

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Teorema del Viriale e applicazioni astrofisiche

Tesi di laurea

Presentata da:
Federica Giannetti

Relatore:
Chiar.mo Prof. Daniele Dallacasa

Sessione II
Anno accademico 2015-2016

Sommario

In questo elaborato ci proponiamo di ricavare e discutere, in maniera il più possibile rigorosa, il teorema del viriale, sia nella sua forma scalare che tensoriale, e di presentare alcune delle sue numerose applicazioni in Astrofisica. Data la vastità dell'argomento e la limitatezza dello spazio a disposizione, saremo costretti a ripercorrere solo in parte le interessanti derivazioni matematiche dei risultati che incontreremo. Tuttavia, laddove lo riterremo necessario alla comprensione, inseriremo in nota tracce delle dimostrazioni. Dopo una breve introduzione all'argomento, il primo capitolo è dedicato alla teoria su cui è basato il teorema del viriale. Prima di passare alla breve discussione delle sue applicazioni, ci sembra utile accennare al concetto del teorema del viriale in media temporale, mettendone in evidenza gli aspetti che lo differenziano dal teorema del viriale cui questo elaborato è dedicato.

Indice

1	Derivazione teorica del Teorema del Viriale	2
1.1	Introduzione	2
1.2	Scopo della Dinamica Stellare	2
1.3	Il problema degli N corpi	3
1.4	Il tempo di rilassamento a due corpi	4
1.5	L'equazione non collisionale di Boltzmann (CBE)	6
1.6	Le equazioni di Jeans	7
1.7	Il Teorema del Viriale	9
1.8	Il Teorema del Viriale in media temporale	10
2	Applicazioni Astrofisiche	13
2.1	Sistemi autogravitanti	13
2.1.1	Il piano viriale	13
2.1.2	Sistemi autogravitanti e capacità termica	14
2.1.3	Massa di Jeans	15
2.1.4	Collasso di una nube	16
2.2	Stima della massa delle galassie ellittiche	17
	Bibliografia	18

Capitolo 1

Derivazione teorica del Teorema del Viriale

1.1 Introduzione

Come la quasi totalità delle idee fisiche, anche il concetto di “viriale” ha una storia antica, che possiamo far risalire agli ultimi anni del 1800, quando Clausius ne introdusse il nome. Ma, sebbene estremamente affascinante, preferiamo non soffermarci sullo sviluppo storico di questi concetti, bensì sul percorso logico che ci permetterà di capire come oggi il teorema del viriale appare, quali sono le idee su cui è fondato e cosa lo rende uno strumento di grande importanza nel campo dell’Astrofisica.

1.2 Scopo della Dinamica Stellare

Per capire da dove e come il teorema del viriale nasce è necessario ripercorrere brevemente lo scopo della disciplina chiamata Dinamica Stellare. L’obbiettivo della Dinamica Stellare è *ottenere una comprensione qualitativa della **struttura** e dell’**evoluzione** dei sistemi stellari (per esempio ammassi globulari, galassie, ammassi di galassie) e sviluppare **metodi matematici** capaci di predizioni quantitative*. Il problema che la Dinamica Stellare si trova a dover affrontare è forse il più famoso problema di tutta la Fisica Matematica: il **problema degli N corpi**. Purtroppo, come è ben noto, il problema degli N corpi non è risolubile, ovvero non è possibile ottenere la soluzione generale *come intersezione geometrica di sottovarietà nello spazio delle fasi*. Proprio questa sua intrinseca complessità lo rende particolarmente interessante.

1.3 Il problema degli N corpi

Per quanto detto fino ad ora risulta necessario escogitare dei metodi che permettano di estrarre informazioni dal sistema *senza risolverlo effettivamente*. Una descrizione completa del problema comporterebbe la conoscenza di $6N$ variabili nello spazio delle fasi. Supponiamo, però, di poter ridurre il problema a \mathfrak{R}^6 : in questo caso avremmo ridotto il problema di N corpi al moto di una *singola* particella che si muove nell'usuale spazio 3-dimensionale e il problema sarebbe enormemente semplificato. Sotto particolari condizioni, una simile riduzione è effettivamente legittima. Entriamo così nel campo dell'approccio *a modelli* della Dinamica Stellare.

Sostituiamo la distribuzione *discreta* (quindi discontinua) delle N particelle massive in R^3 con una *omogenea* (e quindi continua) distribuzione di densità, che chiamiamo $\rho(\mathbf{x}; t)$. Tale distribuzione di densità ρ , supposta essere una descrizione soddisfacente del vero sistema “granulare” di N corpi, servirà come *modello continuo* per il sistema originale. Un potenziale “liscio” (o *smooth*, usando un termine inglese) ϕ , naturalmente associato a ρ attraverso l'equazione di Poisson $\Delta\phi = 4\pi G\rho$, è dato da

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -G \int \frac{\rho(\boldsymbol{\xi}; t) d^3\boldsymbol{\xi}}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|}. \quad (1.3.1)$$

Il problema principale che viene posto dal presente approccio è che nel sistema reale ogni particella si muove sotto l'azione del *vero* potenziale, che chiamiamo ϕ_{true} e che per una singola particella i è dato da

$$\phi_{true} = -G \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j}{\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\|}.$$

