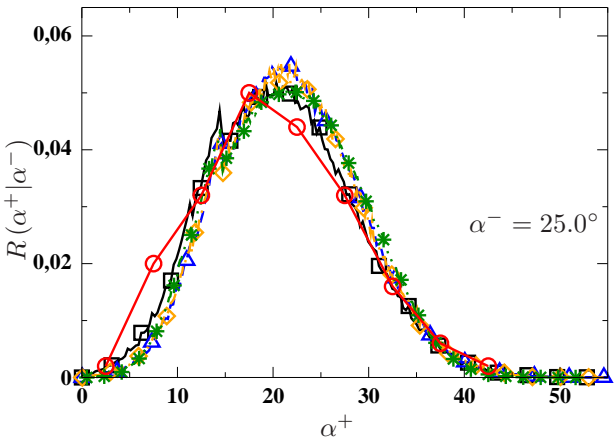
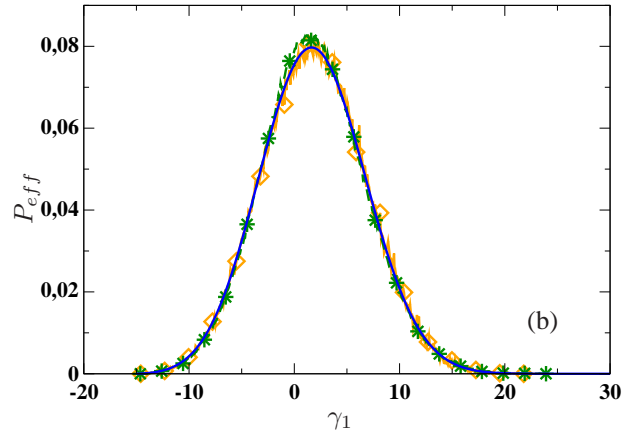
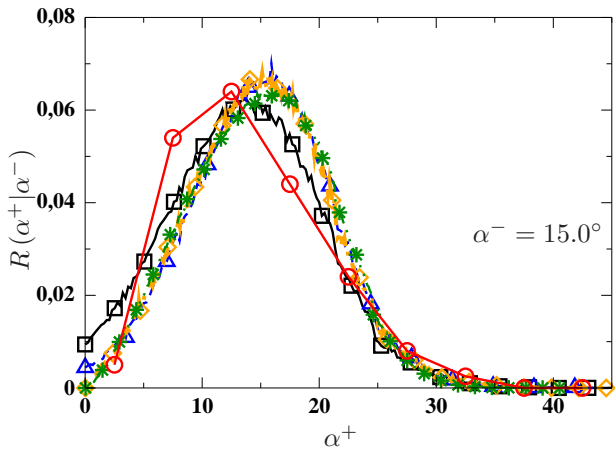
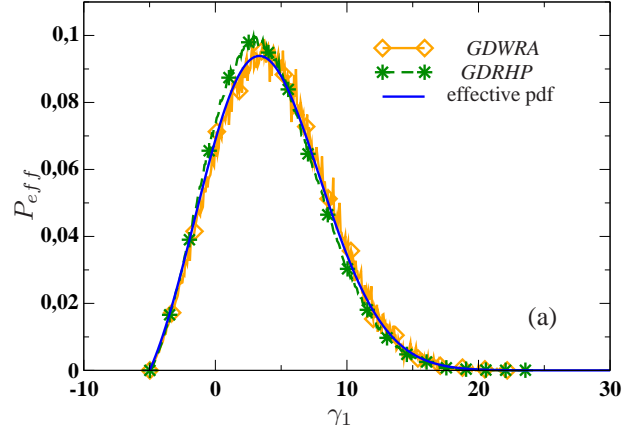
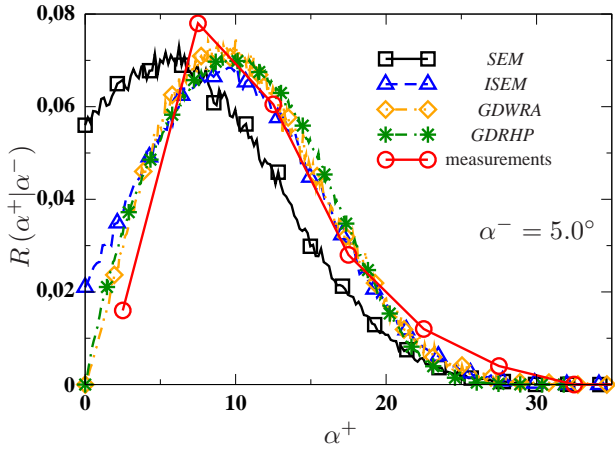


Figure 5: Particle rebound angle probability density function. Comparison between Sommerfeld & Huber (1999) measurements and direct simulations of particle rebounds on the both geometrical rough walls (*GDWRA* and *GDRHP*) and the both wall roughness effects models (*SEM* and *ISEM*), in the case where the particle diameter is $d_p = 500\mu m$ ($\Delta\gamma_m = 3.8^\circ$).

Figure 6: Wall roughness angle probability density function seen by the incident particle at the first collision for three incident cases : (a) : $\alpha^- = 5.0^\circ$, (b) : $\alpha^- = 15.0^\circ$ and (c) : $\alpha^- = 25.0^\circ$ from the both geometrical rough wall model *GDWRA* (diamond) and *GDRHP* (star) compared to Sommerfeld & Huber (1999) effective pdf.

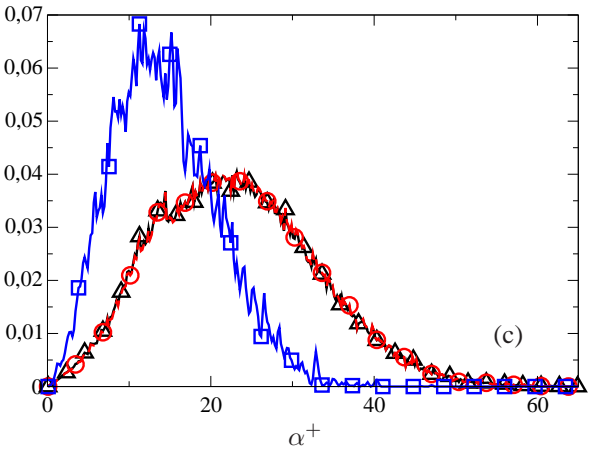
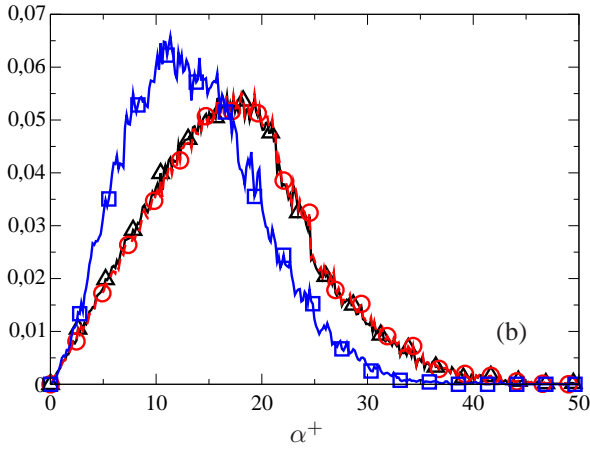
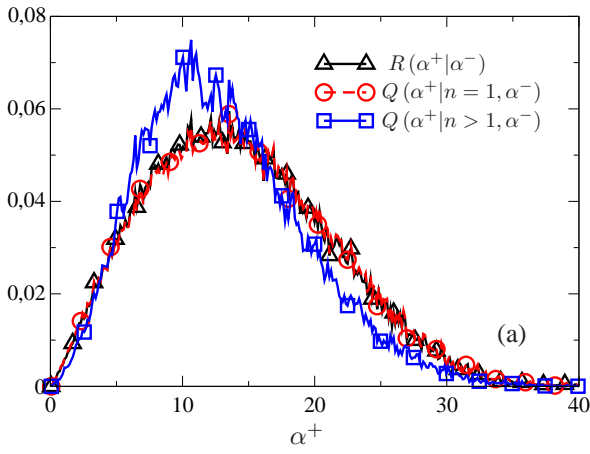


Figure 8: Rebound angle probability density function conditioned by the number of rebounds. ($Q(\alpha^+|n=1, \alpha^-)$) particles which made only one rebound, ($Q(\alpha^+|n > 1, \alpha^-)$) those which made multiple rebounds while ($R(\alpha^+|\alpha^-)$) includes the both cases. (a) : $\alpha^- = 5.0^\circ$, (b) : $\alpha^- = 15.0^\circ$ and (c) : $\alpha^- = 25.0^\circ$ ($d_p = 500\mu\text{m}$).

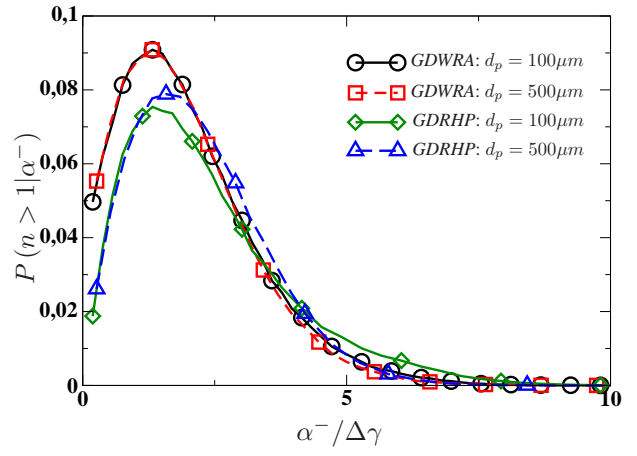


Figure 9: Probability to get the particles which make multiple rebounds in terms of the incident angle.

