

N° d'ordre: 2491

THESE

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR

de

l'Institut National Polytechnique de Toulouse

Ecole doctorale Matériaux - Structure - Mécanique

Spécialité: Génie Mécanique

présentée par

Hocine DEHMOUS

Fiabilité et micromécanique des matériaux composites

Application à la passerelle de Laroin

soutenue le 25 Juin 2007 devant le jury composé de

J. RENARD	Maître de Recherche, ENSMP, Evry	<i>Président</i>
J. LAMON	Directeur de Recherche CNRS, LCTS, Bordeaux	<i>Rapporteur</i>
O. POLIT	Professeur, Université de Paris X	<i>Rapporteur</i>
M.T. ABADLIA	Professeur, Université de Boumerdes	
Ph. ESTELLAT	Société des Fibres de Carbone, Abidos	
I. ZIVANOVIC	Freyssinet International, Vélizy Villacoublay	
K. AIT TAHAR	Professeur, Université de Tizi-Ouzou	<i>Co-directeur de thèse</i>
H. WELEMANE	Maître de Conférences, ENI, Tarbes	

Thèse préparée en co-tutelle entre l'Université M'hamed Bouguera - Boumerdes (Algérie) et

l'Institut National Polytechnique de Toulouse - ENIT/INPT (France)

*Je dédie ce travail à mes parents,
à toute ma famille,
à la mémoire de ma grand-mère Jida Mahdjouba.*

“Al hamdou lillah” : je remercie Dieu de m’avoir donné le courage et la patience.

Je tiens tout d’abord à remercier Hélène Weleman qui m’a encadré au cours de cette thèse. Son enthousiasme, sa ténacité et surtout son sens du bon travail ont énormément contribué à l’aboutissement de mes travaux. Qu’elle trouve ici l’expression de ma profonde gratitude.

C’est grâce à mes directeurs de thèse Moussa Karama et Kamel Ait Tahar que la co-tutelle entre l’INP de Toulouse et l’Université de Boumerdes a pu être mise en place. Par leurs conseils et leur aide précieuse tout au long du travail, ils m’ont aussi grandement aidé.

Je salue également les membres du jury pour l’attention qu’ils ont portée à mes travaux, notamment Jacques Lamon et Olivier Polit pour en avoir été les rapporteurs, Jacques Renard pour sa présidence lors de la soutenance et Mohamed Tahar Abadlia pour l’avoir examiné. Je voudrais par ailleurs rappeler la disponibilité et le support constant des deux industriels associés à la passerelle de Laroin, Philippe Estellat pour les matériaux composites et Ivica Zivanovic pour l’ouvrage en lui-même. Sans eux, les applications développées dans cette thèse n’auraient pas été possibles.

Un certain nombre de personnes m’ont permis de progresser et d’orienter de façon pertinente ces recherches. Parmi eux, je citerais en particulier Vincent Pensée de l’Université de Marne-La-Vallée pour la micromécanique, Sébastien Petit de Freyssinet International pour le calcul de la structure haubanée et Zakoua Guédé de l’Ifremer pour les analyses probabilistes.

Je voudrais profiter de ce manuscrit pour remercier tous les collègues enseignants, doctorants et personnels du Laboratoire Génie de Production et de l’Ecole Nationale d’Ingénieurs de Tarbes qui de près ou de loin ont contribué au bon déroulement de mes travaux et pour leur accueil tout le long de mon séjour. Je tiens à remercier notamment mon collègue de bureau Alexandre Micol pour son aide et sa disponibilité.

Merci enfin à mon oncle Messaoud pour son soutien et ses encouragements ainsi qu’à mon ami Ali et toute sa famille pour tout ce qu’ils ont fait pour moi.

Table des matières

Notations	11
Introduction	15
1 Fiabilité mécanique - Etude de la passerelle de Laroin	19
1.1 Introduction	19
1.2 Analyse fiabiliste des structures mécaniques	20
1.2.1 Problématique	20
1.2.2 Variables aléatoires de base	21
1.2.3 Fonction de performance	26
1.2.4 Indicateurs de fiabilité	27
1.2.5 Application aux composites	35
1.3 Etude de la passerelle de Laroin	36
1.3.1 Une structure innovante	36
1.3.2 Description de l'ouvrage	37
1.3.3 Enjeux de l'étude	43
2 Matériaux et modélisation micromécanique	45
2.1 Introduction	45
2.2 Données matériaux	46
2.2.1 Matériaux constitutifs	46
2.2.2 Le procédé de fabrication	48
2.2.3 Les matériaux composites	50
2.3 Méthodologie de l'homogénéisation	52
2.3.1 Volume élémentaire représentatif	53
2.3.2 Position du problème	55
2.3.3 Méthodes d'estimation	57

2.3.4	Formulation de Mori et Tanaka	61
2.4	Modèle de base	63
2.4.1	Hypothèses complémentaires	63
2.4.2	Expression de $\langle \mathbb{B} \rangle_{(f)}^{MT}$	64
2.5	Incertitudes de modélisation	65
2.5.1	Porosité matricielle	66
2.5.2	Section des fibres	68
2.5.3	Isotropie transverse des fibres	70
2.6	Commentaire	72
3	Fiabilité des joncs composites	75
3.1	Introduction	75
3.2	Fiabilité expérimentale	76
3.2.1	Définition des classes de valeurs	76
3.2.2	Classement des données - lien avec les probabilités	78
3.2.3	Indicateurs statistiques	80
3.2.4	Incertitudes sur les mesures	81
3.3	Modèle stochastique	82
3.3.1	Variables aléatoires	82
3.3.2	Mode de défaillance	85
3.3.3	Codes de calculs probabilistes	87
3.4	Résultats de l'analyse de fiabilité	89
3.4.1	Modèle de base	89
3.4.2	Vérification des erreurs de modélisation	95
3.4.3	Correction du modèle	97
3.4.4	Identification et validation du modèle corrigé	104
3.4.5	Analyse de sensibilité	108
3.5	Conclusions	114
4	Fiabilité des haubans de la passerelle de Laroin	117
4.1	Introduction	117
4.2	Position du problème	118
4.2.1	Source d'incertitudes	118
4.2.2	Mode de défaillance	121

4.2.3	Couplage fiabilité et éléments finis	122
4.3	Construction du modèle	125
4.3.1	Modélisation par éléments finis	126
4.3.2	Etude des actions	127
4.3.3	Variables aléatoires	132
4.4	Analyse de l'existant	134
4.4.1	Cas de base	134
4.4.2	Introduction de coefficients de sécurité	137
4.5	Optimisation des haubans	138
4.5.1	Analyse de sensibilité	139
4.5.2	Modifications de la conception	141
4.6	Commentaire	144
Conclusion		147
Annexe A : Lois de probabilité pour la fiabilité mécanique		151
Annexe B : Paramètres élastiques et de rupture d'un matériau		155
Annexe C : Décomposition des tenseurs d'ordre quatre		159
Annexe D : Résultats expérimentaux sur composites		163
Annexe E : Note de calcul de la passerelle		165
Bibliographie		169

Notations

L'ensemble des tenseurs utilisés au cours de cette étude sont définis sur l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^3 dont le triplet de vecteurs $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ constitue une base orthonormée. Précisément, T^k désigne l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre k (k étant un entier).

Nous utilisons les notations intrinsèques usuelles. A titre indicatif sont rappelées ci-dessous les définitions de quelques uns des opérateurs principaux.

◆ Produits contractés

Soient $(T_{i_1 i_2 \dots i_k})_{i_1, i_2, \dots, i_k \in [1, 3]^k}$ les composantes d'un tenseur T d'ordre k dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de \mathbb{R}^3 . Les produits contractés sont alors définis de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} &= n_i m_i, \quad \forall (\mathbf{n}, \mathbf{m}) \in (\mathbb{R}^3)^2 \\ (a \cdot b)_{ik} &= a_{ij} b_{jk}, \quad \forall (a, b) \in (T^2)^2 \\ a : b &= a_{ij} b_{ij}, \quad \forall (a, b) \in (T^2)^2 \\ (a : C)_{kl} &= a_{ij} C_{ijkl}, \quad \forall (a, C) \in T^2 \times T^4\end{aligned}$$

◆ Produits tensoriels

Les produits tensoriels sont définis de la façon suivante :

$$\begin{aligned}(a \otimes b)_{ijkl} &= a_{ij} b_{kl}, \quad \forall (a, b) \in (T^2)^2 \\ (a \underline{\otimes} b)_{ijkl} &= a_{ik} b_{jl}, \quad \forall (a, b) \in (T^2)^2 \\ (a \overline{\otimes} b)_{ijkl} &= a_{il} b_{jk}, \quad \forall (a, b) \in (T^2)^2 \\ (a \underline{\overline{\otimes}} b) &= (a \underline{\otimes} b + a \overline{\otimes} b)/2, \quad \forall (a, b) \in (T^2)^2\end{aligned}$$

◆ Divers

On notera également \mathbf{I} le tenseur unité de T^2 et \mathbb{O} le tenseur nul de T^4 dont les composantes respectives dans toute base orthonormée de \mathbb{R}^3 sont telles que :

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}, \quad \forall (i, j) \in [1, 3]^2$$

et

$$(\mathbb{O})_{ijkl} = 0, \quad \forall (i, j, k, l) \in [1, 3]^4$$

Introduction

Si les performances mécaniques des matériaux composites offrent aujourd'hui de nouvelles perspectives pour la conception des structures, la variabilité de leur comportement constitue néanmoins un frein encore important à leur développement. Cet aspect amène en effet à l'introduction de coefficients de sécurité très sévères pour leur dimensionnement, ce qui engendre des surcoûts élevés. Dans ce contexte, les méthodes de fiabilité ont conduit à d'importantes avancées basées sur une évaluation plus rationnelle des risques encourus. Elles permettent ainsi d'évaluer quantitativement le risque de défaillance d'une structure donnée compte tenu des incertitudes mises en jeu (chargement, propriétés matériaux, géométries,..) et également d'optimiser sa conception pour un risque considéré.

Parallèlement, il a été clairement établi que le comportement mécanique des matériaux composites est étroitement lié aux propriétés des matériaux constituants, à leur distribution géométrique ainsi qu'à leurs interactions. En vue d'une analyse de l'influence de ces paramètres, l'approche micromécanique constitue alors le cadre de modélisation le plus approprié. Par la résolution du problème de changement d'échelle, elle permet en effet de spécifier de façon rigoureuse les relations entre les caractéristiques microstructurales de ces matériaux et leur loi de comportement macroscopique.

L'originalité de ce travail réside en l'association des deux outils précités, *i.e.* la démarche fiabiliste et la modélisation micromécanique. On se propose en effet d'évaluer la fiabilité de structures composites en fonction de variables aléatoires définies

à l'échelle microscopique, le passage micro-macro étant réalisé par homogénéisation. L'intérêt est d'une part, de contribuer à la compréhension de la défaillance des matériaux composites en déterminant l'influence des paramètres microstructuraux sur celle-ci et, d'autre part, de mettre en oeuvre une procédure de validation enrichie des modèles d'homogénéisation qui tienne compte d'un faisceau plus large d'informations.

La première partie du mémoire est consacrée à la présentation de la démarche fiabiliste pour l'étude de problèmes mécaniques : ses objectifs, ses produits et les différentes étapes de sa mise en place. On y décrit également la passerelle piétonne de Laroin (Pyrénées-Atlantiques), premier ouvrage d'art en France réalisé à l'aide de haubans composites en carbone-époxy, sur laquelle on souhaite appliquer l'approche couplée précitée.

La connaissance des constituants et du procédé d'assemblage du composite nous permet dans la seconde partie d'orienter la modélisation micromécanique de ce matériau hétérogène. Après un rappel des principes de l'approche par changement d'échelle, on développe les lois constitutives du schéma de Mori-Tanaka pour différentes configurations de la microstructure.

Dans le troisième chapitre, le couplage fiabilité - micromécanique est mis en place sur le cas des joncs composites constituant les haubans de la passerelle. Nous nous sommes focalisés ici sur le comportement sous traction longitudinale statique de ces joncs en carbone-époxy avec une défaillance par rupture des fibres. Les variabilités de leurs propriétés microstructurales sont ainsi introduites dans le modèle stochastique et les probabilités de défaillance résultantes ensuite comparées aux résultats expérimentaux à l'échelle macroscopique.

L'analyse de la défaillance des haubans de l'ouvrage de Laroin fait enfin l'objet du dernier chapitre. La démarche proposée est cette fois mise en place pour l'étude d'une structure, ce qui impose d'intégrer dans une même procédure de simulation les aspects probabilistes et mécaniques multi-échelles. L'objectif y sera d'une part d'évaluer le degré de fiabilité de ces éléments porteurs dont le dimensionnement est issu des règlements actuels et, d'autre part, de démontrer les avantages apportés par le couplage en vue d'une optimisation de leur conception.

Chapitre 1

Fiabilité mécanique - Etude de la passerelle de Laroin

1.1 Introduction

L'apport des matériaux composites pour la conception de structures mécaniques réside avant tout en leurs performances spécifiques (*i.e.* rapportées à la masse) exceptionnelles vis-à-vis des matériaux traditionnels. D'autre part, leur caractère modulable constitue également un avantage majeur qui permet de les façonner à souhait suivant l'utilisation voulue (Berthelot [4], Gay [22], Matthews et Rawlings [43]).

Si ces qualités semblent donc offrir de nouvelles et vastes perspectives, le potentiel des composites est généralement limité par l'importante dispersion de leurs propriétés, notamment au niveau de leur résistance à la rupture. Cette variabilité trouve son origine dans le procédé de fabrication qui engendre inévitablement des différences de microstructure entre les produits voire également dans le caractère lui-même aléatoire des propriétés des constituants. C'est pourquoi le dimensionnement des structures composites est le plus souvent soumis à des coefficients de sécurité très sévères et générateurs de surcoûts.

Dans ce contexte, les méthodes fiabilistes ont conduit à d'importantes avancées pour la valorisation de ces matériaux, basées sur une évaluation plus rationnelle des risques encourus.

1.2 Analyse fiabiliste des structures mécaniques

Une synthèse approfondie sur les méthodes de fiabilité a été rédigée par Lemaire ([37]). Le lecteur pourra y trouver un rappel historique de la fiabilité mécanique (voir également Richard [51]), la philosophie associée à cette démarche, ses enjeux ainsi que l'explication détaillée des méthodes de calcul. On se propose ici d'en rappeler brièvement les grands principes et les différentes étapes qu'une telle analyse nécessite dans le cas de phénomènes aléatoires indépendants du temps.

1.2.1 Problématique

La sécurité offerte par une structure est considérée comme suffisante dès lors qu'une éventuelle défaillance exposerait les personnes, les biens et l'environnement à un risque inférieur à une limite acceptable. La fiabilité d'une structure se caractérise quant à elle par la performance de celle-ci à remplir une fonction définie sous des conditions données, pendant une durée fixée et en respectant le niveau de sécurité exigé.

La difficulté dans l'évaluation de la fiabilité provient de la nature incertaine des phénomènes mis en jeu sur la structure considérée (variabilités des propriétés des matériaux, imprécisions géométriques, aléas des chargements appliqués,..), qui vont avoir un impact significatif sur les performances du système. Aussi il est indispensable d'intégrer ces incertitudes de façon à travailler sur des modélisations réalistes.

Traditionnellement, le dimensionnement des structures est fondé sur une démarche déterministe dans laquelle l'ensemble des paramètres précités prennent une valeur fixe. Précisément, les paramètres incertains sont décrits par une valeur caractéristique défavorable. Associée à des coefficients de sécurité, l'analyse conduit alors à une réponse binaire ("sûreté" ou "défaillance") vis-à-vis d'un critère donné, qui traduit d'une certaine manière la confiance que l'on peut accorder à ce dimensionnement précis. L'approche déterministe utilise par conséquent une marge volontairement pessimiste conduisant le plus souvent à un surdimensionnement injustifié.

Dans la démarche probabiliste en revanche, on construit une modélisation stochastique dans laquelle les données incertaines sont représentées par des variables

aléatoires¹. On peut ensuite évaluer la probabilité de défaillance de la structure (aspect quantitatif) ainsi que mesurer la sensibilité de cette probabilité par rapport à chacune des variables aléatoires introduites (aspect qualitatif). Deux applications sont envisageables : soit on connaît les caractéristiques de la structure et on vérifie que sa fiabilité est satisfaisante ; soit on optimise le dimensionnement de celle-ci de façon à respecter un niveau de fiabilité donné. Par un traitement plus rationnel des incertitudes, l'approche fiabiliste permet donc une meilleure appréciation des marges de sécurité à l'aide d'indicateurs de confiance objectifs, et constitue en ce sens un outil adéquat pour l'aide à la décision en phases de conception et de maintenance.

On se focalisera par la suite sur la fiabilité d'un composant d'un système mécanique (appelé par la suite structure), auquel est associé un seul matériau. Dans ce contexte, l'analyse fiabiliste se décline en trois étapes :

- en premier lieu, la sélection des **variables aléatoires de base**, qui vont intégrer les incertitudes mises en jeu au travers de leur loi de distribution,
- dans un second temps, le choix d'une **fonction de performance** définissant la défaillance du système,
- enfin, le calcul des **indicateurs de fiabilité**, qui vont fournir une évaluation quantitative et qualitative de la fiabilité de celui-ci.

1.2.2 Variables aléatoires de base

L'enjeu à ce stade est de préciser les paramètres incertains pouvant jouer un rôle significatif sur la fiabilité de la structure, appelés *variables aléatoires de base* ou *variables de conception*, et de quantifier leur variabilité.

Description des incertitudes

La sélection des variables aléatoires est une étape cruciale pour le modèle fiabiliste qui nécessite une connaissance fine du matériau étudié (origine, microstructure, comportement mécanique) et de la structure considérée (fabrication, actions). Les sources d'incertitudes sont globalement de deux ordres :

¹ Une variable est dite aléatoire si sa valeur n'est pas prévisible avec certitude en fonction des conditions initiales.

- microscopique, *i.e.* se rapportant à la microstructure du matériau : les propriétés mécaniques des constituants, leur répartition (position spatiale, fractions volumiques, orientation), la nature des interfaces, l'impact des défauts divers (porosité, microfissuration,..), causes du (ou des) mode(s) de défaillance.
- macroscopique : représentativité de la modélisation, propriétés mécaniques macroscopiques du matériau, géométrie de la structure, chargement appliqué, causes du (ou des) mode(s) de défaillance.

Ces incertitudes proviennent le plus souvent de variabilités liées au processus de fabrication, aux imperfections des conditions d'essais de caractérisation (non reproductibilité des résultats, base de données limitée, effets d'échelle entre éprouvettes d'expérimentation et structure réelle,..), à des facteurs incontrôlés tels que les fluctuations du chargement ou simplement de la difficulté d'accéder à certaines données ou informations (Guédé [25], Richard [51]).

De la même façon que les variables d'état d'une modélisation, le choix des variables aléatoires est guidé par plusieurs critères :

- l'objectif de l'étude fiabiliste : par exemple, l'utilisation des propriétés mécaniques macroscopiques suffira à évaluer la probabilité de défaillance d'un matériau composite donné ; en revanche, pour la conception d'un nouveau matériau, le recours à des données microstructurales sera plus pertinent ;
- l'explication physique des aspects du comportement mécanique du matériau, notamment le mode de défaillance et les causes de sa mise en place : dans le cas de la rupture des composites fibrés, on s'intéressera ainsi à différents paramètres (résistance de la matrice, des fibres ou de l'interface) suivant la sollicitation envisagée,
- la disponibilité de résultats expérimentaux : les modèles probabilistes associés aux variables aléatoires doivent effectivement être physiquement justifiés pour conduire à une représentation réaliste.

Description des variabilités

Lorsque l'identification ou le contrôle de propriétés physiques amènent à l'acquisition de mesures non strictement reproductibles, il est indispensable en vue du

calcul de structures de définir un outil à la fois représentatif des variabilités enregistrées et dont la formulation demeure adaptée à l'intégration dans les codes de simulation. L'enjeu est en effet de modéliser ces multiples informations à l'aide de lois mathématiques qui fourniront notamment les fréquences d'apparition de chaque résultat, leur valeur moyenne et les oscillations autour de cette moyenne.

La modélisation des distributions nécessite de connaître un nombre suffisant de données, le plus important possible de façon à travailler sur un faisceau représentatif d'informations. Considérons donc une variable aléatoire réelle et continue X dont on connaît par expérimentation un certain nombre N de valeurs (ou réalisations) indépendantes $\{x_i\}_{i \in [1..N]}$ de X constituant un échantillon. Un traitement statistique de ce faisceau d'informations permet en premier lieu d'analyser la variabilité de cette donnée: la répartition des valeurs (à l'aide des fréquences relatives et cumulées,..) ainsi que les caractéristiques de tendance centrale (moyenne,..) et de dispersion (écart type,..).

Il s'agit ensuite de modéliser l'incertitude observée par une fonction mathématique qui précisera les issues pour X et associera à chacune d'elles ses chances de réalisation. Dans ce contexte, on peut recourir soit à la fonction de densité de probabilité $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, soit à la fonction de répartition $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ associées à X telles que (P la probabilité):

$$\begin{aligned} f_X(x)dx &= P(x \leq X < x + dx) \\ F_X(x) &= P(X < x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

avec les liens

$$\forall x, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u)du \quad \text{et} \quad \frac{dF_X}{dx}(x) = f_X(x) \tag{1.2}$$

et vérifiant les propriétés

$$\begin{aligned} \forall x, f_X(x) &\geq 0 \\ F_X &\text{ est non décroissante} \\ F_X(-\infty) &= 0, \quad F_X(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)du = 1 \end{aligned} \tag{1.3}$$

La probabilité que la variable aléatoire X soit inférieure à une valeur donnée a , soit :

$$P(X < a) = F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(u)du \tag{1.4}$$

correspond donc graphiquement à l'aire sous la courbe de f_X entre $x = -\infty$ et $x = a$, et la probabilité que X soit comprise entre deux valeurs données a et b , soit :

$$P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(u) du \quad (1.5)$$

représente quant à elle l'aire sous la courbe f_X comprise entre $x = a$ et $x = b$ (cf. figure 1.1). La probabilité d'un évènement étant naturellement reliée à la notion de fréquence statistique pour des échantillons de grande taille, on détermine donc par une procédure d'ajustement les fonctions f_X et F qui représentent au mieux les variabilités expérimentales. L'annexe A présente les principales lois de distribution utilisées dans le contexte de la fiabilité mécanique, à savoir la loi normale, la loi lognormale et la loi de Weibull.

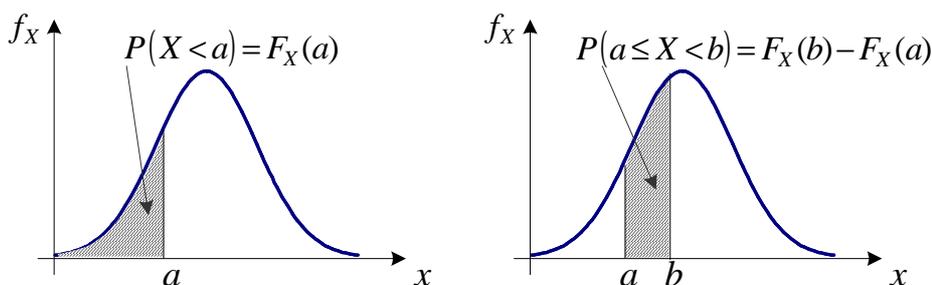


Figure 1.1: Interprétation graphique des fonctions de densité et de répartition d'une variable aléatoire X .

Dans le cas des études fiabilistes, on introduit généralement plus d'un paramètre aléatoire. L'ensemble des k variables X_i du problème constitue dans ce cas un vecteur $\{X\} = \{X_i\}_{i=1..k}$ de \mathbb{R}^k dont les probabilités d'occurrence sont décrites par une densité de probabilité conjointe $f_{\{X\}} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ et une fonction de répartition conjointe $F_{\{X\}} : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, 1]$ telles que :

$$\begin{aligned} f_{\{X\}}(\{x\}) \prod_{i=1}^k dx_i &= P(x_i \leq X_i < x_i + dx_i), \quad \forall i = 1..k \\ F_{\{X\}}(\{x\}) &= P(X_i < x_i), \quad \forall i = 1..k \end{aligned} \quad (1.6)$$

où $\{x\} = \{x_i\}_{i=1..k}$ est un vecteur de \mathbb{R}^k , avec :

$$\int_{\mathbb{R}^k} f_{\{X\}}(\{x\}) \prod_{i=1}^k dx_i = 1 \quad (1.7)$$

A titre illustratif, la figure 1.2 présente l'allure d'une fonction $f_{\{X\}}$ dans le cas de deux variables aléatoires.

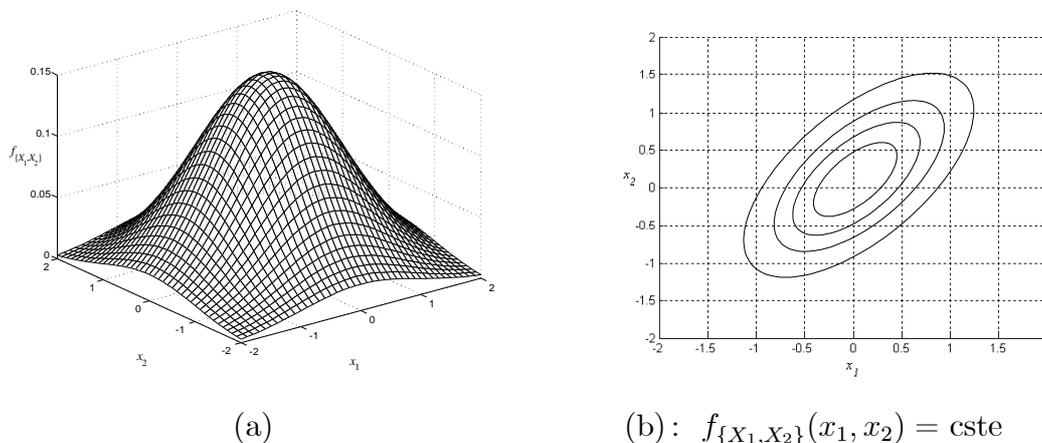


Figure 1.2: Fonction de densité de probabilité conjointe dans le cas de deux variables aléatoires $\{X\} = \{X_1, X_2\}$: (a) représentation 3D, (b) isovaleurs de $f_{\{X\}}$.

Lorsque les k variables aléatoires X_i sont indépendantes, l'expression de la densité conjointe se ramène au produit des densités marginales f_{X_i} de chaque variable :

$$f_{\{X\}}(\{x\}) = \prod_{i=1}^k f_{X_i}(x_i), \quad \forall \{x\} = \{x_i\}_{i=1..k} \quad (1.8)$$

Dans le cas contraire, il y a lieu de préciser absolument la nature de leur dépendance pour le calcul des indicateurs de fiabilité. C'est pourquoi est introduite une matrice de corrélation $[\rho] = [\rho_{ij}]_{(i,j)=[1..k]^2}$ dont les composantes ρ_{ij} mesurent la dépendance linéaire entre chaque couple de variables aléatoires X_i et X_j de la façon suivante :

$$\rho_{ij} = \rho(X_i, X_j) = \frac{Cov(X_i, X_j)}{S_{X_i} S_{X_j}}, \quad \forall (i, j) \in [1..k]^2 \quad (1.9)$$

où $Cov(X_i, X_j)$ représente la covariance de ces deux variables, S_{X_i} et S_{X_j} désignant leur écart type respectif (voir par exemple Jolion [34]). Chaque composante ρ_{ij} est un nombre appartenant à l'intervalle $[-1, +1]$:

- si $\rho_{ij} = 0$, les variables X_i et X_j ne sont pas reliées linéairement entre elles (mais peuvent l'être d'une autre manière) ;
- si $\rho_{ij} > 0$ (resp. $\rho_{ij} < 0$), X_i et X_j ont tendance à varier dans le même sens (resp. dans le sens contraire) ;

- lorsque $|\rho_{ij}| > 0.9$, la liaison linéaire est considérée comme forte.

Précisons enfin que pour des variables $\{X_i\}_{i=1..k}$ indépendantes, la matrice de corrélation se réduit à la matrice identité d'ordre k .

1.2.3 Fonction de performance

Il s'agit dans cette partie de construire le scénario de défaillance de la structure, *i.e.* de préciser l'état limite au-delà duquel celle-ci n'est plus considérée comme fiable. Ces états limites correspondent principalement à des exigences en termes de tenue mécanique (la défaillance est associée à la rupture du matériau ou la ruine de la structure) ou d'aptitude au service (la défaillance est associée à des déformations ou un endommagement excessifs). Une campagne AMDEC (Analyse des Modes de Défaillances, des Effets et des Criticités) permet par exemple d'identifier les modes de défaillance possibles, leurs causes ainsi que leurs conséquences sur le fonctionnement de la structure (Lyonnet [42]).

La notion de fiabilité étant posée, un critère de défaillance est défini à l'aide d'une fonction dite de performance (ou d'état limite), notée G , et qui dépend des variables aléatoires du modèle. Par convention, on définit le domaine de sûreté \mathcal{D}_s et le domaine de défaillance \mathcal{D}_f de \mathbb{R}^k comme suit :

$$\mathcal{D}_s = \{\{X\} \in \mathbb{R}^k, G(\{X\}) > 0\} \quad (1.10)$$

$$\mathcal{D}_f = \{\{X\} \in \mathbb{R}^k, G(\{X\}) \leq 0\} \quad (1.11)$$

La frontière $\{\{X\} \in \mathbb{R}^k, G(\{X\}) = 0\}$ est la surface d'état limite. La figure 1.3 illustre cette définition sur le cas de deux variables aléatoires de base.

Les points importants concernant le critère de défaillance sont les suivants :

- le choix de la fonction de performance se doit d'être dicté par la cause physique de la défaillance de façon à en obtenir une représentation réaliste ; son expression peut alors porter sur des données microscopiques (dans le cas par exemple d'une défaillance par rupture locale) ou macroscopique (dans le cas par exemple d'une défaillance par instabilité structurale) ;

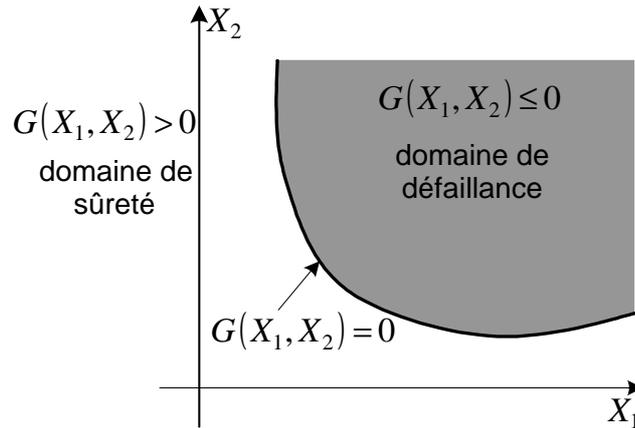


Figure 1.3: Domaines de sûreté et de défaillance dans le cas de deux variables aléatoires $\{X\} = \{X_1, X_2\}$.

- si la forme du critère est généralement du type $G = R - S$ avec R une caractéristique de résistance et S une donnée relative à la sollicitation appliquée, la fonction G n'est pas forcément une fonction explicite des variables de base $\{X\}$, elle peut dépendre en effet de la réponse de la structure (par exemple contraintes ou déformations) et son évaluation nécessite alors un calcul mécanique préalable (le plus souvent par éléments finis) faisant intervenir une loi de comportement (couplage mécano-fiabiliste) ;
- certaines considérations d'ordre pratique peuvent enfin influencer sur son choix : la complexité du couplage précité ou encore les propriétés mathématiques de la fonction G qui vont conditionner les calculs de probabilité de défaillance exposés par la suite.

1.2.4 Indicateurs de fiabilité

La fiabilité \mathcal{R} (en anglais, *reliability*) d'une structure est conventionnellement définie de la façon suivante :

$$\mathcal{R} = 1 - P_f \quad (1.12)$$

où la probabilité de défaillance P_f (en anglais, *probability of failure*) correspond à la probabilité d'occurrence de l'évènement $G(\{X\}) \leq 0$:

$$P_f = P(G(\{X\}) \leq 0) \quad (1.13)$$

Cet indicateur de confiance constitue le résultat essentiel d'un calcul fiabiliste. Si l'on introduit la densité de probabilité conjointe $f_{\{X\}}$ des variables aléatoires $\{X\}$ du modèle, la probabilité de défaillance s'écrit alors comme suit :

$$P_f = \int_{D_f} f_{\{X\}}(\{x\}) \prod_{i=1}^k dx_i \quad (1.14)$$

Il est très rare que cette intégrale puisse être étudiée analytiquement voire numériquement. Dans la pratique, on ne dispose pas en général de la densité de probabilité conjointe du vecteur $\{X\}$, on doit se contenter le plus souvent des lois marginales relatives à chaque variable X_i et à certaines informations sur leur corrélation. De plus, le domaine d'intégration D_f peut être défini de façon implicite et complexe selon le modèle mécanique retenu.

Diverses méthodes de résolution ont ainsi été développées pour pallier ces difficultés (Lemaire [37], Maynadier [44]). Classiquement, on distingue deux grandes familles : les méthodes basées sur des simulations et celles recourant à une approximation. On se propose de présenter ici les grandes lignes des trois méthodes utilisées dans le cadre de cette étude.

Monte Carlo directe

Il s'agit de la technique la plus ancienne et la plus intuitive d'évaluation de la probabilité de défaillance. Basée sur l'application de la loi des grands nombres², elle consiste à déterminer un estimateur de P_f par succession de tirages aléatoires indépendants.

On réalise ainsi un nombre N_t important de tirages des variables aléatoires en accord avec leur loi de distribution conjointe (si elle existe) ou en accord avec la loi marginale de chaque variable et avec leurs éventuelles corrélations. Pour chaque tirage, la fonction de performance est calculée et l'on dénombre les tirages $N_{t,f}$

²“La fréquence moyenne d'apparition d'un résultat dans une répétition d'épreuves tend vers la probabilité d'observer cette apparition dans une seule épreuve” (J. Bernoulli, *L'art de la conjecture*, 1713).

conduisant à la réalisation $G(\{X\}) \leq 0$ (figure 1.4). On en déduit alors la probabilité de défaillance par un traitement statistique direct :

$$P_f = \frac{N_{t,f}}{N_t} \quad (1.15)$$

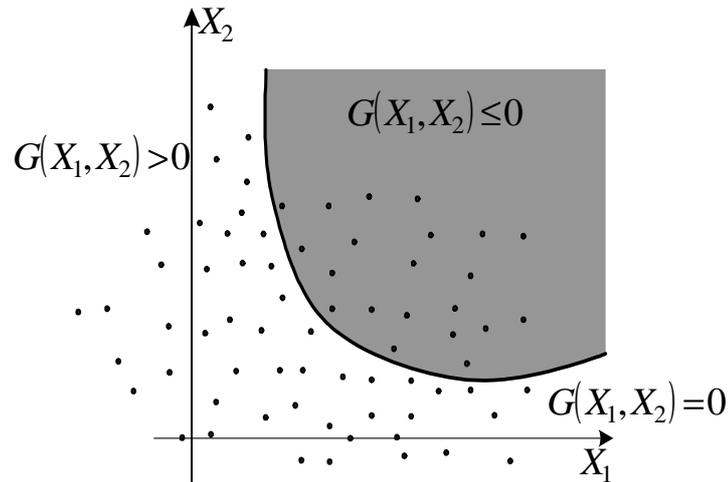


Figure 1.4: Méthode de Monte Carlo directe : tirages aléatoires et évaluations de la fonction de performance G dans le cas de deux variables aléatoires $\{X\} = \{X_1, X_2\}$.

Cette méthode présente avant tout l'avantage d'une simplicité de mise en oeuvre et d'une absence d'exigences mathématiques spécifiques pour la fonction G . En revanche, une attention particulière doit être portée à la convergence des résultats obtenus, *i.e.* à la stabilité de la valeur de P_f quel que soit N_t . Pour des valeurs de P_f de l'ordre de 10^{-k} avec $k \geq 5$, il est ainsi nécessaire de réaliser un minimum de $N_{t,\min} = 10^{k+2}$ simulations pour assurer cette condition. Il faut veiller également à l'indépendance de la probabilité de défaillance vis-à-vis de la génération d'échantillonnage en effectuant pour cela des mesures de P_f pour des tirages de taille N_t croissante jusqu'à $N_{t,\min}$. Outre la difficulté de satisfaire à ces deux exigences dans le cas de faibles probabilités de défaillance, le temps de calcul induit dans cette méthode peut s'avérer conséquent et parfois difficilement conciliable avec une analyse par éléments finis.

Méthodes d'approximation FORM/SORM

Ces méthodes sont basées sur la détermination de l'indice de fiabilité β qui permet ensuite d'accéder à une valeur approchée de P_f . Plusieurs définitions sont possibles pour β mais celle préconisée par Hasofer et Lind [28] est aujourd'hui la plus largement employée compte tenu de son invariance vis-à-vis de la représentation de la fonction de performance.

Précisément, ces auteurs proposent d'effectuer un changement de repère transformant l'espace dit physique des variables de base $\{X\}$ en l'espace dit standard de variables $\{U\}$ normales (*i.e.* suivant une loi de distribution normale, *cf.* annexe A), centrées réduites (*i.e.* de moyenne nulle et d'écart type unitaire) et indépendantes. La fonction de performance G est elle aussi exprimée dans l'espace standard et devient H . Différentes transformations isoprobabilistes (Rosenblatt, Nataf,..) permettent ainsi de faire ce passage (voir Ditlevsen et Madsen [13], Lemaire [37]). D'un point de vue pratique, le choix de la procédure est lié aux données dont on dispose (densité conjointe $f_{\{X\}}$ ou lois marginales f_{X_i} et matrice de corrélation $[\rho]$), aux propriétés des variables aléatoires de base (normale, lognormale,..) ainsi qu'aux résultats auxquels elles conduisent (unicité de la transformation par exemple).

Dans l'espace standard, l'indice β est défini comme la distance la plus courte entre le domaine de défaillance $\mathcal{D}_{f,\{U\}} = \{\{U\} \in \mathbb{R}^k, H\{U\} \leq 0\}$ et l'origine $0_{\{U\}}$ du repère (figure 1.5). Le point P^* de la surface d'état limite correspondant à cette distance minimale, appelé point de conception ou β -point, est le point de la zone de défaillance qui a la plus grande probabilité d'occurrence. La recherche du point P^* (et donc le calcul de β) constitue un problème d'optimisation sous contrainte ($\|\cdot\|$ désignant la norme) :

$$\text{minimiser } \|\{U\}\| \text{ tel que } H\{U\} \leq 0 \quad (1.16)$$

dont la résolution peut s'avérer très complexe dans le cas de fonctions H définies implicitement, possédant des défauts de convexité (amenant notamment à des difficultés de convergence voire à la non-unicité de P^*) ou non différentiables en certains points.

Comme précédemment, divers algorithmes ont été développés pour répondre à cette question de "descente vers P^* ", qui font appel à des évaluations de H , à son

gradient et/ou à son Hessien suivant leur formulation (Maynadier [44]). Le recours à l'une ou l'autre de ces techniques doit alors se faire selon son efficacité (nombre d'appels à la fonction d'état limite), sa robustesse (aptitude à trouver le bon point de conception) et sa capacité à traiter un problème de taille éventuellement importante. La convergence vers P^* est enfin conditionnée par la tolérance t fixée sur le critère d'arrêt tel que $\|\{U\}_{p+1} - \{U\}_p\| \leq t$ ($\{U\}_p$ désignant la $p^{\text{ème}}$ itération du vecteur $\{U\}$).