Il problema può essere riassunto in questo modo: quanto grande è la differenza tra l'orbita descritta da una data particella sotto l'influenza del campo di forze derivato da ϕ rispetto all'orbita vera descritta da ϕ_{true} ? O, riformulando il problema, dato il fatto che $\phi_{true} = \phi + (\phi_{true} - \phi)$, quanto tempo occorrerà al termine di granularità $(\phi_{true} - \phi)$ per cambiare significativamente l'orbita descritta da ciascuna particella nel potenziale omogeneo ϕ ? L'*esatta* risposta presumerebbe la conoscenza di entrambe le orbite ma questo è proprio quello che vorremmo evitare. L'approccio della Dinamica Stellare a questo problema ci permetterà di stimare un tempo scala che definisce le condizioni sotto le quali la descrizione con il potenziale omogeneo ϕ è fisicamente ragionevole, in un generico sistema di N corpi. Prima di procedere accenniamo alla fondamentale definizione di **funzione di distribuzione**(DF). La funzione di distribuzione $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ di un sistema di N corpi è una funzione non negativa $f : \gamma \mapsto \mathfrak{R}^+ \cup 0$ definita dalla proprietà che

$$\Delta M(\Delta\mathbf{x}\Delta\mathbf{v}; t) := \int_{\Delta\mathbf{x}\Delta\mathbf{v}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v} \quad (1.3.2)$$

sia la massa totale delle particelle contenute al tempo t nel volume 6-dimensionale $\Delta\mathbf{x}\Delta\mathbf{v} \subseteq \gamma$. Ovviamente

$$\Delta M(\gamma; t) = \int_{\gamma} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v} = M. \quad (1.3.3)$$

Vediamo adesso come la funzione di distribuzione si presenta nel caso di una distribuzione *smooth* di densità ρ : essa è ottenuta dall'eq. (1.3.3) con la condizione che

$$\rho(\mathbf{x}; t) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}. \quad (1.3.4)$$

1.4 Il tempo di rilassamento a due corpi

Il tempo scala cui abbiamo accennato in precedenza è chiamato **tempo di rilassamento**. Si può dire che esso sia una stima del tempo oltre il quale le approssimazioni continue non possono più essere considerate valide. Il tempo di rilassamento è basato su due assunzioni:

1. Tutti gli incontri tra le particelle sono trattati come *indipendenti*, cioè l'effetto di ogni incontro è semplicemente *sommato* a quello degli altri.
2. Tutti gli incontri tra le particelle sono trattati come *incontri iperbolici a 2 corpi*.

Per questo motivo il risultato che otterremo è chiamato tempo di rilassamento **a 2 corpi** ed indicato con t_{2b} . Diamo ora le linee generali della sua derivazione. Supponiamo di avere al tempo $t = 0$ un sistema di N corpi di massa totale M , formato da N particelle di massa m_f , in un sistema di riferimento inerziale S_0 . Esso è descritto dalla funzione di distribuzione omogenea e isotropa nelle coordinate spaziali e solo isotropa nelle velocità $f(\mathbf{x}_f, \mathbf{v}_f) = n_f g(|\mathbf{v}_f|)$. In più supponiamo che una massa di “test” m_t venga posta nel sistema al tempo $t_0 = 0$ con una velocità \mathbf{v}_t . Lo scopo è ricavare il tempo necessario affinché le interazioni gravitazionali con le particelle del sistema modifichino l'energia cinetica di m_t di una quantità pari a quella che aveva al tempo t_0 . La trattazione, che qui siamo costretti a omettere per ragioni di spazio, usa l'approccio della teoria cinetica in approssimazione di Born (o approssimazione impulsiva). Ciò che si sta cercando ha a che fare con l'energia cinetica della particella di test, in particolare è il coefficiente di diffusione dell'energia cinetica¹. Volendo riassumere in termini più formali quanto discusso finora, il nostro intento è trovare una *stima in approssimazione impulsiva nell'ambito della teoria cinetica del coefficiente di diffusione dell'energia cinetica*.

¹Specifichiamo che sono possibili approcci che non si focalizzano sull'energia cinetica ma su altre proprietà, per esempio sull'angolo di deviazione dell'orbita; tutte queste trattazioni portano naturalmente allo stesso risultato.

Riportiamo di seguito l'espressione del tempo di rilassamento a due corpi:

$$t_{2b} = \frac{\|v_t\|^2}{8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln \Lambda \psi(\|v_t\|)}, \quad (1.4.5)$$

dove $\psi(\|v_t\|)$ ha la forma di un potenziale² e $\ln \Lambda$ è il cosiddetto logaritmo di Coulomb³. Il tempo di rilassamento è la chiave di una fondamentale distinzione operata sui sistemi fisici: se un sistema ha un'età minore del proprio tempo di rilassamento, allora è possibile considerare trascurabili gli effetti cumulativi degli incontri e il sistema gravitazionale si dice essere in *regime non collisionale*, in caso contrario esso è in *regime collisionale*.

