Alma Mater Studiorum
Università di Bologna

SCUOLA di SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

DENSITÀ CON LA PROPRIETÀ DI MEDIA PER I SUB-LAPLACIANI

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ERMANNO LANCONELLI

Presentata da:
ALBERTO RIGHINI

Sessione II
Anno Accademico 2015-2016

Indice

Introduzione

In questa tesi ci occuperemo dello studio di densità con la proprietà di media per i sub-Laplaciani.

Questo studio è già stato effettuato per l'operatore di Laplace. Infatti Hansen e Netuka, in [8], e Aikawa, in [2], hanno dimostrato che su ogni aperto sufficientemente regolare (ad esempio $C^{1+\varepsilon}$) esistono misure con la proprietà di media per le funzioni armoniche, assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue e con densità positiva ovunque. Inoltre, più recentemente, Cupini e Lanconelli, in [5], hanno determinato delle densità positive con la proprietà di media per il Laplaciano sulle d-palle, con d norma liscia e omogenea e hanno introdotto la nozione di Γ-tripla per studiare un problema inverso.

Nel primo capitolo di questa tesi richiameremo dei ben noti risultati sulle funzioni armoniche e riporteremo i risultati precedentemente citati che riguardano le densità con la proprietà di media per il Laplaciano.

Nel secondo capitolo introdurremo le notazioni, le definizioni di base e, senza dimostrazione, alcuni risultati riguardanti i gruppi di Lie (omogenei) su $\mathbb{R}^N$. In seguito potremo così introdurre i gruppi di Carnot, che costituiranno la struttura geometria sulla quale verranno poi definiti i sub-Laplaciani. Infine richiameremo i principali risultati sui sub-Laplaciani: l'esistenza e l'unicità della soluzione fondamentale, l'identità di Green e la formula di rappresentazione di Green, delle formule di media sui dischi delle funzioni gauge, che estendono il classico Teorema di Gauss per le funzioni armoniche ed enunceremo i principi di massimo, sia per funzioni sufficientemente regolari ($\mathcal{C}^2$), sia per funzioni sub-armoniche (e super-armoniche) rispetto a un dato sub-Laplaciano, che siano solamente superiormente semi-contine (o inferiormente semi-continue).

Nell'ultimo capitolo affronteremo il problema più nuovo della tesi: quello dell'estensione dei risultati precedenti sulle densità con la proprietà di media per il Laplaciano, al caso dei sub-Laplaciani sui gruppi di Carnot. In particolare determineremo un'espressione generale per una densità positiva con la proprietà di media, su un insieme Ω generico che soddisfi certe prorpietà di regolarità. Troveremo inoltre delle stime della funzione di Green e del nucleo di Poisson (analoghe a quelle trovate da Uguzzoni e Lanconelli in [12] per il Laplaciano di Kohn) per un qualsiasi sub-Laplaciano su un generico gruppo di Carnot e tramite queste stime troveremo delle condizioni sufficienti affinchè, con la densità precedentemente trovata, si possa avere una struttura di Γ-tripla sull'insieme Ω. Studieremo infine un problema inverso, analogo a quello già studiato da Cupini e Lanconelli in [5], per il quale sarà fondamentale avere una struttura di Γ-tripla.

Capitolo 1

Il Laplaciano

In questo capitolo richiameremo i risultati che hanno motivato lo studio svolto in questa tesi. Dopo aver richiamato le formule di media per il Laplaciano classico, vedremo il Teorema di Koebe, che afferma che la validità di queste formule caratterizza l'insieme delle funzioni armoniche su un qualsiasi aperto di $\mathbb{R}^N$.

In seguito richiameremo la nozione di misura e quella di densità con la proprietà di media per le funzioni armoniche ed enunceremo i risultati ottenuti da Hansen e Netuka e in seguito da Aikawa sull'esistenza di tali densità, positive, su domini sufficientemente regolari.

Infine daremo la nozione di Γ-tripla e, dopo aver richiamato un risultato di caratterizzazione delle palle euclidee di Aharonov, Schiffer e Zalcman, enunceremo i più recenti risultati ottenuti da Cupini e Lanconelli, che riguardano un problema inverso di Teoria del Potenziale per il Laplaciano.

1.1 Formula di rappresentazione di Green

Richiamiamo ora, senza dimostrazione, il Teorema di integrazione per parti.

Definizione 1.1.1 (Aperto regolare). $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *è un* Aperto regolare *se:*

(i) Ω *è un aperto limitato;*

(ii) $\partial\Omega$ *è una* $(N-1)$*-varietà di classe* $\mathcal{C}^1$*;*

(iii) per ogni $x_0 \in \Omega$*, esiste* $\nu \perp \partial\Omega$ *in* x_0*,* $|\nu| = 1$ *tale che*

$$x_0 + t\nu \notin \overline{\Omega} \quad \forall t \in]0,\delta[$$
$$x_0 - t\nu \in \Omega \quad \forall t \in]0,\delta[$$

per un opportuno $\delta > 0$*.* ν *normale esterna.*

Teorema 1.1.2 (Integrazione per parti). *Sia* Ω *un aperto regolare di* $\mathbb{R}^N$ *e* ν *la normale esterna. Sia inoltre* $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$*. Allora*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx = \int_{\partial\Omega} f\nu_j\, d\sigma, \quad \forall j = 1,\dots,N$$

dove ν_j *è la* j*-esima componente della normale esterna.*

Come corollario si ha il Teorema della divergenza.

Teorema 1.1.3 (Teorema della divergenza). *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un aperto regolare. Sia inoltre* $F \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. *Allora*

$$\int_\Omega \operatorname{div} F\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle\, d\sigma.$$

Dimostrazione.

$$\int_\Omega \operatorname{div} F\, dx = \int_\Omega \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_j}{\partial x_j}\, dx = \sum_{j=1}^N \int_\Omega \frac{\partial F_j}{\partial x_j}\, dx = \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega} F_j \nu_j\, d\sigma =$$
$$= \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^N F_j \nu_j\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle\, d\sigma.$$

□

Applicando il teorema appena dimostrato si può calcolare l'area della superficie sferica.
Posto $\omega_N = |B(0,1)|$, si ha, con un semplice cambio di variablie, che $|B(\alpha, r)| = r^N \omega_N$. D'altra parte, se si considera $F(x) = \frac{x-\alpha}{N}$, si ha $\operatorname{div} F = 1$, quindi, per il Teorema della divergenza:

$$|B(\alpha,r)| = \int_{B(\alpha,r)} dx = \int_{B(\alpha,r)} \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{\partial B(\alpha,r)} \langle \frac{x-\alpha}{N}, \frac{x-\alpha}{|x-\alpha|} \rangle\, d\sigma =$$
$$= \int_{\partial B(\alpha,r)} \frac{1}{N} |x-\alpha|\, d\sigma = \frac{r}{N} |\partial B(\alpha, r)|$$

Quindi si ottiene che

$$|\partial B(\alpha, r)| = N r^{N-1} \omega_N.$$

Ricordiamo ora la definizione di Soluzione fondamentale per il Laplaciano.

Definizione 1.1.4 (Soluzione fondamentale di Δ).

$$\textit{Se } N = 2, \quad \Gamma(x) := \frac{1}{2\pi} \log\Big(\frac{1}{|x|}\Big), \quad x \neq 0.$$
$$\textit{Se } N = 3, \quad \Gamma(x) := \frac{C_N}{|x|^{N-2}}, \quad C_N = \frac{1}{N(N-2)\omega_N}, \quad x \neq 0.$$

Osservazione 1.1.5. *Risulta* Γ *armonica in* $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ *e* $\Gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Ora, tramite il Teorema della divergenza, possiamo dimostrare l'Identità di Green e in seguito la formula di rappresentazione di Green.

1.1.1 Identità di Green

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto regolare e siano u, $v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$. Si ha

(I) $\operatorname{div}(v \nabla u) = v \Delta u + \langle \nabla v, \nabla u \rangle$

(II) $\operatorname{div}(u\nabla v) = u\Delta v + \langle \nabla u, \nabla v\rangle$

(III) Sottraendo, otteniamo la seguente *Formula di reciprocità*:

$$\operatorname{div}(v\nabla u - u\nabla v) = v\Delta u - u\Delta v$$

Per il Teorema della divergenza, si ha:

$$\begin{aligned}\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\,dx &= \int_\Omega \operatorname{div}(v\nabla u - u\nabla v)\,dx = \int_{\partial\Omega} \langle v\nabla u - u\nabla v, \nu\rangle\,d\sigma = \\ &= \int_{\partial\Omega} (v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu})\,d\sigma.\end{aligned}$$

Abbiamo cioè ottenuto la seguente **Identità di Green**:

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\,dx = \int_{\partial\Omega} (v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu})\,d\sigma. \tag{1.1}$$

1.1.2 Fromula di rappresentazione di Green

Teorema 1.1.6. *Sia Ω aperto regolare di $\mathbb{R}^N$, $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ e $x_0 \in \Omega$. Allora vale:*

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} (v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu})\,d\sigma - \int_\Omega v\Delta u\,dx,$$

con $v(x) = \Gamma(x - x_0)$ e Γ è la soluzione fondamentale del Laplaciano.

Dimostrazione. Prendiamo $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$, così $\overline{B(x_0,\varepsilon)} \subseteq \Omega$. Poniamo

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B(x_0,\varepsilon)},$$

che è ancora un aperto regolare in quanto lo è Ω e lo è $B(x_0,\varepsilon)$. Consideriamo infine la funzione $v(x) = \Gamma(x - x_0)$.

Applichiamo ora l'identità di Green (1.1) alla coppia di funzioni u e v sull'aperto regolare Ω_ε. Otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\varepsilon} (v\Delta u - u\Delta v)\,dx &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu})\,d\sigma = \\ &= \int_{\partial\Omega} (v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu})\,d\sigma - \int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} (v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu})\,d\sigma.\end{aligned}$$

Valutiamo ora il limite per $\varepsilon \to 0$ in entrambi i membri.

(I) Sfruttando il fatto che v è armonica in Ω_ε e utilizzando il Teorema di convergenza dominata per portare il limite dentro integrale (possiamo applicare il Teorema in quanto v è localmente sommabile e Δu è limitata poichè u è di classe $\mathcal{C}^2$ e $\overline{\Omega}$ è compatto), otteniamo:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (v\Delta u - u\Delta v)\,dx = \int_{\Omega_\varepsilon} v\Delta u\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_\Omega v\Delta u\,dx.$$

(II)
$$-\int_{\partial B(x_0,\varepsilon)}(v\frac{\partial u}{\partial \nu}-u\frac{\partial v}{\partial \nu})\,d\sigma=\int_{\partial B(x_0,\varepsilon)}(u\frac{\partial v}{\partial \nu}-v\frac{\partial u}{\partial \nu})\,d\sigma=J^1_\varepsilon+J^2_\varepsilon.$$
Studiamo dunque i due integrali separatamente.

Poichè v è costante su $\partial B(x_0,\varepsilon)$ e poichè u è $\mathcal{C}^2$ su un compatto (quindi la sua derivata normale è limitata), otteniamo:
$$\begin{aligned}|J^2_\varepsilon|&=\Big|-\int_{\partial B(x_0,\varepsilon)}v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\sigma\Big|=\Big|-C_N\varepsilon^{2-N}\int_{\partial B(x_0,\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\sigma\Big|\le\\ &\le C'_N\varepsilon^{2-N}|\partial B(x_0,\varepsilon)|=C'_N\varepsilon^{2-N}N\omega_N\varepsilon^{N-1}\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

Ora,
$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial \nu}&=\langle\nabla v,\nu\rangle=\langle\nabla(C_N|x-x_0|^{2-N}),\nu\rangle=\\ &=C_N\langle(2-N)|x-x_0|^{1-N}\frac{x-x_0}{|x-x_0|},\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\rangle=(2-N)C_N|x-x_0|^{1-N}\end{aligned}$$

Così l'integrale, ricordando che $C_N=\frac{1}{N(N-2)\omega_N}$, diventa:
$$\begin{aligned}J^1_\varepsilon&=\int_{\partial B(x_0,\varepsilon)}u\frac{\partial v}{\partial \nu}\,d\sigma=(2-N)C_N|x-x_0|^{1-N}\int_{\partial B(x_0,\varepsilon)}u(y)\,d\sigma(y)=\\ &=(2-N)C_N|x-x_0|^{1-N}\int_{\partial B(x_0,\varepsilon)}(u(x_0)+o(1))\,d\sigma=\\ &=(2-N)C_N|x-x_0|^{1-N}(u(x_0)+o(1))N\omega_N\varepsilon^{N-1}=\\ &=-u(x_0)+o(1),\quad \text{con } o(1)\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}0.\end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto
$$J^1_\varepsilon\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}-u(x_0).$$

In definitiva, mandando ε a 0, si ottiene:
$$\int_\Omega v\Delta u\,dx=\int_{\partial\Omega}(v\frac{\partial u}{\partial \nu}-u\frac{\partial v}{\partial \nu})\,d\sigma-u(x_0)$$
e da qui segue la tesi. □

1.2 Formule di media

Iniziamo ricordando la *Formula di Poisson-Jensen*, valida per ogni funzione $u\in\mathcal{C}^2$.

Teorema 1.2.1 (Formula di Poisson-Jensen). *Sia $u\in\mathcal{C}^2(\Omega)$ e siano $x_0\in\Omega$ e $r>0$ tali che $\overline{B(x_0,r)}\subseteq\Omega$. Allora*
$$u(x_0)=m_r(u)(x_0)-n_r(\Delta u)(x_0),$$
dove
$$m_r(u)(x_0)=⨍_{\partial B(x_0,r)}u\,d\sigma,$$
$$n_r(f)(x_0)=\int_{B(x_0,r)}\big(\Gamma(x-x_0)-\Gamma(r)\big)f(x)\,dx.$$

Dimostrazione. Scriviamo la Formula di rappresentazione di Green di u sull'aperto regolare $B(x_0, r)$:

$$u(x_0) = \int_{\partial B(x_0,r)} (v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu})\, d\sigma - \int_{B(x_0,r)} v\Delta u\, dx \tag{1.2}$$

con $v(x) = \Gamma(x - x_0) = \Gamma(r)$. Ora, su $\partial B(x_0, r)$, si ha $|x - x_0| = r$, quindi

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(x) = C_N(2 - N)|x - x_0|^{1-N} = C_N(2 - N)r^{1-N},$$

inoltre, prendendo $v = 1$ nell'Identità di Green, si ha

$$\int_\Omega \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma.$$

Allora la (1.2), ricordando la definizione di C_N, diventa:

$$\begin{aligned} u(x_0) &= C_N r^{2-N} \int_{\partial B(x_0,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma - C_N(2 - N)r^{1-N} \int_{\partial B(x_0,r)} u\, d\sigma - \int_{B(x_0,r)} \Gamma(x - x_0)\Delta u\, dx = \\ &= \Gamma(r) \int_{B(x_0,r)} \Delta u\, dx - \int_{B(x_0,r)} \Gamma(x - x_0)\Delta u\, dx - \frac{1}{N\omega_N} r^{1-N} \int_{\partial B(x_0,r)} u\, d\sigma. \end{aligned}$$

Infine basta osservare che $\frac{1}{N\omega_N} r^{1-N} = \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} = \frac{1}{|\partial B(x_0,r)|}$ e il Teorema è dimostrato. □

Ora, dal teorema precedente si ricava immediatamente il seguente risultato, che afferma che per ogni funzione armonica u vale una *formula di media superficiale.*

Corollario 1.2.2 (Teorema di Gauss). *Se* $u \in \mathcal{H}(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}) : \Delta u(x) = 0\ \forall x \in \Omega\}$ *e* $\overline{B(x_0, r)} \subseteq \Omega$*, allora*

$$u(x_0) = m_r(u)(x_0) = \fint_{\partial B(x_0,r)} u(x)\, d\sigma(x).$$

Tramite la superposizione di formule di superficie, si può ottenere una versione *solida* della formula di Poisson-Jensen in 1.2.1. Il risultato è il seguente.

