

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

# Curve algebriche del piano reale e punti doppi

Tesi di Laurea in Geometria Algebrica

Relatore:  
Chiar.ma Prof.ssa  
Monica Idà

Presentata da:  
Paolo Zuzolo

‡ Sessione  
2016/2017



*Alla mia famiglia e a Maria ...*



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Premesse</b>	<b>1</b>
1.1 Un modello topologico per il piano proiettivo reale . . . . .	2
1.2 Polinomi omogenei . . . . .	5
1.3 Morfismi proiettivi . . . . .	8
1.4 Curve algebriche proiettive piane . . . . .	9
<b>2 Analisi locale d'una curva algebrica</b>	<b>15</b>
2.1 Analisi d'una curva in un punto semplice . . . . .	16
2.2 Analisi d'una curva in un punto doppio . . . . .	25
2.2.1 Analisi in un nodo ordinario . . . . .	27
2.2.2 Analisi in un punto doppio non ordinario . . . . .	33
<b>3 Esempi</b>	<b>43</b>
3.1 La Lumaca di Pascal . . . . .	44
3.2 La Lemniscata di Bernoulli . . . . .	46
3.3 Curva algebrica piana con <i>tacnodo</i> . . . . .	47
3.4 Curva algebrica piana con <i>cuspidi ramfoide</i> . . . . .	49
<b>Bibliografia</b>	<b>51</b>



# Introduzione

In questa tesi vengono studiate le curve algebriche proiettive piane reali. La tesi è costituita da 3 capitoli.

Nel primo capitolo, in una prima parte, vengono fornite premesse di carattere topologico sul piano proiettivo reale e premesse di carattere algebrico sui polinomi omogenei a coefficienti in un campo: questi descrivono infatti le ipersuperfici algebriche proiettive. In particolare vengono dati risultati sui polinomi omogenei come l'identità di Eulero e, per polinomi in due indeterminate a coefficienti in un campo algebricamente chiuso, il teorema di fattorizzazione in fattori lineari.

Questo, mettendoci nel campo dei numeri complessi all'occorrenza, ci aiuterà nell'analisi successiva mentre il modello dello spazio proiettivo reale 2-dimensionale ci permetterà di rappresentare agevolmente i risultati ottenuti sulle curve algebriche proiettive piane reali. In una seconda parte delle premesse vengono richiamate le definizioni di molteplicità di intersezione tra una retta proiettiva ed una curva algebrica proiettiva piana, e di punti semplici e multipli per una curva.

Nel secondo capitolo inizieremo l'analisi d'una curva algebrica proiettiva piana reale interessandoci nella prima sezione ai punti semplici della curva. Tale analisi sarà un'analisi locale: ponendoci in una carta affine e studiando la curva intorno a un punto dato, cercheremo delle curve osculatrici cioè che incontrino la curva nel punto dato con molteplicità di intersezione maggiore rispetto a quella della retta tangente, e che forniranno informazioni sulla curva in un intorno del punto, come la disposizione della curva rispetto ai

semipiani individuati dalla tangente e i rami da cui è costituita. Per mezzo del modello topologico del piano proiettivo reale faremo vedere cosa accade quando cambiamo carta affine e quindi quando il punto oggetto di studio diventa improprio, rispetto a tale carta scelta, nei due casi in cui la tangente è una retta del piano affine (cioè un asintoto per la curva) o la retta impropria. Nella seconda sezione del secondo capitolo, verrà fatto un lavoro analogo a quello precedente ma per i punti doppi. Nel corso della seconda sezione verranno introdotte via via diverse tipologie di punti doppi, come ad esempio *biflcnodo*, *tacnodo*, *oscnodo* e *cuspidi di 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> specie*, caratterizzandoli per via algebrica e dandone poi una rappresentazione, come fatto nel primo capitolo.

In questa tesi non si è andati oltre l'analisi di cuspidi di seconda specie; inoltre, non si affronterà lo studio di curve algebriche proiettive piane in punti tripli o maggiori. Infine, nel terzo ed ultimo capitolo, vengono forniti alcuni esempi di curve algebriche piane affini note, come la *Lumaca di Pascal* e la *Lemniscata di Bernoulli* che presentano punti della tipologia studiata nel capitolo precedente. Per ogni curva, seguendo il procedimento generale visto nel capitolo precedente, omettendo i calcoli, è stata fornita una curva osculatrice che approssima localmente la curva data nel punto preso in considerazione e poi si è data una rappresentazione della curva.

# Capitolo 1

## Premesse

Di seguito vengono richiamati alcuni risultati utilizzati successivamente; per ulteriori particolari e osservazioni si rimanda a [1] e a [3]. Nel seguito  $\mathbb{K}$  indica sempre un campo. Con  $\overline{\mathbb{K}}$  verrà indicato un campo algebricamente chiuso.

## 1.1 Un modello topologico per il piano proiettivo reale

Consideriamo  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , identificandolo con l'insieme delle rette vettoriali di  $\mathbb{R}^3$ , in particolare ogni punto  $[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  corrisponde alla retta di  $\mathbb{R}^3$  data dai vettori  $(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$  al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Sia poi  $H_0 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}); x_0 = 0\}$  che corrisponde a tutte le rette vettoriali di  $\mathbb{R}^3$  che giacciono sul piano  $x_0 = 0$  e sia  $A$  il piano affine di equazione  $x_0 = 1$ . Abbiamo che ogni retta che non appartiene ad  $x_0 = 0$  incontra  $A$  in uno ed un solo punto. Otteniamo dunque la seguente applicazione biettiva:

$$\begin{aligned} j : A &\rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus H_0 \\ (1, x_1, x_2) &\mapsto [1, x_1, x_2] \end{aligned}$$

con inversa:

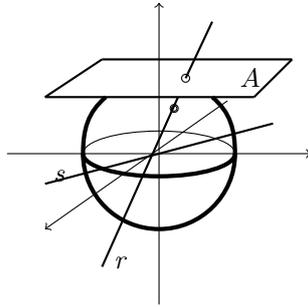
$$\begin{aligned} j^{-1} : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus H_0 &\rightarrow A \\ [x_0, x_1, x_2] &\mapsto \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) \end{aligned}$$

Si noti che le coordinate omogenee d'un punto del proiettivo individuano univocamente i rapporti che compaiono nella applicazione  $j^{-1}$ .

L'applicazione  $j$  induce quindi una biezione tra  $A \cup H_0$  e  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Identificando il piano affine  $A$  di  $\mathbb{R}^3$  con il piano affine reale  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ , possiamo vedere il piano proiettivo reale come "ampliamento" del piano affine reale. I punti di  $H_0$  vengono detti *punti impropri, rispetto ad  $x_0$*  e i punti di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus H_0$ , identificabile con  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ , *punti propri, rispetto ad  $x_0$* . Partiamo proprio da qui per il nostro modello:

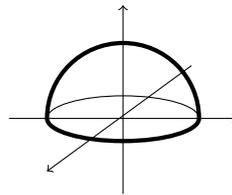
consideriamo la sfera unitaria  $S^2$  nello spazio tridimensionale standard e il piano affine  $A$ , detto prima.

La generica retta  $r$  per l'origine che non giace sul piano  $x_0 = 0$ , incontra la sfera unitaria in due punti distinti, rappresentanti dello stesso punto del proiettivo: è facile vedere che  $S^2$  quozientata con la relazione di equivalenza



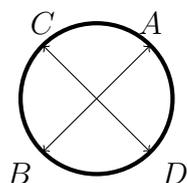
antipodale  $\sim$  (dove  $P \sim Q$  se e solo se  $P = Q$  oppure  $P$  è diametralmente opposto a  $Q$ , cioè  $P = -Q$ ) è omeomorfa a  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Un modello topologico di  $S^2/\sim$  è la calotta sferica superiore con bordo quozientato con la relazione di equivalenza dove  $[P] = \{P\}$  se  $P$  non appartiene al bordo, mentre  $[P] = \{P, -P\}$  se  $P$  appartiene al bordo. Una retta  $r$  che non giace su  $x_0 = 0$  incontra il piano affine  $A$  in uno ed un solo punto, come già detto prima. Possiamo dunque stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti propri rispetto ad  $x_0$ , quindi i punti del piano affine, e la calotta superiore senza il bordo.

La generica retta  $s$  per l'origine che giace sul piano  $x_0 = 0$ , incontra il bordo della calotta superiore in due punti distinti che sono due rappresentanti dello stesso punto del proiettivo: per quanto detto prima, saranno rappresentanti di uno stesso punto improprio rispetto ad  $x_0$ . Siamo giunti quindi alla seguente situazione:



Per ottenere un modello "piano", proiettiamo la calotta sul piano  $x_0 = 0$ , ottenendo il seguente modello:

dove la circonferenza è quozientata con la relazione detta precedentemente, quindi ad esempio il punto A è identificato con il punto B e C con D, mentre i punti interni al cerchio sono in relazione soltanto con se stessi. In



questo modo abbiamo una rappresentazione del piano proiettivo reale dove l'interno del cerchio rappresenta l'insieme dei punti propri, rispetto ad  $x_0$ , quindi il piano affine, mentre la circonferenza quotientata con la relazione antipodale rappresenta, la retta dei punti impropri rispetto ad  $x_0$ .

Tutto ciò che è stato fatto sin'ora può essere fatto rispetto ad un qualsiasi  $x_i$ , per  $i = 0, 1, 2$ , cioè considerando  $H_i = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}); x_i = 0\}$  e così via, giungendo ogni volta alle medesime conclusioni.

## 1.2 Polinomi omogenei

### Definizione 1.1.

Sia  $F(X_0, \dots, X_n) \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  un polinomio non nullo nelle indeterminate  $X_0, \dots, X_n$  a coefficienti in  $\mathbb{K}$ . Diremo che è omogeneo di grado  $d$  se tutti i suoi monomi hanno lo stesso grado  $d$ . Denoteremo con  $\mathbb{K}[X_0, X_1, X_2]_d$  il  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale costituito da tutti i polinomi omogenei di grado  $d$  nelle indeterminate  $X_0, X_1$  e  $X_2$  e dal polinomio nullo.

Valgono per quest'ultimi le due seguenti caratterizzazioni:

### Proposizione 1.2.1.

Sia  $F \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ , diverso dal polinomio nullo.

1.  $F \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]_d$  se e solo se vale:

$$F(tX_0, \dots, tX_n) = t^d F(X_0, \dots, X_n) \quad (1.1)$$

con  $t$  nuova indeterminata, in  $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n, t]$

2. Se  $F \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]_d$  allora

$$\sum_{k=0}^n X_k F_{X_k}(X_0, \dots, X_n) = dF \quad (1.2)$$

dove  $F_{X_i}$  indica la derivata parziale di  $F$  rispetto a  $X_i$ . Questa viene detta *Identità di Eulero*.

*Dimostrazione.*

(1) La condizione è necessaria in quanto, essendo il polinomio omogeneo, da ogni monomio di  $F(tX_0, \dots, tX_n)$  posso raccogliere  $t^d$  e ottenere quindi il risultato. È inoltre sufficiente poiché, scritto il polinomio come somma dei suoi addendi non nulli omogenei di grado  $d_k$ , che chiameremo  $F_k$ ,  $0 \leq k \leq r$  per un certo  $r \in \mathbb{N}$ , si ha, in base all'ipotesi, la seguente uguaglianza:

$$t^{d_0} F_0 + t^{d_1} F_1 + \dots + t^{d_r} F_r = t^d F_0 + t^d F_1 + \dots + t^d F_r$$

Affinché valga l'uguaglianza, in base al principio di identità dei polinomi, bisogna avere  $t^{d_k} = t^d \forall k$ , ovvero  $d_k = d \forall k$ . Quindi ogni  $F_k$  ha lo stesso grado uguale a  $d$ , da cui la tesi.