Risulta che, per un sistema astrofisico, una stima del tempo di rilassamento in unità del tempo di attraversamento⁴ t_{cross} è

$$\frac{t_{2b}}{t_{cross}} = \frac{0.1N}{\ln N}, \quad (1.4.6)$$

dove N conserva il suo significato di numero di elementi del sistema. Se proviamo a valutare questa espressione per alcuni sistemi astrofisici scopriamo che una tipica galassia ellittica, con $N \simeq 10^{11}$ e $t_{cross} \simeq 2 \times 10^8$ anni, risulta avere un tempo di rilassamento a due corpi dell'ordine di 10^{6-7} miliardi di anni: le galassie ellittiche sono essenzialmente *sistemi non collisionali* su tempi scala cosmologici. Al contrario, per gli ammassi globulari, dove $N \simeq 10^6$ e $t_{cross} \simeq 10^6$ anni, $t_{2b} \simeq 5 \times 10^9$ anni. Per questi sistemi ci si aspetta che gli effetti cumulativi degli incontri a 2 corpi siano significativi su tempi scala più brevi della loro età.

²Chiamiamo con ψ il risultato dell'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{gd^3\mathbf{v}_f}{\|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\|}$$

che compare nella derivazione del tempo di rilassamento.

³Il logaritmo di Coulomb deriva dal seguente integrale:

$$\int_0^\infty \frac{db}{b}$$

dove b è chiamato parametro di impatto ed è estremamente importante perchè lo si ritrova nell'espressione del momento angolare baricentrico della coppia di corpi interagenti con urto iperbolico. La discussione che si potrebbe fare su questo integrale sarebbe molto profonda. Qui ci limitiamo a far notare che questo integrale diverge sia a 0 che ad ∞ ; la prima divergenza deriva semplicemente dal fatto che la trattazione che lo ha prodotto è valida per $b \rightarrow \infty$ e, per questo, scomparirebbe in una discussione più precisa, mentre la divergenza ad ∞ , chiamata divergenza infrarossa, non è rigorosamente eliminabile data la nostra assunzione di distribuzione di materia infinita e omogenea. Sottolineiamo che quanto sopra accennato non è che l'embrione di un ragionamento molto potente contro l'assunzione che il nostro Universo sia infinito ed omogeneo.

⁴Questo tempo è una stima del tempo che impiega un elemento del sistema per attraversarlo. Esso si ricava dalle dimensioni del sistema e dalla velocità caratteristica dei suoi componenti. Questo tempo risulta essere l'unità naturale in base a cui valutare il tempo di rilassamento.

Dall'eq. (1.4.5) possiamo ricavare un interessante risultato: considerando una massa *fissata*, il tempo di rilassamento cresce all'aumentare del numero di particelle⁵. Stabilita una massa, dunque, in un sistema con un elevato numero di componenti gli effetti della *granularità* di ϕ_{true} diventano importanti solo su tempi molto lunghi, e l'approssimazione continua è sempre meglio realizzata su tempi scala *finiti*. Sottolineiamo che non esistono, rigorosamente parlando, sistemi perfettamente non collisionali. Tuttavia questa idealizzazione è particolarmente adatta alla descrizione di sistemi formati da un elevato numero di particelle. Nel prossima sezione ripercorreremo i punti essenziali della trattazione matematica che si applica a sistemi assunti in regime perfettamente non collisionale.

1.5 L'equazione non collisionale di Boltzmann (CBE)

Nella sezione precedente abbiamo ricavato che, aumentando il numero delle particelle in un sistema dominato da forze gravitazionali, l'approssimazione non collisionale è sempre meglio realizzata su tempi scala sempre più lunghi. Nel limite ideale di $N \rightarrow \infty$ ci aspettiamo che la suddetta approssimazione sia valida per ogni tempo. Lo scopo è ora quello di determinare l'equazione differenziale in regime non collisionale per l'evoluzione della funzione di distribuzione f (smooth) come data dall'eq. (1.3.4). Prima di procedere richiamiamo alcuni concetti riguardanti la fluidodinamica, che saranno particolarmente utili per la nostra discussione. Data una funzione scalare $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f = f(\mathbf{x}; t)$, e dato un campo vettoriale \mathbf{W} , si dice derivata materiale in forma Euleriana

$$\frac{Df}{Dt} := \frac{\partial f}{\partial t} + \langle \mathbf{W}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \rangle . \quad (1.5.7)$$

Dal punto di vista fisico questa funzione descrive come la “proprietà” f , cui al tempo $t = 0$ è associata la condizione iniziale \mathbf{x}^0 , evolve nel tempo. Il secondo risultato, che qui richiamiamo senza dimostrazione, è chiamato teorema del trasporto. Esso è un risultato del tutto generale, che è alla base di una derivazione unificata delle equazioni differenziali che descrivono il moto dei *sistemi continui*. Il teorema del trasporto, intuitivamente, descrive come l'integrale di volume una certa proprietà f , definita su un volume Ω_0 al tempo $t = 0$, evolve al modificarsi del volume Ω , dipendente da tempo,

⁵Questa conclusione potrebbe a prima vista risultare paradossale, dal momento che, aumentando il numero di componenti, aumenta di conseguenza anche il numero delle collisioni. Tuttavia il punto cruciale è che, nonostante sia vero che le collisioni aumentano, l'*energia* scambiata in ognuna di esse è dipendente dal *quadrato della massa*. Con questa puntualizzazione, risulta ora perfettamente logico che in un sistema “finemente diviso” il tempo di rilassamento sia elevato.