Teorema 1.2.3 (Formula di Poisson-Jensen solida). *Sia* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ *e siano* $x_0 \in \Omega$ *e* $r > 0$ *tali che* $\overline{B(x_0, r)} \subseteq \Omega$*. Allora*

$$u(x_0) = M_r(u)(x_0) - N_r(\Delta u)(x_0),$$

dove

$$M_r(u)(x_0) = \fint_{B(x_0,r)} u(x)\, dx,$$

$$N_r(f)(x_0) = \frac{N}{r^N} \int_0^r \rho^{N-1}\Big(\int_{B(x_0,\rho)} \big(\Gamma(x - x_0) - \Gamma(\rho)\big) f(x)\, dx\Big)\, d\rho.$$

Dimostrazione. Sia $0 < \rho < r$, allora $\overline{B(x_0, \rho)} \subseteq \Omega$, quindi, per il Teorema 1.2.1 (Formula di Poisson-Jensen), si ha:

$$\begin{aligned} u(x_0) &= m_\rho(u)(x_0) - n_\rho(\Delta u)(x_0) = \\ &= \frac{1}{N\omega_N \rho^{N-1}} \int_{\partial B(x_0,\rho)} u(x)\, d\sigma(x) - \int_{B(x_0,\rho)} \big(\Gamma(x - x_0) - \Gamma(\rho)\big)\Delta u(x)\, dx. \end{aligned}$$

Allora, moltiplicando per ρ^{N-1}, otteniamo:

$$\rho^{N-1}u(x_0) = \frac{1}{N\omega_N}\int_{\partial B(x_0,\rho)} u(x)\,d\sigma(x) - \rho^{N-1}\int_{B(x_0,\rho)} \big(\Gamma(x-x_0)-\Gamma(\rho)\big)\Delta u(x)\,dx.$$

Integrando da 0 a r rispetto a ρ, si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{r^N}{N}u(x_0) = \frac{1}{r^N N\omega_N}&\int_0^r \Big(\int_{\partial B(x_0,\rho)} u(x)\,d\sigma(x)\Big)\,d\rho - \\ &- \int_0^r \rho^{N-1}\Big(\int_{B(x_0,\rho)} \big(\Gamma(x-x_0)-\Gamma(\rho)\big)\Delta u(x)\,dx\Big)\,d\rho\end{aligned}$$

Moltiplicando ora per $\frac{N}{r^N}$ e tenendo a mente che $|B(x_0,r)| = r^N\omega_N$, si ottiene infine:

$$u(x_0) = \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} u(x)\,dx - \frac{N}{r^N}\int_0^r \rho^{N-1}\Big(\int_{B(x_0,\rho)} \big(\Gamma(x-x_0)-\Gamma(\rho)\big)f(x)\,dx\Big)\,d\rho$$

e questo termina la prova. □

Anche in questo caso è immediato il seguente corollario, che ci fornisce una *formula di media di volume* per le funzioni armoniche.

Corollario 1.2.4 (**Teorema di Gauss solido**). *Se* $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ *e* $\overline{B(x_0,r)} \subseteq \Omega$, *allora*

$$u(x_0) = M_r(u)(x_0) = \fint_{B(x_0,r)} u(x)\,dx.$$

1.3 Il Teorema di Koebe

Ora vedremo il *Teorema di Koebe*, che afferma che la validità delle formule di media caratterizza l'insieme delle funzioni armoniche.

Osservazione 1.3.1. *Fissiamo* $x_0 \in \Omega$ *e poniamo* $R(x_0) := \sup\{r > 0 | \overline{B(x_0,r)} \subseteq \Omega\}$. *Allora, per ogni* $0 < r < R(x_0)$, *si ha che* $\overline{B(x_0,r)} \subseteq \Omega$ *e*

$$r \underset{continua}{\longmapsto} m_r(u)(x_0), \quad r \in]0, R(x_0)[.$$

Così, poichè

$$M_r(u)(x_0) = \frac{N}{r^N}\int_0^r \rho^{N-1} m_\rho(u)(x_0)\,d\rho,$$

risulta che $M_r(u)(x_0)$ *è di classe* $\mathcal{C}^1$ *rispetto a* r. *Allora, derivando rispetto a* r *si ottiene:*

$$\frac{d}{dr}\big(r^N M_r(u)(x_0)\big) = N r^{N-1} m_r(u)(x_0),$$

cioè

$$m_r(u)(x_0) = \frac{1}{N r^{N-1}}\frac{d}{dr}\big(r^N M_r(u)(x_0)\big).$$

Osservazione 1.3.2.

$$\lim_{r\to 0} m_r(u)(x_0) = u(x_0)$$

e analogamente

$$\lim_{r\to 0} M_r(u)(x_0) = u(x_0).$$

Definizione 1.3.3. $u \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ verifica la formula di media di superficie *se e solo se per ogni* $x \in \Omega$, $u(x) = m_r(u)(x)$, $\forall r \in]0, R(x)[$.
Analogamente diremo che u verifica la formula di media di volume *se e solo se per ogni* $x \in \Omega$, $u(x) = M_r(u)(x)$, $\forall r \in]0, R(x)[$.

Il risultato è il seguente.

Teorema 1.3.4 (Teorema di Koebe). *Sia* $u \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *aperto. Allora sono equivalenti:*

(i) *u verifica la formula di media di superficie;*

(ii) *u verifica la formula di media di volume;*

(iii) $r \longmapsto m_r(u)(x)$ *è costante su* $]0, R(x)[$, $\forall x \in \Omega$;

(iv) $r \longmapsto M_r(u)(x)$ *è costante su* $]0, R(x)[$, $\forall x \in \Omega$;

(v) $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ *e* $\Delta u(x) = 0$, $\forall x \in \Omega$.

Osservazione 1.3.5. *Questo Teorema ci dice in particolare che, se* $u \in \mathcal{H}(\Omega)$, *quindi a priori solo* $\mathcal{C}^2$, *essa è in realtà di classe* $\mathcal{C}^\infty$.

Dimostrazione. Dimostramo le singole implicazioni.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Sia $x \in \Omega$, $r \in]0, R(x)[$.

$$M_r(u)(x) = \frac{N}{r^N} \int_0^r \rho^{N-1} m_\rho(u)(x)\, d\rho \overset{(i)}{=} \frac{N}{r^N} \int_0^r \rho^{N-1} u(x)\, d\rho = $$
$$= u(x) \frac{N}{r^N} \frac{r^N}{N} = u(x) \Rightarrow \text{ vale } (ii).$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sia $x \in \Omega$, $r \in]0, R(x)[$. Per l'osservazione 1.3.1, si ha:

$$m_r(u)(x_0) = \frac{1}{N r^{N-1}} \frac{d}{dr}\big(r^N M_r(u)(x_0)\big) \overset{(ii)}{=} u(x) \frac{N r^{N-1}}{N r^{N-1}} = u(x) \Rightarrow \text{ vale } (i).$$

$(i) \Rightarrow (iii)$ Per la definizione 1.3.3.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Per l'osservazione 1.3.2 si ha che:

$$u(x) = \lim_{\rho \to 0} m_\rho(u)(x) \overset{(iii)}{=} m_r(u)(x), \quad \forall r \in]0, R(x)[.$$

$(ii) \Leftrightarrow (iv)$ Analogo al precedente.

$(v) \Rightarrow (i)$ Per il Teorema di Gauss superficiale.

$(v) \Rightarrow (ii)$ Per il Teorema di Gauss solido.

$(i) \Rightarrow (v)$ Fatto questo avremo concluso la dimostrazione. Sia $x \in \Omega$, $r \in]0, R(x)[$. Allora per ipotesi $u(x) = m_r(u)(x)$. Prendiamo ora $0 < \rho < r$, quindi

$$u(x) = m_\rho(u)(x) \tag{1.3}$$

Consideriamo ora $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(]\frac{1}{2}, 1[, \mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = 1$ e consideriamo la funzione

$$\rho \longmapsto \frac{1}{r}\varphi\Big(\frac{\rho}{r}\Big), \text{ che ha ancora integrale unitario da 0 a } r.$$

Moltiplichiamo in (1.3) a destra e a sinistra e integriamo da 0 a r rispetto a ρ:

$$\begin{aligned}
u(x) \int_0^r \frac{1}{r}\varphi\Big(\frac{\rho}{r}\Big)\, d\rho &= \int_0^r \frac{1}{r}\varphi\Big(\frac{\rho}{r}\Big) \frac{1}{N\omega_N \rho^{N-1}} \Big(\int_{\partial B(x,\rho)} u(y)\, d\sigma(y)\Big)\, d\rho = \\
&= \frac{1}{N\omega_N} \int_0^r \frac{1}{r}\Big(\int_{\partial B(x,\rho)} \varphi\Big(\frac{|x-y|}{r}\Big) \cdot \Big(\frac{r}{|x-y|}\Big)^{N-1} \frac{1}{r^{N-1}} u(y)\, d\sigma(y)\Big)\, d\rho = \\
&= \frac{1}{N\omega_N r^N} \int_{B(x,r)} \varphi\Big(\frac{|x-y|}{r}\Big) \cdot \Big(\frac{r}{|x-y|}\Big)^{N-1} u(y)\, dy.
\end{aligned}$$

Ponendo

$$\Phi(z) = \frac{1}{n\omega_N} \frac{\varphi(|z|)}{|z|^{N-1}}, \quad \Phi_r(z) = \frac{1}{r^N}\Phi\Big(\frac{z}{r}\Big),$$

abbiamo così ottenuto:

$$u(x) = \int_{B(x,r)} u(y)\Phi_r(x-y)\, dy = \big(u * \Phi_r\big)(x) \tag{1.4}$$

Ora, per come le abbiamo definite, Φ e Φ_r sono mollificatori, quindi l'equazione (1.4) ci dice che su $\Omega_r = \{x \in \Omega | \overline{B(x,r)} \subseteq \Omega\}$, la u coincide con la sua mollificata e quindi risulta $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_r)$ per ogni r. Ne viene che

$$u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega).$$

Dimostriamo infine che u è armonica.

Per il Teorema 1.2.1 (Poisson-Jensen), risulta:

$$u(x) = m_r(u)(x) - n_r(\Delta u)(x),$$

ma per ipotesi u verifica la formula di media superficiale, quindi $u(x) = m_r(u)(x)$, perciò

$$n_r(\Delta u)(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega, \forall r \in]0, R(x)[.$$

Quindi

$$n_r(\Delta u)(x) = \int_{B(x,r)} \big(\Gamma(y-x) - \Gamma(r)\big)\Delta u(y)\, dy = 0$$

ma in $B(x,r)$ risulta $|y-x| < r$, quindi $|y-x|^{2-n} > r^{2-N}$, perciò $\Gamma(y-x) - \Gamma(r) > 0$. Da questo segue che

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega.$$

Infatti, supponiamo per assurdo che esista $x \in \Omega$ tale che $\Delta u(x) \neq 0$ (ad esempio > 0). Ma $u \in \mathcal{C}^\infty$, quindi $\Delta u \in \mathcal{C}^\infty$, perciò

$$\exists \overline{r} > 0 \text{ tale che } \overline{B(x, \overline{r})} \subseteq \Omega \text{ e } \Delta u(y) > 0, \ \forall y \in B(x, \overline{r}).$$

Allora:

$$n_{\overline{r}}(\Delta u)(x) = \int_{B(x,\overline{r})} \big(\Gamma(y-x) - \Gamma(\overline{r})\big) \Delta u(y)\, dy \neq 0$$

in quanto la funzione integranda è strettamente positiva. Ma questo è assurdo, quindi

$$\Delta u(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega$$

e questo completa la dimostrazione.

□

1.4 Densità con la proprietà di media

In questo paragrafo richiameremo la nozione di misura con la proprietà di media per il Laplaciano e in seguito quello di densità con la proprietà di media. Richiameremo poi i risultati ottenuti da Hansen e Netuka [8] e i risultati ottenuti da Aikawa [2].

Infine richiameremo la definizione di Γ-tripla e Γ-tripla forte e i risultati ottenuti più recentemente da Cupini e Lanconelli [5].

Nel seguito Γ indicherà la soluzione fondamentale del Laplaciano.

Definizione 1.4.1 (**Misura con la proprietà di media**). *Se Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 3$, e μ è una misura di Radon non negativa e finita in Ω, si dice che μ* ***ha la proprietà di media per le funzioni armoniche*** *se esiste un punto $x_0 \in \Omega$ tale che*

$$u(x_0) = \int_\Omega u(y)\, d\mu(y)$$

per ogni funzione u armonica e non negativa in Ω.

Osservazione 1.4.2. *Dal Teorema 1.2.4 (Gauss) segue che, se $B = B(x_0, r)$ è una palla di $\mathbb{R}^N$, allora*

$$d\mu(y) = \frac{1}{|B|} dy$$

è una misura con la proprietà di media per le funzione armoniche in B.

Definizione 1.4.3 (**Densità con la proprietà di media per funzioni armoniche**). *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 3$ e sia w una funzione positiva su Ω. Diremo che w* ***è una densità con la proprietà di media per le funzioni armoniche*** *se, posto $\mu = w \cdot \lambda$ (equivalentemente, $d\mu = w\, d\lambda$), con λ misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^N$, risulta che μ ha la proprietà di media per le funzioni armoniche.*

Sia ora D un dominio limitato di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, e sia $x_0 \in D$. Denotiamo con $\mathcal{H}_b$ l'insieme delle funzioni armoniche su D e limitate. Hansen e Netuka, in [8], hanno considerato funzioni w su D positive e tali che:

$$u(x_0) = \frac{1}{\int_D w\,dx} \int_D uw\,dx, \quad \forall u \in \mathcal{H}_b \tag{1.5}$$

e hanno ottenuto il seguente risultato.

Teorema 1.4.4. *(i) Esiste un dominio D per il quale non è possibile trovare una funzione w che soddisfi* (1.5) *e tale che $\inf_D w > 0$;*

(ii) Per ogni dominio limitato D, esiste una funzione positiva $w \in \mathcal{C}^\infty(D)$ che soddisfa (1.5) *e tale che $\lim_{x \to \partial D} w(x) = 0$;*

(iii) Per un dominio con bordo abbastanza regolare ($\mathcal{C}^{1+\varepsilon}$) esiste una funzione $w \in \mathcal{C}^\infty(D)$ che soddisfa (1.5) *e tale che $\inf_D w > 0$.*

In [2] Aikawa ha considerato lo stesso problema, ma in un dominio k-Lipschitz. Più precisamente, ha determinato domini k-Lipschitz per i quali vale (1.5) e tali che $\inf_D w > 0$.

Definizione 1.4.5 (Dominio k-Lipschitz). *Diciamo che un dominio limitato D è k-Lipschitz se D e ∂D sono dati localmente da una funzione lipschitziana. la cui costante di Lipschitz è al più k. Se D è k-Lipschitza per qualche $k > 0$, diremo semplicemente che è un* ***dominio lipschitziano****.*

Teorema 1.4.6. *(i) Esiste un dominio $\frac{1}{\sqrt{N-1}}$-Lipschitz per il quale non è possibile trovare una funzione w che soddisfi* (1.5) *e tale che $\inf_D w > 0$;*

(ii) Se $0 < k < \frac{1}{\sqrt{N-1}}$, allora per ogni dominio k-Lipschitz D, esiste una funzione $w \in \mathcal{C}^\infty(D)$ che soddisfa (1.5) *e tale che $\inf_D w > 0$.*

Ora introduciamo la nozione di Γ-tripla.

Definizione 1.4.7 (Γ-tripla). *Diremo che (Ω, μ, x_0) è una* Γ-tripla *se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ è un aperto limitato, $x_0 \in \Omega$, μ è una misura di Radon non negativa, $\mu = 0$ in Ω^c e se vale*

$$\Gamma_\mu(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y - x) d\mu(y) = \Gamma(x_0 - x), \quad \forall x \in \Omega^c. \tag{1.6}$$

Se, insieme a (1.6)*, si ha che*

$$\Gamma_\mu(x) < \Gamma(x_0 - x), \quad \forall x \in \Omega$$

e Γ_μ è una funzione continua reale in $\mathbb{R}^N$, diremo che (Ω, μ, x_0) è una Γ-tripla forte.

Il potenziale Newtoniano $\int_B \Gamma(y-x)\,dy$ di una palla Euclidea B di $\mathbb{R}^N$ con centro in x_0, è proporzionale, fuori da B, al potenziale Newtoniano di una massa concentrata in x_0.