(2) Per ottenere la 1.2 è sufficiente derivare ambo i membri della 1.1 rispetto a  $t$ , ottenendo:

$$\sum_{k=0}^n X_k F_{X_k}(tX_0, \dots, tX_n) = dt^{d-1} F(X_0, \dots, X_n)$$

da cui, per  $t=1$ , si ha la tesi. □

Introduciamo inoltre le seguenti definizioni:

**Definizione 1.2.**

Sia  $f \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n]$  un polinomio non nullo di grado  $d$ . Si dice omogeneizzato di  $f$ , rispetto all'indeterminata  $X_i$ , il polinomio  $F \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \dots, X_n]$  definito nel seguente modo:

$$F(X_0, \dots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \dots, X_n) := X_i^d f\left(\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right)$$

Si vede facilmente che il polinomio ottenuto è omogeneo di grado  $d$ .

e viceversa:

**Definizione 1.3.**

Sia  $F \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]_d$ , polinomio omogeneo non nullo. Si dice deomogeneizzato di  $F$  rispetto all'indeterminata  $X_i$  il polinomio  $f \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n]$  definito come segue:

$$f(X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) := F(X_0, \dots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \dots, X_n)$$

Risulta che  $f$ , così definito, ha grado  $\leq d$ .

*Osservazione 1.*

Si noti che considerare il deomogeneizzato di un polinomio omogeneizzato

(quindi prima omogeneizzo e poi deomogeneizzo) porta ad ottenere il polinomio di partenza. Il viceversa non si ha in generale: si ha se e solo se  $X_i$  (variabile rispetto alla quale compio l'omogeneizzazione/deomogeneizzazione) non divide il polinomio.

Infine nel caso di un campo algebricamente chiuso, si ha il seguente importante risultato di fattorizzazione in fattori lineari di un polinomio omogeneo non nullo in due indeterminate:

**Proposizione 1.2.2.**

Sia  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$  e  $F \in \mathbb{K}[X_0, X_1]_d$ , polinomio omogeneo non nullo. Allora  $F$  si scompone nel prodotto di fattori lineari, eventualmente ripetuti, come segue:

$$F(X_0, X_1) = (a_1X_1 - b_1X_0) \cdots (a_dX_1 - b_dX_0) \quad (1.3)$$

dove  $a_i, b_i \in \mathbb{K}$ , non entrambi nulli.

Tale fattorizzazione è unica a meno di costanti  $c_1, \dots, c_d$  che moltiplicano i fattori lineari e tali che  $c_1 \cdots c_d = 1$ . Diremo dunque che  $[a_1, b_1], \dots, [a_d, b_d]$ , pensati come punti di  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ , sono radici di  $F$ . Diremo inoltre che  $[a_i, b_i]$  ha molteplicità  $m$  se vale  $F(X_0, X_1) = (a_iX_1 - b_iX_0)^m G(X_0, X_1)$  con  $G(a_i, b_i) \neq 0$  per ogni  $i$ .

*Dimostrazione.*

Consideriamo  $F \in \mathbb{K}[X_0, X_1]_d$  omogeneo non nullo. Supponiamo poi  $k$  la molteplicità di  $X_0$  come fattore di  $F$ . Si ha quindi

$$F(X_0, X_1) = X_0^k G(X_0, X_1)$$

dove  $G(X_0, X_1) \in \mathbb{K}[X_0, X_1]_{d-k}$ , cioè è omogeneo di grado  $d-k$ , in quanto raccolgo da ogni monomio di  $F$  (che aveva grado  $d$ ) il fattore  $X_0^k$  ottenendo tutti monomi in  $X_0$  e  $X_1$  di egual grado  $d-k$ .

Considero ora il polinomio

$$g(X_1) := G(1, X_1)$$

ovvero il deomogeneizzato di  $G$  rispetto ad  $X_0$ . Poiché  $g \in \mathbb{K}[X_1]$  e  $\mathbb{K}$  è algebricamente chiuso, si ha:

$$g(X_1) = a(X_1 - b_1) \cdots (X_1 - b_{d-k}) \quad a, b_i \in \mathbb{K} \quad \forall i, \quad a \neq 0$$

dove i  $b_i$ , radici di  $g$ , non sono necessariamente distinte. Poiché  $X_0$  non divide  $G$  per costruzione, omogeneizzando  $g$  riottengo  $G$  (per l'osservazione 1), ovvero:

$$G(X_0, X_1) = a((X_1 - b_1 X_0) \cdots (X_1 - b_{d-k} X_0))$$

e quindi:

$$F(X_0, X_1) = aX_0^k((X_1 - b_1 X_0) \cdots (X_1 - b_{d-k} X_0))$$

da cui il risultato. □

### 1.3 Morfismi proiettivi

Introduciamo dapprima le trasformazioni caratteristiche dello spazio proiettivo, ovvero i morfismi proiettivi:

#### **Definizione-Proposizione 1.1.**

*Siano  $V$  e  $W$  due  $\mathbb{K}$ -spazi vettoriali finitamente generati e*

$$\phi : V \rightarrow W$$

*un'applicazione lineare iniettiva. Allora si definisce morfismo proiettivo l'applicazione iniettiva:*

$$[\phi] : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$$

$$[v] \mapsto [\phi(v)]$$

*Dimostrazione.* Come prima, affinché l'applicazione proiettiva sia ben definita è necessario che se  $v = \lambda w$  con  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  allora  $[\phi]([v]) = [\phi]([w])$ . Grazie alla linearità di  $\phi$  si ha:

$$v = \lambda w, \lambda \in \mathbb{K}^* \Rightarrow \phi(v) = \phi(\lambda w) = \lambda \phi(w) \Rightarrow [\phi(v)] = [\phi(w)]$$

da cui la tesi.

Inoltre  $[\phi]$  è iniettiva poiché lo è  $\phi$ , infatti:

$$[\phi]([v]) = [\phi]([w]) \Rightarrow [\phi(v)] = [\phi(w)] \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \Rightarrow \phi(v) = \lambda \phi(w) = \phi(\lambda w)$$

da cui

$$v = \lambda w \Rightarrow [v] = [w]$$

□

*Osservazione 2.*

La scelta di una applicazione iniettiva è motivata dalla necessità di evitare il seguente problema:

se l'applicazione  $\phi$  non fosse iniettiva, vi sarebbe  $v \in V, v \neq 0$ , tale che  $\phi(v) = 0$ , quindi  $[\phi(v)]$  non avrebbe senso nel proiettivo d'arrivo e neanche l'applicazione così definita. Aggirando il problema si può definire una applicazione:

$$\psi : \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(Ker\phi) \rightarrow \mathbb{P}(W)$$

che associa ad ogni  $[v]$ , con  $v \notin Ker\phi$ , il punto  $[\phi(v)]$ .

*Osservazione 3.* Si dimostra che  $[\phi]$  è suriettiva se e solo se  $\phi$  è suriettiva.

**Definizione 1.4.**

Sia  $\phi : V \rightarrow V$  un isomorfismo di  $V$ . Allora  $[\phi]$ , definita come sopra, è biettiva e si dirà una proiettività di  $\mathbb{P}(V)$ .

## 1.4 Curve algebriche proiettive piane

Introduciamo ora le ipersuperfici nello spazio proiettivo.

**Definizione 1.5.**

Definiamo ipersuperficie  $S$  di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  la classe di equivalenza di un polinomio  $F \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]_d$  di grado  $d > 0$ , rispetto alla relazione di equivalenza:  $F \sim G \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*$  t.c.  $F = \lambda G$ ; inoltre diremo che  $S$  ha grado  $d$  se un qualsiasi rappresentante ha grado  $d$  e scriveremo  $S: F=0$ , dicendo che è un'equazione per  $S$ . Con abuso di notazione indichiamo con lo stesso simbolo sia l'ipersuperficie che il suo supporto, ovvero  $\{P \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}); F(P) = 0\}$ .

*Osservazione 4.*

È importante notare che la scelta di polinomi omogenei non è casuale: lavorando in uno spazio proiettivo, che è un quoziente, chiediamo ovviamente che le definizioni siano ben poste rispetto alla relazione di equivalenza. Per la 1.1 della proposizione 1.2.1 la definizione di ipersuperficie è ben posta, infatti preso  $P = [v]$  un pto del proiettivo ed un polinomio  $F \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ , allora  $F(P) = 0$  deve implicare  $F(\lambda v) = 0 \forall \lambda \in \mathbb{K}^*$ , poiché  $P = [v] = [\lambda v]$ , ma questo si ha se e solo se  $F$  è omogeneo. Dunque la scelta di tali polinomi è obbligata.

Ci interesseremo di ipersuperfici di grado  $d$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ , dette *curve algebriche proiettive piane*, ma più in generale, al variare della dimensione dello spazio proiettivo e del grado del polinomio, si usano differenti nomi per le ipersuperfici:

**Definizione 1.6.**

Data una ipersuperficie  $S$  di grado  $d$  in  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ , si dirà:

per  $n=2$  curva algebrica (proiettiva) piana

per  $n=2$  e  $d=1,2,3,4..$  risp. retta, conica, cubica, quartica..

per  $n=3$  superficie dello spazio 3-dimensionale

per  $n=3$  e  $d=1,2,3..$  risp. piano, quadrica, cubica..

*Osservazione 5.*

In modo del tutto simile viene data la nozione di curva algebrica affine: questa è la classe di proporzionalità di un polinomio  $f \in \mathbb{K}[x, y]$ , non costante.

Accanto a questa viene data anche la definizione di chiusura proiettiva, che indicheremo con  $\bar{\mathcal{C}}$ , d'una curva affine  $\mathcal{C}$  come l'omogeneizzato del polinomio che individua la curva affine; quindi la chiusura proiettiva  $\bar{\mathcal{C}}$  di  $\mathcal{C}$  è la "più piccola" curva algebrica proiettiva che contiene  $\mathcal{C}$ , ed è l'unione di  $\mathcal{C}$  e di  $d$  punti contati con molteplicità della retta  $x_0 = 0$ , che sono detti i punti impropri di  $\mathcal{C}$ . Per ulteriori dettagli si rimanda a [1].