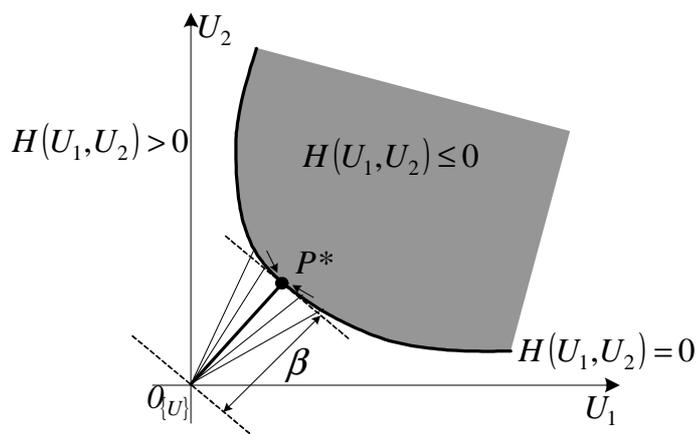


Figure 1.5: Recherche de l'indice de fiabilité β et du point de conception P^* dans l'espace standard pour deux variables aléatoires $\{U\} = \{U_1, U_2\}$.

Une fois P^* et β obtenus, il reste à déterminer le domaine de défaillance. Les méthodes FORM (en anglais, *First Order Reliability Method*) et SORM (*Second Order Reliability Method*) sont basées sur des approximations de ce domaine permettant un calcul analytique de l'intégrale (1.14). Dans le cas de FORM, la surface limite $H\{U\} = 0$ est ainsi approchée par l'hyperplan tangent à $\mathcal{D}_{f,\{U\}}$ en P^* (figure 1.6). On démontre alors que la probabilité de défaillance peut être estimée simplement par :

$$P_f \simeq F(-\beta) \quad (1.17)$$

avec F la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (*cf.* annexe A). Le tableau 1.1 montre ainsi que plus la valeur de β est grande, plus la fiabilité de la structure est importante (étant admis que l'origine de l'espace standard appartient au domaine de sûreté, $H\{0_{\{U\}}\} > 0$).

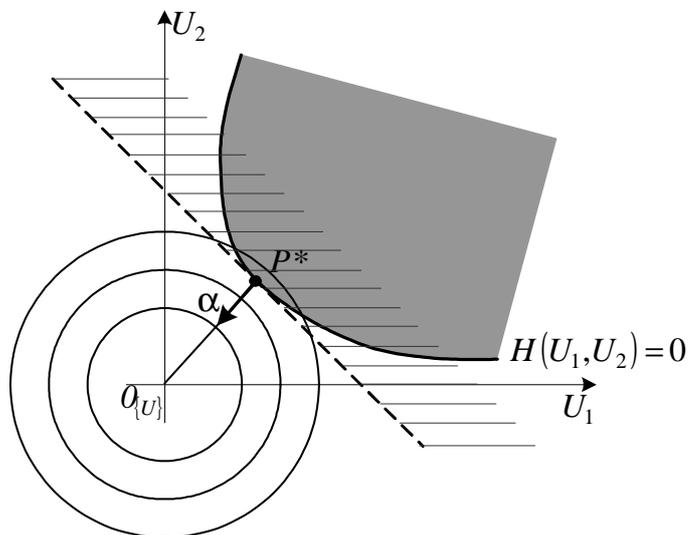


Figure 1.6: Approximation FORM pour deux variables aléatoires $\{U\} = \{U_1, U_2\}$ dans l'espace standard.

β	P_f
0	0.5
1	0.16
2	2.28×10^{-2}
3	1.35×10^{-3}
4	3.17×10^{-5}
5	2.87×10^{-7}
6	9.87×10^{-10}

Tableau 1.1: Méthode FORM: correspondance entre l'indice de fiabilité β et la probabilité de défaillance P_f .

Un des intérêts de FORM réside par ailleurs dans la possibilité d'accéder à des informations complémentaires sur la fiabilité de la structure. On peut effectivement accéder aux cosinus directeurs α_i qui nous renseignent sur la sensibilité, au point de conception P^* , de l'indice de fiabilité β par rapport à chaque variable aléatoire normée U_i :

$$\alpha_i = -\frac{\partial \beta}{\partial U_i}(P^*), \forall i = 1..k \quad (1.18)$$

Ils représentent les composantes du vecteur α normal à l'hyperplan tangent en P^* (figure 1.6). Plus le cosinus directeur est important en valeur absolue, plus la variable aléatoire associée joue un rôle stochastiquement important. Dans le cas des variables X_i indépendantes, le signe de α_i caractérise la nature de la variable considérée : pour une valeur positive (respectivement négative) de α_i , la variable u_i est dite de type sollicitation (resp. résistance), *i.e.* que son augmentation entraîne une diminution (resp. augmentation) de la fiabilité. Pour compléter cette analyse, il est également intéressant d'établir les élasticités e_r par rapport aux paramètres r de la distribution des variables, définies par :

$$e_r = \frac{r}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial r} \quad (1.19)$$

Ces quantités permettent de préciser l'ampleur de la modification de l'indice de fiabilité lorsque le paramètre associé varie. Comme précédemment, une valeur positive (resp. négative) de e_r correspond ainsi à un impact bénéfique (resp. néfaste) du paramètre r pour la fiabilité de la structure. Du point de vue de la conception, certains indicateurs sont couramment calculés : l'élasticité à la moyenne renseigne sur le dimensionnement à retenir ou sur la gamme préférentielle d'utilisation de la structure, l'élasticité à l'écart type oriente quant à elle le contrôle qualité pour éviter les dispersions.

De façon évidente, la précision de la méthode FORM vis-à-vis de la valeur de P_f est liée à la linéarité de la surface d'état limite $H(U) = 0$. Dans le cas d'une courbure notable de $\mathcal{D}_{f,\{U\}}$ au voisinage de P^* , elle peut effectivement conduire à un résultat erroné de la probabilité de défaillance réelle, sous-estimé ou surestimé suivant la courbure de H . Aussi, dans ce cas, il est plus pertinent de recourir à l'approximation SORM dans laquelle on approche localement la fonction d'état limite en P^* par une forme quadratique (figure 1.7). Il existe plusieurs formulations de la probabilité de défaillance suivant la nature de la surface quadratique retenue et le mode de calcul de l'intégrale (1.14). Dans notre cas, nous avons travaillé avec une approximation

parabolique de $H(U) = 0$ et avec des estimations de P_f par intégration directe (formule de Tvedt) et dans un cadre asymptotique $\beta \rightarrow \infty$ (formules de Breitung et de Hohenbichler-Rackwitz), dont les expressions sont détaillées dans l'ouvrage de Lemaire [37].

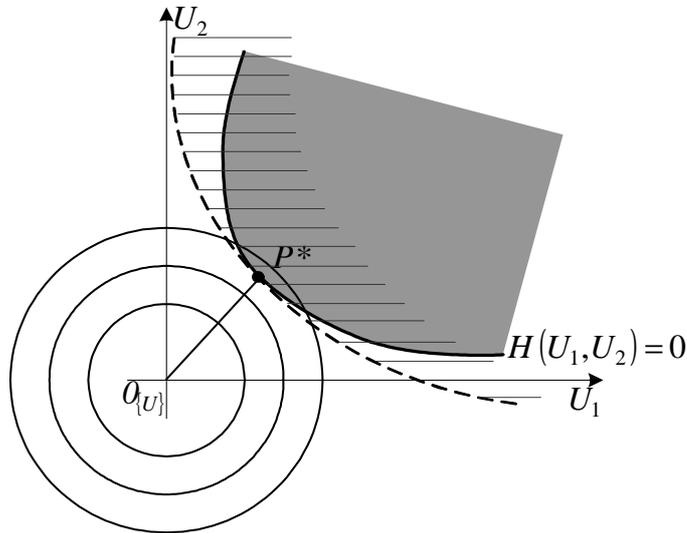


Figure 1.7: Approximation SORM pour deux variables aléatoires $\{U\} = \{U_1, U_2\}$ dans l'espace standard.

Ces méthodes approchées sont nettement moins onéreuses en temps de calcul que l'estimation de Monte Carlo, FORM étant évidemment la plus économique des deux. Par ailleurs, elles sont d'autant plus précises que le point de conception est éloigné de l'origine dans l'espace normé, *i.e.* dans le domaine des petites probabilités de défaillance ($P_f \leq 10^{-2}$), et fournissent en plus de P_f des renseignements sur la sensibilité de la fiabilité. Notons pour finir qu'une vérification de leur résultat à l'aide de quelques simulations de type Monte Carlo est recommandée pour valider l'approximation sur laquelle elle reposent.

Remarque 1.1 *Même si nous n'y aurons pas recours dans la suite de ce travail, signalons néanmoins qu'il existe également des méthodes de simulation (ou de tirages) d'importance qui consistent à effectuer un nombre réduit de tirages mais ciblés, en l'occurrence autour du point de conception (Melchers [46]). Cette méthode requiert donc de réaliser préalablement aux simulations la transformation isoprobabiliste puis le processus d'optimisation pour l'accès à β .*

1.2.5 Application aux composites

La mise en évidence de l'importante dispersion des propriétés des matériaux composites a naturellement incité nombre d'auteurs à se tourner vers les méthodes de fiabilité pour leur analyse. Depuis les années 1980 surtout, les travaux en ce sens se sont en effet multipliés permettant une meilleure gestion des risques ainsi qu'une optimisation de ces structures (voir par exemple Richard *et al.* [52]).

Parmi ces études, on peut globalement distinguer deux grandes démarches :

- les approches microstructurales, plus attachées à l'aspect matériau, introduisent des critères de défaillance à l'échelle microscopique dont les paramètres limites sont aléatoires. Un critère local sur les constituants ou sur les interfaces du composite est en effet défini dans lequel leur résistance à la rupture y suit une certaine loi de distribution (généralement de type Weibull), l'accès aux réponses locales étant permis par un processus d'homogénéisation. La description de la rupture du matériau est ensuite basée sur la théorie du maillon le plus faible (Weibull [60]) et sur une redistribution globale ou locale des efforts sur les éléments non rompus (par exemple Baxevanakis *et al.* [1], Calard et Lamon [9], Daniels [11], Desrumaux *et al.* [12], Foret *et al.* [18], Gao [21], Zweben [63],...);
- les approches macroscopiques s'intéressent en revanche aux structures composites comme les stratifiés avec un critère de défaillance qui se rapporte à la réponse macroscopique de chacun des plis. Le caractère dispersif du comportement est introduit au travers des paramètres limites du critère, la fiabilité de la structure étant ensuite établie suivant un système série ou parallèle (par exemple Boyer *et al.* [8], Frangopol et Recek [19], Guedes Soares [26], Gurvich et Pipes [27], Kam et Chang [35],..).

Dans les deux cas, l'objectif est d'accéder principalement à la probabilité de défaillance du matériau ou de la structure composite en fonction du chargement appliqué. Si classiquement, les premières approches sont menées dans une optique de compréhension et de modélisation, les secondes visent quant à elles davantage la conception et l'optimisation de structures (à l'aide notamment des élasticités). Notons pour finir, qu'outre la variabilité précitée sur les paramètres limites du critère

de défaillance (micro ou macro), les incertitudes introduites dans ces études portent sur le chargement, les dimensions des structures ainsi que sur les propriétés mécaniques macroscopiques (élastiques, plastiques, d'endommagement,...).

1.3 Etude de la passerelle de Laroin

1.3.1 Une structure innovante

Les matériaux composites à fibres de carbone sont d'un grand intérêt dans le domaine du génie civil, notamment en ce qui concerne les ouvrages d'art (Luyckx [41]). Leur rapport poids/résistance, leur longévité sous sollicitations de fatigue ainsi que leur très bonne résistance à la corrosion sont effectivement des qualités recherchées pour ces structures, que ce soit en phase de conception ou de réhabilitation. Parmi les principales applications, on note ainsi le renforcement d'éléments en béton (fibres courtes incorporées au matériau, tissus collés sur les parois externes) et la réalisation de câbles (torons de précontrainte pour le béton, haubans).

En ce qui concerne plus précisément les haubans de ponts suspendus, le Japon a sans nul doute été le précurseur dans ce domaine. Son contexte sismique et le fait que la grande majorité des lignes de fabrication des fibres de carbone y soient implantées ont contribué à ce développement. Pour la première fois en 1977, quatre haubans composites de plus de 500 m de long ont ainsi été utilisés pour la construction du pont de Kurushima. Cette technologie s'est ensuite étendue à l'Europe sous l'impulsion du Professeur U. Meier [45], notamment en Suisse (pont de Winterthur en 1996), aux Pays-Bas (pont de Rotterdam en 1997) ou au Danemark (passerelle d'Herning en 1999, Christoffersen *et al.* [10]).

La passerelle de Laroin (Pyrénées-Atlantiques) est le premier ouvrage en France intégrant cette technologie (figure 1.8). Elle a été conçue et réalisée en 2002 par la société Freyssinet International (Geffroy [23]) pour offrir un franchissement piétonnier du gave de Pau au niveau de la commune de Laroin, située près de Pau. La solution haubanée a été retenue pour plusieurs raisons : pour permettre un franchissement de la rivière sans piles, pour amener à une structure plus souple qui résistera mieux à d'éventuels tremblements de terre (le site étant en zone sismique), mais aussi,

et surtout, pour réaliser un ouvrage expérimental destiné au développement des haubans composites.



Figure 1.8: La passerelle piétonnière de Laroin (Pyrénées-Atlantiques).

1.3.2 Description de l'ouvrage

La passerelle comporte une travée unique de 110 *m* de portée, avec un tablier de 2.50 *m* de large, le tracé en long étant une courbe d'environ 1200 *m* de rayon. La travée est maintenue de chaque côté par l'intermédiaire de deux nappes de quatre haubans constitués de joncs composites en carbone-époxy dont la longueur varie de 20 *m* à 50 *m* (figure 1.9). Au niveau de chaque rive, les deux nappes de haubans composites se rejoignent à la tête d'un pylône. Les deux pylônes en forme de "V" inversé ont une hauteur de l'ordre de 20 *m* et reposent sur les fondations des culées. Chaque pylône est par ailleurs retenu lui-même par un hauban arrière en acier dit de retenue. Les deux culées sont constituées d'un massif en béton s'appuyant sur des micropieux, les massifs d'ancrage des haubans de retenue sont quant à eux ancrés dans le sol par l'intermédiaire de quatre tirants.

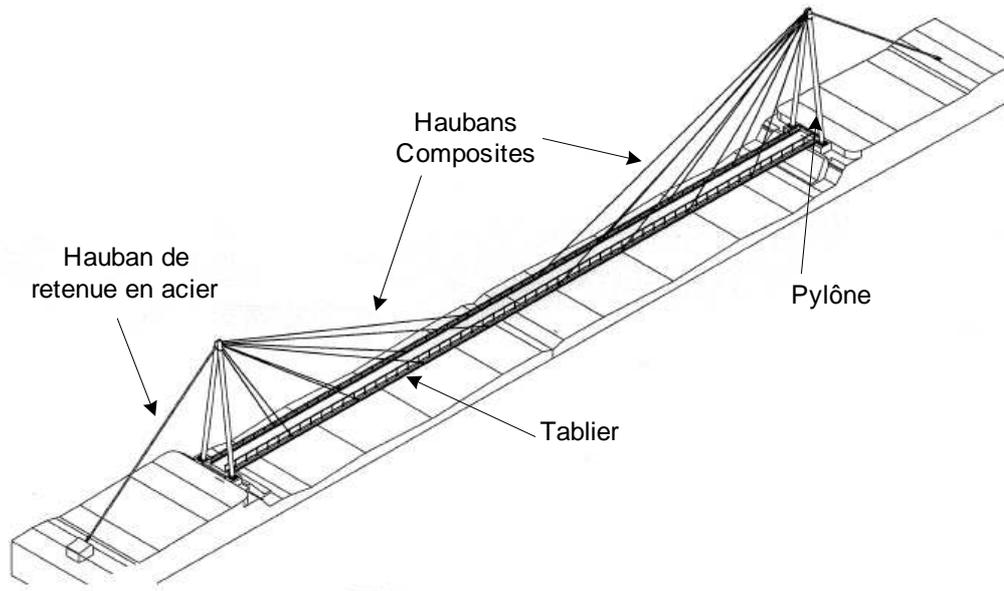


Figure 1.9: Schéma général de la passerelle [20].

Examinons à présent dans le détail chacun des éléments constitutifs de la structure (Freyssinet [20]).

Le tablier

La structure porteuse du tablier est constituée d'une part de deux poutres longitudinales appelées poutres maîtresses espacées de 3.20 m et assemblées par boulonnage par couvre joint sur semelles et âme. Entre ces deux poutres, sont placées tous les 2 mètres des poutres transversales appelées pièces de pont, la liaison avec les poutres principales étant réalisée à l'aide de platines et de boulons haute résistance. Les profilés constitutifs sont en acier laminé, profilés HEA 340 pour les poutres maîtresses et profilés HEA 160 pour les pièces de pont. La rigidité transversale de la structure métallique est enfin assurée par un contreventement de type croix de Saint André à l'aide de cornières (figure 1.10).

Le platelage est réalisé quant à lui à partir de dalles en béton de 2.50 m de large et de 0.10 m d'épaisseur qui reposent simplement sur les pièces de pont. Les garde-corps sont fixés sur les pièces de pont. Enfin, des oreilles sont soudées tous les 12 mètres sur la semelle supérieure des HEA 340 et dans le prolongement de l'âme du profilé pour connecter les chapes des haubans (figure 1.11).

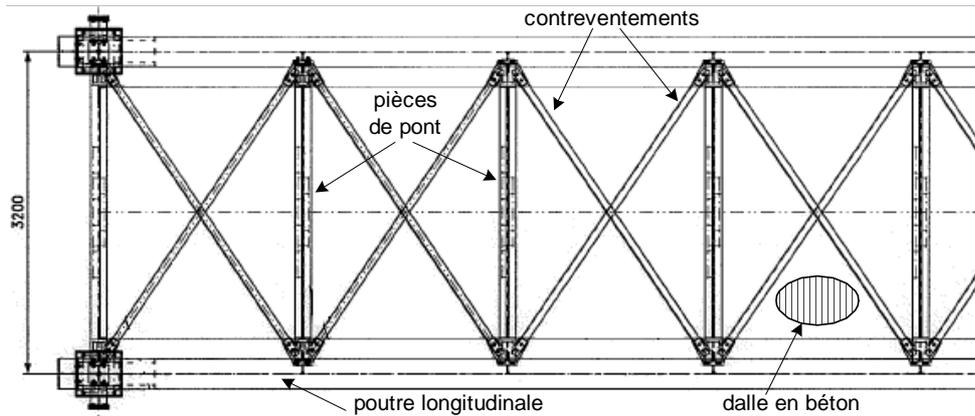


Figure 1.10: Vue en plan de la structure porteuse du tablier [20].

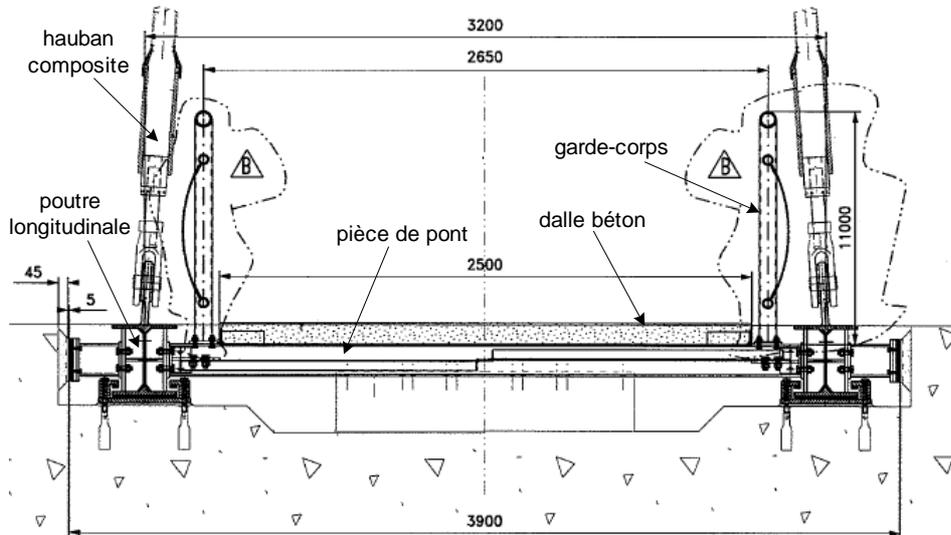


Figure 1.11: Vue en coupe du tablier [20].

Les haubans

- *Haubans de travée (composites)*

Les haubans de travée sont composés de faisceaux de sept jons composites parallèles de 6 mm de diamètre en moyenne fabriqués par la société Soficar (Société des Fibres de Carbone) située à Abidos (Pyrénées Atlantiques). Le matériau constituant les jons est un composite unidirectionnel à base de fibres de carbone haute

résistance noyées dans une résine époxy (nous y reviendrons en détail au chapitre 2). La structure d'un faisceau est décrite à la figure 1.12: elle comporte un jonc central appelé noyau autour duquel sont placés six autres joncs, l'ensemble étant compacté à la sortie de la zone d'ancrage au moyen d'un manchon de forme appropriée.

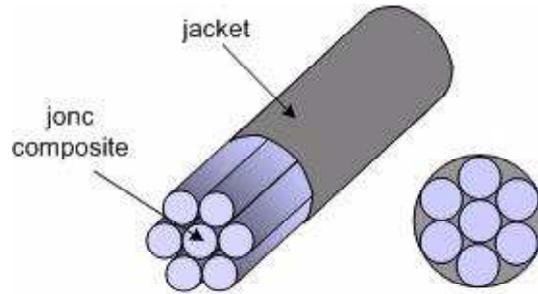


Figure 1.12: Schéma d'un faisceau de sept joncs (6+1).

On distingue deux ensembles de haubans pour la passerelle : les haubans H_1 et H_2 les plus proches des pylônes, et les haubans H_3 et H_4 les plus éloignés. Ces derniers étant davantage sollicités, leur structure est constituée de trois faisceaux de sept joncs (soit en tout 21 joncs), alors que deux faisceaux seulement ont été retenus pour H_1 et H_2 (soit en tout 14 joncs, figure 1.13). Les ensembles de faisceaux sont ensuite protégés du milieu extérieur par une gaine enveloppe en polyéthylène haute densité (PEHD) de 5 *mm* d'épaisseur.

Afin de faciliter les travaux d'entretien et de remplacement en cas d'une éventuelle défaillance, chaque extrémité des faisceaux est ancrée individuellement. L'ancrage supérieur (niveau pylône) est vissé sur une chape fixe qui vient ensuite se connecter par l'intermédiaire d'un axe sur le pylône. L'ancrage inférieur (niveau du tablier) est quant à lui vissé sur une chape réglable connectée au tablier par l'intermédiaire des oreilles.

Les performances en frottement et rigidité transversale du composite étant largement inférieures à celles de l'acier, Freyssinet a développé un système spécifique d'ancrage pour les haubans de travée combinant effets de serrage (coincement conique) et de frottement (collage) et qui a fait l'objet d'un brevet. L'étanchéité de la zone d'ancrage est finalement assurée par l'injection d'une cire pétrolière.

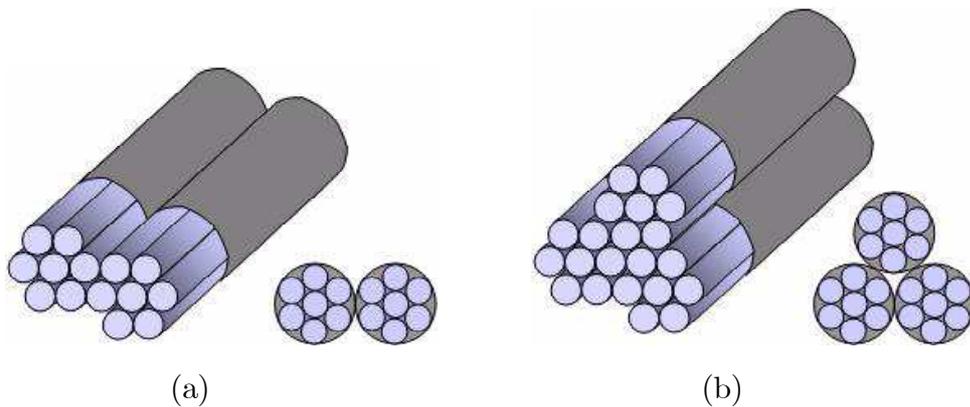
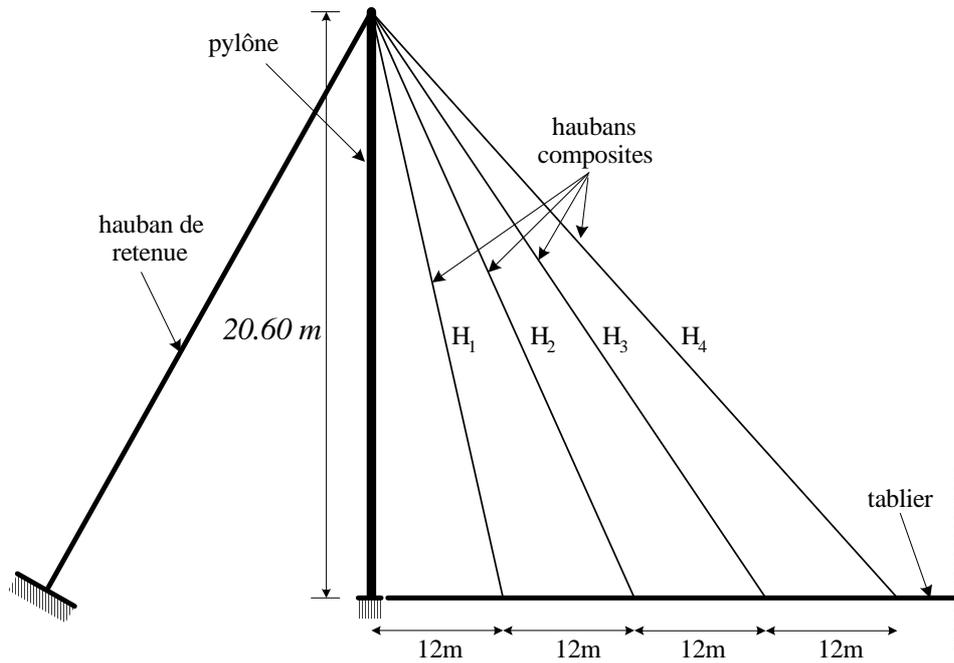


Figure 1.13: Structure des haubans de travée: (a) H₁ et H₂, (b) H₃ et H₄.

Haubans de retenue (acier)

Les haubans de retenue sont constitués d'un faisceau de 19 torons en acier T15 (section 150 mm^2), parallèles et enfilés dans une gaine générale PEHD (figure 1.14). Les torons sont traités contre la corrosion : par galvanisation à chaud des fils d'acier, par un gainage individuel en PEHD et enfin par l'injection d'une cire pétrolière entre les interstices.

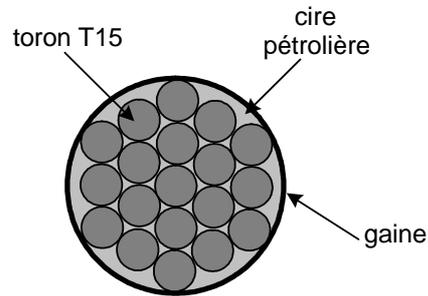


Figure 1.14: Structure des haubans de retenue.

Chaque toron est ancré individuellement dans un bloc en acier à haute performance, les zones d'ancrage étant elles aussi protégées contre la corrosion avec notamment une étanchéité selon le même principe que précédemment. En partie supérieure, l'ancrage du hauban de retenue est fixe, prenant appui sur un tube traversant la tête de pylône. En partie inférieure, l'ancrage est fixe également, reposant cette fois sur un culot, lui-même ancré au massif en béton à l'aide de barres de précontrainte.

Les pylônes

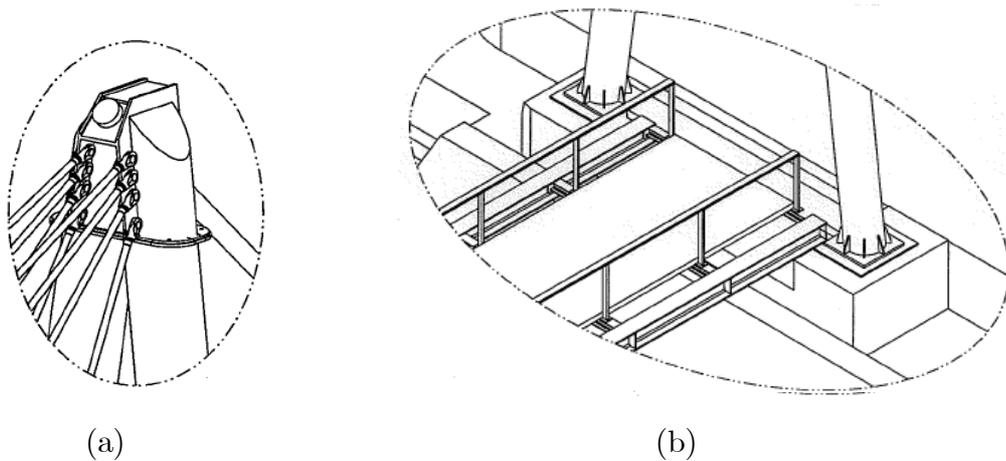


Figure 1.15: Pylônes métalliques : (a) partie supérieure, (b) partie inférieure [20].

Les pylônes sont constitués de deux tubes en acier de 630 *mm* de diamètre et de 15 *mm* d'épaisseur. En partie supérieure des pylônes, une tête d'ancrage est boulonnée de façon à connecter les câbles de retenue et les haubans de travée. Ces tubes sont ancrés au niveau inférieur dans les fondations de la culée par l'intermédiaire de deux platines précontraintes en béton (figure 1.15).

1.3.3 Enjeux de l'étude

Le caractère unique et innovant de cette passerelle nous a particulièrement intéressé pour appuyer notre étude sur la fiabilité des composites. Par ailleurs, les objectifs de développement qui lui sont associés s'inscrivent parfaitement dans le cadre de la démarche fiabiliste.

Nous avons ainsi choisi d'orienter nos efforts dans deux directions principales :

- La première concerne le matériau composite lui-même (chapitre 3). L'enjeu est de prendre en compte des informations relatives à sa microstructure (incertitudes, mode de défaillance) et d'en analyser les conséquences sur la fiabilité macroscopique du matériau. Cette démarche contribuera notamment à la compréhension des mécanismes physiques mis en jeu et à la mise en évidence des variables aléatoires prépondérantes ;
- La seconde partie s'intéresse quant à elle à l'étude de la passerelle proprement dite (chapitre 4). On y examine en effet la fiabilité des haubans composites en tant qu'éléments porteurs de la structure. L'objectif visé y est d'intégrer les apports issus du chapitre 3 afin d'améliorer la conception de futurs ouvrages de ce type.

Chapitre 2

Matériaux et modélisation micromécanique

2.1 Introduction

La validité d'une étude de fiabilité est conditionnée par la pertinence du modèle mécanique retenu, qui se doit effectivement d'être représentatif des mécanismes physiques mis en jeu. Par ailleurs, notre objectif est d'introduire des incertitudes à l'échelle de la microstructure et d'en comprendre les conséquences. Dans ce contexte, la démarche la plus intéressante est celle des approches par changement d'échelle qui expriment la loi constitutive d'un matériau hétérogène à partir d'informations sur sa microstructure (Gilormini et Bréchet [24]).

Dans ce chapitre, nous décrivons en premier lieu le matériau composite étudié, en précisant notamment la nature et le comportement mécanique de ses constituants ainsi que leur procédé d'assemblage. Ceci nous aidera à justifier et à établir un modèle physique du matériau.

Puis, la démarche micromécanique proprement dite sera abordée, avec ses enjeux et le problème qui lui est associé. Les lois constitutives seront ensuite développées dans le cadre du modèle de Mori et Tanaka [47] pour différentes configurations de la microstructure.

2.2 Données matériaux

Dans la suite, nous serons amenés à étudier deux catégories de matériaux composites fabriqués par la société Soficar :

- les joncs composites des haubans de travée de la passerelle de Laroin, dont la principale qualité réside en leur résistance à la rupture en traction longitudinale,
- des plats composites destinés au renforcement d'ouvrages d'art, pour lesquels la performance recherchée est la rigidité en flexion.

Les premiers constituent le coeur de notre étude : c'est leur fiabilité mécanique que l'on cherche à représenter et à étudier. Pour cela, nous nous appuierons sur les propriétés élastiques des seconds afin d'identifier le modèle mécanique.

2.2.1 Matériaux constitutifs

Les deux ensembles de composites précités résultent de l'association d'un liant résineux et de renforts fibrés longs en carbone.

La résine époxy

Le liant utilisé pour les joncs et les plats est un polymère époxyde fabriqué par la société Bostik Findley S.A. située à Ribécourt (Oise). Ce liant thermodurcissable est constitué d'un mélange de résine, de durcisseur et d'un accélérateur de type EPONAL 401 (que l'on regroupera par la suite sous le terme de *résine époxy*), spécifiquement élaboré pour des fibres de caractéristiques mécaniques élevées. Les qualités visées étaient notamment une bonne compatibilité chimique et thermomécanique avec les fibres, une réticulation (polymérisation) rapide et une longue durée d'utilisation.

Au niveau des caractéristiques physiques, le liant est un matériau léger (densité d'environ 1.2) dont la faible viscosité permet une imprégnation facile des mèches de fibres (viscosité Brookfield comprise entre 300 et 500 $mPa.s$ à $40^{\circ}C$). Par ailleurs,

son temps de gel à $150^{\circ}C$ s'élève à 2 minutes environ et sa température de transition vitreuse est comprise entre $124^{\circ}C$ et $132^{\circ}C$.

Le comportement mécanique de la résine époxy est homogène isotrope et visco-élastique fragile (Blassiau [6]). Le tableau 2.1 indique le module d'Young $E_r(\mathbf{v}) = E_r$ quel que soit le vecteur unitaire \mathbf{v} ainsi que les paramètres de rupture $\sigma_r^R(\mathbf{v}) = \sigma_r^R$ et $\varepsilon_r^R(\mathbf{v}) = \varepsilon_r^R, \forall \mathbf{v}$ (*cf.* annexe B) mesurés par le fabricant lors d'essais de traction uniaxiale. La valeur du coefficient de Poisson $\nu_r(\mathbf{v}, \mathbf{t}) = \nu_r$, quels que soient les vecteurs unitaires et orthogonaux \mathbf{v} et \mathbf{t} (*cf.* annexe B), de la résine n'étant pas précisée, on considérera pour la suite la valeur moyenne de 0.4 issue de données bibliographiques (Gay [22]).

module d'Young	contrainte à rupture	déformation à rupture
E_r (MPa)	σ_r^R (MPa)	ε_r^R (%)
2800 ± 125	63.8 ± 4.1	2.4 ± 0.3

Tableau 2.1: Propriétés mécaniques en traction uniaxiale de la matrice EPONAL 401 (données fabricant Bostik).

Les fibres de carbone

Les fibres de carbone utilisées pour la fabrication des joncs sont des produits TORAYCA[®] haute résistance fournis par la société Toray Industries, Inc. située au Japon. Il s'agit de fibres acryliques élaborées à partir de polyacrylonitrile (Berthelot [4], Renard [53]) de type T700SC-12K. Leur densité s'élève à 1.8, la taille des mono-filaments est comprise entre 7 et 8 μm et chaque fibre est constituée d'une mèche de 12000 filaments cylindriques d'axe le vecteur unitaire \mathbf{n} .

En ce qui concerne les plats, les fibres employées sont également des produits TORAYCA[®] de type T800H-2 \times 12K appartenant à la famille des fibres de modules intermédiaires. Leur densité vaut 1.8, la taille des mono-filaments est de 5 μm et les fibres sont formées de deux mèches de 12000 filaments chacune (toujours d'axe \mathbf{n}).

Sur le plan mécanique, ces deux ensembles de fibres présentent un comportement homogène isotrope transverse autour de leur axe \mathbf{n} et élastique linéaire fragile (Gay

[22], Luyckx [40]). Les données mécaniques indiquées par le fabricant sont issues de plusieurs essais normalisés de traction uniaxiale suivant l'axe des fibres (test sur une fibre imprégnée de longueur $L_0 = 200 \text{ mm}$, cf. Luyckx [40]). Au tableau 2.2 sont indiquées les valeurs moyennes du module élastique longitudinal des fibres $E_f(\mathbf{n})$ et des paramètres de rupture $\sigma_f^R(\mathbf{n})$ et $\varepsilon_f^R(\mathbf{n})$ mesurés pour le lot de fibres ayant servi aux joncs de Laroin et pour les lots utilisés pour fabriquer les plats. Dans les deux cas, on retrouve bien un comportement élastique linéaire des fibres avec

$$\varepsilon_f^R(\mathbf{n}) = \frac{1}{E_f(\mathbf{n})} \sigma_f^R(\mathbf{n}) \quad (2.1)$$

Notons enfin que le coefficient de Poisson des fibres $\nu_f(\mathbf{n}, \mathbf{t})$, relatif aux directions orthogonales de vecteurs unitaires \mathbf{n} et \mathbf{t} quel que soit \mathbf{t} , n'est pas non plus donné par le fabricant, on s'appuiera donc comme précédemment sur la bibliographie (Gay [22]) avec une valeur moyenne de $\nu_f(\mathbf{n}, \mathbf{t})$ égale à 0.3.

	module élastique	contrainte à rupture	déformation à rupture
	$E_f(\mathbf{n})$ (MPa)	$\sigma_f^R(\mathbf{n})$ (MPa)	$\varepsilon_f^R(\mathbf{n})$ (%)
T700SC-12K	230000	4870	2.12
T800H-2×12K	296000	5531	1.87
	296000	5652	1.91
	294000	5522	1.88
	297000	5479	1.85
	292000	5397	1.85
	292000	5556	1.90
	296000	5652	1.91

Tableau 2.2: Propriétés mécaniques moyennes en traction uniaxiale des fibres (données fabricant Toray).

2.2.2 Le procédé de fabrication

Le procédé d'assemblage employé par Soficar est celui de la pultrusion (de l'anglais *pull* : tirer) qui permet de mouler des profilés de section constante de manière

continue (Binse [5]). Il s'agit du moyen de fabrication le plus rapide de matériaux composites : selon la complexité de la géométrie, on peut atteindre en effet une production de 10 m/min de profilés avec une matrice therm durcissable.

Le schéma 2.1 détaille les principales étapes de ce procédé. Les fibres initialement stockées en bobine dans un cantre sont d'abord plongées dans un bain d'imprégnation (indispensable pour des taux élevés de renforts) de résine que l'on a préalablement préchauffée légèrement pour en abaisser la viscosité. Avant l'entrée dans la filière, tous les constituants sont préchauffés, les renforts pour éliminer toute humidité et la résine pour la raison précitée.

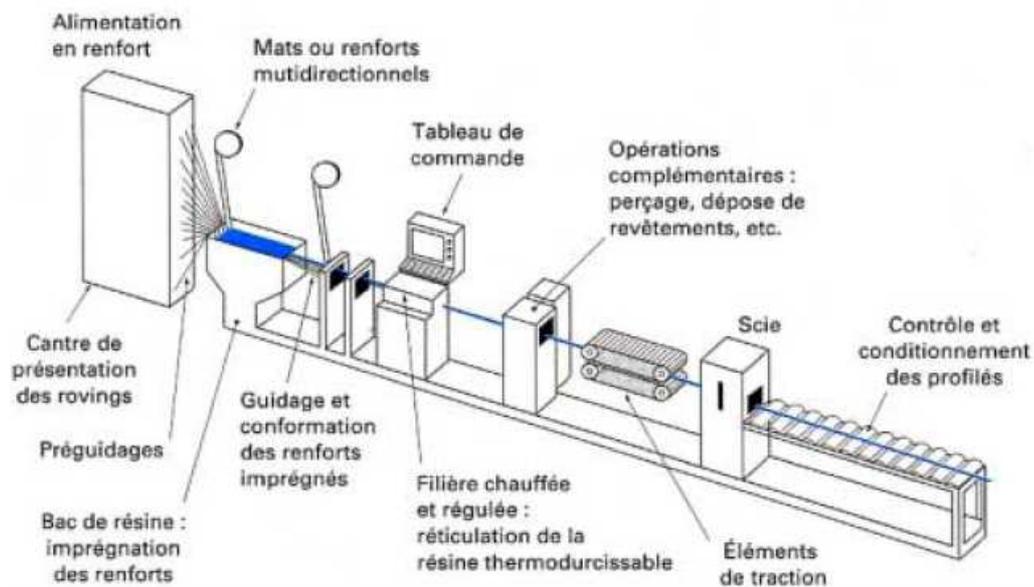


Figure 2.1: Processus de fabrication des composites par pultrusion (Binse [5]).

