



Thèse
présentée pour obtenir le titre de
Docteur de l'Institut National Polytechnique de Toulouse
Spécialité : Dynamique des Fluides

Mélange gravitationnel de fluides en géométrie confinée

Yannick HALLEZ

Soutenance le 10 décembre 2007 devant le jury composé de :

MM.	Jacques MAGNAUDET	Directeur des travaux de recherche
	Jean-Pierre HULIN	Rapporteur
	Fabien GODEFERD	Rapporteur
	Emil HOPFINGER	Membre
	John HINCH	Membre
	Olivier EIFF	Membre

N° d'ordre : 2566

Résumé

Ce travail basé sur la simulation numérique directe porte sur le mélange en géométrie confinée de deux fluides miscibles de densités différentes. Le mouvement des fluides est induit par la gravité. Différentes géométries sont étudiées : un tube cylindrique, un canal de section carrée et un écoulement purement bidimensionnel. Les simulations numériques confirment pleinement les résultats expérimentaux de Séon et al. en tube cylindrique, avec notamment la mise en évidence de trois régimes différents suivant l'inclinaison du tube. La comparaison des géométries montre que les écoulements tridimensionnels en tube et en canal inclinés présentent des comportements similaires tandis que le « modèle » bidimensionnel est incapable de donner des informations pertinentes sur un écoulement réel tridimensionnel tant au niveau quantitatif qu'au niveau phénoménologique. Une attention particulière est portée à l'analyse conjointe du champ de concentration et de la dynamique tourbillonnaire sous-jacente qui permet d'expliquer plusieurs aspects subtils de la dynamique du mélange.

Abstract

The present work based on Direct Numerical Simulations is devoted to the study of mixing between two miscible fluids of different densities. The movement of these fluids is induced by buoyancy. Three geometries are considered : a cylindrical tube, a square channel and a plane two-dimensional flow. For cylindrical tubes, the results of numerical simulations fully confirm previous experimental findings by Séon et al., especially regarding the existence of three different flow regimes, depending on the tilt angle. The comparison of the various geometries shows that tridimensional flows in tubes or channels are similar, whereas the two-dimensional model fails to give reliable information about real 3D flows, either from a quantitative point of view or for a phenomenological understanding. A peculiar attention is put on a joint analysis of the concentration and vorticity fields and allows us to explain several subtle aspects of the mixing dynamics.

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au sein du groupe INTERFACE de l'IMFT dans le cadre d'une bourse du ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, en parallèle avec un monitorat puis un poste d'ATER à l'ENSEEIH. Je souhaite donc remercier les personnes qui m'ont fait confiance en m'accueillant dans ces différentes entités, ainsi que les enseignants(-chercheurs) de l'ENSEEIH qui m'ont transmis un peu de leur expérience.

Je remercie Messieurs Emil Hopfinger, John Hinch et Olivier Eiff d'avoir accepté de juger mon travail de thèse. Je remercie plus particulièrement Messieurs Fabien Godefert et Jean-Pierre Hulin d'avoir accepté la fastidieuse tâche de rapporter sur ce mémoire.

Je remercie aussi tous les personnels de l'IMFT qui m'ont permis de me concentrer sur ce travail de recherche en réglant les inévitables petits problèmes de tous les jours : Marie-Hélène Manzato du côté administratif, Gilles Martin pour l'informatique et Muriel Sabater pour l'impression de ce document.

Merci aussi aux membres du groupe INTERFACE pour les conseils scientifiques et les discussions autour du café. Je remercie François Charru et Patricia Ern pour les livres offerts, Frédéric Risso et David Fabre pour avoir organisé les "séminaires interface du jeudi" qui permettent si bien d'ôter un peu nos œillères de doctorants et Dominique Legendre pour m'avoir fait découvrir JADIM et le monde des petites bulles. J'ai une pensée particulière pour la "VOF Team", Axel, Thomas et Jean-Baptiste qui ont supporté avec le sourire mes "p'tites question" récurrentes sur les arcanes du code, ainsi que pour Annaïg Pedrono sans qui ce code n'aurait pas pu être parallélisé, et par conséquent ma thèse finie, avant 2010...

Je remercie aussi les personnes ayant travaillé ou travaillant encore au FAST, Thomas Séon, Jean-Pierre Hulin, Dominique Salin et Jemil Znaïen, qui m'ont permis à travers quelques discussions toujours constructives, à Orsay ou à Toulouse, de sortir de ma bulle de "simulateur" pour toucher du doigt le monde des expérimentateurs.

Un très grand merci à Jacques Magnaudet qui, malgré sa charge de directeur de l'IMFT, m'a parfaitement encadré. Il a toujours su trouver le temps pour répondre à mes questions, discuter des orientations à prendre, tout en me laissant la liberté de tester certaines idées.

Enfin, la dernière mais pas des moindres, je tiens à remercier tout particulièrement Aline qui a eu le courage et la force d'alléger une partie de mes responsabilités de jeune papa pendant les huit semaines d'intersection entre la rédaction de ce mémoire et la vie de notre petite Solenn. Maintenant je vais me rattraper. Promis!

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Qu'est-ce qu'un courant de gravité?	1
1.2	Où les courants de gravité se rencontrent-ils?	2
1.2.1	En situation géophysique	2
1.2.2	En situation de "risques naturels"	3
1.2.3	En situation "industrielle"	6
1.3	Quelques écoulements proches	8
1.3.1	L'écoulement de Rayleigh-Taylor	8
1.3.2	Les couches de mélange	10
1.3.3	Les écoulements en conduites avec de longues bulles	11
1.3.4	L'effet Boycott	12
1.4	Description qualitative	13
1.4.1	Influence du nombre de Reynolds sur l'ensemble du courant	14
1.4.2	Forme caractéristique de la tête du courant...	15
1.4.3	Influence du nombre de Schmidt sur l'ensemble du courant	17
1.4.4	Courants de gravité en géométrie confinée	18
2	Méthode de résolution numérique	23
2.1	Cadre général	23
2.2	Mise en équations	24
2.2.1	Equation de transport du scalaire	24
2.2.2	Equation de conservation de la quantité de mouvement	25
2.2.3	Conclusion	25
2.2.4	Conséquences numériques de l'hypothèse $Sc \rightarrow \infty$	25
2.3	Méthode de résolution des équations de conservation	26
2.3.1	Résolution de l'équation de transport du scalaire	26
2.3.2	Résolution de l'équation de conservation de la quantité de mouvement	30
2.3.3	Résumé de l'algorithme de résolution	34
2.3.4	Parallélisation du code JADIM	34
2.4	Quelques tests de validation...	35

2.4.1	Onde de gravité	36
2.4.2	Ecoulement barocline	38
2.4.3	Instabilité de Rayleigh-Taylor	39
2.4.4	Courant de gravité à faible rapport de densités	42
2.4.5	Courant de gravité à grand rapport de densités	43
3	Courants de gravité sur un support horizontal	47
3.1	Introduction	47
3.2	Caractéristiques des courants de gravité horizontaux...	49
3.2.1	Phase d'accélération initiale et phase de subsidence	51
3.2.2	Phase inertielle	51
3.2.3	Transitions entre phases	54
3.2.4	Phase visqueuse	56
3.3	Simulations numériques de courants de gravité horizontaux...	60
3.3.1	Influence de la géométrie	61
3.3.2	Influence du nombre de Reynolds	62
3.3.3	Distribution spatiale des effets visqueux	63
3.3.4	Conclusion	65
3.4	Transition vers le régime visqueux...	65
3.4.1	Simulations bidimensionnelles	66
3.4.2	Simulations en tube cylindrique	76
3.4.3	Conclusion sur la transition au régime visqueux	77
3.5	Conclusion	78
4	Influence de la géométrie...	79
4.1	Présentation du problème	79
4.2	Validations vis à vis des résultats expérimentaux	80
4.2.1	Introduction	80
4.2.2	Mise en garde	80
4.2.3	Champ de densité en fonction de l'inclinaison du tube	84
4.2.4	Définitions et calcul de V_f et C_f	85
4.2.5	Vitesse du front en fonction de l'inclinaison du tube	88
4.2.6	Relation vitesse du front - contraste relatif de densité au niveau du front	90
4.2.7	Conclusion	92
4.3	Etude de l'influence de la géométrie : motivations	92
4.4	Influence de la géométrie aux temps longs	93
4.4.1	Vitesse du front et contraste relatif de densité au front	93
4.4.2	Dynamique interne	95
4.5	Influence de la géométrie aux temps courts...	103

4.6	Conclusion	106
5	Eléments de la dynamique interne. . .	107
5.1	Introduction	107
5.2	Inspection de quelques grandeurs intégrales	108
5.2.1	Bilans d'énergie dans le tube	108
5.2.2	Efficacité globale du mélange	111
5.3	Organisation globale des structures tourbillonnaires.	114
5.4	Fluctuations de vitesse du front d'un courant.	120
5.5	Intermittence des courants de gravité confinés.	123
5.6	Conclusion	125
A	L'intensité de vrillage	131
	Bibliographie	134

Table des figures

1.1	Vue panoramique d'une tempête de sable en Irak.	2
1.2	Quelques manifestations de courants de gravité en météorologie.	4
1.3	Images de courants de gravité liés à des "risques naturels"	5
1.4	Schéma d'une évacuation d'eau chaude dans un réservoir plus froid.	6
1.5	Schéma d'une poche de gaz se propageant dans un tunnel	7
1.6	Ecoulement de Rayleigh-Taylor	9
1.7	Développement d'une instabilité de Kelvin-Helmholtz	11
1.8	D'après Zukoski (1966) : vitesse d'une bulle en tube incliné	13
1.9	D'après Schmidt (1911) : courants de gravité	14
1.10	D'après Cantero <i>et al.</i> (2007) : lobes et fentes	16
1.11	D'après Séon (2006) : trois régimes d'écoulement en tube incliné (1)	19
1.12	D'après Séon <i>et al.</i> (2005) : trois régimes d'écoulement en tube incliné (2)	20
1.13	D'après Séon (2006) : exemple de diagramme spatio-temporel	21
2.1	Rotation solide d'un disque et schéma FCT	28
2.2	Schéma du maillage décalé utilisé dans JADIM	31
2.3	Exemple de découpage du domaine de calcul sur sept processeurs.	34
2.4	Efficacité parallèle du code JADIM	36
2.5	Evolution de la hauteur d'une onde de gravité	37
2.6	Erreur sur la fréquence d'une onde de gravité	38
2.7	Schéma du test d'écoulement barocline.	39
2.8	Profil de vitesse numérique de l'écoulement barocline	40
2.9	Iso-surface $C = 0.99$ au cours d'une instabilité de Rayleigh-Taylor.	41
2.10	Profils verticaux de fraction volumique de fluide lourd dans un écoulement de R-T	42
2.11	Evolution de la taille de la zone de mélange dans un écoulement de R-T	43
2.12	Spectre de densité dans un écoulement de Rayleigh-Taylor	44
2.13	Comparaison de deux simulations de courants de gravité bidimensionnels	44
2.14	Comparaison de simulations de courants de gravité (non-Boussinesq) (1)	45
2.15	Comparaison de simulations de courants de gravité (non-Boussinesq) (2)	46
2.16	Comparaison de simulations de courants de gravité (non-Boussinesq) (3)	46

3.1	Situation de lock-exchange avec des volumes “infinis”	50
3.2	Situation de lock-exchange avec un volume de fluide dense fini	50
3.3	D’après Rottman & Simpson (1983) : évolution de la position du front	59
3.4	D’après Séon <i>et al.</i> (2007) : évolution de la position du front en tube cylindrique	61
3.5	Taux de dissipation au sein de l’écoulement	63
3.6	Evolution de la répartition de la dissipation dans les canaux	64
3.7	Evolution de la position du front pour différents Re (2D)	67
3.8	Comparaison du profil numérique d’un courant en régime visqueux avec la théorie	68
3.9	D’après Rottman & Simpson (1983) : interaction du front et de l’onde réfléchie	69
3.10	Evolution de la position du front du courant dense pour différents volumes lâchés	70
3.11	Evolution de la position du front selon le volume de fluide lâché (2D)	71
3.12	Champ de densité au niveau de la tête des courants bidimensionnels (1)	72
3.13	Champ de densité au niveau de la tête des courants bidimensionnels (2)	73
3.14	Interaction du front et de l’onde réfléchie (simulation 2D)	74
3.15	Interaction du front et de l’onde réfléchie (simulation 2D)	74
3.16	Evolution de la position du front selon le volume de fluide lâché (tube cylindrique)	76
4.1	Schéma de l’écoulement en tube incliné	79
4.2	Les différents maillages utilisés	81
4.3	Comparaison des diagrammes spatio-temporels expérimentaux et numériques	82
4.4	Evolution de la vitesse du front dans un tube cylindrique incliné à 50°	83
4.5	Champs de fraction volumique de fluide lourd dans les tubes inclinés (simulations)	86
4.6	Champs de fraction volumique de fluide léger dans les tubes inclinés (expériences)	87
4.7	Exemple de domaine de calcul de C_f	88
4.8	Vitesses de front terminales obtenues expérimentalement et numériquement	89
4.9	V_f et $\sqrt{C_f}$ aux temps longs obtenus expérimentalement et numériquement	91
4.10	Structures observables en tubes verticaux.	93
4.11	Écoulement fortement influencé par les angles de la géométrie 3D cartésienne	94
4.12	V_f et $\sqrt{C_f}$ aux temps longs : géométries 3D-AXI et 3D-SQR	95
4.13	V_f et $\sqrt{C_f}$ aux temps longs : géométries 3D-AXI et 2D	96
4.14	Comparaison des structures tourbillonnaires pour les trois géométries	98
4.15	Résultats issus de la simulation en canal 2D incliné à 60°	99
4.16	Diagrammes spatio-temporels obtenus par simulation en géométrie inclinée à 20°	101
4.17	Evolution de l’efficacité de mélange moyenne pour les trois géométries	102
4.18	Nombre de Froude pendant la phase de subsidence pour les trois géométries	104
4.19	Iso-surface de densité $(\rho_1 + \rho_2)/2$ en canaux 3D inclinés à 50°	105
5.1	Bilans d’énergie en tube cylindrique incliné à 20° (1)	109
5.2	Bilans d’énergie en tube cylindrique incliné à 20° (2)	110

5.3	Profils d'efficacité de mélange moyennée par section en tube cylindrique incliné	112
5.4	Profils diffusifs de la fraction volumique de fluide lourd en tube vertical	113
5.5	Visualisations du champ de densité dans un tube cylindrique incliné à 30°.	114
5.6	Interaction du champ de vorticité avec le champ de densité	115
5.7	Vue d'ensemble des structures tourbillonnaires présentes dans le tube	115
5.8	Sens de rotation des structures tourbillonnaires en tube incliné	116
5.9	Iso-surface de densité $(\rho_1 + \rho_2)/2$ dans un canal incliné élargi	118
5.10	Iso-surface d'intensité de vrillage dans un canal incliné élargi	119
5.11	$\frac{V_f}{0.65\sqrt{At.g.D}}$ et $\sqrt{C_f}$ au cours du temps pour un tube cylindrique incliné à 20°	121
5.12	Définition du volume de contrôle nécessaire au calcul de α et $\Lambda\sqrt{D/(Atg)}$	121
5.13	Evolution temporelle de $\frac{V_f}{0.65\sqrt{At.g.D}}$, $\sqrt{C_f}$, α et $\Lambda\sqrt{D/(Atg)}$	122
5.14	Intermittence dans le tube cylindrique incliné à 60°	123
5.15	Profils radiaux de C pendant l'intermittence	124
5.16	Vue d'ensemble des structures tourbillonnaires pendant l'intermittence	125
5.17	Iso-contours d'intensité de vrillage et de densité pendant l'intermittence 2D	126
A.1	Illustration du critère d'identification de tourbillons "intensité de vrillage"	133

Liste des tableaux

2.1	Coefficients de l'algorithme temporel	32
2.2	Grandeurs physiques du test "Onde de gravité"	37
2.3	Fréquences de l'onde de gravité mesurées numériquement	38
2.4	Grandeurs physiques utilisées dans le test d'écoulement barocline.	39
3.1	Nombres de Froude pendant la phase initiale d'un courant de gravité horizontal .	62
4.1	Taille et nombre de cellules des domaines de calcul	80
4.2	Temps atteints à la fin des simulations 3D-AXI.	83

Chapitre 1

Introduction

Le sujet de ce mémoire est le mélange de fluides sous l'effet de la gravité en géométrie confinée. Si la gravité joue le rôle de moteur de ce mélange, c'est parce que les fluides en question ont des densités différentes. Pour qu'il y ait un mouvement, il faut que les fluides soient en situation instable vis-à-vis de la gravité. Il y a alors deux configurations possibles : soit le fluide "lourd" est placé au dessus du fluide "léger", soit il est placé à côté. Le premier cas conduit à un écoulement de Rayleigh-Taylor dont nous évoquerons quelques aspects dans cette introduction, tandis que le deuxième engendre un courant de gravité.

1.1 Qu'est-ce qu'un courant de gravité ?

Les courants de gravité sont généralement des déplacements le long d'une surface horizontale ou inclinée d'un fluide dense au sein d'un fluide moins dense. Les différences de densité qui les engendrent sont parfois grandes, comme dans le cas d'une rupture de barrage. En effet, dans cette situation, les deux fluides mis en présence sont de l'eau et de l'air, et le rapport de densité est d'environ 1000. Cependant, les écarts de densité à l'origine des courants de gravité sont le plus souvent très faibles. Ces courants apparaissent par exemple lorsque de l'eau salée se trouve en présence d'eau douce, ou encore lorsque de l'air chaud est mis en présence d'air froid. Les différences de densité ne sont alors que de quelques pourcents. Bien que ces écarts soient faibles, ils ne peuvent être ignorés puisque les courants engendrés sont souvent, malgré tout, très puissants. Ils transportent par exemple des sédiments marins sur plusieurs centaines de kilomètres, ou forment les impressionnants murs de sable des tempêtes en milieu désertique (voir figure 1.1).



FIG. 1.1 – Vue panoramique d’une tempête de sable en Irak.

La visualisation du courant de gravité est possible grâce à la poussière qu’il soulève. Le bourgeonnement caractéristique des courants turbulents ainsi que le front relevé par rapport au sol sont aisément discernables.

1.2 Où les courants de gravité se rencontrent-ils ?

1.2.1 En situation géophysique

Les courants de gravité sont le plus souvent rencontrés à grande échelle. Ils ont été intensément étudiés dans le but de comprendre et de prédire des manifestations parfois très dangereuses.

A proximité des orages, cumulonimbus et fronts de rafales

La forme d’enclume des nuages orageux (FIG. 1.2(a)) est bien connue du grand public. Cette forme est en fait liée à l’existence d’un courant de gravité créé au sommet du nuage. En effet, l’air chaud chargé de vapeur d’eau monte sous l’effet des forces de flottabilité, puis il est bloqué verticalement au sommet du nuage par une couche d’air stable résultant d’une inversion de température (la tropopause, qui marque la frontière entre la troposphère et la stratosphère). Il doit alors se répandre horizontalement en suivant cette frontière invisible sous la forme d’un courant de gravité et forme le sommet de l’enclume. Le courant est ici marqué par les cristaux de glace qui se forment en son sein. Mais ce n’est pas le seul courant de gravité qui puisse apparaître lors d’un orage. En effet, lorsque l’air chaud et humide arrive en altitude, la vapeur d’eau qu’il contient se condense pour donner naissance aux précipitations. En tombant, ces précipitations entraînent de l’air froid vers le sol. Dans la plupart des orages, cet air froid descendant va interagir avec la colonne d’air chaud montant alimentant l’orage et ainsi inhiber l’alimentation du nuage. L’orage va alors s’arrêter. Cependant, il existe parfois un cisaillement vertical fort dans le profil de vent qui peut incliner la colonne d’air chaud alimentant le cumulonimbus. Les précipitations et le courant d’air froid descendant se produisent alors à l’écart de la colonne d’alimentation de l’orage. Ainsi l’air froid est en mesure de descendre jusqu’au sol puis se répand horizontalement sous la forme d’un courant de gravité dense au sein de l’air ambiant chaud et donc peu dense. Il s’agit d’un « front de rafales ». Lors de son passage, il soulève aussi de l’air chaud et humide

présent au sol et favorise ainsi l'alimentation de l'orage. Les fronts de rafales ont été beaucoup étudiés et continuent de l'être car ils sont dangereux lors des phases de décollage et d'atterrissage des avions. En effet, ils se déplacent à des vitesses moyennes de l'ordre de 80 km/h et, comme leur nom l'indique, transportent de très violentes rafales qui peuvent influencer de manière forte, et sur des échelles de temps courtes, la portance des avions. De nombreux accidents ont été attribués à ce phénomène. Les fronts de rafales sont le plus souvent invisibles puisqu'ils sont simplement un courant d'air froid le long du sol. Cependant, lorsqu'il se produisent sur une surface aride, ils soulèvent de la poussière permettant de les matérialiser : il s'agit par exemple des haboobs (voir FIG. 1.2(b)), rencontrés aussi fréquemment en Arizona, ou encore en Inde. Le courant peut alors atteindre des hauteurs de l'ordre de 1000 m. Ceci explique sa vitesse de déplacement importante malgré la faible différence de densité. En effet, la vitesse d'un courant est de l'ordre de $\sqrt{g'H}$ où H est sa hauteur, et $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$ est la gravité réduite, ρ_2 et ρ_1 étant respectivement les densités du fluide lourd et du fluide léger.

Les brises de mer

Les courants de gravité dans l'atmosphère peuvent aussi exister sous une forme beaucoup plus calme. Il s'agit de brises fraîches venues du large (voir FIG. 1.2(c)). Pour qu'elles se produisent, il est nécessaire d'avoir en présence un air chaud sur terre et un air froid au dessus de la mer, ce qui est possible lorsque le temps est très ensoleillé. Ce courant est encore plus marqué lorsqu'un léger vent venant des terres souffle vers le large. Sa hauteur est de l'ordre de quelques centaines de mètres, mais il peut être ressenti à une centaine de kilomètres à l'intérieur des terres.

Les vents catabatiques

Les vents catabatiques sont des vents froids descendant des reliefs le soir ou la nuit. La journée, un vent ascendant peut exister le long des reliefs montagneux, mais lorsqu'il s'arrête, souvent le soir, l'air froid au sommet des montagnes peut descendre sous la forme d'un courant de gravité s'engouffrant dans une vallée. Ces vents peuvent être formés sur des glaciers et être continus dans des régions comme l'Antarctique par exemple.

Nous avons donné plusieurs exemples de courants de gravité dans des configurations à très grande échelle liées à la météorologie mais il en existe bien d'autres. Ces courants peuvent aussi avoir lieu à des échelles plus faibles mais posant de sérieux problèmes de sécurité à l'homme : il s'agit des avalanches, des coulées de boue ou encore des nuées ardentes entre autres exemples.

1.2.2 En situation de "risques naturels"

Les avalanches de neige ont été, et sont encore, très étudiées (voir par exemple [Hopfinger \(1983\)](#)). Leur déclenchement reste mal compris, mais il provoque le lâcher d'un volume de neige donné en haut d'une pente. Une fois ce volume lâché, les avalanches peuvent être considérées



(a) Cumulonimbus en forme d'enclume



(b) Front de rafales matérialisé par de la poussière

(c) Front de brise de mer au dessus de Lee on the Solent, Hampshire, RU

FIG. 1.2 – Quelques manifestations de courants de gravité en météorologie.



(a) Nuée ardente à Montserrat (1997)

(b) Avalanche au Canada

FIG. 1.3 – Images de courants de gravité liés à des "risques naturels". Dans les deux cas la structure en lobes et fentes typique des courants de gravité turbulents et le nez relevé du sol sont bien discernables.

comme des courants de gravité descendant le long d'une pente (FIG. 1.3(b)). Une avalanche peuvent se comporter à un extrême plutôt comme un courant de boue (lorsqu'elle emprisonne peu d'air) et à l'autre extrême plutôt comme un courant gazeux (lorsque la neige est très aérée), avec tous les cas intermédiaires imaginables selon le type de neige par exemple. Pendant sont évolution, elle va entraîner des particules de neige soulevées du sol et de l'air ambiant au dessus d'elle, exactement à la manière des courants de densité descendant une pente (courants sous-marins d'eau plus froide ou plus salée que l'eau ambiante par exemple). Les avalanches de poudreuse peuvent atteindre typiquement des vitesses de 100m.s^{-1} . Il n'est donc pas possible de réagir une fois qu'elles sont déclenchées. C'est pourquoi leur prévision, et notamment l'évaluation de la distance qu'elles peuvent parcourir, est très importante. Si les avalanches de neige poudreuse sont proches des courants de gravité mettant en jeu des fluides comme l'air, il existe aussi des avalanches de boue dont les viscosités sont très élevées. Malgré tout, ces coulées de boue peuvent atteindre des vitesses de l'ordre de 90km/h et se propager sur de grandes distances. Il est donc absolument nécessaire de pouvoir prédire leur distance d'étalement. Enfin, on peut aussi évoquer les nuées ardentes, au moins aussi dangereuses que les avalanches de neige et se propageant

approximativement à la même vitesse. Dans leur cas, ce sont les débris de roche et/ou de lave que sont mis en suspension dans l'air, ce qui crée un fluide plus dense que l'air ambiant qui se propage le long de la pente du volcan sous la forme d'un courant de gravité. Il est souvent possible de discerner leur nez légèrement relevé au dessus du sol et leur front présentant les lobes et fentes typiques des courants de gravité (figure 1.3(a)).

1.2.3 En situation "industrielle"

Les systèmes de refroidissement de centrales électriques

Les centrales électriques utilisent de la vapeur produite par divers moyens (réacteur nucléaire, combustion ...) pour faire tourner les turbines produisant l'électricité. Cette vapeur doit ensuite être refroidie avant d'être rejetée dans l'atmosphère. Pour ceci, les centrales pompent de l'eau dans une rivière ou dans la mer puis rejettent cette eau réchauffée dans son réservoir d'origine (voir FIG. 1.4). Si l'écoulement moyen de ce réservoir est faible, cette eau chaude peut se propager à quelque cms^{-1} le long de la surface sous la forme d'un courant de gravité. Le profil de température est alors en mesure de conserver un front raide impliquant peu de mélange avec l'eau fraîche ambiante. Il est évidemment important de pouvoir estimer les déplacements de ce front à la fois à des fins écologiques (la vie sous-marine supporte mal ces fortes températures) et à des fins économiques (le pompage d'eau déjà chauffée en vue d'un refroidissement implique une perte d'efficacité).

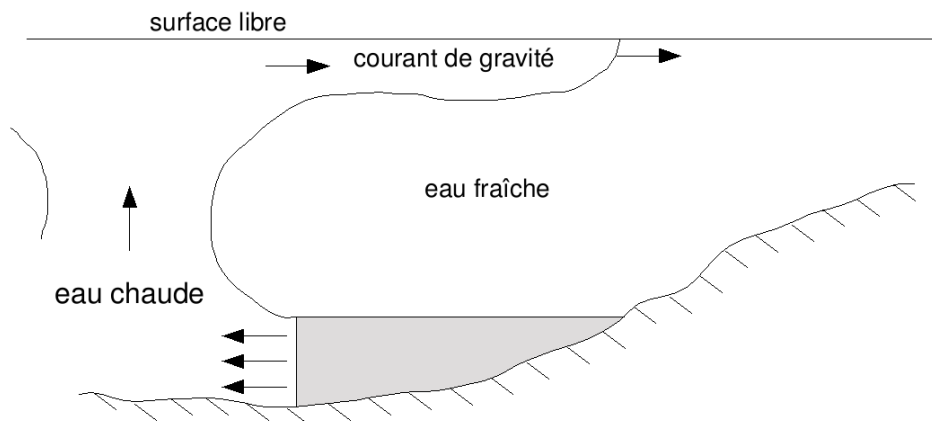


FIG. 1.4 – Schéma d'une évacuation d'eau chaude dans un réservoir plus froid.

Les marées noires

Les marées noires se propagent aussi sous la forme de courants de gravité. Dans ce cas la différence de densité n'est pas due à une différence de température comme précédemment mais est directement liée à la nature du fluide polluant. De nombreuses études sur les courants de

gravité ont été menées dans le contexte de la prévision des marées noires (voir par exemple [Fay \(1969\)](#) et [Hoult \(1972\)](#)).

La propagation de gaz ou fumées dans les tunnels

Toujours dans le domaine industriel, et cette fois en milieu confiné, une attention toute particulière a été portée à certains courants de gravité rencontrés dans les tunnels miniers ou routiers. L'enjeu est de pouvoir prédire la vitesse d'une couche de fumée ou de gaz toxique se propageant le long du toit (ou du sol) du tunnel. On peut citer les investigations pionnières de [Georgeson \(1942\)](#). C'est l'application la plus proche du sujet de ce mémoire. En particulier, des études parmi les plus anciennes au sujet des courants de gravité visaient à prédire l'intensité de la ventilation nécessaire à une approche sécurisée du lieu de la source du gaz. En effet, dans un tunnel incliné, il est possible qu'une poche de gaz léger se forme le long du toit et remonte la pente. Pour pouvoir entrer dans le tunnel par le haut sans rencontrer le gaz, il est nécessaire d'imposer une ventilation venant du haut. L'intensité de cette ventilation doit être suffisante pour que le courant de gravité ne remonte pas contre l'écoulement d'air. Une mauvaise ventilation

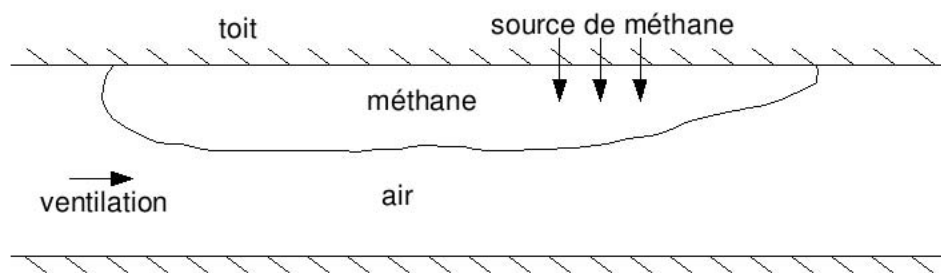


FIG. 1.5 – Schéma d'une poche de gaz se propageant dans un tunnel sous la forme d'un courant de gravité.

peut aussi être responsable de la formation d'une poche de gaz le long du toit ou du sol de la galerie, avec tous les dangers que cela représente. Une telle configuration a par exemple causé la mort de 31 personnes en 1965 dans la mine de charbon de Cambrian.

Une autre application de ce travail est la propagation d'incendies dans des tunnels. Nous pouvons citer à ce sujet un accident qui s'est produit en 1987 à la station de métro de King's Cross à Londres, tuant une trentaine de personnes (voir [Hunt \(1991\)](#)). Cet accident a eu lieu dans un tunnel incliné contenant un escalier roulant. Le feu a pris sous l'escalier en bois et a brûlé lentement pendant 15 minutes puis a rejoint le haut du tunnel en seulement deux minutes. C'est à cet endroit qu'il y a eu le plus de victimes. Les études qui ont suivi ont montré que le feu était alimenté par l'air venant du bas, qu'il était demeuré dans la partie basse du tunnel et que la vitesse du front de flamme avait augmenté exponentiellement, surprenant les personnes au bout du tunnel.

La ventilation naturelle

Il existe aussi des études sur la ventilation naturelle des immeubles faisant intervenir la notion de courant de gravité (voir par exemple [Linden \(1999\)](#)). Pour ventiler une pièce, il existe deux moyens : la ventilation forcée (un ventilateur électrique par exemple) ou la ventilation naturelle. Cette dernière consiste à utiliser les mouvements naturels des fluides pour propager de la chaleur, ou des polluants. Les mouvements naturels des fluides peuvent être dus à des différences de pression entre le haut et le bas d'une tour par exemple, ou à des différences de densité des fluides. On retrouve alors les concepts de flottabilité faisant monter l'air chaud et le concept de courant de gravité créé par la propagation d'air froid le long du sol dans une pièce remplie d'air plus chaud, ou par la propagation de l'air chaud bloqué verticalement par le plafond au sein de l'air plus froid de la pièce.

Ce « bestiaire » des courants de gravité, généralement non-confinés, n'est pas exhaustif. Il a été grandement inspiré de [Simpson \(1997\)](#), livre auquel le lecteur peut se reporter pour de plus amples détails concernant ces écoulements si riches.

1.3 Quelques écoulements proches

1.3.1 L'écoulement de Rayleigh-Taylor

Tout comme les courants de gravité, l'instabilité de Rayleigh-Taylor est générée par des forces de flottabilité dues à une différence de densité entre deux fluides. Plus précisément, et plus généralement, elle se produit lorsqu'un fluide dense (de densité ρ_2) et un fluide moins dense (de densité ρ_1) sont accélérés l'un vers l'autre perpendiculairement à l'interface les séparant initialement ([Chandrasekhar \(1961\)](#)). Cette accélération peut être due à la gravité, mais elle peut aussi être due à une explosion nucléaire, de supernova ou encore survenir lors de l'initiation de la fusion inertielle. Cette instabilité se manifeste par la croissance de structures de part et d'autre de l'interface. Si cette interface est initialement perturbée grâce à un bruit blanc, une longueur d'onde plus instable λ apparaît. C'est l'amplitude de ce mode le plus instable qui va définir la taille de la zone de mélange de l'instabilité dans le régime linéaire initial. Cette amplitude croît exponentiellement jusqu'à ce qu'elle atteigne une valeur comprise entre 0.1λ et 0.4λ . Le taux de croissance peut être calculé analytiquement dans ce régime linéaire ([Chandrasekhar \(1961\)](#)). Pour une interface initiale infiniment fine et pour deux fluides miscibles et non-visqueux, il vaut

$$\omega = \sqrt{At.g.k} \quad (1.1)$$

où $At = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$ est le nombre d'Atwood, g l'accélération imposée et $k = 2\pi/\lambda$. Lorsque l'amplitude des perturbations devient importante, l'écoulement entre dans sa phase non-linéaire. Les perturbations forment des doigts, puis prennent une forme caractéristique de champignons (due à une instabilité secondaire de type Kelvin-Helmholtz) sans interagir entre eux. Viennent ensuite

trois autres phases décrites par [Cook et al. \(2004\)](#). La première est une phase d'interaction horizontale et de mélange qui ralentit momentanément l'extension verticale et enrichit fortement le spectre horizontal. Si la perturbation initiale ne comprenait pas tous les modes possibles, ils sont susceptibles d'être créés ici grâce aux interactions non-linéaires horizontales. La mémoire des conditions initiale est alors perdue et la zone de mélange continue de croître (voir [FIG. 1.6](#)) jusqu'à atteindre un régime de turbulence pleinement développée.

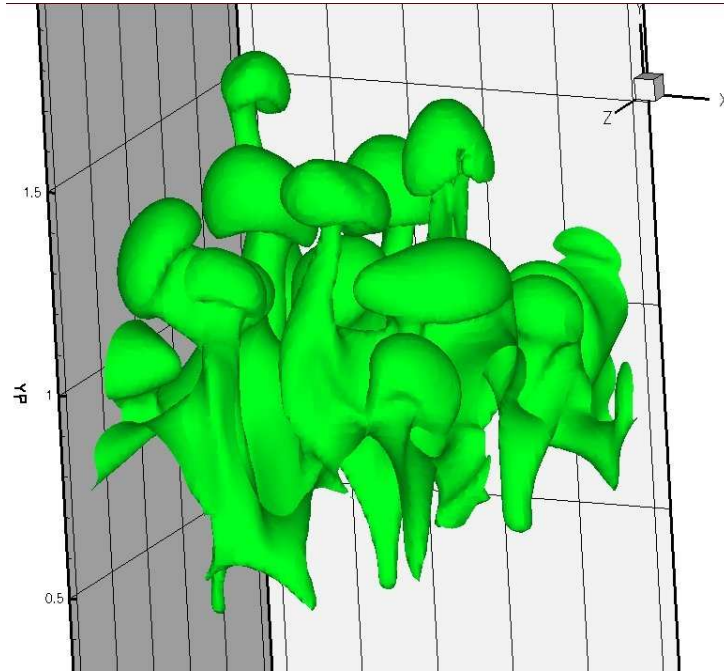


FIG. 1.6 – Iso-surface de densité $(\rho_2 + \rho_1)/2$ (où ρ_2 et ρ_1 sont les densités des fluides lourd et léger respectivement) dans la dernière phase d'évolution de l'écoulement de Rayleigh-Taylor.

Pour des temps suffisamment longs, la taille de la zone de mélange suit une loi en

$$L_m = \alpha \cdot At \cdot g \cdot t^2 \quad (1.2)$$

Cette loi est facilement compréhensible si l'on considère que la seule accélération exercée sur une poche de fluide léger (par exemple) est due à la flottabilité avec une gravité réduite $At \cdot g$. La vitesse de la poche va alors évoluer en $At \cdot g \cdot t$ et sa position en $At \cdot g \cdot t^2$ avec un préfacteur α à déterminer. Pour que ce raisonnement soit correct, il faut que les trois conditions suivantes soient réunies ([Cook et al. \(2004\)](#)) : la mémoire des conditions initiales doit être perdue, il ne doit pas y avoir d'influence des frontières (hautes et basses aussi bien que verticales) et enfin les effets de la viscosité et de la diffusivité doivent pouvoir être négligés.

La détermination précise de la valeur du coefficient α est encore un sujet d'étude très actif. En effet il est extrêmement difficile de satisfaire les trois conditions ci-dessus puisqu'elles demandent notamment un nombre de Reynolds élevé (donc difficile à atteindre par la simulation) et une

description fine des conditions initiales (donc difficile à obtenir expérimentalement) dans le but d'évaluer leur éventuelle influence.

Les différentes études réalisées à ce jour recensent des valeurs de α comprises entre 0.03 et 0.06 (Dimonte *et al.* (2004)).

Si la diffusivité moléculaire est non-nulle, elle peut dominer les autres phénomènes au début du développement de l'instabilité et conduire à une croissance en $t^{1/2}$ indépendamment de la perturbation initiale. La phase en t^2 viendra ensuite.

L'effet des limites verticales du domaine sur l'instabilité est négligeable tant que les plus grosses structures créées ont une taille petite devant l'extension horizontale du domaine. Si ce n'est pas le cas, un comportement différent est observé. Les travaux dans cette configuration confinée sont assez peu nombreux. On peut compter parmi ceux-ci l'étude de la propagation de fumées dans une conduite verticale de section carrée susceptible de représenter une cage d'escalier ou d'ascenseur par Cannon & Zukoski (1975). Cette étude expérimentale a clairement montré une évolution en $t^{0.57}$ de la position du front de fumée dans la cage. Baird *et al.* (1992) suggèrent quant à eux une extension de la zone de mélange en $t^{0.5}$.

Très récemment, Debacq *et al.* (2003) et Séon (2006) ont montré précisément qu'un régime auto-similaire diffusif dans lequel $L_m \sim t^{1/2}$ se développait dans un tube vertical de section circulaire. Dans cette situation, les profils adimensionnels de densité moyennée horizontalement suivent une loi en fonction d'erreur avec un coefficient de diffusion équivalent macroscopique supérieur de plusieurs ordres de grandeur au coefficient de diffusion moléculaire.

1.3.2 Les couches de mélange

Une instabilité de type Kelvin-Helmholtz apparaît lorsqu'un cisaillement est imposé entre deux courants fluides. La situation académique modèle est ici la couche de mélange (voir FIG. 1.7). Considérons deux fluides non-visqueux avec respectivement des vitesses initiales $-U$ et $+U$ de part et d'autre de l'interface les séparant. Si cette interface est déformée par une petite perturbation sinusoïdale par exemple, le fluide va accélérer sur les crêtes et ralentir dans les creux, générant respectivement des dépressions sur les premières et des surpressions dans les seconds. Ces différences locales de pression tendent à renforcer la déformation originale au niveau des crêtes et on assiste à la croissance de l'instabilité. Il faut noter ici que, pour des fluides non-visqueux, la réversibilité en temps impose l'existence de deux modes, un croissant et un amorti. On conçoit aisément que la force de succion au niveau des crêtes soit responsable du mode instable, mais elle est aussi responsable du mode amorti : elle produit une accélération normale à l'interface, des creux vers les crêtes (par exemple vers le haut), et si cette accélération est appliquée à une crête se déplaçant vers un creux (vers le bas), il s'agit d'un mode amorti (Plouraboué & Hinch (2002)).

Ainsi, toutes les longueurs d'ondes sont instables dans le cas d'une couche de mélange de fluides non-visqueux. En pratique, la viscosité joue un rôle de filtre. En effet, si nous considérons

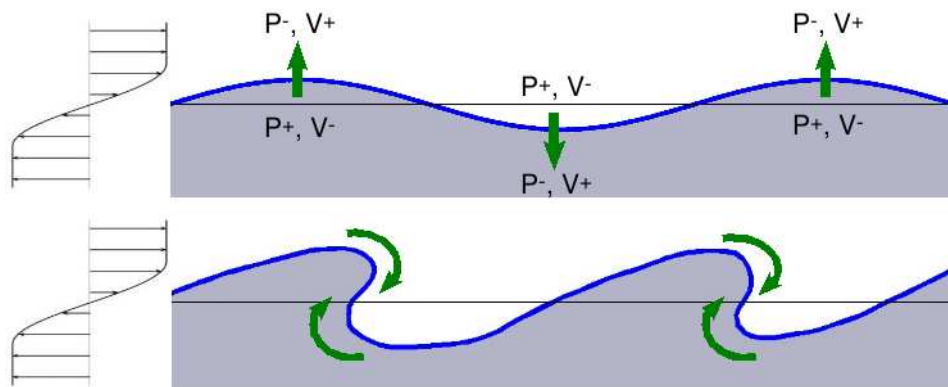


FIG. 1.7 – Deux couches de fluide sont juxtaposées et avancent à des vitesses différentes (le profil de vitesse moyen est à gauche en noir). Dans un premier temps une petite perturbation de l’interface modifie localement le champ de vitesse et, en conséquence, le champ de pression. Cette modification va dans le sens de la perturbation : cette dernière est donc amplifiée au niveau des crêtes (en haut). Ensuite l’amplitude de la perturbation devient suffisamment grande pour voir apparaître des effets non-linéaires qui conduisent au déferlement (en bas).

une perturbation de longueur d’onde λ , il est possible de montrer qu’elle a une profondeur de pénétration également de l’ordre de λ . Cette perturbation a un taux de croissance $\omega \sim U/\lambda$ (les plus petites longueurs d’ondes sont les plus instables), et donc un temps de vie de l’ordre de $1/\omega$. Si le temps de diffusion visqueuse d’une structure de taille λ est inférieur à ce temps de vie, l’instabilité ne peut pas croître. Ceci permet de définir une longueur d’onde de coupure de l’instabilité : le temps caractéristique de diffusion d’une structure de taille λ , soit λ^2/ν , doit être supérieur à $1/\omega$ pour que l’instabilité croisse, ce qui conduit à $\lambda > \nu/U$. Ceci définit la plus petite longueur d’onde possible, et donc aussi la plus instable.

1.3.3 Les écoulements en conduites avec de longues bulles

La propagation de grandes bulles dans un tube est encore un problème faisant intervenir les forces de flottabilité. Il n’est différent de ceux considérés dans cette étude que par le fait que les fluides sont non-miscibles. Dans le cas d’un tube vertical, [Dumitrescu \(1943\)](#) a le premier déterminé analytiquement la vitesse de la bulle pour un écoulement résultant d’un équilibre inertie/gravité. Ainsi, l’écoulement est considéré comme non-visqueux. Cette hypothèse est raisonnable si le nombre de Reynolds $Re = D^{3/2}g^{1/2}/\nu_L$ est supérieur à 300, où ν_L est la viscosité cinématique du liquide. Pour des bulles d’air dans de l’eau, cette condition est satisfaite dès que le diamètre du tube est supérieur à 2 mm. Ainsi, cette condition est très facilement réalisée. [Davies & Taylor \(1950\)](#) ont résolu ce problème d’une manière simple et élégante en considérant l’écoulement du liquide autour d’une poche de gaz dans un tube cylindrique. La poche et l’écoulement sont axisymétriques. Comme le liquide est immobile à l’infini, l’écoulement y

est irrotationnel. Puisque le liquide est non-visqueux, l'écoulement est irrotationnel dans tout le liquide. Il est alors possible de définir un potentiel scalaire ϕ et une fonction de courant ψ qui satisfont à une équation de Laplace. La solution peut être décomposée en une série d'harmoniques cylindriques. Davies et Taylor ont obtenu le premier terme du développement. En imposant que l'équation de Bernoulli soit vérifiée sur la surface de la bulle à une distance $D/4$ du nez, ils ont pu montrer que la vitesse de la bulle est $V_b = 0.328\sqrt{gD}$. Dumitrescu a, quant à lui, obtenu la valeur plus consistante avec les expériences $V_b = 0.351\sqrt{gD}$ dès 1943. La valeur plus communément utilisée, extraite des expériences (Harmathy (1960), White & Beardmore (1962), Nicklin *et al.* (1962) et Zukoski (1966)) et des simulations numériques (Mao & Dukler (1990)) est plutôt $V_b = 0.345\sqrt{gD}$. Pour être valide, ce résultat doit être appliqué uniquement à des bulles suffisamment longues, soit d'un volume supérieur à $(0.4D)^3$. Dans les études analytiques citées ci-dessus, la forme du nez de la bulle est supposée hémisphérique, ce qui est bien vérifié expérimentalement. En outre, ces modèles nécessitent uniquement une résolution au voisinage du nez. Ceci indique un résultat important qui est commun, en général, aux courants de gravité en tubes : la vitesse d'ascension de la bulle est pilotée uniquement par la dynamique du front. Dans ces résolutions analytiques, la tension de surface est négligée. Zukoski (1966) a montré expérimentalement que cette hypothèse est bien vérifiée pour des nombres de Bond (ou d'Eötvös Bo), $Bo = \text{gravité}/\text{capillarité} = \Delta\rho g R^2/\sigma$ supérieurs à 10.

Lorsque le tube contenant la bulle est incliné, la vitesse d'ascension de cette dernière dépend fortement de l'angle d'inclinaison θ . Dans cette configuration, la gravité n'est plus dirigée suivant l'axe du tube, ce qui brise la symétrie de révolution du problème. Ainsi, les prédictions théoriques deviennent plus ardues. Des études expérimentales ont cependant été menées par Zukoski (1966) et Weber *et al.* (1986). Il a pu être observé (a) que la vitesse de la bulle passe par un maximum autour de $\theta = 55^\circ$ et est quasiment constante pour les angles voisins ; (b) que les prédictions théoriques en tubes verticaux sont bien retrouvées ; et (c) que la vitesse de déplacement de la bulle dans un tube horizontal est plus importante que celle dans un tube vertical.

Très récemment, le même dispositif a été utilisé par Séon *et al.* (2005), mais cette fois avec des fluides miscibles. Une dépendance en θ très similaire a été découverte avec un maximum de vitesse égal à $0.7\sqrt{AtgD} = 0.495\sqrt{gD}$.

1.3.4 L'effet Boycott

Les travaux de Séon *et al.* (2005) en tubes inclinés ont exhibé une vitesse maximale du courant atteinte non pas pour un tube vertical (dans lequel la composante de la gravité alignée avec l'écoulement est maximale) mais pour un tube incliné. Ce phénomène un peu contre-intuitif a aussi été observé dans des expériences de sédimentation de particules solides dans des tubes. Il est connu sous le nom d' "effet Boycott", du nom de son découvreur Boycott (1920), et a été analysé par Acrivos & Herbolzheimer (1979). L'explication est la suivante : dans un tube vertical, les particules tombent sous l'effet de leur propre poids tout en étant réparties

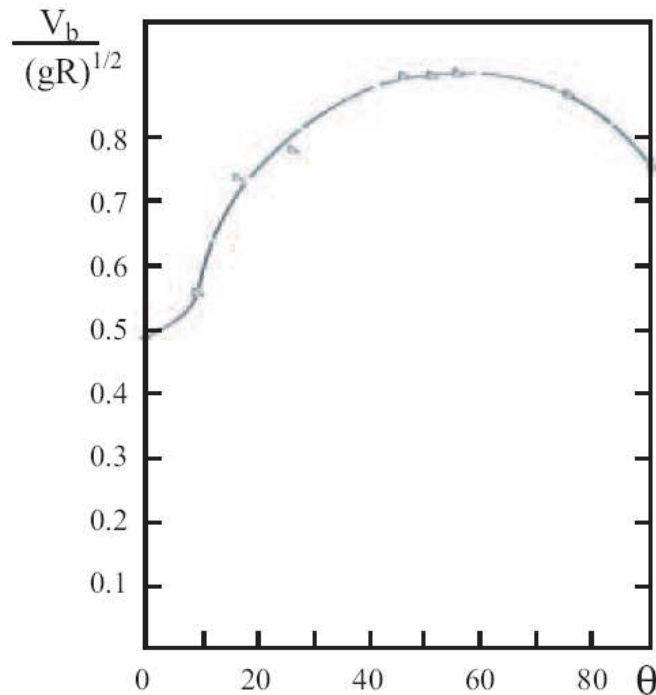


FIG. 1.8 – D'après Zukoski (1966). Vitesse d'une bulle en tube incliné en fonction de l'angle d'inclinaison ($Bo = 1000$ et $D = 17.8cm$).

de manière spatialement homogène. Elles doivent alors toutes faire face à des forces de traînée dues au mouvement du fluide clair remontant entre elles. En revanche, si le tube est incliné, les particules tombent initialement verticalement et se regroupent du côté de la génératrice inférieure du tube. Il s'ensuit un déplacement "global" des particules vers le bas dans cette zone et un contre-écoulement de fluide clair dans la partie supérieure. Le gradient de vitesse est alors essentiellement localisé dans la zone interfaciale entre les deux contre-courants, et les contraintes visqueuses aussi. La surface globale de friction est ainsi réduite et la vitesse maximale atteinte dans cet écoulement stratifié est plus importante qu'en situation verticale.

1.4 Description qualitative

Un courant de gravité se présente sous la forme d'une structure allongée (que nous appellerons le corps) coulant le long d'une surface, et terminée par une tête. Dans la plupart des cas, un fort mélange se produit entre le courant et le fluide ambiant le long du corps. Cependant, au niveau du front une frontière très nette est conservée en toutes circonstances, quel que soit le nombre de Reynolds et le niveau de turbulence produit à l'arrière du front. Cette description très succincte est la seule qui puisse être appliquée à n'importe quel courant de gravité tant la forme de ce dernier est susceptible de changer en fonction du nombre de Reynolds, du nombre de Schmidt, de la hauteur de fluide ambiant au dessus du courant, du régime d'écoulement, de la géométrie, de

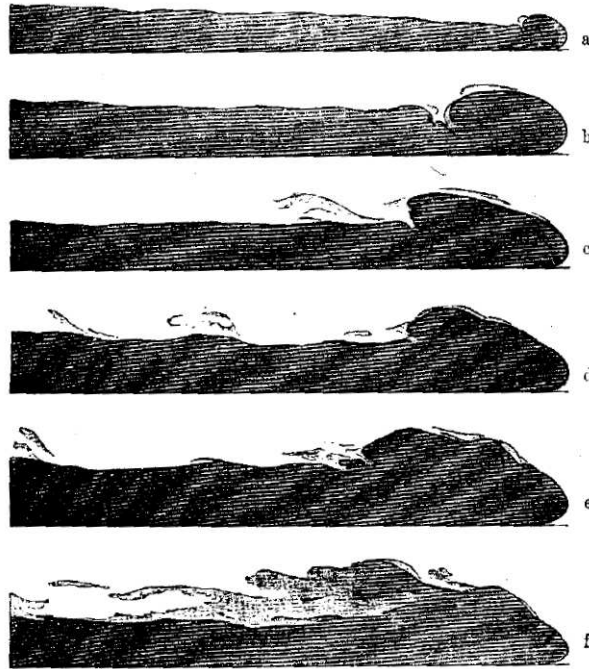


FIG. 1.9 – Ecoulement d’air froid sous de l’air plus chaud avec des écarts de températures de (a) 0.5° , (b) 1.5° , (c) 4° , (d) 7° , (e) 15° , (f) 35° . D’après Schmidt (1911).

la nature et de l’inclinaison de la surface le long de laquelle il se propage, etc. Ainsi, un courant de gravité issu d’une marée noire sera très différent d’un front de rafales venant d’un orage ou d’une avalanche par exemple. Nous pouvons tout de même recenser quelques caractéristiques des courants très souvent retrouvées. En particulier, la tête du courant est un élément crucial puisque, à nombre de Reynolds suffisamment grand, c’est elle qui impose la vitesse de propagation du courant.

1.4.1 Influence du nombre de Reynolds sur l’ensemble du courant

Considérons tout d’abord la dépendance de la forme du courant vis à vis du nombre de Reynolds. La figure 1.9 issue des travaux de Schmidt (1911) montre différentes formes de courants obtenues en faisant varier l’écart de température responsable de l’écart de densité. Ceci a pour effet de faire varier le nombre de Reynolds de l’écoulement. L’image (a) est obtenue pour un faible écart de température et cet écart grandit progressivement pour atteindre 35° sur l’image (f) (ce qui représente une variation du nombre de Reynolds de 10 à plus de 1000). Il est possible de remarquer qu’à très faible nombre de Reynolds l’épaisseur du courant varie avec la distance horizontale et que la tête du courant n’est quasiment pas marquée. Cette forme est caractéristique des courants dominés par des effets visqueux et non par des effets inertiels. Lorsque le nombre de Reynolds augmente (images (b) à (f)) le corps du courant devient de plus en plus horizontal et la tête grandit et se démarque de plus en plus. En augmentant encore le nombre de Reynolds

au delà de 1000, il n'apparaît plus de changement significatif de la forme du courant par rapport à l'image (f). En pratique, de nombreuses expériences (dont celles de [Simpson & Britter \(1979\)](#)) s'accordent sur le fait qu'au delà d'un nombre de Reynolds critique $Re = \frac{\sqrt{g'DD}}{\nu}$ compris entre 500 et 1000 les courants de gravité ont tous une forme « convergée » vers la forme caractéristique des courants à grand nombre de Reynolds (f). Dans la nature ou les applications industrielles, ce nombre de Reynolds est souvent beaucoup plus grand que 1000. C'est pourquoi la plupart des études aussi bien expérimentales que numériques se sont focalisées sur des nombres de Reynolds grands : de l'ordre de 10^4 ou 10^5 pour les expériences et de 10^3 à 10^4 pour les simulations. Cependant il existe tout de même des situations géophysiques où le nombre de Reynolds est modéré, comme les coulées de lave ou de boues, tout comme il existe des courants à faible nombre de Reynolds dans les écoulements industriels essentiellement lorsqu'ils se produisent en géométrie confinée. C'est dans ce cadre que se situe ce travail ainsi que les expériences de [Séon \(2006\)](#) où les nombres de Reynolds sont compris entre 200 et 1000. Cette gamme permet tout de même d'observer certains effets inertiels que nous détaillerons dans la suite de ce mémoire.

1.4.2 Forme caractéristique de la tête du courant pour des nombres de Reynolds modérés à grands

La forme de la tête d'un courant de gravité usuel est influencée par la nature de la surface sur laquelle il se propage : surface solide ou surface libre, ou en d'autres termes condition d'adhérence ou de glissement. Si la surface n'impose pas de cisaillement au courant, le front se situe sur celle-ci. S'il s'agit d'une surface solide, le point le plus avancé du courant s'élève au-dessus de la surface à une hauteur de l'ordre de 10% de la hauteur qu'atteint la tête à $Re \rightarrow \infty$. Ainsi du fluide peu dense est piégé en situation instable sous le courant. Une partie de ce fluide peu dense située juste sous le front s'élève ensuite sous l'effet de la flottabilité, ce qui crée de petites structures tridimensionnelles qui sont ensuite amplifiées pour aboutir aux structures caractéristiques en lobes et fentes observables sur le front (voir figure 1.1 et l'étude de stabilité de [Härtel *et al.* \(2000a\)](#)). Ce mécanisme est très bien confirmé par la disparition de ces structures sur les courants se propageant le long d'une surface de glissement ([Simpson \(1972\)](#)). Une fois créées, les fentes ne disparaissent pas spontanément mais peuvent fusionner avec d'autres fentes voisines puisque les lobes qui les séparent sont continuellement en train de grossir ou de rétrécir et de fusionner. Ceci tend à réduire le nombre total de fentes. D'un autre côté, il existe une taille maximale pour les lobes (proche de deux fois leur taille moyenne). Si l'un d'eux l'atteint, il se coupe en deux et faire apparaître une nouvelle fente. Globalement, le nombre de fentes reste à peu près constant comme le montre la figure 1.10 extraite de [Cantero *et al.* \(2007\)](#). La taille moyenne des lobes varie avec le nombre de Reynolds entre $Re = 400$ et 4000 puis se stabilise à 1/4 de la taille de la tête du courant pour les plus grands nombres de Reynolds. L'apparition des structures en lobes et fentes n'est que l'une des deux instabilités affectant le courant de gravité. L'autre est l'instabilité de Kelvin-Helmholtz qui génère des rouleaux au niveau de l'arrière de

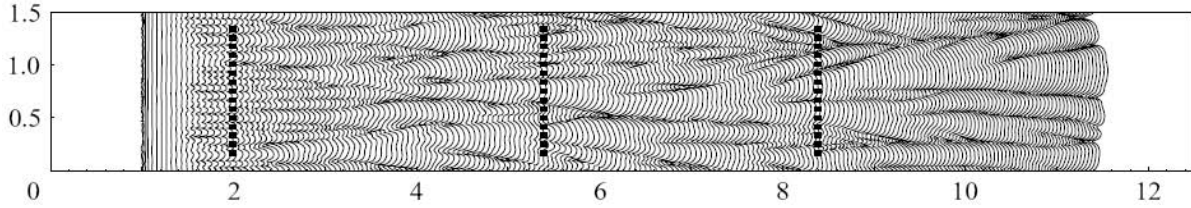


FIG. 1.10 – Figure extraite de [Cantero *et al.* \(2007\)](#). Tracé de la position du front à intervalles de temps réguliers ($Re = 8950$).

la tête. Ces rouleaux se détachent ensuite pour être advectionnés dans la zone de mélange située à l'arrière de la tête et au-dessus du corps. Ils sont le principal moteur du mélange induit à l'arrière de la tête. L'existence de ces rouleaux ne dépend pas de la nature de la surface. Ces deux instabilités se combinent évidemment dans les écoulements tridimensionnels sur une surface solide. En particulier, les lobes et fentes tendent à altérer les rouleaux de Kelvin-Helmholtz, si bien qu'il peut devenir difficile de distinguer les deux types de structures. En revanche, lorsque les lobes et fentes sont absents, les rouleaux de Kelvin-Helmholtz sont très facilement observables.