**Definizione 1.7.** *Siano  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  due ipersuperfici di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ . Diremo che sono proiettivamente equivalenti se esiste una proiettività  $\phi$  di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  tale che  $\phi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ .*

Con la scrittura  $\phi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ , intendiamo la seguente cosa:  
siano

$$\mathcal{C} : F(X_0, \dots, X_n) = 0 \text{ e } \mathcal{C}' : G(X_0, \dots, X_n) = 0$$

identificando il polinomio con la rispettiva funzione polinomiale. Se esiste  $\phi$  tale che  $F = G \circ \phi$ , allora  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  sono *proiettivamente equivalenti*. In questo caso si ha:

$$P \in \mathcal{C} \Leftrightarrow F(P) = 0 \Leftrightarrow (G \circ \phi)(P) = G(\phi(P)) = 0 \Leftrightarrow \phi(P) \in \mathcal{C}'$$

Tornando alle curve algebriche piane, vogliamo descrivere l'intersezione tra queste ed una retta:

**Definizione-Proposizione 1.2.**

*Siano  $r$  e  $\mathcal{C}$  rispettivamente una retta ed una curva algebrica di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  con  $r$  di equazioni parametriche:*

$$r : \begin{cases} X_0 = \lambda p_0 + \mu q_0 \\ X_1 = \lambda p_1 + \mu q_1 \\ X_2 = \lambda p_2 + \mu q_2 \end{cases} \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \quad (1.4)$$

dove  $P = [p_0, p_1, p_2]$ ,  $Q = [q_0, q_1, q_2] \in r$ , distinti, e  $\mathcal{C} : F(X_0, X_1, X_2) = 0$  con  $F \in \mathbb{K}[X_0, X_1, X_2]_d$ . Sia  $P_0$  un punto di  $r$ ,  $P_0 = \lambda_0 Q + \mu_0 P$ , e l'intersezione tra  $r$  e  $\mathcal{C}$ , di equazione:

$$0 = F(\lambda p_0 + \mu q_0, \lambda p_1 + \mu q_1, \lambda p_2 + \mu q_2) \quad (1.5)$$

Si definisce molteplicità di intersezione tra  $r$  e  $\mathcal{C}$  in  $P_0$ :

$$\mu(\mathcal{C}, r; P_0) : \begin{cases} 0 & \text{se } P_0 \notin \mathcal{C} \\ \infty & \text{se } r \subseteq \mathcal{C} \\ m & \text{se } [\lambda_0, \mu_0] \text{ è radice di molteplicità } m \text{ per 1.5} \end{cases}$$

*Osservazione 6.*

Si può dimostrare che la definizione non dipende dalle equazioni parametriche della retta  $r$ , ovvero dalla scelta dei punti  $P$  e  $Q$  generanti  $r$ . La definizione risulta dunque ben posta.

*Osservazione 7.*

In modo simile si dà la definizione di molteplicità di intersezione in un punto tra una retta ed una curva nel piano affine. Si verifica in particolare che tale definizione è ben posta nel senso che, passando dal piano affine al piano proiettivo, ovvero considerando i proiettivizzati di retta e curva, la molteplicità di intersezione in un punto resta invariata.

*Osservazione 8.*

Nel seguito spesso si utilizzeranno proiettività per portare punti di curve in altri punti tali per cui i calcoli risultino più "economici". Si dimostra allora che la molteplicità di intersezione in un punto tra una retta e una curva e la molteplicità di intersezione dei rispettivi trasformati sono uguali. In generale, le proiettività lasciano invariate le varie proprietà di una curva, proponendosi come un utile strumento per agevolare dimostrazioni e calcoli.

Possiamo ora definire la molteplicità di una curva in un punto:

**Definizione 1.8.** *Siano  $\mathcal{C}$  una curva algebrica proiettiva piana e  $P$  un punto del piano proiettivo. Definiamo allora la molteplicità di  $\mathcal{C}$  in  $P$  (o di  $P$  per  $\mathcal{C}$ ) il numero:*

$$\mu_P(\mathcal{C}) = \min_{r \ni P} \mu(\mathcal{C}; r; P) \quad (1.6)$$

*dunque il minimo delle molteplicità di intersezione tra la curva e le rette del fascio passanti per  $P$ .*

*Osservazione 9.* In base alla definizione si ha:

$$0 \leq \mu_{\mathcal{P}}(\mathcal{C}) \leq \deg(\mathcal{C})$$

e  $\mu_{\mathcal{P}}(\mathcal{C}) = 0$  se e solo se  $P \neq \mathcal{C}$ .

In base alla definizione data, i punti di una curva vengono così catalogati:

Se  $\mu_{\mathcal{P}}(\mathcal{C}) = 1$ ,  $P$  è detto *punto semplice*, o *non singolare*, di  $\mathcal{C}$ .

Se  $\mu_{\mathcal{P}}(\mathcal{C}) > 1$ ,  $P$  è detto *punto multiplo*, o *singolare* di  $\mathcal{C}$ : in particolare diremo che è un *punto m-plo* se  $\mu_{\mathcal{C}}(P) = m$  (o nello specifico *doppio*, *triplo*, ecc..).

Inoltre diremo che la curva è *non singolare* se ogni punto è non singolare e la diremo *singolare* in caso contrario.

Diamo ora una condizione necessaria e sufficiente per individuare un punto m-plo d'una curva proiettiva:

**Proposizione 1.4.1.** *Sia  $\mathcal{C} : F = 0$ , con  $F$  polinomio omogeneo non costante, una curva proiettiva piana. Un punto  $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  è un punto di molteplicità  $m$  per  $\mathcal{C}$  se e solo se in  $P$  si annullano tutte le derivate parziali di  $F$  di ordine  $m-1$  e non si annulla almeno una delle derivate parziali  $m$ -esime.*

*Dimostrazione.*

Sia  $r$  di equazioni 1.4 e sia  $P \in \mathcal{C}$ . Usiamo le stesse notazioni di Def-Prop 1.2. Sostituendo nelle equazioni di  $F$  come in 1.5, possiamo deomogenizzare tale polinomio in  $\lambda$  e  $\mu$  rispetto a  $\lambda$ , in quanto per  $[\lambda, \mu] = [1, 0]$  abbiamo il punto  $P$ , ponendo  $t = \frac{\mu}{\lambda}$ . Si ottiene dunque un polinomio in  $\mathbb{K}[t]$ , che si annulla in  $P$ . Ne consideriamo lo sviluppo di Taylor in 0:

$$F(p_0 + tq_0, p_1 + tq_1, p_2 + tq_2) = \left[ \sum_i F_i(P)q_i \right] t + \frac{\sum_{j,k} F_{jk}(P)q_j q_k}{2!} t^2 + \dots \quad (1.7)$$

Si vede dunque come la condizione  $\mu_{\mathcal{P}}(\mathcal{C}) = m$  equivale a chiedere che tutte le derivate di ordine  $m - 1$  siano nulle in  $P$  e almeno una delle  $m$ -esime non nulla in  $P$ , in quanto in questo modo la radice  $t = 0$  (che corrisponde al punto  $P$ ) è una radice di molteplicità esattamente  $m$  per il polinomio sopra considerato.  $\square$

*Osservazione 10.* Poiché la derivata d'un polinomio omogeneo è ancora un polinomio omogeneo, per la 1.2 della prop. 1.2.1 si ha che l'annullarsi della derivate di ordine  $m-1$  è condizione sufficiente affinché anche tutte le derivate di ordine inferiore siano nulle.

Diamo infine la nozione di retta tangente ad una curva in un suo punto:

**Definizione 1.9.** *Sia  $\mathcal{C}$  una curva algebrica proiettiva piana e  $P \in \mathcal{C}$ . Una retta  $r$  è detta tangente, rispettivamente tangente principale, a  $\mathcal{C}$  in  $P$ , se  $P$  è semplice, rispettivamente multiplo, e se vale:*

$$\mu(\mathcal{C}; r; P) > \mu_{\mathcal{C}}(P)$$

Si dimostra il seguente risultato sulle tangenti in un punto ad una curva:

**Proposizione 1.4.2.** *Sia  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$  e sia  $\mathcal{C}$  curva algebrica proiettiva piana e  $P$  un suo punto  $m$ -plo. Allora esistono esattamente  $m$  tangenti principali a  $\mathcal{C}$  in  $P$  contate con molteplicità.*

Ne segue che se  $\mathcal{C}$  è una curva reale, allora il numero di tangenti principali in un punto  $m$ -plo è  $\leq m$ . Per la dimostrazione si veda [1]

Nel caso di un punto semplice si ha una ed una sola tangente principale per cui si parla semplicemente di tangente. Si dà poi la nozione di asintoto ad una curva affine:

**Definizione 1.10.** *Sia  $\mathcal{C}$  una curva affine e  $\overline{\mathcal{C}}$  la sua chiusura proiettiva. Una retta affine  $r \in \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$  si dice asintoto di  $\mathcal{C}$  se è una tangente principale a  $\overline{\mathcal{C}}$  in uno dei suoi punti impropri.*

e di tangente inflessionale:

**Definizione 1.11.** *Sia  $\mathcal{C}$  curva algebrica piana proiettiva,  $P$  un suo punto semplice, ed  $r$  la retta tangente a  $\mathcal{C}$  in  $P$ . Se risulta:*

$$\mu(\mathcal{C}; r; P) \geq 3$$

*allora  $P$  viene detto punto di flesso ed  $r$  tangente inflessionale.*

## Capitolo 2

# Analisi locale d'una curva algebraica

L'obiettivo è quello di dare una descrizione di una curva algebrica piana reale in un intorno sufficientemente piccolo d'un punto attraverso curve osculatrici. Tale descrizione verrà compiuta lavorando nel piano proiettivo reale, ponendoci, in base all'occorrenza, in una specifica carta affine.

L'analisi verrà condotta lavorando nel campo dei numeri reali affinché sia agevole una rappresentazione di ciò che accade; tuttavia talvolta ci si estenderà al campo dei complessi per una migliore comprensione della geometria della curva.

Verranno utilizzate di seguito coordinate omogenee  $X_0, X_1, X_2$  nel piano proiettivo e coordinate affini  $x, y$  nella carta  $U_0 = \{X_0 \neq 0\}$ . Inoltre, con abuso di notazione, indicheremo con lo stesso simbolo sia una curva algebrica piana affine che la sua chiusura proiettiva.

## 2.1 Analisi d'una curva in un punto semplice

Consideriamo una curva algebrica proiettiva piana  $\mathcal{C}$  di equazione:

$$F(X_0, X_1, X_2) = 0 \text{ con } F \in \mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]_d$$

e un suo punto semplice  $P$ .

Al fine di agevolare osservazioni e calcoli, consideriamo una proiettività che porti il punto  $P$  nel punto  $O = [1, 0, 0]$  e la retta tangente a  $\mathcal{C}$  in  $P$  nella retta  $r : X_2 = 0$ , sapendo che le proprietà principali della curva restano invariate. Deomogeneizziamo rispetto a  $X_0$  il polinomio della curva così ottenuta, mettendoci quindi nella carta affine  $X_0 \neq 0$  dove  $P$  diventa l'origine e  $r$  diventa l'asse delle ascisse, otteniamo, per quanto detto, una curva affine di equazione generica:

$$\mathcal{C} : f(x, y) = y + ax^2 + bxy + cy^2 + dx^3 \dots \quad (2.1)$$

Notiamo che la molteplicità  $\mu(\mathcal{C}, r; O)$  è almeno 2 perchè dipende da com'è il coefficiente  $a$ , se uguale o diverso da zero. In entrambi i casi andiamo a considerare delle funzioni ausiliarie, sempre polinomiali, in una terza variabile  $t$  ed usiamole per esprimere  $x$  ed  $y$ , ottenendo una curva in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \dots \\ y = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \dots \end{cases} \quad (2.2)$$

da utilizzare poi come curva osculatrice. Poichè vogliamo che tale curva passi per  $O$ , deve essere  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ . La scelta di funzioni polinomiali di questa forma è dovuta alla possibilità di poter parlare di molteplicità di intersezione tra due curve in modo simile alla definizione 1.2, in quanto andandoli a sostituire nell'equazione della curva si ottiene un polinomio in  $t$ . Questo ci permetterà di dare una descrizione qualitativa della curva in un intorno, sufficientemente piccolo, del punto preso in considerazione nel senso che possiamo approssimare localmente la curva data con un'altra curva e dedurre informazioni di vario tipo. Infatti consideriamo la risolvete, che ci

dà l'intersezione tra le due curve:  $f(x(t), y(t)) = 0$ , dove:

$$f(x(t), y(t)) = g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2}t^2 + \dots \quad (2.3)$$

La nostra curva parametrizzata darà una approssimazione della curva iniziale che sarà tanto migliore quanto maggiore sarà la molteplicità della radice  $t=0$ .

Iniziamo la nostra analisi studiando i primi due casi:

- $a \neq 0$

Abbiamo dunque che  $r$  incontra  $\mathcal{C}$  in  $O$  con molteplicità esattamente 2.