Questo fatto segue dal Teorema della media di Gauss 1.2.4, applicato alla famiglia di mappe

$$B \ni y \mapsto \Gamma(y-x) \in \mathbb{R}, \quad x \notin B.$$

Viceversa, un teorema di Aharonov, Schiffer e Zalcman, in [1], ci dice che se D è un dominio aperto e limitato di $\mathbb{R}^N$, contenente x_0 e avente potenziale Newtoniano proporzionale, fuori da D, al potenziale Newtoniano di una massa concentrata in x_0, allora D è una palla euclidea centrata in x_0.

Cupini e Lanconelli, in [5], hanno studiato il seguente problema inverso

(IP) Date $\big(\Omega,\mu,x_0\big)$ e $\big(D,\nu,x_0\big)$ Γ-triple, se $\mu_{|\Omega\cap D} = \nu_{|\Omega\cap D}$, è vero che $\Omega = D$ e $\mu = \nu$?

I risultati che hanno ottenuto sono i seguenti.

Teorema 1.4.8. *Siano Ω e D aperti limitati $\subseteq \mathbb{R}^N$ e contenenti x_0. Supponiamo:*

(i) $\big(\Omega,\mu,x_0\big)$ *Γ-tripla forte con $\mu = 0$ in Ω^c;*

(ii) $\big(D,\nu,x_0\big)$ *Γ-tripla con $\nu = 0$ in D^c;*

(iii) $\mu_{|\Omega\cap D} = \nu_{|\Omega\cap D}$;

(iv) $\partial D \subseteq \operatorname{supp}\nu$;

(v) Ω *è un* insieme solido, *cioè* $\overline{\Omega}^c$ *è connesso e* $\Omega = \operatorname{int}\overline{\Omega}$.

Allora $\Omega = D$ e $\mu = \nu$.

Teorema 1.4.9. *Sia $D \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto limitato e sia $x_0 \in D$ e $\alpha > N-2$. Supponiamo che sia soddisfatta una delle seguenti condizioni, per un opportuno $c > 0$:*

(i) $u(x_0) = c\int_D u(y)\frac{m_d(y-x_0)}{(d(y-x_0))^{N-\alpha}}\,dy \quad \forall u \in \mathcal{H}(D),\ u \geq 0$;

(ii) $\Gamma(x_0-x) = c\int_D \Gamma(y-x)\frac{m_d(y-x_0)}{(d(y-x_0))^{N-\alpha}}\,dy \quad \forall x \notin D$.

Allora

$$c = \int_D \frac{m_d(y-x_0)}{\big(d(y-x_0)\big)^{N-\alpha}}\,dy \quad e \quad D = B_r^d(x),\ con\ r = \frac{\alpha}{c}^{\frac{1}{\alpha}}.$$

La seconda parte di quest'ultimo risultato generalizza il teorema di Aharonov, Schiffer e Zalcman in [1], infatti, se prendiamo $\alpha = N$ e d norma Euclidea, allora otteniamo proprio il teorema in [1]. Inoltre, sempre prendendo $\alpha = N$ e d norma Euclidea, la prima parte del Teorema 1.4.9 ci fornisce un risultato di caratterizzazione armonica della palle Euclidee.

Capitolo 2

Gruppi di Carnot e sub-Laplaciani

Inizieremo introducendo le notazioni e le definizioni di base: definiremo campi vettoriali, curve integrali di campi vettoriali, esponenziale di un campo vettoriale, introdurremo le parentesi di Lie di campi vettoriali e l'algebra di Lie dei campi vettoriali su $\mathbb{R}^N$. In seguito, dopo aver definito un generico gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{G}$, e l'algebra di Lie del gruppo, parleremo di gruppi di Lie omogenei e introdurremo i gruppi di Carnot e i sub-Laplaciani sui gruppi di Carnot.

in seguito vedremo che i sub-Laplaciani sui gruppi di Carnot con dimensione omogenea $Q \geq 3$ possiedono una soluzione fondamentale Γ, che risulterà unica, e vedremo che, analogamente al caso del Laplaciano classico, valgono delle formule di media superficiale e solida. Vedremo anche che, per questi operatori, valgono i Principi del massimo, debole e forte.

Concluderemo definendo le funzioni $\mathcal{L}$-subarmoniche ed $\mathcal{L}$-superarmoniche e introducendo la nozione di insieme $\mathcal{L}$-regolare, che svolgerà un ruolo cruciale in seguito.

Per le dimostrazioni mancanti, facciamo riferimento a [4].

2.1 Campi vettoriali in $\mathbb{R}^N$. Algebra di Lie dei campi vettoriali

2.1.1 Campi vettoriali in $\mathbb{R}^N$

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto e non vuoto. Data una N-upla di funzioni scalari,

$$a_1, \dots, a_N, \quad a_j : \Omega \to \mathbb{R},\ j \in \{1, \dots, N\},$$

l'operatore differenzale lineare del primo ordine

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \partial_j \tag{2.1}$$

sarà chiamato **campo vettoriale su Ω con componenti** $a_1, \dots, a_N$.
Se $O \subseteq \Omega$ è un aperto e $f : O \to \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile, denotiamo con Xf la funzione su O definita da:

$$Xf(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x) \partial_j f(x), \quad x \in O.$$

Sia $\mathcal{C}^\infty(O,\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni lisce a valori reali. Se le componenti a_j di X sono lisce, chiameremo X un **campo vettoriale liscio** e spesso considereremo X come un operatore:

$$X : \mathcal{C}^\infty(O) \to \mathcal{C}^\infty(O), \quad f \mapsto Xf.$$

Inoltre, se

$$f : O \to \mathbb{R}^N$$

è una funzione a valori vettoriali, useremo la seguente notazione:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_N(x) \end{pmatrix} \ \mathbf{e} \ Xf(x) = \begin{pmatrix} Xf_1(x) \\ \vdots \\ Xf_N(x) \end{pmatrix}$$

Denotiamo con $T(\mathbb{R}^N)$ l'insieme dei campi vettoriali lisci in $\mathbb{R}^N$ e si ha che, dotato delle naturali operazioni, $T(\mathbb{R}^N)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Un ulteriore notazione è la seguente: I denoterà la mappa identità su $\mathbb{R}^N$ e, se X è un campo vettoriale come in (2.1), allora:

$$XI := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

sarà il vettore colonna delle componenti di X e può essere considerato come una mappa liscia da $\mathbb{R}^N$ in se stesso. Infine, potremo scrivere

$$Xf = (\nabla f) \cdot XI, \qquad \text{dove } \nabla = (\partial_1, \dots, \partial_N).$$

2.1.2 Curve integrali

Una curva $\gamma : D \to \mathbb{R}^N$, con D intervallo reale, sarà detta **curva integrale** del campo vettoriale liscio X se

$$\dot{\gamma}(t) = XI(\gamma(t)), \quad \forall t \in D.$$

Se X è un campo vettoriale liscio, allora, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = XI(\gamma) \\ \gamma(0) = x \end{cases} \tag{2.3}$$

ha un'unica soluzione

$$\gamma_X(\cdot, x) : D(X,x) \to \mathbb{R}^N,$$

dove con $D(X,x)$ denotiamo il più grande intervallo di $\mathbb{R}$ sul quale $\gamma_X(\cdot,x)$ esiste.

Definizione 2.1.1 (Esponenziale di un campo vettoriale). *Sia X un campo vettoriale liscio su $\mathbb{R}^N$. Poniamo*

$$\exp(tX)(x) := \gamma_X(t,x),$$

dove $\gamma_X(\cdot,x)$ è la soluzione di (2.3).

Questa definizione è ben posta per ogni $X \in T(\mathbb{R}^N)$ (in realtà è ben posta anche quando X ha componenti solo Lipschitz-continue), per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $t \in D(X,x)$.

2.1.3 Algebra di Lie dei campi vettoriali su $\mathbb{R}^N$

Dati due campi vettoriali lisci X e Y in $\mathbb{R}^N$, definiamo la **Parentesi di Lie** $[X,Y]$ nel modo seguente:

$$[X,Y] := XY - YX.$$

Si può notare, con un conto diretto, che $[X,Y]$, anche se scritto come differenza di operatori differenziali del secondo ordine, è ancora un operatore del primo ordine, infatti risulta:

$$[X,Y] = \sum_{j=1}^{N}(Xb_j - Ya_j)\partial_j.$$

Si può inoltre verificare che $(X,Y) \mapsto [X,Y]$ è una mappa bilineare sullo spazio vettoriale $T(\mathbb{R}^N)$ e soddisfa l'*identità di Jacobi*

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0, \text{ per ogni } X,Y,Z \in T(\mathbb{R}^N).$$

Chiameremo

$$\big(T(\mathbb{R}^N), [\ ,\ ]\big)$$

l'**algebra di Lie dei campi vettoriali su** $\mathbb{R}^N$. Ogni sotto-algebra di $T(\mathbb{R}^N)$ sarà chiamata **algebra di Lie di campi vettoriali**. Più esplicitamente, $\mathfrak{a}$ è un'algebra di Lie di campi vettoriali se è un sottospazio vettoriale di $T(\mathbb{R}^N)$ chiuso rispetto all'operazione $[\ ,\ ]$.

Introduciamo ora alcune notazioni.
Dato un insieme di campi vettoriali $Z_1,\dots,Z_m \in T(\mathbb{R}^N)$ e un multi-indice

$$J = (j_1,\dots,j_k) \in \{1,\dots,m\}^k,$$

poniamo

$$Z_J := [Z_{j_1},\dots[Z_{j_{k-1}}, Z_{j_k}]\dots]$$

e diremo che Z_J è un **commutatore di lunghezza (o altezza)** k degli $Z_1,\dots,Z_m$. Un commutatore del tipo Z_J verrà anche chiamato **annidato**.

Definizione 2.1.2 (**Algebra di Lie generata da un sottoinsieme di** $T(\mathbb{R}^N)$)**.** *Se U è un sottoinsieme qualsiasi di $T(\mathbb{R}^N)$, denotiamo con* Lie$\{U\}$ *la più piccola sotto-algebra di $T(\mathbb{R}^N)$ che contiene U, cioè:*

$$\mathrm{Lie}\{U\} = \bigcap \mathfrak{h}, \quad \textit{dove } \mathfrak{h} \textit{ è una sotto-algebra di } T(\mathbb{R}^N) \textit{ che contiene } U.$$

Definiamo

$$\mathrm{rank}\big(\mathrm{Lie}\{U\}(x)\big) := \dim_{\mathbb{R}}\{ZI(x) : Z \in \mathrm{Lie}\{U\}\}.$$

Teorema 2.1.3 (**Commutatori annidati**)**.** *Sia $U \subseteq T(\mathbb{R}^N)$ un qualsiasi insieme di campi vettoriali lisci su $\mathbb{R}^N$. Poniamo*

$$U_1 := \mathrm{span}\{U\}, \qquad U_n := \mathrm{span}\{[u,v] \,|\, u \in U,\, v \in U_{n-1}\}, \quad n \geq 2.$$

Allora abbiamo

$$\mathrm{Lie}\{U\} = \mathrm{span}\{U_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Di più,

$$[u,v] \in U_{i+j} \quad \textit{per ogni } u \in U_i,\ v \in U_j.$$

Questa proposizione afferma quindi che ogni elemento di Lie$\{U\}$ è combinazione lineare di commutatori annidati. Per la dimostrazione, si veda [4, Cap. 1, Teorema 1.1.7].

2.2 Gruppi di Lie su $\mathbb{R}^N$

2.2.1 L'algebra di Lie di un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$

Definizione 2.2.1 (**Gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$**). *Sia $\circ$ una legge di gruppo su $\mathbb{R}^N$ e supponiamo che la mappa*

$$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ni (x,y) \mapsto y^{-1} \circ x \in \mathbb{R}^N$$

*sia liscia. Allora $\mathbb{G} := (\mathbb{R}^N, \circ)$ è chiamato **Gruppo di Lie** su $\mathbb{R}^N$.*

Per semplicità di notazione, assumeremo che l'origine 0 di $\mathbb{R}^N$ sia l'identità del gruppo $\mathbb{G}$.

Fissato $\alpha \in \mathbb{G}$, denotiamo con $\tau_\alpha(x) := \alpha \circ x$ la traslazione a sinistra di α su $\mathbb{G}$. Un campo vettoriale liscio X su $\mathbb{R}^N$ è detto **invariante a sinistra** su $\mathbb{G}$ se

$$X(\varphi \circ \tau_\alpha) = (X\varphi) \circ \tau\alpha \tag{2.4}$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{G}$ e per ogni funzione liscia $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Denotiamo inoltre con $\mathfrak{g}$ l'insieme dei campi vettoriali invarianti a sinistra su $\mathbb{G}$. Si riconosce facilmente che

$$\text{per ogni } X, Y \in \mathfrak{g} \text{ e per ogni } \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$
$$\text{si ha } \lambda X + \mu Y \in \mathfrak{g} \text{ e } [X,Y] \in \mathfrak{g}.$$

Allora, $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie di campi vettoriali, sotto-algebra di $T(\mathbb{R}^N)$. Sarà chiamata **algebra di Lie di** $\mathbb{G}$.

Ora vedremo, senza prova, alcuni teoremi di caratterizzazione per l'algebra $\mathfrak{g}$ di un gruppo di Lie $\mathbb{G}$. Per la dimostrazione si veda **citare bibliografia**.

Teorema 2.2.2 (**Caratterizzazione di $\mathfrak{g}$. I**). *Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ e sia $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie. Un campo vettoriale (liscio) X appartiene a $\mathfrak{g}$ se e solo se*

$$(XI)(\alpha \circ x) = \mathcal{J}_{\tau_\alpha}(x) \cdot (XI)(x), \quad \forall \alpha, x \in \mathbb{G}. \tag{2.5}$$

Con $\mathcal{J}_{\tau_\alpha}(x)$ che indica la matrice Jacobiana della funzione τ_α nel punto x.

Scambiando α con x in (2.5), otteniamo $(XI)(x\circ\alpha) = \mathcal{J}_{\tau_x}(\alpha)\cdot(XI)(\alpha)$, $\forall \alpha, x \in \mathbb{G}$, quindi, quando $\alpha = 0$, otteniamo

$$(XI)(x) = \mathcal{J}_{\tau_x}(0) \cdot (XI)(0). \tag{2.6}$$

Questa identità ci dice che un campo vettoriale invariante a sinistra su $\mathbb{G}$ è completamente determinato dal suo valore nell'origine. Di più, il seguente teorema afferma che la (2.6) caratterizza i campi vettoriali in $\mathfrak{g}$.

Teorema 2.2.3. *Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ e sia $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie. Sia η un vettore di $\mathbb{R}^N$ fissato e definiamo le componenti del campo vettoriale X come segue:*

$$XI(x) := \mathcal{J}_{\tau_x}(0) \cdot \eta, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Allora $X \in \mathfrak{g}$.

Un immediato corollario di questo teorema è la seconda caratterizzazione dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di un gruppo di Lie $\mathbb{G}$.

Corollario 2.2.4 (Caratterizzazione di $\mathfrak{g}$. II). *Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ e sia $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie. Un campo vettoriale (liscio) X appartiene a $\mathfrak{g}$ se e solo se*

$$(XI)(x) = \mathcal{J}_{\tau_x}(0) \cdot (XI)(0). \tag{2.7}$$

Teorema 2.2.5 (Caratterizzazione di $\mathfrak{g}$. III). *Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ e sia $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie. La mappa*

$$J : \mathbb{R}^N \to \mathfrak{g}, \quad \eta \mapsto J(\eta)$$

con $J(\eta)$ definito da

$$J(\eta)I(x) = \mathcal{J}_{\tau_x}(0) \cdot \eta \tag{2.8}$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali. In particolare $\dim \mathfrak{g} = N$.

Infine la quarta caratterizzazione dell'algebra $\mathfrak{g}$.

Teorema 2.2.6 (Caratterizzazione di $\mathfrak{g}$. IV). *Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ e sia $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie. Il campo vettoriale X appartiene a $\mathfrak{g}$ se e solo se esiste $\eta \in \mathbb{R}^N$ tale che, per ogni $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$,*

$$(X\varphi)(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(x \circ (t\eta)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.9}$$

In questo caso $\eta = XI(0)$.

2.2.2 La base Jacobiana

Dal Teorema 2.2.5 segue che una qualsiasi base di $\mathfrak{g}$ è l'immagine tramite J di una base di $\mathbb{R}^N$.