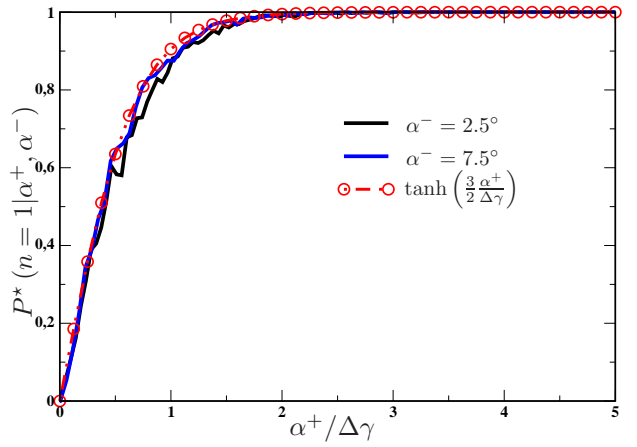


Figure 10: Analytical proposition for the well-fitting of the probability to get one and only rebound in term of the rebound angle α^+ . Two incident angle cases ($\alpha^- = 2.5^\circ$ and $\alpha^- = 7.5^\circ$) are shown for inelastic rebounds on the rough wall ($\Delta\gamma = 6.5^\circ$).

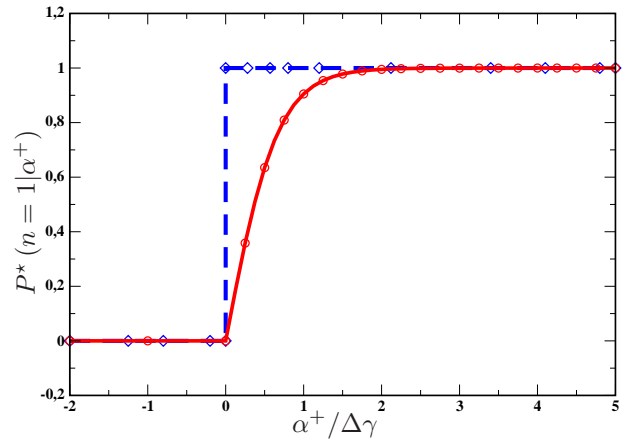


Figure 11: Probability to get one and only rebound in term of the rebound angle α^+ . "o - o" : the new formulation, "diamond - diamond" : Sommerfeld & Huber (1999).

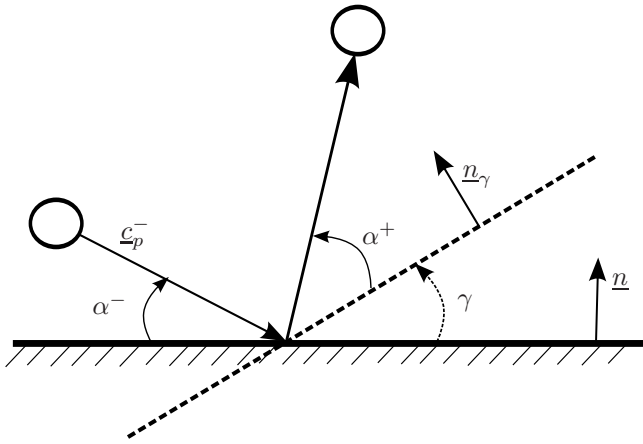


Figure 13: Illustration of incident particle which rebounds on smooth virtual wall inclined of the angle γ .

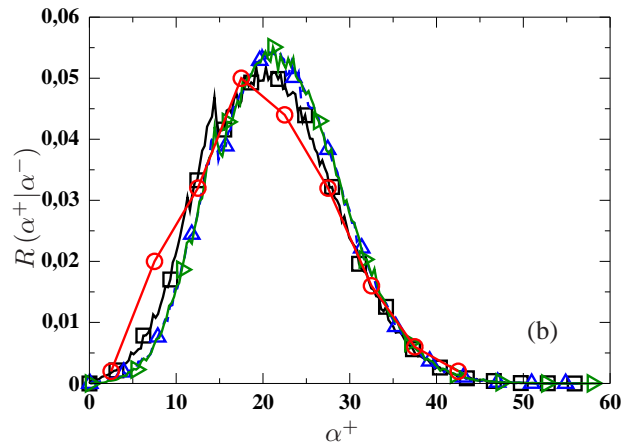
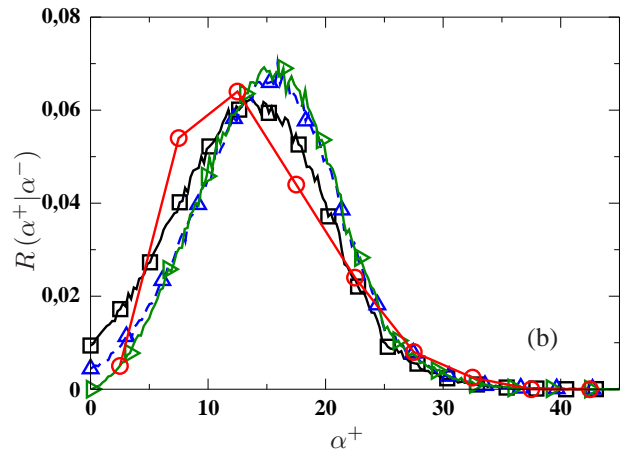
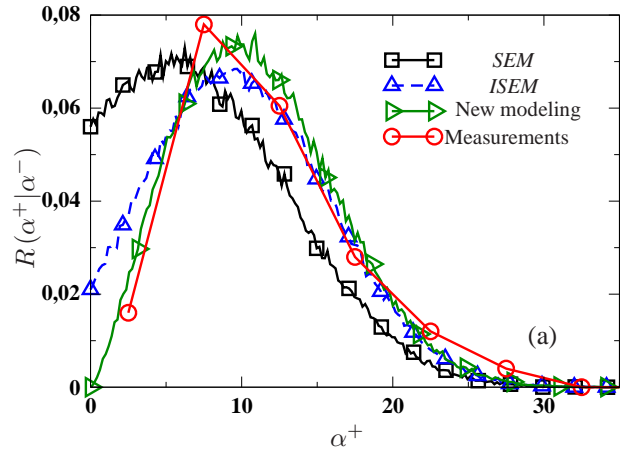


Figure 15: Particle rebound angle probability density function. Comparison between Sommerfeld & Huber (1999) measurements ($d_p = 500\mu m$), SEM, ISEM and the new proposed modeling. (a) : $\alpha^- = 5.0^\circ$, (b) : $\alpha^- = 15.0^\circ$ and (c) : $\alpha^- = 25.0^\circ$.

LES/DPS of Horizontal Gas-Solid Channel Flow with Particle-Particle Collision and Wall Roughness Effects

Arthur Konan¹, Sachin Badarayani², Olivier Simonin¹ and Kyle D. Squires²

(1) Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, UMR 5502 CNRS/INPT/UPS, 31400 Toulouse, France

(2) Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Arizona State University, Tempe, Arizona 85287-6106, USA

E-mail: olivier.simonin@imft.fr

Keywords: rough wall, shadow effect, LES/DPS, channel flow, PDF

Abstract

The present paper focuses on the numerical prediction of statistical properties of solid, colliding particles transported in a fully developed horizontal gas-phase turbulent channel flow. Computations were performed in the framework of Large Eddy Simulation for the fluid phase and Discrete Particle Simulation for the dispersed phase while the wall roughness effects were taken into account following Sommerfeld & Huber (1999). Numerical results are compared to measurements obtained by Sommerfeld & Kussin (2004). An alternative rough wall collision model proposed in Kannengieser *et al.* (2007) is also evaluated.

Introduction

One of the relevant mechanisms not yet completely understood in confined multiphase flows are particle-wall interactions. For inertial particles whose the motion is strongly influenced by rebound from the wall, accounting for particle-wall interactions crucial in order to more accurately predict properties of the dispersed flow. In order to gain a basic understanding of the controlling mechanisms, much research has been directed at particle bouncing on smooth walls. Studies have typically been carried out using Lagrangian treatment of the particles (see e.g. Ottjes (1978); Osterlé (1991)). In the framework of Eulerian approaches, analysis of particle-wall interactions over smooth surfaces have provided a basis for derivation of sophisticated wall boundary conditions for the first-order moments of the dispersed phase (see Sakiz & Simonin (1999); Alipchenkov *et al.* (2001)).

Recent measurements in horizontal and vertical turbulent two-phase channel flows from Sommerfeld & Huber (1999), Kussin & Sommerfeld (2002) and Benson *et al.* (2005) have shown that wall roughness has a strong effect on dispersed phase properties. Kussin & Sommerfeld (2002) showed that wall roughness enhances the transverse dispersion of particles and their fluctuating velocities across the channel. Their measurements indicated that wall roughness also causes a remarkable reduction of the particle transport velocity. Furthermore, previous measurements of Sommerfeld & Huber (1999) focused on the processes of rebound characteristics such as the wall roughness “seen” by the incident particle, rebound angle, and restitution and friction coefficient at the wall, providing a substantial contribution to improving understanding of the mechanisms relevant to particle-rough

wall interactions. Analogous to the wall roughness effects reported by Kussin & Sommerfeld (2002), Benson *et al.* (2005) showed that the reduction of the particle transport velocity compared to the corresponding result for a smooth wall is around 40%.