Le processus de polymérisation de la matrice s'opère ensuite au sein de la filière de façon progressive. Dans une première partie, les constituants sont associés en la géométrie voulue à une température inférieure à la température d'initiation de la résine (*i.e.* de début de gélification) pour éviter un durcissement prématuré. Puis, la température de chauffage est augmentée régulièrement de façon à obtenir une réticulation pratiquement complète. Dans une dernière zone non chauffée, la température du profilé décroît ensuite lentement jusqu'à une température inférieure à celle de la transition vitreuse de la résine pour éviter des problèmes de déformation.

Suffisamment loin de la filière de façon à permettre le refroidissement naturel ou forcé du profilé, un système de traction vient enfin extraire le profilé formé. Le système utilisé (alternatif ou chenille) diffère suivant notamment la fragilité des pièces, la vitesse d'avancement devant quant à elle être réglée précisément pour obtenir un produit de qualité. La découpe des pièces achève la fabrication du composite.

La pultrusion est un procédé industriel simple qui nécessite cependant rigueur et maîtrise à toutes les étapes de la fabrication. Les principaux problèmes rencontrés sont ainsi liés à des réactivités mal maîtrisées au niveau de la résine (méconnaissance des températures et temps de gel, trop ou pas assez d'accélérateur,..) ou à de mauvais réglages techniques (tension importante des renforts, température de filière trop basse, chauffage dissymétrique, vitesse de tirage irrégulière ou trop rapide,..). Ces déficiences peuvent amener des fissurations et/ou porosités matricielles, des ruptures de fibres ou encore à des défauts de géométrie divers (mauvais positionnement des renforts, gauchissement des profilés,..).

2.2.3 Les matériaux composites

Les composites étudiés sont des pièces élancées de section circulaire pour les joncs (diamètre ϕ) et de section rectangulaire pour les plats (section $l \times e$). Dans les deux cas, il s'agit de composites unidirectionnels dans lesquels toutes les fibres sont positionnées parallèlement à l'axe longitudinal des pièces donné par le vecteur unitaire \mathbf{n} (figure 2.2).

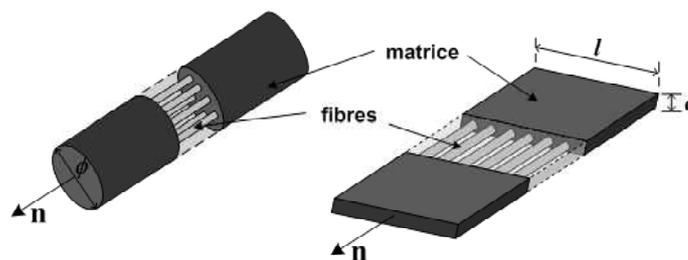


Figure 2.2: Arrangement des fibres au sein des matériaux composites.

Ces matériaux présentent donc au niveau global une symétrie liée à la section des fibres, qui va d'une isotropie transverse d'axe \mathbf{n} pour des renforts circulaires à une orthotropie pour des sections plus complexes. La figure 2.3 illustre par ailleurs le type de microstructure observée sur une section de profilés.

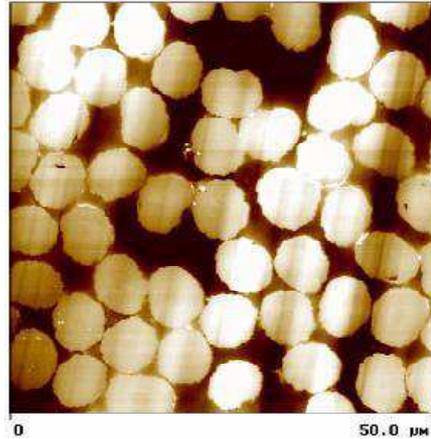


Figure 2.3: Microstructure observée dans une section transversale de composite unidirectionnel en carbone-époxy (Payan [49]).

Compte tenu des hautes performances recherchées, la fraction volumique de renforts $f_f = \frac{|V_f|}{|V|}$ (avec $|V|$ et $|V_f|$ les valeurs algébriques des volumes respectivement du composite et des fibres) est importante dans les deux cas : en moyenne, $f_f = 67\%$ pour les joncs et $f_f = 62.8\%$ pour les plats. Le tableau 2.3 récapitule les principales caractéristiques de chacun des composites.

	joncs	plats
matrice	EPONAL 401	EPONAL 401
renforts	T700SC-12K	T800H-2×12K
f_f (%)	67 (en moyenne)	62.8 (en moyenne)
fabrication	pultrusion	pultrusion
type de composite	unidirectionnel	unidirectionnel
section du profilé	circulaire	rectangulaire
dimensions (mm)	$\phi = 6 \pm 0.1$	$l = 50 \pm 0.3, e = 1.2 \pm 0.05$

Tableau 2.3: Caractéristiques des composites étudiés.

Notons finalement que l'Atelier Composites de Soficar réalise systématiquement des tests qualité sur ses différents produits. Précisément, des essais de traction longitudinale (*i.e.* selon l'axe des profilés) sont réalisés pour mesurer la résistance des joncs ainsi que le module élastique longitudinal des plats. La dimension des éprouvettes a été fixée de façon à obtenir une réponse macroscopique stable (notamment stabiliser la rupture des joncs au centre du profilé et non au niveau des mors de la machine), ce qui amène à utiliser une longueur utile d'éprouvette de 220 *mm* (éprouvette de 500 *mm* de longueur totale équipée de talons de 140 *mm*). Les résultats de ces tests seront utilisés par la suite pour définir la fiabilité expérimentale de ces composites.

2.3 Méthodologie de l'homogénéisation

La micromécanique vise à décrire le comportement mécanique d'un matériau hétérogène à partir des mécanismes de déformation des phases constitutives et de l'arrangement de celles-ci. Les modèles à champs moyens établis dans ce cadre définissent d'une part le lien entre les grandeurs microstructurales et macroscopiques mais prédisent également les contraintes et déformations moyennes dans chaque phase au cours du chargement, ce qui constituera un double avantage pour notre étude.

Une présentation exhaustive et rigoureuse des approches par changement d'échelle est faite notamment dans Bornert [7], Li [38] et Zaoui [61]. Sans entrer dans le formalisme mathématique, on cherchera ici à préciser la signification des hypothèses retenues, démontrer dans quelle mesure on peut employer ces méthodes, et surtout détailler leur mise en oeuvre sur le cas des composites biphasés (matrice, fibres) étudiés.

On se placera dans ce qui suit dans le cadre des petites transformations statiques et isothermes. Par ailleurs, les sollicitations mises en jeu sur les composites seront des tractions longitudinales. Pour la gamme de matériaux concernés, la déformation moyenne à rupture des fibres est plus faible que celle de la matrice et le comportement mécanique du composite est pratiquement élastique fragile : aucune déformation viscoélastique appréciable n'est en effet observable dans sa réponse, même

à proximité de la rupture (Blassiau [6], Payan [49], figure 2.4). Négligeant ainsi le caractère visqueux conféré par la résine époxy, on supposera ici un comportement élastique linéaire des constituants et par conséquent du matériau composite.

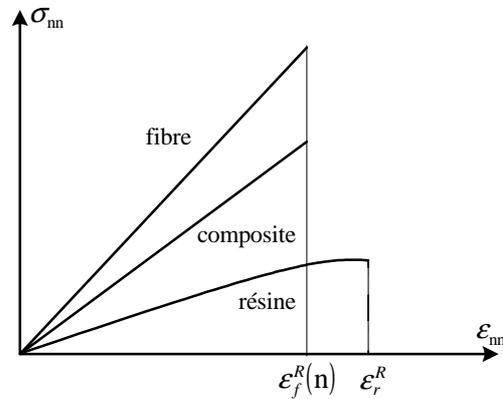


Figure 2.4: Courbes contrainte-déformation d'un composite unidirectionnel en carbone-époxy et de ses constituants lors de tractions longitudinales.

2.3.1 Volume élémentaire représentatif

En premier lieu, il convient de définir un Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.) du matériau composite, qui correspondra ici à la pièce composite sur laquelle est réalisé le test qualité : respectivement le jonc composite (diamètre moyen 6 mm , longueur 220 mm) et le plat composite (section moyenne $50 \times 1.2 \text{ mm}^2$, longueur 220 mm). Leurs dimensions sont suffisamment grandes vis-à-vis des hétérogénéités microstructurales que sont les filaments constituant les fibres (séparation des échelles) : on peut donc raisonnablement supposer que ces V.E.R. sont statistiquement représentatifs du matériau composite. Par ailleurs, ce choix d'échelle convient à la finesse avec laquelle on souhaite travailler par la suite dans la mesure où le jonc constitue la partie élémentaire du hauban (Renard [53]).

Notons V le volume du V.E.R., S sa surface extérieure et \mathbf{v} un vecteur unitaire normal à S et dirigé vers l'extérieur. La contrainte macroscopique Σ est définie comme la moyenne des efforts extérieurs appliqués sur le contour (He [32]) :

$$\Sigma = \frac{1}{|V|} \int_S \frac{1}{2} (\mathbf{T}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{T}(\mathbf{x})) dS \quad (2.2)$$

où $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$ est le vecteur contrainte au point \mathbf{x} de S , $\boldsymbol{\sigma}$ désignant le champ local des contraintes au sein de V . Par le théorème de la divergence et les équations d'équilibre, on montre que la contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$ représente par conséquent la moyenne spatiale du champ $\boldsymbol{\sigma}$ de contraintes locales :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) dV = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (2.3)$$

La déformation macroscopique \mathbf{E} est définie quant à elle comme la moyenne des déplacements sur le contour de V :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{|V|} \int_S \frac{1}{2} (\mathbf{U}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{U}(\mathbf{x})) dS \quad (2.4)$$

avec \mathbf{U} et $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\text{grad } \mathbf{U} + \text{grad}^T \mathbf{U})$ les champs locaux de déplacement et de déformations au sein de V . A partir cette fois des équations de compatibilité, on montre de la même façon que la déformation macroscopique \mathbf{E} représente la moyenne spatiale du champ $\boldsymbol{\varepsilon}$ de déformation local :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) dV = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (2.5)$$

Etant donné leur microstructure (figure 2.3), nous cherchons par ailleurs à homogénéiser des matériaux hétérogènes à microstructure aléatoire au sein desquels la disposition des phases n'est pas parfaitement connue. La microstructure réelle du matériau est par conséquent une réalisation particulière parmi l'ensemble des réalisations équiprobables et toutes les grandeurs dépendant du comportement local apparaissent comme des variables aléatoires (champs de déplacements, déformations, contraintes,...).

En supposant que le matériau hétérogène est statistiquement homogène (stationnarité), on considère que la probabilité de trouver une des phases en un point \mathbf{x} de V est la même quel que soit \mathbf{x} . L'hypothèse complémentaire d'ergodicité exprime quant à elle que toute l'information statistique de la microstructure est contenue dans une seule réalisation et que l'espérance mathématique de toute variable aléatoire est égale à sa moyenne volumique sur un V.E.R. dans une réalisation particulière. Ceci permet d'estimer plus simplement les caractéristiques statistiques des paramètres

aléatoires. Ainsi par exemple, la disposition des phases au niveau microscopique est donnée par les fractions volumiques $\{f_i\}_{i=m,f}$ des constituants :

$$f_i = \frac{|V_i|}{|V|} \text{ avec } i = \{m, f\} \text{ et } \sum_i f_i = 1 \quad (2.6)$$

où V_m et V_f désignent les volumes respectivement de matrice et de fibres.

Reste enfin à préciser la géométrie du V.E.R. et le comportement local des constituants. Noyées dans la matrice, les fibres sont prises identiques en forme et taille, précisément cylindriques, et toutes parallèles à l'axe \mathbf{n} du composite. Etant donné le soin apporté à la réalisation du matériau, on suppose parfaites les interfaces entre les deux phases : le champ de déplacement est donc continu au passage entre fibres et matrice. Du point de vue de leur réponse mécanique, les constituants sont enfin considérés comme homogènes et élastiques linéaires, il découle alors la loi de comportement suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbb{S}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (2.7)$$

avec

$$\mathbb{C}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbb{C}_{(m)}, \forall \mathbf{x} \in V_m \\ \mathbb{C}_{(f)}, \forall \mathbf{x} \in V_f \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbb{S}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbb{S}_{(m)}, \forall \mathbf{x} \in V_m \\ \mathbb{S}_{(f)}, \forall \mathbf{x} \in V_f \end{cases} \quad (2.8)$$

$\{\mathbb{C}_{(i)}\}_{i=m,f}$ et $\{\mathbb{S}_{(i)} = \mathbb{C}_{(i)}^{-1}\}_{i=m,f}$ représentant respectivement les tenseurs d'élasticité et de souplesse des constituants.

2.3.2 Position du problème

Le but des méthodes d'homogénéisation est de déterminer à partir de la micro-structure du V.E.R. son comportement mécanique moyen (ou effectif) ainsi que la réponse locale (champs de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$) lorsqu'il est soumis à une sollicitation macroscopique (champs de contrainte $\boldsymbol{\Sigma}$ et/ou de déformation \mathbf{E}).

Comme pour tout problème de structure, il convient de préciser la nature des conditions aux limites. Compte tenu de la séparation des échelles, on peut envisager de façon équivalente deux types de conditions homogènes au contour :

- en déformation : on impose la condition en déplacement $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in S$,

- ou en contrainte : on impose la condition en forces de surface $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{v}$,
 $\forall \mathbf{x} \in S$,

dans lesquelles \mathbf{E} et $\boldsymbol{\Sigma}$ sont les champs macroscopiques.

Supposant un état initial naturel, le principe de superposition permet de relier les champs locaux et macroscopiques de façon linéaire :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \mathbb{A}(x) : \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}(x) = \mathbb{B}(x) : \boldsymbol{\Sigma}, \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (2.9)$$

où les tenseurs d'ordre quatre \mathbb{A} et \mathbb{B} sont appelés respectivement tenseurs de localisation des déformations et de concentration des contraintes (Hill [33]). Les relations de cohérence (2.3) et (2.5) imposent alors :

$$\langle \mathbb{A} \rangle = \langle \mathbb{B} \rangle = \mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{I} \quad (2.10)$$

Par analogie avec le comportement local, on en déduit le comportement global du matériau effectif,

- en déformations homogènes au contour :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} : \mathbf{E} \rangle = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle : \mathbf{E} = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} \quad (2.11)$$

avec \mathbb{C}_{hom} désigne le tenseur d'élasticité effectif,

- en contraintes homogènes au pourtour :

$$\mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \mathbb{S} : \mathbb{B} : \boldsymbol{\Sigma} \rangle = \langle \mathbb{S} : \mathbb{B} \rangle : \boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{S}_{\text{hom}} : \boldsymbol{\Sigma} \quad (2.12)$$

où \mathbb{S}_{hom} désigne le tenseur de souplesse effectif.

Lorsque le volume V est effectivement un V.E.R. (soit sous l'hypothèse précitée de séparation des échelles), les tenseurs \mathbb{S}^{hom} et \mathbb{C}^{hom} sont inverses l'un de l'autre ($\mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbb{S}_{\text{hom}} = \mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{I}$).

Les constituants sont ici homogènes, le calcul des tenseurs effectifs peut se simplifier, soit :

$$\mathbb{C}_{\text{hom}} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle = \sum_i f_i \mathbb{C}_{(i)} : \langle \mathbb{A} \rangle_{(i)} \quad (2.13)$$

et

$$\mathbb{S}_{\text{hom}} = \langle \mathbb{S} : \mathbb{B} \rangle = \sum_i f_i \mathbb{S}_{(i)} : \langle \mathbb{B} \rangle_{(i)} \quad (2.14)$$

l'opérateur $\langle \cdot \rangle_{(i)} = \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} \cdot dV$ consistant en la moyenne spatiale sur la phase i . Les tenseurs moyens de concentration $\langle \mathbb{A} \rangle_{(i)}$ et de localisation $\langle \mathbb{B} \rangle_{(i)}$ font alors le lien entre les contraintes et déformations moyennes par phase et les grandeurs macroscopiques respectives :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i = \langle \mathbb{A} \rangle_{(i)} : \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_i = \langle \mathbb{B} \rangle_{(i)} : \boldsymbol{\Sigma} \quad (2.15)$$

Comme on le voit sur ces expressions, la connaissance des tenseurs $\langle \mathbb{A} \rangle_{(i)}$ et $\langle \mathbb{B} \rangle_{(i)}$ suffit à la résolution du problème d'homogénéisation. Pour cela, il faut avoir accès aux champs locaux de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$, déplacement \mathbf{U} et déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ satisfaisant au problème suivant (en considérant par exemple des conditions limites homogènes en déformation) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in V \\ \text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\text{grad } \mathbf{U} + \text{grad}^T \mathbf{U}) \\ \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in S \end{array} \right\}, \forall \mathbf{x} \in V \quad (2.16)$$

La solution $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon})$ à ce problème n'est cependant pas unique ni aisée à cause du caractère incomplet de la description mécanique et géométrique du matériau hétérogène. Face à cette difficulté, deux démarches sont possibles : soit on cherche à explorer et cerner l'ensemble des solutions possibles (méthodes encadrement telles que les bornes de Voigt et Reuss), soit on fait des hypothèses complémentaires sur la microstructure du V.E.R. pour déduire les expressions de $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ (méthodes d'estimation).

2.3.3 Méthodes d'estimation

En vue d'un calcul de structures, il est généralement plus pratique de travailler avec une réponse du milieu hétérogène qu'avec un encadrement de celle-ci. C'est pourquoi, on s'intéresse ici aux approches qui visent à construire des estimations des tenseurs de localisation et de concentration moyens (notés $\langle \mathbb{A} \rangle_{(i)}^{est}$ et $\langle \mathbb{B} \rangle_{(i)}^{est}$) ainsi que des tenseurs d'élasticité et de souplesse effectifs (notés $\mathbb{C}_{\text{hom}}^{est}$ et $\mathbb{S}_{\text{hom}}^{est}$). La résolution de problèmes d'élasticité hétérogène comme celle de l'inclusion d'Eshelby ont permis des progrès significatifs dans ce domaine.

Problème d'Eshelby de l'inclusion équivalente

Considérons le problème fictif d'un milieu homogène élastique linéaire de tenseur d'élasticité $\mathbb{C}_{(0)}$, occupant le même volume V , soumis aux mêmes conditions au contour S , et siège d'un champ de déformation libre $\boldsymbol{\varepsilon}^L$ (ou de façon équivalente un champ de précontrainte $\mathbf{p} = -\mathbb{C}_{(0)} : \boldsymbol{\varepsilon}^L$). Les champs solutions en contrainte $\boldsymbol{\sigma}^*$, déplacement \mathbf{U}' et déformation $\boldsymbol{\varepsilon}'$ de ce problème satisfont aux équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}) = \mathbb{C}_{(0)} : [\boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}^L(\mathbf{x})], \forall \mathbf{x} \in V \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}) = 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \mathbf{U}' + \operatorname{grad}^T \mathbf{U}') \\ \mathbf{U}'(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in S \end{array} \right\}, \forall \mathbf{x} \in V \quad (2.17)$$

et constituent par conséquent des champs admissibles vis-à-vis du problème initial énoncé en (2.16). Par résolution de ce problème d'élasticité homogène, on peut donc construire une famille de solutions suivant le choix de $\mathbb{C}_{(0)}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^L$ (ou \mathbf{p}).

Les travaux d'Eshelby [15] sur le problème de l'inclusion entrent dans le cadre défini par les expressions (2.17) avec certaines spécificités : le domaine V est considéré comme infini, le déplacement tend vers zéro à l'infini, le champ de déformation libre $\boldsymbol{\varepsilon}^L$ (ou de précontrainte \mathbf{p}) est nul en dehors d'une région bornée I de V (appelée inclusion) et uniforme à l'intérieur de celle-ci (ou \mathbf{p} uniforme égal à $\mathbf{p}^I = -\mathbb{C}_{(0)} : \boldsymbol{\varepsilon}^L$). Le problème s'écrit alors de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}) = \mathbb{C}_{(0)} : [\boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}^L] = \mathbb{C}_{(0)} : \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^I, \forall \mathbf{x} \in I \\ \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}) = \mathbb{C}_{(0)} : \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in (V - I) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}) = 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \mathbf{U}' + \operatorname{grad}^T \mathbf{U}') \\ \mathbf{U}'(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \rightarrow \infty \end{array} \right\}, \forall \mathbf{x} \in V \quad (2.18)$$

On montre que cela revient à déterminer le champ de déplacement nul à l'infini dans un milieu homogène élastique infini soumis sur une surface intérieure S_I correspondant au contour de l'inclusion à des efforts surfaciques $-\mathbf{p}^I \cdot \mathbf{v}$ (\mathbf{v} vecteur normal à S_I dirigé vers l'extérieur de I). La solution à cette question est apportée par les fonctions de Green en milieu infini. Il découle en effet que lorsque l'inclusion I est ellipsoïdale, le champ de déformation résultant à l'intérieur de I est uniforme, soit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}^I = \mathbb{S}_{(0)}^E : \boldsymbol{\varepsilon}^L = -\mathbb{S}_0^E : \mathbb{C}_{(0)}^{-1} : \mathbf{p}^I, \quad \forall \mathbf{x} \in I \quad (2.19)$$

d'où le champ de contraintes résultant uniforme également :

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^I = \mathbb{C}_{(0)} : [\boldsymbol{\varepsilon}^I - \boldsymbol{\varepsilon}^L] = \left[\mathbf{I} \otimes \underline{\mathbf{I}} - \mathbb{C}_{(0)} : \mathbb{S}_{(0)}^E : \mathbb{C}_{(0)}^{-1} \right] : \mathbf{p}^I, \quad \forall \mathbf{x} \in I \quad (2.20)$$

Le tenseur d'ordre quatre $\mathbb{S}_{(0)}^E$, appelé tenseur d'Eshelby, dépend de la forme et de l'orientation de l'ellipsoïde ainsi que des modules $\mathbb{C}_{(0)}$. Son expression n'est connue analytiquement que dans certains cas (voir par exemple Nemat-Nasser et Hori [48]).

Considérons à présent le problème dit de l'hétérogénéité, dans lequel le milieu (volume V , élasticité $\mathbb{C}_{(0)}$) est infini et soumis à des déformations homogènes \mathbf{E}_0 à l'infini. Par ailleurs, un milieu élastique différent (élasticité $\mathbb{C}_{(H)}$) occupe un domaine borné H au sein de V , les conditions à l'interface étant celles d'une adhérence parfaite. Le problème s'écrit dans ce cas :

$$\left. \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}) = \mathbb{C}_{(H)} : \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in H \\ \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}) = \mathbb{C}_{(0)} : \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in (V - H) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}) = 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \mathbf{U}' + \operatorname{grad}^T \mathbf{U}') \\ \mathbf{U}'(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \rightarrow \infty \end{array} \right\}, \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (2.21)$$

Sous la condition que H soit un ellipsoïde et en soumettant le volume V incluant I à la même déformation \mathbf{E}_0 à l'infini que V incluant H (principe de superposition lié au cadre élastique), on peut démontrer qu'il y a équivalence entre le problème de l'inclusion et celui de l'hétérogénéité (Eshelby [16]) si et seulement si \mathbf{p}^I est tel que :

$$\mathbf{p}^I = (\mathbb{C}_{(H)} - \mathbb{C}_{(0)}) : (\boldsymbol{\varepsilon}^I + \mathbf{E}_0) \quad (2.22)$$

Sous cette condition, les deux problèmes conduisent aux mêmes champs solutions dans tout V . Précisément, à l'aide des relations (2.19) et (2.22), on en déduit que la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^H$ et la contrainte $\boldsymbol{\sigma}^H$ dans l'hétérogénéité sont uniformes et égales à :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^H = \boldsymbol{\varepsilon}^I + \mathbf{E}_0 = \left[\mathbf{I} \otimes \underline{\mathbf{I}} + \mathbb{S}_{(0)}^E : \mathbb{C}_{(0)}^{-1} : (\mathbb{C}_{(H)} - \mathbb{C}_{(0)}) \right]^{-1} : \mathbf{E}_0 \quad (2.23)$$

et :

$$\boldsymbol{\sigma}^H = \mathbb{C}_{(H)} : \boldsymbol{\varepsilon}^H \quad (2.24)$$

Revenons pour finir au problème de départ. Le principe des méthodes d'estimation est justement de faire appel à la solution du problème de l'hétérogénéité

pour estimer la déformation (ou la contrainte) moyenne des phases dans le milieu hétérogène étudié. Pour chacune des phases i , on assimile en effet $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i$ et $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_i$ aux champs uniformes se développant dans une hétérogénéité ellipsoïdale :

- de même élasticité que la phase (soit $\mathbb{C}_{(H)} = \mathbb{C}_{(i)}$),
- de forme et d'orientation adéquate (introduites au travers du tenseur d'Eshelby),
- immergée dans un milieu de référence infini et homogène élastique d'élasticité $\mathbb{C}_{(0)}$ adéquate,
- soumis à l'infini à une déformation \mathbf{E}_0 adéquate. Précisons que la satisfaction de la condition de cohérence (2.5) impose que \mathbf{E}_0 soit liée à la déformation macroscopique \mathbf{E} de la façon suivante :

$$\mathbf{E}_0 = \left\langle \left[\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mathbb{S}_{(0)}^E : \mathbb{C}_{(0)}^{-1} : (\mathbb{C}_{(H)} - \mathbb{C}_{(0)}) \right]^{-1} \right\rangle^{-1} : \mathbf{E} \quad (2.25)$$

Dans ce cadre, la déformation moyenne par phase s'écrit :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i = \boldsymbol{\varepsilon}^H = \langle \mathbb{A} \rangle_{(i)}^{est} : \mathbf{E} \quad (2.26)$$

avec

$$\langle \mathbb{A} \rangle_{(i)}^{est} = \left[\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mathbb{S}_{(0)}^E : \mathbb{C}_{(0)}^{-1} : (\mathbb{C}_{(i)} - \mathbb{C}_{(0)}) \right]^{-1} : \left\langle \left[\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mathbb{S}_{(0)}^E : \mathbb{C}_{(0)}^{-1} : (\mathbb{C}_{(i)} - \mathbb{C}_{(0)}) \right]^{-1} \right\rangle^{-1} \quad (2.27)$$

De plus, les équations (2.7), (2.11) et (2.13) permettent d'écrire la concentration des contraintes :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_i = \langle \mathbb{B} \rangle_{(i)}^{est} : \boldsymbol{\Sigma} \quad (2.28)$$

avec

$$\langle \mathbb{B} \rangle_{(i)}^{est} = \mathbf{C}_i : \langle \mathbb{A} \rangle_{(i)}^{est} : \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle^{-1} \quad (2.29)$$

Il découle que les différentes estimations possibles se distinguent suivant la nature du milieu de référence, *i.e.* suivant le choix de l'élasticité $\mathbb{C}_{(0)}$.

2.3.4 Formulation de Mori et Tanaka

Le choix d'un modèle est gouverné par plusieurs paramètres, parmi lesquels figurent notamment la géométrie du milieu hétérogène, le contraste mécanique entre les phases et la fraction volumique de renforts (Gilormini et Bréchet [24]). Dans la configuration d'un composite unidirectionnel à haute teneur en fibres, l'approche de Mori et Tanaka [47] donne généralement des résultats très satisfaisants par rapport à l'expérience et aux éléments finis, qui intègrent notamment la symétrie matérielle du composite induite par les renforts (*via* le tenseur d'Eshelby). De plus, cette approche permet d'accéder à des expressions explicites des tenseurs estimés (que l'on notera ici $\langle \mathbb{A} \rangle_{(i)}^{MT}$, $\langle \mathbb{B} \rangle_{(i)}^{MT}$, $\mathbb{C}_{\text{hom}}^{MT}$ et $\mathbb{S}_{\text{hom}}^{MT}$), ce qui s'avère un avantage non négligeable dans l'optique du couplage avec les méthodes de fiabilité. Contrairement aux lois simples des mélanges (voir par exemple Berthelot [4]), elle permet en outre de tenir compte de l'ensemble des paramètres microstructuraux, *i.e.* sans préjuger *a priori* de leur importance, et de décrire de surcroît l'influence de divers aspects (forme des renforts par exemple).

Dans ce modèle, on considère qu'une phase (la matrice) entoure complètement chaque élément des autres phases (ici les fibres). Compte tenu du procédé de fabrication, et grâce notamment à l'imprégnation des fibres, on peut raisonnablement penser que c'est bien le cas ici (voir aussi figure 2.3). Pour exprimer cette connexité, on pose alors

$$\begin{cases} \mathbb{C}_{(0)} = \mathbb{C}_{(m)} \\ \mathbb{S}_{(0)}^E = \mathbb{S}_{(m)}^E \end{cases} \quad (2.30)$$

Pour le biphasé, il vient alors des tenseurs de localisation et de concentration pour les fibres :

$$\langle \mathbb{A} \rangle_{(f)}^{MT} = \left[\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mathbb{S}_{(m)}^E : \mathbb{C}_{(m)}^{-1} : (\mathbb{C}_{(f)} - \mathbb{C}_{(m)}) \right]^{-1} : \left\langle \left[\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mathbb{S}_{(m)}^E : \mathbb{C}_{(m)}^{-1} : (\mathbb{C}_{(f)} - \mathbb{C}_{(m)}) \right]^{-1} \right\rangle^{-1} \quad (2.31)$$

$$\langle \mathbb{B} \rangle_{(f)}^{MT} = \mathbb{C}_{(f)} : \langle \mathbb{A} \rangle_{(f)}^{MT} : \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle^{-1} \quad (2.32)$$

et la déformation moyenne dans la matrice :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_m = \mathbf{E}_0 \quad (2.33)$$

Les tenseurs d'élasticité et de souplesse effectifs du matériau homogénéisé s'expriment quant à eux :

$$\mathbb{C}_{\text{hom}}^{MT} = \mathbb{C}_{(m)} + f_f (\mathbb{C}_{(f)} - \mathbb{C}_{(m)}) : \mathbb{A}_{(f)}^{MT} \quad (2.34)$$

$$\mathbb{S}_{\text{hom}}^{MT} = \mathbb{S}_{(m)} + f_f (\mathbb{S}_{(f)} - \mathbb{S}_{(m)}) : \mathbb{B}_{(f)}^{MT} \quad (2.35)$$

Il est intéressant de noter que le schéma dilué s'appuie sur la même hypothèse de continuité de la matrice, en considérant de surcroît que la fraction volumique de renforts est très faible (soit $f_f \ll 1$). En notant $\langle \mathbb{A} \rangle_{(f)}^{dil}$ et $\langle \mathbb{B} \rangle_{(f)}^{dil}$ les tenseurs estimés dans le cadre de cette modélisation, il découle par conséquent :

$$\langle \mathbb{A} \rangle_{(f)}^{dil} = \left[\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mathbb{S}_{(m)}^E : \mathbb{C}_{(m)}^{-1} : (\mathbb{C}_{(f)} - \mathbb{C}_{(m)}) \right]^{-1} \quad (2.36)$$

$$\langle \mathbb{B} \rangle_{(f)}^{dil} = \mathbb{C}_{(f)} : \langle \mathbb{A} \rangle_{(f)}^{dil} : \mathbb{C}_{(m)}^{-1} \quad (2.37)$$

et, en accord avec le fait que les particules sont en trop faible quantité pour affecter significativement la matrice :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_m = \mathbf{E} \quad (2.38)$$

A l'aide des expressions (2.36) et (2.37), on peut alors réécrire les expressions (2.31) et (2.32) de la façon suivante :

$$\langle \mathbb{A} \rangle_{(f)}^{MT} = \langle \mathbb{A} \rangle_{(f)}^{dil} : \left[(1 - f_f) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + f_f \langle \mathbb{A} \rangle_{(f)}^{dil} \right]^{-1} \quad (2.39)$$

$$\langle \mathbb{B} \rangle_{(f)}^{MT} = \langle \mathbb{B} \rangle_{(f)}^{dil} : \left[(1 - f_f) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + f_f \langle \mathbb{B} \rangle_{(f)}^{dil} \right]^{-1} \quad (2.40)$$

Si au travers des relations (2.39) et (2.40) on voit bien que la formulation de Mori-Tanaka se distingue de la solution diluée, on peut s'interroger cependant sur son aptitude à prendre en compte les interactions entre les renforts qui, à des teneurs telles que celles des composites étudiés ($f_f \geq 60\%$), sont inévitables. Les travaux de Benveniste [2] ont permis d'établir une interprétation claire sur ce point. Comme l'indique la relation (2.33), le schéma de Mori-Tanaka considère des inclusions noyées dans un milieu infini ayant les propriétés de la matrice et soumis à la déformation moyenne de la matrice dans le composite. La déformation $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_m$ résulte donc de la déformation macroscopique \mathbf{E} et d'une perturbation $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ liée à la présence des fibres :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_m = \mathbf{E}_0 = \mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.41)$$

C'est en ce sens, *i.e.* par l'introduction des hétérogénéités dans une matrice déformée, que la formulation de Mori-Tanaka intègre donc d'une certaine manière les interactions entre les fibres.

Remarque 2.1 *L'approche de Mori-Tanaka, directe, a été privilégiée aux modèles autocohérents et différentiels qui, certes prennent en compte l'interaction des fibres entre elles, mais nécessitent tous deux un processus itératif: pour les premiers, les phases sont immergées dans le milieu effectif d'élasticité \mathbb{C}_{hom} ; les seconds consistent en revanche à ajouter successivement une faible fraction volumique de renforts au matériau homogénéisé jusqu'à obtenir la fraction réelle dans le composite. Dans les deux cas, le couplage avec la fiabilité s'avérerait plus lourd à mettre en oeuvre.*

Remarque 2.2 *On notera que le cadre de renforts de même forme et parfaitement alignés retenu ici permet de respecter les conditions mathématiques de validité du modèle de Mori-Tanaka (Benveniste et al. [3]). Sous ces hypothèses, le tenseur d'élasticité effectif \mathbb{C}_{hom} respecte en effet les symétries mineures et majeures et il est bien indépendant des propriétés de la matrice lorsque sa fraction volumique f_m tend vers 0.*

2.4 Modèle de base

2.4.1 Hypothèses complémentaires

En première approche, on se propose de travailler avec les hypothèses complémentaires suivantes :

- la matrice correspond à la résine époxy décrite au § 2.2.1, d'où son tenseur d'élasticité :

$$\mathbb{C}_{(m)} = \mathbb{C}_{(r)} \quad (2.42)$$

- la section des fibres est circulaire ;

- les fibres sont supposées isotropes de propriétés mécaniques celles identifiées en traction longitudinale ; on pose ainsi leur module d'Young E_f et leur coefficient de Poisson ν_f :

$$\begin{cases} E_f = E_f(\mathbf{n}) \\ \nu_f = \nu_f(\mathbf{n}, \mathbf{t}) \end{cases} \quad (2.43)$$

Compte tenu des hypothèses retenues dans la méthodologie d'homogénéisation et de celles précitées, il vient alors les tenseurs d'élasticité $\{\mathbb{C}_{(i)}\}_{i=r,f}$ et de souplesse $\{\mathbb{S}_{(i)}\}_{i=r,f}$ suivants pour les deux phases :

$$\mathbb{C}_{(i)} = \frac{E_i}{1 + \nu_i} \mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{I} + \frac{E_i \nu_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (2.44)$$

et

$$\mathbb{S}_{(i)} = \frac{1 + \nu_i}{E_i} \mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{I} - \frac{\nu_i}{E_i} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (2.45)$$

de module d'Young $\{E_i\}_{i=r,f}$ et coefficients de Poisson $\{\nu_i\}_{i=r,f}$.

Pour la mise en oeuvre des études de fiabilité, nous aurons besoin par la suite du tenseur de concentration des contraintes moyen dans les fibres ($\langle \mathbb{B} \rangle_{(f)}^{MT}$) de façon à accéder aux contraintes locales moyennes dans celles-ci. On se propose donc d'en établir l'expression dans le cas présent.

2.4.2 Expression de $\langle \mathbb{B} \rangle_{(f)}^{MT}$

Soit la base tensorielle $\{\mathbb{F}_i\}_{i=1,6}$ de tenseurs d'ordre quatre définie par (Walpole [59]) :

$$\begin{cases} \mathbb{F}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \\ \mathbb{F}_2 = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \\ \mathbb{F}_3 = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \underline{\otimes} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \\ \mathbb{F}_4 = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \underline{\otimes} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \underline{\otimes} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \\ \mathbb{F}_5 = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \\ \mathbb{F}_6 = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \end{cases} \quad (2.46)$$

Pour une inclusion cylindrique (d'axe \mathbf{n}) à section circulaire placée dans une matrice d'élasticité $\mathbb{C}_{(r)}$, le tenseur d'Eshelby $\mathbb{S}_{(r)}^E$ s'exprime de la façon suivante (Nemat-Nasser et Hori [48]) :

$$\mathbb{S}_{(r)}^E = \frac{1}{2(1 - \nu_r)} \mathbb{F}_1 + \frac{3 - 4\nu_r}{4(1 - \nu_r)} \mathbb{F}_3 + \frac{1}{2} \mathbb{F}_4 + \frac{\nu_r}{2(1 - \nu_r)} \mathbb{F}_6 \quad (2.47)$$

A l'aide des expressions (2.37), (2.40) et de l'annexe C, le développement des calculs conduit à l'expression suivante du tenseur de concentration des contraintes moyen dans les fibres :

$$\langle \mathbb{B} \rangle_{(f)}^{MT} = \sum_{i=1}^6 b_i \mathbb{F}_i \quad (2.48)$$

avec :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2E_f}{D} [(1-f_f)(1-\nu_r\nu_f) E_r + f_f (1-\nu_r^2) E_f] \\ b_2 &= \frac{E_f}{D} [(1-f_f)(1-\nu_f-2\nu_r\nu_f) E_r + [1+\nu_r+f_f(1-\nu_r-2\nu_r^2)] E_f] \\ b_3 &= \frac{4(1-\nu_r^2) E_f}{(1-f_f)(1+\nu_f) E_r + (3-4\nu_r+f_f)(1+\nu_r) E_f} \\ b_4 &= \frac{2(1+\nu_r) E_f}{(1-f_f)(1+\nu_f) E_r + (1+f_f)(1+\nu_r) E_f} \\ b_5 &= -\frac{(1-f_f) E_f}{D} [(\nu_r-\nu_r\nu_f-2\nu_f) E_r + \nu_r(1+\nu_r) E_f] \\ b_6 &= \frac{(1-f_f)(\nu_f-\nu_r) E_r E_f}{D} \end{aligned} \quad (2.49)$$

et

$$\begin{aligned} D &= (1-f_f)^2(1-\nu_f-2\nu_f^2) E_r^2 \\ &\quad + f_f [1+f_f(1-2\nu_r)](1+\nu_r) E_f^2 \\ &\quad + (1-f_f)[1+\nu_r+f_f(2-\nu_r-\nu_f-4\nu_r\nu_f)] E_r E_f \end{aligned} \quad (2.50)$$

2.5 Incertitudes de modélisation

La complexité du problème d'homogénéisation nous a incité à adopter pour la formulation de base trois hypothèses complémentaires simples portant sur la nature, la forme et le comportement des constituants (§ 2.4.1). Il s'agit de postulats retenus essentiellement par manque d'informations expérimentales disponibles sur ces questions.

Par définition, le modèle de base ne tient donc pas compte de tous les facteurs pouvant agir sur la réponse mécanique du composite. Il introduit de ce fait lui-même des incertitudes sur la représentation du mécanisme physique mis en jeu.

De façon à mesurer les imprécisions générées par l'introduction des hypothèses précitées, on se propose donc de compléter la formulation de base par une représentation enrichie qui tienne compte des aspects écartés jusque là. Pour simplifier, on

traitera de façon séparée chacun des trois points (porosité matricielle, section des fibres, isotropie transverse des fibres) en les remettant en cause chacun leur tour.