Definizione 2.2.7 (Base Jacobiana). *Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ e sia $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie. Se $\{e_1, \dots, e_N\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^N$ e J è la mappa definita nella Proposizione 2.2.5, chiamiamo*

$$\{Z_1, \dots, Z_N\}, \quad Z_j := J(e_j)$$

*la **base Jacobiana** di $\mathfrak{g}$.*

Dalla definizione di J otteniamo:

$$Z_j I(x) = \mathcal{J}_{\tau_x}(0) \cdot e_j = \ j\text{-esima colonna di } \mathcal{J}_{\tau_x}(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.10}$$

così, poichè $\mathcal{J}_{\tau_0}(0) = \mathbb{I}_N$, si ha che

$$Z_j I(0) = e_j.$$

Quindi $Z_j\big|_0 = \frac{\partial}{\partial x_j}\big|_0$ e

$$(Z_j\varphi)(x) = \Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)\Big|_{y=0}\varphi(x \circ y) \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N),\ x \in \mathbb{G}.$$

Abbiamo quindi le seguenti caratterizzazioni equivalenti della base Jaconiana.

Teorema 2.2.8 (Caratterizzazioni della base Jacobiana)**.** *Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ e sia $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie. Sia $j \in \{1, \dots, N\}$ fissato.*
Allora esiste uno e un solo campo vettoriale in $\mathfrak{g}$, sia Z_j, caratterizzato da una delle seguenti condizioni equivalenti:

1. *$Z_j\big|_0 = \frac{\partial}{\partial x_j}\big|_0$, cioè:*
$$(Z_j\varphi)(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R});$$

2. *per ogni $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, si ha*
$$(Z_j\varphi)(x) = \Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)\Big|_{y=0}\varphi(x \circ y) \quad \forall x \in \mathbb{G};$$

3. *se e_j denota il j-esimo vetore della base canonica di $\mathbb{R}^N$, allora*
$$Z_j(0) = e_j;$$

4. *il vettore colonna delle componenti di Z_j è*
$$Z_j I(x) = \mathcal{J}_{\tau_x}(0) \cdot e_j = \ j\text{-esima colonna di } \mathcal{J}_{\tau_x}(0);$$

5. *per ogni $x \in \mathbb{G}$, abbiamo*
$$(Z_j\varphi)(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi(x \circ (te_j)) \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}).$$

2.2.3 Il Gradiente Totale Jacobiano

Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ)$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ e sia $Z_1, \dots, Z_N$ la base Jacobiana della sua algebra di Lie $\mathfrak{g}$.

Data una funzione differenziabile u definita su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, definiamo **gradiente totale (Jacobiano)** di u

$$(Z_1 u, \dots, Z_N u).$$

Allora, per definizione degli Z_j, si ha che

$$(Z_1u(x),\dots,Z_Nu(x)) = \nabla u(x)\cdot \mathcal{J}_{\tau_x}(0), \quad \forall x\in\Omega. \tag{2.11}$$

D'altra parte, poichè $\mathcal{J}_{\tau_x}(0)$ è non-singolare e la sua inversa è data da $\mathcal{J}_{\tau_{x^{-1}}}(0)$, possiamo scrivere il gradiente Euclideo di u in termini del suo gradiente totale nel seguente modo:

$$\nabla u(x) = (Z_1u(x),\dots,Z_Nu(x))\cdot \mathcal{J}_{\tau_{x^{-1}}}(0) \quad \forall x\in\Omega. \tag{2.12}$$

Dalla (2.12) otteniamo il seguente risultato.

Teorema 2.2.9. *Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N,\circ)$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ e sia $Z_1,\dots,Z_N$ la base Jacobiana (o una qualsiasi base) della sua algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Sia $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ un aperto connesso. Una funzione $u\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ è costante in Ω se e solo se il suo gradiente totale $(Z_1u,\dots,Z_Nu)$ è identicamente nullo su Ω.*

Dimostrazione. Dalla (2.11) e dalla (2.12) segue che il gradiente totale di u si annulla in $x\in\Omega$ se e solo se $\nabla u(x) = 0$. □

2.3 Gruppi di Lie omogenei su $\mathbb{R}^N$

Definizione 2.3.1 (Gruppi di Lie omogenei (su $\mathbb{R}^N$)). *Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$. Diremo che $\mathbb{G}$ è un gruppo di Lie omogeneo se vale la seguente proprietà:*

(H.1) Esiste una N-upla di numeri reali $\sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_N)$, con $1\le\sigma_1\le\dots\le\sigma_N$, tale che la dilatazione

$$\delta_\lambda : \mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N, \quad \delta_\lambda(x_1,\dots,x_N) := (\lambda^{\sigma_1}x_1,\dots,\lambda^{\sigma_N}x_N)$$

sia un automorfismo del gruppo $\mathbb{G}$ per ogni $\lambda>0$.

Denoteremo con $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N,\circ,\delta_\lambda)$ un gruppo di Lie omogeneo su $\mathbb{R}^N$ con legge di gruppo $\circ$ e gruppo di dilatazioni $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$.

La famiglia di dilatazioni $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$ costituisce un gruppo di automorfismi di $\mathbb{G}$ la cui identità è $\delta_1 = I$, la mappa identità di $\mathbb{R}^N$. Infatti abbiamo

$$\delta_{r\,s}(x) = \delta_r\big(\delta_s(x)\big) \quad \forall x\in\mathbb{G},\ r,s>0.$$

Inoltre, $(\delta_\lambda)^{-1} = \delta_{\lambda^{-1}}$. In segutio ci riferiremo a $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$ con al *gruppo di dilatazioni* di $\mathbb{G}$.

Da (H.1) segue che

$$\delta_\lambda(x\circ y) = (\delta_\lambda x)\circ(\delta_\lambda y) \quad \forall x,y\in\mathbb{G}$$

e, se e denota l'identità di $\mathbb{G}$, $\delta_\lambda(e) = e$ per ogni $\lambda>0$. Questo implica che $e=0$, il che è consistente con quello che avevamo assunto in precedenza, cioè che l'identità del gruppo $\mathbb{G}$ fosse l'origine di $\mathbb{R}^N$.

2.3.1 Funzioni e operatori δ_λ-omogenei

Vedremo ora alcune proprietà, senza dimostrazione, delle funzioni omogenee e degli operatori differenziali omogenei rispetto alla famiglia di dilatazioni $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$. Per le dimostrazioni, si veda **citare biblio**.

Una funzione reale a definita su $\mathbb{R}^N$ è detta **δ_λ-omogenea** di **grado** $m \in \mathbb{R}$ se a non è identicamente nulla e, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda > 0$, risulta

$$a(\delta_\lambda(x)) = \lambda^m a(x).$$

Un opertarore differenziale X non identicamente nullo è detto **δ_λ-omogeneo** di **grado** $m \in \mathbb{R}$ se, per ogni $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$, risulta

$$X(\varphi(\delta_\lambda(x))) = \lambda^m (X\varphi)(\delta_\lambda(x)).$$

Sia a una funzione δ_λ-omogenea di grado m e X un operatore differenziale δ_λ-omogeneo di grado n. Allora Xa è una funzione δ_λ-omogenea di grado $m-n$ (a meno che $Xa \equiv 0$). Infatti per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda > 0$, si ha

$$\lambda^n (Xa)(\delta_\lambda(x)) = X(a(\delta_\lambda(x))) = X(\lambda^m a(x)) = \lambda^m (Xa)(x).$$

Dato un multi-indice $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, si definisce **$\delta_\lambda$-altezza** di α:

$$|\alpha|_\sigma = \langle \alpha, \sigma \rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sigma_i. \tag{2.13}$$

Definizione 2.3.2 (**$\mathbb{G}$-altezza di un multi-indice. $\mathbb{G}$-grado.**). *Se $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ è un gruppo di Lie omogeneo su $\mathbb{R}^N$, denoteremo con*

$$|\alpha|_{\mathbb{G}}$$

la δ_λ-altezza di un multi-indice α definita in (2.13) *e ci riferiremo a $|\alpha|_{\mathbb{G}}$ come alla $\mathbb{G}$-**altezza** di α. Inoltre, se $p : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ è una funzione polinomiale*

$$p(x) = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha, \quad c_\alpha \in R,$$

diremo che

$$\deg_{\mathbb{G}}(p) := \max\{|\alpha|_{\mathbb{G}} : c_\alpha \neq 0\}$$

*è il $\mathbb{G}$-**grado** di p.*

Per quanto riguarda la legge di gruppo $\circ$ di u gruppo di Lie omogeneo su $\mathbb{R}^N$, si può dimostrare il seguente teorema di struttura.

Teorema 2.3.3 (**Legge di un gruppo di Lie omogeneo**). *Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ un gruppo di Lie omogeneo su $\mathbb{R}^N$. Allora $\circ$ ha funzioni componenti polinomiali. Più precisamente, si ha*

$$(x \circ y)_1 = x_1 + y_1, \quad (x \circ y)_j = x_j + y_j + Q_j(x, y), \quad 2 \le j \le N,$$

e valgono i seguenti fatti:

1. *Q_j dipende solo da $x_1, \dots, x_{j-1}$ e da $y_1, \dots, y_{j-1}$;*

2. *Q_j è la somma di monomi misti in x, y;*

3. *$Q_j(\delta_\lambda x, \delta_\lambda y) = \lambda^{\sigma_j} Q_j(x, y)$.*

Più precisamente, $Q_j(x, y)$ dipende solo dagli x_k e y_k con $\sigma_k < \sigma_j$.

2.3.2 La base Jacobiana di un gruppo di Lie omogeneo

Teorema 2.3.4. *Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ un gruppo di Lie omogeneo su $\mathbb{R}^N$. Allora abbiamo*

$$\mathcal{J}_{\tau_x}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2^{(1)} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_N^{(1)} & \cdots & a_N^{(N-1)} & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

dove $a_i^{(j)}$ è una funzione polinomiale δ_λ-omogenea di grado $\sigma_i - \sigma_j$. Come conseguenza, se poniamo

$$Z_j = \partial_{x_j} + \sum_{i=j+1}^{N} a_i^{(j)} \partial_{x_i} \quad \text{per } 1 \le j \le N-1 \text{ e } \quad Z_N = \partial_{x_N},$$

allora Z_j è un campo vettoriale invariante a sinistra δ_λ-omogeneo di grado σ_j. Inoltre

$$\mathcal{J}_{\tau_x}(0) = (Z_1 I(x) \cdots Z_N I(x)).$$

In altre parole, la base Jacobiana $Z_1, \dots, Z_N$ dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ del gruppo $\mathbb{G}$ è formata da campi vettoriali δ_λ-omogenei di grado rispettivamente $\sigma_1, \dots, \sigma_N$.

Osservazione 2.3.5 (Dimensione omogenea del gruppo $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$). *La misura di Lebesgue è omogenea rispetto alle dilatazioni $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$. Più precisamente, se denotiamo con $|E|$ la misura di Lebesgue di un insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}^N$, abbiamo*

$$|\delta_\lambda(E)| = \lambda^Q |E|,$$

dove

$$Q = \sum_{j=1}^{N} \sigma_j.$$

Il numero positivo Q è chiamato ***dimensione omogenea*** *del gruppo $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$.*

Per esempio, consideriamo il gruppo di Heisenberg-Weyl $\mathbb{H}^1$, per il quale

$$\tau_\alpha(x) = (\alpha_1 + x_1, \alpha_2 + x_2, \alpha_3 + x_3 + 2(\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2))$$

e

$$\delta_\lambda(x) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda^2 x_3).$$

Allora abbiamo

$$\mathcal{J}_{\tau_\alpha}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\alpha_2 & -2\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_{\delta_\lambda}(x) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix},$$

così, per ogni $\alpha, x \in \mathbb{H}^1$ e per ogni $\lambda > 0$, abbiamo

$$\det \mathcal{J}_{\tau_\alpha}(x) = 1, \quad \det \mathcal{J}_{\tau_\lambda}(x) = \lambda^4 = \lambda^Q,$$

dato che la dimensione omogenea di $\mathbb{H}^1$ è $Q = 4$.

2.3.3 L'algebra di Lie di un gruppo di Lie omogeneo su $\mathbb{R}^N$

Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ e sia $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie. Dal Teorema 2.3.4 otteniamo la separazione di $\mathfrak{g}$ come somma diretta di spazi vettoriali generati da campi vettoriali con grado di δ_λ-omogeneità costante.

Più precisamente, gli esponenti σ_j nella dilatazione δ_λ che soddisfano $\sigma_1 \leq \cdots \sigma_N$, possono essere raggruppati insieme in modo da formare numeri reali e naturali, rispettivamente

$$n_1, \ldots, n_r \quad \text{e} \quad N_1, \ldots, N_r,$$

tali che

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_r, \quad N_1 + N_2 + \cdots + N_r = N,$$

definiti da:

$$\begin{cases} n_1 = \sigma_j & \text{per } 1 \leq j \leq N_1, \\ n_2 = \sigma_2 & \text{per } N_1 < j \leq N_1 + N_2, \\ \quad \vdots & \\ n_r = \sigma_r & \text{per } N_1 + \cdots + N_{r-1} < j \leq N_1 + \cdots + N_{r-1} + N_r. \end{cases} \tag{2.15}$$

Sia $Z_1, \ldots, Z_N$ la base Jacobiana di $\mathfrak{g}$. Definiamo

$$\mathfrak{g}_1 = \text{span}\{Z_j \,|\, 1 \leq j \leq N_1\}$$
$$\mathfrak{g}_i = \text{span}\{Z_j \,|\, N_1 + \cdots + N_{i-1} < j \leq N_1 + \cdots + N_{i-1} + N_i\}, \quad \text{per } i = 2, \ldots, r.$$

Allora, per il Teorema 2.3.4, i generatori Z_j di $\mathfrak{g}$ sono campi vettoriali δ_λ-omogenei di grado n_i, $1 \leq i \leq r$. Inoltre, abbiamo che

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r.$$

2.4 Gruppi di Carnot e sub-Laplaciani

Introduciamo ora la principale struttura geometrica di questa tesi: i gruppi di Carnot (omogenei). In seguito definiremo, su questi gruppi, i sub-Laplaciani.

2.4.1 Gruppi di Carnot omogenei

Definizione 2.4.1 (Gruppo di Carnot omogenei). *Diciamo che un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ)$, è un **gruppo di Carnot (omogeneo)** (o un* gruppo omogeneo stratificato*) se valgono le seguenti condizioni:*

(C.1) $\mathbb{R}^N$ *può essere scritto come* $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{N_r}$, *e la dilatazione* $\delta_\lambda : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$

$$\delta_\lambda(x) = \delta_\lambda(x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}) = (\lambda x^{(1)}, \lambda^2 x^{(2)}, \ldots, \lambda^r x^{(r)}), \quad x^{(i)} \in \mathbb{R}^{N_i},$$

è un automorfismo del gruppo $\mathbb{G}$ per ogni $\lambda > 0$.