Experimentally, Frank *et al.* (1993) and Schade & Hädrich (1998) improved the knowledge of particles-wall interactions by studying rebound angle and the influence of variations in restitution and friction coefficient. The modelling of the wall roughness can be decomposed into two parts. The first part considers geometrical representation of the wall on which the incident particle reaches (Matsumoto & Saito (1970a); Matsumoto & Saito (1970b), Frank *et al.* (1993); Tsirkunov & Panfilov (1998)). In this approach, although the wall geometry is represented using stochastic approaches, its structure must be known prior to Lagrangian simulation. The latter consists in more fine stochastic description of particle-wall collision. The basic idea is to assume whenever the particle reaches the rough wall, that it contacts a smooth “virtual” inclined wall with a randomly chosen inclination angle. This modeling approach was first introduced by Tsuji *et al.* (1987) and improved by Sommerfeld (1992) and Sommerfeld & Huber (1999) by accounting for more of the physical aspects of particle-rough wall interactions, with the improvements guided by their measurements and Lagrangian simulations.

In the present study, wall roughness is represented using the “shadow effect” model of Sommerfeld & Huber (1999) in simulations of turbulent two-phase flow in a horizontal channel. Simulations are carried out LES for the carrier-phase flow and DPS for the dispersed-phase treatment. Also presented is an evaluation of the rough wall collision model developed by Kannengieser *et al.* (2007).

Nomenclature

\underline{c}_p^-	particle incident velocity vector
\underline{n}	wall-normal unit vector
\underline{n}_γ	inclined virtual wall-normal unit vector
P_{eff}	effective wall roughness PDF
P_g	normal distribution function
Re_τ	friction Reynolds number
u_τ	friction velocity
\underline{v}_p^-	particle incident velocity vector
\underline{v}_p^+	particle rebound velocity vector

Greek letters

α^-	collision angle
α^+	rebound angle
γ	wall roughness angle
$\Delta\gamma$	wall roughness angle standard deviation
δ	channel halfwidth
ν_T	eddy viscosity
τ_{ps}	particle response time
τ_w	wall shear stress

Subscripts

f	fluid
p	particle

Particle-Wall Collision “Shadow Effect” Model

This model, proposed by Sommerfeld & Huber (1999), simulates wall roughness effects by assuming that the impact angle is composed of the particle trajectory angle and a stochastic contribution due to wall roughness. The incident particle hits a smooth virtual inclined wall whose the inclination is randomly sampled (see figure 1).

Based on their measurements, the angular distribution characterizing wall roughness is represented using a normal distribution with a standard deviation $\Delta\gamma$ which depends on the structure of the wall roughness and the particle size:

$$P_g(\Delta\gamma, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\gamma^2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\Delta\gamma^2}\right) \quad (1)$$

For some incident angles, Schade & Hädrich (1998) pointed out that the effective pdf of the roughness angle experienced by the particles should be modified by an “incident effect”. According to Sommerfeld & Huber (1999) there exists a so-called “shadow effect” for small incident angles. This

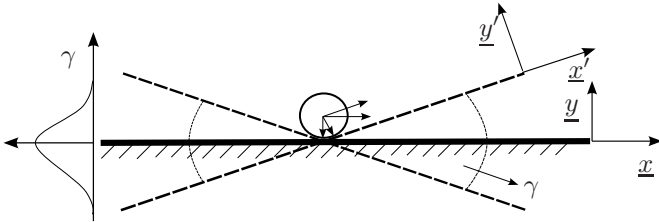


Figure 1: Sommerfeld bouncing model (Sommerfeld (1992)).

“shadow effect” results from the combination of two phenomena. The first occurs before the particle-wall collision and is due to the perspective of the physical rough wall for a given incident particle. Sommerfeld & Huber (1999) show that the effective distribution function of the wall roughness inclination seen by the particles is given by:

$$P_{eff}(\alpha^-, \Delta\gamma, \gamma) = \frac{P_g(\Delta\gamma, \gamma) \sin(\alpha^- + \gamma)}{\int_{-\alpha^-}^{\pi/2} P_g(\Delta\gamma, \gamma) \sin(\alpha^- + \gamma) d\gamma} \quad (2)$$

The second effect occurs following the particle-wall collision, i.e., at rebound and is due to the assumption that the particle should return into the flow.

The procedure proposed by Sommerfeld & Huber (1999) to account for this second shadow effect in simulations is:

- the roughness angle is sampled from the normal distribution function Eq. (1).
- if a negative roughness angle with an absolute value being larger than α^- is sampled, an unphysical collision results, namely the particle comes from behind the wall and hence a new value is sampled for γ .
- if the collision leads to a rebound velocity directed towards the wall, a new roughness angle is sampled.

This method results in the particle sampling randomly the wall roughness angle from a truncated normal distribution and does not account for the first mechanism.

This model has been applied with relative successes by comparison with experiments in RANS/Lagrangian simulations (Lain *et al.* (2002)). It allowed study of the influence of the 3D wall roughness on the particle velocity variance, turbulent transport, and the concentration of the particles in a vertical turbulent channel flow in the framework of LES/DPS simulations at low Reynolds number (Squires & Simonin (2006)). However, it has not yet been applied in LES/DPS simulations at high Reynolds number. In the following, we perform such a simulation that we compare to an experimental test case studied during the 11th Workshop on Two-Phase Flow Prediction, held in Merseburg, 2005. The test facility used for the experiments is the same presented in Sommerfeld & Kussin (2004). Fully-developed turbulent two-phase flow was established in a horizontal channel whose dimensions are 6 m in length, 35 mm height, and a width of 350 mm. The Reynolds number based on the friction velocity u_τ and channel halfwidth δ is $Re_\tau = 1050$. The dispersed phase was comprised of spherical glass beads, assumed mono-disperse in the simulations, while the channel walls are made of stainless steel plates.

Approach

LES of Turbulent Channel Flow

The fluid phase is modeled using LES in which the transport equations governing the large-scale motions are obtained by filtering the Navier-Stokes equations,

$$\frac{\partial \bar{u}_{f,i}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_{f,i} \bar{u}_{f,j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 \bar{u}_{f,i}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_{f,i}}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

in which $\bar{u}_{f,i}$ denotes the i^{th} component of the filtered fluid velocity. The streamwise (x), wall-normal (y), and spanwise directions are referred to, respectively, by $i = 1, 2$ and 3 . The subgrid-scale stress $\tau_{ij} = \overline{u_{f,i}u_{f,j}} - \bar{u}_{f,i} \bar{u}_{f,j}$ which represents the effect of the small scales on the resolved motions in the flow are modeled using an eddy viscosity Piomelli *et al.* (1989):

$$\tau_{ij} = -2\nu_T S_{ij} \quad (5)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_{f,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_{f,j}}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

$$\nu_T = l^2 \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad (7)$$

$$l = 0.1 \left[1 - \exp \left(-\frac{y^+3}{A^+3} \right) \right]^{1/2} (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3} \quad (8)$$

The dimensions of the computational domain are $2\pi\delta$ in the streamwise (x or x_1), π in the spanwise (z or x_3) and 2δ in the wall-normal (y or x_2) directions. Periodic boundary conditions are applied in the streamwise and spanwise directions. Owing to the high Reynolds number, a wall model is used to predict the instantaneous wall stress (Schumann (1975)):

$$\begin{aligned} \tau_{12}(x, z) &= \frac{\bar{u}(x, y_1, z)}{\langle \bar{u}(x, y_1, z) \rangle} \langle \tau_w \rangle, \\ \bar{v}_w(x, z) &= 0, \\ \tau_{32}(x, z) &= \frac{2}{Re_\tau} \frac{\bar{w}(x, y_1, z)}{\Delta y} \langle \tau_w \rangle \end{aligned} \quad (9)$$

in which y_1 indicates the first grid point of the wall-normal mesh, $\langle \tau_w \rangle$ is the mean wall stress.

The governing equations Eq. (5-8) are solved using a fractional step method (e.g. Burton & Eaton (2002)) on a staggered mesh comprised of $64 \times 64 \times 64$ cells in the x , y and z directions, respectively. The grid spacings are uniform in the three directions and correspond in viscous units to $\Delta x^+ \simeq 103$ ($\Delta x^+ = \Delta x Re_\tau / \delta$), $\Delta y^+ \simeq 40$ and $\Delta z^+ \simeq 52$. Spatial derivatives are approximated using second-order accurate central differences. The Poisson equation formulated for the pressure variable that is used to obtain a divergence-free velocity field is solved using fast transforms in the streamwise and spanwise direction, resulting in a series of tri-diagonal matrices that are efficiently inverted in the direction normal to the solid walls. The discretized system is advanced in time using an implicit/explicit time scheme (Crank-Nicholson and second-order Adams-Bashforth).