2.5.1 Porosité matricielle

Si la formulation de la résine et le procédé de fabrication ne sont pas optimisés, la matrice du composite peut effectivement présenter un taux de bulles non négligeable. Par rapport au cas de base, cette porosité va alors modifier les propriétés de la matrice qui devient à son tour un matériau hétérogène (*résine poreuse*).

Dans les méthodes de changement d'échelle par champs moyens, les constituants sont considérés comme homogènes. De façon à demeurer dans ce cadre, nous pouvons prendre en compte cette porosité matricielle tant que la séparation d'échelle entre les pores et les fibres est respectée. Cela signifie que les fibres seront toujours plongées dans un milieu qu'elles verront comme homogène (*résine poreuse*) mais qui à une échelle inférieure présentera des hétérogénéités de type pores (figure 2.5).

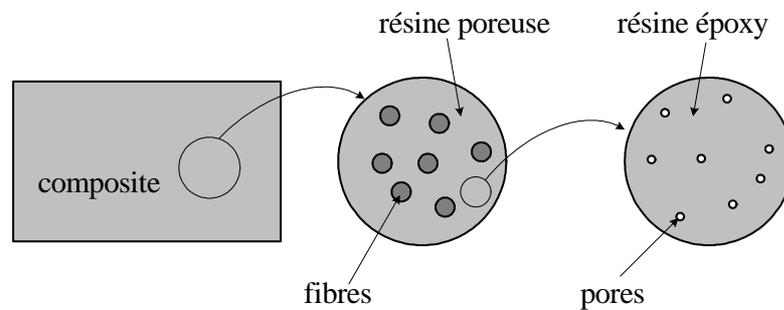


Figure 2.5: Séparation d'échelles sur la section du composite entre composite, fibres et porosité matricielle.

La démarche de modélisation consiste à réaliser une double homogénéisation avec le modèle de Mori-Tanaka :

- de la résine poreuse constituée de résine époxy et de pores (étape 1),
- du composite constitué de la résine poreuse et des fibres (étape 2).

Etape 1

On considère que le V.E.R. (de volume V_m) de la résine poreuse est un bi-phasé constitué d'une matrice correspondant à la résine époxy (phase r) et de pores de taille caractéristique inférieure à celle du V.E.R. (phase p). Les pores sont supposés répartis aléatoirement au sein du V.E.R. et l'on note f_v leur fraction volumique (ou porosité) :

$$f_v = \frac{|V_v|}{|V_m|} \quad (2.51)$$

avec V_v le volume de vides. Ces inclusions sont prises identiques en forme et taille, en l'occurrence sphériques, et d'élasticité nulle d'où $\mathbb{C}_{(p)} = \mathbb{O}$. La résine époxy est quant à elle homogène isotrope et élastique linéaire d'élasticité $\mathbb{C}_{(r)}$.

L'objectif est d'établir le tenseur d'élasticité homogénéisé de la résine poreuse qui, compte tenu de la forme des inclusions et de leur répartition, sera également isotrope. Pour une inclusion sphérique placée dans une matrice d'élasticité $\mathbb{C}_{(r)}$, le tenseur d'Eshelby $\mathbb{S}_{(r)}^E$ s'exprime de la façon suivante (Nemat-Nasser et Hori [48]) :

$$\mathbb{S}_{(r)}^E = \frac{2(4 - 5\nu_r)}{15(1 - \nu_r)} \mathbf{I} \overline{\otimes} \mathbf{I} + \frac{5\nu_r - 1}{15(1 - \nu_r)} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (2.52)$$

Le modèle de Mori-Tanaka dans le cas particulier de ce bi-phasé est obtenu en développant les expressions (2.36), (2.39) et (2.34) puis en posant $\mathbb{C}_{(p)} = \mathbb{O}$. Le tenseur d'élasticité effectif de la résine poreuse (indignée rp) correspond donc au tenseur homogénéisé de ce matériau hétérogène :

$$\mathbb{C}_{(rp)}^{MT} = \mathbb{C}_{(r)} : \left[\begin{array}{c} \mathbf{I} \overline{\otimes} \mathbf{I} - f_v \left[\mathbf{I} \overline{\otimes} \mathbf{I} - \mathbb{S}_{(r)}^E \right]^{-1} : \\ \left[(1 - f_v) \mathbf{I} \overline{\otimes} \mathbf{I} + f_v \left[\mathbf{I} \overline{\otimes} \mathbf{I} - \mathbb{S}_{(r)}^E \right]^{-1} \right]^{-1} \end{array} \right] \quad (2.53)$$

soit en simplifiant :

$$\mathbb{C}_{(rp)}^{MT} = \frac{E_{rp}^{MT}}{1 + \nu_{rp}^{MT}} \mathbf{I} \overline{\otimes} \mathbf{I} + \frac{E_{rp}^{MT} \nu_{rp}^{MT}}{(1 + \nu_{rp}^{MT})(1 - 2\nu_{rp}^{MT})} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (2.54)$$

où E_{rp}^{MT} et ν_{rp}^{MT} désignent le module d'Young et le coefficient de Poisson effectifs de la résine poreuse selon le schéma de Mori-Tanaka. Précisément, ces modules s'expriment en fonction des modules élastiques E_r et ν_r de la résine époxy et de la porosité f_v :

$$E_{rp}^{MT} = \frac{2(1 - f_v)(7 - 5\nu_r)E_r}{2(7 - 5\nu_r) + f_v(1 + \nu_r)(13 - 15\nu_r)} \quad (2.55)$$

et

$$\nu_{rp}^{MT} = \frac{2\nu_r(7 - 5\nu_r) + f_v(3 - 2\nu_r - 5\nu_r^2)}{2(7 - 5\nu_r) + f_v(1 + \nu_r)(13 - 15\nu_r)} \quad (2.56)$$

Etape 2

On considère que le V.E.R. (de volume V) du composite est un bi-phasé constitué d'une matrice homogène isotrope correspondant à la résine poreuse définie à l'étape 1 (phase m) et de renforts fibrés homogènes isotropes (phase f). La démarche est à ce niveau strictement identique à celle du modèle de base, la seule modification se situant au niveau des propriétés de la matrice, précisément :

$$\mathbb{C}_{(m)} = \mathbb{C}_{(rp)}^{MT} \quad (2.57)$$

L'expression générale de $\langle \mathbb{B} \rangle_{(f)}^{MT}$ donnée en (2.48) reste donc valable en opérant les changements suivants :

$$\begin{cases} E_r \rightarrow E_{rp}^{MT} \\ \nu_r \rightarrow \nu_{rp}^{MT} \end{cases} \quad (2.58)$$

Remarque 2.3 *Seules des observations microstructurales permettraient de valider le bien fondé de cette remise en cause de l'homogénéité de la matrice. Elles pourraient en effet démontrer d'une part l'existence ou non de la porosité précitée et, d'autre part, justifier l'échelle de taille retenue pour celle-ci. Les échantillons de matériaux ayant servi aux joncs de Laroin n'étant plus disponibles, ces études n'ont pu être menées ici.*

2.5.2 Section des fibres

Comme le montre la figure 2.3, il est possible que les fibres ne présentent pas au sein du composite une section parfaitement circulaire. On peut effectivement envisager qu'elles aient été plus ou moins écrasées lors du passage dans la filière de production, ce qui leur confère finalement une forme beaucoup plus complexe.

Les modèles micromécaniques établis à partir de la théorie d'Eshelby permettent de représenter les effets d'inclusions ellipsoïdales. Aussi, on se propose d'élargir ici la

description de la forme des fibres en considérant qu'elles sont toujours cylindriques (d'axe \mathbf{n}) mais de section elliptique (figure 2.6).

Les axes principaux de l'ellipse sont donnés par les vecteurs unitaires et orthogonaux \mathbf{t} et \mathbf{k} , tels que le triplet $(\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{k})$ forme une base orthonormée de \mathbb{R}^3 . Les longueurs des demi-axes sont désignées par a_t et a_k et l'on note λ le rapport d'aspect :

$$\lambda = \frac{a_t}{a_k} \in [0, 1] \quad (2.59)$$

le cas $\lambda = 1$ se ramenant à l'inclusion cylindrique circulaire.

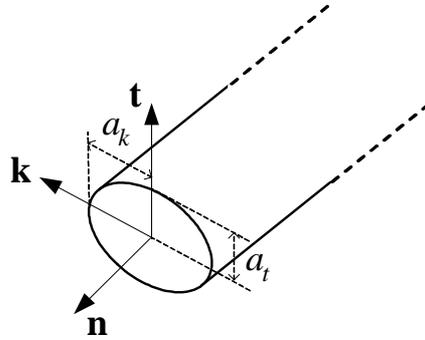


Figure 2.6: Inclusion cylindrique à section elliptique.

La modification engendrée par cette hypothèse se situe au niveau du tenseur d'Eshelby. Soit la base tensorielle $\{\mathbb{G}_i\}_{i=1,12}$ des tenseurs d'ordre quatre définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{G}_1 = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbb{G}_2 = \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}, \\ \mathbb{G}_3 = \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \quad \mathbb{G}_4 = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}, \\ \mathbb{G}_5 = \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbb{G}_6 = \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \\ \mathbb{G}_7 = \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}, \quad \mathbb{G}_8 = \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \\ \mathbb{G}_9 = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \\ \mathbb{G}_{10} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \underline{\otimes} \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \underline{\otimes} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \\ \mathbb{G}_{11} = \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \underline{\otimes} \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \underline{\otimes} \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \\ \mathbb{G}_{12} = \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \underline{\otimes} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \underline{\otimes} \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \end{array} \right. \quad (2.60)$$

Pour une inclusion cylindrique (d'axe \mathbf{n}) à section elliptique placée dans une matrice d'élasticité $\mathbb{C}_{(r)}$, le tenseur d'Eshelby $\mathbb{S}_{(r)}^E$ s'exprime de la façon suivante (Nemat-

Nasser et Hori [48]) :

$$\mathbb{S}_{(r)}^E = \sum_{i=1}^{12} g_i \mathbb{G}_i \quad (2.61)$$

avec

$$\begin{aligned} g_1 &= 0, & g_2 &= \frac{1}{2(1-\nu_r)} \left[\frac{1+2\lambda}{(1+\lambda)^2} + \frac{1-2\nu_r}{1+\lambda} \right], \\ g_3 &= \frac{1}{2(1-\nu_r)} \left[\frac{\lambda^2+2\lambda}{(1+\lambda)^2} + (1-2\nu_r) \frac{\lambda}{1+\lambda} \right], & g_4 &= 0, \\ g_5 &= \frac{\nu_r}{1-\nu_r} \frac{1}{1+\lambda}, & g_6 &= \frac{1}{2(1-\nu_r)} \left[\frac{1}{(1+\lambda)^2} - (1-2\nu_r) \frac{1}{1+\lambda} \right], \\ g_7 &= \frac{1}{2(1-\nu_r)} \left[\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} - (1-2\nu_r) \frac{\lambda}{1+\lambda} \right], & g_8 &= \frac{\nu_r}{(1-\nu_r)(1+\lambda)}, \\ g_9 &= 0, & g_{10} &= \frac{1}{1+\lambda}, \\ g_{11} &= \frac{1}{1-\nu_r} \left[\frac{1+\lambda^2}{2(1+\lambda)^2} + \frac{1-2\nu_r}{2} \right], & g_{12} &= \frac{\lambda}{1+\lambda} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Toujours à l'aide des relations (2.37) et (2.40), on montre que le tenseur de concentration des contraintes moyen dans les fibres s'exprime de la façon suivante :

$$\langle \mathbb{B} \rangle_{(f)}^{MT} = \sum_{i=1}^{12} b'_i \mathbb{G}_i \quad (2.63)$$

Notons que l'évaluation des composantes $\{b'_i\}_{i=1,12}$ sera faite numériquement dans la mesure où l'inversion de tenseurs d'ordre quatre exprimés dans la base $\{\mathbb{G}_i\}_{i=1,12}$ ne peut se faire analytiquement (*cf.* annexe C).

2.5.3 Isotropie transverse des fibres

Lors de l'élaboration des fibres de carbone, l'action d'étirage en température amène une orientation préférentielle des chaînes des molécules de carbone (Gay [22]). Il en résulte un comportement mécanique anisotrope pour celles-ci, précisément une isotropie transverse autour de leur axe \mathbf{n} . L'élasticité des fibres est alors entièrement caractérisée par cinq paramètres :

- le module élastique $E_f(\mathbf{n})$ dans la direction longitudinale d'axe \mathbf{n} ,

- le module élastique $E_f(\mathbf{t})$ dans la direction transversale de vecteur unitaire \mathbf{t} orthogonal à \mathbf{n} , quel que soit \mathbf{t} ,
- le coefficient de Poisson $\nu_f(\mathbf{n}, \mathbf{t})$ relatif aux directions de vecteurs unitaires \mathbf{n} et \mathbf{t} , quel que soit \mathbf{t} orthogonal à \mathbf{n} ,
- le coefficient de Poisson $\nu_f(\mathbf{t}, \mathbf{k})$ relatif aux directions de vecteurs unitaires \mathbf{t} et \mathbf{k} , quels que soient \mathbf{t} et \mathbf{k} tels que $(\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{k})$ forment une base orthonormée de \mathbb{R}^3 ,
- le module de cisaillement $\mu_f(\mathbf{n}, \mathbf{t})$ relatif aux directions de vecteurs unitaires \mathbf{n} et \mathbf{t} , quel que soit \mathbf{t} orthogonal à \mathbf{n} (*cf.* annexe B).

Faisant référence à ces modules, le tenseur de souplesse des fibres s'écrit dans la base $\{\mathbb{F}_i\}_{i=1,6}$ définie en (2.46) :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{(f)} = & \frac{1 - \nu_f(\mathbf{t}, \mathbf{k})}{E_f(\mathbf{t})} \mathbb{F}_1 + \frac{1}{E_f(\mathbf{n})} \mathbb{F}_2 + \frac{1 + \nu_f(\mathbf{t}, \mathbf{k})}{E_f(\mathbf{t})} \mathbb{F}_3 \\ & + \frac{1}{2\mu_f(\mathbf{n}, \mathbf{t})} \mathbb{F}_4 - \frac{\nu_f(\mathbf{n}, \mathbf{t})}{E_f(\mathbf{n})} (\mathbb{F}_5 + \mathbb{F}_6) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Dans la mesure où l'on ne dispose pas d'informations expérimentales sur les propriétés hors axes des fibres, on se propose de décrire de façon simple son anisotropie, à savoir :

- de maintenir les coefficients de Poisson et le module de cisaillement à leur valeurs retenues dans le cas de l'hypothèse d'isotropie, soit :

$$\nu_f(\mathbf{n}, \mathbf{t}) = \nu_f(\mathbf{t}, \mathbf{k}) = \nu_f \text{ (valeur moyenne 0.3)} \quad (2.65)$$

$$\mu_f(\mathbf{n}, \mathbf{t}) = \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)} = \frac{E_f(\mathbf{n}, \mathbf{t})}{2[1 + \nu_f(\mathbf{n}, \mathbf{t})]} \quad (2.66)$$

- d'introduire un paramètre $0 \leq \Theta \leq 1$ définissant le contraste entre les modules d'Young longitudinal et transverse, soit :

$$E_f(\mathbf{t}) = \Theta E_f(\mathbf{n}) \quad (2.67)$$

Toujours à l'aide des expressions (2.37), (2.40) et de l'annexe C, le développement des calculs amène dans ce cas à l'expression suivante pour le tenseur $\langle \mathbb{B} \rangle_{(f)}^{MT}$:

$$\langle \mathbb{B} \rangle_{(f)}^{MT} = \sum_{i=1}^6 b_i'' \mathbb{F}_i \quad (2.68)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 b_1'' &= \frac{2 \Theta E_f(\mathbf{n})}{D_\Theta} [(1 - f_f)(1 - \nu_r \nu_f) E_r + f_f (1 - \nu_r^2) E_f(\mathbf{n})] \\
 b_2'' &= \frac{E_f(\mathbf{n})}{D_\Theta} \left[\begin{array}{l} (1 - f_f)(1 - \nu_f - 2\nu_r \nu_f \Theta) E_r \\ + [1 + \nu_r + f_f (1 - \nu_r - 2\nu_r^2)] \Theta E_f(\mathbf{n}) \end{array} \right] \\
 b_3'' &= \frac{4(1 - \nu_r^2) \Theta E_f(\mathbf{n})}{(1 - f_f)(1 + \nu_f) E_r + (3 - 4\nu_r + f_f)(1 + \nu_r) \Theta E_f(\mathbf{n})} \\
 b_4'' &= \frac{2(1 + \nu_r) E_f(\mathbf{n})}{(1 - f_f)(1 + \nu_f) E_r + (1 + f_f)(1 + \nu_r) E_f(\mathbf{n})} \\
 b_5'' &= -\frac{(1 - f_f) E_f(\mathbf{n})}{D_\Theta} [(\nu_r - \nu_r \nu_f - 2\nu_f \Theta) E_r + \nu_r(1 + \nu_r) \Theta E_f(\mathbf{n})] \\
 b_6'' &= \frac{(1 - f_f) (\nu_f - \nu_m) \Theta E_m E_f(\mathbf{n})}{D_\Theta}
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

et

$$\begin{aligned}
 D_\Theta &= (1 - f_f)^2(1 - \nu_f - 2\nu_f^2 \Theta) E_r^2 \\
 &\quad + f_f [1 + f_f (1 - 2\nu_r)](1 + \nu_r) \Theta E_f^2(\mathbf{n}) \\
 &\quad + (1 - f_f) \left[\begin{array}{l} \Theta + \nu_r \Theta + \\ f_f (1 + \Theta - \nu_r \Theta - \nu_f - 4\nu_r \nu_f \Theta) \end{array} \right] E_r E_f(\mathbf{n})
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

le cas $\Theta = 1$ et $E_f(\mathbf{n}) = E_f$ se ramenant bien entendu au cas de base (2.48).

2.6 Commentaire

Les méthodes d'homogénéisation fournissent, nous l'avons vu, des estimations des contraintes et déformations locales ainsi que du comportement effectif du composite pour une microstructure donnée du V.E.R., *i.e.* pour des constituants à fraction volumique, forme et élasticité connues.

Elles ne permettent pas en tant que telles de représenter le caractère aléatoire de la réponse de ce matériau hétérogène lié aux incertitudes existant sur ces paramètres. De ce constat est apparue la nécessité d'un couplage entre cette démarche de modélisation et les méthodes de fiabilité exposées au chapitre 1. C'est ce que nous nous proposons de mettre en oeuvre à présent dans les deux chapitres suivants.

Chapitre 3

Fiabilité des joncs composites

3.1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à la partie élémentaire d'un hauban de travée, *i.e.* le jonc en carbone-époxy. L'objectif est de comprendre et d'estimer la fiabilité macroscopique de ce matériau composite en vue de son optimisation par la suite.

Dans ce contexte, la démarche la plus intéressante est celle d'une approche microstructurale (*cf.* § 1.2.5) dans laquelle la modélisation à la fois mécanique et stochastique est directement liée à la microstructure du matériau étudié. A la lumière des techniques de changement d'échelle, nous nous proposons donc de mettre en oeuvre les méthodes de fiabilité sur le cas particulier de ce matériau composite.

Par rapport aux études existantes, ce travail se distingue par une description et une analyse enrichies des incertitudes mises en jeu au niveau microscopique, et ce tant au niveau des constituants du composite que de leur arrangement au sein de celui-ci.

3.2 Fiabilité expérimentale

Comme il a été précisé au chapitre 2, l'Atelier Composites de Soficar réalise un certain nombre de tests qualité sur sa production. Dans le cas des joncs destinés à la passerelle de Laroin, l'objectif était d'accéder à la résistance limite R^T (en kN) lors d'essais de traction longitudinale (*i.e.* selon l'axe \mathbf{n} des joncs).

La machine utilisée pour ces tests est un banc de traction INSTRON 4485 équipé d'un capteur de force 200 kN et de mâchoires pneumatiques auto-serrantes venant maintenir l'éprouvette *via* des talons collés à ses deux extrémités. Soficar a ainsi testé chaque lot de joncs en début et en fin de production et réalisé pour chacun de ces niveaux un ensemble de 5 essais dont les résultats sont indiqués à l'annexe D.

Afin d'analyser l'ensemble des informations fournies par cet échantillon de N valeurs (ou réalisations) indépendantes $\{x_i\}_{i \in [1..N]}$ de la variable aléatoire $X = R^T$, il est indispensable de mettre en oeuvre un traitement statistique de ces données. Notons que l'on s'appuiera ici sur les méthodes statistiques classiques (Jolion [34], Taylor et Cihon [57]) pour caractériser les variabilités dans la mesure où l'on ne cherche pas particulièrement à obtenir une représentation fine des valeurs extrêmes rarement observées.

Il a été décidé de travailler avec l'ensemble des résultats, indépendamment de leur période de production (début ou fin), de façon à obtenir un échantillon représentatif des composites fabriqués. Les caractéristiques générales de l'échantillon sont désignées au tableau 3.1.

effectif total (N)	valeur minimale (x_{\min})	valeur maximale (x_{\max})
158	76.4 kN	94.3 kN

Tableau 3.1: Caractéristiques générales de l'échantillon pour $X = R^T$.

3.2.1 Définition des classes de valeurs

Le traitement statistique des données peut être facilité par le regroupement des différentes valeurs de la variable aléatoire au sein d'un nombre m de classes,

i.e. des intervalles $[X_{i-1}, X_i[$ avec $i \in [1..m]$. On conseille généralement de prendre un entier m compris entre 5 et 20 pour faciliter l'identification aux modèles de distribution. Dans la pratique, certaines formules empiriques simples permettent d'affiner la valeur de m suivant l'effectif total N , les bornes x_{\min} et x_{\max} des données ainsi éventuellement que d'autres paramètres tels que l'écart-type S_X (défini par la suite). Les lois les plus utilisées sont récapitulées dans le tableau 3.2 et évaluées sur notre cas d'étude. Ainsi, ces formules nous incitent ici à considérer une valeur de m comprise entre 8 et 11 classes.

auteurs	expression de m	application pour $X = R^T$
Brooks-Carruthers	$5 \log N$	10.9
Huntsberger	$1 + 3.332 \log N$	8.3
Sturges	$1 + \frac{10}{3} \log N$	8.3
Scott	$\frac{x_{\max} - x_{\min}}{3.5 S_X N^{-1/3}}$	7.6

Tableau 3.2: Evaluation du nombre de classes.

Il s'agit ensuite de préciser les bornes de chacune des classes. Afin d'éviter toute ambiguïté, les bornes extrêmes X_0 et X_m ne doivent pas coïncider avec les valeurs x_{\min} et x_{\max} . Pour faire leur choix, on utilise des données arrondies strictement inférieures à x_{\min} (pour X_0) et strictement supérieures à x_{\max} (pour X_m), la notion d'arrondi étant liée à l'ordre de grandeur des différences entre les données (dans notre cas, de l'ordre du kN). Considérons donc en première approche $X_0 = 76 kN$ et $X_m = 95 kN$. Reste ensuite à définir les amplitudes des bornes. Nous les avons choisies ici constantes pour simplifier, soit $X_i - X_{i-1} = a, \forall i$. D'où, connaissant m , on a :

$$a \approx \frac{X_m - X_0}{m} \tag{3.1}$$

Dans notre cas, si m nombre entier est compris entre 8 et 11, a est compris entre $1.72 kN$ et $2.37 kN$, ce qui nous amène à faire le choix pratique d'une amplitude finie $a = 2 kN$ pour $m = 10$ classes de valeurs, avec finalement $X_0 = 76 kN$ et $X_m = X_0 + m \times a = 96 kN$. Pour la suite, on notera $[X_{i-1}, X_i[$ la $i^{\text{ème}}$ classe, avec $X_i = X_0 + i \times a, \forall i \in [0, m]$.

3.2.2 Classement des données - lien avec les probabilités

La dernière étape consiste à ranger les N valeurs de X au sein des classes. L'effectif n_i de la classe i est le nombre de valeurs de X telles que $X_{i-1} \leq X < X_i$. Si l'on se place dans le contexte de notre étude, l'effectif de la classe de résistance i correspond au nombre de joncs pour lesquels $X_{i-1} \leq R^T < X_i$. Connaissant l'effectif n_i de chaque classe, on peut définir la fréquence relative f_i de cette classe telle que :

$$f_i = \frac{n_i}{N}, \quad \forall i \in [1, m]$$

Comme pour chaque classe $0 \leq n_i \leq N$, on a $0 \leq f_i \leq 1$. Sous l'hypothèse d'un grand nombre d'expériences (loi des grands nombres), cette donnée est par conséquent directement liée à la probabilité que la variable X appartienne à l'intervalle $[X_{i-1}, X_i[$:

$$P(X_{i-1} \leq X < X_i) = \frac{n_i}{N} = f_i \quad (3.2)$$

Cela signifie que l'on a $f_i \times 100\%$ de chances qu'un jonc composite tiré au hasard ait une résistance comprise entre X_{i-1} et X_i .

Les fréquences relatives permettent également d'introduire la fréquence cumulée F_i de la classe i représentant la proportion par rapport à N des valeurs de X telles que $X < X_i$. Pour le cas d'étude, il s'agit du nombre de joncs ayant une résistance $R^T < X_i$. La fréquence cumulée d'une classe i s'écrit alors :

$$F_i = \sum_{j=1}^i f_j \quad (3.3)$$

avec $0 \leq F_i \leq 1$, $F_1 = f_1$ et $F_m = 1$. De nouveau, on peut faire le lien avec une caractéristique probabiliste :

$$\forall i \in [1..m], \quad P(X < X_i) = \sum_{j=1}^i P(X_{j-1} \leq X < X_j) = \sum_{j=1}^i f_j = F_i \quad (3.4)$$

Dans l'exemple traité, on a ainsi $F_i \times 100\%$ de chances qu'un jonc tiré au hasard ait une résistance strictement inférieure à X_i .

Les figures 3.1 et 3.2 représentent graphiquement ces informations. A noter sur la figure 3.2 que la valeur de la fréquence cumulée de chaque classe i est appliquée en l'abscisse X_i de la fin de chaque classe. La courbe est ensuite obtenue par interpolation linéaire entre les différents points.

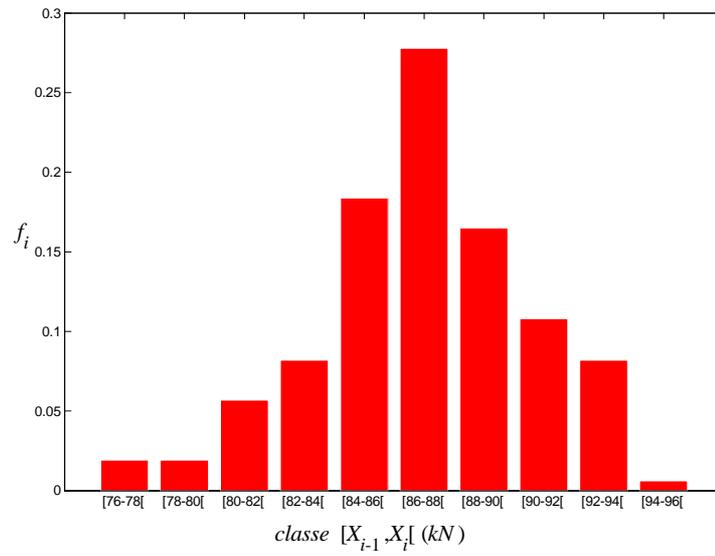


Figure 3.1: Histogramme des fréquences relatives pour $X = R^T$.

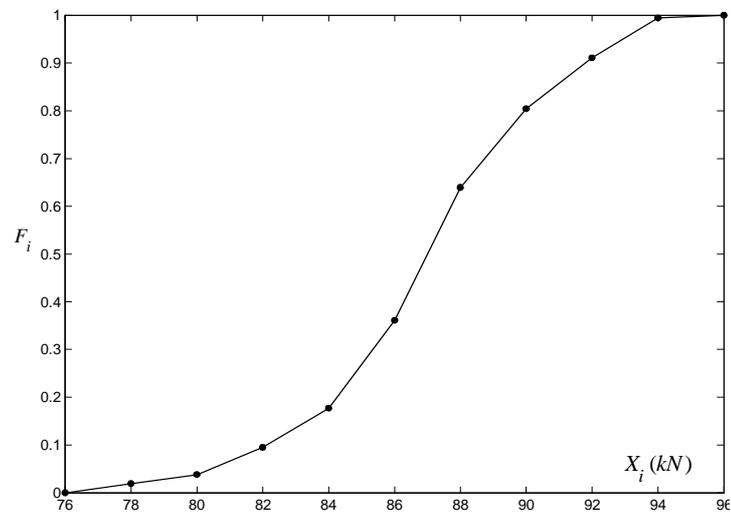


Figure 3.2: Courbe linéarisée des fréquences cumulées pour $X = R^T$.

3.2.3 Indicateurs statistiques

Il est enfin intéressant de calculer un certain nombre d'indicateurs permettant d'apprécier la tendance centrale et la dispersion de cette variable aléatoire. On se limitera ici aux caractéristiques les plus couramment utilisées en fiabilité mécanique, *i.e.* implicitement considérées comme suffisamment représentatives du problème posé.

La caractéristique centrale essentielle est la moyenne \bar{X} des valeurs de l'échantillon. La séparation en classes de données conduit le plus souvent à l'utilisation de la moyenne arithmétique définie comme suit :

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m n_i c_i \quad (3.5)$$

avec c_i le centre des classes :

$$c_i = \frac{X_{i-1} + X_i}{2} \quad (3.6)$$

On notera que plus le nombre m de classes est élevé, et donc plus on se rapproche d'une représentation en classes ponctuelles, plus la moyenne (3.5) se rapproche de la moyenne arithmétique classique $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ (ici égale à 86.8 kN) sur les valeurs discrètes x_i prises par la variable aléatoire X .

En ce qui concerne l'aspect dispersion, une première estimation peut être donnée par l'étendue de l'échantillon, soit la différence entre les valeurs extrêmes de celui-ci :

$$e = x_{\max} - x_{\min} \quad (3.7)$$

La variance $Var(X)$ permet d'affiner un peu ce résultat en mesurant l'éloignement des différentes valeurs de X par rapport à leur moyenne, *i.e.* dans le cas d'une définition par classes :

$$Var(X) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^m n_i (c_i - \bar{X})^2 \quad (3.8)$$

A noter que l'on a considéré ici une définition de la variance de sorte qu'elle constitue un estimateur convergent sans biais de la variance vraie de la population. L'écart type S_X n'est autre que la racine carrée de la variance et caractérise par conséquent aussi l'écart à la moyenne :

$$S_X = \sqrt{Var(X)} \quad (3.9)$$

Ainsi, plus S_X est petit, plus la moyenne \bar{X} est représentative de l'échantillon de façon significative. On notera que si l'écart type d'une variable aléatoire est l'indicateur de dispersion le plus utilisé, sa valeur peut être fortement influencée par quelques valeurs x_i extrêmes.

Le tableau 3.3 indique les valeurs de l'ensemble de ces caractéristiques pour le cas où $X = R^T$.

moyenne (\bar{X})	étendue (e)	variance ($Var X$)	écart type (S_X)
86.9 kN	17.9 kN	13.0 kN ²	3.6 kN

Tableau 3.3: Caractéristiques de tendance centrale et de dispersion pour $X = R^T$.

Remarque 3.1 *Cette étude ne dispose que d'une série de mesures sur un seul paramètre, en l'occurrence la résistance R^T des joncs en traction longitudinale. Les autres données du problème (par exemple les propriétés mécaniques des constituants) sont fournies directement sous forme de moyennes. Aussi, les analyses statistiques de corrélation entre les variables aléatoires visant notamment à établir la matrice de corrélation $[\rho]$ n'ont pu être effectuées ici.*

3.2.4 Incertitudes sur les mesures

Les résultats expérimentaux présentés ci-avant sont les données brutes issues des tests de traction réalisés par Soficar. Comme cela a été indiqué, la machine de traction sur laquelle ont été réalisées les mesures de R^T est équipée d'un capteur de force 200 kN. Dans la gamme des mesures (soit entre 76 et 96 kN), elle présente par conséquent une très bonne précision, autour de 1%.

Reste donc la possibilité d'incertitudes liées aux imperfections éventuelles des conditions d'essais et notamment au montage expérimental mis en place (collage de talons, serrage des mors sur ceux-ci puis application de l'effort). Afin justement de quantifier la précision de ce dispositif, des composites de fibres imprégnées ont été évalués sur ce banc de traction et les valeurs de module élastique longitudinal

et de résistance obtenues comparées à celles issues des essais normalisés réalisés par Toray. Par expérience, Soficar estime ainsi que leur dispositif de traction peut amener une erreur minorante d'un ordre $\eta \leq 5\%$. Précisément, les valeurs Soficar représenteraient entre 95% et 100% des valeurs normalisées.

Cette incertitude, qui va plutôt dans le sens de la sécurité (sous-estimation des valeurs intrinsèques), devra néanmoins être prise en compte par la suite. Pour cela, nous considérerons comme données expérimentales de référence les données brutes fournies par Soficar et nous évaluerons ensuite l'impact de cette erreur en étudiant différentes valeurs de η .

3.3 Modèle stochastique

Dans cette partie, nous allons justifier et construire le modèle stochastique qui permettra d'évaluer la fiabilité macroscopique du jonc composite en carbone-époxy. Pour cela, nous suivons donc les différentes étapes décrites au chapitre 1.

3.3.1 Variables aléatoires

La modélisation du comportement des composites est affectée par de nombreuses incertitudes, dont il est parfois difficile d'estimer quantitativement les variabilités associées. Même si l'on disposait de ces informations, leur prise en compte intégrale amènerait de toute façon à une certaine complexité de la formulation. Une simplification concentrée sur des paramètres jugés essentiels et connus expérimentalement s'avère donc indispensable.

Les sources d'incertitudes retenues dans ce chapitre sont relatives aux deux échelles indiquées en 1.2.2. Les variables aléatoires portent :

- d'une part sur les données matériaux (résine, fibres et composites) : les propriétés mécaniques des constituants (élasticité et rupture), leur répartition au sein de la microstructure du composite (fractions volumiques) et la géométrie de celui-ci (diamètre des joncs),

- d'autre part sur la modélisation micromécanique : porosité matricielle, forme des fibres, anisotropie des fibres.

Le chargement, en l'occurrence de traction longitudinale statique, est pris déterministe dans ce chapitre.

L'ensemble de k variables aléatoires X_i retenues sont prises indépendantes *a priori*, dans la mesure où l'on ne dispose pas d'informations expérimentales qui permettrait une estimation cohérente de leur éventuelle corrélation. Cette hypothèse simplifie d'ailleurs notablement l'étude de sensibilité (facteurs d'importance et élasticités). Notons néanmoins que quelques tests seront faits par la suite pour évaluer l'impact de la dépendance entre certaines variables sur les probabilités de rupture du composite.

Reste donc à préciser leur loi de distribution. La connaissance que l'on en a ici est strictement individuelle, *i.e.* que l'on ne dispose pour chaque X_i que d'informations caractéristiques sur sa propre variabilité. Nous travaillerons donc à partir des lois marginales relatives à chaque variable X_i et non pas à partir de la loi de probabilité conjointe du vecteur $\{X\} = \{X_i\}_{i=1..k}$.

Les analyses de fiabilité microstructurales font le plus souvent appel à la loi de Weibull pour représenter les distributions des variables aléatoires. Cette loi suppose que la rupture des composites fibrés est liée à la présence de défauts microstructuraux dans les renforts et qu'elle s'amorce précisément au niveau du défaut le plus faible (Weibull [60]). Ainsi, plus le volume du matériau est grand, plus on a de chances d'avoir de défauts initiaux, plus la probabilité de défaillance est importante. Un éventuel effet d'échelle peut donc être pris en compte dans cette formulation par l'introduction dans la fonction de répartition d'un rapport de taille entre le volume étudié et le volume de référence utilisé pour les tests sur fibres (voir par exemple Desrumaux *et al.* [12], Foret [18]).

Dans la présente étude, cet effet d'échelle n'a pas lieu d'être, les éprouvettes de composites testées étant effectivement du même ordre de grandeur que celles utilisées pour des fibres. D'autre part, notre souci est de toujours travailler avec les données expérimentales disponibles qui, en l'occurrence, portent généralement sur des valeurs moyennes éventuellement encadrées (*cf.* § 2.2.1). C'est pourquoi, il

semble plus pertinent de recourir à la loi normale qui fournit les proportions de valeurs comprises dans des intervalles centrés sur la moyenne (*cf.* annexe A).

Précisément, pour les variables aléatoires X_i relatives aux données matériaux, on leur affectera la moyenne \overline{X}_i indiquée au § 2.2 (données fabricants ou bibliographiques) et l'on considérera pour l'écart type S_{X_i} que 99.73% des valeurs de X_i sont comprises dans les intervalles précisés. D'après l'expression (A.6) et la donnée indiquée au tableau 2.1, on prendra ainsi les caractéristiques statistiques de moyenne et d'écart type suivantes pour le module d'Young E_r de la résine époxy :

$$\overline{E_r} = 2800 \text{ MPa}, \quad S_{E_r} = \frac{125}{3} \simeq 42 \text{ MPa} \quad (3.10)$$

Dans le cas où l'intervalle de variation n'est pas connu, on prendra forfaitairement

$$S_X = \frac{10\% \times \overline{X}}{3} \quad (3.11)$$

ce qui revient à considérer que 99.73% des valeurs de X sont comprises dans l'intervalle $[0.9\overline{X}, 1.1\overline{X}]$.

En ce qui concerne enfin les incertitudes sur la modélisation, elles portent sur des paramètres physiques ou mécaniques, on prendra donc des valeurs moyennes cohérentes vis-à-vis de la caractéristique associée ou des valeurs guidées par la bibliographie (Gay [22]). Par exemple, on testera des porosités matricielles f_v et des contrastes d'anisotropie Θ tels que :

$$\overline{f_v} \leq 10\% \quad \text{et} \quad 0.01 \leq \Theta \leq 0.07 \quad (3.12)$$

Comme précédemment, l'écart type de cette catégorie de variables aléatoires sera défini à l'aide de (3.11).

Remarque 3.2 *Dans ce chapitre, le chargement est considéré comme déterministe dans la mesure où l'on se focalise surtout sur le lien entre microstructure et fiabilité. Précisons d'ores et déjà que pour le calcul de structure du chapitre 4, l'incertitude relatives aux charges sera bien prise en compte dans l'analyse fiabiliste.*

3.3.2 Mode de défaillance

Dans ce travail, on se concentre sur la défaillance des joncs associée à une perte de leur tenue mécanique. Précisément, le point de défaillance du composite est défini comme le début de son endommagement, *i.e.* l'amorce des ruptures locales inhérentes aux matériaux fragiles. Dans le cas des composites fibrés, deux paramètres viennent essentiellement conditionner le mode d'endommagement :

- le type de matrice employée ainsi que sa compatibilité avec les fibres ; dans notre cas, l'adhérence a été supposée parfaite (*cf.* § 2.3.1) ;
- le type de sollicitation et notamment sa direction par rapport aux fibres.

Suivant le cas, on peut effectivement assister à des cassures de fibres, des fissurations de matrice ou encore des décohésions interfaciales entre ces deux constituants (Dzenis et Qian [14]). La figure 3.3 illustre notamment l'impact de la direction de chargement sur la contrainte de rupture d'un composite unidirectionnel (les fibres sont supposées parfaitement liées à la matrice et la déformation à rupture des fibres en traction est plus faible que celle de la matrice).

