



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :
Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)

Discipline ou spécialité :
Génie Mécanique, Mécanique des Matériaux

Présentée et soutenue par :
Cristina GOIDESCU

le : jeudi 22 septembre 2011

Titre :
Caractérisation et modélisation de l'endommagement par microfissuration
des composites stratifiés - Apports des mesures de champs et de
l'homogénéisation

JURY

Eric CHARKALUK	Chargé de Recherches CNRS HDR, Université de Lille	Rapporteur
Frédéric LEBON	Professeur d'Université, Université de Marseille I	Rapporteur
Djimédo KONDO	Professeur d'Université, Université de Paris VI	Examineur
Olivier PANTALE	Professeur d'Université, ENI Tarbes	Directeur de thèse
Hélène WELEMANE	Maître de Conférences, ENI Tarbes	Co-directrice de thèse

Ecole doctorale :
Mécanique, Energétique, Génie civil et Procédés (MEGeP)

Unité de recherche :
Laboratoire Génie de Production (ENI Tarbes)

Directeur(s) de Thèse :

Olivier PANTALE	Professeur d'Université, ENI Tarbes	Directeur de thèse
Hélène WELEMANE	Maître de Conférences, ENI Tarbes	Co-directrice de thèse

Rapporteurs :

Eric CHARKALUK	Chargé de Recherches CNRS HDR, Université de Lille	Rapporteur
Frédéric LEBON	Professeur d'Université, Université de Marseille I	Rapporteur

A mon fiancé et nos deux familles, ils sauront pourquoi...

Remerciements

Je tiens à saluer ici les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à la concrétisation de ce travail de thèse de doctorat.

Tout d'abord, mes remerciements s'adressent aux personnes qui m'ont proposé le sujet de thèse et qui m'ont encadrée au cours de ces années d'étude : Hélène WELEMANE, Maître de Conférences à l'ENI de Tarbes et Olivier PANTALE, Professeur à l'ENI de Tarbes. Au travers de nos discussions, ils m'ont apporté une compréhension plus approfondie des divers aspects du sujet, leur dynamisme et leurs compétences scientifiques m'ont permis de mener à bien cette étude. Tout particulièrement Hélène, qui a dirigé cette thèse dans la continuité de mon stage de Projet de Fin d'Etudes. Tout au long de ces trois années, elle a su guider et orienter mes recherches aux bons moments et dans le bon sens, elle a su me remotiver dans les moments de doute et sa méticuleuse relecture finale de chacun des chapitres m'a sans aucun doute permis de préciser mon propos, de structurer le travail et d'améliorer la qualité des différentes sections. Malgré son congé de maternité, elle a toujours été disponible pour d'intenses et fructueuses discussions. Pour tout cela, sa patience, sa confiance et son soutien moral en fin de thèse, je la remercie vivement.

Je remercie tous ceux sans qui cette thèse ne serait pas ce qu'elle est, aussi bien par les discussions que j'ai eu la chance d'avoir avec eux, leurs suggestions ou contributions. Je pense ici en particulier à Christian GARNIER, Marina FAZZINI, Romain BRAULT. Je souhaite également exprimer ma profonde gratitude envers Sébastien MISTOU et Michel NIQUET, ainsi que toute l'équipe du CRC Composites de Tarbes : Olivier CHAUSSENDE, Frédéric TEQUI, Thibault PROUST, Céline DELCROS, Vincent TERTROU et Nathalie COUREAU. Merci enfin à Sylvain GENOT de TomoAdour pour sa collaboration.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Djimédo KONDO, Professeur à Paris VI, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de thèse de doctorat, pour l'intérêt et

le soutien chaleureux dont il a toujours fait preuve. Je suis très reconnaissante envers Eric CHARKALUK, Chargé de Recherches CNRS au Laboratoire de Mécanique de Lille, et Frédéric LEBON, Professeur à l'Université de Marseille I, d'avoir accepté le rôle de rapporteurs. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, ainsi que pour leurs nombreuses remarques et suggestions qui me donnent de nouvelles pistes de réflexion.

Je remercie également Daniel NOYES, directeur du Laboratoire Génie de Production de l'ENI de Tarbes, Talal MASRI, Directeur de l'ENI de Tarbes, ainsi qu'Abdallah HABBADI, Directeur des Etudes de l'ENI de Tarbes, pour m'avoir accueillie au sein de ces institutions et pour leurs conseils stimulants et leurs encouragements.

Je passe ensuite une dédicace spéciale à tous les jeunes gens que j'ai eu le plaisir de côtoyer durant ces trois ans à Tarbes, à savoir Babacar GUEYE, Andrei POPA, Sabeur MSOLLI, Benjamin BONIFACE, Adrien PERRET, Elodie PERONNET, Toufik DJILALI, Toufic WEHBE, Yasmina BOUZAROUR, Yue MING ... et toute la troupe du très convivial Laboratoire Génie de Production.

Ces remerciements ne peuvent s'achever sans une pensée pour ma famille et mon fiancé, je les remercie chaudement pour leurs encouragements et leur assistance aussi bien matérielle que morale qui m'ont permis de faire cette thèse dans de bonnes conditions.

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	xi
Notations	xiii
Introduction	1
1 Endommagement des composites stratifiés : mécanismes physiques et modélisations	5
1.1 Introduction	6
1.2 Mécanismes d'endommagement et de rupture	7
1.2.1 Microfissuration matricielle	7
1.2.2 Décohésion fibre-matrice	8
1.2.3 Rupture de fibres	9
1.2.4 Délaminage	10
1.2.5 Développement des mécanismes et processus de rupture	11
1.3 Comportement macroscopique	15
1.3.1 Réponse globale	15
1.3.2 Dégradation des propriétés élastiques	17
1.3.3 Interaction entre les anisotropies initiale et induite	18
1.3.4 Effet unilatéral	20
1.4 Modélisations de l'endommagement	22
1.4.1 Variable d'endommagement	24
1.4.2 Interaction entre les anisotropies	26
1.4.3 Effet unilatéral	28
1.4.4 Commentaire	31

2	Caractérisation expérimentale de l'endommagement de stratifiés carbone-époxy	33
2.1	Introduction	34
2.2	Fabrication des éprouvettes	34
2.2.1	Matériaux constitutifs	34
2.2.2	Procédé de fabrication	36
2.2.3	Préparation des éprouvettes	39
2.3	Conditions expérimentales	41
2.4	Techniques de mesures de champs	43
2.4.1	Stéréo-corrélation d'images	43
2.4.2	Thermographie Infrarouge	49
2.4.3	Tomographie à rayons X	52
2.5	Résultats	55
2.5.1	Réponse globale des matériaux	55
2.5.2	Endommagements locaux	60
2.5.3	Etude des propriétés élastiques	63
2.5.4	Localisation et rupture	64
2.5.5	Faciès de rupture	66
2.6	Conclusion	68
3	Homogénéisation bidimensionnelle des milieux orthotropes fissurés	71
3.1	Introduction	72
3.2	Position du problème d'homogénéisation	73
3.2.1	Définition du Volume Elémentaire Représentatif	73
3.2.2	Définition des grandeurs caractéristiques - Conditions aux limites	74
3.2.3	Décomposition du problème	77
3.3	Energie libre d'un milieu orthotrope 2D fissuré	80
3.3.1	Expression de l'énergie libre en fonction des sauts de déplacements	80
3.3.2	Expression des variables cinématiques en fonction des grandeurs macroscopiques	83
3.3.3	Critère d'ouverture-fermeture des microfissures	84
3.4	Expression finale de l'énergie	85
3.5	Commentaires	91
3.5.1	Importance de l'extension du lemme de Hill	91
3.5.2	Interaction entre les anisotropies initiale et induite	93
3.6	Conclusion	94

4 Un modèle 2D de l'endommagement par microfissuration pour les milieux initialement orthotropes	95
4.1 Introduction	96
4.2 Description de la fissuration	96
4.3 Potentiel thermodynamique et lois d'état	97
4.3.1 Potentiel thermodynamique	98
4.3.2 Lois d'état	99
4.4 Potentiel de dissipation et loi d'évolution de l'endommagement	102
4.4.1 Hypothèses	102
4.4.2 Lois d'évolution des variables internes	103
4.4.3 Formulation en vitesse	104
4.5 Intégration numérique de la loi de comportement	105
4.5.1 Algorithme d'intégration locale	105
4.5.2 Implémentation au sein du code de calculs ABAQUS	106
4.6 Etude du comportement élastique	107
4.6.1 Détermination des paramètres d'énergie	107
4.6.2 Etude du comportement élastique	108
4.6.3 Critère d'ouverture-fermeture des microfissures	116
4.7 Etude du comportement dissipatif	116
4.7.1 Détermination des paramètres de dissipation	117
4.7.2 Etude de sollicitations simples	118
4.8 Conclusion	126
Conclusion générale	127
Annexe A - Constantes d'élasticité	129
Annexe B - Démonstrations	131
Bibliographie	139

Table des figures

1.1	Exemples d'armures de tissage plans (Bensaid [28])	6
1.2	Exemple de composition d'un stratifié (Bois [39])	7
1.3	Fissuration matricielle dans un stratifié SiC-SiC (Guillaumat [102])	8
1.4	Fissuration matricielle dans un stratifié carbone-époxy (Purslow [186])	8
1.5	Fissuration transverse induite par décohésion fibres-matrice et délaminage en tête de fissure dans un stratifié en carbone-époxy (Aussedat-Yahia [16])	9
1.6	Fissurations longitudinales inter-torons induites par décohésion fibres-matrice dans un stratifié en carbone-époxy (Aussedat-Yahia [16])	9
1.7	Décohésion fibre-matrice dans un stratifié SiC-SiC (Guillaumat [102])	10
1.8	Décohésion fibres-matrice et rupture de fibres dans un stratifié carbone-époxy (Aussedat-Yahia [16])	10
1.9	Observation par fractographie de la rupture de fibres dans un stratifié en carbone-époxy (Speissberger et al. [204])	10
1.10	Délaminages observés par photographie d'une tranche d'éprouvette stratifiée verre-époxy (Duplessis-Kergomard [81])	11
1.11	Micrographie d'une section d'un stratifié carbone-époxy (Allix et al. [7])	11
1.12	Mécanismes d'endommagement dans les stratifiés (Ladevèze et al. [128])	12
1.13	Emissions acoustiques mesurées sur un stratifié graphite-époxy lors d'une traction uniaxiale (Dzenis et Qian [82]) : (a) évènements en fonction du chargement, (b) type de décohésions : fissuration matricielle (A), rupture de fibres (B), délaminage (C).	12
1.14	Schéma du processus de rupture en traction dans les stratifiés CMC (Morvan [167])	13
1.15	Schéma du processus de rupture en traction dans les stratifiés carbone-époxy (Bois [39])	14
1.16	Blocage des fissures dans un renfort verre tissé satin (Osada et al. [173])	14

1.17	Ouverture résiduelle de fissure avec présence de déchets dans un stratifié en carbone-époxy (Aussedat-Yahia [16])	15
1.18	Réponse contrainte déformation sous traction uniaxiale : (a)-(b) stratifié SiC-SiC (Gasser [92]), (c)-(d) stratifié C-C (Siron et Lamon [202]), (e)-(f) stratifié carbone-époxy (Bois [39])	16
1.19	Variation des composantes du tenseur d'élasticité dans la base orthonormée $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ d'un stratifié C-SiC en fonction de la contrainte de traction uniaxiale appliquée suivant \mathbf{x}_3 correspondant à l'un des sens des fibres (Baste et El Bouazzaoui [23])	18
1.20	Module d'Young $E(\mathbf{m})$ associé à la direction de vecteur unitaire \mathbf{m} appartenant au plan $(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ en fonction de la contrainte de traction appliquée dans la direction \mathbf{x}_3 pour un composite C-C-SiC équilibré : a) \mathbf{x}_3 correspond à l'un des sens des fibres (0°), b) \mathbf{x}_3 forme un angle de 30° avec l'un des sens des fibres (Baste et Aristégui [22])	19
1.21	Etat de fissures de cisaillement dans un stratifié en carbone-époxy (Moffat et al. [166])	20
1.22	Essais de traction-compression sur un stratifié SiC-SiC (Gasser [92])	21
1.23	Etude des effets d'ouverture-fermeture de fissures dans un stratifié C-SiC en fonction de la contrainte de traction uniaxiale appliquée suivant \mathbf{x}_3 correspondant à l'un des sens des fibres (Morvan et Baste [167, 168]) : (a) courbe contrainte-déformation, (b) variation des composantes du tenseur de souplesse dans la base orthonormée $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ durant chaque cycle de charge-décharge	22
2.1	Procédé RTM classique (d'après Lannuzel [135])	38
2.2	Procédé schéma LRI (d'après Lannuzel [135])	38
2.3	Géométrie de l'éprouvette de type 3 (NF EN ISO 527-4 [1])	39
2.4	Découpe des éprouvettes à talons collés (NF EN ISO 527-4 [1])	40
2.5	Découpe des plaques à partir de tissus G0926 et orientation associée des éprouvettes de type A et B (les zones blanches correspondent aux talons, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) désigne le repère des éprouvettes et $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ le repère principal d'orthotropie du stratifié)	41
2.6	Essais de traction cyclique	42
2.7	Machines d'essais	43
2.8	Images de référence et déformée (Fazzini [86])	44
2.9	Stereo-corrélation d'images	45

2.10	Principe stéréoscopique (Fazzini [86])	45
2.11	Images de gauche et droite et reconstruction 3D du cylindre (Fazzini [86]) .	46
2.12	Détermination du champ de déplacement 3D par stéréo-corrélation (Fazzini [86])	47
2.13	Réalisation du mouchetis	47
2.14	Caractérisation du mouchetis	48
2.15	Calibrage du système (Wehbe [223])	48
2.16	Choix des paramètres de calcul (Fazzini [86])	49
2.17	Spectres des rayonnements (Pajani [175])	50
2.18	Mise en évidence par cartographie thermique de défauts internes (inserts Téflon de diamètre 4 à 15 mm) dans une plaque en carbone-époxy (Péronnet et al. [188])	50
2.19	Schéma de fonctionnement de la thermographie (Pajani [175])	51
2.20	Schéma de principe du passage des coupes 2D au volume 3D (Carmona [49])	52
2.21	Visualisation 3D des décohésions dans un composite à matrice aluminium avec renforts en zircone-silice de $50 \mu m^3$ environ (inclusions en gris, cavités en noir, Carmona [49])	53
2.22	Scanner SOMATOM Sensation Open	54
2.23	Schéma de fonctionnement du scanner médical SIEMENS [200]	54
2.24	Courbes charge-déplacement axial pour les essais de traction monotone . .	56
2.25	Courbes charge-déplacement axial pour les essais de traction avec cycles . .	57
2.26	Evolution temporelle de la moyenne de la variation de température au cours des essais monotones (type A)	59
2.27	Evolution temporelle de la moyenne de la variation de température au cours des essais cycliques avec représentation du chargement appliqué (type C) .	60
2.28	Mise en évidence des gradients locaux de température	61
2.29	Vues coronales des champs densimétriques à différentes épaisseurs (le matériau est représenté en gris, les vides en bleu)	62
2.30	Champs du module d'Young axial $E(\mathbf{y})$ du matériau obtenu pour chaque cycle de décharge-recharge (type C)	63
2.31	Champs cinématiques avant pic et éprouvette rompue (type A)	65
2.32	Champs cinématiques avant pic et éprouvette rompue (type B)	65
2.33	Champs thermiques autour du point de rupture et éprouvettes rompues (types A et C, images prises à 0,006 seconde d'intervalle)	66
2.34	Faciès de rupture des éprouvettes de type A	67
2.35	Faciès de rupture des éprouvettes de type B	67

2.36	Vues axiales des champs densimétriques le long du macrodéfaut d'une éprouvette de type B	68
2.37	Faciès de rupture des éprouvettes de type C	68
3.1	Volume élémentaire représentatif	75
3.2	Décomposition du problème étudié	78
3.3	Repère (\mathbf{n}, \mathbf{t}) associé à la microfissure	81
4.1	Orientations des familles de microfissures	97
4.2	Repère d'orthotropie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ du matériau par rapport au repère de calcul (\mathbf{x}, \mathbf{y})	109
4.3	Orientation des vecteurs unitaires \mathbf{n} (normale aux microfissures) et \mathbf{m} dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ d'orthotropie initiale	109
4.4	Modules d'élongation $L(\mathbf{m})$ de composites affaiblis par une famille de microfissures pour deux orientations de leur normale \mathbf{n} : (a) $(\mathbf{e}_1, \mathbf{n}) = \phi = \frac{\pi}{2}$, (b) $(\mathbf{e}_1, \mathbf{n}) = \phi = \frac{\pi}{6}$ (— : état ouvert, — : état fermé, - - - : matrice vierge)	112
4.5	Modules en contrainte volumique $\kappa(\mathbf{m})$ de composites affaiblis par une famille de microfissures pour deux orientations de leur normale \mathbf{n} : (a) $(\mathbf{e}_1, \mathbf{n}) = \phi = \frac{\pi}{2}$, (b) $(\mathbf{e}_1, \mathbf{n}) = \phi = \frac{\pi}{6}$ (— : état ouvert, — : état fermé, - - - : matrice vierge)	113
4.6	Critères et état d'ouverture-fermeture des familles de microfissures pour un composite SiC-SiC dans l'espace des déformations principales de la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$	117
4.7	Identification d'un composite SiC-SiC - Réponse contrainte-déformation axiales pour un essai de traction uniaxiale ($\boldsymbol{\Sigma} = \Sigma_{yy} \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}$ avec $\Sigma_{yy} > 0$ et $\delta = 0^\circ$, données expérimentales d'Aubard [13, 14])	118
4.8	Réponse contrainte-déformation axiales d'un composite SiC-SiC pour des essais de traction et de compression uniaxiales ($\boldsymbol{\Sigma} = \Sigma_{yy} \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}$ avec $\Sigma_{yy} > 0$ en traction et $\Sigma_{yy} < 0$ en compression) dans ($\delta = 0^\circ$) et hors des axes ($\delta = 45^\circ$)	119
4.9	Réponse contrainte-déformation axiales d'un composite SiC-SiC pour un essai de traction uniaxiale hors axes ($\boldsymbol{\Sigma} = \Sigma_{yy} \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}$ avec $\Sigma_{yy} > 0$ et $\delta = 45^\circ$, données expérimentales d'Aubard [13, 14])	120
4.10	Evolution des composantes du tenseur d'élasticité effectif dans la base de calcul (\mathbf{x}, \mathbf{y}) en fonction du chargement uniaxial appliqué $\boldsymbol{\Sigma} = \Sigma_{yy} \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}$	121

4.11	Distribution des densités de microfissures dans le plan (\mathbf{x}, \mathbf{y}) pour des tractions uniaxiales $\Sigma = \Sigma_{yy} \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}$ avec $\Sigma_{yy} > 0$ dans $(\delta = 0^\circ)$ et hors des axes $(\delta = 45^\circ)$	122
4.12	Distribution des densités de microfissures dans le plan (\mathbf{x}, \mathbf{y}) pour des compressions uniaxiales $\Sigma = \Sigma_{yy} \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}$ avec $\Sigma_{yy} < 0$ dans $(\delta = 0^\circ)$ et hors des axes $(\delta = 45^\circ)$	124
4.13	Etat d'ouverture-fermeture des familles de microfissures pour un composite SiC-SiC dans l'espace des déformations principales de la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et trajets de chargement à $\delta = 0^\circ$: (i) traction, (ii) compression	125

Liste des tableaux

2.1	Propriétés mécaniques en traction uniaxiale de la résine HexFlow RTM 6	35
2.2	Propriétés mécaniques en traction uniaxiale des fibres de carbone	35
2.3	Caractéristiques dimensionnelles (NF EN ISO 527-4 [1])	40
2.4	Types d'éprouvettes étudiées	41
4.1	Propriétés élastiques de la matrice vierge pour deux composites	108
4.2	Paramètres de dissipation pour deux composites	118
4.3	Modifications des composantes du tenseur d'élasticité effectif dans la base de calcul (\mathbf{x}, \mathbf{y}) entre l'état initial et le pic de contrainte $ \Sigma_{yy}^{max} $	123

Notations

Les tenseurs étudiés sont définis sur l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^2 et leurs composantes sont données dans des bases orthonormées de cet espace.

Nous utilisons les notations intrinsèques usuelles. En particulier, les produits contractés sont définis de la façon suivante : $a \cdot b$ pour deux vecteurs, $a : b$ pour deux tenseurs d'ordre deux. De plus, les produits tensoriels de deux tenseurs d'ordre deux sont donnés par :

$$[a \otimes b]_{ijkl} = a_{ij}b_{kl} \quad ; \quad (a \underline{\otimes} b)_{ijkl} = \frac{1}{2}(a_{ik}b_{jl} + a_{il}b_{jk}) \quad (1)$$

On trouve ci-dessous une liste des principales notations employées :

\mathbf{I}	tenseur identité du second ordre
$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$	base orthonormée correspondant aux axes d'orthotropie de la matrice 2D vierge
(\mathbf{x}, \mathbf{y})	repère de référence (calcul/sollicitation)
$E(\mathbf{m})$	module d'Young dans la direction de vecteur unitaire \mathbf{m}
T	température
$\mathbf{A} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$	tenseur de structure de la matrice 2D vierge
\mathbb{C}^0	tenseur d'élasticité de la matrice 2D vierge
\mathcal{A}	Volume Élémentaire Représentatif (VER) : cellule carrée bidimensionnelle
$\partial\mathcal{A}$	frontière extérieure de \mathcal{A}
ω_i	domaine occupé par la $i^{\text{ème}}$ famille de microfissures
l_i	longueur des microfissures de la $i^{\text{ème}}$ famille
\mathcal{N}_i	nombre de fissures par unité de surface de la $i^{\text{ème}}$ famille
$\bar{\mathcal{A}}$	Domaine occupé par la partie matrice solide
$\partial\bar{\mathcal{A}}$	Frontière extérieure de $\bar{\mathcal{A}}$

$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon})$	tenseurs des contraintes et déformations microscopiques
$(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{E})$	tenseurs des contraintes et déformations macroscopiques
d_i	densité de la $i^{\text{ème}}$ famille de microfissures
\mathbf{n}_i	vecteur unitaire normal à la $i^{\text{ème}}$ famille de microfissures
ϕ_i	orientation de la $i^{\text{ème}}$ famille de microfissures, $\phi_i = (\mathbf{e}_1, \mathbf{n}_i)$
\mathbf{t}_i	vecteur unitaire tangent à la $i^{\text{ème}}$ famille de microfissures
N	nombre de familles de microfissures
$\{a_i\}_{i=1,4}$	constantes caractérisant l'élasticité initiale
$\llbracket \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rrbracket_i$	saut de déplacement entre les lèvres des microfissures
W_0	énergie libre de la matrice saine
W	énergie libre du milieu microfissuré
(β, γ)	variables cinématiques d'ouverture et de glissement
Φ	dissipation intrinsèque globale
g	fonction caractéristique d'ouverture-fermeture des microfissures
$\{\eta_p\}_{p=1,4}$	paramètres de la fonction g
$\{c_p\}_{p=1,10}$	paramètres d'endommagement du potentiel W
$\mathbf{d} = (d_i)_{i=1,N}$	variables d'endommagement du modèle
\mathcal{S}	domaine d'ouverture-fermeture stricts des N familles de défauts
\mathbb{C}	tenseur d'élasticité effectif du milieu microfissuré
$\mathbf{F}^d = (F^{d_i})_{i=1,N}$	forces thermodynamiques associées aux variables \mathbf{d}
$\dot{\mathbf{d}} = (\dot{d}_i)_{i=1,N}$	vitesse d'endommagement
\mathcal{D}	potentiel de dissipation du modèle
Φ_i	dissipation intrinsèque associée à la $i^{\text{ème}}$ famille de microfissures
(k_0, η)	paramètres de dissipation
f	critère d'endommagement
$\mathcal{C}_i(d_i)$	convexe de réversibilité de la $i^{\text{ème}}$ famille de microfissures
$\mathcal{C}(\mathbf{d})$	convexe de réversibilité global
Λ_i	multiplicateur d'endommagement associé à d_i
\mathbb{L}	opérateur tangent du modèle
(E_1, E_2)	modules d'Young associés aux directions \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2
ν_{12}	coefficient de Poisson associé aux couples de directions $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$
G_{12}	module de cisaillement associé aux couples de directions $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$
δ	angle d'orthotropie du matériau, $\delta = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_1)$

$L(\mathbf{m})$	module d'élongation effectif dans la direction \mathbf{m}
$\kappa(\mathbf{m})$	module en contrainte volumique effectif dans la direction \mathbf{m}
$L^0(\mathbf{m})$	module d'élongation initial dans la direction \mathbf{m}
$\kappa^0(\mathbf{m})$	module en contrainte volumique initial dans la direction \mathbf{m}
ψ	orientation du vecteur unitaire \mathbf{m} , $\psi = (\mathbf{e}_1, \mathbf{m})$

Introduction

Les performances des matériaux composites présentent de nombreux intérêts pour la conception des structures mécaniques. On peut citer notamment un rapport résistance/poids élevé, l'absence de corrosion, l'amortissement des vibrations ou encore la résistance au choc. L'utilisation de ces matériaux, dont les atouts sont particulièrement intéressants dans des secteurs industriels de pointe tels que l'aéronautique, se heurtent encore toutefois à certains freins liés à des mécanismes d'endommagement et de rupture relativement complexes. Ces aspects amènent en effet à l'introduction de coefficients de sécurité sévères et par conséquent à des coûts plus élevés que les matériaux classiques (métalliques notamment). En vue d'une meilleure optimisation des structures mécaniques en matériaux composites, il convient donc de maîtriser ces processus d'endommagement et de prévoir par des modèles constitutifs adaptés les conséquences de ceux-ci.

Dans ce travail de thèse, on s'intéresse tout particulièrement aux pièces structurales minces réalisées en composites stratifiés monolithiques. Ces matériaux résultent de la mise en place de couches successives de plis composites à base d'une matrice et de fibres longues. Typiquement, le recours à ce type de conception se fait dans le domaine de l'aéronautique pour des éléments de fuselage des aérostructures. Notre étude concerne la dégradation de ces matériaux induite par la création et le développement de surfaces de décohésion internes, soit l'endommagement par microfissuration. Pour ces matériaux anisotropes dans leur état sain, le caractère orienté des défauts considérés adjoint une anisotropie supplémentaire. D'autre part, les microfissures ont la particularité de pouvoir s'ouvrir et se fermer suivant la sollicitation et d'agir différemment suivant cet état. Cette interaction entre les anisotropies initiale et induite associée aux effets unilatéraux sont autant de difficultés complexes pour la compréhension et la modélisation du comportement mécanique de ces matériaux.

Les objectifs visés dans ce travail sont en premier lieu de contribuer à la caractérisation des mécanismes d'endommagement sous sollicitations statiques isothermes. A cette

fin, une campagne expérimentale a été menée sur des stratifiés en carbone-époxy réalisés par infusion de résine liquide. Ces matériaux et ce procédé sont fortement étudiés au sein du Laboratoire Génie de Production de Tarbes dans le cadre de travaux de recherche liés au secteur aéronautique. L'originalité de l'étude réside en la mise en place d'une analyse par trois techniques optiques de mesures de champs (cinématiques, thermiques et densimétriques) qui permettent d'accéder à une information plus riche que les méthodes conventionnelles car représentative du comportement global et de surcroît sans perturbation liée à la mesure.

Sur la base des résultats obtenus, le second enjeu est de proposer une nouvelle modélisation plane de l'endommagement des matériaux initialement anisotropes. Précisément, on se focalise ici sur le cas de milieux initialement orthotropes soumis à un seul mécanisme dissipatif, à savoir la création et la croissance de microfissures. A cette fin, une analyse micromécanique a été réalisée pour compléter les observations expérimentales du comportement élastique de ces matériaux avec la prise en compte de dommages d'orientation arbitraire et des effets unilatéraux. Le cadre approprié de la thermodynamique des processus irréversibles avec variables internes permet enfin de développer complètement la formulation.

La rédaction de ce mémoire s'organise autour de quatre parties.

Le premier chapitre est dédié à la revue bibliographique des mécanismes physiques de dégradation des composites stratifiés ainsi qu'à leurs conséquences au niveau de leur comportement macroscopique. Une présentation des différentes approches de modélisation existant dans la littérature est également faite avec l'évocation de leurs spécificités, avantages et limitations.

L'étude expérimentale fait l'objet du deuxième chapitre. Après l'exposé des matériaux étudiés et de leur procédé de fabrication, on explique les principes, potentialités et détails de la mise en oeuvre des trois techniques de mesures de champs employées. Les résultats obtenus sont ensuite présentés au travers d'une analyse croisée des données cinématiques, thermiques et densimétriques mesurées.

Le troisième chapitre est consacré à l'homogénéisation bidimensionnelle de milieux orthotropes microfissurés. Après une introduction des éléments de base de la méthode de changement d'échelle retenue, l'analyse micromécanique est détaillée pour aboutir à l'expression de l'énergie macroscopique d'un milieu affecté par des microfissures d'orientation arbitraire pouvant être ouvertes ou bien fermées.

La construction du modèle d'endommagement proprement dit est abordée dans le dernier chapitre, sur la base du travail effectué au chapitre précédent. On y précise les éléments essentiels au développement de la loi constitutive (variables internes d'endommagement, potentiel thermodynamique, loi d'évolution, intégration numérique) et on réalise diverses simulations pour illustrer les capacités prédictives de la formulation proposée.

Chapitre 1

Endommagement des composites stratifiés : mécanismes physiques et modélisations

Nous présentons dans ce qui suit les principaux mécanismes de dégradation des composites stratifiés et les conséquences induites dans leur réponse macroscopique. Dans une seconde partie, nous exposons les démarches de modélisation proposées pour représenter leur comportement.

1.1 Introduction

Les matériaux composites présentent plusieurs constituants de base, généralement une matrice et des renforts, dont l'association permet d'atteindre des performances exceptionnelles (on pourra se référer aux ouvrages de référence de Berthelot [32], Gay [95], Matthews et Rawlings [161] pour une présentation exhaustive). La matrice a pour rôle essentiel d'assurer la cohésion de l'ensemble et de protéger le renfort des agressions extérieures telles que l'humidité ou la corrosion. Du point de vue mécanique, elle assure la transmission des sollicitations vers les renforts et doit donc présenter une bonne compatibilité avec ces derniers. Pour les stratifiés, on distingue généralement :

- les composites à matrice organique (telles que les résines polymères thermoplastiques ou thermodurcissables), qui constituent aujourd'hui la grande majorité des composites industriels,
- les composites à matrice minérale (Céramique, carbone), souvent réservés aux applications à haute température.

Les renforts se présentent dans ce cas sous forme de fibres longues qui confèrent au composite des propriétés mécaniques majeures (rigidité, résistance à la rupture, à la fatigue, à l'impact,...). La nature des renforts est choisie selon l'application visée, tant au niveau du matériau employé (minérales telles que le carbone ou le verre, organiques comme le Kevlar) qu'au niveau de leur structure. Pour ce second aspect, les fibres sont constituées de fibres ou filaments assemblés pour former des mèches qui sont ensuite combinées pour former différentes formes de renfort : nappes unidirectionnelles, tissus,... Les composites à renfort tissé (plans ou multidirectionnels) figurent parmi les plus employés du fait d'un risque moindre de fissures et d'une manipulation aisée (voir sur la figure 1.1 quelques exemples).

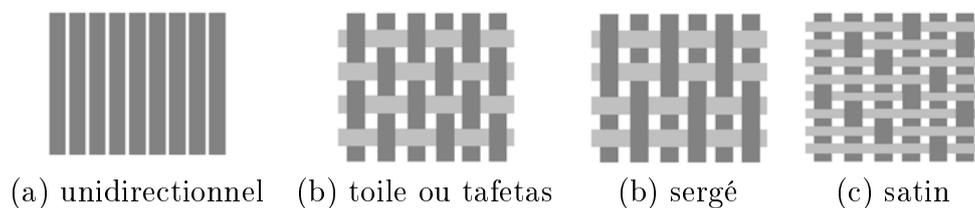


FIGURE 1.1 – Exemples d'armures de tissage plans (Bensaid [28])

Du point de vue de l'architecture finale, la technique de la stratification permet de concevoir des pièces structurales minces capables de résister à des efforts complexes et importants. Les stratifiés monolithiques étudiés dans cette étude sont élaborés par couches successives (appelés plis) formés de plis composites fibres/matrice pouvant présenter des

orientations diverses (Fig. 1.2). A nouveau, le contexte d'application justifie la stratification retenue, c'est-à-dire la nature des fibres, la structure du renfort ainsi que la séquence d'empilement. Compte tenu des propriétés des fibres, de leur orientation et de l'empilement des strates, ces matériaux présentent donc généralement un comportement initial anisotrope.

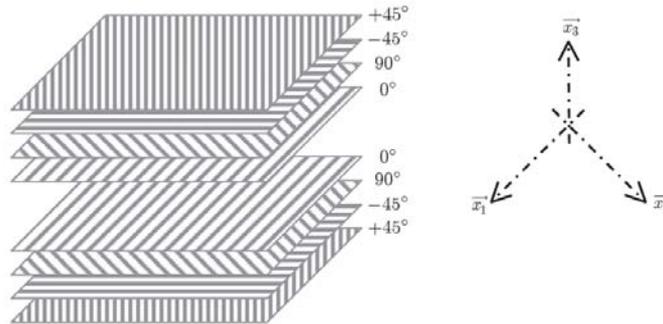


FIGURE 1.2 – Exemple de composition d'un stratifié (Bois [39])

1.2 Mécanismes d'endommagement et de rupture

L'hétérogénéité et l'anisotropie des matériaux composites rendent leurs mécanismes d'endommagement nombreux et complexes. Ces endommagements peuvent apparaître très tôt dans la vie d'une structure et constituer des zones d'amorçage de rupture macroscopique fortement préjudiciables à son intégrité. On se propose à présent de mettre en évidence ces différents mécanismes élémentaires amenant la création de surfaces de décohésion au sein des composites stratifiés.

1.2.1 Microfissuration matricielle

Dans le cas des CMC (Composites à Matrice Céramique), ce mécanisme intervient en premier lieu du fait d'une faible déformation à rupture de la matrice fragile et constitue l'un de leurs mécanismes de dégradation prépondérant (Baste [21], Berthelot [31], Evans et Zok [85], Lamon [134]). Les fissures matricielles s'initient généralement aux zones de concentration de contraintes telles que les hétérogénéités du matériau (porosités, inclusions, Park et al. [177], Fig. 1.3). Elles se propagent ensuite suivant l'orientation du chargement, notamment perpendiculairement à l'axe de traction (voir par exemple Baste [21], Baste et El Bouazzaoui [23], Guillaumat [102], Fig. 1.3) ou parallèlement à la sollicitation dans le

cas d'un cisaillement (Purslow [186], Fig. 1.4). On notera que certains auteurs distinguent la fissuration matricielle suivant sa localisation inter et intra torons (Guillaumat [102], Forio [89], Siron et Lamon [202]).

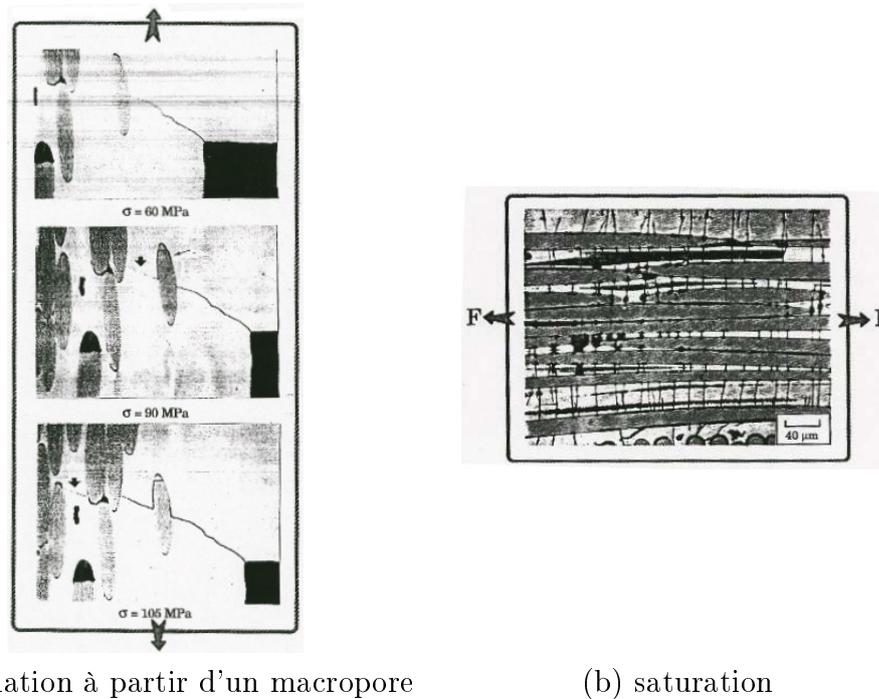


FIGURE 1.3 – Fissuration matricielle dans un stratifié SiC-SiC (Guillaumat [102])

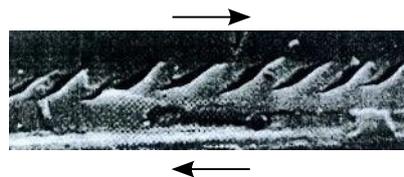


FIGURE 1.4 – Fissuration matricielle dans un stratifié carbone-époxy (Purslow [186])

1.2.2 Décohésion fibre-matrice

Pour les résines plastiques présentant une importante déformation à rupture, l'interface fibres-matrice constitue le point plus faible à l'intérieur des plis. Ces ruptures d'adhérence, généralement induites par des contraintes de cisaillement locales, se propagent le long des fibres jusqu'à former des fissures transverses (traversant l'intégralité d'un pli, Fig. 1.5) dans le cas des stratifiés unidirectionnels ou longitudinales (Fig. 1.6) dans le plan des plis dans le cas de composites tissés (Aussedat-Yahia [16]).

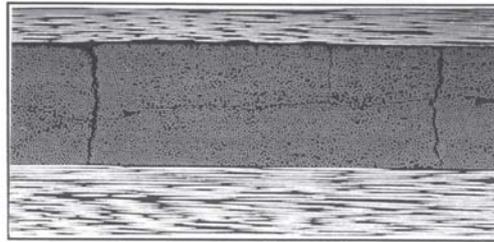


FIGURE 1.5 – Fissuration transverse induite par décohésion fibres-matrice et délaminage en tête de fissure dans un stratifié en carbone-époxy (Aussedat-Yahia [16])

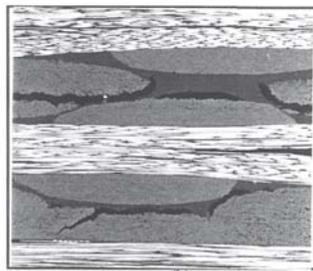


FIGURE 1.6 – Fissurations longitudinales inter-torons induites par décohésion fibres-matrice dans un stratifié en carbone-époxy (Aussedat-Yahia [16])

En ce qui concerne les CMC en revanche, ce mécanisme est associé à la fissuration matricielle lorsque ces défauts atteignent une zone de renfort (Baste [21], Marshall et al. [160]). La nature de l'interface joue dans ce cas un rôle majeur qui conditionne la progression de l'endommagement (Lamon [133], Morvan [167]) :

- si l'interface est forte, elle peut limiter voire stopper l'extension des fissures en assurant un transfert de charges vers les parties saines,
- si l'interface est faible, la fissuration matricielle est déviée à l'interface amenant comme auparavant des fissurations transverses (suivant le contour des renforts perpendiculaires à la sollicitation, Fig. 1.3, Fig. 1.7-a) ou longitudinales (à l'interface des renforts parallèles à la sollicitation, Fig. 1.7-b).

1.2.3 Rupture de fibres

Si des cassures de fibres peuvent survenir dans le prolongement des décohésions fibres-matrice (Fig. 1.8), la rupture des fibres intervient souvent, par définition du renfort, à un stade avancé de l'endommagement de la structure et de manière brutale (comportement fragile). Elles interviennent essentiellement au sein des plis les moins désorientés par rapport à la direction de la sollicitation pour lesquels les fibres reprennent le plus d'efforts.

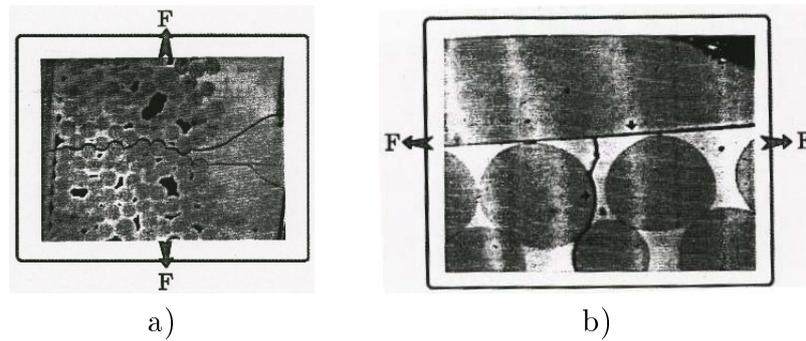


FIGURE 1.7 – Décohésion fibre-matrice dans un stratifié SiC-SiC (Guillaumat [102])

La cassure de la fibre de plus faible résistance entraîne un transfert des efforts sur les fibres voisines qui surchargées vont rompre à leur tour (Desrumaux et al. [75], Nechad [170], Fig. 1.9).

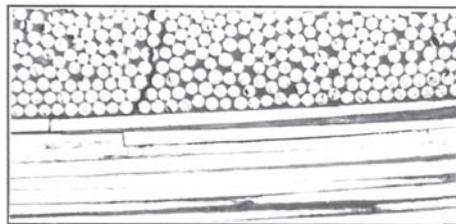


FIGURE 1.8 – Décohésion fibres-matrice et rupture de fibres dans un stratifié carbone-époxy (Aussedat-Yahia [16])



FIGURE 1.9 – Observation par fractographie de la rupture de fibres dans un stratifié en carbone-époxy (Speissberger et al. [204])

1.2.4 Délaminage

Si les trois mécanismes présentés ci-avant peuvent être considérés comme diffus au sein du pli, le délaminage ou décohésion inter-plis correspond en revanche à une dégradation

d'ordre macroscopique dans la mesure où il est visible à l'oeil nu (Fig. 1.10). Ce décollement s'amorce généralement dans les zones de forts gradients de contraintes comme les bords libres de la structure ou près des défauts macroscopiques pour progresser ensuite en séparant les couches (Allix et al. [7], Duplessis-Kergomard [81], Fig. 1.11). Les porosités générées au sein de la préforme par l'empilement des couches constituent évidemment des facteurs aggravants pour ce phénomène (Morvan [167]). Notons que dans le cas de structures impactées, le délaminage est fortement couplé avec la fissuration matricielle (Collombet et al. [67]).

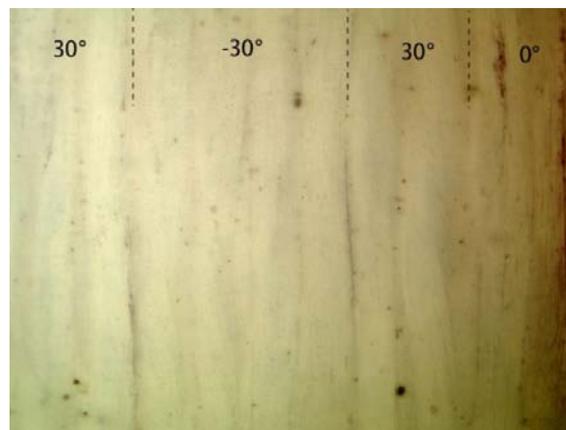


FIGURE 1.10 – Délaminages observés par photographie d'une tranche d'éprouvette stratifiée verre-époxy (Duplessis-Kergomard [81])

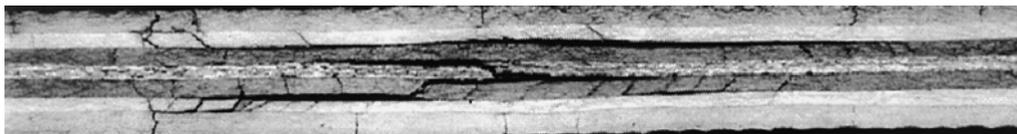


FIGURE 1.11 – Micrographie d'une section d'un stratifié carbone-époxy (Allix et al. [7])

1.2.5 Développement des mécanismes et processus de rupture

La figure 1.12 récapitule les mécanismes de dégradation présentés ci-avant et leurs échelles correspondantes. Outre la nature de la sollicitation appliquée (statique/dynamique, direction, vitesse,...), ces phénomènes sont fortement conditionnés dans leur type, évolution et cinétique par différents paramètres (on pourra consulter les analyses de Duplessis-Kergomard [81], Guillaumat [102], Purslow [186], Vu [221]) :

- la nature et les propriétés des constituants (en particulier leur mode d'endommagement propre),

- leur arrangement géométrique (proportion, forme et orientation dans chaque pli, séquence d'empilement),
- l'interaction entre les différentes phases (types d'interfaces notamment),
- le processus de fabrication (porosité initiale, contraintes résiduelles).

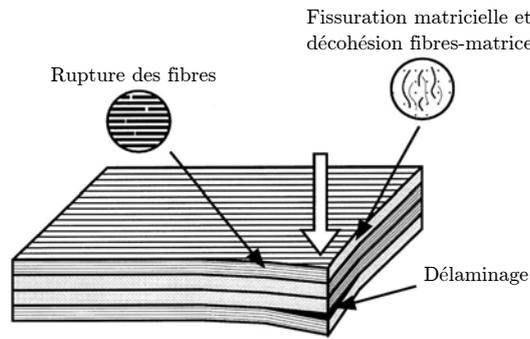


FIGURE 1.12 – Mécanismes d'endommagement dans les stratifiés (Ladevèze et al. [128])

Les travaux portant sur les émissions acoustiques, soit la mesure des ondes élastiques générées par libération d'énergie lors de processus de déformation (Benmedakhene et al. [27], Mizutani et al. [165], Nechad [170], Park et al. [177], Wevers [228]), démontrent de manière non destructive le développement simultané des différents mécanismes d'endommagement. Outre la mise en évidence d'une activité importante de décohésion au sein des matériaux (Fig. 1.13-a), l'analyse des ondes en régime transitoire permet par ailleurs de distinguer l'évolution des différents types de dommages (Dzenis et Qian [82], Forio [89], Fig. 1.13-b).

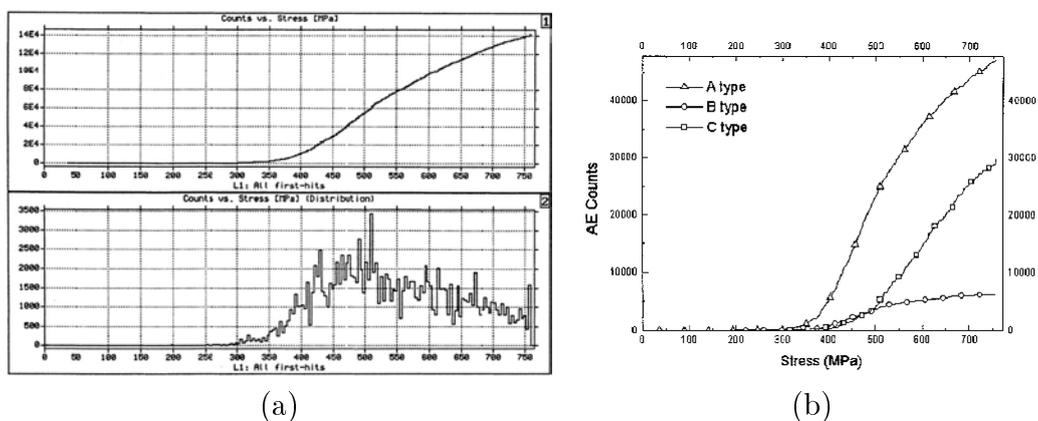


FIGURE 1.13 – Emissions acoustiques mesurées sur un stratifié graphite-époxy lors d'une traction uniaxiale (Dzenis et Qian [82]) : (a) évènements en fonction du chargement, (b) type de décohésions : fissuration matricielle (A), rupture de fibres (B), délaminage (C).

En ce qui concerne donc le processus de rupture proprement dit, il est assez difficile d'en tirer des généralités et, notamment, de définir un scénario type menant à la ruine d'une structure composite stratifiée. Si l'amorçage de l'endommagement d'un matériau intervient à l'échelle microscopique lorsque l'effort localisé atteint la limite de rupture d'un des composants ou celle de l'interface, c'est l'accumulation de ces ruptures locales ainsi que le développement des surfaces de décohésion qui est à l'origine de la rupture globale du matériau (Morvan [167], Vu [221]).

A titre d'exemple dans un CMC unidirectionnel, les premières fissures s'amorcent dans la matrice et se propagent perpendiculairement à la direction du chargement jusqu'à une zone de renfort. Suivant la rigidité de l'interface, cette fissuration peut entailler le renfort et mener à la ruine immédiate de la pièce ou bien stopper la fissure voire la dévier parallèlement à la direction du renfort. Dans ce second cas, la fissuration se poursuit ensuite jusqu'à saturation où le transfert des charges sur les fibres finit par conduire à leur rupture (Guillaumat [102], Morvan [167], Fig. 1.14).

Dans le cas en revanche de stratifiés carbone-époxy unidirectionnels, on assiste en premier lieu à des décohésions fibres-matrice suivies par l'apparition de ruptures transverses par propagation des fissures le long des fibres. Le matériau peut ensuite être le siège de délaminages suivant la structure du stratifié, le développement de l'ensemble de ces défauts menant finalement aux ruptures des fibres et à la ruine de la structure (Bois [39], Fig. 1.15). On notera pour finir que la présence d'un renfort tissé a tendance à limiter la progression des fissures empêchant en particulier le développement de ruptures transverses (Osada et al. [173], Fig. 1.16).

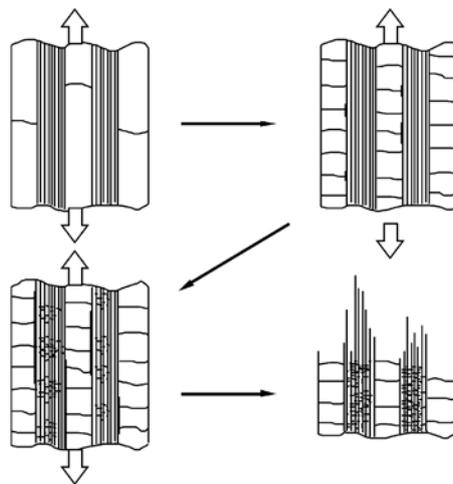


FIGURE 1.14 – Schéma du processus de rupture en traction dans les stratifiés CMC (Morvan [167])

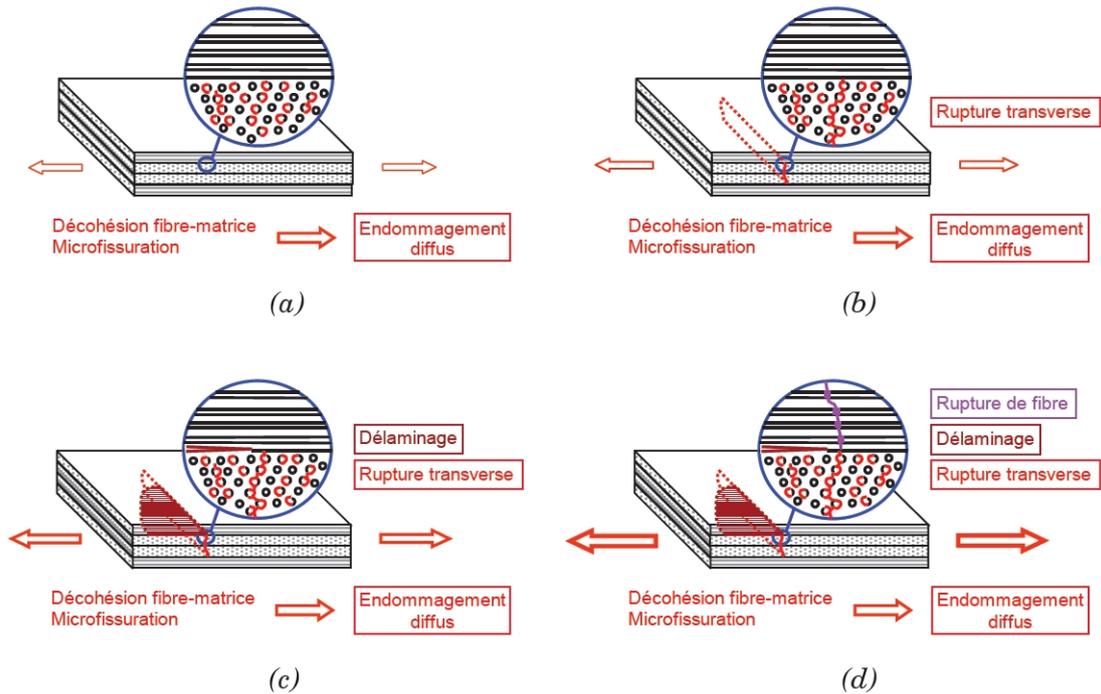


FIGURE 1.15 – Schéma du processus de rupture en traction dans les stratifiés carbone-époxy (Bois [39])

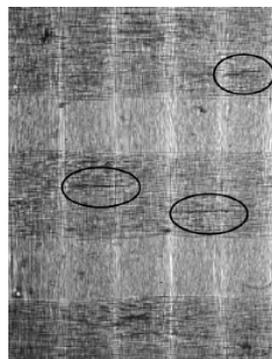


FIGURE 1.16 – Blocage des fissures dans un renfort verre tissé satin (Osada et al. [173])

Pour conclure sur les mécanismes d'endommagement présentés ci-dessus, il est important de souligner que les composites stratifiés se distinguent par des modes d'endommagement d'orientations diverses. Ils sont en effet affectés par des modes de fissurations guidées à la fois par le chargement (fissuration matricielle) et par les renforts du matériau (décohésion fibre-matrice, rupture des fibres et délaminage). Outre les spécificités classiques de l'endommagement, nous allons voir à présent dans quelle mesure cette particularité influe sur leur réponse macroscopique.