Discrete Particle Simulation

The spherical particles used in the experiments are characterized by material densities much larger than that of the fluid phase ($\rho_p \gg \rho_f$, where ρ_f is the fluid density and ρ_p is the particle density). We assume that their diameter d_p is small compared to the smallest length scales of the carrier-phase turbulent flow. Furthermore, owing to the large density ratio,

the dominant forces are assumed to reduce to drag and gravity, particle rotation is neglected. The equation of motion for a single particle is then:

$$\frac{dv_{p,i}}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{\rho_f}{\rho_p} \frac{C_D}{d_p} |\underline{v}_r| v_{r,i} + g_i \quad (10)$$

$$\frac{dx_{p,i}}{dt} = v_{p,i} \quad (11)$$

where $x_{p,i}$ and $v_{p,i}$ are respectively the i^{th} component of the position and the velocity of the particle; $v_{r,i}$ is the particle relative velocity defined by:

$$v_{r,i} = v_{p,i} - u_{f@p,i} \quad (12)$$

in which $u_{f@p,i}$ is the i^{th} component of fluid velocity locally undisturbed by the particle presence and at the particle position. Without two-way coupling $u_{f@p,i}$ is equal to the filtered fluid velocity $\bar{u}_{f,i}(\underline{x}_p(t), t)$ supplemented by a subgrid contribution. However, following Fede & Simonin (2006), the influence of subgrid turbulence is neglected, justified in the present case, for inertial particles with relaxation times τ_{ps} larger than the subgrid fluid turbulent characteristic time scale. The local drag coefficient C_D is modeled using the expression from Schiller & Nauman (1935):

$$C_D = \frac{24}{Re_p} [1 + 0.15 Re_p^{0.687}], \quad Re_p = \frac{|\underline{v}_r| d_p}{\nu_f} \quad (13)$$

Neglecting the rotation of the particles, the Hard Sphere model for modification of the velocities of particles A and B following a collision reduces to:

$$\begin{aligned} \underline{v}'_{pA} &= \underline{v}_{pA} + \frac{1}{2} (1 + e_c) (\underline{w}_r \cdot \underline{k}) \underline{k} \\ \underline{v}'_{pB} &= \underline{v}_{pB} - \frac{1}{2} (1 + e_c) (\underline{w}_r \cdot \underline{k}) \underline{k} \end{aligned} \quad (14)$$

where the primes denote the velocities after the collision, \underline{k} the unit-normal vector directed from the center of particle A to the center of particle B. $\underline{w}_r = \underline{v}_{pB} - \underline{v}_{pA}$ is the relative velocity of particle B compared to A and e_c is the restitution

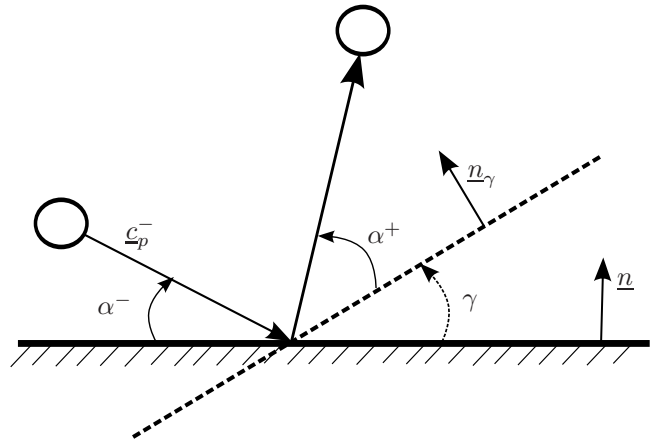


Figure 2: Illustration of incident particle which rebounds on smooth virtual wall inclined at angle γ .

coefficient. The particle-particle collision treatment is deterministic and the particles are moved following the collision for the remainder of the time step by assuming their trajectories are curvilinear and the local undisturbed fluid velocity at the particle position is constant during the time step.

To account for wall roughness effects, whenever one particle collides with the wall, it is assumed that it collides with an inclined smooth “virtual wall” such as shown in Figure 2. The inclination angle is provided by the procedures described in the previous section and the velocity changes due to the rebound, in the case of a sliding collision are given by:

$$\begin{aligned} \underline{v}_p^+ &= \underline{v}_p^- - (1 + e_w) (\underline{v}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) (\underline{n}_\gamma - \mu_w \underline{t}_\gamma) \\ \underline{t}_\gamma &= \frac{1}{|\underline{v}_g|} \underline{v}_g, \quad \underline{v}_g = \underline{v}_p^- - (\underline{v}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma) \underline{n}_\gamma \end{aligned} \quad (15)$$

in which the superscripts $(-)$ and $(+)$ denote, respectively, the particle properties before and after rebound; e_w and μ_w are the restitution and friction coefficients at the wall.

Following Grant & Tabakoff (1975), the restitution coefficient depends on the collision angle α^- . Based on their measurements, Sommerfeld & Huber (1999) have recently proposed to model both restitution and friction coefficients as:

$$\begin{aligned} e_w(\alpha^-) &= \begin{cases} \frac{e_h - 1}{\alpha_e} \alpha^- + 1 & \text{if } \alpha^- \in [0, \alpha_e] \\ e_h & \text{if } \alpha^- \geq \alpha_e \end{cases} \quad (16) \\ \mu_w(\alpha^-) &= \begin{cases} \frac{\mu_h - \mu_0}{\alpha_\mu} \alpha^- + \mu_0 & \text{if } \alpha^- \in [0, \alpha_\mu] \\ \mu_h & \text{if } \alpha^- \geq \alpha_\mu \end{cases} \quad (17) \end{aligned}$$

where the rebound coefficients are e_h , α_e , μ_h and μ_0 . The angles α_e and α_μ which appear in (16)-(17) are given from experiments. It should be noticed, however, that in order to remain consistent with simulation approach, we have replaced in the computations α^- by $\alpha^- + \gamma$ in Eq. (16) and Eq. (17).

The set of equations (10)-(11) is integrated in time using the second-order Adams-Bashforth method. Fourth-order Lagrange polynomials are used to interpolate the fluid velocity to the particle position. However, as the wall layer is not directly resolved in the LES for the fluid phase, the first point in the wall-normal fluid mesh is located at $y^+ \simeq 20$. For the two cases presented in the next section, the particle diameters in viscous units were $d_p^+ \simeq 6.0$ and $d_p^+ \simeq 7.8$. The fluid velocities at the first point off the wall were extrapolated to the surface prior to the velocity interpolation process, which will influence accuracy.

Results and Discussion

Simulations have been carried out by considering for the same fluid flow ($Re_\tau = 1050$), two different dispersed phase cases characterized mainly by the particle diameters d_p and the wall roughness standard deviation $\Delta\gamma$. The particles have the same density $\rho_p = 2450 \text{ kg/m}^3$ and their Stokes is given by $St = \tau_{ps}/(\delta/u_\tau)$ where the response time is $\tau_{ps} = \rho_p d_p^2 / (18\nu_f \rho_f)$. All the dispersed phase parameters

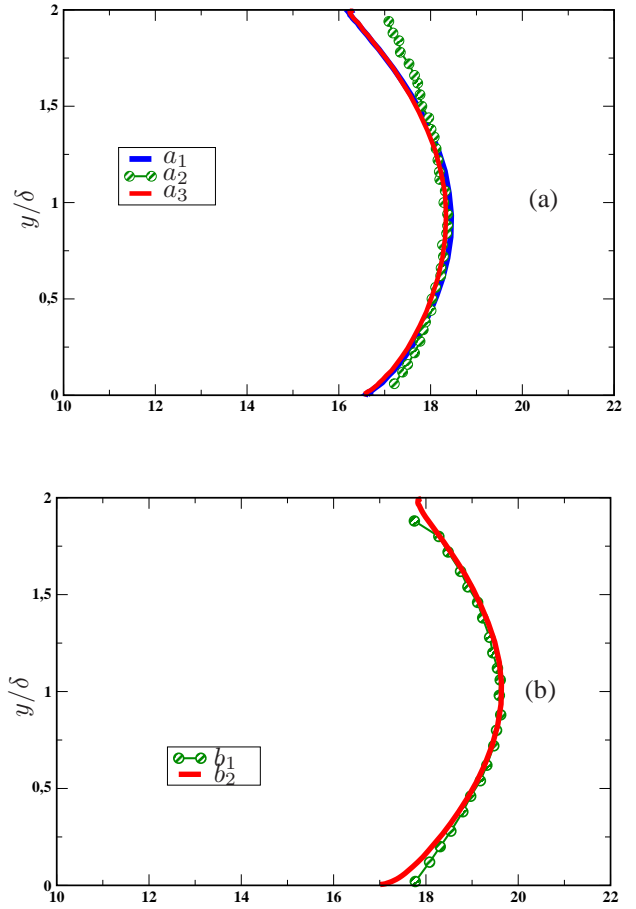


Figure 4: Particle streamwise mean velocity. (a) case 1 and (b) case 2. a_2 and b_1 are the measurements. a_1 : $\Delta\gamma = 5.3^\circ$, a_3 : $\Delta\gamma = 6.5^\circ$ and b_2 : $\Delta\gamma = 1.0^\circ$.

are summarized in Table 1. For case 1, the actual value of the wall roughness standard deviation $\Delta\gamma$ measured by Sommerfeld & Huber (1999) is shown in brackets ($\Delta\gamma = 5.3^\circ$). However, in their simulations these investigators increased the value to $\Delta\gamma = 6.5^\circ$, so as to obtain more accurate predictions. Presented below are results for these two standard deviations, in order to assess the influence of the roughness angle. Despite the high volume fractions (greater than 10^{-6}), one-way coupling has been considered. Particle-particle collisions were assumed to be inelastic with $e_c = 0.9$.

Two-phase flow mean velocity and turbulence properties

Fluid statistics

The fluid statistics are obtained by averaging in time in planes $(x - z)$ parallel to the horizontal channel walls. The results presented in Figures (3 a)-(3 d) show that the streamwise mean velocity $\langle \bar{u}_f \rangle_f = U_f$, the rms velocities $\langle u_f'^2 \rangle_f^{1/2}$ and $\langle v_f'^2 \rangle_f^{1/2}$, and the shear stress $\langle u_f' v_f' \rangle_f$ are well-predicted compared to the experiment, even considering that in the near wall region the LES is not sufficiently resolved to com-

	d_p (μm)	St	$\Delta\gamma$	η (mass loading)	α_p, N_p	e_h	α_e	μ_h	μ_0	α_μ
case 1	100	4.06	6.5° (5.3°)	0.2	$1.05 \times 10^{-4}, 42400$	0.7	22.0°	0.15	0.5	20.0°
case 2	130	6.86	1.0°	0.3	$1.49 \times 10^{-4}, 27345$	0.9	22.0°	0.15	0.4	20.0°

Table 1: Particle parameters used in the LES/DPS.