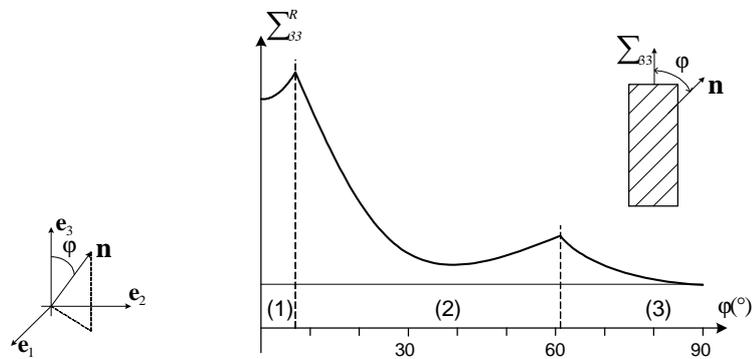


Figure 3.3: Contrainte de rupture Σ_{33}^R d'un composite unidirectionnel fibré (d'axe \mathbf{n}) soumis à une traction uniaxiale $\Sigma = \Sigma_{33} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$: (1) rupture des fibres, (2) rupture par cisaillement de la matrice, (3) rupture par traction de la matrice.

Etant donnée la fonction structurale des haubans, on rappelle que la sollicitation appliquée est de type traction longitudinale suivant l'axe \mathbf{n} des fibres, soit une contrainte macroscopique telle que $\Sigma = \Sigma_{nn} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$. Dans le cas présent, la défaillance est donc associée à la cassure de fibres.

De surcroît, les fibres sont ici examinées dans leur ensemble : on considère qu'elles sont toutes mécaniquement identiques (mêmes propriétés élastiques et de rupture), donc toutes soumises aux mêmes sollicitations locales et vont donc toutes rompre simultanément pour une certaine valeur Σ_{nn}^R de la contrainte macroscopique normale dans la direction \mathbf{n} .

Considérant l'origine microscopique de la rupture du composite, ce dernier est donc considéré comme défailant lorsque l'état mécanique moyen dans les fibres atteint un certain seuil. Précisément, nous avons adopté un critère classique en contrainte dans la mesure où les contraintes de rupture des fibres en traction constituent une caractéristique essentielle de leur comportement. La fonction de performance est ainsi définie à partir de la contrainte principale majeure moyenne dans les fibres :

$$G = \sigma_f^R(\mathbf{n}) - \langle \sigma_I \rangle_{(f)} \quad (3.13)$$

avec les valeurs principales $\langle \sigma_I \rangle_{(f)} \geq \langle \sigma_{II} \rangle_{(f)} \geq \langle \sigma_{III} \rangle_{(f)}$ du tenseur des contraintes locales dans les fibres. Le seuil de rupture est quant à lui identifié à partir des données expérimentales disponibles, précisément sur la contrainte de rupture $\sigma_f^R(\mathbf{n})$ des fibres selon leur axe (*cf.* § 2.2.1).

Remarque 3.3 *Dans la réalité, les fibres se distinguent entre elles au niveau de leur résistance à la rupture. Lorsque la fibre de plus faible résistance rompt, l'excès d'effort se reporte sur les fibres voisines. L'endommagement se développe ainsi progressivement jusqu'à la rupture de toutes les fibres et donc la ruine du matériau. Certains auteurs tiennent compte de ce phénomène évolutif dans la description de la défaillance du composite en affectant à chaque fibre une contrainte de rupture tirée aléatoirement dans une loi de Weibull (par exemple Desrumaux et al. [12]). L'hypothèse d'une cassure simultanée des fibres se justifie ici puisque le comportement macroscopique du composite est pratiquement élastique fragile (phase d'endommagement extrêmement rapide). Pour d'autres contextes de matériaux (à fibres de verre par exemple) ou de sollicitations, il conviendrait en revanche d'en tenir compte pour affiner la description de la défaillance.*

Remarque 3.4 *Dans le cadre des méthodes d'homogénéisation, le comportement élastique local des renforts d'un composite est considéré comme celui de ce matériau*

constitutif isolé ($\mathbb{C}_{(H)} = \mathbb{C}_{(f)}$). Dans le critère (3.13), nous avons implicitement supposé qu'il en était de même pour le seuil de rupture, à l'instar des approches par changement d'échelle intégrant des comportements plastiques (Bornert [7]). Pour valider cette hypothèse, il conviendrait pour le bien d'accéder aux comportements locaux *in situ* mais cela demeure encore difficile à l'heure actuelle.

3.3.3 Codes de calculs probabilistes

Une revue des différents codes de simulation probabiliste a été récemment réalisée par Pellissetti et Schuëller [50] dans laquelle ces auteurs décrivent pour chacun des outils existants leur cadre d'application, les algorithmes de résolution utilisés ainsi qu'une évaluation de leurs possibilités (couplage avec les éléments finis, calcul parallèle,...).

Dans ce chapitre, nous n'avons besoin finalement que d'un simulateur relativement simple dans la mesure où les comportements mécaniques se réduisent à l'élasticité et que les quantités entrant dans l'expression du critère de défaillance restent explicites (grâce notamment à l'emploi du modèle de Mori-Tanaka). Toutefois, nous aurons besoin d'analyses de sensibilités complètes (incluant notamment les cosinus directeurs) et, dans l'optique du chapitre suivant, il faudra que le couplage avec les éléments finis puisse être mis en place facilement.

Notre choix s'est donc porté vers le code de calcul FERUM (Finite Element Reliability Using Matlab) initialement élaboré par A. Der Kiureghian en 1999 et maintenant reconnu par la communauté fiabiliste. Il s'agit d'un logiciel libre et ouvert (écrit en langage Matlab) qui a bénéficié de nombreux développements sous la coordination de T. Haukaas pour aboutir en 2003 à la version 3.1 utilisée dans cette étude. La figure 3.4 montre la structure de ce code qui est constitué d'un ensemble de plusieurs sous-programmes (ou fonctions), le sous-programme principal *ferum* étant chargé d'orchestrer le tout.

Les informations d'entrée nécessaires à l'analyse (variables aléatoires et leurs lois de distribution marginales, éventuelles corrélations, fonction de défaillance G , paramètres de l'algorithme d'optimisation) sont introduites dans le fichier de données.

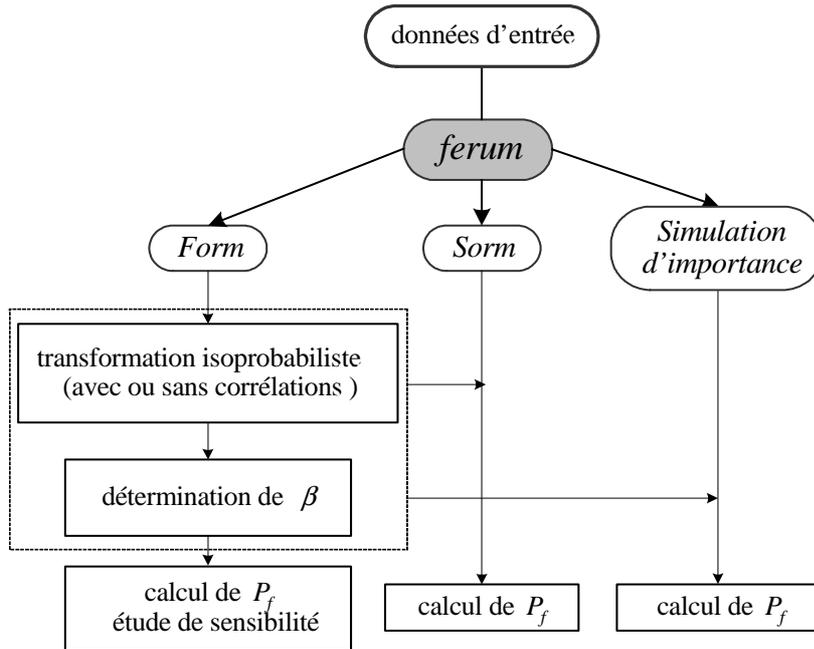


Figure 3.4: Structure du code de simulation probabiliste FERUM.

L'analyse fiabiliste est ensuite effectuée à l'aide des approximations FORM, SORM ou la simulation d'importance.

Parmi celles-ci, la fonction *form* est la plus importante car elle détermine l'indice de fiabilité β : la formulation de Nataf est utilisée comme transformation isoprobabiliste, l'algorithme iHLRF (improved Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler, Zhang et Der Kiureghian [62]) est quant à lui retenu pour la résolution du problème d'optimisation. Ce module est donc préalable aux deux autres méthodes proposées (approximation SORM ou simulation d'importance). A noter enfin qu'il est également possible de tenir compte de certaines corrélations entre les différentes variables aléatoires.

Il convient, nous l'avons dit, de toujours vérifier les résultats issus des méthodes d'approximation par des calculs de type Monte Carlo direct. Cette possibilité n'étant pas offerte par FERUM, nous avons développé par ailleurs un programme de simulation sous Matlab pour les réaliser. Cet outil nous a également été utile lorsque les expressions des valeurs propres des tenseurs des contraintes moyennes dans les fibres n'étaient pas facilement accessibles ou pour d'autres applications ponctuelles.

3.4 Résultats de l'analyse de fiabilité

L'idée générale de cette partie est de mesurer et discuter la pertinence des simulations issues du modèle vis-à-vis des résultats expérimentaux. Précisément pour les joncs, il s'agit de comparer les probabilités de défaillance P_f en traction longitudinale issues du critère (3.13) aux données expérimentales, *i.e.* aux fréquences cumulées des résistances à la rupture (figure 3.2).

3.4.1 Modèle de base

Les caractéristiques des variables aléatoires (lois de distribution et paramètres) utilisées dans cette section sont indiquées au tableau 3.4. Etant donnée la destination des joncs, on rappelle également que le chargement appliqué est une traction longitudinale statique, la contrainte macroscopique est ainsi telle que :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \Sigma_{nn} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad \text{avec} \quad \Sigma_{nn} = \frac{F}{(\pi\phi^2/4)} > 0 \quad (3.14)$$

F désignant l'effort longitudinal.

variable		moyenne	écart type
module d'Young résine époxy	E_r (MPa)	2800	42
coef. Poisson résine époxy	ν_r	0.4	0.01
module d'Young fibres	E_f (MPa)	230000	7667
coef. Poisson fibres	ν_f	0.3	0.01
cont. rupture fibres	$\sigma_f^R(\mathbf{n})$ (MPa)	4870	162
fraction vol. fibres	f_f (%)	67	2
diamètre jonc	ϕ (mm)	6	0.03

Tableau 3.4: Description des variables aléatoires du modèle de base pour l'étude des joncs composites (lois de distribution normales).

Expressions du modèle

Comme indiqué au chapitre 2, le tenseur de contraintes moyennes dans les fibres est établi à partir du tenseur de concentration des contraintes moyen dans les fibres $\langle \mathbb{B} \rangle_{(f)}^{MT}$ et de la contrainte macroscopique Σ appliquée selon la relation :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{(f)} = \langle \mathbb{B} \rangle_{(f)}^{MT} : \Sigma$$

D'après les expressions (2.48) de $\langle \mathbb{B} \rangle_{(f)}^{MT}$ et (3.14) pour Σ , les contraintes moyennes dans les fibres se mettent ici sous la forme :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{(f)} = \langle \sigma_{nn} \rangle_{(f)} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \langle \sigma_{tt} \rangle_{(f)} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \quad (3.15)$$

avec

$$\langle \sigma_{nn} \rangle_{(f)} = b_2 \Sigma_{nn} \quad \text{et} \quad \langle \sigma_{tt} \rangle_{(f)} = b_6 \Sigma_{nn} \quad (3.16)$$

Pour l'évaluation du critère de défaillance des joncs, il convient d'établir les valeurs propres principales majeures du tenseur $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{(f)}$. Compte tenu des valeurs moyennes des variables aléatoires et des intervalles de variation de ν_r ([0.36, 0.44]) et ν_f ([0.27, 0.33]) (cf. tableau 3.4), on a toujours $b_2 \geq 0$ et $b_6 \leq 0$ soit $\langle \sigma_{nn} \rangle_{(f)} \geq 0$ et $\langle \sigma_{tt} \rangle_{(f)} \leq 0$, d'où finalement :

$$\langle \sigma_I \rangle_{(f)} = \langle \sigma_{nn} \rangle_{(f)} \quad (3.17)$$

Il est intéressant de noter également l'importance relative des différentes composantes du tenseur des contraintes locales dans les fibres. On peut accéder en effet par des simulations de Monte Carlo aux valeurs respectives des coefficients b_2 et b_6 qui tiennent compte des variabilités introduites sur les données microstructurales (figure 3.5). La valeur de $|b_6|$ est par conséquent négligeable devant celle de $|b_2|$. Quelle que soit la contrainte macroscopique appliquée Σ_{nn} , les composantes du tenseur $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{(f)}$ seront donc telles que $|\langle \sigma_{nn} \rangle_{(f)}| \gg |\langle \sigma_{tt} \rangle_{(f)}|$. En d'autres termes, l'état de contrainte local au sein des fibres est pratiquement uniaxial.

Ceci justifie d'une part l'utilisation d'un seuil de rupture identifié sur l'essai de traction uniaxiale dans la mesure où les fibres subissent au sein du composite la même sollicitation que celle ayant servi à leur caractérisation. D'autre part, le recours à

un critère formulé en contrainte est ici bien adapté et suffisant. Etant donné le comportement isotrope élastique linéaire considéré pour les fibres, un critère de même forme portant sur la déformation principale majeure ou sur l'énergie élastique de déformation amènerait en effet à des résultats pratiquement identiques. Pour d'autres propriétés mécaniques des constituants, pour des sollicitations Σ multiaxiales ou encore dans le cas d'un comportement non linéaire du composite, il sera intéressant de comparer la pertinence de plusieurs critères.

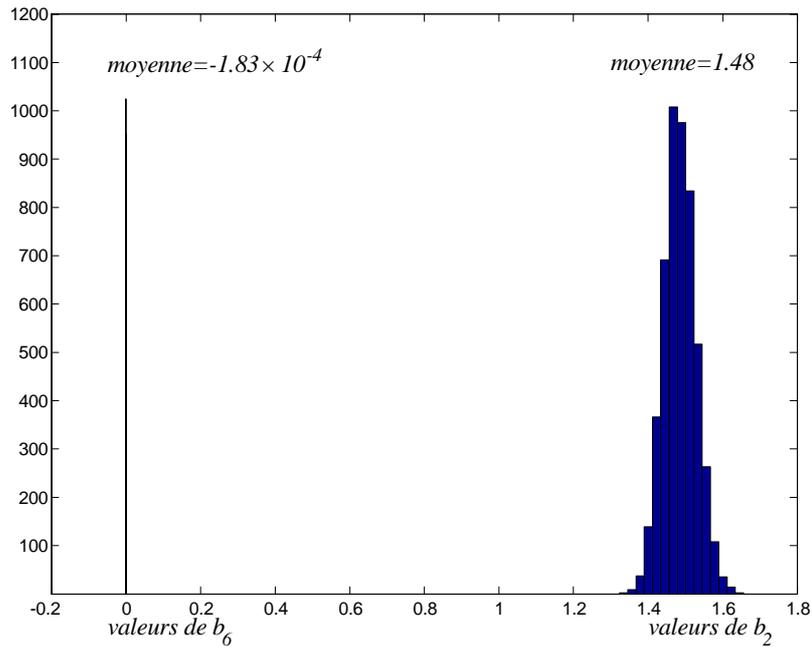


Figure 3.5: Simulations des valeurs des coefficients b_2 et b_6 .

Résultats

La figure 3.6 présente les fréquences cumulées expérimentales F_i relatives à l'effort résistant R^T des joncs et les probabilités de défaillance P_f issues du critère retenu en fonction de l'effort F appliqué. A première vue, on constate un sérieux décalage entre la théorie et l'expérience, avec une simulation fortement sous-estimée de la probabilité de défaillance réelle. A titre d'illustration, la probabilité de défaillance simulée vaut environ 5% pour $F = 86 \text{ kN}$ alors que les données expérimentales brutes indiquent plutôt qu'il y a 40% de chances que le jonc soit rompu pour cette intensité d'effort.

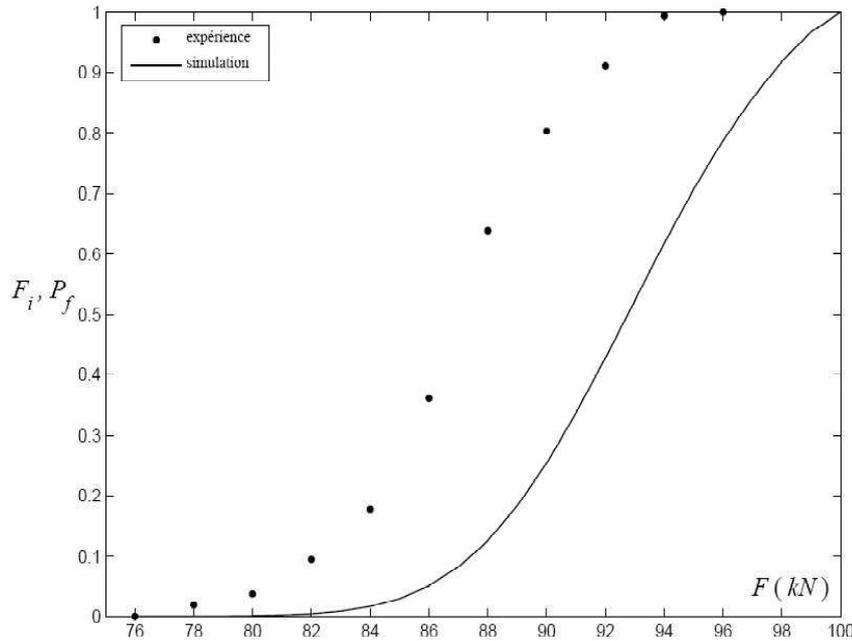


Figure 3.6: Fréquences cumulées expérimentales et probabilités de défaillance simulées pour la rupture des joncs (données expérimentales brutes, modèle de base).

Afin de mesurer l'importance de ce décalage, on peut introduire un certain nombre d'indicateurs statistiques. Nous en utiliserons ici deux :

- le calcul de distance au sens du χ^2 de la forme :

$$I_{\chi^2} = \sum_{i=1}^m \frac{[P_f (F = X_i) - F_i]^2}{P_f (F = X_i)} \quad (3.18)$$

- le coefficient de régression multiple R^2 :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^m [F_i - P_f (F = X_i)]^2}{\sum_{i=1}^m [\bar{X} - P_f (F = X_i)]^2} \quad (3.19)$$

La quantité $P_f (F = X_i)$ représente la probabilité de défaillance pour l'effort F correspondant à la valeur finale X_i de chacune des $m = 10$ classes $[X_{i-1}, X_i[$ au sein desquelles ont été regroupées les données statistiques sur R^T (cf. § 3.2.1), F_i désigne la fréquence cumulée expérimentale pour chacune de ces classes et \bar{X} correspond à la moyenne des mesures de R^T . Le tableau 3.5 confirme par le calcul de ces indicateurs

la mauvaise adéquation du modèle de base aux données expérimentales brutes avec en particulier $R^2 \ll 0.9$.

données expérimentales	<i>brutes</i>	<i>corrigées</i> ($\eta = 3\%$)	<i>brutes</i>	
modèle	<i>base</i>	<i>base</i>	<i>corrigé</i>	
gamme d'examen	$P_f \leq 1$			$P_f \leq 0.4$
I_{χ^2}	13.9	2.29	0.12	0.01
R^2	0.24	0.64	0.95	0.98

Tableau 3.5: Indicateurs de l'adéquation du modèle.

De façon à quantifier l'impact des incertitudes de mesures (*cf.* § 3.2.4), nous avons pondéré les données brutes du facteur correctif $\frac{1}{1-\eta}$ avec $\eta \leq 5\%$. La figure 3.7 et le tableau 3.5 illustrent la modification engendrée dans le cas où $\eta = 3\%$. On constate donc que cette incertitude tend à diminuer l'écart entre expérience et simulation. Toujours pour l'effort $F = 86 \text{ kN}$, la probabilité de défaillance expérimentale est à présent de l'ordre de 20%. Néanmoins, un certain décalage demeure et le modèle surestime toujours la fiabilité du matériau, notamment dans la gamme des faibles P_f (gamme de conception).

Afin de trouver l'origine du décalage entre théorie et expérience, on se propose d'examiner en premier lieu l'influence des erreurs pouvant être liées à la modélisation.

Remarque 3.5 *L'ensemble des résultats présentés ont été obtenus par les méthodes FORM et SORM (pour une tolérance $t = 0.001$ de l'algorithme d'optimisation) puis vérifiés par la simulation de Monte Carlo directe (cf. tableau 3.6). Sur ce cas simple, les méthodes d'approximations fournissent de très bons résultats avec un minimum d'appels à la fonction d'état limite G . On note également que la méthode SORM nécessite davantage d'appels à G de façon à établir, une fois le point de conception P^* déterminé, la meilleure approximation quadratique de la frontière du domaine de défaillance.*

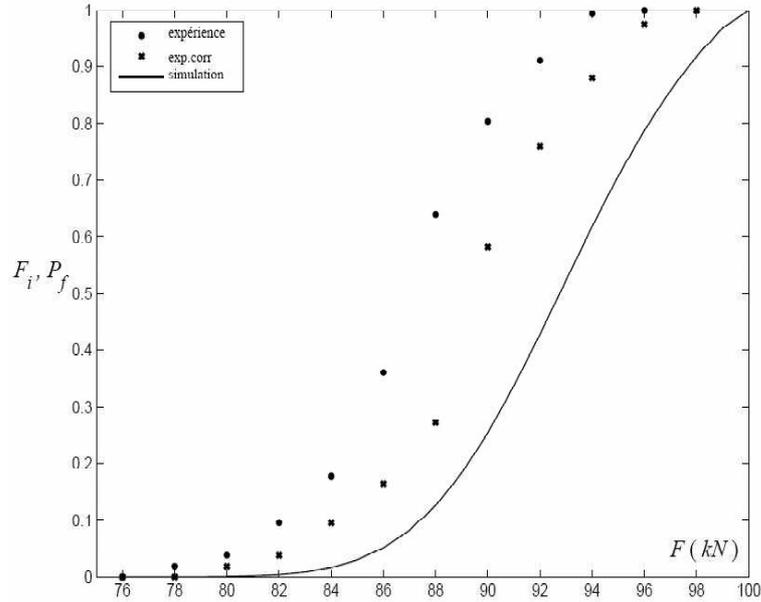


Figure 3.7: Fréquences cumulées expérimentales et probabilités de défaillance simulées pour la rupture des joncs (données expérimentales corrigées avec $\eta = 3\%$, modèle de base).

	nb d'appels à G	β	P_f
FORM	45	2.1434	1.6042×10^{-2}
SORM (Tvedt)	53	2.1304	1.6568×10^{-2}
SORM (Breitung)	53	2.1323	1.6493×10^{-2}
SORM (Hohenbichler-Rackwitz)	53	2.1304	1.6571×10^{-2}
Monte Carlo directe	10000	-	1.65×10^{-2}

Tableau 3.6: Indice de fiabilité et probabilité de défaillance suivant la méthode d'estimation (modèle de base, $F = 84 \text{ kN}$).

3.4.2 Vérification des erreurs de modélisation

La remise en cause de la modélisation a été faite en introduisant trois nouvelles variables (f_v , λ , Θ) décrivant les trois incertitudes sur le modèle évoquées au § 2.5 (porosité matricielle, forme des fibres, élasticité anisotrope des fibres).

Pour cela, nous avons procédé d'abord à quelques tests sur la contrainte principale majeure moyenne dans les fibres $\langle \sigma_I \rangle_{(f)} = b_2 \Sigma_{nn}$ en estimant de façon déterministe (toutes les variables aléatoires étant prises égales à leur valeur moyenne) le coefficient b_2 pour différents cas (tableau 3.7).

	f_v (%)	λ	Θ	b_2
modèle de base	0	1	1	1.4835
porosité matricielle	10	1	1	1.4852
forme des fibres	0	0.5	1	1.4835
élasticité anisotrope des fibres	0	1	0.05	1.4835

Tableau 3.7: Evaluations déterministes du coefficient b_2 .

Dans les trois cas de figure, le nouveau paramètre introduit ne semble pas avoir d'influence significative. Afin de confirmer ce résultat sur le plan probabiliste, les trois variables (f_v , λ , Θ) ont été prises aléatoires de caractéristiques indiquées au tableau 3.8. Les figures (3.8), (3.9) et (3.10) donnent alors les résultats obtenus pour chacun des aspects étudiés, avec le résultat de référence correspondant au modèle de base.

variable		moyenne	écart type
porosité de la résine époxy	f_v (%)	10	0.3
rapport d'aspect des fibres	λ	0.5	0.02
contraste d'élasticité	Θ	0.05	0.002

Tableau 3.8: Description des variables aléatoires pour l'étude des incertitudes de modélisation (lois de distribution normales).

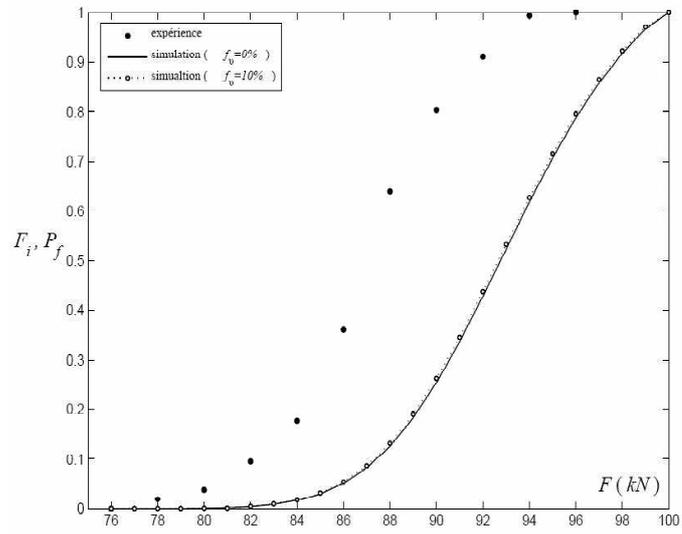


Figure 3.8: Porosité matricielle.

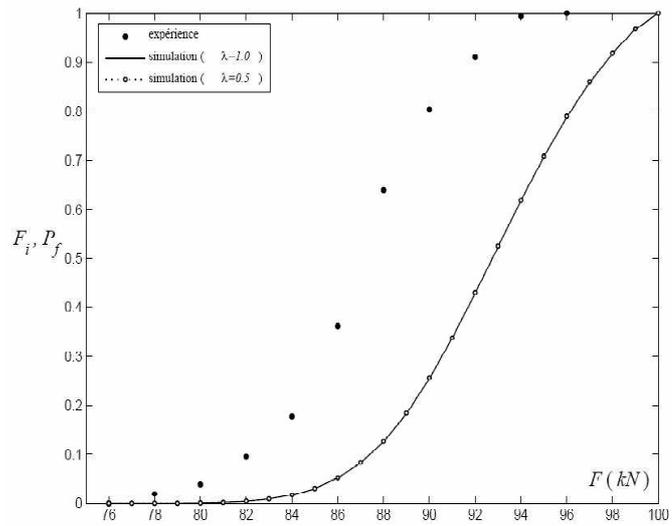


Figure 3.9: Rapport d'aspect des fibres.

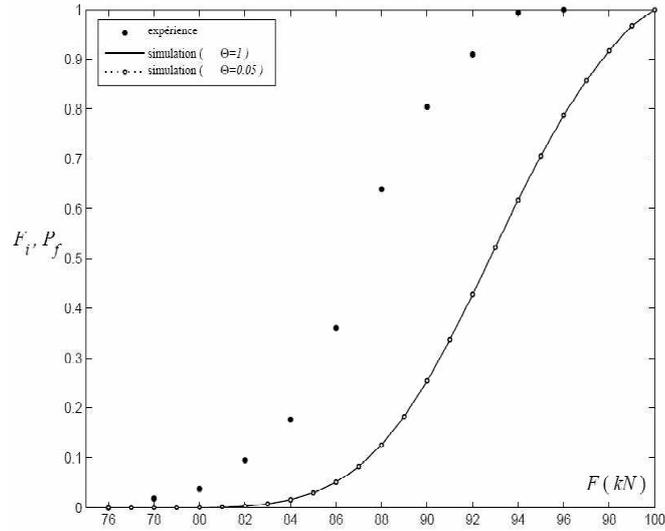


Figure 3.10: Isotropie transverse des fibres.

Conformément aux tendances observées en déterministe, la porosité de la matrice, le rapport d'aspect des fibres et l'isotropie transverse des fibres ont donc un impact négligeable sur la fiabilité des joncs. Un traitement conjoint des trois aspects n'aurait d'ailleurs vraisemblablement pas modifié cette conclusion tant les modifications apportées sont négligeables. Même si l'on pouvait s'attendre à ce genre de résultat sur ce type de composite soumis à ce type de sollicitation, ce travail présente néanmoins le mérite de confirmer ces attentes dans un contexte fiabiliste.

L'ensemble de ces résultats nous amènent donc à être confiants vis-à-vis des hypothèses retenues dans la formulation de base et à rechercher une autre cause à non adéquation du modèle.

3.4.3 Correction du modèle

Analyse de sensibilité sur le modèle de base

De façon à nous éclairer sur le problème du décalage, les élasticités $e_{\overline{X}_i}$ à la moyenne des variables X_i ont été examinées, soit

$$e_{\overline{X}_i} = \frac{\overline{X}_i}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial \overline{X}_i} \quad (3.20)$$

L'évaluation de ces quantités permet en effet de comparer les effets sur β (et donc sur P_f) des variations des moyennes $\overline{X_i}$ de chaque variable.

Le graphique 3.11 présente les élasticités issues du modèle de base pour un niveau de défaillance de $P_f = 10^{-2}$. Il apparaît clairement que parmi les paramètres microstructuraux :

- les propriétés élastiques de la matrice (ce qui vient conforter l'analyse de la porosité matricielle) et des fibres n'ont aucune influence notable,
- la contrainte de rupture $\sigma_f^R(\mathbf{n})$ et la fraction volumique f_f des fibres jouent en revanche un rôle important sur la fiabilité du jonc composite, conformément d'ailleurs à la volonté de ses concepteurs.

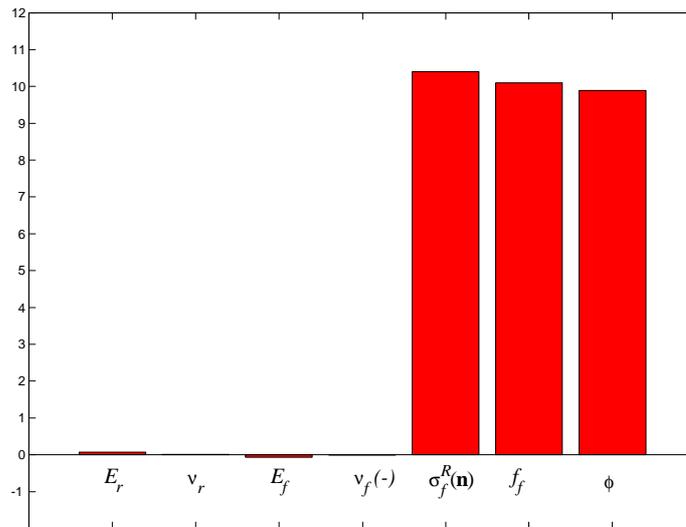


Figure 3.11: Elasticités à la moyenne pour le modèle de base ($P_f = 10^{-2}$).

Ceci étant posé, on peut donc séparer les paramètres particulièrement influents en deux catégories : celui conditionnant l'élasticité du composite (*i.e.* f_f) et ceux caractérisant sa rupture (*i.e.* f_f et $\sigma_f^R(\mathbf{n})$). Afin de découpler ces deux effets, on se tourne vers les résultats sur les plats composites qui ne mettent en jeu que l'élasticité de ces matériaux hétérogènes.

Etude des plats composites

Les tests qualités réalisés par Soficar sur les plats composites ont porté sur le module élastique longitudinal de ces matériaux dans la direction \mathbf{n} des fibres. La mesure de $E(\mathbf{n})$ (en *GPa*) a été faite sur le même banc de traction longitudinale que celui utilisé pour les joncs mais dans la gamme des déformations comprises entre 0.1 et 0.3% (de façon à assurer une réponse élastique du composite). Soficar a ainsi testé chaque lot de plats en début ou en fin de production et réalisé pour chacun entre 2 et 5 essais dont les résultats sont répertoriés à l'annexe D.

Comme précédemment, l'ensemble de ces données ont été traitées indépendamment de leur période de production. Le tableau 3.9 indique les caractéristiques générales de l'échantillon de N réalisations de la variable aléatoire $X = E(\mathbf{n})$. Une démarche statistique strictement identique à celle détaillée pour les joncs a ensuite été menée pour synthétiser les résultats. Les figures 3.12 et 3.13 représentent ainsi l'ensemble des données fréquentielles concernant les plats.

effectif total (N)	valeur minimale (x_{\min})	valeur maximale (x_{\max})
74	163 <i>GPa</i>	192 <i>GPa</i>

Tableau 3.9: Caractéristiques générales de l'échantillon pour $X = E(\mathbf{n})$.

D'après les relations (B.5), (2.35), (2.45) et (2.48), le modèle de Mori-Tanaka conduit à l'expression suivante pour le module $E(\mathbf{n})$ du composite dans le cas de base :

$$\begin{aligned}
 E(\mathbf{n}) &= [\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} : \mathbb{S}_{\text{hom}}^{MT} : \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}]^{-1} \\
 &= D \left[\begin{array}{c} (1 - f_f) (1 - \nu_f - 2\nu_f^2) E_r \\ + [1 + \nu_r + f_f (1 - \nu_r - 2\nu_r^2)] E_f \end{array} \right]^{-1} \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

Grâce à cette expression, on peut donc accéder à la distribution du module $E(\mathbf{n})$ issue du modèle de Mori-Tanaka et des variabilités introduites sur les données matériaux. Il est alors pertinent de comparer cette distribution théorique aux résultats expérimentaux (*i.e.* aux fréquences cumulées de la figure 3.13) pour évaluer la représentation de l'élasticité du composite par le modèle.

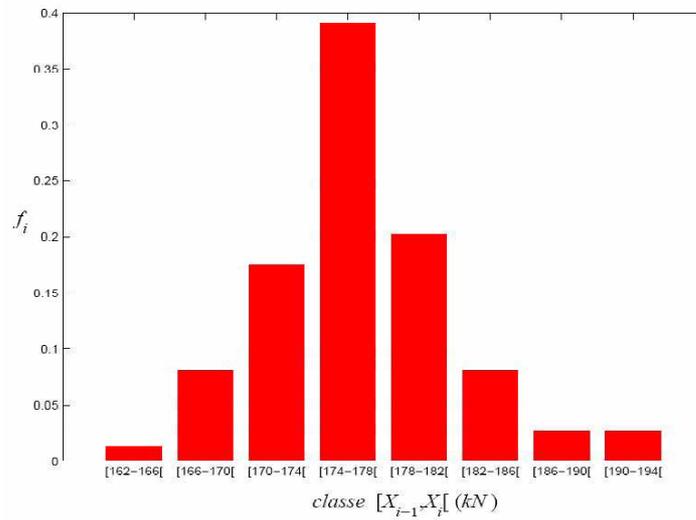


Figure 3.12: Histogramme des fréquences relatives pour $X = E(\mathbf{n})$.

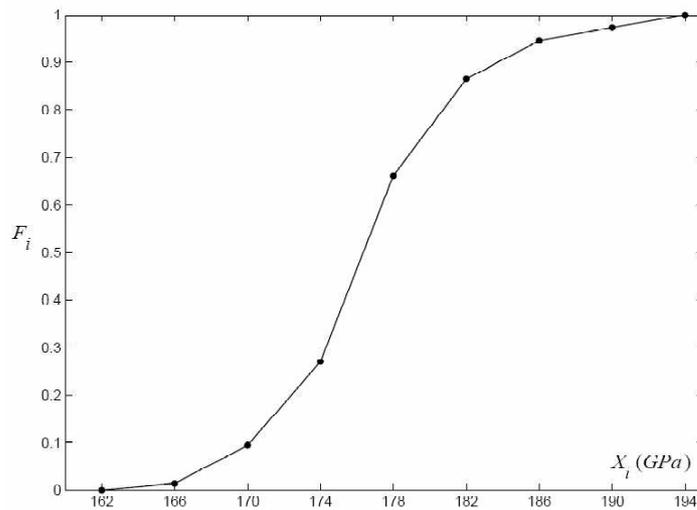


Figure 3.13: Courbe linéarisée des fréquences cumulées pour $X = E(\mathbf{n})$.

Pour cela, nous avons donc mis en place un autre modèle stochastique dont les variables aléatoires sont décrites au tableau 3.10. Précisons que les données sur les fibres T800H ont été obtenues par des moyennes sur l'ensemble des lots ayant servi à la réalisation des plats (*cf.* tableau 2.2).

variable		moyenne	écart type
module d'Young résine époxy	E_r (MPa)	2800	42
coef. Poisson résine époxy	ν_r	0.4	0.01
module d'Young fibres	E_f (MPa)	294710	9824
coef. Poisson fibres	ν_f	0.3	0.01
fraction vol. fibres	f_f (%)	62.8	2.1
largeur plat	l (mm)	150	0.1
épaisseur plat	e (mm)	1.2	0.02

Tableau 3.10: Description des variables aléatoires du modèle de base pour l'étude des plats composites (lois de distribution normales).

La distribution théorique de $E(\mathbf{n})$ a été obtenue à l'aide de simulations de Monte Carlo. Le principe est de réaliser un nombre important de tirages aléatoires jusqu'à obtenir la convergence de la moyenne $\overline{E(\mathbf{n})}$ du module élastique longitudinal. Cette limite est le plus souvent atteinte pour un nombre de tirages $N_t \approx 10000$ (figure 3.14). Ensuite, les valeurs de $E(\mathbf{n})$ relatives à ce point de convergence sont traitées de façon statistique et leurs fréquences cumulées établies.

Sur la figure 3.15 sont ainsi reproduites les données expérimentales et celles issues de la simulation selon le même rangement par classes. De nouveau, on constate une mauvaise représentation des résultats expérimentaux, cette fois donc sur la réponse élastique. Par exemple, le modèle indique qu'environ 15% des plats ont un module élastique longitudinal inférieur à 178 GPa alors que les mesures expérimentales donnent au moins 65%.

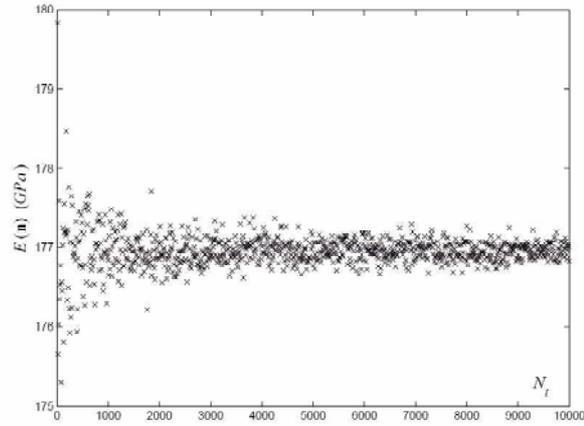


Figure 3.14: Convergence de l'estimation Monte Carlo directe en fonction du nombre N_t de tirages (valeur de $\overline{E(\mathbf{n})}$).

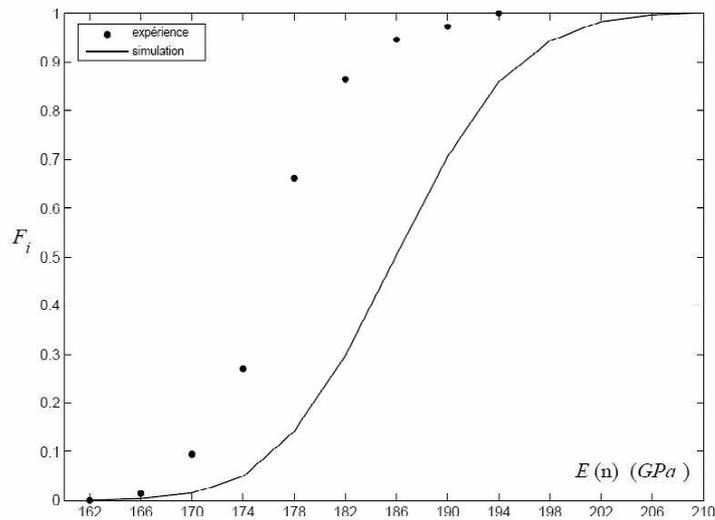


Figure 3.15: Fréquences cumulées expérimentales et simulées du module élastique longitudinal $E(\mathbf{n})$ des plats composites (modèle de base).