sotto l'azione del campo \mathbf{W} . Il risultato che si ottiene è il seguente:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(\mathbf{x}; t) d^n \mathbf{x} = \int_{\Omega(t)} \left[\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{W} \right] d^n \mathbf{x}. \quad (1.5.8)$$

Osserviamo che, se si assume che f sia una quantità conservata, cioè che $\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(\mathbf{x}; t) d^n \mathbf{x} = 0$ per ogni scelta del volume di controllo Ω_0 , allora

$$\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{W} = 0. \quad (1.5.9)$$

In più, se \mathbf{W} è un campo solenoidale, cioè se $\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{W} = 0$ su tutto lo spazio delle fasi, allora si ha che

$$\frac{Df}{Dt} = 0. \quad (1.5.10)$$

Il teorema che presenta l'equazione non collisionale di Boltzmann afferma che *in un sistema in regime non collisionale, la funzione di distribuzione evolve secondo la seguente equazione*⁶

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \langle \mathbf{v}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \rangle - \langle \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \rangle = 0, \quad (1.5.11)$$

dove

$$\Delta \phi(\mathbf{x}; t) = 4\pi G \int_{\mathbb{R}^3} f d^3 \mathbf{v} \quad (1.5.12)$$

e dove il campo \mathbf{W} è dato da

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad (1.5.13)$$

1.6 Le equazioni di Jeans

Sono state sviluppate varie tecniche per estrarre informazioni dalla CBE. Una di queste è chiamata *metodo dei momenti*. L'idea di base è di cercare

⁶Ecco una traccia della dimostrazione:

1. Per ogni volume arbitrario $\Omega(t)$ nello spazio delle fasi γ di una particella, la massa contenuta in $\Omega(t)$ ad ogni tempo t è data dall'eq. (1.3.2) (dove f è la funzione di distribuzione della densità omogenea).
2. Ogni punto di questo volume – e ogni punto del suo bordo $\partial\Omega(t)$ – si muove secondo il campo vettoriale determinato dal gradiente del potenziale ϕ : per l'unicità delle soluzioni delle ODE, nessuna orbita può lasciare il volume. In altre parole la massa (della densità omogenea) è conservata per ogni volume arbitrario e per ogni tempo arbitrario.
3. Il campo vettoriale indotto da ϕ è solenoidale, quindi, richiamando quanto detto per l'eq. (1.5.10), si ottiene l'equazione non collisionale di Boltzmann.

equazioni differenziali più semplici dell'equazione non collisionale di Boltzmann, la quale, sebbene sia un notevole passo avanti rispetto alla situazione iniziale del problema degli N corpi, ha una soluzione generale che travalica le attuali possibilità della matematica. Queste nuove equazioni che troveremo descrivono le relazioni fra particolari funzioni definite *momenti* della DF. Considerando i momenti sullo spazio delle velocità otterremo le cosiddette equazioni di Jeans, mentre facendo i momenti sullo spazio delle configurazioni otterremo il **teorema del viriale**, sia nella sua forma scalare che tensoriale.

Per ricavare le equazioni di Jeans è necessario introdurre alcune definizioni preliminari:

$$\bar{v}_i(\mathbf{x}; t) := \frac{1}{\rho(\mathbf{x}; t)} \int_{\mathbb{R}^3} v_i f d^3\mathbf{v}, \quad (1.6.14)$$

$$\overline{v_i v_j}(\mathbf{x}; t) := \frac{1}{\rho(\mathbf{x}; t)} \int_{\mathbb{R}^3} v_i v_j f d^3\mathbf{v}, \quad (1.6.15)$$

$$\sigma_{ij}^2(\mathbf{x}; t) := \frac{1}{\rho(\mathbf{x}; t)} \int_{\mathbb{R}^3} (v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j) f d^3\mathbf{v}. \quad (1.6.16)$$

Le \bar{v}_i sono le componenti della *velocità di streaming* e il tensore (simmetrico) σ_{ij}^2 è il *tensore di dispersione delle velocità*. Ovviamente si possono definire infiniti momenti sullo spazio delle velocità considerando prodotti di ordine più alto, tuttavia noi ci concentreremo su quelli del secondo ordine appena definiti per la loro importanza nelle applicazioni. È facile dimostrare che vale la seguente identità:

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1.6.17)$$

Integrando l'eq. (1.5.11) su tutte le velocità, otteniamo

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d^3\mathbf{v} + \int v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\mathbf{v} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \int \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\mathbf{v} = 0. \quad (1.6.18)$$

Dalla precedente equazione si ricava

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{v}_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (1.6.19)$$

dove ρ è data dall'eq. (1.3.4). Moltiplicando ora l'eq. (1.5.11) per v_j ed integrando nuovamente su tutte le velocità, abbiamo

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} v_j d^3\mathbf{v} + \int v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\mathbf{v} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\mathbf{v} = 0, \quad (1.6.20)$$

la quale, con le opportune manipolazioni, può essere scritta come

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \rho \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial(\rho \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i}. \quad (1.6.21)$$

La stretta somiglianza di queste equazioni con la fluidodinamica non è un caso. Infatti, le equazioni della fluidodinamica possono essere derivate in completa analogia sfruttando il teorema del Trasporto, con $\rho(\mathbf{x}; t)$ che assume il classico significato di densità del fluido e con $u_i(\mathbf{x}; t)$, campo di velocità del fluido.