1.3 Comportement macroscopique

On se propose ici de passer en revue les principales conséquences à l'échelle macroscopique des endommagements microstructuraux qui viennent d'être évoqués.

1.3.1 Réponse globale

Un des premiers aspects à signaler concerne la non linéarité de la réponse contrainte-déformation. Cette non linéarité trouve son origine essentiellement dans les sources suivantes démontrées par des cycles de charge-décharge :

- la dégradation progressive et irréversible des propriétés mécaniques induite par le développement des surfaces de décohésion (microfissures internes à la matrice ou aux interfaces fibre-matrice) ; cet aspect, caractéristique l'endommagement, est détaillé par la suite,
- des déformations résiduelles qui peuvent résulter d'une libération de contraintes engendrées lors de la fabrication mais surtout de blocages dans la refermeture de microfissures dus à la rugosité des contacts ou à des déplacements relatifs des lèvres¹ modifiant leur position initiale (Aussedat-Yahia [16], Camus et al. [48], Siron et Lamon [202], Fig. 1.17),
- le cas échéant, des déformations résiduelles induites par la viscoélasticité de la matrice.

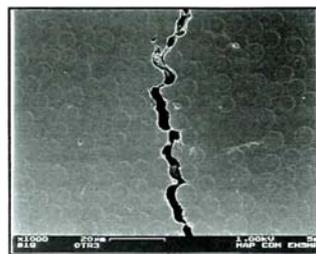


FIGURE 1.17 – Ouverture résiduelle de fissure avec présence de déchets dans un stratifié en carbone-époxy (Aussedat-Yahia [16])

De même, à niveau d'endommagement figé (comme l'indique l'arrêt des émissions acoustiques, Siron et Lamon [202], Fig. 1.18-c et d), ces matériaux présentent un comportement non linéaire sous forme de boucles d'hystérésis durant les cycles de décharge-recharge qui est représentatif de phénomènes dissipatifs attribués :

1. Ces glissements sont dits interfaciaux dans le cas de décohésions fibre-matrice.

- au glissement relatif avec frottement des lèvres des microfissures dont les surfaces sont en général irrégulières (Fig. 1.17),
- le cas échéant, à la viscoélasticité de la matrice.

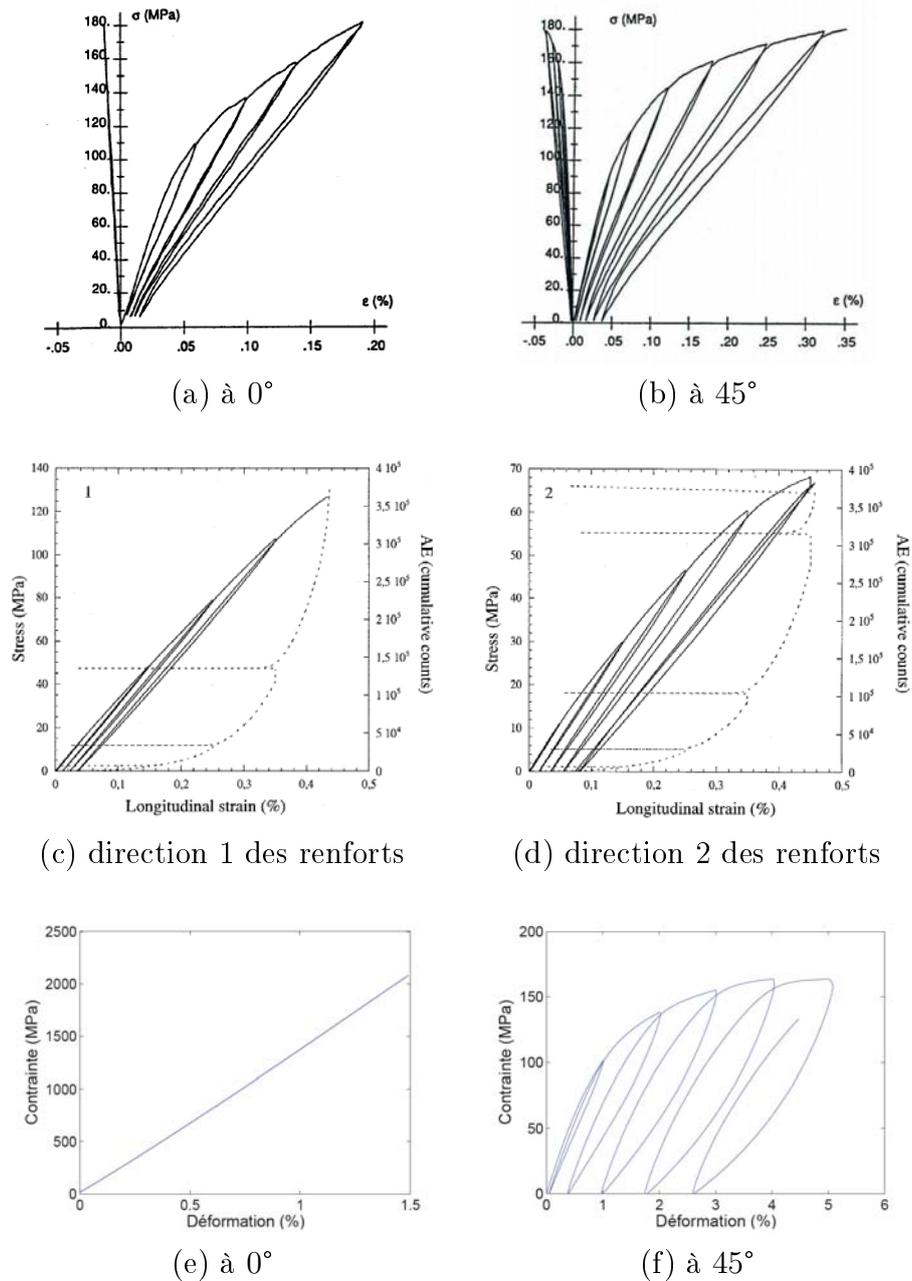


FIGURE 1.18 – Réponse contrainte déformation sous traction uniaxiale : (a)-(b) stratifié SiC-SiC (Gasser [92]), (c)-(d) stratifié C-C (Siron et Lamon [202]), (e)-(f) stratifié carbone-époxy (Bois [39])

Suivant la sollicitation appliquée et la configuration du stratifié, et donc suivant les constituants du composite mobilisés et les phénomènes microstructuraux les affectant, cette non linéarité est de ce fait plus ou moins importante. Si l'on considère en effet un chargement d'un stratifié unidirectionnel dans le sens des fibres, pour lequel les renforts dominant le comportement, on assiste à un comportement global élastique linéaire fragile représentatif de celui des fibres. Lorsqu'en revanche la matrice reprend une grande partie de l'effort, la fissuration matricielle et/ou la décohésion fibre-matrice peuvent induire une forte dégradation des modules élastiques (en particulier pour les CMC, Allix et al. [5], Evans et Zok [85], Forio [89], Gasser [92], Guillaumat [102]) et le comportement visqueux d'une matrice peut amener aussi d'importantes déformations résiduelles (Aussedat-Yahia [16], Blassiau [35], Périé [187]). Dans le même esprit, l'amplitude des hystérésis observés est directement liée aux comportements locaux.

A titre d'exemple, la figure 1.18 propose quelques unes de ces réponses typiques en traction. Si l'on compare le cas d'un stratifié tissé SiC-SiC à 0° et à 45° (Fig. 1.18-a et b), le développement de la fissuration matricielle plus notable à 45° engendre en effet une dégradation du module d'Young axial et du coefficient de Poisson associé aux directions axiales et transversales, des déformations résiduelles d'endommagement ainsi qu'un phénomène d'hystérésis plus importants. Dans le cas d'un stratifié C-C sollicité dans les axes de ses renforts, on peut identifier les directions les plus affectées par l'endommagement. L'étude similaire d'un stratifié carbone-époxy (Fig. 1.18-e et f) illustre également le rôle des fibres et de la matrice suivant le chargement.

1.3.2 Dégradation des propriétés élastiques

Les méthodes acoustiques basées sur la propagation d'ondes ultrasonores ont permis de faire dans ce domaine d'importants progrès de compréhension. Essentiellement appliquées aux composites à matrice fragile, elles mettent clairement en évidence l'effet de l'endommagement sur les propriétés mécaniques ainsi que l'évolution des symétries du matériau (Aristégui [12], Barret [19], Morvan [167]).

Elles indiquent d'une part le développement précoce de la fissuration matricielle pour les CMC au travers de la dégradation des composantes du tenseur d'élasticité (en particulier C_{33} et C_{44} en notation de Voigt sur la figure 1.19 représentant le résultat d'un essai dans les axes). Si ces résultats démontrent en outre que l'endommagement affecte non seulement les propriétés axiales du matériau mais aussi les propriétés transversales et de cisaillement, ils confirment également l'orientation préférentielle des fissures perpendiculairement à l'axe de traction. Cette dernière induit en effet une dégradation majeure de

la composante axiale du tenseur d'élasticité, en l'occurrence C_{33} sur la figure 1.19 (Baste et Aristégui [22], Baste et El Bouazzaoui [23], El Bouazzaoui et al. [43], Camus et al. [48]). La traduction de ces résultats sur le tenseur d'élasticité en terme de module d'Young du matériau permet de visualiser encore mieux cette spécificité. L'étude de Baste et Aristégui [22] sur un C-C-SiC équilibré montre en effet qu'à partir de propriétés élastiques dans le plan principal ($\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$) initialement quasi-isotropes, l'endommagement généré par une traction uniaxiale selon \mathbf{x}_3 conduit à une dégradation majeure des modules d'Young dans cette direction (Fig. 1.20-a).

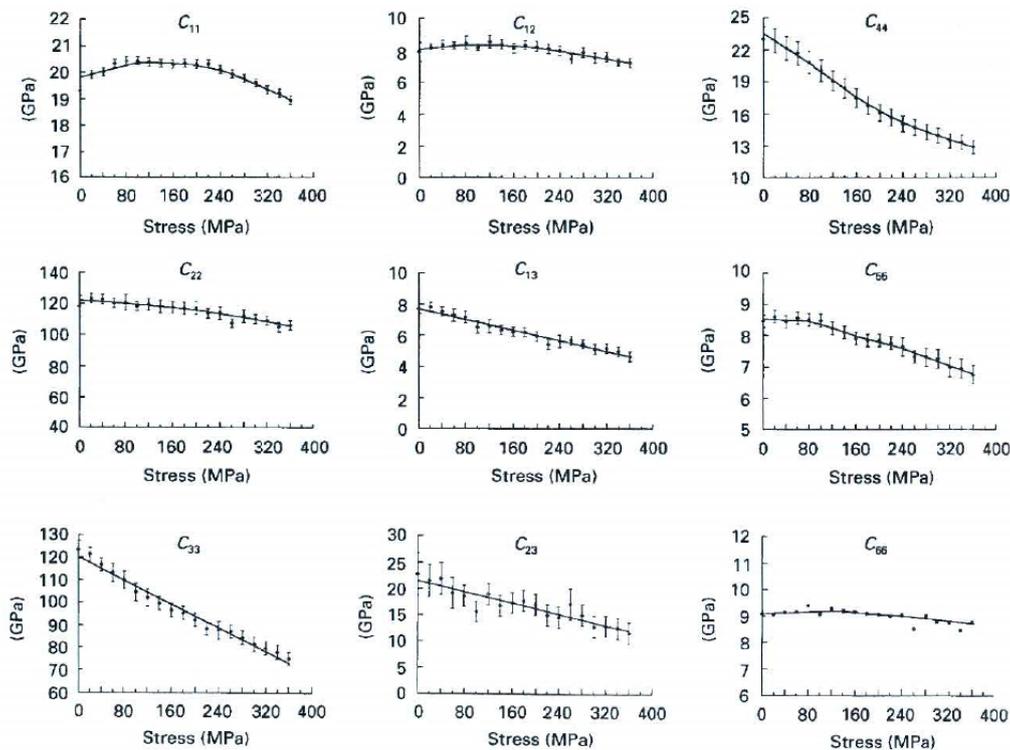


FIGURE 1.19 – Variation des composantes du tenseur d'élasticité dans la base orthonormée ($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$) d'un stratifié C-SiC en fonction de la contrainte de traction uniaxiale appliquée suivant \mathbf{x}_3 correspondant à l'un des sens des fibres (Baste et El Bouazzaoui [23])

1.3.3 Interaction entre les anisotropies initiale et induite

Comme il a été évoqué précédemment, les composites stratifiés présentent une anisotropie initiale. Le développement des surfaces de décohésion, elles-mêmes orientées, vont induire une perturbation de cet état. Pour illustrer ceci, reprenons l'étude de Baste et Aristégui [22] sur un C-C-SiC ayant une symétrie initiale orthotrope quasi-hexagonale :

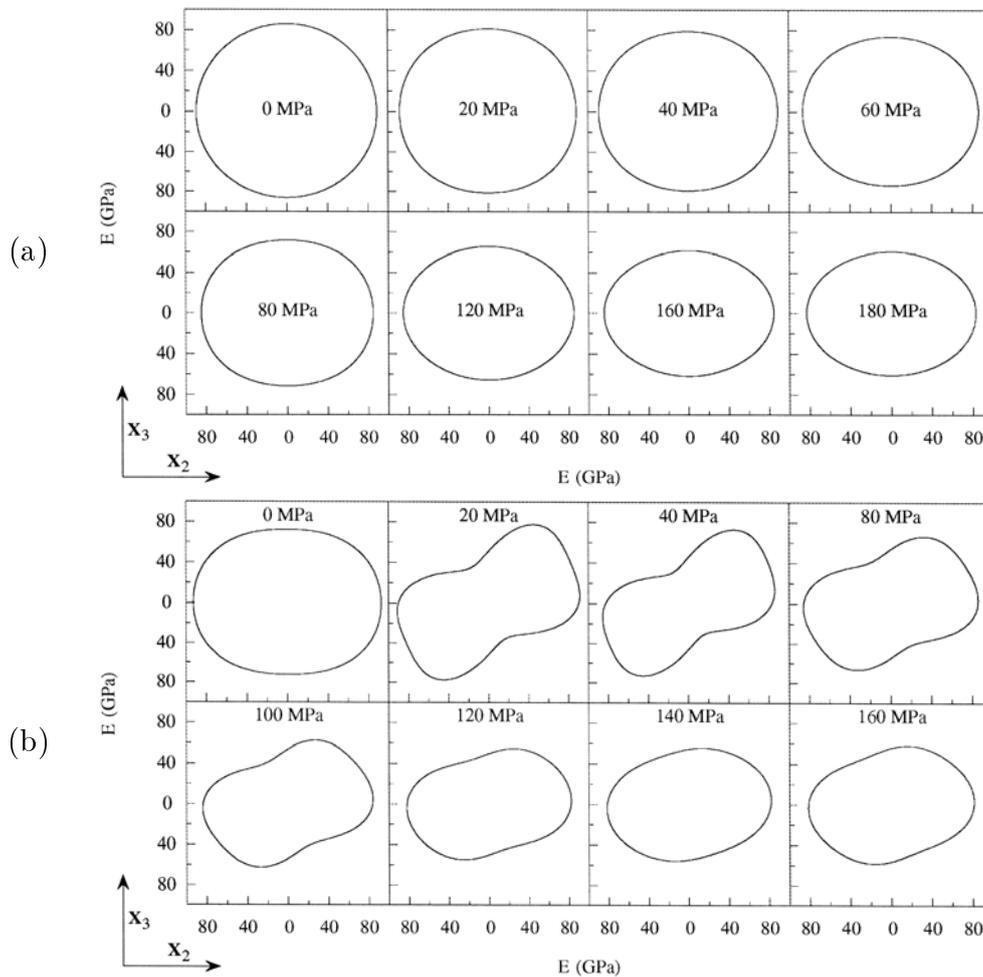


FIGURE 1.20 – Module d'Young $E(\mathbf{m})$ associé à la direction de vecteur unitaire \mathbf{m} appartenant au plan $(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ en fonction de la contrainte de traction appliquée dans la direction \mathbf{x}_3 pour un composite C-C-SiC équilibré : a) \mathbf{x}_3 correspond à l'un des sens des fibres (0°), b) \mathbf{x}_3 forme un angle de 30° avec l'un des sens des fibres (Baste et Aristégui [22])

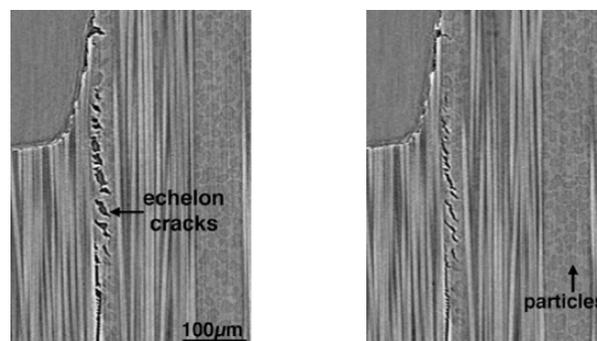
- pour le cas d'une sollicitation correspondant à une direction principale du matériau (à 0°), le matériau résultant demeure orthotrope mais de type orthorhombique ; le processus de dégradation préserve donc les directions principales de l'élasticité, mais modifie l'amplitude de l'orthotropie en détruisant ici son caractère hexagonal apporté par l'équilibre des tissus de carbone (Fig. 1.20-a),
- pour une sollicitation hors-axes à 30° , on assiste en revanche au développement de plusieurs modes de fissuration d'orientations diverses (fissuration d'abord matricielle puis déviée par les renforts en décohésion fibre-matrice) amenant à déviations des directions principales et à une anisotropie résultante beaucoup plus complète (Fig. 1.20-b).

De façon plus générale, l'anisotropie résultante du matériau est une combinaison complexe de la symétrie matérielle initiale du matériau et de l'anisotropie induite par l'endommagement. Cette dernière peut amener :

- soit une modification d'amplitude de l'élasticité en maintenant les directions principales initiales voire éventuellement le type de symétrie matérielle, par exemple lors d'essais dans les axes, et ce éventuellement de façon différente suivant les axes sollicités (Fig. 1.18-c et d),
- soit modifier intégralement la nature de la symétrie du matériau (généralement lors d'essais hors axes).

1.3.4 Effet unilatéral

Le dernier aspect sur lequel il convient d'insister porte sur la possibilité qu'ont les fissures créées d'être ouvertes ou fermées selon le chargement (Fig. 1.21) et d'agir différemment sur le comportement macroscopique du matériau selon le cas. C'est ce que l'on appelle couramment l'effet unilatéral.



(a) ouvert sous charge (b) fermé après décharge

FIGURE 1.21 – Etat de fissures de cisaillement dans un stratifié en carbone-époxy (Moffat et al. [166])

L'illustration de ce comportement typique de la fissuration se fait pour l'essentiel pour les matériaux à matrice céramique au travers d'essais de traction avec décharges suivies de compression. En effet, ces matériaux sont stables en compression avec un faible endommagement alors que leur réponse en traction est clairement élastique-endommageable (Aubard [13], Camus et al. [48], Gasser [92]). Notons que cet effet a été mis en évidence au travers d'autres types d'essais pour les matériaux isotropes telles que les roches (Ikogou [115], Sibai et al. [199]).

Durant ces essais, l'endommagement évolue donc par l'application d'une charge de traction croissante. Pour chaque cycle, l'arrêt des émissions acoustiques signalées précédemment (Siron et Lamon [202], Fig. 1.18-c et d) indique donc un état figé de celui-ci durant la phase de décharge et durant le début de la compression. Le comportement non linéaire observé pendant ces deux phases met clairement en évidence la dépendance des propriétés élastiques du matériau avec l'état d'ouverture-fermeture des fissures : le chargement compressif provoque en effet une refermeture des fissures et conduit à une restitution quasi complète des propriétés élastiques (module d'Young axial et coefficient de Poisson associé aux directions axiales et transversales) à leur valeur initiale (Fig. 1.22).

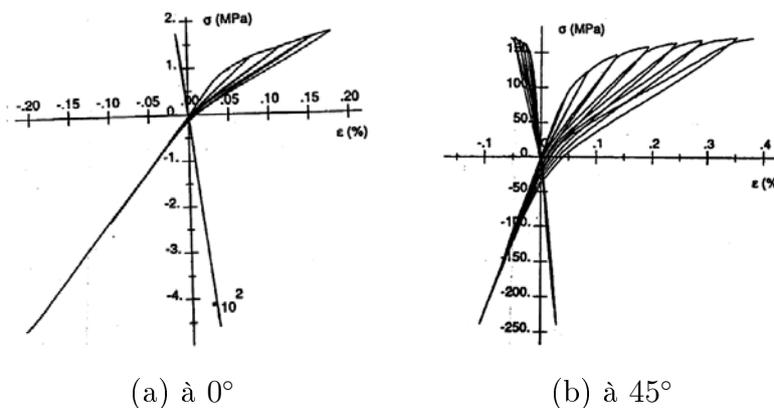


FIGURE 1.22 – Essais de traction-compression sur un stratifié SiC-SiC (Gasser [92])

Pour compléter cette analyse, citons les travaux de Morvan et Baste [167, 168] qui ont réalisé un suivi par mesures ultrasonores de l'élasticité de stratifiés tissés C-SiC lors d'un essai de traction avec cycles de charge-décharge (Fig. 1.23-a). Sur la figure 1.23-b est ainsi représentée l'évolution de certaines composantes du tenseur de souplesse durant chacun des cycles. Les résultats par cycle ont été décalés pour davantage de clarté ; dans chaque cycle, le premier point expérimental correspond à la valeur de la souplesse à charge nulle, le dernier point à celle du maximum du cycle. Ces résultats illustrent bien les effets d'activation/désactivation de l'endommagement suivant le chargement appliqué. Durant la décharge, la souplesse est en partie restaurée par la fermeture des fissures, sans recouvrer cependant sa valeur initiale (vierge d'endommagement). Lors de la recharge, les fissures se rouvrent et redeviennent actives en conférant à la souplesse sa valeur dégradée du cycle précédent. On signalera également dans ce cas la réversibilité du passage entre les états ouvert et fermé avec une évolution en charge-décharge qui s'effectue selon le même trajet.

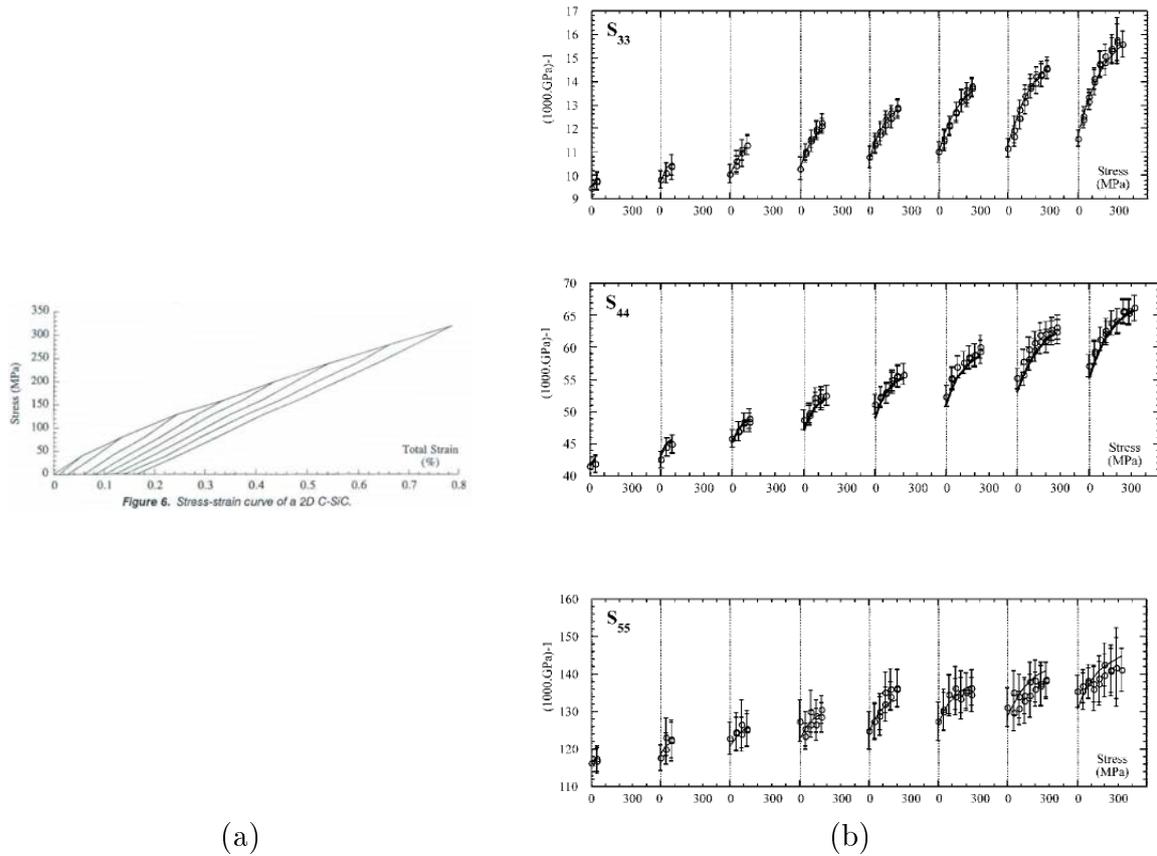


FIGURE 1.23 – Etude des effets d’ouverture-fermeture de fissures dans un stratifié C-SiC en fonction de la contrainte de traction uniaxiale appliquée suivant \mathbf{x}_3 correspondant à l’un des sens des fibres (Morvan et Baste [167, 168]) : (a) courbe contrainte-déformation, (b) variation des composantes du tenseur de souplesse dans la base orthonormée $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ durant chaque cycle de charge-décharge

1.4 Modélisations de l’endommagement

Les mécanismes physiques d’endommagement fragile et leurs principales conséquences macroscopiques ayant été ainsi identifiés, on se propose à présent de passer en revue les modélisations de ce comportement développées pour les composites monolithiques.

Dans le cadre de la Mécanique de l’Endommagement (*Continuum Damage Mechanics*), l’échelle du Volume Élémentaire Représentatif (VER) est choisie telle que le milieu puisse être considéré comme continu (matériau « homogène »). Ceci suppose implicitement que les décohésions prises en compte se développent de façon diffuse au sein de celui-ci. Si la microstructure des composites est hétérogène du fait de la présence de matrice et de renforts, une hétérogénéité supplémentaire intervient dans le cas des stratifiés monolithiques lorsque les plis qui les constituent, composés de matériaux constitutifs proches

mécaniquement, différent vis-à-vis du type ou de l'orientation des renforts. De plus, le cas du délaminage peut difficilement être intégré à l'approche endommagement du fait de la taille des défauts associés et de leur caractère ponctuel (Perreux et Oytana [183]). C'est pourquoi, les modélisations de l'endommagement dans les composites monolithiques ont été développées à deux échelles distinctes :

- pour les stratifiés résultant de l'empilement de plis identiques, l'échelle d'étude correspond directement à l'échelle du matériau composite (« macro-modèle »); si le calcul de structures s'avère simplifié dans ce cas, il faut souligner qu'implicitement une telle représentation ne peut intégrer de défauts de délaminage ;
- pour les stratifiés résultant de l'empilement de plis différents, l'échelle de description est celle du pli élémentaire (« méso-modèle »); le stratifié est ensuite schématisé comme un empilement de ces couches homogènes et éventuellement d'interfaces intra-laminaires de façon à prendre en compte le délaminage (Allix et Ladevèze [6], Ladevèze et al. [129, 128, 131], Chaboche et al. [60], Renard et Thionnet [193]).

Quelle que soit l'échelle d'étude cependant, les principes de modélisation des mécanismes diffus de décohésion reposent sur les mêmes bases. Par conséquent, il nous a semblé naturel de les associer dans cette revue bibliographique.

Depuis quelques décennies, la Mécanique de l'Endommagement a réalisé des progrès remarquables. L'étude des matériaux initialement isotropes fait l'objet de la plus grande part des travaux existants et des avancées intéressantes sont notamment à souligner concernant la prise en compte simultanée de l'anisotropie induite et des effets unilatéraux (voir les revues de Dragon et Halm [80], Krajcinovic [120, 122]). Conformément au contexte isotrope, les représentations de l'endommagement des matériaux initialement anisotropes se déclinent en deux grandes classes (Krajcinovic et al. [123]) :

- d'une part, les approches micromécaniques, réputées pour leur sens physique, qui consistent à établir le comportement résultant d'un VER endommagé donné ainsi que les réponses locales à l'aide d'un processus d'homogénéisation (changement d'échelle);
- d'autre part, les approches macroscopiques, dont les lois de comportement sont postulées *a priori*; leur caractère ouvert offre un large champ d'applications et leur simplicité est particulièrement judicieuse pour la prise en compte des couplages et la mise en oeuvre pratique; par ces aspects, le contexte macroscopique a été majoritairement privilégié par les modélisateurs, amenant une littérature plus abondante.

Ces modélisations s'appuient sur le formalisme classique de la thermodynamique des

processus irréversibles où les évolutions dissipatives telles que l'endommagement sont abordées à l'aide de variables dites internes (Germain et al. [96]). On se propose dans ce qui suit de réaliser un éclairage des travaux existants (micromécaniques et macroscopiques) au travers de certains points qui nous semblent cruciaux dans la représentation du comportement élastique endommageable des matériaux anisotropes. Notons que le traitement des déformations anélastiques ainsi que la question de l'évolution des dommages ne sont pas examinés ici.

1.4.1 Variable d'endommagement

La variable interne d'endommagement doit refléter dans sa forme mathématique les aspects essentiels des mécanismes microstructuraux de décohésion considérés.

Définition

Dans le cadre des approches microscopiques, leur choix est intimement lié au VER représenté et défini au départ, en particulier le type de défauts considérés et les paramètres microstructuraux jugés importants pour les décrire (disposition spatiale, orientation, géométrie, voir par exemple les discussions de Krajcinovic [120, 121], Tsukrov et Kachanov [220]). On retrouve ainsi classiquement des caractéristiques adimensionnelles scalaires telles que les fractions volumiques, longueurs ou aires caractéristiques (Berthelot et al. [31, 33], Evans et al. [84], Kwon et Berner [125], Lamon [134]), soit plus généralement des densités de fissures² traduisant l'importance des surfaces de décohésion au sein du matériau (Baste et Aristégui [22], Bouazzaoui et al. [43], Gruescu [99], Horii et Nemat-Nasser [114], Mauge et Kachanov [163], Morvan et Baste [168], Tsukrov et Kachanov [220]).

En ce qui concerne les démarches macroscopiques en revanche, cette question reste encore un thème de débat (Krajcinovic et al. [121, 124]), et les modèles existants emploient des variables de nature distincte :

- La plupart reposent sur une définition macroscopique classique telle qu'initée par Kachanov [117] et basée sur la mesure des conséquences de l'endommagement. Le concept de contrainte effective associé à un principe d'équivalence (en déformation ou en énergie, Lemaitre et Chaboche [145]) permet d'établir le lien entre le paramètre d'endommagement et les variations de propriétés élastiques induites par l'endommagement (Aubard et al. [15], Baste et Gérard [24], Chaboche et al.

2. Un paramètre de densité classique est notamment celui introduit par Budiansky et O'Connell [46].

[58, 60, 61, 62, 153, 155], Ju [116], Lam et Zhang [132],...). Dans les travaux de Ladevèze et al. [5, 93, 94, 126, 127, 129, 130], la variable d'endommagement correspond au tenseur d'élasticité caractérisé par deux fonctions de distribution, à savoir les variations spatiales du module d'Young et du module en déformation volumique, qui sont développées en série de Fourier à différents ordres (voir aussi He et Curnier [111]);

- Dans le même esprit que la démarche micromécanique, d'autres approches introduisent quant à elles des indicateurs définis à partir de grandeurs microstructurales (Allen et al. [4], Matzenmiller et Sackman [162], Renard et Thionnet [192, 216], Talreja [210]), dont la forme est pour certains motivée par des considérations micromécaniques (Burr et al. [47], Gruescu [99], Halm et al. [106], Perreux et Oytana [183], Talreja [209, 211, 212]); dans ce cas, les variables d'endommagement caractérisent clairement l'état d'endommagement du matériau au travers par exemple de la densité de défauts.

Si la première stratégie s'avère avantageuse du point de vue de l'identification (*via* le comportement en décharge où l'endommagement est figé), la seconde en revanche propose une représentation physique du phénomène qui caractérise véritablement l'origine des phénomènes de décohésion mis en jeu.

Ordre tensoriel

Il convient d'évoquer ensuite la question de l'ordre tensoriel des variables internes retenues pour lequel plusieurs solutions sont certes envisageables (Krajcinovic [120]), mais amènent à différentes conclusions dans le cas particulier des matériaux composites. Ainsi, les paramètres scalaires ne contiennent pas d'aspects directionnels. Leur utilisation est donc adaptée aux cas de couples matériaux/sollicitations présentant effectivement des directions préférentielles de dommages connues et fixes (*a priori* celles de sa microstructure initiale données par l'orientation des renforts) ou bien résulte d'un choix volontaire du modélisateur qui souhaite se limiter à la représentation des mécanismes parallèles ou perpendiculaires à ces axes. Si le matériau est au contraire affecté par un endommagement notable dont l'orientation est par exemple conditionnée par le chargement, l'association de l'orientation des fissures donnée par leur normale unitaire (pour les approches microscopiques) ou bien le recours à des tenseurs d'ordres tensoriels supérieurs (pour les approches macroscopiques, Maire et Chaboche [153]) s'avère indispensable.

Description des mécanismes

Le dernier aspect à souligner concerne la façon dont sont pris en compte les différents mécanismes de décohésion affectant les matériaux composites (décrits au 1.2). En effet, certains modèles intègrent l'ensemble de ces mécanismes dans des variables globales (Aubard et al. [15], Biegler et Mehrabadi [34], Cazacu et al. [52], Gasser et al. [94], Gruescu [99], Halm et al. [106], Ladevèze [127], Perreux et Oytana [183], Renard et Thionnet [192, 216], Talreja [210, 209]) alors que d'autres les séparent en leur affectant des variables d'endommagement distinctes. Précisément dans ce dernier cas, sont introduites :

- des variables scalaires $\{\alpha\}$, souvent associées aux modes d'endommagements orientés par la structure du composite tels que la décohésion fibres-matrice et la rupture de fibres (Allix et al. [5], Baste et Aristégui [22], Berthelot et al. [33, 31], El Bouazzaoui et al. [43], Burr et al. [47], Chaboche et al. [58], Evans et al. [84], Gasser et al. [93], Hochard et al. [113], Ladevèze et al. [129, 130], Lamon [134], Matzenmiller et Sackman [162], Morvan et Baste [168], Talreja [212]),
- et le plus souvent une variable tensorielle (généralement du second ordre) \mathbf{d} , pour caractériser les endommagements dont l'orientation dépend du chargement, soit la fissuration matricielle essentiellement (Allen et al. [4], Maire et Lesne [155], Chaboche et al. [58, 59, 61, 62], Talreja [211]).

Comme précédemment, on peut apprécier dans la sélection de variables globales la simplicité du traitement, des variables distinctes permettant en revanche d'identifier les effets individuels de chaque mécanisme (Maire et Lesne [154]).

1.4.2 Interaction entre les anisotropies

Dans le cadre des approches micromécaniques, les modèles d'homogénéisation simplifiés (par exemple démarches type « shear lag analysis », voir Berthelot [31]) n'explicitent généralement pas l'interaction entre l'anisotropie structurale du matériau et celle provoquée par le développement des défauts ; leurs potentialités de représentation d'une modification de symétrie matérielle restent en outre toujours limitées. Parmi les approches apportant une réponse explicite et intéressante à cette question, on peut distinguer globalement deux grandes écoles :

- les formalismes basés sur la résolution du problème de l'inclusion d'Eshelby [83] où les fissures sont modélisées comme des ellipsoïdes aplatis (Laws [137, 138, 139]) ;

dans la plupart de ces études toutefois, les configurations de dommages considérées correspondent à des fissures dont les normales coïncident avec les axes principaux du matériau de façon à obtenir une solution analytique (El Bouazzaoui et al. [43], Morvan [167]); l'analyse tridimensionnelle de fissures (notamment de forme « penny-shaped », *i.e.* ellipsoïde en forme de pièce de monnaie) d'orientation arbitraire se heurte en effet à de grandes difficultés en milieux anisotropes, ce qui nécessite des traitements numériques (Barret [19], Baste et Aristégui [22]) ou des hypothèses simplificatrices portant sur l'anisotropie initiale (Laws [140] sur le cas de l'isotropie transverse) ou sur la forme des dommages (Gruescu et al. [99, 100]) sur une fissure représentée par un cylindre infini de section elliptique);

- les approches directes basées sur les solutions analytiques de la Mécanique de la Rupture établies à partir du formalisme des potentiels complexes (Lekhnitskii [143, 144], Savin [197], Sih et al. [201]). Il convient de préciser que le cas de fissures d'orientation arbitraire n'est pour l'heure traité qu'en élasticité plane pour laquelle on dispose des expressions analytiques des sauts de déplacement des lèvres de fissures nécessaires à l'obtention des propriétés élastiques effectives des matériaux (Mauge et Kachanov [163], Tsukrov et Kachanov [220]). Les raisonnements sont également menés en majorité à partir d'un formalisme en contrainte, plus restrictif du point de vue du calcul de structures. Notons pour ce dernier point que les travaux amorcés par Gruescu [99] (sur la base de ceux d'Andrieux et al. [10, 11] en milieux isotropes) offrent des perspectives fort intéressantes.

En ce qui concerne les approches macroscopiques, très peu abordent explicitement cette problématique. Un premier constat peut être fait tout d'abord vis-à-vis de l'ordre tensoriel des variables internes choisies. En effet, l'emploi de variables scalaires suppose que l'anisotropie induite possède les mêmes axes que l'anisotropie initiale (voir ci-avant). Le développement de l'endommagement peut alors modifier l'amplitude de cette anisotropie initiale mais sans changer la symétrie matérielle du composite. Les variables d'ordres tensoriels supérieurs permettent en revanche de représenter des anisotropies induites, et donc résultantes, plus complexes et ce, d'autant plus que l'on monte dans les ordres (voir les analyses de Cormery et Weleman [70], Lubarda et Krajcinovic [148], Tikhomirov et al. [218] en milieux isotropes).

Même si elles peuvent conduire à un nombre élevé de paramètres, les formulations macroscopiques qui s'appuient sur la théorie de représentation des fonctions tensorielles (Boehler [38], Spencer [203]) offre la meilleure visibilité des effets d'interaction et de couplage entre l'anisotropie primaire et celle induite par l'endommagement (Biegler et

Mehrabadi [34], Cazacu et al. [52], Cowin [72], Gruescu [99], Halm et al. [106], Lam et Zhang [132], Matzenmiller et Sackman [162], Talreja [209, 211, 212]). L'anisotropie initiale y est décrite par l'introduction de tenseurs de structure (*fabric tensors* en anglais) permettant de distinguer clairement les différentes contributions à l'énergie du matériau relatives respectivement :

- au matériau sain (anisotropie initiale),
- aux effets « isotropes » de l'endommagement (c'est-à-dire conservant la symétrie matérielle voire les directions principales initiales du matériau),
- aux couplages faibles et forts entre l'anisotropie initiale et l'anisotropie de l'endommagement.

Le type d'invariants retenus et les valeurs des paramètres matériaux correspondants influencent alors la nature de ce couplage (voir les analyses de Cazacu et al. [52], Cowin [72]). Toujours dans ce même cadre, on soulignera les travaux intéressants de Thionnet et Renard [217] (voir aussi Allen et al. [4]) qui s'inspirent de la micromécanique et de l'analyse des déplacements locaux des lèvres des fissures donnés par les solutions en élasticité orthotrope plane (dans l'esprit des travaux d'Andrieux [10] sur les matériaux isotropes) pour déduire l'énergie du matériau, faisant apparaître explicitement les contributions « normales » et « tangentielles » d'une famille de fissures parallèles sur le comportement du matériau.

1.4.3 Effet unilatéral

Enfin, l'une des difficultés importantes pour les modélisations de l'endommagement porte sur la prise en compte des effets unilatéraux liés à l'ouverture-fermeture des fissures, que les matériaux soient d'ailleurs initialement isotropes ou anisotropes. L'intégration de ce phénomène dans les lois de comportement permet de représenter d'une part, la non linéarité dans la réponse du matériau provoquée par le changement d'état des fissures à endommagement figé mais également, la dissymétrie du comportement entre les sollicitations de traction et de compression (voir la démarche alternative employée par Weleman et Goidescu [227]).

Les approches micromécaniques intégrant ce phénomène sont assez rares et la plupart des développements considèrent toutes les fissures dans leur état ouvert, voire une partie seulement (Morvan et Baste [168]), mais sans aborder la question de leur fermeture et de leur possible désactivation. Pour les démarches de type Eshelby, on notera l'intérêt des

travaux de Deudé et al. [76]³ dont l'idée repose sur une différenciation de la modélisation de l'élasticité des fissures en milieux isotropes suivant leur état : élasticité nulle dans l'état ouvert indiquant qu'elles ne supportent pas de contraintes, élasticité fictive dans l'état fermé permettant de rendre compte de la nullité des contraintes tangentielles sur leurs lèvres. Nous constaterons toutefois au chapitre 3 que la complexité apportée par l'anisotropie initiale de la matrice ne permet pas pour l'heure de postuler a priori la forme à donner à cette élasticité fictive du fait des couplages entre les contraintes normales et tangentielles sur les lèvres des fissures fermées. Parmi les approches directes, Gruescu [99] est le seul à notre connaissance à avoir tenté de résoudre ce problème ; même si certaines déficiences existent dans la modélisation faite des fissures fermées, cela ne remet pas en cause l'adéquation de sa démarche énergétique en déformation (similairement à Andrieux et al. [10, 11]) pour le cas d'une matrice orthotrope 2D affaiblie par des fissures d'orientation arbitraire.

Au niveau des démarches macroscopiques, la littérature est beaucoup plus riche de propositions. Cette question de l'effet unilatéral est intimement liée d'abord au choix de la variable d'endommagement. La définition macroscopique évoquée précédemment présente ici ses limites car la relation qui, à la microstructure du matériau associe ses propriétés élastiques, n'est pas dans ce cas une application (voir la discussion de Swoboda et Yang [208]). Les défauts agissent en effet différemment suivant leur état d'ouverture-fermeture, ce qui se traduit par une élasticité différente à niveau d'endommagement identique (voir 1.1.2). Cela conduit certaines approches à doubler le nombre de variables d'endommagement introduites pour dissocier les états de traction de ceux de compression (Ladevèze et al. [126, 127, 130]). D'autres modélisateurs introduisent des variables ou bien des paramètres dépendants spécifiques pour la caractérisation de l'effet unilatéral, le plus souvent inspirés de la micromécanique : énergies bloquées par la fermeture de défauts (travaux de Boursin et al. [44], Chaboche et Maire [62]), paramètre tensoriel d'ordre quatre (Halm et al. [106]), proportion de fissures ouvertes (Gérard et Baste [104]), mode et ouverture des fissures (Thionnet et Renard [217]),..

La stratégie de prise en compte du comportement unilatéral rencontre ses principales difficultés dans le cas d'une description non scalaire de l'endommagement. En effet, la plupart des formulations macroscopiques intégrant l'anisotropie induite s'appuient alors sur le principe d'une décomposition spectrale des variables d'état pour distinguer les contributions des dommages suivant leur état (Chaboche [54, 56, 62], Desmorat [74],

3. Ce cadre permet en outre la prise en compte d'interactions entre les microfissures par le biais par exemple de schémas type Mori-Tanaka (Benveniste [29]) ou Ponte-Castaneda et Willis [185] (voir Zhu et al. [231, 232]).

Dragon et Halm [79, 105], Ju [116], Ladevèze [126, 127]). Outre une représentation purement phénoménologique des effets unilatéraux restreinte à certaines directions principales, cette démarche conduit à de graves inconsistences mathématiques ou thermodynamiques : discontinuités de la réponse contrainte-déformation, non existence du potentiel thermodynamique ou encore dissymétrie du tenseur d'élasticité ou du tenseur Hessien (Carol et Willam [51], Chaboche [55], Challamel et al. [63], Cormery et Welemane [69], Maire et Lesne [154]). En cas d'admissibilité des lois proposées, elles demeurent toutefois le plus souvent discutables vis-à-vis de la justification des critères d'ouverture-fermeture de fissures et des conditions de restitution employées (Chaboche [57], Welemane et Cormery [225]). Les modèles reposent en effet sur un traitement associé à des normales unitaires \mathbf{n} correspondant :

- aux axes principaux du composite, lorsque les dommages sont parallèles aux renforts (Chaboche et al. [60, 58, 61], Maire et Chaboche [153], Maire et Lesne [155], Thionnet et Renard [217]),
- et/ou aux axes principaux de la variable d'endommagement du second ordre \mathbf{d} (Chaboche et al. [60], Maire et Chaboche [153], Maire et Lesne [155], Halm et al. [106]) ou d'un tenseur issu d'une combinaison plus complexe de \mathbf{d} et de la variable d'état (Ladevèze [126, 127]) ou encore du tenseur d'élasticité (Desmorat [74]).

Elles supposent alors un changement d'état entre ouvert et fermé exclusivement lié à :

- la contrainte macroscopique normale $\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ pour un formalisme en contrainte, en s'inspirant d'études micromécaniques telles que celles de Kachanov [118] dans le cas de milieux initialement isotropes affectés par des microfissures non interagissantes et soumis à une condition de contrainte homogène au contour ; nous verrons plus tard que le contexte d'anisotropie initiale ne permet plus cette analogie simple, le critère faisant en effet intervenir une contribution additionnelle liée à la contrainte tangentielle (chapitre 3) ;
- la déformation macroscopique normale $\varepsilon_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}$ pour un formalisme en déformation ; cette hypothèse s'avère en revanche déjà en désaccord avec ces études micromécaniques dans le cas de milieux isotropes, y compris dans le cadre de faible densité de microfissures (une dépendance en $tr \boldsymbol{\varepsilon}$ est adjointe, voir Andrieux et al. [10, 11], Pensée et Kondo [180, 182, 181]) ; ce caractère restrictif sera encore renforcé dans le cas anisotrope (chapitre 3).

En ce qui concerne la restitution des propriétés élastiques lors de la fermeture de fissures, les conditions employées ne sont pas toujours explicitées clairement et souvent postulées

de façon à assurer une admissibilité mathématique de la loi. On peut citer par exemple les formulations faisant intervenir des termes quadratiques spécifiques dans le potentiel (Desmorat [74], Ladevèze [126, 127]) ou bien la restitution exclusive de la composante « diagonale » du tenseur d'élasticité associée à la direction de fermeture⁴ (Chaboche [54, 56], Dragon et Halm [79, 105]), de façon à respecter la continuité de la réponse contrainte-déformation. Ce type de condition purement mathématique conduit parfois à certaines incohérences dans la représentation du comportement du matériau avec notamment l'absence d'effets unilatéraux sur la réponse transverse du matériau (Maire et Lesne [154]). Les résultats expérimentaux de caractérisation de l'effet unilatéral étant souvent limités, on soulignera alors dans ce contexte les approches qui tentent de conférer une signification physique à ce choix en s'appuyant sur l'analyse du comportement local des fissures (voir par exemple la démarche de Welemane et Cormery [225] dans le cas isotrope). Elles conduisent à une restitution complète des propriétés élastiques (désactivation totale de l'endommagement) dans le cas d'un frottement infini entre les lèvres des microfissures fermées (Chaboche et al. [44, 61]) ou partielle sinon (Thionnet et Renard [215, 217]). Notons toutefois que ces analyses n'ont pour l'heure été menées que dans le cadre de milieux isotropes et leurs résultats extrapolés au contexte anisotrope.

1.4.4 Commentaire

Comme le montre cette revue critique des différentes approches proposées, les modélisateurs rencontrent un grand nombre de difficultés pour représenter de façon pertinente, efficace et correcte les spécificités de l'endommagement des composites. Vis-à-vis de ces critères, la question des interactions entre les anisotropies initiale et induite associée aux effets unilatéraux reste en particulier un problème très ouvert. Au travers de l'analyse précédente, on peut également souligner l'intérêt des approches par homogénéisation des milieux fissurés pour la compréhension et la représentation de ces phénomènes. Ces résultats permettent en effet soit de construire directement des modèles micromécaniques, soit d'apporter des arguments pour la justification des modèles macroscopiques (approches *macroscopiques physiquement motivées* telles que suggérées par certains auteurs comme Chaboche et Maire [61], Dragon et Halm [80], Krajcinovic [119, 122]).

4. Notons qu'il a été démontré par Welemane et Cormery [225] qu'une désactivation portant également sur les termes hors diagonale peut préserver la continuité de classe C^1 du potentiel thermodynamique.

Chapitre 2

Caractérisation expérimentale de l'endommagement de stratifiés carbone-époxy

On présente dans cette partie une étude expérimentale sur composites stratifiés réalisés en carbone-époxy par le procédé d'infusion de résine liquide. L'idée consiste à proposer une caractérisation croisée des mécanismes d'endommagement au travers de trois techniques optiques de mesures de champs (cinématiques, thermiques et densimétriques).

Ce travail a pu être mené à bien grâce à la collaboration et au support de Christian Garnier, Marina Fazzini, Romain Brault et Sébastien Mistou du Laboratoire Génie de Production de l'ENI de Tarbes, Michel Niquet et l'équipe du Centre de Ressources et de Compétences Composites (CRCC) de Tarbes et de la société NIMITECH ETUDES, Sylvain Genot et l'équipe de Tomo Adour de Pau.

2.1 Introduction

Le chapitre 1 a mis en évidence un certain nombre de travaux existants sur la caractérisation de l'endommagement des composites stratifiés. En ce qui concerne les observations microscopiques des mécanismes, elles sont le plus souvent réalisées en surface du matériau ou font appel à des techniques destructives pour une étude à coeur. Parallèlement, l'analyse du comportement macroscopique de ces matériaux repose généralement sur une mesure classique par jauges donnant accès à la réponse locale au niveau de la position du capteur. Dans les deux cas, les résultats obtenus peuvent donc être d'une part sérieusement perturbés par les préparations spécifiques nécessaires (polissage de la surface, découpage des éprouvettes, collage des jauges,...) et, d'autre part, non représentatifs des phénomènes internes et diffus au sein des structures étudiées.

C'est pourquoi nous avons souhaité mettre en place une investigation des mécanismes d'endommagement basée sur l'utilisation de trois techniques optiques permettant d'accéder à des mesures de champs. L'absence de contact (*Contrôle Non Destructif - Non Destructive Techniques*), la richesse des informations obtenues, l'adaptation au contexte de matériaux hétérogènes et anisotropes et la possibilité pour certaines d'effectuer un suivi en cours d'essai sont autant d'arguments pour motiver cette démarche (Grédiac [101]).

Notre travail porte sur des matériaux largement étudiés au sein du laboratoire, à savoir les stratifiés à matrice organique en carbone-époxy largement impliqués dans les applications aéronautiques. Les composites employés présentent la particularité d'être fabriqués par infusion de résine liquide, procédé innovant développé au sein du CRC Composites associé au laboratoire et de la société NIMITECH ETUDES et qui fait l'objet de plusieurs travaux de thèse du LGP (Romain Brault, Christian Garnier, Elodie Péronnet, Adrien Perret, Laurence Poussines). On se concentre enfin dans le cadre de cette thèse sur des sollicitations statiques endommageantes par traction uniaxiale.

2.2 Fabrication des éprouvettes

2.2.1 Matériaux constitutifs

La résine époxy

Dans le contexte aéronautique et spécialement pour certaines pièces de fuselage, on emploie couramment des résines polymères therm durcissables de type époxydes. Ces résines sont mises en forme une seule fois et présentent des propriétés thermomécaniques particulièrement intéressantes pour la réalisation de composites à hautes performances.