Andiamo a considerare come curva osculatrice la prima più semplice, ovvero:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \lambda t^2 \end{cases} \quad \lambda \neq 0$$

cioè di equazione  $y = \lambda x^2$ ,  $\lambda \neq 0$ . Abbiamo scartato una qualsiasi retta per l'origine perchè nella famiglia di rette per  $O$ :

$$\begin{cases} x = \alpha_1 t \\ y = \beta_1 t \end{cases}$$

vi è una unica retta osculatrice che è la retta tangente. Necessariamente inoltre  $\lambda \neq 0$ , altrimenti otterrei la retta tangente, mentre il nostro obiettivo è trovare una curva che abbia molteplicità di intersezione superiore a quella tra curva e retta tangente. Consideriamo allora la famiglia di parabole così ottenute e l'intersezione con  $\mathcal{C}$ :  $f(t, \lambda t^2) = 0$ , dove:

$$f(t, \lambda t^2) = \lambda t^2 + at^2 + b\lambda t^3 + c\lambda t^3 + \dots = (\lambda + a)t^2 + (\dots)t^3 + \dots$$

Dunque la molteplicità della radice  $t=0$  è almeno 2 ma scegliendo  $\lambda = -a$  si ottiene una parabola che risulta osculatrice poiché ha molteplicità di intersezione con  $\mathcal{C}$  nell'origine superiore a quella della retta tangente e delle altre parabole, per cui è tale da fornire una migliore

approssimazione della curva.

Dunque vicino a  $O$  la  $\mathcal{C}$  si comporta come la parabola  $y = -ax^2$ .

- $a = 0$  e  $d \neq 0$

In questo caso  $\mu(\mathcal{C}, r; O) = 3$ . Proviamo innanzitutto a riconsiderare la stessa famiglia di parabole, come prima, ottenendo:

$$f(t, \lambda t^2) = \lambda t^2 + b\lambda t^3 + c\lambda t^4 + \dots = \lambda t^2 + (\dots)t^3 + (\dots)t^4 + \dots$$

Dunque ogni parabola della famiglia sopra considerata ha molteplicità di intersezione con  $\mathcal{C}$  nell'origine uguale a 2, e per averne una con molteplicità superiore si dovrebbe scegliere  $\lambda = 0$ , scelta non consentita poichè ci ridà la retta tangente. Provare con una famiglia di curve della forma:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \lambda t^2 + \mu t^3 \end{cases}$$

porterebbe ad un medesimo risultato, in quanto otterremmo comunque da imporre che  $\lambda$  deve essere zero. Consideriamo allora la seguente famiglia:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \lambda t^3 \end{cases}$$

da cui sostituendo in 2.1:

$$f(t, \lambda t^3) = \lambda t^3 + b\lambda t^4 + c\lambda^2 t^6 + dt^3 + \dots = (\lambda + d)t^3 + (\dots)t^4 + \dots$$

Osserviamo che ognuna delle cubiche della famiglia considerata ha molteplicità di intersezione almeno 3, ma considerando quella ottenuta per  $\lambda = -d$  si ottiene la curva con molteplicità di intersezione nell'origine  $\geq 4$ .

Il passo successivo dello studio sarebbe quello di considerare il caso in cui la retta tangente, ovvero l'asse delle ascisse, incontra con molteplicità 4 la curva e andare a cercare la curva che meglio approssimi  $\mathcal{C}$  in  $O$ . Andando avanti, si vede che:

-se  $\mu(\mathcal{C}, r, O) = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , allora la curva osculatrice sarà  $y = \alpha x^{2k}$ , per un certo coefficiente  $\alpha$ ;

se  $\mu(\mathcal{C}, r, O) = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , allora la curva osculatrice sarà  $y = \alpha x^{2k+1}$ , per un certo  $\alpha$ .

In generale possiamo dunque dedurre che, ponendoci in una carta affine opportuna (ovvero dove il punto  $P$  sia un punto proprio), data la retta  $r$  tangente ad una curva  $\mathcal{C}$  in un suo punto semplice  $P$ , si hanno i seguenti comportamenti locali della curva, rispettivamente molteplicità pari e molteplicità dispari di intersezione di  $\mathcal{C}$  con  $r$  in  $P$ :

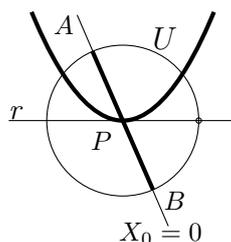


Cosa accade se cambiamo carta in modo che il punto  $P$  non compaia in quella carta, e sia quindi un punto improprio per la curva affine? Vediamo il caso di un punto improprio con tangente affine, dunque un punto asintotico, e il caso di un punto improprio con tangente impropria:

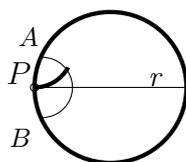
- *Punto improprio con tangente affine: punto asintotico*

– *Molteplicità pari di intersezione tra la retta tangente  $r$  e la curva  $C$  in  $P$ :*

Andiamo a guardare cosa accade in un intorno  $U$  molto piccolo del punto a cui siamo interessati:

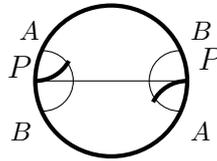


Poiché siamo in un intorno di un punto improprio, l'intersezione dell'intorno  $U$  con la retta impropria sarà non vuoto, in particolare corrisponderà al segmento marcato in figura, che chiamiamo  $AB$ , in quale divide in due l'intorno. Prendiamo in considerazione allora uno dei due semicerchi in cui viene tagliato l'intorno dalla retta impropria: scegliamo in particolare quello sulla sinistra nella rappresentazione e lo andiamo a rappresentare come segue nel modello topologico del piano proiettivo, considerando anche l'archetto della curva che si trova nella metà scelta.

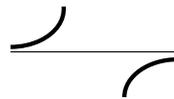


Il segmento  $AB$  è diventato l'arco di circonferenza  $AB$ , poichè costituito di punti impropri. Inoltre l'arco di curva è nel settore che contiene il punto  $A$ . Per tale motivo, se vogliamo rappresentare nella posizione corretta anche l'altra metà del cerchio nel modello, occorre tener presente che i punti del segmento sono identificati in base alla relazione di equivalenza antipodale.

Otteniamo dunque:



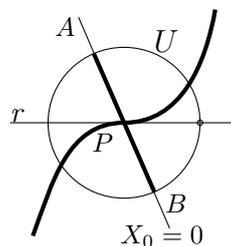
Notiamo che sulla destra nel disegno, l'arco di curva è ancora nel settore che contiene il punto  $A$ . Facendo il ragionamento a posteriori, cioè volendo ricostruire l'intorno, ho da prendere i due semicerchi e affinché, affiancandoli coincidano i punti in relazione, bisogna capolgere uno dei due semicerchi. Quello che vediamo nell'affine, disegnando solo il comportamento verso l'infinito, è:



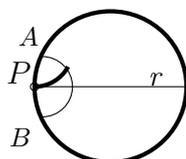
cioè i due archi della curva che si avvicinano sempre più all'asintoto, ognuno in uno dei due semipiani in cui l'asintoto divide il piano affine.

- *Molteplicità dispari di intersezione tra la retta tangente e la curva  $C$  in  $P$*

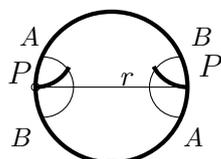
Facendo un discorso analogo a quello fatto sopra, consideriamo dapprima:



Rappresentiamo poi una sola metà dell'intorno, come prima quello sulla sinistra:



Ed ora rappresentiamo entrambi gli archi della curva, in cui è stata "divisa" dalla retta impropria, con la rispettiva metà di intorno seguendo la relazione antipodale:



A sinistra l'arco di curva è nel settore che contiene  $A$ , a destra in quello che contiene  $B$ . Quindi nell'affine, disegnando come prima solo il comportamento all'infinito rispetto all'asintoto, vediamo:



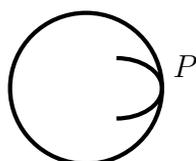
cioè due rami della curva che si avvicinano all'asintoto, in uno stesso semipiano.

Quindi quello che vediamo nell'affine nel caso d'un punto asintotico sembra esser l'opposto di quanto accade per un punto proprio: ad esempio, per la molteplicità pari di intersezione, nel caso d'un punto proprio ho che la curva è tutta in uno dei semipiani individuati dalla retta tangente, mentre nel caso d'un punto improprio si trova in entrambi i semipiani. Questa in realtà non è una differenza, come si è visto ma dipende soltanto dalla carta affine in cui ci si pone.

- *Punto improprio con tangente impropria*

- *Molteplicità pari di intersezione tra la retta tangente e la curva  $\mathcal{C}$*

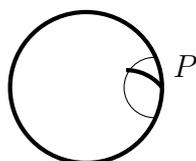
In questo caso, guardando al modello topologico, la retta impropria è rappresentata dalla circonferenza del disco, per cui si avrà semplicemente una rappresentazione di questo tipo:



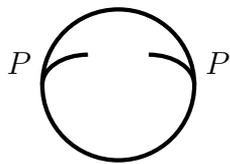
e nell'affine vedremo due rami che vanno all'infinito esattamente come due rami di parabola, ad esempio della parabola  $y = x^2$ .

- *Molteplicità dispari di intersezione tra la retta tangente e la curva  $\mathcal{C}$*

Poichè in questo caso la curva osculatrice ha un ramo in entrambi i due semipiani dati dalla retta impropria, in base allo studio precedente, facciamo un ragionamento analogo a quello fatto per un punto asintotico ma tenendo presente che la tangente non è più affine e dunque partiremo da una situazione di questo tipo, dove rappresentiamo ancora una sola metà dell'intorno, come prima quello sulla sinistra:



giungendo, attraverso ad un ragionamento come sopra, alla seguente rappresentazione:



Da questo deduciamo che nell'affine la curva avrà due archi che vanno all'infinito, in parti opposte del piano.

## 2.2 Analisi d'una curva in un punto doppio

Partiamo dal considerare una curva algebrica proiettiva piana  $\mathcal{C}$  di equazione:

$$F(X_0, X_1, X_2) = 0 \text{ con } F \in \mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]_d \quad (2.4)$$

ed un suo punto  $P = [p_0, p_1, p_2]$ , doppio. A differenza di quanto accadeva in un punto semplice, in cui avevamo una ed una sola retta tangente, in questo caso abbiamo esattamente due rette tangenti principali contate con molteplicità.

Supponiamo  $p_0 \neq 0$  e deomogeneizziamo  $F$  rispetto ad  $X_0$  mettendoci quindi nella carta affine  $X_0 \neq 0$ , ottenendo un polinomio  $f \in \mathbb{R}[x, y]$  e  $P = (a, b)$  con  $a = \frac{p_1}{p_0}$  e  $\frac{p_2}{p_0}$ . Prendiamo poi una generica retta affine  $r$  passante per  $P$  con equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = a + l_1 t \\ y = b + l_2 t \end{cases} \quad (l_1, l_2) \neq (0, 0) \quad (2.5)$$

Sostituiamo le espressioni al secondo membro di 2.5 nell'equazione affine della curva, ovvero nel polinomio  $f(x, y)$ , e utilizzando il teorema di Taylor otteniamo l'identità seguente:

$$f(l_1 t, l_2 t) = [f_x(a, b)l_1 + f_y(a, b)l_2]t + \frac{f_{xx}(a, b)l_1^2 + 2f_{xy}(a, b)l_1 l_2 + f_{yy}(a, b)l_2^2}{2!} t^2 + \dots \quad (2.6)$$

dove  $f_x$  e  $f_y$  indicano rispettivamente la derivata parziale di  $f$  rispetto ad  $x$  e rispetto ad  $y$ .