(C.2) Se N_1 è come sopra, siano $Z_1, \ldots, Z_{N_1}$ i campi vettoriali invarianti a sinistra su $\mathbb{G}$ tali che $Z_j(0) = \frac{\partial}{\partial x_j}|_0$ per $j = 1, \ldots, N_1$. Allora

$$\text{rank}(\text{Lie}\{Z_1, \ldots, Z_{N_1}\}(x)) = N \quad \textit{per ogni } x \in \mathbb{R}^N.$$

Se entrambe le condizioni sono verificate, diremo che la tripla $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ *è un* ***gruppo di Carnot omogeneo****.*

Diremo anche che $\mathbb{G}$ *ha* passo r *e* N_1 *generatori. I campi vettoriali* $Z_1, \dots, Z_{N_1}$ *saranno chiamati i* generatori (Jacobiani) *di* $\mathbb{G}$ *e una qualsiasi base di* $\operatorname{span}\{Z_1, \dots, Z_{N_1}\}$ *sarà chiamato* sistema di generatori *di* $\mathbb{G}$*.*

Osserviamo che un gruppo di Carnot è, in particolare, un gruppo di Lie omogeneo, per la condizione (C.1).
Nel seguito useremo la seguente notazione per i punti di $\mathbb{G}$:

$$x = (x_1, \dots, x_N) = (x^{(1)}, \dots, x^{(r)}),$$

con

$$x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_{N_i}^{(i)}) \in \mathbb{R}^{N_i}, \quad i = 1, \dots, r.$$

Osservazione 2.4.2. *Dalle proprietà* $(C.1)$ *e* $(C.2)$ *e dal teorema 2.3.3, si ha che la composizione di un gruppo di Carnot omogeneo* $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$*, denotata con*

$$x \circ y = ((x \circ y)^{(1)}, \dots, (x \circ y)^{(r)}),$$

è tale che

$$(x \circ y)^{(1)} = x^{(1)} + y^{(1)}, \qquad (x \circ y)^{(i)} = x^{(i)} + y^{(i)} + Q^{(i)}(x, y), \quad 2 \le i \le r,$$

dove

1. $Q^{(i)}$ *dipende solo da* $x^{(1)}, \dots, x^{(i-1)}$ *e da* $y^{(i)}, \dots, y^{(i-1)}$*;*

2. *le funzioni componenti di* $Q^{(i)}$ *sono somme di monomi misti in* x*,* y*;*

3. $Q^{(i)}(\delta_\lambda x, \delta_\lambda y) = \lambda^i Q^{(i)}(x, y)$*.*

Osservazione 2.4.3. *Sia* $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ *un gruppo di Carnot omogeneo. Allora abbiamo*

$$\mathcal{J}_{\tau_x}(0) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{N_1} & 0 & \cdots & 0 \\ J_2^{(1)}(x) & \mathbb{I}_{N_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ J_r^{(1)}(x) & \cdots & J_r^{(r-1)}(x) & \mathbb{I}_{N_r} \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

dove $\mathbb{I}_n$ *è la matrice identità* $n \times n$*, mentre* $J_j^{(i)}(x)$ *è una matrice* $N_j \times N_i$ *le cui entrate sono polinomi* δ_λ*-omogenei di grado* $j - i$*. In particolare, se poniamo*

$$\mathcal{J}_{\tau_x}(0) = (Z^{(1)}(x), \dots, Z^{(r)}(x)),$$

dove $Z^{(i)}(x)$ *è una matrice* $N \times N_i$*, allora i vettori colonna di* $Z^{(i)}(x)$ *definiscono dei campi vettoriali* δ_λ*-omogenei di grado* i*: quelli della relativa base Jacobiana.*

Osservazione 2.4.4. *Sia* $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ *un gruppo di Carnot omogeneo con algebra di Lie* $\mathfrak{g}$*. Sia* $Z_1, \dots, Z_N$ *la base Jacobiana di* $\mathfrak{g}$*, cioè*

$$Z_j \in \mathfrak{g} \ e \ Z_j(0) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Denoteremo la base Jacobiana anche con

$$Z_1^{(1)}, \dots, Z_{N_1}^{(1)}; \dots ; Z_1^{(r)}, \dots, Z_{N_r}^{(r)}.$$

Ovviamente $Z_j^{(1)} = Z_j$ *per* $1 \leq j \leq N_1$. *Per il Teorema 2.3.4,* $Z_j^{(i)}$ *è* δ_λ*-omogeneo di grado* i *e prende la seguente forma:*

$$Z_j^{(i)} = \frac{\partial}{\partial x_j^{(i)}} + \sum_{h=i+1}^{r} \sum_{k=1}^{N_h} a_{j,k}^{(i,h)}(x^{(1)}, \dots, x^{(h-i)}) \frac{\partial}{\partial x_k^{(h)}}, \tag{2.17}$$

dove $a_{j,k}^{(i,h)}$ *è una funzione polinomiale* δ_λ*-omogenea di grado* $h - i$. *In particolare, i generatori Jacobiani di* $\mathbb{G}$*, cioè i vettori* $Z_1^{(1)}, \dots, Z_{N_1}^{(1)}$ *sono* δ_λ*-omogenei di grado* 1.

Osservazione 2.4.5. *Con le notazioni precedenti, l'algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ *è generata da* $Z_1, \dots, Z_{N_1}$*, cioè*

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\{Z_1, \dots, Z_{N_1}\}.$$

2.4.2 Sub-Laplaciani su un gruppo di Carnot omogeneo

Definizione 2.4.6 (Sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot omogeneo). *Se* $Z_1, \dots, Z_{N_1}$ *sono i generatori jacobiani del gruppo di Carnot* $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$*, l'operatore differenziale del secondo ordine*

$$\Delta_{\mathbb{G}} = \sum_{j=1}^{N_1} Z_j^2 \tag{2.18}$$

è chiamato ***sub-Laplaciano canonico*** *su* $\mathbb{G}$*. Un qualsiasi operatore*

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N_1} Y_j^2, \tag{2.19}$$

dove $Y_1, \dots, Y_{N_1}$ *è una base di* $\mathrm{span}\{Z_1, \dots, Z_{N_1}\}$*, è chiamato* ***sub-Laplaciano*** *su* $\mathbb{G}$*. L'operatore*

$$\nabla_{\mathbb{G}} = (Z_1, \dots, Z_{N_1}) \tag{2.20}$$

è detto $\mathbb{G}$***-gradiente canonico****. Infine, se* $\mathcal{L}$ *è come in* (2.19)*, l'operatore* $\nabla_{\mathcal{L}} = (Y_1, \dots, Y_{N_1})$ *sarà chiamato* $\mathcal{L}$***-gradiente****.*

Vedremo ora alcune proprietà dei sub-Laplaciani. Nel seguito $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N_1} Y_j^2$ denoterà un qualsiasi sub-Lalplaciano su $\mathbb{G}$.

1. $\mathcal{L}$ è *ipoellittico*, cioè ogni soluzione distribuzionale di $\mathcal{L}u = f$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ ogniqualvolta f è di classe $\mathcal{C}^\infty$.

2. $\mathcal{L}$ è invariante per traslazoini a sinistra su $\mathbb{G}$, cioè per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{G}$,

$$\mathcal{L}(u(\alpha \circ x)) = (\mathcal{L}u)(\alpha \circ x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{G} \text{ e per ogni } u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N).$$

   Questo viene dal fatto che gli Y_j sono invarianti a sinistra.

3. $\mathcal{L}$ è δ_λ-omogeneo di grado due, cioè per ogni fissato $\lambda > 0$,
$$\mathcal{L}(u(\delta_\lambda(x))) = \lambda^2(\mathcal{L}u)(\delta_\lambda(x)) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{G} \text{ e per ogni } u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N).$$
Questo viene dal fatto che gli Y_j sono δ_λ-omogenei di grado uno.

4. $\mathcal{L}$ può essere scritto come
$$\mathcal{L} = \operatorname{div}(A(x)\nabla^T), \tag{2.21}$$
dove A è la matrice simmetrica $N \times N$
$$A(x) = \sigma(x)\sigma(x)^T$$
e $\sigma(x)$ è la matrice $N \times N_1$ le cui colonne sono $Y_1 I(x), \dots, Y_{N_1} I(x)$. Quindi, poichè questi vettori sono linearmente indipendenti per ogni $x \in \mathbb{G}$, il rango di $A(x)$ è N_1 per ogni $x \in \mathbb{G}$. Ora, (2.21) è una diretta conseguenza del seguente calcolo
$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N_1} Y_j^2 = \sum_{k=1}^{N_1}\sum_{i=1}^{N}(Y_k I)_i(x)\partial_i\Big(\sum_{j=1}^{N}(Y_k I)_j(x)\partial_j\Big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\partial_i\Big\{\sum_{j=1}^{N}\Big(\sum_{k=1}^{N_1}(Y_k I)_i(x)(Y_k I)_j(x)\Big)\partial_j\Big\},$$
dato che $(Y_k I)_i(x)$ non dipende da x_i. Quindi questo prova che $\mathcal{L} = \operatorname{div}(A(x)\nabla^T)$, con
$$A(x) = \Big(\sum_{k=1}^{N_1}(Y_k I)_i(x)(Y_k I)_j(x)\Big)_{i,j=1,\dots,N} = \sigma(x)\sigma(x)^T.$$
La matrice A assume la seguente forma a blocchi
$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}, \tag{2.22}$$
dove $A_{i,j}$ è una matrice $m_i \times m_j$ con entrate polinomiali, con $m_1 = N_1$ e $m_2 = N - N_1$. Inoltre, $A_{1,1}$ è costante e non-singolare. Infatti, per una opportuna matrice non-singolare $B = (b_{j,k})_{j,k=1}^{N_1}$, abbiamo
$$Y_j = \sum_{k=1}^{N_1} b_{j,k} Z_k, \quad j = 1, \dots, N_1. \tag{2.23}$$
D'altra parte, vedere (2.17),
$$Z_k = \partial_k + \sum_{i=N_1+1}^{N} a_i^{(k)}\partial_i = \partial_k + \sum_{i=N_1+1}^{N}\partial_i(a_i^{(k)}\cdot), \tag{2.24}$$
dove le $a_i^{(k)}$ sono opportune funzoni polinomiali indipendenti da x_i. Sostituendo (2.24) in (2.23) ed elevando al quadrato, otteniamo
$$\mathcal{L} = \sum_{h,k=1}^{N_1} a_{h,k}\partial_{h,k} + \sum_{h,k\le N,\ h\vee k > N_1}\partial_h(a_{h,k}\partial_k),$$
dove
$$A_{1,1} = (a_{h,k})_{h,k\le N_1} = B^T B.$$

5. Se $x \in \mathbb{G}$ e $A(x)$ è la matrice del punto precedente, allora la forma quadratica in $\xi \in \mathbb{R}^N$
$$q_{\mathcal{L}}(x,\xi) := \langle A(x)\xi, \xi\rangle$$
è chiamata **forma caratteristica** di $\mathcal{L}$. Abbiamo
$$q_{\mathcal{L}}(x,\xi) = \sum_{j=1}^{N_1} \langle Y_j I(x), \xi\rangle^2,$$
quindi $q_{\mathcal{L}}(x,\cdot)$ si ottiene sostituendo formalmente in $\mathcal{L}$ le derivate $\partial_1, \dots, \partial_N$ con $\xi_1, \dots, \xi_N$. Abbiamo
$$\begin{aligned} q_{\mathcal{L}}(x,\xi) &= \langle A(x)\xi, \xi\rangle = \langle \sigma(x)\sigma(x)^T\xi, \xi\rangle = \\ &= \langle \sigma(x)^T\xi, \sigma(x)^T\xi\rangle = |\sigma(x)^T\xi|^2 = \sum_{j=1}^{N_1} \langle Y_j I(x), \xi\rangle^2. \end{aligned}$$
Allora $q_{\mathcal{L}}(x,\xi) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{G}$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$, cioè $A(x)$ è semi-definita positiva per ogni $x \in \mathbb{G}$. Di più, $q_{\mathcal{L}}(x,\xi) = 0$ se e solo se $\langle Y_j I(x), \xi\rangle^2 = 0$ per ogni $j \in \{1, \dots, N\}$.

2.5 La soluzione Fondamentale

Vedremo ora che i sub-Laplaciani di un gruppo di Carnot omogeneo con dimensione omogenea $Q = \sum_{j=1}^N \sigma_j \geq 3$ (i σ_j sono gli esponenti della dilatazione del gruppo $\delta_\lambda : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $\delta_\lambda(x_1, \dots, x_N) := (\lambda^{\sigma_1}x_1, \dots, \lambda^{\sigma_N}x_N)$) possiedono una *soluzione fondamentale* Γ e vedremo in particolare che
$$\Gamma = d^{2-Q}$$
dove d è una *norma simmetrica omogenea* su $\mathbb{G}$, liscia fuori dall'origine. Questo fatto rappresenta una forte analogia con il caso del Laplaciano classico, per il quale la soluzione fondamentale era $C_N|x|^{2-N}$.

Definizione 2.5.1 (Norma omogenea). *Chiamiamo* ***norma omogenea*** *sul gruppo di Carnot omogeneo* $\mathbb{G}$ *ogni funzione* continua *(rispetto alla topologia euclidea)* $d : \mathbb{G} \to [0, \infty)$ *tale che:*

1. $d(\delta_\lambda(x)) = \lambda d(x)$ *per ogni* $\lambda > 0$ *e* $x \in \mathbb{G}$*;*

2. $d(x) > 0$ *se e solo se* $x \neq 0$.

3. Diremo inoltre che d *è* ***simmetrica*** *se* $d(x^{-1}) = d(x)$ *per ogni* $x \in \mathbb{G}$.

Definizione 2.5.2 (Soluzione Fondamentale). *Sia* $\mathbb{G}$ *un gruppo di Carnot omogeneo su* $\mathbb{R}^N$. *Sia* $\mathcal{L}$ *un sub-Laplaciano su* G. *Una funzoine* $\Gamma : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *è* ***una soluzione fondamentale*** *per* $\mathcal{L}$ *se:*

(i) $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$*;*

(ii) $\Gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *e* $\Gamma(x) \longrightarrow 0$ *quando* x *tende a infinito;*

(iii) $\mathcal{L}\Gamma = -\delta_0$*, con* δ_0 *la misura di Dirac supportata in* $\{0\}$*. Più esplicitamente (si ha che l'aggiunto* $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$*),*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma \mathcal{L}\varphi \, dx = -\varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{2.25}$$

Si può dimostrare, con argomenti basati sulla ipoellitticità di $\mathcal{L}$, il seguente risultato.

Teorema 2.5.3 (**Esistenza della soluzione fondamentale**). *Sia* $\mathcal{L}$ *un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot omogeneo* $\mathbb{G}$ *(con dimensione omogenea* $Q > 2$*). Allora esiste una soluzione fondamentale* Γ *per* $\mathcal{L}$*.*

Da (2.25) e dalla condizione (i) della Definizione 2.5.2 otteniamo immediatamente la $\mathcal{L}$-armonicità della soluzione fondamentale Γ fuori dall'origine. Infatti, se in (2.25) prendiamo φ con supporto in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, possiamo integrare per parti e ottenere

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\mathcal{L}\Gamma)\varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}),$$

il che implica

$$\mathcal{L}\Gamma = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N \setminus \{0\}. \tag{2.26}$$

Ora vedremo, senza dimostrazione, alcune proprietà della soluzione fondamentale. Sia $\mathcal{L}$ un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$. Se Γ è una soluzione fondamentale per $\mathcal{L}$.

1. Γ **inverte a sinistra** $\mathcal{L}$.

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y^{-1} \circ x)\mathcal{L}\varphi(x) \, dx = -\varphi(y) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{2.27}$$

   e per ogni $y \in \mathbb{R}^N$.

2. Γ **inverte a destra** $\mathcal{L}$. Per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, la funzione

$$\mathbb{R}^N \ni y \mapsto u(y) := \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y^{-1} \circ x)\varphi(x) \, dx \tag{2.28}$$

   è liscia e soddisfa l'equazione

$$\mathcal{L}u = -\varphi. \tag{2.29}$$

3. **Unicità**. La soluzione fondamentale è unica.

4. **Simmetria**. $\Gamma(x^{-1}) = \Gamma(x)$ per ogni $x \in \mathbb{G} \setminus \{0\}$.

5. δ_λ**-omogeneità**. Γ è δ_λ-omogenea di grado $2 - Q$, cioè

$$\Gamma(\delta_\lambda(x)) = \lambda^{2-Q}\Gamma(x) \quad \forall x \in \mathbb{G} \setminus \{0\}, \quad \forall \lambda > 0. \tag{2.30}$$

6. **Positività**. $\Gamma(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{G} \setminus \{0\}$.

7. Γ ha un polo in 0, cioè

$$\lim_{x \to 0} \Gamma(x) = \infty. \tag{2.31}$$

2.5.1 Funzioni Gauge

Introduciamo ora delle norme omogenee simmetriche e lisce che hanno un ruolo fondamentale per i sub-Laplaciani: le funzioni gauge.

Definizione 2.5.4 (**Funzioni gauge (o $\mathcal{L}$-gauge)**). *Sia $\mathcal{L}$ un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$. Chiamiamo **$\mathcal{L}$-gauge** (o semplicemente **funzione gauge**) su $\mathbb{G}$ una qualsiasi norma d omogenea, simmetrica e liscia fuori dall'origine che soddisfi*

$$\mathcal{L}(d^{2-Q}) = 0 \quad \text{in } \mathbb{G} \smallsetminus \{0\}. \tag{2.32}$$

Uno dei risultati più importanti riguarda il legame che c'è tra le funzioni gauge e la soluzione fondamentale di un sub-Laplaciano. Il teorema è il seguente.