La forme de la tête d'un courant de gravité peut aussi être modifiée par l'écoulement dans le fluide ambiant. Si le courant se propage dans un fluide ambiant animé d'une vitesse moyenne qui lui fait face, le nez est plus bas et la tête plus allongée horizontalement. A l'inverse, s'il se propage à co-courant d'un écoulement de fluide ambiant, le nez est plus haut et la tête plus courte. Dans la situation qui nous concerne, ce problème n'apparaîtra pas puisque le fluide ambiant sera au repos.

Il est aussi à noter que la tension de surface peut jouer un rôle important sur la forme et la vitesse de propagation d'un courant le long d'une surface libre ([Hoult \(1972\)](#)). Le régime où les forces capillaires sont dominantes se rencontre dans la phase ultime de la vie du courant. Dans ce travail nous ne considérerons que le cas de deux fluides miscibles.

Enfin, la pente de la surface sur laquelle le courant se propage a une grande importance à la fois sur la forme de la tête et sur sa vitesse. Lorsque le débit de fluide lourd est fixé pour un courant dense le long d'une pente, la vitesse du front reste quasiment constante et est seulement de l'ordre de 60% de la vitesse de l'écoulement du corps. Ceci entraîne un grossissement de la tête. D'autre part, le volume de la tête augmente aussi par entraînement de fluide ambiant, ce qui fait diminuer le rapport des densités entre le front et le fluide ambiant. Ces deux effets s'équilibrent pour donner une vitesse du front constante ([Ellison & Turner \(1959\)](#), [Britter & Linden \(1980\)](#)). La vitesse du front pour un courant alimenté par une source continue de fluide dense est $u_F/(g'Q)^{1/3} = 1.5 \pm 0.2$ où Q est le flux volumique par unité de largeur transversale issu de la source indépendamment de l'angle d'inclinaison. Dans le présent travail l'extension verticale au-dessus du courant est limitée puisque nous considérerons des écoulements confinés en tube. Le volume de la tête du courant ne pourra donc pas augmenter comme dans les études

citées ici. Il en résultera évidemment un comportement très différent.

Le cas du lâcher d'un volume fixé de fluide sur une pente (qui se rapproche des avalanches) a été étudié par [Hopfinger & Tochon-Danguy \(1977\)](#) et [Beghin *et al.* \(1981\)](#). Ces auteurs ont montré que le nuage commençait par accélérer puis subissait une phase de décélération et que sa forme était proche d'une demi-ellipse. Le taux de croissance du nuage est plus grand que celui de la tête d'un courant constamment alimenté. Plus récemment, [Rastello & Hopfinger \(2004\)](#) et [Etienne *et al.* \(2006\)](#) ont montré qu'en prenant en compte l'entraînement de sédiments ce comportement était modifié. Dans ce cas, le nuage accélère continuellement.

1.4.3 Influence du nombre de Schmidt sur l'ensemble du courant

L'allure et la vitesse de propagation d'un courant de gravité peuvent être influencées par le nombre de Schmidt $Sc = \nu/\kappa$, rapport de la viscosité cinématique et de la diffusivité moléculaire. [Bonometti *et al.* \(2007\)](#) ont étudié l'influence du nombre de Schmidt entre $Sc = O(1)$ et $Sc = O(10^2)$. Pour les faibles nombres de Reynolds (typiquement $Re < 1000$), le nombre de Schmidt a une influence drastique. A faible Re ($Re < 100$) et à grand Sc , le courant de gravité peut présenter au début de son évolution une petite tête faiblement marquée par un creux à l'arrière. Dès que la diffusivité moléculaire entre en jeu, ce creux disparaît complètement. Pour des nombres de Reynolds intermédiaires (soit entre 100 et 1000 approximativement), un autre phénomène intéressant peut se produire : un courant à $Sc \gg 1$ présente une tête bien marquée et un corps dont la surface est plate, tandis qu'à $Sc = 1$, des structures ressemblant à des rouleaux de Kelvin-Helmholtz apparaissent au dessus du corps. L'explication est la suivante : l'existence d'une instabilité de Kelvin-Helmholtz dans un écoulement cisailé comportant une stratification en densité est déterminée par le nombre de Richardson :

$$Ri = \frac{-g\partial_z\rho}{\rho(\partial_z U)^2} \quad (1.3)$$

où U est la vitesse dans le sens du courant. Ce nombre est formé par le rapport des effets stabilisants de la stratification en densité et des effets déstabilisants du cisaillement entre les fluides. L'instabilité de Kelvin-Helmholtz apparaît lorsque ce rapport est inférieur à une valeur critique $Ri_c = 1/4$ ([Chandrasekhar \(1961\)](#), [Drazin & Reid \(1981\)](#)). Les deux courants à $Sc = 1$ et $Sc \gg 1$ avancent à des vitesses quasiment identiques, et donc subissent le même cisaillement. En revanche, dans le cas $Sc = 1$, la diffusivité moléculaire importante épaissit considérablement la zone de transition entre le courant inférieur et le courant supérieur par rapport au cas $Sc \gg 1$ pour lequel cette zone est extrêmement fine. Ainsi, les effets stabilisants du gradient vertical de densité sont beaucoup plus prononcés dans les courants à $Sc \gg 1$. Pour les grands nombres de Reynolds, le nombre de Schmidt n'a en revanche plus d'influence marquée. En effet, dans cette configuration le cisaillement devient très important et des rouleaux de Kelvin-Helmholtz intenses apparaissent le long du corps et derrière la tête pour participer au mélange entre les courants quel que soit le nombre de Schmidt.

1.4.4 Courants de gravité en géométrie confinée

Les études les plus récentes et détaillées des courants de gravité en géométrie confinée sont issues des travaux expérimentaux de [Debacq *et al.* \(2003\)](#) (pour un tube vertical) et [Séon *et al.* \(2005\)](#), [Séon \(2006\)](#), [Séon *et al.* \(2006\)](#) et [Séon *et al.* \(2007\)](#) pour un tube incliné entre 0° et 90° . Dans la mesure où nous détaillerons ces résultats par la suite, nous n'allons présenter ici que succinctement quelques aspects cruciaux de la dynamique des courants confinés découverts par ces auteurs. Les expériences en question ont été menées pour des nombres d'Archimède $Ar = \frac{At^{1/2}g^{1/2}D^{3/2}}{\nu}$ inférieurs à 1000 et des nombres d'Atwood At variant de $2 \cdot 10^{-5}$ à 10^{-1} , D désignant le diamètre du tube. Ces travaux ont mis à jour trois régimes d'écoulement différents aux temps longs suivant l'inclinaison du tube, et ceci pour n'importe quel jeu de paramètres. Ces régimes font intervenir les notions de vitesses caractéristiques résultant d'un équilibre entre forces de flottabilité et forces d'inertie ou visqueuses.

La pression archimèdienne qui correspond à une force de flottabilité peut s'écrire :

$$(\rho_2 - \rho_1)gD \quad (1.4)$$

Le terme de pression inertielle peut quant à lui s'écrire :

$$(\rho_1 + \rho_2)V^2 \quad (1.5)$$

Enfin, les contraintes visqueuses sont de l'ordre de :

$$(\rho_1 + \rho_2)\nu V/D \quad (1.6)$$

En supposant que le terme de flottabilité a toujours un rôle à jouer puisqu'il est l'unique moteur de l'écoulement, il est possible de définir des vitesses caractéristiques résultant d'un équilibre Flottabilité-Inertie, V_t , et d'un équilibre Flottabilité-Viscosité, V_ν . L'égalité entre 1.4 et 1.5 donne

$$V_t = \sqrt{AtgD} \quad (1.7)$$

tandis que l'égalité entre 1.4 et 1.6 donne

$$V_\nu = \frac{AtgD^2}{\nu} \quad (1.8)$$

Notons ici que nous avons utilisé pour les forces d'inertie et visqueuse une densité caractéristique $\rho_1 + \rho_2$ qui prend en compte l'existence des deux fluides. Il est aussi possible de n'utiliser que ρ_1 ou ρ_2 selon l'écoulement considéré. Le produit Atg dans les vitesses caractéristiques V_t et V_ν serait alors remplacé par g' . Cependant, l'utilisation du nombre d'Atwood permet d'obtenir des résultats cohérents pour les forts rapports de densité alors que l'utilisation de g' peut conduire à des inconsistences dans cette situation (voir [Gröbelbauer *et al.* \(1993\)](#)).

Il est maintenant possible de définir le nombre d'Archimède comme un nombre de Reynolds construit grâce à la vitesse caractéristique inertielle V_t :

$$Ar = \frac{V_t D}{\nu} = \frac{At^{1/2}g^{1/2}D^{3/2}}{\nu} \quad (1.9)$$

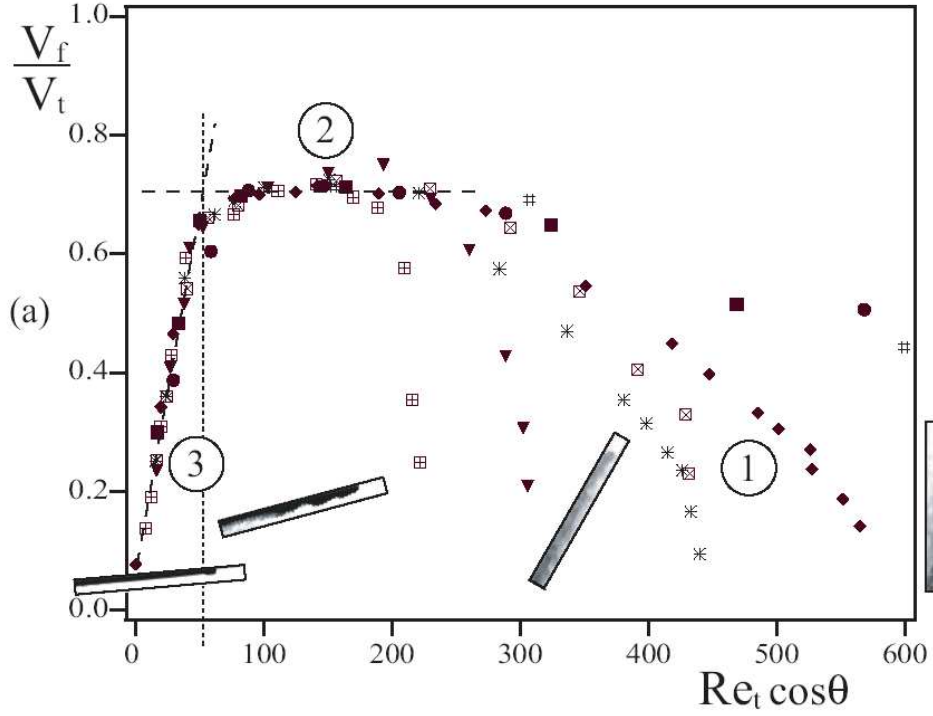


FIG. 1.11 – Figure issue de [Séon \(2006\)](#). Variation de la vitesse de front normalisée V_f/V_t en fonction de $Ar \cos \theta = V_\nu/V_t \cos \theta$ (notre Ar correspond au Re_t de [Séon \(2006\)](#)) pour différents jeux de viscosités (de 10^{-6} à $4 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$) et contrastes de densité (At de 4×10^{-4} à 3.5×10^{-2}). Le régime 3 correspond au régime visqueux, le régime 2 au régime en plateau (inertiel) et le régime 1 au régime inertiel.

Le premier des trois régimes évoqués ci-dessus existe pour les tubes proches de l'horizontale. Dans ce régime, la vitesse du front V_f peut s'écrire comme une vitesse visqueuse du type V_ν mais dans laquelle l'accélération de la gravité g est remplacée par sa composante le long de l'axe du tube $g \cos \theta$. Il en découle, comme le montre la figure 1.12, une vitesse de front qui suit dans le régime visqueux quasi-horizontale (noté 3 sur la figure) la loi :

$$V_f \sim V_\nu \cos \theta \quad (1.10)$$

Le second régime correspond à une gamme d'angles intermédiaires pour laquelle la vitesse du front ne dépend pas de l'angle d'inclinaison du tube. La figure 1.11 issue de [Séon et al. \(2005\)](#) illustre ceci et montre par ailleurs que la valeur de la vitesse du front y est aussi remarquablement indépendante à la fois de At et de Ar . Dans ce régime plateau noté 2, on a

$$V_f \simeq 0.7V_t \quad (1.11)$$

Ceci est la marque d'un régime dominé par un équilibre flottabilité-inertie.

Enfin, le dernier régime est obtenu pour les angles proches de la verticale. Ce régime obéit aussi

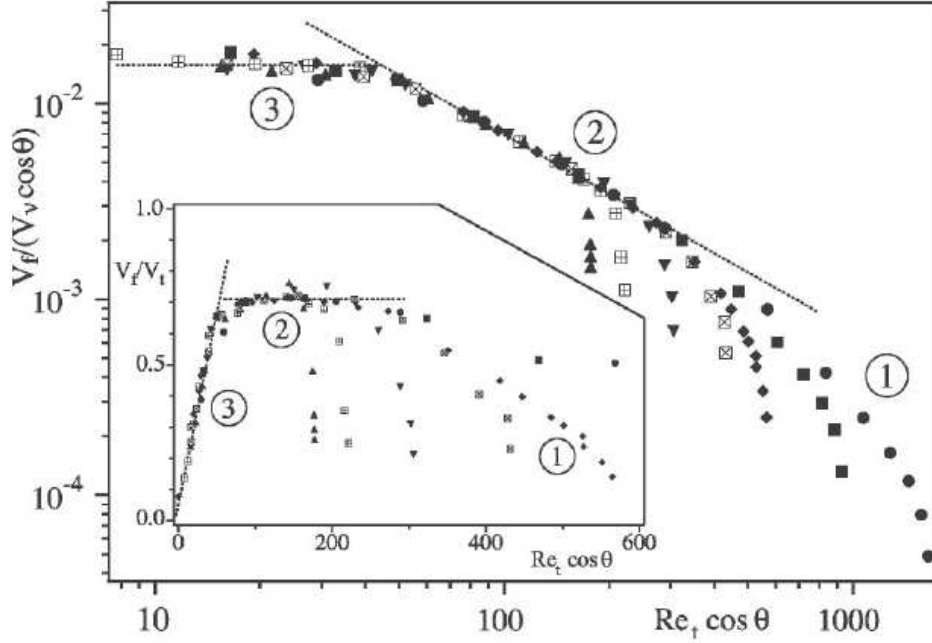


FIG. 1.12 – Figure extraite de [Séon *et al.* \(2005\)](#). Tracé de $V_f/(V_v \cos \theta)$ en fonction de $Re_t \cos \theta = V_v/V_t \cos \theta$ pour différents jeux de viscosités (de 10^{-6} à $4 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$) et contrastes de densité (At de 4×10^{-4} à 3.5×10^{-2}). Le régime 3 correspond au régime visqueux, le régime 2 au régime en plateau (inertiel) et le régime 1 au régime inertiel.

à un équilibre flottabilité-inertie, mais [Séon *et al.* \(2005\)](#) ont montré qu'il était ici nécessaire de considérer comme différence de densité motrice le saut de densité local au niveau du front $\delta\rho$ et non le saut de densité maximal $\rho_2 - \rho_1$ entre les deux fluides purs. Le terme de flottabilité pertinent est alors $\delta\rho g d$. En l'égalant à 1.5 il vient :

$$V_f^2 \sim \frac{\delta\rho}{\rho_1 + \rho_2} g D = C_f At g D \quad (1.12)$$

où $C_f = \delta\rho/(\rho_2 - \rho_1)$ est le saut relatif de densité au niveau du front. La relation précédente se traduit alors par

$$V_f/V_t \sim \sqrt{C_f} \quad (1.13)$$

[Séon *et al.* \(2005\)](#) ont montré expérimentalement que cette relation implique le même préfacteur que dans le régime 2, à savoir que $V_f/V_t = 0.7\sqrt{C_f}$ dans le régime 1. Cette relation montre bien que le régime 1 est un régime inertiel.

Ces mêmes auteurs ont par ailleurs montré que l'angle limite entre les régimes inertiel (2) et visqueux (3) est donné par la relation $Ar \cos \theta = 50$ et que l'angle limite entre les deux régimes inertiels (1) et (2) varie avec Ar et At .

Nous allons dans la suite faire appel à un outil utilisé par les auteurs de ces expériences. Il s'agit des diagrammes spatio-temporels. Ces diagrammes sont construits de la manière suivante :

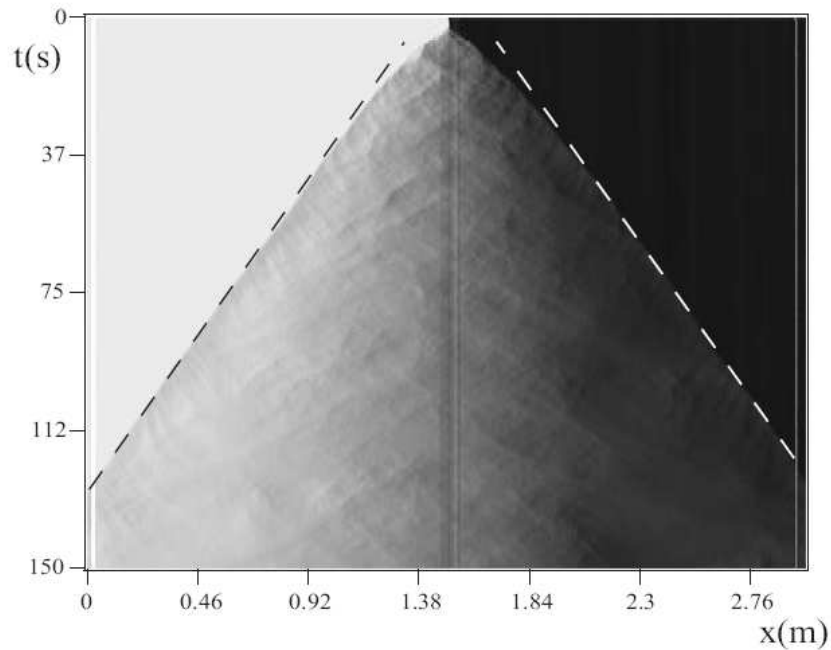


FIG. 1.13 – Exemple de diagramme spatio-temporel pour un tube incliné à 35° de la verticale. $Ar = 3.9 \times 10^{-4}$ et $Ar = 560$. Les vitesses stationnaires en régime établi sont repérées par des lignes en tirets. D’après [Séon \(2006\)](#).

la fraction volumique de fluide dense $C(x, y, z, t)$ est moyennée dans la section du tube pour obtenir $C(x, t)$ où x est la direction de l’axe du tube. Les valeurs de cette grandeur sont ensuite reportées en couleur (ou en niveaux de gris) dans un système d’axes (x, t) . Ceci permet de déterminer l’évolution de la position des fronts des courants et notamment de reconnaître une vitesse de front constante grâce à la frontière linéaire de la zone de mélange. Un exemple d’un tel diagramme est donné sur la figure 1.13 issue de [Séon \(2006\)](#).

Conclusion

A la lumière des derniers résultats que nous avons discutés, l’effet du confinement sur un courant de gravité incliné apparaît très clairement par l’existence de différents régimes d’écoulement (inertiel ou visqueux pour un même nombre de Reynolds) en fonction de l’angle d’inclinaison. Les études expérimentales de [Séon et al. \(2005\)](#), [Séon \(2006\)](#), [Séon et al. \(2006\)](#) et [Séon et al. \(2007\)](#) sont à notre connaissance les seules études conséquentes du mélange de fluides sous l’effet de la gravité en géométrie confinée et inclinée. Ces études étant de nature expérimentale, il leur est bien sûr difficile d’accéder à la dynamique locale tridimensionnelle au sein du fluide. C’est pourquoi la présente étude où il sera fait un usage intensif de la simulation numérique se positionne comme une approche complémentaire vis-à-vis de ces travaux.

Chapitre 2

Méthode de résolution numérique

2.1 Cadre général

Nous considérons ici deux fluides incompressibles, newtoniens et miscibles. D'un point de vue numérique, nous ne considérerons qu'un seul fluide de densité non-constante. Les équations mises en œuvre pour représenter les mouvements de ce fluide seront donc les équations de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles, plus une équation de transport scalaire pour la densité. Nous considérons dans ce mémoire un écoulement induit par la gravité mettant en jeu deux fluides initialement purs de densités ρ_1 et ρ_2 avec $\rho_2 > \rho_1$ en situation instable. De tels problèmes sont caractérisés par le nombre d'Atwood $At = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$. Ce nombre sans dimension permet de définir l'accélération gravitationnelle effective $At.g$. Si nous considérons de l'eau et de l'air, la constante de gravitation effective est proche de g . En revanche, pour deux fluides de densité proches, on a $At.g \ll 1$. Nous considérerons ici plutôt ce type de problème, bien que nous ne fassions aucune approximation de type Boussinesq dans les équations résolues.

Dans la mesure où les fluides sont considérés comme étant parfaitement miscibles, nous pouvons définir une fraction volumique C de fluide 2 (et respectivement $(1 - C)$ de fluide 1) telle que dans un volume infinitésimal dV une fraction de ce volume CdV est occupée par le fluide 2 (et respectivement $(1 - C)dV$ par le fluide 1). La masse de fluide 2 dans le volume dV est alors $\rho_2 CdV$ et celle du fluide 1 $\rho_1(1 - C)dV$. Ainsi, la masse totale dans le volume dV peut s'écrire $\rho_2 CdV + \rho_1(1 - C)dV$. Si l'on définit la densité du mélange ρ , la masse totale de fluide dans le volume dV peut aussi s'écrire simplement ρdV . Nous obtenons alors la relation entre la densité du mélange ρ et la fraction volumique de fluide 2, C :

$$\rho = \rho_2 C + \rho_1(1 - C) \quad (2.1)$$

Cette fraction volumique vaut 1 dans le fluide lourd pur, 0 dans le fluide léger pur et prend des valeurs intermédiaires au sein des zones mélangées de l'écoulement. Elle est donc toute indiquée pour servir de « taux de présence » dans l'optique d'une résolution de l'équation de transport de la densité par une méthode numérique de type Volume Of Fluid (VOF).

2.2 Mise en équations

2.2.1 Equation de transport du scalaire

L'équation de transport de la densité du mélange s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.2)$$

où \mathbf{V} est la vitesse barycentrique du mélange. En injectant 2.1 dans 2.2 nous constatons que C obéit à

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C \mathbf{V}) = -\frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (2.3)$$

Bien que ρ_1 et ρ_2 soient supposés constants, nous allons voir que la divergence de la vitesse du mélange n'est pas nulle. Considérons la fraction massique X (et non plus volumique C) de fluide 2 dans un petit volume dV . La masse de fluide dans un volume dV étant ρdV , la masse de fluide lourd dans ce volume est $X \rho dV$. D'autre part, nous avons vu que cette masse pouvait aussi s'écrire $\rho_2 C dV$. Ainsi nous obtenons la relation entre les fractions volumique C et massique X :

$$\rho X = \rho_2 C \quad (2.4)$$

Si nous considérons qu'au niveau moléculaire le mélange est gouverné par une loi de Fick, l'équation de transport de la fraction massique X s'écrit

$$\frac{\partial \rho X}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho X \mathbf{V}) = \nabla \cdot (\rho \mathcal{D} \nabla X) \quad (2.5)$$

où \mathcal{D} est le coefficient de diffusion moléculaire entre les espèces 1 et 2.

Multiplions alors 2.3 par ρ_2 . Nous obtenons

$$\frac{\partial \rho_2 C}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 C \mathbf{V}) = -\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (2.6)$$

En comparant 2.5 et 2.6 à la lumière de 2.4 nous pouvons écrire

$$\nabla \cdot (\rho \mathcal{D} \nabla X) = -\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (2.7)$$

En utilisant les relations 2.4 et 2.1 nous pouvons récrire 2.7 sous la forme

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = -\nabla \cdot \left(\frac{\mathcal{D}}{\rho} \nabla \rho \right) \quad (2.8)$$

Cette dernière relation montre que la vitesse barycentrique du mélange n'est pas à divergence nulle dès que le coefficient de diffusion moléculaire n'est pas nul, et ceci bien que les deux fluides purs aient des densités constantes. Nous pouvons maintenant récrire 2.3 sous sa forme définitive :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C \mathbf{V}) = \nabla \cdot \left(\frac{\rho_1}{\rho} \mathcal{D} \nabla C \right) \quad (2.9)$$

Une approche similaire a notamment été utilisée par [Cook et al. \(2004\)](#) et [Etienne et al. \(2005\)](#).

2.2.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement

Nous allons résoudre une équation de conservation de la quantité de mouvement du mélange dont la densité est ρ et la vitesse \mathbf{V} . Nous faisons l'hypothèse que ce mélange va se comporter comme un fluide newtonien de viscosité dynamique μ constante (c'est à dire indépendante de la composition locale du mélange). Ainsi le mélange devra suivre l'équation classique :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \nabla \cdot \left(\mu \left(\nabla \mathbf{V} + {}^T \nabla \mathbf{V} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{V}) \underline{\underline{I}} \right) \right) \quad (2.10)$$

Nous allons cependant l'utiliser dans ce qui suit sous sa forme non-conservative :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla P^* + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left(\mu \left(\nabla \mathbf{V} + {}^T \nabla \mathbf{V} \right) \right) \quad (2.11)$$

où $P^* = P + \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{V}$ est une pseudo-pression.

2.2.3 Conclusion

En résumé, le jeu d'équations qui sera utilisé pour la résolution numérique est le suivant :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C \mathbf{V}) = \nabla \cdot \left(\frac{\rho_1}{\rho} \mathcal{D} \nabla C \right) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla P^* + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left(\mu \left(\nabla \mathbf{V} + {}^T \nabla \mathbf{V} \right) \right) \quad (2.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = -\nabla \cdot \left(\frac{\mathcal{D}}{\rho} \nabla \rho \right) \quad (2.14)$$

2.2.4 Conséquences numériques de l'hypothèse $Sc \rightarrow \infty$

Dans la plupart des simulations réalisées par la suite, nous considérerons que la diffusivité moléculaire \mathcal{D} est nulle. Dès lors, la concentration locale C n'évolue plus sous l'effet du champ de vitesse \mathbf{V} . Lorsque deux particules de fluide, l'une de densité ρ_1 l'autre de densité ρ_2 , entrent dans la même cellule de calcul de taille Δx , elles se mélangent "numériquement" puisque leur présence affecte la densité locale ρ . D'un point de vue numérique, elles deviennent inséparables puisqu'il est impossible de suivre la forme de l'interface séparant les deux fluides à une échelle inférieure à Δx . Ceci introduit une échelle de coupure artificielle de longueur d'onde Δx dans le spectre du scalaire lors d'un écoulement agité. Il est alors possible de voir ceci comme l'existence d'un nombre de Schmidt numérique équivalent fini. La quantification de ce nombre de Schmidt effectif numérique est cependant délicate puisqu'elle dépend fortement du type d'écoulement considéré.

2.3 Méthode de résolution des équations de conservation

Les équations du mouvement sont résolues à l'aide du code JADIM développé depuis une quinzaine d'années dans le groupe INTERFACE de l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT). Ce code a originalement été écrit pour résoudre les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles, instationnaires et incompressibles en coordonnées curvilignes orthogonales. Il a été par exemple utilisé pour décrire par simulation directe les écoulements instationnaires (Magnaudet *et al.* (1995)) de déformation pure ou cisailés (Legendre & Magnaudet (1998)) autour de bulles de gaz, les interactions hydrodynamiques entre deux bulles (Legendre *et al.* (2003)). Les potentialités de ce code ont été diversifiées grâce à l'adjonction de différents modules pour permettre l'étude d'écoulements turbulents par la Simulation des Grandes Echelles de la turbulence (Large Eddy Simulation ou LES) (Calmet & Magnaudet (1997), Calmet & Magnaudet (2003), Merle *et al.* (2005)), le suivi lagrangien de particules et leur effet sur l'écoulement porteur (Climent & Magnaudet (1999)) ainsi que le suivi d'interfaces mobiles (Bonometti & Magnaudet (2006)).

2.3.1 Résolution de l'équation de transport du scalaire

Nous devons résoudre l'équation de transport du taux de présence C :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C\mathbf{V}) = -\nabla \cdot \left(\frac{\rho_1}{\rho} \mathcal{D} \nabla C \right) \quad (2.15)$$

Rappelons que dans nos simulations, C représente la fraction volumique de fluide lourd dans un maille de calcul et varie donc entre 0 et 1. Puisque la configuration initiale est donnée par la juxtaposition de deux fluides de densités différentes, nous devons gérer une discontinuité dans le champ de C . Si nous discrétisons simplement l'équation 2.15 avec un schéma centré du deuxième ordre, des oscillations numériques parasites vont apparaître dans le champ de C autour du saut de densité. Ces oscillations peuvent compromettre grandement la stabilité générale du calcul car elles peuvent engendrer des densités négatives. Il est alors nécessaire de trouver un moyen de les supprimer. Plusieurs méthodes sont possibles : certains auteurs épaississent volontairement et artificiellement l'interface sur quelques mailles pour rendre la transition entre les deux fluides plus douce, et utilisent une diffusion moléculaire relativement importante pour empêcher le front de se raidir à nouveau. C'est la solution employée dans certaines simulations de l'instabilité de Rayleigh-Taylor ou de courants de gravité avec des méthodes spectrales (par exemple Cantero *et al.* (2007), Birman *et al.* (2005), Härtel *et al.* (2000b)). Dans ce cas, les nombres de Schmidt sont voisins de l'unité. Cette méthode peut cependant induire des complications au niveau de la représentativité des résultats. Il n'est pas évident a priori que cet épaississement de l'interface soit neutre vis-à-vis de l'évolution de l'écoulement. Par exemple, le taux de croissance d'une perturbation mono-mode initiant l'instabilité de Rayleigh-Taylor varie assez fortement lorsque l'interface initiale est épaissie. Il est aussi possible de s'orienter vers des schémas numériques

dédiés à la « capture de chocs ». C'est cette alternative qui sera utilisée ici. Parmi ceux-ci, nous avons testé un schéma de type WENO et un schéma de type FCT. Le schéma WENO (Weighted Essentially Non-Oscillating) est un schéma utilisant un ensemble de points pour calculer les flux d'advection. Dans cet ensemble, certains points ont un poids différent en fonction de l'écoulement alentour. Si un fort gradient est détecté, certains points peuvent avoir un poids quasiment nul de manière à décentrer le schéma à la manière d'un schéma amont classique. En revanche, si aucune discontinuité n'est détectée, les points ont des poids équilibrés de manière à retrouver un schéma centré classique utilisant tous les points. Ainsi le schéma WENO adapte ses coefficients pour se décentrer ou non suivant la raideur des gradients et leur direction de propagation. Il est fréquemment utilisé dans les méthodes de suivi d'interface de type « Level Set » pour transporter la fonction distance. Mais comme son nom l'indique, il est possible qu'il oscille un peu et cela a été observé dans quelques unes de nos simulations avec des fronts très raides, bien que ce schéma soit beaucoup plus robuste que le schéma centré du deuxième ordre. L'autre schéma testé, et c'est celui qui sera retenu, est en fait issu de celui développé par Zalesak ([Zalesak \(1979\)](#)) qui fait partie de la famille des schémas « correcteurs de flux » (Flux Corrected Transport ou FCT, voir [Boris & Book \(1973\)](#)). Ces schémas étaient initialement destinés à résoudre des problèmes de chocs en dynamique des gaz. Dans notre équation 2.15, le terme de diffusion est discrétisé par un schéma centré et ne pose pas de problème particulier, c'est pourquoi dans la suite de ce chapitre nous allons considérer l'équation d'advection pure :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C\mathbf{V}) = 0 \quad (2.16)$$

L'équation 2.16 qui peut aussi s'écrire

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \partial_x(CU) + \partial_y(CV) + \partial_z(CW) = 0 \quad (2.17)$$

Si le schéma de Zalesak original est utilisé pour cette équation, les fronts sont très vite distordus. La figure 2.1 en montre un exemple : les trois lignes d'iso-contours de C devraient rester très proches et ce n'est pas le cas. [Benkenida \(1999\)](#) a montré qu'en découpant la résolution tri-dimensionnelle de 2.17 en trois étapes mono-dimensionnelles on peut obtenir un bien meilleur résultat. Il est alors nécessaire de résoudre successivement :

$$\partial_t C + \partial_x(CU) = 0 \quad (2.18)$$

$$\partial_t C + \partial_y(CV) = 0 \quad (2.19)$$

$$\partial_t C + \partial_z(CW) = 0 \quad (2.20)$$

Pour la première des trois équations, les valeurs des champs utilisées sont celles issues du pas temporel précédent. La deuxième utilise le champ de C résultant de la résolution de la première, et la troisième celui de la deuxième. Afin de ne pas privilégier l'une des directions, ces équations mono-dimensionnelles sont résolues dans un ordre différent à chaque pas de temps. Cette approche dite « à direction découplées » a été notamment utilisée par [Gueyffier *et al.* \(1999\)](#), [Welch](#)

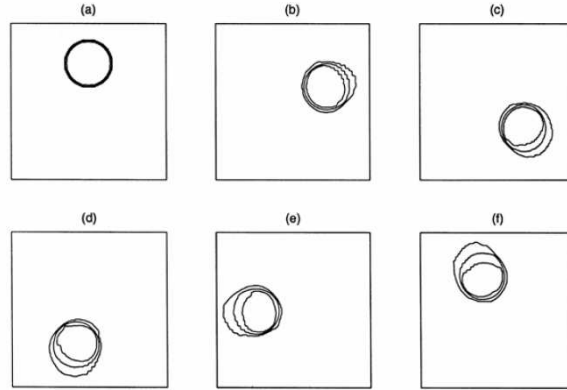


FIG. 2.1 – Rotation solide d’un disque par résolution de l’équation 2.17 (Benkenida (1999)). Iso-contours de taux de présence $C = 0.025, 0.5, 0.975$

& Wilson (2000), Renardy *et al.* (2001), Lörstad & Fuchs (2004) et Bonometti & Magnaudet (2006). La méthode FCT étant identique dans toutes les directions, nous allons considérer uniquement l’équation monodimensionnelle :

$$\partial_t C + \partial_x(CU) = 0 \quad (2.21)$$

Le code JADIM utilise des maillages décalés. De ce fait C est calculé sur les mailles de pression. Ainsi 2.21 peut être discrétisée en :

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} \mathcal{V} + \frac{(CU)_{i+1/2} - (CU)_{i-1/2}}{\Delta x} \mathcal{V} = 0 \quad (2.22)$$

où l’indice $n + 1$ désigne le nouveau pas de temps, et les indices $i + 1/2$ et $i - 1/2$ correspondent aux facettes Est et Ouest de la maille de pression. Nous pouvons ré-écrire le flux adimensionnel à travers une facette de la maille comme

$$F = \frac{\Delta t}{\Delta x} CU \quad (2.23)$$

2.22 se résume alors

$$C_i^{n+1} = C_i^n - (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) \quad (2.24)$$

Les difficultés de la résolution numérique viennent du terme d’advection faisant intervenir ces flux. L’enjeu est de donner à F une forme ne permettant pas les oscillations. Dans le cadre de la méthode FCT, les flux F sont calculés en combinant linéairement un flux d’ordre faible FL (L pour Low) et un flux d’ordre élevé FH (H pour High). Le flux d’ordre faible est évalué à l’aide d’un schéma dissipatif mais stable alors que le flux d’ordre élevé fait intervenir un schéma dispersif mais précis. Il est possible de voir cette combinaison comme résultant d’une première étape diffusive lors du calcul de FL puis d’une seconde étape anti-diffusive lors de celui de FH. Cette combinaison linéaire peut s’écrire

$$F_{i+1/2} = FH_{i+1/2}m_{i+1/2} + FL_{i+1/2}(1 - m_{i+1/2}) \quad (2.25)$$

où m désigne le coefficient de pondération entre les deux étapes. De manière à avoir une étape diffusive stable, une diffusion artificielle \mathcal{D}_A est ajoutée à l'équation 2.22 discrétisée avec un schéma d'ordre faible pour devenir

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + \frac{C_{i+1/2} U_{i+1/2} - C_{i-1/2} U_{i-1/2}}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left(\mathcal{D}_{A_{i+1/2}} \frac{C_{i+1}^n - C_i^n}{\Delta x} - \mathcal{D}_{A_{i-1/2}} \frac{C_i^n - C_{i-1}^n}{\Delta x} \right) \quad (2.26)$$

La diffusion artificielle \mathcal{D}_A a été fixée après de nombreux tests (Boris & Book (1973), Benkenida (1999)) : $\mathcal{D}_A = \Delta x |U|/2$. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{C_{i+1}^n + C_i^n}{2} U_{i+1/2}^n - \frac{C_i^n + C_{i-1}^n}{2} U_{i-1/2}^n \right) = \\ \frac{1}{2} \left(\frac{C_{i+1}^n - C_i^n}{\Delta x} |U_{i+1/2}^n| - \frac{C_i^n - C_{i-1}^n}{\Delta x} |U_{i-1/2}^n| \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Il est alors possible de récrire les flux d'ordre faible sous la forme

$$FL_{i+1/2} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{C_{i+1}^n (U_{i+1/2}^n - |U_{i+1/2}^n|) + C_i^n (U_{i+1/2}^n + |U_{i+1/2}^n|)}{2} \quad (2.28)$$

Les flux d'ordre élevé sont, quant à eux, évalués grâce à la combinaison suivante précise à l'ordre 8 sur un maillage régulier :

$$FH_{i+1/2} = \frac{\Delta t}{\Delta x} U_{i+1/2} \left[\frac{533}{840} (C_{i+1}^n + C_i^n) - \frac{139}{840} (C_{i+2}^n + C_{i-1}^n) + \frac{29}{840} (C_{i+3}^n + C_{i-2}^n) - \frac{2}{280} (C_{i+4}^n + C_{i-3}^n) \right] \quad (2.29)$$

Le point clé de la méthode est de déterminer le coefficient $m_{i+1/2}$ de manière à assurer la monotonicité de la solution tout en introduisant aussi peu de diffusion numérique que possible. $m_{i+1/2}$ est compris entre 0 et 1 et est, bien sûr, assujéti aux variations de C . Les valeurs limites sont les suivantes : si $m_{i+1/2} = 0$ alors le schéma FCT devient un schéma de type amont, si $m_{i+1/2} = 1$, il devient un schéma centré d'ordre 8 sur maillage régulier ou 4 sur maillage irrégulier.

L'algorithme permettant d'optimiser $m_{i+1/2}$ est le suivant :

1. Calcul du champ prédit par le schéma d'ordre faible :

$$\tilde{C}_i^n = C_i^n - (FL_{i+1/2} - FL_{i-1/2})$$

$$\text{Calcul de } C_i^a = \max(C_i^n, \tilde{C}_i^n)$$

$$\text{Calcul de } C_i^{\max} = \max(C_{i-1}^a, C_i^a, C_{i+1}^a)$$

$$\text{Calcul de } C_i^b = \min(C_i^n, \tilde{C}_i^n)$$

$$\text{Calcul de } C_i^{\min} = \max(C_{i-1}^b, C_i^b, C_{i+1}^b)$$

2. Calcul de $S_{i+1/2} = \text{signe}(\tilde{C}_{i+1}^n - \tilde{C}_i^n)$

Calcul du flux anti-diffusif :

$$\phi_{i+1/2} = S_{i+1/2} \max \left\{ 0, \min \left[FH_{i+1/2} - FL_{i+1/2}, S_{i+1/2} (\tilde{C}_i^n - \tilde{C}_{i-1}^n), S_{i+1/2} (\tilde{C}_{i+2}^n - \tilde{C}_{i+1}^n) \right] \right\}$$

3. Calcul de :

$$P_i^+ = \max(0, \phi_{i-1/2}) - \min(0, \phi_{i+1/2})$$

$$Q_i^+ = (C_i^{\max} - \tilde{C}_i^n)$$

$$R_i^+ = \begin{cases} \min(1, Q_i^+/P_i^+) & \text{si } P_i^+ > 0 \\ 0 & \text{si } P_i^+ = 0 \end{cases}$$

$$P_i^- = \max(0, \phi_{i+1/2}) - \min(0, \phi_{i-1/2})$$

$$Q_i^- = (\tilde{C}_i^n - C_i^{\min})$$

$$R_i^- = \begin{cases} \min(1, Q_i^-/P_i^-) & \text{si } P_i^- > 0 \\ 0 & \text{si } P_i^- = 0 \end{cases}$$

4. Calcul de $m_{i+1/2}$:

$$m_{i+1/2} = \begin{cases} \min(R_{i+1}^+, R_i^-) & \text{si } \phi_{i+1/2} \geq 0 \\ \min(R_i^+, R_{i+1}^-) & \text{si } \phi_{i+1/2} < 0 \end{cases}$$

Ce schéma est globalement précis à l'ordre 2 en espace et 1 en temps.

2.3.2 Résolution de l'équation de conservation de la quantité de mouvement

Discrétisation spatiale

Les équations de Navier-Stokes sont discrétisées sur un maillage décalé (staggered grid) par une méthode de type volumes finis du second ordre en espace (Calmet & Magnaudet (1997)). Ce type de maillage permet un calcul aisé des flux traversant les facettes d'une cellule, y compris au niveau des frontières du domaine. Concrètement, une cellule est basée sur un volume V_P dans lequel sont calculés la pression P et le taux de présence C . Ce volume est entouré de trois autres volumes V_U, V_V et V_W dans lesquels sont calculées les trois composantes du champ de vitesse U, V , et W (voir FIG. 2.2). Les centres des volumes de vitesse sont à mi-distance des centres des volumes de pression. Dans un souci de concision, nous noterons désormais un volume \mathcal{V} et sa surface Γ bien qu'en toute rigueur il y ait quatre volumes différents et quatre surfaces différentes. Les équations de continuité 2.14 et de Navier-Stokes 2.13 sont discrétisées sur leurs volumes respectifs en :

$$\sum_i \int_{\Gamma} V_i n_i d\Gamma = - \sum_i \int_{\Gamma} \frac{\mathcal{D}}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} \right) n_i d\Gamma \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial V_i}{\partial t} d\mathcal{V} &= - \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \xi_i} d\mathcal{V} \\ &+ \int_{\mathcal{V}} g_i d\mathcal{V} \\ &+ \int_{\mathcal{V}} H_j^i V_j V_j d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} H_i^j V_j V_i d\mathcal{V} - \int_{\Gamma} V_i V_j n_j d\Gamma \\ &- \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\rho} H_j^i \tau_{jj} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\rho} H_i^j \tau_{ij} d\mathcal{V} + \int_{\Gamma} \frac{1}{\rho} \tau_{ij} n_j d\Gamma \end{aligned} \quad (2.31)$$

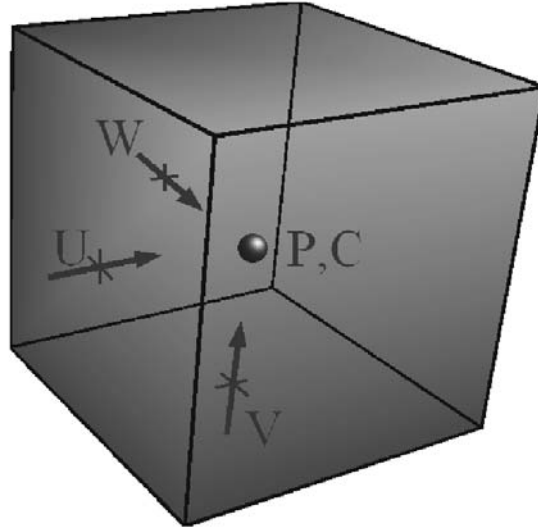


FIG. 2.2 – Schéma du maillage décalé utilisé dans JADIM

où la sommation sur j est implicite, et où ξ_i désigne la i^{eme} coordonnée curviligne, n_i la i^{eme} composante du vecteur unitaire normal à la surface Γ et dirigé vers l'extérieur du volume, H_i^j le facteur de courbure de la coordonnée i dans la direction j (Rivero (1991), Magnaudet *et al.* (1995)). Le tenseur des contraintes visqueuses τ_{ij} est défini par :

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij} = \mu \left[\frac{\partial V_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial V_j}{\partial \xi_i} - H_j^i V_j - H_i^j V_i + \sum_k 2H_i^k V_k \delta_{ij} \right] \quad (2.32)$$

où δ_{ij} est le tenseur de Kronecker. Rappelons ici que nous avons fait l'hypothèse que la viscosité dynamique est la même pour les deux fluides.

Méthode d'avancement en temps

La première étape consiste à résoudre l'équation de la densité comme indiqué plus haut. Ceci permet de connaître ρ^{n+1} dès le début du pas de temps et de pouvoir par exemple en déduire $\rho^{n+1/2} = (\rho^n + \rho^{n+1})/2$. L'avancement en temps de l'équation de Navier-Stokes est réalisé par une méthode de Runge-Kutta explicite du troisième ordre pour tous les termes sauf pour une partie des contraintes visqueuses. En effet, les termes $\int_{\Gamma} \frac{1}{\rho} \mu \frac{\partial V_i}{\partial \xi_j} n_j d\Gamma$ et $\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\rho} 2\mu \sum_{i \neq j} (H_i^j)^2 V_i d\mathcal{V}$ sont pris en compte grâce à une méthode de Crank-Nicholson semi-implicite du deuxième ordre. Ainsi l'équation 2.31 peut être reformulée d'une manière plus compacte en

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial V_i}{\partial t} d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \xi_i} d\mathcal{V} + L[V_i] + N[V_i] \quad (2.33)$$

avec

$$L[V_i] = \int_{\Gamma} \frac{1}{\rho} \mu \frac{\partial V_i}{\partial \xi_j} n_j d\Gamma + \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\rho} 2\mu \sum_{i \neq j} (H_i^j)^2 V_i d\mathcal{V} \quad (2.34)$$

et

$$\begin{aligned}
N[V_i] &= \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{\rho} \mu \frac{\partial V_j}{\partial \xi_i} - V_i V_j \right) n_j d\Gamma \\
&+ \int_{\mathcal{V}} H_j^i \left(V_j V_j - \frac{1}{\rho} \tau_{jj}^* \right) d\mathcal{V} \\
&- \int_{\mathcal{V}} H_i^j \left(V_j V_i - \frac{1}{\rho} \tau_{ij}^* \right) d\mathcal{V} \\
&- V_i \int_{\Gamma} V_j n_j d\Gamma - \frac{1}{\rho} \mu \frac{\partial}{\partial \xi_j} \int_{\Gamma} V_j n_j d\Gamma \\
&+ \int_{\mathcal{V}} g_i d\mathcal{V}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

avec

$$\tau_{i,j}^* = \mu \left[\frac{\partial V_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial V_j}{\partial \xi_i} - (1 - \delta_{ij})(H_j^i V_j + H_i^j V_i) \right] \tag{2.36}$$

L'algorithme hybride Runge-Kutta/Crank-Nicholson peut alors s'écrire de la manière suivante : pour chaque sous itération k d'un pas de temps nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{V_i^{n,k} - V_i^{n,k-1}}{\Delta t_k} \mathcal{V} &= -(\alpha_k + \beta_k) \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^{n-1/2}}{\partial \xi_i} \mathcal{V} \\
&+ \alpha_k L[V_i^{n,k-1}] + \beta_k L[V_i^{n,k}] \\
&+ \gamma_k N[V_i^{n,k-1}] + \zeta_k N[V_i^{k-2}]
\end{aligned} \tag{2.37}$$

où les valeurs de Δ_k , α_k , β_k , γ_k et ζ_k sont déterminées de manière à assurer une précision globale au deuxième ordre en temps (Rai & Moin (1991), Calmet & Magnaudet (1997)). Dans la méthode numérique utilisée dans JADIM la pression calculée au temps $n - 1/2$ est une meilleure approximation de la pression au temps n qu'une pression qui serait calculée directement au temps n . Les variables correspondant à un pas de temps n sont donc \mathbf{V}^n , ρ^n et $P^{n-1/2}$.

k	1	2	3
Δt_k	$\frac{8}{15} \Delta t$	$\frac{2}{3} \Delta t$	Δt
$\alpha_k = \beta_k$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{6}$
γ_k	$\frac{8}{15}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{4}$
ζ_k	0	$-\frac{17}{60}$	$-\frac{5}{12}$

TAB. 2.1 – Coefficients de l'algorithme temporel

En pratique, l'équation 2.37 est résolue en calculant dans un premier temps

$$\mathcal{SM}_i = -(\alpha_k + \beta_k) \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^{n-1/2}}{\partial \xi_i} \mathcal{V} + \gamma_k N[V_i^{n,k-1}] + \zeta_k N[V_i^{k-2}] + (\alpha_k + \beta_k) L[V_i^{n,k-1}] \tag{2.38}$$

puis on résout le problème de Helmholtz suivant :

$$\frac{V_i^{n,k} - V_i^{n,k-1}}{\Delta t_k} \mathcal{V} - \beta_k L[V_i^{n,k} - V_i^{n,k-1}] = \mathcal{SM}_i \tag{2.39}$$

Ce problème peut être réécrit sous la forme $\mathcal{A}.X = B$, avec $B = \Delta t_k / \mathcal{V} . \mathcal{SM}_i$, $X = V_i^{n,k} - V_i^{n,k-1}$, en faisant intervenir la matrice $\mathcal{A} = I - \Delta t_k / \mathcal{V} . \beta_k L$. Ce système peut être résolu directement sous cette forme, mais une autre méthode a été choisie. Elle consiste à découper cette résolution tri-dimensionnelle en trois résolutions mono-dimensionnelles successives. Ceci a l'avantage de ne pas conduire à un système de taille $(Nx.Ny.Nz)^2$, mais plutôt à trois systèmes de tailles Nx^2 , Ny^2 et Nz^2 . Comme ces matrices sont relativement petites et diagonales par bandes, une méthode de résolution directe (ici Cholesky) s'avère extrêmement efficace pour un calcul séquentiel.

Une fois l'équation 2.37 résolue, nous obtenons un champ de vitesse $\hat{V}^{n+1} = V^{n,3}$ qui ne satisfait pas l'équation de continuité (qui se résume à une condition de divergence du champ de vitesse nulle dans le cas non-diffusif $\mathcal{D} = 0$). C'est pourquoi il est maintenant nécessaire d'effectuer une étape de projection du champ prédicteur \hat{V}^{n+1} sur le sous-espace de champs satisfaisant l'équation de continuité. Il s'agit donc de relier \hat{V}^{n+1} à V^{n+1} . Dans une formulation idéale, nous aurions résolu l'équation de quantité de mouvement en évaluant le terme de pression au temps $n + 1/2$:

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta t} \mathcal{V} = \frac{1}{\rho^{n+1/2}} \frac{\partial P^{n+1/2}}{\partial \xi_i} \mathcal{V} + (\text{gravité} + \text{advection} + \text{diffusion})^{n+1/2} \quad (2.40)$$

Or dans notre étape de prédiction, nous utilisons la pression connue au temps $n - 1/2$.

$$\frac{\hat{V}_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta t} \mathcal{V} = \frac{1}{\rho^{n+1/2}} \frac{\partial P^{n-1/2}}{\partial \xi_i} \mathcal{V} + (\text{gravité} + \text{advection} + \text{diffusion})^{n+1/2} \quad (2.41)$$

En soustrayant ces deux équations nous obtenons la relation entre \hat{V}^{n+1} et V^{n+1} :

$$\frac{V_i^{n+1} - \hat{V}_i^{n+1}}{\Delta t} = \frac{1}{\rho^{n+1/2}} \frac{\partial (P^{n+1/2} - P^{n-1/2})}{\partial \xi_i} \quad (2.42)$$

Nous pouvons alors renommer l'incrément de pression $P^{n+1/2} - P^{n-1/2} = \Phi^{n+1}$. Si nous appliquons maintenant l'opérateur divergence à la relation précédente, et en utilisant l'équation de continuité 2.14 nous obtenons :

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^{n+1/2}} \frac{\partial \Phi^{n+1}}{\partial \xi_i} \right) = -\frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \left(\frac{\mathcal{D}}{\rho^{n+1/2}} \nabla \rho^{n+1/2} - \hat{V}_i^{n+1} \right) \quad (2.43)$$

Dans cette équation, tous les termes du membre de droite peuvent être calculés puisqu'à ce stade l'équation de la densité a déjà été résolue. Le terme de gauche peut se récrire sous la forme d'une matrice multipliée par le vecteur rassemblant les inconnues Φ^{n+1} . Cette matrice est diagonale par bandes et a des coefficients faisant intervenir des grandeurs géométriques et la densité $\rho^{n+1/2}$. Le traitement des parois se fait de manière standard. En pratique, ce système est résolu grâce à une méthode itérative de gradient conjugué préconditionné avec une méthode de Jacobi. Une fois Φ^{n+1} obtenu, nous pouvons aisément calculer

$$P^{n+1/2} = P^{n-1/2} + \Phi^{n+1} \quad (2.44)$$

$$V_i^{n+1} = \hat{V}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\rho^{n+1/2}} \frac{\partial \Phi^{n+1}}{\partial \xi_i} \quad (2.45)$$

Ainsi s'achève l'itération temporelle.

Nous avons introduit Φ comme étant l'incrément de pression mais la dernière relation nous montre cette grandeur sous un autre angle. En effet, en prenant le rotationnel de cette équation et si ρ est considéré constant, il vient $\nabla \times \mathbf{V}^{n+1} = \nabla \times \hat{\mathbf{V}}^{n+1}$, ce qui montre que le champ de vitesse prédicteur possède déjà toute la vorticité de la solution finale. Ainsi, Φ peut aussi être vu comme une correction purement potentielle. Ceci n'est évidemment pas vérifié si ρ est variable car nous avons alors $\nabla \times \mathbf{V}^{n+1} = \nabla \times \hat{\mathbf{V}}^{n+1} - \Delta t(\nabla \rho \times \nabla \Phi)/\rho^2$, ce qui montre que les rotationnels de \mathbf{V}^{n+1} et $\hat{\mathbf{V}}^{n+1}$ différent d'une contribution barocline.

2.3.3 Résumé de l'algorithme de résolution

Au début d'une itération, les valeurs des champs C^n , $P^{n-1/2}$ et \mathbf{V}^n sont connues. L'équation de transport du scalaire est alors r solv e pour obtenir C^{n+1} . Les équations de quantité de mouvement et de continuité sont r solv es par la méthode de projection. Le champ prédicteur $\hat{\mathbf{V}}^{n+1}$ est d'abord calculé grâce à l'algorithme Runge-Kutta/Crank-Nicholson, puis une correction est effectu e via la résolution de la pseudo-équation de Poisson qui donne l'incrément de pression Φ^{n+1} . Celui-ci est utilisé pour calculer $P^{n+1/2}$ et \mathbf{V}^{n+1} . Globalement, cette méthode fournit une précision à l'ordre 2 en espace et 1 en temps, la précision en temps étant limit e par l'algorithme FCT utilisé pour résoudre l'équation de la densité. De ce fait, il est d'ailleurs sans conséquence de remplacer $\rho^{n+1/2}$ par ρ^{n+1} dans les étapes 2.40 à 2.45.