Osserviamo a questo punto che, nel caso specifico da noi considerato, ovvero  $P = (a, b)$  punto doppio, il termine di grado 1 non è presente in quanto ogni retta incontra  $\mathcal{C}$  almeno doppiamente in  $P$ . Inoltre le rette tangenti saranno date da quelle coppie  $(\bar{l}_1, \bar{l}_2)$  radici del polinomio di secondo grado in  $l_1$  e  $l_2$  rappresentato dal coefficiente del termine di secondo grado di 2.6, che chiamiamo  $f_2(l_1, l_2)$ . Infatti per tali coppie si avrà che la molteplicità di intersezione tra le rette in corrispondenza e la curva in  $P$  è strettamente maggiore di 2.

Inoltre sia  $P = O = (0, 0)$ , punto doppio per  $\mathcal{C}$ , e sia  $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx^3 + ex^2y + \dots$  la sua equazione. Facendo i conti, si vede facilmente che  $f_2(l_1, l_2) = al_1^2 + bl_1l_2 + cl_2^2$ , per cui l'equazione complessiva delle tangenti principali in  $O$  è data da:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$$

Su  $\mathbb{C}$  il polinomio omogeneo  $ax^2 + bxy + cy^2$  si spezza in due fattori lineari, su  $\mathbb{R}$  può o meno spezzarsi. Iniziamo allora il nostro studio proprio da qui, introducendo:

**Definizione 2.1.**

*Sia  $\mathcal{C}$  una curva algebrica piana affine reale e  $P$  un suo punto doppio. Diremo che*

- *$P$  è un nodo ordinario se  $f_2$  ha due radici distinte reali, ovvero se  $\mathcal{C}$  possiede due tangenti principali distinte e reali in  $P$ ;*
- *$P$  è un nodo isolato se  $f_2$  ha due radici complesse non reali, quindi  $\mathcal{C}$  possiede due rette tangenti distinte complesse non reali in  $P$ ;*
- *$P$  è un punto doppio non ordinario se  $f_2$  ha una sola radice di molteplicità 2, necessariamente reale, cioè  $\mathcal{C}$  possiede una sola retta tangente in  $P$  contata due volte;*

*In particolare  $P$  è una cuspidale di 1<sup>a</sup> specie se è un punto doppio non ordinario in cui l'unica retta tangente incontra la curva con molteplicità esattamente 3.*

Prima di vedere i vari casi, osserviamo che nel caso di un nodo isolato non vi è molto da dire nel senso che localmente la curva sarà rappresentabile soltanto nel punto  $P$  dal momento che stiamo lavorando in ambito reale.

Vediamo ora gli altri casi:

### 2.2.1 Analisi in un nodo ordinario

Procederemo ad analizzare il comportamento della curva in un intorno del punto dapprima rispetto ad una delle tangenti e poi rispetto all'altra e infine daremo una rappresentazione delle conclusioni, come è stato precedentemente fatto per i punti semplici.

Come sempre partiamo da una curva algebrica proiettiva piana  $\mathcal{C}$  di equazione 2.4 ed un suo punto  $P$  doppio. Poi applichiamo una proiettività tale che porti il punto  $P$  nel punto  $O = [1, 0, 0]$  e le rette tangenti rispettivamente in  $r : X_1 = 0$  e  $s : X_2 = 0$ . Infine deomogeneizziamo rispetto ad  $X_0$ : in questo modo la curva affine così ottenuta passerà per l'origine e avrà come tangenti in  $O$ , il nostro punto doppio, gli assi coordinati. Deduciamo dunque che l'equazione generale di  $\mathcal{C}$  sarà:

$$f(x, y) = xy + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^4 + \dots \quad (2.7)$$

Come nell'analisi di un punto semplice, prendiamo in considerazione delle funzioni ausiliarie in una terza variabile  $t$  della forma 2.2. Andiamo ora a vedere il comportamento rispetto alle due tangenti.

#### Studio della curva rispetto ad una delle due rette tangenti in $O$

Osserviamo che la molteplicità di intersezione tra l'asse delle ascisse e la nostra curva  $\mathcal{C}$  nell'origine dipende innanzitutto dal coefficiente  $a$ , se uguale o diverso da zero. Consideriamo i due casi seguenti:

- $a \neq 0$  cioè  $\mu(\mathcal{C}, s; O) = 3$ ;

Andiamo a considerare la prima famiglia di curve ausiliarie non banale nel senso che non ci dà informazioni già note, come osservato in modo simile nello studio dei punti semplici, ovvero:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \lambda t^2 \end{cases} \quad \lambda \neq 0$$

cioè di equazione  $y = \lambda t^2$ . Sostituiamo le espressioni al secondo membro in 2.7 ottenendo  $\mathcal{C}$ :  $f(t, \lambda t^2) = 0$ , dove:

$$f(t, \lambda t^2) = \lambda t^3 + at^3 + bt^2 \lambda t^2 + bt^2 \lambda t^2 + c(t \lambda t^2)^2 + \dots = (\lambda + a)t^3 + (\quad)t^4 + \dots$$

Deduciamo dunque che la curva osculatrice della curva data  $\mathcal{C}$ , nell'origine, risulta essere la parabola  $y = \lambda t^2$  con  $\lambda = -a$ , in quanto la generica parabola della famiglia suddetta ha molteplicità di intersezione 3 con la curva nell'origine mentre per la scelta detta precedentemente, la parabola in corrispondenza ha molteplicità di intersezione almeno 4, quindi è quella cercata.

- $a = 0$  e  $e \neq 0$  cioè  $\mu(\mathcal{C}, s; O) = 4$ ;

Riconsideriamo la stessa famiglia di parabole e sostituiamo come prima, ottenendo:

$$f(t, \lambda t^2) = \lambda t^3 + (\quad)t^4 + \dots$$

Dunque ogni parabola della famiglia sopra considerata ha molteplicità di intersezione 3 nell'origine, e per averne una con molteplicità superiore si dovrebbe scegliere  $\lambda = 0$ , scelta non consentita perchè ci ridà la retta tangente. Prendiamo allora in considerazione una famiglia di curve della forma:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \lambda t^3 \end{cases} \quad \lambda \neq 0$$

andiamo a sostituire in 2.7 ottenendo:

$$f(t, \lambda t^2) = \lambda t^4 + bt^2 \lambda t^3 + ct(\lambda t^3)^2 + d(\lambda t^3)^3 = (\lambda + e)t^4 + (\quad)t^5 + \dots$$

Quindi la curva osculatrice in questo caso è data dalla cubica della famiglia sopra considerata per la scelta  $\lambda = -e$ , in quanto è l'unica per cui la molteplicità di intersezione con  $\mathcal{C}$  in  $O$  è strettamente maggiore di 4.

Come nel caso d'un punto semplice, portando avanti l'analisi cioè considerando molteplicità di intersezione, tra  $s$  e curva in  $O$ , maggiori, si vede che

l'andamento della curva intorno al punto dipende soltanto dalla parità della molteplicità di intersezione tra la retta tangente  $s$  e curva in  $O$ , nello stesso senso in cui è stato osservato nello studio della curva in un punto semplice, tranne che andando avanti la curva osculatrice sarà più "adagiata" sulla tangente.

Notiamo tuttavia che nel caso d'un punto semplice, le curve osculatrici nel caso di molteplicità di intersezione, tra retta tangente e curva in  $O$ , pari e dispari erano rispettivamente una curva della forma  $y = ax^{2k}$  e  $y = bx^{2k+1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , per certi  $a, b \in \mathbb{R}$ : nello studio precedente si presenta una situazione capovolta, ovvero:

$-\mu(\mathcal{C}, s; O) = 2k$ : ho una curva della forma  $y = cx^{2k-1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ;

$-\mu(\mathcal{C}, s; O) = 2k + 1$ : ho una curva della forma  $y = dx^{2k}$

per certi  $c, d \in \mathbb{R}$ . Questo "capovolgimento" si spiega come segue:

dal momento che stiamo analizzando un nodo ordinario, quindi un punto in cui vi sono due tangenti distinte, risulta che la curva, in prossimità dell'origine, è costituita da due rami, "ognuno con la sua tangente". Dunque analizzando soltanto un ramo, la molteplicità di intersezione tra la curva data e la candidata curva osculatrice in  $O$  sarà data dalla molteplicità di intersezione nell'origine di quest'ultima con il ramo preso in considerazione più 1, dove questo contributo è dovuto all'intersezione tra la curva osculatrice e l'altro ramo, sempre in  $O$ , con in quale la curva ha molteplicità di intersezione appunto 1.

Se facciamo la stessa cosa rispetto all'altra tangente in  $O$ , rispetto al caso analizzato precedentemente, non vi è alcuna differenza, in quanto possiamo sempre supporre di operare una affinità e ricondurre il suddetto studio a quello precedente.

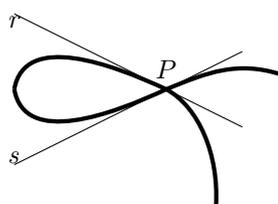
L'analisi compiuta sinora permette di dare una ulteriore classificazione dei nodi ordinari:

**Definizione 2.2.**

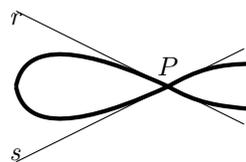
Sia  $\mathcal{C}$  una curva algebrica piana affine reale e  $P$  un suo nodo ordinario. Diremo allora che

- $P$  è un flecnodo se le molteplicità di intersezione tra le rette tangenti e la curva in  $P$  sono una 3 e l'altra  $> 3$ ;
- $P$  è un biflecnodo se le molteplicità di intersezione tra le rette tangenti e la curva in  $P$  sono entrambe  $> 3$ .

Dunque, riassumendo quanto detto sinora, abbiamo che ponendoci in una carta affine in cui  $P$ , il nostro nodo ordinario, sia un punto proprio con tangenti  $r$  e  $s$ , si hanno i seguenti possibili comportamenti locali della curva:



2.1: Flecnodo

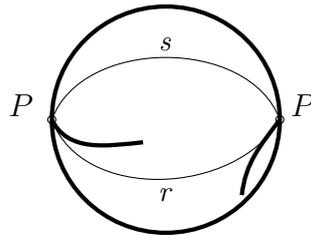


2.2: Biflecnodo

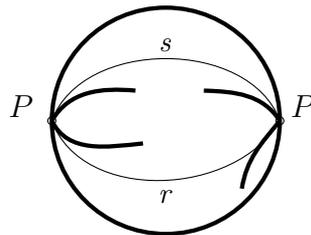
Analogamente a quanto detto nello studio di una curva in un punto semplice, anche in questo caso l'analisi della curva in nodi ordinari impropri si può effettuare lavorando in una opportuna carta affine. Possiamo allora dare una rappresentazione della curva attraverso il modello topologico del piano proiettivo reale, nel caso in cui il punto, rispetto alla carta in cui ci siamo posti, sia improprio con tangenti affini o improprio con una tangente affine ed una impropria, semplicemente partendo da quanto visto nel caso di un punto semplice e applicandolo separatamente prima per una tangente e poi per l'altra.