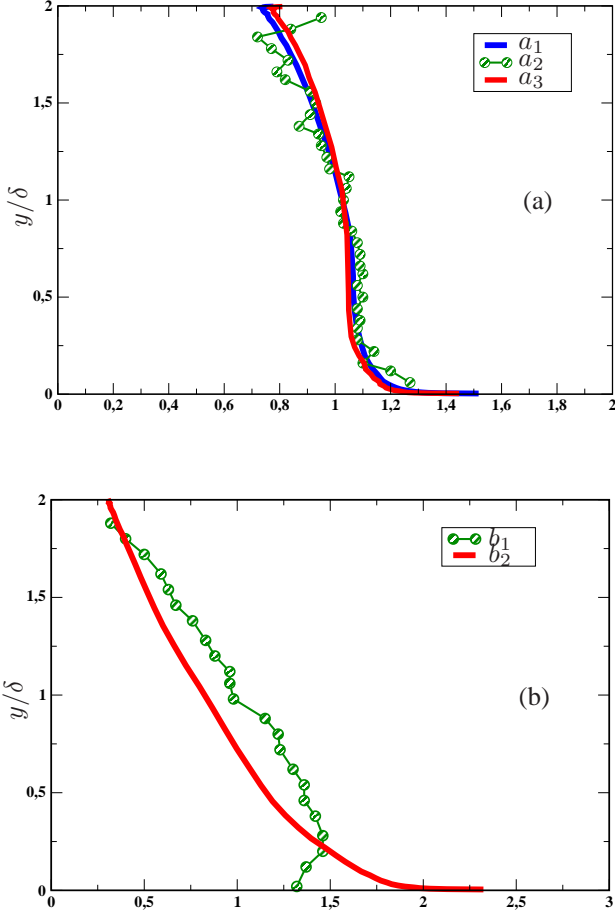


Figure 5: Normalized particle flux. (a) case 1 and (b) case 2. a_2 and b_1 are the measurements. a_1 : $\Delta\gamma = 5.3^\circ$, a_3 : $\Delta\gamma = 6.5^\circ$ and b_2 : $\Delta\gamma = 1.0^\circ$.

pletely capture the rms velocities. This can be explained by the fact that wall models are employed in the present computations which are defined in terms of the velocity of the core of the flow. Actually, although the near wall region is a region of net turbulence production and has been shown to be self-sustaining (Jiménez (1999)). The wall model used here enforces proportionality between the wall stress and the velocity at the first point in both the streamwise and spanwise directions.

Secondly, the extrapolation performed prior to the interpolation phase does not seem to influence the statistics of the velocity at the particle position. However, it is likely that instantaneously this procedure leads to some inaccuracies in the interpolation of fluid velocity seen by the particle. To estimate the error, one should study for instance the energy

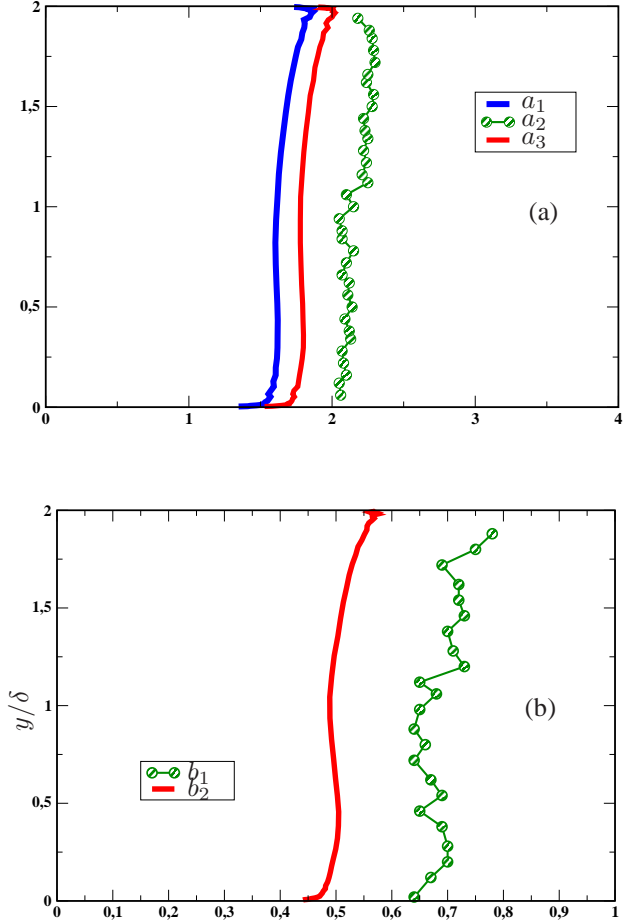


Figure 6: Wall-normal velocity variance. (a) case 1 and (b) case 2. a_2 and b_1 are the measurements. a_1 : $\Delta\gamma = 5.3^\circ$, a_3 : $\Delta\gamma = 6.5^\circ$ and b_2 : $\Delta\gamma = 1.0^\circ$.

spectra obtained from this combined procedure.

Particles statistics

Particle mean velocities in the streamwise direction are shown in Figure 4 for the two cases. The figures show good agreement between data and the particle-wall interaction model. However, in the near upper-wall region, we can notice a slight underestimation in case 1 with the two different standard deviations $\Delta\gamma = 5.3^\circ$ and $\Delta\gamma = 6.5^\circ$. Increasing the standard deviation does not change the mean velocity.

Figure 5 compares the vertical profile of particle concentration between experiment and the simulations. The trends provided by the model are very interesting. The comparison to the experiment is reasonably accurate for case 1, whereas

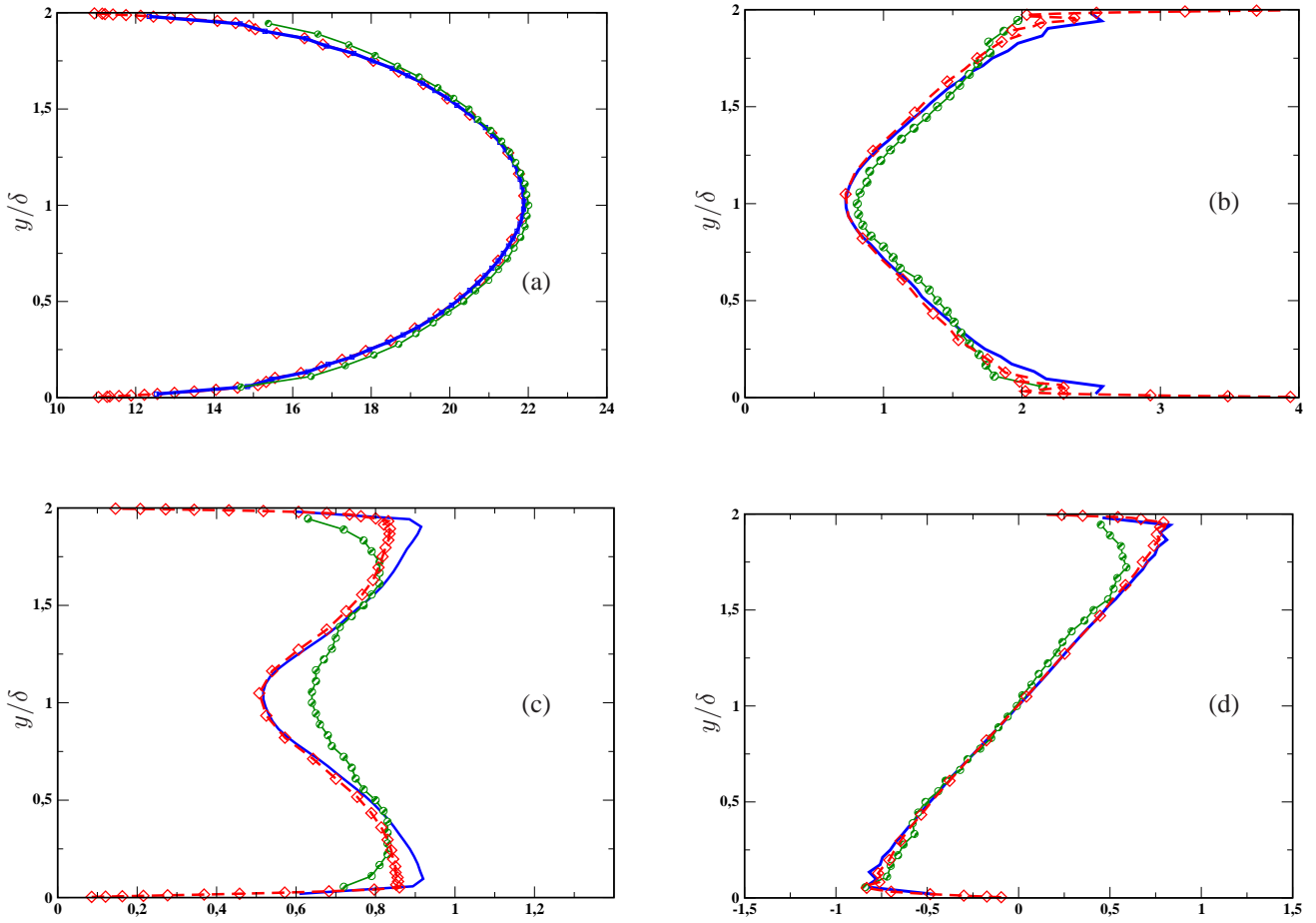


Figure 3: Fluid statistics. Green dashed symbol: experiment; blue line: LES; red line: fluid interpolation at particle position. (a) Streamwise mean velocity; (b) rms streamwise velocity; (c) rms wall-normal velocity and (d) shear stress.

in the channel center for the second case, the “shadow effect” model leads to an underestimation of the concentration. In addition we can see for the two cases, in the lower wall region that the “shadow effect” model induces many particles at the wall even if the experiment seems to find an high concentration in case 1 despite the wall roughness. Simulations show also that increasing the standard deviation leads to a small reduction of concentration in the wall region for case 1. The understanding of such a behavior can be explained by the wall-normal velocity variance $\langle v_p'^2 \rangle_p$. This quantity is presented in Figure 6. The figure shows that the variance production at the wall with the “shadow effect” model is smaller for the two cases than in the measurements. The observed underestimation seems the same order for the two cases and it is about 30%. Even by increasing the wall roughness standard deviation $\Delta\gamma$ in case 1, the resulting increase remains small compared to the measured values. However as is well known, the particle concentration is driven by the wall-normal velocity variance and gravity (e.g., see Simonin *et al.* (1997)). Therefore, the underestimation of the wall-normal velocity variance is consistent with the high concentration of particles in the wall region. This also explains the small reduction in the particle concentration with the small

increases of the wall-normal variance resulting from larger values of the wall roughness standard deviation in case 1. In the second case with larger particles, owing to the underestimation of the wall-normal velocity variance, the gravity is most probably the main driver of the particle concentration, in turn explaining the high concentration at the lower wall of the channel. However, the profile obtained from this “shadow effect” model seems reasonable.