2.3.4 Parallélisation du code JADIM

Lors de ce travail, le code JADIM a été parallélisé grâce à MPI (Message Passing Interface) de manière à pouvoir fonctionner sur n'importe quel calculateur   mémoire distribu e. La parallélisation est effectu e par domaines, suivant la direction x (voir FIG. 2.3). Le code étant

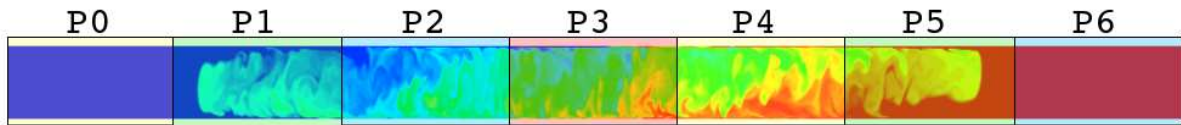


FIG. 2.3 – Exemple de découpage du domaine de calcul sur sept processeurs.

semi-implicite à cause de la méthode d'avancement en temps, il est nécessaire de résoudre le système linéaire mis en jeu par 2.39 dont les coefficients font intervenir des grandeurs réparties sur l'ensemble des processeurs. Cette résolution a été faite uniquement sur le processeur maître dans un premier temps car le temps CPU qu'elle demande est faible devant celui nécessaire pour traiter d'autres parties du code. Cependant, cette résolution nécessite l'envoi de tous les coefficients répartis sur tous les processeurs, et ceci trois fois par pas de temps. Nous verrons

que, pour cette raison, il sera nécessaire dans le futur d'améliorer ce point en vue de l'utilisation d'un grand nombre de processeurs, bien que dans les simulations entreprises ici les performances soient tout à fait bonnes ainsi jusqu'à 16 processeurs. Nous étudions dans ce travail un écoulement incompressible. Comme nous l'avons vu le code est écrit dans cette optique, ce qui impose une sévère contrainte sur la parallélisation à travers la résolution de la pseudo-équation de Poisson pour la pression. En effet, cette équation nécessite la résolution d'un système linéaire de grande taille $((Nx.Ny.Nz)^2)$ dont, une fois de plus, les coefficients sont répartis sur l'ensemble des processeurs puisqu'ils dépendent des caractéristiques du maillage mais surtout de la densité, qui elle, varie à chaque pas de temps. Ainsi, ce système creux peut être relativement mal conditionné et cher à construire et à résoudre. Plus précisément, en calcul séquentiel, il représente environ 90% du temps CPU total. La raison pour laquelle une attention particulière n'a pas été portée à l'algorithme semi-implicite de l'étape prédictrice est désormais évidente. Le système 2.43 correspondant à l'équation de Poisson est résolu grâce à l'utilisation de la bibliothèque PETSc (<http://www.mcs.anl.gov/petsc>) qui permet, une fois mise en place de manière générique, l'utilisation de plusieurs méthodes de résolution (Richardson, Chebychev, Gradient Conjugué, Bi-Gradient Conjugué, BiCGStab, GMRES, ...) couplées à divers préconditionneurs (Jacobi, Block-Jacobi, SOR, Incomplet Cholesky, LU, etc ...). Après quelques tests, il s'est avéré que la méthode la plus efficace dans notre situation était celle du Gradient Conjugué préconditionné grâce à la méthode de Jacobi. Quelques tests de performances sur un courant de gravité en tube de section carrée avec un maillage $512 \times 48 \times 48$ ont conduit aux résultats suivants (voir FIG. 2.4) : l'efficacité parallèle est d'environ 0.95 jusqu'à un nombre de processeurs entre 8 et 16 (ce qui signifie que le code va 0.95^{N-1} fois plus vite sur N processeurs que sur un seul). Concrètement, le résultat est obtenu 10 fois plus vite qu'en séquentiel sur 16 processeurs. Pour un code incompressible utilisant une approche de volumes finis semi-implicite ces performances sont tout à fait honorables. L'algorithme de résolution de l'équation de Poisson pour la pression est très efficace lorsque le nombre de processeurs augmente. En revanche, le calcul du champ de vitesse prédicteur prend plus de temps sur 16 processeurs que sur 8. Ceci est dû aux échanges trop nombreux dans l'algorithme semi-implicite 2.39 évoqué ci-dessus. L'attention est désormais portée sur ce point afin d'améliorer l'efficacité du code pour une parallélisation "massive".

2.4 Quelques tests de validation sur des écoulements à densité variable

Nous présentons ici quelques tests de validation sur des écoulements proches de celui considéré dans ce travail. Les écoulements testés présentent parfois de forts gradients de densité, tout comme le front des courants de gravité que nous étudierons par la suite. Par ailleurs, ce sont

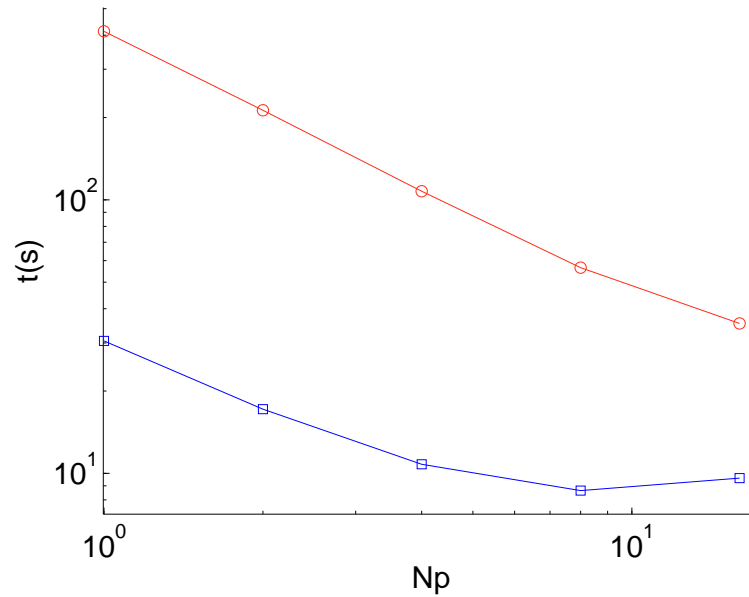


FIG. 2.4 – Efficacité parallèle du code sur un maillage $512 \times 48 \times 48$: nombre de processeurs en abscisse et temps de calcul en ordonnée. \square prédicteur, \circ équation de Poisson.

tous des écoulements dont le moteur est précisément lié à cette différence de densité.

2.4.1 Onde de gravité

Nous nous plaçons dans un domaine de calcul bidimensionnel carré. La longueur de son côté est de $L = 1m$. Deux fluides de densités différentes ρ_1 et ρ_2 sont superposés en configuration stable dans ce domaine. Leurs viscosités dynamiques sont identiques $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. L'interface les séparant a une forme sinusoïdale de longueur d'onde λ égale à la taille du domaine. Ainsi, la hauteur moyenne de l'interface s'écrit $y(x) = L/2 + a.\cos(k.x)$ avec $k = 2\pi/\lambda$. Il n'y a pas de tension de surface entre les fluides. Sur les frontières verticales (Est et Ouest) nous imposons une condition de périodicité, et sur les frontières horizontales (Nord et Sud) nous utilisons une condition de glissement.

Pour de faibles amplitudes de l'interface, sans tension de surface, et pour des fluides peu visqueux, la relation de dispersion donne la pulsation ω de l'onde sous la forme :

$$\omega^2 = At.g.k.tanh(kL/2) \quad (2.46)$$

où $At = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$ est le nombre d'Atwood, g est la gravité. Dans ce test, les grandeurs physiques sont les suivantes :

L'oscillation de l'interface est détectée en mesurant sa position en $x = 0$ définie par $h = \int_{y=0}^L C dy$ où C est la fraction volumique de fluide lourd. Quatre maillages différents sont utilisés pour illustrer la convergence du code. Ces maillages sont constitués de 15^2 , 30^2 , 60^2 et 120^2 mailles.

ρ_1 ($kg.m^{-3}$)	ρ_2 ($kg.m^{-3}$)	μ ($kg.m^{-1}s^{-1}$)	g ($m.s^{-2}$)	a/L
0.1	10	10^{-8}	9.81	0.005

TAB. 2.2 – Grandeurs physiques du test "Onde de gravité"

Les hauteurs d'interface mesurées pour chaque maillage sont reportées au cours du temps sur la figure 2.5.

La fréquence théorique pour nos paramètres est $f = \omega/(2\pi) \simeq 1.23478 s^{-1}$. Les fréquences

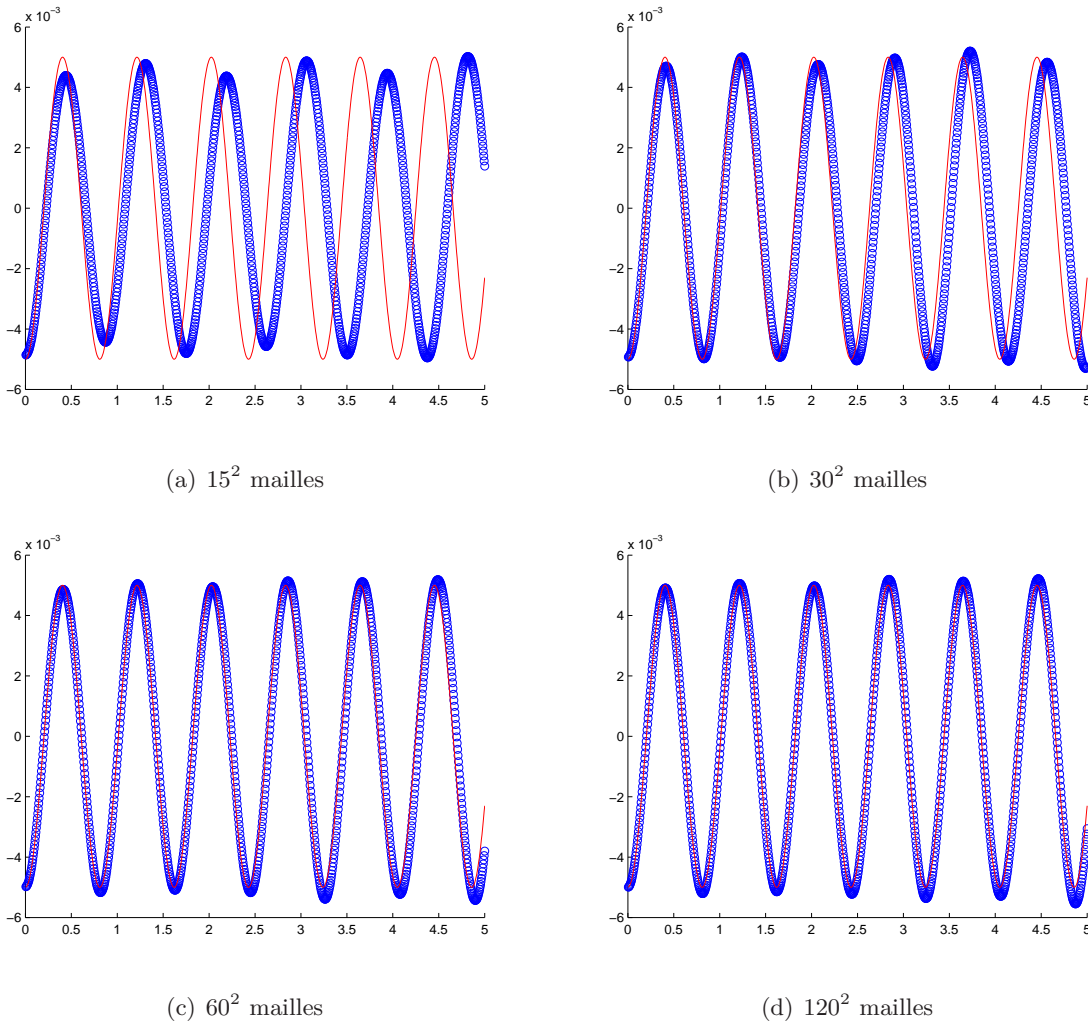


FIG. 2.5 – Hauteur de l'onde de gravité au cours du temps pour les quatre maillages testés. \circ : simulations, trait plein : valeur théorique.

extraites des simulations le sont grâce à une transformée de Fourier du signal temporel $h(t)$ et sont répertoriées dans le tableau 2.3. La précision de cette mesure est évaluée en appliquant la même méthode au signal théorique : elle est d'environ $0.001 s^{-1}$, soit 0.07%. Les erreurs numériques transcrites dans le tableau 2.3 permettent d'évaluer l'ordre global de la méthode numérique mise en oeuvre dans le code : sur ce cas-test, l'erreur varie comme $\Delta x^{1.9}$ (voir fig

Nombre de mailles	15^2	30^2	60^2	120^2
Fréquence mesurée (s^{-1})	1.143	1.212	1.228	1.2329
Erreur (%)	7.4%	1.92%	0.55%	0.15%

TAB. 2.3 – Fréquences de l’onde de gravité mesurées et pourcentage d’erreur par rapport à la valeur théorique.

2.6), ce qui est relativement bon pour une méthode théoriquement d’ordre 2 en espace.

2.4.2 Écoulement barocline

Le but de ce test est de vérifier la bonne prise en compte de la présence des parois dans un écoulement à densité variable. Nous considérons un domaine bi-dimensionnel de taille $1m \times 1m$ (voir figure 2.7). Il est décrit à l’aide de 120 mailles dans chaque direction. Nous imposons dans ce domaine un profil linéaire de fraction volumique de fluide dense (et donc de densité) suivant la direction Y : $C(x, y) = y$. La densité minimale du fluide est $\rho_1 = 1 \text{ kgm}^{-3}$ et la densité maximale est $\rho_2 = 3 \text{ kgm}^{-3}$. La gravité est fixée à $\mathbf{g} = -9.81\mathbf{x}$ et un gradient de pression est imposé selon la direction \mathbf{x} : $\frac{\partial P}{\partial x} = -19.62 \text{ Pam}^{-1}$. La viscosité dynamique du fluide est fixée à $\mu = 0.1 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$. L’écoulement résultant de ces conditions précises, identique à celui observé lorsque deux parois verticales d’extension infinie sont portées à des températures différentes, obéit à la solution analytique suivante :

$$u(y) = 16.35(2y^3 - 3y^2 + y) \quad (2.47)$$

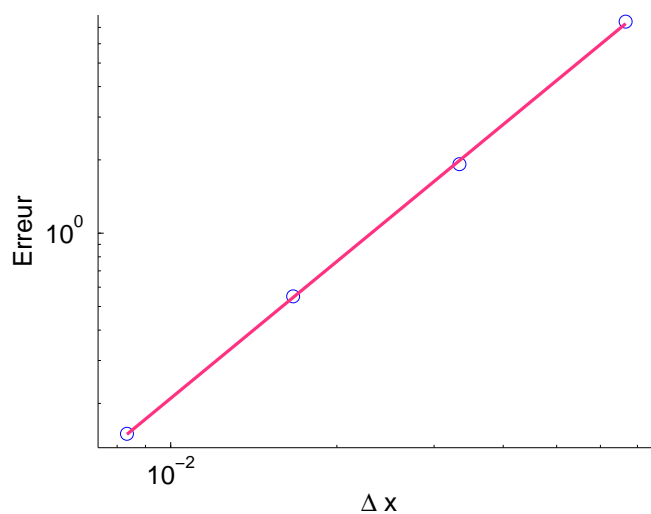


FIG. 2.6 – Erreur sur la fréquence de l’onde de gravité (en %) en fonction de la taille d’une maille $\Delta x = \Delta y$ en coordonnées logarithmiques.

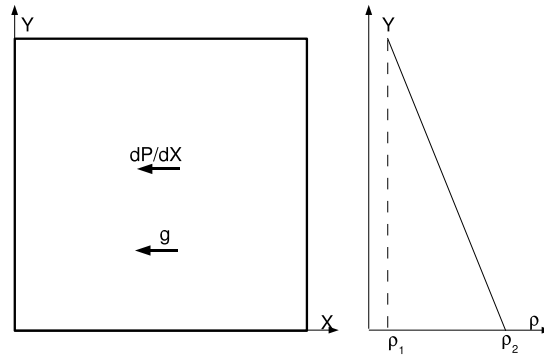


FIG. 2.7 – Schéma du test d'écoulement barocline.

Un profil de vitesse numérique est comparé à cette solution analytique sur la figure 2.8. L'erreur maximale sur u est de 1.6%. Ce test montre que la mise en vitesse d'un fluide le long d'une paroi et sous l'effet d'un gradient de densité se fait correctement.

2.4.3 Instabilité de Rayleigh-Taylor

L'instabilité de Rayleigh-Taylor et la turbulence qui en découle sont un très bon test pour le type d'écoulement que nous avons à simuler dans la mesure où elles mettent en jeu exactement les mêmes phénomènes physiques que le mélange de fluides en tube incliné. En effet le cas particulier du tube vertical n'est rien d'autre qu'une instabilité de Rayleigh-Taylor confinée latéralement. Il demande une résolution tridimensionnelle avec un maillage conséquent autorisant l'utilisation, et donc le test, de la version parallèle du code. C'est un écoulement très complexe, très étudié aussi bien numériquement qu'expérimentalement. [Dimonte *et al.* \(2004\)](#) ont récemment publié un article commun à l'ensemble de la communauté travaillant sur la turbulence générée par cette instabilité. Cet article visait à comparer les résultats des différents codes disponibles sur un cas-test détaillé. Ainsi, nous pouvons confronter directement quelques résultats de notre code à ceux de ces derniers. Nous allons nous attacher à retrouver la loi de puissance bien connue pour cet écoulement turbulent, à savoir une croissance de la zone de mélange en t^2 dans le régime inertiel. C'est, par ailleurs, sur cet écoulement que le schéma WENO pour l'équation de transport du scalaire C a été testé. Le domaine considéré ici est une boîte de côté $L = 0.1m$ et de hauteur $0.2m$ discrétisée en $128 \times 258 \times 128$ cellules. La gravité est fixée à $\mathbf{g} = -1\mathbf{y} \text{ ms}^{-2}$,

$\rho_1 \text{ (kg.m}^{-3}\text{)}$	$\rho_2 \text{ (kg.m}^{-3}\text{)}$	$\mu \text{ (kg.m}^{-1}\text{s}^{-1}\text{)}$	$g \text{ (m.s}^{-2}\text{)}$	$\frac{\partial P}{\partial x}$
1	3	0.1	9.81	-19.62

TAB. 2.4 – Grandeurs physiques utilisées dans le test d'écoulement barocline.

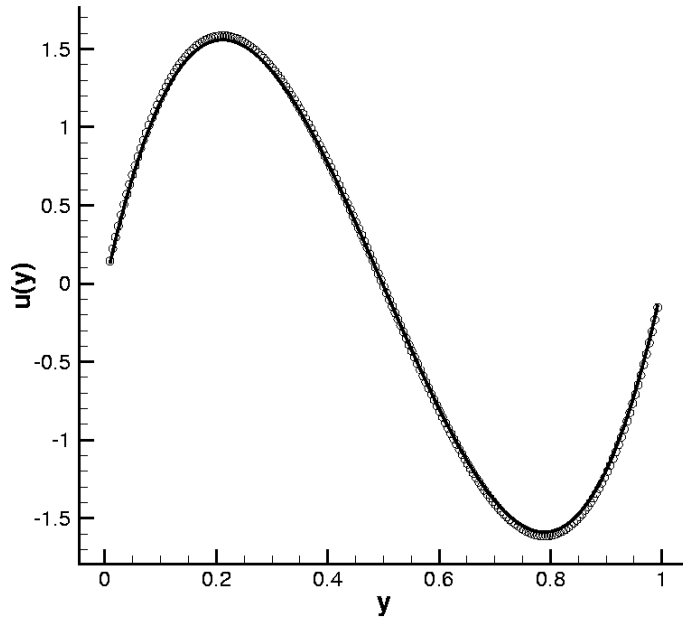


FIG. 2.8 – Profils de vitesse numérique (o) et analytique (trait plein) obtenus pour le test d'écoulement barocline.

le nombre d'Atwood à $At = 0.5$ ($\rho_1 = 1 \text{ kgm}^{-3}$ et $\rho_2 = 3 \text{ kgm}^{-3}$), et la viscosité dynamique à $1.10^{-6} \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$. Initialement les fluides lourd et léger sont placés l'un au dessus de l'autre en situation instable, chacun occupant une moitié du domaine de calcul. Le champ de densité initial a la forme :

$$C(y) = 0.5 \left[1 + \text{erf} \left(\frac{y - H/2}{\gamma \Delta y} + \zeta(x, z) \right) \right] \quad (2.48)$$

où $\zeta(x, z)$ est une perturbation composée d'une superposition de modes de faibles amplitudes aléatoires. Conformément au cas-test de [Dimonte et al. \(2004\)](#), la perturbation initiale comporte des modes situés entre $n = kL/2\pi = 16$ et $n = kL/2\pi = 32$ et son amplitude est $\sim 10^{-5}L$. L'iso-surface de fraction volumique de fluide lourd égale à 99% est présentée sur la figure 2.9, avec en comparaison l'iso-surface donnée par le code TURMOIL3D (Youngs, AWE) issue de [Dimonte et al. \(2004\)](#).

Le profil de fraction volumique de fluide lourd moyennée dans des plans horizontaux $\langle C \rangle = \iint C dx dy / L^2$ est tracé en triangles en fonction de la coordonnée verticale adimensionnée par la taille de la partie haute de la zone de mélange Z/h_b sur la figure 2.10 issue de [Dimonte et al. \(2004\)](#). Nos résultats sont en bon accord avec ceux rapportés par ces auteurs.

Les extensions de la zone de mélange du côté haut h_b et bas h_s obtenues avec notre code sont

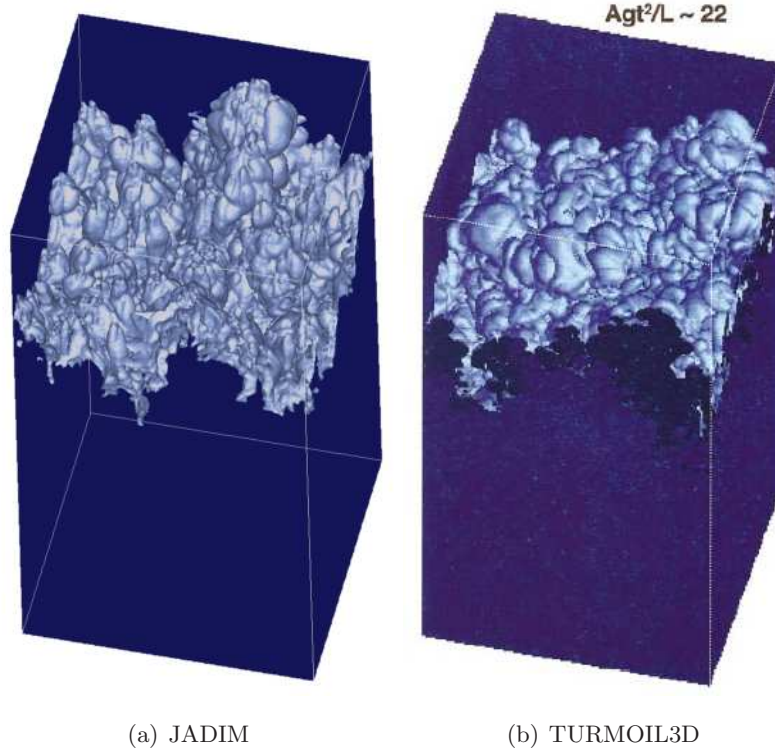


FIG. 2.9 – Iso-surface $C = 0.99$ au cours d’une instabilité de Rayleigh-Taylor.

tracées en triangles sur la figure 2.11 tirée de la même référence. Elles sont normalisées comme dans Dimonte *et al.* (2004) par la longueur d’onde du mode initial le plus instable λ_p tel que

$$k_p = 2\pi/\lambda_p \sim 0.5 \left(\frac{Atg}{\nu^2} \right)^{1/3} \quad (2.49)$$

Une fois encore, le code utilisé dans ce travail donne des résultats qui se comparent très bien aux travaux existants sur cet écoulement difficile à simuler.

Les valeurs des coefficients α_b et α_s dans la loi d’échelle $h_{b,s} = \alpha_{b,s} Atg^2$ qui découle des évolutions de h_b et h_s présentées sur la figure 2.11 sont $\alpha_s \simeq 0.024$ et $\alpha_b \simeq 0.023$. Ces valeurs sont en très bon accord avec la moyenne issue des autres simulations numériques présentées dans Dimonte *et al.* (2004).

Enfin, le spectre du scalaire $E(k)$ tel que $\langle C'^2 \rangle = \int_{k=0}^{\infty} E(k) dk$ est reporté sur la figure 2.12. Il est bien de la forme $E(k) \sim k^{-5/3}$ sur une large gamme de nombres d’onde (environ une décade), comme attendu pour cet écoulement turbulent si le nombre de Reynolds est suffisamment élevé. Nous pouvons noter une petite accumulation d’énergie dans les modes proches de l’échelle de coupure liée à la taille des mailles de calcul. Ceci est normal puisque nous avons réalisé une simulation avec un maillage trop grossier pour décrire l’échelle de Kolmogorov. Ainsi la dissipation visqueuse ne peut se faire correctement et l’énergie transférée aux plus petites structures simulées s’accumule à proximité de l’échelle de coupure imposée par le maillage. En

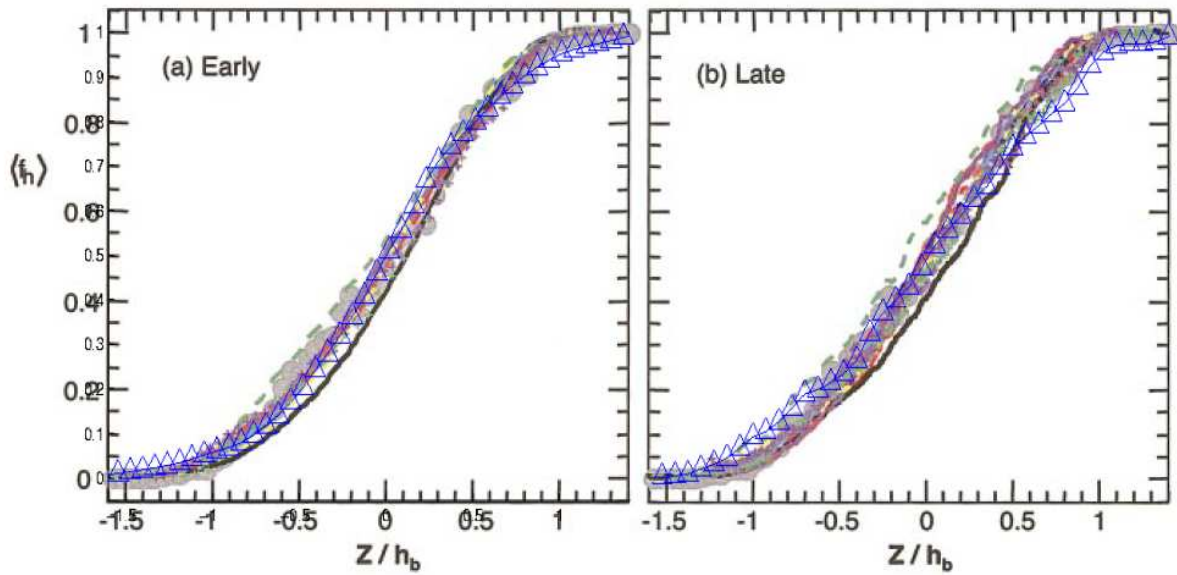
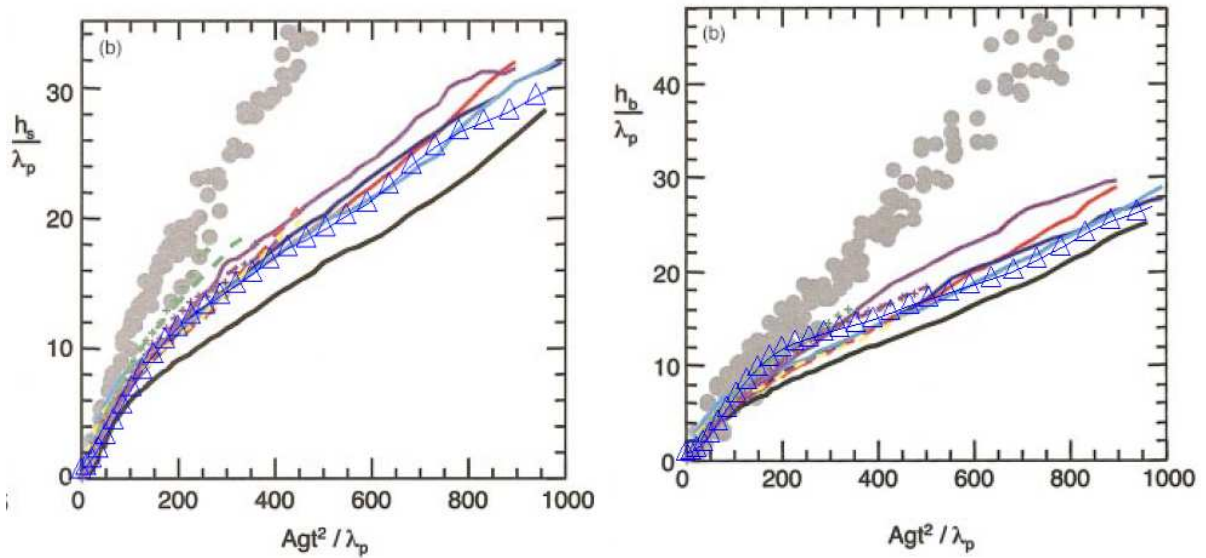


FIG. 2.10 – Profils verticaux de fraction volumique de fluide lourd moyennée dans les plans horizontaux pour les différents codes testés dans [Dimonte *et al.* \(2004\)](#). (a) Profils à $Atgt^2/L \sim 5$ pour notre code et ceux sus-cités. (b) Profils à $Atgt^2/L \sim 22$ pour notre code et ceux sus-cités. Les points sont issus des expériences réalisées à l'aide d'un moteur électrique linéaire ([Dimonte & Schneider \(2000\)](#)).

fait les simulations utilisant ce maillage dans [Dimonte *et al.* \(2004\)](#) sont de type "Monotone Implicit Large Eddy Simulation", ce qui signifie que la dissipation visqueuse non-résolue est remplacée par une dissipation implicite de sous-maillage provenant du comportement numérique des méthodes TVD utilisées pour la résolution des équations de Navier- Stokes et de transport de la densité.

2.4.4 Courant de gravité à faible rapport de densités

Ce test concerne un courant de gravité sur fond horizontal généré par le lâcher d'un volume fixé de fluide dense au sein d'un fluide moins dense (il s'agit d'un écoulement de "lock-exchange"). Nous allons comparer les résultats de notre code à ceux rapportés par [Birman *et al.* \(2007\)](#). Dans cet écoulement le rapport des densités est fixé à $\rho_1/\rho_2 = 0.998$, et le nombre de Reynolds à $Re = \frac{\sqrt{g'H}H}{\nu} = 4000$ où $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$ et H est la hauteur du canal. Le code de [Birman *et al.* \(2007\)](#) est un code spectral, c'est pourquoi le nombre de Schmidt correspondant est fixé à $Sc \sim 1$. En effet, la stabilité des méthodes spectrales n'est pas assurée s'il existe de très forts gradients et l'utilisation d'une forte diffusion moléculaire permet d'adoucir ces derniers. Le domaine de calcul est bidimensionnel, de longueur $L = 28H$ et discrétisé en 2049×250 cellules pour [Birman *et al.* \(2007\)](#), et de longueur $L = 20H$ et discrétisé en 2048×250 cellules dans notre cas. Le tracé des iso-contours de densité obtenus dans les deux méthodes et pour trois



(a) Evolution de l'amplitude des pics de fluide lourd h_s (b) Evolution de l'amplitude des bulles de fluide léger h_b

FIG. 2.11 – Evolution de la taille de la zone de mélange dans un écoulement de Rayleigh-Taylor. Nos résultats apparaissent en triangles. Ils sont superposés aux résultats obtenus par les différents codes testés dans [Dimonte *et al.* \(2004\)](#). Les points sont issus des expériences de [Dimonte & Schneider \(2000\)](#).

temps différents est porté sur la figure [2.13](#).

La position du front est exactement la même pour tous les temps. Les tourbillons générés à l'interface sont aussi quasiment identiques. Seul un petit déplacement de certains d'entre eux peut être observé.

2.4.5 Courant de gravité à grand rapport de densités

Nous rapportons ici une comparaison des résultats produits par notre code avec ceux donnés par deux approches spectrales ([Bonometti & Balachandar \(2007\)](#)). Cette comparaison porte sur un écoulement bidimensionnel étudié par [Birman *et al.* \(2005\)](#). Il s'agit d'un courant de gravité généré par le lâcher d'un volume fixé de fluide lourd au sein du fluide léger. Le rapport des densités est fixé à $\rho_2/\rho_1 = 2.5$, le nombre d'Archimède à $Ar = \sqrt{Atg\bar{H}H}/\nu = 3381$. La résolution est fixée à 4000×200 cellules pour les méthodes spectrales de [Birman *et al.* \(2005\)](#) et [Bonometti & Balachandar \(2007\)](#) et 2000×200 cellules pour notre méthode. Ceci correspond à une résolution identique puisque les méthodes spectrales nécessitent une condition de périodicité suivant la direction de l'écoulement, ce qui double la taille du domaine nécessaire à ces simulations. Les conditions aux limites au Nord et au Sud sont des conditions de glissement. La figure [2.14](#) représente les iso-contours de densité au temps $t(Atg/H)^{1/2} = 8.45$ pour les trois codes. Il est à

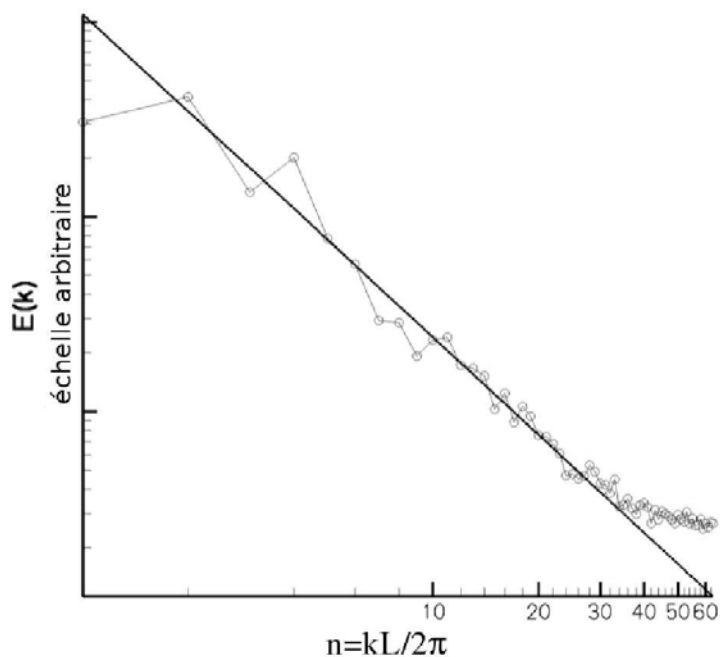


FIG. 2.12 – En cercles : spectre de densité obtenu dans le plan horizontal médian lorsque la turbulence est développée ; la droite a une pente $-5/3$.

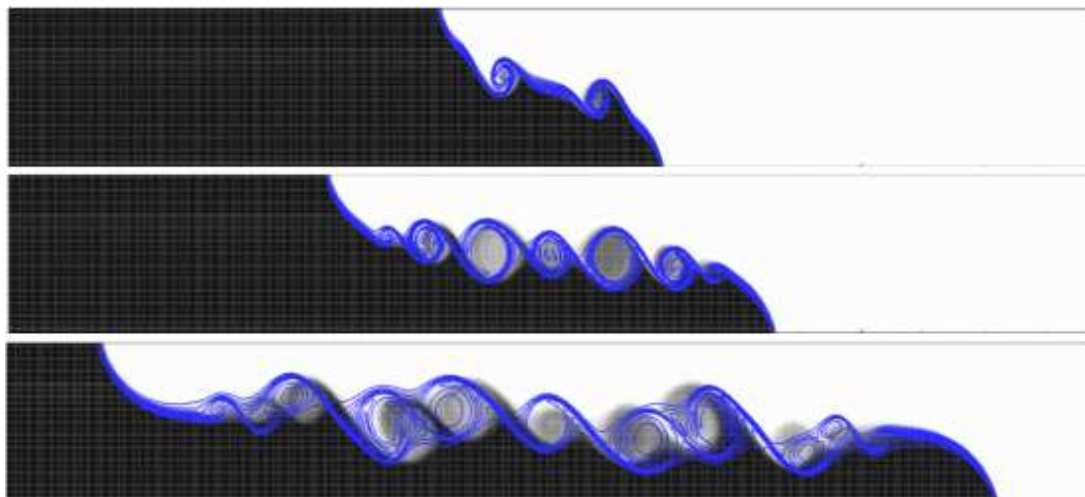


FIG. 2.13 – Comparaison de deux simulations de courants de gravité bidimensionnels à $Re = 4000$ et $\rho_1/\rho_2 = 0.998$. En niveaux de gris : résultats issus de [Birman *et al.* \(2007\)](#) ; En traits pleins : iso-contours de densité prédits par notre code. Les trois images sont prises à $t(g'/H)^{1/2} = 3, 6$ et 12 respectivement.

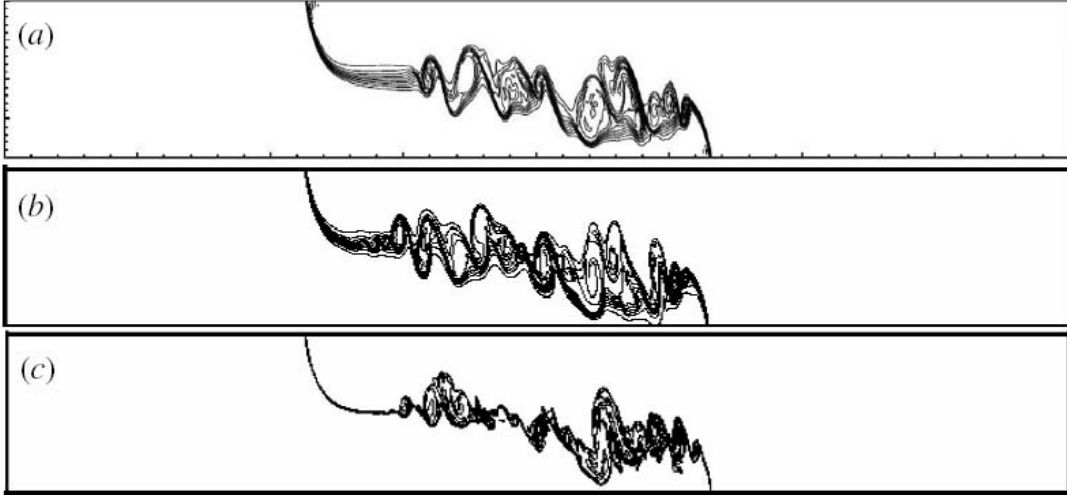


FIG. 2.14 – Iso-contours de fraction volumique de fluide dense à $t(Atg/H)^{1/2} = 8.45$ ($\rho_2/\rho_1 = 2.5$, $Ar = \sqrt{AtgH}/\nu = 3381$). Résultats de (a) [Birman et al. \(2005\)](#), (b) et (c) [Bonometti & Balachandar \(2007\)](#) méthode spectrale et notre code respectivement.

noter que les codes spectraux utilisent un nombre de Schmidt $Sc \sim 1$ tandis que notre méthode est basée sur un nombre de Schmidt $Sc \gg 1$. La structure du courant dans les trois simulations est très similaire avec un front situé exactement à la même position et des gros tourbillons situés quasiment aux mêmes positions et possédant des tailles très proches. Nous pouvons noter que "l'interface" entre les fluides a une épaisseur relativement importante dans les simulations spectrales alors que cette épaisseur demeure faible avec notre méthode. Ceci est dû à l'influence du nombre de Schmidt utilisé (voir [Bonometti & Balachandar \(2007\)](#)). Les vitesses des fronts de fluide lourd et léger ont été mesurées par les mêmes auteurs et sont reportées sur la figure 2.15. Une différence d'environ 5% a été trouvée entre les valeurs données par les trois codes. Enfin, la distribution spatiale du taux de dissipation intégré verticalement ϵ_v est tracée sur la figure 2.16. Ce taux de dissipation est calculé à la manière de [Birman et al. \(2005\)](#) :

$$\epsilon_v = \int_0^H \frac{2}{Re} \rho S_{ij} S_{ij} dz \quad (2.50)$$

où $Re = \sqrt{gH}/\nu$ et $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$.

Cette comparaison montre que malgré l'utilisation de méthodes numériques complètement différentes, les trois codes convergent vers des résultats très similaires. Les petites différences observées sont explicables par l'utilisation d'un nombre de Schmidt différent. Une étude détaillée de l'influence du nombre de Schmidt sur les courants de gravité a été réalisée par [Bonometti & Balachandar \(2007\)](#).

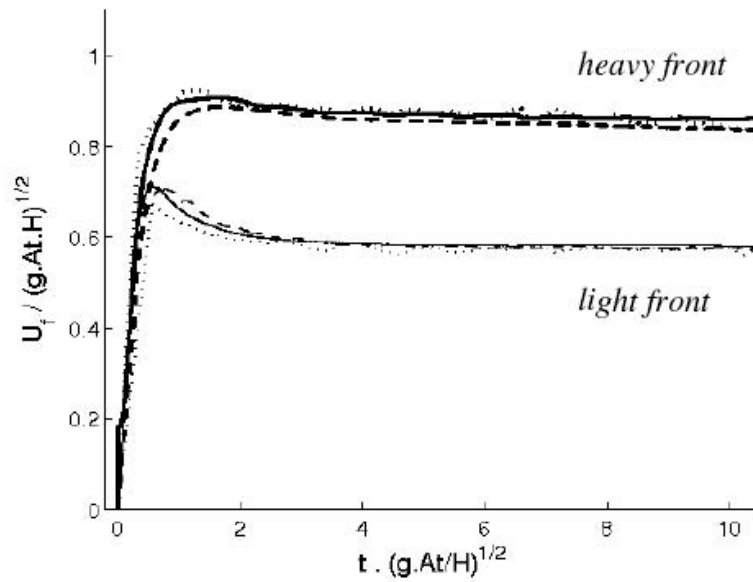


FIG. 2.15 – Evolution de la vitesse des fronts lourd et léger. Les traits en pointillés, les tirets et les traits pleins correspondent aux résultats de [Birman *et al.* \(2005\)](#), de la méthode spectrale de [Bonometti & Balachandar \(2007\)](#) et de notre code respectivement.

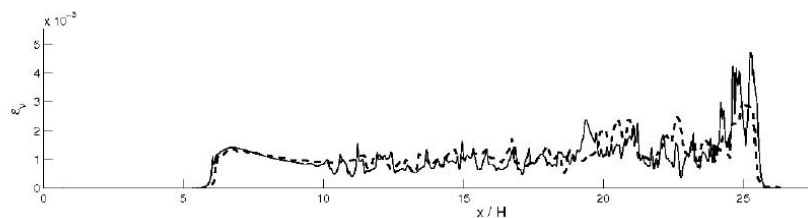


FIG. 2.16 – Taux de dissipation intégré verticalement à $t(Atg/H)^{1/2} = 13.52$. En trait plein : notre code, en tirets : [Birman *et al.* \(2005\)](#)

Chapitre 3

Courants de gravité sur un support horizontal

Dans ce chapitre nous allons illustrer le comportement des courants de gravité en tubes horizontaux tandis que celui des courants en tubes inclinés pour des angles variant entre 0° et 80° environ sera l'objet des deux chapitres suivants. En effet, le comportement des courants en géométrie horizontale présente certaines spécificités. Dans le cas des courants inclinés, nous verrons que la dynamique de l'écoulement résulte d'un équilibre entre flottabilité et inertie, ce qui se traduit par la relation entre vitesse du front et saut relatif de densité à l'interface $V_f = 0.7\sqrt{AtgD}\sqrt{C_f}$. Dans ces géométries inclinées, il existe toujours une composante de la gravité alignée avec la direction de l'écoulement, ce qui impose un forçage permanent au courant. En revanche pour des courants se propageant sur un support horizontal, ce forçage n'existe plus et le moteur de l'écoulement est alors la différence de pression hydrostatique de part et d'autre du front. Ceci conduit à des régimes d'écoulement particuliers dont nous allons visiter quelques aspects dans ce chapitre.

3.1 Introduction

[Benjamin \(1968\)](#) a développé une théorie non-visqueuse pour la propagation d'un courant de gravité stationnaire. En écrivant les bilans de flux de masse et de quantité de mouvement de part et d'autre du front, il a déterminé analytiquement une famille de solutions possibles qui dépendent de la hauteur du courant. En imposant la conservation de l'énergie de part et d'autre du front, il a démontré qu'il ne restait plus que deux solutions possibles : soit la hauteur du courant est nulle, soit elle est égale à la moitié de celle du canal. De nombreuses expériences montrent des écoulements proches de cette dernière solution ([Gardner & Crow \(1970\)](#), [Wilkinson \(1982\)](#), [Shin et al. \(2004\)](#)). Par ailleurs, Benjamin a notamment démontré que le nombre de Froude défini grâce à la gravité g et à la hauteur du canal H devait être donné par $Fr = \frac{U}{\sqrt{g'H}} = \frac{1}{2}$ en deux dimensions où $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$ est la gravité réduite, et $Fr = \frac{U}{\sqrt{g'D}} = 0.542$ en

conduite

cylindrique où D est le diamètre de la conduite. Cette théorie a été développée pour la vidange d'un canal horizontal. Ainsi, aucun mouvement de fluide interne au courant n'est pris en compte dans la démonstration, le rapport des densités des fluides est grand et ces derniers ne sont pas miscibles. Cependant des expérimentations mettant en jeu des fluides miscibles, et de faible rapport de densité on aussi montré un comportement proche des prédictions conservatives de Benjamin. Dans les expériences menées par [Keulegan \(1958\)](#), le nombre de Froude a été observé en légère augmentation (de 0.42 à 0.48, à comparer avec le 1/2 de Benjamin) lorsque le nombre de Reynolds croît de 600 à 150000. Plus tard, [Barr \(1967\)](#) a observé la même tendance avec des nombres de Froude allant de 0.42 à $Re = 200$ jusqu'à 0.46 pour $Re \geq 1000$. Ses résultats montrent que la variation de Fr est plus sensible pour ces valeurs modérées de Re . [Shin et al. \(2004\)](#) ont mené des expériences à $Re = \sqrt{g'D^3}/2\nu \simeq 4500$ de manière à pouvoir négliger les effets visqueux. Celles-ci montrent aussi, dans le cas où un "bloc" de fluide lourd emplissant toute la hauteur du canal est lâché, des nombres de Froude s'écartant de 5% à 10% du 1/2 de Benjamin. Récemment, des simulations menées par [Cantero et al. \(2007\)](#) ont fourni des nombres de Froude allant de 0.361 à 0.421 pour des nombres de Reynolds variant de 895 à 8950. D'après ces auteurs la tendance de ces résultats semble conduire à une valeur de 0.44 pour les très grands nombres de Reynolds.

3.2 Revue des caractéristiques des courants de gravité horizontaux générés par « lock exchange »

[Huppert & Simpson \(1980\)](#) ont montré expérimentalement que l'évolution des courants de gravité horizontaux en géométrie cartésienne et résultant d'un lâcher de volume - fini ou infini - de fluide (lock-exchange) pouvait passer par les stades suivants (voir aussi les figures [3.1](#) et [3.2](#)) :

- une première phase comprenant l'accélération initiale et une période à vitesse à peu près constante appelée dans la littérature anglo-saxonne "slumping phase", ce qui peut être traduit par phase de subsidence en référence à la chute initiale du volume de fluide lourd,
- une seconde phase inertielle pendant laquelle les forces de flottabilité sont équilibrées par les forces d'inertie,
- une dernière phase visqueuse pendant laquelle ce sont les forces visqueuses qui dominent l'écoulement et équilibrent la force de flottabilité.

A relativement bas nombre de Reynolds ("bas" signifiant ici $Re < 10^4 - 10^5$ tout de même!), la phase inertielle peut ne pas exister et laisser place à une transition directe entre la phase de subsidence et la phase visqueuse. En effet, il est possible d'évaluer un nombre de Reynolds minimal nécessaire à l'apparition du second régime grâce aux résultats de Huppert (que nous détaillerons plus loin) ce qui avec nos paramètres conduit à $Re = O(10^5)$. C'est dans cette situation que nous allons nous trouver car nos simulations se feront avec $At = 0.004$, $Sc \gg 1$,

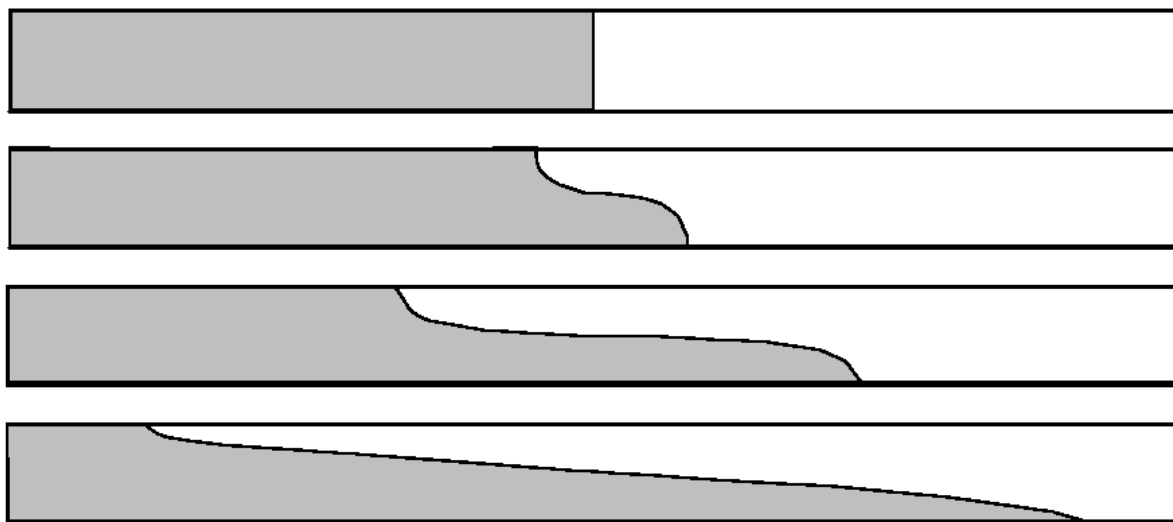


FIG. 3.1 – Evolution des deux courants en situation de lock-exchange avec des volumes “infinis”. Ces courants sont en phase de subsidence sur les trois premières images, puis en phase visqueuse sur la dernière. Le fluide le plus dense apparaît en gris.

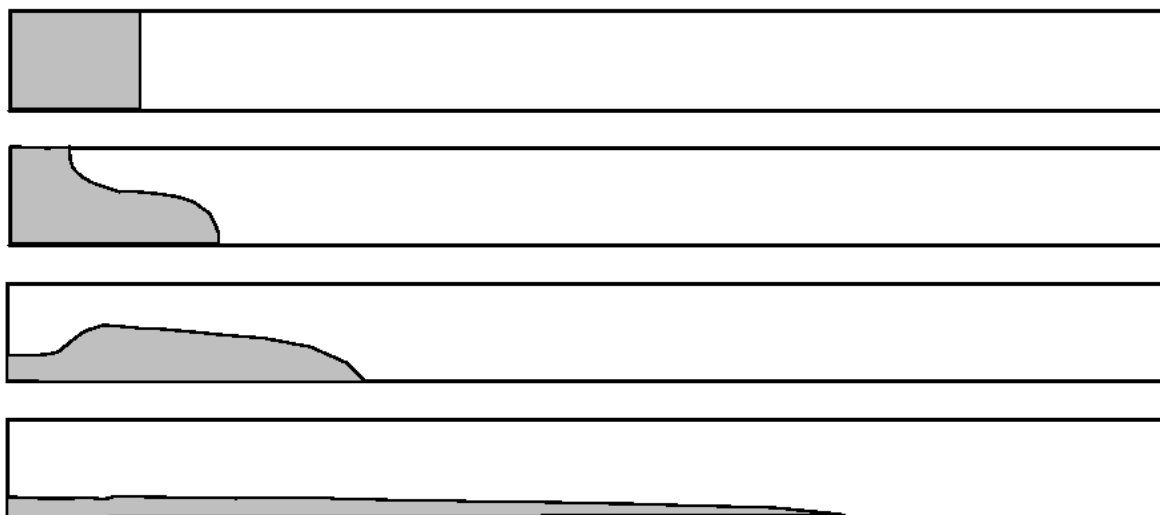


FIG. 3.2 – Evolution des deux courants en situation de lock-exchange avec un volume de fluide dense fini (en gris). Les courants sont en phase de subsidence sur les deux premières images, puis sur la troisième le courant léger disparaît pour générer un onde réfléchi à la surface du courant dense qui est toujours en phase de subsidence. Enfin, sur la dernière image ce courant est en phase visqueuse.

et $Ar = 470$ (soit $Re = 660$) pour les canaux 3D ou $Ar = 560$ (soit $Re = 790$) pour les canaux 2D et les tubes cylindriques.

3.2.1 Phase d'accélération initiale et phase de subsidence

La période d'accélération initiale a été notamment étudiée expérimentalement par [Martin & Moyce \(1952\)](#) et numériquement par [Härtel *et al.* \(2000b\)](#), [Härtel *et al.* \(2000a\)](#) et [Cantero *et al.* \(2007\)](#). Ces auteurs montrent que durant ce régime initial, les perturbations tridimensionnelles introduites dans l'interface initiale n'ont pas d'influence significative. Ainsi, l'écoulement se comporte comme un écoulement bidimensionnel et les vitesses des courants sont identiques dans les simulations 3D et 2D. D'après [Cantero *et al.* \(2007\)](#) les vitesses maximales atteintes lors de l'accélération dépendent du nombre de Reynolds et semblent tendre vers 0.5 lorsque ce dernier devient grand. D'après les mêmes auteurs, ce pic de vitesse a lieu lorsque la position du front est à environ $0.3H$ de la position initiale de l'interface, et ceci quels que soient le nombre de Reynolds et le volume lâché. Si la raison de l'accélération initiale est intuitive, celle de la décélération qui suit n'a été interprétée que récemment par [Cantero *et al.* \(2007\)](#). La vitesse du front tend dans un premier temps vers 0.5 comme indiqué par les modèles hydrauliques simplifiés. Puis vers $\tilde{t} = t(g'/H)^{1/2} \simeq 0.8$, un tourbillon de Kelvin-Helmholtz apparaît sur la tête du courant et commence à pomper de l'énergie pour s'intensifier jusqu'à $\tilde{t} \simeq 2.5$. Le front ne dispose alors plus de toute l'énergie disponible pour avancer puisqu'il doit en transférer une partie aux tourbillons successifs qui apparaissent à l'interface. Il s'ensuit une vitesse de propagation inférieure à celle prédite en négligeant les mouvements relatifs internes au courant. Les expériences de [Shin *et al.* \(2004\)](#) ont été menées à $Re = \sqrt{g'H}H/2\nu > 1000$ car d'après [Simpson \(1997\)](#) les effets visqueux ne sont pas importants à ces valeurs du nombre de Reynolds. Pourtant la valeur de la vitesse du front obtenue correspond à des nombres de Froude $Fr < 0.5$. Ceci tend à confirmer le fait que l'énergie qui n'est pas disponible pour réaliser $Fr = 0.5$ est bien redirigée vers les tourbillons de Kelvin-Helmholtz (phénomène inertiel, non dissipatif) et non dissipée par viscosité.

La phase de subsidence se déroule alors jusqu'à une transition soit vers une phase inertielle, soit directement vers une phase visqueuse si le nombre de Reynolds est faible. Les résultats de [Cantero *et al.* \(2007\)](#) montrent que la vitesse dans cette phase dépend du nombre de Reynolds, mais pas du volume initialement lâché.

3.2.2 Phase inertielle

Cette phase de vie d'un courant de gravité est la seule qui peut ne pas exister. Il est en effet possible que la phase visqueuse commence avant cette dernière comme nous le verrons plus loin. La phase inertielle (qui sera notée "I") fait suite à la phase de subsidence (notée par la suite "S") et est caractérisée par une vitesse de front décroissante dans le temps. Plusieurs travaux ont été menés afin d'établir une loi d'évolution de la position du front en fonction du temps. Les différentes méthodes employées sont :

- l’analyse dimensionnelle par [Fay \(1969\)](#),
- la recherche d’une solution auto-similaire aux équations en eau peu profonde intégrées selon la verticale par [Hoult \(1972\)](#),
- le modèle de boîtes (« box model ») par [Huppert & Simpson \(1980\)](#).

Toutes ces méthodes concordent pour donner la loi d’évolution de la position du front x_F suivante :

$$x_f \sim (V_0 g')^{1/3} t^{2/3} \quad (3.1)$$

où V_0 est le volume de fluide dense initialement lâché. Nous allons maintenant détailler l’obtention de cette loi de puissance avec les trois méthodes citées précédemment dans le cas d’un courant en géométrie cartésienne, c’est-à-dire soit 2D, soit 3D de section rectangulaire. Dans le cas 3D, les grandeurs seront des grandeurs moyennées selon la profondeur.