Vediamo come ottenere la rappresentazione della curva nel dettaglio nel caso specifico d'un *nodo improprio con tangenti affini e con molteplicità di intersezione tra le rette tangenti e la curva una pari e l'altra dispari*:

dapprima rappresentiamo nel modello topologico del piano proiettivo reale le due rette tangenti  $r$  ed  $s$  e il ramo della curva con tangente  $r$  la cui molteplicità di intersezione con la curva in  $P$  supponiamo dispari. Per quanto visto nel primo capitolo avrò:

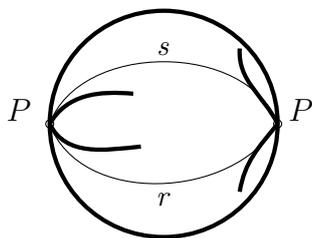


Rappresentiamo poi anche l'altro ramo della curva, la cui molteplicità di intersezione con la curva in  $P$  sarà pari, ottenendo:

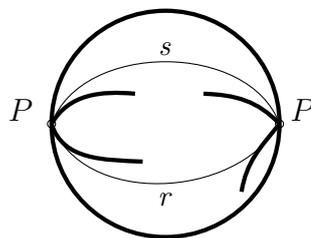


Per gli altri casi si può ragionare in modo del tutto analogo. Si ottiene dunque:

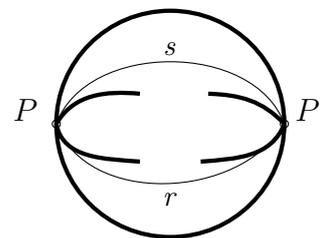
*-Punto improprio con tangenti affini:*



2.3: Entrambe le molteplicità dispari

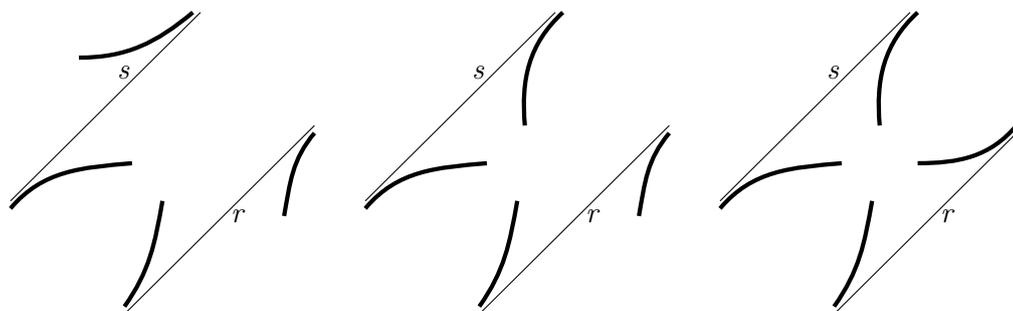


2.4: Molteplicità una pari e l'altra dispari



2.5: Entrambe le molteplicità pari

Quello che vediamo nell'affine, disegnando solo il comportamento verso l'infinito rispetto agli asintoti, è:



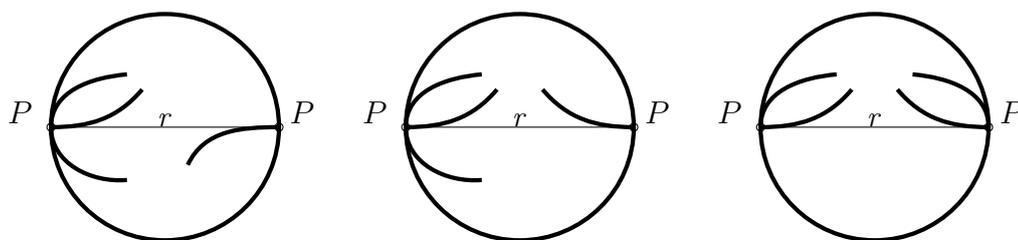
2.6: Entrambe le molteplicità dispari

2.7: Molteplicità una pari e l'altra dispari

2.8: Entrambe le molteplicità pari

-Punto improprio con una tangente affine ed una impropria:

Supponiamo che la retta impropria sia  $s$  e avremo, come prima, i vari casi. Si ottiene dunque:



2.9: Entrambe le molteplicità dispari

2.10: Molteplicità una pari e l'altra dispari

2.11: Entrambe le molteplicità pari

In particolare, il fatto che la molteplicità di intersezione tra curva e retta impropria nel nodo ordinario  $P$  sia dispari, nelle figure 2.9 e 2.10, si realizza nella carta affine in due rami della curva che vanno all'infinito come rami di

parabola, mentre nel caso pari si hanno due rami che vanno all'infinito in parti "opposte" del piano, allo stesso modo.

### 2.2.2 Analisi in un punto doppio non ordinario

Analogamente a quanto fatto nel caso di un nodo ordinario, consideriamo una curva algebrica proiettiva piana  $\mathcal{C}$  ed applichiamo una proiettività tale per cui  $P$  venga portato in  $O = [1, 0, 0]$  e l'unica retta tangente nella retta  $r : X_2 = 0$ , e poi deomogeneizziamo  $F$  rispetto ad  $X_0$ . Nella carta affine  $X_0 \neq 0$ , la curva così ottenuta avrà equazione:

$$f(x, y) = y^2 + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^4 + \dots \quad (2.8)$$

da cui si vede come la curva passi per l'origine e sia questa un punto doppio con due tangenti coincidenti di equazione  $y = 0$ .

A questo punto, analogamente a quanto fatto con i punti semplici, andiamo a considerare i casi in base alla molteplicità di intersezione tra la curva e la retta  $y = 0$  in  $(0,0)$ , che sarà almeno 3:

$$-\mu(\mathcal{C}, r; O) = 3 \text{ cioè } a \neq 0 \text{ (ovvero } O \text{ è una } \textit{cuspidi di 1}^a \textit{ specie):}$$

Per quanto detto prima stiamo analizzando una cuspidi: prendiamo sempre la famiglia di parabole:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \lambda t^2 \end{cases} \quad \lambda \neq 0 \quad (2.9)$$

sostituiamo le espressioni al secondo membro in 2.8 ottenendo:

$$f(t, \lambda t^2) = (\lambda t^2)^2 + at^3 + bt^2\lambda t^2 + \dots = at^3 + (\quad)t^4 + \dots$$

Da cui osserviamo che la molteplicità di intersezione tra la curva e la generica parabola della famiglia considerata è sempre esattamente 3, risultato per noi non interessante poichè ci dà una approssimazione della curva dello stesso tipo dato già dalla retta tangente. Prendiamo allora una famiglia di cubiche

come fatto sinora:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \lambda t^3 \end{cases} \quad \lambda \neq 0$$

sostituiamo sempre in 2.8 ed otteniamo:

$$f(t, \lambda t^3) = (\lambda t^3)^2 + at^3 + bt^2 \lambda t^3 + \dots = at^3 + (\quad)t^4 + \dots$$

e quindi neanche una famiglia di cubiche soddisfa le nostre richieste. Procedendo con famiglie di questo tipo, ovvero della forma:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \lambda t^n \end{cases} \quad \lambda \neq 0, n \geq 4$$

una volta sostituito tali espressioni in 2.8 avremo sempre il termine in  $t^3$  non nullo ottenuto da  $ax^3$  di 2.8 e la molteplicità di intersezione non sarà mai superiore a 3. Dunque sorge la necessità di cambiare la tipologia di curve in modo tale che quando andiamo a sostituire l'espressione in  $t$  con cui viene espressa la  $x$ , il termine in  $x^3$  di 2.8 non impedisca di ottenere una molteplicità di intersezione maggiore. Quindi proviamo con la seguente famiglia:

$$\begin{cases} x = \lambda t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \quad \lambda \neq 0$$

Sostituendo in 2.8 otteniamo:

$$f(\lambda t^2, t^3) = (t^3)^2 + a(\lambda t^2)^3 + b(\lambda t^2)^2 t^3 + c\lambda t^2 t^6 + dt^9 + \dots = (1 + \lambda^3 a)t^6 + (\quad)t^7 + \dots$$

Quindi scegliendo  $\lambda = \sqrt[3]{-\frac{1}{a}}$ , si ha una curva che incontra la curva data con molteplicità 6 e quindi è la curva cercata. Vediamo ad esempio cosa succede se  $a = -1$ : in questo caso  $\lambda = 1$  e la curva osculante ha equazione

$$y^2 = x^3$$

$-\mu(\mathcal{C}; r; O) = 4$  cioè  $a = 0$  e  $e \neq 0$ :

Consideriamo la famiglia di parabole di equazione 2.9 e sostituiamo nella 2.8, ottenendo:

$$f(t, \lambda^2) = (\lambda t^2)^2 + bt^2 \lambda t^2 + ct(\lambda t^2)^2 + d(\lambda t^2)^3 + et^4 + \dots = (\lambda^2 + b\lambda + e)t^4 + (\dots)t^5 + \dots \quad (2.10)$$

Dunque si hanno dei valori di  $\lambda$ , dati dalle radici del polinomio  $\lambda^2 + b\lambda + e \in \mathbb{R}[\lambda]$ , per i quali le curve in corrispondenza, le *parabole osculatrici*, soddisfano le nostre richieste, avendo infatti molteplicità di intersezione con la curva data almeno 5.

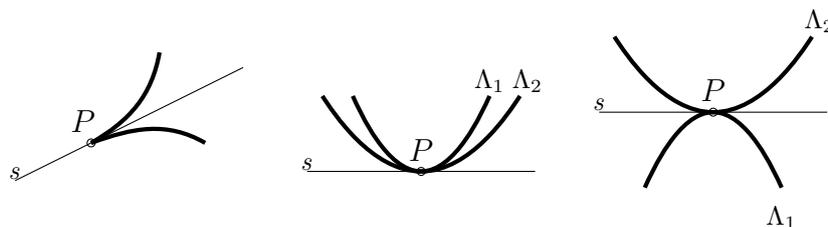
**Definizione 2.3.** *Sia  $\mathcal{C}$  una curva algebrica proiettiva piana reale,  $P$  un suo punto doppio non ordinario e la tangente principale in  $P$  incontri  $\mathcal{C}$  con molteplicità esattamente 4. Diremo che*

- *$P$  è un tacnodo isolato se esistono 2 distinte coniche osculatrici a  $\mathcal{C}$  in  $P$  (con molteplicità di intersezione  $\geq 5$ ) e tali coniche sono complesse e non reali;*
- *$P$  è un tacnodo se esistono 2 distinte coniche reali osculatrici a  $\mathcal{C}$  in  $P$  (con molteplicità di intersezione  $\geq 5$ ).*

Nel caso in cui il polinomio  $\lambda^2 + b\lambda + e$  ha due radici reali coincidenti, quindi una radice di molteplicità due, si ha una sola parabola osculatrice ed è necessario proseguire lo studio.

Per il momento soffermiamoci su questi primi casi, ovvero tacnodo e cuspidi di 1<sup>a</sup> specie.