Nous avons utilisé ici une résine HexFlow[®]RTM6. Plusieurs avantages sont à signaler pour les procédés de fabrication par transfert de résine : sa structure mono-composant prête à l'emploi, sa basse pression d'injection, un temps de solidification assez long ainsi qu'une faible absorption d'humidité et un court cycle de cuisson. Au niveau des caractéristiques physiques, le liant est un matériau léger (densité de 1.1), présentant un temps de gel à 140°C de 95 minutes, une température de transition vitreuse comprise entre 190°C et 220°C, pour une viscosité initiale comprise entre 33 mPa.s et 38 mPa.s à 120°C. Le comportement mécanique de la résine époxy est homogène isotrope et visco-élastique fragile, le tableau 2.1 en récapitule les principales caractéristiques.

	résine HexFlow [®] RTM 6
Module d'Young [MPa]	2890
Contrainte à rupture [MPa]	75
Déformation à rupture [%]	3.4

TABLE 2.1 – Propriétés mécaniques en traction uniaxiale de la résine HexFlow[®] RTM 6

Les fibres de carbone

Compte tenu de la disponibilité des matériaux, deux types de fibres de carbone hautes performances ont été utilisées dans cette étude :

- des fibres Tenax[®] HTA 40 6K fabriquées par TohoTenax ; leur densité s'élève à 1.76, la taille des monofilaments fait 7 μm et chaque fibre est constituée de 6000 filaments ; ces fibres se présentent sous la forme de tissu HexForce[®] G0926 D 1304 TCT : Satin 5 ;
- des fibres HexTow[™] AS7 GS 12K fabriquées par Hexcel ; leur densité s'élève à 1.79, la taille des monofilaments fait 6.9 μm et chaque fibre est constituée de 12000 filaments ; dans ce cas, le tissu est un HexForce[®] 48302 X 1270 ST E01 2F : Serge 2/2.

Sur le plan mécanique, les fibres ont un comportement homogène isotrope transverse autour de leur axe et élastique linéaire fragile, leurs propriétés axiales sont indiquées au tableau 2.2.

	Tenax [®] HTA 40	HexTow [™] AS7 GS
Module d'Young [MPa]	238000	230000
Contrainte à rupture [MPa]	3950	4900
Déformation à rupture [%]	1.7	2.1

TABLE 2.2 – Propriétés mécaniques en traction uniaxiale des fibres de carbone

2.2.2 Procédé de fabrication

On distingue deux grandes techniques de fabrication des matériaux composites :

- à partir de fibres pré-imprégnées de résine non réticulée, procédé actuellement le plus répandu du fait d'une mise en oeuvre en série simple, cette technique requiert le transport et le stockage des tissus imprégnés en congélateur pour éviter le durcissement ;
- par transfert de résine dans un moule (*RTM = Resin Transfert Moulding*) où le renfort fibreux sec est imprégné par la résine dans le moule de cuisson avant polymérisation thermique ; les matériaux de base sont la fibre sèche d'un côté et la résine de l'autre, le composite étant obtenu après cuisson.

Depuis plusieurs années, ce second procédé est en expansion car il offre plusieurs avantages : une production de pièces aux dimensions finales dès la sortie du moule, un bon état de surface, la possibilité de pouvoir fabriquer des pièces de structures complexes intégrant des fonctions (raidisseurs, épaisseurs variables,..), un stockage en congélateur pour éviter le durcissement qui ne concerne que la résine (et non l'ensemble des tissus comme en pré-imprégné).

La mise en oeuvre des matériaux composites par injection ou infusion de résine thermodurcissable (Procédés RTM et dérivés) peut être décomposée en plusieurs opérations élémentaires.

2.2.2.1 La réalisation de la préforme sèche

La découpe des couches élémentaires et leur drapage à plat ou sur une forme constitue la première étape du processus de réalisation de la préforme. Il convient ensuite de solidariser les divers plis par "poudrage" préalable avec une résine. Dans une dernière étape, l'ensemble est compacté sous vide et chauffé pour obtenir la préforme.

Dans le cadre de cette étude, deux types plaques ont été réalisées :

- deux plaques ($300 \times 330 \text{ mm}^2$ et $600 \times 330 \text{ mm}^2$) à partir de tissus HexForce[®] G0926, comportant 6 plis dont les fibres sont orientées à 0° et 90° (épaisseur totale de 2 mm), qui serviront à l'obtention d'éprouvettes $[0/90]_6$ (type A) et $[\pm 45]_6$ (type B),
- une plaque de $600 \times 600 \text{ mm}^2$ à partir de tissus HexForce[®] 48302, comportant 16 plis dont les fibres sont orientées à 0° , 45° et 90° (épaisseur totale de 4.5 mm), qui serviront à l'obtention d'éprouvettes $[[(\pm 45)_2(0/90)_2]_2]_s$ (type C, voir Tab. 2.4).

2.2.2.2 L'imprégnation de la préforme

La résine est livrée en pot avec base et durcisseur intégrés. Pour permettre l'imprégnation de la fibre, la résine doit être suffisamment fluide pour pouvoir être infusée, *i.e.* injectée sous basse pression, dans le renfort fibreux. La viscosité adaptée pour une bonne injection de la résine est en général atteinte à une température de 110°C ce qui nécessite un chauffage préalable. Néanmoins, il y a une limitation du temps d'imprégnation par le temps de gel de la résine aux températures élevées. Il convient donc d'infuser durant la « fenêtre d'injection » pour assurer un bon remplissage, étape délicate qui doit prendre en considération le taux de fibres à obtenir (un taux important induisant une perméabilité réduite de la préforme) ainsi que les dimensions de la pièce.

Avant la mise en place de la préforme sur ou dans le moule, les surfaces du moule en contact avec la résine doivent être enduites d'un agent démoulant. Après fermeture, le moule est mis sous vide jusqu'à la fin de l'imprégnation.

Il existe précisément deux variantes à la technologie de fabrication RTM, le RTM classique et le LRI (*Liquid Resin Infusion*).

Le RTM classique

Ce procédé se caractérise par l'emploi d'un moule/contre moule étanche et chauffant, d'une pompe à vide et d'un outillage d'injection de résine sous pression. Il se déroule en deux étapes :

- l'injection sous pression (frontale ou périphérique) en divers points du moule de la résine liquide dans la préforme jusqu'au remplissage complet des espaces libres ; la migration de la résine se fait ici perpendiculairement à la section (Fig. 2.1) ; la mise sous vide sert à aspirer l'air et les volatils dégagés par la résine mais aussi à amener celle-ci dans les zones confinées ;
- la polymérisation de la résine dont le cycle (température et temps) est enclenché en fin d'injection, le moule étant en général équipé d'un moyen de chauffage autonome.

Le moulage LRI (*Liquid Resin Infusion*)

Du fait du mode d'injection, le procédé RTM classique peut prendre un certain temps pour des pièces de grande longueur, notamment les pièces planes types panneaux, voire générer des imperfections de fabrication. Le moulage LRI offre une solution à ces difficultés par la présence d'un diffuseur interposé entre la préforme et le moule (voir Fig. 2.2).

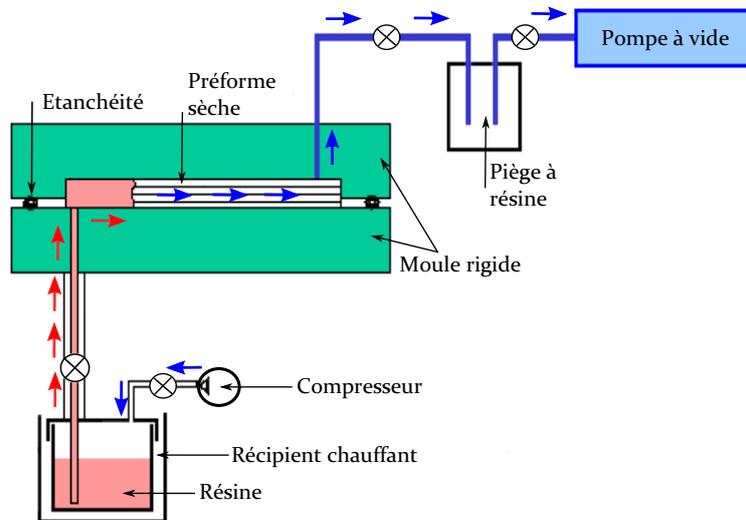


FIGURE 2.1 – Procédé RTM classique (d'après Lannuzel [135])

L'injection de la résine est ainsi répartie sur une plus grande surface et sa migration se fait alors dans la direction de l'épaisseur du stratifié. Ce type de moulage peut être utilisé soit en moule fermé soit en moule ouvert (sous vide).

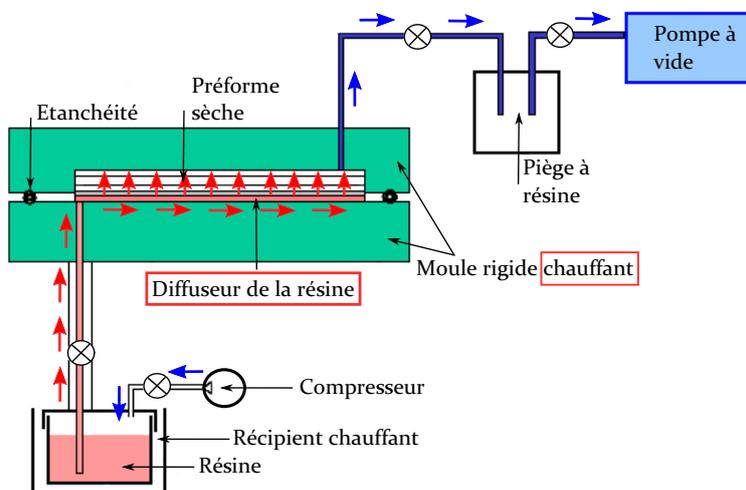


FIGURE 2.2 – Procédé schéma LRI (d'après Lannuzel [135])

Le CRC Composites, avec lequel le laboratoire entretient un partenariat privilégié, a choisi de développer le procédé LRI pour la fabrication des composites. Les plaques de stratifiés en carbone-époxy ont dès lors été réalisées à l'aide de cette technique¹, confor-

1. Les détails concernant la machine employée et les paramètres de fabrication ne sont pas précisés par souci de confidentialité.

mément à la norme ISO 1268-11 [3]. Le taux de fibres obtenu dans les différentes plaques est de 60% en moyenne.

2.2.2.3 La cuisson et le contrôle final

La polymérisation se fait suivant le cycle spécifique à chaque résine et au degré de polymérisation désiré. Les paramètres qui interviennent sont la température et le temps (ici 2h à 150°C), le refroidissement étant toujours lent (descente de 2°C/min). Pour améliorer la tenue en température, une post-cuisson de la pièce déjà polymérisée (en étuve hors moule) peut s'avérer nécessaire. Les contrôles de fabrication ont concerné les dimensions des plaques, leur aspect et la porosité des matériaux fabriqués (de l'ordre de 1 à 3%).

2.2.3 Préparation des éprouvettes

Pour la réalisation des essais de traction, nous avons retenu des éprouvettes de type 3, *i.e.* rectangulaires avec talons collés destinées aux essais sur composites thermoplastiques ou thermodurcissables renforcés de fibres (Norme NF EN ISO 527-4 [1]). La géométrie et les dimensions des éprouvettes sont indiquées sur la figure 2.3 et dans le tableau 2.3.

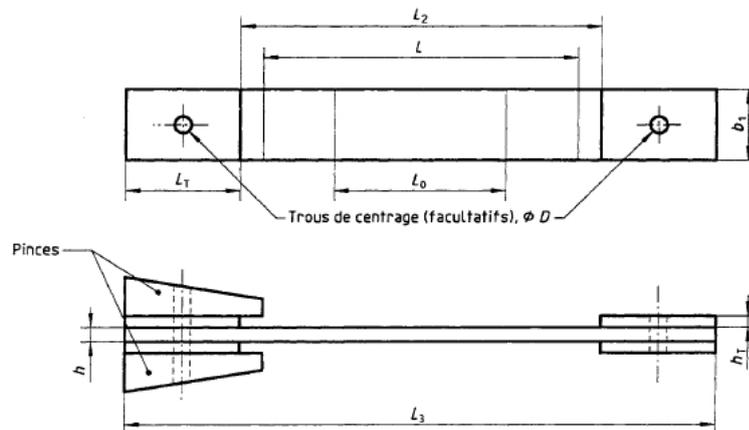


FIGURE 2.3 – Géométrie de l'éprouvette de type 3 (NF EN ISO 527-4 [1])

Les talons sont fabriqués à base de composites pré-imprégnés en verre-époxy comportant un empilement de 8 couches. Ils permettent de répartir la pression de serrage en évitant l'endommagement des extrémités des éprouvettes par les mors auto-serrants de la machine de traction. Ils confèrent également une adhérence qui limite fortement le glissement de l'éprouvette durant les essais. Les talons doivent être à angles droits (sans

Dimension	Symbole	Valeur [mm]
Longueur totale	L_3	≥ 250
Distance entre talons	L_2	150 ± 1
Largeur	b_1	25 ± 0.5
Épaisseur	h	2 à 10
Longueur de référence	L_0	50 ± 1
Distance initiale entre mors	L	136 (nominale)
Longueur des talons	L_T	≥ 50
Épaisseur des talons	h_T	1 à 3

TABLE 2.3 – Caractéristiques dimensionnelles (NF EN ISO 527-4 [1])

biseaux), avec une épaisseur comprise entre 1 mm et 3 mm et l'axe des fibres doit former un angle de $\pm 45^\circ$ avec l'axe de l'éprouvette. Il sont collés sur les extrémités des plaques puis l'ensemble est cuit pendant 1 heure environ à 70°C pour fixer la liaison. Le collage préalable des talons avant découpe permet de limiter au mieux les pertes de matériaux (Fig. 2.4).

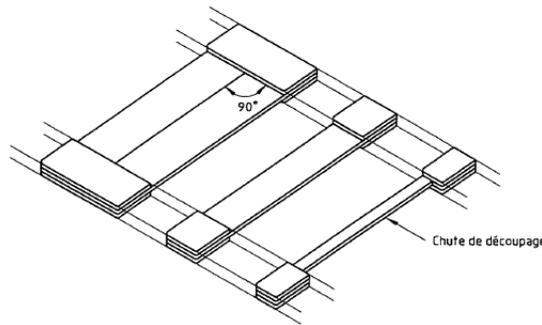
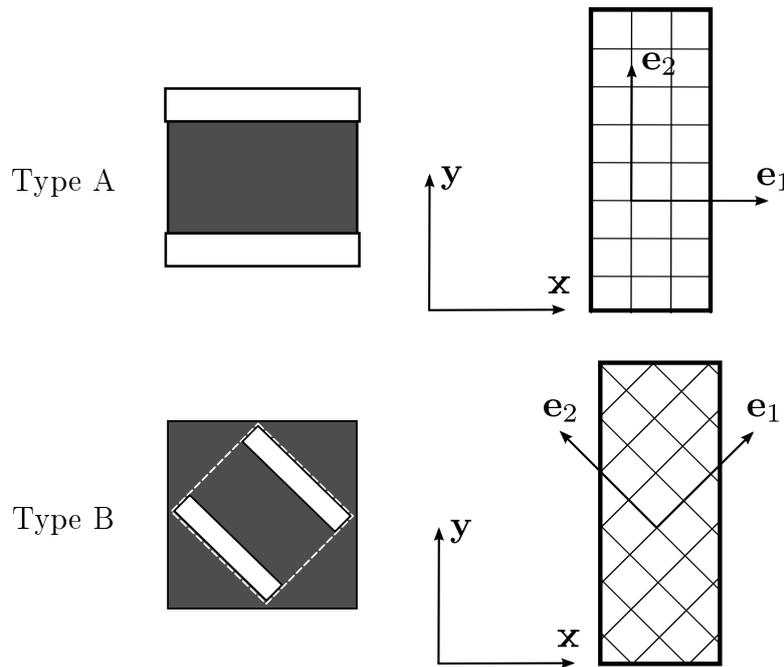


FIGURE 2.4 – Découpe des éprouvettes à talons collés (NF EN ISO 527-4 [1])

Les directions de découpe des plaques déterminent ensuite l'orientation des éprouvettes et donc leur direction de sollicitation. Les plaques RTM6 - tissus G0926 ont été découpées selon deux directions (Fig. 2.5) : à 0° (formant des éprouvettes de type A) et à 45° (formant des éprouvettes de type B). La plaque RTM6 - tissus 48302 a été découpée à 0° (formant des éprouvettes de type C, voir Tab. 2.4). Les éprouvettes ont été vérifiées attentivement avant d'être validées vis-à-vis de l'absence de défauts d'usinage et d'un respect des dimensions (tolérance de 0.1 mm pour la largeur b_1 et 0.02 mm pour l'épaisseur h au centre de chaque éprouvette). À noter finalement que la découpe ayant été refroidie à l'eau, il convient de sécher les éprouvettes par chauffage durant une heure à 100°C .

	Type A	Type B	Type C
résine	RTM6	RTM6	RTM6
tissu	G0926	G0926	48302
nombre de plis	6	6	16
épaisseur	2 mm	2 mm	4.5 mm
empilement et orientation	$[0/90]_6$	$[\pm 45]_6$	$[[(\pm 45)_2(0/90)_2]_2]_s$

TABLE 2.4 – Types d'éprouvettes étudiées

FIGURE 2.5 – Découpe des plaques à partir de tissus G0926 et orientation associée des éprouvettes de type A et B (les zones blanches correspondent aux talons, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) désigne le repère des éprouvettes et $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ le repère principal d'orthotropie du stratifié)

2.3 Conditions expérimentales

Afin de caractériser les effets progressifs de l'endommagement des composites, on souhaite réaliser des essais de traction avec décharge à certains paliers de la contrainte à rupture (types A et B d'éprouvettes). Pour les éprouvettes de type C, plus épaisses et donc un peu moins sensibles au flambement, on compte également réaliser après chaque étape de décharge des compressions élastiques pour mobiliser le comportement unilatéral (voir Reinhardt [191], Ramtani [189] pour des bétons, Gasser [92] pour des composites SiC-SiC).

Les sollicitations sont donc les suivantes :

- des essais de traction monotone, notamment pour calibrer les résistances à rupture σ_R (3 éprouvettes de chaque type),
- des essais de traction avec cycles de décharge (Fig. 2.6-a, 3 à 5 éprouvettes de type A et type B),
- des essais de traction avec cycles de décharge et recompression (Fig. 2.6-b, 3 éprouvettes de type C) ; dans ce dernier cas, le contrôle du non flambement de l'éprouvette a été réalisé par comparateur de façon à respecter un déplacement hors plan inférieur à 0.05 mm^2 .

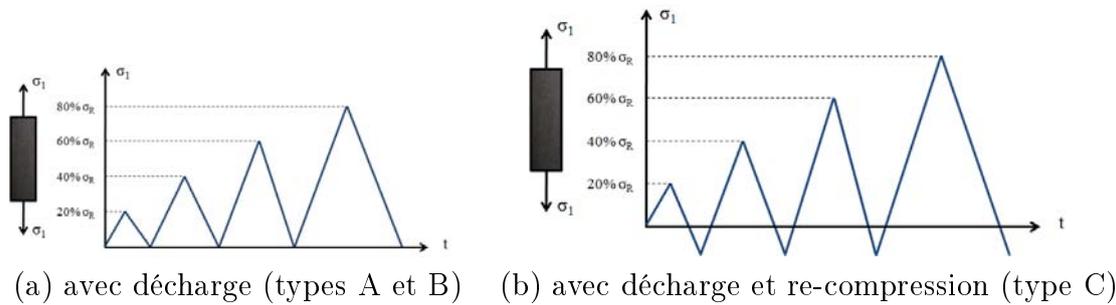


FIGURE 2.6 – Essais de traction cyclique

Compte tenu des disponibilités du matériel d'essai, deux machines ont été employées :

- une machine de traction INSTRON 5500R (100kN) électromécanique (Fig. 2.7-a) pour les essais monotones,
- une machine de fatigue INSTRON 1345 (250kN) hydraulique (Fig. 2.7-b) pour les essais cycliques.

Ces machines sont pilotées par ordinateur et constituées d'une traverse supérieure fixe et d'une traverse inférieure mobile.

Les essais ont eu lieu aux conditions ambiantes (température et pression), dans une pièce thermorégulée à 25° . Selon l'orientation des fibres, les conditions expérimentales diffèrent : norme NF EN ISO 527-4 [1] pour les éprouvettes à 0° , normes NF EN ISO 14129 [2] et prEN 6031 pour les éprouvettes à 45° . En essai monotone, la vitesse de traction est fixée à 2 mm/min tout au long de l'essai pour les éprouvettes à 0° ; pour les éprouvettes à 45° , la vitesse doit être fixée à 2 mm/min jusqu'à 2% de déformation longitudinale et modifiée ensuite à 10 mm/min jusqu'à la fin de l'expérience. En ce qui concerne les essais cycliques, nous avons adopté une vitesse de 0.5 mm/min pour tous les types d'éprouvettes afin d'éviter la rupture prématurée des échantillons.

2. Ceci a été contrôlé a posteriori sur les résultats de stéréo-corrélation dont le post-traitement ne permet pas de fournir cette information en temps réel.



(a) INSTRON 5500R



(b) INSTRON 1345

FIGURE 2.7 – Machines d'essais

2.4 Techniques de mesures de champs

L'identification du comportement du matériau a été réalisée dans ce travail au travers de trois techniques de mesures optiques (sans contact) : la mesure de champs cinématiques par stéréo-corrélation d'images, la mesure de champs thermiques par thermographie infrarouge ainsi que la mesure de champs densimétriques par tomographie à rayons X. On se propose de détailler ici les principes et étapes de mise en oeuvre de ces analyses.

2.4.1 Stéréo-corrélation d'images

Le point faible majeur des mesures conventionnelles par jauges est avant tout leur caractère ponctuel qui peut remettre en question leur représentativité vis-à-vis du comportement global de la structure, notamment lors de phénomènes de localisation. D'autre part, ces techniques nécessitent un contact avec la surface étudiée, ce qui risque d'altérer le phénomène observé et de perturber la mesure. Dans ce cadre, l'émergence des mesures optiques offre depuis quelques années de nouvelles perspectives en mécanique expérimentale avec une richesse d'informations accrue. Les avantages sont nombreux, notamment l'absence de contact et l'obtention d'une information de champ (d'où leur appellation de "mesures de champs"), tout en permettant un suivi continu lors de l'essai.

Les différentes techniques de mesures optiques sans contact peuvent être distinguées suivant leur dimension de mesure : mesures surfaciques "2D", mesures surfaciques et hors-

plan “ $2D \frac{1}{2}$ ” et mesures volumiques “ $3D$ ” (voir les revues de Doumalin [78], Fazzini [86], Watrisse [222] pour une présentation détaillée). Parmi celles-ci, la corrélation d’images ($2D$) et la stéréo-corrélation d’images ($2D \frac{1}{2}$) sont les plus couramment employées du fait de la facilité de préparation de la surface analysée et de leur mise en œuvre, de la densité de l’information obtenue et de la souplesse vis-à-vis des paramètres de post-traitement (notamment pour le calcul du champ de déformations).

La corrélation d’images consiste à mettre en correspondance deux images numériques de la surface plane observée à deux états distincts de déformation (Sutton et al. [207]) : une image de référence de l’objet à l’état initial et une image du même objet après une transformation mécanique (Fig. 2.8). Les images sont discrétisées spatialement par un capteur CCD (Charge Coupled Device) affectant pour chaque pixel un niveau de gris, soit naturel si la surface est texturée, soit artificiel par application d’une peinture (mouchetis). Bien que couramment employée désormais comme mesure de champs cinématiques, cette extensométrie bidimensionnelle présente certaines limitations :

- sur le plan des résultats, par la restriction au cadre 2D avec des mesures de déplacements plans,
- sur le plan expérimental, par la nécessité d’un parallélisme durant l’essai entre le plan de déformation et le plan image de la caméra qui est difficile à assurer, d’autant plus lorsque d’autres mesures sont effectuées simultanément.

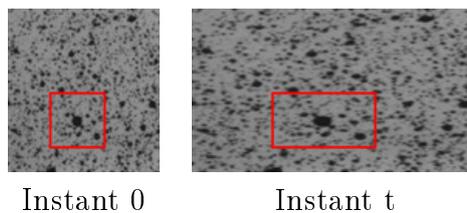
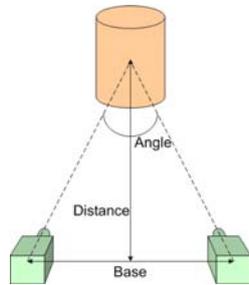


FIGURE 2.8 – Images de référence et déformée (Fazzini [86])

La technique de stéréo-corrélation d’images employée depuis dix ans environ au sein de l’équipe Mécanique des Matériaux, des Structures et des Procédés du Laboratoire Génie de Production offre une solution à ces difficultés. Elle combine l’extensométrie bidimensionnelle et la stéréovision, toutes deux exécutées par corrélation d’images (Cornille [71], Fazzini [86], Garcia [90], Orteu [172]). Deux types d’appariement d’images sont réalisées : un appariement temporel d’une paire d’images issues d’une même caméra prises à deux instants différents et un appariement stéréoscopique d’une paire d’images prise au même instant par deux caméras différentes (Fig. 2.7-b, 2.9). Le logiciel d’acquisition et de traitement d’images utilisé au laboratoire est Aramis 3D [98] dont les performances ont

été étudiées dans l'étude comparative de Bornert et al. [41].



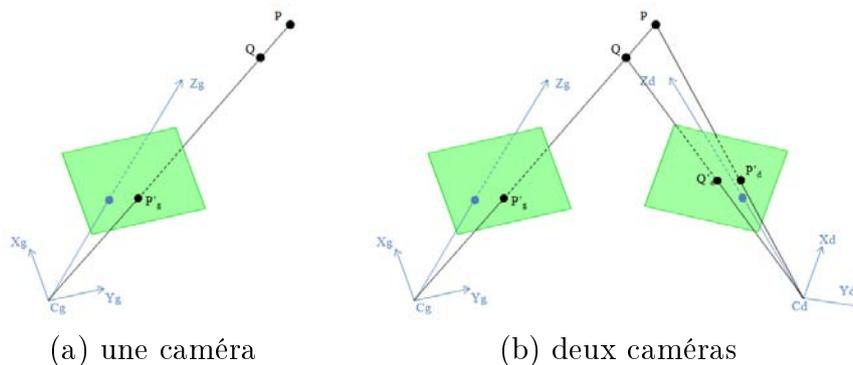
(a) principe général (Fazzini)[86]

(b) système d'acquisition Aramis 3D :
caméras et éclairage central

FIGURE 2.9 – Stéréo-corrélation d'images

A la différence de la corrélation d'images qui emploie une seule caméra, l'utilisation de deux caméras en stéréovision permet en effet d'accéder à une information tridimensionnelle. Deux points sur la même droite projective depuis l'une des caméras peuvent ainsi être distingués par la seconde caméra (Fig. 2.10) et, de façon plus générale, on peut à partir des deux images 2D d'un même point sous deux angles différents déterminer la position tridimensionnelle de celui-ci par triangulation. En enregistrant une paire d'images stéréoscopiques relatives à chaque état de déformation, la stéréo-corrélation d'images permet ainsi de mesurer :

- le champ de déplacements tridimensionnels des points de sa surface étudiée,
- et par voie de conséquence, l'évolution de la géométrie 3D d'une surface (Fig. 2.11).



(a) une caméra

(b) deux caméras

FIGURE 2.10 – Principe stéréoscopique (Fazzini [86])

En terme de caractérisation expérimentale, identification de lois de comportement et validation de modèles éléments finis, les perspectives offertes par ce moyen de mesure

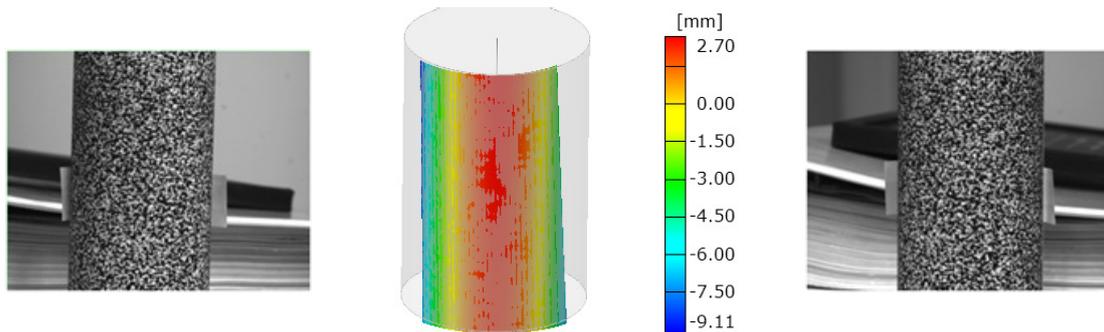


FIGURE 2.11 – Images de gauche et droite et reconstruction 3D du cylindre (Fazzini [86])

applicable à différentes échelles sont donc particulièrement intéressantes. Les multiples applications sur différents matériaux et structures en témoignent : roches (Berthaud et al. [30]), bétons (Choi et Shah [64], Lecompte et al. [141], Robert et al. [194]), polymères (Mistou et al. [164], Schmidt et al. [198]), métaux (Andresen [9], Cornille [71], Larsson et al. [136]), composites (Cazajus et al. [53], Compston et al. [68], Owolabi et Singh [174]) par exemple.

Techniquement, le principe de la méthode est résumé à la figure 2.12 dans le cas de deux paires stéréoscopiques (une avant déformation et une après). A l'état initial, une paire d'images stéréoscopiques est utilisée pour reconstruire l'objet au repos par un appariement stéréoscopique (étape 1). Une seconde paire d'images est prise lorsque l'objet est déformé et un appariement temporel est effectué sur les images de la caméra de gauche (à l'état initial et à l'état déformé) (étape 2). Enfin, un nouvel appariement stéréoscopique est réalisé sur les images de la caméra de droite et la caméra de gauche à l'état déformé (étape 3).

Dans le cas présent, la mise en œuvre de la stéréo-corrélation d'images a nécessité un certain nombre d'étapes :

- le dépôt en premier lieu d'un mouchetis artificiel en combinant des peintures blanche et noire (Fig. 2.13), ce qui permet d'obtenir un niveau de contraste assez élevé pour assurer la reconnaissance par le capteur CCD de la caméra des différents niveaux de gris ; notons que la qualité de ce mouchetis (en particulier son homogénéité) a été validée vis-à-vis de la distribution et la répartition des niveaux de gris et de la répartition des tailles de tâches³ (Fig. 2.14) ;
- la phase de calibrage qui vise d'abord à préciser les paramètres intrinsèques de chacune des caméras (longueur focale de l'objectif, distorsions..) et extrinsèques (position de chacune et relative entre elles) ; le capteur Aramis est constitué de deux

3. Notons que la taille de la plus grande tâche conditionne le choix de la taille de la fenêtre de calcul.

caméras CCD 1392×1040 pixels avec une base de 400 mm et nous avons employé lors des essais un objectif de 35 mm pour une distance à la pièce de 700 mm environ ; le calibrage consiste ensuite à placer dans différentes configurations une mire devant les caméras (la taille de la mire est prise équivalente à celle de l'éprouvette testée, Fig. 2.15) ; cette étape détermine un certain nombre de paramètres de mesure : la résolution spatiale (pixel de $80 \times 80 \mu\text{m}^2$) et la résolution en déplacement ($5 \mu\text{m}$ sur les déplacements dans le plan, $15 \mu\text{m}$ pour les déplacements hors plans) ; enfin, pour une meilleure visibilité des points de mesure, il est parfois nécessaire de mettre en place un éclairage complémentaire par projecteur (Fig. 2.7-b)

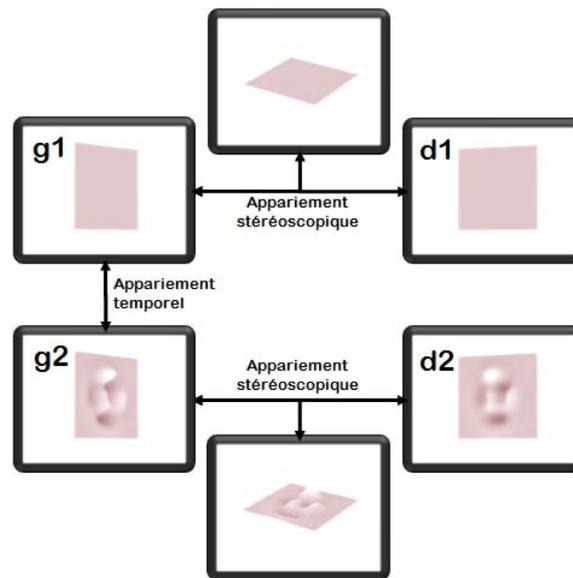


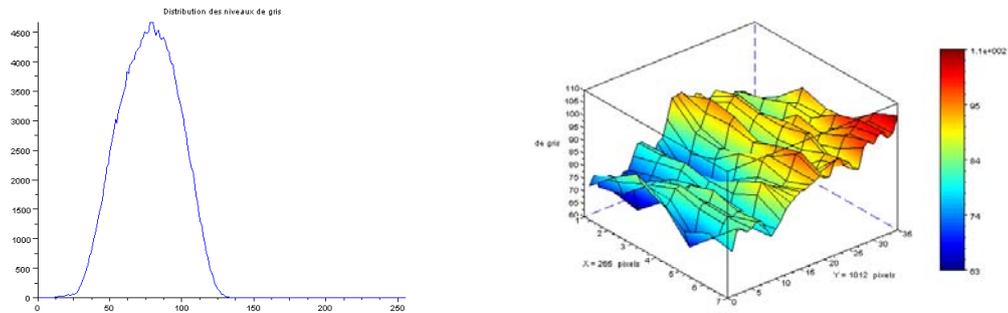
FIGURE 2.12 – Détermination du champ de déplacement 3D par stéréo-corrélation (Fazzini [86])



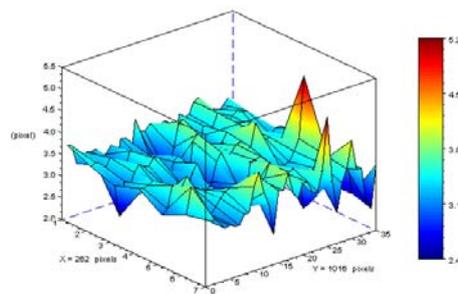
FIGURE 2.13 – Réalisation du mouchetis

- l'acquisition en elle-même : une image de référence est prise en début d'expérience et des images de la pièce déformée sont prises ensuite jusqu'à la fin de l'expérience

à différents intervalles définis par l'utilisateur ; pour des questions de stockage de données, nous avons choisi pour les tests une fréquence d'acquisition maximum d'une image par seconde ;



(a) histogramme des niveaux de gris (b) répartition des niveaux de gris



(c) répartition des tailles des tâches

FIGURE 2.14 – Caractérisation du mouchetis

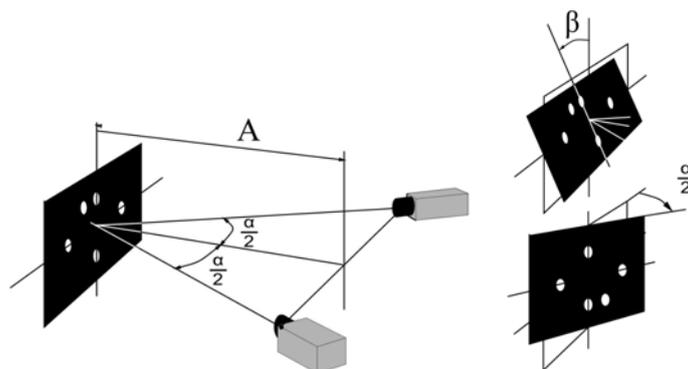


FIGURE 2.15 – Calibrage du système (Wehbe [223])

- le post-traitement qui nécessite de choisir la méthode de calcul (totale de façon classique, ou par step en grandes déformations par exemple), la taille de fenêtre au

centre de laquelle sont mesurés les déplacements et qui est conditionnée par la taille de la plus grande tâche du mouchetis et la résolution spatiale (ou pas) c'est-à-dire la distance entre deux points de mesure (Fig. 2.16) ; ainsi, plus la fenêtre sera petite, plus la mesure des déplacements sera localisée ; plus le pas sera petit, plus le calcul des déformations sera localisé.

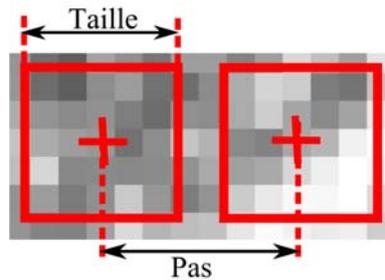


FIGURE 2.16 – Choix des paramètres de calcul (Fazzini [86])

On notera qu'une étude de sensibilité sur différents paramètres liés aux images (mouchetis, luminosité, contraste,..), au logiciel ou à la transformation mécanique a été réalisée par Fazzini [86] suivant la méthodologie retenue par le Groupe de Recherche CNRS 2519 "Mesures de champs et identification en mécanique des solides".

2.4.2 Thermographie Infrarouge

La thermographie infrarouge est une technique de mesure optique du champ thermique d'une structure. Elle consiste en un relevé 2D des rayonnements thermiques (luminances énergétiques) émis par la surface observée et qui dépendent de la température de la matière. Outre la distinction avec la thermographie classique basée sur un contact, l'appellation infrarouge précise également la gamme des longueurs d'ondes mesurées (Fig. 2.17).

L'obtention de manière non intrusive de l'évolution temporelle du champ de température d'une pièce, ainsi que la facilité de mise en œuvre, la maniabilité et la rapidité de cette technique l'ont conduit à de multiples applications (médical, génie civil, automobile, aéronautique,..). Vis-à-vis des techniques classiques, elle s'avère en effet particulièrement avantageuse dans le cas d'un manque d'accessibilité (pièces de petite taille, diagnostic de l'existant, analyse en service,..) ou encore d'un environnement délicat (hautes températures, sites nucléaires,..) (voir par exemple Bodnar [37], Pajani et Audaire [176]).

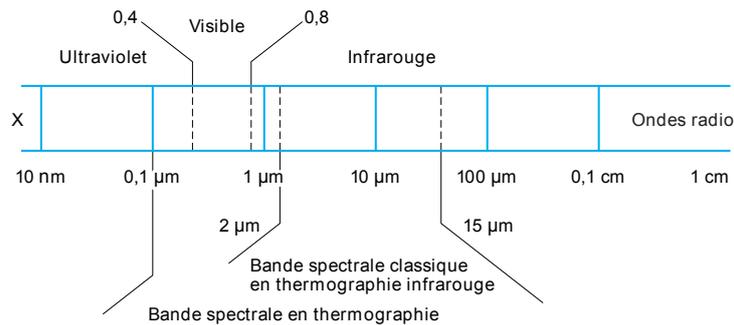


FIGURE 2.17 – Spectres des rayonnements (Pajani [175])

Pour les applications dans le domaine de la mécanique, les rayonnements mesurés peuvent résulter de deux sources :

- une excitation extérieure (lampes halogènes, flash au xénon IDEM, lasers, ondes ultrasonores, courants de Foucault,..) dont on récupère les effets en réflexion ou en transmission ; ce type d'approche dite active est particulièrement employée en Contrôle Non Destructif (CND) pour révéler des défauts internes ou débouchants (par exemple Garnier et al. [91], Hardy et Bolen [107], Maldague [156], Pajani et Audaire [176], Péronnet et al. [188], Sakagami et Kubo [195], Fig. 2.18) ;
- et/ou la déformation du matériau en elle-même du fait de couplages thermoélastiques et de dissipations sous forme de chaleur lorsque le matériau est affecté par des mécanismes irréversibles tels que la plasticité ou l'endommagement (Chrysochoos [66]) ; cette méthode dite passive est adaptée au suivi de dommages sous sollicitation avec de nombreuses applications en fatigue (par exemple Luong [149], Pastor [178], Plekhov et al. [184], Reifsnider and Williams [190], Steinberger et al. [205]) ; c'est cette seconde approche que nous avons retenue ici.

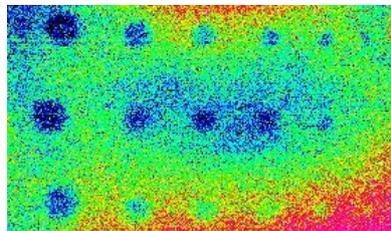


FIGURE 2.18 – Mise en évidence par cartographie thermique de défauts internes (inserts Téflon de diamètre 4 à 15 mm) dans une plaque en carbone-époxy (Péronnet et al. [188])

Un système de thermographie IR est composé d'un capteur de rayonnement et d'une station intégrant un ensemble de fonctions assurant le traitement du signal, la transcription

en température et l'enregistrement des données (Pajani [175], Fig. 2.19). Cette transcription en température se fait à partir de la connaissance de l'émissivité (rapport d'émission entre le matériau et un corps de référence dit corps noir⁴) qui caractérise l'aptitude du matériau à émettre de l'énergie par rayonnement. Le dispositif employé ici est une caméra thermique de type FLIR MWIR Titanium ([88], Fig. 2.7-a) à plan focal constitué de 320×256 pixels pour une résolution de mesure de 20 mK (dans la gamme d'utilisation $[-20^{\circ}\text{C}; +55^{\circ}\text{C}]$) et d'un ordinateur permettant de piloter la caméra et de réaliser les enregistrements grâce au logiciel Altair [8].

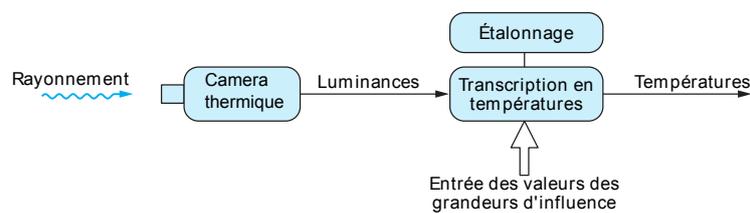


FIGURE 2.19 – Schéma de fonctionnement de la thermographie (Pajani [175])

Cinq étapes doivent être réalisées avant de procéder aux essais :

- l'étalonnage sur une référence (corps noir) ; cette étape s'effectue de façon automatique avec la caméra employée qui bénéficie d'un système de dernière génération ;
- la définition de l'émissivité du matériau étudié ; cette donnée est très sensible à de nombreux paramètres intrinsèques mais aussi extrinsèques au matériau étudié (Bodnar [37]) ; en l'absence d'informations spécifiques, nous avons choisi d'entrer ici une valeur constante et uniforme, à savoir celle du carbone (0,98) ;
- le réglage de la fréquence d'acquisition du champ de température ; dans le cas présent, nous avons considéré une valeur de 152 Hz, soit 152 images par seconde ;
- après avoir positionné le champ de la caméra sur la zone à observer, la mesure de la distance éprouvette-caméra afin de définir la résolution spatiale ; la distance à l'objet étant ici égale à 0.95 m pour une vision de l'ensemble de l'éprouvette, la taille du pixel correspond alors à un rectangle de $0.48 \times 0.58 \text{ mm}^2$;
- la mise au point de l'objectif.

Après la phase d'acquisition, un traitement des données peut s'avérer nécessaire. De façon à éliminer au maximum les effets perturbants pour la mesure (notamment l'impact de la température ambiante) et améliorer l'interprétation des résultats, nous avons opté pour une analyse en relatif des données en soustrayant à chaque instant l'image thermique

4. Un corps noir est un matériau idéal opaque qui absorbe intégralement tous les rayonnements qui lui parviennent, sans aucune réflexion ; suite à cette absorption, il s'échauffe et émet un flux fonction de sa température qui est égal à l'équilibre au flux absorbé (son émissivité vaut 1).

du point de départ de l'essai. Les résultats traiteront donc exclusivement des champs de variations de température $\Delta T = T - T_0$ avec T la température à l'instant t et T_0 la température initiale.

2.4.3 Tomographie à rayons X

La tomographie RX est une technique de mesure optique de champs tridimensionnels d'atténuation des rayons X. Si la composition chimique du matériau étudié est uniforme, cette atténuation est proportionnelle à la densité massique de celui-ci, d'où son autre appellation de tomodensitométrie RX (Bossi et al. [42], Maire et al. [152], Thiery et Gerstenmayer [214]). Elle conjugue la mesure par radiographie très employée dans le secteur médical et une technique de reconstruction pour l'accès à des représentations 3D :

- une source située d'un côté de la pièce étudiée émet un flux de rayons X dont le rayonnement transmis de l'autre côté est détecté par un ensemble de capteurs situés dans l'axe du faisceau ; cette démarche est réalisée suivant des orientations multiples dont le nombre et le pas sont fonction du type d'appareil et de la finesse de résolution ; par la mesure des atténuations du faisceau lors des traversées, on obtient ainsi, pour chaque coupe analysée, une cartographie 2D des coefficients d'absorption locaux du matériau, traduite en niveaux de gris, et qui dépendent notamment de la densité massique ;
- un traitement d'images numériques (algorithmes de reconstruction) permet ensuite de se ramener à l'image volumique de l'éprouvette à partir de l'ensemble des coupes radiographiques obtenues précédemment (Fig. 2.20) ; notons, qu'à partir de ce résultat, on peut également accéder à des cartographies 2D dites reconstruites, c'est-à-dire situées dans des axes différents de ceux de la mesure initiale.

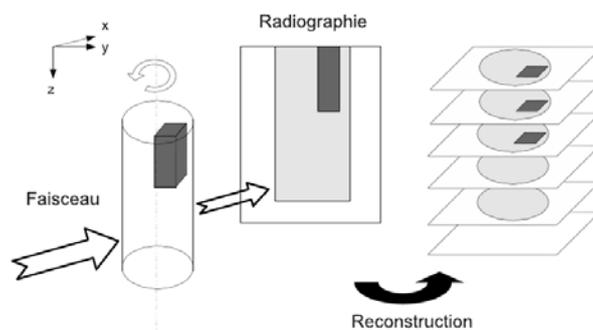


FIGURE 2.20 – Schéma de principe du passage des coupes 2D au volume 3D (Carmona [49])

Depuis quelques années, cette technique connaît un intérêt croissant en science des matériaux car elle permet d'accéder de manière non intrusive à des informations fines sur leur microstructure interne, en particulier toute hétérogénéité, singularité, vide ou inclusion présents dans ceux-ci, et ce pour différents matériaux et à différentes échelles suivant le matériel employé (micro-tomographie, synchrotron,..). Comme pour la thermographie, les applications sont vastes :

- en CND pour l'analyse de la santé matière ou le contrôle de procédé de fabrication (voir par exemple Brault et al. [45], Bayraktar et al. [25], Carmona [49], Maire et al. [150], Salvo et al. [196], Tsao and Hocheng [219], Fig. 2.21),
- en suivi sous contrainte avec des mesures dynamiques de l'évolution de la microstructure, lorsque la taille et le temps d'acquisition des tomographes sont respectivement compatibles avec la dimension des bancs d'essais et les vitesses de certains phénomènes physiques (Babout et al. [17], Lenoir [146], Maire et al. [150, 151], Moffat et al. [166], Reifsnider and Williams [190]).

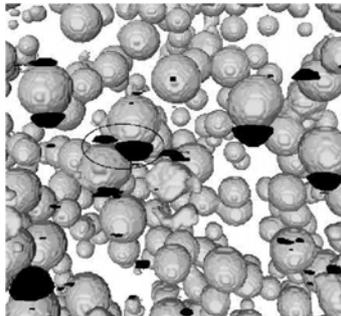


FIGURE 2.21 – Visualisation 3D des décohésions dans un composite à matrice aluminium avec renforts en zircone-silice de $50 \mu m^3$ environ (inclusions en gris, cavités en noir, Carmona [49])

Si la description obtenue par la tomographie RX est volumique et plus précise que la thermographie IR, il convient de signaler que la résolution de mesure est fonction des sources de rayonnement employées, des réseaux de détecteurs ainsi que de la dimension des pièces testées. D'autre part, les appareillages sont extrêmement coûteux et donc rares, leur utilisation nécessite une maîtrise technique importante et leur taille est souvent un facteur limitant.

Les acquisitions des coupes tomographiques ont été réalisées en post-rupture par la société Tomo Adour SA située à Pau (Pyrénées Atlantiques). Un scanner médical de troisième génération adapté à la mesure de pièces industrielles a été employé, à savoir le

SOMATOM Sensation Open de SIEMENS d'énergie maximale 140 keV permettant une résolution densimétrique de 0.1 (SIEMENS [200], Fig. 2.22). Cet appareil se compose :

- d'un ordinateur de gestion permettant d'exécuter les programmes d'animation, de contrôle et de dialogue avec l'utilisateur
- d'un système d'acquisition assurant la saisie et le prétraitement des mesures d'atténuation ; celui-ci se compose du banc mécanique de positionnement et de balayage de l'objet, du générateur de rayonnement X (source en éventail) et de l'ensemble de détection (capteurs céramiques haute définition en ligne, Fig. 2.23) associé à l'électronique de numérisation ;
- du système d'analyse des images et de reconstruction fournissant notamment les coupes en temps réel et les vues 3D après post-traitement.

Du fait d'une large couverture permise par la configuration du couple source-détecteurs ainsi que par son temps de rotation rapide (environ une seconde), ce scanner permet l'analyse de volumes importants dans un temps très court.

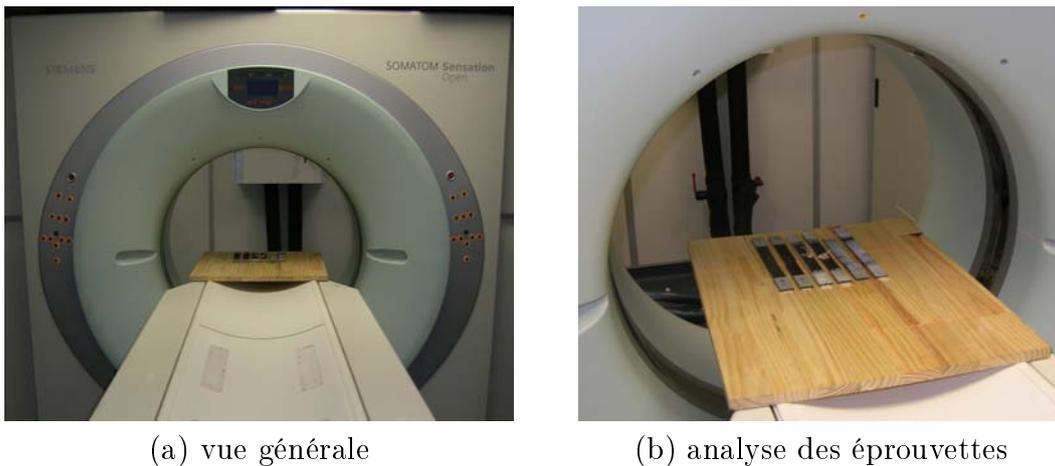


FIGURE 2.22 – Scanner SOMATOM Sensation Open

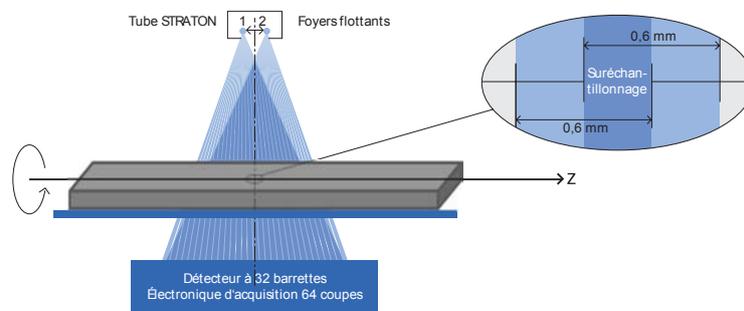


FIGURE 2.23 – Schéma de fonctionnement du scanner médical SIEMENS [200]

La préparation des mesures s'articule autour des points importants suivants :

- la mise en place et le réglage de la position des éprouvettes ; les pièces sont fixées sur un support en bois dont la faible densité minimise les perturbations avec de l'adhésif double face pour éviter tout mouvement lors du déplacement du support mobile ; les pièces sont ensuite positionnées précisément à l'aide de lasers de façon à définir l'origine de l'examen ;
- le réglage du banc mécanique sur lequel reposent les contraintes spécifiques du contrôle à effectuer ; ses paramètres (longueur de la translation, poids,..) dépendent directement du type et de la nature des pièces à examiner ;
- le confinement de la pièce où se trouve la machine pour éviter toute radiation des opérateurs,
- l'exécution automatique du protocole de pré-chauffe de la machine comprenant notamment l'étalonnage,
- la définition de la résolution spatiale, soit ici une taille de voxel de $0.1 \times 0.1 \times 0.1 \text{ mm}^3$ (en d'autres termes, les coupes 2D d'acquisition présentent une épaisseur de 0.1 mm).