1.7 Il Teorema del Viriale

Abbiamo ottenuto le equazioni di Jeans moltiplicando l'equazione non collisionale di Boltzmann per v_j ed integrando su tutte le velocità. In questo processo un'equazione in uno spazio delle fasi 6-dimensionale per una singola quantità scalare f è stata ridotta ad equazioni differenziali alle derivate parziali per ρ e per i momenti delle velocità nello spazio delle coordinate tridimensionale.

Ora intendiamo moltiplicare la seguente equazione

$$\frac{\partial(\rho\bar{v}_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_i\bar{v}_j)}{\partial x_i} + \rho\frac{\partial\phi}{\partial x_j} = 0, \quad (1.7.22)$$

derivata dalla (1.6.20), per Mx_k , dove M è la massa totale del sistema. Integrando su tutte le variabili spaziali, troviamo

$$\int x_k \frac{\partial(\rho\bar{v}_j)}{\partial t} d^3\mathbf{x} = - \int x_k \frac{\partial(\rho\bar{v}_i\bar{v}_j)}{\partial x_i} d^3\mathbf{x} - \int \rho x_k \frac{\partial\phi}{\partial x_j} d^3\mathbf{x}. \quad (1.7.23)$$

Il secondo termine del membro di destra è chiamato tensore dell'energia potenziale \mathbf{W}^7 . Il primo termine del membro di destra può essere riscritto con l'aiuto del teorema della divergenza:

$$\int x_k \frac{\partial(\rho\bar{v}_i\bar{v}_j)}{\partial x_i} d^3\mathbf{x} = - \int \delta_{ki} \rho\bar{v}_i\bar{v}_j d^3\mathbf{x} = -2K_{kj}, \quad (1.7.24)$$

dove abbiamo assunto che ρ si annulli per grandi raggi e abbiamo definito il **tensore dell'energia cinetica**

$$K_{jk} \equiv \frac{1}{2} \int \rho\bar{v}_j\bar{v}_k d^3\mathbf{x}. \quad (1.7.25)$$

Con l'aiuto dell'identità (1.6.17) possiamo separare \mathbf{K} in due contributi, dovuti rispettivamente al moto ordinato e al moto random:

$$K_{jk} = T_{jk} + \frac{1}{2}\Pi_{jk}, \quad (1.7.26)$$

dove

$$T_{jk} \equiv \frac{1}{2} \int \rho\bar{v}_j\bar{v}_k d^3\mathbf{x} \quad (1.7.27)$$

⁷Non deve essere confuso con il campo vettoriale \mathbf{W} che abbiamo incontrato nelle sezioni precedenti.

$$\Pi_{jk} \equiv \int \rho \sigma_{jk}^2 d^3 \mathbf{x}. \quad (1.7.28)$$

Mediando sugli indici (k, j) e (j, k) dell'eq. (1.7.23), otteniamo

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \rho (x_k \bar{v}_j + x_j \bar{v}_k) d^3 \mathbf{x} = 2T_{jk} + P_{ijk} + W_{jk}. \quad (1.7.29)$$

Il membro di sinistra della precedente equazione può essere portato in una forma più intuitiva definendo il tensore \mathbf{I}

$$I_{jk} \equiv \int \rho x_j x_k d^3 \mathbf{x}. \quad (1.7.30)$$

Differenziando \mathbf{I} rispetto al tempo, e utilizzando l'equazione di continuità ed il teorema della divergenza, otteniamo

$$\frac{dI_{jk}}{dt} = \int \rho (x_k \bar{v}_j + x_j \bar{v}_k) d^3 \mathbf{x}. \quad (1.7.31)$$

Se ora combiniamo l'eq. (1.7.31) con l'eq. (1.7.29), otteniamo il **teorema del viriale in forma tensoriale**:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2T_{jk} + P_{ijk} + W_{jk}. \quad (1.7.32)$$

Se il sistema è in uno stato di equilibrio, cioè se $\frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 0$ e prendiamo la traccia dell'eq. (1.7.32), possiamo scrivere il **teorema del viriale in forma scalare**:

$$2K + W = 0. \quad (1.7.33)$$

1.8 Il Teorema del Viriale in media temporale

Il teorema del viriale per i sistemi autogravitanti può essere derivato anche seguendo un differente percorso logico e questo è quello che, in questa sezione, ci proponiamo di fare. Tuttavia il teorema del viriale così ricavato è un concetto *diverso* da quello che abbiamo finora discusso: esso si chiama teorema del viriale *in media temporale* (il motivo sarà presto chiaro). Cominciamo con una definizione.

Si dice che una funzione $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$, dipendente dalle n coordinate $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, è omogenea se vale che

$$f(\alpha \mathbf{x}_1, \alpha \mathbf{x}_2, \dots, \alpha \mathbf{x}_n) = \alpha^k f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$$

dove α è una costante qualunque, e il numero k è detto grado di omogeneità della funzione.

Inoltre vale il seguente teorema di Eulero sulle funzioni omogenee:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = kf(x),$$

dove il primo membro è esattamente il prodotto scalare $\langle \nabla f(x), x \rangle$.