Vediamone una rappresentazione in una carta affine, opportuna rispetto al punto che vogliamo proprio, supponendo appunto che la curva abbia nel punto doppio (non ordinario)  $P$  una ed una sola retta tangente (affine per ora) che chiamiamo  $s$ . Siano  $\lambda_1, \lambda_2$  le radici di  $\lambda^2 + b\lambda + e$  e  $\Gamma_1, \Gamma_2$  le parabole osculatrici in corrispondenza:



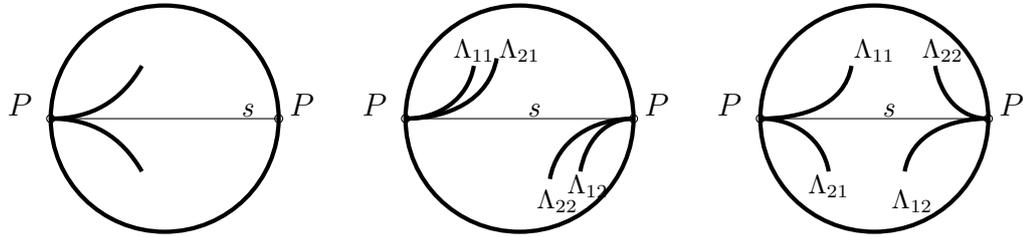
2.12: *Cuspide*  
di 1<sup>a</sup> specie

2.13: *Tacnodo*  
 $\lambda_1 \lambda_2 > 0$

2.14: *Tacnodo*  
 $\lambda_1 \lambda_2 < 0$

Si noti che  $\lambda_i \neq 0$  poichè  $e \neq 0$  nel caso del tacnodo. Si osservi inoltre che nei casi 2.13 e 2.14 la curva risulta costituita da due rami in prossimità di  $P$ . Analogamente a quanto fatto per la rappresentazione di un nodo ordinario improprio nel modello topologico del piano proiettivo reale, passiamo ora a dare una rappresentazione delle combinazioni punto doppio non ordinario improprio con tangente affine e punto doppio non ordinario con tangente impropria, sempre nel modello sopracitato:

-Punto doppio non ordinario improprio con tangente affine:



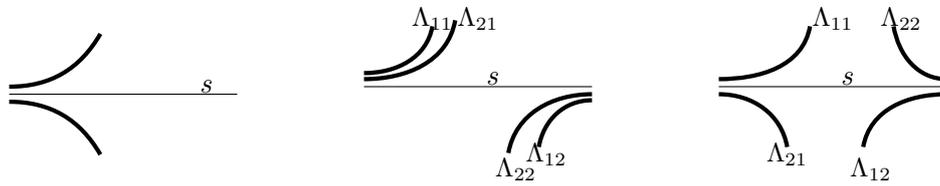
2.15: *Cuspide*  
di 1<sup>a</sup> specie

2.16: *Tacnodo*  
 $\lambda_1 \lambda_2 > 0$

2.17: *Tacnodo*  
 $\lambda_1 \lambda_2 < 0$

dove  $\Lambda_{i1}$  e  $\Lambda_{i2}$  sono i due archi in cui si divide la parabola  $\Lambda_i$  nel momento in cui la rappresentiamo nel modello, ed  $s$  rappresenta la tangente affine in  $P$  alla curva.

Disegnando quanto si vede nell'affine, guardando però solo il comportamento verso l'infinito rispetto all'asintoto, si ha:

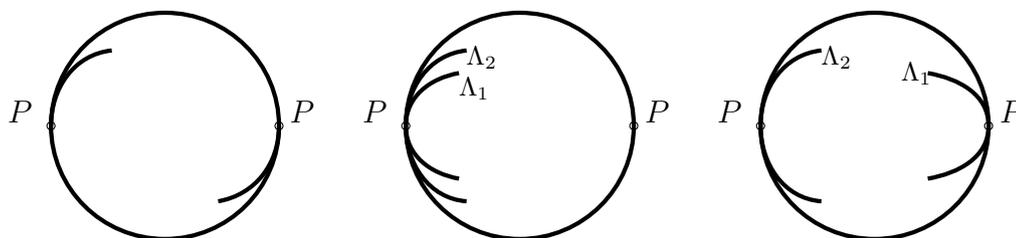


2.18: *Cuspide*  
di 1<sup>a</sup> specie

2.19: *Tacnodo*  
 $\lambda_1 \lambda_2 > 0$

2.20: *Tacnodo*  
 $\lambda_1 \lambda_2 < 0$

-Punto doppio non ordinario improprio con tangente impropria:



2.21: *Cuspide*  
di 1<sup>a</sup> specie

2.22: *Tacnodo*  
 $\lambda_1 \lambda_2 > 0$

2.23: *Tacnodo*  
 $\lambda_1 \lambda_2 < 0$

Ritorniamo ora a studiare i punti doppi non ordinari da dove era stata interrotta l'analisi. Esaminiamo la molteplicità di intersezione tra la curva e l'unica parabola osculatrice, che chiamiamo  $\Lambda$  e che abbiamo in corrispondenza dell'unica radice di  $\lambda^2 + b\lambda + e$ , che chiamiamo  $\bar{\lambda}$ .

- $\mu(\mathcal{C}; \Lambda; P) = 5$ :

In questo caso diciamo che  $P$  è una *cuspide di seconda specie* o *cuspide ramfoide*.

- $\mu(\mathcal{C}; \Lambda; P) \geq 6$ :

In questo caso quindi si annulla anche il coefficiente di grado 5 di 2.10 ed è necessario prendere in considerazione curve più complesse, della forma:

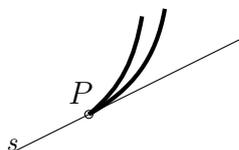
$$\begin{cases} x = t \\ y = \bar{\lambda}t^2 + \mu t^3 \quad \mu \neq 0 \end{cases}$$

Intersecando la generica curva di questa famiglia con la curva  $\mathcal{C}$  si ottiene un'espressione in cui figura un polinomio di grado 2 in  $\mu$  che chiamiamo  $h(\mu) \in \mathbb{R}[\mu]$ ; se  $h(\mu)$  ha due radici reali distinte si parla di *oscnode* e le curve osculatrici saranno due cubiche reali individuate dalle radici; se  $h(\mu)$  ha radici complesse parleremo di *oscnode isolato* e

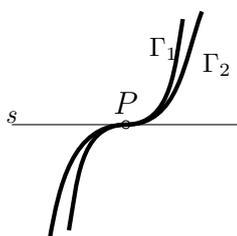
non vi è molto da dire e rappresentare, analogamente a quanto accadeva con un nodo isolato; infine se  $h(\mu)$  ha una sola radice di molteplicità 2 è necessario proseguire l'analisi intersecando la cubica così ottenuta  $y = \bar{\lambda}x^2 + \bar{\mu}x^3$  con la curva e controllare la molteplicità di intersezione. Se tale molteplicità è 7, si parla di *cuspidine di terza specie*, altrimenti bisogna proseguire considerando altre famiglie di curve, più complesse, analogamente a quanto fatto poc'anzi.

Proseguendo in questo modo, dopo un numero finito di passi, si arriverà a determinare la natura del punto.

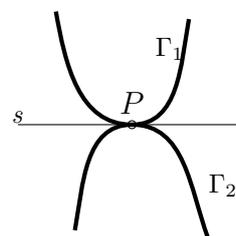
Diamo infine la solita rappresentazione conclusiva d'ogni indagine in una carta affine in cui  $P$  sia proprio con tangente  $s$ , propria anch'essa per ora, e chiamando inoltre  $\mu_1$  e  $\mu_2$  le radici del polinomio  $h(\mu)$ , si ha il seguente comportamento locale della curva in prossimità del punto:



2.24: *Cuspide ramfoide*



2.25: *Oscnodo*  
 $\mu_1\mu_2 > 0$

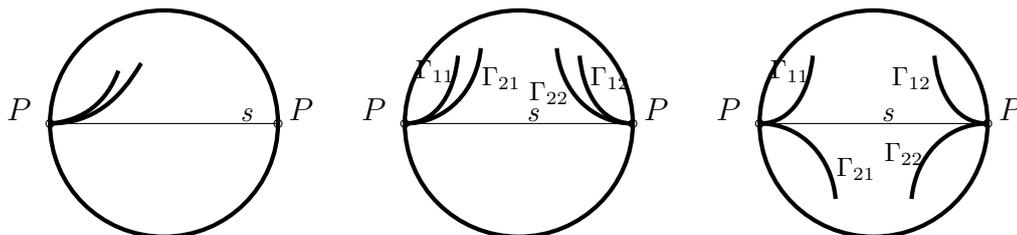


2.26: *Oscnodo*  
 $\mu_1\mu_2 < 0$

Nelle figure 2.25 e 2.26  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  sono le cubiche ottenute in corrispondenza delle radici di  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , dette poc'anzi. Anche in questi due casi dunque la curva risulta costituita da due rami in prossimità del punto  $P$ .

Vediamo ora le rappresentazioni delle consuete combinazioni di punto improprio e tangente affine/impropria:

-Punto improprio con tangente affine  $s$ :

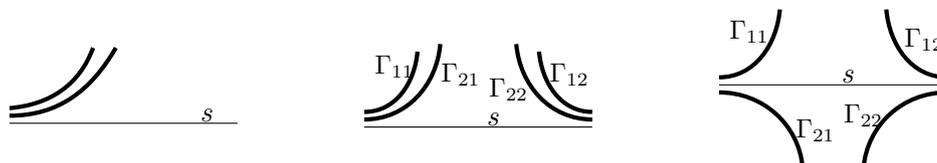


2.27: *Cuspide*  
*ramfoide*

2.28: *Oscnodo*  
 $\mu_1\mu_2 > 0$

2.29: *Oscnodo*  
 $\mu_1\mu_2 < 0$

dove  $\Gamma_{i1}$  e  $\Gamma_{i2}$  sono i due archi in cui si divide la cubica  $\Gamma_i$  nel momento in cui consideriamo tale rappresentazione. Come prima disegniamo il comportamento all'infinito della curva rispetto l'asintoto nell'affine:



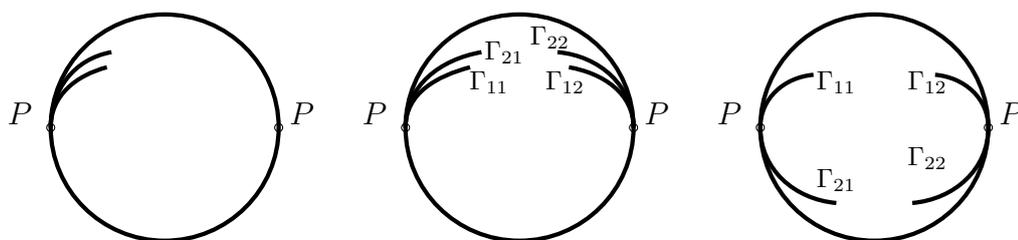
2.30: *cuspide*  
*ramfoide*

2.31: *Oscnodo*  
 $\mu_1\mu_2 > 0$

2.32: *Oscnodo*  
 $\mu_1\mu_2 < 0$

-Punto improprio con tangente impropria:

Supponiamo dunque che la tangente  $r$  sia impropria e proseguiamo a rappresentare i vari casi:



2.33: *cuspidè*  
*ramfoide*

2.34: *Oscnodo*  
 $\mu_1\mu_2 > 0$

2.35: *Oscnodo*  
 $\mu_1\mu_2 < 0$

dove  $\Gamma_{i1}$  e  $\Gamma_{i2}$  sono sempre i due archi in cui si divide  $\Gamma_i$ .



# Capitolo 3

## Esempi

In questo capitolo vengono forniti esempi di curve algebriche piane reali che possiedono nell'origine punti della tipologia studiata precedentemente. I disegni delle curve 3.6 e 3.8 sono presi da [4], pag.67, mentre i disegni delle curve 3.1 e 3.5 da [5], nella sezione "Curve celebri".

### 3.1 La Lumaca di Pascal

La *Lumaca di Pascal* è una famiglia di curve algebriche piane di grado 4 data dalla seguente equazione:

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2(x^2 + y^2) \quad (3.1)$$

dove  $a, b \in \mathbb{R}$  sono dei parametri *strettamente positivi*. Iniziamo osservando che l'origine è un punto doppio per ogni curva della famiglia, infatti mancano i termini di primo grado e di grado zero in  $x$  ed  $y$ , mentre sono presenti termini di secondo grado.