Les coupes résultats sont des fichiers .dcm sur lesquels on réalise le post-traitement avec le logiciel d'analyse d'images ImageJ (Ferreira et Rasband [87]).

2.5 Résultats

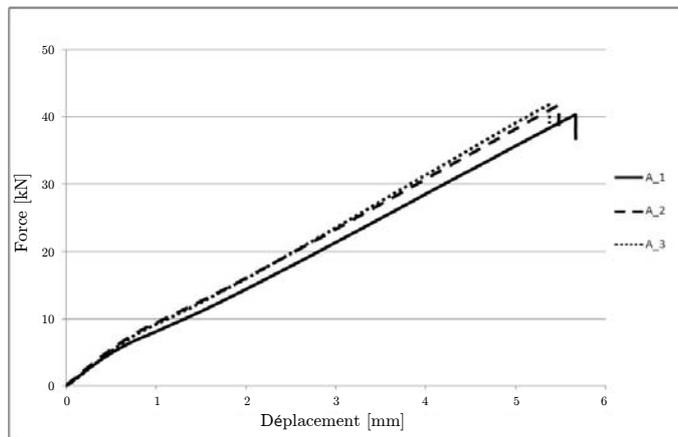
2.5.1 Réponse globale des matériaux

Avant d'aborder les résultats de mesure de champs, on examine en premier lieu la réponse force-déplacement axial des matériaux fournie par les machines d'essais.

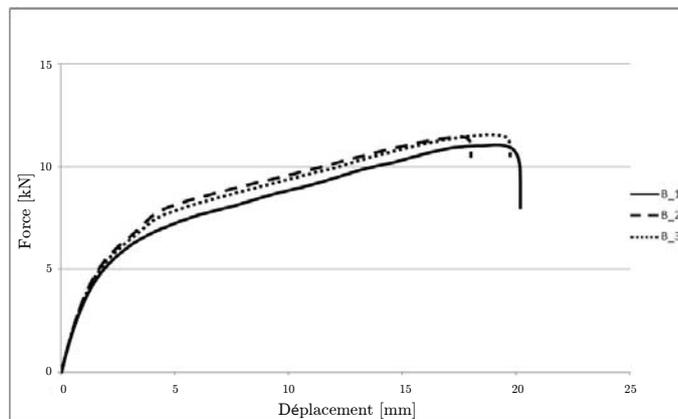
Les sollicitations de traction monotone démontrent tout d'abord une réponse dépendante de l'axe de sollicitation, tant vis-à-vis de la linéarité que de la résistance à rupture :

- la figure 2.24-a met en évidence une réponse élastique linéaire pour les éprouvettes de type A orientées à 0° jusqu'à la rupture autour de 40 kN pour un allongement de 5.5 mm environ,
- pour les éprouvettes de type B, constituées du même matériau mais orientées à 45° , on note une forte non linéarité associée à une résistance d'environ 10 kN pour un allongement de 20 mm (Fig. 2.24-b),
- pour les éprouvettes de type C, elles présentent un comportement intermédiaire entre les deux précédentes vis-à-vis de la non linéarité mais leur résistance est plus élevée, autour de 75 kN pour un allongement à rupture de 5 mm environ (Fig. 2.24-c).

(a) type A



(b) type B



(c) type C

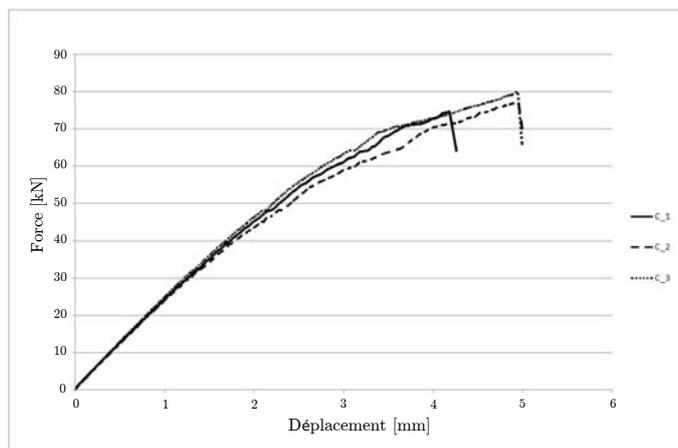


FIGURE 2.24 – Courbes charge-déplacement axial pour les essais de traction monotone

La réalisation des cycles de décharge permet une interprétation plus poussée du comportement de ces matériaux composites. Etant donnée la reproductibilité des réponses, on a représenté à la figure 2.25 le comportement typique obtenu pour chaque type d'éprouvettes pour la sollicitation décrite aux figures 2.6-a (types A et B) et 2.6-b (type C).

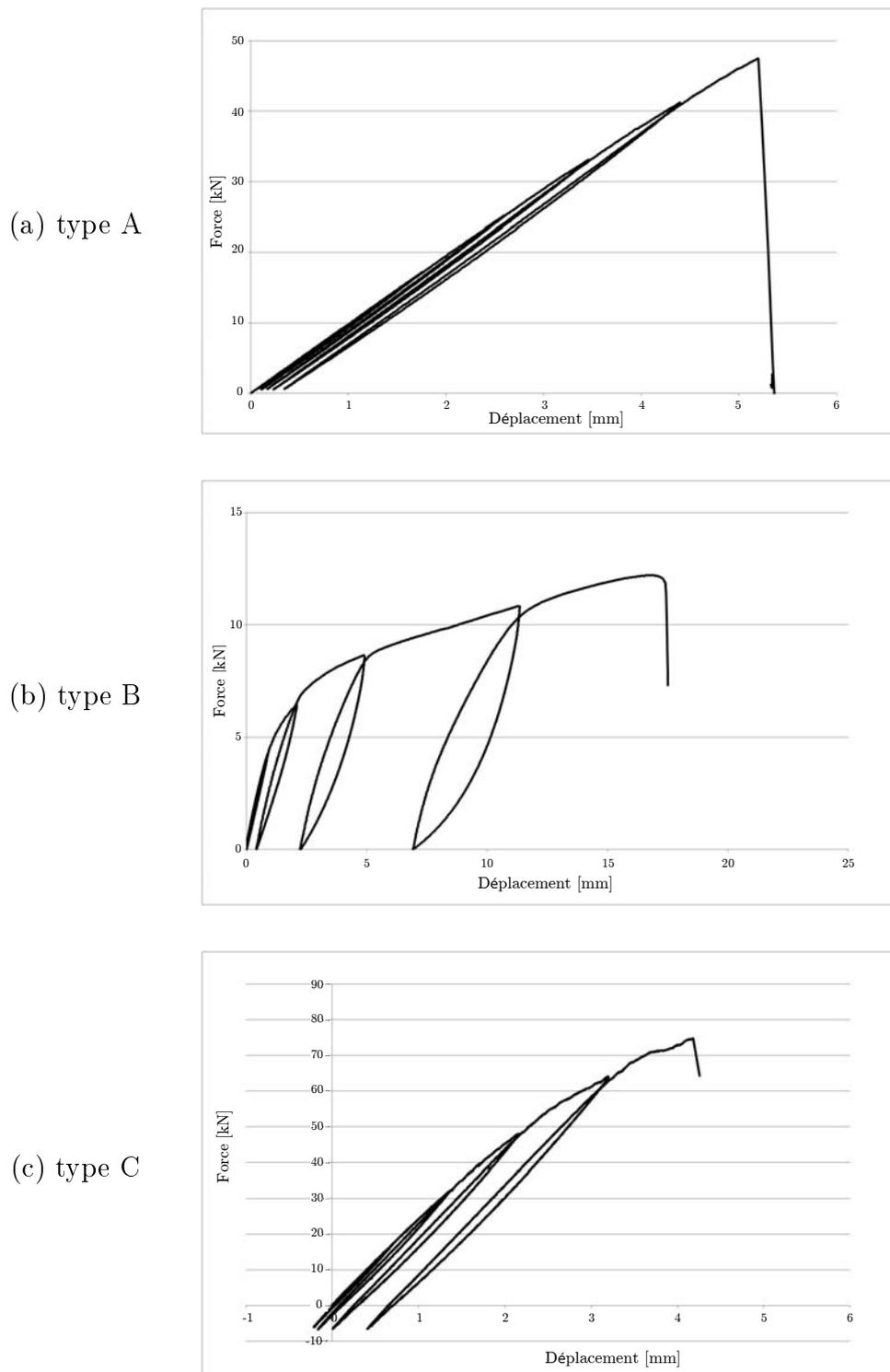


FIGURE 2.25 – Courbes charge-déplacement axial pour les essais de traction avec cycles

La forte non linéarité des éprouvettes de type B orientées à 45° correspond à un endommagement ductile caractérisé par une dégradation des propriétés mécaniques mise en

évidence par la décroissance des pentes apparentes de décharge ainsi que des déformations résiduelles importantes. On observe également de notables phénomènes d'hystérésis. Ces différentes conséquences s'expliquent par le chargement appliqué qui mobilise davantage la matrice (comme en témoigne par exemple le déplacement à rupture) générant des endommagements par décohésion fibres-matrice, des frottements dissipatifs ainsi que des effets visqueux. Par opposition, les tractions sur les éprouvettes de type A ne mettent pratiquement en oeuvre que le comportement des fibres, d'où une réponse élastique endommageable purement fragile. En ce qui concerne les éprouvettes de type C, leur séquence d'empilement fait intervenir davantage la matrice que le type A amenant un peu de déformations résiduelles et d'hystérésis. Néanmoins, les fibres orientées à 0° restent les plus sollicitées, l'endommagement est dans ce cas fragile et ne génère pas de dégradation notable du module d'Young axial au fur et à mesure des cycles, même à 80% du pic de rupture. Les phases de recompressions réalisées à l'issue des décharges de traction ne permettront donc pas malheureusement de mettre en évidence l'effet unilatéral des microfissures.

Durant tous ces essais, on entend nettement des bruits secs caractéristiques de ruptures de fibres, et ce d'autant plus que l'on augmente la sollicitation. On voit également la poudre du révélateur (à l'oeil nu) ainsi que des particules de carbone (sur les mesures thermiques, voir Fig. 2.33) qui s'effrittent des éprouvettes durant les montées en charge. Ces phénomènes s'interrompent en revanche lors des cycles de décharge-recharge et ne reprennent que lorsqu'on dépasse le niveau de traction atteint au cycle précédent.

En ce qui concerne le suivi thermique durant les essais, la figure 2.26 montre l'évolution temporelle de la variation de température moyenne sur l'éprouvette au cours des essais monotones sur les éprouvettes de type A. On note d'abord un refroidissement associé au comportement thermo-élastique du matériau. Le réchauffement progressif qui intervient ensuite traduit le développement de l'endommagement, en l'occurrence l'accumulation des dissipations générées par les ruptures des fibres (voir section 2.5.2). Le point d'inflexion de la courbe qui correspond environ à 40% de la résistance à rupture ne représente pas forcément le seuil d'endommagement initial du matériau, il correspond au niveau où la compétition entre le refroidissement thermo-élastique et le réchauffement induit par le développement de l'endommagement est remportée par le phénomène dissipatif.

Ces tendances sont confirmées par ce même type de donnée pour les essais cycliques sur éprouvettes de type C (Fig. 2.27). On observe en effet très bien pour le premier cycle, à faible niveau de contrainte donc très peu voire non affecté par les mécanismes dissipatifs, la réponse thermo-élastique du composite selon la nature de la sollicitation :

- le refroidissement induit par la traction et le réchauffement associé lors de la décharge (témoignant du caractère non dissipatif de la thermoélasticité),
- similairement, le réchauffement durant la compression qui suit et le refroidissement de la décharge de cette sollicitation.

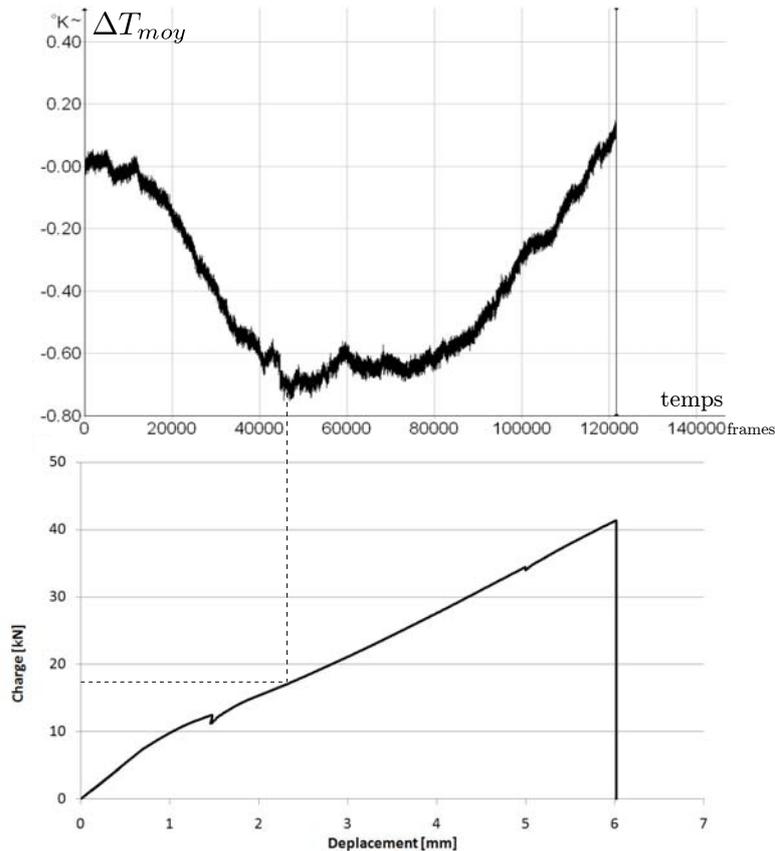


FIGURE 2.26 – Evolution temporelle de la moyenne de la variation de température au cours des essais monotones (type A)

L'évolution temporelle de la variation de température moyenne permet ensuite de bien suivre les évolutions dissipatives au sein du matériau suivant les phases des cycles. Comme précédemment, les montées en charge se caractérisent par un refroidissement élastique jusqu'au niveau de sollicitation atteint au cycle précédent puis un réchauffement induit par la création de surfaces de décohésion. Les phases de décharge amènent quant à elles l'essentiel du réchauffement, traduisant l'importance des phénomènes dissipatifs liés au frottement des lèvres des défauts créés. Sur le plan quantitatif, on notera ainsi pour les éprouvettes de type A un accroissement maximum de température moyenne en fin d'essai d'environ $\Delta T_{moy}^{max} = +0.1 K$ alors que les essais cycliques induisent pour les éprouvettes de type C un $\Delta T_{moy}^{max} = +1.4 K$. On notera pour finir que cette analyse thermique n'a pu

être mise en place pour tous les essais (type B par exemple) du fait d'une perturbation trop intense en présence du projecteur nécessaire à la stéréo-corrélation.

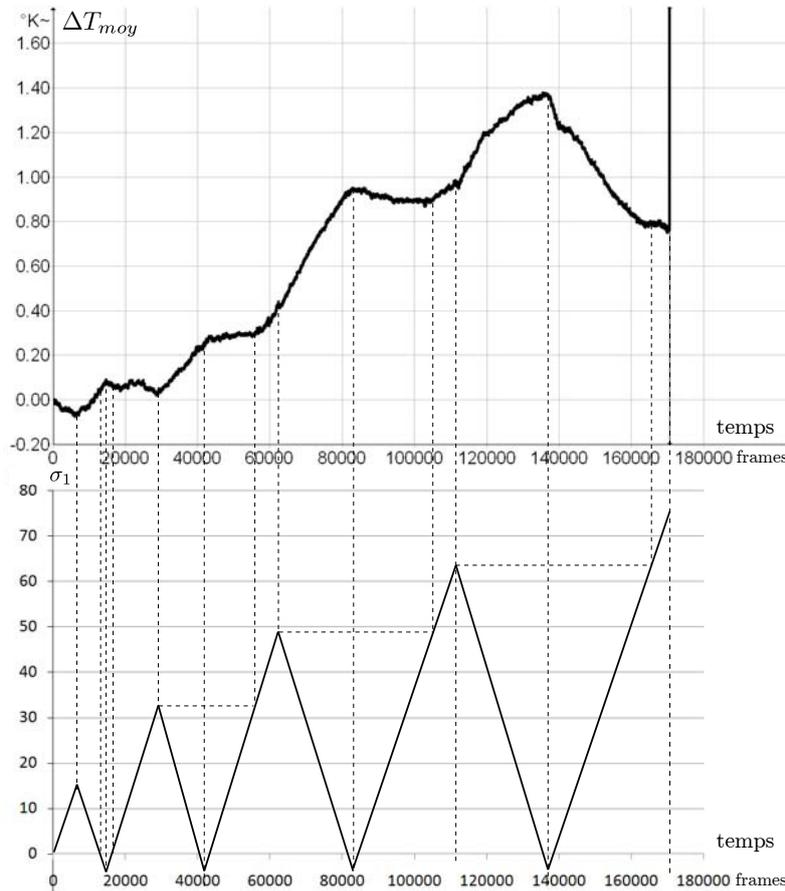


FIGURE 2.27 – Evolution temporelle de la moyenne de la variation de température au cours des essais cycliques avec représentation du chargement appliqué (type C)

2.5.2 Endommagements locaux

L'étude des champs permet de compléter cette analyse en fournissant les distributions spatiales des grandeurs thermo-mécaniques et physiques aptes à capter les gradients locaux, la présence des défauts induisant en effet une singularité dans les champs mesurés (Grédiac [101]).

Le suivi temporel du champ thermique confirme tout d'abord des effets thermo-élastiques homogènes en début de sollicitation. A partir d'un certain niveau, on observe des hétérogénéités révélatrices d'endommagements locaux. Pour les éprouvettes de type A

en traction monotone, les échauffements locaux associés aux ruptures de fibres sont illustrés sur la cartographie de température présentée à la figure 2.28-a. L'effet des dissipations induites par ces ruptures locales est visible pendant quelques secondes grâce à l'inertie thermique du matériau. Les profils de température tracés pour deux lignes traversant verticalement l'éprouvette au niveau de ces échauffements démontrent l'intensité des pics locaux (jusqu'à 0.5 K de différence) par rapport au reste de l'éprouvette qui est homogène (les mors sont des zones plus chaudes, le mors du bas l'étant d'autant plus du fait de sa mobilité, Fig. 2.28-b).

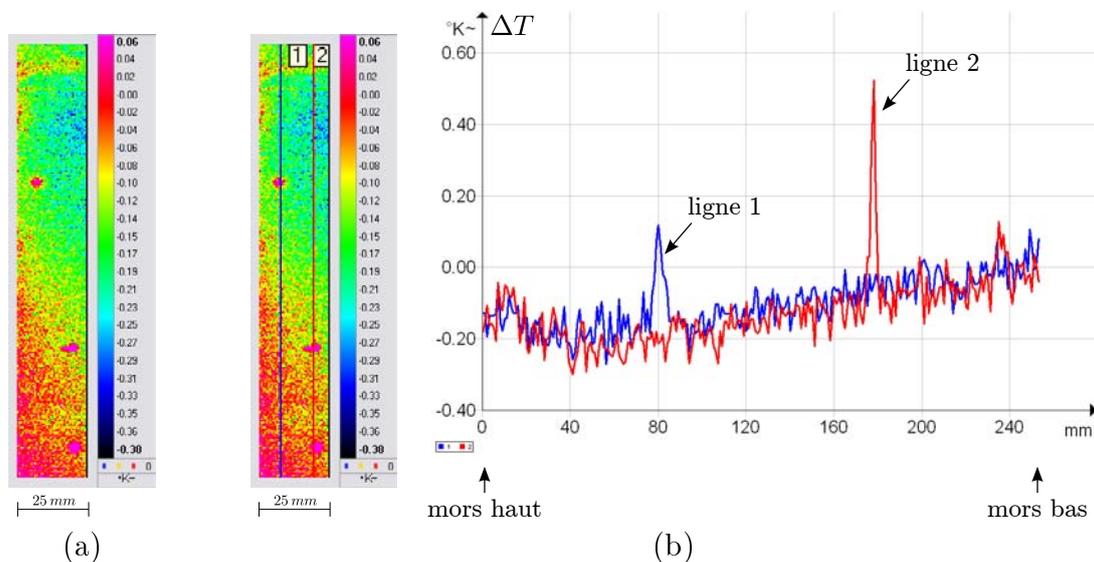


FIGURE 2.28 – Mise en évidence des gradients locaux de température

L'analyse des champs densimétriques permet également de mettre en évidence les phénomènes de décohésion. La présence des défauts est en effet directement visualisable sur les coupes tomographiques *via* le contraste de niveaux de gris, et donc de densité, entre ces défauts (de densité nulle) et la matière saine (de densité 1,5 environ compte tenu de la densité des constituants et la proportion de fibres, *cf.* section 2.2). A cette fin, on présente à la figure 2.29 des vues coronales à différentes épaisseurs de zones courantes des éprouvettes (*i.e.* non affectées par la rupture macroscopique) avec un filtre à 5% de la distribution des nuances de gris de façon à faire apparaître plus nettement les vides (Fig. 2.29-d).

Pour l'ensemble des éprouvettes, on note que les vides forment des décohésions isolées d'une taille maximum de 2 mm, réparties de façon diffuse au sein du volume du matériau (dans le plan coronal et dans l'épaisseur). En particulier, la figure 2.29-a illustre la position des vides dans l'épaisseur. Au niveau quantitatif, les éprouvettes de type B et C semblent

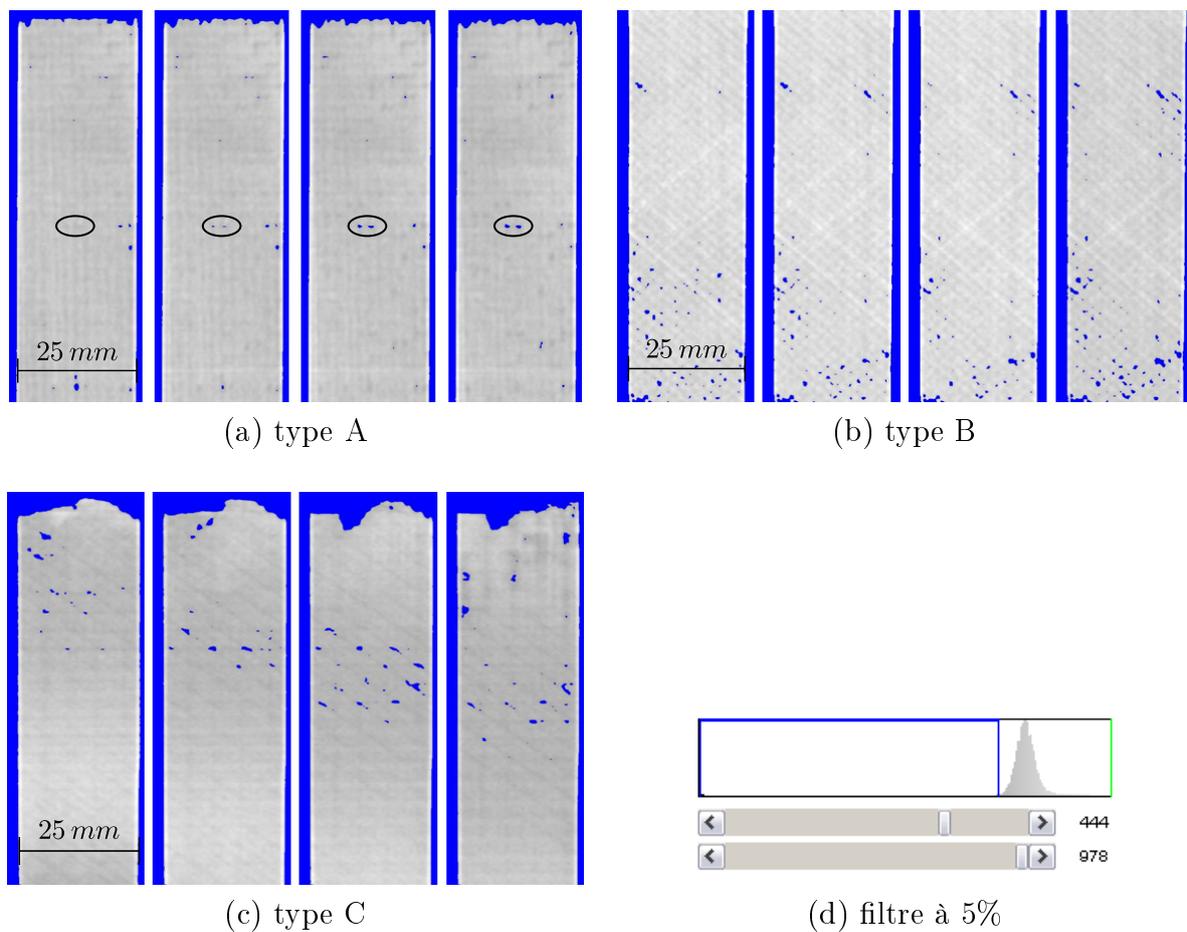


FIGURE 2.29 – Vues coronales des champs densimétriques à différentes épaisseurs (le matériau est représenté en gris, les vides en bleu)

un peu plus affectées par l'endommagement que les types A. Même si la résolution de mesure ne permet pas de distinguer précisément la géométrie des décohésions, on note néanmoins très nettement une orientation préférentielle des dommages suivant le type d'éprouvettes :

- perpendiculaire à l'axe de sollicitation pour les éprouvettes de type A, ce qui confirme un endommagement par rupture des fibres à 0° (Fig. 2.29-a),
- perpendiculaire à l'axe de sollicitation et inclinée (à 45° environ) pour les éprouvettes de type B et C, traduisant également des décohésions fibres-matrice (Fig. 2.29-b et c).

Ces résultats illustrent donc l'interaction entre l'anisotropie initiale donnée par la structure du composite et l'anisotropie de l'endommagement.

2.5.3 Etude des propriétés élastiques

La dégradation des propriétés élastiques a été étudiée pour les éprouvettes de type C dont le comportement avait été supposé au départ plus quasi-fragile que le type A, et moins hystérétique que le type B de façon à pouvoir définir des propriétés élastiques à partir des pentes de décharge.

Pour ces éprouvettes, la stéréo-corrélation a été employée durant les phases de décharge-recharge de façon à capter la réponse élastique du matériau à niveau d'endommagement figé. Précisément, nous nous sommes intéressés au module d'Young axial du matériau dans la direction de chargement de vecteur unitaire \mathbf{y} défini par :

$$E(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y} \cdot (\Delta \boldsymbol{\Sigma}) \cdot \mathbf{y}}{\mathbf{y} \cdot (\Delta \mathbf{E}) \cdot \mathbf{y}} \quad (2.1)$$

avec $\boldsymbol{\Sigma} = \bar{\Sigma} \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}$ le chargement de traction uniaxiale dans la direction de \mathbf{y} et \mathbf{E} la déformation macroscopique induite durant cet essai. L'équation (2.1) étend la définition classique de Hayes [110] (voir aussi Ladevèze [126, 127]) au contexte présent d'un comportement ductile, les accroissements de contrainte $\Delta \boldsymbol{\Sigma}$ et de déformation $\Delta \mathbf{E}$ étant pris entre deux points extrêmes en début et fin de chaque cycle. Pour réaliser ce calcul, nous avons fait l'hypothèse d'un état de contrainte homogène au sein de l'éprouvette et tiré des mesures de stéréo-corrélation les valeurs de la déformation \mathbf{E} . La figure 2.30 présente les cartographies du champ du module d'Young $E(\mathbf{y})$ obtenues lors des 3 cycles complets de décharge-recharge effectués avec la distribution des couleurs associée.

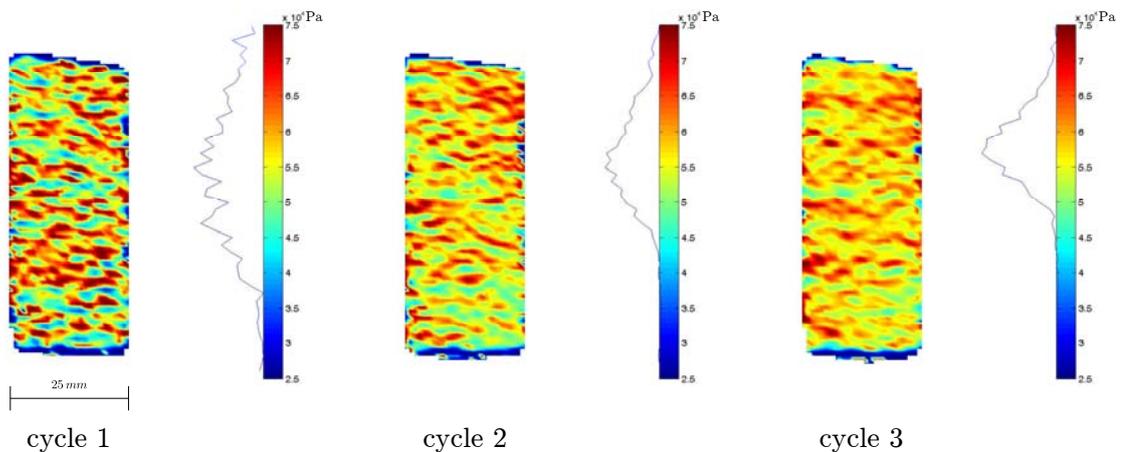


FIGURE 2.30 – Champs du module d'Young axial $E(\mathbf{y})$ du matériau obtenu pour chaque cycle de décharge-recharge (type C)

On constate en premier lieu une forte hétérogénéité des valeurs du module d'Young liée à la fois au matériau composite étudié mais également à la technique de stéréo-corrélation dont la précision dans ce cas de matériaux hétérogènes est meilleure pour de grandes déformations. Pour ce dernier point, la distribution s'affine en effet de plus en plus en avançant dans les cycles, soit lorsque les déplacements sont plus importants. D'un point de vue quantitatif ensuite, on ne distingue pas réellement de différence entre les valeurs de ce module pour les différents cycles, ce qui traduit le faible impact de l'endommagement sur cette propriété axiale conformément aux observations sur la courbe globale (Fig. 2.25-c).

Ce principe d'analyse offre toutefois des perspectives fort intéressantes dont l'application à des matériaux tels que les composites à matrice céramique présentant un comportement élastique plus endommageable permettrait de mettre en évidence de façon originale les conséquences de la dégradation. De même, la distinction des sollicitations de traction et de compression offrirait l'opportunité de démontrer les effets unilatéraux en termes de mesure de champs.

2.5.4 Localisation et rupture

Afin de réaliser un suivi du phénomène de rupture, la stéréo-corrélation a été employée de façon continue lors des essais monotones sur éprouvettes de type A et B.

Pour les éprouvettes de type A dont le comportement fragile est associé à une rupture très brutale, la fréquence d'acquisition employée (une image par seconde) n'a pas permis d'observer la phase de localisation, les champs cinématiques obtenus étant homogènes jusqu'à la rupture (Fig. 2.31).

En revanche, ce phénomène a pu être détecté pour les éprouvettes de type B. En effet, on voit très bien sur celles-ci la localisation des déformations sur les déformations transversale E_{xx} et longitudinale E_{yy} qui se traduit par la formation d'une croix orientée à 45° environ et qui correspond par la suite au siège de la macro-fissuration de l'éprouvette (Fig. 2.32).

L'imagerie infrarouge permet également de visualiser le caractère fragile des ruptures des éprouvettes de type A et C. On observe ainsi sur la figure 2.33 une séquence d'images consécutives de l'image thermique de ces éprouvettes à 0,006 seconde d'intervalle autour de leur point de rupture. Même si la fréquence d'acquisition de la caméra thermique permet de mieux capter l'évènement, on en note tout de même les limites devant la rapidité du phénomène. Les zones les plus chaudes qui révèlent l'accumulation des dommages

correspondent ensuite au macro-défaut. On distingue également nettement les particules de carbone qui s'échappent des éprouvettes.

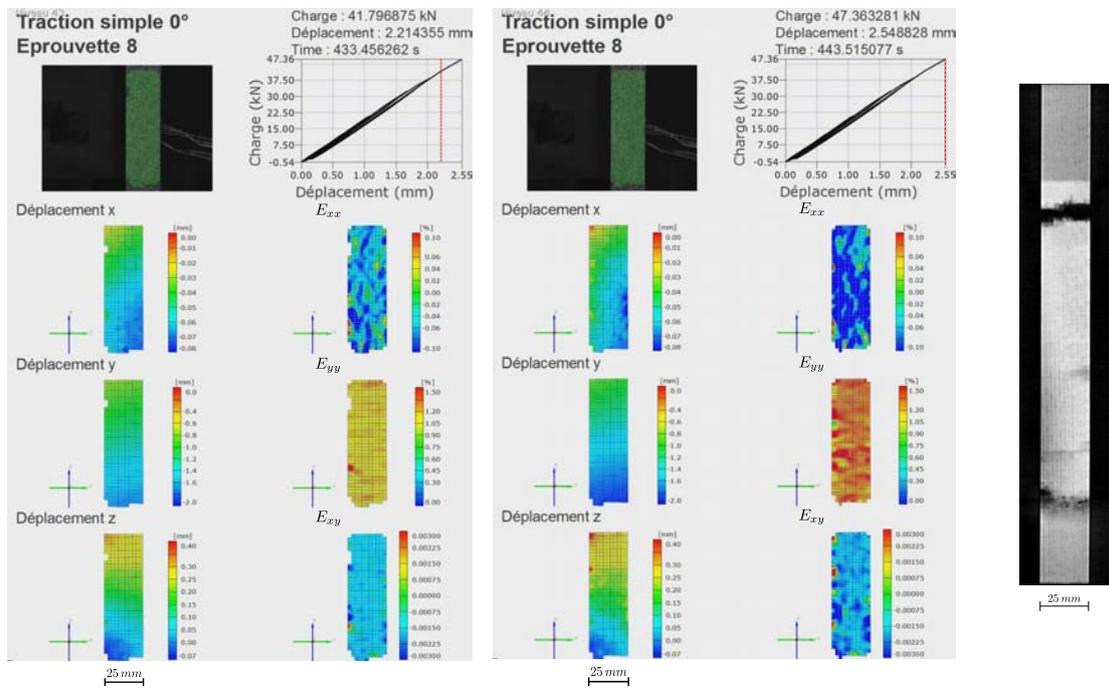


FIGURE 2.31 – Champs cinématiques avant pic et éprouvette rompue (type A)

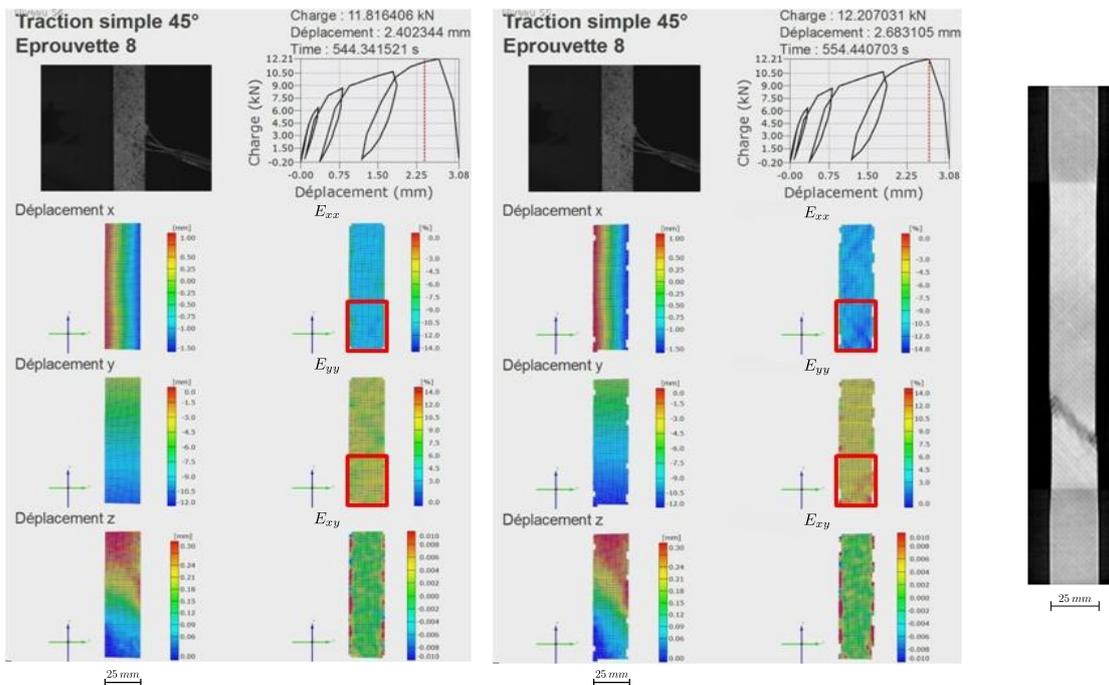


FIGURE 2.32 – Champs cinématiques avant pic et éprouvette rompue (type B)

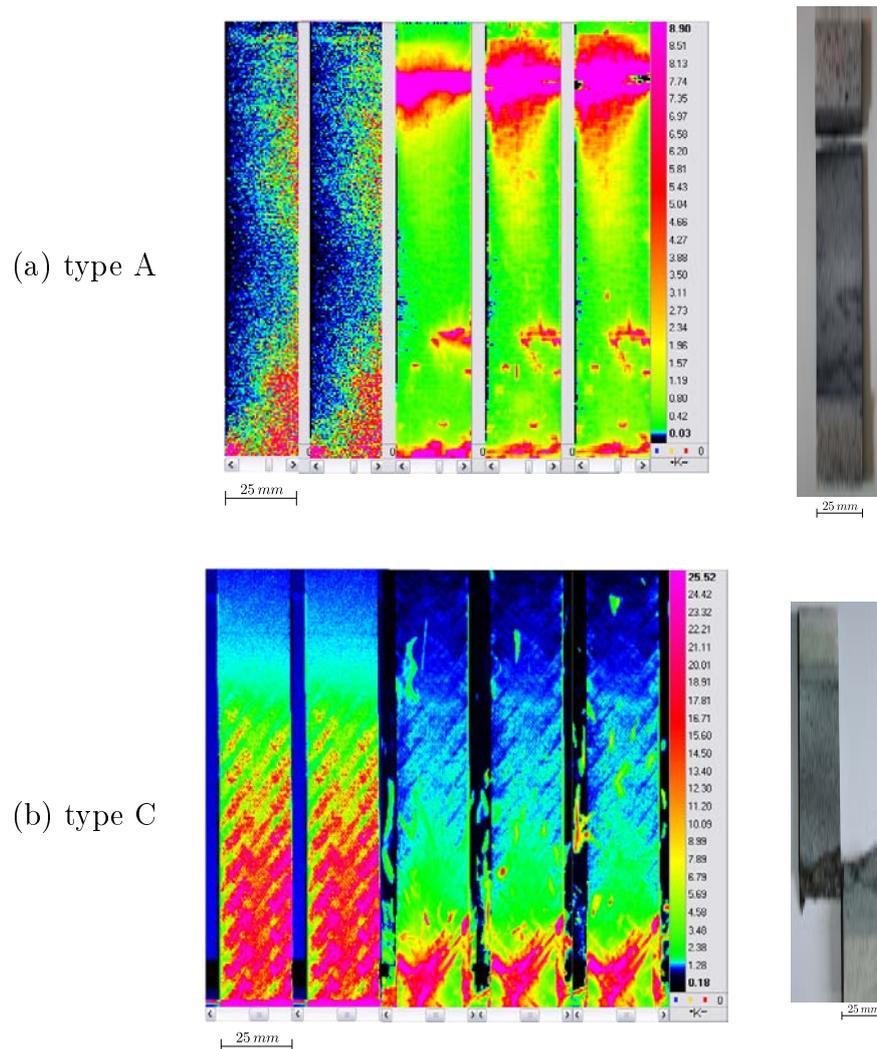


FIGURE 2.33 – Champs thermiques autour du point de rupture et éprouvettes rompues (types A et C, images prises à 0,006 seconde d'intervalle)

2.5.5 Faciès de rupture

L'observation des faciès de rupture des différents types d'éprouvettes permet de distinguer clairement les mécanismes de dégradation impliqués dans chacun des cas :

- pour les éprouvettes de type A, la rupture est perpendiculaire à l'axe de traction et franche (Fig. 2.34) ; elle correspond essentiellement à la rupture des fibres orientées à 0° ,
- dans le cas des éprouvettes de type B, ce sont en revanche des phénomènes de décohésion fibres-matrice, induisant notamment des déchaussements de fibres, et délaminages entre les plis qui amènent à la rupture (Fig. 2.35) ; les vues tomographiques

axiales confirment le développement du macro-défaut à environ 45° par rapport au chargement (Fig. 2.36) ;

- le type C d'éprouvettes se rapproche du type B au niveau des dégradations observées (Fig. 2.37) ; la sensibilité au délaminage y est en revanche plus importante et la forme du macrodéfaut plus diffuse du fait de la séquence d'empilement.

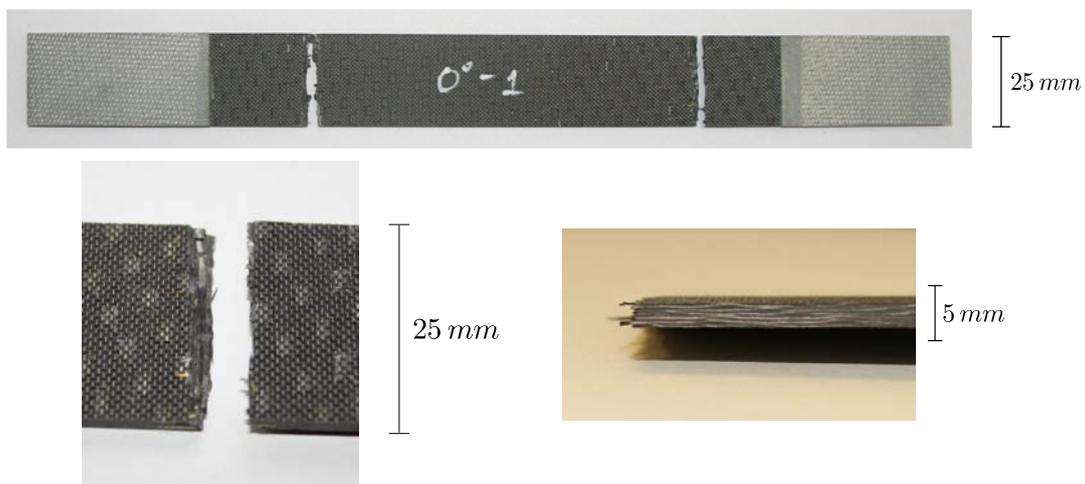


FIGURE 2.34 – Faciès de rupture des éprouvettes de type A

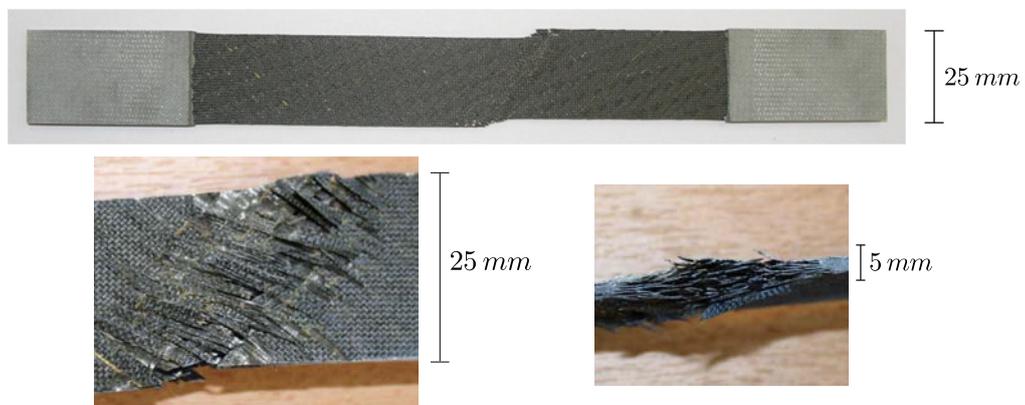


FIGURE 2.35 – Faciès de rupture des éprouvettes de type B

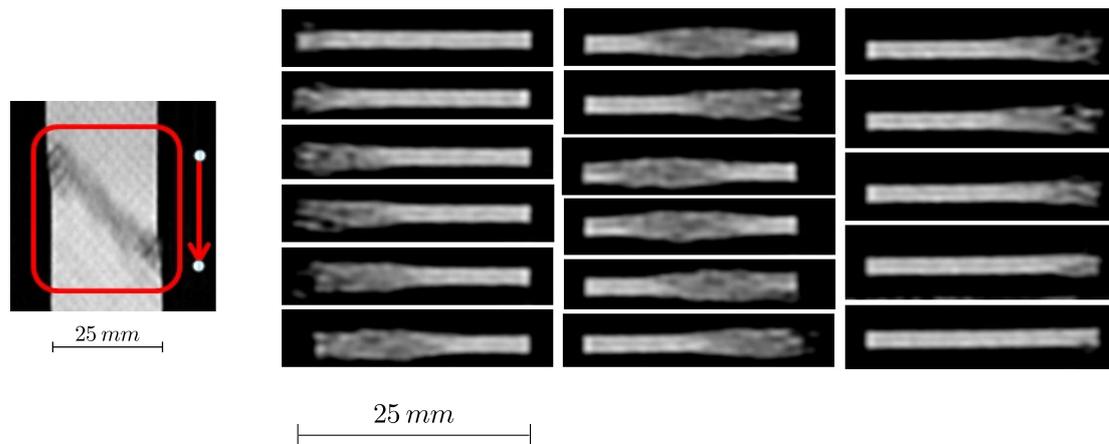


FIGURE 2.36 – Vues axiales des champs densimétriques le long du macrodéfaut d'une éprouvette de type B

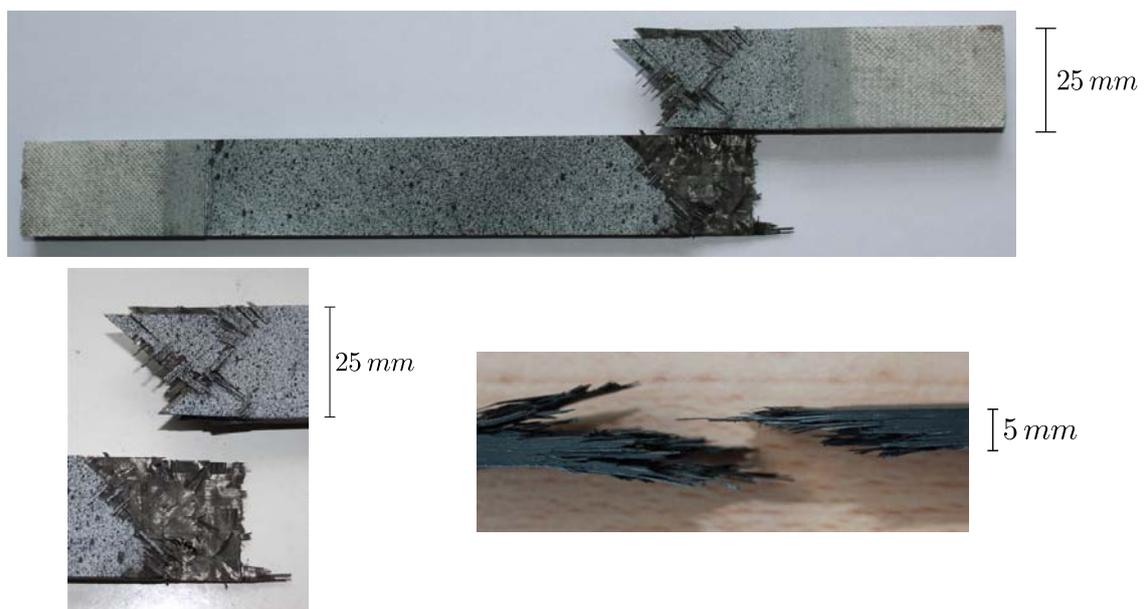


FIGURE 2.37 – Faciès de rupture des éprouvettes de type C

2.6 Conclusion

Cette étude expérimentale sur des composites stratifiés en carbone-époxy réalisés par infusion de résine liquide a permis de mettre en évidence certains aspects majeurs de leur comportement. En particulier, la combinaison des trois techniques de mesures de champs a souligné le développement d'endommagements de façon diffuse au sein du matériau (rupture de fibres, décohésion fibres-matrice), démontré l'interaction avec l'anisotropie initiale du composite et illustré leur rôle dans le processus de rupture globale.

Au niveau des perspectives, la démarche originale employée conduira certainement à des spécificités plus marquées, notamment vis-à-vis des conséquences macroscopiques (dégradation des propriétés mécaniques, effets unilatéraux), si elle est mise en place pour des matériaux plus susceptibles à l'endommagement. La corrélation des différentes techniques sera également facilitée. Par ailleurs, la connaissance des propriétés thermiques du stratifié permettrait d'affiner l'interprétation quantitative des résultats de thermographie infrarouge, en particulier l'accès aux sources de chaleur (Chrysochoos [66]) ; cette question reste cependant ouverte à l'heure actuelle devant notamment les difficultés liées au caractère anisotrope des composites. De même, la réalisation d'un suivi tomographique en cours d'essai associé à un traitement numérique des images permettrait une quantification physique des mécanismes de décohésion qu'il sera intéressant de mettre en regard de la dégradation correspondante des propriétés mécaniques.

En terme de modélisation, les résultats obtenus justifient le recours au cadre de la Mécanique de l'Endommagement pour le développement d'une loi de comportement, notamment en vue d'une prédiction cohérente de la rupture. Ils illustrent également les limites de l'expérimental dans la connaissance précise, quantifiée et exhaustive de ces phénomènes. En particulier, il est difficile de caractériser les effets de microfissures d'orientation arbitraire, d'obtenir la distribution spatiale des propriétés mécaniques, d'établir un lien explicite entre les anisotropies initiale et induite ou encore de préciser complètement les conséquences d'ouverture ou de fermeture de défauts. Dans ce contexte, il semble donc intéressant de recourir à une analyse micromécanique pour affiner cette compréhension et apporter des bases de justification complémentaires aux modélisations proposées. C'est ce que l'on se propose de faire au chapitre suivant.

Chapitre 3

Homogénéisation bidimensionnelle des milieux orthotropes fissurés

Après une introduction des concepts généraux du problème de l'homogénéisation des matériaux fissurés, ce chapitre est consacré à la construction de l'énergie libre macroscopique de matériaux orthotropes 2D affectés par des microfissures d'orientation arbitraire. Cette démarche, initiée par Gruescu [99], est ici approfondie et surtout corrigée au niveau des expressions à fissures fermées.

3.1 Introduction

La micromécanique vise à décrire le comportement mécanique d'un matériau hétérogène à partir des mécanismes de déformation des phases constitutives et de l'arrangement de celles-ci. Une présentation exhaustive et rigoureuse des approches par changement d'échelle est faite notamment dans Bornert [40], Li [147], Suquet [206], Zaoui [229, 230]. Les modèles à champs moyens établis dans ce cadre définissent notamment le lien entre les grandeurs microstructurales et macroscopiques. Dans le problème qui nous intéresse, on peut ainsi établir des relations entre les paramètres des microfissures (en particulier leur densité, orientation et état d'ouverture-fermeture) avec le comportement effectif du matériau.

Un certain nombre de travaux sur le cas des milieux fissurés initialement isotropes ont permis de rendre compte simultanément de l'anisotropie induite et des effets unilatéraux pour des défauts d'orientation arbitraire. Comme cela a été décrit au chapitre 1, cette question est abordée selon deux voies :

- soit à partir de méthodes d'estimation basées sur la résolution du problème de l'inclusion d'Eshelby ; les fissures sont représentées sous forme d'ellipsoïdes aplatis d'élasticité distincte suivant leur état d'ouverture-fermeture (Deudé et al. [76]),
- soit à partir d'une méthode directe reposant sur les solutions de la Mécanique de la Rupture ; le comportement unilatéral des défauts y est dans ce cas intégré *via* la forme des sauts de déplacements (Andrieux et al. [10, 11], Pensée et al. [179, 180, 182]).

Dans le premier cas, l'extension à l'anisotropie initiale peut bénéficier des résultats récents de Gruescu et al. [100] concernant la détermination du tenseur d'Eshelby en milieu orthotrope (étude tridimensionnelle avec un défaut représenté par un cylindre infini). Néanmoins, l'élasticité fictive représentative de l'état fermé des microfissures reste pour l'heure à déterminer.