Poichè l'energia cinetica T è una funzione quadratica delle velocità, sfruttando il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee abbiamo

$$\sum_a \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_a} \mathbf{v}_a = 2T. \quad (1.8.34)$$

Introducendo gli impulsi $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_a} = \mathbf{p}_a$, otteniamo

$$2T = \sum_a \mathbf{p}_a \mathbf{v}_a = \frac{d}{dt} \left(\sum_a \mathbf{p}_a \mathbf{r}_a \right) - \sum_a \mathbf{r}_a \dot{\mathbf{p}}_a. \quad (1.8.35)$$

Facciamo la media temporale⁸ di questa uguaglianza. Supponiamo che un sistema si muova in una regione finita dello spazio e con velocità non tendenti all'infinito⁹. In questo caso la grandezza $\sum_a \mathbf{p}_a \mathbf{r}_a$ è limitata e, di conseguenza, il suo valore medio si annulla. La (1.8.35) diventa quindi

$$2T = - \sum_a \mathbf{r}_a \dot{\mathbf{p}}_a. \quad (1.8.36)$$

Sostituendo, conformemente alle equazioni di Newton, $\dot{\mathbf{p}}_a$ con $-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}$ e considerando la media temporale, otteniamo

$$2\bar{T} = - \sum_a \left(\mathbf{r}_a \left(-\frac{\partial \bar{U}}{\partial \mathbf{r}_a} \right) \right). \quad (1.8.37)$$

⁸Si chiama valore medio di una funzione qualunque del tempo $f(t)$ la grandezza

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt.$$

È facile vedere che se $f(t)$ è la derivata rispetto al tempo $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$ di una funzione limitata $F(t)$ allora il suo valore medio è uguale a zero:

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dF}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0.$$

⁹Dalla relatività ristretta sappiamo che le velocità non possono superare la velocità della luce. Tuttavia, in questa discussione consideriamo la velocità come una generica funzione matematica, che, in linea di principio, potrebbe assumere valori arbitrariamente elevati.

Se l'energia potenziale è una funzione omogenea di k -esimo grado di tutti i raggi vettore \mathbf{r}_a , allora, secondo il teorema di Eulero, l'uguaglianza si trasforma in

$$2\bar{T} = k\bar{U}. \quad (1.8.38)$$

Per l'interazione newtoniana, dove $k = -1$, ricaviamo

$$2\bar{T} = -\bar{U}. \quad (1.8.39)$$

Questo è il teorema del viriale in media temporale.

Capitolo 2

Applicazioni Astrofisiche

2.1 Sistemi autogravitanti

In questa sezione facciamo riferimento al teorema del viriale in forma scalare, come espresso nell'eq. (1.7.33), che, per comodità, riportiamo di seguito:

$$2T + U = 0, \quad (2.1.1)$$

dove, con un piccolo cambio di notazione, indichiamo con U la traccia di \mathbf{W} e con T l'energia cinetica del sistema. Prima di iniziare ricordiamo che l'eq. (2.1.1) **vale solo per sistemi autogravitanti e all'equilibrio**¹.

2.1.1 Il piano viriale

Per comprendere più a fondo le conseguenze e le implicazioni del teorema del viriale risulta estremamente utile considerare uno speciale piano, chiamato **piano viriale**. Sull'asse delle ascisse troviamo il modulo di U e su quello delle ordinate l'energia cinetica T . Questa scelta permette di rappresentare sul piano la retta definita dall'eq. (2.1.1):

$$T = \frac{|U|}{2}. \quad (2.1.2)$$

Per inquadrare intuitivamente la situazione notiamo che nel verso di $|U|$ crescente si posizionano sistemi sempre più “concentrati” (potenziale gravitazionale molto grande in modulo), mentre nel verso di T crescente troviamo sistemi sempre più “caldi”². Ogni sistema fisico può essere rappresentato da

¹Un sistema si dice virializzato se e solo se è all'equilibrio; i due termini si possono considerare sinonimi.

²La temperatura è legata all'energia cinetica di un sistema dalla seguente legge:

$$K = \frac{3}{2} N k_B T,$$

dove K rappresenta l'energia cinetica, N il numero di particelle del sistema, k_B la costante di Boltzmann e T la temperatura.