Per capire la tipologia di punto doppio, sviluppiamo i calcoli ed otteniamo:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) + (a^2 - b^2)x^2 - b^2y^2 = 0 \quad (3.2)$$

I termini in  $x$  ed  $y$  di grado 2 ci danno l'equazione delle tangenti nell'origine alla curva. Andiamo a distinguere i vari casi in base alla relazione tra  $a$  e  $b$ :

- $a > b$

Risulta dunque  $a^2 - b^2 > 0$  e la curva avrà due tangenti reali nell'origine, ovvero:

$$r : \sqrt{a^2 - b^2}x - by = 0 \quad \text{ed} \quad s : \sqrt{a^2 - b^2}x + by = 0$$

dunque abbiamo che l'origine è un *nodo ordinario*. Consideriamo le equazioni parametriche di  $r$  ed  $s$ :

$$r : \begin{cases} x = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} t \\ y = t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = -\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} t \\ y = t \end{cases}$$

Andando a sostituire le espressioni precedenti in 3.2, si ottiene in entrambi i casi:

$$\left(\frac{b^2}{a^2 - b^2} + 1\right)^2 t^4 + \frac{2ab}{a^2 - b^2} \left(\frac{b^2}{a^2 - b^2} + 1\right) t^3 = 0$$

Dunque dato che  $\frac{2ab}{a^2-b^2}(\frac{b^2}{a^2-b^2} + 1) \neq 0$ , sia  $r$  che  $s$  intersecano la curva in  $O$  con molteplicità 3, quindi dispari.

Prendendo ad esempio, per semplicità,  $\sqrt{a^2-b^2} = 1$  e  $b = 1$ , da cui  $a = \sqrt{2}$  ed operando come fatto nei capitoli precedenti, si trova che le curve osculatrici nell'origine sono:

- $(3 - \sqrt{2})(x^2 + y^2) - (3 - \sqrt{2})xy - 2\sqrt{2}(x + y) = 0$  parabola che oscula la curva rispetto alla tangente  $r$ ;
- $(3 - \sqrt{2})(x^2 + y^2) + (3 - \sqrt{2})xy - 2\sqrt{2}(x - y) = 0$  parabola che oscula la curva rispetto alla tangente  $s$ .

- $a = b$

L'equazione della Lumaca di Pascal diventa:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) - a^2y^2 = 0 \quad (3.3)$$

Risulta esservi una sola tangente  $r$  nell'origine di equazione  $y = 0$ . L'origine risulta quindi essere un *punto doppio non ordinario*: vediamo qual è la molteplicità di intersezione tra  $r$  e la curva nell'origine. La retta  $r$  ha equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

da cui sostituendo in 3.3, si ha:

$$t^4 - 2at^3 = 0$$

Dunque la molteplicità di intersezione è 3, in quanto  $a \neq 0$  e quindi l'origine è una *cuspidi di 1<sup>a</sup> specie*. Nel caso particolare di  $a = b = 1$ , operando come fatto in generale nei capitoli precedenti, si trova che la curva osculatrice nell'origine è  $2y^2 + x^3 = 0$

- $a < b$

Risulta dunque  $a^2 - b^2 < 0$  e la curva avrà due tangenti complesse non

reali nell'origine, di equazioni:

$$r : i\sqrt{b^2 - a^2}x - by = 0 \quad e \quad s : i\sqrt{b^2 - a^2}x + by = 0$$

dunque abbiamo che l'origine è un *nodo isolato*.

Di seguito è fornito il disegno della curva nei 3 casi:

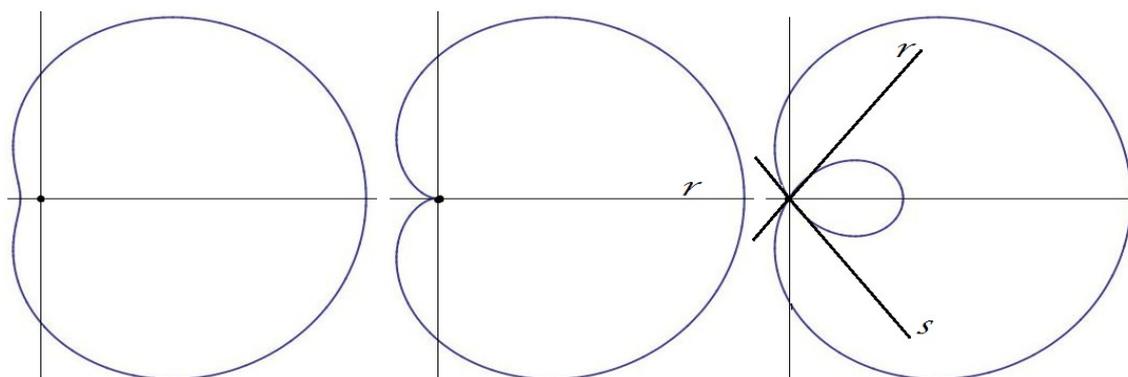


Figura 3.1: Lumaca di Pascal: rispettivamente  $a < b$ ,  $a = b$  e  $a > b$

## 3.2 La Lemniscata di Bernoulli

La *Lemniscata di Bernoulli* è una famiglia di curve algebriche piane di grado 4 descritte dalla seguente equazione:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \quad (3.5)$$

dove  $a$  è un parametro reale *strettamente positivo*. Come prima, osserviamo che l'origine è un punto singolare per la curva in quanto mancano i termini di grado 0 e di grado 1. In particolare è un *punto doppio* in quanto  $a$  è strettamente positivo. Inoltre è un *nodo ordinario* poichè la generica curva possiede in  $O$  due tangenti distinte  $r$  ed  $s$  di equazioni rispettivamente  $r : x = y$  e  $s : x = -y$ . Ne consideriamo le equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases}$$

Poichè la  $x$  compare in 3.5 soltanto con grado pari, sostituendo le precedenti espressioni in 3.5, in entrambi i casi si ottiene  $t^4 = 0$ , quindi sia  $s$  che  $r$  intersecano la curva con molteplicità 4 ed abbiamo dunque un *biflencnodo*. Prendiamo per semplicità nuovamente  $a = 1$  e otteniamo le seguenti curve osculatrici:

- $x^3 + y^3 + \frac{3}{8}x^2y + \frac{3}{8}xy^2 - \sqrt{2}(x - y) = 0$  cubica che oscula la curva rispetto alla tangente  $r$ ;
- $x^3 - y^3 - \frac{3}{8}x^2y + \frac{3}{8}xy^2 - \sqrt{2}(x + y) = 0$  cubica che oscula la curva rispetto alla tangente  $s$ .

Nel seguito forniamo il disegno della curva:

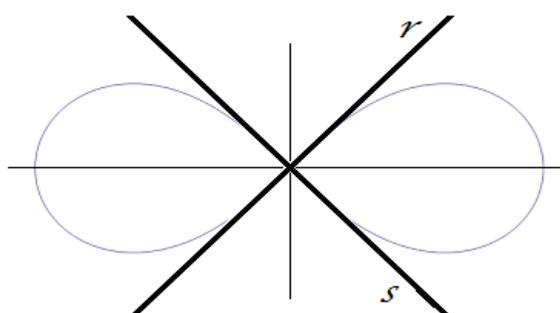


Figura 3.2: Lemniscata di Bernoulli

### 3.3 Curva algebrica piana con *tacnodo*

Consideriamo la seguente curva algebrica piana  $\mathcal{C}$  di equazione:

$$\mathcal{C} : 2x^4 + y^4 - 2y^3 - 3x^2y + y^2 = 0 \quad (3.6)$$

La curva  $\mathcal{C}$  risulta passare per l'origine in quanto manca il termine di grado 0 ed inoltre è ivi singolare, mancando i termini di grado 1. In particolare  $O$  è un *punto doppio non ordinario* con un'unica tangente di equazione

$r : y = 0$ . Ne consideriamo l'equazione parametrica, ovvero 3.4 e sostituendole in 3.6, si ottiene  $2t^4 = 0$ . A questo punto è necessario andare a guardare alle *parabole osculatrici* nell'origine, poichè a seconda che queste siano reali distinti, reali coincidenti o complesse, avremo una singolarità differente. Consideriamo la seguente famiglia di parabole:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \lambda t^2 \end{cases} \quad \lambda \neq 0 \quad (3.7)$$

Sostituendo le precedenti espressioni in 3.6, si ottiene:

$$2t^4 + \lambda^4 t^8 - 2\lambda^3 t^6 - 3\lambda t^4 + \lambda^2 t^4 = 0$$

$$(\lambda^2 - 3\lambda + 2)t^4 - 2\lambda^3 t^6 + \lambda^4 t^8 = 0$$

Dunque la generica parabola della famiglia 3.7 interseca  $\mathcal{C}$  nell'origine con molteplicità 4 ma le parabole in corrispondenza delle radici del coefficiente di  $t^4$ , ovvero  $y = 2x^2$  e  $y = x^2$ , hanno molteplicità di intersezione 5. Dunque vi sono due parabole osculatrici reali distinte e l'origine risulta essere un *tacnodo*. Come prima forniamo un disegno della curva:

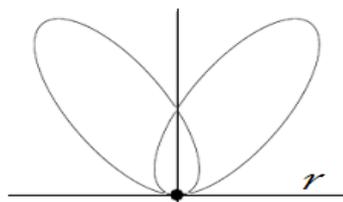


Figura 3.3: Curva con tacnodo nell'origine

### 3.4 Curva algebrica piana con *cuspidi ramfoide*

Consideriamo la seguente curva algebrica piana  $\mathcal{C}$  di equazione:

$$\mathcal{C} : x^4 + x^2y^2 - 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0 \quad (3.8)$$

Risulta che  $\mathcal{C}$  è singolare nell'origine in quanto mancano i termini di grado 0 e di grado 1 in  $x$  ed  $y$ . In particolare  $O$  è un *punto doppio non ordinario* con un'unica tangente di equazione  $r : y = 0$ . Considerandone le equazioni parametriche, ovvero 3.4, e sostituendole in 3.8, si ottiene  $t^4 = 0$ . Come prima, dobbiamo guardare alle parabole osculatrici: prendiamo una famiglia di parabole della forma 3.7, sostituiamo in 3.8 ed otteniamo:

$$t^4 + \lambda^2 t^6 - 2\lambda t^4 - \lambda^2 t^6 + \lambda^2 t^4 = 0$$

$$(1 - 2\lambda + \lambda^2)t^4 - \lambda^2 t^5 + \lambda^2 t^6 = 0$$

Risulta dunque esservi un'unica parabola osculatrice:  $y = x^2$ , la cui molteplicità di intersezione con  $\mathcal{C}$  nell'origine è esattamente 5: abbiamo quindi una *cuspidi ramfoide*. Forniamo infine anche per questa curva un disegno:

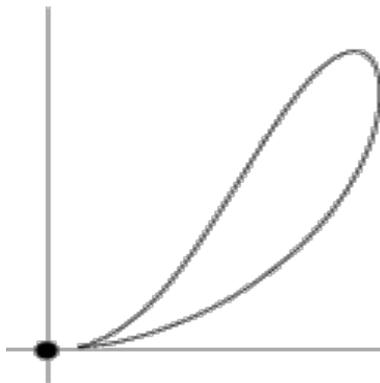


Figura 3.4: Curva con cuspidi ramfoide nell'origine



# Bibliografia

- [1] E. Sernesi, Geometria 1 (seconda edizione), Torino, Bollati Boringhieri, 2000.
- [2] A. Alzati, Appunti del corso di Geometria 3, Torino, a.a. 2005/2006
- [3] L. Migliorini, A. Gimigliano, Appunti del corso di Geometria Proiettiva, Bologna, a.a. 2015/2016
- [4] Walker, R. J. Algebraic Curves. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [5] <http://progettomatematica.dm.unibo.it/>, Bologna, 1999.