Teorema 2.5.5. *Sia $\mathcal{L}$ un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$. Se Γ è una soluzione fondamentale per $\mathcal{L}$. Allora*

$$d(x) := \begin{cases} (\Gamma(x))^{\frac{1}{2-Q}} & \text{se } x \in \mathbb{G} \smallsetminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{2.33}$$

è una $\mathcal{L}$-gauge su $\mathbb{G}$.

Si può inoltre dimostrare il viceversa della proposizione precedente.

Teorema 2.5.6. *Se d è una $\mathcal{L}$-gauge su $\mathbb{G}$, allora esiste una costante positiva β_d tale che $\Gamma = \beta_d\, d^{2-Q}$ è la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$.*

Come conseguenza di quest'ultimo risultato, data l'unicità della soluzione fondamentale, otteniamo che, a meno di una costante positiva, anche la funzione gauge è unica.

Vale inoltre il seguente risultato sulla integrabilità delle norme omogenee su $\mathbb{G}$.

Teorema 2.5.7. *Sua $\mathcal{L}$ un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$. Sia ρ una qualsiasi norma omogenea su $\mathbb{G}$. Allora la funzione ρ^α è localmente integrabile in $\mathbb{R}^N$ se e solo se $\alpha > -Q$, con Q dimensione omogenea di $\mathbb{G}$.*

2.5.2 Formule di media superficiale

In questo paragrafo richiamereo i teoremi di media superficiale e solida per i sub-Laplaciani, che estendono il Teorema della media di Gauss per funzioni armoniche. Vedremo inoltre una estensione del Teorema di Koebe, che ci fornirà una caratterizzazione delle funzioni $\mathcal{L}$-armoniche. Nel seguito d indicherà una funzione gauge sul gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$ relativa al sub-Laplaciano $\mathcal{L}$.

Per ogni $x \in \mathbb{G}$ e $r > 0$, definiamo la d-palla di centro x e raggio r

$$B_r^d(x) := \{y \in \mathbb{G} : d(x^{-1} \circ y) < r\}.$$

Definizione 2.5.8. ***Nuclei delle formule di media*** *Sia $\mathcal{L}$ un sub-Laplaciano sul gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$ e sia d una $\mathcal{L}$-gauge. Poniamo, per ogni $x \in \mathbb{G} \setminus \{0\}$,*

$$\Psi_{\mathcal{L}}(x) := |\nabla_{\mathcal{L}} d|^2(x).$$

Inoltre, per ogni x, $y \in \mathbb{G}$ con $x \neq y$, definiamo le funzioni

$$\Psi_{\mathcal{L}}(x,y) := \Psi_{\mathcal{L}}(x^{-1} \circ y) \quad e \quad \mathcal{K}_{\mathcal{L}}(x,y) = \frac{|\nabla_{\mathcal{L}} d|^2(x^{-1} \circ y)}{|\nabla(d(x^{-1} \circ \cdot))|(y)}. \tag{2.34}$$

Ora, le formule di media si ottengono tramite formule di rappresentazione che valgono in generale per funzioni $\mathcal{C}^2$.

Assumiamo che Ω sia limitato con $\partial\Omega$ di classe $\mathcal{C}^1$ e con normale esterna $\eta = \eta(y)$ in ogni punto $y \in \partial\Omega$. Scriviamo inoltre il sub-Laplaciano $\mathcal{L}$ in forma di divergenza

$$\mathcal{L} = \operatorname{div}(A(x) \cdot \nabla^T),$$

da cui otteniamo che

$$v\mathcal{L}u - u\mathcal{L}v = \operatorname{div}(vA \cdot \nabla^T u) - \operatorname{div}(uA \cdot \nabla^T v).$$

Allora, se u, v sono di classe $\mathcal{C}^2$ in un intorno di $\overline{\Omega}$, si può dimostrare, tramite il Teorema della divergenza, la seguente **Identità di Green**

$$\int_{\Omega} (v\mathcal{L}u - u\mathcal{L}v)\, dH^N = \int_{\partial\Omega} \big(v\langle A \cdot \nabla^T u, \nu\rangle - u\langle A \cdot \nabla^T v, \nu\rangle\big)\, dH^{N-1}. \tag{2.35}$$

Qui H^N e H^{N-1} indicano, rispettivamente, la misura di Hausdorff N-dimensionale e $(N-1)$-dimensionale. Inoltre, se fissiamo $x_0 \in \Omega$ e prendiamo $v = \Gamma(x_0^{-1} \circ x)$, vale la seguente **Formula di rappresentazione di Green**

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} \big(v\langle A \cdot \nabla^T u, \nu\rangle - u\langle A \cdot \nabla^T v, \nu\rangle\big)\, dH^{N-1} - \int_{\Omega} v\mathcal{L}u\, dH^N. \tag{2.36}$$

Data $u \in \mathcal{C}^2(O)$, con $O \subseteq \mathbb{R}^N$, applicando l'identità di Green alle funzioni u e $v := d^{2-Q}(x^{-1} \circ \cdot)$ sull'aperto $D_{\varepsilon,r} := B_r^d(x) \setminus \overline{B_\varepsilon^d(x)}$, studiando il comportamento per $\varepsilon \to 0$, si dimostra il seguente fondamentale risultato.

Teorema 2.5.9 (**Formula di media superficiale**). *Sia $\mathcal{L}$ un sub-Laplaciano sul gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$, e sia d una $\mathcal{L}$-gauge su $\mathbb{G}$. Sia O un sottinsieme aperto di $\mathbb{G}$ e sia $u \in \mathcal{C}^2(O, \mathbb{R})$. Allora, per ogni $x \in O$ e $r > 0$ tali che $\overline{B_r^d(x)} \subset O$, abbiamo*

$$u(x) = \mathcal{M}_r(u)(x) - \mathcal{N}_r(\mathcal{L}u)(x), \tag{2.37}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_r(u)(x) &= \frac{(Q-2)\beta_d}{r^{Q-1}} \int_{\partial B_r^d(x)} \mathcal{K}_{\mathcal{L}}(x,z) u(z)\, dH^{N-1}(z), \\ \mathcal{N}_r(w)(x) &= \beta_d \int_{B_r^d(x)} (d^{2-Q}(x^{-1} \circ z) - r^{2-Q}) w(z)\, dH^N(z), \end{aligned} \tag{2.38}$$

con

$$(\beta_d)^{-1} = (Q-2) \int_{\partial B_1^d(0)} \mathcal{K}_{\mathcal{L}}(0, \cdot)\, dH^{N-1} \tag{2.39}$$

e $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ e $\Psi_{\mathcal{L}}$ sono definiti in (2.34). *In particolare, se $\mathcal{L}u = 0$, cioè u è $\mathcal{L}$-armonica in O, abbiamo*

$$u(x) = \mathcal{M}_r(u)(x). \tag{2.40}$$

Osservazione 2.5.10. *Osserviamo che, se* $\mathcal{L} = \Delta$ *è il Laplaciano classico in* $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, *il nucleo* $\mathcal{K}_{\mathcal{L}} \equiv 1$ *costante. Allora, in questo caso, la formula* (2.40) *ci restituisce il Teorema di Gauss 1.2.2.*

Abbiamo ora gli strumenti per dimostrare il Teorema 2.5.6, in particolare si dimostra che la costante β_d è proprio quella definita da (2.39).

Dimostrazione Teorema 2.5.6. Sia $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ e scegliamo $r > 0$ tale che $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B_r^d(0)$. Allora, per la formula di media (2.37), poichè $\varphi \equiv 0$ su $\partial B_r^d(0)$,

$$\varphi(0) = -\beta_d \int_{B_r^d(0)} (d^{2-Q}(z) - r^{2-Q}) \mathcal{L}\varphi(z)\, dH^N(z).$$

D'altra parte, come conseguenza dell'identità di Green (2.35) (prendendo $v \equiv 1$ e $u = \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$), si ha che

$$\int_{B_d} r^{2-Q} \mathcal{L}\varphi\, dH^N = 0.$$

Allora, se $\Gamma = \beta_d d^{2-Q}$, si ha che $\Gamma \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ grazie al Teorema 2.5.7 e

$$-\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(z) \mathcal{L}\varphi(z)\, dH^N(z)$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Inoltre, Γ è liscia in $\mathbb{G} \setminus \{0\}$ e $\Gamma(z) \to 0$ quando $z \to \infty$, poichè $Q - 2 > 0$. Allora, per la definizione 2.5.2, Γ è la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$. □

Ora, tramite la superposizione di formule di media superficiale, si può ottenere una formula di media di volume. Il risultato è il seguente.

Teorema 2.5.11 (Formula di media di volume). *Sia* $\mathcal{L}$ *un sub-Laplaciano sul gruppo di Carnot omogeneo* $\mathbb{G}$, *e sia* d *una* $\mathcal{L}$*-gauge su* $\mathbb{G}$. *Sia* O *un sottinsieme aperto di* $\mathbb{G}$ *e sia* $u \in \mathcal{C}^2(O, \mathbb{R})$. *Allora, per ogni* $x \in O$ *e* $r > 0$ *tali che* $\overline{B_r^d(x)} \subset O$, *abbiamo*

$$u(x) = M_r(u)(x) - N_r(\mathcal{L}u)(x), \tag{2.41}$$

dove

$$\begin{aligned} M_r(u)(x) &= \frac{m_d}{r^Q} \int_{B_r^d(x)} \Psi_{\mathcal{L}}(x^{-1} \circ y) u(y)\, dH^N(y), \\ N_r(w)(x) &= \frac{n_d}{r^Q} \int_0^r \rho^{Q-1} \Big(\int_{B_r^d(x)} (d^{2-Q}(x^{-1} \circ y) - \rho^{2-Q}) w(y)\, dy \Big) d\rho, \end{aligned} \tag{2.42}$$

con $m_d = Q(Q-2)\beta_d$, $n_d = Q\beta_d$ *e* $\Psi_{\mathcal{L}}$ *è definito in* (2.34). *In particolare, se* $\mathcal{L}u = 0$, *cioè* u *è* $\mathcal{L}$*-armonica in* O, *abbiamo*

$$u(x) = M_r(u)(x). \tag{2.43}$$

Analogamente al caso del Laplaciano classico, si ha che le formule di media in (2.40) e (2.43) caratterizzano l'insieme delle funzioni $\mathcal{L}$-armoniche. Vale il seguente risultato.

Teorema 2.5.12 (**Teorema di Gauss-Koebe-Levi-Tonelli**). *Sia $\mathcal{L}$ un sub-Laplaciano sul gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ e sia d una $\mathcal{L}$-gauge su $\mathbb{G}$. Sia O un sottinsieme aperto di $\mathbb{G}$ e sia $u : O \to \mathbb{R}$ una funzione* continua. *Supponiamo che valga una delle seguenti condizioni:*

(i) $u(x) = \mathcal{M}_r(u)(x)$ *per ogni* $x \in O$ *e* $r > 0$ *tali che* $\overline{B_r^d(x)} \subset O$.

(ii) $u(x) = M_r(u)(x)$ *per ogni* $x \in O$ *e* $r > 0$ *tali che* $\overline{B_r^d(x)} \subset O$.

Allora $u \in \mathcal{C}^\infty$ *e* $\mathcal{L}u = 0$.

In [10] Lanconelli ha dimostrato un risultato inverso, estendendo il teorema di Aharonov, Schiffer e Zalcman in [1]. Il teorema provato da Lanconelli è il seguente.

Teorema 2.5.13. *Sia $\mathcal{L}$ un sub-Laplaciano sul gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ e sia d una $\mathcal{L}$-gauge su $\mathbb{G}$. Sia D un aperto limitato di $\mathbb{G}$. Supponiamo che*

$$\int_D \frac{1}{(d(x^{-1} \circ y))^{Q-2}} \Psi(y)\, dy = \frac{a}{(d(x))^{Q-2}} + b, \quad x \in \mathbb{G} \smallsetminus D. \tag{2.44}$$

Allora D è una d-palla centrata nell'origine, $b = 0$ e $a = \Psi(D)$, con Ψ definita in 2.5.8.

Da questo teorema si ottiene immediatamente il seguente corollario.

Corollario 2.5.14. *Sia D un aperto limitato di $\mathbb{G}$ contenente l'origine. Supponiamo che valga*

$$u(0) = \frac{1}{\Psi(D)} \int_D u(y)\Psi(y)\, dy, \quad \textit{dove} \quad \Psi(D) = \int_D \Psi\, dy, \tag{2.45}$$

per ogni funzione u $\mathcal{L}$-armonica e integrabile in D. Allora D è una d-palla.

2.6 Principi di Massimo

Richiamiamo ora, senza dimostrazione, i Principi di Massimo (debole e forte) per i sub-Laplaciani. Questi teoremi avranno un ruolo cruciale in seguito. Per le dimostrazioni si veda [4].

Teorema 2.6.1 (**Principio del Massimo Debole - PMD**). *Sia $\mathcal{L}$ un sub-Laplaciano sul gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$. Sia Ω un sottinsieme aperto e limitato di $\mathbb{G}$. Sia infine $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ tale che*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \geq 0 & \textit{in } \Omega, \\ \limsup\limits_{x \to y} u(x) \leq 0 & \textit{per ogni } y \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.46}$$

Allora $u \leq 0$ in Ω.

Teorema 2.6.2. ***Principio del Massimo Forte - PMF*** *Sia $\mathcal{L}$ un sub-Laplaciano sul gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$. Sia Ω un sottinsieme aperto e connesso di $\mathbb{G}$. SIa infine $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ tale che*

$$u \leq 0 \quad e \quad \mathcal{L}u \geq 0 \quad \textit{in } \Omega. \tag{2.47}$$

Supponiamo che esista un punto $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = 0$. Allora $u(x) = 0$ per ogni $x \in \Omega$.

2.6.1 Funzioni $\mathcal{L}$-subarmoniche

In questo paragrafo definiremo le funzioni subarmoniche (e superarmoniche) rispetto al Laplaciano $\mathcal{L}$, che non abbiano regolarità $\mathcal{C}^2$, ma che siano solamente superiormente semicontinue e vedremo che i principi di massimo continuano a valere.

Prima è necessaria la definzione di *insieme $\mathcal{L}$-regolare*, che sarà fondamentale in seguito.

Definizione 2.6.3 (Insieme $\mathcal{L}$-regolare). *Un insieme limitato $V \subset \mathbb{G}$ sarà detto **$\mathcal{L}$-regolare** se il problema*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0 & \text{in } V \\ u_{|\partial V} = \varphi \end{cases} \tag{2.48}$$

ammette un'unica soluzione classica $u := H_\varphi^V$ per ogni funzione continua $\varphi : \partial V \to \mathbb{R}$.

Il principio del massimo debole 2.6.1 implica l'unicità della soluzione del problema (2.48). Inoltre,

$$H_\varphi^V \geq 0 \text{ ogni volta che } \varphi \geq 0 \text{ su } \partial V.$$

Allora, se V è $\mathcal{L}$-regolare, per ogni fissato $x \in V$, la mappa

$$\mathcal{C}(\partial V, \mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto H_\varphi^V(x) \in \mathbb{R}$$

definisce un funzionale lineare positivo su $\mathcal{C}(\partial V, \mathbb{R})$. Così, come conseguenza del noto Teorema di rappresentazione di Riesz per funzionali lineari positivi, *esiste un'unica misura di Radon μ_x^V* supportata in ∂V tale che

$$H_\varphi^V(x) = \int_{\partial V} \varphi(y)\, d\mu_x^V(y) \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}(\partial V, \mathbb{R}).$$

Chiamiamo μ_x^V la **misura $\mathcal{L}$-armonica** relativa a V e x.

Definizione 2.6.4 (Funzioni $\mathcal{L}$-subarmoniche). *Sia Ω un sottinsieme aperto di $\mathbb{G}$. Una funzione $u : \Omega \to [-\infty, \infty[$ sarà chiamata **$\mathcal{L}$-subarmonica** in Ω se:*

(i) u è superiormente semi-continua (u.s.c) e $u > -\infty$ in un sottinsieme denso di Ω;

(ii) per ogni aperto $\mathcal{L}$-regolare V con chiusura $\overline{V} \subset \Omega$ e per ogni $x \in V$.

$$u(x) \leq \int_{\partial V} u(y)\, d\mu_x^V(y). \tag{2.49}$$

La famiglia delle funzioni $\mathcal{L}$-subarmoniche in Ω sarà denotata con $\underline{\mathcal{S}}(\Omega)$.