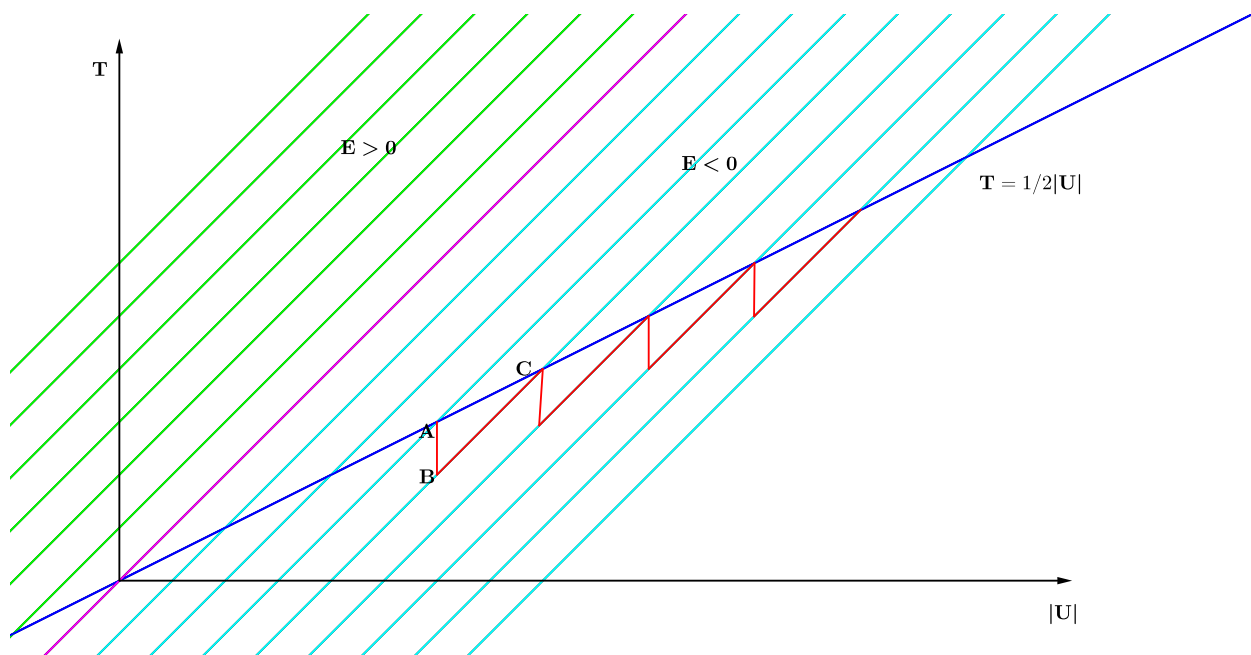


Figura 2.1: Il piano viriale

un punto sul piano viriale, con opportune coordinate $(|U|, T)$. Per quanto detto all’inizio di questo capitolo, sappiamo che, se un sistema si trova in uno stato di equilibrio, esso obbedisce al teorema del viriale e, dunque, si deve trovare in un punto della retta descritta dall’eq. (2.1.2). Inoltre, se il sistema è isolato, vale la legge di conservazione dell’energia totale E :

$$E = T + U = \text{costante} \quad (2.1.3)$$

Sul grafico vediamo rappresentate alcune delle infinite rette parallele alla bisettrice, ciascuna delle quali rappresenta un determinato valore di energia totale. Un sistema (isolato) che si trovi in un determinato stato di energia (e quindi su una particolare retta parallela alla bisettrice) deve necessariamente oscillare su questa retta, senza “uscirne”. Un’altra rimarchevole informazione che emerge dal piano viriale è la seguente: *un sistema può essere all’equilibrio solo se ha **energia totale negativa***³.

2.1.2 Sistemi autogravitanti e capacità termica

Dall’analogia con un gas ideale, possiamo definire la temperatura T di un sistema autogravitante attraverso la relazione

$$K = \frac{3}{2} N k_B \bar{T}, \quad (2.1.4)$$

³L’unica eccezione si ha nel caso limite di $|U| = 0$ e $T = 0$ ma questo caso è di interesse decisamente limitato.

dove K rappresenta l'energia cinetica, N il numero di particelle del sistema, k_B la costante di Boltzmann e $\bar{T} \equiv \int \rho(\mathbf{x})T d^3\mathbf{x} / \int \rho(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}$ la temperatura media pesata sulla massa. Se il sistema è all'equilibrio, il teorema del viriale afferma che $E = -K$ e quindi

$$E = -\frac{3}{2}Nk_B\bar{T}. \quad (2.1.5)$$

Se scriviamo l'espressione della capacità termica

$$C \equiv \frac{dE}{dT} = -\frac{3}{2}Nk_B, \quad (2.1.6)$$

vediamo che essa è *negativa*. Questo fatto porta alla conseguenza, a prima vista paradossale, che, *perdendo* energia, il sistema si riscalda. Nei prossimi paragrafi vedremo come questo peculiare comportamento dei sistemi gravitazionali emerga in modo del tutto naturale considerando il piano viriale.

2.1.3 Massa di Jeans

Consideriamo, come sistema autogravitante, una nube nello spazio interstellare. Per semplicità la supporremo sferica e con densità uniforme e costante. Possiamo dire che questa nube è in uno stato di equilibrio se l'attrazione gravitazionale, che tenderebbe a farla collassare, è bilanciata dalla pressione, che, invece, porterebbe all'espansione del sistema⁴. Fu Jeans il primo a studiare gli effetti di piccole perturbazioni all'equilibrio idrostatico, giungendo a definire le condizioni per l'insorgenza dell'instabilità di un sistema gravitazionale. In termini del teorema del viriale, la condizione per l'insorgenza di instabilità è

$$2T < |U|. \quad (2.1.7)$$

Se

$$U = -\frac{3}{5}\frac{GM}{R}, \quad K = \frac{3}{2}Nk_B T = \frac{3}{2}\frac{M}{\mu m_H}k_B T, \quad (2.1.8)$$

dove M è la massa della nube, T la sua temperatura, R il suo raggio ed N il numero di particelle che la costituiscono, la condizione data da (2.1.7) porta a concludere che si ha instabilità se

$$3\frac{M}{\mu m_H}k_B T < -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}. \quad (2.1.9)$$

Di solito si usa esplicitare la massa critica, chiamata massa di Jeans:

$$M_J = \left(\frac{5k_B T}{G\mu m_H}\right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}. \quad (2.1.10)$$

⁴Si trascurano effetti dovuti a campi magnetici o turbolenze.