Il ressort par conséquent que le problème de décalage se situe au niveau de l'information microstructurale mise en jeu ici, soit la fraction volumique f_f des fibres. D'après l'expertise de Soficar, il se peut en effet que les fibres ne soient pas mobilisées à 100% du fait soit d'une détérioration lors du procédé de fabrication (fibres coupées ou non parfaitement imprégnées) soit d'un mauvais placement de celles-ci au sein du composite (défaut de rectitude). C'est donc ce point que nous avons choisi de corriger pour améliorer la réponse du modèle.

Ajustement de la fraction volumique

De façon à traduire cette mobilisation partielle des fibres placées dans le composite, on distingue deux ensembles de fibres :

- des fibres *inactives* dont l'influence mécanique est diminuée du fait des défauts de détérioration et de rectitude précités et qui ne font donc pas bénéficier le composite de leurs hautes performances ; on traduira cette idée en leur affectant les propriétés de la résine époxy ;
- des fibres *actives* qui, en revanche, fonctionnent à 100% de leurs capacités ; on notera ainsi p_{actif} leur proportion (en %) par rapport à l'ensemble des fibres du composite.

Le composite peut alors être traité de la même façon que précédemment comme un matériau hétérogène bi-phasé constitué d'une matrice (résine époxy) dans laquelle est plongée une fraction volumique corrigée f'_f de fibres telle que :

$$f'_f = p_{actif} \times f_f \quad (3.22)$$

les propriétés des fibres étant bien celles des T700SC. L'ensemble des expressions du modèle demeurent donc valables avec la correction

$$f_f \rightarrow f'_f \quad (3.23)$$

De façon à mesurer l'importance que le paramètre p_{actif} peut prendre dans la réponse du modèle, nous avons représenté à la figure 3.16 les variations dans le cadre déterministe du module élastique longitudinal du composite $E(\mathbf{n})$ ainsi que celle du

coefficient b_2 caractéristique de la contrainte principale majeure moyenne dans les fibres ($\langle \sigma_I \rangle_{(f)} = b_2 \Sigma_{nn}$). Il ressort visiblement que le rôle de p_{actif} est important dans les deux cas, son introduction dans le modèle stochastique aura donc sans doute également une influence notable.

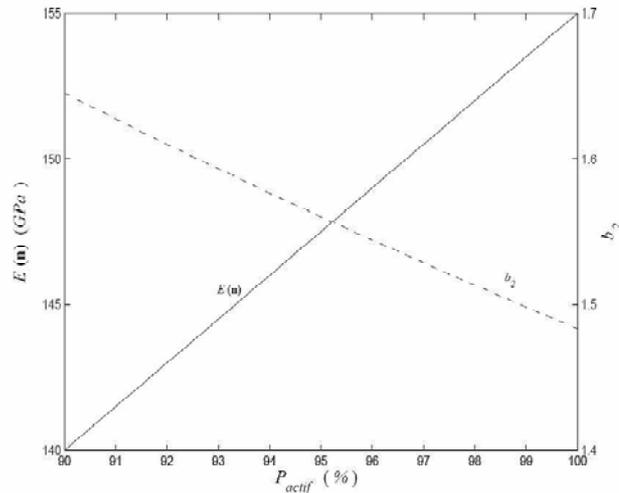


Figure 3.16: Evolution du module élastique longitudinal du composite $E(\mathbf{n})$ et du coefficient b_2 en fonction de p_{actif} (calculs déterministes avec le modèle corrigé).

3.4.4 Identification et validation du modèle corrigé

Par définition, le nouveau paramètre p_{actif} constitue une donnée incertaine dont l'identification nécessiterait des observations microstructurales détaillées sur plusieurs échantillons de joncs. En l'absence de ces informations, on se propose dans le cas présent de l'identifier sur la réponse élastique des plats composites.

Un nouveau modèle stochastique pour les plats a par conséquent été établi en adjoignant au modèle de base cette variable aléatoire normale supplémentaire (tableau 3.11). Par rapport à la proportion de 100% de fibres actives considérée pour le modèle de base, on constate que l'introduction de $p_{actif} < 100\%$ permet d'améliorer la représentation du module élastique $E(\mathbf{n})$ des plats. On cherche alors la valeur moyenne $\overline{p_{actif}}$ qui approche le plus correctement possible l'ensemble des données expérimentales brutes, son écart type étant pris tel que défini en (3.11).

variable		moyenne	écart type
module d'Young résine époxy	E_r (MPa)	2800	42
coef. Poisson résine époxy	ν_r	0.4	0.01
module d'Young fibres	E_f (MPa)	294710	9824
coef. Poisson fibres	ν_f	0.3	0.01
fraction vol. fibres	f_f (%)	62.8	2.1
largeur plat	l (mm)	150	0.1
épaisseur plat	e (mm)	1.2	0.02
proportion de fibres actives	p_{actif} (%)	$\overline{p_{actif}}$	$\frac{10\%}{3} \overline{p_{actif}}$

Tableau 3.11: Description des variables aléatoires du modèle corrigé pour l'étude des plats composites (lois de distribution normales).

La figure 3.17 montre le meilleur compromis obtenu pour l'ensemble des données expérimentales brutes, soit avec une valeur moyenne de p_{actif} égale à 95%, ce qui constitue plutôt une réussite de la phase de fabrication. Sur le même exemple que précédemment, le modèle indique à présent qu'une proportion de 55% des plats ont un module élastique longitudinal inférieur à 178 GPa (pour rappel les mesures expérimentales donnent environ 65%).

Il est évident que la valeur de la moyenne de p_{actif} est conditionnée par les résultats expérimentaux que l'on considère comme référence. Pour les données brutes ($\eta = 0\%$), on a effectivement $\overline{p_{actif}} = 95\%$, soit le cas le plus défavorable. Si en revanche les résultats expérimentaux sous-estiment de $\eta = 3\%$ les valeurs intrinsèques, on trouve alors une proportion moyenne de fibres actives d'environ 98%.

Afin de mesurer la pertinence de la remise en cause de la fraction volumique des fibres sur la réponse à rupture des joncs, nous avons repris le modèle stochastique pour ceux-ci en ajoutant de la même façon cette nouvelle variable aléatoire p_{actif} , dont les valeurs caractéristiques sont désormais connues (on travaille avec les données expérimentales brutes, cf. tableau 3.12).

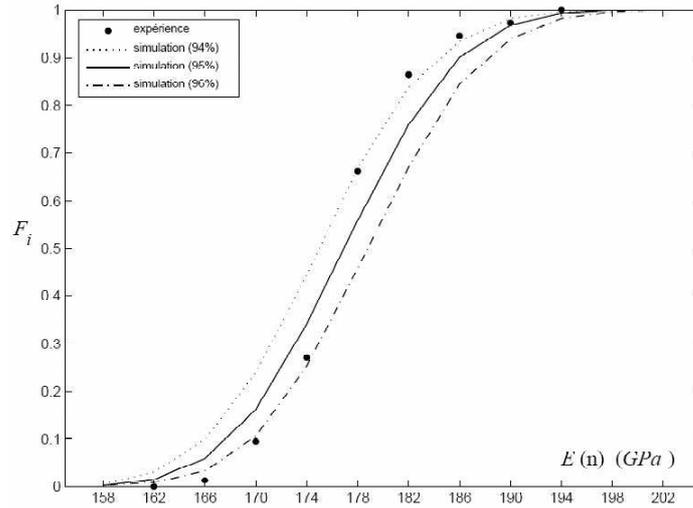


Figure 3.17: Fréquences cumulées expérimentales et simulées du module élastique longitudinal $E(\mathbf{n})$ des plats composites (modèle corrigé en fonction de $\overline{p_{actif}}$).

variable		moyenne	écart type
module d'Young résine époxy	E_r (MPa)	2800	42
coef. Poisson résine époxy	ν_r	0.4	0.01
module d'Young fibres	E_f (MPa)	230000	7667
coef. Poisson fibres	ν_f	0.3	0.01
cont. rupture fibres	$\sigma_f^R(\mathbf{n})$ (MPa)	4870	162
fraction vol. fibres	f_f (%)	67	2
diamètre jonc	ϕ (mm)	6	0.03
proportion de fibres actives	p_{actif} (%)	95	3

Tableau 3.12: Description des variables aléatoires du modèle corrigé pour l'étude des joncs composites (lois de distribution normales).

La figure 3.18 présente les probabilités de défaillance P_f issues de cette correction du modèle. Par rapport au modèle de base de la figure 3.6, on constate une nette amélioration de la représentation des données expérimentales, confirmée par le calcul des indicateurs I_{χ^2} et R^2 (cf. tableau 3.5). Précisément, le coefficient de régression R^2 atteint désormais des valeurs supérieures à 0.9, garantissant une simulation correcte de la sortie réelle, l'adéquation étant quasi-parfaite dans la gamme des $P_f \leq 0.4$ pour laquelle $R^2 = 98\%$. Ceci constitue un très bon résultat pour la représentation de ce phénomène aléatoire et complexe qu'est la rupture des composites.

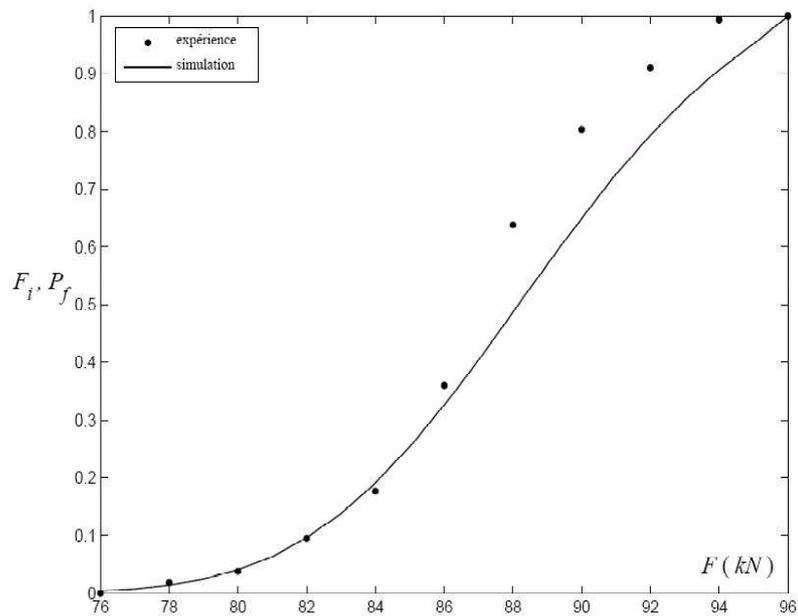


Figure 3.18: Fréquences cumulées expérimentales et probabilités de défaillance simulées pour la rupture des joncs (données expérimentales brutes, modèle corrigé).

Il est important de signaler ici la force de l'identification et de la validation réalisées, tant sur la correction du modèle en elle-même que sur la vérification des erreurs de modélisation. En effet, il s'agit d'une démarche plus rationnelle pour évaluer la représentativité d'un modèle micromécanique qui ne se limite pas à comparer la réponse de celui-ci sur quelques essais mais sur un nombre important de résultats expérimentaux (74 mesures pour l'identification, 158 mesures pour la validation). Cela permet d'intégrer l'inévitable variabilité inhérente aux matériaux composites

et à la réalisation d'expériences, de ne pas accepter ou rejeter rapidement un modèle sur la seule base de quelques résultats mais au contraire de mesurer de façon réaliste et quantifiée sa pertinence sur un faisceau d'informations.

Remarque 3.6 *On aurait pu considérer que les fibres inactives sont totalement endommagées, soit d'élasticité nulle. Le problème serait revenu à un milieu hétérogène tri-phasé (matrice en résine époxy, inclusions cylindriques d'élasticité $\mathbb{C}_{(f)}$, inclusions cylindriques d'élasticité nulle \mathbb{O}) que l'on peut traiter de la même façon avec le modèle de Mori-Tanaka. Néanmoins, cette hypothèse est beaucoup plus sévère et a priori non réaliste ici vis-à-vis de la qualité du procédé de fabrication.*

3.4.5 Analyse de sensibilité

Au regard des bons résultats fournis par le modèle corrigé, nous avons évidemment choisi de retenir cette approche dans les études ultérieures, notamment ici pour l'analyse de sensibilité. Cette démarche, propre aux études fiabilistes, va nous permettre d'obtenir des informations pertinentes pour la suite de l'étude, en particulier vis-à-vis du modèle stochastique à utiliser pour la passerelle ainsi que pour son optimisation.

Cosinus directeurs

Les cosinus directeurs reflètent l'importance des différentes variabilités introduites dans le modèle sur la fiabilité de la structure étudiée. Le diagramme 3.19 présente les poids respectifs des variables considérées ici. La contrainte de rupture $\sigma_f^R(\mathbf{n})$, le pourcentage de fibres actives p_{actif} et la fraction volumique de fibres f_f jouent un rôle stochastique important, suivis dans une moindre mesure par le diamètre ϕ des joncs. Etant donnée la valeur négative de leurs cosinus directeurs, ces quatre variables sont de type résistance : leur augmentation induit une meilleure fiabilité.

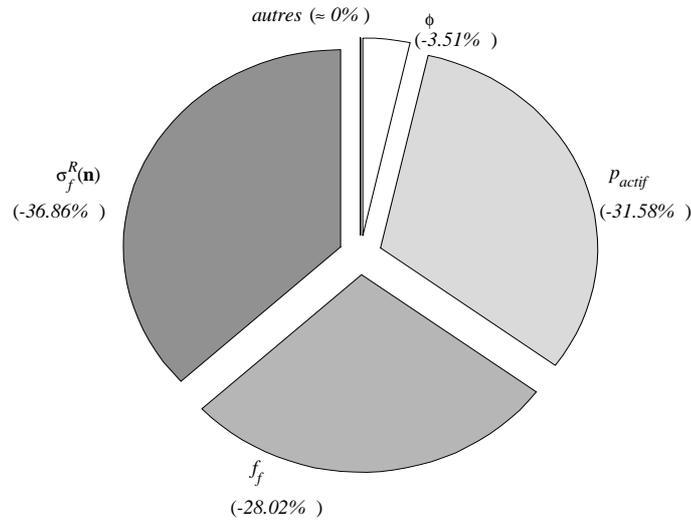


Figure 3.19: Diagramme des cosinus directeurs pour le modèle corrigé ($P_f = 10^{-2}$).

La variabilité des autres paramètres (propriétés élastiques de la résine époxy E_r et ν_r ainsi que celles des fibres E_f et ν_f) n'a pratiquement pas d'impact sur la fiabilité du composite, on pourra donc ignorer les incertitudes qui leur sont associées et les considérer comme déterministes dans le chapitre suivant.

Elasticités à la moyenne

Les valeurs des élasticités à la moyenne permettent de savoir sur quels paramètres il est intéressant de jouer en priorité pour obtenir une structure plus fiable. La figure 3.20 présente les résultats obtenus dans le cadre du modèle corrigé. On constate tout d'abord que les constatations établies sur les poids vis-à-vis de la prépondérance des variables sont confirmées, avec un rôle majeur de $\overline{\sigma_f^R(\mathbf{n})}$, $\overline{p_{actif}}$, $\overline{f_f}$ et $\overline{\phi}$.

Le détail des tendances montre que ces paramètres principaux ont globalement une influence du même ordre : une même augmentation en pourcentage de chacun d'entre eux (dans la limite de $\overline{p_{actif}} \leq 100\%$ et $\overline{f_f} \leq 100\%$) provoque en effet une même augmentation de fiabilité.

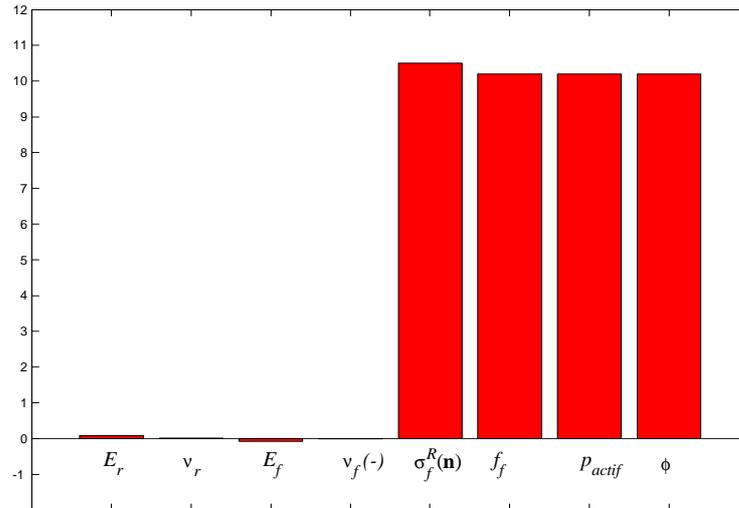


Figure 3.20: Elasticités à la moyenne pour le modèle corrigé ($P_f = 10^{-2}$; le signe (-) indique une valeur négative).

Pour illustrer cet aspect, on étudie l'effet théorique d'une variation de chacune des données que l'on maîtrise le plus facilement (*i.e.* toutes sauf p_{actif}):

- **cas 1**: fibres T800H de contrainte de rupture moyenne $\overline{\sigma_f^R(\mathbf{n})} = 5540 \text{ MPa}$,
- **cas 2**: fraction volumique de fibres moyenne $\overline{f_f} = 76\%$,
- **cas 3**: diamètre moyen du jonc de $\overline{\phi} = 6.8 \text{ mm}$.

Les variations retenues pour $\overline{f_f}$ et $\overline{\phi}$ ont été définies de sorte que l'on ait dans les trois cas une même augmentation d'environ 14% de la moyenne de la variable étudiée.

Le tableau 3.13 montre que l'on aboutit effectivement à la même variation ΔP_f de la probabilité de défaillance du jonc pour les trois cas. Précisons que le recours aux fibres T800H conduit à un module d'Young des fibres E_f plus important (*cf.* tableau 2.2) dont l'élasticité à la moyenne est négative donc néfaste pour la fiabilité. L'élasticité de $\sigma_f^R(\mathbf{n})$ étant cependant un peu plus importante que celles de f_f et ϕ , elle vient compenser cet effet du E_f pour conduire à une augmentation de la fiabilité pratiquement identique à celles des cas 2 et 3.

cas	modification	ΔP_f
1	fibres : T700SC \rightarrow T800H	-99.94%
2	f_f : 67% \rightarrow 76%	-99.92%
3	ϕ : 6 mm \rightarrow 6.8 mm	-99.87%

Tableau 3.13: Variation de P_f suivant les valeurs des moyennes des variables aléatoires.

Si cet exemple démontre bien l'aide à la conception qui peut découler de l'analyse des élasticités, il est important de rappeler que nous sommes demeurés ici dans un cadre de fiabilité mécanique sous sollicitations statiques et en supposant également que le modèle micromécanique restait valable. Le choix de l'une ou l'autre des solutions sera bien entendu fait de façon à maintenir la qualité du matériau pultrudé (le taux de fibres de 76% est effectivement excessif pour une bonne adéquation de la résine aux fibres), à assurer sa durabilité dans le temps et à respecter les impératifs économiques (coût des fibres notamment) et techniques (modifications de la filière de la fabrication).

Elasticités à l'écart type

La figure 3.21 présente les élasticités à l'écart type des variables. Tous les résultats sont bien entendu négatifs dans la mesure où l'augmentation de la variabilité va toujours dans le sens de la défaillance.

L'analyse de ces élasticités permet d'identifier les paramètres dont il faudra contrôler au mieux la valeur. Dans le cas présent, une attention particulière devra être portée à la contrainte de rupture $\sigma_f^R(\mathbf{n})$, à la proportion de fibres actives p_{actif} ainsi qu'à la fraction volumique de renforts f_f . Si le contrôle qualité sur ce dernier point est sans doute assez simple à mettre en oeuvre, l'amélioration des deux autres points nécessitera l'étude des causes de détérioration des fibres seules (qui conditionne leur résistance) et des fibres au sein du composite (optimisation de la filière de fabrication).

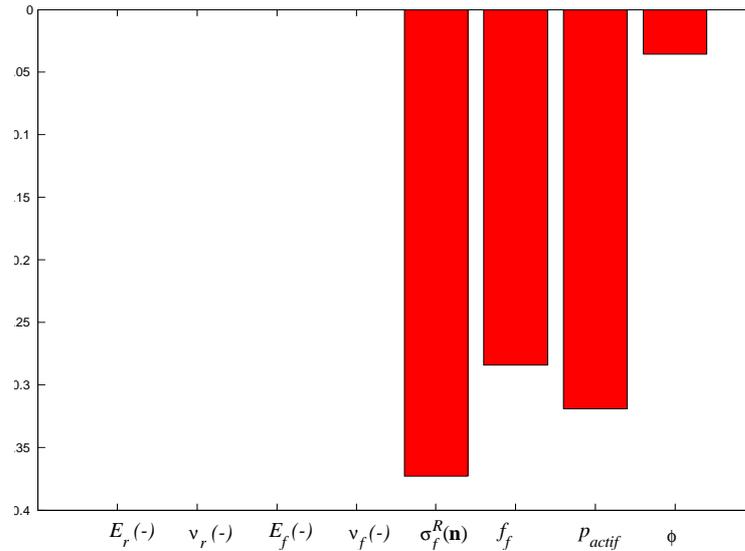


Figure 3.21: Elasticités à l'écart type pour le modèle corrigé ($P_f = 10^{-2}$; le signe (-) indique une valeur négative).

Influence de la corrélation

Pour conclure ce travail, nous nous sommes penchés sur l'influence de la corrélation entre les variables aléatoires du modèle (supposées jusqu'ici indépendantes). Cette éventuelle relation a un impact sur la probabilité de défaillance simulée mais aussi sur l'analyse de sensibilité.

Afin d'en mesurer l'importance, nous avons pris en compte une corrélation linéaire entre deux variables du modèle corrigé qui *a priori* peuvent effectivement être liées, en l'occurrence la fraction volumique de fibres f_f et la proportion de fibres actives p_{actif} . On peut raisonnablement penser que plus il y a d'incertitudes sur la première, plus il y en a sur la seconde.

De façon à couvrir l'ensemble des possibilités, nous avons considéré les deux cas extrêmes de corrélation, à savoir :

$$\rho(f_f, p_{actif}) = \rho = \pm 0.99 \quad (3.24)$$

Les autres variables du modèle étant laissées indépendantes, on teste cet impact sur la probabilité de défaillance P_f . Il apparaît sur la figure 3.22 que la corrélation a

indéniablement une importance car les résultats obtenus se distinguent de la référence supposée jusqu'ici (soit $\rho = 0$). Notons d'ailleurs que cette influence n'est pas symétrique avec le signe de ρ , la corrélation dans le même sens (avec $\rho = +0.99$) conduisant à une courbe de P_f d'amplitude plus vaste.

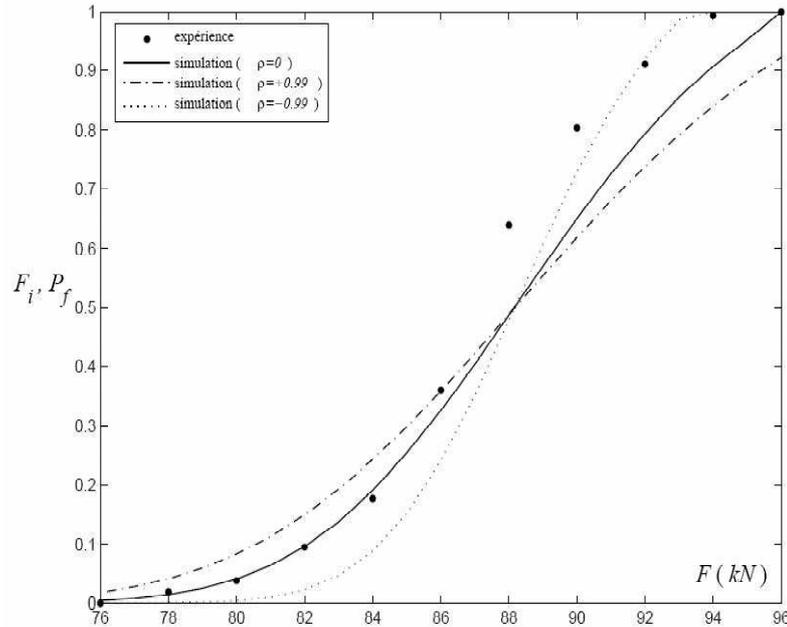


Figure 3.22: Influence de la corrélation des variables f_f et p_{actif} .

Par rapport aux résultats expérimentaux, il est difficile de définir la qualité de la représentation, dans les deux cas certaines zones étant plus favorables que d'autres. De plus, la prise en compte de la corrélation aurait due être faite dès la phase d'identification de p_{actif} , ce qui aurait sans doute modifié la valeur de cette variable aléatoire et donc la représentation présentée ici.

Pour conclure, cet exemple simple démontre la nécessité de mesurer la nature de la corrélation entre les variables dans la mesure où elle peut sensiblement modifier les résultats obtenus. Il sera par conséquent intéressant de creuser cette question à l'aide d'études expérimentales de façon à préciser leur sens (*i.e.* le signe de ρ) ainsi que leur intensité.

3.5 Conclusions

L'objectif de ce chapitre était de mettre en place une association entre la micromécanique et les méthodes d'analyse de fiabilité des structures. Cette démarche a été menée ici complètement sur l'étude de la fiabilité des joncs composites de la passerelle de Laroin à l'aide d'informations relatives à deux échelles bien distinctes :

- des données sur la microstructure du matériau concernant ses matériaux constituants et leur procédé d'assemblage, qui ont justifié physiquement la modélisation mécanique et le scénario de défaillance,
- des données sur la réponse macroscopique des composites fibrés (élasticité et rupture), qui ont permis d'identifier puis de valider de façon enrichie cette représentation.

Le modèle mécano-fiabiliste proposé, basé sur le schéma micromécanique de Mori-Tanaka et sur un critère de défaillance local sur les fibres, rend compte de façon satisfaisante de la fiabilité de ces joncs composites. La validation de cette approche repose sur une prise en compte rigoureuse des différentes incertitudes mises en jeu et sur une comparaison solide avec les données expérimentales de référence.

L'analyse de sensibilité a également apporté un éclairage sur l'importance de certains paramètres microstructuraux sur la fiabilité de la structure. Cela va à présent nous aider pour mettre en place le modèle stochastique d'analyse des haubans de la passerelle ainsi que pour leur optimisation.

Chapitre 4

Fiabilité des haubans de la passerelle de Laroin

4.1 Introduction

Du point de vue de la sécurité, les haubans composites constituent le point le plus délicat du dimensionnement de la passerelle de Laroin. Leur rupture, si elle intervient, s'effectuera de façon brutale et inattendue puisque le composite en carbone-époxy ne bénéficie pas comme l'acier d'une réserve de ductilité. Afin d'évaluer la fiabilité mécanique de l'ouvrage, il semble donc important de s'intéresser en premier lieu à celle de ces éléments porteurs.

A cette fin, on entend appliquer au cas des haubans composites la démarche proposée au chapitre précédent. Les objectifs sont d'une part de démontrer la possibilité de mener de façon aboutie ce même type d'analyse couplée fiabilité-micromécanique à l'échelle d'une structure et, d'autre part, d'en tirer profit à des fins d'optimisation.

4.2 Position du problème

4.2.1 Source d'incertitudes

Devant la complexité du problème, nous avons choisi de ne prendre en compte dans ce travail que des sources d'incertitudes liées aux haubans mêmes. De fait, les aléas concernant les autres éléments de la structure (géométrie, liaisons ou comportement mécanique) n'ont pas été pris en compte dans une optique de simplification.

Les principales incertitudes pouvant affecter la fiabilité mécanique des haubans portent précisément sur (voir figure 1.9) :

- le comportement de chaque hauban, soit de façon équivalente sur sa partie élémentaire constituée par le jonc composite,
- la nature de ses liaisons en tête de pylône et au niveau de la poutre longitudinale,
- les différentes actions qui lui sont appliquées, soit indirectement celles auxquelles est soumise la passerelle.

Examinons pour chacun de ces points les variables caractéristiques et leur éventuelle variabilité.

Comportement des haubans

Le rôle mécanique des câbles de structure est de transmettre des efforts de traction importants à travers des sections réduites. On rappelle que chaque hauban est constitué d'un certain nombre de joncs (2×7 pour les haubans H_1 et H_2 , 3×7 pour les haubans H_3 et H_4) *a priori* soumis chacun à une même traction longitudinale correspondant à une fraction de l'effort global appliqué sur le hauban.

En ce sens, l'étude du chapitre 3 sur le comportement du jonc isolé soumis à une traction longitudinale a permis d'éclaircir cette question. Nous nous appuyerons donc logiquement sur ses résultats et en particulier sur l'analyse de sensibilité qui a identifié les variables aléatoires les plus significatives pour sa fiabilité.

Liaisons aux autres éléments

En ce qui concerne les liaisons des haubans de travée, le dispositif d'ancrage combine des effets couplés de serrage et de frottement qui engendrent un mode de défaillance complexe du composite. Ce problème méritant en soi une étude à lui seul, nous avons considéré ici le cas simple de liaisons parfaites entre les éléments.

Actions appliquées

S'agissant d'une passerelle piétonne dans un site relativement peu fréquenté, Freyssinet s'est focalisé sur les seules sollicitations statiques pour son dimensionnement. En l'absence d'informations spécifiques sur sa construction, nous avons par ailleurs consacré cette étude de fiabilité à la phase d'exploitation de la passerelle.

Précisément, les différentes actions pouvant être appliquées à la structure sont classiquement distinguées par les règlements suivant leur fréquence d'occurrence (permanentes, variables, accidentelles).

- *Actions permanentes*

En ce qui concerne les actions permanentes, on compte tout d'abord le poids propre (PP) du tablier incluant la dalle en béton armé et la structure métallique porteuse. Connaissant les matériaux et la géométrie des éléments, le poids moyen du tablier est estimé à $PP = 10650 \text{ N/m}$.

Les câbles ne présentant pas de rigidité à la flexion ni à la compression, ils doivent toujours être tendus pour remplir leur fonction mécanique. Pour cela, la phase de réglage consiste à appliquer un effort F_0 pour amener le câble initialement en forme de chaînette au plus près de sa corde, ses extrémités coïncidant alors avec la position des ancrages indiquée sur le plan de la structure (figure 4.1). Une fois l'ancrage fixé, le poids propre du tablier est censé maintenir le câble en état de traction.

Un calcul d'équilibre de la structure soumise aux seules charges permanentes permet de valider la valeur de F_0 de sorte que l'état de traction soit vérifié et que le profil du tablier soit conforme à la géométrie voulue par le concepteur. On peut

accéder également aux efforts résultants théoriques à ce stade dans les câbles, le réglage sur le chantier consistant alors à ajuster les ancrages de sorte que ces valeurs d'efforts soient respectées (S.E.T.R.A. [54]).

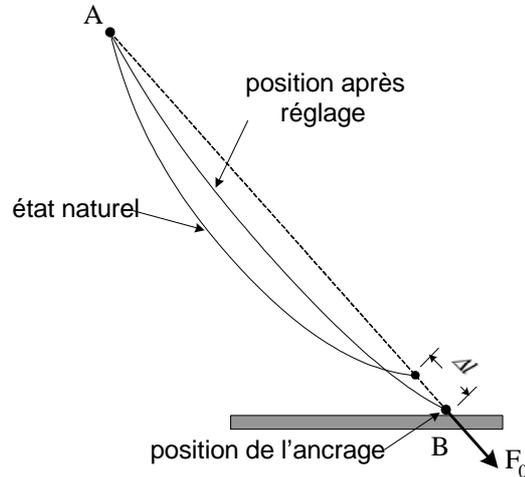


Figure 4.1: Principe de réglage d'un câble.

Même avec une modélisation fine de la structure et des prescriptions contraignantes sur chantier, il est difficile de faire concorder le modèle et la réalité. De nombreuses incertitudes existent effectivement sur cette question du réglage du câble que l'on entend prendre en compte ici au travers d'une variable aléatoire.

- *Actions variables*

Parmi celles-ci figurent d'abord les charges d'exploitation liées au passage des piétons (Q), dont l'intensité (en N/m) dépend réglementairement de la longueur b (en m) chargée :

$$Q(b) = l_t g \left(200 + \frac{15000}{b + 50} \right) \quad (4.1)$$

avec la largeur du tablier $l_t = 2.50 \text{ m}$ et g l'accélération de la pesanteur. Viennent ensuite les charges climatiques de vent (W) qui ont été estimées ici en fonction de la prise du tablier et des garde-corps, soit un effort linéaire $W = 2560 \text{ N/m}$ s'appliquant

latéralement sur un côté du tablier. Des actions thermiques (ΔT) ont également été considérées qui correspondent à deux ensembles de variations de température :

$$\begin{cases} \Delta T = +24^{\circ}C \\ \Delta T = -18^{\circ}C \end{cases} \quad (4.2)$$

Les valeurs caractéristiques de ces actions sont définies par les règlements sur la base de l'expérience et de l'observation. Ces efforts sont donc par définition affectés par de nombreuses incertitudes et doivent à ce titre être modélisés par des variables aléatoires.

- *Actions accidentelles*

Un seul scénario d'action accidentelle a été considéré pour le dimensionnement de la passerelle, en l'occurrence la rupture du hauban de travée le plus sollicité. En tant que tel, ce problème n'intègre donc pas de nouveau chargement, donc pas de nouvelles incertitudes, mais nécessitera cependant une nouvelle modélisation de la structure pour évaluer le risque qui lui est associé.

4.2.2 Mode de défaillance

La sollicitation dans les joncs des haubans étant de même nature que celle étudiée au chapitre 3, le mode de défaillance considéré dans cette partie est le même qu'au paragraphe 3.3.2, à savoir une rupture en traction des fibres du composite en carbone-époxy. La prise en compte à ce niveau de l'origine microscopique de la rupture du jonc, y compris à l'échelle de la passerelle, permettra une optimisation du matériau composite et de la conception de la structure.

Outre les haubans, les autres éléments à jouer un rôle mécanique notable au sein de la structure sont les parties métalliques du tablier (la dalle en béton étant simplement posée sur celles-ci), les pylônes et les câbles de retenue. Même si on se focalise ici sur la fiabilité des haubans, on prendra toujours soin de vérifier, notamment dans la phase d'optimisation, que les contraintes qui se développent dans ces éléments demeurent bien inférieures à la limite élastique de l'acier utilisé.

4.2.3 Couplage fiabilité et éléments finis

Problématique

Dans le chapitre précédent, l'analyse de la fiabilité du jonc composite s'appuyait sur une formulation explicite de la fonction de performance G . Dans le cas d'un calcul de structure tel que celui de la passerelle, ce n'est plus le cas. Seules des réalisations ponctuelles de cette fonction peuvent être obtenues par des moyens numériques, le plus souvent par éléments finis.

L'association des méthodes de fiabilité et des simulations par éléments finis constitue ce que l'on appelle un couplage mécano-fiabiliste. L'enjeu est alors d'assurer un dialogue entre les deux outils numériques employés pour chacun de ces aspects :

- code probabiliste : définition des réalisations du vecteur des variables aléatoires $\{X\}$, transformation isoprobabiliste, validation des pas de calcul et de la convergence pour l'obtention du point de conception P^* , calcul des indicateurs de fiabilité,
- code par éléments finis : évaluations de G et de ses gradients.

Pour réaliser ce couplage, deux approches sont possibles. La première consiste en un couplage direct dans lequel le code fiabiliste fait appel au code éléments finis pour chaque évaluation de la fonction de performance. Le calcul des dérivées premières et secondes de celle-ci, nécessaires aux méthodes d'optimisation, se fait quant à lui par différences finies (figure 4.2). Cette démarche, la plus simple à mettre en oeuvre, demeure bien adaptée tant que le nombre de variables aléatoires est relativement réduit et que l'évaluation de G reste aisée.

Pour des problèmes comportant de nombreuses incertitudes ou mettant en jeu des comportements mécaniques fortement non linéaires ou enfin lorsque l'estimation numérique des gradients peut conduire à des erreurs, il est recommandé de se tourner vers la seconde procédure de couplage basée sur une représentation approchée explicite de la fonction G (méthode de surface de réponse, Faravelli [17]; réseaux de neurones, Haykin [31]).

Dans notre cas, les sources d'incertitudes ont été restreintes aux haubans et la réponse mécanique des matériaux est élastique, l'approche directe peut donc suffire.

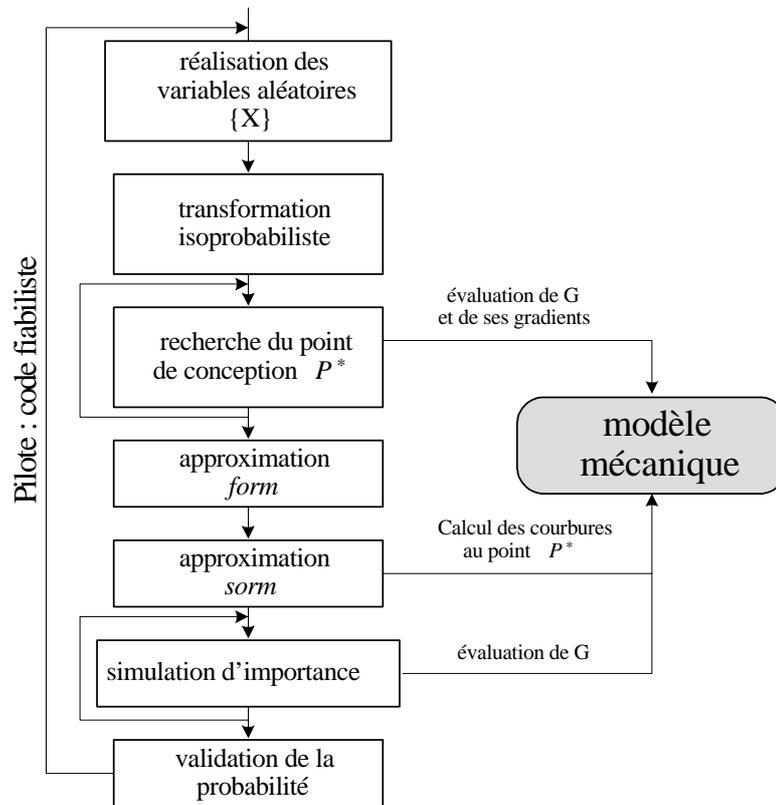


Figure 4.2: Organigramme d'un couplage direct (Lemaire [37]).

FERUM - ABAQUS

Un certain nombre de codes de calcul par éléments finis présentent des modules probabilistes (par exemple PERMAS, ANSYS, PHIMECA). Ces logiciels commerciaux ne permettent cependant pas un accès à leur fichiers sources, ce qui représente un handicap majeur dans la perspective d'implémentation du modèle micromécanique.

Afin de pallier cette difficulté, nous avons choisi de mettre en place un couplage direct entre le code fiabiliste FERUM déjà utilisé au chapitre 3 et le code par éléments finis ABAQUS. Ces deux logiciels répondent en effet à nos besoins en terme

de capacité de calcul et de possibilité de dialogue (ABAQUS bénéficie notamment d'un langage paramétré qui facilite cette procédure).

Les différentes étapes du couplage entre FERUM et ABAQUS sont résumées sur l'organigramme 4.3. Comme auparavant, la première étape consiste en la déclaration au sein de FERUM des variables aléatoires du modèle (lois de distribution et paramètres associés), de la fonction de défaillance G et de tous les paramètres indispensables à la résolution du calcul fiabiliste. A partir de ces informations, ce code probabiliste peut générer les réalisations du vecteur $\{X\}$ des variables aléatoires.

Dans la mesure où certaines variables du modèle portent sur la caractérisation microstructurale du jonc composite, on définit à l'aide du modèle micromécanique les propriétés élastiques effectives du composite pour chacun de ces tirages $\{X\}$, soit les composantes de son tenseur de souplesse $\mathbb{S}(\{X\})$ (passage du micro vers le macro : homogénéisation). Les autres variables aléatoires portant sur la section des joncs et sur le chargement appliqué à la passerelle, la description du modèle mécanique est donc à ce niveau complète et ses données fixées.