Analyse dimensionnelle ([Fay \(1969\)](#))

Considérons un courant dont le fluide lourd de densité ρ_2 évolue dans un fluide ambiant de densité ρ_1 . Sa hauteur, considérée uniforme en espace est $h(t)$ et sa longueur $x_f(t)$. h et x_f peuvent varier dans le temps, mais nous supposons qu’il n’y a pas de mélange possible. La conservation de la masse implique donc :

$$V_0 = hx_f = h_0 x_0 \quad (3.2)$$

où V_0 est le volume de fluide dense initialement lâché, et h_0 et x_0 les hauteur et longueur de ce volume. De part et d’autre du nez du courant existe une différence de pression hydrostatique qui peut s’écrire $(\rho_2 - \rho_1)gh$. Une fois intégrée sur la surface délimitant le front du courant, nous obtenons la force F exercée sur cette surface :

$$F = (\rho_2 - \rho_1)gh^2 \quad (3.3)$$

(rappelons que nous considérons un volume de profondeur unité). Dans la phase inertielle, cette force équilibrée par force d’inertie s’opposant au déplacement du courant. Cette force est volumique et peut s’écrire dimensionnellement

$$\rho_2 (x_f t^{-2}) x_f h \quad (3.4)$$

En écrivant l’égalité entre [3.3](#) et [3.4](#), et en utilisant [3.2](#) il vient :

$$x_f \sim (V_0 g')^{1/3} t^{2/3} \quad (3.5)$$

Nous aurons aussi par la suite besoin de l’expression de la force due à la viscosité. Fay l’écrit pour un courant évoluant le long d’une surface fluide $\mu(x_f t^{-1})/\delta x_f$ où $\delta = (\nu t)^{1/2}$ est l’épaisseur de la couche limite. Cette force peut alors se reformuler en :

$$\rho_2 \nu^{1/2} x_f^2 t^{-3/2} \quad (3.6)$$

Il est aussi possible de l'écrire pour un courant se propageant le long d'une surface solide. Dans ce cas nous nous intéressons au régime visqueux dans lequel l'approximation de lubrification est valide. L'épaisseur caractéristique de la couche limite est alors la hauteur du courant h , et la force visqueuse est :

$$\rho_2 \nu_2 x_f^2 t^{-1} / h \quad (3.7)$$

Recherche de solution auto-similaire (Hoult (1972))

En supposant que le courant considéré possède une extension horizontale très grande devant sa hauteur, Hoult utilise le système d'équations de conservation en eau peu profonde. Le mouvement éventuel de fluide dans la partie extérieure au courant est totalement négligé. Il écrit les équations de conservation en ne gardant que les termes d'inertie et de flottabilité et recherche la solution en introduisant la variable $\eta = x/x_{car} = x(g'V_0)^{1/3}t^{-2/3}$. Nous pouvons reconnaître ici la longueur caractéristique x_{car} donnée par l'analyse de Fay. Cependant, cette résolution ne permet pas d'obtenir la constante de proportionnalité qui manque aussi à Fay. Hoult la détermine expérimentalement pour arriver à :

$$x_f = 1.6(V_0 g')^{1/3} t^{2/3} \quad (3.8)$$

Ce résultat étant la conséquence d'une hypothèse de similarité, il ne doit être valide qu'après un laps de temps relativement grand.

Modèle de boîtes (« box model »)(Huppert & Simpson (1980))

Le modèle de boîtes repose sur l'hypothèse suivante : l'évolution du courant peut être représentée par une séquence de boîtes de volumes identiques. Ainsi nous retrouvons l'équation de conservation de la masse de Fay :

$$V_0 = h.x_f = h_0.x_0 \quad (3.9)$$

La démonstration de Huppert & Simpson (1980) s'appuie ensuite sur leurs résultats expérimentaux et ceux de Simpson & Britter (1979) qui montrent que le nombre de Froude $Fr = V_f / \sqrt{g'H}$ suit :

$$Fr = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{h}{H} \right)^{1/6} & \text{si } 0.075 \leq h/H \leq 1 \\ 1.19 \left(\frac{h}{H} \right)^{1/2} & \text{si } 0 \leq h/H \leq 0.075 \end{cases} \quad (3.10)$$

où H est la hauteur du canal. La première condition $0.075 \leq h/H \leq 1$ correspond à la phase de subsidence S, la seconde à la phase inertielle I. En combinant les relations 3.9 et 3.10 il vient :

– pour la phase de subsidence S :

$$x_f = \left(x_0^{7/6} + 7/12(g'^3 V_0 H^2)^{1/6} t \right)^{6/7} \quad (3.11)$$

$$\sim x_0 + 1/2(g'^3 V_0 H^2 / x_0)^{1/6} t \quad (3.12)$$

– pour la phase inertielle I :

$$x_f = 1.47(g'V_0)^{1/3}t^{2/3} \quad (3.13)$$

Cette relation ne diffère de celle de Hoult que faiblement par son préfacteur.

D'une manière plus générale, ces résultats peuvent être mis sous forme adimensionnelle en utilisant comme échelle de longueur H et comme échelle de temps $\sqrt{H/g'}$:

$$\widetilde{x}_f = \alpha(g'\widetilde{V}_0)^{1/3}\widetilde{t}^{2/3} \quad (3.14)$$

avec $\alpha = 1.6$ pour Hoult et $\alpha = 1.47$ pour [Huppert & Simpson \(1980\)](#), $\widetilde{x}_f = x_f/H$ et $\widetilde{t} = t/\sqrt{H/g'}$.

3.2.3 Transitions entre phases

Comme nous l'avons évoqué ci-dessus, il est possible de rencontrer les trois phases (subsidence, inertielle et visqueuse) successivement tout comme il est possible de ne rencontrer que les phases de subsidence et visqueuse. L'histoire du courant peut être déterminée en calculant les positions du front aux transition entre les différentes phases et en les comparant. Nous allons utiliser la position du front à la transition entre la phase inertielle et la phase visqueuse $x_{f,IV}$, celle entre la phase de subsidence et la phase inertielle $x_{f,SI}$ et celle entre la phase de subsidence et la phase visqueuse $x_{f,SV}$.

D'après [Huppert & Simpson \(1980\)](#) la transition entre la phase de subsidence et la phase inertielle se fait lorsque la hauteur du courant devient inférieure à $0.075H$. Or la conservation de la masse impose toujours $V_0 = h_{SI}x_{f,SI}$. Il vient alors dans le "box-model" $x_{f,SI} = V_0/0.075H$, ou sous forme adimensionnelle :

$$\widetilde{x}_{f,SI} = 13.33\widetilde{V}_0 \quad (3.15)$$

Pour calculer la position du front lors de la transition directe possible entre les phases de subsidence et visqueuse nous avons besoin d'une relation donnant l'évolution de la position du front pendant la phase visqueuse. Celle-ci peut s'obtenir à la manière de Fay en écrivant l'égalité entre les forces de flottabilité 3.3 et les forces visqueuses. Ces dernières dépendent de la nature de la surface sur laquelle le courant se propage (solide ou fluide).

Courant se propageant sur une surface fluide

Dans ce cas les forces visqueuses sont données par 3.6 et il vient :

$$x_f \sim (g'^2V_0^4/\nu)^{1/8}t^{3/8} \quad (3.16)$$

La transition entre les phases de subsidence et visqueuse n'a lieu que lorsque la force visqueuse 3.6 est du même ordre de grandeur ou plus grande que la force d'inertie 3.4, ce qui se traduit par :

$$\rho_2\nu^{1/2}x_f^2t^{-3/2} \geq \rho_2x_f^2t^{-2}h$$

Dans le cas limite de l'égalité, cette relation se simplifie en

$$t_{visc} = x_f^{-2} V_0^2 / \nu \quad (3.17)$$

En combinant les deux résultats précédents 3.17 et 3.16 il vient :

$$x_{f,IV} = \left(g' V_0^5 / \nu^2 \right)^{1/7} \quad (3.18)$$

ou encore sous forme adimensionnelle :

$$\widetilde{x_{f,IV}} = Re^{2/7} \widetilde{V_0}^{5/7} \quad (3.19)$$

Courant se propageant sur une surface solide

Dans le cas d'un courant le long d'une surface solide, les forces de flottabilité 3.3 sont équilibrées par les forces visqueuses 3.7, et en supposant que $V_0 = x_f h$ ("box-model") :

$$x_f \sim \left(g' V_0^3 / \nu \right)^{1/5} t^{1/5} \quad (3.20)$$

La transition entre les phases de subsidence et visqueuse a lieu lorsque la force visqueuse 3.7 est du même ordre de grandeur ou plus grande que la force d'inertie 3.4, ce qui se traduit par :

$$\rho_2 \nu x_f^3 t^{-1} / V_0 \geq \rho_2 x_f t^{-2} V_0$$

Dans le cas limite de l'égalité, cette relation se simplifie en

$$t_{visc} = x_f^{-2} V_0^2 / \nu \quad (3.21)$$

En combinant les deux résultats précédents 3.21 et 3.20 il vient :

$$x_{f,IV} = \left(g' V_0^5 / \nu^2 \right)^{1/7} \quad (3.22)$$

ou encore sous forme adimensionnelle :

$$\widetilde{x_{f,IV}} = Re^{2/7} \widetilde{V_0}^{5/7} \quad (3.23)$$

On retrouve apparemment le même résultat que pour un courant se propageant le long d'une surface fluide. Il faut cependant garder en tête que la viscosité utilisée ici est celle du fluide dans le courant. En ce qui concerne le courant se propageant le long d'une surface fluide, il faut se rappeler que le régime visqueux fait intervenir un courant satisfaisant aux conditions de lubrification. Sa taille est donc faible devant la taille de la couche limite créée dans le fluide qui le supporte. De la même manière le gradient de vitesse en son sein est faible devant celui qui existe dans le fluide ambiant. Ainsi, la force visqueuse exercée sur le courant est à relier aux contraintes visqueuses dans le fluide ambiant, et donc à la viscosité du fluide ambiant (Hoult (1972)).

Dans ce travail nous nous placerons toujours dans la configuration d'un courant de gravité évoluant le long d'une surface solide.

Dans tous les cas, $x_{f,IV}$ est l'échelle horizontale de longueur du courant lorsque la force de viscosité devient plus grande que la force inertielle. Une transition directe entre la phase de subsidence et la phase visqueuse se produit si cette longueur caractéristique est inférieure à la longueur autorisant la transition SI , soit :

$$\begin{aligned} & \widetilde{x}_{f,IV} \leq \widetilde{x}_{f,SI} \\ \Leftrightarrow & Re^{2/7} \widetilde{V}_0^{5/7} \leq 13.33 \widetilde{V}_0 \\ \Leftrightarrow & Re \leq 8650 \widetilde{V}_0 \end{aligned}$$

En d'autres termes, le régime inertiel ne peut se produire que si le nombre de Reynolds est supérieur à $8650 \widetilde{V}_0$. N'oublions pas que \widetilde{V}_0 est sans dimension, et vaut x_0/H lorsque toute la hauteur du canal est remplie de fluide lourd. D'une manière générale, les expériences et les simulations correspondent souvent à $x_0 \geq H$, ce qui montre que le nombre de Reynolds doit être au moins de l'ordre de 10^4 pour pouvoir espérer observer le régime inertiel. Ceci est bien sûr hors d'atteinte des simulations numériques directes 3D actuelles, et bien au dessus du nombre de Reynolds que nous utiliserons essentiellement dans ce travail : $Re = 790$. Grâce à 3.19 et 3.17 nous pouvons écrire le temps caractéristique de transition vers la phase visqueuse :

$$t_{visc} = \left(\frac{V_0^4}{g^2 \nu^3} \right)^{1/7} \quad (3.24)$$

3.2.4 Phase visqueuse

La propagation du front en régime visqueux dépend des forces visqueuses exercées sur le courant. Ces forces étant de nature différente pour un courant se propageant le long d'une surface libre et pour son homologue se propageant le long d'une surface solide comme nous l'avons vu ci-dessus, les expressions donnant l'évolution de la position du front $x_f(t)$ sont bien sûr différentes. Fay (1969) et Hoult (1972) ont considéré le premier problème qui représente bien l'étalement d'une nappe d'hydrocarbures sur la mer. Huppert (1982) a considéré le second. Bien que nous nous focalisions par la suite sur les courants produits par lock-exchange, il est à noter que Didden & Maxworthy (1982) ont mené une étude avec une approche similaire à celle de Fay (1969) pour un courant sur fond solide alimenté par une source continue. Le régime visqueux des courants de gravité intervient la plupart du temps lorsque le courant a déjà parcouru une distance extrêmement grande en comparaison de sa hauteur. Ainsi, il est possible d'avoir recours à l'approximation de lubrification.

Courant le long d'une surface libre

Les contraintes visqueuses sont issues du cisaillement entre le courant et le fluide ambiant. Comme le fluide ambiant est au repos loin du courant, une couche limite est créée par l'avancée

du courant en son sein. [Fay \(1969\)](#) introduit l'expression la force visqueuse exercée par le fluide ambiant sur le courant sous la forme :

$$\mu_a \frac{xt^{-1}}{\delta} x_F \quad (3.25)$$

où $\delta = (\nu_a t)^{1/2}$ est l'épaisseur caractéristique de la couche limite dans le fluide ambiant, et μ_a et ν_a les viscosités dynamique et cinématique de ce dernier. L'expression de la force visqueuse est alors $\rho_a \nu_a^{1/2} x_F^2 t^{-3/2}$. En régime visqueux, cette dernière est équilibrée par la force de flottabilité qui a pour expression $(\rho_2 - \rho_1)gh^2$. Il vient alors

$$x_f = \left(\frac{g'^2 V_0^4}{\nu} \right)^{1/8} t^{3/8} \quad (3.26)$$

ou sous forme adimensionnelle :

$$\tilde{x}_f = Re^{1/8} \tilde{V}_0^{1/2} \tilde{t}^{3/8} \quad (3.27)$$

[Hoult \(1972\)](#) étudie le même problème que [Fay \(1969\)](#) mais avec une approche plus élaborée puisqu'au lieu de se contenter d'équilibres entre forces il écrit d'une part l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans le courant en négligeant les termes d'inertie et d'autre part les équations de couche limite dans le fluide ambiant. Il cherche ensuite une solution auto-similaire à ces équations. Cependant le problème n'est pas fermé car l'écoulement à proximité du front n'est pas connu et n'est pas du type couche limite. [Hoult \(1972\)](#) a alors recours aux expériences pour déterminer le préfacteur du résultat :

$$x_f = 1.5 \left(\frac{g'^2 V_0^4}{\nu} \right)^{1/8} t^{3/8} \quad (3.28)$$

ou sous forme adimensionnelle :

$$\tilde{x}_f = 1.5 Re^{1/8} \tilde{V}_0^{1/2} \tilde{t}^{3/8} \quad (3.29)$$

Courant le long d'une surface solide

[Huppert \(1982\)](#) a déterminé analytiquement la solution au problème du courant dense sur un fond solide généré par le lâcher d'un volume fini de fluide dense (configuration de la figure 3.2). Dans ce problème, le courant subit d'une part des contraintes visqueuses de la part du fluide ambiant et d'autre part le cisaillement imposé par la surface solide. Huppert commence par évaluer l'importance relative de ces deux forces. Du côté du fluide ambiant, la contrainte visqueuse est $\mu_a \frac{\partial U}{\partial y} \sim \mu_a \frac{U}{(\nu t)^{1/2}}$. De la part de la surface solide, elle s'écrit $\mu \frac{\partial U}{\partial y} \sim \mu \frac{U}{h}$ car en approximation de lubrification l'échelle caractéristique dans le profil de vitesse est l'épaisseur du courant elle-même. Ainsi, le rapport de ces contraintes peut s'écrire :

$$S = \frac{\tau_{libre}}{\tau_{solide}} = \frac{h}{(\nu t)^{1/2}} \quad (3.30)$$

où h est une hauteur caractéristique du courant en régime visqueux qui peut aussi s'écrire V_0/x_f où x_f est une longueur caractéristique du courant en régime visqueux, soit $x_{f,IV} = (g'V_0^5/\nu^2)^{1/7}$ (voir équation 3.22). Ainsi, pour des fluides de viscosités dynamiques voisines, le rapport entre les contraintes visqueuses dues au fluide ambiant et à la surface solide est :

$$S = \left(\frac{t}{t_{visc}} \right)^{-7/10} \quad (3.31)$$

Comme la solution recherchée est une solution similaire en régime visqueux, ce dernier doit être bien établi, ce qui implique $t \gg t_{visc}$, soit $S \ll 1$. En conséquence, les contraintes visqueuses de la part du fluide ambiant sont négligeables devant celles créées par la surface solide lorsque le régime visqueux est bien établi. Ainsi la condition à la limite entre le courant et le fluide ambiant est remplacée dans Huppert (1982) par :

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=h} = 0 \quad (3.32)$$

Sur la surface solide, la condition $u(y=0) = 0$ est imposée. En supposant que la pression est hydrostatique et en utilisant ces conditions aux limites, Huppert (1982) obtient un champ de vitesse qui dépend de $\frac{\partial h}{\partial x}$ et remarque que la même solution aurait été obtenue en négligeant entièrement le fluide ambiant. Ceci est dû au fait que la dissipation au sein du courant domine la dissipation dans le fluide ambiant. A ce stade il est nécessaire d'écrire une autre relation entre le champ de vitesse et la hauteur du courant. Il est possible pour ceci d'utiliser l'équation de continuité intégrée sur la hauteur. Une solution autosimilaire à cette équation est alors recherchée et conduit à :

$$x_f = 1.13 \left(\frac{g'V_0^3}{\nu} \right)^{1/5} t^{1/5} \quad (3.33)$$

ou sous forme adimensionnelle :

$$\tilde{x}_f = 1.13 Re^{1/5} \tilde{V}_0^{3/5} \tilde{t}^{1/5} \quad (3.34)$$

Il est à noter que cette solution ne fait appel ni aux expériences ni à une résolution numérique pour déterminer la constante de proportionnalité dans le cas du lock-exchange. Des expériences, menées par exemple par Rottman & Simpson (1983), ont permis de confirmer cette loi de puissance dans le cadre d'écoulements de lock-exchange en canaux horizontaux de section rectangulaire. La figure 3.3 est issue de Rottman & Simpson (1983) et montre la validation de cette loi.

Régime visqueux transitoire dans les tubes inclinés ou horizontaux de section cylindrique

Les travaux de Séon (2006) et Séon *et al.* (2007) ont en revanche exhibé des lois de puissance en $x_f \sim t^{1/2}$ dans des tubes de section cylindrique et pour un lâcher de fluide symétrique (configuration de la figure 3.1). Une démonstration (due à Hinch) permettant de justifier cette

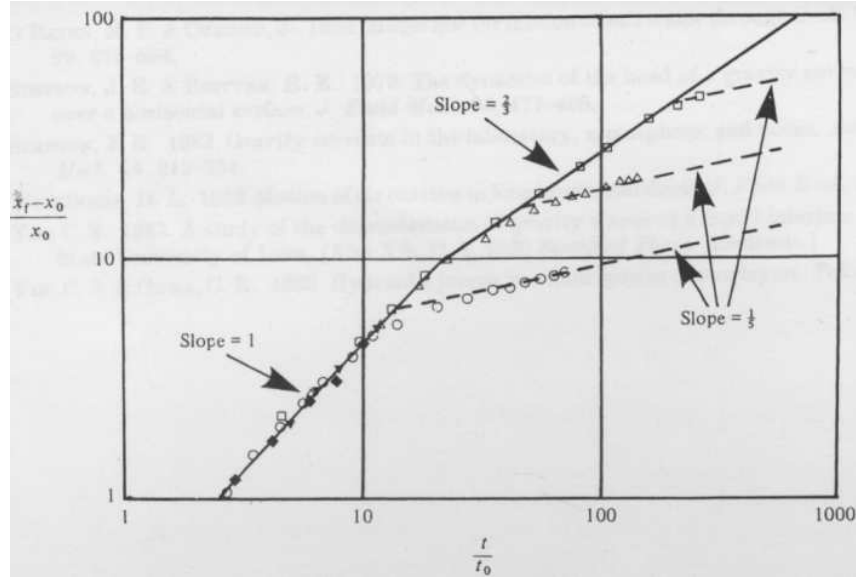


FIG. 3.3 – Evolution de la position du front du courant dense pour des lâchers de hauteur H et dont la position de transition Inertiel/Visqueux est estimée à $x_{f,IV}/x_0 = 6$ (○), 10 (◆), 12 (Δ), 18 (▼) et 25 (□). D'après [Rottman & Simpson \(1983\)](#).

loi de puissance est donnée dans ces références. Celle-ci s'appuie sur les hypothèses de pression hydrostatique, de courant de grande longueur devant sa hauteur et d'équilibre entre forces de gravité et de viscosité. L'hypothèse de pression hydrostatique permet de relier le gradient de pression le long de l'axe du tube à la variation de hauteur de l'interface le long de ce même axe. L'hypothèse d'écoulement résultant d'un équilibre gravité/viscosité permet d'écrire la conservation de la quantité de mouvement dans chacun des fluides. Puis cette dernière relation est intégrée sur la section du tube à mi-distance de ses extrémités (c'est aussi là que se situe l'interface initiale) pour obtenir les vitesses moyennes au milieu du tube dans chaque courant. Ces dernières sont égales en valeur absolue et de signes opposés à cause de la conservation de la masse. Elles s'écrivent sous la forme :

$$v_{visc} = F(0) \frac{Atgd^2}{\nu} \sin\alpha \left(1 + \frac{\partial h}{\partial x} \cot\alpha \right) \quad (3.35)$$

pour un tube incliné d'un angle α faible par rapport à l'horizontale, et avec $F(0) = 1/16 - 1/(2\pi^2)$. Aux temps longs, $\frac{\partial h}{\partial x} \rightarrow 0$ et il vient :

$$v_{visc} = F(0) \frac{Atgd^2}{\nu} \sin\alpha = F(0) V_\nu \sin\alpha \quad (3.36)$$

où $V_\nu = \frac{Atgd^2}{\nu}$ est une vitesse caractéristique issue de l'équilibre entre force de gravité $(\rho_2 - \rho_1)g$ et forces visqueuses $\mu V/d^2$, en définissant $\nu = 2\mu/(\rho_2 + \rho_1)$. Cette vitesse v_{visc} est une vitesse de référence. La vitesse réelle du front est supposée suivre la même loi d'échelle. Ainsi ces auteurs définissent $V_f^\infty = k_\nu V_\nu \sin\alpha$ où k_ν est une constante du même ordre de grandeur que $F(0)$. Ils

supposent alors que la dépendance de V_f vis à vis de la pente de l'interface est la même et écrivent :

$$V_f = V_f^\infty \left(1 + \frac{\partial h}{\partial x} \cot \alpha \right) \quad (3.37)$$

Si $\alpha = 0$ (cas du tube horizontal) une résolution particulière conduit à :

$$v_{visc} = F(0) V_\nu \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (3.38)$$

puis à :

$$V_f = k_\nu V_\nu \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.39)$$

Ensuite, pour n'importe quel angle α , la pente de l'interface est approchée par la relation géométrique :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \lambda \frac{d}{2x_F} \quad (3.40)$$

où λ est un paramètre considéré comme constant dans un souci de simplicité. Finalement, la vitesse du front en régime visqueux et en tube incliné est donnée par

$$V_f = \frac{dx_f}{dt} = k_\nu V_\nu \sin \alpha \left(1 + \lambda \cot \alpha \frac{d}{2x_F} \right) \quad (3.41)$$

et en tube horizontal par :

$$V_f = \frac{dx_f}{dt} = k_\nu V_\nu \lambda \frac{d}{2x_f} \quad (3.42)$$

Cette dernière relation montre bien, une fois intégrée, une variation de x_f en $t^{1/2}$. Cette loi de puissance est très bien confirmée par les expériences de [Séon et al. \(2007\)](#) comme le montre la figure 3.4 issue de cette référence.

Plus généralement, ces deux relations peuvent être intégrées analytiquement pour obtenir $x_f(t)$. Cette intégration contient deux inconnues : la constante d'intégration et le paramètre λ . [Séon et al. \(2007\)](#) ont obtenu un très bon accord entre ces résultats analytiques et leurs observations expérimentales par calage de la constante d'intégration et du paramètre λ .

3.3 Simulations numériques de courants de gravité horizontaux en phase de subsidence

Nous allons dans ce qui suit nous focaliser sur la vitesse de propagation du courant mise sous forme adimensionnelle grâce au nombre de Froude

$$Fr = \frac{V_f}{\sqrt{g'D}} \quad (3.43)$$

où $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$ est la gravité réduite et D est la longueur caractéristique transverse du domaine à savoir le diamètre pour un tube cylindrique et la hauteur pour un canal rectangulaire ou un plan. Les valeurs du nombre de Froude obtenues numériquement dans les différentes géométries sont présentées dans le tableau 3.1.

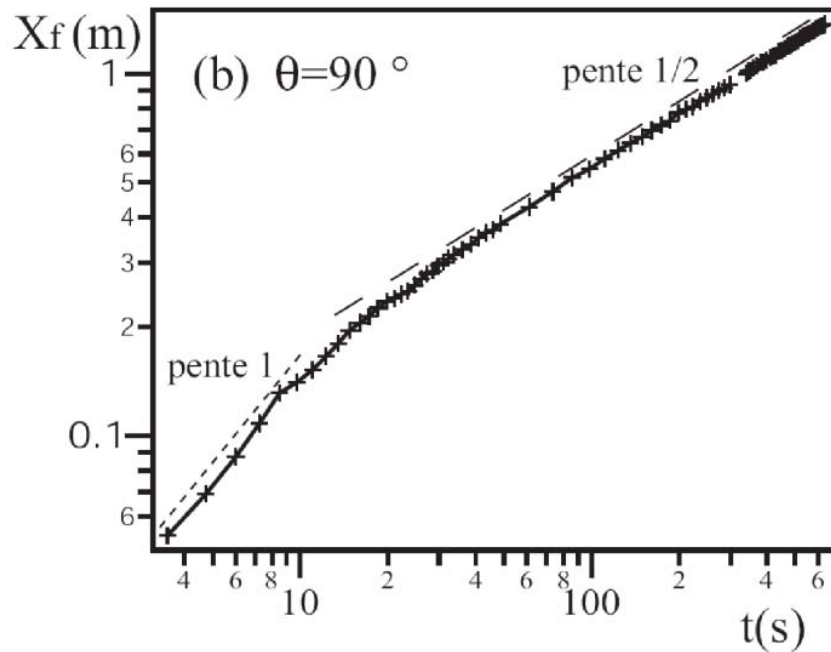


FIG. 3.4 – Evolution de la position du front x_f depuis l'interface initiale dans un tube cylindrique horizontal. D'après [Séon et al. \(2007\)](#).

3.3.1 Influence de la géométrie

Tout d'abord, il est intéressant de remarquer que les simulations 2D et 3D périodique suivant la profondeur donnent le même nombre de Froude pendant la phase de subsidence. Comme [Cantero et al. \(2007\)](#) l'ont remarqué, ceci signifie que les effets tridimensionnels résultant d'instabilités au sein du courant sont négligeables à ce stade de son évolution.

Ensuite nous remarquons que la valeur du nombre de Froude obtenue pour les simulations 3D cylindriques est très proche de celle obtenue expérimentalement par [Séon et al. \(2006\)](#) ($Fr = 0.404$, soit moins de 2% de différence) au même nombre de Reynolds. Dans la même configuration, la théorie de [Benjamin \(1968\)](#) prédit pour un courant énergétiquement conservatif $Fr = 0.542$. Ainsi il apparaît qu'à $Re = 790$, le nombre de Froude atteint seulement 75% de sa valeur asymptotique correspondant à un nombre de Reynolds infini et à un écoulement strictement parallèle. Dans le cas purement bidimensionnel, les simulations donnent pour le même nombre de Reynolds une valeur $Fr = 0.371$, ce qui correspond à 74% de la prédiction 2D bien connue de Benjamin $Fr = 1/2$. Ceci tend à montrer que des écart de vitesse significatifs existent entre les courants réels à nombres de Reynolds modérés et la théorie non-visqueuse de Benjamin, et ce pour ces deux géométries.

Géométrie	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Re	790	660	660	600	790	895
Fr (Ce travail)	0.412	0.360	0.362	0.362	0.371	0.375
Fr (Littérature)	0.404					0.361

TAB. 3.1 – Nombres de Froude mesurés pendant la phase initiale de subsidence d’un courant de gravité horizontal pour différentes géométries. (1) : tube cylindrique; (2) : canal de section carrée; (3) : canal 3D périodique suivant la profondeur; (4), (5) et (6) : configuration 2D. Le nombre de Reynolds est défini par $Re = g^{1/2} D^{3/2} / \nu$. L’incertitude sur les mesures de Fr est de l’ordre de 0.005. Les références de la littérature sont [Séon \(2006\)](#) pour (1) et [Cantero *et al.* \(2007\)](#) pour (6).

3.3.2 Influence du nombre de Reynolds

La valeur du nombre de Froude obtenue numériquement pour un écoulement 2D à $Re = 895$ est $Fr = 0.375$ ce qui est en bon accord avec la valeur $Fr = 0.361$ obtenue par les simulations de [Cantero *et al.* \(2007\)](#) compte tenu de l’incertitude sur la détermination de Fr qui peut être évaluée à ± 0.005 .

La tendance à l’augmentation du nombre de Froude avec le nombre de Reynolds est aussi indiquée par la comparaison des trois résultats 2D. Il est désormais bien établi que les prédictions théoriques du nombre de Froude ne sont pas atteintes aussi bien dans les simulations que dans les expériences à grand Re . D’après [Cantero *et al.* \(2007\)](#), cette différence est due aux structures de Kelvin-Helmholtz qui sont déjà présentes à l’interface entre les deux fluides pendant la phase de subsidence. En effet, ces auteurs remarquent que même dans des expériences utilisant des nombres de Reynolds de l’ordre de 10^5 le nombre de Froude ne dépasse jamais des valeurs comprises entre 0.47 et 0.48. Autrement dit, même si les couches limites sont très fines, la théorie de Benjamin ne rend pas complètement compte de la réalité. [Cantero *et al.* \(2007\)](#) notent que dans cette théorie, aucun mouvement de fluide interne au courant n’est possible. En revanche, dans les expériences et les simulations, des structures de Kelvin-Helmholtz se développent au niveau de l’interface entre les fluides à partir d’environ une unité de temps adimensionnel. Ce temps correspond au moment où la vitesse du front diminue fortement après le pic initial pour se stabiliser à la vitesse constante de la phase de subsidence. Ainsi il semble que, bien que le courant soit conservatif, une partie de l’énergie potentielle libérée par le mouvement des courants est redirigée partiellement vers l’alimentation en énergie cinétique des structures Kelvin-Helmholtz et non complètement vers l’énergie cinétique responsable de l’avancée du front. Néanmoins, l’impact global de ce processus de redistribution de l’énergie est faible puisque des nombres de Froude de 0.47 à 0.48 ont pu être observés lors d’expériences à grand Re . C’est pourquoi il est possible d’affirmer que les faibles valeurs du nombre de Froude relevées dans nos simulations, dans celles de [Cantero *et al.* \(2007\)](#) ou dans les expériences de [Séon \(2006\)](#) viennent des effets

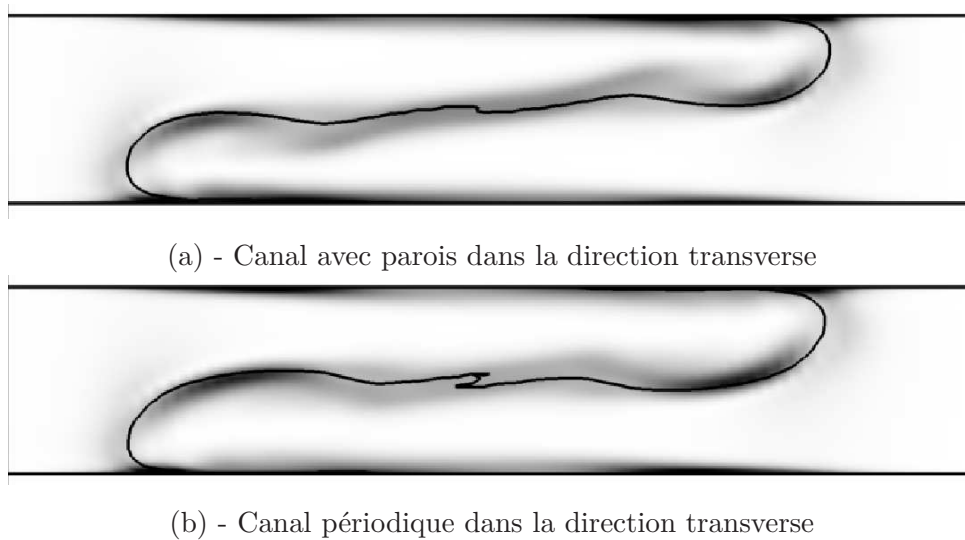


FIG. 3.5 – Taux de dissipation au sein de l'écoulement pour les canaux horizontaux avec et sans parois transverses. La dissipation est négligeable dans les zones blanches et de plus en plus intense dans les zones plus sombres.

visqueux significatifs qui existent pour des nombres de Reynolds de l'ordre de 500 à 1000, même dans les phases initiales de l'écoulement. Les résultats de même nature obtenus pour le tube cylindrique et le canal indiquent que ceci vaut pour toutes les géométries. La question qui se pose immédiatement est de savoir si ces effets visqueux viennent des couches limites aux parois ou des contraintes visqueuses internes à l'écoulement.

3.3.3 Distribution spatiale des effets visqueux

La figure 3.5 montre deux champs du taux de dissipation dans les canaux horizontaux avec et sans parois latérales à un instant $T = t(Atg/H)^{1/2} = 3.7$ en phase de subsidence. Nous pouvons remarquer que, bien que ces champs soient légèrement différents, les intensités du taux de dissipation sont comparables dans les deux géométries. La répartition des zones de forte dissipation est relativement équitable entre les centres des canaux et leurs parois. La dissipation intégrée sur tout le canal périodique vaut 73% de celle trouvée dans le canal avec parois latérales. Ceci n'est pas surprenant puisque cette dernière configuration fait intervenir quatre couches limites au lieu de deux pour le canal périodique. Une intégration du taux de dissipation local sur les zones de proche paroi d'une part, et sur l'intérieur du tube d'autre part donne la répartition de la dissipation dans chaque cas. Cette répartition est tracée sur la figure 3.6 en fonction du temps. Cette figure montre que la contribution des couches limites supérieure et inférieure (courbes (2)) à la dissipation totale reste identique pour le canal périodique et le canal avec parois latérales. Elle montre encore que la dissipation associée aux parois latérales (courbe (3)) est du même ordre de grandeur que celle associée aux parois supérieure et inférieure. Ceci n'est

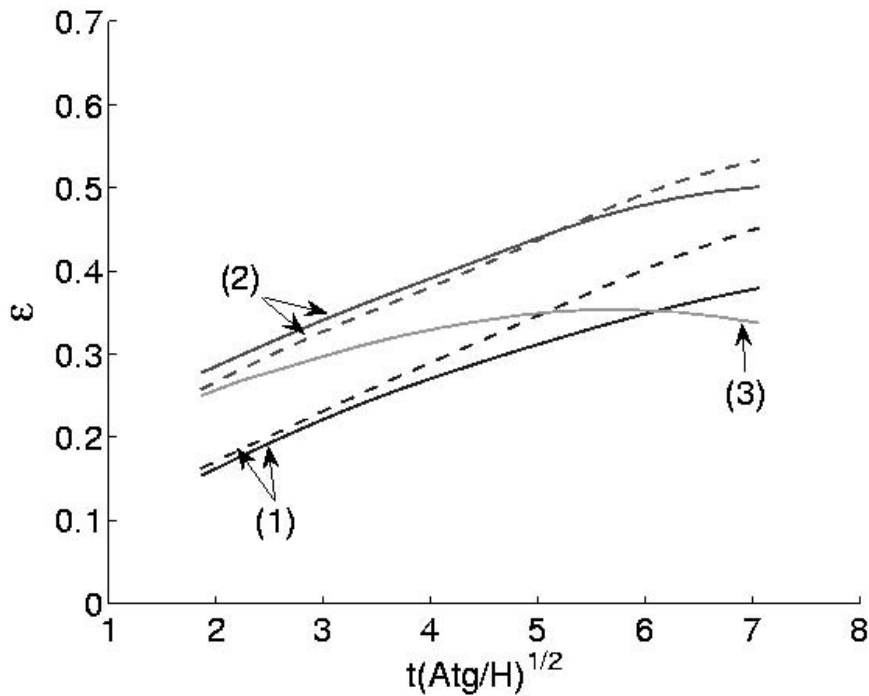


FIG. 3.6 – Evolution de la répartition de la dissipation dans les canaux avec (traits pleins) et sans (tirets) parois dans la direction transverse durant la phase de subsidence. (1) : dissipation intégrée au sein des courants; (2) : dissipation intégrée à proximité des parois supérieure et inférieure; (3) : dissipation intégrée à proximité des parois latérales.

pas surprenant puisqu'en phase de subsidence les courants occupent à peu près la moitié de la hauteur du canal de section carrée, ce qui conduit à une surface d'intégration pour les couches limites sur les parois transverses du même ordre de grandeur que les surfaces supérieure et inférieure en contact avec les courants. Les gradients de vitesses sont par ailleurs aussi du même ordre de grandeur près des deux types de parois. En revanche, le long de l'interface entre les courants, la vitesse du fluide est proche 0, ce qui annule tout gradient de vitesse le long des parois transverses au voisinage de l'interface. Ainsi, il est cohérent de trouver une contribution des parois transverses à la dissipation comparable à celle des parois supérieure et inférieure mais légèrement plus faible. Enfin, on peut noter que la dissipation associée aux mouvements de fluide internes aux courants (courbes (1)) reste à peu près identique dans les deux configurations.

En résumé, ceci montre qu'aux nombres de Reynolds que nous considérons, la dissipation n'a pas lieu préférentiellement au niveau des parois ou au sein de l'écoulement, mais que les deux phénomènes existent de manière relativement bien équilibrée. Des conclusions similaires ont été obtenues par [Bonometti *et al.* \(2007\)](#) dans le cadre de courants de gravité bidimensionnels générés par un faible écart de densités (dans l'approximation de Boussineq). Il est remarquable de constater que les valeurs du nombre de Froude trouvées pour les deux types de canaux sont

quasiment identiques, bien que l'un des cas présente une dissipation globale de près de 50% plus importante que l'autre avec quatre couches limites au lieu de deux. Nous avons par ailleurs montré ci-dessus que ces quatre couches limites présentent des dissipations du même ordre de grandeur. Ceci semble indiquer que la vitesse de propagation des courants est peu sensible à la dissipation due aux parois latérales. Nous savons cependant qu'elle varie avec le nombre de Reynolds (lorsqu'il n'est pas trop grand) et est donc influencée par des effets visqueux. La vitesse des fronts pourrait alors ne dépendre "que" de la dissipation dans les couches limites supérieure et inférieure, et/ou "que" de la dissipation interne aux courants. L'analogie est tentante avec le cas des bulles de Taylor se propageant dans un tube rempli de liquide. En effet, la vitesse de ces bulles est uniquement déterminée par l'écoulement au voisinage du nez, indépendamment des processus dissipatifs dans le sillage. Il serait possible qu'un comportement similaire existe pour le nez des courants de gravité confinés. En effet, le nez du courant confiné latéralement se situe environ au centre du canal dans la direction transverse, et à une hauteur d'environ $H/4$ ou $H/5$. Ainsi, il est relativement proche de la couche limite entre le courant et la paroi, tout comme il est éventuellement proche des structures dissipatives entre les deux courants. Il est cependant le plus éloigné possible des deux couches limites latérales. Ceci pourrait expliquer le comportement de la vitesse des courants vis-à-vis de la répartition de la dissipation.

3.3.4 Conclusion

Nous avons observé que pour les tubes cylindriques, la vitesse du front pendant la phase de subsidence est bien inférieure à la valeur théorique de Benjamin, la différence étant du même ordre de grandeur que celle déjà observée par différents auteurs pour les courants en canaux 3D ou 2D. La comparaison des canaux 3D et 2D montre par ailleurs l'absence d'effets tridimensionnels durant la phase de subsidence, comme cela a déjà été noté par [Cantero *et al.* \(2007\)](#). Nos simulations bidimensionnelles semblent bien rendre compte de l'influence du nombre de Reynolds sur la vitesse de propagation des courants. Enfin, l'étude de la distribution spatiale du taux de dissipation montre que des effets visqueux existent aussi bien dans les couches limites qu'au sein des courants. Cependant la vitesse de propagation de ces derniers ne semble pas dépendre de l'existence de contraintes visqueuses sur d'éventuelles parois dans la direction transverse de l'écoulement.

3.4 Simulations numériques de la transition vers le régime visqueux des courants de gravité horizontaux

Nous avons vu dans la partie précédente que la théorie bidimensionnelle de [Huppert \(1982\)](#) en régime visqueux est validée par les expériences en géométrie rectangulaire de [Rottman & Simpson \(1983\)](#). De la même manière, la théorie de Hinch ([Séon *et al.* \(2007\)](#)) en géométrie cylindrique est validée par les travaux expérimentaux correspondants. De plus, cette théorie

existe aussi pour un écoulement bidimensionnel. Il y a donc potentiellement conflit entre ces deux théories. Dans cette partie nous allons essayer de comprendre dans quelle mesure elles sont conciliables en réalisant des simulations dans différentes géométries et en tentant de reproduire les configurations expérimentales.

3.4.1 Simulations bidimensionnelles

Les deux lois de puissance peuvent être théoriquement obtenues en deux dimensions, c'est pourquoi nous allons tenter ici de les retrouver grâce à des simulations bidimensionnelles. Puisqu'il s'agit d'un régime visqueux, nous avons pris le parti de tenter tout d'abord des simulations à nombre de Reynolds faible à modéré.

Afin de tenter de retrouver la loi proposée par [Séon et al. \(2007\)](#), nous avons réalisé plusieurs simulations avec différents nombres de Reynolds modérés ($Re = 200, 400, 600$ et 790) en plaçant l'interface initiale séparant les fluides au milieu du tube. Le maillage utilisé est bidimensionnel, avec 80 mailles suivant la verticale. La longueur du domaine peut être $34H$, $68H$ ou $102H$ pour atteindre le régime désiré avec respectivement 1054, 2110, ou 3166 mailles. Le nombre d'Atwood utilisé dans ces simulations est toujours $At = 0.004$. La position du front lourd au cours du temps est tracée sur la figure 3.7. Tout d'abord, nous voyons sur cette figure que la phase de subsidence est très bien marquée avec une position de front en $x_f \sim t^1$. Nous pouvons aussi remarquer le décalage vers le haut des courbes à mesure que le nombre de Reynolds augmente. Ce décalage traduit l'augmentation du nombre de Froude qui se rapproche de $1/2$ lorsque $Re \rightarrow \infty$ comme nous l'avons évoqué plus haut. Concernant la phase visqueuse qui suit, il est clair d'après la figure 3.7 que la position du front évolue en $x \sim t^{1/2}$ pour tous les nombres de Reynolds testés. Ceci confirme bien les résultats de [Séon et al. \(2007\)](#) pour la géométrie bidimensionnelle. Ces auteurs ont par ailleurs montré que pour la géométrie cylindrique la hauteur h du courant dans ce régime visqueux suivait la relation

$$\frac{\partial h}{\partial t} = F(0)V_\nu \frac{\pi d}{8} \frac{1}{(1 - 4h^2/D^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 - 4h^2/D^2)^{7/2} \frac{\partial h}{\partial x} \right] \quad (3.44)$$

Il est aussi possible d'obtenir d'une manière similaire la relation suivante en géométrie plane :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\Delta\rho gh^3(H - h)^3}{3\mu H^3} \frac{\partial h}{\partial x} \right] \quad (3.45)$$

Ils l'ont intégrée numériquement pour obtenir un profil théorique du courant qui est en très bon accord avec les profils expérimentaux (voir [Séon et al. \(2007\)](#) pour la comparaison en géométrie cylindrique). Nous avons aussi comparé ce profil avec les résultats des simulations numériques 2D à $Re = 200$. Le résultat est tracé sur la figure 3.8. Il faut savoir qu'un décalage en temps (dépendant du nombre de Reynolds) est introduit pour obtenir la superposition des profils, tout comme dans les expériences. Ceci est dû au temps fini auquel le courant passe en phase visqueuse. Moyennant cet ajustement, la silhouette du courant numérique à $Re = 200$ est très bien décrite par l'équation 3.45. Des résultats similaires ont été obtenus pour les autres

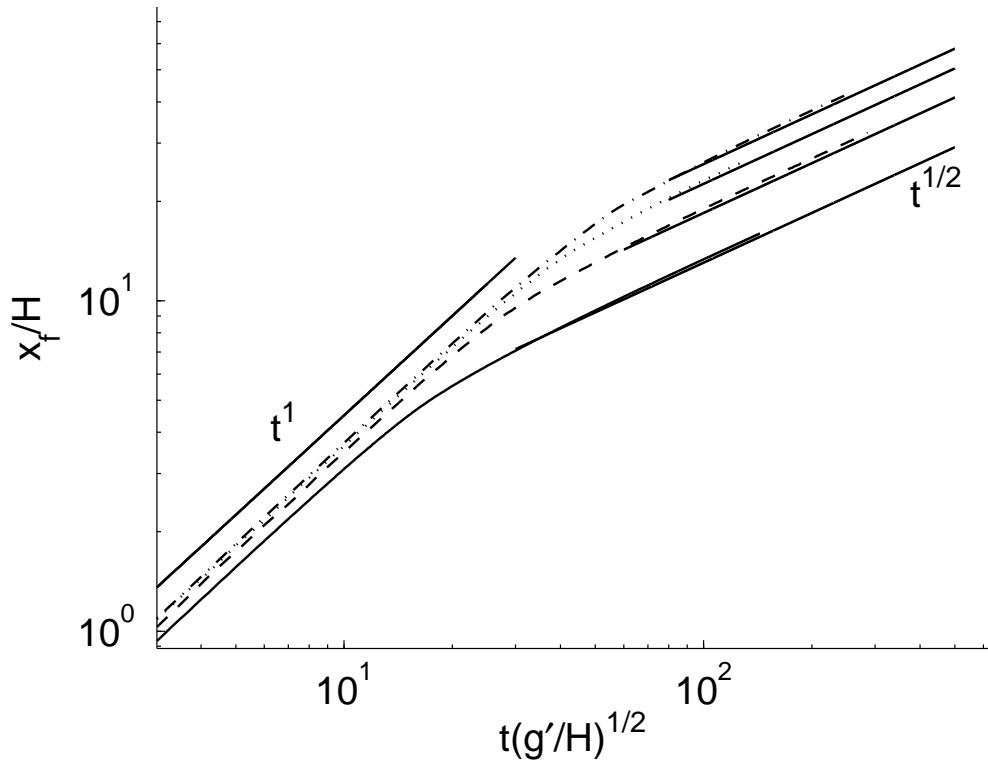


FIG. 3.7 – Evolution de la position du front dense dans les simulations bidimensionnelles à $Re = 200$ —; $Re = 400$ - - -; $Re = 600$. . .; $Re = 790$ - · -. Le nombre d'Atwood est $At = 0.004$. Les droites sont issues de la solution analytique.

nombres de Reynolds. La position du front obtenue numériquement, exprimée en variable réduite $x_f/\sqrt{V_\nu Dt}$, est 0.1301, 0.133, 0.124 et 0.133 pour $Re = 200, 400, 600$ et 790 (la simulation à $Re = 600$ n'est pas encore arrivée complètement en régime visqueux, ce qui implique que le rapport 0.124 qui lui est associé n'est pas très fiable). Ceci est à comparer non pas à la valeur 0.105 de [Séon et al. \(2007\)](#) puisque celle-ci est obtenue en tube cylindrique mais à celle obtenue analytiquement par Hinch pour un courant bidimensionnel (communication privée) qui est de 0.1304. Nous constatons donc que nos simulations s'approchent de ce résultat à moins de 0.2% pour $Re = 200$ et à 2% pour les autres simulations en régime visqueux bien établi. Les droites de pente 1/2 de la figure 3.7 sont en fait données par le résultat analytique de Hinch en géométrie bidimensionnelle : $x_f/H = 0.0922\sqrt{Re}\sqrt{t(g'/H)^{1/2}}$.

Les lois de puissance données par [Huppert \(1982\)](#) sont confirmées par [Rottman & Simpson \(1983\)](#) en géométrie cartésienne. Ces derniers montrent notamment que le démarrage de la phase de subsidence pour un petit lâcher de fluide dense a lieu au moment où le ressaut créé par l'arrivée d'un front léger à la paroi rejoint le front dense (voir figure 3.9). C'est pourquoi nous avons tenté de retrouver ces lois en réalisant une simulation identique à la simulation bidimensionnelle à

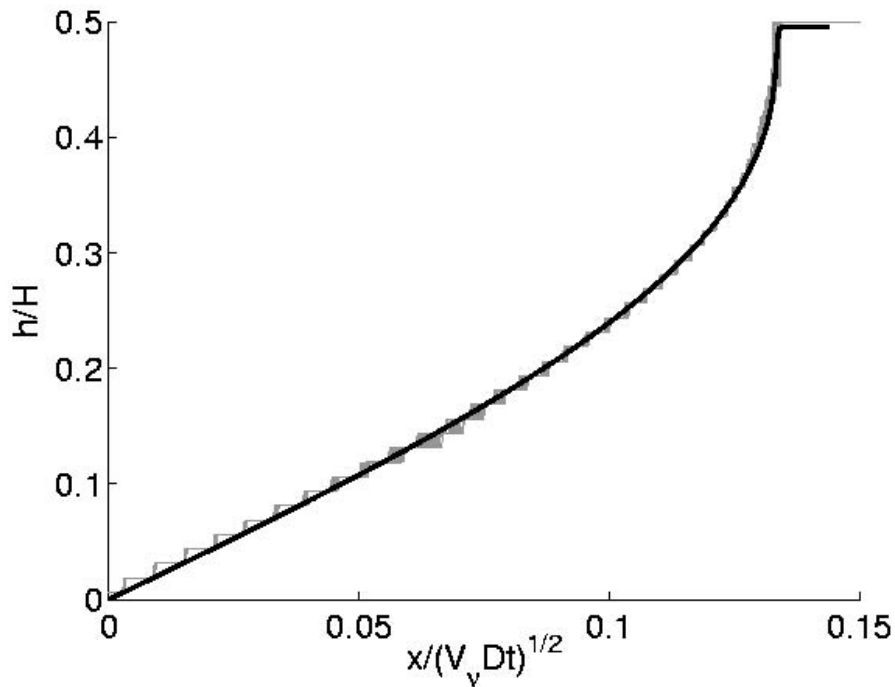


FIG. 3.8 – Comparaison de 45 profils d'un courant de gravité numérique horizontal à $Re = 200$ en phase visqueuse (en clair) avec le profil théorique issu de l'intégration de l'équation 3.45 (courbe noire). La distance à l'interface initiale est normée par $\sqrt{V_v Dt}$.

$Re = 790$ utilisée ci-dessus, mais en plaçant l'interface initiale de façon dissymétrique, soit à une distance $x_0/H = 9.675$ de l'extrémité du tube de longueur $L/H = 68$. L'évolution de la position du front issue de cette simulation est marquée par des étoiles sur la figure 3.10. Nous avons aussi reporté sur cette figure la position du front obtenue dans la simulation bidimensionnelle à $Re = 790$ avec une interface initiale centrée (symboles +). Enfin, les autres symboles sont issus des résultats expérimentaux présentés sur la figure 12 de [Rottman & Simpson \(1983\)](#) (reproduite sur notre figure 3.3). Nous avons adimensionné les variables à la manière de ces auteurs pour pouvoir comparer nos résultats : la position du front est normée par la longueur du volume de fluide dense lâché (sa hauteur est par ailleurs H) et l'échelle de temps utilisée est $\sqrt{g'H}/x_0$. Sur la figure originale, le but était de comparer les résultats expérimentaux à la théorie de [Huppert \(1982\)](#) qui prédit dans ce cas $x_f \sim t^{1/5}$. Nous avons cependant réalisé une mesure objective de la pente des courbes expérimentales marquées \circ et Δ qui conduit plutôt à une loi de puissance du type $x_f \sim t^{0.25}$. Nos résultats numériques pour le petit lâcher exhibent aussi nettement une évolution de la position du front en $x_f \sim t^{0.25}$. C'est pourquoi les droites tracées sur la figure 3.10 ont une pente 1/4. Cette figure permet donc de conclure qu'il est aussi possible de trouver en régime visqueux des courants dont le front évolue en $t^{0.25}$ et non $t^{0.5}$. Le facteur déterminant semble être la position de l'interface initiale séparant les fluides.

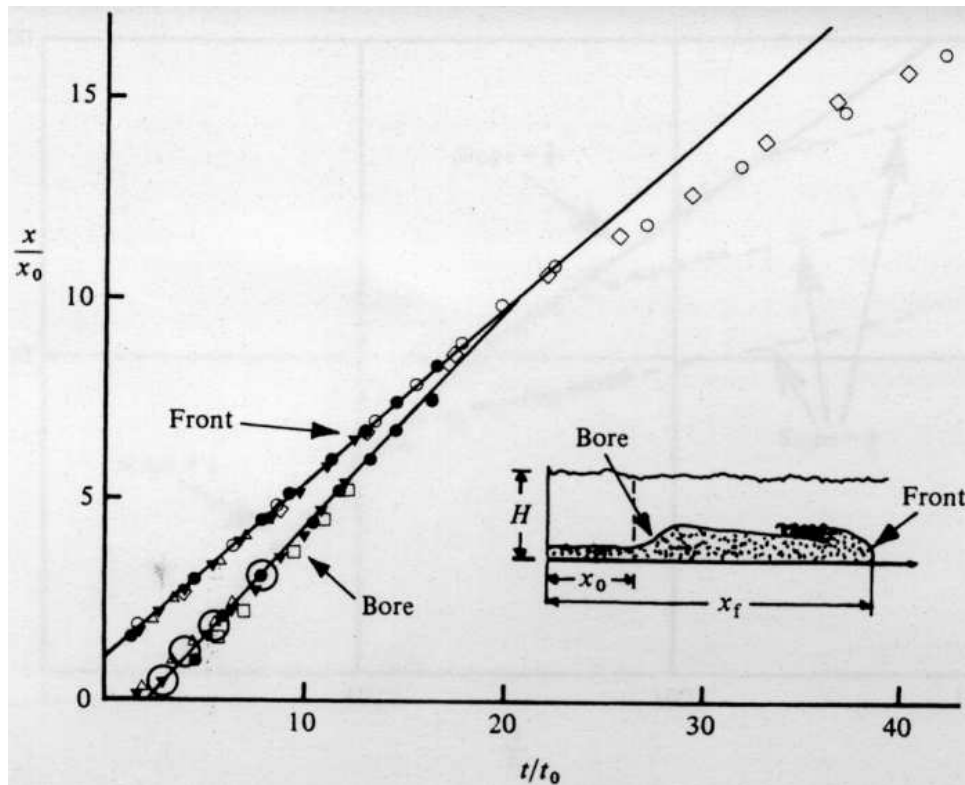


FIG. 3.9 – Figure issue de [Rottman & Simpson \(1983\)](#). Les symboles sont des mesures des positions du front et du ressaut faites par divers auteurs, voir cette référence pour de plus amples détails.

Nous pouvons aussi vérifier sur cette figure que la position de la transition entre régime inertiel et régime visqueux $x_{f,IV}/x_0$ donnée par [3.22](#) est relativement bien confirmée à la fois par les expériences et par la simulation du petit lâcher. En ce qui concerne le lâcher symétrique, la position de transition prédite par [3.22](#) est bien au delà de la fin de la simulation. Ainsi la simulation avec interface initiale centrée n'a pas encore atteint le régime visqueux au sens de [Huppert \(1982\)](#). Nous avons vu par ailleurs qu'elle était en parfaite adéquation avec le régime visqueux décrit par [Séon et al. \(2007\)](#). En outre, cette simulation est d'un point de vue physique rigoureusement identique à une simulation de "petit" lâcher. En effet, si nous déplaçons l'une des frontières en gardant l'autre à la même position, nous retrouverions la configuration de "petit" lâcher. C'est pourquoi selon toute logique la transition vers un régime en $x_f \sim t^{0.25}$ devrait aussi avoir lieu dans cette simulation si nous prolongions le domaine au niveau de l'une des deux extrémités. Ainsi, le régime visqueux atteint dans cette simulation doit être "le premier régime visqueux" (en $x_f \sim t^{1/2}$) qu'il est possible d'atteindre, et qui devrait être suivi du "second régime visqueux" (en $x_f \sim t^{0.25}$). On peut alors se demander pourquoi [Rottman & Simpson \(1983\)](#) n'ont pas rencontré ce régime. Nous tenterons un peu plus loin de donner une explication à ce point.