Figure 7 shows the longitudinal particle velocity fluctuations for the three simulation cases. The figure shows these fluctuations are also underestimated as well for case 2 and for the two standard deviations of case 1. The increase in the standard deviation $\Delta\gamma$ leads to a small reduction of the longitudinal fluctuations compared to the measured standard deviation case. In case 2, the model accurately predicts the fluctuations at the lower wall.

In summary, increasing the standard deviation for the first case increases the wall-normal velocity variance and results in a slight reduction of the particle concentration at the wall. The streamwise mean and fluctuating velocities have not been influenced by this change, as also found by Squires & Simonin (2006).

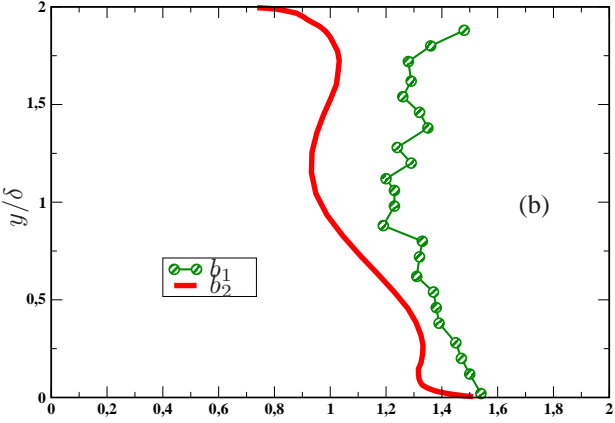
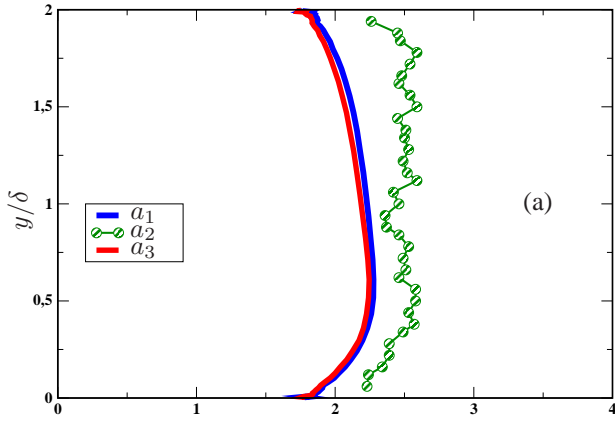


Figure 7: Streamwise velocity fluctuation. (a) case 1 and (b) case 2. a_2 and b_1 are the measurements. $a_1 : \Delta\gamma = 5.3^\circ$, $a_3 : \Delta\gamma = 6.5^\circ$ and $b_2 : \Delta\gamma = 1.0^\circ$.

PDF of Particle Rebound Angle

The particle rebound angle pdf is one of the most important characteristics of particle-wall collision models. Shown in Figure 9 is the rebound angle pdf for some collision angles during the simulations. Since we cannot obtain an accurate value for the collision angle α^- in the simulations, we have instead plotted the rebound angle pdf for an incident angle between a domain $[\alpha^- - \varepsilon, \alpha^- + \varepsilon]$, where ε should be small. However, the value of ε should be large enough to obtain sufficient samples in order to obtain reasonable distributions. Generally, all the rebound angle PDFs show the same profile. We can see that the particle has a high probability to rebound with a grazing angle. This effect is more pronounced when the particle collides with the wall with a near-zero angle. This shows that the incident grazing particles have a non-zero probability to remain grazing after their collision on the rough wall. In addition, as shown in Figure 8, in this flow the particles tend to reach the wall with a very small incident angle. Therefore, many particles which reach the wall have a non-zero probability to remain grazing. This could explain the quantity of particles observed in the lower wall region of the channel and the underestimation of the wall-normal velocity variance. Even by increasing the

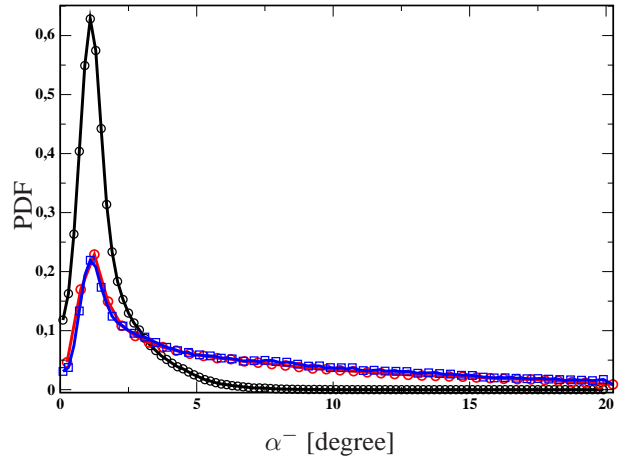


Figure 8: Probability density function of collision angle. Blue line: case 1 with $\Delta\gamma = 6.5^\circ$, red line: case 1 with $\Delta\gamma = 5.3^\circ$ and black line: case 2.

wall roughness standard deviation $\Delta\gamma$, we can see that the grazing incident particles always have a non-zero probability to rebound with a near zero angle.

The high concentration of particles generated by the non-zero probability to remain grazing after the collision has been pointed out by Konan *et al.* (2006) in the framework of Eulerian boundary condition derivations. That work highlighted an important mechanism ignored in analysis leading to the shadow effect model. In fact, this “*shadow effect*” model favors enormously the null rebound angles and this yields many grazing particles at the wall. This high probability for the incident particles to rebound with zero angle is also clearly observed in the Lagrangian simulations of Sommerfeld & Huber (1999), unlike the experiments. In reality, the particles cannot remain grazing along the wall since they should hit another asperity of the rough wall and subsequently return in the flow. In other words, a particle could hit the wall many times before exiting the near-wall region. This impossibility of multiple rebounds was highlighted by Tsirkunov & Panfilov (1998) as one of the major drawbacks in Sommerfeld (1992) stochastic models of wall roughness. With a realistic wall model where the particle can enter into one hollow and make many rebounds before to exit, Tsirkunov & Panfilov (1998) shown that the probability to rebound with null angle is zero.

In the following, we present a new perspective of particle-rough wall collision for Lagrangian simulations which describes more physically the mechanisms occurring during the rebound process. This model is based both on the stochastic model of Sommerfeld & Huber (1999) and incorporates the possibility to make multiple rebounds. The details of preliminary studies which led to the following new formulation can be found in Kannengieser *et al.* (2007).

Perspectives: Rough Wall Multi-Collision Model

Preliminary studies carried out so as to understand the actual behavior of particle which rebound on rough walls have

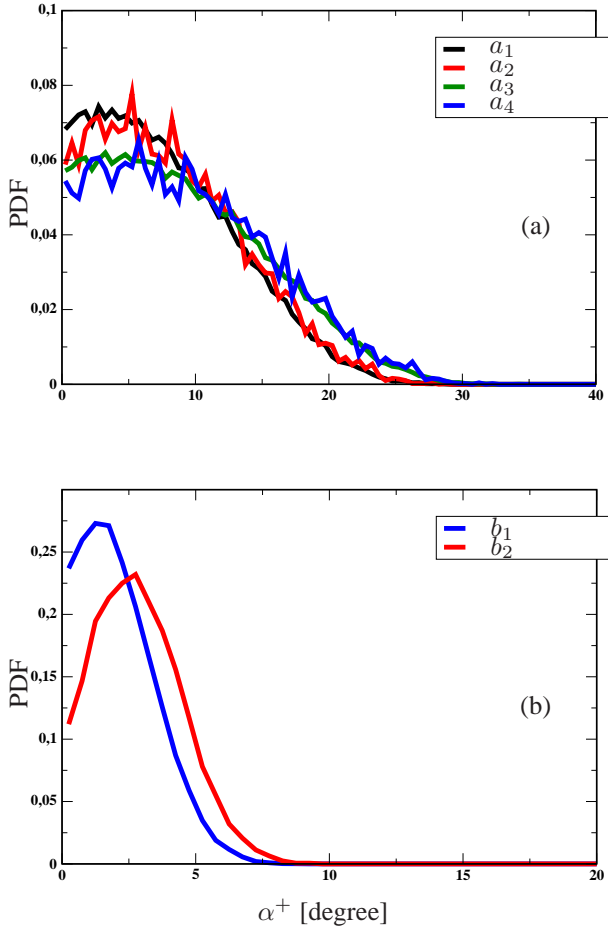


Figure 9: Probability density function of rebound angle. (a) case 1 with $a_1 : \alpha^- \in [1.25^\circ, 1.3^\circ]$, $\Delta\gamma = 5.3^\circ$; $a_2 : \alpha^- \in [2.45^\circ, 2.5^\circ]$, $\Delta\gamma = 5.3^\circ$; $a_3 : \alpha^- \in [1.25^\circ, 1.3^\circ]$, $\Delta\gamma = 6.5^\circ$ and $a_4 : \alpha^- \in [2.45^\circ, 2.5^\circ]$, $\Delta\gamma = 6.5^\circ$. (b) case 2 with $b_1 : \alpha^- \in [1.25^\circ, 1.3^\circ]$, $\Delta\gamma = 1.0^\circ$ and $b_2 : \alpha^- \in [2.45^\circ, 2.5^\circ]$, $\Delta\gamma = 1.0^\circ$.

consisted of making many impingements, for different incident angles, on two different types of two-dimensional rough walls although roughness structure is usually three-dimensional.