Les approches directes permettent en revanche des avancées plus abouties. Elles s'inscrivent dans le cadre bidimensionnel d'existence des solutions élastiques analytiques pour milieux fissurés, cadre bien adapté à de nombreuses applications pour les composites stratifiés. Dans sa thèse, Gruescu [99] a ainsi proposé une extension de l'approche énergétique d'Andrieux et al. [10, 11] au contexte d'une matrice 2D initialement orthotrope. Basée sur un formalisme en déformation permettant d'exprimer l'énergie libre du matériau microfissuré, cette démarche est particulièrement intéressante du point de vue du calcul de structures ainsi qu'en vue d'une extension à la prise en compte du glissement dissipatif

des lèvres des microfissures (voir par exemple Pensée [179], Zhu et al. [231, 232]). Si la formulation obtenue par cet auteur pour des défauts ouverts est correcte, le traitement du cas des défauts fermés présente certaines incohérences et erreurs dont la correction s'avère nécessaire. Parallèlement, cette analyse micromécanique permet de mettre en évidence un certain nombre de particularités et de précautions à prendre pour l'étude de matériaux microfissurés initialement anisotropes.

3.2 Position du problème d'homogénéisation

On se propose dans ce paragraphe de préciser les données du problème, les hypothèses retenues pour son analyse, les notions de base ainsi que la démarche d'analyse du problème.

3.2.1 Définition du Volume Élémentaire Représentatif

Le cadre général de l'étude est celui des petites perturbations quasi statiques et isothermes. On considère un Volume Élémentaire Représentatif (VER) sous la forme d'une cellule carrée \mathcal{A} de frontière extérieure $\partial\mathcal{A}$. Ce VER est constitué d'une matrice élastique linéaire orthotrope dont les axes de symétrie correspondent à la base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Le tenseur d'élasticité de la matrice vierge est noté \mathbb{C}^0 :

$$\mathbb{C}^0 = a_1 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + a_2 \mathbf{I} \otimes \underline{\underline{\mathbf{I}}} + a_3 \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} + a_4 (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{A}) \quad (3.1)$$

où $\mathbf{I} = \{\delta_{ij}\}_{(i,j) \in [1,2]^2}$ représente le tenseur identité d'ordre deux (δ_{ij} le symbole de Kronecker) et $\mathbf{A} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$ le tenseur de structure du milieu sain ; les coefficients constants $\{a_i\}_{i=1,4}$ peuvent être exprimés en fonction des composantes du tenseur d'élasticité dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$:

$$\begin{aligned} a_1 &= \mathbb{C}_{2222}^0 - 2\mathbb{C}_{1212}^0 & , & & a_2 &= 2\mathbb{C}_{1212}^0 \\ a_3 &= \mathbb{C}_{1111}^0 + \mathbb{C}_{2222}^0 - 2\mathbb{C}_{1122}^0 - 4\mathbb{C}_{1212}^0 & , & & a_4 &= \mathbb{C}_{1122}^0 - \mathbb{C}_{2222}^0 + 2\mathbb{C}_{1212}^0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Notons que ces expressions peuvent être données également en fonction des modules de l'ingénieur du matériau orthotrope et des hypothèses sur le comportement de la structure (contraintes ou déformations planes, voir annexe A).

L'approche directe de la modélisation bidimensionnelle des milieux fissurés consiste à représenter chaque défaut comme deux surfaces semblables séparées par une distance infinitésimale par rapport à l'ouverture de celui-ci ; les deux surfaces peuvent être considérées comme superposées et correspondent à une interface de discontinuité interne au

matériau (voir par exemple Barthélémy [20]). On suppose ici que la matrice est affaiblie par un ensemble de N familles de microfissures planes orientées de manière aléatoire (Fig. 3.1). Les microfissures de la $i^{\text{ème}}$ famille présentent une longueur moyenne de $2l_i$ supposée très petite par rapport à la taille du VER (séparation des échelles). La normale unitaire \mathbf{n}_i à ces microfissures et son vecteur tangent \mathbf{t}_i sont tels que $(\mathbf{n}_i, \mathbf{t}_i)$ forme une base orthonormée directe; on désigne par ω_i^+ (respectivement ω_i^-) leur face supérieure (resp. inférieure) telles que le vecteur \mathbf{n}_i est dirigé de ω_i^- vers ω_i^+ ; $\omega_i = \omega_i^+ \cup \omega_i^-$ correspond enfin au domaine total occupé par ces défauts.

On adopte des conditions classiques de contact unilatéral pour les microfissures. En notant $\llbracket \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rrbracket_i$ le saut de déplacement entre les lèvres des microfissures en un point quelconque \mathbf{x} de ω_i :

$$\llbracket \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rrbracket_i = \mathbf{u}(\mathbf{x} \in \omega_i^+) - \mathbf{u}(\mathbf{x} \in \omega_i^-) \quad (3.3)$$

ces conditions sont les suivantes (voir par exemple Leguillon and Sanchez-Palencia [142]) :

$$\begin{cases} \llbracket u_n(\mathbf{x}) \rrbracket_i = \llbracket \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rrbracket_i \cdot \mathbf{n}_i & \geq 0 \\ \mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_i & \leq 0 \\ \llbracket u_n(\mathbf{x}) \rrbracket_i (\mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_i) & = 0 \end{cases}, \quad \forall \mathbf{x} \in \omega_i \quad (3.4)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ désigne le tenseur de contraintes locales au sein du VER. Les relations (3.4) traduisent les faits suivants :

- les lèvres des microfissures ne peuvent s'interpénétrer ($\llbracket u_n(\mathbf{x}) \rrbracket_i \geq 0$),
- dans leur état ouvert ($\llbracket u_n(\mathbf{x}) \rrbracket_i > 0$), les fissures présentent une condition de bord libre d'efforts (en particulier $\mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_i = 0$),
- lorsqu'elles sont fermées ($\llbracket u_n(\mathbf{x}) \rrbracket_i = 0$), une contrainte normale de compression ($\mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_i < 0$) s'applique sur leurs lèvres.

On suppose enfin que le glissement des lèvres des microfissures se fait sans frottement (non dissipatif).

3.2.2 Définition des grandeurs caractéristiques - Conditions aux limites

On se place sous l'hypothèse de densité modérée de défauts (schéma dilué). Le problème d'homogénéisation à résoudre peut donc se ramener à l'étude d'une cellule élémentaire affaiblie par une seule famille de plusieurs microfissures parallèles de même orienta-

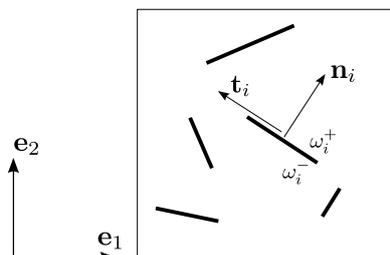


FIGURE 3.1 – Volume élémentaire représentatif

tion \mathbf{n} et longueur moyenne $2l$. \mathcal{N} désigne le nombre de microfissures par unité de surface et ω représente le domaine occupé par cette famille.

Dans un raisonnement de changement d'échelle, les grandeurs macroscopiques de contrainte Σ et de déformation \mathbf{E} sont obtenues par moyennes spatiales sur le VER des champs microscopiques respectivement de contrainte σ et de déformation ε (Nemat-Nasser et Hori [171], Zaoui [229, 230]) :

$$\Sigma = \langle \sigma \rangle_{\mathcal{A}} \quad (3.5)$$

et

$$\mathbf{E} = \langle \varepsilon \rangle_{\mathcal{A}} \quad (3.6)$$

avec $\langle \cdot \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\mathcal{A}|} \int_{\Omega} (\cdot) dS$ l'opérateur d'intégration sur tout domaine Ω (dS l'élément de surface). De même, l'énergie libre macroscopique W du milieu se définit comme la moyenne spatiale de l'énergie libre microscopique (Suquet [206]), soit :

$$W = \frac{1}{2} \langle \varepsilon : \mathbb{C}^0 : \varepsilon \rangle_{\mathcal{A}} \quad (3.7)$$

Dans le cas particulier des milieux fissurés qui présentent des surfaces de discontinuité internes, il convient néanmoins de prêter une attention toute particulière à la définition de ces quantités (Suquet [206]). En effet, si l'on décompose les champs locaux sur chacun des domaines $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A} - \omega$ de la partie matrice et de la famille de microfissures décrit par sa frontière ω , et si l'on applique le théorème de la divergence, il vient pour Σ (des éléments de démonstration sont fournis à l'annexe B) :

$$\Sigma = \langle \sigma \rangle_{\bar{\mathcal{A}}} + \frac{\mathcal{N}}{2} \int_{\omega} (\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x})) \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x}))) dx \quad (3.8)$$

où $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x})) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})$ désigne le vecteur contrainte en un point \mathbf{x} du domaine ω de vecteur normal unitaire extérieur $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ (dx l'élément de longueur), soit encore à :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\bar{\mathcal{A}}} \quad (3.9)$$

La contrainte macroscopique est ainsi donnée par la moyenne des contraintes microscopiques sur la partie matrice. Si l'expression (3.9) apparaît comme triviale pour des microfissures ouvertes (les forces appliquées sur les lèvres sont nulles dans ce cas, d'où $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ pour tout \mathbf{x} de ω), il convient de souligner sa validité également pour des fissures fermées. Dans ce cas en effet, pour tout point \mathbf{x} de ω , les vecteurs contraintes sur chacune des faces sont opposés :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x} \in \omega^+, \mathbf{v}(\mathbf{x} \in \omega^+)) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{T}(\mathbf{x} \in \omega^-, \mathbf{v}(\mathbf{x} \in \omega^-)) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot (-\mathbf{n}) \quad (3.10)$$

amenant à la nullité du second terme de (3.8). Un raisonnement analogue conduit pour la déformation macroscopique à (voir annexe B) :

$$\mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\bar{\mathcal{A}}} + \frac{\mathcal{N}}{2} \int_{\omega} (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x})) dx \quad (3.11)$$

L'introduction du saut de déplacement (3.3) entre les faces des microfissures donne alors :

$$\mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\bar{\mathcal{A}}} + \frac{\mathcal{N}}{2} \int_{\omega^+} (\llbracket \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rrbracket \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \llbracket \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rrbracket) dx \quad (3.12)$$

Cette expression démontre clairement l'insuffisance de la déformation moyenne sur la partie solide $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\bar{\mathcal{A}}}$ à décrire \mathbf{E} et la nécessité d'inclure la contribution des sauts de déplacements des microfissures. En ce qui concerne enfin l'énergie libre globale W , l'énergie libre spécifique n'est définie que sur le domaine constitué par la matrice $\bar{\mathcal{A}}$, l'expression (3.7) se réduit donc dans le cas d'un milieu fissuré à :

$$W = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\bar{\mathcal{A}}} \quad (3.13)$$

Telega [213] (voir aussi Suquet [206]) démontre que le lemme de Hill qui traduit la cohérence du travail entre les échelles microscopique et macroscopique (Christensen [65], Hashin [108], Hill [112]) doit alors être étendu dans le présent contexte, en l'occurrence (voir annexe B) :

$$W = \frac{1}{2} \int_{\partial \bar{\mathcal{A}}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) dx = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E} - \frac{\mathcal{N}}{2} \int_{\omega^+} \llbracket \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rrbracket \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dx \quad (3.14)$$

où $\partial\bar{\mathcal{A}} = \partial\mathcal{A} \cup \omega$ désigne la frontière de la matrice solide¹. Dans le cas de microfissures ouvertes (libres de contraintes), cette expression se ramène à $\frac{1}{2} \Sigma : \mathbf{E}$, soit l'énergie élastique des milieux sans cavités. Nous démontrerons en revanche par la suite l'importance du second terme de (3.14) dans la représentation des effets des défauts fermés, en particulier dans le contexte de milieux initialement anisotropes. On notera par ailleurs que l'expression (3.14) est totalement compatible avec la loi d'état définissant la contrainte macroscopique à partir de la dérivée partielle de W (voir section 3.3.2, éq. (3.40)).

Comme pour tout problème de structure, il convient dans une dernière étape de préciser les conditions aux limites du problème d'homogénéisation. On retient généralement des conditions homogènes au contour écrites en contrainte ou en déformation, la considération de l'une ou l'autre ne conduisant pas systématiquement aux mêmes résultats, y compris en schéma dilué (voir Dormieux et Kondo [77]). De façon à pouvoir bénéficier par la suite des solutions de la Mécanique de la Rupture, nous avons opté pour des conditions homogènes en contrainte en tout point \mathbf{x} de la frontière $\partial\mathcal{A}$ de normale unitaire extérieure $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, soit (Fig. 3.2) :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \Sigma \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{A} \quad (3.15)$$

3.2.3 Décomposition du problème

Les hypothèses et définitions étant posées, l'objectif à ce stade consiste à déterminer les champs locaux de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$, déplacement \mathbf{u} et déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ satisfaisant au problème présenté en vue d'établir l'expression analytique de l'énergie libre du milieu microfissuré. On adopte pour cela la démarche initialement proposée par Andrieux et al. [10, 11] dans le contexte de milieux isotropes fissurés et qui consiste à décomposer le problème \mathcal{P} posé sur le VER en deux sous-problèmes comme indiqué sur la figure 3.2.

- Le sous-problème $\mathcal{P}^{(1)}$ constitue un problème d'élasticité homogène classique ; le champ de déplacement $\mathbf{u}^{(1)}$ correspond par conséquent à celui de la matrice vierge soumise aux conditions homogènes en contrainte au contour et les champs locaux de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$ et de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}$ sont uniformes ; précisément, le champ $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$ est statiquement admissible avec Σ , d'où $\langle \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \rangle_{\mathcal{A}} = \Sigma$ d'après (3.5) ; compte tenu de (3.6) et du comportement élastique linéaire de la matrice, la déformation

1. Etant donné le domaine d'intégration, il convient de considérer dans (3.14) pour $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ la normale unitaire extérieure à $\bar{\mathcal{A}}$, soit notamment $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\mathbf{n}$ pour la face ω^+ et $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}$ pour la face ω^- .

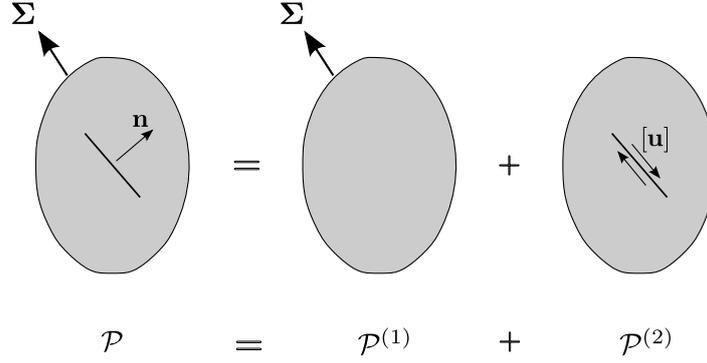


Figure 3.2: Décomposition du problème étudié

macroscopique $\mathbf{E}^{(1)}$ associée à $\mathcal{P}^{(1)}$ est également telle que :

$$\mathbf{E}^{(1)} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \rangle_{\mathcal{A}} = [\mathbb{C}^0]^{-1} : \boldsymbol{\Sigma} \quad (3.16)$$

- Le sous-problème $\mathcal{P}^{(2)}$ est défini quant à lui par les discontinuités de déplacement sur les lèvres de la microfissure ; le champ de déplacement $\mathbf{u}^{(2)}$ est alors induit par le saut de déplacement $[[\mathbf{u}]]$ imposé et le champ de contraintes locales $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ est auto-équilibré, soit $\langle \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \rangle_{\bar{\mathcal{A}}} = \mathbf{0}$ d'après (3.9) ; parallèlement, on peut écrire l'expression de la déformation macroscopique $\mathbf{E}^{(2)}$ associée à $\mathcal{P}^{(2)}$ d'après (3.12) puisque $\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \rangle_{\bar{\mathcal{A}}} = [\mathbb{C}^0]^{-1} : \langle \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \rangle_{\bar{\mathcal{A}}} = \mathbf{0}$, soit :

$$\mathbf{E}^{(2)} = \frac{\mathcal{N}}{2} \int_{\omega^+} ([[\mathbf{u}(\mathbf{x})]] \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes [[\mathbf{u}(\mathbf{x})]]) dx \quad (3.17)$$

Si l'on introduit les deux variables cinématiques scalaires β et γ caractérisant respectivement la moyenne de la discontinuité normale $[[u_n(\mathbf{x})]] = [[\mathbf{u}(\mathbf{x})]] \cdot \mathbf{n}$ de déplacement des lèvres des microfissures (ouverture) et la moyenne de la discontinuité tangentielle $[[u_t(\mathbf{x})]] = [[\mathbf{u}(\mathbf{x})]] \cdot \mathbf{t}$ (glissement) :

$$\beta = \mathcal{N} \int_{\omega^+} [[u_n(\mathbf{x})]] dx, \quad \gamma = \mathcal{N} \int_{\omega^+} [[u_t(\mathbf{x})]] dx \quad (3.18)$$

la déformation macroscopique $\mathbf{E}^{(2)}$ s'exprime de la façon suivante :

$$\mathbf{E}^{(2)} = \beta \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{\gamma}{2} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{n}) \quad (3.19)$$

D'après la précédente décomposition, la solution $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon})$ du problème \mathcal{P} s'obtient par sommation des champs solutions $(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \mathbf{u}^{(1)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)})$ et $(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}, \mathbf{u}^{(2)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)})$ associés respectivement aux sous-problèmes $\mathcal{P}^{(1)}$ et $\mathcal{P}^{(2)}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \quad (3.20)$$

On en déduit ainsi la forme additive de la déformation globale associée au problème \mathcal{P} :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} \quad (3.21)$$

ainsi que celle de l'énergie libre macroscopique W (voir par exemple Andrieux et al. [10, 11]²) :

$$W = W^{(1)} + W^{(2)} \quad (3.22)$$

$W^{(1)}$ représente l'énergie libre du matériau sain pour le problème $\mathcal{P}^{(1)}$:

$$W^{(1)} = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} : \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \rangle_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} \mathbf{E}^{(1)} : \mathbb{C}^0 : \mathbf{E}^{(1)} \quad (3.23)$$

et $W^{(2)}$ correspond à la contribution des discontinuités de déplacement dans le problème $\mathcal{P}^{(2)}$:

$$W^{(2)} = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} : \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \rangle_{\bar{\mathcal{A}}} = -\frac{\mathcal{N}}{2} \int_{\omega^+} \llbracket \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rrbracket \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, dx \quad (3.24)$$

d'après (3.14). Sous l'hypothèse d'une densité modérée, les contraintes microscopiques sont constantes sur les lèvres des microfissures ($\boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^{(2)}, \forall \mathbf{x} \in \omega$). La décomposition du saut de déplacement selon ses composantes normales et tangentielles permet donc d'en déduire finalement que :

$$W^{(2)} = -\frac{1}{2} (\beta \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{n} + \gamma \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{t}) \quad (3.25)$$

Il faut noter que les expressions générales (3.22), (3.23) et (3.25) sont valables quelle que soit la symétrie matérielle de la matrice, et donc en particulier dans le cas orthotrope qui nous intéresse ici, mais aussi quel que soit l'état d'ouverture-fermeture des microfissures.

2. Une approche alternative à partir de (3.14) permet également de déduire ce résultat (voir section 3.5.1).

3.3 Energie libre d'un milieu orthotrope 2D fissuré

3.3.1 Expression de l'énergie libre en fonction des sauts de déplacements

On souhaite exprimer maintenant $W^{(2)}$, et par la suite W , en fonction de β et γ . L'hypothèse d'une faible dilution permet de recourir à la théorie de l'élasticité anisotrope qui fournit les expressions des sauts de déplacements en fonction des contraintes appliquées sur les microfissures. Précisément, on se base sur les résultats établis grâce au formalisme des potentiels complexes qui s'avère bien adapté à l'étude des problèmes plans en milieux anisotropes (voir par exemple les travaux de référence de Muskhelishvili [169]). Pour tout point \mathbf{x} le long d'une fissure arbitrairement orientée, le saut de déplacement s'écrit ainsi (Lekhnitskii [143, 144], Horii et Nemat-Nasser [114], Mauge et Kachanov [163] ou Tsukrov et Kachanov [220]) :

$$\llbracket \mathbf{u}(x) \rrbracket = \frac{4}{\pi} \sqrt{l^2 - x^2} \mathbf{n} \cdot (-\boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot \mathbf{H} \quad , \quad \forall x \in [-l, +l] \quad (3.26)$$

Le signe $(-)$ devant la contrainte locale $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ est ici introduit afin de faire le lien avec les solutions classiques de la Mécanique de la Rupture. Dans le repère (\mathbf{n}, \mathbf{t}) associé à la microfissure, le tenseur symétrique \mathbf{H} s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{H} = H_{nn} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + H_{nt}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{n}) + H_{tt} \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \quad (3.27)$$

dont les composantes dépendent des propriétés élastiques de la matrice vierge et de l'orientation du défaut avec les axes de symétrie initiale décrite par l'angle $\phi = (\mathbf{e}_1, \mathbf{n})$ (Fig. 3.3) :

$$H_{nn} = C(1 - D \cos 2\phi), \quad H_{nt} = CD \sin 2\phi, \quad H_{tt} = C(1 + D \cos 2\phi) \quad (3.28)$$

Les constantes C et D s'expriment de la façon suivante en fonction des composantes du tenseur d'élasticité \mathbb{C}^0 :

$$C = \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{C_{1111}^0} + \sqrt{C_{2222}^0}}{\sqrt{C_{1111}^0 C_{2222}^0 - (C_{1122}^0)^2}} \sqrt{\frac{1}{C_{1212}^0} + 2 \left(\frac{\sqrt{C_{1111}^0 C_{2222}^0 - C_{1122}^0}}{C_{1111}^0 C_{2222}^0 - (C_{1122}^0)^2} \right)} \quad (3.29)$$

$$D = \frac{\sqrt{C_{1111}^0} - \sqrt{C_{2222}^0}}{\sqrt{C_{1111}^0} + \sqrt{C_{2222}^0}}$$

et constituent donc des mesures de l'amplitude de l'anisotropie initiale. En particulier, pour la symétrie cubique ou l'isotropie (telles que $\mathbb{C}_{1111}^o = \mathbb{C}_{2222}^o$), on obtient $D = 0$.

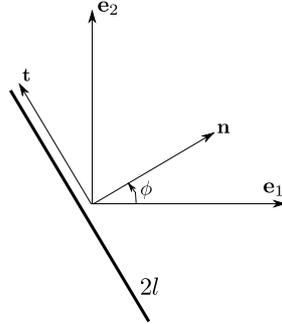


FIGURE 3.3 – Repère (\mathbf{n}, \mathbf{t}) associé à la microfissure

L'introduction de (3.27) dans (3.26) permet d'exprimer les composantes normale et tangentielle du saut de déplacement $\llbracket \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rrbracket$ entre les faces des microfissures pour tout $\mathbf{x} \in \omega$:

$$\begin{aligned} \llbracket u_n(x) \rrbracket &= \frac{4}{\pi} \sqrt{l^2 - x^2} \left[H_{nn} \mathbf{n} \cdot (-\boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot \mathbf{n} + H_{nt} \mathbf{n} \cdot (-\boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot \mathbf{t} \right] \\ \llbracket u_t(x) \rrbracket &= \frac{4}{\pi} \sqrt{l^2 - x^2} \left[H_{nt} \mathbf{n} \cdot (-\boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot \mathbf{n} + H_{tt} \mathbf{n} \cdot (-\boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot \mathbf{t} \right] \end{aligned}, \quad \forall x \in [-l, +l] \quad (3.30)$$

Ces expressions démontrent l'importance du couplage des modes de fissuration en contexte anisotrope, comme l'ont déjà souligné Mauge et Kachanov [163] et Tsukrov et Kachanov [220]. En effet, dans les deux cas suivants :

- le matériau vierge est tel que $\mathbb{C}_{1111}^o \neq \mathbb{C}_{2222}^o$ (d'où $D \neq 0$),
- l'orientation des microfissures ne coïncide pas avec les axes d'orthotropie ($\mathbf{n} \neq \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ soit $\phi \neq \{0, \frac{\pi}{2}\}$),

un couplage direct existe entre les modes normal et tangentiel de fissuration du fait du caractère non diagonal du tenseur \mathbf{H} ($H_{nt} \neq 0$, voir Eq. (3.28)) : une contrainte normale $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ (respectivement tangentielle $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{t} \neq 0$) sur les faces des microfissures induit ainsi à la fois des discontinuités normale ($\llbracket u_n(x) \rrbracket \neq 0$) et tangentielle ($\llbracket u_t(x) \rrbracket \neq 0$) de déplacement des lèvres des microfissures. De façon évidente, ce couplage n'a pas lieu si les directions principales de la matrice et le repère de la microfissure correspondent (amenant à une forme diagonale du tenseur \mathbf{H} , $H_{nt} = 0$), soit lorsque :

- la matrice présente une symétrie cubique ou une isotropie initiale (pour lesquelles $D = 0$),
- ou, si les microfissures sont parallèles aux axes d'orthotropie ($\mathbf{n} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ soit $\phi = \{0, \frac{\pi}{2}\}$).

L'intégration des sauts (3.30) sur la longueur des microfissures donne l'expression des variables β et γ en fonction de la contrainte locale :

$$\begin{aligned}\beta &= 2d [H_{nn} \mathbf{n} \cdot (-\boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot \mathbf{n} + H_{nt} \mathbf{n} \cdot (-\boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot \mathbf{t}] \\ \gamma &= 2d [H_{nt} \mathbf{n} \cdot (-\boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot \mathbf{n} + H_{tt} \mathbf{n} \cdot (-\boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot \mathbf{t}]\end{aligned}\quad (3.31)$$

où intervient $d = \mathcal{N}l^2$ le paramètre de densité de microfissures initialement introduit par Budiansky et O'Connell [46]). On retrouve ici les résultats obtenus par Mauge et Kachanov [163], Tsukrov et Kachanov [220]. En d'autres termes, les contraintes normale et tangentielle sur les microfissures dépendent de la façon suivante de β et γ :

$$\mathbf{n} \cdot (-\boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2d} [G_{11} \beta + G_{12} \gamma], \quad \mathbf{n} \cdot (-\boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot \mathbf{t} = \frac{1}{2d} [G_{21} \beta + G_{22} \gamma] \quad (3.32)$$

avec

$$G_{11} = \frac{H_{tt}}{H_{nn}H_{tt} - H_{nt}^2}, \quad G_{12} = -\frac{H_{nt}}{H_{nn}H_{tt} - H_{nt}^2} = G_{21}, \quad G_{22} = \frac{H_{nn}}{H_{nn}H_{tt} - H_{nt}^2} \quad (3.33)$$

Le report de (3.32) dans (3.25) associé aux relations (3.22) et (3.23) conduit à :

$$W^{(2)} = \frac{1}{4d} [G_{11} \beta^2 + 2 G_{12} \beta \gamma + G_{22} \gamma^2] \quad (3.34)$$

soit à l'expression suivante de l'énergie libre macroscopique du milieu orthotrope microfissuré en fonction des variables de sauts de déplacement :

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{E}^{(1)} : \mathbb{C}^0 : \mathbf{E}^{(1)} + \frac{1}{4d} [G_{11} \beta^2 + 2 G_{12} \beta \gamma + G_{22} \gamma^2] \quad (3.35)$$

avec

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E} - \mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{E} - \beta \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{\gamma}{2} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{n}) \quad (3.36)$$

d'après (3.19) et (3.21). On notera la généralité de cette relation qui est valable quel que soit l'état, ouvert ou fermé, des microfissures.

3.3.2 Expression des variables cinématiques en fonction des grandeurs macroscopiques

Afin d'obtenir la formulation complète de l'énergie libre, il convient donc à ce stade d'exprimer les variables β et γ en fonction de la déformation macroscopique \mathbf{E} pour une densité d'endommagement d donnée. A l'instar d'Andrieux et al. [10, 11] et Pensée et al. [180, 182], on adopte pour cela un raisonnement établi à partir de l'écriture de la dissipation. On se trouve ici dans le cadre d'évolutions réversibles (pas de propagation des fissures d'où $\dot{d} = 0$, glissement sans frottement des lèvres des microfissures fermées) ce qui impose la nullité de la dissipation Φ :

$$\Phi = \Sigma : \dot{\mathbf{E}} - \dot{W} = 0 \quad (3.37)$$

La combinaison du problème $\mathcal{P}^{(1)}$ avec l'équation (3.36) permet d'écrire la contrainte macroscopique Σ en fonction des variables \mathbf{E} , β et γ :

$$\Sigma = \mathbb{C}^0 : \mathbf{E}^{(1)} = \mathbb{C}^0 : \left(\mathbf{E} - \beta \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{\gamma}{2} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{n}) \right) \quad (3.38)$$

De la même façon, on peut exprimer l'énergie libre en fonction de ces mêmes variables à partir de (3.35). Dans ce dernier cas, la dérivation de W par rapport au temps conduit à :

$$\Phi = -\frac{\partial W}{\partial \beta} \dot{\beta} - \frac{\partial W}{\partial \gamma} \dot{\gamma} = 0, \quad \forall (\dot{\beta}, \dot{\gamma}) \quad (3.39)$$

puisque l'on a

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = \Sigma \quad (3.40)$$

Il s'en suit que :

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \beta} = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial \gamma} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2d} [G_{11} \beta + G_{12} \gamma] = \mathbf{n} \cdot (-\boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{t} = \frac{1}{2d} [G_{12} \beta + G_{22} \gamma] = \mathbf{n} \cdot (-\boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot \mathbf{t} \end{cases} \quad (3.41)$$

En accord avec l'hypothèse de densité modérée, les relations (3.41) démontrent clairement le transfert de contraintes entre les échelles macroscopique et microscopique, en particulier sur les faces des microfissures. D'autre part, on peut grâce à (3.31) relier les variables cinématiques β and γ à la contrainte macroscopique Σ :

$$\beta = 2d [H_{nn} \mathbf{n} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{n} + H_{nt} \mathbf{n} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{t}], \quad \gamma = 2d [H_{nt} \mathbf{n} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{n} + H_{tt} \mathbf{n} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{t}] \quad (3.42)$$

L'obtention de la forme finale de l'énergie requiert donc à présent d'exprimer β and γ en fonction de \mathbf{E} (et de la densité d fixée) en lieu et place de Σ . On s'appuie pour cela sur l'hypothèse de faible dilution pour laquelle on peut faire l'approximation $\Sigma \approx \mathbb{C}^0 : \mathbf{E}$ (on aboutit à la même conclusion en négligeant les termes du second ordre en d). En introduisant (3.38) au sein de (3.42), on en déduit ainsi les expressions approchées suivantes :

$$\beta = 2d [H_{nn} \mathbf{N} : \mathbf{E} + H_{nt} \mathbf{T} : \mathbf{E}], \quad \gamma = 2d [H_{nt} \mathbf{N} : \mathbf{E} + H_{tt} \mathbf{T} : \mathbf{E}] \quad (3.43)$$

où les tenseurs symétriques du second ordre \mathbf{N} et \mathbf{T} sont définis par :

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbb{C}^0 : \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \\ &= a_1 \mathbf{I} + a_2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + a_3 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{A} + a_4 [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{I} + \mathbf{A}] \end{aligned} \quad (3.44)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbb{C}^0 : \frac{1}{2} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{n}) \\ &= \frac{a_2}{2} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{n}) + a_3 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{A} + a_4 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Les équations (3.43) s'interprètent donc comme des relations de localisations des déformations déterminant $\mathbf{E}^{(2)} = \beta \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{\gamma}{2} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{n})$ en fonction de \mathbf{E} .

3.3.3 Critère d'ouverture-fermeture des microfissures

Les expressions précédentes des sauts de déplacement moyens permettent la détermination macroscopique d'un critère en déformation décrivant la transition dans l'état d'ouverture-fermeture de microfissures orientées arbitrairement dans un milieu orthotrope.

D'après les conditions de contact unilatéral décrites en (3.4), les microfissures de normale \mathbf{n} sont :

- ouvertes lorsque la moyenne de la discontinuité normale est strictement positive ($\beta > 0$),
- fermées sans frottement lorsque cette composante s'annule ($\beta = 0$).

Il est important de signaler que ces conditions sont définies quelle que soit la valeur de la discontinuité tangentielle moyenne γ . C'est précisément à ce stade que se situe l'erreur dans le développement de Gruescu [99] qui impose une relation spécifique sur γ dans l'état fermé des microfissures.

Compte tenu des expressions (3.43), on définit la fonction critère suivante :

$$g(\mathbf{E}, \mathbf{n}) = H_{nn} \mathbf{N} : \mathbf{E} + H_{nt} \mathbf{T} : \mathbf{E} = \mathbf{M} : \mathbf{E} \quad (3.46)$$

dans laquelle \mathbf{M} est un tenseur symétrique du second ordre :

$$\mathbf{M} = H_{nn} \mathbf{N} + H_{nt} \mathbf{T} \quad (3.47)$$

Ainsi, la transition entre l'ouverture et la fermeture de chaque famille de microfissures parallèles de normale \mathbf{n} s'opère lorsque $g(\mathbf{E}, \mathbf{n}) = 0$ (correspondant à $\beta = 0$), de sorte que :

- les microfissures sont ouvertes si $g(\mathbf{E}, \mathbf{n}) > 0$,
- les microfissures sont fermées si $g(\mathbf{E}, \mathbf{n}) \leq 0$.

Notons que la formulation (3.46) du critère implique à la fois les déformations normale et tangentielle sur les faces des microfissures, y compris si la matrice vierge est cubique ou isotrope ou si l'orientation du défaut coïncide avec les axes d'orthotropie de celle-ci. Dans le cas particulier de l'isotropie où $\mathbb{C}^0 = \lambda_0 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu_0 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$ (avec λ_0 et μ_0 les coefficients de Lamé), l'équation (3.46) donne $g(\mathbf{E}, \mathbf{n}) = 2\mu_0 \text{tr}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \lambda_0 \text{tr} \mathbf{E}$, qui a été obtenu par Andrieux et al. [10, 11] et Pensée et al. [180, 182]. D'ores et déjà (nous donnerons une expression plus explicite par la suite), cette approche semble donc plus générale que le critère phénoménologique $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$ employé par différents auteurs et restreint à la déformation normale (par exemple Chaboche et al. [60, 58, 61], Halm et al. [106], Maire et Chaboche [153], Maire et Lesne [155], Thionnet et Renard [217], voir section 1.4.3) .

3.4 Expression finale de l'énergie

La combinaison de (3.35) et (3.36) associée à l'hypothèse de densité modérée conduit à la forme finale de l'énergie libre macroscopique :

$$W = W_0 + W_d \quad (3.48)$$

où W_0 représente l'énergie libre de la matrice vierge

$$W_0 = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^0 : \mathbf{E} = \frac{a_1}{2} \text{tr}^2 \mathbf{E} + \frac{a_2}{2} \text{tr}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + \frac{a_3}{2} \text{tr}^2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) + a_4 \text{tr} \mathbf{E} \text{tr}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) \quad (3.49)$$

et W_d caractérise la contribution des microfissures :

$$\begin{aligned} W_d &= -\mathbf{E} : \mathbb{C}^0 : \mathbf{E}^{(2)} + W^{(2)} \\ &= -\beta \mathbf{N} : \mathbf{E} - \gamma \mathbf{T} : \mathbf{E} + \frac{1}{4d} [G_{11} \beta^2 + 2 G_{12} \beta \gamma + G_{22} \gamma^2] \end{aligned} \quad (3.50)$$

L'introduction de (3.33) ainsi que celle des variables cinématiques exprimées en (3.43) associées aux conditions unilatérales permet d'écrire l'énergie libre suivant l'état d'ouverture-fermeture des microfissures :

- si les microfissures sont ouvertes (*i.e.* $g(\mathbf{E}, \mathbf{n}) > 0$) :

$$W = W^{ouv} = W_0 - d [H_{nn} (\mathbf{N} : \mathbf{E})^2 + 2 H_{nt} (\mathbf{N} : \mathbf{E})(\mathbf{T} : \mathbf{E}) + H_{tt} (\mathbf{T} : \mathbf{E})^2] \quad (3.51)$$

- si les microfissures sont fermées (*i.e.* $g(\mathbf{E}, \mathbf{n}) \leq 0$) :

$$W = W^{ferm} = W_0 + \frac{d}{H_{nn} H_{tt} - H_{nt}^2} \begin{bmatrix} H_{nn} H_{nt}^2 (\mathbf{N} : \mathbf{E})^2 \\ + 2 H_{nt}^3 (\mathbf{N} : \mathbf{E})(\mathbf{T} : \mathbf{E}) \\ + H_{tt} (2 H_{nt}^2 - H_{nn} H_{tt}) (\mathbf{T} : \mathbf{E})^2 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Les expressions (3.51-3.52) satisfont à la forme suivante au point de transition entre les deux états des microfissures :

$$\forall (\mathbf{E}, \mathbf{n}), g(\mathbf{E}, \mathbf{n}) = 0, \quad \frac{\partial^2 \llbracket W \rrbracket}{\partial \mathbf{E}^2} = s(\mathbb{C}^0, d, \mathbf{n}) \mathbf{M} \otimes \mathbf{M} = s(\mathbb{C}^0, d, \mathbf{n}) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{E}} \otimes \frac{\partial g}{\partial \mathbf{E}} \quad (3.53)$$

avec $\llbracket W \rrbracket = W^{ouv} - W^{ferm}$ et ce, quelles que soient les propriétés élastiques de la matrice vierge décrites par le tenseur \mathbb{C}^0 et la valeur de la densité de microfissuration d . Le tenseur du second ordre \mathbf{M} est celui donné à la relation (3.47) et s désigne une fonction scalaire de \mathbb{C}^0 , d et de l'orientation \mathbf{n} des microfissures :

$$s(\mathbb{C}^0, d, \mathbf{n}) = -2d G_{11} = -2d \frac{H_{tt}}{H_{nn} H_{tt} - H_{nt}^2} \quad (3.54)$$

Comme cela a été démontré initialement par Curnier et al. [73] puis étendu ensuite par Cormery et Weleman [70, 224] au cas de fonctions de plusieurs variables, la forme quadratique du saut (3.53) au passage entre les états ouvert et fermé des microfissures,

i.e. sur l'hypersurface $g(\mathbf{E}, \mathbf{n}) = \mathbf{M} : \mathbf{E} = 0$ séparant les domaines distincts dans l'espace des déformations correspondant à l'état ouvert (tels que $g(\mathbf{E}, \mathbf{n}) > 0$) et à l'état fermé ($g(\mathbf{E}, \mathbf{n}) < 0$), permet d'assurer la continuité de classe C^1 de l'énergie libre W , et par conséquent la continuité de la réponse contrainte-déformation lors de l'activation-désactivation des dommages. Cet aspect mathématique s'avère véritablement crucial pour la prise en compte rigoureuse de l'effet unilatéral des défauts (Chaboche [55], Ladevèze [126]).

Afin d'obtenir une représentation plus explicite du couplage entre les anisotropies initiale (*via* le tenseur \mathbf{A}) et induite (*via* le vecteur \mathbf{n}), nous posons

$$k_1 = C, \quad k_2 = CD \quad (3.55)$$

de sorte que les composantes du tenseur \mathbf{H} dans le repère (\mathbf{n}, \mathbf{t}) associé aux microfissures s'écrivent :

$$H_{nn} = k_1 + k_2 - 2k_2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}), \quad H_{nt} = -2k_2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}), \quad H_{tt} = k_1 - k_2 + 2k_2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \quad (3.56)$$

On peut alors définir la fonction caractéristique d'ouverture-fermeture des microfissures en fonction de \mathbf{E} , \mathbf{n} et \mathbf{A} :

$$g(\mathbf{E}, \mathbf{n}) = g(\mathbf{E}, \mathbf{n}, \mathbf{A}) = \eta_1 \operatorname{tr}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \eta_2 \operatorname{tr} \mathbf{E} + \eta_3 \operatorname{tr}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) + \eta_4 \operatorname{tr}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) \quad (3.57)$$

avec des coefficients $\{\eta_p(\mathbb{C}^0, \mathbf{n}, \mathbf{A})\}_{p=1,4}$ fonction des propriétés élastiques de la matrice vierge \mathbb{C}^0 et de l'orientation des microfissures par rapport aux axes principaux de celle-ci (au travers de $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$) :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= a_2(k_1 + k_2) \\ \eta_2 &= a_1[k_1 + k_2 - 2k_2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})] + a_4(k_1 - k_2)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \\ \eta_3 &= a_4[k_1 + k_2 - 2k_2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})] + a_3(k_1 - k_2)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \\ \eta_4 &= -2a_2k_2 \end{aligned} \quad (3.58)$$

Par exemple, pour une matrice isotrope, on retrouve ainsi $\eta_1 = 2\mu_0$, $\eta_2 = \lambda_0$ et $\eta_3 = \eta_4 = 0$, comme indiqué au paragraphe 3.3.3. Le contexte anisotrope implique donc un couplage entre les anisotropies structurelle et induite affectant même le critère d'ouverture-fermeture des microfissures, et renforce par là le caractère restrictif des critères du type $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$.

Toujours à partir des notations (3.55), on peut en déduire finalement l'écriture générale de l'énergie libre globale :

$$W = W_0 + d \left[\begin{array}{l} c_1 tr^2 \mathbf{E} + c_2 tr^2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) + c_3 tr \mathbf{E} tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) \\ + c_4 tr^2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + c_5 tr \mathbf{E} tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + c_6 tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \\ + c_7 tr \mathbf{E} tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) + c_8 tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \\ + c_9 tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) \\ + c_{10} tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) \end{array} \right] \quad (3.59)$$

Cette expression démontre clairement que W est positivement homogène de degré deux par rapport à la déformation macroscopique \mathbf{E} , linéaire en la densité de microfissures d et bien radialement symétrique par rapport à \mathbf{n} par indépendance vis-à-vis du signe de ce vecteur (en d'autres termes W dépend de $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$). Les coefficients $\{c_p(\mathbb{C}^0, \mathbf{n}, \mathbf{A})\}_{p=1,10}$ dans (3.59), qui dépendent également de $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$, prennent des expressions différentes suivant l'état des microfissures, soit :

- $\{c_p(\mathbb{C}^0, \mathbf{n}, \mathbf{A})\}_{p=1,10} = \{c_p^{ow}(\mathbb{C}^0, \mathbf{n}, \mathbf{A})\}_{p=1,10}$ dans l'état ouvert ($g(\mathbf{E}, \mathbf{n}, \mathbf{A}) > 0$),

$$c_1^{ow} = -(2a_1 + a_4) a_4 (k_1 - k_2) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) - a_1^2 [k_1 + k_2 - 2k_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})]$$

$$c_2^{ow} = -a_3 (a_3 + 2a_4) (k_1 - k_2) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) - a_4^2 [k_1 + k_2 - 2k_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})]$$

$$c_3^{ow} = -2 (a_1 a_3 + a_3 a_4 + a_4^2) (k_1 - k_2) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \\ - 2 a_1 a_4 [k_1 + k_2 - 2k_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})]$$

$$c_4^{ow} = -2 a_2^2 k_2$$

$$c_5^{ow} = -2 a_1 a_2 (k_1 + k_2)$$

$$c_6^{ow} = -a_2^2 [k_1 - k_2 + 2k_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})]$$

$$c_7^{ow} = -2 a_2 a_4 (k_1 - k_2) + 4 a_1 a_2 k_2$$

$$\begin{aligned}
c_8^{ouv} &= -2 a_2 a_4 (k_1 + k_2) \\
c_9^{ouv} &= -2 a_2 a_3 (k_1 - k_2) + 4 a_2 a_4 k_2 \\
c_{10}^{ouv} &= 4 a_2^2 k_2
\end{aligned} \tag{3.60}$$

- $\{c_p(\mathbb{C}^0, \mathbf{n}, \mathbf{A})\}_{p=1,10} = \{c_p^{ferm}(\mathbb{C}^0, \mathbf{n}, \mathbf{A})\}_{p=1,10}$ dans l'état fermé ($g(\mathbf{E}, \mathbf{n}, \mathbf{A}) \leq 0$) :

$$\begin{aligned}
c_1^{ferm} &= -\frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) [1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})]}{k_1^2 - k_2^2} [a_4 (k_1 - k_2) - 2 a_1 k_2] \\
&\quad \times \left[\begin{array}{l} 2 a_1 k_2 [k_1 + k_2 - 2 k_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})] \\ + a_4 (k_1 - k_2) [k_1 + k_2 + 2 k_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})] \end{array} \right] \\
c_2^{ferm} &= -\frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) [1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})]}{k_1^2 - k_2^2} [a_3 (k_1 - k_2) - 2 a_4 k_2] \\
&\quad \times \left[\begin{array}{l} 2 a_4 k_2 [k_1 + k_2 - 2 k_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})] \\ + a_3 (k_1 - k_2) [k_1 + k_2 + 2 k_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})] \end{array} \right] \\
c_3^{ferm} &= \frac{2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) [1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})]}{k_1^2 - k_2^2} \\
&\quad \times \left[\begin{array}{l} 4 a_4 k_2^2 \left[\begin{array}{l} a_4 (k_1 - k_2) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \\ + a_1 [k_1 + k_2 - 2 k_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})] \end{array} \right] \\ + a_3 (k_1 - k_2) \left[\begin{array}{l} 4 a_1 k_2^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \\ - a_4 (k_1 - k_2) [k_1 + k_2 + 2 k_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})] \end{array} \right] \end{array} \right] \\
c_4^{ferm} &= \frac{a_2^2}{k_1^2 - k_2^2} \left[\begin{array}{l} k_1^3 - k_1 k_2 [k_1 + k_2 - 2 k_1 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})] \\ + k_2^3 [1 + 6 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) - 8 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})^2] \end{array} \right] \\
c_5^{ferm} &= \frac{2 a_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})}{k_1 - k_2} \left[\begin{array}{l} 4 a_1 k_2^2 [1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})] \\ + a_4 (k_1 - k_2) [k_1 - k_2 + 2 k_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})] \end{array} \right] \\
c_6^{ferm} &= -\frac{a_2^2}{k_1^2 - k_2^2} [k_1 - k_2 + 2 k_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})] \\
&\quad \times \left[k_1^2 - k_2^2 [1 + 4 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) - 4 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})^2] \right] \\
c_7^{ferm} &= -\frac{2 a_2}{k_1^2 - k_2^2} \left[\begin{array}{l} 8 a_1 k_2^3 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) [1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})] \\ + a_4 (k_1 - k_2) \left[\begin{array}{l} k_1^2 + 2 k_1 k_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \\ - k_2^2 [1 + 2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) - 4 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})^2] \end{array} \right] \end{array} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_8^{ferm} &= \frac{2a_2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})}{k_1 - k_2} \left[\begin{array}{l} 4a_4 k_2^2 [1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})] \\ + a_3 (k_1 - k_2) [k_1 - k_2 + 2k_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})] \end{array} \right] \\
 c_9^{ferm} &= -\frac{2a_2}{k_1^2 - k_2^2} \left[\begin{array}{l} 8a_4 k_2^3 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) [1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})] \\ + a_3 (k_1 - k_2) \left[\begin{array}{l} k_1^2 + 2k_1 k_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \\ - k_2^2 [1 + 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) - 4(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})^2] \end{array} \right] \end{array} \right] \\
 c_{10}^{ferm} &= -\frac{16k_2^3 a_2^2}{k_1^2 - k_2^2} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) [1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})]
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

C'est donc au travers de la valeur de ces coefficients qu'est pris en compte le comportement unilatéral des microfissures et les conséquences de l'activation-désactivation des dommages. En particulier, nous détaillerons au chapitre suivant l'effet de restitution des propriétés élastiques induit lors de la fermeture des défauts.

En raison de l'hypothèse de densité modérée, on peut enfin étendre le raisonnement précédent à plusieurs familles de microfissures indexées par $i \in \{1, \dots, N\}$. Une famille regroupe toutes les microfissures ayant même orientation \mathbf{n}_i et longueur moyenne $2l_i$. Si \mathcal{N}_i désigne le nombre de fissures par unité de surface de la $i^{\text{ème}}$ famille, la densité de microfissuration de cette famille s'écrit $d_i = \mathcal{N}_i l_i^2$. La généralisation de l'énergie libre (3.59) est alors donnée par la simple sommation de leurs contributions :

$$W = W_0 + \sum_{i=1}^N d_i \left[\begin{array}{l} c_1^{(i)} tr^2 \mathbf{E} + c_2^{(i)} tr^2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) + c_3^{(i)} tr \mathbf{E} tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) \\ + c_4^{(i)} tr^2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) + c_5^{(i)} tr \mathbf{E} tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \\ + c_6^{(i)} tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \\ + c_7^{(i)} tr \mathbf{E} tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{A}) + c_8^{(i)} tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \\ + c_9^{(i)} tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{A}) \\ + c_{10}^{(i)} tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{A}) \end{array} \right] \tag{3.62}$$

Les coefficients $\{c_p^{(i)}(\mathbb{C}^0, \mathbf{n}_i, \mathbf{A})\}_{p=1,10}$ sont associés à chaque famille i de microfissures normale \mathbf{n}_i et dépendent de leur état :

- $\{c_p^{(i)}(\mathbb{C}^0, \mathbf{n}_i, \mathbf{A})\}_{p=1,10} = \{c_p^{ouv}(\mathbb{C}^0, \mathbf{n}_i, \mathbf{A})\}_{p=1,10}$ lorsque ces microfissures sont ou-

vertes (soit lorsque $g(\mathbf{E}, \mathbf{n}_i, \mathbf{A}) > 0$),

- $\left\{c_p^{(i)}(\mathbb{C}^0, \mathbf{n}_i, \mathbf{A})\right\}_{p=1,10} = \left\{c_p^{ferm}(\mathbb{C}^0, \mathbf{n}_i, \mathbf{A})\right\}_{p=1,10}$ lorsque ces microfissures sont fermées (soit lorsque $g(\mathbf{E}, \mathbf{n}_i, \mathbf{A}) \leq 0$),

la fonction caractéristique d'ouverture-fermeture associée à chaque famille s'écrivant :

$$g(\mathbf{E}, \mathbf{n}_i, \mathbf{A}) = \eta_1 tr(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) + \eta_2 tr \mathbf{E} + \eta_3 tr(\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) + \eta_4 tr(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{A}) \quad (3.63)$$

avec les paramètres $\{\eta_p(\mathbb{C}^0, \mathbf{n}_i, \mathbf{A})\}_{p=1,4}$.

3.5 Commentaires

Avant d'aborder la construction du modèle micromécanique complet ainsi que l'analyse détaillée de ses potentialités, on se propose ici de faire un certain nombre de remarques d'ordre général sur le résultat obtenu. Deux points sont abordés : l'importance d'une définition rigoureuse de l'énergie libre avec l'extension du lemme de Hill et l'analyse des interactions entre les anisotropies initiale et induite.

3.5.1 Importance de l'extension du lemme de Hill

Nous avons souligné à la relation (3.14) l'expression de l'énergie macroscopique dans le cas d'un milieu présentant des surfaces de discontinuité. Afin de démontrer la différence entre cette expression et l'énergie élastique $\frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E}$, soit la nécessité de l'extension du lemme de Hill³, on se propose précisément de calculer la quantité :

$$\Delta = W - \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E} = -\frac{\mathcal{N}}{2} \int_{\omega^+} \llbracket \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rrbracket \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dx \quad (3.64)$$

D'après la décomposition du problème \mathcal{P} et la partition associée décrite par (3.20), il s'en suit que :

$$\Delta = -\frac{\mathcal{N}}{2} \int_{\omega^+} \llbracket \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rrbracket \cdot (\boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n} dx \quad (3.65)$$

où les discontinuités de déplacement sur la fissure $\llbracket \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rrbracket$ pour $\mathbf{x} \in \omega$ correspondent à celles du problème $\mathcal{P}^{(2)}$ (il n'y pas de discontinuités dans le problème $\mathcal{P}^{(1)}$) et le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$ du problème $\mathcal{P}^{(1)}$ est homogène d'où $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{A}$. En introduisant

3. Le lemme de Hill dans sa forme classique, *i.e.* pour les milieux sans cavités, traduit l'équivalence $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\mathcal{A}} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\mathcal{A}} = \langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\mathcal{A}}$ amenant à $W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E}$ (voir annexe B).

les variables β et γ , il vient alors :

$$\Delta = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma} : \left[\beta \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{\gamma}{2} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{n}) \right] + W^{(2)} \quad (3.66)$$

avec $W^{(2)}$ donnée par (3.24). Compte tenu également de l'approximation $\boldsymbol{\Sigma} \approx \mathbb{C}^0 : \mathbf{E}$, des tenseurs \mathbf{N} et \mathbf{T} définis en (3.44-3.45) et de (3.34), on trouve finalement :

$$\Delta = -\frac{\beta}{2} \mathbf{N} : \mathbf{E} - \frac{\gamma}{2} \mathbf{T} : \mathbf{E} + \frac{1}{4d} [G_{11} \beta^2 + 2G_{12} \beta \gamma + G_{22} \gamma^2] \quad (3.67)$$

Comme auparavant, le report de (3.33) et des variables β et γ exprimées en (3.43) associées aux conditions unilatérales permet d'écrire la quantité Δ suivant l'état d'ouverture-fermeture des microfissures :

- si les microfissures sont ouvertes (*i.e.* $g(\mathbf{E}, \mathbf{n}) > 0$) :

$$\Delta = 0 \quad (3.68)$$

- si les microfissures sont fermées (*i.e.* $g(\mathbf{E}, \mathbf{n}) \leq 0$) :

$$\Delta = \frac{\gamma H_{nt}}{2 (H_{nn} H_{tt} - H_{nt}^2)} (H_{nn} \mathbf{N} : \mathbf{E} + H_{nt} \mathbf{T} : \mathbf{E}) = \frac{\gamma H_{nt}}{2 (H_{nn} H_{tt} - H_{nt}^2)} g(\mathbf{E}, \mathbf{n}) \quad (3.69)$$

Dans l'état ouvert des microfissures, Δ s'annule systématiquement ; les microfissures étant en effet libres d'efforts, on retrouve bien que $W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E}$. Si en revanche les microfissures sont fermées, les seules situations où $\Delta = 0$, *i.e.* où l'énergie libre macroscopique W se réduit à $\frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E}$, sont les suivantes (telles que $H_{nt} = 0$, voir section 3.3.1) :

- la matrice présente une symétrie cubique ou une isotropie initiale ; ce résultat justifie donc l'approche retenue par Kachanov [118] pour des matériaux isotropes mais qui ne pourrait être étendue dans le cas d'anisotropie initiale,
- ou, si les microfissures sont parallèles aux axes d'orthotropie.