Faisant appel à ABAQUS, on déduit *via* le calcul par éléments finis les sollicitations (déformations \mathbf{E} et contraintes Σ macroscopiques) induites dans les différents éléments de la structure pour le tirage $\{X\}$. Connaissant ainsi la contrainte macroscopique $\Sigma(\{X\})$ affectant les joncs, le modèle micromécanique permet d'accéder aux contraintes locales moyennes correspondantes au sein des fibres (passage du macro vers le micro : localisation). FERUM dispose alors de l'ensemble des informations pour évaluer la quantité $G(\{X\})$.

Ces différentes étapes sont répétées jusqu'à la convergence de l'algorithme d'optimisation pour l'obtention de P^* , ce qui démontre bien que FERUM est le pilote de l'ensemble de cette procédure.

Remarque 4.1 *En couplage direct, l'évaluation du critère de défaillance pour chaque réalisation du vecteur aléatoire $\{X\}$ est faite à l'aide d'un calcul déterministe par éléments finis. Implicitement, on ne tient donc pas compte d'une éventuelle variabilité spatiale des propriétés de la structure. Si cette incertitude s'avérait importante pour la fiabilité de la structure, il faudrait alors se tourner vers les méthodes dites*

des éléments finis stochastiques qui permettent en outre d'estimer les propriétés stochastiques de la réponse de la structure (voir par exemple Lin [39], Sudret et Der Kiureghian [56]).

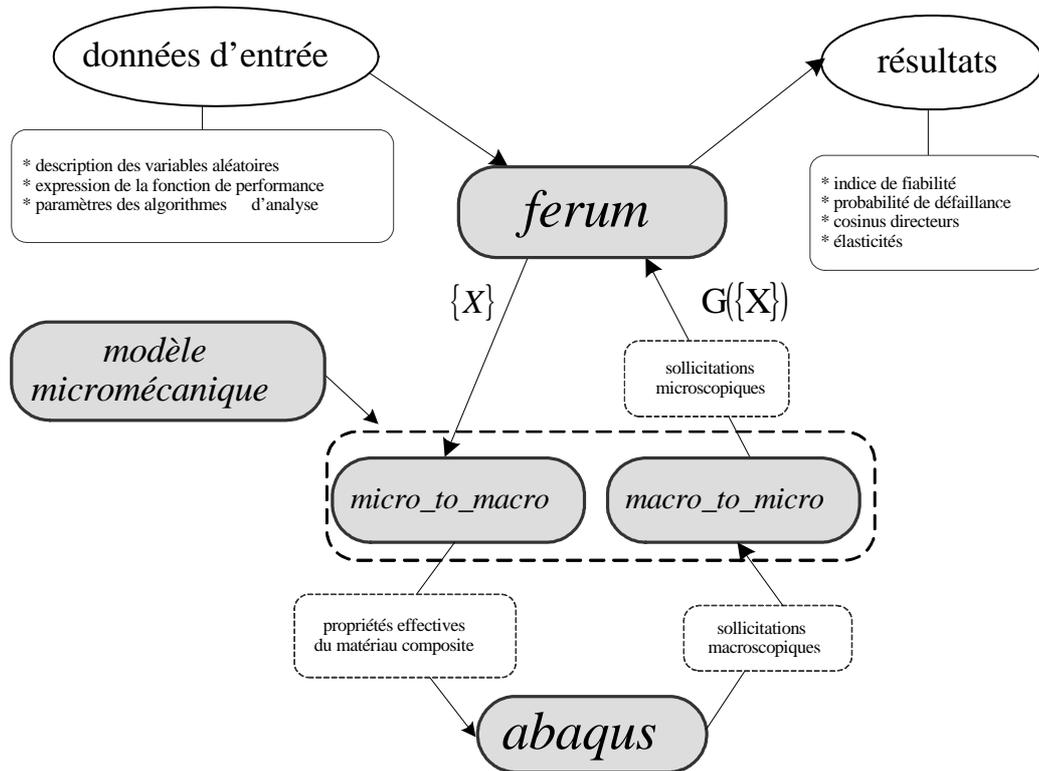


Figure 4.3: Couplage FERUM-ABAQUS.

4.3 Construction du modèle

On présente dans cette partie la représentation numérique tridimensionnelle construite avec le logiciel ABAQUS et la démarche qui a abouti au choix des variables aléatoires du modèle. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur le dimensionnement de la passerelle établi par Freyssinet, notamment pour la géométrie de la structure, les propriétés des aciers ainsi que les actions appliquées.

4.3.1 Modélisation par éléments finis

Géométrie, maillage et modèle de calcul

Les dimensions géométriques de la passerelle ont été définies à l'aide des plans de la structure (Freyssinet [20]). La dalle en béton ne jouant pas de rôle mécanique spécifique, seules les parties porteuses de la structure ont été modélisées.

En ce qui concerne les conditions d'appuis, les pieds des pylônes ainsi que les massifs d'ancrages des haubans de retenue sont supposés encastrés. Les appuis du tablier sur la culée sont quant à eux élastiques dans l'axe longitudinal (rigidité de 24060 kN/m) et dans la direction transversale (rigidité de 1680 kN/m) de la passerelle.

Le maillage des différentes parties porteuses a été réalisé comme suit (figure 4.4) :

- le tablier métallique par un treillis, comportant des éléments poutres (poutres longitudinales, pièces de pont) et des éléments barres (contreventements),
- les pieds des pylônes de section circulaire par des éléments poutres,
- les haubans de retenue et de travée par des éléments barres ; à ce titre ils ne sont donc soumis qu'à des contraintes macroscopiques Σ longitudinales suivant leur axe.

Le modèle comporte en tout 464 éléments et 230 noeuds et l'on a considéré pour l'ensemble des éléments une interpolation de type linéaire. La mise en oeuvre de plusieurs calculs déterministes a permis par la suite de valider ce maillage en démontrant sa convergence vis-à-vis des déformations obtenues.

L'option de calcul utilisée est celle de non linéarité géométrique qui permet d'effectuer un calcul en grands déplacements. La méthode de convergence numérique employée pour la résolution du problème global est celle de quasi-Newton.

Caractéristiques thermo-mécaniques des éléments

Dans le modèle, les matériaux de la structure présentent un comportement mécanique élastique linéaire :

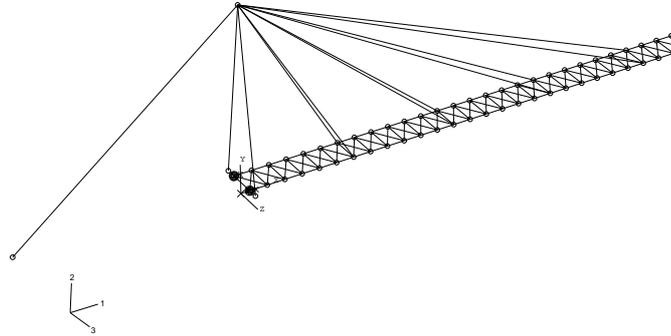


Figure 4.4: Modèle par éléments finis (ABAQUS).

- les poutres longitudinales, les pièces de pont, les cornières de contreventement et les pylônes sont tous en acier laminé (module d'Young: 210000 MPa , coefficient de Poisson: 0.3 , limite élastique: 345 MPa , contrainte de rupture: 500 MPa),
- les câbles de retenue sont également en acier (module d'Young: 190000 MPa , coefficient de Poisson: 0.3 , contrainte de rupture garantie: 1770 MPa),
- le comportement des joncs des haubans de travée a quant à lui été caractérisé au chapitre 3.

Pour l'analyse enfin des actions thermiques, les coefficients de dilatation thermique de l'acier et du composite sont respectivement pris égaux à $11 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ et $-2 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

4.3.2 Etude des actions

Ayant défini la structure, il reste à préciser les actions qui lui sont appliquées. Pour cela, quelques analyses mécaniques préalables ont été mises en oeuvre dans un contexte déterministe où toutes les variables du modèle ont été prises égales à leur valeur moyenne.

Efforts de réglage

En premier lieu, il s'agit de préciser la valeur des efforts de réglage dans les haubans. Pour un câble oblique inscrit dans un rectangle de largeur l et de hauteur h , de poids linéique q et soumis à un effort de traction F_0 , les équations d'équilibre de l'arc parabolique permettent d'établir la relation linéaire suivante (Lateur [36]) :

$$\frac{l}{\delta_{\max}} = C_r\left(\frac{h}{l}\right) \times \frac{F_0}{ql} \quad (4.3)$$

où δ_{\max} désigne la flèche maximale du câble (à mi-portée) et le coefficient C_r est tabulé suivant la valeur de $\frac{h}{l}$.

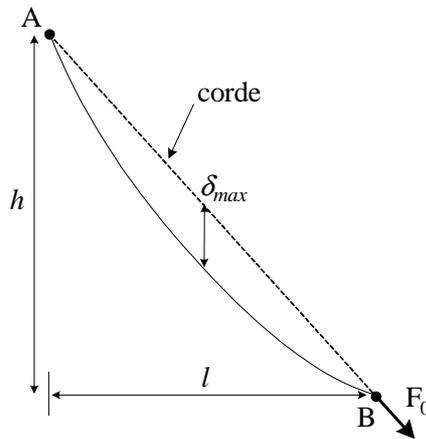


Figure 4.5: Effort de réglage et déformée d'un câble oblique.

En l'absence d'informations sur le montage (notamment sur la longueur développée des câbles), nous avons considéré en première approche que la flèche maximale des quatre types de haubans (et donc de leurs joncs) ne dépassait pas $0.5m$. A l'aide de l'expression (4.3), du plan de la passerelle (figure 1.13) et du poids du jonc $q = 1.55 \text{ N/m}$, nous en avons déduit l'effort élémentaire F_0 dans les joncs constituant chaque hauban qui permette de respecter ce déplacement.

Comme indiqué précédemment, un calcul d'équilibre de la passerelle soumise à ces charges F_0 ainsi qu'aux charges permanentes PP du tablier a ensuite été réalisé avec ABAQUS. Ceci nous a permis de valider d'une part l'ordre de grandeur des efforts de réglage considérés et, d'autre part, d'affiner leur intensité de façon

à respecter la géométrie de l'ouvrage. Après équilibre, nous retrouvons d'ailleurs des efforts résultants dans les haubans conformes à ceux de la note de calcul de Freyssinet.

Pour la suite de l'étude, nous noterons donc $F_0^{th}(H_i)$ l'effort de réglage théorique dans les joncs du hauban H_i défini grâce à cette étude préalable (tableau 4.1).

type d'hauban	hauteur h (m)	largeur l (m)	$F_0^{th}(H_i)$ (kN)
H ₁	20.60	12	4.07
H ₂	20.60	24	4.64
H ₃	20.60	36	4.05
H ₄	20.60	48	4.38

Tableau 4.1: Réglage théorique des joncs de chaque type d'hauban.

Chargement

Afin de définir les sollicitations les plus défavorables pour la fiabilité des haubans, nous avons examiné les cas de charges retenus pour l'analyse à rupture de la structure (Etats Limites Ultimes des règlements).

Vérification de la structure de base

Considérons d'abord la géométrie initiale de la passerelle, comportant de chaque côté deux nappes de quatre haubans. Pour le dimensionnement de celle-ci, 12 cas de charge ont été considérés par Freyssinet (tableau 4.2) :

- cas n°1: poids propre (PP) et vent (W),
- cas n°2 à n°10: poids propre (PP) et exploitation ($Q [a ; b]$), avec des zones d'applications de la charge Q différentes: a désigne l'abscisse de début d'application de Q , b précise la longueur chargée par rapport à la portée totale $L_t = 110$ m de la passerelle (figure 4.6); pour chacun de ces cas, l'intensité de la charge d'exploitation sera par conséquent $Q(b)$ d'après la définition (4.1);
- cas n°11 et n°12: poids propre (PP) et variation thermique (ΔT), avec des écarts de température différents.

cas de charge	charges considérées
1	PP, W
2	$PP, Q [0 ; L_t]$
3	$PP, Q [0.1 L_t ; 0.8 L_t]$
4	$PP, Q [0.2 L_t ; 0.6 L_t]$
5	$PP, Q [0 ; 0.33 L_t]$
6	$PP, Q [0 ; 0.45 L_t]$
7	$PP, Q [11.95 m ; 0.1 L_t]$
8	$PP, Q [23.95 m ; 0.1 L_t]$
9	$PP, Q [35.95 m ; 0.1 L_t]$
10	$PP, Q [47.95 m ; 0.1 L_t]$
11	$PP, \Delta T (+24^\circ C)$
12	$PP, \Delta T (-18^\circ C)$

Tableau 4.2: Cas de charge pour l'analyse à rupture de la passerelle.

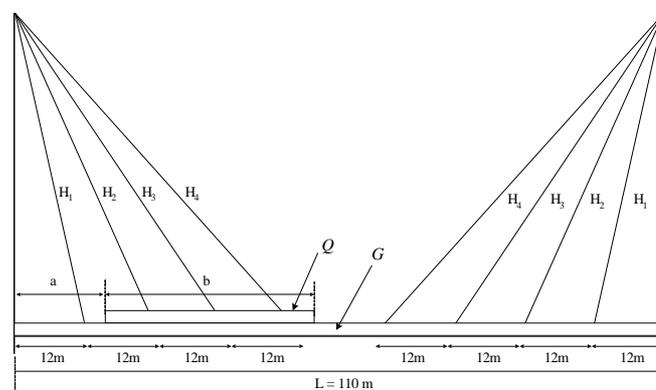


Figure 4.6: Position de la charge d'exploitation.

Dans le cadre d'une étude de fiabilité, les simulations sont réalisées à partir des valeurs caractéristiques des actions, *i.e.* sans tenir compte des coefficients de sécurité des règlements semi-probabilistes actuels (tels que $1.35PP + 1.5Q$). Les calculs déterministes ont donc été menés dans ce cadre.

L'annexe E présente les valeurs d'efforts engendrés dans les câbles pour les 12 cas de charge. Les haubans les plus chargés sont ainsi H_2 (par rapport à H_1) et H_4 (par rapport à H_3) conformément à leur position. Dans les deux cas, il apparaît que les configurations les plus défavorables correspondent à la seule prise en compte du poids propre et des charges d'exploitation. En l'occurrence, les efforts maximaux sont obtenus dans les cas n°2-3-5-8 pour H_2 et les cas n°2-3-4-10 pour H_4 .

Scénario accidentel

Parmi les cas de charge précédents, le cas n°4 induit les efforts les plus importants dans les joncs, précisément dans ceux du hauban H_4 . Afin de tester l'impact de l'action accidentelle, la structure a donc été modifiée et un hauban H_4 a été supprimé de la géométrie de base. Le cas de charge à considérer dans cette situation fait par ailleurs intervenir le poids propre (PP), la charge d'exploitation sur toute la travée d'intensité $\frac{1}{2}Q(L_t)$ et des charges ponctuelles F^{acc} appliquées aux extrémités du hauban supprimé :

$$F^{acc} = \alpha \times T \tag{4.4}$$

où $\alpha = 0.5$ est le coefficient dynamique engendré par la rupture du hauban et T est la tension opposée à l'effort dans le hauban lorsque la passerelle est soumise à son poids propre et à la charge d'exploitation sur toute la travée d'intensité $\frac{1}{2}Q(L_t)$ (figure 4.7).

Les efforts engendrés dans les haubans H_3 et H_4 sont supérieurs aux schémas de chargement précédents (*cf.* annexe E), ce scénario se révèle donc critique pour les câbles. D'autre part, il engendre davantage de flexion au niveau de la poutre longitudinale dont la portée se trouve effectivement quasiment doublée.

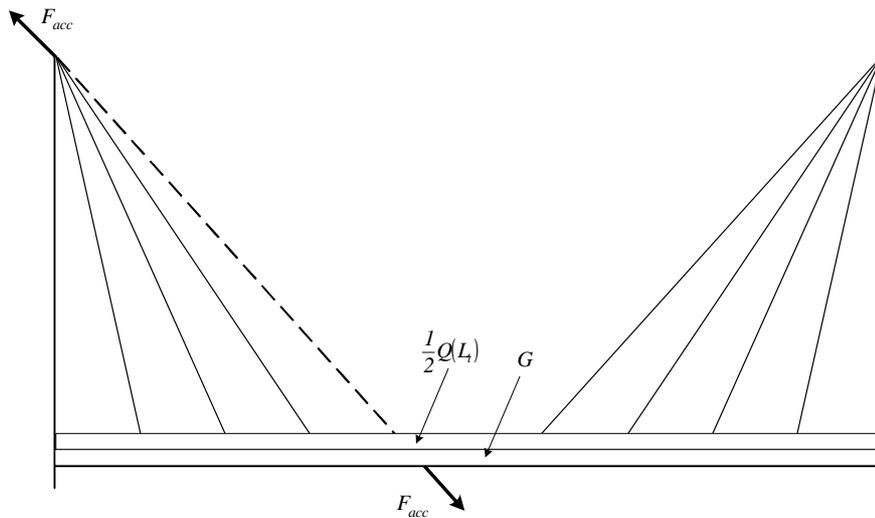


Figure 4.7: Cas de charge du scénario accidentel.

4.3.3 Variables aléatoires

Au vu de la problématique posée et des résultats des analyses déterministes, il ressort par conséquent que les variables aléatoires à retenir dans le modèle sont :

- les paramètres jouant un rôle significatif dans la fiabilité du jonc (voir chapitre 3); pour sa loi de comportement, il s'agit en l'occurrence de la contrainte de rupture des fibres $\sigma_f^R(\mathbf{n})$, de la fraction volumique de fibres f_f et de la proportion de fibres actives p_{actif} ; le diamètre ϕ des joncs est également apparu comme important mais nous travaillerons directement dans ce chapitre sur la section totale A des haubans dans la mesure où le nombre de joncs diffère suivant les câbles;
- les actions appliqués: d'une part, les efforts de réglage $F_0^{th}(H_i)$ dans les joncs de chaque type d'hauban et, d'autre part, les chargements permanents PP et variables d'exploitation Q suivants les cas de charge identifiés comme les plus défavorables (voir § 4.3.2).

Les lois de distribution des variables propres au jonc sont celles utilisées pour l'étude du matériau composite (voir tableau 3.12). A noter que les paramètres de

distribution de la section A (moyenne \bar{A} , écart type S_A) ont été déduits d'un traitement statistique sur ceux employés pour le diamètre ϕ , soit :

- pour les haubans à 2×7 joncs, $\bar{A} = 395.8 \text{ mm}^2$, $S_A = 4.8 \text{ mm}^2$,
- pour les haubans à 3×7 joncs, $\bar{A} = 593.8 \text{ mm}^2$, $S_A = 7.1 \text{ mm}^2$.

Pour les variables liées aux actions, nous considérerons comme précédemment des lois de probabilité normale. Leur valeur moyenne est respectivement issue de l'étude du réglage pour $F_0^{th}(H_i)$, déduite de la géométrie pour PP et spécifiée réglementairement pour Q . Etant donnée la nature de ces variables, on admettra une dispersion potentiellement plus importante que celles employées jusqu'alors avec un écart type de l'ordre de 10% de la valeur moyenne.

L'ensemble des variables aléatoires utilisées dans ce chapitre sont décrites au tableau 4.3. Les paramètres \bar{A} et S_A de la section du câble et la valeur moyenne \bar{Q} de la charge d'exploitation dépendront du hauban et du cas de charge étudiés. On notera que le nombre de 10 variables aléatoires reste compatible avec le couplage direct, les temps de calcul ne devant pas *a priori* être trop conséquents.

variable		moyenne	écart type
cont. rupture fibres	$\sigma_f^R(\mathbf{n})$ (MPa)	4870	162
fraction vol. fibres	f_f (%)	67	2
proportion de fibres actives	p_{actif} (%)	95	3
section du hauban	A (mm ²)	\bar{A}	S_A
réglage joncs du hauban H ₁	$F_0^{th}(H_1)$ (kN)	4.07	0.40
réglage joncs du hauban H ₂	$F_0^{th}(H_2)$ (kN)	4.64	0.46
réglage joncs du hauban H ₃	$F_0^{th}(H_3)$ (kN)	4.05	0.40
réglage joncs du hauban H ₄	$F_0^{th}(H_4)$ (kN)	4.38	0.43
poids propre	PP (N/m)	10650	1065
charge d'exploitation	Q (N/m)	\bar{Q}	10% \bar{Q}

Tableau 4.3: Description des variables aléatoires pour l'étude des haubans composites (lois de distribution normales).

4.4 Analyse de l'existant

4.4.1 Cas de base

Critère de défaillance

A la différence de l'étude du chapitre 3, se pose ici la question des effets d'échelle. La longueur des câbles est en effet comprise entre 20 m et 53 m, pour une longueur $L_0 = 200$ mm des fibres testées par le fabricant (*cf.* § 2.2.1). Il est donc possible que la résistance des joncs des haubans soit notablement affectée par cet effet.

Pour en définir la portée, il conviendrait de mesurer la résistance à rupture d'éprouvettes de fibres de différentes longueurs $L > L_0$, de vérifier la tendance observée sur la réponse de joncs composites de même longueur et d'identifier ensuite un critère de défaillance qui tienne compte de cet aspect.

Pour des raisons pratiques liées au dispositif expérimental à utiliser, les effets d'échelle de longueur sont le plus souvent étudiés sur des éprouvettes de l'ordre du centimètre (Blassiau [6], Foret [18]) et mettent en évidence une diminution globale de la résistance des fibres et des composites avec l'augmentation de L . Compte tenu des échelles mises en jeu, il semble difficile d'extrapoler à notre cas les évolutions constatées, une certaine stabilisation pouvant d'ailleurs s'opérer à partir d'une longueur donnée. Plutôt que d'introduire une diminution forfaitaire difficilement justifiable, nous avons choisi ici de conserver les valeurs de contrainte de rupture utilisées jusqu'à présent, *i.e.* celles identifiées par le fabricant.

Conformément à notre volonté de rendre compte de l'origine microscopique de la rupture du composite, y compris à l'échelle de la passerelle, le critère de défaillance utilisé pour évaluer la fiabilité des haubans sera donc celui retenu pour les joncs, soit pour rappel (*cf.* § 3.3.2) :

$$G = \sigma_f^R(\mathbf{n}) - \langle \sigma_I \rangle_{(f)} \quad (4.5)$$

Résultats

Sur la base de l'étude déterministe préalable du § 4.3.2, l'analyse fiabiliste a été menée pour les différentes catégories de hauban et, pour chaque, sur les cas de charge les plus défavorables (tableau 4.4). Précisément, étant données les faibles valeurs de probabilité de défaillance P_f , il nous est apparu plus commode de raisonner en terme d'indice de fiabilité β .

	\bar{Q} (N/m)	cas de charge	β	nb appels à G
hauban H ₂	7204.2	2	20.38	432
	7570.8	3	20.34	276
	9167.7	5	20.00	576
	10935.7	8	20.07	300
hauban H ₃	3602.1	<i>accidentel</i>	18.05	228
hauban H ₄	7204.2	2	20.20	336
	7570.8	3	20.17	384
	8076.3	4	19.76	288
	10935.7	10	19.81	252
	3602.1	<i>accidentel</i>	18.20	288

Tableau 4.4: Données stochastiques et indices de fiabilité pour chaque hauban dans les cas de charge les plus défavorables.

Dans tous les cas, les valeurs de β sont très élevées, ce qui démontre un niveau de fiabilité très important pour les haubans. A titre de comparaison, le tableau 4.5 indique les gammes de valeurs de probabilité de défaillance et de β correspondant acceptés dans divers secteurs industriels.

Si l'on examine ensuite l'importance relative des différents cas de charge, on constate que l'ordre d'importance des efforts générés dans les câbles (*cf.* annexe E) est conservé vis-à-vis des indicateurs de fiabilité. Par exemple pour le câble H₂, le cas de charge n°5 conduit aux efforts les plus importants et au niveau de fiabilité le plus faible, *i.e.* à la valeur minimale de β .

secteur industriel	P_f	β
structures marines	$10^{-2} - 10^{-4}$	2.33 – 3.72
génie civil	$10^{-3} - 10^{-8}$	3.09 – 5.61
aérospatial	$10^{-4} - 10^{-10}$	3.72 – 6.40
composants nucléaires	$10^{-6} - 10^{-12}$	4.75 – 7.20

Tableau 4.5: Niveaux de probabilité de défaillance acceptés par secteurs industriels.

En ce qui concerne les câbles H_3 et H_4 , le scénario accidentel est donc logiquement le plus défavorable pour la fiabilité. Toutefois, la probabilité d'occurrence associée à cet évènement est par définition faible et les valeurs de β dans ce cas ne sont éloignées que de 2 ou 3 unités de celles obtenues lors de la vérification de la géométrie de base de la passerelle (cas n°2-3-4-10). S'appuyant sur la définition classique du risque (voir par exemple Lemaire [37]) :

$$\text{risque} = \text{probabilité d'occurrence} \times \text{gravité} \quad (4.6)$$

où la notion de gravité peut être implicitement liée ici à la probabilité de défaillance, il apparaît que le risque associé au cas accidentel sera finalement bien inférieur à celui des autres cas. Une estimation de la fiabilité de la structure au travers de ce scénario rare serait par conséquent plus sévère qu'elle ne l'est en réalité.

Pour la suite, nous avons donc choisi d'appuyer nos études sur les cas de charge de fréquence d'apparition plus importante et évidemment parmi eux sur les plus défavorables, à savoir les cas n°5 pour H_2 ($\beta = 20.00$) et n°4 pour H_4 ($\beta = 19.76$).

Remarque 4.2 *Les probabilités de défaillance estimées sont ici très faibles. Seule la méthode FORM mise en oeuvre avec les mêmes options d'analyse probabiliste qu'au chapitre 3 (tolérance $t = 0.001$) a permis d'obtenir un résultat, le calcul des courbures nécessaire à SORM échouant en effet. On note de plus que le nombre d'appels à la fonction de défaillance G (et donc de simulation par éléments finis) reste raisonnable vis-à-vis du minimum de 10^{42} tirages qu'exigerait le calcul par Monte Carlo directe.*

4.4.2 Introduction de coefficients de sécurité

Le contexte de cette étude étant l'application de la démarche fiabiliste, la prise en compte des différentes incertitudes est faite au travers de la notion de variable aléatoire. C'est pourquoi les analyses précédentes ont été effectuées à partir des valeurs caractéristiques des données (matériaux et chargements).

La démarche réglementaire adoptée classiquement en calcul de structures repose en revanche sur l'utilisation de coefficients de sécurité (§ 1.2.1). Afin justement de quantifier l'effet de leur introduction sur le niveau de fiabilité, on se propose d'illustrer la modification que cela engendre pour le hauban H_4 dans ses configurations les plus chargées (*i.e.* sous charges de poids propre PP et d'exploitation Q).

On introduit deux types de coefficients de sécurité partiels dont les valeurs sont guidées par le règlement en vigueur (S.E.T.R.A. [54]) :

- les premiers majorent les chargements ; on s'appuie pour cela sur les combinaisons d'actions aux E.L.U. en présence d'une charge permanente et d'une charge variable, soit

$$1.35 PP + 1.5 Q \tag{4.7}$$

- le second minore la résistance du matériau ; le critère de défaillance adopté dans cette étude portant sur la contrainte moyenne locale dans les fibres, on réduit par conséquent la résistance disponible en adoptant la fonction de performance suivante :

$$G_{0.7} = 0.7 \sigma_f^R(\mathbf{n}) - \langle \sigma_I \rangle_{(f)} \tag{4.8}$$

Comme précédemment, des calculs déterministes ont été menés de façon à identifier le cas de charge le plus défavorable pour le hauban H_4 lorsqu'on majore de la sorte les chargements (*cf.* annexe E). Le cas de charge n°4 induisant toujours l'effort le plus important, il a été retenu pour effectuer l'analyse fiabiliste. Les indices de fiabilité β pour différentes combinaisons des coefficients de sécurité (sur chargement seul, sur résistance seule, sur les deux) sont indiqués au tableau 4.6.

chargement	G	$G_{0.7}$
$PP + Q$	19.76	15.97
$1.35 PP + 1.5 Q$	15.88	11.90

Tableau 4.6: Indice de fiabilité β du hauban H_4 suivant les coefficients de sécurité.

De façon évidente, l'introduction de ces coefficients tend à faire baisser le niveau de fiabilité estimé. Les conséquences de la majoration du chargement seule et de la minoration de la résistance des fibres seule sont comparables, soit une chute d'environ 4 unités en terme de β . Si l'on tient compte de ces deux aspects simultanément, ce qui est la démarche suivie par les dimensionnements actuels, les effets se cumulent pour amener finalement à une réduction de 8 unités de β . Sur ce cas, on mesure ainsi la marge de sécurité considérable induite par la prise en compte des coefficients de sécurité.

Les valeurs des coefficients partiels utilisées ici sont celles dictées actuellement par les règlements, sur la base essentiellement de l'expérience. Une des perspectives des méthodes de fiabilité est justement de donner un sens à ces coefficients, *i.e.* de les calibrer sur un problème de référence de façon à respecter une marge donnée de sécurité, puis d'introduire les valeurs obtenues dans les dimensionnements réglementaires (Lemaire [37]). Dans le cas présent, il est certain que les coefficients employés ont le mérite de rassurer vis-à-vis d'une conception innovante mais amènent inévitablement à un surdimensionnement des haubans de travée.

4.5 Optimisation des haubans

Au vu des niveaux de fiabilité des haubans par rapport aux recommandations classiques des ouvrages de génie civil, il nous a semblé pertinent de proposer une optimisation de ces éléments porteurs, tant sur le plan du matériau composite que sur la conception des câbles. Afin de guider cette démarche, examinons en premier lieu les résultats de l'analyse de sensibilité.

4.5.1 Analyse de sensibilité

Cosinus directeurs

Sur la figure 4.8 ont été représentés les poids respectifs pour chacun des haubans des différentes variables aléatoires considérées dans l'état existant. Globalement, les tendances sont les mêmes dans les deux cas, les quelques différences observées étant liées au fait que le cas de charge diffère selon le hauban (cas de charge n°5 pour H₂, cas de charge n°4 pour H₄).

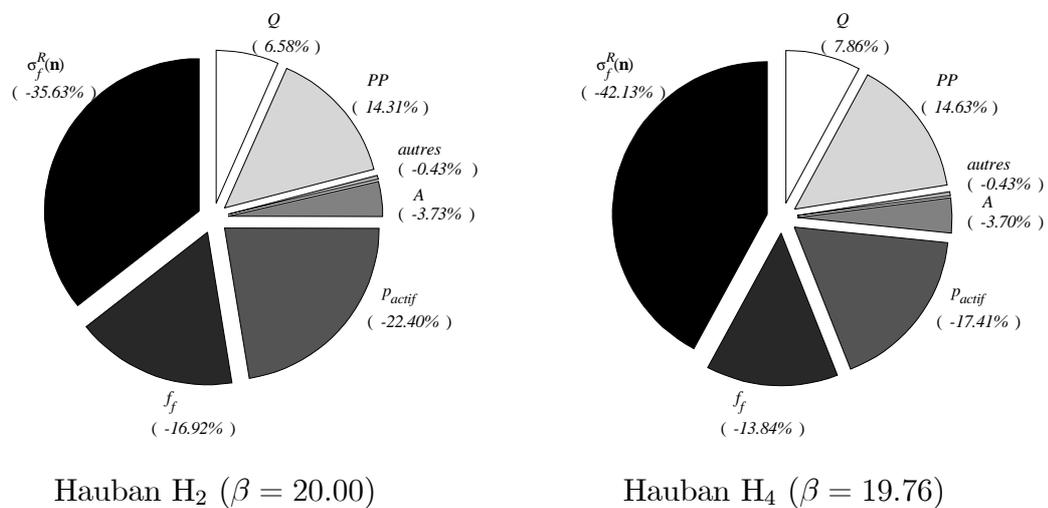


Figure 4.8: Diagrammes des cosinus directeurs pour les haubans H₂ et H₄.

La contrainte limite des fibres $\sigma_f^R(\mathbf{n})$, la fraction volumique de fibres f_f , le pourcentage de fibres actives p_{actif} pour les variables de type résistance, et le poids propre PP , la charge d'exploitation Q pour les variables de type sollicitation sont stochastiquement les plus importants. Le poids total de ces variables s'élève en effet à plus de 95 %.

En ce qui concerne en particulier les caractéristiques microstructurales, l'ordre d'importance établi au chapitre 3 est respecté (figure 3.19), avec une prépondérance de $\sigma_f^R(\mathbf{n})$. Sur le plan des actions, les efforts de réglage $F_0^{th}(H_i)$ ont un poids négligeable, on ignorera par conséquent les incertitudes qui leur sont associées pour la phase d'optimisation. La variabilité du poids propre PP uniformément réparti sur la passerelle a enfin un effet plus notable que celle de la charge d'exploitation Q

seulement localisée sur une partie de la travée (33 % pour H_2 , 60 % pour H_4 , cf. tableau 4.2).

Elasticités à la moyenne et à l'écart type

Dans l'optique d'une optimisation de la structure, ces informations sont particulièrement intéressantes. Les figures 4.9 et 4.10 présentent les élasticités à la moyenne et à l'écart type obtenues pour chacun des haubans. Les niveaux de fiabilité étant différents entre les chapitres 3 et 4, on ne peut comparer directement l'ordre de grandeur des résultats de l'étude présente et de celle consacrée au matériau (figures 3.20 et 3.21). En revanche, il reste pertinent d'analyser entre elles l'importance relative de chaque variable.

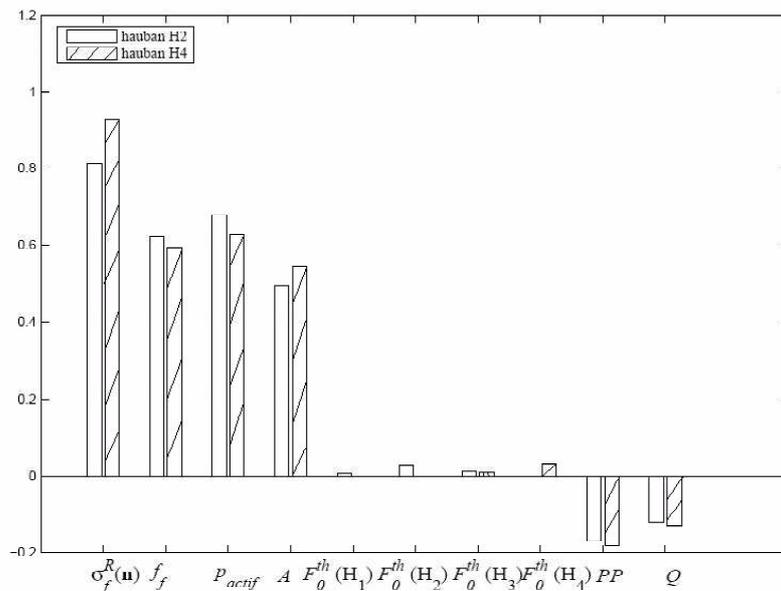


Figure 4.9: Elasticités à la moyenne pour les haubans H_2 et H_4 ($\beta(H_2) = 20.00$, $\beta(H_4) = 19.76$).

Précisément, les tendances observées pour les valeurs moyennes des paramètres matériaux sont globalement les mêmes qu'au chapitre 3. Pour les deux types d'haubans, les paramètres liés à la fabrication des joncs ont par ailleurs une influence sur la fiabilité bien plus conséquente que les chargements qui leur sont appliqués

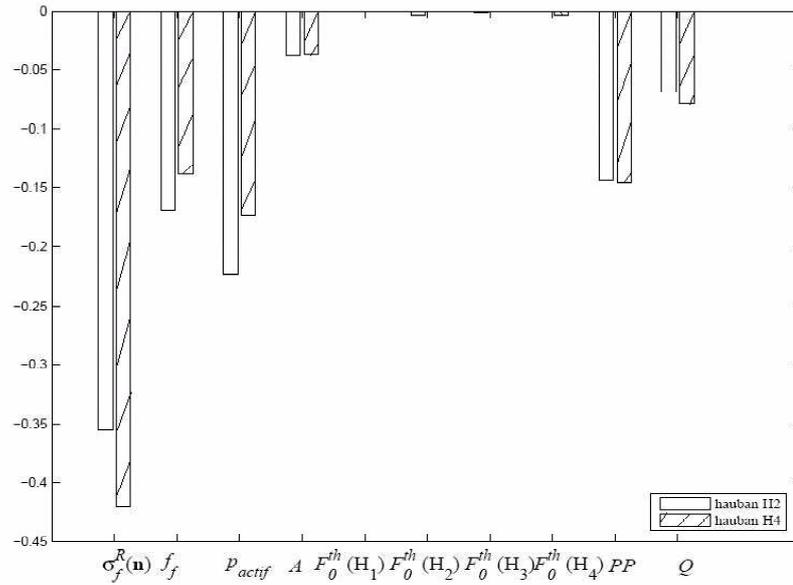


Figure 4.10: Elasticités à l'écart type pour les haubans H_2 et H_4 ($\beta(H_2) = 20.00$, $\beta(H_4) = 19.76$).

au sein de la passerelle. Pour le développement de structures de ce type, ce résultat démontre l'intérêt d'une étude préalable de fiabilité concentrée sur le matériau composite comme cela a été fait au chapitre 3.

Pour ce qui est de l'écart type, ces résultats démontrent de nouveau qu'un contrôle qualité portant sur les joncs s'impose absolument dans la mesure où les dispersions des paramètres de fabrication des haubans (fibres et joncs) ont un impact du même ordre de grandeur voire plus conséquent pour $\sigma_f^R(\mathbf{n})$ que celles relatives aux chargements.

4.5.2 Modifications de la conception

S'appuyant sur les résultats précités, on propose de conclure ce travail en illustrant l'impact sur la fiabilité de quelques modifications de la conception des haubans. Les valeurs d'indice β de l'existant indiquent en effet clairement un surdimensionnement de ceux-ci et il est intéressant de tester différentes solutions de façon à utiliser au mieux les performances des composites. Précisons que la géométrie générale de la passerelle (par exemple la position des haubans) n'a pas été remise en cause ici,

et que l'on s'est systématiquement assuré que les autres éléments porteurs de la passerelle demeuraient dans leur domaine élastique.

Grâce au couplage entre la fiabilité et la micromécanique, il est possible tout d'abord d'examiner l'effet d'une modification des paramètres microstructuraux. A titre d'illustration, nous nous sommes intéressés à deux paramètres directement accessibles à la conception que l'analyse de sensibilité a révélé comme significatifs :

- d'une part la valeur moyenne de la résistance à rupture des fibres $\sigma_f^R(\mathbf{n})$; le tableau 4.7 montre les variations de l'indice β si l'on remplace les fibres T700SC par les fibres T300 également produites par TORAY ;
- d'autre part la fraction volumique de fibres f_f ; nous nous sommes limités ici à une valeur de 60 % (tableau 4.8) de façon à maintenir le caractère élastique linéaire fragile du comportement mécanique du composite.

type de fibres	$\sigma_f^R(\mathbf{n})$ (MPa)	β	
T700SC (base)	4870	H ₂	20.00
		H ₄	19.76
T300	3530	H ₂	14.75
		H ₄	14.39

Tableau 4.7: Indice de fiabilité des haubans H₂ et H₄ suivant le type de fibres.

f_f (%)	β	
67 (base)	H ₂	20.00
	H ₄	19.76
64	H ₂	19.45
	H ₄	19.21
60	H ₂	18.58
	H ₄	18.42

Tableau 4.8: Indice de fiabilité des haubans H₂ et H₄ suivant la fraction volumique de fibres.