The first wall has been simulated by connecting the points obtained from a Gaussian distribution angles with segments (Sommerfeld (1992)), whereas the second one has been built by linking the points with cubic spline method. Points of the second wall were obtained from a Gaussian distribution of the height of roughness (Tsirkunov & Panfilov (1998)).

Similar to the results reported by Tsirkunov & Panfilov (1998), these direct simulations have shown existence of multiple rebounds: the particle has a non-zero probability to hit the wall again even when the rebound angle is greater than zero; and also that the pdf of wall roughness angle is the same one referred to by Sommerfeld & Huber (1999) as “effective pdf” for the first bouncing on the rough wall.

The new formulation proposed here is similar to the stochastic model of Sommerfeld & Huber (1999). The incident particle makes only one rebound, and then we sample the wall roughness γ in the “effective pdf”. In addition,

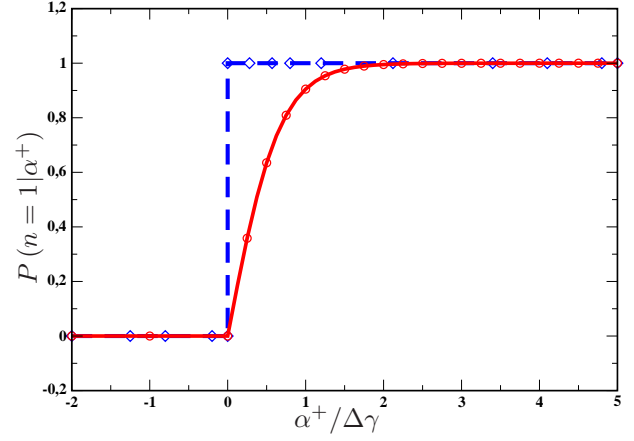


Figure 10: Probability to obtain one and only rebound in term of the rebound angle α^+ . “ $\circ - \circ$ ”: the new formulation, “ $\diamond - \diamond$ ”: Sommerfeld & Huber (1999).

unlike the Sommerfeld & Huber (1999) model, the rebound angle $\alpha^+ > 0$ is not sufficient to keep the sample value of the wall roughness γ . If the particle remains grazing after the rebound, it has a non-zero probability to make another rebound. However, since we do not make directly multiple rebounds, we try to reproduce the mechanism occurring during the multiple rebounds from one stochastic process based on the probability to obtain one and only rebound. One of the main differences between Sommerfeld & Huber (1999) “shadow effect” model and our suggestion is the probability to obtain only a single rebound, $P(n=1|\alpha^+)$ where n is the number of rebounds in terms of the rebound angle α^+ . This difference is clearly exhibited by Figure 10. In other words, the probability to get one and only one rebound is given :

- by Sommerfeld & Huber (1999) model by :

$$P(n=1|\alpha^+) = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha^+ > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (18)$$

an Heavyside function.

- while for the new formulation, it is well described by the following function :

$$P(n=1|\alpha^+) = \begin{cases} \tanh\left(\frac{3\alpha^+}{2\Delta\gamma}\right) & \text{if } \alpha^+ \geq 0 \\ 0 & \text{if } \alpha^+ \leq 0 \end{cases} \quad (19)$$

The procedure use to take account of the mechanisms described above in Lagrangian simulations is summarized as follows:

(a): the incident shadow effect : the wall roughness angle γ is sampled from the normalized form of the “effective pdf” (Sommerfeld & Huber (1999)) given by:

$$P_{eff}(\gamma|\underline{c}_p^-) = \begin{cases} \frac{\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma}{\underline{c}_p^- \cdot \underline{n}} P_g(\gamma) & \text{if } \underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma \leq 0 \\ 0 & \text{if } \underline{c}_p^- \cdot \underline{n}_\gamma \geq 0 \end{cases} \quad (20)$$

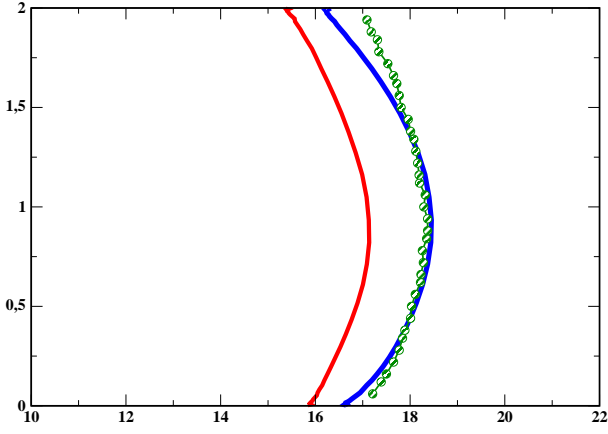


Figure 12: Streamwise mean velocity case 1. Green line: measurements, blue line: shadow effect model, red line: improved model.

where \underline{c}_p^- is the particle incident velocity, \underline{n} and \underline{n}_γ are respectively unit normal vectors that define the macroscopic wall and the virtual wall inclined at angle γ (Figure 2). It should be noted that $\underline{c}_p^- \cdot \underline{n} < 0$, since the particle shall come from the flow. $P_g(\gamma)$ is the unconditional Gaussian distribution given by Eq. (1). The sampling of the wall roughness angle γ in terms of the normalized form of equation Eq. (20) is achieved by using a rejection method.

(b): for this sampled wall roughness angle γ , we calculate the rebound velocity and rebound angle α^+ .

(c): "*grazing rebound effect*" : in terms of α^+ calculated in (b), we use the analytic formulation Eq. (19) to estimate the probability to make one and only one rebound: $P(n = 1|\alpha^+)$.

- if $P(n = 1|\alpha^+) = 0$: we must sample a new value γ . Therefore, we return to (a).
- if $P(n = 1|\alpha^+) > 0$: we sample one number S randomly from a uniform distribution between 0 and 1. If $S \in [0, P(n = 1|\alpha^+)]$ we keep γ , otherwise if $S \in]P(n = 1|\alpha^+), 1]$ we must sample a new value of γ , and then we return to (a). This decision procedure is summarized in Figure 11.

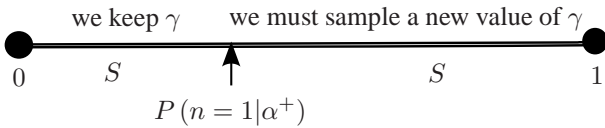


Figure 11: Summary of procedure use to choose the wall roughness γ at point (c).

To check the ability of this new suggestion to described properly the mechanisms which occurs during particle-rough wall collisions, we have performed simulations for case 1 using the actual standard deviation measured in experiments,

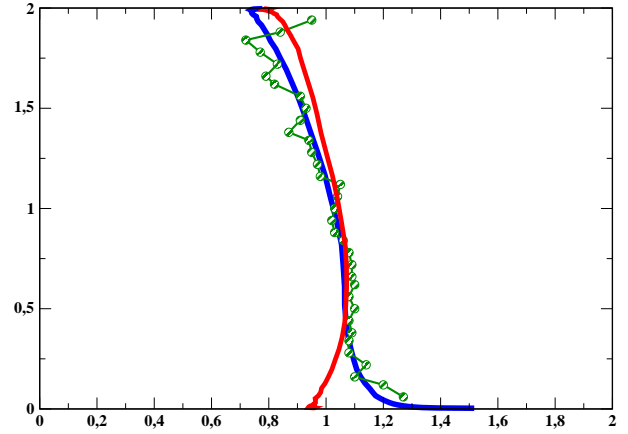


Figure 13: Normalized particle flux case 1. Green line: measurements, blue line: shadow effect model, red line: improved model.

$\Delta\gamma = 5.3^\circ$. We show in the figures the results obtained with both methods in order to illustrate the changes brought about using the new formulation.

Despite the reasonable profile of the streamwise mean velocity, Figure 12 shows that the new suggestion underestimates the previous result. Figure 13 shows a strong reduction in the concentration of particles at the lower wall. This is justified by the high production of the wall-normal velocity variance at the wall shown by in Figure 14. The results presented in Figure 15 show that the improved model leads to an increase in the streamwise velocity fluctuation. It can also be noted that the Figure 16 showing the rebound angle PDF indicates that there is a null probability for a particle to rebound with a grazing angle as also found in the direct simulations of Tsirkunov & Panfilov (1998).

In summary, sampling the wall roughness angle γ from the effective PDF given by Sommerfeld & Huber (1999) and considering that a particle which remains grazing has a non-zero probability to experience another rebound (characterized by a new sampling of the virtual wall roughness) has led to an increasing of the particle velocity fluctuations that compares well to measurements. The increase in the particle wall-normal velocity variance results in a significant reduction of the particle concentration at the wall. Important to also note is that these results have been obtained without resorting to increases in the wall roughness angle standard deviation.