L'adimensionnalisation des deux courbes numériques de la figure [3.10](#) ne permet pas de les

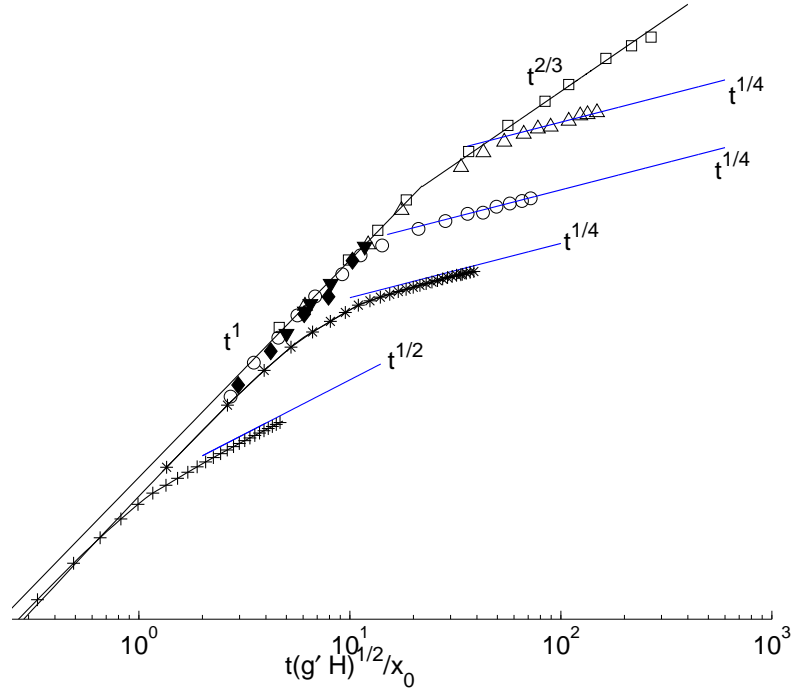


FIG. 3.10 – Position du front du courant dense au cours du temps pour différents volumes lâchés. Les courbes issues des expériences de [Rottman & Simpson \(1983\)](#) sont : \circ , $x_{f,IV}/x_0 = 6$; \blacklozenge , $x_{f,IV}/x_0 = 10$; \triangle , $x_{f,IV}/x_0 = 12$; \blacktriangledown , $x_{f,IV}/x_0 = 18$; \square , $x_{f,IV}/x_0 = 25$. Les résultats numériques sont marqués par : + lâcher symétrique ($x_{f,IV}/x_0 \simeq 2.2$) et * : "petit" lâcher ($x_0/H = 9.675$, $x_{f,IV}/x_0 \simeq 3.5$).

comparer de manière réaliste. C'est pourquoi la figure 3.11 les reprend en utilisant les normalisations classiques des longueurs par H et du temps par $\sqrt{H/g'}$. La valeur tracée est la position du front *mesurée à partir de l'interface initiale* dans nos deux simulations. Nous pouvons constater sur cette figure que les deux courants avancent rigoureusement à la même vitesse jusqu'à l'entrée dans la phase visqueuse. Le tracé des champs de concentration de la figure 3.12 révèle même que c'est l'ensemble de l'écoulement autour de la tête du courant qui reste identique. Il est aussi possible de distinguer entre la phase de subsidence (pente 1) et la phase visqueuse (pente 1/2 ou 0.25 suivant la simulation) une phase intermédiaire durant laquelle la position du front évolue approximativement en $x_f \sim t^{0.58}$. Cette phase intermédiaire existe pour les deux types de lâcher. La figure 3.13 présente une image prise durant chacune de ces trois phases. Pendant la phase de subsidence, le courant (ou du moins sa tête) occupe environ la moitié de la hauteur du canal. Puis, durant la phase intermédiaire il existe une structure tourbillonnaire d'origine inertielle au dessus de la tête alors que le reste du courant présente déjà un profil s'approchant du profil visqueux. Si la figure 3.12(b) permet de voir que les têtes des courants en régime intermédiaire

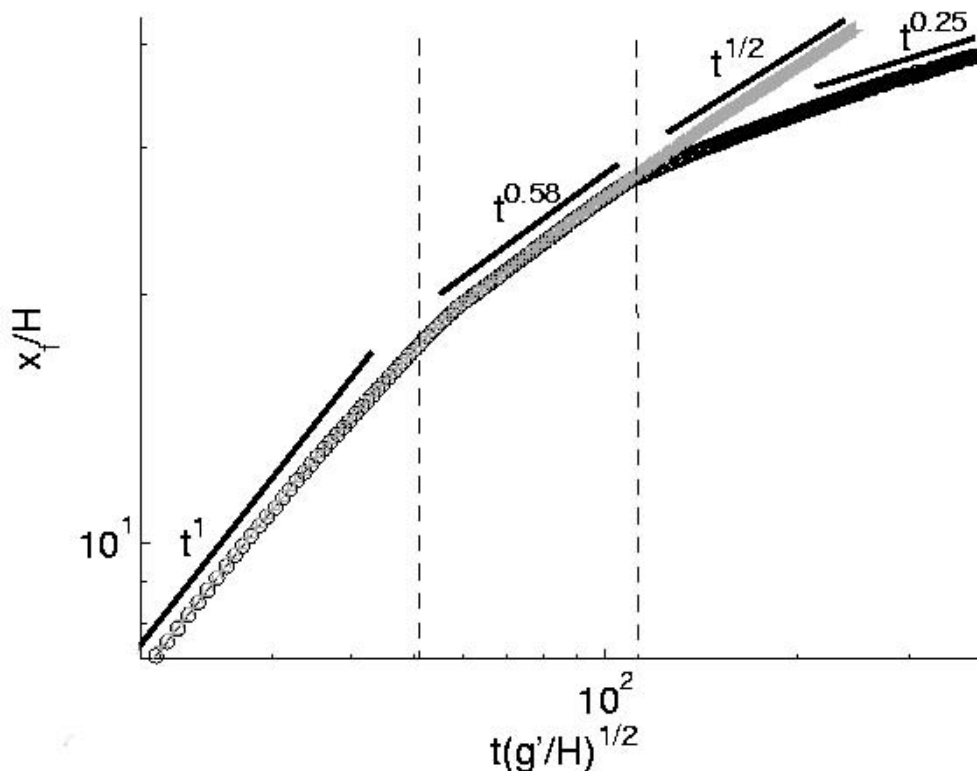


FIG. 3.11 – Evolution de la position du front des courants dans les simulations numériques bidimensionnelles à $Re = 790$ en coordonnées logarithmiques. Lâcher centré : cercles gris ; petit lâcher : cercles noirs.

sont bien identiques, la figure 3.13(b) permet quant à elle de voir que le profil général du courant est légèrement différent. En effet, le courant issu du petit lâcher est plus plat et l'interface présente une très légère oscillation. Enfin, en phase visqueuse, la structure au niveau de la tête a disparu et nous avons vu que dans le cas du lâcher symétrique la silhouette du courant était exactement celle prédite par [Séon et al. \(2007\)](#). Il est par ailleurs possible de discerner que la hauteur du courant issu du petit lâcher en phase visqueuse est plus faible que celle du courant issu du lâcher symétrique.

[Rottman & Simpson \(1983\)](#) ont montré que pour de petits lâchers le démarrage de la phase de subsidence se fait suite à l'arrivée au front de l'onde réfléchie issue du "rebond" du courant léger. Nous avons voulu vérifier ce point. La figure 3.14 reprend la position du front du courant lourd au cours du temps, avec en plus la position de l'onde réfléchie lorsqu'elle est détectable sans ambiguïté. Il est clair d'après cette figure que l'onde réfléchie avance à une vitesse constante plus importante que celle du front lourd. Elle va alors inévitablement le rattraper. Cependant, son amortissement à mesure qu'elle se rapproche du front ne permet pas de détecter sa position de manière claire après $t(g'/H)^{1/2} = 77$. Nous avons donc prolongé la position du ressaut par

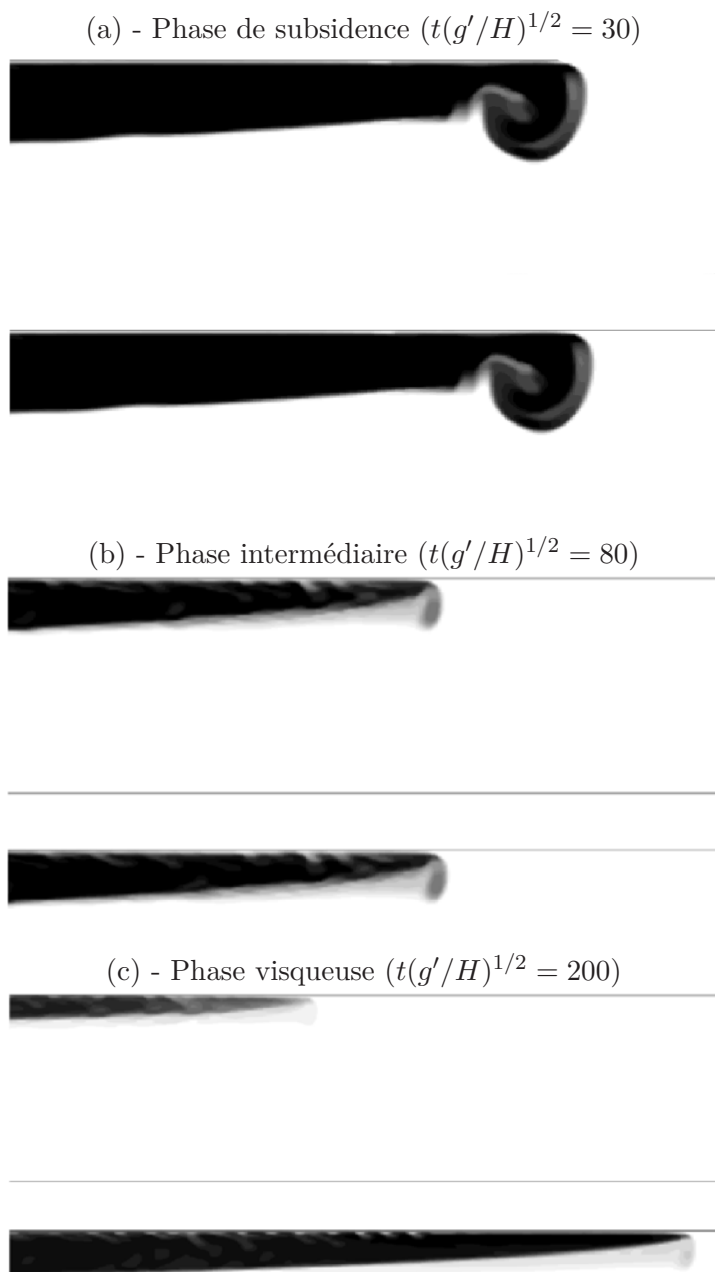


FIG. 3.12 – Champ de densité au niveau de la tête des courants bidimensionnels à $Re = 790$.
En haut : petit lâcher ; en bas : lâcher symétrique.

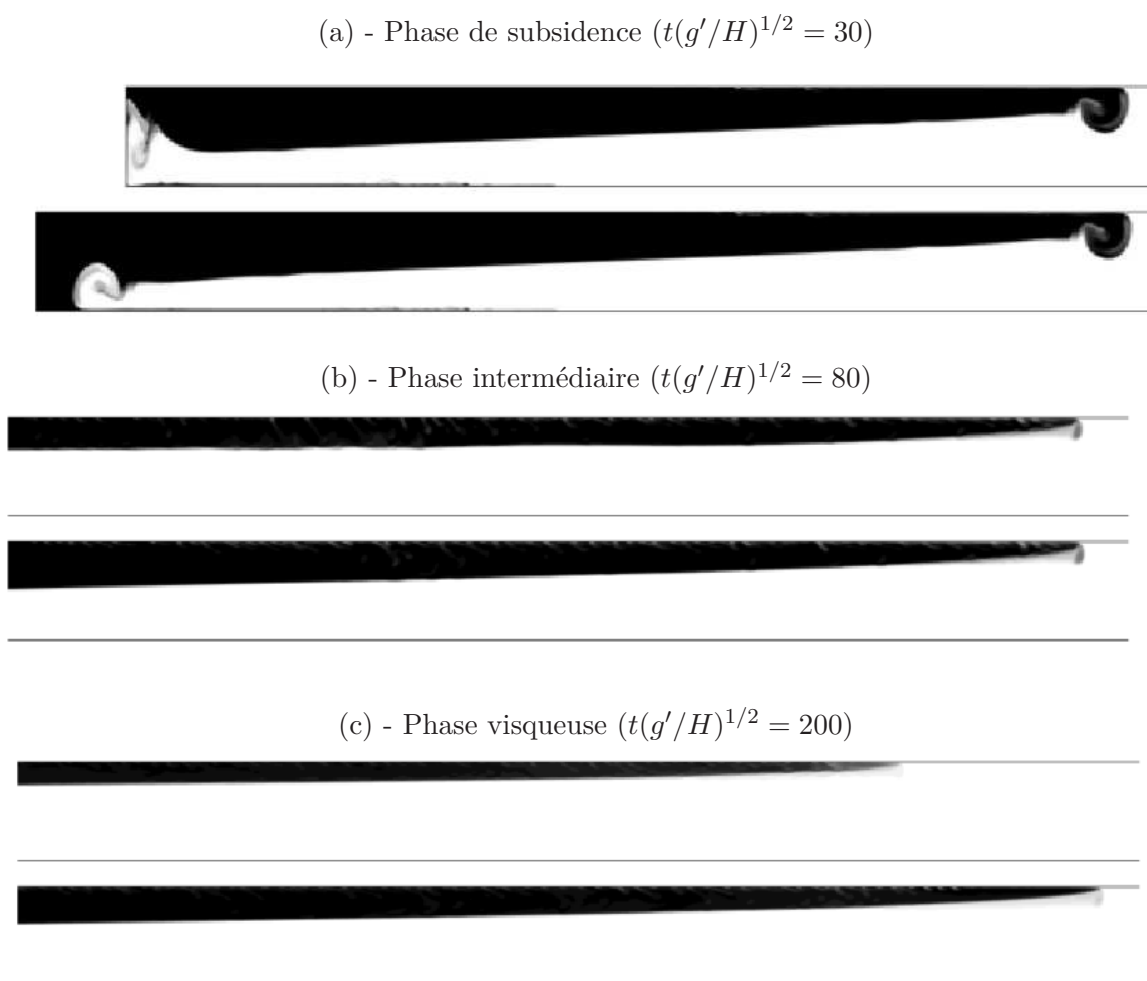


FIG. 3.13 – Champ de densité des courants bidimensionnels à $Re = 790$. En haut : petit lâcher ; en bas : lâcher symétrique.

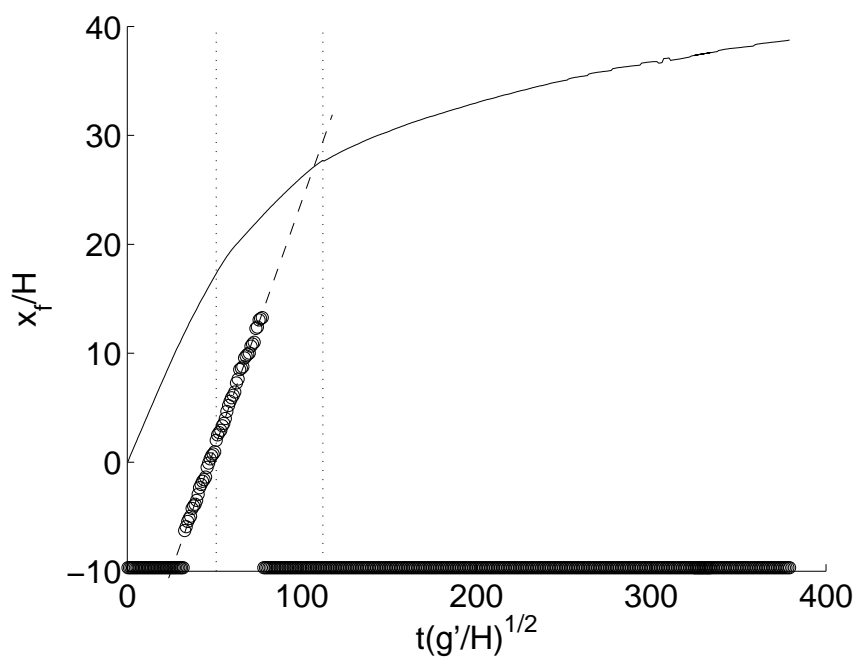


FIG. 3.14 – Evolution de la position du front du courant bidimensionnel numérique issu du petit lâcher (trait plein), avec la position de l'onde réfléchie lorsque celle-ci peut être détectée sans ambiguïté (en cercles).

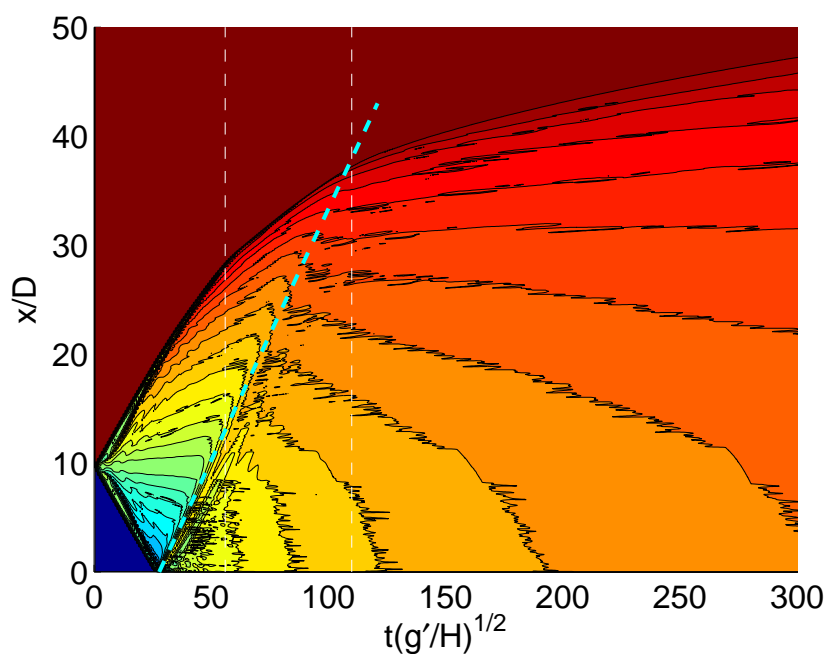


FIG. 3.15 – Diagramme spatio-temporel de la simulation 2D d'un lâcher dissymétrique. Il est possible d'observer le rebond du courant dans la moitié gauche du tube et l'onde réfléchie qui en résulte. La trajectoire du premier pic de cette onde est marquée par la droite en tirets.

une droite. Il est clair que celle-ci intersecte la courbe de la position du front au moment où le courant passe dans la phase visqueuse caractérisée par $x_f \sim t^{0.25}$. Le diagramme spatio-temporel de la figure 3.15 permet aussi de voir le rebond du courant dans la moitié gauche du tube, suivi de l'onde réfléchie aisément observable sans aucun post-traitement. Rottman & Simpson (1983) ont montré expérimentalement que leurs courants quittaient la phase de subsidence au moment où le ressaut atteignait le front, mais ils n'ont pas relevé de phase intermédiaire caractérisée par $x_f \sim t^{0.58}$. Dans nos simulations, la phase intermédiaire est clairement située avant l'arrivée de l'onde au front. Dans les deux types de lâchers, le début de la phase visqueuse est marqué par la disparition de la petite structure inertielle présente au niveau du front. Dans le cas du petit lâcher, cette structure est "gommée" par le passage de l'onde réfléchie, tandis que dans le lâcher symétrique elle disparaît "naturellement" à mesure qu'elle rétrécit. Dans les expériences rapportées par Rottman & Simpson (1983), il semblerait que le ressaut réfléchi arrive toujours au front lorsque le courant est en phase de subsidence ou inertielle. Ce dernier n'a donc jamais l'occasion de passer en phase visqueuse de manière "naturelle", sans influence du ressaut. Il est possible que ceci soit dû aux nombres de Reynolds très différents utilisés dans les expériences et dans nos simulations. En effet, nous avons vu que la position de la transition au régime visqueux en $x_f \sim t^{0.25}$ est relativement bien prédite par $x_{f,IV} = (g'V_0^5/\nu^2)^{1/7}$, ce qui peut se récrire sous forme adimensionnelle $x_{f,IV}/H = Re^{2/7}\widetilde{V}_0^{5/7}$. Cette relation mesure donc en quelque sorte la position du front au moment où le ressaut réfléchi le rejoint (on comprend donc mieux l'influence de V_0 au travers de cette relation). Si la position de la transition au régime visqueux "naturel" peut s'écrire sous une forme faisant intervenir le nombre de Reynolds avec un exposant différent, il devient possible de définir, pour un volume donné, un nombre de Reynolds critique en dessous duquel le régime visqueux de Séon *et al.* (2007) est rencontré en premier, puis suivi du régime visqueux de Huppert (1982). En d'autres termes, le courant lourd passerait en régime visqueux naturellement avant que le front léger ait rejoint l'extrémité du tube et que l'onde réfléchie soit revenue : c'est le scénario de la simulation bidimensionnelle avec un lâcher centré. Pour des nombres de Reynolds plus importants que cette valeur critique, le courant léger atteint l'extrémité du canal et l'onde réfléchie rejoint le front lourd alors que celui-ci est toujours en phase de subsidence ou en phase inertielle : c'est le scénario des expériences de Rottman & Simpson (1983).

En conclusion, il semblerait que les courants de gravité issus d'un "lock-exchange" puissent passer par quatre phases : la phase de subsidence, la phase inertielle (optionnelle, selon Re et V_0), la phase visqueuse en $x_f \sim t^{1/2}$ (optionnelle, selon Re et V_0) et la phase visqueuse provoquée par l'onde réfléchie en $x_f \sim t^{0.25}$. A ces quatre phases peut encore succéder une phase capillaire si les fluides ne sont pas parfaitement miscibles (voir Hault (1972)). Nous n'avons cependant pas la confirmation qu'une phase visqueuse en $x_f \sim t^{0.25}$ puisse succéder à une phase visqueuse en $x_f \sim t^{1/2}$. En effet, il faudrait pour ceci qu'une onde réfléchie puisse parcourir toute la longueur du courant sans être trop amortie par les effets visqueux déjà dominants.

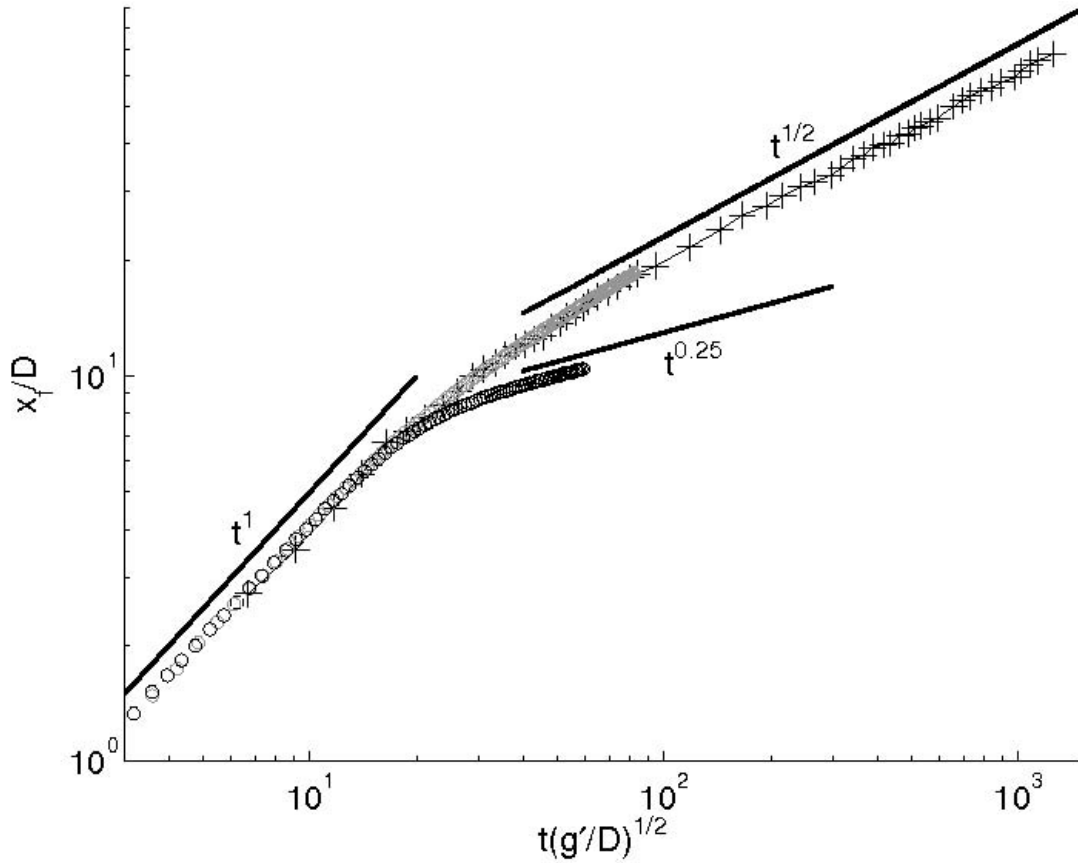


FIG. 3.16 – Evolution de la position du front des courants dans les simulations numériques tridimensionnelles à $Re = 790$. Lâcher centré (simulations) : cercles gris ; Lâcher centré (expérience de [Séon *et al.* \(2007\)](#)) : + ; petit lâcher : cercles noirs.

Dans cette partie, nous avons comparé des résultats analytiques obtenus pour des écoulements bidimensionnels, des expériences en canaux de section rectangulaire (qui peuvent être assimilés à des écoulements 2D) et des simulations numériques en deux dimensions. Un très bon accord a été trouvé entre les résultats issus des simulations numériques et les autres références. Nous allons maintenant vérifier si les simulations numériques tridimensionnelles en tube cylindrique sont à même de bien reproduire les résultats expérimentaux de [Séon *et al.* \(2007\)](#).

3.4.2 Simulations en tube cylindrique

La figure 3.16 montre l'évolution des positions des fronts des courants horizontaux en géométrie cylindrique issus d'une part d'un lâcher symétrique, et d'autre par d'un petit lâcher ($\tilde{V}_0 = 1$). Nous avons aussi reporté sur cette figure les résultats expérimentaux de [Séon *et al.* \(2007\)](#) dans la même configuration. Cette figure montre un excellent accord entre la simulation d'un lâcher symétrique (cercles gris) et les expériences de [Séon *et al.* \(2007\)](#) (croix) dans une configuration strictement identique. Nous pouvons voir que la simulation n'a que tout juste atteint le régime

visqueux en $x_f \sim t^{1/2}$ alors qu'elle a déjà nécessité l'utilisation de 10700 heures CPU. Nous avons donc choisi d'arrêter là cette simulation, qui cependant permet de confirmer pleinement les résultats expérimentaux et analytiques de [Séon *et al.* \(2007\)](#). D'un autre côté, la figure 3.16 présente aussi les résultats d'une autre simulation en tube cylindrique qui diffère de la première uniquement par la position de l'interface initiale placée à un diamètre de l'extrémité gauche du tube. Nous assistons alors à une transition vers un autre régime visqueux durant lequel il apparaît encore une fois que la position du front suit la loi $x_f \sim t^{0.25}$. Il n'était pas du tout évident *a priori* que nous retrouvions le résultat de la géométrie bidimensionnelle. Notons que [Takagi & Huppert \(2007\)](#) ont prédit de manière analytique que la position du front d'un courant de gravité visqueux évoluant sur un support en forme d'arc de cercle très ouvert est de la forme $x_f \sim t^{1/4}$. Leur démonstration demande cependant que le rayon de courbure de la surface soit très grand devant la hauteur du courant, ce qui n'est pas vraiment le cas dans nos simulations.

3.4.3 Conclusion sur la transition au régime visqueux

Nous avons vu dans cette partie que les courants de gravité confinés, en géométrie horizontale, et issus d'un "lock-exchange", peuvent passer par deux régimes visqueux différents, que la géométrie soit plane ou cylindrique. Le choix du régime visqueux est vraisemblablement lié au nombre de Reynolds (ou d'Archimède) de l'écoulement et au volume de fluide dense lâché. Pour un volume donné, il semblerait qu'un faible nombre de Reynolds conduise à une transition douce vers un régime visqueux caractérisé par une évolution de la position du front en $x_f \sim t^{1/2}$. Ici transition "douce" signifie que le courant change de régime pour s'adapter en douceur aux nouvelles conditions hydrodynamiques dues à son étalement. Au contraire, un nombre de Reynolds élevé conduit à une phase de subsidence plus longue qui peut permettre à l'un des courants de parcourir la distance le séparant de l'extrémité du tube. Une onde réfléchie se crée alors à la surface de l'autre courant et rattrape le front avant que celui-ci ait pu transiter vers le régime visqueux. L'arrivée de l'onde réfléchie au front provoque le passage du courant dans une phase visqueuse caractérisée par une évolution de la position du front en $x_f \sim t^{0.25}$ dans nos simulations ainsi que dans les expériences de [Rottman & Simpson \(1983\)](#), et ceci indépendamment du type de géométrie. Le mécanisme physique liant l'interaction entre l'onde réfléchie et le passage du courant en régime visqueux n'est pas très clair. Il semblerait d'après les simulations que le passage de l'onde réfléchie à la surface du courant abaisse le niveau de celui-ci de manière plus rapide que ce qui se produirait par étalement progressif. Or l'étalement du volume de fluide initial permet au courant de se rapprocher des conditions des hypothèses de lubrification et donc de transition en régime visqueux. On comprendrait alors que cette onde provoque une transition de régime. Cependant, pourquoi le régime obtenu serait-il différent du régime visqueux sans onde réfléchie ? Il existe une différence fondamentale entre les deux régimes visqueux : le régime visqueux sans onde réfléchie fait intervenir un courant dont la hauteur passe progressivement de 0 au voisinage du front à $H/2$ au niveau de la position de l'interface initiale, alors que le

régime visqueux provoqué par une onde réfléchie est lié à un courant dont la hauteur reste faible devant la hauteur du canal (ou du tube) sur toute sa longueur. Cette dernière configuration est donc plus proche de celle des courants profondément immergés, alors que la première est plus proche de celle des courants de gravité dont la hauteur est comparable à la hauteur du fluide ambiant. La littérature existante actuellement montre toujours de fortes différences de comportement entre ces deux configurations.

3.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre des résultats de simulations numériques de courants de gravité confinés en géométrie horizontale. Ces résultats ont été confrontés à ceux issus des expériences de [Séon *et al.* \(2007\)](#) et l'étude analytique qui les accompagne, aux expériences de [Rottman & Simpson \(1983\)](#) ainsi qu'au résultats analytiques de [Huppert \(1982\)](#). Un bon accord a systématiquement été retrouvé entre les simulations et les autres résultats de la littérature. Nous espérons de plus avoir éclairé grâce à ce travail les points communs et les différences qui existaient entre les expériences et les résultats analytiques de ces différents auteurs et avoir fourni quelques pistes de compréhension des mécanismes physiques rencontrés au cours de la propagation de ces courants. Néanmoins l'objectif principal de ce travail est la simulation et l'analyse des courants en tubes inclinés qui fait l'objet des deux chapitres suivants.

Chapitre 4

Influence de la géométrie sur les courants de gravité inclinés

4.1 Présentation du problème

Nous considérons un écoulement en géométrie inclinée. Il peut s'agir d'un tube de section circulaire, d'un canal de section carrée ou d'un plan imposant un écoulement strictement bidimensionnel. L'angle d'inclinaison du tube est mesuré à partir de la verticale et nommé θ (voir FIG. 4.1).

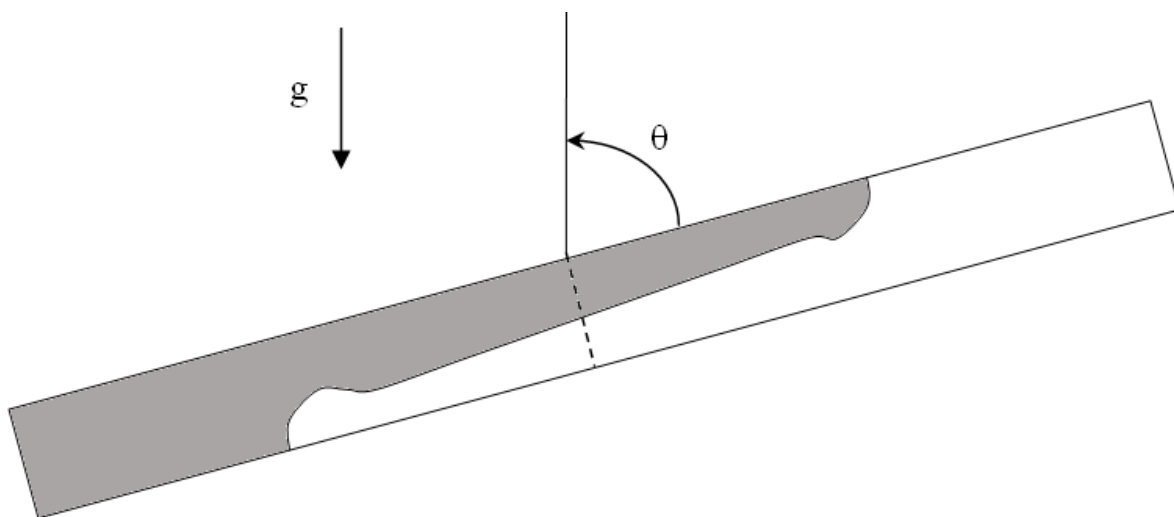


FIG. 4.1 – Schéma de l'écoulement en tube incliné

Dans un souci de concision, nous allons donner des noms raccourcis aux différentes configurations utilisées dans les simulations numériques. Les simulations de courants en tubes cylindriques 3D seront appelées 3D-AXI, les simulations en canaux 3D avec des parois solides sur toutes les faces seront les simulations 3D-SQR, les canaux 3D périodiques dans la direction transverse horizontale seront les 3D-SQRP. Enfin, les simulations bidimensionnelles seront simplement appelées

Géométrie	Longueur	Rayon/Hauteur	Périmètre/Profondeur	Nombre de mailles
3D-AXI	$32D$	$D/2$	πD	$512 \times 32 \times 64$
3D-AXI (rallongé)	$96D$	$D/2$	πD	$1534 \times 32 \times 64$
3D-SQR et 3D-SQRP	$32H$	H	H	$512 \times 46 \times 46$
2D	$64D$	D	0	$1024 \times 64 \times 1$

TAB. 4.1 – Taille et nombre de cellules des domaines de calcul

2D.

Nous avons simulé des courants de gravité dans des tubes inclinés pour les quatre géométries décrites ci-dessus. Les maillages utilisés sont représentés sur la figure 4.2. Les tailles des maillages pour chacune de ces géométries ainsi que leur nombre de cellules sont résumés dans le tableau 4.1

4.2 Validations vis à vis des résultats expérimentaux

4.2.1 Introduction

Nous avons dans un premier temps tenté de retrouver les résultats de [Séon *et al.* \(2006\)](#) décrits dans l'introduction sur les comportements aux temps longs des courants dans des tubes cylindriques inclinés. Les paramètres adimensionnels caractérisant ces tests sont un nombre d'Atwood $At = 0.004$ et un nombre d'Archimède de 560 (ce qui équivaut à un nombre de Reynolds $Re = 790$). Le nombre de Schmidt expérimental est de l'ordre de 10^3 tandis que nous le laissons théoriquement infini dans les simulations. Ceci équivaut à remplacer l'échelle de coupure physique due à la diffusivité moléculaire \mathcal{D} par une échelle de coupure artificielle de la maille de calcul (voir 2.2.4). Ainsi lorsque deux volumes de fluide pur 1 et 2 entrent dans une même cellule, ils sont immédiatement et définitivement mélangés. Des travaux récents de [Bonometti & Balachandar \(2007\)](#) montrent que le comportement des courants de gravité change avec le nombre de Schmidt pour le nombre de Reynolds que nous considérons. Les caractéristiques des courants changent cependant progressivement pour atteindre un état asymptotique pour des nombres de Schmidt de l'ordre de 10^2 . C'est pourquoi l'approximation de $Sc \rightarrow \infty$ doit donner de bons résultats vis-à-vis des expériences dans lesquelles $Sc = O(10^3)$.

4.2.2 Mise en garde

Les résultats de [Séon *et al.* \(2006\)](#) portent essentiellement sur les vitesses atteintes pour des temps très longs. En effet, ces auteurs ont montré que quel que soit l'angle d'inclinaison de leur tube cylindrique (à part les cas particuliers 0° et 90°), les courants s'y développant atteignent toujours une vitesse quasiment constante dans le temps. En réalité, cette vitesse peut varier légèrement autour de sa valeur moyenne en raison des fortes instationnarités qui viennent du corps du courant (voir par exemple FIG. 4.4). Cependant, les simulations numériques 3D

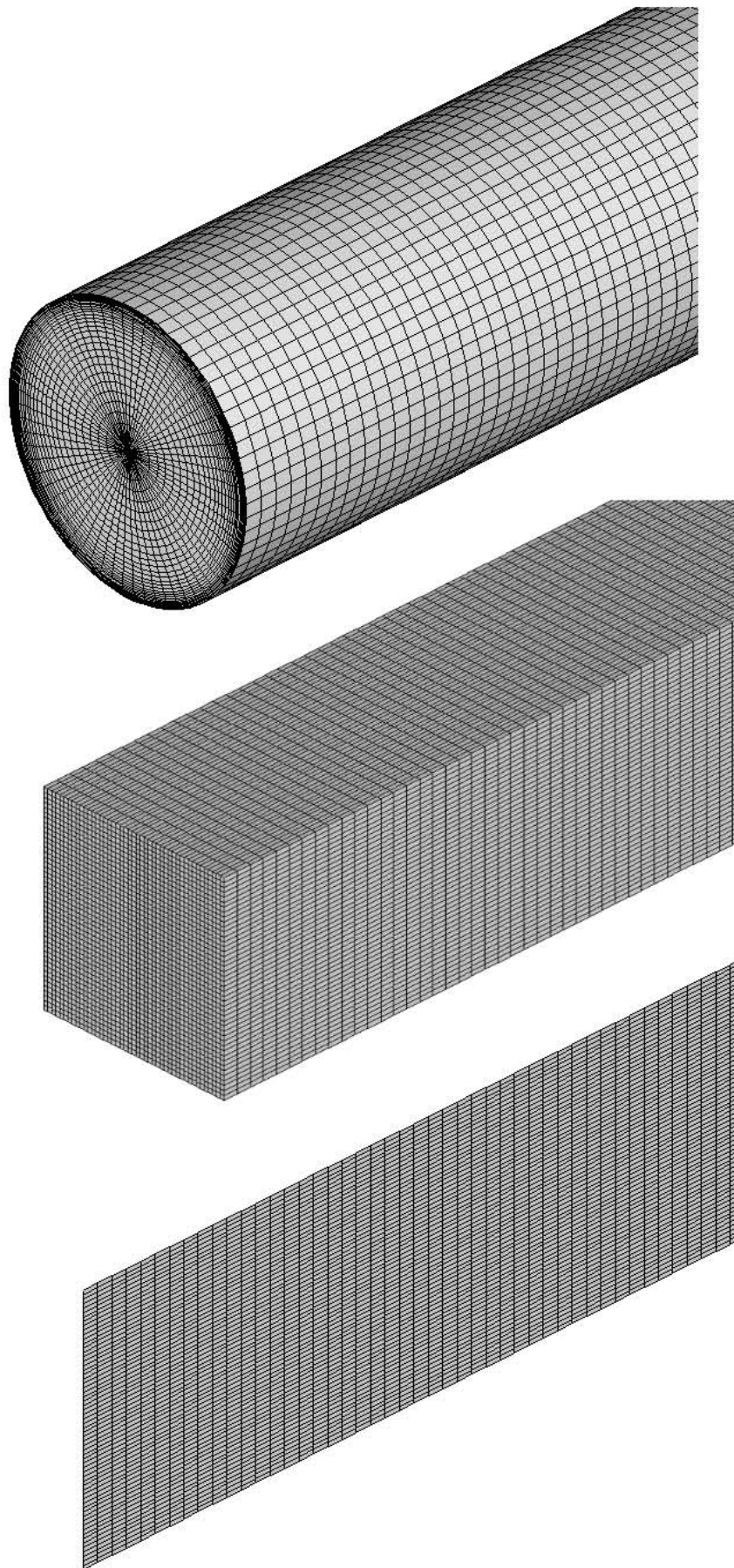


FIG. 4.2 – Les différents maillages utilisés

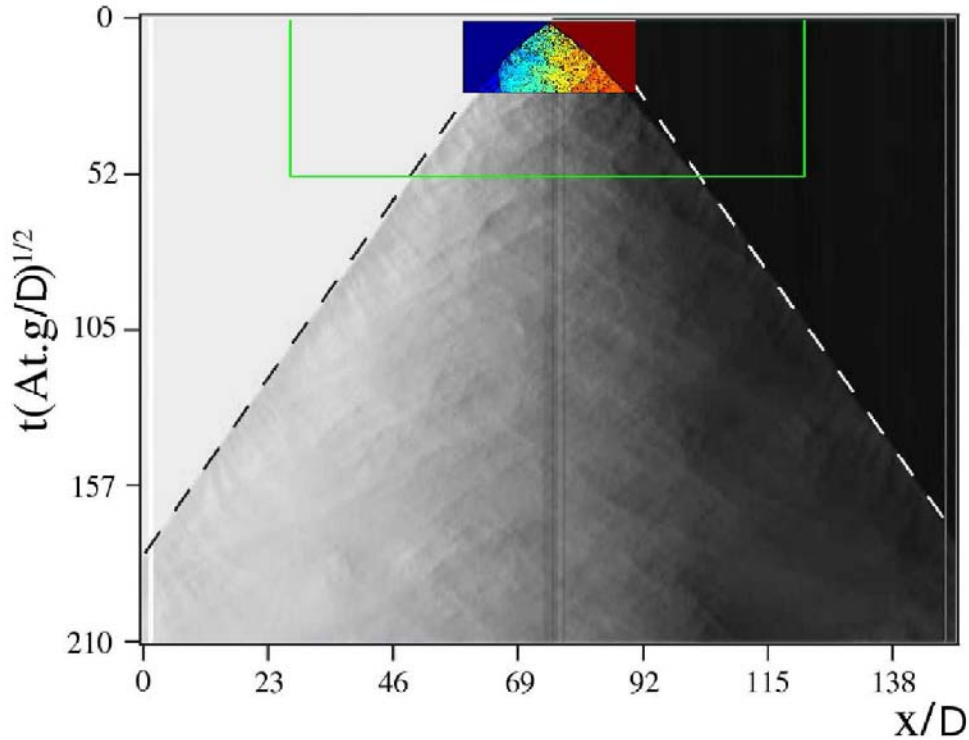


FIG. 4.3 – Diagrammes spatio-temporels de la position du front dans un tube cylindrique incliné à $\theta = 35^\circ$. En échelle de gris : résultats expérimentaux obtenus par Séon (2006). En couleur : diagramme issu d'une simulation. Le rectangle vert correspond à l'état atteint dans la simulation parallèle "rallongée".

ne sont pas capables d'atteindre complètement et en un temps raisonnable (compatible avec une étude paramétrique) le régime « pseudo-stationnaire » atteint dans les expériences avec un tube de longueur $200D$. La figure 4.3 illustre ceci grâce à un diagramme spatio-temporel issu du travail de Séon (2006) sur lequel est superposé en couleur (en pour $t(At.g/D)^{1/2} < 20$) un diagramme spatio-temporel issu d'une simulation avec un tube de longueur $32D$. En particulier, ces diagrammes montrent que les vitesses atteintes à la fin des simulations sont sensées être légèrement supérieures aux vitesses expérimentales puisque $\frac{dx}{dt}$ diminue légèrement dans le temps. Ceci est aussi très bien visible sur la figure 4.4 qui représente l'évolution temporelle de la vitesse de front normalisée $V_f/V_p = V_f/(0.7\sqrt{AtgD})$ et de la racine carrée du contraste relatif de densité au front $\sqrt{C_f}$. Sur cette figure, les points correspondant à des temps adimensionnels inférieurs à 20 sont ceux issus des simulations alors que les points pour des temps adimensionnels supérieurs à 30 sont issus des expériences de Séon *et al.* (2006). Sans permettre une comparaison directe, cette figure montre tout de même une très bonne cohérence entre les simulations et les expériences. Elle montre aussi que la longueur des tubes utilisée dans les simulations ($32D$ pour la simulation 3D) n'est absolument pas suffisante pour parvenir au régime terminal atteint dans les expériences. Par exemple, celui-ci se situe après $t(At.g/D)^{1/2} \approx 60$ pour le tube à 50° alors que les courants ont parcouru les $32D$ du tube à $t(At.g/D)^{1/2} \approx 20$. Concrètement, la simulation qui a permis

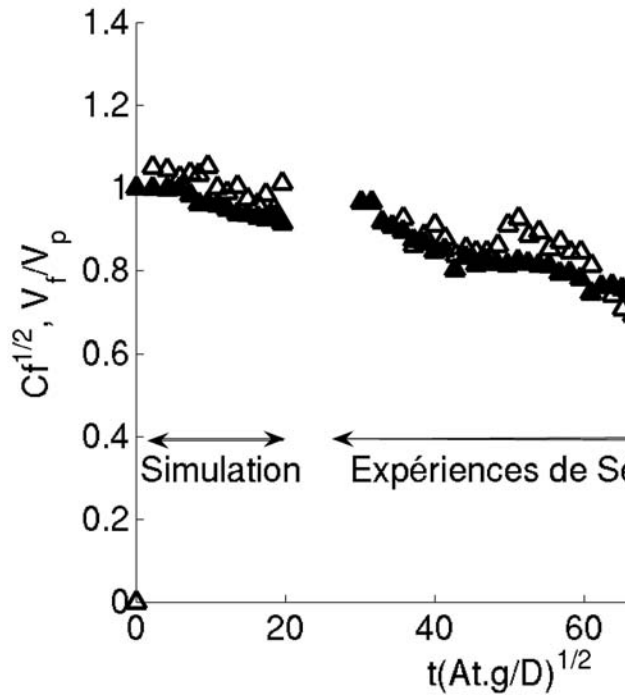


FIG. 4.4 – Vitesse du front V_f/V_p et $\sqrt{C_f}$ au cours du temps pour un tube cylindrique incliné à 50° . Les points à $t(At.g/D)^{1/2} < 20$ sont issus de la simulation alors que ceux à $t(At.g/D)^{1/2} > 30$ sont issus des expériences de [Séon et al. \(2006\)](#).

de tracer le diagramme de la figure 4.3 a duré environ trois mois (~ 2000 heures CPU) en séquentiel. Pour atteindre un régime vraiment établi il faudrait atteindre $T \simeq 100$ dans un domaine trois fois plus grand. Ceci donne un facteur 15 sur le temps de calcul pour porter le temps de simulation à presque quatre ans ! La parallélisation du code a permis d'accélérer les calculs d'un facteur 10 sur 16 processeurs pour notre application mais la disponibilité actuelle des super-calculateurs n'autorise pas une division du temps physique de simulation par 10. C'est pourquoi nous ne sommes pas en mesure de réaliser une étude paramétrique des temps longs comme ceci est possible dans les expériences. Nous avons tout de même prolongé les simulations à $\theta = 0^\circ$ et $\theta = 20^\circ$ pour vérifier que le code était capable de retrouver quantitativement les résultats des expériences de [Séon et al. \(2005\)](#). Ces résultats seront présentés ci-dessous. D'une manière générale, les temps adimensionnels à la fin des simulations varient entre 19 et 38 suivant la rapidité du courant, sauf pour la simulation "rallongée" à $\theta = 20^\circ$ pour laquelle nous avons atteint un temps de 53 (voir tableau 4.2). Tout ceci montre bien qu'il ne sera pas possible a

θ ($^\circ$)	10	20	20 (rallongée)	30	40	50	60	70	80	90
$t\sqrt{At.g/D}$ final	38	30	53	25	22	22	21	19	20	32

TAB. 4.2 – Temps atteints à la fin des simulations 3D-AXI.

priori d'atteindre le régime "établi" des expériences pour les simulations courtes. Néanmoins,

comme nous le verrons par la suite, les caractéristiques majeures de la dynamique du mélange, notamment l'influence de l'angle d'inclinaison du tube sur l'évolution de la zone de mélange, sont bien capturées avec notre domaine « court ».

4.2.3 Champ de densité en fonction de l'inclinaison du tube

Les champs de fraction volumique C numérique et expérimental, dans le plan vertical médian, sont présentés sur les figures 4.5 et 4.6. La figure expérimentale 4.6 est issue des travaux de Séon (2006) FIG. 4.31. Il est à noter que dans les simulations, $C = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$ est la fraction volumique de fluide lourd alors que dans les expériences, $C = \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1}$ est la fraction volumique de fluide léger. Cependant, les échelles de couleur sont aussi inversées, ce qui simplifie l'observation : le fluide léger pur apparaît en bleu/indigo, le fluide lourd pur apparaît en rouge, et les couleurs intermédiaires indiquent l'intensité du mélange. Il est aussi important de signaler que les mesures expérimentales sont effectuées sur une portion de tube de 300 mm de long au dessus, et à distance, de la séparation initiale. Dans la figure 4.5 (simulations), la taille du champ est de $15D$, ce qui correspond bien à 300 mm dans l'expérience, mais cette zone est située directement au dessus de la séparation initiale, sauf pour les tubes inclinés à 0° et 20° qui correspondent aux simulations "rallongées". Ainsi, il faut garder en mémoire que les figures 4.5 et 4.6 ne montrent pas des courants au même instant. En d'autres mots, les courants numériques sont plus "jeunes", et donc moins mélangés, que les courants expérimentaux. D'autre part, l'échelle de couleurs est légèrement différente sur les deux figures si bien qu'il faut être attentif pour toute comparaison directe. Nous verrons par ailleurs dans la suite que les fronts ne se déplacent pas à la même vitesse suivant l'angle d'inclinaison. C'est pourquoi au sein d'une même figure, l'instant de prise de vue n'est pas le même pour chaque angle. Ces figures sont à utiliser essentiellement d'un point de vue qualitatif pour décrire l'organisation spatiale des champs de concentration suivant l'inclinaison du tube. Sur ce point, même si les instants de représentation sont légèrement différents entre les deux figures, nous retrouvons presque exactement les mêmes observations. Le paragraphe suivant est extrait du mémoire de thèse de T. Séon (2006) p102 en commentaire de la figure 4.6 :

"A $\theta = 20^\circ$, nous observons que le front apparaît en jaune dans le code de couleurs que nous utilisons, ce qui implique que la fraction relative locale au front est de l'ordre de $C_f = \delta\rho/\Delta\rho \sim 0.2$; puis progressivement avec l'inclinaison θ , le contraste de densité au front augmente jusqu'à 60° : pour cette valeur un canal de fluide pur léger (bleu foncé) alimente le front qui apparaît alors en bleu ; la fraction relative locale de fluide léger est donc très proche de 1. Le contraste de densité local au front est alors maximum avec : $\delta\rho = \Delta\rho$. Si on incline encore plus le tube, la ségrégation devient de plus en plus importante. Pour $\theta = 75^\circ$, toute une fraction de la section du tube est occupée par du fluide léger pur montant. Il apparaît des tourbillons de Kelvin-Helmholtz en arrière du front, mais ceux-ci, après avoir été éjectés, ne mélangent les fluides que sur une faible partie de la section au centre du tube."

Notre observation numérique est parfaitement identique pour l'image du tube à 20° , qui est tirée de la simulation rallongée. Pour les angles intermédiaires, nous pouvons noter que les concentrations numériques au sein du courant sont en moyenne légèrement supérieures à celles tirées des expériences, si bien qu'il apparaît un décalage d'environ 10° dans nos observations (notre tube à 40° ressemble beaucoup au tube à 50° des expériences). Ceci est évidemment expliqué par le fait que nos images soient prises plus "tôt" dans la vie des courants (pour les inclinaisons supérieures ou égales à 30°), si bien qu'ils n'ont pas atteint leur taux de mélange final. En effet, la capacité du code à retrouver quantitativement les concentrations des expériences est démontrée par les simulations rallongées à 0° et 20° . Enfin, concernant les tubes quasiment horizontaux, nous retrouvons des champs extrêmement proches des expériences avec des commentaires identiques.

4.2.4 Définitions et calcul de la vitesse du front V_f et du saut relatif de densité au front C_f

Il est intéressant de passer à une analyse plus quantitative des grandeurs contrôlant l'écoulement : le saut de concentration relatif au niveau du front C_f et la vitesse du front V_f .

Définition et calcul de la vitesse du front V_f

Il est bien connu, et effectivement retrouvé numériquement, qu'il n'y a pas de mélange à l'avant du front, dans le fluide pur. Ainsi, dans les simulations, la position du front x_f peut être déterminée comme le premier point rencontré avec une fraction volumique en fluide lourd inférieure à 1 lorsqu'on balaie le tube de haut en bas. Une fois cette position connue à tous les instants, il suffit d'effectuer une dérivation temporelle pour obtenir V_f .

Définition et calcul du saut relatif de densité au front C_f

Le calcul de C_f est bien plus délicat. En effet, comme nous pouvons le constater sur les figures 4.5 et 4.6, la valeur de C à l'intérieur de la tête du courant n'est pas spatialement uniforme. Pour déterminer expérimentalement C_f , Séon (2006) moyenne six profils longitudinaux de concentration à l'intérieur d'une bande localisée dans une région de la section du tube de plus forte concentration (ces profils couvrent à peu près un dixième du diamètre). Le maximum de ces profils de concentration le plus proche du front est considéré comme représentant le saut de concentration C_f au front (puisque dans leur fluide lourd, $C = 0$). Cette méthode nécessite une prise en charge manuelle et est soumise à la "sensibilité" de l'opérateur. Elle est en outre simplifiée par le fait que les champs de données issus des expériences soient 2D puisqu'issus du plan vertical médian du tube. Ceci est difficilement envisageable pour les résultats numériques 3D. C'est pourquoi nous avons utilisé une méthodologie différente : il s'agit de détecter dans un

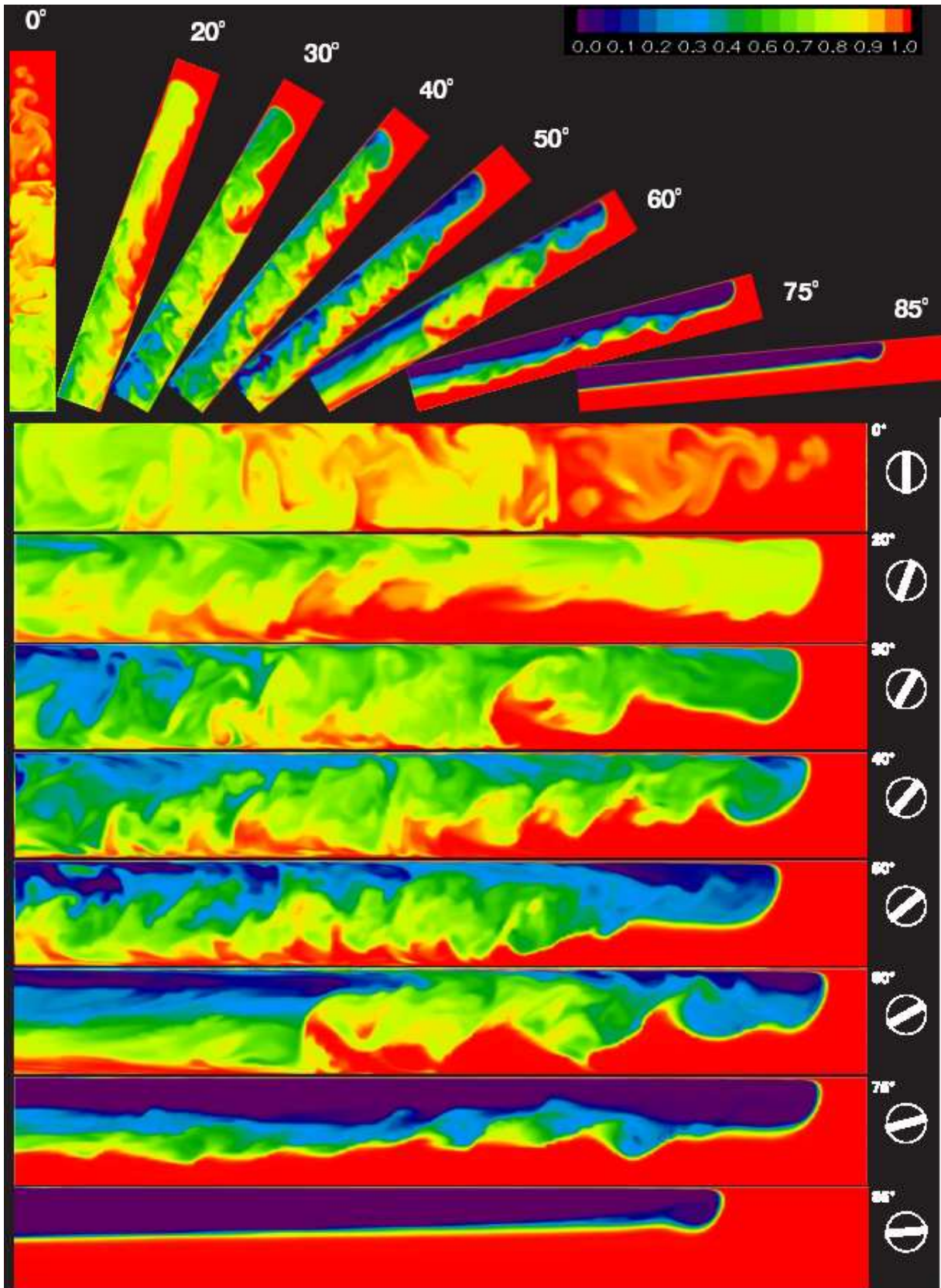


FIG. 4.5 – Champs de fraction volumique de fluide lourd $C = (\rho - \rho_1)/(\rho_2 - \rho_1)$ obtenus par simulation dans des tubes inclinés, à $At = 0.004$, $Ar = (At.g)^{1/2}D^{3/2}/\nu = 560$ (ou $Re = g^{1/2}D^{3/2}/\nu = 790$). Les images ne respectent pas le rapport de forme réel. Elles représentent un champ de $D \times 15D$ pris dans la partie supérieure du tube. Pour toutes les images, sauf 0° et 20° , ce champ démarre au niveau de la séparation initiale.