2.1.4 Collasso di una nube

I fenomeni che portano una nube ad iniziare la fase di collasso sono innumerevoli (per esempio onde d'urto provocate da una vicina esplosione di supernova o uno "scontro" con una nube vicina). Se l'equilibrio iniziale del sistema viene perturbato, nelle zone dove si verificano le condizioni di instabilità viste nel paragrafo precedente può iniziare il collasso. In questa prima fase, che avviene in un tempo chiamato tempo dinamico t_d , il "moto" del sistema sul piano viriale è assolutamente imprevedibile. La nube è trasparente alla radiazione e la caduta libera sotto l'azione della gravità non è contrastata. All'aumentare della temperatura cominciano però ad essere favoriti fenomeni di ionizzazione e, quindi, il materiale degli strati più esterni diventa opaco alla radiazione. Questo processo può portare ad uno stato quasi di equilibrio.

Se la nube arriva in uno stato di (quasi) equilibrio, il punto che la rappresenta finisce sulla retta del viriale. Per continuare la nostra analisi è adesso necessario richiamare la seconda legge della termodinamica, la quale implica che, se un sistema ad una certa temperatura è posto in contatto termico con un altro sistema a temperatura inferiore, il sistema a temperatura maggiore trasferisce energia all'altro: l'energia si trasferisce "dal caldo al freddo". La nube è immersa nello spazio interstellare, il quale, con una temperatura vicina allo zero assoluto, è "più freddo" di lei. Il sistema *necessariamente* perde energia sotto forma di irraggiamento e questo lo rende *non* conservativo. Se la nube perde energia abbastanza lentamente⁵, "rimanendo vicina" alla retta del viriale, possiamo fare delle considerazioni interessanti. Guardando il piano viriale, vediamo che, se il sistema perde energia, lascia la retta del viriale e si porta su una retta di energia sottostante (passa dal punto **A** al punto **B** in Figura 2.1). Se, a questo punto, il sistema ritorna all'equilibrio non perdendo né guadagnando energia, deve "risalire" lungo la retta dell'energia fino a posizionarsi nuovamente sulla retta del viriale (punto **C** in Figura 2.1). Il fatto rimarchevole è che, in questa nuova condizione di equilibrio, la nube *ha un'energia cinetica maggiore di prima*. Possiamo dire che questa è la conseguenza "visiva" del fatto che la forza di gravità abbia capacità termica negativa.

Il processo appena descritto può continuare per lungo tempo, rendendo la nube sempre più calda e, poiché vale $2T = -U$, sempre più concentrata. Vorremmo concludere questa breve discussione ponendo l'accento sul fatto che il "motore" del processo di collasso è la perdita di energia della nube dovuta alla sua diversa (maggiore) temperatura rispetto all'ambiente circostante. Data questa perdita di energia, il fatto che il potenziale

⁵Nella nostra discussione "lentamente" significa che il tempo di irraggiamento $t_{irr} \gg t_d$, dove t_d rappresenta il tempo dinamico. Il tempo $t_d \sim 1/\sqrt{G\rho}$.

gravitazionale sia una funzione omogenea di grado -1 , ci porta a dire che

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dE}{dt}, \quad \frac{dU}{dt} = -2\frac{dE}{dt}. \quad (2.1.11)$$

2.2 Stima della massa delle galassie ellittiche

Dall'analisi spettroscopica delle galassie, è possibile ricavare preziose informazioni sulle velocità radiali dei corpi al loro interno. Infatti, a partire dagli spettri, si stima il redshift z , il quale è collegato alla velocità radiale dalla seguente relazione derivata dalla Relatività Generale:

$$v_{rad} = cz \frac{2+z}{2+2z+z^2}. \quad (2.2.12)$$

Dalle velocità radiali si calcola la *dispersione di velocità viriale* σ_v , che è la velocità caratteristica dei corpi all'interno del sistema:

$$\sigma_v^2 = \frac{GM}{R}, \quad (2.2.13)$$

dove M rappresenta la massa del sistema ed R una misura delle sue dimensioni⁶. Dal teorema del viriale, abbiamo che

$$2T = -U. \quad (2.2.14)$$

Poiché

$$U = -\frac{GM^2}{R} \quad (2.2.15)$$

e considerando la (2.2.13), possiamo scrivere

$$2T = M\sigma_v^2. \quad (2.2.16)$$

Noti σ_v ed R , l'eq. (2.2.13) ci permette di calcolare la massa del sistema come

$$M = \frac{R\sigma_v^2}{G}. \quad (2.2.17)$$

⁶Per semplicità si considera un sistema sferico di raggio R .

Bibliografia

- [1] Luca Ciotti. *Lecture Notes on Stellar Dynamics*. Scuola Normale Superiore, 2000.
- [2] James Binney, Scott Tremaine. *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, 2008.
- [3] Lev Landau, Evgenij Lifshits. *Fisica teorica I, Meccanica*. Editori Riuniti, 1976.