En milieu initialement orthotrope et pour des défauts d'orientation arbitraire, on constate bien que $\Delta \neq 0$ et l'énergie libre est bien telle que $W \neq \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E}$. L'écriture correcte de l'extension du lemme de Hill (3.14) prend dans ce cas toute son importance.

3.5.2 Interaction entre les anisotropies initiale et induite

La résolution analytique du problème d'homogénéisation présente l'avantage de mettre en évidence de manière explicite l'interaction entre les anisotropies affectant le matériau. En particulier, l'expression (3.62) révèle les effets complexes sur la réponse du matériau microfissuré à la fois de l'orthotropie initiale, de l'orientation des familles de défauts et de leur comportement unilatéral individuel. L'anisotropie globale du matériau présente donc trois origines :

- l'orthotropie primaire de la matrice (matériau vierge),
- l'anisotropie induite gouvernée par l'orientation des défauts ; cet aspect revêt ici une importance particulière liée au caractère aléatoire de cette orientation,
- l'état d'ouverture-fermeture des microfissures ; à état figé d'endommagement, une anisotropie spécifique peut être provoquée par certaines configurations d'ouverture-fermeture de l'ensemble des familles de dommages. Cet aspect a déjà été mis en évidence par Weleman et Goidescu [227] dans le contexte simple de milieux initialement isotropes et affaiblis par une distribution isotrope de dommages.

Pour bien distinguer les différents effets, on se concentre ici sur le cas d'une seule famille de microfissures ; seuls donc les deux premiers points entrent en jeu. Le comportement de la matrice solide est décrit par l'énergie libre W_0 donnée en (3.49) et fonction d'invariants combinés de la déformation macroscopique \mathbf{E} et du tenseur de structure \mathbf{A} . Parallèlement, l'anisotropie induite fait intervenir des termes en $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ et est représentée au sein de W_d par des invariants issus de combinaisons de \mathbf{E} , \mathbf{A} et $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$. Si l'on s'intéresse précisément à cette dernière, on peut distinguer trois types de couplages entre les anisotropies initiale et induite :

- un couplage « isotrope », qui préserve l'orthotropie initiale du matériau (voir 3.49) ; dans l'équation (3.59), cet aspect est représenté par les invariants suivants de \mathbf{E} et \mathbf{A} (à savoir les termes de coefficients c_1 , c_2 et c_3) :

$$tr^2 \mathbf{E}, tr^2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}), tr \mathbf{E} tr(\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) \quad (3.70)$$

dont la dérivation par rapport à \mathbf{E} conduit à des générateurs tensoriels d'élasticité propres à l'orthotropie (voir section 4.6.2) :

$$\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}, \mathbf{I} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{I} \quad (3.71)$$

Notons que les coefficients c_1 , c_2 et c_3 (voir (3.60-3.61)) comportent à la fois une

part constante (fonction des propriétés de la matrice vierge) et une part dépendant scalairement de l'orientation des microfissures par rapport aux axes d'orthotropie initiale (fonction aussi de $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$);

- un couplage anisotrope faible, qui tient compte de la perte d'orthotropie initiale du matériau au travers d'une dépendance directionnelle conforme au contexte isotrope (voir Andrieux et al. [10, 11]); cela concerne les termes en c_4 , c_5 et c_6 associés à des invariants combinés de \mathbf{E} et $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$

$$tr^2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), tr \mathbf{E} tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \quad (3.72)$$

dont la dérivation conduit aux générateurs suivants

$$\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \mathbf{I} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{I}, \mathbf{I} \overline{\otimes} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \overline{\otimes} \mathbf{I} \quad (3.73)$$

A nouveau, il convient de souligner que le cas présent diffère de l'isotropie dans la mesure où l'amplitude des constantes c_4 , c_5 et c_6 est affectée également par l'orthotropie primaire *via* une dépendance en $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ (voir (3.60-3.61));

- un couplage anisotrope fort enfin, représenté par tous les autres termes (c_7 à c_{10}), qui implique des combinaisons des effets orientés de \mathbf{E} , \mathbf{A} et $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ et induit une anisotropie résultante complexe.

3.6 Conclusion

Cette étude micromécanique a permis d'étendre de manière rigoureuse l'approche d'homogénéisation d'Andrieux et al. [10, 11] au contexte d'une matrice orthotrope 2D affaiblie par des défauts orientés de manière aléatoire. Cette démarche énergétique a conduit au développement d'une expression analytique de l'énergie libre macroscopique du matériau qui correspond au potentiel thermodynamique pour un formalisme en déformation. Sur cette base, on se propose à présent de construire une modélisation bidimensionnelle de l'endommagement par microfissuration incluant l'interaction des anisotropies initiale et induite ainsi que les effets unilatéraux des microfissures.

Chapitre 4

Un modèle 2D de l'endommagement par microfissuration pour les milieux initialement orthotropes

S'appuyant sur l'expression du potentiel thermodynamique établi au chapitre précédent, on développe un modèle d'endommagement pour les matériaux orthotropes intégrant l'anisotropie induite et les effets unilatéraux. Les capacités prédictives de cette formulation sont analysées du point de vue de la réponse élastique et de l'évolution de l'endommagement.

4.1 Introduction

Notre objectif est ici de proposer une nouvelle modélisation bidimensionnelle de l'endommagement par microfissuration pour les milieux initialement orthotropes. Un seul mécanisme dissipatif est envisagé, à savoir la création et la croissance de microfissures, la question du frottement n'étant pas considérée ici. On rappelle également que le contexte général est celui des petites perturbations quasi statiques et isothermes.

Le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles avec variables internes est retenu pour développer la formulation. La présentation du modèle se déclinera donc en trois volets :

- la sélection des variables internes, qui permettent de représenter le phénomène dissipatif étudié,
- la construction du potentiel thermodynamique définissant l'énergie élastique du milieu et de laquelle dérivent les lois d'état,
- le choix du potentiel de dissipation qui fournit la loi d'évolution du processus irréversible.

Si l'analyse micromécanique établie au chapitre précédent va servir de base pour la définition des deux premiers points, on s'appuyera sur l'écriture du taux de restitution de l'énergie pour établir le critère d'évolution de l'endommagement.

4.2 Description de la fissuration

On se propose en premier lieu de définir les grandeurs internes caractéristiques des modifications de la microstructure par endommagement. L'étude micromécanique du chapitre 3 suggère de considérer comme variable d'endommagement \mathbf{d} le vecteur des densités de microfissuration des N familles de microfissures de normales unitaires \mathbf{n}_i :

$$\mathbf{d} = (d_i)_{i=1,N} \quad (4.1)$$

avec $d_i = \mathcal{N}_i l_i^2$ (on rappelle que \mathcal{N}_i désigne le nombre de fissures par unité de surface de la $i^{\text{ème}}$ famille dont les microfissures présentent une longueur moyenne $2l_i$). Une telle description discrète s'inscrit dans l'esprit des méthodes de changement d'échelle où l'ensemble des défauts sont identifiés et d'orientation fixe. Elle préserve en effet la signification physique des grandeurs correspondant à chaque orientation à laquelle est associée une famille de microfissures.

Pour l'heure, la question du nombre de familles N à considérer n'a pas été spécifiée. Dans le cas de milieux initialement isotropes présentant un très grand nombre de fissures, certains auteurs (Pensée [179], Zhu [231] pour des modèles micromécaniques ; voir aussi Bargellini [18] en approche macroscopique) ont proposé une réduction à un nombre fini de systèmes de microfissures équivalents (points d'intégration) correspondant à une approximation numérique de type Gauss et qui fait intervenir des poids spécifiques à chacun de ces systèmes. Une telle démarche s'inspire des techniques classiques utilisées dans le contexte des modèles microplans (Bazant et Oh. [26], Carol et al. [50] par exemple). L'objectif d'équivalence repose sur la possibilité de représenter un endommagement isotrope ainsi que de pouvoir générer les tenseurs du second ordre en $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ et d'ordre quatre en $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ qui apparaissent dans l'expression du potentiel thermodynamique (voir l'étude de Zhu [231] avec 15 systèmes).

En contexte anisotrope, cette question reste ouverte. L'équivalence est plus complexe car elle fait en effet intervenir la symétrie initiale du matériau au travers de combinaisons croisées de $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$, $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ et du tenseur de texture \mathbf{A} (*cf.* section 3.5.2). En l'absence d'étude spécifique, nous avons donc fait le choix de retenir pour les applications développées par la suite un ensemble de fissures dont l'orientation est répartie de manière uniforme entre 0 et π , de sorte que l'angle $(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_{i+1}) = \frac{\pi}{N}$ pour tout $i \in [1, N]$, avec une valeur de $N = 60$ familles (Fig. 4.1).

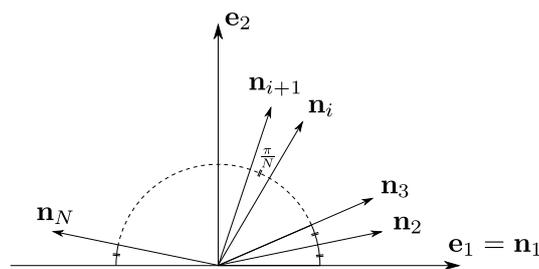


FIGURE 4.1 – Orientations des familles de microfissures

4.3 Potentiel thermodynamique et lois d'état

Les variables internes décrivant l'endommagement étant posées, on se propose à présent de se donner le potentiel thermodynamique définissant pour tout état d'endommagement \mathbf{d} le comportement élastique macroscopique du matériau microfissuré dont les axes

d'orthotropie initiale sont donnés par la base orthonormée directe $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

4.3.1 Potentiel thermodynamique

Privilégiant une formulation en déformation, on admet l'existence de la fonction énergie libre W dépendant de la déformation macroscopique \mathbf{E} et de l'endommagement \mathbf{d} . Précisément, nous retenons pour le modèle le potentiel thermodynamique construit au chapitre précédent. Pour faciliter la compréhension des développements qui vont suivre, on en rappelle brièvement l'expression :

$$W(\mathbf{E}, \mathbf{d}) = W_0(\mathbf{E}) + \sum_{i=1}^N d_i \left[\begin{array}{l} c_1^{(i)} tr^2 \mathbf{E} + c_2^{(i)} tr^2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) + c_3^{(i)} tr \mathbf{E} tr(\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) \\ + c_4^{(i)} tr^2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) + c_5^{(i)} tr \mathbf{E} tr(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \\ + c_6^{(i)} tr(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \\ + c_7^{(i)} tr \mathbf{E} tr(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{A}) \\ + c_8^{(i)} tr(\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) tr(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \\ + c_9^{(i)} tr(\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) tr(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{A}) \\ + c_{10}^{(i)} tr(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) tr(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{A}) \end{array} \right] \quad (4.2)$$

où $W_0(\mathbf{E})$ est l'énergie libre de la matrice vierge (\mathbb{C}^0 le tenseur d'élasticité initial, $\{a_i\}_{i=1,4}$ les constantes d'élasticité initiale, $\mathbf{A} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$ le tenseur de texture) :

$$W_0(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^0 : \mathbf{E} = \frac{a_1}{2} tr^2 \mathbf{E} + \frac{a_2}{2} tr(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + \frac{a_3}{2} tr^2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) + a_4 tr \mathbf{E} tr(\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) \quad (4.3)$$

Les coefficients $\left\{ c_p^{(i)}(\mathbb{C}^0, \mathbf{n}_i, \mathbf{A}) \right\}_{p=1,10}$ caractérisent la contribution à l'énergie de chaque famille i de microfissures de normale \mathbf{n}_i et dépendent de leur état¹ :

- $\left\{ c_p^{(i)}(\mathbb{C}^0, \mathbf{n}_i, \mathbf{A}) \right\}_{p=1,10} = \left\{ c_p^{ouv}(\mathbb{C}^0, \mathbf{n}_i, \mathbf{A}) \right\}_{p=1,10}$ lorsque ces microfissures sont ouvertes (soit lorsque $g(\mathbf{E}, \mathbf{n}_i, \mathbf{A}) > 0$),
- $\left\{ c_p^{(i)}(\mathbb{C}^0, \mathbf{n}_i, \mathbf{A}) \right\}_{p=1,10} = \left\{ c_p^{ferm}(\mathbb{C}^0, \mathbf{n}_i, \mathbf{A}) \right\}_{p=1,10}$ lorsque ces microfissures sont fermées (soit lorsque $g(\mathbf{E}, \mathbf{n}_i, \mathbf{A}) \leq 0$).

1. Leurs expressions détaillées sont données au chapitre 3.

avec g la fonction caractéristique d'ouverture-fermeture des microfissures :

$$g(\mathbf{E}, \mathbf{n}_i, \mathbf{A}) = \eta_1 \operatorname{tr}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) + \eta_2 \operatorname{tr} \mathbf{E} + \eta_3 \operatorname{tr}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) + \eta_4 \operatorname{tr}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{A}) \quad (4.4)$$

dont les paramètres $\{\eta_p(\mathbb{C}^0, \mathbf{n}_i, \mathbf{A})\}_{p=1,4}^1$ dépendent des propriétés élastiques de la matrice vierge et de l'orientation des microfissures par rapport aux axes principaux de celle-ci.

On notera que le potentiel présente les propriétés suivantes :

- W est un invariant isotrope par rapport à l'ensemble de ses arguments, soit

$$W(\mathcal{T}(\mathbf{E}, \mathbf{d})) = W(\mathbf{E}, \mathbf{d}) \quad (4.5)$$

quelle que soit la transformation orthogonale \mathcal{T} (voir par exemple Boehler [38]) ;

- la fonction W est de classe C^1 , grâce à la forme particulière du saut au passage entre l'état ouvert et l'état fermé des microfissures (*cf.* section 3.4) ; par ailleurs, W est de classe C^∞ sur le domaine \mathcal{S} correspondant aux domaines d'ouverture et de fermeture stricts pour l'ensemble des N familles de microfissures défini par :

$$\mathcal{S} = \{(\mathbf{E}, \mathbf{d}), g(\mathbf{E}, \mathbf{n}_i, \mathbf{A}) \neq 0, \forall i \in [1, N]\} \quad (4.6)$$

- W est positivement homogène de degré deux par rapport à la variable \mathbf{E} , *i.e.* telle que

$$\forall \mathbf{d}, \forall \lambda \geq 0, \quad W(\lambda \mathbf{E}, \mathbf{d}) = \lambda^2 W(\mathbf{E}, \mathbf{d}) \quad (4.7)$$

ce qui implique que la relation contrainte-déformation du matériau lors d'un chargement réversible proportionnel $\mathbf{E} = t \mathbf{E}_0$ sera linéaire (Marigo [159]) ;

- la fonction W est linéaire en la variable d'endommagement \mathbf{d} .

4.3.2 Lois d'état

Les lois d'état, définissant la relation contrainte-déformation et les forces thermodynamiques associées à l'endommagement, sont obtenues par dérivation du potentiel (4.2). La propriété de classe C^1 assure par conséquent l'existence et la continuité de ces grandeurs.

Précisément pour la contrainte, définie par :

$$\Sigma(\mathbf{E}, \mathbf{d}) = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}, \mathbf{d}) \quad (4.8)$$

il vient :

$$\Sigma(\mathbf{E}, \mathbf{d}) = a_1 (tr \mathbf{E}) \mathbf{I} + a_2 \mathbf{E} + 2 a_3 tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{A} + a_4 [tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{I} + (tr \mathbf{E}) \mathbf{A}]$$

$$+ \sum_{i=1}^N d_i \left[\begin{array}{l} 2 c_1^{(i)} (tr \mathbf{E}) \mathbf{I} + 2 c_2^{(i)} tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{A} \\ + c_3^{(i)} [tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{I} + (tr \mathbf{E}) \mathbf{A}] \\ + 2 c_4^{(i)} tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \\ + c_5^{(i)} [tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \mathbf{I} + (tr \mathbf{E}) \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i] \\ + c_6^{(i)} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i + \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{E}) \\ + c_7^{(i)} \left[\begin{array}{l} tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{A}) \mathbf{I} \\ + \frac{1}{2} (tr \mathbf{E}) (\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \end{array} \right] \\ + c_8^{(i)} [tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \mathbf{A} + tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i] \\ + c_9^{(i)} \left[\begin{array}{l} tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{A}) \mathbf{A} \\ + \frac{1}{2} tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) (\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \end{array} \right] \\ + c_{10}^{(i)} \left[\begin{array}{l} tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{A}) \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \\ + \frac{1}{2} tr (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) (\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (4.9)$$

Au travers des coefficients $\left\{ c_p^{(i)}(\mathbb{C}^0, \mathbf{n}_i, \mathbf{A}) \right\}_{p=1,10}$, la réponse contrainte-déformation du matériau est donc bien affectée par l'état d'ouverture-fermeture des systèmes de microfissures. Si on introduit le tenseur d'élasticité effectif défini sur le domaine \mathcal{S} par la relation² :

$$\mathbb{C}(\mathbf{E}, \mathbf{d}) = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E}^2}(\mathbf{E}, \mathbf{d}) \quad (4.10)$$

2. L'expression détaillée de \mathbb{C} est donnée à la section 4.6.2.

la loi d'état s'écrit donc encore :

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{E}, \mathbf{d}) = \mathbb{C}(\mathbf{E}, \mathbf{d}) : \mathbf{E} \quad (4.11)$$

Les forces thermodynamiques $\mathbf{F}^d = (F^{d_i})_{i=1,N}$ associées aux variables $\mathbf{d} = (d_i)_{i=1,N}$ permettent quant à elles de définir la variation d'énergie élastique du matériau lorsque les densités de microfissuration progressent. Elles sont associées aux vitesses d'endommagement $\dot{\mathbf{d}} = (\dot{d}_i)_{i=1,N}$ et définies par

$$F^{d_i}(\mathbf{E}, \mathbf{d}) = -\frac{\partial W}{\partial d_i}(\mathbf{E}, \mathbf{d}), \quad \forall i \in [1, N] \quad (4.12)$$

soit en utilisant l'expression de l'énergie libre :

$$F^{d_i}(\mathbf{E}, \mathbf{d}) = - \left[\begin{array}{l} c_1^{(i)} \operatorname{tr}^2 \mathbf{E} + c_2^{(i)} \operatorname{tr}^2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) + c_3^{(i)} \operatorname{tr} \mathbf{E} \operatorname{tr} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) \\ + c_4^{(i)} \operatorname{tr}^2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) + c_5^{(i)} \operatorname{tr} \mathbf{E} \operatorname{tr} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \\ + c_6^{(i)} \operatorname{tr} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \\ + c_7^{(i)} \operatorname{tr} \mathbf{E} \operatorname{tr} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{A}) \\ + c_8^{(i)} \operatorname{tr} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) \operatorname{tr} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \\ + c_9^{(i)} \operatorname{tr} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) \operatorname{tr} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{A}) \\ + c_{10}^{(i)} \operatorname{tr} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \operatorname{tr} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{A}) \end{array} \right] \quad (4.13)$$

La linéarité du potentiel en \mathbf{d} implique une dépendance unique de ces forces scalaires en la déformation \mathbf{E} , soit $F^{d_i}(\mathbf{E}, \mathbf{d}) = F^{d_i}(\mathbf{E})$. D'autre part, la force F^{d_i} peut être interprétée comme le taux de restitution de l'énergie pour la $i^{\text{ème}}$ famille de défauts, dont la valeur est conditionnée par les effets unilatéraux *via* les paramètres $\left\{ c_p^{(i)}(\mathbb{C}^0, \mathbf{n}_i, \mathbf{A}) \right\}_{p=1,10}$.

4.4 Potentiel de dissipation et loi d'évolution de l'endommagement

A ce stade, il reste pour décrire complètement la loi constitutive du modèle à formuler l'évolution des paramètres caractérisant l'endommagement, soit en l'occurrence à répondre aux deux questions suivantes :

- *quand* y-a-t-il progression de l'endommagement ?
- *comment* vont évoluer les densités de microfissuration ?

Dans la lignée de la démarche d'homogénéisation, l'idéal à ce stade serait de pouvoir déduire la réponse à ces deux questions de considérations micromécaniques (à la manière par exemple des modèles d'endommagement ductile de type Gurson [103]). En l'absence de résultats spécifiques, on se propose donc d'aborder ce problème sous l'angle des approches macroscopiques à partir d'arguments thermodynamiques classiques.

4.4.1 Hypothèses

Les orientations \mathbf{n}_i des défauts étant considérées fixes, on admet ici que la propagation des microfissures ne peut se faire que dans leur plan. On notera que cet aspect simplifie notablement les calculs sans pour autant empêcher la représentation d'une anisotropie générale de l'endommagement, la distribution des densités obtenues pour tous $i \in [1, N]$ permettant par exemple d'obtenir des axes de symétrie différents des axes d'orthotropie initiale (voir section 4.7.2).

L'évolution de l'endommagement est supposée progressive et indépendante par rapport au temps. Afin d'établir la loi qui le gouverne, on se place dans le cadre pratique du schéma standard qui permet la vérification systématique du second principe de la thermodynamique (voir par exemple Germain et al. [96], Marigo [157]). Précisément, la loi d'évolution pour chaque famille i de microfissures est construite selon le même formalisme global mais de manière indépendante (ne faisant intervenir par exemple que la force thermodynamique qui lui est associée), conformément à l'esprit du schéma dilué adopté au chapitre 3.

On fait alors les deux hypothèses suivantes :

- il existe un potentiel de dissipation scalaire \mathcal{D} dépendant de la vitesse d'endommagement \dot{d}_i et de l'état actuel d_i , vérifiant ces propriétés pour tout d_i fixé : semi-continu inférieur, convexe, positivement homogène de degré un, non négatif et minimal en zéro,

- le mécanisme dissipatif est normal.

Dans toute évolution réelle, la valeur du potentiel de dissipation correspond donc à la dissipation intrinsèque Φ_i induite par la création et la croissance des microfissures de normale \mathbf{n}_i :

$$\Phi_i = F^{d_i} \dot{d}_i = \mathcal{D}(\dot{d}_i, d_i) \quad (4.14)$$

Conformément au schéma dilué, la dissipation intrinsèque globale (pour toutes les familles de microfissures) est quant à elle obtenue par simple sommation :

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \Phi_i \quad (4.15)$$

4.4.2 Lois d'évolution des variables internes

L'écriture proposée pour le potentiel de dissipation est la suivante :

$$\mathcal{D}(\dot{d}_i, d_i) = \mathcal{G}(d_i) \dot{d}_i \quad (4.16)$$

où \mathcal{G} est une fonction scalaire strictement positive. La dissipation Φ_i associée à la $i^{\text{ème}}$ famille de défauts est ainsi proportionnelle au taux de variation \dot{d}_i de la densité de microfissuration de cette famille, ce qui permet d'interpréter $\mathcal{G}(d_i)$ comme l'énergie de surface de la Mécanique de la Rupture. Par ailleurs, Φ_i croît avec la valeur de la densité initiale d_i , ce qui traduit la résistance du milieu à la progression des dommages. A l'instar de Marigo [158], une forme affine simple est retenue pour \mathcal{G} :

$$\mathcal{G}(d_i) = k_0 (1 + \eta d_i) \quad (4.17)$$

avec (k_0, η) deux paramètres du matériau strictement positifs.

La combinaison de la règle de normalité avec l'expression (4.16) conduit à la fonction seuil (ou critère) d'endommagement suivante écrite dans l'espace de la force thermodynamique F^{d_i} :

$$f(F^{d_i}, d_i) = F^{d_i} - \mathcal{G}(d_i) \quad (4.18)$$

ainsi qu'à la définition du convexe de réversibilité $\mathcal{C}_i(d_i)$:

$$\mathcal{C}_i(d_i) = \{F^{d_i}, f(F^{d_i}, d_i) \leq 0\} \quad (4.19)$$

Les forces thermodynamiques dépendant des états d'ouverture-fermeture des microfissures, le seuil d'endommagement et le convexe associé diffèrent donc suivant que les mi-

crofissures sont ouvertes ou bien fermées. Notons qu'en présence de N familles, le domaine de réversibilité global \mathcal{C} est défini comme l'intersection des domaines de réversibilité élémentaires, soit

$$\mathcal{C}(\mathbf{d}) = \bigcap_{i=1}^N \mathcal{C}_i(d_i) \quad (4.20)$$

En ce qui concerne la loi d'évolution de la $i^{\text{ème}}$ famille de défauts, elle s'écrit donc ainsi :

$$\begin{cases} \dot{d}_i = \Lambda_i \frac{\partial f}{\partial F^{d_i}} = \Lambda_i \\ \Lambda_i = 0, & \text{si } f(F^{d_i}, d_i) \leq 0, \dot{f}(F^{d_i}, d_i) < 0 \\ \Lambda_i > 0, & \text{si } f(F^{d_i}, d_i) = 0, \dot{f}(F^{d_i}, d_i) = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

avec Λ_i le multiplicateur d'endommagement déterminé par la condition de cohérence $\dot{f}(F^{d_i}, d_i) = 0$. D'après (4.18), la dépendance exclusive de F^{d_i} en \mathbf{E} et la positivité de Λ_i , on obtient :

$$\Lambda_i = \left[\frac{F^{d_i}}{k_0 \eta} \right]^+ = \left[\frac{1}{k_0 \eta} \left(\frac{\partial F^{d_i}}{\partial \mathbf{E}} \right) : \dot{\mathbf{E}} \right]^+ \quad (4.22)$$

avec $x^+ = \sup \{0, x\}$ et $\frac{\partial F^{d_i}}{\partial \mathbf{E}}$ définie sur le domaine \mathcal{S} .

4.4.3 Formulation en vitesse

La formulation en vitesse de la loi de comportement s'obtient par différentiation de la réponse contrainte-déformation. Précisément, il vient de (4.11) :

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}(\mathbf{E}, \mathbf{d}) &= \dot{\mathbb{C}}(\mathbf{E}, \mathbf{d}) : \dot{\mathbf{E}} + \mathbb{C}(\mathbf{E}, \mathbf{d}) : \dot{\mathbf{E}} \\ &= \left(\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}, \mathbf{d}) : \dot{\mathbf{E}} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial d_i}(\mathbf{E}, \mathbf{d}) \dot{d}_i \right) : \dot{\mathbf{E}} + \mathbb{C}(\mathbf{E}, \mathbf{d}) : \dot{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Compte tenu de la dépendance du tenseur d'élasticité $\mathbb{C}(\mathbf{E}, \mathbf{d})$ en l'état d'ouverture-fermeture des microfissures, ce résultat ne peut s'obtenir analytiquement que pour des évolutions qui maintiennent fixe cet état (soit ouvert, soit fermé) pour chacune des familles, de sorte que $\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{0}_6$ ($\mathbf{0}_6$ le tenseur nul d'ordre six). D'autre part, sachant que :

$$\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial d_i} : \mathbf{E} = -\frac{\partial F^{d_i}}{\partial \mathbf{E}}, \quad \forall i \quad (4.24)$$

l'intégration de la loi d'évolution (4.21-4.22) dans (4.23) conduit finalement à :

$$\dot{\Sigma} = \mathbb{L}(\mathbf{E}, \mathbf{d}) : \dot{\mathbf{E}} \quad (4.25)$$

L'opérateur tangent \mathbb{L} est défini sur \mathcal{S} par :

$$\mathbb{L}(\mathbf{E}, \mathbf{d}) = \begin{cases} \mathbb{C}(\mathbf{E}, \mathbf{d}) & , \text{ si } f(F^{d_i}, d_i) \leq 0, \dot{f}(F^{d_i}, d_i) < 0 \\ \mathbb{C}(\mathbf{E}, \mathbf{d}) - \frac{1}{k_0\eta} \sum_{i=1}^N \frac{\partial F^{d_i}}{\partial \mathbf{E}} \otimes \frac{\partial F^{d_i}}{\partial \mathbf{E}} & , \text{ si } f(F^{d_i}, d_i) = 0, \dot{f}(F^{d_i}, d_i) = 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

pour des évolutions $\dot{\mathbf{E}}$ à état d'activation figé de tous les défauts.

4.5 Intégration numérique de la loi de comportement

Afin de tester les capacités prédictives de la formulation, les équations constitutives qui viennent d'être présentées ont été intégrées au code de calcul par éléments finis ABAQUS qui offre la possibilité de définir une nouvelle loi de comportement.

4.5.1 Algorithme d'intégration locale

On présente tout d'abord l'algorithme d'intégration en un point des équations constitutives proposées (valable d'ailleurs quel que soit le code employé). A cette fin, un schéma purement implicite de la discrétisation de la déformation ainsi qu'une méthode de prédiction-corrrection ont été adoptés. Connaissant la déformation \mathbf{E}^r et les variables internes $\mathbf{d}^r = (d_i^r)_{i=1,N}$ au pas de temps r , l'objectif est de déterminer pour l'incrément de déformation $\Delta \mathbf{E} = \mathbf{E}^{r+1} - \mathbf{E}^r$ les valeurs correspondantes de l'endommagement $\mathbf{d}^{r+1} = (d_i^{r+1})_{i=1,N}$:

- on suppose en premier lieu un comportement élastique, *i.e.* que l'on reste à l'intérieur du convexe de réversibilité \mathcal{C} , et l'on vérifie que $F^{d_i}(\mathbf{E}^{r+1}) \in \mathcal{C}_i(d_i^r)$, $\forall i \in [1, N]$; dans ce cas :

$$\mathbf{d}^{r+1} = \mathbf{d}^r \quad (4.27)$$

- dans le cas contraire, *i.e.* $\exists i \in [1, N]$, $F^{d_i}(\mathbf{E}^{r+1}) \notin \mathcal{C}_i(d_i^r)$, on cherche l'accroissement de densité Δd_i tels que $d_i^{r+1} = d_i^r + \Delta d_i$ en écrivant la satisfaction du critère $f(F^{d_i}(\mathbf{E}^{r+1}), d_i^{r+1}) = 0$; contrairement à l'élasto-plasticité, on s'extrait d'un processus itératif pour ce calcul car il se réduit à la résolution d'une équation linéaire, soit d'après (4.18) :

$$\Delta d_i = \frac{f(F^{d_i}(\mathbf{E}^{r+1}), d_i^r)}{k_0\eta} \quad (4.28)$$

On en déduit donc l'actualisation de chacune des variables internes à partir de $\Delta \mathbf{d} = (\Delta d_i)_{i=1,N}$ et le résultat :

$$\mathbf{d}^{r+1} = \mathbf{d}^r + \Delta \mathbf{d} \quad (4.29)$$

4.5.2 Implémentation au sein du code de calculs ABAQUS

Le logiciel ABAQUS de calcul par éléments finis dispose d'une interface (UMAT, « *User Material* ») permettant l'implémentation par les utilisateurs de lois de comportement particulières. Cette interface nécessite l'écriture d'une subroutine en langage FORTRAN traduisant l'algorithme d'intégration numérique locale (on pourra se référer à Goidescu [97], Zhu [231] pour les détails). On signale ici simplement les spécificités essentielles dans le cadre bidimensionnel considéré.

Les données d'entrée sont :

- les constantes du modèle propre au matériau (vecteur PROPS de dimension 7^3),
- le tenseur de déformation \mathbf{E}^r au pas r (vecteur STRAN de dimension 3),
- l'incrément de déformation $\Delta \mathbf{E}$ (vecteur DSTRAN de dimension 3),
- les variables d'endommagement $\mathbf{d}^r = (d_i^r)_{i=1,N}$ au pas r (vecteur STATEV pour ses N premières composantes);

Les données de sortie sont quant à elles :

- les variables d'endommagement $\mathbf{d}^{r+1} = (d_i^{r+1})_{i=1,N}$ au pas $r+1$ (vecteur STATEV pour ses N premières composantes),
- le tenseur de contrainte Σ^{r+1} au pas $r+1$ (vecteur STRESS de dimension 3) obtenu d'après la loi d'état $\Sigma(\mathbf{E}^{r+1}, \mathbf{d}^{r+1})$,
- la matrice jacobienne du modèle constitutif $\mathbb{J} = \frac{\partial(\Delta \Sigma)}{\partial(\Delta \mathbf{E})}$ (matrice DDSDDDE de dimension 3×3); le calcul de celle-ci étant assez délicat pour des évolutions amenant à l'ouverture ou la fermeture de systèmes de microfissures (comme cela a été évoqué précédemment pour l'opérateur tangent \mathbb{L}), c'est le tenseur d'élasticité $\mathbb{C}(\mathbf{E}^{r+1}, \mathbf{d}^{r+1})$ actualisé qui est fourni à ce stade;
- nous avons également adjoint à ces données de base l'état d'ouverture-fermeture de chacune des familles (vecteur STATEV pour ses composantes allant de $N+1$ à $2N$, prenant la valeur 0 dans l'état ouvert et 1 dans l'état fermé) et l'état d'évolution des

3. Voir les sections 4.6.1 et 4.7.1.

densités de microfissures (vecteur STATEV pour ses composantes allant de $2N + 1$ à $3N$, prenant la valeur 0 dans le cas d'une évolution élastique et 1 dans le cas d'une progression de la densité). Ainsi par exemple, pour $N = 60$, si l'on obtient en sortie :

$$\text{STATEV}(24)=0,02, \text{STATEV}(84)=1, \text{STATEV}(144)=1 \quad (4.30)$$

cela signifie que la 24^{ème} famille de microfissures est fermée au pas $r + 1$ et a subi un accroissement de densité entre les pas r et $r + 1$ pour atteindre la valeur de densité de microfissures de 0,02 au pas $r + 1$. Ceci nous permet de suivre précisément l'évolution microstructurale de l'endommagement du matériau.

Notons pour finir que la procédure UMAT n'est actuellement utilisable dans ABAQUS que pour un modèle 2D plan coque (*2D planar shell*) et non en stratifié (*laminated*). Implicitement, cela suppose que le modèle ne peut s'appliquer qu'à l'échelle de la coque. Les simulations présentées par la suite ont donc été réalisées en considérant une modélisation à l'échelle du stratifié en représentant le composite comme un matériau macroscopiquement homogène (« macro-modèle »).

4.6 Etude du comportement élastique

Dans cette partie, on suppose que le niveau d'endommagement du matériau est figé, soit en d'autres termes que les densités de microfissuration sont constantes (pas d'évolution). Après quelques remarques sur l'identification des paramètres du modèle caractérisant l'énergie libre, on se propose d'illustrer quelques spécificités de la réponse élastique proposée.

4.6.1 Détermination des paramètres d'énergie

L'ensemble des paramètres d'énergie du modèle se déduisent des coefficients élastiques de la matrice solide, ce qui constitue l'un des avantages majeurs de l'approche micromécanique. L'analyse du modèle sera illustrée ici dans le contexte bidimensionnel de contraintes planes. D'après l'annexe A, les coefficients $\{a_i\}_{i=1,4}$ intervenant dans l'expression du tenseur \mathbb{C}_0 de la matrice vierge sont alors donnés par la connaissance de quatre modules de l'ingénieur :

- E_1 et E_2 les modules d'Young associés respectivement aux directions de vecteur unitaire \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 ,
- ν_{12} le coefficient de Poisson associé au couples de directions $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$,

- G_{12} le module de cisaillement associé au couple de directions $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Les coefficients C et D définis par l'équation (3.29) s'écrivent dans ce contexte :

$$C = \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1 E_2}} \sqrt{\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} + \frac{2}{\sqrt{E_1 E_2}}}, \quad D = \frac{\sqrt{E_1} - \sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}} \quad (4.31)$$

Deux matériaux sont étudiés par la suite dont les paramètres élastiques sont récapitulés au tableau 4.1 :

- le composite carbone (G0926) - époxy (RTM6) étudié au chapitre 2 (éprouvettes de types A et B), dont les paramètres apparents sont obtenus directement à partir des propriétés des plis compte tenu de leur empilement ; soulignons que ce matériau présente une symétrie cubique initiale ($\mathbb{C}_{1111}^0 = \mathbb{C}_{2222}^0$ puisque $E_1 = E_2$), d'où $D = 0$ d'après (4.31),
- un composite SiC-SiC 2D étudié par Aubard [13, 14].

	carbone-époxy	SiC-SiC
E_1 [MPa]	63000	320000
E_2 [MPa]	63000	170000
ν_{12}	0.06	0.18
G_{12} [MPa]	6120	90000

TABLE 4.1 – Propriétés élastiques de la matrice vierge pour deux composites

Pour finir sur les caractéristiques élastiques, il convient de définir l'angle principal d'orthotropie $\delta = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_1)$ du matériau par rapport au repère de calcul (\mathbf{x}, \mathbf{y}) (voir Fig. 4.2). En effet, dans la mesure où l'on ne peut s'appuyer sur l'option « stratifié » d'ABAQUS qui intègre l'orientation des plis, cette information est indispensable à la simulation d'essais hors axes. En tout, la réponse élastique du matériau requiert donc la connaissance de cinq coefficients.

4.6.2 Etude du comportement élastique

La plupart des études de la littérature dédiées à l'analyse des propriétés élastiques effectives de milieux microfissurés portent soit sur des matériaux initialement isotropes soit sur le cas de configurations ouvertes des dommages (par exemple Dormieux et Kondo [77], Hashin [109], Horii et Nemat-Nasser [114], Kachanov [118], Mauge et Kachanov [163], Nemat-Nasser et Hori [171], Ponte-Castaneda et Willis [185], Tsukrov et Kachanov [220],

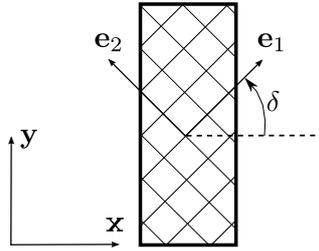


FIGURE 4.2 – Repère d'orthotropie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ du matériau par rapport au repère de calcul (\mathbf{x}, \mathbf{y})

Weleman et Cormery [225], etc..). Le modèle proposé permet d'étendre ces investigations au cas de milieux orthotropes en tenant compte des effets d'ouverture-fermeture des microfissures. Pour simplifier le propos, on vise ici à en démontrer les potentialités sur le cas d'une seule famille de microfissures de densité d et de normale unitaire \mathbf{n} . On note $\phi = (\mathbf{e}_1, \mathbf{n})$ l'orientation des microfissures par rapport au repère d'orthotropie initiale $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ (Fig. 4.3).

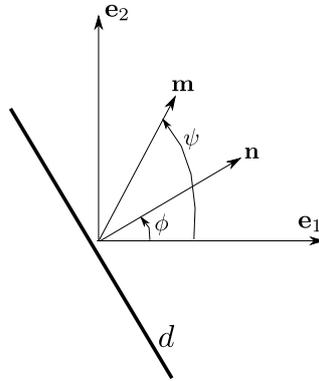


Figure 4.3: Orientation des vecteurs unitaires \mathbf{n} (normale aux microfissures) et \mathbf{m} dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ d'orthotropie initiale

A cette fin, on considère les variations des modules d'élongation $L(\mathbf{m})$ et en contrainte volumique $\kappa(\mathbf{m})$ dans une direction de vecteur unitaire \mathbf{m} qui caractérisent entièrement l'élasticité du matériau (He et Curnier [111]). Dans le cas d'un essai d'élongation pure $\mathbf{E} = \bar{E} \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$ dans la direction de vecteur \mathbf{m} , ces modules sont définis par :

$$L(\mathbf{m}) = \frac{\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{m}}{\mathbf{m} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{m}}, \quad \kappa(\mathbf{m}) = \frac{\text{tr} \boldsymbol{\Sigma}}{\text{tr} \mathbf{E}} \quad (4.32)$$

avec Σ le tenseur de contrainte macroscopique relié à \mathbf{E} par le tenseur d'élasticité \mathbb{C} selon la loi d'état (4.11). On peut donc encore écrire :

$$L(\mathbf{m}) = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} : \mathbb{C} : \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}, \quad \kappa(\mathbf{m}) = \mathbf{I} : \mathbb{C} : \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \quad (4.33)$$

La dérivation (4.10) du potentiel (4.2) conduit à l'expression suivante du tenseur d'élasticité dans le cas d'un seul système de microfissures⁴ :

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}^0 + d \left[\begin{array}{l} 2c_1 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2c_2 \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} + c_3 (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{I}) \\ + 2c_4 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \\ + c_5 (\mathbf{I} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{I}) \\ + c_6 (\mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \underline{\otimes} \mathbf{I}) \\ + \frac{c_7}{2} [(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})] \\ + c_8 (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \\ + \frac{c_9}{2} \left[\begin{array}{l} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \otimes \mathbf{A} \\ + \mathbf{A} \otimes (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \end{array} \right] \\ + \frac{c_{10}}{2} \left[\begin{array}{l} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \\ + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (4.34)$$

où l'on rappelle que ce tenseur n'est défini que sur le domaine \mathcal{S} . En introduisant l'angle $\psi = (\mathbf{e}_1, \mathbf{m})$ (Fig. 4.3), on obtient à partir de (3.1), (4.33) et (4.34) les expressions suiv-

4. L'expression générale pour N familles s'obtient simplement par sommation de leur contribution élémentaire.

antes :

$$L(\mathbf{m}) = L(\psi, \phi) = L^0(\mathbf{m}) + 2d \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \cos^4 \psi + c_3 \cos^2 \psi + c_4 \cos^4(\psi - \phi) \\ +c_5 \cos^2(\psi - \phi) + c_6 \cos^2(\psi - \phi) \\ +c_7 \cos \phi \cos \psi \cos(\psi - \phi) \\ +c_8 \cos^2 \psi \cos^2(\psi - \phi) \\ +c_9 \cos \phi \cos^3 \psi \cos(\psi - \phi) \\ +c_{10} \cos \phi \cos \psi \cos^3(\psi - \phi) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\kappa(\mathbf{m}) = \kappa(\psi, \phi) = \kappa^0(\mathbf{m}) + d \begin{bmatrix} 6c_1 + 2c_2 \cos^2 \psi + c_3 (1 + 3 \cos^2 \psi) \\ +2c_4 \cos^2(\psi - \phi) \\ +c_5 [1 + 3 \cos^2(\psi - \phi)] + 2c_6 \cos^2(\psi - \phi) \\ +c_7 \cos \phi [\cos \phi + 3 \cos \psi \cos(\psi - \phi)] \\ +c_8 [\cos^2 \psi + \cos^2(\psi - \phi)] \\ +c_9 \cos \phi \cos \psi [\cos \phi \cos \psi + \cos(\psi - \phi)] \\ +c_{10} \cos \phi \cos(\psi - \phi) [\cos \phi \cos(\psi - \phi) + \cos \psi] \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

avec $L^0(\mathbf{m})$ et $\kappa^0(\mathbf{m})$ les modules d'élongation et en contrainte volumique de la matrice vierge orthotrope :

$$L^0(\mathbf{m}) = L^0(\psi) = a_1 + a_2 + 2a_4 \cos^2 \psi + a_3 \cos^4 \psi \quad (4.37)$$

$$\kappa^0(\mathbf{m}) = \kappa^0(\psi) = 3a_1 + a_2 + a_4 + (a_3 + 3a_4) \cos^2 \psi \quad (4.38)$$

Pour illustrer ces résultats, nous avons représenté aux figures (4.4) et (4.5) les rosettes des modules $L(\mathbf{m})$ et $\kappa(\mathbf{m})$ des composites étudiés affaiblis par un ensemble de microfissures de densité $d = 0.1$ et pour deux orientations de leur normale unitaire \mathbf{n} ; les propriétés anisotropes de la matrice vierge sont indiquées comme référence.

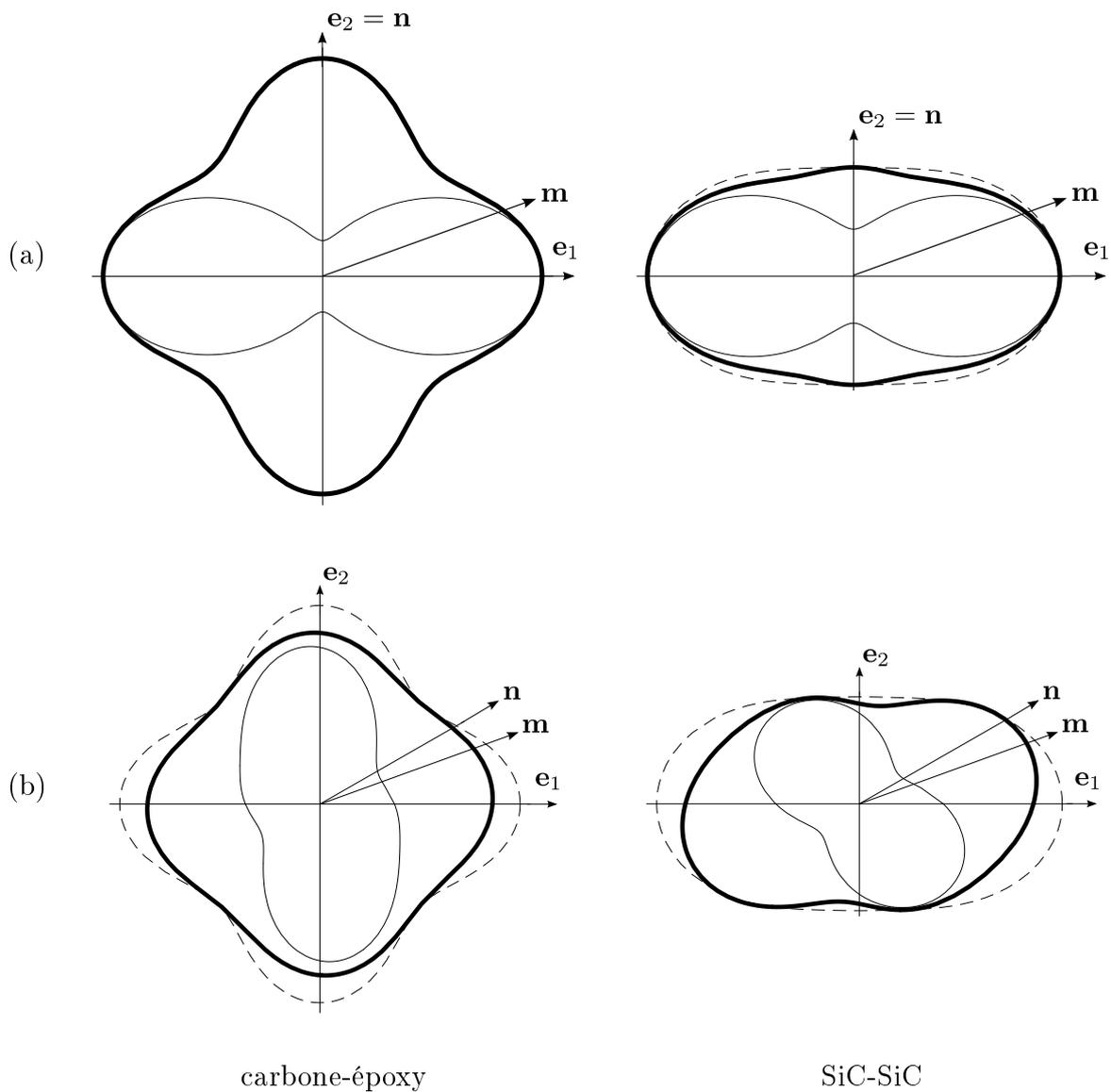


Figure 4.4: Modules d'élongation $L(\mathbf{m})$ de composites affaiblis par une famille de microfissures pour deux orientations de leur normale \mathbf{n} : (a) $(\mathbf{e}_1, \mathbf{n}) = \phi = \frac{\pi}{2}$, (b) $(\mathbf{e}_1, \mathbf{n}) = \phi = \frac{\pi}{6}$ (— : état ouvert, — : état fermé, - - - : matrice vierge)

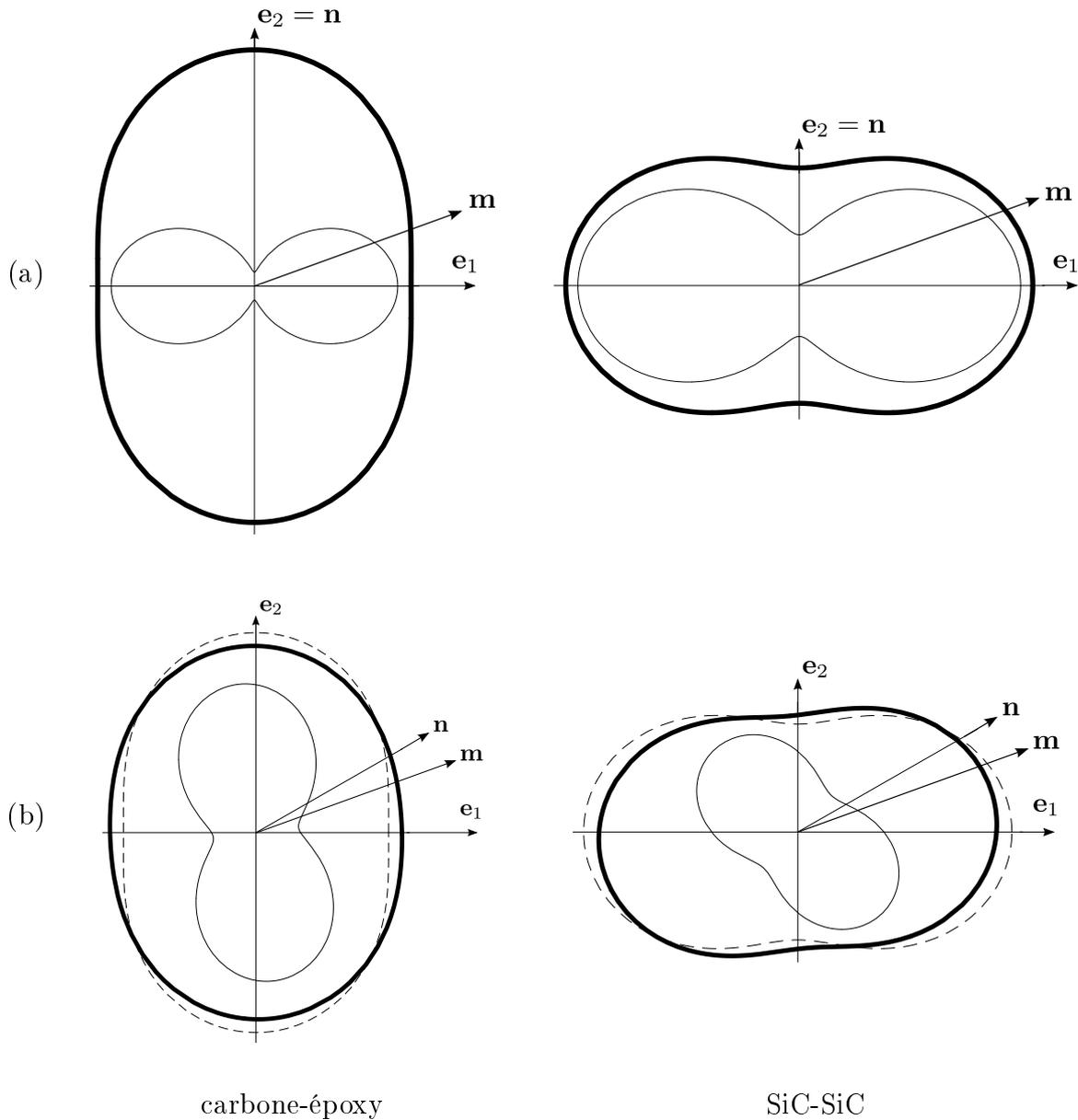


Figure 4.5: Modules en contrainte volumique $\kappa(\mathbf{m})$ de composites affaiblis par une famille de microfissures pour deux orientations de leur normale \mathbf{n} : (a) $(\mathbf{e}_1, \mathbf{n}) = \phi = \frac{\pi}{2}$, (b) $(\mathbf{e}_1, \mathbf{n}) = \phi = \frac{\pi}{6}$ (— : état ouvert, — : état fermé, - - - : matrice vierge)

Les figures (4.4-a) et (4.5-a) démontrent en premier lieu qu'une microfissuration le long des axes de symétrie (par exemple ici des défauts de normale $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2$ d'où $\phi = \frac{\pi}{2}$) préserve l'orthotropie structurelle du matériau dans la mesure où elle correspond à une perturbation orthotrope dans les mêmes axes que la matrice vierge (couplage « isotrope » entre les anisotropies initiale et induite, voir section 3.5.2). En effet, pour des défauts

ouverts ou fermés, les équations (4.35) et (4.36) s'écrivent dans ce cas :

$$L(\mathbf{m}) = L(\psi, \phi = \frac{\pi}{2}) = L^0(\psi) + 2d \begin{bmatrix} c_1 + c_4 + c_5 + c_6 \\ + (c_3 - 2c_4 - c_5 - c_6 + c_8) \cos^2\psi \\ + (c_2 + c_4 - c_8) \cos^4\psi \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

et

$$\kappa(\mathbf{m}) = \kappa(\psi, \phi = \frac{\pi}{2}) = \kappa^0(\psi) + d \begin{bmatrix} 6c_1 + c_3 + 2c_4 + 4c_5 + 2c_6 + c_8 \\ + [2c_2 + 3c_3 - 2c_4 - 3c_5 - 2c_6] \cos^2\psi \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

qui présentent bien la même forme que $L^0(\mathbf{m})$ et $\kappa^0(\mathbf{m})$ donnés en (4.37) et (4.38). Au contraire, une orientation arbitraire des microfissures induit une anisotropie globale plus complexe, comme le montrent les figures (4.4-b) et (4.5-b) lorsque $(\mathbf{e}_1, \mathbf{n}) = \phi = \frac{\pi}{6}$ (couplage anisotrope).