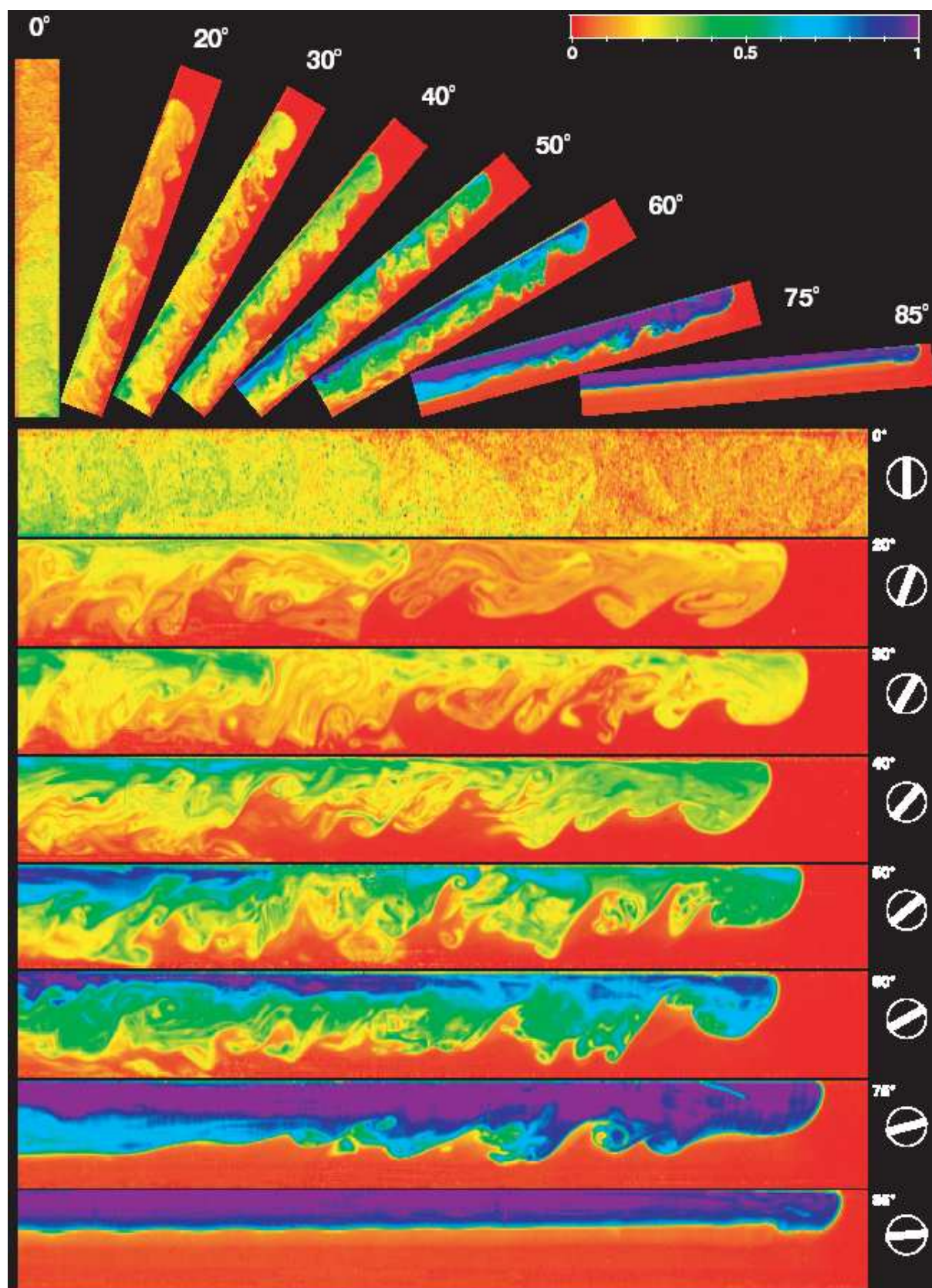


FIG. 4.6 – Champs de fraction volumique de fluide léger $C = (\rho_2 - \rho)/(\rho_2 - \rho_1)$ obtenus expérimentalement dans des tubes inclinés, à $At = 0.004$, $Ar = (At.g)^{1/2}D^{3/2}/\nu = 560$ (ou $Re = g^{1/2}D^{3/2}/\nu = 790$). Les images ne respectent pas le rapport de forme réel. Elles représentent un champ de 20mm par 300 mm pris dans la partie supérieure du tube bien au dessus de la séparation initiale. Les petits points visibles sur l'image du tube à 0° sont des artefacts expérimentaux.

premier temps la position du front. Ensuite nous effectuons une moyenne de $1 - C$ à l'intérieur de la tête et à proximité du front ($1 - C$ pour avoir $C_f = 1$ dans le cas d'un front de fluide non mélangé). Comment quantifier ceci ? "A proximité du front" signifie pour nous sur une longueur à l'intérieur de la tête de $D/4$, et "l'intérieur de la tête" est déterminé comme l'ensemble des cellules ayant une valeur de C différente de 1 (voir figure 4.7). La seule donnée arbitraire est la valeur $D/4$. En réalité, si nous utilisons un domaine plus long dans le courant, nous prenons le risque de ne plus être dans la tête de celui-ci, notamment pour les angles proches de la verticale. D'autre part, prendre un domaine trop court se résumerait à faire un bilan trop local, qui n'aurait peut-être pas autant de signification physique. Enfin, choisir un domaine trop court poserait un problème vis-à-vis de la définition de l'intérieur de la tête. En effet, "l'interface" entre la tête et le fluide lourd est étalée sur une ou deux mailles pour des raisons numériques, si bien que même pour le tube horizontal dans lequel nous avons physiquement strictement $C = 1$ dans le fluide ambiant et $C = 0$ dans le courant, il existe une ou deux mailles avec des valeurs intermédiaires de C non physiques. Dans le cas d'une moyenne de C sur un volume conséquent, ces mailles n'ont quasiment pas de poids. En revanche, si le volume de moyenne est trop petit, la moyenne sera influencée par ces mailles et C_f sera inférieur à la valeur réelle pour les fronts relativement purs aux angles proches de l'horizontale. Ainsi la taille $D/4$ du volume de moyenne a été établie en prenant soin de bien retrouver $C_f = 1$ dans le cas des courants non-mélangés. Une image de ce volume est donnée sur la figure 4.7.

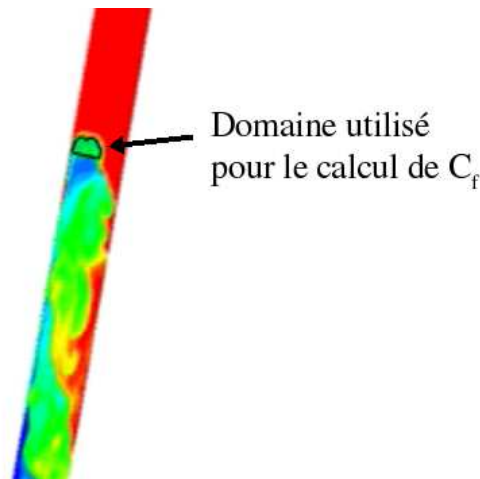


FIG. 4.7 – Exemple de domaine de calcul de C_f

4.2.5 Vitesse du front en fonction de l'inclinaison du tube

Les vitesses pseudo-stationnaires des courants de gravité issus de nos simulations sont tracées sur la figure 4.8 en fonction de l'angle d'inclinaison θ . Les résultats expérimentaux de la figure 4(a) de Séon *et al.* (2006) sont aussi tracés pour comparaison. Les trois régimes décrits dans l'introduction sont très bien discernables. Le plateau est retrouvé pour des angles compris

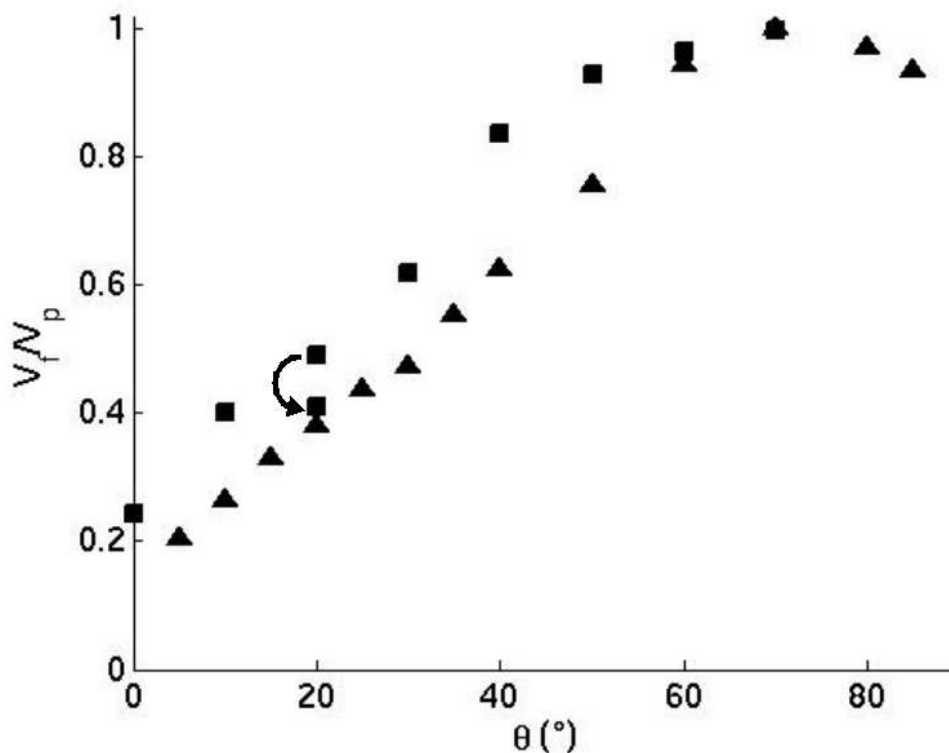


FIG. 4.8 – Valeurs des vitesses normalisées issues des simulations (■) et des expériences de Séon (▲). La flèche indique la valeur de $V_f/V_p = V_f/(0.7\sqrt{AtgD})$ obtenue grâce à la simulation parallèle "rallongée".

entre 55° et 80° . La décroissance de la vitesse due à l'influence croissante de la viscosité pour des tubes proches de l'horizontale est aussi bien retrouvée. La vitesse maximale atteinte sur le plateau pour les angles médians est de $0.717V_t$ alors qu'une valeur de $0.703V_t$ a été tirée des expériences. La différence est de moins de 2%, ce qui est de l'ordre de grandeur de la précision de la mesure. Enfin, pour les angles compris entre 0° et 55° , la croissance de la vitesse quasi-linéaire avec l'angle θ est bien visible et présente une pente très voisine de celle des expériences. En revanche, les vitesses pseudo-stationnaires issues des simulations sont effectivement un peu supérieures à celles issues des expériences. Il est possible de remarquer que l'écart entre nos valeurs n'est pas tout à fait indépendant de l'angle θ , et ceci est normal. En effet, pour les grands angles (disons $\theta > 60^\circ$) il n'y a jamais de mélange. Or, [Séon et al. \(2006\)](#) ont montré que la vitesse du courant était assujettie aux variations de C_f au niveau de la tête du courant par la relation $V_f/V_p = \sqrt{C_f}$ avec $V_p = 0.7\sqrt{AtgD}$. Ainsi, sans mélange, C_f vaut 1 et les vitesses sont bien égales à celles du plateau $V_f = V_p$, aussi bien dans les expériences que dans les simulations. En revanche, le mélange existe pour des angles inférieurs à 60° , et celui-ci va faire décroître C_f vers une valeur asymptotique dans le temps. Ce mélange ne se fait pas instantanément mais demande un laps de temps fini comme illustré sur la figure 4.4 par exemple. Initialement, le saut de concentration au niveau du front est toujours $C_f = 1$ puisque les deux fluides sont purs. La

valeur de C_f obtenue dans un tube court sera donc forcément supérieure à la valeur terminale dans la mesure où le mélange ne sera pas complet. Par conséquent la vitesse obtenue en tube court doit être supérieure à la vitesse terminale. Il est aussi probable que plus une simulation sera longue, plus le mélange pourra s'effectuer et plus la vitesse obtenue sera proche de la vitesse terminale expérimentale. Ceci est bien retrouvé sur la figure 4.8 et à la lumière du tableau 4.2 : les simulations aux angles de 0° , 10° , 20° donnent des vitesses relativement proches de celles des expériences, avec les temps de simulations les plus grands ; les simulations aux angles de 40° et 50° donnent des résultats plus éloignés puisque les temps de passage des courants dans les tubes sont courts, ce qui implique un mélange moins complet. Puis, pour les angles correspondant au plateau, la longueur du tube n'a pas d'importance puisqu'il n'y a pas de mélange au niveau de la tête du courant. Pour être tout à fait convaincus que des simulations dans des tubes plus longs auraient donné les mêmes résultats que les expériences, nous avons effectué une simulation supplémentaire dans un tube de longueur $96D$ pour un angle de 20° . C'est dans cette optique que la parallélisation du code a été effectuée puisque le maillage comptait alors $1534 \times 32 \times 64$ cellules. La valeur de la vitesse du front obtenue est pointée par une flèche sur la figure 4.8. Elle montre très clairement que les valeurs issues des simulations tendent effectivement vers les valeurs expérimentales pour peu que le domaine de calcul soit suffisamment long en espace et en temps.

4.2.6 Relation vitesse du front - contraste relatif de densité au niveau du front

Nous avons vu que les vitesses pseudo-stationnaires obtenues à l'issue des simulations étaient tout à fait cohérentes avec celles tirées des expériences de Séon *et al.* (2005) et Séon (2006). Nous allons maintenant introduire la mesure du saut de concentration relatif au niveau du front C_f . Les valeurs correspondantes de $\sqrt{C_f}$ sont tracées sur la figure 4.9. Nous retrouvons sur cette figure les valeurs des vitesses de la figure 4.8 mais cette fois sous la forme $V_f/V_t = V_f/\sqrt{At.g.D}$ auxquelles sont ajoutées en symboles ouverts les valeurs de $0.7\sqrt{C_f}$ issues des simulations et des expériences de Séon *et al.* (2006). Il apparaît, une fois encore, des valeurs de C_f issues des simulations supérieures à celles tirées des expériences, ceci pour les raisons déjà évoquées ci-dessus. Nous voyons en revanche très clairement sur ce graphique que la relation $V_f = 0.7\sqrt{At.g.D}\sqrt{C_f}$ est vérifiée aussi bien dans les expériences que dans les simulations, et ceci quel que soit l'angle θ pourvu qu'il soit inférieur à 80° , c'est à dire pourvu que le courant soit en régime inertiel. Il est en outre important de signaler ici la difficulté à évaluer avec précision la valeur du préfacteur 0.7 dans la relation entre V_f et C_f . En effet, sur la figure 4.9 nous pouvons voir que les points $0.7\sqrt{C_f}$ et V_f/V_t ne sont pas toujours exactement confondus. Pour certains angles, c'est $0.7\sqrt{C_f}$ qui est supérieur à V_f/V_t (expérience à 30° et simulations à 0° et 20° rallongées par exemple), tandis que d'autres fois c'est V_f/V_t qui est supérieur à $0.7\sqrt{C_f}$ (expériences à 50° et

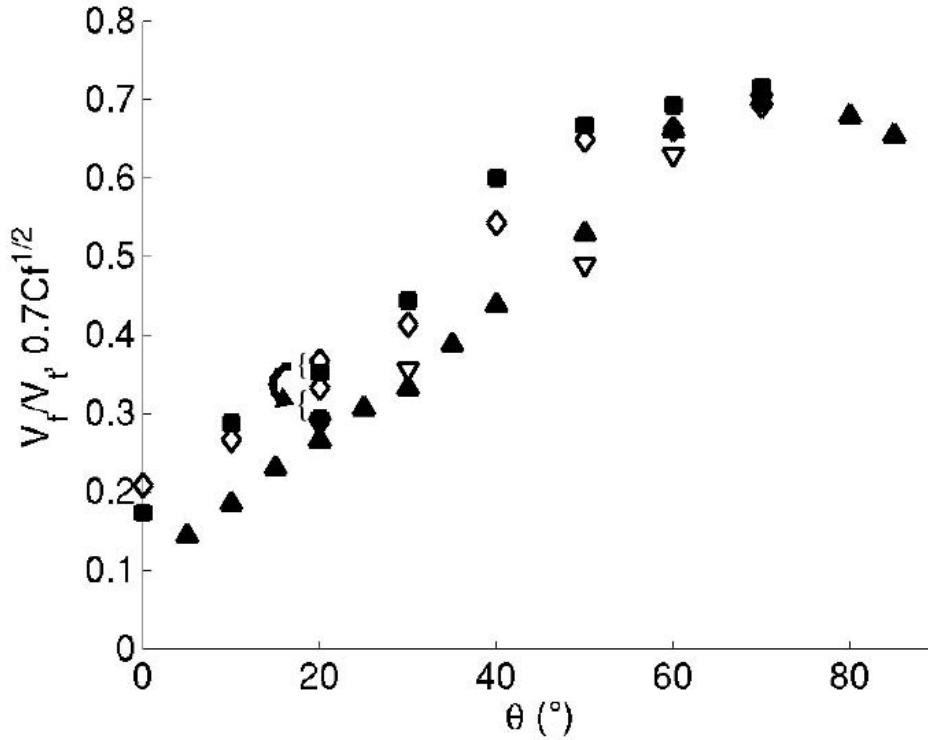


FIG. 4.9 – Valeurs numériques et expérimentales de $V_f/V_t = V_f/\sqrt{At.g.D}$ (■ simulations 3D-AXI; ▲ expériences en tubes cylindriques) et $0.7\sqrt{C_f}$ (◇ simulations 3D-AXI; ▽ expériences en tubes cylindriques). La flèche pointe vers les valeurs obtenues grâce à la simulation parallèle "rallongée".

60° ou simulations à 10° , 30° , 40° et 50°). Ces écarts entre les points peuvent se traduire par une variation sur la valeur du préfacteur 0.7 de l'ordre de ± 0.05 . Concrètement, les expériences donnent par exemple plutôt $V_f/V_t = 0.75\sqrt{C_f}$ à 50° ou $V_f/V_t = 0.65\sqrt{C_f}$ à 30° . Des incertitudes comparables sont présentes dans les mesures effectuées sur les résultats des simulations, et ceci bien que nous utilisions deux méthodes différentes pour évaluer le saut relatif de densité au front C_f . Il est donc important de garder à l'esprit que la relation révélée par la figure 4.9 doit être interprétée comme $V_f/V_t \simeq 0.7\sqrt{C_f}$ et non comme une égalité stricte.

Ainsi, malgré des différences quantitatives sur les vitesses et concentrations dont nous avons montré qu'elles étaient dues à des mesures effectuées à des instants différents de la vie des courants, le résultat fondamental de [Séon et al. \(2005\)](#) a bien été retrouvé : les vitesses de front V_f sont proportionnelles à $\sqrt{C_f}$ pour les angles inférieurs à 80° environ et la constante de proportionnalité est la même dans les deux approches. En d'autres mots les vitesses issues des simulations et celles issues des expériences obéissent à la même loi :

$$V_f \simeq 0.7\sqrt{AtgD}\sqrt{C_f} \quad (4.1)$$

4.2.7 Conclusion

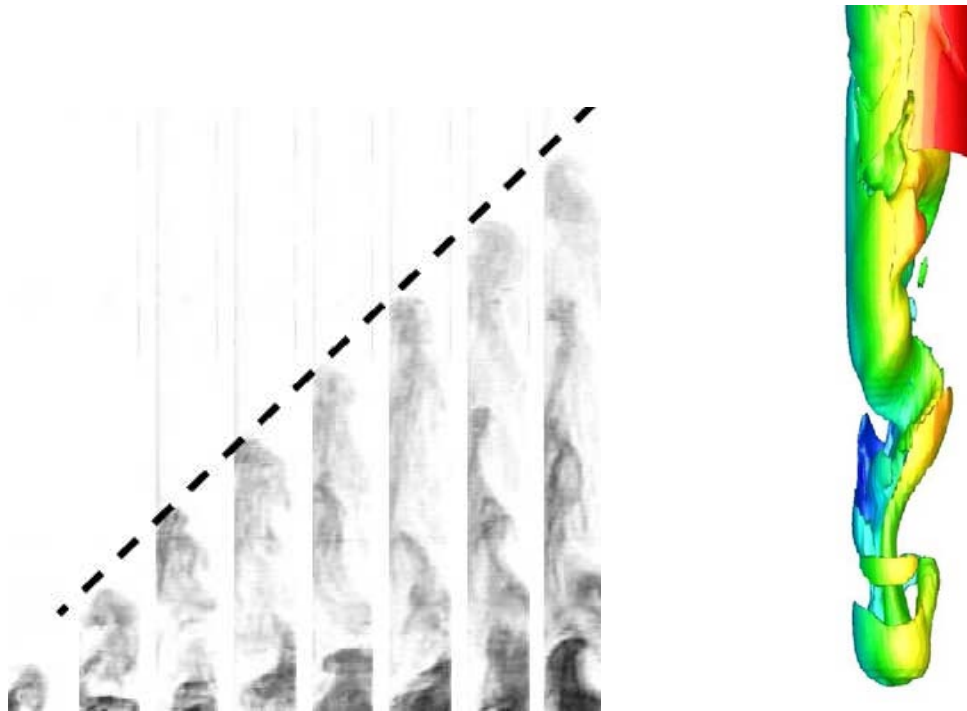
Les diverses caractéristiques obtenues par simulation sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux pour tous les angles d'inclinaison du tube considérés. Même les différences quantitatives qui apparaissent de prime abord peuvent être résolues en prolongeant les simulations dans le temps. C'est pourquoi nous avons désormais confiance en la capacité du code à produire de bonnes « expériences numériques » pour l'étude des champs de vitesse et de concentration créés par des courants de gravité confinés en tubes inclinés.

Dans ce qui suit nous allons nous focaliser sur l'influence de la géométrie sur le mélange. Nous tenterons de qualifier et de quantifier les différences observées sur le comportement des courants confinés dans différentes géométries pour les deux phases de l'écoulement évoquées dans l'introduction. Ces deux phases, "aux temps longs" et "aux temps courts", feront l'objet des parties distinctes 4.4 et 4.5 respectivement.

4.3 Etude de l'influence de la géométrie : motivations

Les expériences de [Séon *et al.* \(2005\)](#) ont été menées en géométrie cylindrique. Nous avons donc validé nos résultats numériques vis-à-vis de cette géométrie. Avant de nous lancer dans l'utilisation intensive des simulations, la question suivante apparaît : "Serait-il possible de se restreindre à des simulations 2D tout en obtenant les mêmes résultats que dans les expériences (3D) ?". La question n'est pas triviale puisque de nombreux articles traitant des courants de gravité sont basés sur des simulations 2D. Nous allons comparer dans cette partie les résultats issus des simulations 2D avec ceux des simulations 3D-AXI.

Une autre interrogation porte sur l'influence de la géométrie 3D utilisée. En effet, les premières simulations réalisées en tubes et canaux verticaux ont montré des comportements surprenants. Comme l'indique la figure 4.10, la géométrie cylindrique autorise le fluide pénétrant dans le fluide ambiant à se propager sous forme de structures hélicoïdales pour "contourner" d'éventuelles structures bloquant plus ou moins l'écoulement. En revanche, la géométrie 3D cartésienne possède des angles qui peuvent piéger certaines structures (voir figure 4.11) et inhiber le développement de l'écoulement hélicoïdal, notamment dans le régime initial durant lequel l'agitation et le mélange sont faibles. Même si un tel comportement est relativement intuitif en tube ou en canal vertical, et surtout aux temps courts, on peut se demander si de tel effets de la géométrie existent en tube ou en canal pour d'autres angles. Et si ces effets existent, sont-ils aussi importants en géométrie inclinée qu'en position verticale ? Pour répondre à ces questions, nous comparerons les deux géométries 3D-AXI et 3D-SQR pour toute la gamme d'angles d'inclinaison.



(a) Écoulement sous forme hélicoïdale en tube 3D cylindrique (Expériences de [Debacq *et al.* \(2003\)](#)) (b) Écoulement sous forme hélicoïdale en tube 3D cylindrique (Simulation)

FIG. 4.10 – Structures observables en tubes verticaux.

4.4 Influence de la géométrie aux temps longs

4.4.1 Vitesse du front et contraste relatif de densité au front

Nous avons vu sur la figure 4.9 l'influence de l'angle d'inclinaison du tube sur la vitesse du front du courant et sur le saut relatif de densité au front en géométrie cylindrique, avec notamment la relation $V_f/V_t \simeq 0.7\sqrt{C_f}$ pour des angles compris entre la verticale ($\theta = 0^\circ$) et un angle d'environ 80° . Nous allons maintenant vérifier si cette relation est aussi valide pour les autres géométries : le canal carré et le 2D.

La vitesse du front et le contraste relatif de densité au front sont représentés sur la figure 4.12 pour le canal carré. Les résultats de la figure 4.9 y sont aussi reportés pour comparaison. Cette figure permet de vérifier qu'aux temps longs, la relation $V_f/V_t \simeq 0.7\sqrt{C_f}$ semble valide pour des canaux de section carrée inclinés. Il n'est cependant pas envisageable de vérifier numériquement cette relation pour divers nombres d'Archimède et divers nombres d'Atwood (comme cela a été fait par [Séon *et al.* \(2005\)](#)) compte tenu du coût CPU élevé d'une simulation. Il est relativement étonnant que le préfacteur 0.7 soit identique dans ces deux géométries puisque nous verrons par la suite que durant la phase initiale de subsidence, la vitesse du front dans les simulations 3D-SQR est plus faible que dans les simulations 3D-AXI (fig. 4.18).

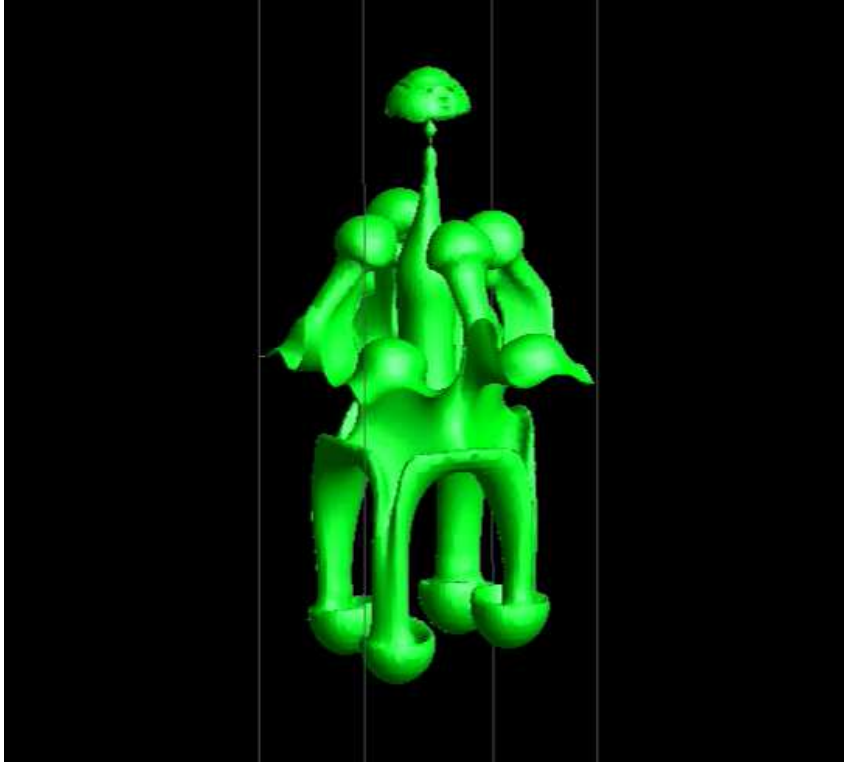


FIG. 4.11 – Ecoulement fortement influencé par les angles de la géométrie 3D cartésienne. Le canal est vertical.

La transition vers le régime visqueux dans des géométries proches de l'horizontale semble se faire pour un angle un peu plus faible en canal, mais le nombre d'Archimède des simulations en canal est aussi un peu plus faible que celui des simulations en tube. Or le nombre d'Archimède a une influence sur l'angle limite entre le régime inertiel et le régime visqueux (Séon *et al.* (2005)) en géométrie cylindrique. C'est pourquoi la petite différence observable sur la figure 4.12 pour les grand angles ne sera pas interprétée.

La figure 4.13 représente les mêmes grandeurs que précédemment mais cette fois pour les simulations 3D-AXI et les expériences correspondantes et pour les simulations 2D. Cette fois, les valeurs de la vitesse du front V_f et de $\sqrt{C_f}$ sont complètement différentes de celles déjà obtenues en géométries 3D : elles sont globalement plus faibles, et aucun plateau n'est discernable au contraire de la figure 4.12. De plus, les valeurs de V_f et $\sqrt{C_f}$ ne coïncident pas en 2D. A la vue de la figure 4.13 il semblerait qu'il existe une relation du type $V_f/V_t = 0.7\sqrt{C_f} + c^{te}$ en deux dimensions. La valeur de cette constante est d'environ 0.09. Son existence reste incomprise à ce jour. En tout cas, nous pouvons affirmer que les simulations 2D ne sont pas à même de donner des valeurs prédictives pour les vitesses de front 3D réelles. De plus, la relation particulière entre V_f et C_f en 2D laisse penser que les mécanismes internes aux courants dans cette géométrie sont différents des mécanismes 3D réels, ce qui ne permet pas non-plus d'utiliser des simulations

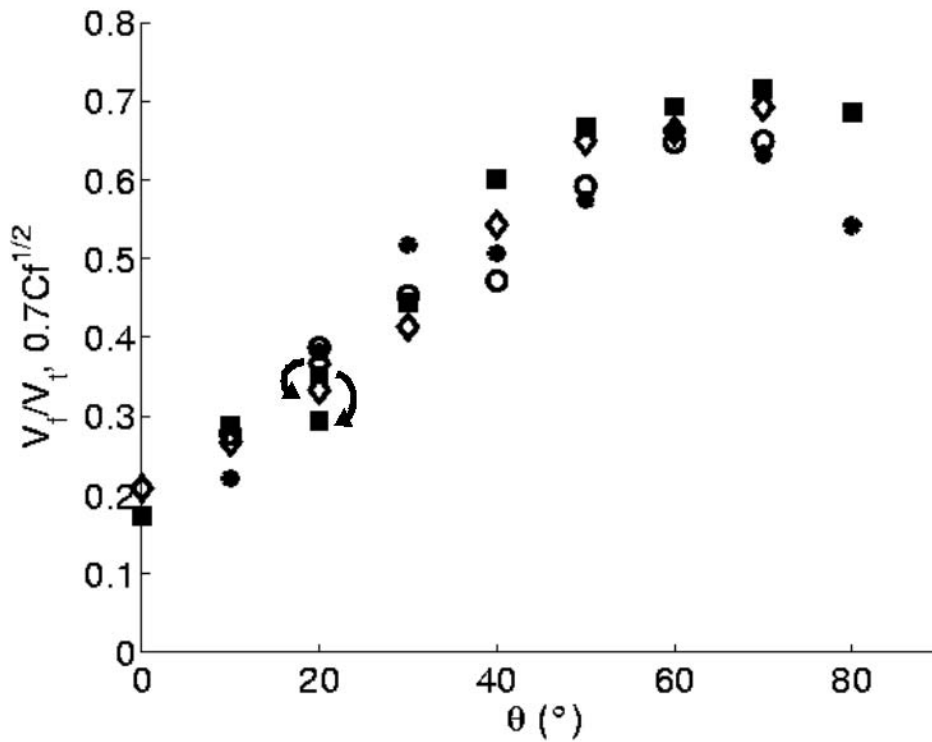


FIG. 4.12 – Tracé de $V_f/V_t = V_f/\sqrt{At.g.D}$ (■ simulations 3D-AXI; * simulations 3D-SQR) et $0.7\sqrt{C_f}$ (◇ simulations 3D-AXI; ○ simulations 3D-SQR). Les flèches pointent vers les valeurs de V_f/V_t et $0.7\sqrt{C_f}$ obtenues grâce à la simulation 3D-AXI parallèle "rallongée".

2D pour tenter de comprendre la dynamique des écoulements 3D. Ce point sera confirmé par la suite.

4.4.2 Dynamique interne

En trois dimensions, pour des angles d'inclinaison intermédiaires (compris entre 65° et 80° pour les Ar et At utilisés ici) les structures de Kelvin-Helmholtz générées par le cisaillement entre les courants ascendant et descendant ne sont pas assez intenses pour couper, même temporairement, les canaux de fluide pur le long des parois supérieure et inférieure du tube. C'est pourquoi dans ce régime le front du courant contient toujours du fluide pur et le saut relatif de concentration à travers le front reste égal à 1. Ceci entraîne donc $V_f \simeq 0.7V_t$. Au contraire, pour des tubes plus proches de la verticale, les effets de ségrégation dus à la stratification sont moins intenses et les tourbillons générés dans la zone de mélange sont capables de briser temporairement le canal d'alimentation du front. La concentration dans la tête du courant résulte alors d'un équilibre entre le mélange local et l'arrivée sporadique de fluide pur le long de la paroi supérieure. C'est pourquoi C_f décroît lorsque ce canal d'alimentation est coupé, ce qui impose automatiquement la diminution de V_f en vertu de la relation 4.1. Puis, les tourbillons bloquant

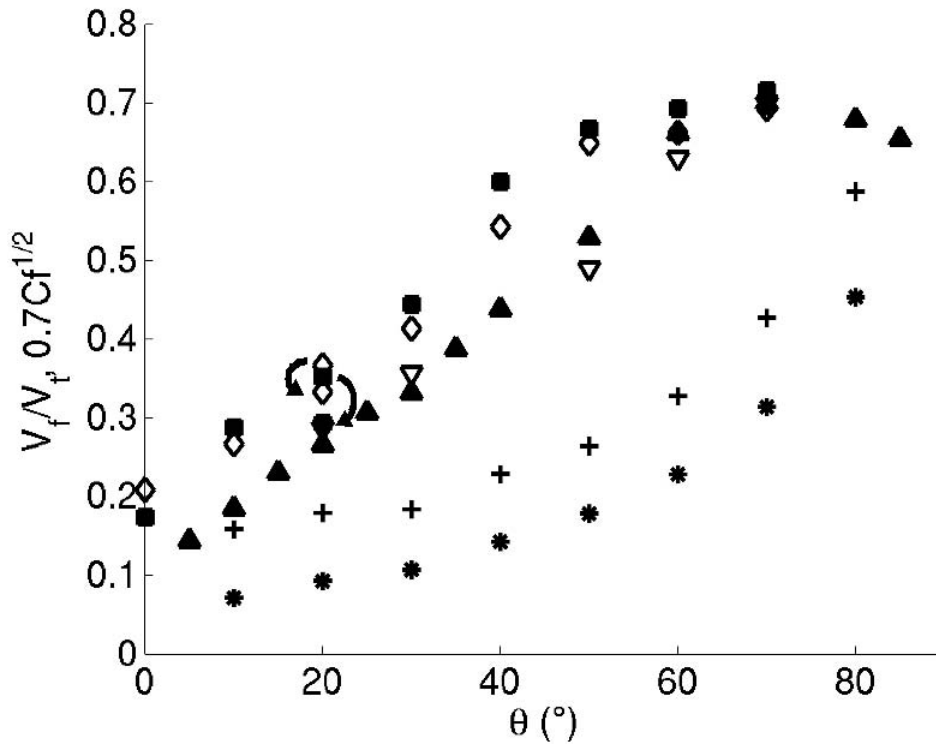


FIG. 4.13 – Valeurs numériques et expérimentales de $V_f/V_t = V_f/\sqrt{At.g.D}$ (■ simulations 3D-AXI; ▲ expériences en tube cylindrique; * simulations 2D) et $0.7\sqrt{C_f}$ (◇ simulations 3D-AXI; ▽ expériences en tube cylindrique; + simulations 2D). Les flèches pointent vers les valeurs de V_f/V_t et $0.7\sqrt{C_f}$ obtenues grâce à la simulation 3D-AXI parallèle "rallongée".

le courant s'étirent et se cassent pour laisser à nouveau passer du fluide pur. Lorsque une bouffée de fluide pur remonte le corps et arrive à la tête, C_f ré-augmente et donc V_f aussi. Globalement, dans ce régime C_f et V_f varient au cours du temps en augmentant avec l'arrivée de paquets de fluide pur au front et en diminuant par mélange lorsqu'un ou plusieurs tourbillons bloquent le canal d'alimentation. La valeur moyenne de C_f (qui détermine V_f) dépend ainsi de l'intensité des tourbillons par rapport à la composante transverse de la gravité, et de leur répartition spatiale et temporelle. Tous ces paramètres sont évidemment intimement liés à l'angle d'inclinaison θ .

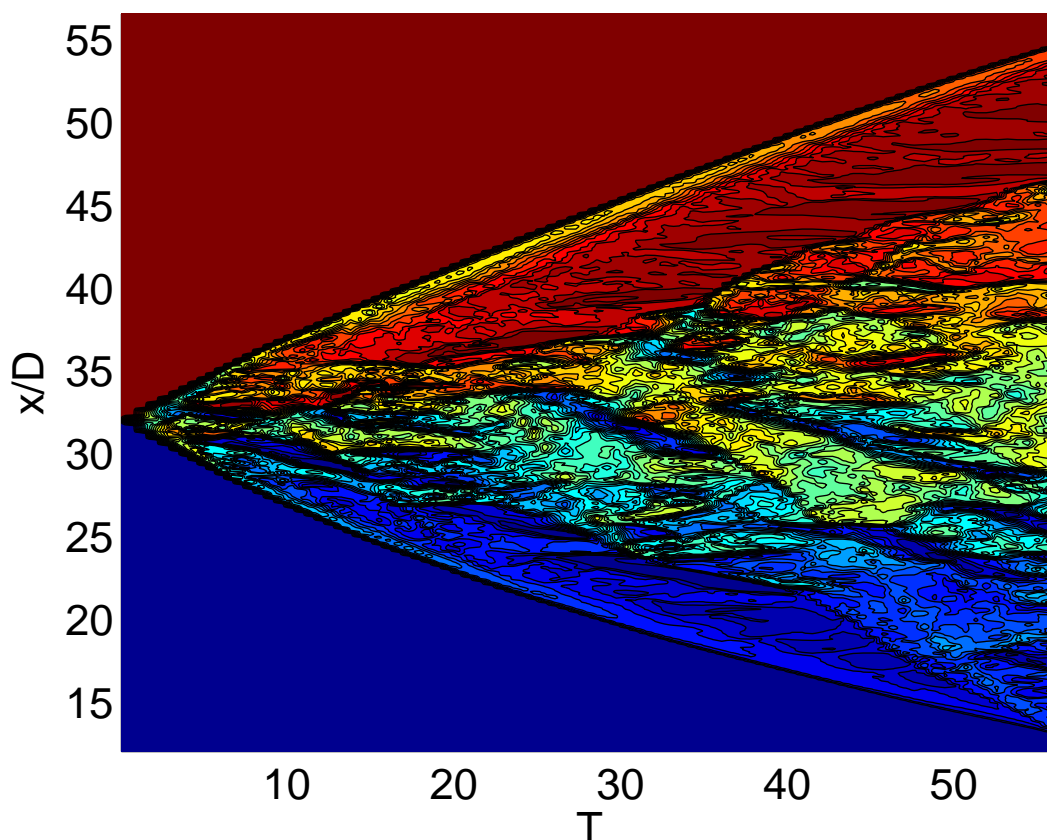
En deux dimensions, un tout autre comportement peut être observé. En effet, les tourbillons 2D sont bien connus pour être beaucoup plus cohérents que leurs homologues 3D. Ils ont donc un temps de vie plus long et une intensité plus grande vis-à-vis de la stratification de l'écoulement. En conséquence, dans un écoulement bidimensionnel le canal d'alimentation du front peut être coupé bien plus facilement que dans un écoulement tridimensionnel. Ceci se traduit par l'existence de ce phénomène de coupure pour n'importe quel angle θ en 2D. De plus, ces tourbillons ayant un temps de vie relativement long, une chaîne de tourbillons peut facilement se développer entre les courants, ce qui est en mesure de bloquer très efficacement l'alimentation des fronts.

Ce phénomène est illustré sur la figure 4.14(c). La figure 4.14 représente les écoulements pour $\theta = 20^\circ$ et $\theta = 60^\circ$ pour les trois géométries considérées. Dans les écoulements 3D (a) et (b) le front est clairement alimenté en permanence. Au contraire, dans le cas (c) une chaîne de tourbillons s'est développée dans la zone de mélange entre les courants et les canaux d'alimentation sont en passe d'être coupés. Encore une fois, ceci peut être observé pour tous les angles d'inclinaison en deux dimensions. Ainsi après une courte période, nous observons une décroissance de C_f pour tous les angles θ , ce qui impose aussi une décroissance de V_f . Évidemment, aucun régime "plateau" caractérisé par $C_f = 1$ ne peut alors être observé. Ceci explique l'absence de plateau sur la figure 4.13 pour les simulations 2D.

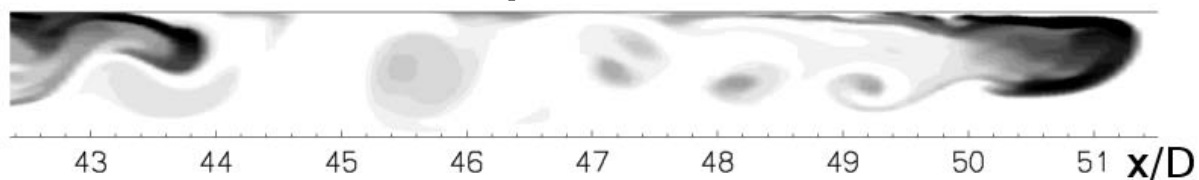
Le tracé de l'intensité de vrillage sur la figure 4.14 (définie par la partie imaginaire des valeurs propres du tenseur gradient de vitesse, voir Annexe A pour une description plus complète et pour éclaircir les raisons du choix de cette grandeur ou Zhou *et al.* (1999) et Chakraborty *et al.* (2005) pour une comparaison des schémas d'identification de tourbillons) nous montre un aspect très intéressant de l'écoulement : dans les cas 3D (a) et (b) les champs de vorticité semblent très d estructur es et bien homogènes, quasiment "turbulents" tandis que dans le cas 2D les tourbillons sont peu nombreux, bien définis et d elimit es. Dans cette dernière configuration, l'écoulement au sein de la zone de mélange est relativement bien organis e en cellules en rotation dont la taille caractéristique est proche du diamètre du tube. Bien que cette organisation spatiale ne soit pas permanente, cette cha ene de tourbillons peut exister suffisamment longtemps pour provoquer la séparation définitive entre la tête du courant et la zone de mélange (ceci est sur le point de se produire sur la figure 4.14(f)). Cette tête va ensuite se comporter comme une "bulle" dans le cas du courant supérieur ou une "goutte" dans le cas du courant inférieur et sera détruite progressivement par diffusion et détachement dans son propre sillage comme le montre le diagramme spatio-temporel et l'image du champ de densité de la figure 4.15. En effet, nous pouvons constater sur le diagramme spatio-temporel que le front léger (dans la moitié supérieure du diagramme) se détache de la zone de mélange dès $T \simeq 10$. Il avance ensuite indépendamment du reste de la zone de mélange jusqu'à la fin de la simulation. Au cours de sa propagation, cette "bulle" de fluide voit sa densité se rapprocher de celle du fluide ambiant. Nous pouvons apercevoir en dessous de la trace de cette "bulle" de petites structures qui restent sur place, voire redescendent (par exemple autour de $T = 40$). Il s'agit de petits tourbillons de sillage  eject es à l'arrière de cette bulle et emportant avec eux un peu du fluide la constituant qu'ils vont ensuite mélanger dans le fluide ambiant à l'arrière de la tête. Ceci est visible sur la figure 4.15(b) qui montre la tête détachée pour $50 < x/D < 51$ et les tourbillons de sillage pour $45 < x/D < 50$. Il est aussi possible de constater qu'à partir de $T \simeq 15$ un deuxième front se forme derrière le front d etach e (ce nouveau front est localis e autour de $x/D \simeq 44$ sur la figure 4.15(b)). Il accélère ensuite mais sa vitesse ne lui permet pas de rattraper le front d etach e. Nous assistons donc ici à une séparation définitive de la tête du courant. Dans la partie basse du diagramme, un phénomène similaire se produit mais, entre $T \simeq 45$ et 55, des structures issues de la zone de



FIG. 4.14 – Fraction volumique de fluide dense (image du haut) et intensité de vrillage (image du bas) pour des tubes inclinés à 20° et 60° de la verticale.



(a) - Diagramme spatio-temporel. Un détachement définitif de la tête est visible dans la moitié supérieure du tube.



(b) - Champ de densité à $T = 46$. La tête du courant est détachée et se mélange progressivement au fluide ambiant en perdant de la matière dans ses tourbillons de sillage.

FIG. 4.15 – Résultats issus de la simulation en canal 2D incliné à 60° .

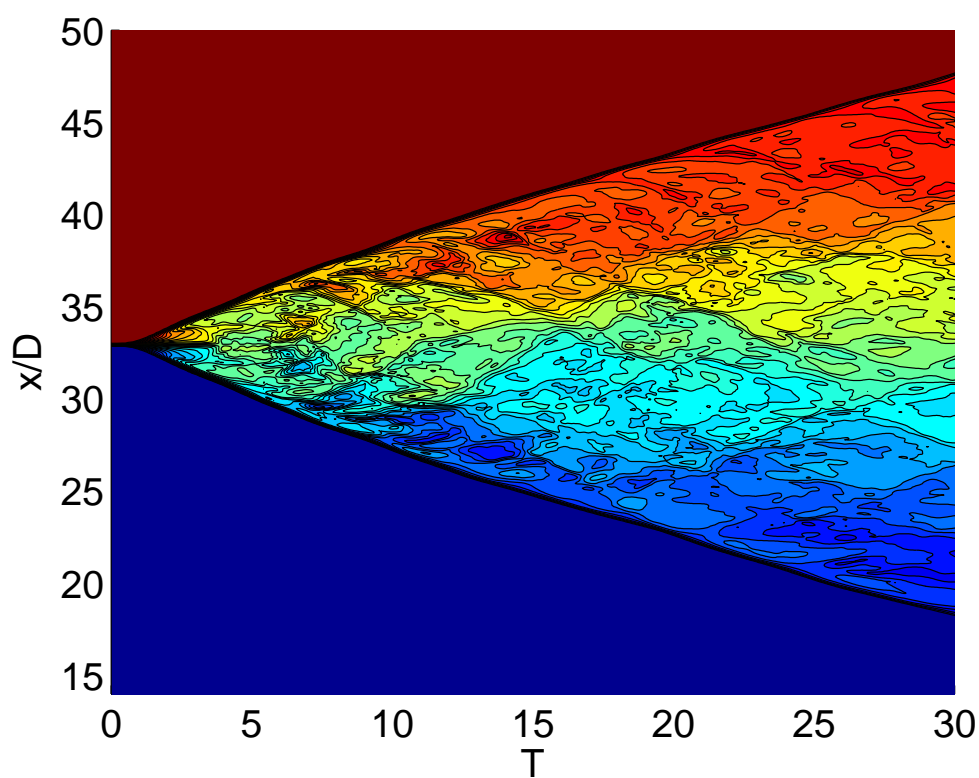
mélange rattrapent le front bas et le reconnectent au reste de l'écoulement. Il s'agit dans ce cas d'un détachement temporaire du front lourd.

Des détachements du front temporaires ont été observés en 2D pour des angles d'inclinaison inférieurs à 80° et dans des canaux 3D pour des angles inférieurs à 40° , mais jamais dans des tubes cylindriques. Des détachements définitifs ont été observés uniquement en deux dimensions.

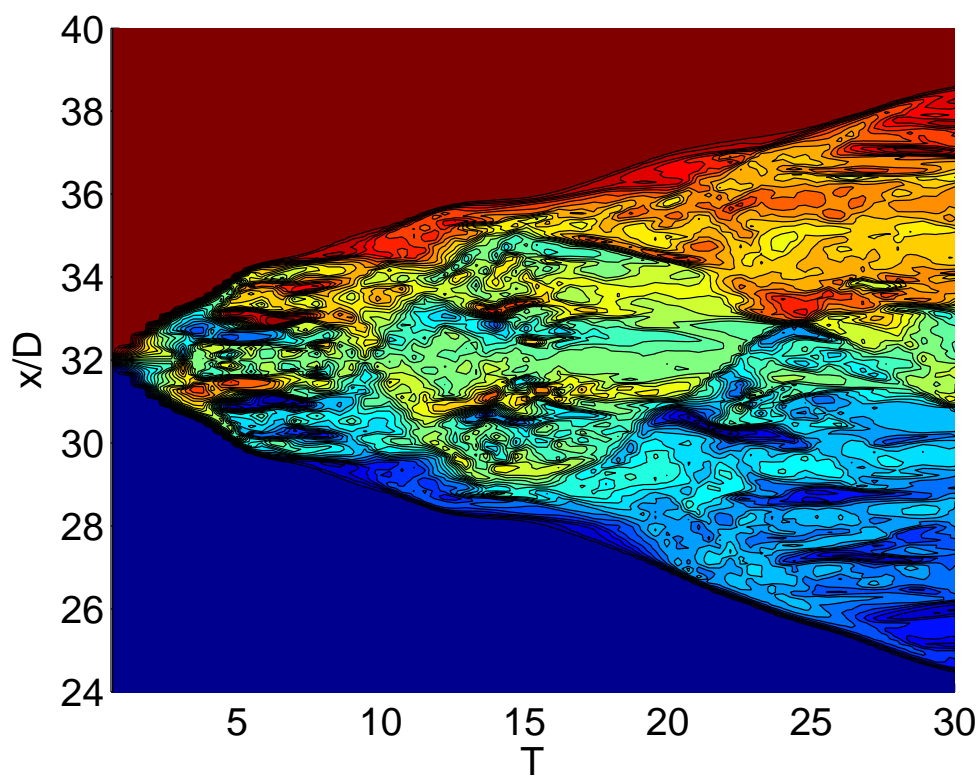
La qualité du mélange obtenu dans les géométries 3D-AXI et 2D peut-être comparée qualita-

tivement sur les diagrammes spatio-temporels. Deux exemples de tels diagrammes en géométrie 3D-AXI et 2D sont présentés sur les figures 4.16(a) et 4.16(b). Ces deux diagrammes ont été construits avec les mêmes échelles de couleur et le même nombre de lignes de niveau. Ainsi, un fort contraste local au sein d'un diagramme indique la présence de gradients de densité importants. Le premier diagramme (3D-AXI) présente un gradient de densité très progressif entre les deux fronts à un instant donné, des gradients locaux très faibles, et une vitesse de front (caractérisée par la pente de la frontière de la zone de mélange) variant relativement lentement. Le second diagramme (2D) est très différent. On ne peut plus vraiment parler de gradient global de densité entre les deux front, surtout aux temps courts. Il existe des poches persistantes de fluide léger entourées de fluide lourd (et inversement) caractérisées par des frontières très nettes (fort gradient local de densité). Ces poches peuvent avoir une direction relativement "horizontale" sur le diagramme, ce qui signifie qu'elles ne se déplacent pas dans le tube. Ces poches sont en fait la trace des tourbillons cohérents, composés d'un fluide de densité donnée, évoqués ci-dessus et visibles sur la figure 4.14. La forme de la frontière de la zone de mélange est aussi beaucoup plus chaotique sur la figure 4.16(b). Ceci signifie que la vitesse du front en 2D présente des variations temporelles beaucoup plus importantes qu'en 3D.

Nous pouvons tenter de comparer plus quantitativement l'effet de la géométrie sur la qualité du mélange au sein des tubes. Pour ceci nous allons utiliser le taux de mélange $C(1-C)$ qui vaut en particulier 0 dans chacun des fluides purs et 0.25 dans un mélange parfait correspondant à $C = 0.5$. L'efficacité de mélange est alors définie par la moyenne de $C(1-C)/0.25$ sur le volume du tube situé entre les fronts ascendant et descendant. L'évolution de cette efficacité de mélange moyenne est tracée sur la figure 4.17 pour les trois géométries considérées. Il faut tout d'abord noter que seule la figure 4.17(a) présente une comparaison des trois géométries pour des échelles de temps identiques. En effet, pour les autres figures les simulations bidimensionnelles sont menées plus loin dans le temps que les simulations tridimensionnelles pour des raisons évidentes de coût CPU. Toutes les figures montrent que les géométrie 3D-SQR et 3D-AXI conduisent à des efficacités de mélange très proches. Ceci était attendu puisque nous avons déjà vu qu'aux temps longs les écoulements au sein de ces géométries ont les mêmes caractéristiques tant au niveau des vitesses et sauts de densité aux fronts qu'au niveau de la dynamique interne. En revanche, il est relativement étonnant de constater sur les figures 4.17(a) et (b) que l'efficacité du mélange entre les fronts ne semble presque pas influencée par le caractère bidimensionnel ou tridimensionnel de la géométrie pour de faibles angles. En effet, pour de tels angles, le mélange s'opère de façon très différente en 3D et en 2D, compte tenu de la structure très différente des champs de vorticité. Les efficacités de mélange proches trouvées dans les deux cas ne sont donc probablement qu'une "coïncidence". Les comportements observés sur les figures 4.17(c) et (d) sont, quant à eux, aisément explicables. En effet, le taux de mélange faible observé sur la figure 4.17(c) pour la géométrie 2D est lié à l'existence des structures non-mélangées évoquées ci-dessus et visibles sur un diagramme spatio-temporel tel que celui de la figure 4.16(a). Enfin, le fort taux de mélange



(a) - Tube cylindrique 3D-AXI



(b) - Plan 2D

FIG. 4.16 – Diagrammes spatio-temporels obtenus par simulation en géométrie inclinée à 20° .

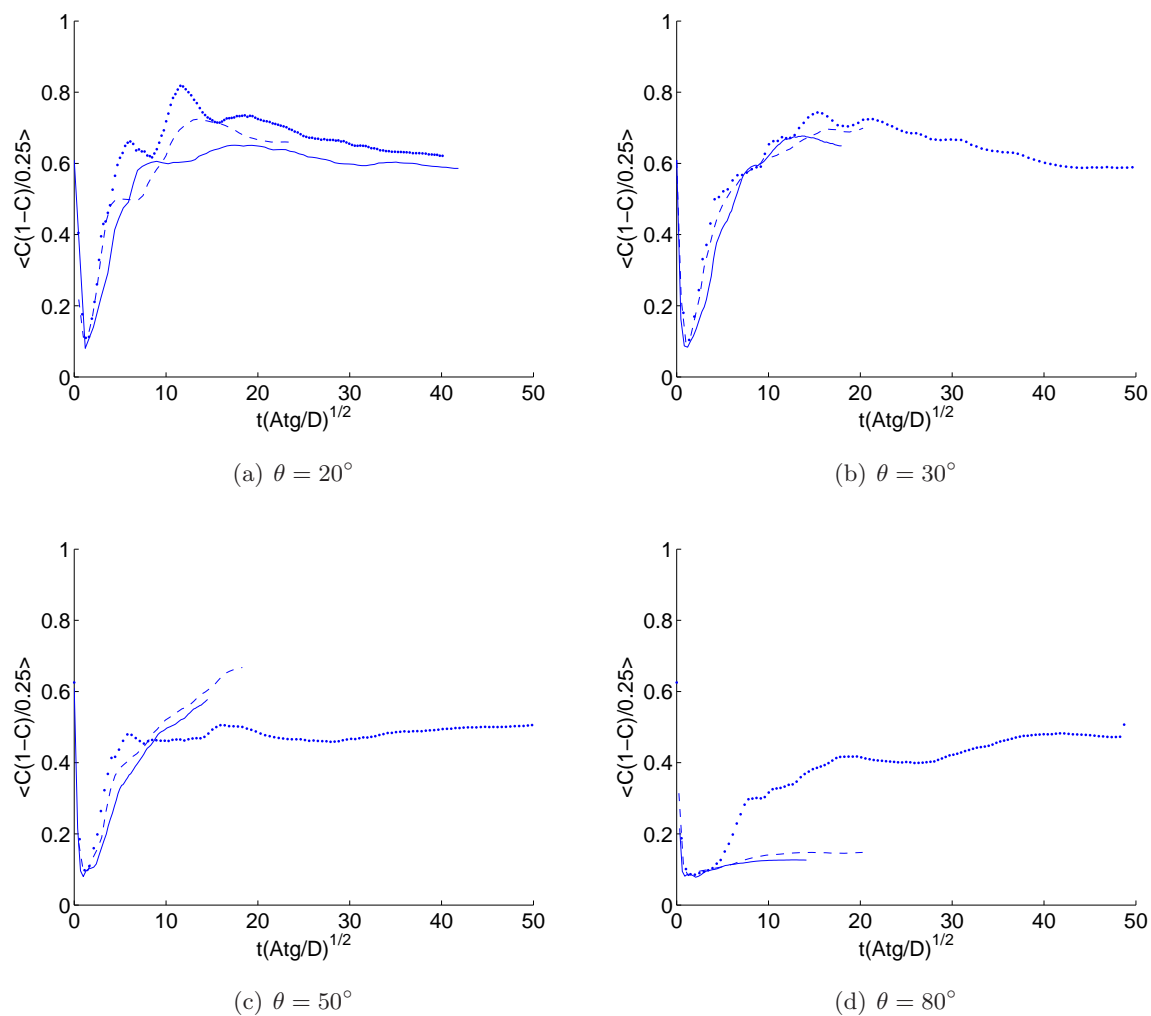


FIG. 4.17 – Evolution de l'efficacité de mélange moyenne $\langle C(1 - C)/0.25 \rangle$ pour les trois géométries. Trait plein : simulations 3D-AXI ; Tirets : simulations 3D-SQR ; Pointillés : 2D.

obtenu en 2D dans le tube incliné à 80° (figure 4.17(d)) vient de l'existence de tourbillons dans cette simulation alors que les écoulements tridimensionnels présentent uniquement deux couches de fluide pur à contre-courant pour cette inclinaison.