L'utilisation des fibres T300 permet une meilleure optimisation de la fiabilité que la réduction de la fraction volumique de renforts (diminutions respectives de β de l'ordre de 5 et 1.4 unités). L'impact de la modification de la moyenne de $\sigma_f^R(\mathbf{n})$ est plus visible sur le hauban H_4 ($\Delta\beta = -5.37$) que sur H_2 ($\Delta\beta = -5.25$), la diminution de la moyenne de f_f de 67 à 60 % est quant à elle plus conséquente pour H_2 ($\Delta\beta = -1.42$) que pour H_4 ($\Delta\beta = -1.34$). Ces résultats sont bien en accord avec les tendances observées sur les élasticités à la moyenne de ces variables aléatoires (figure 4.9).

Par ailleurs, la démarche proposée dans ce travail n'empêche pas l'étude plus classique de modifications à l'échelle macroscopique. Nous avons comparé par exemple différents schémas de conception portant sur la section des haubans. Il s'agit en fait de modifier le nombre de faisceaux utilisés dans les deux ensembles de haubans H_1 et H_2 d'une part, et H_3 et H_4 d'autre part. Le détail de ces modifications et les valeurs de l'indice β obtenues sont récapitulés dans le tableau 4.9.

haubans	nb de jonc		β
H_1 et H_2	2×7 (base)	H2	20.00
H_3 et H_4	3×7 (base)	H4	19.76
H_1 et H_2	1×7	H2	14.36
H_3 et H_4	3×7	H4	19.97
H_1 et H_2	2×7	H2	18.73
H_3 et H_4	2×7	H4	15.26
H_1 et H_2	1×7	H2	13.11
H_3 et H_4	2×7	H4	15.39

Tableau 4.9: Indice de fiabilité des haubans H_2 et H_4 suivant leur nombre de joncs.

La réduction de la section d'un hauban engendre logiquement une diminution de sa fiabilité. Avec les valeurs obtenues, on mesure cependant la marge du surdimensionnement adopté: le fait d'enlever un faisceau de joncs à tous les câbles ne met pas en péril la fiabilité de la structure haubanée.

Il faut enfin souligner certains points concernant cette phase d'optimisation :

- des hypothèses simplificatrices ont été retenues dans le modèle (comportement élastique, pas d'effet d'échelle, liaisons parfaites,..) et un certain nombre d'incertitudes ont été écartées; si l'on se base sur cette étude, il conviendra donc de ne pas diminuer trop conséquemment l'indice β de façon à conserver une certaine marge de sécurité pour couvrir les aspects non pris en compte;
- d'autre part, nous avons ciblé ici nos efforts sur la seule partie des haubans; pour être tout à fait complet, il conviendrait de mettre en oeuvre une optimisation globale de la structure, intégrant notamment les parties métalliques;
- enfin l'aspect technico-économique et les contraintes de coût auront bien entendu leur importance dans la décision finale.

4.6 Commentaire

L'objectif visé dans ce chapitre était d'élargir la démarche de fiabilité associée à la micromécanique au cas d'éléments porteurs faisant partie d'une structure. La difficulté essentielle portait sur la mise en place d'un couplage intégrant l'aspect probabiliste (FERUM), la réponse mécanique macroscopique (ABAQUS) et l'accès aux sollicitations locales (modèle micromécanique) pour l'évaluation de la défaillance.

L'intérêt de cette approche a été illustré sur le cas des haubans composites de la passerelle de Laroin. La mise en oeuvre de calculs déterministes a permis de guider les analyses fiabilistes en mettant en lumière les influences de premier ordre. L'estimation ensuite du degré de fiabilité actuel des haubans a finalement motivé une étude d'optimisation, dans laquelle l'impact des paramètres microstructuraux été clairement mis en évidence.

Conclusion

Devant la variabilité du comportement des composites, la prise en compte des incertitudes dès la phase de conception s'avère aujourd'hui indispensable pour une meilleure gestion des risques envisagés. Par ailleurs, le développement de ces matériaux ne peut se faire qu'à l'aide de modèles mécaniques déductifs, *i.e.* établis à partir de la connaissance de la microstructure et des mécanismes qui y sont attachés.

Le travail exposé dans ce mémoire a tenté d'apporter quelques éléments de solution à ce problème. A cet effet, une approche intégrée associant les méthodes de fiabilité et la modélisation micromécanique a été proposée pour rendre compte de la défaillance de structures composites.

La possibilité offerte par les méthodes de changement d'échelle d'un aller - retour entre le niveau global et le niveau local constitue à cette fin un avantage majeur. En effet, on peut déduire d'une part l'influence de variabilités microstructurales sur les propriétés macroscopiques de ces matériaux hétérogènes (homogénéisation) et, d'autre part, considérer véritablement l'origine microscopique de la défaillance à l'aide d'un critère portant sur les constituants ou leurs interfaces (localisation).

Du point de vue des concepteurs, cette démarche offre un cadre adéquat pour l'analyse de la fiabilité des structures, qui confère notamment une signification physique aux incertitudes introduites. Par une comparaison globale à un faisceau de données expérimentales, elle permet également aux modélisateurs une validation enrichie et rationnelle des représentations proposées. Cette approche nécessite en revanche un nombre important de résultats expérimentaux, tant pour guider le modèle

stochastique que pour le valider, mais qui seront de toute façon indispensables pour inciter à la généralisation de l'utilisation des composites.

Les résultats obtenus à travers l'étude des haubans composites de la passerelle de Laroin sont très encourageants. Le modèle proposé, dont les choix ont été dictés par les phénomènes physiques mis en jeu et les données expérimentales disponibles, semble en effet apte à rendre compte de la fiabilité de ces structures composites à différentes échelles. Si l'étude du matériau a permis d'apporter un éclairage sur le rôle des paramètres microstructuraux, celle du problème de structure a démontré la pertinence de cette approche dans une optique d'optimisation.

Les perspectives associées à ce travail sont vastes. Le cadre d'application retenu ici nous a conduit à un schéma d'homogénéisation explicite ainsi qu'à une formulation aisée du scénario de défaillance. Pour d'autres contextes de matériaux ou de sollicitations, il conviendra d'intégrer des comportements mécaniques et des modes de défaillance plus complexes.

Il sera ainsi particulièrement intéressant d'étudier l'impact de la viscosité de la matrice ou encore celle de la rupture progressive de fibres. Dans ce dernier cas se posera d'ailleurs la question de l'acceptation d'une certaine tolérance au dommage. De même, si plusieurs scénarii de défaillance peuvent intervenir au sein de la structure (par exemple ruptures matricielle et des interfaces), une analyse de fiabilité des systèmes devra alors être mise en place. L'aspect dynamique enfin, primordial dans le comportement des structures, offre également un large champ d'investigations.

Annexe A : Lois de probabilité pour la fiabilité mécanique

On se propose de présenter ici les lois les plus couramment utilisées dans le contexte mécanique, à savoir la loi normale, la loi lognormale et la loi de Weibull.

La loi normale (ou loi de Gauss ou loi de Laplace-Gauss)

Une variable aléatoire X obéit à une loi normale si et seulement si sa fonction de densité de probabilité est telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right] \quad (\text{A.1})$$

avec μ_X la moyenne et σ_X l'écart-type de X (définis au § 3.2.3). On note $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$. La fonction de répartition s'écrit quant à elle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{u - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right] du \quad (\text{A.2})$$

Si l'on opère le changement de variable $Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$, l'équation (4.9) se ramène à la forme suivante :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} z^2 \right] \quad (\text{A.3})$$

La variable aléatoire Z suit alors une loi normale centrée réduite, de moyenne $\mu_Z = 0$ et d'écart-type $\sigma_Z = 1$ ($Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$, cf. figure 4.11), dont les valeurs sont tabulées.

Les particularités de la loi normale viennent en premier lieu de la symétrie de la fonction de densité f autour de la moyenne μ_X de X (ainsi qu'autour de la moyenne

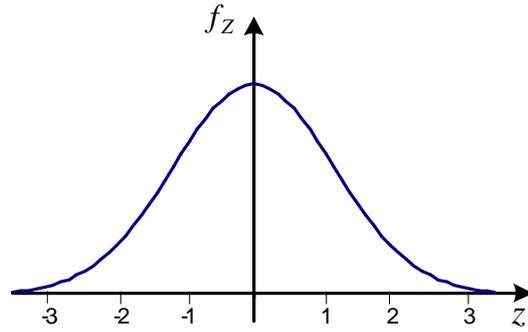


Figure 4.11: Distribution normale pour la variable centrée réduite.

μ_Z de Z dans le cas centré réduit, cf. figure 4.11) et de son resserrement d'autant plus fort que l'écart-type σ_X est faible. Ceci explique notamment son utilisation courante pour caractériser des écarts ou erreurs relatifs à un processus de fabrication. De plus, on note que le mode (abscisse x associée au maximum de f , soit encore au point d'inflexion de F) et la médiane (abscisse x telle que $F(x) = 0.5$) sont toutes deux égales à la moyenne μ . Enfin, la loi normale permet une évaluation simple de la proportion de valeurs de X situées de part et d'autre de la moyenne en fonction du nombre n d'écart-types. En effet,

$$P(\mu_X - n\sigma_X \leq X < \mu_X + n\sigma_X) = P(-n \leq Z < n) \quad (\text{A.4})$$

et

$$P(-n \leq Z < n) = F(z = n) - F(z = -n) = 2F(z = n) - 1 \quad (\text{A.5})$$

par symétrie autour de $\mu_Z = 0$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} P(\mu_X - \sigma_X \leq X < \mu_X + \sigma_X) &= 68.26\% \\ P(\mu_X - 2\sigma_X \leq X < \mu_X + 2\sigma_X) &= 95.45\% \\ P(\mu_X - 3\sigma_X \leq X < \mu_X + 3\sigma_X) &= 99.73\% \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

La loi lognormale (ou loi de Galton)

Une variable aléatoire X suit une loi lognormale si et seulement si la variable $Y = \ln X$ obéit elle-même à une loi normale (X étant définie sur $]0, +\infty[$). Ainsi, la densité de probabilité s'exprime :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \frac{1}{x\sigma_Y\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 \right] \quad (\text{A.7})$$

avec μ_Y la moyenne et σ_Y l'écart-type de Y (on note $Y = \ln X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$). La fonction de répartition s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln x} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t - \mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 \right] dt \quad (\text{A.8})$$

De façon analogue à la loi normale, on peut introduire une variable $U = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}$ centrée et réduite. Cependant, le facteur $1/x$ de l'équation (4.9) rend asymétrique la courbe de la densité de probabilité (*cf.* figure 4.12), ce qui s'adapte par exemple à la représentation de distributions de durées de vie. Par ailleurs, on peut établir un certain nombre de relations entre la moyenne μ_X et l'écart-type σ_X de X et la moyenne μ_Y et l'écart-type σ_Y de $Y = \ln X$:

$$\begin{aligned} \mu_X &= \exp \left[\mu_Y + \frac{\sigma_Y^2}{2} \right] \\ \sigma_X &= \exp \left[\mu_Y + \frac{\sigma_Y^2}{2} \right] \sqrt{\exp[\sigma_Y^2] - 1} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

On montre enfin que le mode ($\exp[\mu_Y - \sigma_Y^2]$) et la médiane ($\exp \mu_Y$) diffèrent dans ce modèle.

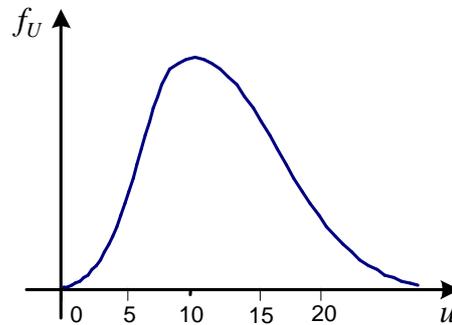


Figure 4.12: Allure de la fonction de densité de la loi lognormale pour la variable centrée réduite.

La loi de Weibull

Une variable aléatoire X obéit à une loi de Weibull si et seulement si sa fonction de densité de probabilité s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \frac{m(x - \gamma)^{m-1}}{\eta^m} \exp \left[-\left(\frac{x - \gamma}{\eta} \right)^m \right] \quad (\text{A.10})$$

avec la fonction de répartition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x - \gamma}{\eta} \right)^m \right] \quad (\text{A.11})$$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{W}(m, \eta, \gamma)$. Le paramètre de position γ est lié à la valeur minimale prise par la variable X puisqu'en effet $F_X(\gamma) = P(X < \gamma) = 0$. En vue d'une application aux données mécaniques, on considérera donc par la suite que $\gamma = 0$. Le facteur d'échelle η est quant à lui proche de la moyenne de X et le paramètre de forme m (appelé module de Weibull) mesure la dispersion des valeurs. L'allure de la fonction de densité de la loi de Weibull est conditionnée par les valeurs de m et η , et on note en particulier que plus m est grand, *i.e.* plus la dispersion est faible, plus ce modèle tend vers la loi normale.

Cette loi, développée initialement pour modéliser la dispersion expérimentale des contraintes de rupture des matériaux fragiles (théorie du maillon le plus faible, Weibull [60]), est maintenant largement généralisée à d'autres phénomènes pour la prédiction de durées de vie.

Annexe B : Paramètres élastiques et de rupture d'un matériau

Modules élastiques

Les définitions des modules élastiques d'un matériau présentées ci-dessous sont tirées de Hayes [30].

- **Module d'Young $E(\mathbf{v})$ et coefficient de Poisson $\nu(\mathbf{v}, \mathbf{t})$**

Le module d'Young $E(\mathbf{v})$ dans une direction de vecteur unitaire \mathbf{v} et le coefficient de Poisson $\nu(\mathbf{v}, \mathbf{t})$ relatif aux directions orthogonales de vecteurs unitaires \mathbf{v} et \mathbf{t} sont respectivement définis par :

$$E(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}} \quad (\text{B.1})$$

et

$$\nu(\mathbf{v}, \mathbf{t}) = -\frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}} \quad (\text{B.2})$$

où \mathbf{E} est le tenseur de déformation du matériau correspondant à un essai uniaxial en contrainte $\boldsymbol{\Sigma} = \Sigma_{vv} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$.

- **Module de cisaillement $\mu(\mathbf{v}, \mathbf{t})$**

Le module de cisaillement $\mu(\mathbf{v}, \mathbf{t})$ d'un matériau relatif aux directions orthogonales de vecteurs unitaires \mathbf{v} et \mathbf{t} est défini par :

$$\mu(\mathbf{v}, \mathbf{t}) = \frac{(\mathbf{v} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{v}) : \boldsymbol{\Sigma}}{2(\mathbf{v} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{v}) : \mathbf{E}} \quad (\text{B.3})$$

où \mathbf{E} est le tenseur de déformation du matériau correspondant à un essai en contrainte $\boldsymbol{\Sigma} = \Sigma_{vt}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{v})$.

- **Application pour un matériau homogène élastique linéaire**

Dans ce cas, la loi de comportement de ce matériau se met sous la forme :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad \text{ou} \quad \mathbf{E} = \mathbb{S} : \boldsymbol{\Sigma} \quad (\text{B.4})$$

avec $\boldsymbol{\Sigma}$ le tenseur des contraintes, \mathbf{E} le tenseur de déformation, \mathbb{C} le tenseur d'élasticité et $\mathbb{S} = \mathbb{C}^{-1}$ le tenseur de souplesse du matériau. A l'aide des définitions précédentes, on en déduit alors :

$$E(\mathbf{v}) = [\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} : \mathbb{S} : \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}]^{-1} \quad (\text{B.5})$$

$$\nu(\mathbf{v}, \mathbf{t}) = -\frac{\mathbf{t} \otimes \mathbf{t} : \mathbb{S} : \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} : \mathbb{S} : \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}} \quad (\text{B.6})$$

$$\mu(\mathbf{v}, \mathbf{t}) = [(\mathbf{v} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{v}) : \mathbb{S} : (\mathbf{v} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{v})]^{-1} \quad (\text{B.7})$$

Paramètres de rupture

On définit ensuite les paramètres de rupture d'un matériau qui sont utilisés dans cette étude.

- **Contrainte de rupture $\Sigma^R(\mathbf{v})$ et déformation de rupture $E^R(\mathbf{v})$**

La contrainte de rupture $\Sigma^R(\mathbf{v})$ et la déformation $E^R(\mathbf{v})$ dans une direction de vecteur unitaire \mathbf{v} sont respectivement définies par :

$$\begin{cases} \Sigma^R(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Sigma}^R \cdot \mathbf{v} \\ E^R(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}^R \cdot \mathbf{v} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

avec $\boldsymbol{\Sigma}^R$ et \mathbf{E}^R désignent respectivement les tenseurs de contrainte et de déformation au point de rupture de l'essai uniaxial en contrainte $\boldsymbol{\Sigma} = \Sigma_{vv} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$.

• **Application pour un matériau homogène : notations $\sigma^R(\mathbf{v})$ et $\varepsilon^R(\mathbf{v})$**

Si le matériau est homogène (ce que l'on considérera dans l'étude pour la résine époxy et les fibres), la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ et la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ locales en tout point d'un Volume Élémentaire Représentatif V de ce matériau sont égales respectivement à la contrainte $\boldsymbol{\Sigma}$ et la déformation \mathbf{E} macroscopiques appliquées sur celui-ci, soit

$$\boldsymbol{\sigma}(x) = \boldsymbol{\Sigma} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(x) = \mathbf{E}, \quad \forall x \in V \quad (\text{B.9})$$

Aussi, on notera donc dans ce cas de figure :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma^R(\mathbf{v}) = \sigma^R(\mathbf{v}) \\ E^R(\mathbf{v}) = \varepsilon^R(\mathbf{v}) \end{array} \right. \quad (\text{B.10})$$

Annexe C : Décomposition des tenseurs d'ordre quatre

Dans cette annexe sont présentées des bases tensorielles pour les tenseurs d'ordre adéquates vis-à-vis des inversions tensorielles nécessitées par le modèle micromécanique.

1) Tenseur isotrope

On introduit les tenseurs \mathbb{J} et \mathbb{K} définis par (Walpole [59]) :

$$\begin{cases} \mathbb{J} = \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \\ \mathbb{K} = \mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{I} - \mathbb{J} \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Ces tenseurs présentent les propriétés suivantes :

$$\mathbb{J} : \mathbb{J} = \mathbb{J}, \quad \mathbb{K} : \mathbb{K} = \mathbb{K}, \quad \mathbb{J} : \mathbb{K} = \mathbb{K} : \mathbb{J} = \mathbb{O} \quad (\text{C.2})$$

de sorte qu'un tenseur d'ordre quatre isotrope $\mathbb{A} = \alpha \mathbb{J} + \beta \mathbb{K}$ possède un inverse $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha} \mathbb{J} + \frac{1}{\beta} \mathbb{K}$.

2) Tenseur isotrope transverse

Soit \mathbf{n} le vecteur unitaire associé à l'axe d'isotropie transverse. On considère la base $\{\mathbb{F}_i\}_{i=1,6}$ définie en (2.46).

Les produits $\{\mathbb{F}_i : \mathbb{F}_j\}_{i,j=1,6}$ de ces tenseurs sont indiqués au tableau 4.10. Il découle qu'un tenseur $\mathbb{A} = \sum_{i=1}^6 a_i \mathbb{F}_i$ possède un symétrique $\mathbb{A}^{-1} = \sum_{i=1}^6 a'_i \mathbb{F}_i$ tel que :

$$\begin{aligned}
a'_1 &= \frac{a_2}{\Delta}, & a'_2 &= \frac{a_1}{\Delta}, & a'_3 &= \frac{1}{a_3} \\
a'_4 &= \frac{1}{a_4}, & a'_5 &= -\frac{a_5}{\Delta}, & a'_6 &= -\frac{a_6}{\Delta}
\end{aligned} \tag{C.3}$$

avec

$$\Delta = a_1 a_2 - 2a_5 a_6 \tag{C.4}$$

	\mathbb{F}_1	\mathbb{F}_2	\mathbb{F}_3	\mathbb{F}_4	\mathbb{F}_5	\mathbb{F}_6
\mathbb{F}_1	\mathbb{E}_1	\circ	\circ	\circ	\circ	\mathbb{E}_6
\mathbb{F}_2	\circ	\mathbb{E}_2	\circ	\circ	\mathbb{E}_5	\circ
\mathbb{F}_3	\circ	\circ	\mathbb{E}_3	\circ	\circ	\circ
\mathbb{F}_4	\circ	\circ	\circ	\mathbb{E}_4	\circ	\circ
\mathbb{F}_5	\mathbb{E}_5	\circ	\circ	\circ	\circ	$2\mathbb{E}_2$
\mathbb{F}_6	\circ	\mathbb{E}_6	\circ	\circ	$2\mathbb{E}_1$	\circ

Tableau 4.10: Produits $\{\mathbf{E}_i : \mathbf{E}_j\}_{i,j=1,6}$.

Remarque 4.3 Si le tenseur d'ordre quatre \mathbb{A} est isotrope transverse et possède la symétrie majeure alors $a_5 = a_6$.

3) Tenseur orthotrope

Soit le triplet $(\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{k})$ de vecteurs unitaires et orthogonaux formant une base orthonormée de \mathbb{R}^3 et définissant les axes d'orthotropie. On considère la base $\{\mathbb{G}_i\}_{i=1,12}$ définie en (2.60). Les produits $\{\mathbb{G}_i : \mathbb{G}_j\}_{i,j=1,12}$ de ces tenseurs sont indiqués au tableau 4.11.

Le calcul analytique de l'inverse d'un tenseur $\mathbb{A} = \sum_{i=1}^{12} a_i \mathbb{G}_i$ exprimé dans la base $\{\mathbb{G}_i\}_{i=1,12}$ n'est dans ce cas pas possible. En effet, si l'on cherche les composantes $\{a'_i\}_{i=1,12}$ de l'inverse $\mathbb{A}^{-1} = \sum_{i=1}^{12} a'_i \mathbb{G}_i$ de celui-ci, on ne peut aboutir à un système linéaire. L'obtention des $\{a'_i\}_{i=1,12}$ passera donc par une évaluation numérique.

	\mathbf{G}_1	\mathbf{G}_2	\mathbf{G}_3	\mathbf{G}_4	\mathbf{G}_5	\mathbf{G}_6	\mathbf{G}_7	\mathbf{G}_8	\mathbf{G}_9	\mathbf{G}_{10}	\mathbf{G}_{11}	\mathbf{G}_{12}
\mathbf{G}_1	\mathbf{G}_1	0	0	\mathbf{G}_4	0	0	0	0	\mathbf{G}_9	0	0	0
\mathbf{G}_2	0	\mathbf{G}_2	0	0	\mathbf{G}_5	\mathbf{G}_6	0	0	0	0	0	0
\mathbf{G}_3	0	0	\mathbf{G}_3	0	0	0	\mathbf{G}_7	\mathbf{G}_8	0	0	0	0
\mathbf{G}_4	0	\mathbf{G}_4	0	0	\mathbf{G}_1	\mathbf{G}_9	0	0	0	0	0	0
\mathbf{G}_5	\mathbf{G}_5	0	0	\mathbf{G}_2	0	0	0	0	\mathbf{G}_6	0	0	0
\mathbf{G}_6	0	0	\mathbf{G}_6	0	0	0	\mathbf{G}_2	\mathbf{G}_5	0	0	0	0
\mathbf{G}_7	0	\mathbf{G}_7	0	0	\mathbf{G}_8	\mathbf{G}_3	0	0	0	0	0	0
\mathbf{G}_8	\mathbf{G}_8	0	0	\mathbf{G}_7	0	0	0	0	\mathbf{G}_3	0	0	0
\mathbf{G}_9	0	0	\mathbf{G}_9	0	0	0	\mathbf{G}_4	\mathbf{G}_1	0	0	0	0
\mathbf{G}_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	\mathbf{G}_{10}	0	0
\mathbf{G}_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	\mathbf{G}_{11}	0
\mathbf{G}_{12}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	\mathbf{G}_{12}

Tableau 4.11: Produits $\{\mathbf{G}_i : \mathbf{G}_j\}_{i,j=1,12}$.

Annexe D : Résultats expérimentaux sur composites

On indique ici les résultats bruts de mesures en traction longitudinale effectuées par Soficar sur les deux matériaux composites étudiés (joncs de Laroin, plats de renforcement).

Lot	Production	Mesures de R^T (kN)				
1	début/fin	90/93.6	80.2/92	88.2/93.8	88.6/92.1	89.6/94.3
2	début/fin	92.4/91.2	90.2/91.9	92.1/91.7	90.7/89.1	92/88.8
3	début/fin	87.4/89.2	87/87.1	87.1/82.7	91.8/90	87.8/87.1
4	début/fin	89.9/90.4	88.4/80.2	89.5/92.9	89.5/93.5	87.9/ -
5	début/fin	87.2/91.1	84.9/91.8	86.6/93.1	86/92.1	83.2/91.1
6	début/fin	84.7/86.8	86.2/88.9	85.5/84.1	82.4/88	82.6/85.7
7	début/fin	85.9/86	82.6/88.3	83.5/92.6	77.5/89.9	88.1/86.6
8	début/fin	81.1/88.1	77.6/91.2	78.5/91.2	86.8/86.2	85.9/89.6
9	début/fin	83/89.1	80.9/87.7	85.9/87.7	81.1/85	88.6/ -
10	début/fin	86/84.6	85.7/82.6	85.1/86.2	80.7/84.8	86.4/88.8
11	début/fin	78.8/83.5	84.5/79.6	87/86.1	86/85.9	86.3/87.1
12	début/fin	85.9/88.1	86.2/85.5	80/89.1	84.7/85.8	76.4/84.1
13	début/fin	85.6/92	86.2/88.7	84.7/89.9	87.2/90.6	87.2/91.1
14	début/fin	83.3/86	85.7/82.5	83.2/87.8	87.2/86.2	84.5/88.9
15	début/fin	84.5/87	86.6/85	84.5/82.7	86.2/87.5	86.6/80.6
16	début/fin	86.6/80.7	87.4/85.9	88.6/87.6	86.3/91.9	85.7/86.2

Tableau 4.12: Résistances en traction longitudinale des joncs composites.

Lot	Production	Mesures de $E(\mathbf{n})$ (GPa)				
1	début	166	171	166	-	-
2	début	179	172	172	-	-
3	fin	176	182	179	-	-
4	début	186	172	177	192	175
5	fin	178	183	180	-	-
6	début	177	177	182	-	-
7	fin	175	178	181	-	-
8	début	184	170	167	172	170
9	début	176	177	178	-	-
10	fin	179	176	183	-	-
11	début	169	183	169	-	-
12	début	176	172	173	176	176
13	fin	176	176	-	-	-
14	début	175	175	174	-	-
15	début	178	190	188		
16	fin	180	179	177	179	176
17	début	173	174	173	-	-
18	début	174	175	174	-	-
19	fin	178	177	180	-	-
20	début	170	173	163	169	177
21	début	175	179	176	-	-
22	fin	174	175	-	-	-

Tableau 4.13: Modules élastiques longitudinaux des plats composites.

Annexe E : Note de calcul de la passerelle

On indique dans cette annexe la valeur des efforts globaux maximaux (en kN) dans les haubans obtenus avec des calculs mécaniques déterministes sur la passerelle.

- § 4.3.2: sans coefficients de sécurité

cas de charge	hauban H ₂ (2 × 7)	hauban H ₄ (3 × 7)
1	90.36	166.25
2	159.80	273.66
3	162.93	276.10
4	147.65	315.63
5	184.84	241.35
6	143.11	245.03
7	118.94	235.27
8	179.97	224.24
9	129.48	195.65
10	102.97	310.75
11	94.97	163.24
12	99.87	170.59

cas de charge	hauban H ₂ (2 × 7)	hauban H ₃ (3 × 7)	hauban H ₄ (3 × 7)
<i>accidentel</i>	136.57	398.54	384.94

- § 4.4.2: avec coefficients de sécurité ($1.35 PP + 1.5 Q$)

cas de charge	hauban H ₄ (3 × 7)
2	385.41
3	389.09
4	430.84
5	380.53
6	368.32
7	265.06
8	304.26
9	268.13
10	428.65

Bibliographie

- [1] **Baxevanakis C., Jeulin D., Lebon B., Renard J.**, “Fracture statistics modeling of laminate composites”, *Int. J. Solids Structures*, vol. 35, n°19, pp. 2505-2521, 1998.
- [2] **Benveniste Y.**, “A new approach to the application of Mori-Tanaka’s theory in composite materials”, *Mech. Mater.*, vol. 6, 1pp. 47-157, 1987.
- [3] **Benveniste Y., Dvorak G.J., Chen T.**, “On diagonal and elastic symmetry of the approximate effective stiffness tensor of heterogeneous media”, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 39, n°7, pp. 927-946, 1991.
- [4] **Berthelot J.M.**, *Matériaux composites - Comportement mécanique et analyse des structures*, Ed. Tec & Doc, Lavoisier, Paris, 2005.
- [5] **Binse P.**, “Fabrication de profilés en composites par pultrusion”, *Techniques de l’Ingénieur*, 1995.
- [6] **Blassiau S.**, “Modélisation des phénomènes microstructuraux au sein d’un composite unidirectionnel carbone-époxy et prédiction de durée de vie : contrôle et qualification de réservoirs bobines”, thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2005.
- [7] **Bornert M.**, “Morphologie microstructurale et comportement mécanique : caractérisations expérimentales, approches par bornes et estimations autocohérentes généralisées”, thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1996.
- [8] **Boyer C., Béakou A., Lemaire M.**, “Design of a composite structure to achieve a specified reliability level”, *Reliab. Engng Sys. Safety*, vol. 56, pp. 273-283, 1997.

- [9] **Calard V., Lamon J.**, “Failure of fiber bundles”, *Comp. Sci. Tech.*, vol. 64, pp. 701-710, 2004.
- [10] **Christoffersen J., Hauge L., Bjerrum J.**, “Footbridge with carbon-fibre-reinforced polymers, Denmark”, *Struct. Engng Int.*, vol. 9, n° 4, pp. 254-256, 1999.
- [11] **Daniels H.E.**, “The statistical theory of the strength of bundles threads”, *Proc. Royal Soc. London*, vol. 183, pp. 405-429, 1945.
- [12] **Desrumaux F., Meraghni G., Benzeggagh M.L.**, “Micromechanical modelling coupled to a reliability approach for damage evolution prediction in composite materials”, *Appl. Comp. Mater.*, vol. 7, pp. 231-250, 2000.
- [13] **Ditlevsen O., Madsen H.**, *Structural reliability analyses*, Ed. J. Wiley & Sons, Chichester, 1996.
- [14] **Dzenis Y.A., Qian J.**, “Analysis of microdamage evolution histories in composites”, *Int. J. Solids Structures*, vol. 38, pp. 1831-1854, 2001.
- [15] **Eshelby J.D.**, “The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems”, *Proc. R. Soc. London*, A421, pp. 376-396, 1957.
- [16] **Eshelby J.D.**, “Elastic inclusions and inhomogeneities”, [dans] *Progress in solid mechanics - vol 2*, Ed. Sneddon I.N. et Hill R., Amsterdam, pp. 89-140, 1961.
- [17] **Faravelli L.**, “Response surface approach for reliability analysis”, *J. Engng Mech.*, vol. 115, n° 12, pp. 2763-2781, 1989.
- [18] **Foret G., Ehrlacher A., Sab K.**, “Etude probabiliste de la rupture des composites unidirectionnels. Application aux câbles de précontrainte”, *Rev. Comp. Mater. Avancés*, vol. 8, pp. 121-135, 1998.
- [19] **Frangopol D.M., Recek S.**, “Reliability of fiber-reinforced composite laminate plates”, *Prob. Engng Mech.*, vol. 18, pp. 119-137, 2003.
- [20] **Freyssinet International**, *Passerelle piétonne de Laroin*, document technique et note de calcul, 2001.

-
- [21] **Gao Z.**, “Reliability of composite materials under general plane loadings”, *J. Reinf. Plastics Comp.*, vol. 12, pp. 430-456, 1993.
- [22] **Gay D.**, *Matériaux composites*, Ed. Hermès, Paris, 2005.
- [23] **Geffroy R.L.**, “La passerelle de Laroin”, *Freyssinet Magazine*, vol. 214, 2002.
- [24] **Gilormini P., Bréchet Y.**, “Syntheses: Mechanical properties of heterogeneous media: Which material for which model? Which model for which material? ”, *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, vol. 7, pp. 805-816, 1999.
- [25] **Guédé Z.**, “Approche probabiliste de la durée de vie des structures sollicitées en fatigue thermique”, thèse de doctorat, Université de Clermont II, 2005.
- [26] **Guedes Soares C.**, “Reliability of components in composite materials”, *Reliab. Engng Syst. Safety*, vol. 55, pp. 171-177, 1997.
- [27] **Gurvich M.R., Pipes R.B.**, “Reliability of composites in a random stress state”, *Comp. Sci. Tech.*, vol. 58, pp. 871-881, 1998.
- [28] **Hasofer A.M., Lind N.C.**, “Exact and invariant second moment code format”, *J. Engng Mech. Division, ASCE*, vol. 100, pp. 111-121, 1974.
- [29] **Haukaas L.**, *FERUM User's Guide*, Université de Californie, Berkley, 2000 (www.ce.berkeley.edu/FERUM/).
- [30] **Hayes M.**, “Connexions between the moduli for anisotropic elastic materials”, *J. Elasticity*, vol. 2, n°2, 1972.
- [31] **Haykin S.**, *Neural networks*, Ed. Prentice Hall International, Londres, 1999.
- [32] **He Q.-C.**, “Effects of size and boundary conditions on the yield strength of heterogeneous materials”, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 49, pp. 2557-2575, 2001.
- [33] **Hill R.**, “Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles”, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 11, pp. 357-372, 1963.
- [34] **Jolion J.-M.**, *Probabilités et statistiques*, cours de l'INSA Lyon, 2006 (www.rfv.insa-lyon.fr/~jolion/PS/poly_stat.pdf).

- [35] **Kam T.Y., Chang E.S.**, “Reliability formulation for composite laminates subjected to first-ply failure”, *Comp. Struct.*, vol. 38, n°1-4, pp. 447-452, 1997.
- [36] **Latteur P.**, *Calculer une structure - De la théorie à l'exemple*, Ed. Bruyillant-Academia, Louvain-La-Neuve, 2006.
- [37] **Lemaire M.**, *Fiabilité des structures : couplage mécano-fiabiliste statique*, Ed. Hermès-Lavoisier, Paris, 2005.
- [38] **Li S.**, *Introduction to micromechanics and nanomechanics*, Lecture notes, Université de Californie, Berkeley, 2000.
- [39] **Lin S.C.**, “Reliability predictions of laminated composite plates with random system parameters”, *Prob. Engng Mech.*, vol. 15, pp. 327-338, 2000.
- [40] **Luyckx J.**, “Fibres de carbone”, *Techniques de l'Ingénieur*, 1994.
- [41] **Luyckx J.**, “Composites à fibres de carbone dans le génie civil”, *Techniques de l'Ingénieur*, 1999.
- [42] **Lyonnet P.**, *Ingénierie de la fiabilité*, Ed. Tec & Doc, Lavoisier, Paris, 2006.
- [43] **Matthews F.L., Rawlings R.D.**, *Composite materials: engineering and science*, Ed. Woodhead Publishing Ltd & CRC Press, 2003.
- [44] **Maynadier J.**, “Approches statistiques et fiabilistes en dynamique des structures”, thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 2003.
- [45] **Meier U.**, “Carbon fibre reinforced polymers”, *Modern Mater. Bridge Engng, Struct. Engng Int.*, vol. 1, pp. 1-12, 1992.
- [46] **Melchers R.E.**, “Radial importance sampling for structural reliability”, *J. Engng Mech.* vol. 116, n°1, pp. 189-203, 1990.
- [47] **Mori T., Tanaka K.**, “Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions”, *Acta Metal.*, vol. 21, pp. 571-574, 1973.
- [48] **Nemat-Nasser S., Hori M.**, *Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials*, Ed. Elsevier, Amsterdam, 1993.

-
- [49] **Payan J.**, “Etude du comportement de composites stratifiés sous chargement statique et de fatigue”, thèse de doctorat, Université d’Aix-Marseille, 2004.
- [50] **Pellisetti M.F., Schuëller G.I.**, “On general purpose software in structural reliability”, *Struct. Safety*, vol. 28, pp. 3-16, 2006.
- [51] **Richard F.**, “Approche fiabiliste de la défaillance des composants en matériaux composites”, cours de master mécanique, Université de Franche-Comté, 2004.
- [52] **Richard F., Rousseau J., Ferry L., Perreux D.**, “Optimisation du dimensionnement d’une structure composite : prise en compte du risque de défaillance”, *Rev. Comp. Mater. Avancés*, vol. 8, pp. 167-188, 1998.
- [53] **Renard J.**, *Elaboration, microstructure et comportement des matériaux composites à matrice polymère*, Ed. Hermès, Lavoisier, 2005.
- [54] **Service d’Etudes Techniques des Routes et Autoroutes (S.E.T.R.A.)**, *Haubans - Recommandations de la commission interministérielle de la précontrainte*, 2001.
- [55] **Spiegel M. R., Stephens L. J.**, *Statistiques*, Ed. McGraw-Hill International, Londres, 2000.
- [56] **Sudret B., Der Kiureghian A.**, “Stochastic finite element methods and reliability : a state-of-the-art report”, rapport n°UCB/SEMM-2000/08, Université de Californie, Berkeley, 2000.
- [57] **Taylor J. K., Cihon C.**, *Statistical techniques for data analysis*, Ed. Chapman & Hall - CRC, New-York, 2004.
- [58] **Tsai S.W., Wu E.M.**, “A general theory of strength for anisotropic materials”, *J. Compos. Mater.*, vol. 5, pp. 58-80, 1971.
- [59] **Walpole L.J.**, *Elastic behavior of composite materials: theoretical foundations*, [dans] *Advances in Applied Mechanics*, Ed. Academic Press, vol. 21, pp. 169-242, 1981.
- [60] **Weibull W.**, “A statistical theory of the strength of materials”, *Royal Swed. Inst. Eng. Res.*, Vol. 151, 1939.

- [61] **Zaoui A.**, *Matériaux hétérogènes et composites*, cours de l'Ecole Polytechnique, 2000.

- [62] **Zhang Y., Der Kiureghian A.**, “Two improved algorithms for reliability analysis”, [dans] *Reliability and optimization of structural systems, Proc. 6th IFIP WG7.5*, Ed. Rackwitz R. *et al.*, 1995.

- [63] **Zweben C.**, “Tensile failure of fiber composites”, *AIAA Journal*, vol. 6, n°12, pp. 2325-2331, 1968.

Fiabilité et micromécanique des matériaux composites

Application à la passerelle de Laroin

Les méthodes fiabilistes permettent d'évaluer le risque de défaillance d'une structure compte tenu des incertitudes mises en jeu. Les approches par changement d'échelle visent quant à elles à spécifier les relations entre les caractéristiques microstructurales des matériaux hétérogènes et leur loi de comportement macroscopique.

Une association de ces deux démarches pour rendre compte de la fiabilité de structures composites est ici proposée. L'idée est d'évaluer l'effet sur la probabilité de défaillance de variabilités définies à l'échelle microscopique, le passage micro-macro étant réalisé par homogénéisation. L'intérêt est d'une part de contribuer à la compréhension de la défaillance de ces matériaux et, d'autre part, de mettre en oeuvre une procédure de validation enrichie des modèles micromécaniques.

Cette étude s'appuie sur le cas de la passerelle de Laroin (Pyrénées Atlantiques), premier ouvrage en France réalisé à l'aide de haubans composites en carbone-époxy.

Mots clés : fiabilité, micromécanique, matériaux composites, probabilité de défaillance, microstructure

Reliability and micromechanics of composite materials

Application to the Laroin footbridge

Reliability methods make it possible to evaluate the risk of failure of a structure according to the uncertainties involved in its mechanical behavior. On the other hand, micromechanics offers the most suitable framework to derive macroscopic constitutive laws from microstructural features.

We propose here to associate these two approaches in order to account for the reliability of composite materials. The aim is to analyze the effect of variabilities defined at the microscale on the probability of failure through an homogenization scheme. Such coupling will help in understanding the failure mechanisms and also provides an improved validation for micromechanical models.

This study is focused on the case of the Laroin footbridge, which is the first civil engineering structure in France made of composite stays in carbon-epoxy.

Key words : reliability, micromechanics, composite materials, probability of failure, microstructure