In modo analogo si possono definire le funzioni $\mathcal{L}$-superarmoniche $u \in \overline{\mathcal{S}}(\Omega)$. Analogamente al caso classico, si ha che una funzione u è $\mathcal{L}$-armonica se e solo se $u \in \underline{\mathcal{S}}(\Omega) \cap \overline{\mathcal{S}}(\Omega)$.

Inoltre, utilizzando il Teorema 2.6.1, si può dimostrare il seguente risultato, che caratterizza le funzioni $\mathcal{L}$-subarmoniche di classe $\mathcal{C}^2$.

Teorema 2.6.5. *Sia u una funzione $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. Allora u è $\mathcal{L}$-subarmonica se e solo se*

$$\mathcal{L}u \geq 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{2.50}$$

Abbiamo, infine, il principio del massimo forte per funzioni $\mathcal{L}$-subarmoniche.

Teorema 2.6.6 (Principio del massimo forte per $\underline{\mathcal{S}}(\Omega)$). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ un insieme aperto e sia $u \in \underline{\mathcal{S}}(\Omega)$. Allora si ha:*

(i) se Ω è connesso ed esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = \max_\Omega u$, allora $u \equiv u(x_0)$ in Ω.

(ii) se $\limsup_{\Omega \ni y \to x} u(y) \leq 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$, e $\limsup_{\Omega \ni y \to \infty} u(y) \leq 0$ se Ω non è limitato, allora $u(y) \leq 0$ in Ω.

Capitolo 3

Densità con la proprietà di media

In quest'ultimo capitolo ci occuperemo di studiare il problema dell'esistenza di densità, positive, con la proprietà di media per i sub-Laplaciani. Determineremo queste densità, dapprima sulle d-palle, con d $\mathcal{L}$-gauge su $\mathbb{G}$, in seguito su un dominio Ω qualsiasi, che abbia certe proprietà (in particolare richiederemo che Ω sia $\mathcal{L}$-regolare).

Nel caso di Ω generico, troveremo un'espressione molto generale di una densità positiva che abbia la proprietà di media e vedremo che, se tale densità sta in L^q, con $q > \frac{Q}{2}$, allora è possibile trovare una struttura di Γ-tripla. Ci occuperemo quindi di trovare un'espressione della densità ω affinchè questo accada e per farlo sfrutteremo delle stime della funzione di Green e del nucleo di Poisson che Uguzzoni e Lanconelli, in [12], hanno dimostrato per il Laplaciano di Kohn, ma che valgono in generale per un qualsiasi sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot.

Concluderemo il capitolo studiando un problema inverso, analogo a quello già studiato da Cupini e Lanconelli in [6], per il quale avrà un ruolo cruciale la struttura di Γ-tripla.

3.1 Risultati preliminari

Iniziamo dando la definizione di Γ-tripla nell'ambito dei sub.Laplaciani sui gruppi di Carnot. Nel seguito Γ indicherà la soluzione fondamentale di un qualsiasi sub-Laplaciano $\mathcal{L}$ sul gruppo di Carnot $\mathbb{G}$.

Definizione 3.1.1. *Diremo che* $\big(\Omega, \mu, x_0\big)$ *è una* Γ-tripla *se* $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ *è un aperto limitato,* $x_0 \in \Omega$*,* μ *è una misura di Radon non negativa,* $\mu = 0$ *in* Ω^c *e se vale*

$$\Gamma_\mu(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x^{-1} \circ y) d\mu(y) = \Gamma(x^{-1} \circ x_0), \quad \forall x \in \Omega^c. \tag{3.1}$$

Se, insieme a (3.1)*, si ha che*

$$\Gamma_\mu(x) < \Gamma(x^{-1} \circ x_0), \quad \forall x \in \Omega$$

e Γ_μ *è una funzione continua reale in* $\mathbb{R}^N$*, diremo che* $\big(\Omega, \mu, x_0\big)$ *è una* Γ-tripla forte.

L'obiettivo è studiare il seguente problema:

(P) Dato $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ aperto e limitato e $x_0 \in \Omega$, esiste una misura di Radon non negativa μ tale che (Ω, μ, x_0) è una Γ-tripla?

Su insiemi $\mathcal{L}$-regolari costruiremo questa misura e vedremo che avrà la proprietà di media per funzioni $\mathcal{L}$-armoniche.

Infine vedremo che la nozione di Γ-tripla forte sarà fondamentale per lo studio del problema inverso:

(IP) Date (Ω, μ, x_0) e (D, ν, x_0) Γ-triple, se $\mu_{|\Omega \cap D} = \nu_{|\Omega \cap D}$, è vero che $\Omega = D$ e $\mu = \nu$?

Per dimostrare i risultati su (P) e (IP) ci serve il seguente lemma.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ aperto, limitato e connesso. Supponiamo che esista una famiglia di aperti $(\Omega_t)_{0<t<T\leq\infty}$ tali che:

(i) $\Omega = \cup_{0<t<T}\Omega_t$

(ii) $\overline{\Omega}_t \subseteq \Omega_\tau$ se $0 < t < \tau < T$

(iii) Ω_t è connesso e $\mathcal{L}$-regolare per quasi ogni $t \in]0, T[$

Sia $x_0 \in \Omega$ fissato. Per ogni $u \geq 0$ e $\mathcal{L}$-superarmonica in Ω definiamo

$$m_t(u)(x_o) := \int_{\partial\Omega} u(y) d\mu_{x_0}^{\Omega_t}(y),$$

dove $\mu_{x_0}^{\Omega_t}$ è la misura $\mathcal{L}$-armonica di Ω_t in x_0.

Lemma 3.1.2. *Sia u una funzione non negativa e $\mathcal{L}$-superarmonica in Ω.*
Sia $\varphi :]0, T[\to]0, \infty[$ una funzione misurabile e tale che $\int_0^T \varphi dt = 1$. Definiamo

$$M(u)(x_0) := \int_0^T \varphi(t) m_t(u)(x_0) dt$$

Allora:

(a) $u(x_0) \geq M(u)(x_0)$

(b) $u(x_0) = M(u)(x_0)$ *se u è $\mathcal{L}$-armonica in Ω*

(c) $u(x_0) > M(u)(x_0)$ *se* $u(x_0) < \infty$ *e* $\mathcal{L}u \neq 0$

Dimostrazione. Ω_t è $\mathcal{L}$-regolare. Poniamo quindi

$$n_t(u)(x_0) = -\int_{\Omega_t} G_{\Omega_t}(x_0, y) \mathcal{L}u(y) dH^N(y),$$

dove $G_{\Omega_t}(x_0, y)$ è la funzione di Green per Ω_t con polo in x_0.

Per la formula di Poisson-Jensen si ha:

$$u(x_0) = m_t(u)(x_0) + n_t(u)(x_0) \text{ per quasi ogni } t \in]0, T[. \tag{3.2}$$

Poichè $u \geq 0$ e $\mu_{x_0}^{\Omega_t}$ è una misura positiva, si ha $m_t(u)(x_0) \geq 0$.

Poniamo ora ν_u misura tale che $\nu_u = -\mathcal{L}u \cdot H^N$. Poichè u è $\mathcal{L}$-superarmonica (e quindi $\mathcal{L}u \leq 0$) si ha che $\nu_u \geq 0$. Inoltre $\Omega_t \subseteq \Omega_\tau$ per ogni $t \leq \tau$. Allora $t \longmapsto n_t(u) \nearrow$ ed è ≥ 0. Moltiplicando (3.2) per $\varphi(t)$ e integrando, otteniamo

$$u(x_0) = M(u)(x_0) + N(u)(x_0) \tag{3.3}$$

dove $M(u)(x_0) = \int_0^T \varphi(t) m_t(u)(x_0)dt$ e $N(u)(x_0) = \int_0^T \varphi(t) n_t(u)(x_0)dt$. Per quanto detto $N(u)(x_0) \geq 0$, quindi l'asserto (a) è dimostrato.

Di più, se u è $\mathcal{L}$-armonica (e quindi $\mathcal{L}u = 0$), allora $N(u)(x_0) = 0$, quindi anche l'asserto (b) è dimostrato.

Infine, se $\mathcal{L}u \neq 0$ in Ω, allora $\nu_u \neq 0$ in Ω. Quindi esiste $t_0 > 0$ tale che $\nu_u(\Omega_{t_0}) > 0$. D'altra parte $\nu_u(\Omega_t) \geq \nu_u(\Omega_{t_0})$ per ogni $t > t_0$ e $G_{\Omega_t}(x_0, \cdot) > 0$ dato che Ω_t è connesso. Allora

$$n_t(u)(x_0) > 0 \text{ per ogni } t \geq t_0.$$

Sostituendo in (3.3), poichè $u(x_0) < \infty$, si ha che

$$u(x_0) > M(u)(x_0)$$

e questo prova l'asserto (c). □

3.2 Problema diretto

Sia $\mathcal{L}$ un sub-Laplaciano sul gruppo di Carnot $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$. Sia inoltre d la $\mathcal{L}$-gauge su $\mathbb{G}$. Indichiamo con $B_r^d(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^N : d(x_0^{-1} \circ y) < r\}$.
Sia Q la dimensione omogenea di $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$. Posto

$$P_d : \partial B_1^d(0) \to \mathbb{R}, \quad P_d = (Q-2)\beta_d \cdot \frac{|\nabla_{\mathcal{L}} d|^2(y)}{|\nabla d(y)|} = (Q-2)\beta_d \cdot \mathcal{K}_{\mathcal{L}}(0, y),$$

definiamo

$$m_d(y) := |\nabla d(y)| \cdot P_d\Big(\frac{y}{d(y)}\Big), \quad y \neq 0.$$

Con queste notazioni si ha il seguente Teorema.

Teorema 3.2.1. *Sia $B_r^d(x_0)$ una d-palla di $\mathbb{G}$ e definiamo:*

$$\omega_\alpha(y) := \frac{\alpha}{r^\alpha} \frac{m_d(x_0^{-1} \circ y)}{\big(d(x_0^{-1} \circ y)\big)^{Q-\alpha}}, \quad y \in B_r^d(x_0) \smallsetminus x_0.$$

Sia μ_α la misura così definita: $\mu_\alpha := \omega_\alpha \cdot H^N_{|_{B_r^d(x_0)}}$.
Valgono i seguenti fatti:

(i) Se $\alpha > 0$, allora

$$u(x_0) = \int_{B_r^d(x_0)} u(y) d\mu_\alpha(y), \quad \forall u \quad \mathcal{L}\text{-armonica in } B_r^d(x_0) \text{ e } u \geq 0;$$

(ii) Se $\alpha > Q-2$, allora $\big(B_r^d(x_0), \mu_\alpha, x_0\big)$ è una Γ-tripla forte.

Dimostrazione. Avendo in mente il Lemma 3.1.2, poniamo $\Omega = B_r^d(x_0)$ e $\Omega_t = B_t^d(x_0)$, con $0 < t < r$. Allora $(\Omega_t)_{0<t<r}$ soddisfa le condizioni (i), (ii) e (iii).

Per il Teorema di media superficiale per funzioni $\mathcal{L}$-armoniche e con le notazioni precedenti, si ha che la misura armonica

$$d\mu_0^{B_1^d(0)}(y) = P_d(y)dH^{N-1}(y).$$

Ora, poichè $\mathcal{L}$ è invariante per traslazioni a sinistra e omogeneo di grado 2 rispetto alla dilatazione del gruppo δ_λ, ricordando inoltre che la dimensione omogenea del gruppo è Q, si ha

$$d\mu_{x_0}^{B_t^d(x_0)}(y) = \frac{1}{t^{Q-1}} P_d\Big(\frac{x_0^{-1}\circ y}{t}\Big)dH^{N-1}(y).$$

Per $\alpha > 0$, la funzione $\varphi_\alpha :]0, r[\to]0, \infty[$, $\varphi_\alpha(t) = \frac{\alpha}{r^\alpha} t^{\alpha-1}$ è non negativa e misurabile e

$$\int_0^r \varphi_\alpha(t)dt = 1.$$

Allora possiamo scrivere l'operatore M del lemma 3.1.2 relativamente alla funzione φ_α

$$M(u)(x_0) = \frac{\alpha}{r^\alpha}\int_0^r \frac{1}{t^{Q-\alpha}}\bigg(\int_{\{d(x_0^{-1}\circ y)=t\}} P_d\Big(\frac{x_0^{-1}\circ y}{t}\Big)dH^{N-1}(y)\bigg)dt.$$

Per la formula di coarea, otteniamo

$$\begin{aligned} M(u)(x_0) &= \frac{\alpha}{r^\alpha}\int_{B_r^d(x_0)} u(y)\frac{|\nabla_d(x_0^{-1}\circ y)|}{\big(d(x_0^{-1}\circ y)\big)^{Q-\alpha}} P_d\bigg(\frac{x_0^{-1}\circ y}{d(x_0^{-1}\circ y)}\bigg)dH^{N-1}(y)dt = \\ &= \frac{\alpha}{r^\alpha}\int_{B_r^d(x_0)} u(y)\frac{m_d(x_0^{-1}\circ y)}{\big(d(x_0^{-1}\circ y)\big)^{Q-\alpha}}dH^{N-1}(y)dt = \int_{B_r^d(x_0)} u(y)d\mu_\alpha(y)dt. \end{aligned}$$

Ora, per il punto (b) del Lemma 3.1.2, otteniamo

$$u(x_0) = M(u)(x_0) = \int_{B_r^d(x_0)} u(y)d\mu_\alpha(y), \quad \forall u : \mathcal{L}u = 0, \quad u \geq 0. \tag{3.4}$$

Così l'asserto (i) è provato. Utilizzando in (3.4) la famiglia di funzioni $y \mapsto u_x(y) = \Gamma(x^{-1}\circ y)$, che sono non negative e tali per cui $\mathcal{L}u_x = 0$ in $B_r^d(x_0)$, si ha

$$\Gamma(x^{-1}\circ x_0) = \int_{B_r^d(x_0)} \Gamma(x^{-1}\circ y)d\mu_\alpha(y) = \Gamma_{\mu_\alpha}(x), \quad \forall x \notin B_r^d(x_0), \tag{3.5}$$

dove Γ_{μ_α} denota il Potenziale Newtoniano di μ_α.
D'altra parte, se $x \in B_r^d(x_0)$, allora

$$\begin{cases} u_x(y) = \Gamma(x^{-1}\circ y) \text{ è } \mathcal{L}\text{-superarmonica in } B_r^d(x_0) \\ u_x(x_0) = \Gamma(x^{-1}\circ x_0) < \infty \\ \mathcal{L}u_x \neq 0 \text{ in } B_r^d(x_0) \end{cases}$$

quindi, per il punto (c) del Lemma 3.1.2, si ha che

$$\Gamma(x^{-1}\circ x_0) > \Gamma_{\mu_\alpha}(x), \quad \forall x \in B_r^d(x_0), \quad x \neq x_0. \tag{3.6}$$

Inoltre, $\Gamma \in L^p_{loc}(\mathbb{G}),\ \forall p \in \left[1, \frac{Q}{Q-2}\right[$ mentre $\left(\frac{1}{d}\right)^{Q-\alpha} \in L^q_{loc}(\mathbb{G}),\ \forall q \in \left[1, \frac{Q}{Q-\alpha}\right[$.
Allora

$$\mathbb{G} \ni x \mapsto \int_{B^d_r(x_0)} \Gamma(x^{-1} \circ y) d\mu_\alpha(y)$$

è continua $\forall \alpha > Q-2$, infatti in questo modo esiste almeno un $q > \frac{Q}{2}$ per il quale si abbia sommabilità di $\left(\frac{1}{d}\right)^{Q-\alpha}$ e così si può applicare la Disuguaglianza di Hölder per dimostrare la continuità dell'integrale.