Cette description de l'organisation spatiale de l'écoulement dans des tubes inclinés montre une influence primordiale de la géométrie. En particulier, il est désormais très clair que des simulations bidimensionnelles ne sont pas capables de reproduire correctement la propagation de courants de gravité en tubes inclinés et à des nombres de Reynolds modérés. Nous avons étudié dans ce paragraphe l'évolution aux temps longs des courants de gravité en géométrie confinée à un nombre de Reynolds modéré. Cette limite des temps longs est celle qui est susceptible d'être la plus utile pour une application concrète. Nous allons maintenant commenter la période initiale de l'évolution des courants.

4.5 Influence de la géométrie aux temps courts (phase de subsidence)

Tout d'abord, il est possible de s'interroger sur l'existence d'une phase de subsidence pour des courants dans des tubes inclinés. Sur un support horizontal, cette phase est caractérisée par une vitesse de front à peu près constante, et un mélange inexistant. Dans toutes les autres phases des courants horizontaux, la vitesse décroît. Dans le cas des courants inclinés dans des tubes, il est possible d'identifier deux phases sur les diagrammes spatio-temporels, et ceci pour tous les angles d'inclinaison. Ces phases sont toutes deux caractérisées par une vitesse de front constante. La première ne présente pas de mélange au niveau du front et conserve donc un saut relatif de densité au front de 100%. Elle correspond à un effondrement du volume de fluide lourd juste après l'ouverture de la vanne et avant que les phénomènes visqueux aient le temps de se développer (ce point sera précisé plus loin). A ce titre, nous pouvons parler de phase de subsidence pour la première phase de vie d'un courant de gravité confiné dans un tube incliné. La valeur du nombre de Froude Fr ($Fr = V_f / \sqrt{gH}$ où H est soit la hauteur du canal pour les simulations 3D-SQR et 2D, soit le diamètre du tube pour les simulations 3D-AXI) pendant la phase de subsidence pour des courants inclinés est reportée sur la figure 4.18. Cette figure tend à confirmer quelques observations déjà faites dans la partie précédente.

Tout d'abord, les valeurs des vitesses relevées par Séon (2006) pour des angles proches de l'horizontale sont reportées sur la figure 4.18 et nous pouvons observer un excellent accord avec nos simulations.

Ensuite, il est très clairement visible sur les courants à $\theta = 50^\circ$ que la vitesse du front du courant 2D est la même que celle du courant 3D-SQRP pendant cette phase initiale. En revanche les courants 2D ont une vitesse légèrement inférieure aux courants 3D-SQR pour tous les angles d'inclinaison (sauf $\theta = 90^\circ$). La différence entre la géométrie classique 3D-SQRP (utilisée par exemple par Cantero *et al.* (2007), Härtel *et al.* (2000b)) et notre cas 3D-SQR est le forçage

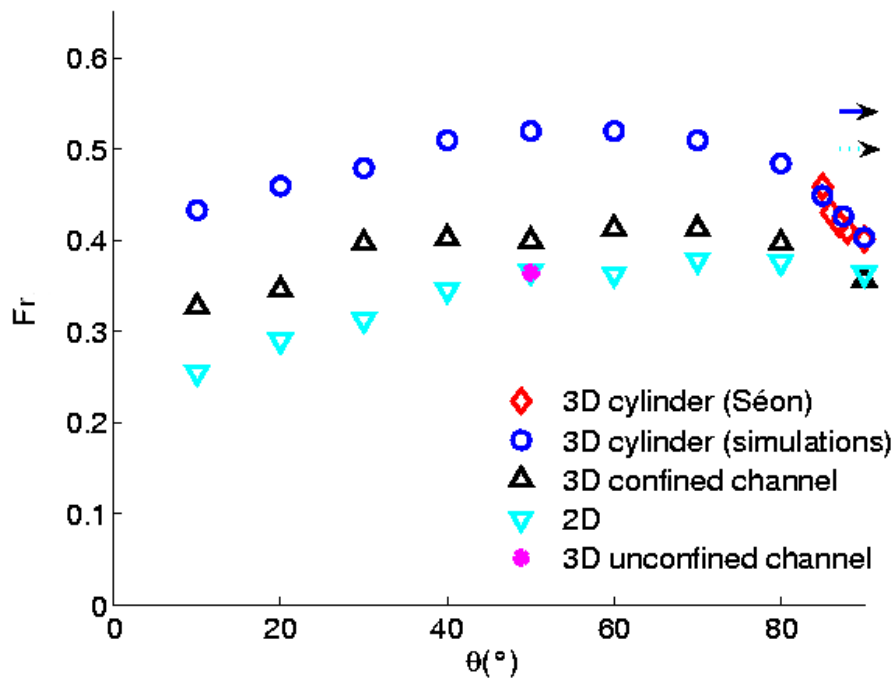


FIG. 4.18 – Nombre de Froude pendant la phase initiale de subsidence dans un tube incliné pour différentes géométries. \diamond : expériences de Séon ($Re = 790$), \circ : simulation en tube cylindrique 3D-AXI ($Re = 790$), \triangle : simulations en canal 3D-SQR ($Re = 660$), ∇ : simulations 2D ($Re = 790$), $*$: simulation en canal sans parois dans la direction transverse 3D-SQRP ($Re = 660$), \rightarrow et $\cdots \rightarrow$ résultats de Benjamin pour un cylindre horizontal ($Fr = 0.542$) et 2D ($Fr = 0.5$), respectivement.

de la tridimensionnalité par l'existence des couches limites sur les parois verticales dans cette dernière configuration. La figure 4.19 permet de comparer la structure du courant au même instant ($T \simeq 10$) dans les trois simulations : 3D-SQR en (a), 3D-SQRP en (b) et 3D-SQRP avec une perturbation 3D aléatoire et de faible amplitude du champ de densité au niveau de l'interface initiale en (c) (insistons sur le fait que les cas (a) et (b) ne font pas intervenir de perturbation initiale). Cette figure montre que la simulation 3D-SQRP de 4.19(b) ne donne qu'un écoulement 2D bien plus lent qu'un écoulement 3D. En effet, il n'y a rien dans ce cas qui force la tridimensionnalité de l'écoulement. En revanche, la même simulation initialisée avec une perturbation 3D aléatoire de faible amplitude dans l'interface initiale conduit au résultat observable sur 4.19(c). Typiquement, cette perturbation déplace localement l'interface sur une distance $\pm 0.02H$. On peut noter que les courants (a) et (c) ont leur front situé quasiment à la même position bien que les conditions aux limites soient différentes dans la direction transverse horizontale. Ainsi, c'est le caractère 3D de l'écoulement qui influence la vitesse de propagation des courants, indépendamment de l'origine de cette tridimensionnalité (parois ou perturbation initiale). Nous pouvons également conclure que pour les nombres de Reynolds modérés ($Re <$

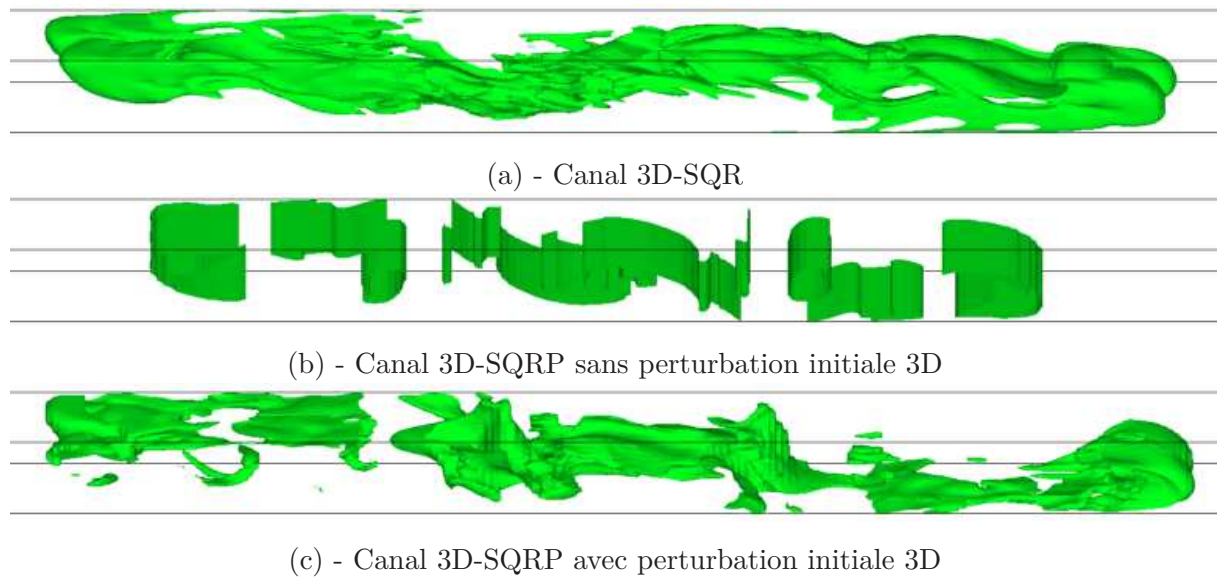


FIG. 4.19 – Iso-surface de densité $(\rho_1 + \rho_2)/2$ en canaux 3D inclinés à 50° .

$O(10^3)$) les simulations bidimensionnelles tendent à sous-estimer la vitesse des courants inclinés dans la phase initiale par rapport aux vitesses obtenues pour les géométries 3D-AXI ou 3D-SQR.

Concernant la dépendance de la vitesse du front vis-à-vis de l'angle θ , il apparaît que pour une large gamme d'angles intermédiaires (disons de 40° à $70 - 80^\circ$) le nombre de Froude est à peu près constant. Les valeurs exactes ne sont pas très intéressantes puisqu'elles dépendent ici du nombre de Reynolds. En effet, dans des simulations 2D à $Re = 4000$ et $\rho_1/\rho_2 = 0.998$ [Birman et al. \(2007\)](#) obtiennent des nombres de Froude plus grands que ceux présentés ici et ceux de [Séon \(2006\)](#) : $Fr = 0.48$ en canal horizontal, et $Fr = 0.59$ en canal incliné à 50° . Cette comparaison montre que la dépendance de Fr vis-à-vis du nombre de Reynolds rapportée pour les courants horizontaux ([Cantero et al. \(2007\)](#), [Marino et al. \(2005\)](#) par exemple) existe aussi en géométrie confinée et inclinée.

En conclusion, nous pouvons dire que la géométrie joue un rôle important concernant la vitesse des courants horizontaux comme inclinés à nombre de Reynolds modéré, et ceci même dans la phase de subsidence. Tout d'abord les courants de gravité en tubes cylindriques sont bien plus rapides que ceux dans des tubes carrés. Nous avons par ailleurs confirmé l'idée qu'un courant en géométrie 3D mais non-confiné dans la direction transverse horizontale était strictement identique à un courant 2D pourvu que l'on n'introduise pas de perturbation artificielle tridimensionnelle durant cette phase initiale. En revanche si dans un canal 3D la tridimensionnalité de l'écoulement est forcée soit par la géométrie en introduisant des parois dans la direction transverse horizontale, soit par une perturbation artificielle, le courant qu'il contient se déplace plus vite qu'un courant 2D. Ceci montre que pour des nombres de Reynolds inférieurs à $O(10^3)$ au moins, les modèles 2D sont incapables de bien représenter un courant de gravité confiné latéralement en phase de subsidence en tube incliné. Enfin, quelle que soit la géométrie, la vitesse

des courants inclinés en phase de subsidence est à peu près indépendante de l'angle d'inclinaison pour des angles compris entre 40° et $70 - 80^\circ$ (mais ces valeurs sont susceptibles de dépendre de Ar et At) et décroît légèrement lorsque le tube devient plus vertical.

4.6 Conclusion

Nous pouvons désormais répondre aux questions posées en 4.3. Les simulations 2D ne sont pas représentatives (malheureusement !) des écoulements réels 3D tant au niveau quantitatif de la vitesse et de la concentration des fronts qu'au niveau qualitatif phénoménologique. Les vitesses des fronts sont plus faibles et leur dépendance angulaire n'est pas la même qu'en 3D. Le saut de concentration relatif est aussi plus faible. Il n'existe pas de régime en plateau comme identifié par [Séon *et al.* \(2005\)](#) car il n'existe pas de canal de fluide pur alimentant le front, et ceci indépendamment de l'angle d'inclinaison. Dans des cas extrêmes, la tête du courant peut même être détachée du reste de l'écoulement. Ceci est expliqué par la cohérence et l'intensité plus importantes des tourbillons bidimensionnels vis-à-vis des tourbillons tridimensionnels.

Nous avons aussi pu constater que les écoulements en géométrie 3D cylindrique et cartésienne présentaient des vitesses de front et sauts de concentration très proches aux temps longs. Le type de géométrie 3D, et notamment la présence des angles, semble ne pas être déterminante dans l'évolution des courants en géométrie inclinée. En revanche, la vitesse des courants en phase initiale est sensible à la géométrie, vraisemblablement à cause de la capacité de cette géométrie à faire transiter plus ou moins rapidement l'écoulement initial vers un écoulement 3D.

Chapitre 5

Eléments de la dynamique interne des courants de gravité en géométrie confinée et inclinée.

5.1 Introduction

Nous nous sommes intéressés dans le chapitre précédent à l'influence de la géométrie, notamment sur la vitesse de propagation des courants de gravité confinés et inclinés. Ce point présente des applications directes comme par exemple la prédiction de la vitesse de propagation d'un incendie dans un tunnel. Il est néanmoins intéressant de tenter d'avoir une compréhension plus profonde des mécanismes fondamentaux impliqués dans l'évolution des courants. C'est pourquoi nous allons dresser dans une première partie des bilans d'énergie et de taux de mélange au sein des courants afin de caractériser plus précisément l'écoulement. Nous évoquerons aussi dans ce chapitre plusieurs aspects des courants de gravité confinés et inclinés qui ont une influence locale sur leur vitesse de propagation ou sur la qualité du mélange transverse. Ainsi, nous décrirons dans une deuxième partie la structure tridimensionnelle du champ de vorticité au sein des courants et son influence sur le mélange transverse. L'influence locale de la vorticité sur la tête du courant et ses effets sur les fluctuations de vitesse du front seront évoqués ensuite. Nous verrons enfin dans une dernière partie que dans certaines zones de l'écoulement la vorticité peut disparaître quasiment complètement pour laisser place à un contre-écoulement laminaire : c'est le phénomène d'intermittence.

5.2 Inspection de quelques grandeurs intégrales

5.2.1 Bilans d'énergie dans le tube

Nous allons calculer un bilan d'énergie intégré sur l'ensemble du tube. Ce bilan s'écrit :

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho V_i V_i \right) = - \frac{\partial}{\partial x_i} (P V_i) + \rho g_i V_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu S_{ij} V_i) - 2\mu S_{ij} S_{ij} \quad (5.1)$$

En intégrant sur le volume du tube, les termes de flux (premier et troisième terme du membre de droite) disparaissent. Il reste alors :

$$\frac{DE_c}{Dt} = \int_{tube} \rho g_i V_i d\Omega - \int_{tube} 2\mu S_{ij} S_{ij} d\Omega \quad (5.2)$$

où l'énergie cinétique du fluide dans le tube est définie comme

$$E_c = \int_{tube} \frac{1}{2} \rho V_i V_i d\Omega \quad (5.3)$$

Il est possible de récrire le premier terme du membre de droite de 5.2 de la manière suivante :

$$\int_{tube} \rho g_i V_i d\Omega = \int_{tube} \rho g_i \frac{dx_i}{dt} d\Omega = \int_{tube} \frac{D\rho g_i x_i}{Dt} d\Omega - \int_{tube} \frac{D\rho}{Dt} g_i x_i d\Omega \quad (5.4)$$

Sans diffusion, le dernier terme de cette équation s'annule et nous pouvons écrire :

$$\frac{dE_p}{dt} = \int_{tube} \rho g_i V_i d\Omega \quad (5.5)$$

en définissant l'énergie potentielle E_p comme

$$E_p = \int_{tube} \rho g_i x_i d\Omega \quad (5.6)$$

Il vient alors :

$$\frac{d}{dt} (E_c + E_p) = -\epsilon \quad (5.7)$$

où $\epsilon = \int_{tube} 2\mu S_{ij} S_{ij} d\Omega$ est le taux de dissipation global dans l'ensemble du tube. Cette dernière relation peut s'intégrer en :

$$E_c(t) - E_{c0} + E_p(t) - E_{p0} = -E_d(t) \quad (5.8)$$

où $E_d(t) = \int_0^t \epsilon dt$ représente l'énergie dissipée depuis $t = 0$, E_{c0} l'énergie cinétique initiale et E_{p0} l'énergie potentielle initiale. Le système considéré évolue uniquement grâce à l'énergie potentielle disponible initialement. Elle s'écrit :

$$E_{p0}^* = E_{p0} - E_{p \text{ ambiante}} = E_{p0} - \int_{tube} \rho_1 g_i x_i d\Omega \quad (5.9)$$

Cette grandeur est caractéristique des énergies mises en jeu dans l'écoulement qui se produit dans le tube et peut donc servir pour adimensionner le bilan d'énergie. Nous pouvons ainsi définir :

$$E'_c(t) = E_c(t)/E_{p0}^* \quad (5.10)$$

$$E'_p(t) = (E_p(t) - E_{p \text{ ambiante}})/E_{p0}^* \quad (5.11)$$

$$E'_d(t) = E_d(t)/E_{p0}^* \quad (5.12)$$

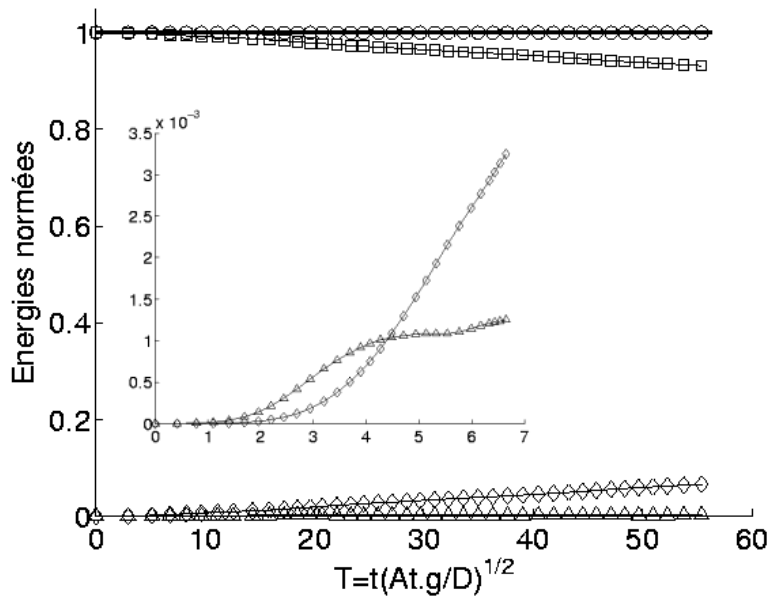


FIG. 5.1 – Evolution des énergies cinétique ($E_c(t)$, triangles), potentielle ($E_p(t)$, carrés) et dissipée ($E_d(t)$, losanges) dans un tube cylindrique incliné à 20° . Les cercles représentent la somme $E_c(t) + E_p(t) + E_d(t)$. L'encart représente l'évolution initiale de $E_c(t)$ et $E_d(t)$.

Par la suite, le "prime" dénotant les grandeurs adimensionnelles sera omis par souci de simplicité même si ce seront bien ces grandeurs que nous allons considérer. Notons qu'en suivant ces définitions et puisque $E_{c0} = 0$, le bilan d'énergie peut se réécrire :

$$E_c(t) + E_p(t) + E_d(t) = 1 \quad (5.13)$$

Nous allons dans un premier temps nous attacher à vérifier que le code conserve bien l'énergie et que le calcul des grandeurs en post-traitement ne modifie pas ce bilan. La figure 5.1 présente l'évolution des énergies cinétique, potentielle et dissipée pour la simulation en tube cylindrique incliné à 20° . Sur cette figure est ajoutée aux quantités définies ci-dessus la somme $E_c(t) + E_p(t) + E_d(t)$ en cercles. Nous pouvons remarquer qu'elle est très proche de 1. Un examen attentif montre que l'erreur commise sur le bilan d'énergie est de l'ordre de 0.005% à la fin de cette simulation. Le code conserve donc très bien l'énergie. En dehors de cette information, cette figure n'est pas très bien adaptée à la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu puisque le tracé de l'énergie cinétique semble confondu avec l'axe des abscisses.

Pour plus de clarté, la figure 5.2 représente les énergies cinétique, dissipée et l'énergie potentielle normée déjà utilisée $1 - E_p(t)$. D'après cette figure, nous pouvons constater que l'énergie potentielle libérée ne représente qu'environ 7% de l'énergie disponible initialement lorsque les courants ont déjà parcouru environ 73% de la longueur de tube mise à leur disposition. Elle montre aussi que l'énergie cinétique commence par croître jusqu'à $T \simeq 20$ ici, puis reste à peu près constante. Ensuite, la quasi-totalité de l'énergie potentielle libérée dans l'écoulement est dissipée. L'encart

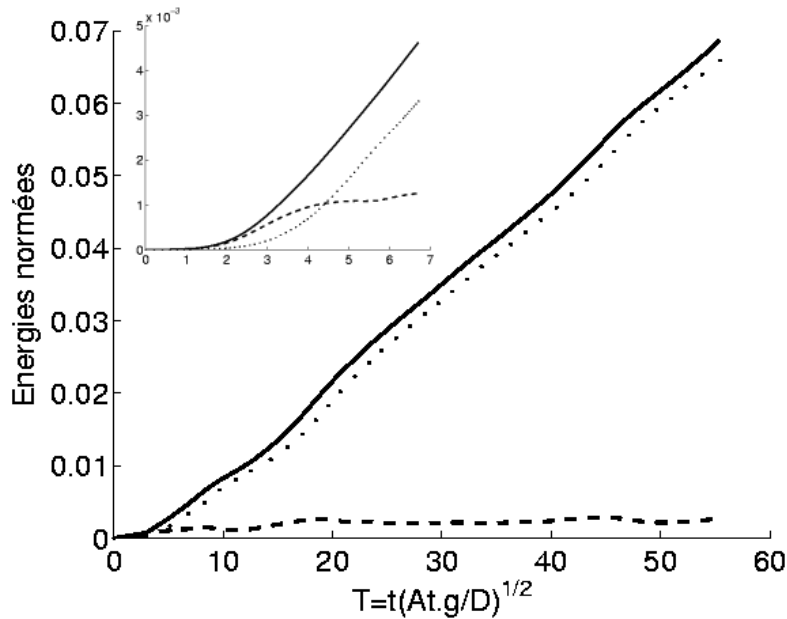


FIG. 5.2 – Evolution des énergies cinétique ($E_c(t)$, tirets), dissipée ($E_d(t)$, points) et de l'énergie potentielle utilisée ($1 - E_p(t)$, trait plein) dans un tube cylindrique incliné à 20° . L'encart représente l'évolution initiale de ces grandeurs. L'essentiel de l'énergie cinétique dans le tube est dû à la composante de vitesse le long de l'axe du tube.

de la figure 5.2 montre qu'initialement (jusqu'à $T \simeq 3$) l'écoulement est quasiment conservatif, comme attendu pour la phase de subsidence bien identifiée par exemple dans les courants de gravité atmosphériques. Puis suit une période au cours de laquelle l'écoulement commence à dissiper de l'énergie (de $T \simeq 3$ à $T \simeq 6 - 7$), bien que la dissipation reste faible ou comparable à l'énergie cinétique. Il faut garder en tête ici que $E_d(t)$ représente l'énergie dissipée depuis le début de la simulation alors que $E_c(t)$ est l'énergie cinétique instantanée dans le tube. Enfin, pour T plus grand, l'écoulement est de plus en plus dominé par la dissipation. Il est intéressant de noter que l'échelle de temps correspondant à la période initiale durant laquelle la dissipation ne domine pas tout l'écoulement est aussi l'échelle de temps correspondant à la phase d'évolution initiale du courant sans mélange et à vitesse maximale (voir 5.11). Nous avons appelé "phase de subsidence" cette phase initiale à vitesse de front constante par analogie à la phase initiale des courants de gravité non-confinés, sur support horizontal et à grand nombre de Reynolds. Pour ces courants de gravité "classiques", de nombreuses expériences ont montré que la vitesse du front durant cette phase s'approche beaucoup de la prédiction non-visqueuse de Benjamin (1968). L'encart de la figure 5.2 indique le même type de comportement, mais la dissipation prend très vite le dessus. Il serait intéressant de clarifier ce point grâce à une simulation 3D en tube incliné à grand nombre de Reynolds.

Au contraire de nos résultats, les bilans d'énergie réalisés par Birman *et al.* (2005) sur des

courants horizontaux à $Re = 4000$ montrent une nette domination de l'énergie cinétique par rapport à la dissipation. Cependant, ces auteurs ont essentiellement utilisé des conditions aux limites de type "glissement" et n'ont pas reproduit leurs bilans pour des conditions de type "non-glissement". Or [Bonometti et al. \(2007\)](#) ont montré que la dissipation au niveau des parois est loin d'être négligeable par rapport à la dissipation à "l'interface" entre les courants pour de faibles rapports de densité et à $Re = 7071$ (leur résultat principal étant tout de même la prédominance de la dissipation aux parois par rapport à la dissipation à l'interface pour des courants à grand rapport de densité). Cet effet, combiné au nombre de Reynolds modéré utilisé dans ce travail, est susceptible d'expliquer la différence de comportement que nous observons par rapport à [Birman et al. \(2005\)](#).

5.2.2 Efficacité globale du mélange

Nous allons nous intéresser ici à l'efficacité moyenne du mélange en fonction de la position le long du tube. L'efficacité moyenne du mélange est définie par la moyenne de $C(1 - C)$ sur une section du tube S , soit $\langle C(1 - C) \rangle_S$. Cette grandeur dépend donc uniquement de la position x le long de l'axe du tube et vaut notamment 0 à proximité des extrémités de ce dernier puisqu'il n'y a là que l'un ou l'autre fluide pur. Le maximum de cette efficacité de mélange est atteint lorsque $C = 0.5$. Les tracés de $C(1 - C)$ seront donc normés par 0.25 de manière à ramener cette grandeur entre 0 et 1. Les profils de cette efficacité longitudinale de mélange sont reportés sur la figure 5.3 pour différents angles et pour trois positions de front. Sur ces figures sont superposées aux résultats des simulations des gaussiennes centrées au milieu du tube et dont l'écart-type et l'amplitude sont ajustés par une méthode des moindres carrés. Nous pouvons remarquer que pour $\theta = 0^\circ$ le profil de l'efficacité de mélange est toujours quasi-parfaitement gaussien. La distribution initiale de $C(1 - C)$ est proche d'une distribution de Dirac. On peut alors penser à une évolution diffusive de $\langle C(1 - C) \rangle_S$, mais si l'écart-type grandit effectivement avec le temps, l'amplitude reste constante. Il ne s'agit donc pas d'une évolution diffusive simple. Pour des angles faibles, ici entre 10° et 40° environ, le profil de $\langle C(1 - C) \rangle_S$ est initialement gaussien, puis il présente une large région centrale avec une valeur de $\langle C(1 - C) \rangle_S$ à peu près constante en moyenne (voir figure 5.3(e)), et finit par s'approcher à nouveau d'une gaussienne pour des temps plus longs (figure 5.3(f)). Ce retour à une distribution gaussienne n'est cependant pas extrêmement clair et de plus longues simulations permettraient d'en acquérir la certitude. Il est aussi plus franc pour des tubes plus proches de la verticale. Enfin, pour des angles plus importants, le profil de l'efficacité de mélange est relativement plat (figure 5.3(i)), ce qui traduit une certaine homogénéité du mélange suivant la direction de l'axe du tube. Ce dernier cas correspond aux régimes d'écoulement présentant des canaux de fluide pur alimentant les fronts et une zone de mélange entre les deux. Il n'est donc pas étonnant de retrouver une certaine invariance selon l'axe du tube. L'évolution quasi-diffusive de $\langle C(1 - C) \rangle_S$ pour les tubes verticaux ou proches de la verticale n'est pas non plus vraiment une surprise puisque [Debacq et al. \(2003\)](#) et [Séon \(2006\)](#)

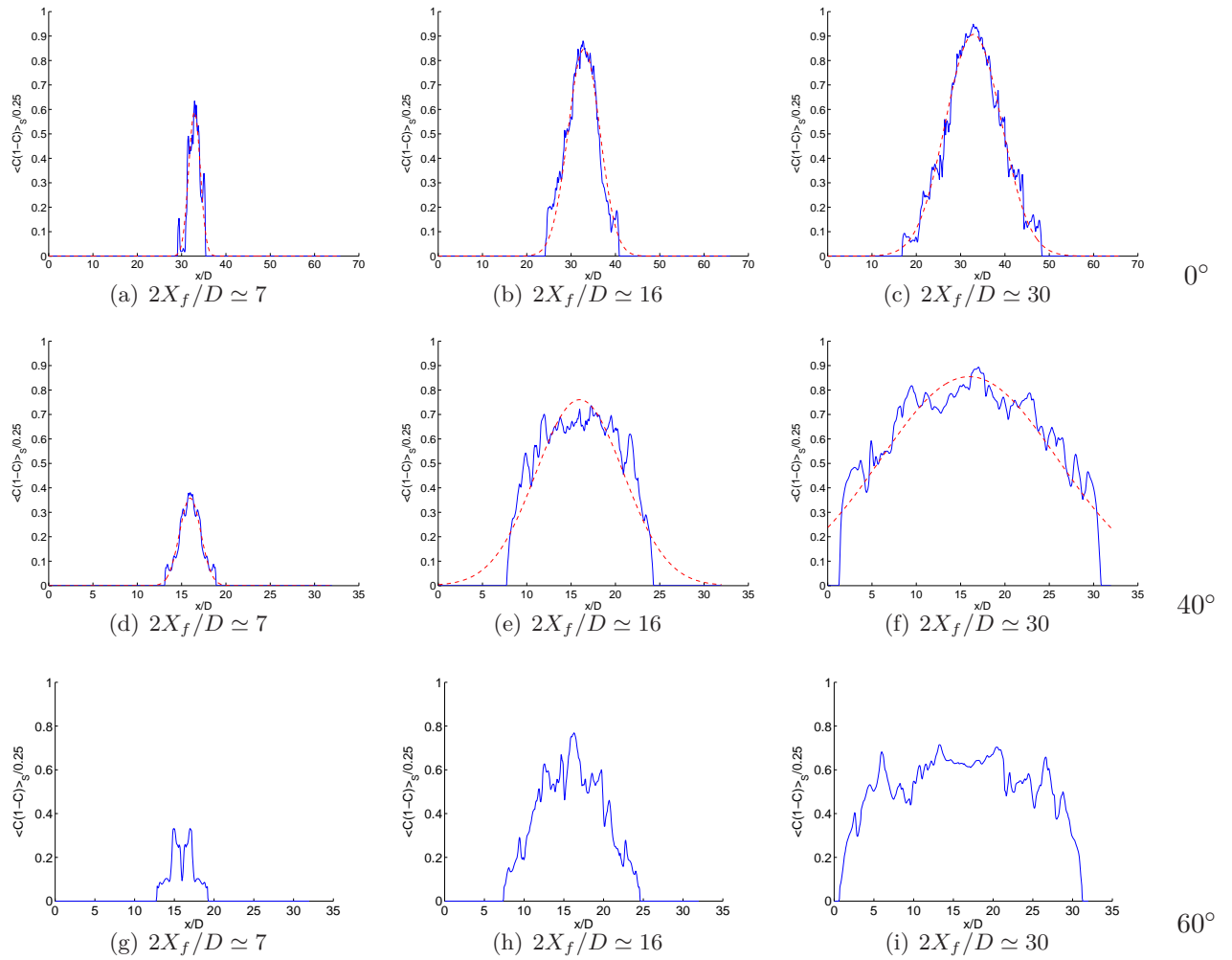


FIG. 5.3 – Profils d’efficacité de mélange moyennée par section $\langle C(1-C) \rangle_s / 0.25$. Les tracés (a), (b) et (c) correspondent à la simulation 3D-AXI à $\theta = 0^\circ$, les tracés (d), (e) et (f) à la simulation 3D-AXI à $\theta = 40^\circ$ et les tracés (g), (h) et (i) à la simulation 3D-AXI à $\theta = 60^\circ$. Les courbes en traits pleins sont issues des simulations, les courbes en tirets sont des gaussiennes.

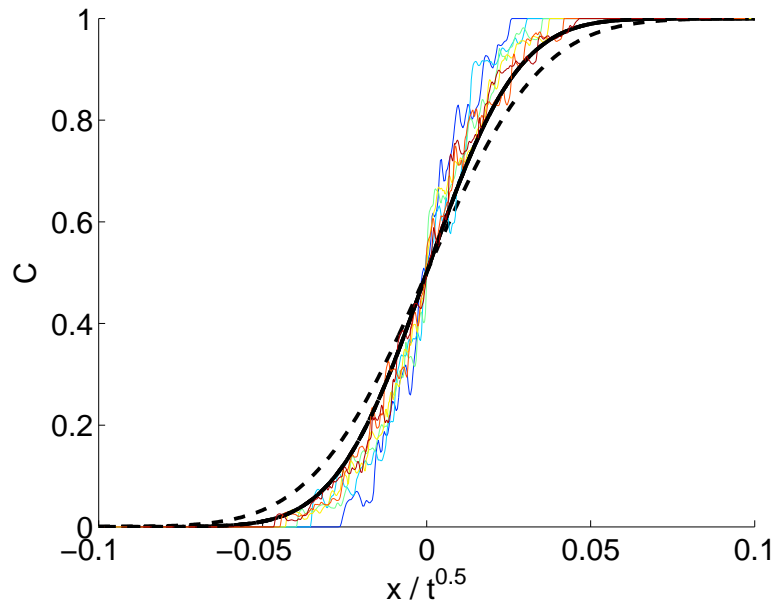


FIG. 5.4 – Profils diffusifs de $\langle C \rangle_S$ suivant l’axe d’un tube cylindrique vertical pour quelques temps différents. Les profils en bleu sont obtenus pour des temps courts, les rouges pour des temps longs et les couleurs intermédiaires correspondent à des temps intermédiaires. La courbe en trait épais est une fonction erreur solution de l’équation de diffusion monodimensionnelle avec un coefficient de diffusion équivalent $\mathcal{D} = 2.36 \times 10^{-4} m^2 s^{-1}$ (soit un nombre de Schmidt $Sc = 236$). La courbe en tirets épais est une fonction erreur solution de l’équation de diffusion monodimensionnelle avec un coefficient de diffusion équivalent $\mathcal{D} = 3.7 \times 10^{-4} m^2 s^{-1}$ (soit un nombre de Schmidt $Sc = 370$) obtenu par [Debacq et al. \(2003\)](#).

ont reporté des profils de $\langle C \rangle_S$ en $erf(x/\sqrt{t})$ pour des tubes verticaux et légèrement inclinés. Ceci a permis à ces auteurs d’écrire une équation de diffusion pour $\langle C \rangle_S$ avec un coefficient de diffusion équivalent macroscopique supérieur de plusieurs ordres de grandeur au coefficient de diffusion moléculaire. Nous avons retrouvé par simulation numérique le profil diffusif de $\langle C \rangle_S$ pour un tube cylindrique vertical (voir figure 5.4). Le coefficient de diffusion macroscopique obtenu numériquement ($\mathcal{D}_{num} \simeq 2.36 \times 10^{-4} m^2 s^{-1}$, soit $Sc_{num} \simeq 236$) est voisin de celui obtenu expérimentalement ($\mathcal{D}_{exp} \simeq 3.7 \times 10^{-4} m^2 s^{-1}$, soit $Sc_{exp} \simeq 370$). La simulation qui a permis d’arriver à ce résultat est une simulation parallèle rallongée autant que celle du tube à 20° et nous pouvons voir sur la figure 5.4 que les profils de $\langle C \rangle_S$ ne sont que quasiment convergés vers le profil diffusif. Ce dernier est relativement difficile à obtenir numériquement en raison du temps physique important nécessaire pour l’établissement du régime autosimilaire. Il est donc probable qu’en prolongeant encore cette simulation les résultats numériques se rapprocheraient encore des résultats expérimentaux. [Séon \(2006\)](#) a aussi reporté des profils quasiment diffusifs pour des tubes inclinés mais proches de la verticale. Ces profils sont de plus en plus éloignés

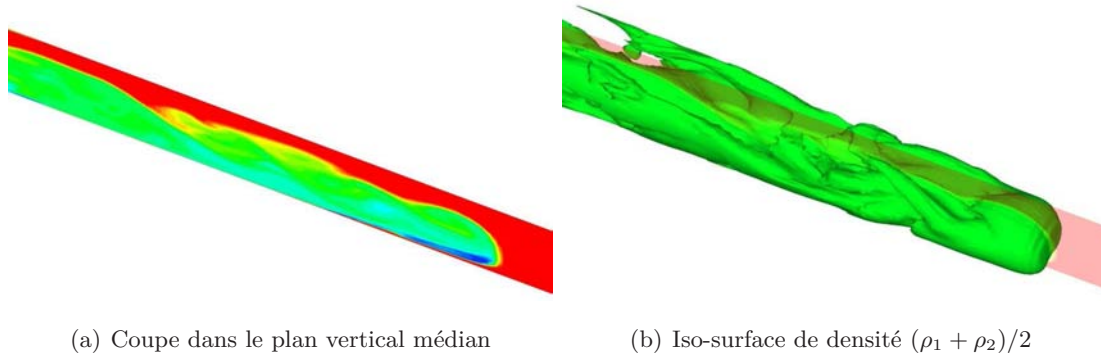


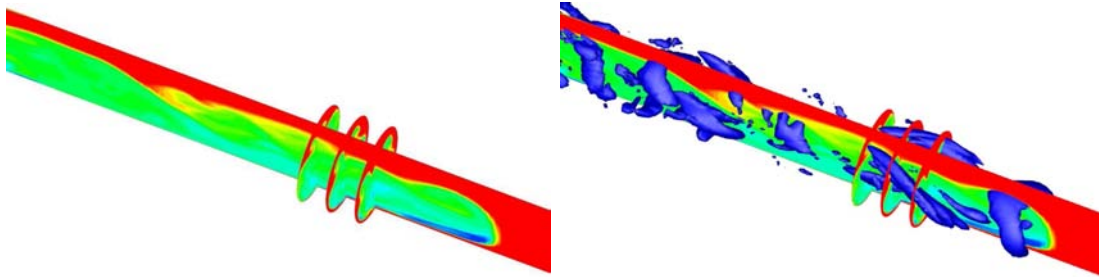
FIG. 5.5 – Visualisations du champ de densité dans un tube cylindrique incliné à 30° .

d'une fonction erreur à mesure que l'angle d'inclinaison augmente. Il est ainsi cohérent avec les expériences que nous trouvons des profils plus ou moins gaussiens pour $\langle C(1 - C) \rangle_S$ avec une ressemblance plus forte pour des angles proches de la verticale et une difficulté à converger vers la forme définitive aux temps longs.

5.3 Organisation globale des structures tourbillonnaires 3D en tube incliné.

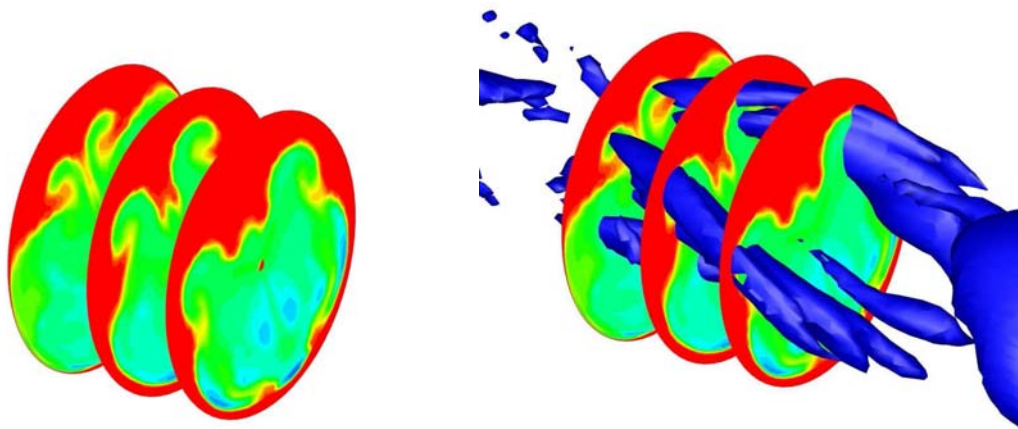
Nous allons considérer ici des écoulements en géométrie 3D inclinée. Pour comprendre les mécanismes 3D intensifiant ou atténuant le mélange entre les courants, nous allons observer le champ de vorticité au sein de la zone de mélange. Les figures 4.14 montrent par exemple le champ de densité dans le plan vertical médian des tubes inclinés à 20° ou 60° . Cette représentation ne permet de se faire qu'une idée approximative de la répartition tridimensionnelle des deux fluides. La figure 5.5 (a) présente le plan vertical médian d'un tube incliné à 30° . La figure 5.5 (b) reprend ce plan avec en plus l'iso-surface de densité $(\rho_1 + \rho_2)/2$. On voit alors que l'organisation spatiale du champ de densité est bien plus complexe qu'il n'y paraît avec uniquement le tracé de contours dans le plan médian. Il est en effet possible de distinguer de longues structures inclinées plus ou moins selon l'axe du tube à "l'interface" entre les courants. Plusieurs coupes dans le champ de densité réalisées à travers ces structures sont visibles sur les figures 5.6 (a) et (c). Ces coupes montrent que la zone de fluide "lourd" semble s'enrouler autour de deux tourbillons dans la partie supérieure du tube. La matérialisation des tourbillons existant dans cette région est ajoutée en iso-surface sur les figures 5.6 (b) et (d). Nous pouvons voir que ces tourbillons sont responsables de la déformation du champ de densité dans la direction transverse de l'écoulement, et qu'ils ont donc un rôle important à jouer dans la qualité du mélange transverse. La figure 5.7 présente une vue globale de ces tourbillons dans l'ensemble du tube.

Les tracés (a) et (b) sont des vues de dessus et de côté, respectivement. Grâce à la vue de dessus (a), il est possible de remarquer que les tourbillons sont à peu près symétriques par



(a) Coupes transverses au tube : iso-contours de densité

(b) Comme (a) avec en plus la matérialisation des tourbillons par une iso-surface de Λ



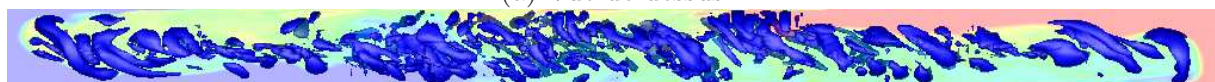
(c) Coupes transverses au tube : iso-contours de densité

(d) Comme (c) avec en plus la matérialisation des tourbillons par une iso-surface de Λ

FIG. 5.6 – Interaction du champ de vorticité avec le champ de densité



(a) Vue de dessus



(b) Vue de côté

FIG. 5.7 – Vue d'ensemble des structures tourbillonnaires présentes dans le tube

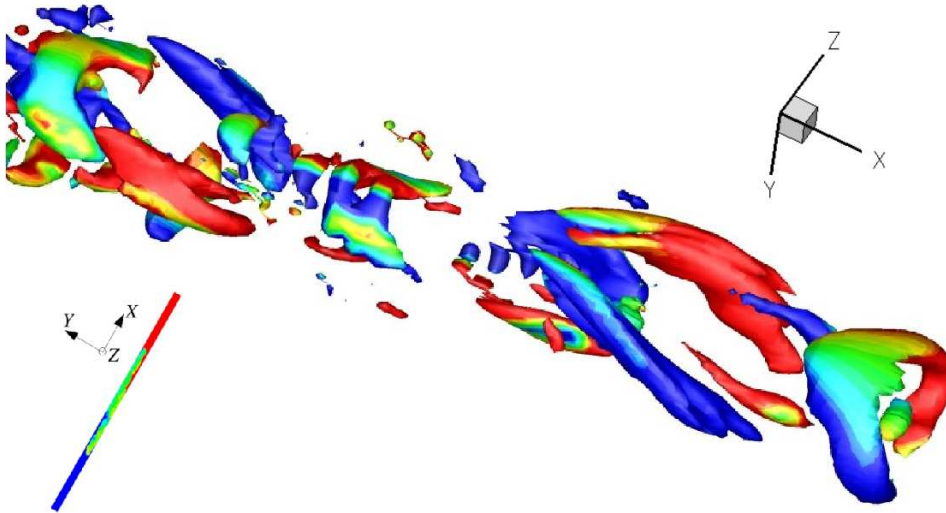


FIG. 5.8 – Matérialisation des tourbillons dans le tube incliné à 30° par une iso-surface de Λ colorée par la vorticité selon \mathbf{Y} (bleu pour des valeurs importantes selon $+\mathbf{Y}$ et rouge pour des valeurs importantes selon $-\mathbf{Y}$)

rapport au plan vertical médian. D'autre part, la vue de côté (b) montre que ces tourbillons sont inclinés à 45° environ, et en moyenne, par rapport à l'axe du tube.

Le tracé de l'intensité de vrillage (voir Annexe A) permet de matérialiser les tourbillons mais pas d'en donner le sens de rotation. C'est pourquoi les structures tourbillonnaires de la figure 5.8 sont colorées suivant la vorticité suivant l'axe \mathbf{Y} (axe transverse au tube, dans le plan vertical). Dans ce code de couleurs, la vorticité selon $+\mathbf{Y}$ apparaît en bleu tandis que la vorticité selon $-\mathbf{Y}$ apparaît en rouge. Il existe aussi des zones vertes correspondant à une vorticité nulle selon \mathbf{Y} . Ces zones sont donc des zones tourbillonnaires mais leur axe de rotation est dirigé suivant la direction transverse horizontale du tube. Ainsi, les zones vertes sont des structures de type Kelvin-Helmholtz (bien qu'il soit délicat de les assimiler vraiment à un type générique particulier dans la mesure où l'écoulement est très confiné par la géométrie cylindrique), tandis que les tourbillons symétriques sont contra-rotatifs. Une telle organisation tourbillonnaire n'est pas sans rappeler la structure des couches de mélange. En effet, dans cet écoulement, l'instabilité primaire est une instabilité 2D de Kelvin-Helmholtz, suivie d'une instabilité secondaire 3D qui se développe grâce à la déformation par une perturbation tridimensionnelle d'une structure de Kelvin-Helmholtz (voir par exemple [Lasheras & Choi \(1988\)](#)). Celle-ci se plisse pour faire apparaître des tourbillons contra-rotatifs inclinés et appuyés sur d'autres structures de Kelvin-Helmholtz.

Il n'est cependant pas aisé de savoir, d'après la figure 5.8, si les tourbillons contra-rotatifs que nous observons résultent effectivement d'une telle instabilité ou s'ils sont issus d'une interaction des courants avec la paroi. Dans le but d'éclaircir ce point, une simulation 3D a été conduite dans

un domaine plus large avec $Ar = 470$ et $At = 0.004$. Le domaine est ici un parallélépipède de hauteur h , de largeur $4h$ et de longueur $9.4h$. Il est discrétisé par $32 \times 64 \times 128$ mailles. Sa longueur est relativement faible devant celle des tubes déjà étudiés, mais nous ne sommes pas intéressés ici par un régime aux temps longs. Il s'agit uniquement de vérifier si, toutes propriétés physiques identiques par ailleurs, nous obtenons dans ce nouveau domaine uniquement deux tourbillons contra-rotatifs, auquel cas ils seraient dus aux parois, ou bien plusieurs paires de tourbillons dont l'espacement serait plus ou moins celui de la figure 5.8, ce qui tendrait à attribuer les tourbillons de cette dernière à une instabilité 3D de type couche de mélange. Il est à noter que nous avons introduit une perturbation dans l'interface séparant initialement les fluides de manière à provoquer la transition vers un régime 3D plus rapidement. La figure 5.9 montre l'iso-surface de densité moyenne à trois stades de l'évolution des courants : en (a) le régime initial est essentiellement 2D, en (b) les premières instabilités 3D apparaissent, puis en (c) la zone de mélange est pleinement développée. Nous pouvons y voir les structures typiques en lobes et fentes (lobes and clefts) des courants de gravité atmosphériques. La figure 5.10 montre les structures tourbillonnaires observables dans cette expérience numérique aux mêmes instants que ceux de la figure 5.9. Dans le régime initial 2D (a) seules des structures 2D de Kelvin-Helmholtz sont visibles, puis en (b) apparaissent les premières structures 3D. Ce ne sont pas celles observées précédemment. En effet, les structures de 5.10 (b) sont localisées sous le nez des courants et non pas au sein de la zone de mélange. Ce point est très intéressant puisque [Härtel et al. \(2000b\)](#) ont montré grâce à une étude de stabilité que c'est précisément à cet endroit que des perturbations initialement introduites dans l'écoulement ont le plus fort taux de croissance. Ces auteurs ont par ailleurs montré que cette instabilité se développant très tôt sous le nez du courant était responsable de la formation des lobes et fentes des courants de gravité atmosphériques. Enfin, la figure 5.10 (c) montre le régime 3D pleinement développé avec des structures colorées suivant le code de la figure 5.8. Des tourbillons contra-rotatifs inclinés et alignés avec l'écoulement y sont clairement visibles. Ils sont effectivement "appuyés" sur les structures 2D de Kelvin-Helmholtz et ont un espacement comparable à celui observé sur la figure 5.8. Il semble que la forme des tourbillons contra-rotatifs en tube cylindrique soit tout de même un peu perturbée par la paroi du tube puisqu'ils sont légèrement incurvés. Compte tenu de ces éléments, il devient possible d'affirmer que les tourbillons inclinés et contra-rotatifs observés en tube incliné sont issus d'une instabilité de type instabilité secondaire 3D de couche de mélange, et non d'une onde due aux parois. Ils sont bien sûr par ailleurs confinés et donc déformés par les parois du tube, ce qui rend toute quantification de leur taille ou de leur espacement en vue d'une comparaison avec une couche de mélange classique hasardeuse.

Nous avons vu que des structures tridimensionnelles existaient au sein du courant et qu'elles avaient une influence importante sur le mélange transverse le long du corps des courants. Nous allons maintenant montrer que la vorticit   a aussi une influence sur la t  te des courants confin  s et inclin  s. Elle est donc susceptible d'influencer la vitesse de propagation des courants qui,

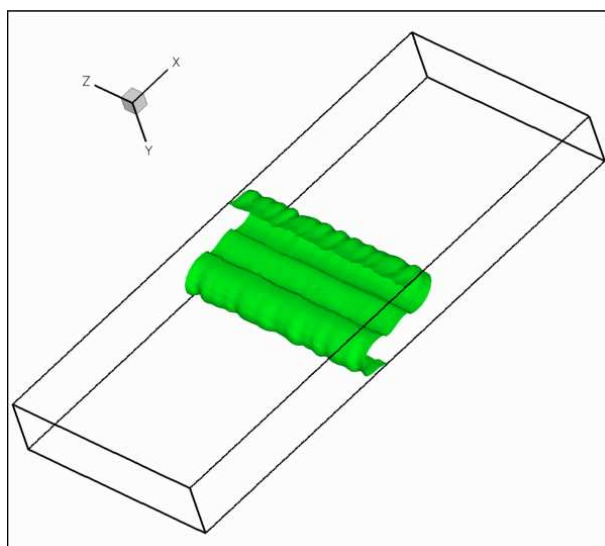
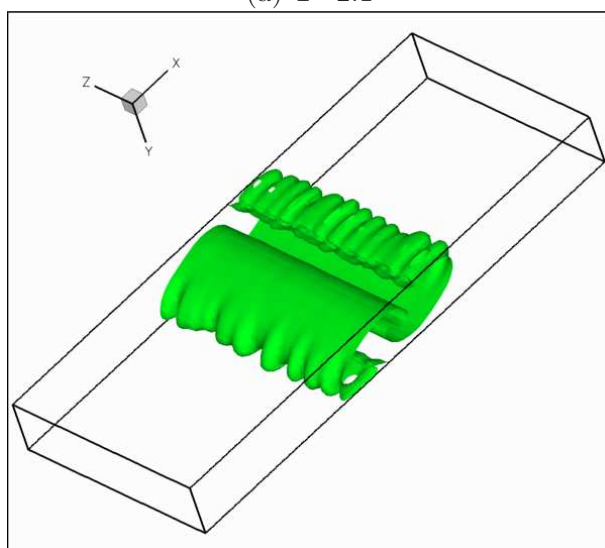
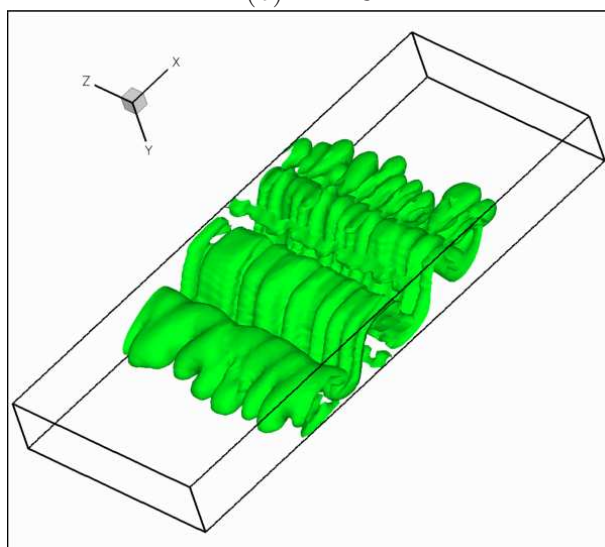
(a) $T=2.1$ (b) $T=2.8$ (c) $T=4.2$

FIG. 5.9 – Iso-surface de densité $(\rho_1 + \rho_2)/2$ à trois instants de l'évolution d'un courant de gravité en géométrie 3D-SQR inclinée à 40° et élargie.