Les expressions (4.35) et (4.36) des propriétés élastiques permettent également d'examiner les conséquences des effets unilatéraux au travers de la dépendance des coefficients $\{c_p(\mathbb{C}^0, \mathbf{n}, \mathbf{A})\}_{p=1,10}$ en l'état d'activation des microfissures. On constate ainsi que dans les deux cas précités (couplages « isotrope » et anisotrope), l'élasticité du milieu fissuré est fortement affectée par le changement de statut des microfissures. Pour le démontrer, posons :

$$L(\mathbf{m}), \kappa(\mathbf{m}) = \begin{cases} L^{ouv}(\mathbf{m}), \kappa^{ouv}(\mathbf{m}), & \text{si } g(\mathbf{E}, \mathbf{n}, \mathbf{A}) > 0 \\ L^{ferm}(\mathbf{m}), \kappa^{ferm}(\mathbf{m}), & \text{si } g(\mathbf{E}, \mathbf{n}, \mathbf{A}) < 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

Dans l'état ouvert tout d'abord, les propriétés $L^{ouv}(\mathbf{m})$ et $\kappa^{ouv}(\mathbf{m})$ sont dégradées en présence des microfissures :

$$\forall \mathbf{m}, \quad L^{ouv}(\mathbf{m}) \leq L^0(\mathbf{m}) \text{ et } \kappa^{ouv}(\mathbf{m}) \leq \kappa^0(\mathbf{m}) \quad (4.42)$$

avec une détérioration majeure :

- dans la direction \mathbf{m} correspondant à la normale \mathbf{n} aux défauts lorsque les microfissures se situent dans les axes d'orthotropie (Fig. (4.4-a) et (4.5-a)) ; notons que ce constat est en accord avec les résultats obtenus pour les milieux isotropes (Weleman et Cormery [225]) ;
- dans des directions \mathbf{m} proches de \mathbf{n} pour une orientation arbitraire des dommages (Fig. (4.4-b) et (4.5-b)) ; ce second cas illustre bien la compétition entre les anisotropies structurelle et induite.

La fermeture des défauts modifie clairement ces contributions : l'élasticité résultante devient bien plus complexe que pour l'état ouvert, en particulier lorsque les dommages sont orientés aléatoirement. Si on assiste globalement à une restauration des propriétés élastiques :

$$\forall \mathbf{m}, \quad L^{ouv}(\mathbf{m}) \leq L^{ferm}(\mathbf{m}) \text{ et } \kappa^{ouv}(\mathbf{m}) \leq \kappa^{ferm}(\mathbf{m}) \quad (4.43)$$

la fermeture des microfissures n'est cependant associée qu'à une désactivation partielle de l'endommagement puisque $L^{ferm}(\mathbf{m})$ (respectivement $\kappa^{ferm}(\mathbf{m})$) ne récupère pas sa valeur initiale $L^0(\mathbf{m})$ (resp. $\kappa^0(\mathbf{m})$) pour de nombreuses directions \mathbf{m} de l'espace. Notons que si la symétrie cubique du composite carbone-époxy semble faire apparaître une restauration complète, le cas plus général du SiC-SiC illustre plus clairement ce caractère partiel de la désactivation. En l'occurrence, il est assez difficile de quantifier précisément les effets de désactivation dans la mesure où certaines directions sont telles $L^{ferm}(\mathbf{m}) \leq L^0(\mathbf{m})$ (resp. $\kappa^{ferm}(\mathbf{m}) \leq \kappa^0(\mathbf{m})$) et d'autres telles que $L^0(\mathbf{m}) \leq L^{ferm}(\mathbf{m})$ (resp. $\kappa^0(\mathbf{m}) \leq \kappa^{ferm}(\mathbf{m})$). Deux aspects marquants sont toutefois à signaler si l'orientation des microfissures correspond aux axes d'orthotropie initiale :

- la restitution complète du module d'élongation $L(\mathbf{n})$ dans la direction \mathbf{n} normale aux microfissures,
- la restitution complète des modules en contrainte volumique $\kappa(\mathbf{m})$, quelle que soit la direction \mathbf{m} ,

comme cela est illustré aux figures (4.4-a) et (4.5-a). En d'autres termes,

$$\begin{cases} L^{ferm}(\mathbf{n}) = L^0(\mathbf{n}) \\ \kappa^{ferm}(\mathbf{m}) = \kappa^0(\mathbf{m}), \forall \mathbf{m} \end{cases}, \text{ si et seulement si } \mathbf{n} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \quad (4.44)$$

Prenons à titre d'exemple la situation décrite aux équations (4.39) et (4.40) où $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2$ (d'où $\phi = \frac{\pi}{2}$). Il existe en effet dans ce cas les relations suivantes entre les coefficients caractérisant l'élasticité à état fermé $\{c_p^{ferm}(\mathbb{C}^0, \mathbf{n} = \mathbf{e}_2, \mathbf{A})\}_{p=1,10}$:

$$\begin{aligned} c_1^{ferm} + c_4^{ferm} + c_5^{ferm} + c_6^{ferm} &= 0 \\ 6c_1^{ferm} + c_3^{ferm} + 2c_4^{ferm} + 4c_5^{ferm} + 2c_6^{ferm} + c_8^{ferm} &= 0 \\ 2c_2^{ferm} + 3c_3^{ferm} - 2c_4^{ferm} - 3c_5^{ferm} - 2c_6^{ferm} &= 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

ce qui conduit à l'annulation des termes d'endommagement dans l'expression de $L^{ferm}(\mathbf{n})$ (pour lequel $\psi = \phi = \frac{\pi}{2}$) ainsi que dans celle de $\kappa^{ferm}(\mathbf{m})$, quel que soit le vecteur \mathbf{m} (d'où quel que soit l'angle ψ). Le résultat (4.44) traduit donc un mode de restitution lorsque les microfissures sont alignées avec les axes d'orthotropie identique à celui obtenu pour des

milieux initialement isotropes (Weleman et Cormery [225, 226]).

Pour conclure, notons que le schéma dilué permet d'étendre ce constat à un ensemble de N familles de défauts : les microfissures dont l'orientation \mathbf{n}_i correspond aux axes d'orthotropie initiale du milieu ne contribuent pas dans leur état fermé à la dégradation du module d'élongation $L(\mathbf{n}_i)$ ni aux modules en contrainte volumique $\kappa(\mathbf{m})$, quel que soit \mathbf{m} .

4.6.3 Critère d'ouverture-fermeture des microfissures

Afin d'illustrer le passage entre l'état ouvert et fermé d'une famille de microfissures, la figure 4.6 présente le critère d'ouverture-fermeture décrit par la fonction g (4.4) pour des états de déformation \mathbf{E} tels que $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ constitue une base principale de ce tenseur, soit tels que :

$$\mathbf{E} = E_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + E_{22} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (4.46)$$

Sur cette figure, les droites correspondant aux critères de familles de trois orientations différentes ont été représentés : les deux cas extrêmes $(\mathbf{e}_1, \mathbf{n}) = \phi = 0$ et $(\mathbf{e}_1, \mathbf{n}) = \phi = \frac{\pi}{2}$ ainsi qu'un cas intermédiaire $(\mathbf{e}_1, \mathbf{n}) = \phi = \frac{\pi}{6}$. Les droites correspondant aux cas extrêmes permettent ainsi de définir trois zones dans l'espace des déformations principales :

- un domaine où l'ensemble des familles sont dans l'état ouvert (noté « ouvert »),
- un domaine où l'ensemble des familles sont dans l'état fermé (noté « fermé »),
- un domaine où certaines familles sont ouvertes et d'autres fermées (noté « mixte »).

Ce résultat illustre donc bien la dépendance de l'état d'activation d'un système de microfissures en fonction de son orientation. Il démontre aussi la possibilité qu'offre le critère (4.4) de représenter des états mixtes d'ouverture-fermeture, qui permettrait par exemple de rendre compte d'une anisotropie générale des propriétés en présence d'une distribution isotrope d'endommagement (extension des travaux de Weleman et Goidescu [227] pour les milieux isotropes).

4.7 Etude du comportement dissipatif

Considérons à présent le cas d'évolutions dissipatives pour lesquelles l'endommagement évolue. Après la méthodologie d'identification des paramètres matériaux spécifiques, on présentera la réponse à quelques sollicitations classiques.

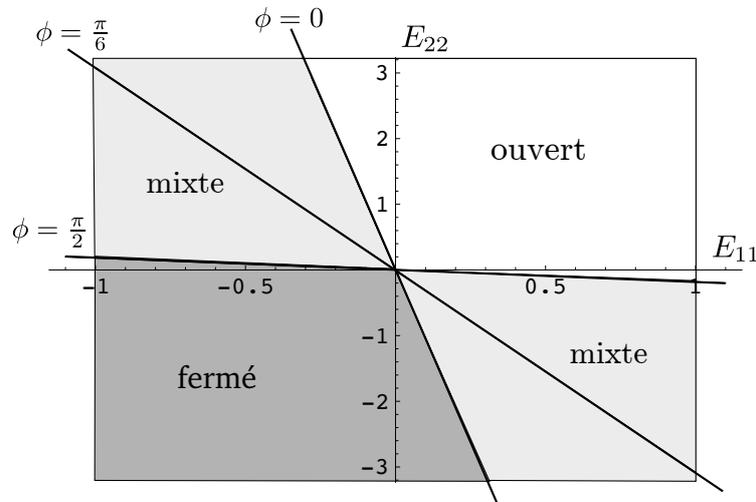


FIGURE 4.6 – Critères et état d’ouverture-fermeture des familles de microfissures pour un composite SiC-SiC dans l’espace des déformations principales de la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

4.7.1 Détermination des paramètres de dissipation

Le travail d’identification concerne ici les paramètres (k_0, η) entrant dans l’expression de la fonction \mathcal{G} de l’équation (4.17). Pour cela, on s’appuie sur la procédure adoptée par Gruescu [99] et qui repose sur les principes suivants :

- une identification basée sur des tractions uniaxiales $\Sigma = \Sigma_{yy} \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}$ avec $\Sigma_{yy} > 0$ dans les axes d’orthotropie initiale du matériau ($\delta = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) = 0^\circ$ d’après la figure 4.2, soit $\mathbf{y} = \mathbf{e}_2$),
- un seuil d’endommagement correspondant au développement de microfissures perpendiculaires à la direction du chargement (soit de normale $\mathbf{y} = \mathbf{e}_2$).

Sur cette base, le coefficient k_0 est déterminé à l’aide du seuil initial d’endommagement et η par calage avec la réponse non linéaire du matériau. En ce qui concerne ce dernier, il agit comme un paramètre d’écrouissage dans la modélisation : $\eta = 0$ correspond au modèle à seuil fixe (purent élastique fragile) et $\eta = \infty$ au cas d’un matériau ne s’endommageant pas (voir par exemple Pensée [179], Weleman [224]).

Comme cela sera illustré par la suite (Fig. 4.8), la loi d’évolution adoptée prédit une résistance à rupture relativement constante quelle que soit l’orientation des axes principaux du composite par rapport à la sollicitation. Dans le cas du composite carbone-époxy étudié au chapitre 2, les figures 2.24-a et 2.24-b démontrent une différence marquée dans cette valeur pour des essais respectivement à $\delta = 0^\circ$ (type A) et $\delta = 45^\circ$ (type B). Aussi, la procédure d’identification appliquée aux essais à 0° conduit évidemment à des incohérences importantes pour ceux à 45° très affectés par la viscosité de la matrice non prise

en compte dans la formulation. Dans sa forme actuelle, la loi d'évolution proposée ne permet donc pas la représentation du comportement dissipatif de ce matériau. L'identification n'a donc portée que sur le composite SiC-SiC pour lesquelles les valeurs des coefficients (k_0, η) sont indiquées au tableau 4.2 (voir Fig. 4.7).

	carbone-époxy	SiC-SiC
k_0 [MPa]	-	0,008
η	-	70000

TABLE 4.2 – Paramètres de dissipation pour deux composites

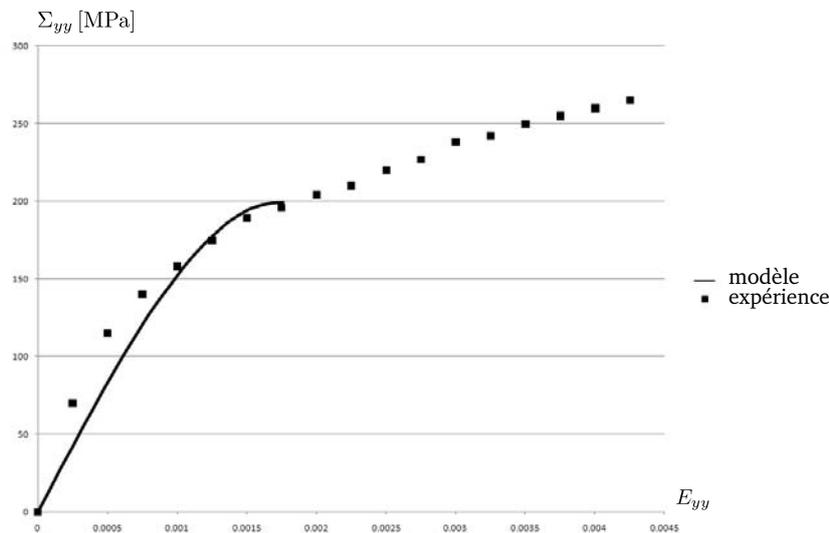


FIGURE 4.7 – Identification d'un composite SiC-SiC - Réponse contrainte-déformation axiales pour un essai de traction uniaxiale ($\Sigma = \Sigma_{yy} \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}$ avec $\Sigma_{yy} > 0$ et $\delta = 0^\circ$, données expérimentales d'Aubard [13, 14])

4.7.2 Etude de sollicitations simples

On entend ici présenter les prédictions du modèle pour différentes sollicitations classiques (traction et compression uniaxiales) en abordant les spécificités des matériaux composites exposés au chapitre 1.

Réponse globale

Le modèle est en premier lieu apte à représenter la non linéarité de la réponse contrainte-déformation sous sollicitation, que ce soit en traction ou en compression (Fig. 4.8). En accord avec les hypothèses de la formulation, cet aspect tire son origine exclusivement de la dégradation des propriétés mécaniques du matériau induite par l'endommagement (seul mécanisme dissipatif considéré). Aussi, cette non linéarité ne présente pour l'heure qu'une faible amplitude vis-à-vis des réponses expérimentales où les déformations résiduelles (liées à l'endommagement pour les composites à matrice céramique ou à la viscosité de la matrice pour les composites à matrice organique) jouent un rôle important. La figure 4.9 illustre en particulier cette limitation pour un chargement à 45° . On notera également que la prise en compte de ces effets résiduels modifierait la représentation des contraintes à rupture compte tenu de l'écriture en déformation du critère d'endommagement (4.18).

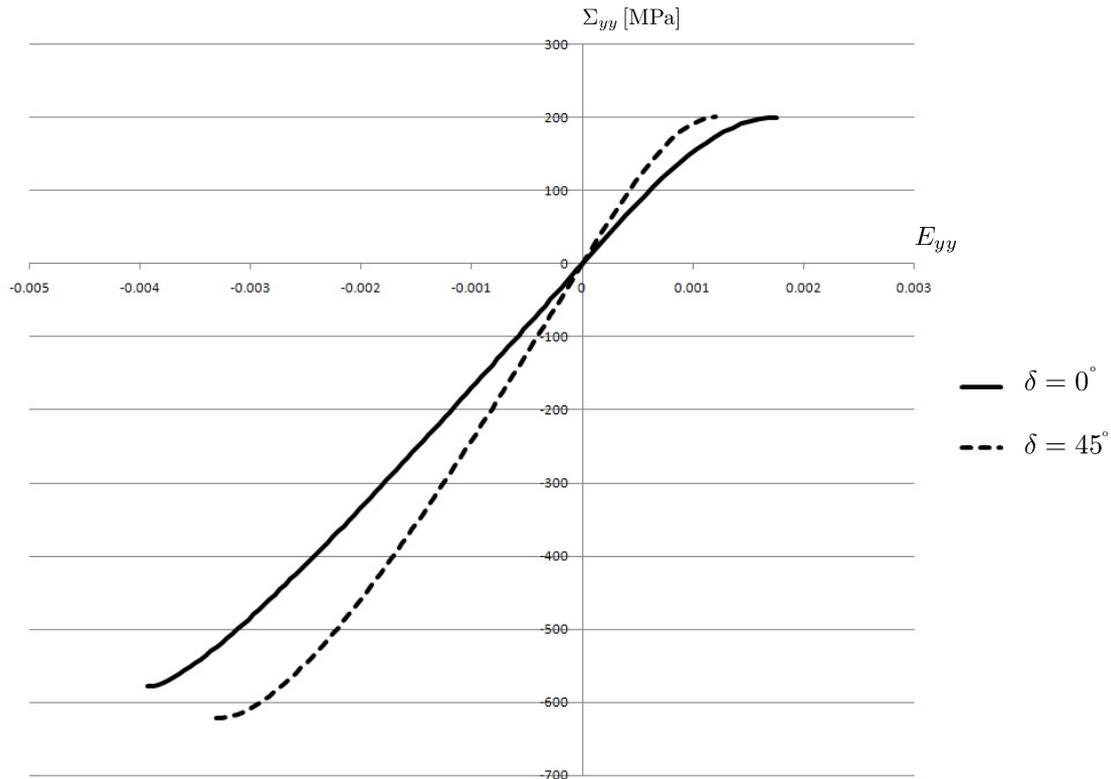


FIGURE 4.8 – Réponse contrainte-déformation axiales d'un composite SiC-SiC pour des essais de traction et de compression uniaxiales ($\Sigma = \Sigma_{yy} \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}$ avec $\Sigma_{yy} > 0$ en traction et $\Sigma_{yy} < 0$ en compression) dans ($\delta = 0^\circ$) et hors des axes ($\delta = 45^\circ$)

Pour chaque type de chargement (ici traction ou compression uniaxiales), la réponse du matériau diffère par ailleurs suivant l'orientation de la sollicitation par rapport à

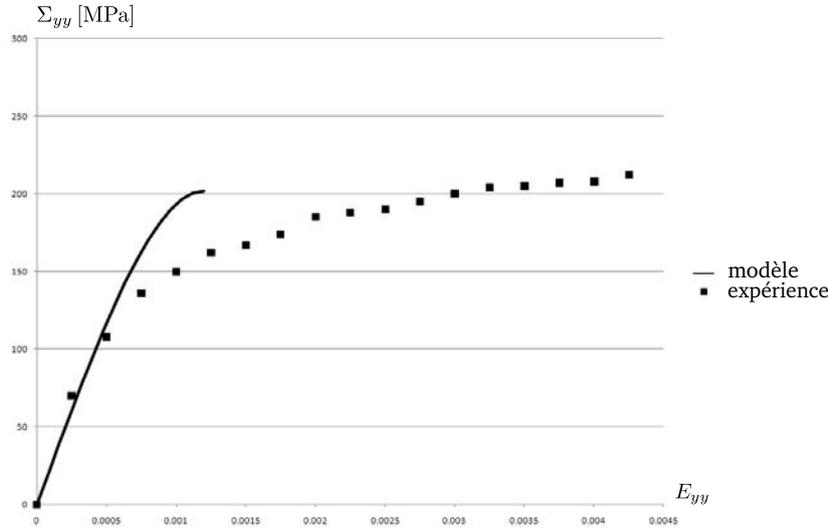


FIGURE 4.9 – Réponse contrainte-déformation axiales d’un composite SiC-SiC pour un essai de traction uniaxiale hors axes ($\Sigma = \Sigma_{yy} \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}$ avec $\Sigma_{yy} > 0$ et $\delta = 45^\circ$, données expérimentales d’Aubard [13, 14])

l’orthotropie initiale du composite. La figure 4.8 indique la position respective des différentes courbes de contrainte-déformation axiales pour ces essais uniaxiaux lorsque l’axe de chargement \mathbf{y} correspond à un axe d’orthotropie (soit $\mathbf{y} = \mathbf{e}_2$ pour $\delta = 0^\circ$) ou se trouve hors de ces axes (soit $\mathbf{y} = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)/2$ pour $\delta = 45^\circ$). Conformément au contexte anisotrope, la phase élastique présente bien un module d’Young axial différent du fait de la rotation des axes de sollicitation. En revanche, on observe que l’intensité de la non linéarité est bien affectée par la direction du chargement, avec davantage d’impact à $\delta = 0^\circ$, ce qui traduit l’influence de l’orthotropie initiale y compris dans le processus dissipatif.

Dégradation des propriétés élastiques

Pour compléter le propos de la section 4.6.2, on peut illustrer la dégradation des propriétés du matériau en cours de sollicitation en représentant l’évolution des composantes indépendantes du tenseur d’élasticité effectif \mathbb{C} dans la base de calcul (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , soit sous forme matricielle :

$$\mathbb{C}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \begin{bmatrix} C_{xxxx} & C_{xxyy} & C_{xxxy} \\ C_{xxyy} & C_{yyyy} & C_{xyyy} \\ C_{xxxy} & C_{xyyy} & C_{xyxy} \end{bmatrix} \tag{4.47}$$

La figure 4.10 montre l’évolution de ces composantes avec la contrainte appliquée et le tableau 4.3 donne leurs variations numériques respectives entre l’état initial et le pic de contrainte. Après la phase élastique (d’intensité différente selon la direction de sollicita-

tion mais identique en traction et compression pour une direction donnée), les propriétés effectives du milieu sont clairement affectées par le chargement appliqué.

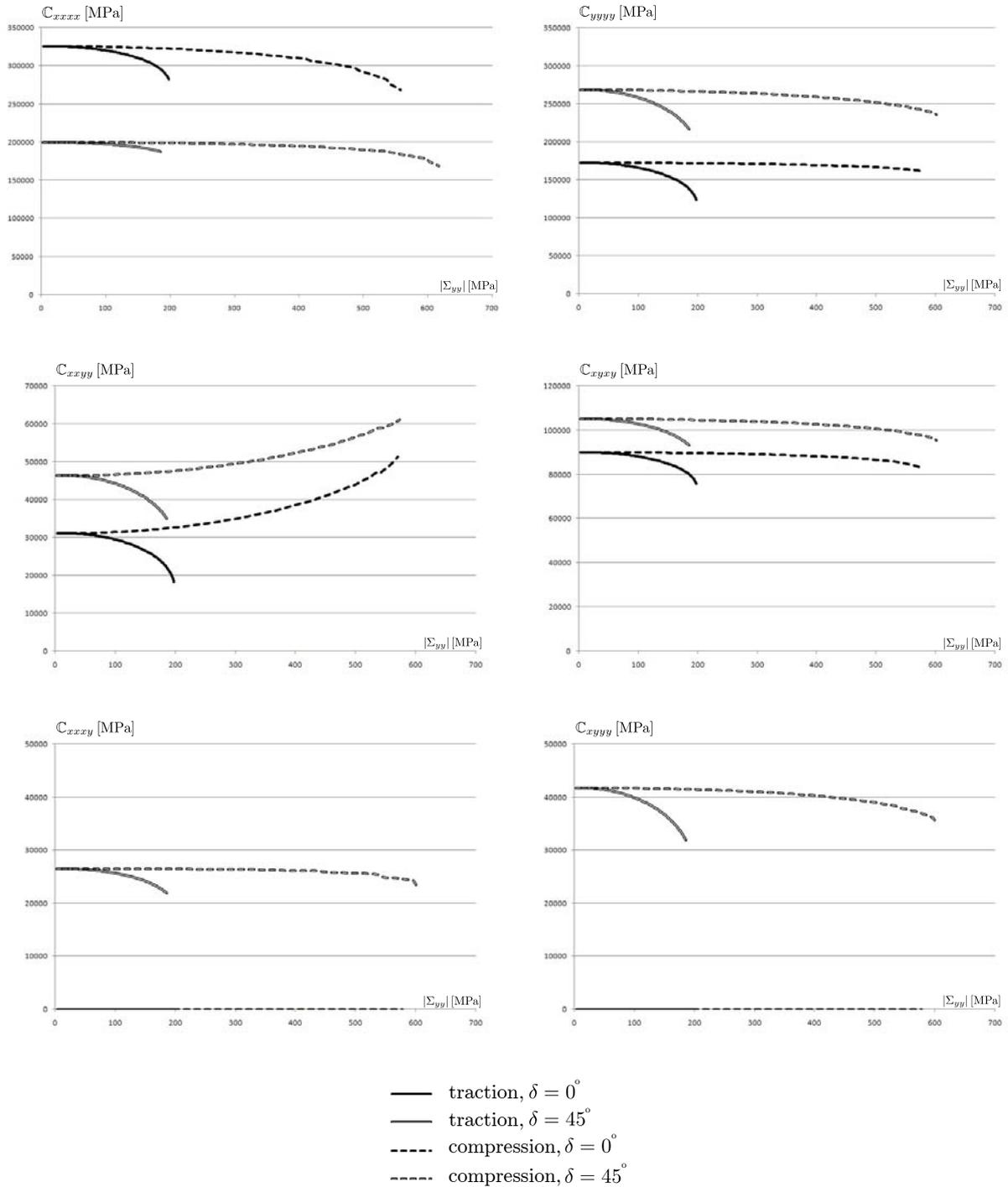


FIGURE 4.10 – Evolution des composantes du tenseur d'élasticité effectif dans la base de calcul (\mathbf{x}, \mathbf{y}) en fonction du chargement uniaxial appliqué $\Sigma = \Sigma_{yy} \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}$

Examinons tout d'abord les conséquences en traction. On constate à $\delta = 0^\circ$ que les composantes \mathbb{C}_{yyyy} et \mathbb{C}_{xxyy} sont les plus touchées. Ces résultats proviennent du caractère anisotrope de l'endommagement induit par le chargement. Sur la figure 4.11-a est en effet représentée la distribution des densités de microfissuration obtenue dans ce cas. Ces rosettes démontrent une orientation préférentielle des microfissures perpendiculairement à la direction \mathbf{y} du chargement, d'où des effets de dégradation majeurs dans cette direction normale aux défauts. Pour la traction à $\delta = 45^\circ$, le niveau de densité de microfissuration est globalement plus faible (Fig. 4.11-b) amenant des dégradations moins importantes des composantes de \mathbb{C} . De plus, la direction de densité maximale est décalée d'environ -15° par rapport à \mathbf{y} , ce qui explique également la plus faible non linéarité de la réponse contrainte-déformation axiales $\Sigma_{yy} - E_{yy}$ à $\delta = 45^\circ$ observée précédemment.

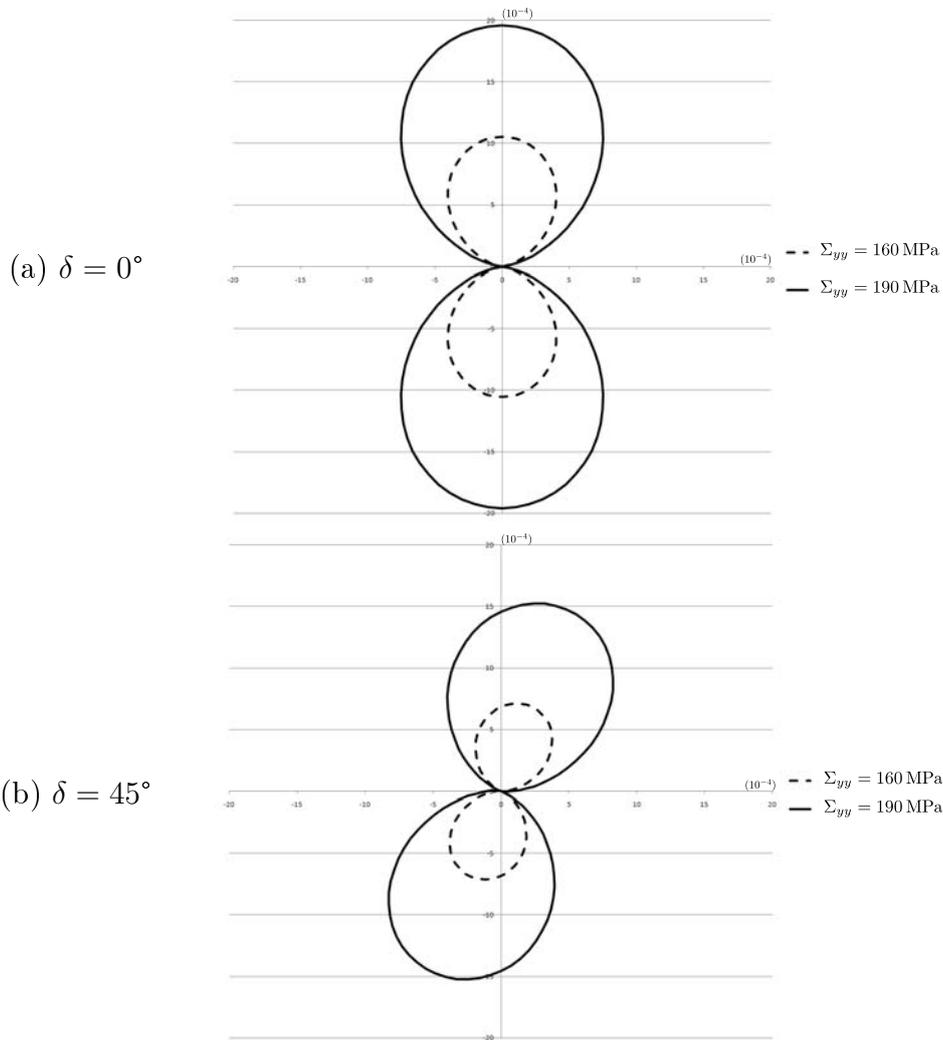


FIGURE 4.11 – Distribution des densités de microfissures dans le plan (\mathbf{x}, \mathbf{y}) pour des tractions uniaxiales $\Sigma = \Sigma_{yy} \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}$ avec $\Sigma_{yy} > 0$ dans $(\delta = 0^\circ)$ et hors des axes $(\delta = 45^\circ)$

	C_{xxxx}	C_{yyyy}	C_{xxyy}	C_{xyxy}	C_{xxxy}	C_{xyyy}
traction, $\delta = 0^\circ$	-13%	-30%	-40%	-15%	0	0
traction, $\delta = 45^\circ$	-6%	-20%	-25%	-11%	-17%	-23%
compression, $\delta = 0^\circ$	-17%	-8%	+65%	-8%	0	0
compression, $\delta = 45^\circ$	-15%	-12%	+31%	-9%	-11%	-15%

TABLE 4.3 – Modifications des composantes du tenseur d'élasticité effectif dans la base de calcul (\mathbf{x}, \mathbf{y}) entre l'état initial et le pic de contrainte $|\Sigma_{yy}^{max}|$

En ce qui concerne les sollicitations de compression, il convient de souligner l'impact majeur sur la composante C_{xxyy} , notamment à $\delta = 0^\circ$, que l'on peut relier à nouveau au développement des défauts, en l'occurrence à environ $\pm 42^\circ$ par rapport à la direction de chargement \mathbf{y} (Fig. 4.12-a). L'orientation différente de la densité maximale pour l'essai à $\delta = 45^\circ$, à environ -57° par rapport à \mathbf{y} , diminue cet effet. Notons qu'une analyse des effets distincts de familles de fissures d'orientations correspondant aux directions de densités maximales permettrait d'affiner la compréhension de ces résultats.

Interaction entre les anisotropies initiale et induite

En dehors des aspects déjà cités, la meilleure illustration de l'interaction entre les anisotropies initiale et induite concerne le développement de la microfissuration présentée aux figures 4.11 et 4.12. La symétrie matérielle influence en effet à la fois l'intensité de l'endommagement mais également son orientation, la distribution finale des défauts résultant des effets combinés de la sollicitation et de l'orthotropie initiale.

Au niveau des conséquences macroscopiques, notons également l'évolution de l'anisotropie résultante. Si les sollicitations à $\delta = 0^\circ$ induisent simplement une modification de l'amplitude de l'orthotropie, les sollicitations hors-axes conduisent à une symétrie matérielle du milieu microfissuré beaucoup plus complexe. Le développement hors axes de l'endommagement conduit en effet à des valeurs non nulles des composantes C_{xxxy} et C_{xyyy} (voir Tab. 4.3), démontrant la rotation des axes principaux d'élasticité du matériau.

Effet unilatéral

La réalisation des essais de traction et de compression nous permet enfin de mettre en évidence les capacités de la formulation vis-à-vis des effets d'ouverture-fermeture des microfissures.

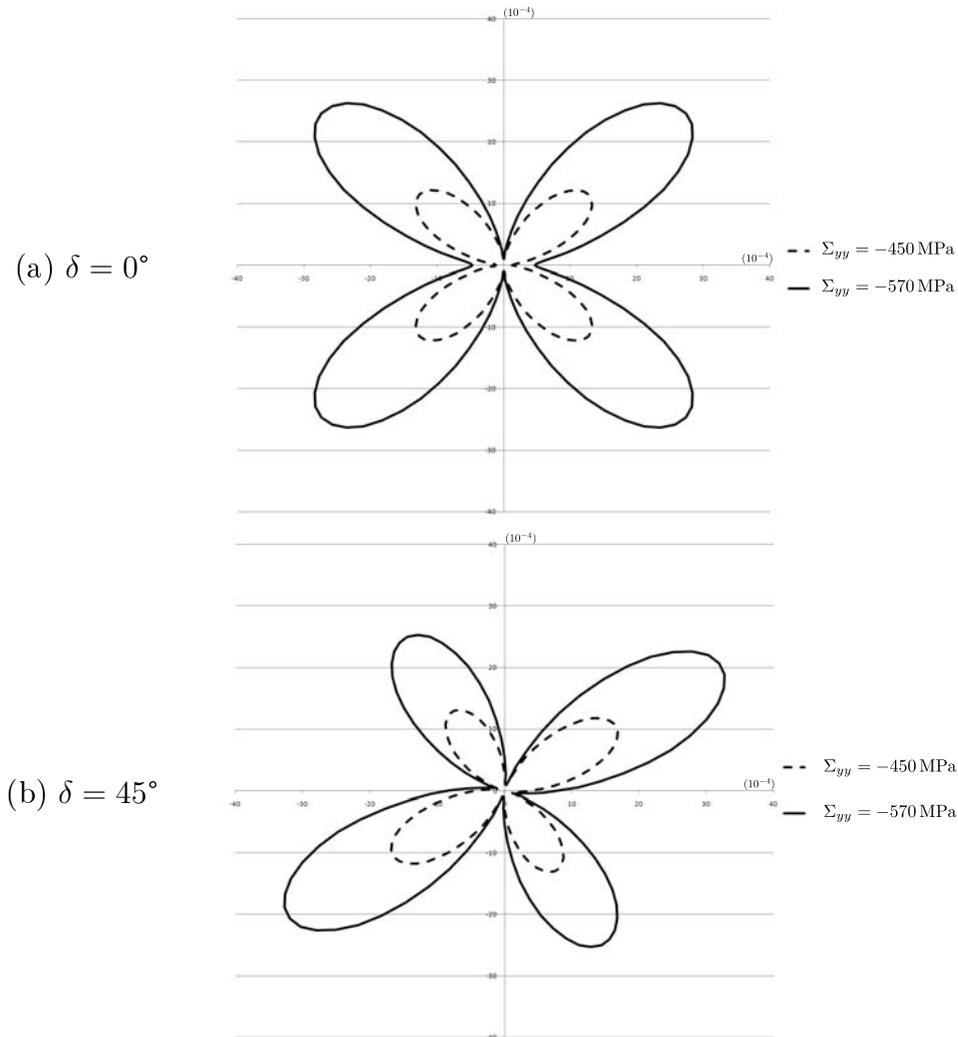


FIGURE 4.12 – Distribution des densités de microfissures dans le plan (\mathbf{x}, \mathbf{y}) pour des compressions uniaxiales $\Sigma = \Sigma_{yy} \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}$ avec $\Sigma_{yy} < 0$ dans $(\delta = 0^\circ)$ et hors des axes $(\delta = 45^\circ)$

En premier lieu, un des avantages du modèle est de pouvoir connaître l'état d'activation de chacune des familles de microfissures. Les trajets des essais à $\delta = 0^\circ$ dans l'espace des déformations principales associées à $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ permettent en effet de visualiser simplement leur statut suivant la sollicitation (Fig. 4.13). Par ailleurs, la donnée de sortie introduite dans la programmation (vecteur STATEV pour ses composantes allant de $N+1$ à $2N$) nous permet de quantifier précisément cette information et de l'obtenir pour des essais hors axes. Ainsi, pour les essais à $\delta = 0^\circ$,

- les dommages demeurent tous ouverts en traction,
- les dommages sont dans une situation mixte en compression ; dans ce second cas, les microfissures sont toutes fermées en début de sollicitation et celles dont l'orientation

\mathbf{n} est telle que $(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \in [-12^\circ, 12^\circ]$ s'ouvrent au fur et à mesure de l'augmentation de la charge.

Pour les essais à $\delta = 45^\circ$,

- les dommages demeurent tous ouverts en traction,
- les dommages sont dans une situation mixte en compression ; les microfissures sont également toutes fermées en début de sollicitation et celles dont l'orientation \mathbf{n} est telle que $(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \in [-27^\circ, 6^\circ]$ s'ouvrent au fur et à mesure de l'augmentation de la charge.

Dans les deux cas, les fissures qui s'ouvrent en compression sont bien situées plus ou moins perpendiculairement par rapport à l'axe de chargement, la déviation obtenue à $\delta = 45^\circ$ traduisant l'influence de l'orthotropie initiale également sur les états d'ouverture-fermeture.

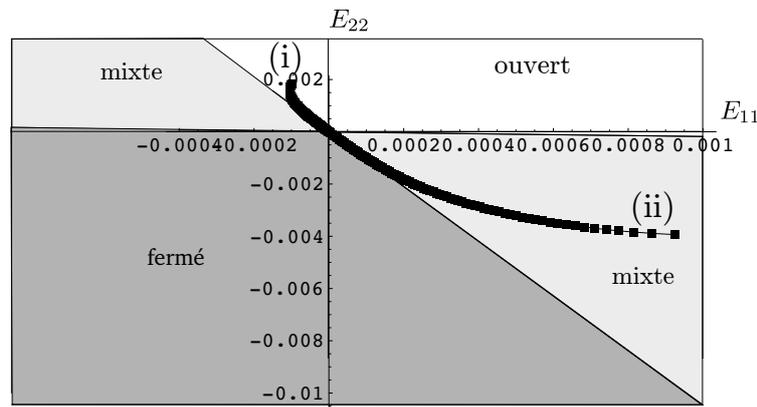


FIGURE 4.13 – Etat d'ouverture-fermeture des familles de microfissures pour un composite SiC-SiC dans l'espace des déformations principales de la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et trajets de chargement à $\delta = 0^\circ$: (i) traction, (ii) compression

Au niveau de la représentation, les précédentes illustrations ont démontré la capacité du modèle à rendre compte des aspects suivants :

- la dissymétrie de réponse contrainte-déformation et de seuil à rupture entre des sollicitations de traction et de compression (Fig. 4.8),
- la dépendance des propriétés élastiques du matériau avec l'état d'ouverture-fermeture (Fig. 4.10, Tab. 4.3) ; cela est particulièrement notable sur la composante C_{xyyy} (dégradation en traction, accroissement en compression),

et ce, à partir d'un ensemble unique de variables internes caractérisant les densités de microfissures quel que soit leur état, et sans faire appel à une quelconque décomposition (des variables d'état ou autre).

4.8 Conclusion

Le modèle d'endommagement formulé dans ce chapitre conduit à des résultats fort encourageants pour la représentation des matériaux composites. Écrit dans un cadre mathématique et thermodynamique rigoureux, il permet de rendre compte de manière simple de certaines spécificités essentielles du comportement de ces matériaux, en particulier la non linéarité de la réponse, l'interaction entre les anisotropies initiale et induite ou les effets unilatéraux.

Si les quelques résultats présentés ont permis d'évaluer les aptitudes du modèle, il conviendra à l'avenir de compléter et d'approfondir ce travail de validation. En particulier, il sera intéressant de comparer la représentation aux mesures de propriétés élastiques issues des méthodes acoustiques (voir section 1.3.2) ou optiques (voir section 2.5.3). De plus, la signification physique des variables internes employées permettra de confronter les distributions de densités simulées aux données expérimentales issues de la tomographie X (voir section 2.5.2), y compris en phase d'évolution durant les essais si l'on dispose d'un dispositif adéquat. Enfin, l'implémentation numérique réalisée dans le code de calcul ABAQUS permettra d'aborder un niveau supplémentaire de validation et de prédiction à l'échelle de structures composites.

Conclusion générale

L'étude présentée dans ce mémoire a été consacrée à la caractérisation et à la modélisation de l'endommagement par microfissuration de matériaux composites orthotropes plans. Ce travail a été porté par deux idées essentielles :

- la volonté d'une compréhension expérimentale des mécanismes mis en jeu à partir de mesures de champs ; les méthodes optiques employées (stéréo-corrélation d'images, thermographie infrarouge et tomographie X) offrent aujourd'hui des perspectives particulièrement riches et intéressantes qui permettent de mettre en évidence des spécificités internes, diffuses et évolutives de ce phénomène de dégradation ;
- le recours aux méthodes de changement d'échelle pour clarifier certaines questions difficiles comme l'influence de l'anisotropie initiale ou les effets unilatéraux ; l'exploitation de la micromécanique s'avère à ce niveau un outil pertinent et efficace qui donne accès à des informations précises pour diverses configurations de dommages (orientation et état d'ouverture-fermeture des microfissures).

Grâce à ces deux sources d'inspiration, un modèle de comportement rigoureux et physiquement cohérent a été développé, qui semble apte à décrire quelques uns des phénomènes essentiels du comportement non linéaire de cette classe de matériaux.

Les résultats obtenus nous amènent néanmoins à envisager un certain nombre d'améliorations et d'enrichissements à apporter à ce travail. Parmi les perspectives, il apparaît ainsi qu'un effort de recherche doit être entrepris pour corrélérer véritablement les différentes mesures expérimentales (cinématiques, thermiques et densimétriques). La difficulté pour réaliser ce couplage portera sur le développement de moyens expérimentaux spécifiques pour de tels matériaux hétérogènes qui puissent fournir des informations aux mêmes

échelles d'espace et de temps pour les champs mesurés (voir par exemple les travaux de Bodelot [36] sur des matériaux métalliques).

Parallèlement, il conviendra d'ouvrir la modélisation à d'autres aspects et mécanismes dissipatifs propres à ces matériaux pour améliorer la représentation obtenue. Dans ce domaine, la démarche énergétique adoptée, qui fait apparaître les variables cinématiques des défauts et qui précise leur état d'ouverture-fermeture, constitue par exemple un cadre approprié à la prise en compte du glissement avec frottement des lèvres des microfissures fermées (on pourra notamment appuyer cette extension sur les travaux d'Andrieux [10, 11] et de Pensée [179]).

Plus généralement, la confrontation entre la modélisation proposée et les résultats expérimentaux, qui fait le lien entre les deux pistes précitées, devra être approfondie. Comme cela a été évoqué à la fin du chapitre 4, la formulation s'y prête d'ores et déjà vis-à-vis des données cinématiques et densimétriques. La détermination des dissipations d'énergie liées aux décohésions locales à partir des mesures thermiques permettrait notamment de compléter cette caractérisation.

Annexe A

Le tenseur d'élasticité de la matrice vierge est noté \mathbb{C}^0 :

$$\mathbb{C}^0 = a_1 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + a_2 \mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{I} + a_3 (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) + a_4 (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{A}) \quad (\text{A.1})$$

Les constantes $\{a_i\}_{i=1,4}$ sont exprimées au chapitre 3 (section 1.2.1) en fonction des composantes de \mathbb{C}^0 dans la base orthonormée d'orthotropie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Ces constantes peuvent également être écrites en fonction des modules de l'ingénieur du matériau, soit (voir les définitions exactes de ces modules dans Hayes [110], Ladevèze [126, 127] ou Weleman [224]) :

- E_1, E_2 et E_3 les modules d'Young associés respectivement aux directions de vecteur unitaire $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ et \mathbf{e}_3 ,
- ν_{12} (resp. ν_{21}), ν_{23} (resp. ν_{32}) et ν_{31} (resp. ν_{13}) les coefficients de Poisson associés aux couples de directions $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, (resp. $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$), $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, (resp. $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)$) et $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$, (resp. $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$) (tels que $\frac{E_1}{\nu_{12}} = \frac{E_2}{\nu_{21}}$, $\frac{E_2}{\nu_{23}} = \frac{E_3}{\nu_{32}}$ et $\frac{E_3}{\nu_{31}} = \frac{E_1}{\nu_{13}}$),
- G_{12} le module de cisaillement associé au couple de directions $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

avec $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ formant une base orthonormée directe de \mathbb{R}^3 .

Les expressions des $\{a_i\}_{i=1,4}$ sont alors donnés par :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{E'_2}{1-\nu'_{12}\nu'_{21}} - 2G_{12} \\ a_2 &= 2G_{12} \\ a_3 &= \frac{E'_1 + E'_2 - 2\nu'_{21}E'_1}{1-\nu'_{12}\nu'_{21}} - 4G_{12} \\ a_4 &= \frac{\nu'_{21}E'_1 - E'_2}{1-\nu'_{12}\nu'_{21}} + 2G_{12} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

où les modules $(E'_1, E'_2, \nu'_{12}, \nu'_{21})$, tels que $\frac{E'_1}{\nu'_{12}} = \frac{E'_2}{\nu'_{21}}$, diffèrent suivant l'état de contraintes

et déformations générées dans la structure :

- en contraintes planes

$$E'_1 = E_1, \quad E'_2 = E_2, \quad \nu'_{12} = \nu_{12}, \quad \nu'_{21} = \nu_{21} \quad (\text{A.3})$$

- en déformations planes

$$E'_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_{31}\nu_{13}}, \quad E'_2 = \frac{E_2}{1 - \nu_{23}\nu_{32}}, \quad \nu'_{12} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{1 - \nu_{31}\nu_{13}}, \quad \nu'_{21} = \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{1 - \nu_{23}\nu_{32}} \quad (\text{A.4})$$

Annexe B - Démonstrations

On présente quelques démonstrations de base pour le calcul des moyennes des contraintes et déformations microscopiques ainsi que l'énergie libre spécifique d'un milieu continu puis d'un milieu fissuré (on pourra se référer également à Barthélémy [20]).

Les tenseurs étudiés sont définis sur l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^2 , leurs composantes sont données dans une base orthonormée de cet espace.

Milieu continu

Soit un domaine surfacique continu Ω constitué par un matériau homogène d'élasticité \mathbb{C}^0 , de frontière extérieure $\partial\Omega$, $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1,2}$ un point de Ω .

Moyenne des contraintes

La contrainte macroscopique $\Sigma = \{\Sigma_{ij}\}_{i,j \in [1,2]^2}$ est définie comme la moyenne spatiale du champ de contraintes microscopiques $\sigma = \{\sigma_{ij}\}_{i,j \in [1,2]^2}$ sur le domaine Ω :

$$\Sigma = \langle \sigma \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}) dS \quad (\text{B.1})$$

avec dS l'élément de surface. On peut exprimer les composantes du tenseur symétrique du second ordre σ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{1}{2}(\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) = \frac{1}{2}(\sigma_{ik}\delta_{jk} + \sigma_{jk}\delta_{ik}) \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_{ik} \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + \sigma_{jk} \frac{\partial x_i}{\partial x_k}) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{\partial(\sigma_{ik}x_j)}{\partial x_k} - \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}x_j + \frac{\partial(\sigma_{jk}x_i)}{\partial x_k} - \frac{\partial\sigma_{jk}}{\partial x_k}x_i) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Le champ de contraintes microscopiques étant équilibré ($div \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$, soit $(\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k})_i = 0_i$), on en déduit que :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik} x_j + \sigma_{jk} x_i) \quad (\text{B.3})$$

A l'aide du théorème de Stokes, il vient :

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij} &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma_{ij} dS = \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik} x_j + \sigma_{jk} x_i) dS \\ &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ik} v_k x_j + x_i \sigma_{jk} v_k dx \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

avec $\mathbf{v} = \{v_i\}_i$ le vecteur unitaire extérieur à Ω et dx l'élément de longueur, soit encore en écriture formelle :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\partial\Omega} [(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})) \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}))] dx \\ &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\partial\Omega} [\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x})) \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x}))] dx \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

avec $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x})) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})$ le vecteur contrainte en un point \mathbf{x} du contour de Ω de normale $\mathbf{v}(\mathbf{x})$.

Moyenne des déformations

La déformation macroscopique $\mathbf{E} = \{E_{ij}\}_{i,j \in [1,2]^2}$ est définie quant à elle comme la moyenne spatiale du champ de déformations microscopiques $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{ij}\}_{i,j \in [1,2]^2}$ sur le domaine Ω :

$$\mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) dS \quad (\text{B.6})$$

Par définition, le champ de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ dérive du champ de déplacement local $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1,2}$ selon la relation :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\text{grad } \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \text{grad}^T \mathbf{u}(\mathbf{x})) \quad (\text{B.7})$$

soit en composantes :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{B.8})$$

A nouveau, le théorème de Stokes donne la propriété :

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} dS = \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dS \\ &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\partial\Omega} (u_i v_j + u_j v_i) dx \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

soit en écriture formelle :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\partial\Omega} [\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x})] dx \quad (\text{B.10})$$

Moyenne de l'énergie libre

L'énergie libre macroscopique W du milieu se définit comme la moyenne spatiale de l'énergie libre microscopique, soit :

$$W = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega} \quad (\text{B.11})$$

Si l'on intègre la loi de comportement locale $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}$, on a également :

$$W = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\Omega} \quad (\text{B.12})$$

En termes de composantes,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \sigma_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\sigma_{ij} u_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} u_i + \frac{\partial(\sigma_{ij} u_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} u_j \right] \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

La condition d'équilibre sur $\boldsymbol{\sigma}$ simplifie l'expression obtenue :

$$\varepsilon_{ij} \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\sigma_{ij} u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\sigma_{ij} u_j)}{\partial x_i} \right] \quad (\text{B.14})$$

L'application une nouvelle fois du théorème de Stokes associée à la symétrie de $\boldsymbol{\sigma}$ conduit à :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\sigma_{ij} u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\sigma_{ij} u_j)}{\partial x_i} \right] dS \\ &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} (\sigma_{ij} u_i v_j + \sigma_{ij} u_j v_i) dx \\ &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} u_i v_j dx \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

d'où

$$W = \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx \quad (\text{B.16})$$

Dans le cas par exemple d'une condition aux limites homogène en contraintes au contour, *i.e.* :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (\text{B.17})$$

avec $\boldsymbol{\Sigma}$ la contrainte macroscopique appliquée, l'expression (B.16) devient :

$$W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\partial\Omega} [\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x})] \, dx \quad (\text{B.18})$$

soit en intégrant la définition (B.10) :

$$W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E} \quad (\text{B.19})$$

Ce résultat traduit l'expression classique du lemme de Hill pour les milieux hétérogènes sans cavités (Christensen [65], Hashin [108], Hill [112]) :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\Omega} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\Omega} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega} \quad (\text{B.20})$$

Notons qu'un résultat identique est obtenu avec des conditions aux limites imposées en déplacement.