Conclusions

LES/DPS has been applied to simulation of gas-particle flows in a horizontal channel with rough walls. The accounting of the roughness has been accomplished using the "*shadow effect*" model proposed by Sommerfeld & Huber (1999). Simulation results compared to measurements from Sommerfeld & Kussin (2004) have shown in general an adequate prediction of the dispersed phase statistics. Additionally, important

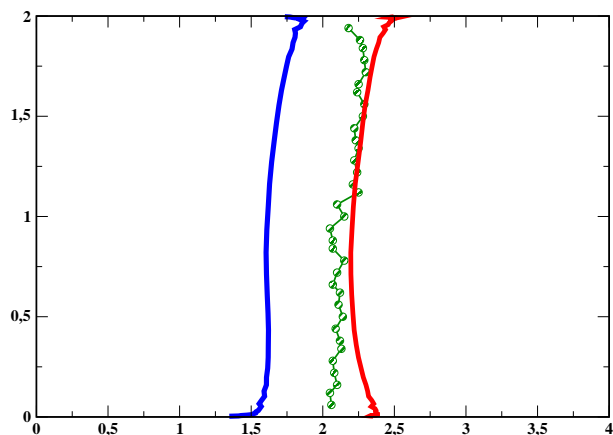


Figure 14: Wall-normal velocity variance case 1. Green line: measurements, blue line: shadow effect model, red line: improved model.

issues were highlighted, in particular the importance of grazing collisions at the wall and underestimation of the particle velocity fluctuations. An improvement of the “shadow effect” model based on the effects of multiple rebounds has also been presented. This new suggestion constitutes a real perspective for modeling wall roughness effects during the particle/rough wall collisions.

References

- Alipchenkov, V. M. & Zaichik, L. I. & Simonin, O. A comparison of two approaches to derivation of boundary conditions for continuous equations of particle motion in turbulent flow. *High Temperature*. Vol. 39, N°1, 104 – 110 (2001)
- Benson, M., Tanaka, T. & Eaton, J. K. Effects of wall roughness on particle velocities in a turbulent channel flow. *Transactions of the ASME*. Vol. 127, 250 – 256 (2005)
- Burton, T. M. & Eaton, J. K. Analysis of a fractional-step method on overset grids. *J. Comp. Phys*. Vol. 177, 336 – 364 (2002)
- Fede, P. & Simonin, O. Numerical study of the subgrid fluid turbulence effects on the statistics of heavy colliding particles. *Phys. Fluids*. Vol. 18 (2006)
- Frank, TH., Schade, K.-P. and Petrak, D. *Int. J. Multiphase Flow*. Vol. 19, N°1, 187 – 198 (1993)
- Grant, G. & Tabakoff, W. Erosion prediction in turbomachinery resulting from environmental solid particles. *J. Aircraft*. Vol. 12, 471 – 478 (1975)
- Jiménez, J. The physics of wall turbulence. *Physica A*. Vol. 263, 252 – 262 (1999)
- Kannengieser, O., Konan, N. A. & Simonin, O. Influence of multiple particle-wall collisions on rough wall bouncing

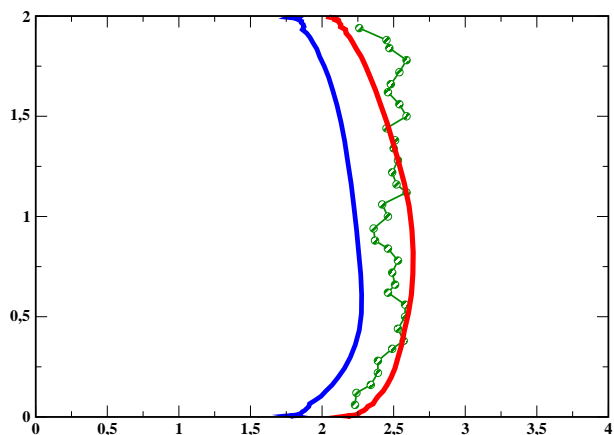


Figure 15: Streamwise velocity fluctuation case 1. Green line: measurements, blue line: shadow effect model, red line: improved model.

model. 6th Int. Conference on Multiphase Flow, ICMF 2007, Leipzig, Germany, July 9-13 (2007)

Konan, N. A., Simonin, O. & Squires, K. D. Rough wall boundary condition derivation for particle continuum equations : validation from LES/DPS of gas-solid turbulent channel flow. In *Proceedings of FEDSM2006 ASME Joint U.S.-European Fluids Engineering Summer Meeting*, Miami, Florida, USA, July 17-20 (2006)

Kussin, J. & Sommerfeld, M. Experimental studies on particle behaviour and turbulence modification in horizontal channel flow with different wall roughness. *Experiments in Fluids*. Vol. 33, 143 – 159 (2002)

Lain, S., Sommerfeld, M. & Kussin, J. Experimental studies and modelling of four-way coupling particle-laden horizontal channel flow. *Int. J. of Heat and Fluid Flow*. Vol. 23, 647 – 656 (2002)

Matsumoto, S. & Saito, S. On the mechanism of suspension of particles in horizontal pneumatic conveying : Monte Carlo simulation based on the irregular bouncing model. *J. Chem. Engng Japan*. Vol. 3, N°1, 83 – 92 (1970a)

Matsumoto, S. & Saito, S. Monte Carlo simulation of horizontal pneumatic conveying based on the rough wall model. *J. Chem. Engng Japan*. Vol. 3, N°2, 223 – 230 (1970b)

Oesterlé, B. Numerical prediction of particle trajectories in a pipe bend. In *Proceedings of the 5th Workshop on Two-phase Flow Predictions*, Erlangen, 148 – 155 (1991)

Ottjes, J. A. Digital simulation of pneumatic particle transport. *Chem. Eng. Sci.*, Volume 33, 783 – 786 (1978)

Piomelli, U., Ferziger, J. & Moin, P. New approximate boundary conditions for large eddy simulations of wall-bounded flows. *Phys. Fluids*. Vol. 1, N°6, 1061 – 1068 (1989)

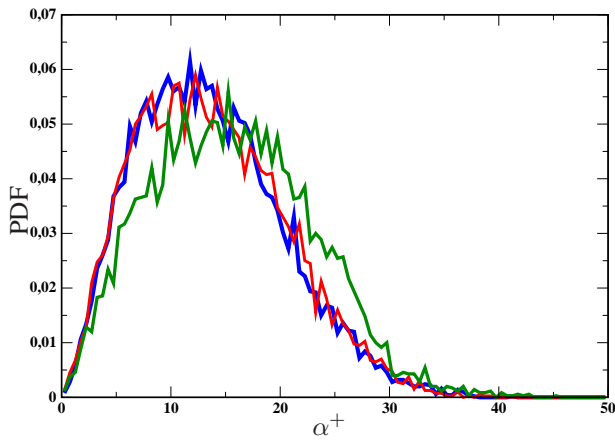


Figure 16: Probability density function of rebound angle. Blue line: $\alpha_1^- \in [1.25^\circ, 1.3^\circ]$, red line $\alpha_2^- \in [2.45^\circ, 2.5^\circ]$ and $\alpha_3^- \in [9.95^\circ, 10.0^\circ]$.

Sakiz, M. & Simonin, O. Development and validation of continuum particle wall boundary conditions using Lagrangian simulation of a vertical gas/solid channel flow. 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference, San Francisco, California, USA, July 18-23. Paper N° 7898 (1999)

Schade, K.-P. & Hädrich, Th. Investigation of influence of wall roughness on particle-wall collision. Third Int. Conference on Multiphase Flow, ICMF'98, Lyon, France, June 8-12 (1998)

Schiller, L. & Nauman, A. A drag coefficient correlation. V. D. I. Zeitung. Vol. 77, 318 – 320 (1935)

Schumann, U. Subgrid scale model for finite difference simulations of turbulent flows in plane channels and annuli. J. Comp. Physics. Vol. 18, 376 – 404 (1975)

Simonin, O., Wang, Q. & Squires, K. D. Comparison between two-fluid model predictions and large eddy simulation results in a vertical gas-solid turbulent channel flow. ASME Fluid Engineering Division Summer Meeting, FEDSM'97, June 22-26 (1997)

Sommerfeld, M. Modelling of particle-wall collision in confined gas-particle flows. Int. J. Multiphase Flow. Vol. 18, N°6, 905 – 926 (1992)

Sommerfeld, M. & Huber, N. Experimental analysis and modelling of particle-wall collisions. Int. J. Multiphase Flow. Vol. 25, 1457 – 1489 (1999)

Sommerfeld, M. & Kussin, J. Wall roughness effects on pneumatic conveying of spherical particles in a narrow horizontal channel. Powder Technology. Vol. 142, 180 – 192 (2004)

Squires, K. D. & Simonin, O. LES-DPS of the effect of wall roughness on dispersed-phase transport in particle-laden turbulent channel flow. Int. J. of Heat and Fluid Flow. Vol. 27, 619 – 626 (2006)

Tsirkunov, Yu. M. & Panfilov, S. V. Modelling of particle-wall interaction in two-phase flows at moderate and high particle impact velocity. Third Int. Conference on Multiphase Flow, ICMF'98, Lyon, France, June 8-12 (1998)

Tsuji, Y., Morikawa, Y., Tanaka, T., Nakatsukasa, N. & Nakatani, M. Numerical simulation of gas-solid two-phase flow in a two-dimensional horizontal channel. Int. J. Multiphase Flow. Vol. 13, N°5, 671 – 684 (1987)