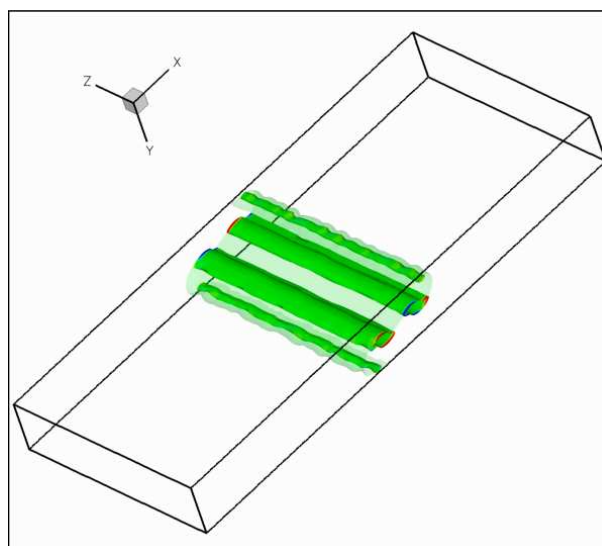
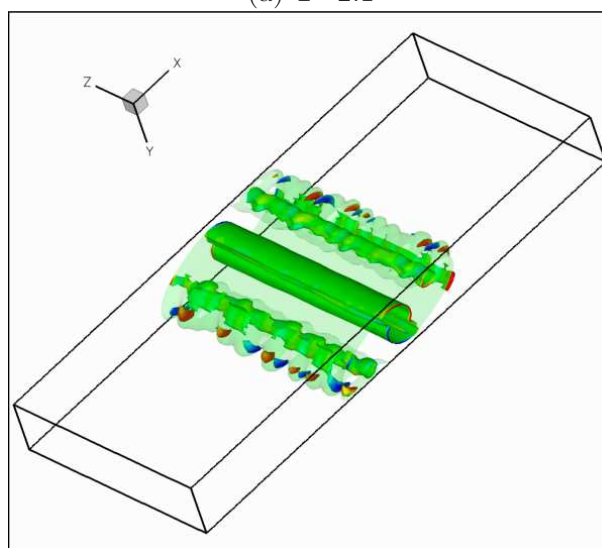
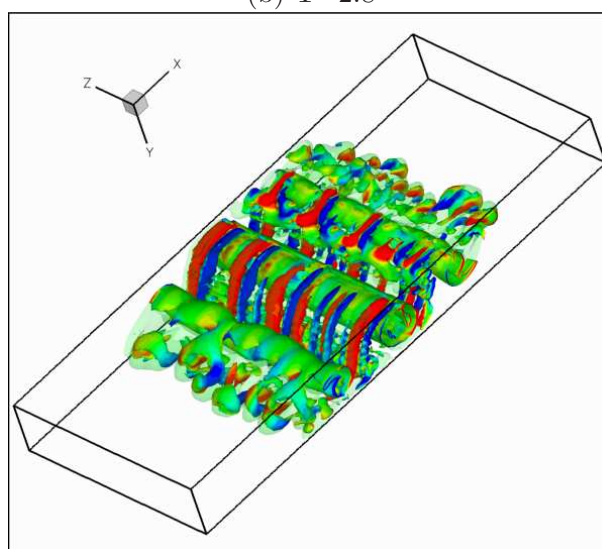
(a) $T=2.1$ (b) $T=2.8$ (c) $T=4.2$

FIG. 5.10 – Surface transparente : Iso-surface de densité $(\rho_1 + \rho_2)/2$; surface colorée : Iso-surface de Λ colorée par la vorticité selon X à trois instants de l'évolution d'un courant de gravité en géométrie 3D-SQR inclinée à 40° et élargie.

rappelons le, est uniquement déterminée par la dynamique du front pour les régimes inertiels existants pour des angles θ compris entre 0° et 80° environ.

5.4 Fluctuations de vitesse du front d'un courant de gravité confiné et incliné.

Les expériences en laboratoire présentent l'avantage de pouvoir étudier en détail le régime pseudo-stationnaire puisque la taille du dispositif et le temps de réalisation physique de l'expérience sont raisonnables. Nous avons vu que la simulation peine à atteindre ce régime en un temps de calcul et avec une taille en mémoire vive raisonnables. En revanche, un des avantages de la simulation est de pouvoir accéder aux champs 3D instantanés avec une bonne précision temporelle et spatiale dans les régimes transitoires initiaux. Nous allons maintenant exploiter cet avantage en analysant quelques éléments de la dynamique locale et à petite échelle temporelle des courants confinés inclinés.

Avant de se stabiliser vers sa vitesse finale, le courant en géométrie cylindrique commence sa propagation dans la phase de subsidence avec une vitesse maximale. Il ralentit ensuite progressivement pour atteindre sa vitesse terminale à mesure que le saut de concentration local au niveau du front diminue vers sa valeur d'équilibre (FIG. 5.11). Séon *et al.* (2006) ont montré qu'au cours de cette période de ralentissement, la relation $V_f/V_p \simeq 0.7\sqrt{C_f}$ est aussi valide, tout comme pour les vitesses et concentrations terminales. Nous retrouvons ce comportement comme le montre la figure 5.11. Sur cette figure, nous avons représenté $\sqrt{C_f}$ (en pointillés) et $\frac{V_f}{0.65\sqrt{AtgD}}$ (en trait plein) en fonction du temps pour un tube incliné à 20° . Le préfacteur a été choisi ici à 0.65 car c'est la valeur qui fait le mieux coïncider les deux courbes pour cette expérience numérique. Plusieurs idées intéressantes peuvent être tirées de cette figure.

Tout d'abord, il est évident que même durant le régime transitoire les deux grandeurs suivent exactement la même tendance moyenne. En revanche, la vitesse du front présente de fortes oscillations qui ne sont pas associées à de franches oscillations de $C_f^{1/2}$, notamment pour $20 < T < 40$. Dans l'espoir de clarifier l'origine de ces fluctuations de vitesses, nous allons définir deux nouvelles grandeurs. Ces grandeurs sont calculées sur un volume représentatif de la tête du courant considéré. Ce volume \mathcal{V}_{1D} (voir FIG. 5.12) est une portion de tube délimitée à l'avant par la section transverse au niveau du front et à l'arrière par la section transverse située à un diamètre du front. La première grandeur est la fraction volumique α occupée par la tête du courant dans le tube. Elle est calculée en formant le rapport du volume occupé par la tête du courant dans le volume de contrôle \mathcal{V}_{tete} au volume \mathcal{V}_{1D} lui-même. L'"intérieur" du courant est défini comme la zone dans laquelle $C < 0.99$. La deuxième grandeur est l'intensité de vrillage adimensionnée $\Lambda\sqrt{d/(Atg)}$, moyennée sur le volume de contrôle \mathcal{V}_{1D} . La figure 5.13 est un grossissement de la figure 5.11 pour $20 < T < 40$ sur lequel sont ajoutées les deux nouvelles grandeurs α et

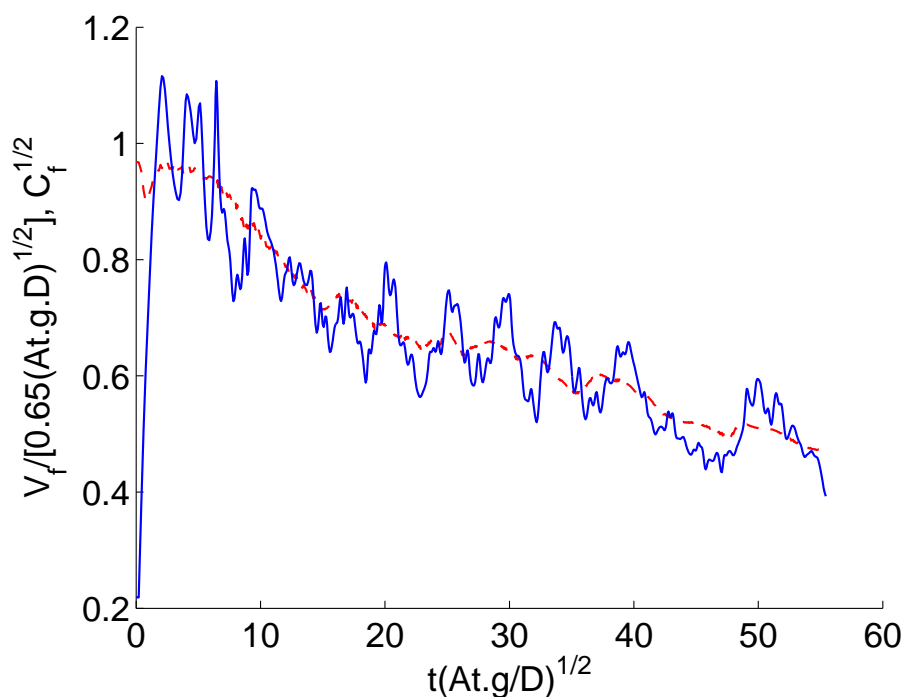


FIG. 5.11 – $\frac{V_f}{0.65\sqrt{At.g.D}}$ (trait plein) et $\sqrt{C_f}$ (tirets) au cours du temps pour un tube cylindrique incliné à 20° .

$\Lambda\sqrt{d/(Atg)}$. Cette figure montre bien que les maxima locaux de la vitesse du front coïncident avec les minima locaux de α et Λ , et vice-versa. Ceci nous indique que le volume de la tête ainsi que la vitesse du front sont contrôlés par l'activité tourbillonnaire au niveau de la tête du courant. Plus précisément, le pompage d'énergie cinétique nécessaire à l'augmentation de l'activité tourbillonnaire au niveau de la tête (notamment via l'instabilité de Kelvin-Helmholtz) semble être responsable du ralentissement du front. La croissance du tourbillon ainsi généré

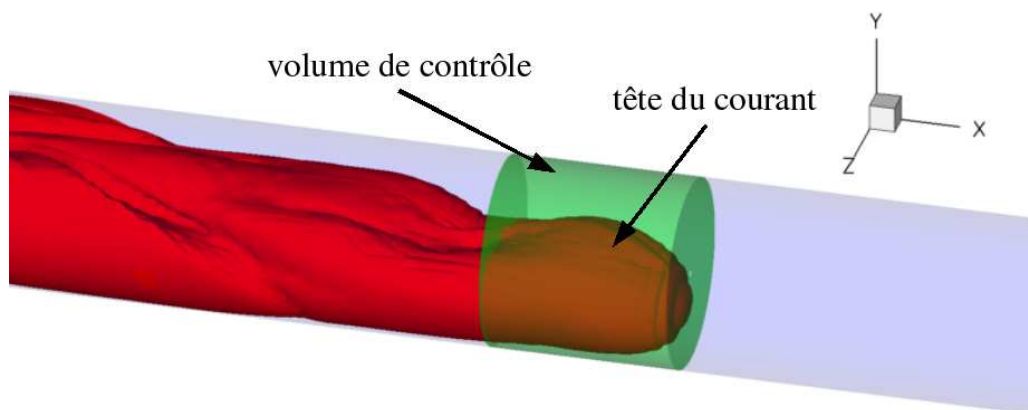


FIG. 5.12 – Définition du volume de contrôle nécessaire au calcul de α et $\Lambda\sqrt{D/(Atg)}$.

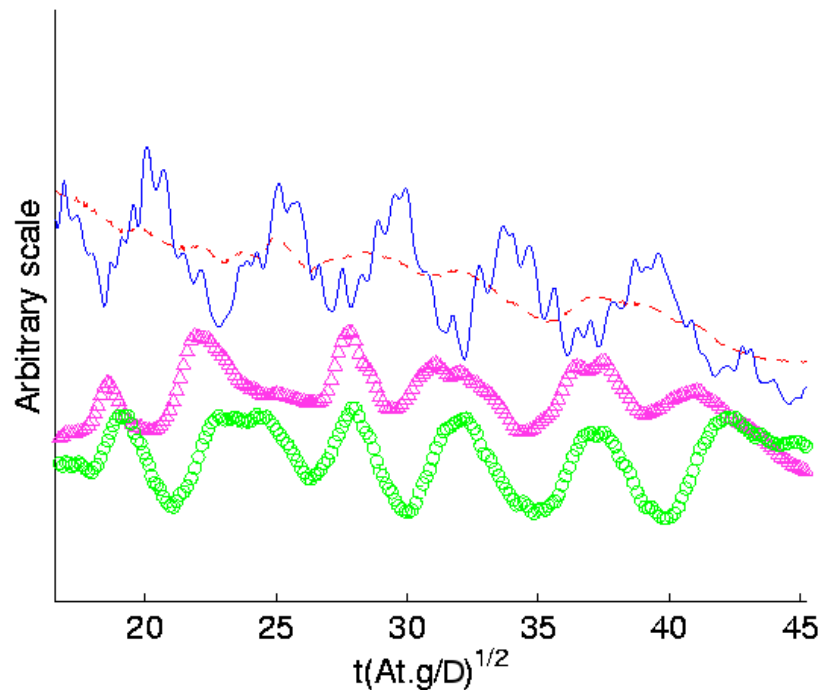


FIG. 5.13 – Evolution temporelle de $\frac{V_f}{0.65\sqrt{At.g.D}}$ (trait plein), $\sqrt{C_f}$ (tirets), α (cercles) et $\Lambda\sqrt{D/(Atg)}$ (triangles).

entraîne la croissance du volume de la tête du courant, ce qui provoque une augmentation locale de l'énergie potentielle disponible dans la tête. Ensuite la structure tourbillonnaire est advectée dans la zone de mélange, ce qui provoque la diminution de Λ , et la nouvelle réserve d'énergie potentielle dans la tête est à nouveau convertie en énergie cinétique grâce à l'effondrement de cette tête (pour le courant lourd). Cet effondrement est responsable de la ré-augmentation locale de la vitesse du front. Comme le montre la figure 5.13, ce phénomène peut se répéter un certain nombre de fois. Un comportement similaire, i.e. où des interactions tourbillonnaires sont responsables de fluctuations de la vitesse du front, a été récemment rapporté par [Cantero et al. \(2007\)](#) dans le cadre de courants de gravité sur un support horizontal. Cependant dans l'étude de Cantero, le phénomène semble relativement sporadique alors que dans les géométries confinées que nous considérons il semble exister de manière cyclique et persistante. Il est à noter que certaines fluctuations de vitesse à plus grande échelle temporelle peuvent aussi être dues au passage de bouffées de fluide plus pur au niveau de la tête. Ceci a été souligné par [Séon et al. \(2006\)](#) et se trouve confirmé numériquement par exemple par les deux dernier pics de vitesse visibles pour $T > 38$ sur la figure 5.11. Les observations qui viennent d'être faites montrent que les variations du saut relatif de densité au front imposent la tendance moyenne et les variations à basse fréquence de la vitesse du front, alors que les interactions entre le courant et le champ de vorticité sont responsables des ses fluctuations à "haute" fréquence.

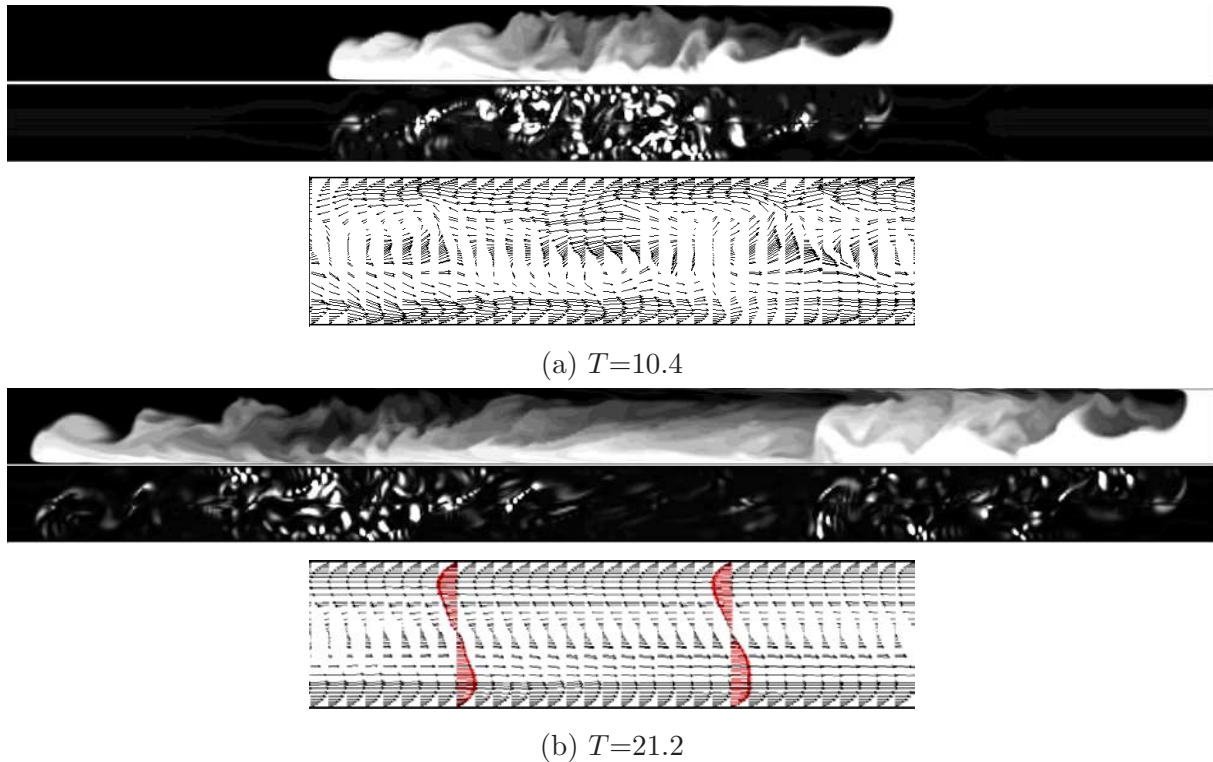


FIG. 5.14 – Deux états dans l'évolution de la densité (haut), de l'intensité de vrillage (centre) et de la vitesse (bas) dans un tube cylindrique incliné à $\theta = 60^\circ$ (les images sont prises dans le plan vertical médian du tube). (a) : le milieu du tube présente un écoulement très tourbillonnaire ($T=10.4$); (b) : naissance d'une région de contre-écoulement à deux couches sans vorticité au milieu du tube ($T=21.2$).

Nous avons montré que la vorticité au sein des courants de gravité confinés et inclinés et au niveau de leur front a une influence sur l'efficacité du mélange transverse et sur les fluctuations de vitesse du front. Que se passerait-il si cette vorticité venait à "disparaître" d'une zone de l'écoulement? Ce phénomène s'observe en effet et va être brièvement comment  dans la partie suivante.

5.5 Intermittence des courants de gravité confinés.

Dans le travail de Séon (2006), il est fait référence à un phénomène qualifié d'intermittence. Ce phénomène est caractérisé par la transition, au sein de la zone de mélange, entre un régime bien mélangé avec de nombreuses structures tourbillonnaires et un régime de contre-écoulement stable laminaire. Une telle alternance de régimes a aussi été observé dans nos simulations comme en témoigne la figure 5.14. Sur cette figure, l'écoulement (a) pour $T=10.4$ a une structure tourbillonnaire intense comme le montrent les tracés de l'intensité de vrillage (au milieu) et du champ de vitesse (en bas). Il est aussi relativement bien mélangé et il n'y a que peu de

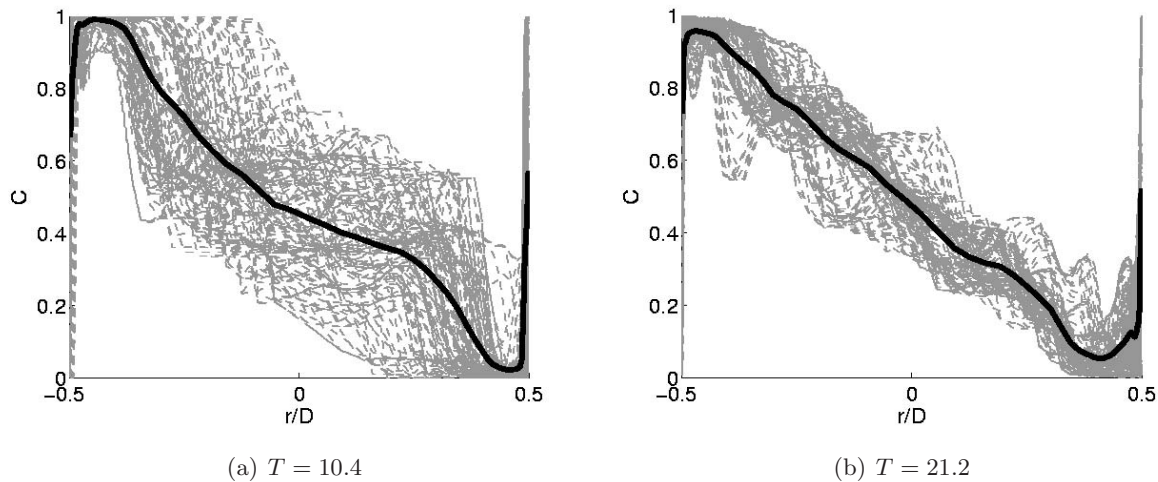


FIG. 5.15 – Profils radiaux de C dans le plan vertical médian pour un tube incliné à 60° . En tirets gris : profils pour différentes abscisses au sein de la zone centrale de la figure 5.14 ; en ligne épaisse : profil moyen

fluide alimentant les fronts. En revanche, sur l'écoulement présenté en (b), la région centrale du tube contient un contre-écoulement quasi-parallèle, avec un champ de densité présentant une stratification uniquement dans la direction transverse au tube.

La figure 5.15 représente des profils de C pour différentes abscisses au sein de la zone centrale où apparaît le contre-écoulement. La courbe noire épaisse est la moyenne de ces profils. Nous pouvons remarquer que dans le régime classique mélangé de la figure 5.15(a), les deux canaux de fluide pur sont nettement visibles sur les bords du tube et une zone bien mélangée ($C \simeq 0.5$) existe au centre du tube. L'écoulement est proche d'un écoulement à trois couches. Il existe par ailleurs aussi une forte variance des profils de C autour de leur moyenne. Ceci montre qu'il s'agit d'une zone relativement turbulente. Lors de la phase de relaminarisation de la figure 5.15(b), le profil moyen de C devient linéaire et la variance est relativement faible en comparaison de celle existant pour $T = 10.4$. Il n'est plus possible de représenter l'écoulement par une superposition de plusieurs couches.

L'image de l'intensité de vrillage montre clairement une région centrale sans tourbillons, et ceci est conforté par le tracé du champ de vitesse sur l'image du bas de la figure 5.14 dans laquelle le régime de contre-écoulement quasi-parallèle est évident. Pour confirmer ce changement de structure, il est aussi possible de se reporter au tracé 3D des tourbillons présents dans le tube à $T=21.2$ présenté sur la figure 5.16.

Séon (2006) a suggéré qu'un état mélangé dans lequel la densité est à peu près constante dans la section transverse mais présentant un gradient suivant l'axe du tube (comme sur la figure 5.14(a)) pouvait être déstabilisé pour donner naissance à un contre-écoulement stable constitué de deux couches (comme sur la figure 5.14(b)). Ce dernier peut à son tour être perturbé

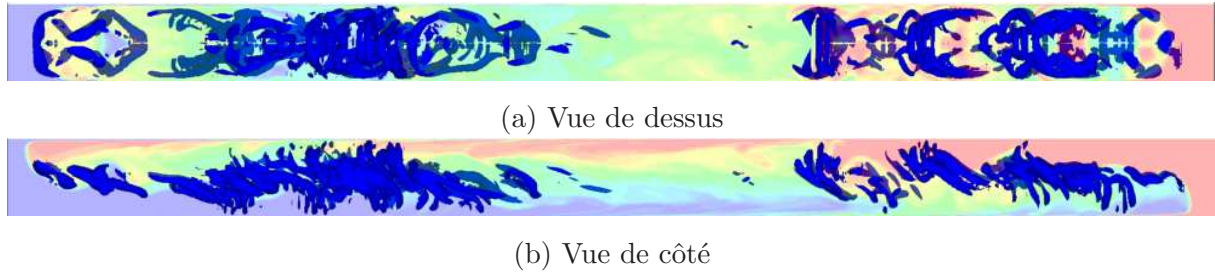


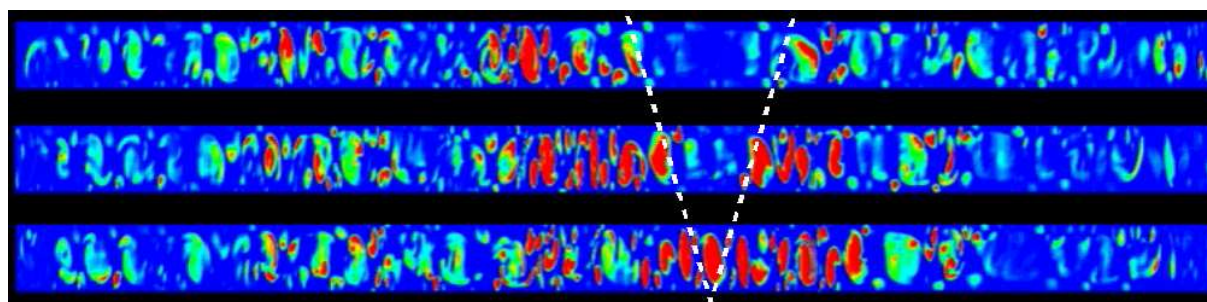
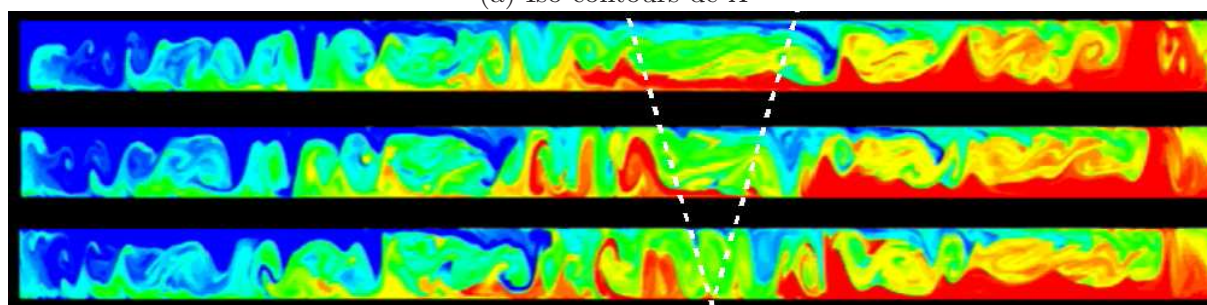
FIG. 5.16 – Vue d’ensemble des structures tourbillonnaires présentes dans le tube incliné à 60° lors de la phase de contre-écoulement stable à $T = 21.2$. L’échelle dans la direction transverse est doublée.

par une instabilité de Kelvin-Helmholtz dont l’effet est un retour à la configuration mélangée initiale. Séon (2006) a montré que l’efficacité du mélange était fortement augmentée lors de cette dernière phase de retour au régime mélangé. Malheureusement nous ne pouvons pas, pour l’instant, observer cette phase dans nos simulations numériques dans la mesure où la période de l’un de ces cycles d’intermittence est d’environ $25s$ dans les expériences, ce qui est de l’ordre de grandeur du temps nécessaire pour que les courants atteignent les extrémités du tube dans les simulations. Cette période semble curieusement indépendante des paramètres physiques dans les expériences, ce qui ne permet pas de donner une valeur sans dimension.

Les images de la figure 5.14 sont issues d’une simulation en tube cylindrique, tout comme les observations de Séon (2006). Cependant, nous avons aussi relevé un tel phénomène dans des simulations bidimensionnelles comme le montre la figure 5.17. La séquence de cette figure semble indiquer que la disparition de la zone de contre-écoulement se fait par une ré-invasion de celle-ci par les tourbillons qui l’encadrent. Cependant, il faut garder en tête le fait qu’il s’agit ici d’une simulation 2D dont les caractéristiques sont très différentes des écoulements 3D. En effet, la grande taille et la cohérence des tourbillons dans cette géométrie sont susceptibles de changer la nature du retour à l’état mélangé. Seule une simulation 3D suffisamment longue pourrait confirmer ou infirmer le mécanisme proposé par Séon (2006). Il est cependant remarquable que le mécanisme conduisant au régime de contre-écoulement quasi-parallèle à partir du régime tourbillonnaire existe aussi en 2D, en dépit de l’intensité et de la cohérence des tourbillons dans cette géométrie.

5.6 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que la structure tridimensionnelle du champ de vorticité des courants de gravité en géométrie inclin e s’approche de celle rencontr e dans les couches de mélange. Cette vorticité permet d’intensifier le mélange transverse au sein du corps du courant. Nous avons établi que la vorticité est responsable de certaines fluctuations à "haute" fréquence de la vitesse du front d’un courant. Ceci signifie que cette vitesse n’est pas impos e uniquement par

(a) Iso-contours de Λ 

(b) Iso-contours de densité

FIG. 5.17 – Iso-contours de Λ (en haut) et densité (en bas) pour trois instants successifs lors de la simulation 2D d'un tube incliné à 70° . Les traits pointillés marquent la limite approximative de la zone de contre-écoulement laminaire.

les forces de flottabilité mais subit aussi l'influence des effets inertiels. Les bilans d'énergie ont révélé que les processus dissipatifs deviennent très vite dominants au sein des courants que nous avons simulés. Ces effets visqueux restent néanmoins faibles durant la phase initiale à vitesse constante de l'écoulement, ce qui tend à confirmer l'existence d'une "phase de subsidence" pour les courants confinés et inclinés par analogie avec la phase initiale non-dissipative des courants de gravité atmosphériques sur support horizontal.

Conclusions et perspectives

Nous avons étudié numériquement dans ce travail la propagation de courants de gravité confinés en géométrie inclinée. A cette fin, la résolution de l'équation de transport d'un champ scalaire présentant des fronts raides était nécessaire. Celle-ci a été introduite dans le code directement à partir du schéma déjà existant dans sa version "Volume Of Fluid" pour des fluides non-miscibles. Les longs temps physiques nécessaires à l'obtention du régime final d'écoulement ont fourni la motivation nécessaire à la parallélisation du code JADIM. Ce point sera précieux pour toutes les utilisations futures de cet outil de simulation.

Même si ce n'était pas l'objectif principal de ce travail, nous nous sommes tout d'abord intéressés au cas particulier des courants de gravité horizontaux dans la mesure où ces écoulements sont très documentés. Ceci a permis de montrer que les différentes lois de puissance obtenues par différents auteurs pour la description de l'évolution de la position du front des courants dans leur phase visqueuse étaient conciliables et dépendaient du volume initial de fluide lâché et du nombre de Reynolds de l'écoulement défini par $Re = \sqrt{(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1 g H} / \nu$ où ρ_2 et ρ_1 sont les densités des deux fluides, g la gravité, H la hauteur (resp. le diamètre) du canal (resp. du tube) et ν la viscosité cinématique supposée voisine des deux fluides.

Nous nous sommes ensuite focalisés sur l'étude des courants confinés en tubes inclinés. Il a été montré dans un premier temps que le code était capable de bien reproduire les résultats expérimentaux de [Séon et al. \(2005\)](#), [Séon \(2006\)](#), [Séon et al. \(2006\)](#) et [Séon et al. \(2007\)](#) aussi bien au niveau qualitatif que quantitatif. Il est donc possible de réaliser des expériences numériques fiables sur les courants de gravité grâce à notre outil numérique. Nous avons pris le parti d'étudier l'influence de la géométrie du tube sur les courants qu'il renferme. En particulier, nous avons voulu vérifier si des expériences numériques bidimensionnelles étaient capables de produire des résultats prédictifs pour des courants réels. Il s'est avéré que ce n'est absolument pas le cas, tant au niveau quantitatif que phénoménologique. Par ailleurs, des simulations préliminaires en géométries cylindrique et rectangulaire verticales avaient révélé de fortes différences de structure des écoulements qu'elles contenaient. Nous avons donc comparé ces géométries en situation inclinée. Nous en avons conclu que le régime aux temps longs est très similaire, même si la phase initiale est différente (i.e. les courants en canal incliné sont plus lents que leurs homologues en tube incliné durant la phase initiale de subsidence).

Si un inconvénient des simulations est le temps de calcul important nécessaire, leur avan-

tage majeur est l'obtention de tous les champs tridimensionnels, ce qui permet une analyse précise notamment du champ de vorticité. Nous avons exploité ceci pour mettre à jour certains mécanismes influençant localement et brièvement la tête des courants et donc leur vitesse de propagation pour des tubes éloignés de l'horizontale. Ce travail a permis de montrer que si la tendance moyenne de la vitesse des courants est impos e par la racine carr e du saut relatif de densité au front, il existe aussi des fluctuations de cette vitesse à plus "haute" fréquence dues soit à des passages de bouffées de fluide pur au niveau de la tête, soit à des mécanismes impliquant des tourbillons de Kelvin-Helmholtz au voisinage du front.

Nous avons par ailleurs montré que la structure tourbillonnaire tridimensionnelle au sein des courants a une influence significative sur le mélange transverse. Cette structure présente en plus des tourbillons de Kelvin-Helmholtz classiques des paires de tourbillons longitudinaux inclinés et contra-rotatifs. Une simulation dans un domaine plus large montre que de tels tourbillons existent indépendamment de la présence de parois latérales. Il s'agit de structures 3D résultant de l'instabilité secondaire de la couche de mélange. Nous pouvons donc penser que c'est ce mécanisme qui est responsable de l'apparition des tourbillons observés en tube cylindrique ou de section carr e, même s'il existe certainement aussi une influence des parois latérales dans ces configurations confin es.

La connaissance et l'analyse des champs a aussi permis de réaliser des bilans d'énergie au sein du tube montrant qu'en dehors d'une courte phase initiale les courants considérés dans ce travail sont très vite dominés par la dissipation visqueuse. Ceci est lié aux nombres de Reynolds modérés utilisés ici.

Nous avons enfin pu observer une partie du phénomène d'intermittence évoqué par [Séon \(2006\)](#). L'existence sporadique de zones de contre-écoulement laminaire au sein de zones plus turbulentes a ainsi été confirm e.

Il existe de nombreuses perspectives directes à ce travail comme par exemple l'exploration du cas des fluides non-miscibles. Quelques expériences ont déjà été men es au FAST dans cette optique et les résultats originaux obtenus demandent une confirmation qui peut être fournie par les simulations numériques. Ceci va nécessiter le portage dans notre version de JADIM du calcul des effets capillaires qui existe déjà dans la version "Volume Of Fluid" du code. Ce portage ne requiert que très peu de programmation puisque nous utilisons déjà le même schéma de transport du taux de présence.

Un autre objectif très intéressant est la compréhension des mécanismes conduisant à la création et à la disparition des zones de contre-écoulement laminaire de l'intermittence. Ceci demande concrètement la prolongation (en cours) de la simulation en tube incliné à 60  dans laquelle nous avons pu assister à la naissance d'une zone laminaire.

Un autre point majeur serait de reproduire ce travail pour des nombres de Reynolds supérieurs à $Re = O(10^3)$ puisqu'il semblerait que les régimes d'écoulement y soient relativement

différents. D'un point de vue numérique, ceci ne pourra se faire que grâce à l'utilisation de la version parallèle du code et en finalisant le travail nécessaire à la "cohabitation" du module "Simulation des Grandes Echelles" de la turbulence avec la gestion du champ de densité raide par un schéma de capture de chocs.

Enfin, l'effet de la diffusivité moléculaire pourrait facilement être étudié, à condition bien entendu de disposer d'un maillage permettant la capture des plus petites échelles scalaires. Ceci permettrait en particulier d'explorer le parallèle entre les courants de gravité induits par des variations de composition comme dans notre travail et les écoulements générés par convection naturelle.

En intégrant quelques ingrédients supplémentaires à notre outil de simulation, on peut donc espérer à brève échéance pouvoir "regarder" numériquement les différentes facettes des courants de gravité de fluides miscibles ou non, en situation laminaire ou turbulente, et bien évidemment en géométrie ouverte ou confinée.

Annexe A

L'intensité de vrillage

Cette annexe est dédiée à la description de l'intensité de vrillage ("swirling strength") que nous utilisons dans ce travail pour matérialiser les structures cohérentes de l'écoulement. Ce concept a été introduit par [Zhou *et al.* \(1999\)](#) puis relié aux autres critères d'identification de tourbillons (Q , Δ , λ_2 ...) par [Chakraborty *et al.* \(2005\)](#). Nous aurions pu choisir indifféremment n'importe lequel de ces critères qui sont tous équivalents ([Chakraborty *et al.* \(2005\)](#)). En revanche, l'utilisation de critères basés sur les minima de pression ou les iso-surfaces de vorticit   sont    prohiber ([Jeong & Hussain \(1995\)](#)) : concernant les minima de pression, il existe de nombreux   coulements les mettant en jeu et ne pr  sentant aucun tourbillon. Quant aux iso-surfaces de vorticit  , elles permettent de matérialiser des zones tourbillonnaires mais celles-ci peuvent   tre masqués si elles sont situés au sein d'une couche de vorticit   importante, comme dans les   coulements de couche de m  lange ou de couche limite par exemple. L'utilisation de "l'intensit   de vrillage" est une approche basé sur une analyse locale du tenseur gradient de vitesse $\nabla\mathbf{V}$. Lors de la recherche des valeurs propres de ce dernier, on aboutit    l'  quation caract  ristique suivante :

$$\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0 \quad (\text{A.1})$$

o   P , Q et R sont les trois invariants de $\nabla\mathbf{V}$ d  finis par

$$\begin{aligned} P &= -\nabla \cdot \mathbf{V} \\ Q &= \frac{1}{2} [(\nabla \cdot \mathbf{V})^2 - \text{tr}(\nabla\mathbf{V}^2)] \\ R &= -\text{Det}(\nabla\mathbf{V}) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Dans le cas d'un   coulement incompressible $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, ce qui conduit    $P = 0$ et l'  quation caract  ristique devient

$$\lambda^3 + Q\lambda + R = 0 \quad (\text{A.3})$$

Le tenseur $\nabla\mathbf{V}$ poss  de une valeur propre r  elle et deux valeurs propres complexes conjugués lorsque le discriminant Δ associ      l'  quation caract  ristique [A.3](#) est positif :

$$\Delta = \left(\frac{1}{2}R\right)^2 + \left(\frac{1}{3}Q\right)^3 > 0 \quad (\text{A.4})$$

Le critère Δ consiste à considérer qu'il existe une structure cohérente aux points où $\Delta > 0$, c'est à dire aux points où il existe des valeurs propres complexes conjuguées de $\nabla \mathbf{V}$. En effet, nous pouvons dans ce cas noter les trois valeurs propres λ_r , $\lambda_{cr} + i\lambda_{ci}$ et $\lambda_{cr} - i\lambda_{ci}$ et les trois vecteurs propres associés \mathbf{v}_r , $\mathbf{v}_{cr} + i\mathbf{v}_{ci}$ et $\mathbf{v}_{cr} - i\mathbf{v}_{ci}$ et écrire

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_r & \mathbf{v}_{cr} & \mathbf{v}_{ci} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{cr} & \lambda_{ci} \\ 0 & -\lambda_{ci} & \lambda_{cr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_r & \mathbf{v}_{cr} & \mathbf{v}_{ci} \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{A.5})$$

Ainsi dans le repère $(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{cr}, \mathbf{v}_{ci})$ les vecteurs propres sont $(1, 0, 0)$, $(0, 1, i)$ et $(0, 1, -i)$. Nous pouvons d'autre part écrire un développement en série de Taylor de la vitesse \mathbf{V} en un point $\mathbf{0}$:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}(\mathbf{0}) + \nabla \mathbf{V}|_0 \cdot d\mathbf{x} + O(d\mathbf{x}^2) \quad (\text{A.6})$$

Si l'on se place dans un référentiel non-tournant lié à une particule fluide positionnée en 0 alors $\mathbf{V}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ et il vient au premier ordre

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \nabla \mathbf{V}|_0 \cdot d\mathbf{x} \quad (\text{A.7})$$

La solution de cette équation différentielle ordinaire dans le repère $(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{cr}, \mathbf{v}_{ci})$ est

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{c}_i e^{\lambda_i t} \quad (\text{A.8})$$

où les α_i sont trois constantes, les \mathbf{c}_i sont les trois vecteurs propres $(1, 0, 0)$, $(0, 1, i)$ et $(0, 1, -i)$ dans le repère considéré et les λ_i sont les valeurs propres de $\nabla \mathbf{V}$. Dans cette approche nous considérons le temps comme "gelé" et les trajectoires qui viennent d'être calculées sont assimilables aux lignes de courant qui suivent donc l'évolution

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0)e^{\lambda_r t} \\ y(t) &= e^{\lambda_{cr} t} [y(0) \cos(\lambda_{ci} t) + z(0) \sin(\lambda_{ci} t)] \\ z(t) &= e^{\lambda_{cr} t} [z(0) \cos(\lambda_{ci} t) - y(0) \sin(\lambda_{ci} t)] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Nous pouvons voir d'après ces équations que la composante $x(t)$ ne suit qu'un mouvement monotone, tandis que les composantes $y(t)$ et $z(t)$ sont quasi-périodiques avec une pulsation λ_{ci} . La figure A.1 représente une ligne de courant obéissant à ces équations. λ_r détermine le taux d'étirement ou de compression de l'écoulement suivant l'axe du tourbillon, λ_{cr} donne le taux de croissance/décroissance du "rayon" du tourbillon et λ_{ci} détermine "l'intensité" de rotation autour du coeur du tourbillon (d'où "intensité de vrillage"). Le critère que nous utilisons pour matérialiser les tourbillons consiste à tracer une isosurface de λ_{ci} (que nous notons Λ dans ce mémoire par souci de concision). Plus la valeur de Λ choisie est élevée et plus le tracé correspond à des zones tourbillonnaires intenses et/ou des zones proches des coeurs des tourbillons. En pratique, Zhou *et al.* (1999) suggèrent d'utiliser une iso-surface calculée à partir d'une valeur de

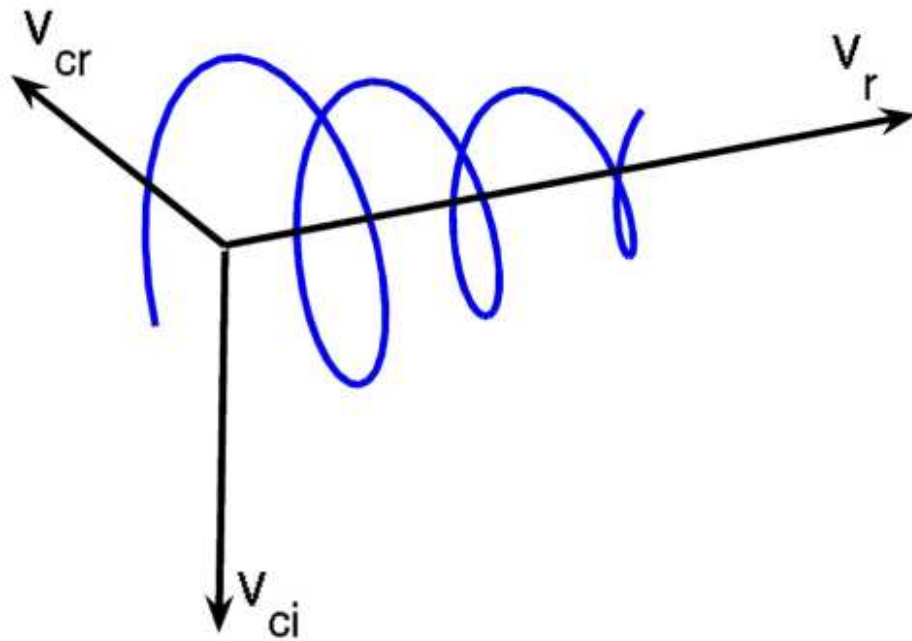


FIG. A.1 – Ligne de courant obtenue d’après les équations A.9 pour $\lambda_r = 0.3$, $\lambda_{cr} = -1$ et $\lambda_{ci} = 20$.

Λ égale à environ 2% de la valeur maximale atteinte dans l’écoulement (pour un écoulement de type couche limite turbulente).

Les liens entre le critère d’intensité de vrillage (parfois noté critère λ_{ci} dans la littérature) et les critères Q , Δ et λ_2 sont décrits par [Chakraborty et al. \(2005\)](#) avec quelques exemples d’application. Ces autres critères permettent une visualisation similaire des tourbillons présents dans un écoulement, mais l’intensité de vrillage est le seul des quatre à présenter des fondements physiques bien établis.

Bibliographie

- ACRIVOS, A. & HERBOLZHEIMER, E. 1979 Enhanced sedimentation in settling tanks with inclined wall. *J. Fluid Mech.* **92**, 435–457.
- BAIRD, M. H. I., ARAVAMUDAN, K., RAMA RAO, N. V., CHADAM, J. & PEIRCE, A. P. 1992 Unsteady axial mixing by natural convection in vertical column. *AIChE J.* **38**, 1825.
- BARR, D. I. H. 1967 Densimetric exchange flows in rectangular channels. *La Houille Blanche* **22**, 619 – 631.
- BEGHIN, P., HOPFINGER, E. J. & BRITTER, R. E. 1981 Gravitational convection from instantaneous sources on inclined planes. *J. Fluid Mech.* **107**, 407–422.
- BENJAMIN, T. B. 1968 Gravity currents and related phenomena. *J. Fluid Mech.* **31**, 209–248.
- BENKENIDA, A. 1999 Développement et validation d’une méthode de simulation d’écoulements diphasiques sans reconstruction d’interfaces. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, spécialité Mécanique des Fluides, Toulouse.
- BIRMAN, V. K., BATTANDIER, B. A., MEIBURG, E. & LINDEN, P. F. 2007 Lock-exchange flows in sloping channels. *J. Fluid Mech.* **577**, 53 – 77.
- BIRMAN, V. K., MARTIN, J. E. & MEIBURG, E. 2005 The non-boussinesq lock-exchange problem. part 2. high-resolution simulations. *J. Fluid Mech.* **537**, 125–144.
- BONOMETTI, T. & BALACHANDAR, S. 2007 Effect of schmidt on the structure and propagation of density currents. *J. Fluid Mech.* **en considération**, –.
- BONOMETTI, T., BALACHANDAR, S. & MAGNAUDET, J. 2007 Wall effects in non-boussinesq density currents. *J. Fluid Mech.* **en considération**, –.
- BONOMETTI, T. & MAGNAUDET, J. 2006 Transition from spherical cap to toroidal bubbles. *Phys. Fluids* **18**, 052102.
- BORIS, J. P. & BOOK, D. L. 1973 Flux-corrected transport : I. shasta, a fluid transport algorithm that works. *J. Comput. Phys.* **18**, 248–283.

- BOYCOTT, A. E. 1920 Sedimentation of blood corpuscles. *Nature* **102**, 532.
- BRITTER, R. E. & LINDEN, P. F. 1980 The motion of the front of a gravity current travelling down an incline. *J. Fluid Mech.* **99**, 531–543.
- CALMET, I. & MAGNAUDET, J. 1997 Large eddy simulation of high-schmidt-number mass transfer in a turbulent channel flow. *Phys. Fluids* **9**, 438–455.
- CALMET, I. & MAGNAUDET, J. 2003 Statistical structure of high-reynolds-number turbulence close to the free surface of an open-channel flow. *J. Fluid Mech.* **474**, 355–378.
- CANNON, J. B. & ZUKOSKI, E. E. 1975 Turbulent mixing in vertical shafts under conditions applicable to fires in high rise buildings. *Tech. Rep.*. Technical Fire Report n°1 to the National Science Foundation, California Institute of Technology, Pasadena, California.
- CANTERO, M. I., LEE, J. R., BALACHANDAR, S. & GARCIA, M. H. 2007 On the front velocity of density currents. *J. Fluid Mech.* **586**, 1–39.
- CHAKRABORTY, P., BALACHANDAR, S. & ADRIAN, R. J. 2005 On the relationships between local vortex identification schemes. *J. Fluid Mech.* **535**, 189–214.
- CHANDRASEKHAR 1961 *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford Clarendon Press.
- CLIMENT, E. & MAGNAUDET, J. 1999 Large scale simulation of bubble-induced convection. *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4827–4830.
- COOK, A. W., CABOT, W. & MILLER, P. L. 2004 The mixing transition in rayleigh-taylor instability. *J. Fluid Mech.* **511**, 333–362.
- DAVIES, R. M. & TAYLOR, G. I. 1950 The mechanism of large bubbles rising through extended liquids in tubes. *Proc. R. Soc. London A* -, 375–90.
- DEBACQ, M., HULIN, J. P., SALIN, D., PERRIN, B. & HINCH, E. J. 2003 Buoyant mixing of miscible fluids of varying viscosities in vertical tubes. *Phys. Fluids* **15**, 3846.
- DIDDEN, N. & MAXWORTHY, T. 1982 The viscous spreading of plane and axisymmetric gravity currents. *J. Fluid Mech.* **121**, 27–42.
- DIMONTE, G. AND YOUNGS, D. L., DIMITS, A., WEBER, S., MARINAK, M., WUNSCH, S., GARASI, C., ROBINSON, A., ANDREWS, M. J., RAMAPRABHU, P., CALDER, A. C., FRYXELL, B., BIELLO, J., DURSI, L., MACNEICE, P., OLSON, K., RICKER, P., ROSNER, F., TIMMES, F., TUFO, H., YOUNG, Y.-N. & ZINGALE, M. 2004 A comparative study of the turbulent rayleigh-taylor instability using high-resolution three-dimensional numerical simulations : The alpha-group collaboration. *Phys. Fluids* **16**, 1668.

- DIMONTE, G. & SCHNEIDER, M. 2000 Density ratio dependence of rayleigh-taylor mixing for sustained and impulsive acceleration histories. *Phys. Fluids* **12**, 304.
- DRAZIN, P. G. & REID, W. H. 1981 *Hydrodynamic stability, 2nd edition*. Cambridge University Press.
- DUMITRESCU, D. T. 1943 Strömung an einer luftblase im senkrechten rohr. *Z. Angew. Math. Mech.* **23**, 139.
- ELLISON, T. & TURNER, J. 1959 Turbulent entrainment in a stratified flow. *J. Fluid Mech.* **6**, 423–448.
- ETIENNE, J., HOPFINGER, E. J. & SARAMITO, P. 2005 Numerical simulations of high density ratio lock-exchange flows. *Phys. Fluids* **17**, 036601.
- ETIENNE, J., RASTELLO, M. & HOPFINGER, E. J. 2006 Modelling and simulation of powder-snow avalanches. *C. R. A. S.* **334**, n°8-9, 545–554.
- FAY, J. A. 1969 The spread of oil slicks on a calm sea. *Oil on the sea* **New York : Plenum**, 53–63.
- GARDNER, G. C. & CROW, I. G. 1970 The motion of large bubbles in horizontal channels. *J. Fluid Mech.* **43**, 247–255.
- GEORGESON, E. M. H. 1942 The free streaming of gases in sloping channels. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **180**, 484–493.
- GRÖBELBAUER, H. P., FANNELOP, T. K. & BRITTER, R. E. 1993 The propagation of intrusion fronts of high density ratios. *J. Fluid Mech.* **250**, 669–687.
- GUEYFFIER, D., LI, J., NADIM, A., SCARDOVELLI, R. & S., Z. 1999 Volume-of-fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows. *J. Comput. Phys.* **152**, 423–456.
- HARMATHY, T. Z. 1960 Velocity of large drops and bubbles in media of infinite or restricted extent. *AIChE J.* **6**, 281–288.
- HOPFINGER, E. J. 1983 Snow avalanche motion and related phenomena. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **15**, 47–76.
- HOPFINGER, E. J. & TOCHON-DANGUY, J. C. 1977 A model study of powder-snow avalanches. *Glaciology* **19**, 343–356.
- HOULT, D. P. 1972 Oil spreading on the sea. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **4**, 341–368.

- HÄRTEL, C., CARLSSON, F. & THUNBLOM, M. 2000a Analysis and direct numerical simulation of the flow at a gravity-current head. part 2. the lobe-and-cleft instability. *J. Fluid Mech.* **418**, 213 – 229.
- HÄRTEL, C., MEIBURG, E. & NECKER, F. 2000b Analysis and direct numerical simulation of the flow at a gravity-current head. part 1. flow topology and front speed for slip and non-slip boundaries. *J. Fluid Mech.* **418**, 189–212.
- HUNT, J. C. R. 1991 Industrial and environmental fluid mechanics. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **23**, 1–41.
- HUPPERT, H. E. 1982 The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface. *J. Fluid Mech.* **121**, 43 – 58.
- HUPPERT, H. E. & SIMPSON, J. E. 1980 The slumping of gravity currents. *J. Fluid Mech.* **99**, 785 – 799.
- JEONG, J. & HUSSAIN, F. 1995 On the identification of a vortex. *J. Fluid Mech.* **285**, 69–94.
- KEULEGAN, G. H. 1958 The motion of saline fronts in still water. *Natl. Bur. Stand. Rep. Tech. report 5831*, –.
- LASHERAS, J. C. & CHOI, H. 1988 Three-dimensional instability of a plane free shear layer : an experimental study of the formation and evolution of streamwise vortices. *J. Fluid Mech.* **189**, 53–86.
- LEGENDRE, D. & MAGNAUDET, J. 1998 The lift force on a spherical bubble in a viscous linear shear flow. *J. Fluid Mech.* **368**, 81–126.
- LEGENDRE, D., MAGNAUDET, J. & MOUGIN, G. 2003 Hydrodynamic interactions between two spherical bubbles rising side by side in a viscous liquid. *J. Fluid Mech.* **497**, 133–166.
- LINDEN, P. F. 1999 The fluid mechanics of natural ventilation. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **31**, 201–238.
- LÖRSTAD, D. & FUCHS, L. 2004 High-order surface tension vof-model for 3d bubble flows with high density ratio. *J. Comput. Phys.* **200**, 153–176.
- MAGNAUDET, J., RIVERO, M. & FABRE, J. 1995 Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. part i : Steady straining flow. *J. Fluid Mech.* **284**, 97–135.
- MAO, Z. S. & DUKLER, A. E. 1990 The motion of taylor bubbles in vertical tubes i. a numerical simulation for the shape and rise velocity of taylor bubbles in stagnant and flowing liquids. *J. Comput. Phys.* **91**, 132–160.

- MARINO, B. M., THOMAS, L. P. & LINDEN, P. F. 2005 The front condition for gravity currents. *J. Fluid Mech.* **536**, 49–78.
- MARTIN, J. C. & MOYCE, W. J. 1952 An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane. *Philos. T. Roy. Soc. A.* **244**, 312–324.
- MERLE, A., LEGENDRE, D. & MAGNAUDET, J. 2005 Forces on a high-reynolds-nombre spherical bubble in a turbulent flow. *J. Fluid Mech.* **532**, 53–62.
- NICKLIN, D. J., WILKES, J. O. & DAVIDSON, J. F. 1962 Two phase flow in vertical tubes. *Trans. Inst. Chem. Eng.* **40**, 61–68.
- PLOURABOUÉ, F. & HINCH, E. J. 2002 Kelvin-helmholtz instability in a hele-shaw cell. *Phys. Fluids* **14(3)**, 922–929.
- RAI, M. M. & MOIN, P. 1991 Direct simulations of turbulent flow using finite-difference schemes. *Journal of Computational Physics* **96**, 15 – 53.
- RASTELLO, M. & HOPFINGER, E. J. 2004 Sediment-entraining suspension clouds : a model of powder-snow avalanches. *J. Fluid Mech.* **509**, 181–206.
- RENARDY, M., RENARDY, Y. & LIE, J. 2001 Numerical simulation of moving contact line problems using volume of fluid method. *J. Comput. Phys.* **171**, 243–263.
- RIVERO, M. 1991 Etude par simulation numérique des forces exercées sur une inclusion sphérique par un écoulement accéléré. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, Spécialité Mécanique des Fluides, Toulouse.
- ROTTMAN, J. W. & SIMPSON, J. E. 1983 Gravity currents produced by insantaneous releases of a heavy fluid in a rectangular channel. *J. Fluid Mech.* **135**, 95–110.
- SCHMIDT, W. 1911 Zur mechanik der boën. *Z. Meteorol.* **28**, 355–362.
- SHIN, J. O., DALZIEL, S. B. & LINDEN, P. F. 2004 Gravity currents produced by lock exchange. *J. Fluid Mech.* **521**, 1 – 34.
- SIMPSON, J. 1972 Effects of the lower boundary on the head of a gravity current. *J. Fluid Mech.* **53**, 759 – 768.
- SIMPSON, J. E. 1997 *Gravity currents. In the environment and the laboratory.* Cambridge University Press.
- SIMPSON, J. E. & BRITTER, R. E. 1979 The dynamics of the head of a gravity current advancing over a horizontal surface. *J. Fluid Mech.* **94**, 477 – 495.
- SÉON, T. 2006 Du mélange turbulent aux courants de gravité en géométrie confinée. PhD thesis, Univ. Paris XI.

- SÉON, T., HULIN, J. P., D., S., PERRIN, B. & J., H. E. 2005 Buoyancy driven miscible front dynamics in tilted tubes. *Phys. Fluids* **17**, 031702.
- SÉON, T., HULIN, J. P., SALIN, D., PERRIN, B. & HINCH, E. J. 2006 Laser-induced fluorescence measurements of buoyancy driven mixing in tilted tubes. *Phys. Fluids* **18**, 041701.
- SÉON, T., ZNAIEN, J., HINCH, E. J., PERRIN, B., SALIN, D. & HULIN, J. P. 2007 Transient buoyancy-driven front dynamics in nearly horizontal tubes. *Phys. Fluids to be published*, —.
- TAKAGI, D. & HUPPERT, H. E. 2007 The effect of confining boundaries on viscous gravity currents. *J. Fluid Mech.* **577**, 495–505.
- WEBER, M. E., ALARIE, A. & RYAN, M. E. 1986 Velocities of extended bubbles in inclined tubes. *Chem. Eng. Sci.* **41**, 235–240.
- WELCH, S. W. J. & WILSON, J. 2000 A volume of fluid based method for fluid flows with phase change. *J. Comput. Phys.* **160**, 662–682.
- WHITE, E. T. & BEARDMORE, R. H. 1962 The velocity of single cylindrical air bubbles in vertical tubes. *Chem. Eng. Sci.* **17**, 351–61.
- WILKINSON, D. L. 1982 Motion of air cavities in long horizontal ducts. *J. Fluid Mech.* **118**, 109–122.
- ZALESK, S. T. 1979 Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids. *J. Comput. Phys.* **31**, 335–362.
- ZHOU, J., ADRIAN, R. J., BALACHANDAR, S. & KENDALL, T. M. 1999 Mechanisms for generating coherent packets of hairpin vortices in channel flow. *J. Fluid Mech.* **387**, 353–396.
- ZUKOSKI, E. E. 1966 Influence of viscosity, surface tension, and inclination angle on motion of long bubbles in closed tubes. *J. Fluid Mech.* **25**, 821–837.