Milieu fissuré - approche directe

Considérons le domaine \mathcal{A} de frontière extérieure $\partial\mathcal{A}$ constitué par un matériau homogène d'élasticité \mathbb{C}^0 et affaibli par une microfissure plane de normale unitaire \mathbf{n} ; ω^+ (respectivement ω^-) désigne la face supérieure (resp. inférieure) de la microfissure telles que le vecteur \mathbf{n} est dirigé de ω^- vers ω^+ (Fig. 3.1); $\omega = \omega^+ \cup \omega^-$ correspond au domaine total occupé par la microfissure qui est supposée non débouchante ($\partial\mathcal{A} \cap \omega = \emptyset$). $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A} - \omega$ désigne le domaine de la partie solide ($\bar{\mathcal{A}} \cap \omega = \emptyset$) dont la frontière $\partial\bar{\mathcal{A}}$ est composée de deux surfaces : le contour externe $\partial\mathcal{A}$ de \mathcal{A} et la surface interne ω correspondant à la fissure ($\partial\bar{\mathcal{A}} = \partial\mathcal{A} \cup \omega$). On note enfin $\llbracket \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rrbracket$ le saut de déplacement entre les lèvres de la microfissure :

$$\llbracket \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rrbracket = \mathbf{u}(\mathbf{x} \in \omega^+) - \mathbf{u}(\mathbf{x} \in \omega^-), \quad \forall \mathbf{x} \in \omega \quad (\text{B.21})$$

Moyenne des contraintes

Comme auparavant, la contrainte macroscopique Σ est définie comme la moyenne spatiale du champ de contraintes microscopiques σ sur le domaine \mathcal{A} :

$$\Sigma = \langle \sigma \rangle_{\mathcal{A}} \quad (\text{B.22})$$

Si l'on décompose l'intégration sur \mathcal{A} en une intégration sur les domaines distincts de la partie matrice $\bar{\mathcal{A}}$ et de la fissure décrit par sa frontière ω , il vient d'après (B.5) et (B.10) :

$$\Sigma = \langle \sigma \rangle_{\bar{\mathcal{A}}} + \frac{1}{2|\mathcal{A}|} \int_{\omega} (\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x})) \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x}))) dx \quad (\text{B.23})$$

Dans l'expression (B.23), le vecteur $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ correspond au vecteur unitaire extérieur au domaine de la fissure, soit $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}$ pour la face ω^+ et $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\mathbf{n}$ pour la face ω^- . Ainsi, cette relation devient :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \langle \sigma \rangle_{\bar{\mathcal{A}}} + \frac{1}{2|\mathcal{A}|} \int_{\omega^+} (\sigma(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \sigma(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) dx \\ &\quad + \frac{1}{2|\mathcal{A}|} \int_{\omega^-} (\sigma(\mathbf{x}) \cdot (-\mathbf{n}) \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \sigma(\mathbf{x}) \cdot (-\mathbf{n})) dx \\ &= \langle \sigma \rangle_{\bar{\mathcal{A}}} \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

On obtient également un autre résultat intéressant en calculant indépendamment la moyenne $\langle \sigma \rangle_{\bar{\mathcal{A}}}$ sur le domaine $\bar{\mathcal{A}}$ de la matrice solide en prenant bien soin de considérer la normale extérieure à $\bar{\mathcal{A}}$, soit $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\mathbf{n}$ pour la face ω^+ et $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}$ pour la face ω^- . L'extension de (B.5) donne alors :

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle_{\bar{\mathcal{A}}} &= \frac{1}{2|\mathcal{A}|} \int_{\partial \bar{\mathcal{A}}} [\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x})) \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x}))] dx \\ &= \frac{1}{2|\mathcal{A}|} \int_{\partial \mathcal{A}} [\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x})) \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x}))] dx \\ &\quad + \frac{1}{2|\mathcal{A}|} \int_{\omega} [\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x})) \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x}))] dx \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

dont le second terme s'annule comme démontré précédemment en (B.24). Précisément, l'intégration du résultat de (B.24) permet donc finalement de relier la contrainte macroscopique Σ à la moyenne des efforts appliqués sur le contour extérieur de \mathcal{A} :

$$\Sigma = \langle \sigma \rangle_{\bar{\mathcal{A}}} = \frac{1}{2|\mathcal{A}|} \int_{\partial \mathcal{A}} [\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x})) \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x}))] dx \quad (\text{B.26})$$

Moyenne des déformations

La déformation macroscopique \mathbf{E} est également définie comme la moyenne spatiale du champ de déformations microscopiques $\boldsymbol{\varepsilon}$ sur le domaine \mathcal{A} :

$$\mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\mathcal{A}} \quad (\text{B.27})$$

Comme précédemment, on décompose l'intégration sur \mathcal{A} en une intégration sur $\bar{\mathcal{A}}$ et ω , d'où :

$$\mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\bar{\mathcal{A}}} + \frac{1}{2|\mathcal{A}|} \int_{\omega} (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x})) \, dx \quad (\text{B.28})$$

Sachant que $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}$ pour la face ω^+ et $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\mathbf{n}$ pour la face ω^- , il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\bar{\mathcal{A}}} + \frac{1}{2|\mathcal{A}|} \int_{\omega^+} (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x})) \, dx \\ &\quad + \frac{1}{2|\mathcal{A}|} \int_{\omega^-} (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes (-\mathbf{n}) + (-\mathbf{n}) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x})) \, dx \\ &= \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\bar{\mathcal{A}}} + \frac{1}{2|\mathcal{A}|} \int_{\omega^+} ([\mathbf{u}(\mathbf{x})] \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes [\mathbf{u}(\mathbf{x})]) \, dx \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Parallèlement, si l'on calcule $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\bar{\mathcal{A}}}$, l'extension de (B.10) avec $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\mathbf{n}$ pour la face ω^+ et $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}$ pour la face ω^- conduit à :

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\bar{\mathcal{A}}} &= \frac{1}{2|\mathcal{A}|} \int_{\partial \bar{\mathcal{A}}} [\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x})] \, dx \\ &= \frac{1}{2|\mathcal{A}|} \int_{\partial \mathcal{A}} [\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x})] \, dx \\ &\quad + \frac{1}{2|\mathcal{A}|} \int_{\omega} [\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x})] \, dx \\ &= \frac{1}{2|\mathcal{A}|} \int_{\partial \mathcal{A}} [\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x})] \, dx \\ &\quad - \frac{1}{2|\mathcal{A}|} \int_{\omega^+} ([\mathbf{u}(\mathbf{x})] \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes [\mathbf{u}(\mathbf{x})]) \, dx \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Ce résultat exprime donc la déformation macroscopique \mathbf{E} comme la moyenne des déplacements sur le contour extérieur de \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\bar{\mathcal{A}}} + \frac{1}{2|\mathcal{A}|} \int_{\omega^+} ([\mathbf{u}(\mathbf{x})] \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes [\mathbf{u}(\mathbf{x})]) \, dx \\ &= \frac{1}{2|\mathcal{A}|} \int_{\partial \mathcal{A}} [\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x})] \, dS \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Moyenne de l'énergie libre

L'énergie spécifique n'existe quant à elle que sur la partie matrice du milieu fissuré, soit :

$$W = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\bar{\mathcal{A}}} \quad (\text{B.32})$$

Comme précédemment, l'extension de (B.16) au cas du domaine $\bar{\mathcal{A}}$ implique alors :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2|\bar{\mathcal{A}}|} \int_{\partial\bar{\mathcal{A}}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx \\ &= \frac{1}{2|\bar{\mathcal{A}}|} \int_{\partial\mathcal{A}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx \\ &\quad + \frac{1}{2|\bar{\mathcal{A}}|} \int_{\omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Sous l'hypothèse par exemple d'une condition aux limites de contrainte homogène $\boldsymbol{\Sigma}$ au contour, il vient :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \frac{1}{2|\bar{\mathcal{A}}|} \int_{\partial\mathcal{A}} [\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x})] \, dx \\ &\quad + \frac{1}{2|\bar{\mathcal{A}}|} \int_{\omega^+} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot (-\mathbf{n}) \, dx \\ &\quad + \frac{1}{2|\bar{\mathcal{A}}|} \int_{\omega^-} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, dx \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

L'introduction de la définition (B.31) de la déformation macroscopique et du saut de déplacement (3.26) donne le résultat démontré notamment par Telega [213] :

$$W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E} - \frac{1}{2|\bar{\mathcal{A}}|} \int_{\omega^+} \llbracket \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rrbracket \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, dx \quad (\text{B.35})$$

Un résultat identique est obtenu avec des conditions aux limites imposées en déplacement à l'aide du résultat (B.26) (voir par exemple Telega [213]).

Bibliographie

- [1] Norme NF EN ISO 527-4 - Détermination des propriétés en traction - Partie 4M : Conditions d'essai pour les composites plastiques renforcés des fibres isotropes ou orthotropes, 1996.
- [2] Norme NF EN ISO 14129 - Détermination de la réponse contrainte-déformation en cisaillement plan, module et résistance compris, par essai de traction à 45°, 1998.
- [3] Norme ISO 1268-11 : Plastiques renforcés de fibres - Méthodes de fabrication de plaques d'essai - Partie 11 : Moulage par injection de BMC et d'autres mélanges à mouler à fibres longues - Plaques de petites dimensions, 2005.
- [4] D. ALLEN, C.E. HARRIS et S.E. GROVES : A thermomechanical constitutive theory for elastic composites with distributed damage - I. Theoretical development / II. Application to matrix cracking in laminated composites. *Int. J. Solids Structures*, 23:1301–1338, 1987.
- [5] O. ALLIX, C. CLUZEL, A. GASSER et P. LADEVÈZE : Modélisation des composites céramique-céramique à différentes échelles. *Rev. Comp. Mater. Avancés*, 3:277–297, 1993.
- [6] O. ALLIX et P. LADEVÈZE : Interlaminar interface modelling for the prediction of delamination. *Comp. Structures*, 22:235–242, 1992.
- [7] O. ALLIX, D. LEVÊQUE et L. PERRET : Identification and forecast of delamination in composite laminates by an interlaminar interface model. *Comp. Sci. Tech.*, 58: 671–678, 1998.
- [8] ALTAIR : www.altairengineering.fr.
- [9] K. ANDRESEN : Strain tensor for large three-dimensional surface deformation of sheet metal from an object grating. *Exp. Mech.*, 39:30–35, 1999.
- [10] S. ANDRIEUX : *Un modèle de matériau microfissuré. Applications aux roches et aux bétons*. Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1983.

- [11] S. ANDRIEUX, Y. BAMBERGER et J.J. MARIGO : Un modèle de matériau microfissuré pour les bétons et les roches. *J. Méc. Theo. Appl.*, 5:471–513, 1986.
- [12] C. ARISTÉGUI : *Anisotropie élastique totale naturelle ou induite*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 1997.
- [13] X. AUBARD : *Modélisation et identification du comportement mécanique des matériaux composites 2D SiC-SiC*. Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1992.
- [14] X. AUBARD : Modelling of the mechanical behaviour of 2-D SiC-SiC composite at a mesoscale. *Comp. Sci. Tech.*, 54:371–378, 1995.
- [15] X. AUBARD, J. LAMON et O. ALLIX : Model of the nonlinear mechanical behavior of 2D SiC-SiC chemical vapor infiltration composites. *J. Am. Ceram. Soc.*, 77:2118–2126, 1994.
- [16] E. AUSSÉDAT-YAHIA : *Comportement et endommagements du composite tissé carbone/PMR15 soumis à des chargements mécaniques et thermiques*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1997.
- [17] L. BABOUT, E. MAIRE, J.Y. BUFFIÈRE et R. FOUGÈRES : Characterization by X-ray computed tomography of decohesion, porosity growth and coalescence in model metal matrix composites. *Acta Mater.*, 49:2055–2063, 2001.
- [18] R. BARGELLINI : *Contribution d'une approche discrète à la modélisation de l'endommagement de matériaux microfissurés*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2006.
- [19] C. BARRET : *Endommagement induit par des fissures ellipsoïdales d'orientations multiples dans des matériaux composites à matrice céramique*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 1999.
- [20] J.F. BARTHÉLÉMY : *Approche micromécanique de la rupture et de la fissuration dans les géomatériaux*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2005.
- [21] S. BASTE : Inelastic behaviour of ceramic-matrix composites. *Comp. Sci. Tech.*, 61:2285–2297, 2001.
- [22] S. BASTE et C. ARISTÉGUI : Induced anisotropy and crack systems orientations of a ceramic matrix composite under off-principal axis loading. *Mech. Mater.*, 29:19–41, 1998.
- [23] S. BASTE et EL BOUAZZAOUI : Cracking orientation and induced anisotropy of a ceramic matrix composite under off-axis loading. *J. Mater. Sci.*, 31:1575–1584, 1996.

- [24] S. BASTE et A. GÉRARD : Endommagement anisotrope des composites à matrice céramique. *C.R. Acad. Sci. Paris Série IIB*, 305:1511–1516, 1987.
- [25] E. BAYRAKTAR, S.D. ANTOLOVICH et C. BATHIAS : New developments in non-destructive controls of the composite materials and applications in manufacturing engineering. *J. Mater. Proc. Tech.*, 206:30–44, 2008.
- [26] Z.P. BAZANT et B.H. OH : Efficient numerical integration on the surface of a sphere. *Z.A.M.M.*, 66:37–49, 1986.
- [27] S. BENMEDAKHENE, M. KENANE et M.L. BENZEGGAGH : Initiation and growth of delamination in glass/epoxy composites subjected to static and dynamic loading by acoustic emission monitoring. *Comp. Sci. Tech.*, 59:201–208, 1999.
- [28] S. BENSaid : *Contribution à la caractérisation et à la modélisation électromagnétique et thermique des matériaux composites anisotropes*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2006.
- [29] Y. BENVENISTE : A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. *Mech. Mater.*, 6:47–157, 1987.
- [30] Y. BERTHAUD, J.M. TORRENTI et C. FOND : Analysis of localization in brittle materials through optical techniques. *Exp. Mech.*, 37:216–220, 1997.
- [31] J.M. BERTHELOT : Transverse cracking and delamination in cross-ply glass-fiber and carbon-fiber reinforced plastic laminates : static and fatigue loading. *Appl. Mech. Rev.*, 56:111–147, 2003.
- [32] J.M. BERTHELOT : *Matériaux composites*. Lavoisier, 2005.
- [33] J.M. BERTHELOT et J.F. Le CORRE : A model for transverse cracking and delamination in cross-ply laminates. *Comp. Sci. Tech.*, 60:1055–1066, 2000.
- [34] M.W. BIEGLER et M.M. MEHRABADI : An energy-based constitutive model for anisotropic solids subject to damage. *Mech. Mater.*, 19:151–164, 1995.
- [35] S. BLASSIAU : *Modélisation des phénomènes microstructuraux au sein d'un composite unidirectionnel carbone-époxy et prédiction de durée de vie : contrôle et qualification de réservoirs bobines*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2005.
- [36] L. BODELOT : *Etude couplée des champs cinématiques et thermiques à l'échelle de la microstructure des matériaux métalliques*. Thèse de doctorat, Université de Lille I, 2008.

- [37] J.L. BODNAR : Contrôle non destructif par techniques infrarouges : principes et exemples d'applications. *In Colloque Contrôles et Mesures Optiques pour l'Industrie CMOI*, Toulouse-Labège, France, 2010.
- [38] J.P. BOEHLER : *Applications of tensor functions in solid mechanics*. Springer Verlag, Wien, 1987.
- [39] C. BOIS : *Mesure et prévision de l'évolution des endommagements dans les composites stratifiés*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille II, 2003.
- [40] M. BORNERT : *Morphologie microstructurale et comportement mécanique : caractérisations expérimentales, approches par bornes et estimations autocohérentes généralisées*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1996.
- [41] M. BORNERT, F. BRÉMAND, P. DOUMALIN, J.C. DUPRÉ, M. FAZZINI, M. GRÉDIAC, F. HILD, S. MISTOU, J. MOLIMARD, J.J ORTEU, L. ROBERT, Y. SURREL, P. VACHER et B. WATRISSE : Assessment of digital image correlation software packages. *Exp. Mech.*, 49:353–370, 2009.
- [42] R.H. BOSSI, K.D. FRIDDELL et A.R. LOWREY : *Non destructive testing of fiber-reinforced plastic composites*, chapitre Computed tomography, pages 201–252. Elsevier Applied Science Publishers, London, 1990.
- [43] R. EL BOUAZZAOUI, S. BASTE et G. CAMUS : Development of damage in a 2D woven C/SiC composite under mechanical loading : II. Ultrasonic characterization. *Comp. Sci. Tech.*, 56:1373–1382, 1996.
- [44] A. BOURSIN, J.L. CHABOCHE et F. ROUDOLFF : Mécanique de l'endommagement avec conditions unilatérales et stockage d'énergie élastique. *C.R. Acad. Sci. Paris Série IIb*, 323:369–376, 1996.
- [45] R. BRAULT, F. ECHEVARRIA, Ch. GARNIER, S. GENOT et S. MISTOU : Etude de l'endommagement à l'impact des composites par tomographie rayons X. *In Colloque Contrôles et Mesures Optiques pour l'Industrie CMOI*, Toulouse-Labège, 2010.
- [46] B. BUDIANSKY et J.R. O'CONNEL : Elastic moduli of a cracked solid. *Int. J. Solids Structures*, 12:81–97, 1976.
- [47] A. BURR, F. HILD et F.A. LECKIE : Continuum description of damage in ceramic-matrix composites. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 16:53–78, 1997.
- [48] G. CAMUS, L. GUILLAUMAT et S. BASTE : Development of damage in a 2D woven C/SiC composite under mechanical loading : I. Mechanical characterization. *Comp. Sci. Tech.*, 56:1363–1372, 1996.

- [49] V. CARMONA : *Etude de l'endommagement de matériaux composites par tomographie X et émission acoustique*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2009.
- [50] I. CAROL, P.C. PRAT et Z.P. BAZANT : New explicit microplane model for concrete : theoretical aspects and numerical implementation. *Int. J. Solids Structures*, 1173-1191, 1992.
- [51] I. CAROL et K. WILLAM : Spurious energy dissipation/generation in stiffness recovery models for elastic degradation and damage. *Int. J. Solids Structures*, 33:2939-2957, 1996.
- [52] O. CAZACU, S. SOARE et D. KONDO : On modeling the interaction between initial and damage-induced anisotropy in transversely isotropic solids. *Math. Mech. Solids*, 12:305-318, 2007.
- [53] V. CAZAJUS, S. MISTOU et M. KARAMA : Iosipescu shear test on carbon/epoxy composites. *In 12th Eur. Conf. Comp. Mater. ECCM12*, 2006.
- [54] J.L. CHABOCHE : Une nouvelle condition unilatérale pour décrire le comportement des matériaux avec dommage anisotrope. *C.R. Acad. Sci. Paris Série IIb*, 314:1395-1401, 1992.
- [55] J.L. CHABOCHE : On the difficulties associated with the active/passive unilateral condition. *Int. J. Damage Mech.*, 1:148-171, 1992.
- [56] J.L. CHABOCHE : Development of CDM for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage. *Int. J. Damage Mech.*, 2:311-329, 1993.
- [57] J.L. CHABOCHE : *Mechanics of heterogeneous materials - Conf. to the memory of Prof. J.P. Boehler*, chapitre Continuum damage mechanics : initial and induce anisotropy in composite materials. 1999.
- [58] J.L. CHABOCHE, P.M. LESNE et J.F. MAIRE : Continuum damage mechanics, anisotropy and damage deactivation for brittle materials like concrete and ceramic composites. *Int. J. Damage Mech.*, 4:5-22, 1995.
- [59] J.L. CHABOCHE, P.M. LESNE et J.F. MAIRE : Un modèle de comportement et d'endommagement conjuguant des variables de dommages tensorielle et scalaires. *C.R. Acad. Sci. Paris Série IIb*, 322:187-193, 1996.
- [60] J.L. CHABOCHE, O. LESNÉ et T. POTTIER : *Damage Mechanics in Engineering Materials*, chapitre Continuum damage mechanics of composites : towards a unified approach, pages 3-26. Elsevier Science, Amsterdam, 1998.

- [61] J.L. CHABOCHE et J.F. MAIRE : New progress in micromechanics-based CDM models and their application to CMC's. *Comp. Sci. Tech.*, 61:2239–2246, 2001.
- [62] J.L. CHABOCHE et J.F. MAIRE : A new micromechanics based CDM model and its application to CMC's. *Aero. Sci. Tech.*, 6:131–145, 2002.
- [63] N. CHALLAMEL, D. HALM et A. DRAGON : On the non-conservativeness of a class of anisotropic damage models with unilateral effects. *C.R. Mécanique*, 334:414–418, 2006.
- [64] S. CHOI et P. SHAH : Measurement of deformations on concrete subjected to compression using image correlation. *Exp. Mech.*, 37:307–313, 1997.
- [65] R.M. CHRISTENSEN : *Mechanics of composite materials*. Wiley & Sons, New-York, 1979.
- [66] A. CHRYSOCHOOS : Infrared thermography, a potential tool for analysing the material behaviour. *Mécanique & Industries*, 3:3–14, 2002.
- [67] F. COLLOMBET, X. LALBIN, J. BONINI, V. MARTIN et J.L. LATAILLADE : Damage criteria for the study of impacted composite laminates. *Comp. Sci. Tech.*, 58:679–686, 1998.
- [68] P. COMPSTON, M. STYLES et S. KALYANASUNDARAM : Low energy impact damage modes in aluminium foam and polymer foam sandwich structures. *J. Sand. Struc. Mater.*, 8:365–379, 2006.
- [69] F. CORMERY et H. WELEMANE : A critical review of some damage models with unilateral effect. *Mech. Res. Comm.*, 29:391–395, 2002.
- [70] F. CORMERY et H. WELEMANE : A stress-based macroscopic approach for micro-cracks unilateral effect. *Comput. Mater. Sci.*, 47:727–738, 2010.
- [71] N. CORNILLE : *Accurate 3D shape and displacement measurement using a Scanning Electron Microscope*. Thèse de doctorat, Université de Caroline du Sud, Columbia, USA and Institut National des Sciences Appliquées, Toulouse, France, 2005.
- [72] S.C. COWIN : The relationship between the elasticity tensor and the fabric tensor. *Mech. Mater.*, 4:137–147, 1985.
- [73] A. CURNIER, Q.C. HE et P. ZYSSET : Conewise linear elastic materials. *J. Elasticity*, 37:1–38, 1995.
- [74] R. DESMORAT : Dissymétrie de comportement élastique anisotrope couplé ou non à l'endommagement. *C.R. Acad. Sci. Paris Série IIB*, 328:445–450, 2000.

- [75] F. DESRUMAUX, F. MERAGHNI et M.L. BENZEGGAGH : Micromechanical modelling coupled to a reliability approach for damage evolution prediction in composite materials. *Appl. Comp. Mater.*, 7:231–250, 2000.
- [76] V. DEUDÉ, L. DORMIEUX, D. KONDO et V. PENSÉE : Propriétés élastiques non linéaires d'un milieu mésolfissuré. *C.R. Mécanique*, 330:587–592, 2002.
- [77] L. DORMIEUX et D. KONDO : Stress-based estimates and bounds of effective elastic properties : the case of cracked media with unilateral effect. *Comp. Mater. Sci.*, 46:173–179, 2009.
- [78] P. DOUMALIN : *Microextensométrie locale par corrélation d'images numériques*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 2000.
- [79] A. DRAGON et D. HALM : Modélisation de l'endommagement par mésolfissuration : comportement unilatéral et anisotropie induite. *C.R. Acad. Sci. Paris Série IIb*, 322:275–282, 1996.
- [80] A. DRAGON et D. HALM : *Damage mechanics - Some modelling challenges*. Inst. Fund. Tech. Research - Polish Academy of Sciences, 2004.
- [81] Y. DUPLESSIS-KERGOMARD : *Etude expérimentale et numérique de la fissuration intralaminare et de l'initiation du délaminage de bord libre dans les structures stratifiées pseudo-tissées*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2007.
- [82] Y.A. DZENIS et J. QIAN : Analysis of microdamage evolution histories in composites. *Int. J. Solids Struct.*, 38:1831–1854, 2001.
- [83] J.D. ESHELBY : The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 241:376–396, 1957.
- [84] A.G. EVANS, J. M. DOMERGUE et E. VAGAGGINI : Methodology for relating the tensile constitutive behavior of ceramic matrix composites to constituent properties. *J. Am. Ceram. Soc.*, 77:1425–1435, 1994.
- [85] A.G. EVANS et F.W. ZOK : Review : the physics and mechanics of fiber-reinforced brittle-matrix composites. *J. Mater. Sci.*, 29:3857–3896, 1994.
- [86] M. FAZZINI : *Développement de méthodes d'intégration des mesures de champs*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2009.
- [87] T.A. FERREIRA et W. RASBAND : The ImageJ user guide. Rapport technique, <http://rsbweb.nih.gov/ij/>, 2010.
- [88] FLIR : Technical specifications - Titanium series. Rapport technique, www.infraredresearchcameras.com, 2010.

- [89] Ph. FORIO : *Comportement thermomécanique et durée de vie d'un composite SiC-SiC à matrice séquencée et autocicatrisante*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 2000.
- [90] D. GARCIA : *Mesure de formes et de champs de déplacements tridimensionnels par stéréo-corrélation d'images*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2001.
- [91] C. GARNIER, M.L. PASTOR, F. EYMA et B. LORRAIN : The detection of aeronautical defects in-situ on composite structures using non destructive testing. *Composite structures*, 93:1328–1336, 2011.
- [92] A. GASSER : *Sur la modélisation du comportement mécanique des composites céramique-céramique à température ambiante*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1994.
- [93] A. GASSER, P. LADEVÈZE et P. PERES : Damage modelling for a laminated ceramic composite. *Mech. Sci. Engng*, A250:249–255, 1998.
- [94] A. GASSER, P. LADEVÈZE et M. POSS : Damage mechanisms of a woven SiC/SiC composite : modelling and identification. *Comp. Sci. Tech.*, 56:779–784, 1996.
- [95] D. GAY : *Matériaux composites*. Hermès, 1991.
- [96] P. GERMAIN, Q.S. NGUYEN et P. SUQUET : Continuum thermodynamics. *J. Appl. Mech.*, 50:1010–1020, 1983.
- [97] C. GOIDESCU : *Projet de Fin d'Etudes : Intégration numérique d'une loi d'endommagement fragile avec effet unilatéral*. Rapport technique, Université Polytechnique de Bucarest - Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes, 2008.
- [98] GOM : Aramis software. <http://www.gom.com/3D-software/aramis-software.html>, 2006.
- [99] C. GRUESCU : *Approche par changement d'échelle de l'endommagement des matériaux anisotropes : Application aux composites à matrice fragile*. Thèse de doctorat, Université de Lille I, 2004.
- [100] C. GRUESCU, V. MONCHIET et D. KONDO : Eshelby tensor for a crack in an orthotropic elastic medium. *C. R. Mécanique*, 333:467–473, 2005.
- [101] M. GRÉDIAC : The use of full-field measurement methods in composite material characterization : interests and limitations. *Composites. Part A*, 35:751–761, 2004.
- [102] L. GUILLAUMAT : *Microfissuration des CMC : relation entre la microstructure et le comportement mécanique*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 1994.

- [103] A.L. GURSON : Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth - Part I : Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. Engng Mater. Tech.*, 99:2–15, 1977.
- [104] A. GÉRARD et S. BASTE : Comportement non linéaire des composites à matrice céramique en cycle de charge-décharge. *C.R. Acad. Sci. Paris Série Ib*, 313:1361–1366, 1991.
- [105] D. HALM et A. DRAGON : A model of anisotropic damage by mesocrack growth ; unilateral effect. *Int. J. Damage Mech.*, 5:384–402, 1996.
- [106] D. HALM, A. DRAGON et Y. CHARLES : A modular damage model for quasi-brittle solids - Interaction between initial and induced anisotropy. *Arch. Appl. Mech.*, 72:498–510, 2002.
- [107] G. HARDY et J. BOLEN : *Non destructive evaluation and quality control*, chapitre Thermal inspection, pages 396–404. ASM International, 1989.
- [108] Z. HASHIN : Analysis of composite materials - Survey. *J. Appl. Mech.*, 50:481–505, 1983.
- [109] Z. HASHIN : The differential scheme and its application to cracked materials. *J. Mech. phys. Solids*, 36:719–734, 1988.
- [110] M. HAYES : Connexions between the moduli for anisotropic elastic materials. *J. Elasticity*, 2, 1972.
- [111] Q.C. HE et A. CURNIER : A more fundamental approach to damaged elastic stress-strain relations. *Int. J. Solids Structures*, 32:1433–1457, 1995.
- [112] R. HILL : A self consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 13:213–222, 1965.
- [113] Ch. HOCHARD, P.A. AUBOURG et J.P. CHARLES : Modelling of the mechanical behaviour of woven-fabric CFRP laminates up to failure. *Comp. Sci. Tech.*, 61:221–230, 2001.
- [114] H. HORII et S. NEMAT-NASSER : Overall moduli of solids with microcracks : load induced anisotropy. *J. Mech. Phys. Solids*, 31:155–171, 1983.
- [115] S. IKOGOU : *Etude expérimentale et modélisation du comportement d'un grès*. Thèse de doctorat, Université de Lille I, 1990.
- [116] J.W. JU : On energy-based coupled elastoplastic damage theories : constitutive modeling and computational aspects. *Int. J. Solids Structures*, 25:803–833, 1989.
- [117] L.M. KACHANOV : Rupture time under creep conditions. *Izv. Acad. Nauk SSSR, Otd. Tekhn. Nauk*, 8:26–31, 1958.

- [118] M. KACHANOV : *Advances in applied mechanics*, chapitre Elastic solids with many cracks and related problems, pages 259–445. Academic Press, New-York, 1993.
- [119] D. KRAJČINOVIC : *Continuum damage mechanics - Theory and applications*, chapitre Micromechanical basis of phenomenological models, pages 195–206. Springer-Verlag, Wien, 1987.
- [120] D. KRAJČINOVIC : *Damage Mechanics*. Elsevier Science, The Netherlands, 1996.
- [121] D. KRAJČINOVIC : Selection of damage parameter - Art or science? *Mech. Mater.*, 28:165–179, 1998.
- [122] D. KRAJČINOVIC : Damage mechanics : accomplishments, trends and needs. *Int. J. Solids Structures*, 37:267–277, 2000.
- [123] D. KRAJČINOVIC, M. BASISTA et D. SUMARAC : *Damage mechanics of composite materials*, chapitre Basic principles, pages 1–51. Elsevier Science, The Netherlands, 1994.
- [124] D. KRAJČINOVIC et S. MASTILOVIC : Some fundamental issues of damage mechanics. *Mech. Mater.*, 21:217–230, 1995.
- [125] Y.W. KWON et J.M. BERNER : Micromechanics model for damage and failure analyses of laminated fibrous composites. *Engng Fract. Mech.*, 52:231–424, 1995.
- [126] P. LADEVÈZE : Sur une théorie de l'endommagement anisotrope. Rapport technique n°34, LMT-Cachan, 1983.
- [127] P. LADEVÈZE : *Failure criteria of structured media*, chapitre On an anisotropic damage theory. Balkema, 1993.
- [128] P. LADEVÈZE, O. ALLIX, J.F. DEÛ et D. LÉVÊQUE : A mesomodel for localisation and damage computation in laminates. *Comput. Methods Appl. Engng*, 183:105–122, 2000.
- [129] P. LADEVÈZE et E. Le DANTEC : Damage modelling of the elementary ply for laminated composites. *Comp. Sci. Tech.*, 43:257–267, 1992.
- [130] P. LADEVÈZE, A. GASSER et O. ALLIX : Damage mechanisms modeling for ceramic composites. *J. Engng Mater. Tech.*, 116:331–336, 1994.
- [131] P. LADEVÈZE, G. LUBINEAU, D. VIOLEAU et D. MARSAL : A computational damage micromodel for laminate composites. In T. SADOWSKI, éditeur : *IUTAM Symp. Multiscale Model. Damage Fract. Proc. Comp. Mater.*, Netherlands, 2006. Springer.
- [132] K.Y. LAM et J.M. ZHANG : On damage effect tensors of anisotropic solids. *Z. angew. Math. Mech.*, 75:51–59, 1995.

- [133] J. LAMON : Interfaces and interfacial mechanics : influence on the mechanical behaviour of ceramic matrix composites (CMC). *J. Phys. IV*, 3:1607–1616, 1993.
- [134] J. LAMON : A micromechanics-based approach to the mechanical behavior of brittle-matrix composites. *Comp. Sci. Tech.*, 61:2259–2272, 2001.
- [135] M. LANNUZEL : *Mise en oeuvre de matériaux composites dans l'industrie aéronautique*. Institut Catholique des Arts et Métiers, 2006.
- [136] L. LARSSON, M. SJODAHL et F. THUVANDER : Microscopic 3D displacement field measurements using digital speckle photography. *Opt. Lasers Engng*, 41:767–777, 2004.
- [137] N. LAWS : The determination of stress and strain concentrations at an ellipsoidal inclusion in an anisotropic material. *J. Elasticity*, 7:91–97, 1977.
- [138] N. LAWS : A note on interaction energies associated with cracks in anisotropic media. *Phil. Mag.*, 36:367–372, 1977.
- [139] N. LAWS : Stiffness changes in unidirectional composites caused by crack systems. *Mech. Mater.*, 2:123–137, 1983.
- [140] N. LAWS : A note on penny-shaped cracks in transversely isotropic materials. *Mech. Mater.*, 4:209–212, 1985.
- [141] D. LECOMPTE, J. VANTOMME et H. SOL : Crack detection in a concrete beam using two different camera techniques. *Struc. Health Monit.*, 5:59–68, 2006.
- [142] D. LEGUILLON et E. SANCHEZ-PALENCIA : On the behaviour of a cracked elastic body with (or without) friction. *J. Méc. Théo. Appli.*, 1:195–209, 1982.
- [143] S.G. LEKHNITSKII : Stresses in an infinitely large anisotropic plate which is weakened by an elliptical hole. *Dokl. Akad. Nauk - SSSR*, 4:25–45, 1936.
- [144] S.G. LEKHNITSKII : *Theory of Elasticity of Anisotropic Elastic Body*. OGIZ (in russian) - MIR Publishers (in english), 1961.
- [145] J. LEMAITRE et J.L. CHABOCHE : *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 1988.
- [146] N. LENOIR : *Comportement mécanique et rupture dans les roches argileuses étudiés par micro-tomographie à rayons X*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble I, 2006.
- [147] S. LI : *Introduction to micromechanics and nanomechanics, Lecture notes*. Université de Berkeley, 2000.
- [148] V.A. LUBARDA et D. KRAJČINOVIC : Damage tensors and the crack density distribution. *Int. J. Solids Structures*, 30:2859–2877, 1993.

- [149] M.P. LUONG : Infrared thermography scanning of fatigue in metals. *Nuclear Engng Des.*, 1995:363–376, 1995.
- [150] E. MAIRE, J.Y. BUFFIÈRE, L. SALVO, J.J. BLANDIN, W. LUDWIG et J.M. LETANG : On the application of X-ray tomography in the field of materials science. *Adv. Engng. Sci.*, 3:539–546, 2001.
- [151] E. MAIRE, V. CARMONA, J. COURBON et W. LUDWIG : Fast X-ray tomography and acoustic emission study of damage in metals during continuous tensile tests. *Acta Mater.*, 55:6806–6815, 2007.
- [152] E. MAIRE, L. SALVO, P. CLOETENS et M. Di MICHIEL : Tomographie à rayons X appliquée à l'étude des matériaux. Rapport technique, Techniques de l'Ingénieur. IN 20, 2004.
- [153] J.F. MAIRE et J.L. CHABOCHE : A new formulation of continuum damage mechanics (CDM) for composite materials. *Aero. Sci. Tech.*, 4:247–257, 1997.
- [154] J.F. MAIRE et P.M. LESNE : A damage model for ceramic matrix composites. *Aero. Sci. Tech.*, 4:259–266, 1997.
- [155] J.F. MAIRE et P.M. LESNE : An explicit damage model for the design of composites structures. *Comp. Sci. Tech.*, 58:773–778, 1998.
- [156] X.P.V. MALDAGUE : *Theory and practice of infrared technology for nondestructive testing*. Wiley-Interscience, 2001.
- [157] J.J. MARIGO : Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique. *C.R. Acad. Sci. Paris Série II*, 19:33–36, 1981.
- [158] J.J. MARIGO : Modelling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoids. *Engng Fract. Mech.*, 21:861–874, 1985.
- [159] J.J. MARIGO : Constitutive relations in plasticity, damage and fracture mechanics based on a work property. *Nuclear Engng Design*, 114:249–272, 1989.
- [160] D.B. MARSHALL, B.N. COX et A.G. EVANS : The mechanics of matrix cracking in brittle-matrix fiber composites. *Acta Metall.*, 33:2013–2021, 1985.
- [161] F.L. MATTHEWS et R.D. RAWLINGS : *Composite materials : Engineering and science*. Woodhead Publishing, 1999.
- [162] A. MATZENMILLER et J.L. SACKMAN : On damage induced anisotropy for fiber composites. *Int. J. Damage Mech.*, 3:71–86, 1994.
- [163] C. MAUGE et M. KACHANOV : Effective elastic properties of anisotropic materials with arbitrarily oriented cracks. *J. Mech. Phys. Solids*, 42:1–24, 1994.

- [164] S. MISTOU, M. KARAMA, B. DESMARS, P. PERES, E. PIRON et P. HEUILLET : Application de la méthode de stéréocorrélation d'images à la caractérisation des élastomères en grande déformations. *Photoméc.*, 4:147–166, 2004.
- [165] Y. MIZUTANI, K. NAGASHIMA, M. TAKEMOTO et K. ONO : Fracture mechanism characterization of cross-ply carbon-fiber composites using acoustic emission analysis. *NDT&E Int.*, 33:101–110, 2000.
- [166] A.J. MOFFAT, P. WRIGHT, J.Y. BUFFIÈRE, I. SINCLAIR et S.M. SPEARING : Micromechanisms of damage in 0° splits in a (90/0)s composite material using synchrotron radiation computed tomography. *Scripta Mater.*, 59:1043–1046, 2008.
- [167] J.M. MORVAN : *Comportement anélastique des matériaux composites à matrice céramique*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 1997.
- [168] J.M. MORVAN et S. BASTE : Effect of the opening/closure of microcracks on the nonlinear behavior of a 2D C-SiC composite under cyclic loading. *Int. J. Damage Mech.*, 7:381–402, 1998.
- [169] N.I. MUSKHELISHVILI : *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Izd. Akad. Nauk. SSSR, 1949.
- [170] H. NECHAD : *Evaluation de l'endommagement et de la rupture de matériaux hétérogènes par ultrasons et émission acoustique : Estimation de la durée de vie restante*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2004.
- [171] S. NEMAT-NASSER et M. HORI : *Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials*, volume 37 de *Applied mathematics and mechanics*. Elsevier Science, Amsterdam, 1993.
- [172] J.J. ORTEU : 3-D computer vision in experimental mechanics. *Opt. Lasers Engng*, 47:282–291, 2009.
- [173] T. OSADA, A. NAKAI et H. HAMADA : Initial fracture behavior of satin woven fabric composites. *Comp. Struct.*, 61:333–339, 2003.
- [174] G.M. OWOLABI et M.N.K. SINGH : A comparison between two analytical models that approximate notch-root elastic-plastic strain-stress components in two-phase, particle-reinforced, metal matrix composites under multiaxial cyclic loading : experiments. *Int. J. Fatigue*, 28:918–925, 2006.
- [175] D. PAJANI : Thermographie. Principes et mesures. R 2 740. Rapport technique, Techniques de l'Ingénieur, 2001.

- [176] D. PAJANI et L. AUDAIRE : Thermographie. Technologies et applications. R 2 741. Rapport technique, Techniques de l'Ingénieur, 2001.
- [177] J.M. PARK, D.S. KIM et S.R. KIM : Interfacial properties and micro-failure degradation mechanisms of bioabsorbable fibers/poly-L-lactide composites using micromechanical test and nondestructive acoustic emission. *Comp. Sci. Tech.*, 63:403–419, 2003.
- [178] M.L. PASTOR : *Contribution à l'étude en fatigue de structures en aluminium renforcées par des patches composites*. Thèse de doctorat, Université de Clermont Ferrand II, 2007.
- [179] V. PENSÉE : *Contribution de la micromécanique à la modélisation tridimensionnelle de l'endommagement par mésosfissuration*. Thèse de doctorat, Université de Lille I, 2002.
- [180] V. PENSÉE et D. KONDO : Une analyse micromécanique 3-D de l'endommagement par microfissuration. *C.R. Acad. Sci. Paris Série Iib*, 329:271–276, 2001.
- [181] V. PENSÉE et D. KONDO : Micromechanics of anisotropic brittle damage : comparative analysis between a stress based and strain based formulation. *Mech. Mater.*, 35:747–761, 2003.
- [182] V. PENSÉE, D. KONDO et L. DORMIEUX : Three-dimensional micromechanical approach of brittle anisotropic damage and related issues. *J. Engng Mech.*, 128:889–897, 2002.
- [183] D. PERREUX et C. OYTANA : Continuum damage mechanics for microcracked composites. *Comp. Engng*, 3:115–122, 1993.
- [184] O. PLEKHOV, T. PALIN-LUC, N. SAINTIER, S. UVAROV et O. NAIMARK : Fatigue crack initiation and growth in a 35CrMo4 steel investigated by infrared thermography. *Fatigue Fract. Engng Mater. Struc.*, 28:169–178, 2004.
- [185] P. PONTE-CASTANEDA et J.R. WILLIS : The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *J. Mech. Phys. Solids*, 43(12):1919–1951, 1995.
- [186] D. PURSLOW : Some fundamental aspects of composites fractography. *Composites*, 12:241–247, 1981.
- [187] J.N. PÉRIÉ : *Méso-modélisation des mécanismes d'endommagement dans les composites carbone-carbone à texture multidirectionnelle*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2000.

- [188] E. PÉRONNET, F. EYMA, M.L. PASTOR et H. WELEMANE : Caractérisation et comparaison des limites de détection de techniques de contrôle non destructif : méthodes ultrasonores et méthodes optiques. *In Colloque Contrôles et Mesures Optiques pour l'Industrie CMOI*, Toulouse-Labège, France, 2010.
- [189] S. RAMTANI : *Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral*. Thèse de génie civil, Université de Paris VI, Cachan, 1990.
- [190] K.L. REIFSNIDER et R.S. WILLIAMS : Determination of fatigue-related heat emission in composite materials. *Exp. Mech.*, 14:479–485, 1974.
- [191] H. W. REINHARDT : Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete. *HERON*, 1:42, 1984.
- [192] J. RENARD et A. THIONNET : Une loi d'évolution de la fissuration transverse dans les composites stratifiés soumis à un chargement quasi statique. *Rev. Comp. Mater. Avancés*, 1:71–93, 1991.
- [193] J. RENARD et A. THIONNET : Damage in composites : from physical mechanisms to modelling. *Comp. Sci. Tech.*, 66:642–646, 2006.
- [194] L. ROBERT, F. NAZARET, T. CUTARD et J.J. ORTEU : Use of 3-D digital image correlation to characterize the mechanical behavior of a fiber reinforced refractory castable. *Exp. Mech.*, 47:761–773, 2007.
- [195] T. SAKAGAMI et S. KUBO : Applications of pulse heating thermography and lock-in thermography to quantitative nondestructive evaluations. *Inf. Phys. Tech.*, 43:211–218, 2002.
- [196] L. SALVO, P. CLOETENS, E. MAIRE, S. ZABLER, J.J. BLANDIN, J.Y. BUFFIÈRE, W. LUDWIG, E. BOLLER, D. BELLET et C. JOSSEROND : X-ray micro-tomography : an attractive characterization technique in materials science. *Nuclear Instr. Meth. Phys. Res. B*, 200:273–286, 2003.
- [197] G.N. SAVIN : *Stress concentration around holes*. Pergamon Press, 1960.
- [198] T. SCHMIDT, J. TYSON et K. GALANULIS : Full-field dynamic displacement and strain measurement using advanced 3D image correlation photogrammetry. *Exp. Tech.*, 27:47–50, 2003.
- [199] M. SIBAI, L. DORMIEUX et D. KONDO : Effets de la microfissuration en poroélasticité des roches : étude expérimentale et analyse théorique. *In XVI Congrès Français de Mécanique, France*, 2003.
- [200] SIEMENS : La performance en scanographie. SOMATOM sensation.

- [201] G.C. SIH, P.C. PARIS et G.R. IRWIN : On cracks in rectilinear anisotropic bodies. *Int. J. Fract.*, 1:189–203, 1965.
- [202] O. SIRON et J. LAMON : Damage and failure mechanisms of a 3D carbon-carbon composite under uniaxial tensile and shear loads. *Acta Mater.*, 46:6631–6643, 1998.
- [203] A.J.M. SPENCER : *Continuum theory of the mechanics of fibre-reinforced composites*, chapitre Constitutive theory for strongly anisotropic solids, pages 1–32. Springer - CISM, 1984.
- [204] S.M. SPIESSBERGER, K. HUMER, E.K. TSCHEGG, H.W. WEBER et H. GERSTENBERG : Reactor irradiation effects on the ultimate tensile and the interlaminar shear strength of carbon fibre reinforced epoxies at 77 K. *Cryogenics*, 38:79–83, 1998.
- [205] R. STEINBERGER, T.I. VALADAS LEITAO, E. LADSTÄTTER, G. PINTER, W. BILLINGER et R.W. LANG : Infrared thermographic techniques for non-destructive damage characterization of carbon fibre reinforced polymers during tensile fatigue testing. *Int. J. Fatigue*, 28:1340–1347, 2006.
- [206] P. SUQUET : *Plasticité et homogénéisation*. Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1982.
- [207] M.A. SUTTON, S.R. MCNEILL, J.D. HELM et Y.J. CHAO : Advances in two-dimensional and three-dimensional computer vision. *Photomech. Topics Appl. Phys.*, 77:323–372, 2000.
- [208] G. SWOBODA et Q. YANG : An energy-based damage model of geomaterials - I. Formulation and numerical results. *Int. J. Solids Structures*, 36:1719–1734, 1999.
- [209] R. TALREJA : A continuum mechanics characterization of damage in composite materials. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 399:195–216, 1985.
- [210] R. TALREJA : Transverse cracking and stiffness reduction in composite laminates. *J. Comp. Mater.*, 19:355–375, 1985.
- [211] R. TALREJA : *Yielding, damage and failure of anisotropic solids*, chapitre Internal variable damage mechanics of composite materials. Mech. Engng Pub., London, 1987.
- [212] R. TALREJA : Continuum modelling of damage in ceramic matrix composites. *Mech. Mater.*, 12:165–180, 1991.
- [213] J.J. TELEGA : Homogenization of fissured elastic solids in the presence of unilateral conditions and friction. *Comput. Mech.*, 6:109–127, 1990.
- [214] C. THIERY et J.L. GERSTENMAYER : Tomographie à rayons X. Rapport technique, Techniques de l'Ingénieur. P 950, 2002.

- [215] A. THIONNET : A model for the recovery of thermomechanical properties in strongly anisotropic damaged materials. *J. Comp. Mater.*, 35:731–750, 2001.
- [216] A. THIONNET et J. RENARD : Meso-macro approach to transverse cracking in laminated composites using Talreja’s model. *Comp. Engng*, 3:851–871, 1993.
- [217] A. THIONNET et J. RENARD : Modelling unilateral damage effect in strongly anisotropic materials by the introduction of the loading mode in damage mechanics. *Int. J. Solids Structures*, 36:4269–4287, 1999.
- [218] D. TIKHOMIROV, R. NIEKAMP et E. STEIN : On three-dimensional microcrack density distribution. *Z. Angew. Math. Mech.*, 81:3–16, 2001.
- [219] C.C. TSAO et H. HOCHENG : Computerized tomography and C-scan for measuring delamination in the drilling of composite materials using various drills. *Int. J. Mach. Tools Manuf.*, 45:1282–1287, 2005.
- [220] I. TSUKROV et M. KACHANOV : Effective moduli of an anisotropic material with elliptical holes of arbitrary orientational distribution. *Int. J. Solids Structures*, 37: 5919–5941, 2000.
- [221] A.T. VU : *Endommagement de stratifiés aéronautiques à fibres de carbone et matrice polymère soumis à des chargements monotones ou cycliques à plusieurs températures - Essais et modélisation*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d’Aérotechnique, 2009.
- [222] B. WATRISSE : *Etude cinématique de localisation dans les aciers par intercorrélation d’images de granularité*. Thèse de doctorat, Université de Montpellier II, 1999.
- [223] T. WEHBE : *Etude des vibrations de pièce mince durant l’usinage par stéréo corrélation d’images*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2010.
- [224] H. WELEMANE : *Une modélisation des matériaux microfissurés - Application aux roches et aux bétons*. Thèse de doctorat, Université de Lille I, 2002.
- [225] H. WELEMANE et F. CORMERY : Some remarks on the damage unilateral effect modelling for microcracked materials. *Int. J. Damage Mech.*, 11:65–86, 2002.
- [226] H. WELEMANE et F. CORMERY : An alternative 3D model for damage induced anisotropy and unilateral effect in microcracked materials. *J. Phys. IV*, 105:329–336, 2003.
- [227] H. WELEMANE et C. GOIDESCU : Isotropic brittle damage and unilateral effect. *C.R. Mécanique*, 338:271–276, 2010.

-
- [228] M. WEVERS : Listening to the sound of materials : acoustic emission for the analysis of material behaviour. *NDT&E Int.*, 30:99–106, 1997.
- [229] A. ZAOUÏ : *Matériaux hétérogènes et composites*. Ecole Polytechnique, 1998.
- [230] A. ZAOUÏ : Continuum micromechanics : Survey. *J. Engng. Mech.*, 128:808–816, 2002.
- [231] Q. ZHU : *Applications des approches d’homogénéisation à la modélisation tridimensionnelle de l’endommagement des matériaux quasi fragiles : formulations, validations et implémentations numériques*. Thèse de doctorat, Université de Lille I, 2006.
- [232] Q. ZHU, D. KONDO, J.F. SHAO et V. PENSÉE : Micromechanical modelling of anisotropic damage in brittle rocks and application. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 45:467–477, 2008.

Résumé

Ce travail porte sur l'endommagement des matériaux composites stratifiés utilisés notamment pour la réalisation de pièces structurales minces. La dégradation de ces matériaux induite par la création et le développement de surfaces de décohésion internes est abordée sous deux angles. Une campagne expérimentale a tout d'abord été menée sur des stratifiés en carbone-époxy réalisés par infusion de résine liquide et sollicités en traction uniaxiale. Cette étude propose une analyse originale à l'aide de trois techniques optiques permettant une caractérisation de l'endommagement par mesures de champs : cinématiques (par stéréo-corrélation d'images), thermiques (par thermographie infrarouge) et densimétriques (par tomographie à rayons X). Le second volet du travail concerne la modélisation de la microfissuration dans le contexte d'une anisotropie initiale. A cette fin, une homogénéisation bidimensionnelle de milieux orthotropes fissurés permet la prise en compte de défauts d'orientation arbitraire et des effets unilatéraux (ouverture-fermeture des microfissures) au sein d'une formulation énergétique en déformation. Sur cette base, un modèle de comportement est proposé dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles avec variables internes. Des simulations numériques permettent de démontrer les capacités prédictives de la formulation, en particulier la représentation du comportement non linéaire de ces matériaux, l'interaction entre les anisotropies initiale et induite et la restitution des propriétés élastiques lors de la fermeture de défauts.

Mots clés : matériaux composites, endommagement, mesures de champs, modélisation micromécanique, anisotropie, effet unilatéral

Abstract

This work deals with the damage of laminated composite materials used in particular for the production of thin structural parts. The degradation of these materials induced by the creation and growth of internal microcracks is considered from two angles. An experimental campaign was first conducted on carbon-epoxy laminates made by liquid resin infusion and loaded in uniaxial tension. This study proposes an original analysis using three advanced optical techniques that allow the damage characterization through full-field measurements : kinematic (with stereo-image correlation), thermal (with infrared thermography) and density (with X-ray tomography). The second part of the work concerns the modeling of microcracking in the context of initial anisotropy. To this end, a two-dimensional homogenization of orthotropic cracked media allows consideration of arbitrary orientation of defects and unilateral effects (opening and closing of microcracks) within a strain energetic formulation. On this basis, a constitutive model is proposed in the framework of thermodynamics of irreversible processes with internal variables. Numerical simulations demonstrate the predictive capabilities of the formulation, in particular the representation of the nonlinear behavior of these materials, the interaction between initial and induced anisotropies and the recovery of elastic properties at the closure of microdefects.

Key words : composite materials, damage, full-field measurements, micromechanical modelling, anisotropy, unilateral effect