In particolare la disuguaglianza (3.6) si estende per $x = x_0$. Allora, poichè vale anche (3.5), si ha che

$$\left(B^d_r(x_0), \mu_\alpha, x_0\right) \text{ è una } \Gamma\text{-tripla forte se } \alpha > Q-2$$

e questo termina la prova del Teorema. □

3.2.1 Esistenza su Ω generico

Sia ora Ω aperto limitato e $\mathcal{L}$-regolare di $\mathbb{G}$ e sia $\mathcal{L}$ un qualsiasi sub-Laplaciano su $\mathbb{G}$. Nel seguito il gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ avrà sempre dimensione omogenea $Q \geq 3$.

Definiamo la Funzione di Green di Ω con polo in $x \in \Omega$.

Definizione 3.2.2 (Funzione di Green). *Chiamiamo **$\mathcal{L}$-funzione di Green** (o semplicemente funzione di Green) di Ω con polo in $x \in \Omega$ la funzione*

$$G_\Omega(x, \cdot) : \Omega \to]-\infty, \infty] \qquad G_\Omega(x,y) := \Gamma(x^{-1} \circ y) - h_x(y),$$

dove Γ è la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$ e h_x è la soluzione di

$$\begin{cases} \mathcal{L}h = 0 & \text{in } \Omega \\ h(z) = \Gamma(x^{-1} \circ z) & \forall z \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.7}$$

Osserviamo subito che la $\mathcal{L}$-regolarità di Ω garantisce la buona definizione di G_Ω. Inoltre, per come è definita, $\mathbb{G}(x, \cdot)$ è $\mathcal{L}$-armonica in $\Omega \setminus \{x\}$, in particolare, per il Teorema 2.5.12 è $\mathcal{C}^\infty(\Omega \setminus \{x\})$.

Per i prossimi risultati ci servirà la seguente formula di rappresentazione per funzioni $\mathcal{C}^2$, che si dimostra utilizzando l'identità di Green (2.35) e la formula di rappresentazione di Green (2.36).

Teorema 3.2.3 (II Formula di rappresentazione di Green). *Sia Ω un aperto $\mathcal{L}$-regolare di $\mathbb{G}$ e sia D un aperto regolare (rispetto al Teorema della divergenza) con $\overline{D} \subset \Omega$. Sia inoltre $u \in \mathcal{C}^2(\overline{D}, \mathbb{R})$ e sia $x \in D$ fissato. Sia infine $G = G_D$ la funzione di Green di D con polo in x. Allora vale*

$$u(x) = -\int_{\partial D} u(y) \langle A \cdot \nabla^T G(x,y), \nu(y) \rangle \, dH^{N-1}(y) - \int_D G(x,y) \mathcal{L}u(y) \, dH^N(y), \tag{3.8}$$

con $\nu(y)$ che indica la normale esterna a ∂D in y.

Dimostrazione. Sia $u \in \mathcal{C}^2(\overline{D}, \mathbb{R})$ e sia $x \in D$. Sia inoltre h_x come in (3.7), così $h_x \in \mathcal{C}^2(\overline{D}, \mathbb{R})$. Allora possiamo utilizzare l'identità di Green (2.35) alle funzioni u e h_x e ottenere

$$\int_D \big(h_x \mathcal{L}u - u\mathcal{L}h_x\big)\, dH^N = \int_{\partial D} \big(h_x \langle A \cdot \nabla^T u, \nu\rangle - u\langle A \cdot \nabla^T h_x, \nu\rangle\big)\, dH^{N-1}.$$

Tenendo in mente che $\mathcal{L}h_x = 0$ per definizione di h_x, otteniamo

$$0 = \int_{\partial D} \big(h_x \langle A \cdot \nabla^T u, \nu\rangle - u\langle A \cdot \nabla^T h_x, \nu\rangle\big)\, dH^{N-1} - \int_D h_x \mathcal{L}u\, dH^N. \tag{3.9}$$

D'altra parte, dalla formula di rappresentazione di Green (2.36) otteniamo

$$u(x) = \int_{\partial D} \big(v \langle A \cdot \nabla^T u, \nu\rangle - u\langle A \cdot \nabla^T v, \nu\rangle\big)\, dH^{N-1} - \int_D v \mathcal{L}u\, dH^N, \tag{3.10}$$

dove $v(y) = \Gamma(x^{-1} \circ y)$. Ora, sottraendo (3.9) a (3.10) e tenendo in mente la definizione della funzione di Green G, otteniamo

$$u(x) = \int_{\partial D} \big(G(x,y) \langle A \cdot \nabla^T u, \nu\rangle - u\langle A \cdot \nabla^T G(x,y), \nu\rangle\big)\, dH^{N-1} - \int_D G(x,y) \mathcal{L}u\, dH^N.$$

Infine, osservando che $G(x,y) = 0$ se $y \in \partial D$, si ottiene la tesi. □

Consideriamo ora $\Omega \in \mathbb{G}$ limitato, connesso, aperto e $\mathcal{L}$-regolare. Sia inoltre $x_0 \in \Omega$ e sia $G = G_\Omega$ la funzione di Green di Ω con polo in x_0.
Per ogni $t \in]0, \infty[$, poniamo $\Omega_t = \Omega_t(x_0) = \{x \in \Omega : G(x_0, x) > \frac{1}{t}\}$, l'insieme di sopralivello della funzione di Green.

Lemma 3.2.4 (Proprietà di Ω_t)**.** *Per ogni $t > 0$,*

(a) $\Omega_t(x_0) = \operatorname{int} \overline{\Omega_t(x_0)}$,

(b) $\overline{\Omega_t(x_0)} \subseteq \Omega$,

(c) $\Omega_t(x_0)$ *è connesso.*

Dimostrazione. (a) Ovviamente $\Omega_t(x_0) \subseteq \operatorname{int} \overline{\Omega_t(x_0)}$. Per provare l'inclusione opposta ragioniamo per assurdo. Supponiamo che esista $y \in \operatorname{int} \overline{\Omega_t(x_0)}$ con $y \notin \Omega_t(x_0)$. Allora esiste V aperto e connesso con $y \in V$ tale che

$$V \subseteq \operatorname{int} \overline{\Omega_t(x_0)} \smallsetminus \{x_0\} \subseteq \overline{\Omega_t(x_0)} \subseteq \Big\{x \in \Omega : G(x_0, x) \geq \frac{1}{t}\Big\}. \tag{3.11}$$

Ora, $y \in \overline{\Omega_t(x_0)}$ e $y \notin \Omega_t(x_0)$ e $\Omega_t(x_0)$ è aperto, allora

$$y \in \overline{\Omega_t(x_0)} \smallsetminus \Omega_t(x_0) = \partial\Omega_t(x_0) \subseteq \{x \in \Omega : G(x_0, x) = \frac{1}{t}\},$$

quindi

$$G(x_0, y) = \frac{1}{t} \leq G(x_0, x), \text{ per ogni } x \in V, \text{ per (3.11)}.$$

Ora, poichè $x_0 \notin V$, $\mathcal{L}G(x_0, x) = 0$ per ogni $x \in V$, quindi per il Principio del Massimo Forte, si ha

$$G(x_0, x) = \frac{1}{t}, \quad \forall x \in V.$$

Allora $V \cap \Omega_t(x_0) = \varnothing$ e questo è assurdo perchè, per (3.11), i punti di V sono di accumulazione per i punti di $\Omega_t(x_0)$.

(b) Anche per questo punto procediamo per assurdo. Supponiamo che esista

$$x \in \overline{\Omega_t(x_0)} \smallsetminus \Omega.$$

Ora, $\Omega_t(x_0) \subseteq \Omega$, quindi $\overline{\Omega_t(x_0)} \smallsetminus \overline{\Omega}$ e $\Omega_t(x_0)$ è aperto, perciò $\overline{\Omega_t(x_0)} \smallsetminus \Omega \subseteq \overline{\Omega} \smallsetminus \Omega = \partial\Omega$. Allora $x \in \partial\Omega$, quindi, per le proprietà della funzione di Green,

$$\lim_{y \to x} G(x_0, y) = 0.$$

D'altra parte $x \in \partial\Omega_t(x_0)$, (infatti, per il punto (a), se $x \in \operatorname{int} \overline{\Omega_t(x_0)} = \Omega_t(x_0) \subseteq \Omega$) quindi

$$G(x_0, x) = \frac{1}{t}.$$

Questo è assurdo perchè $\frac{1}{t} \neq 0$ per ogni $t > 0$.

(c) Per assurdo, supponiamo che $\Omega_t(x_0) = O_1 \cup O_2$ con O_1, O_2 aperti non vuoti e disgiunti. Non è restrittivo supporre che $x_0 \in O_1$. Per il punto (b), $\partial O_2 \in \Omega$, quindi $G(x_0, \partial O_2) = \{\frac{1}{t}\}$. Inoltre, poichè $x_0 \notin O_2$, $G(x_0, \cdot)$ è $\mathcal{L}$-armonica in O_2. Allora, per il Principio del Massimo, $G(x_0, \cdot) \equiv \frac{1}{t}$ in O_2, ma questo è assurdo perchè $O_2 \subseteq \Omega_t(x_0)$.

□

Da questo Lemma segue immediatamente il seguente Corollario.

Corollario 3.2.5. *L'insieme $\Omega_t(x_0)$ verifica le condizioni (i)-(iii) del Lemma 3.1.2.*

Ora abbiamo tutti gli strumenti per poter dimostrare il prossimo risultato, che fornisce un'espressione esplicita per una misura con la proprietà di media per funzioni $\mathcal{L}$-armoniche e che abbia densità positiva rispetto alla misura di Hausdorff su un qualunque insieme $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ aperto, connesso, limitato e $\mathcal{L}$-regolare.

Teorema 3.2.6. $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ *aperto, connesso, limitato ed $\mathcal{L}$-regolare e sia $x_0 \in \Omega$. Sia inoltre $\varphi :]0, \infty[\to]0, \infty[$ misurabile e tale che $\int_0^\infty \varphi(t)dt = 1$. Poniamo*

$$\omega(x) := \varphi\big(G(x_0, x)\big) \cdot \| \nabla G(x_0, x) \|_A^2, \quad x \in \Omega \smallsetminus \{x_0\},$$

dove $G(x_0, \cdot)$ è la funzione di Green di Ω con polo in x_0.
Posto $\mu := \omega \cdot H^N_{|\Omega}$, si ha:

(i) $u(x_0) = \int_\Omega u(y) d\mu(y), \quad \forall u \geq 0,\ \mathcal{L}u = 0;$

(ii) Se $\omega \in L^q(\Omega)$, $q \in]\frac{Q}{2}, \infty]$, allora $\big(\Omega, \mu, x_0\big)$ è una Γ-tripla forte.

Dimostrazione. Per ogni $t \in]0, \infty[$, sia $\Omega_t(x_0) = \{x \in \Omega : G(x_0, x) > \frac{1}{t}\}$. Per il Corollario 3.2.5, l'insieme $\Omega_t(x_0)$ soddisfa le condizioni (i)-(iii) del Lemma 3.1.2. Inoltre la funzione di Green di $\Omega_t(x_0)$ è $G_{\Omega_t}(x_0, \cdot) = G(x_0, \cdot) - \frac{1}{t}$. Allora, per il punto (b) del Lemma 3.2.4 e per la regolarità di $G(x_0, \cdot)$ in $\Omega \smallsetminus \{x_0\}$, si ha che

$$G_{\Omega_t}(x_0, \cdot) \in C^\infty\big(\Omega_t(x_0)\big),$$

quindi si può applicare la Formula di rappresentazione di Green (3.8) su $\Omega_t(x_0)$ e si ottiene che la misura armonica di $\Omega_t(x_0)$ è

$$\begin{aligned} d\mu_{x_0}^{\Omega_t(x_0)} &= -\langle A \cdot \nabla^T \big(G(x_0, y) - \frac{1}{t}\big), \nu(y)\rangle dH^{N-1} = \\ &= -\langle A \cdot \nabla^T G(x_0, y), \nu(y)\rangle dH^{N-1} = \\ &= \frac{\langle A \cdot \nabla^T G(x_0, y), \nabla G(x_0, y)\rangle}{|\nabla G(x_0, y)|} dH^{N-1} =: \frac{\| \nabla G(x_0, y) \|_A^2}{|\nabla G(x_0, y)|} dH^{N-1}. \end{aligned}$$

Allora, data $\psi :]o, \infty[\to]0, \infty[$ misurabile con $\int \psi = 1$, per il punto (b) del Lemma 3.1.2, ogni funzione $\mathcal{L}$-armonica non negativa soddisfa

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \int_0^\infty \Big(\psi(t) \int_{\{G(x_0,y) = \frac{1}{t}\}} u(y) \frac{\| \nabla G(x_0, y) \|_A^2}{|\nabla G(x_0, y)|} dH^{N-1}\Big) dt = \\ &= \int_0^\infty \Big(\psi(t) \frac{1}{s^2} \int_{\{G(x_0,y) = s\}} u(y) \frac{\| \nabla G(x_0, y) \|_A^2}{|\nabla G(x_0, y)|} dH^{N-1}\Big) ds. \end{aligned}$$

Allora, per la formula di coarea, ponendo $\varphi(s) = \frac{1}{s^2}\psi(\frac{1}{s})$ e ponendo inoltre

$$\omega(y) := \varphi\big(G(x_0, y)\big) \cdot \| \nabla G(x_0, y) \|_A^2 \ \text{ e } \mu := \omega \cdot H^N_{|\Omega},$$

otteniamo

$$u(x_0) = \int_\Omega u(y) \varphi\big(G(x_0, y)\big) \frac{\| \nabla G(x_0, y) \|_A^2}{|\nabla G(x_0, y)|} |\nabla G(x_0, y)| dH^N(y) = \int_\Omega u(y) \omega(y) dH^N(y).$$

Abbiamo quindi dimostrato che

$$u(x_0) = \int_\Omega u(y) d\mu(y) \tag{3.12}$$

e questo prova il punto (i) del Teorema in quanto φ è tale che $\int_0^\infty \varphi(s) ds = 1$.

Per provare il punto (ii), usiamo in (3.12) la famiglia di funzioni $\mathcal{L}$-armoniche

$$\Omega \ni y \mapsto \Gamma(x^{-1} \circ y) =: u_x(y), \quad x \notin \Omega.$$

Si ha allora

$$\Gamma(x^{-1} \circ x_0) = \int_\Omega \Gamma(x^{-1} \circ y) d\mu(y) = \Gamma_\mu(x), \quad \forall x \in \Omega^c.$$

D'altra parte, se $x \in \Omega$, allora

$$\begin{cases} u_x(y) = \Gamma(x^{-1} \circ y) \text{ è } \mathcal{L}\text{-superarmonica in } \Omega \\ u_x(x_0) = \Gamma(x^{-1} \circ x_0) < \infty \\ \mathcal{L} u_x \neq 0 \text{ in } \Omega \end{cases}$$

quindi, per il punto (c) del Lemma 3.1.2, si ha che

$$\Gamma(x^{-1} \circ x_0) > \Gamma_{\mu_\alpha}(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad x \neq x_0. \tag{3.13}$$

Infine, poichè $\Gamma \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p \in [1, \frac{Q}{Q-2}[$ e Ω è limitato, se $\omega \in L^q(\Omega)$ per qualche $q \in]\frac{Q}{2}, \infty[$, si ha che il potenziale Γ_μ è reale e conrinuo in $\mathbb{R}^N$. In particolare la disuguaglianza (3.13) si estende anche per $x = x_0$, quindi $\big(\Omega, \mu, x_0\big)$ è una Γ-tripla forte. □

Il seguente risultato mette in evidenza lo stretto legame che c'è tra la nozione di Γ-tripla e quella di misura con la proprietà di media per funzioni $\mathcal{L}$-armoniche.

Teorema 3.2.7. *Se $\big(\Omega, \mu, x_0\big)$ è una Γ-tripla, allora*

$$u(x_0) = \int_\Omega u(y) d\mu(y), \quad \forall u : \mathcal{L}u = 0 \ in\ \overline{\Omega}. \tag{3.14}$$

Viceversa, sia $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ aperto limitato, sia $x_0 \in \Omega$ e sia μ una misura di Radon non negativa e tale che $\mu = 0$ in Ω^c. Se vale (3.14) *e se Γ_μ è continua, allora $\big(\Omega, \mu, x_0\big)$ è una Γ-tripla.*

Dimostrazione. Sia u $\mathcal{L}$-armonica in $\overline{\Omega}$, allora $\mathcal{L}u = 0$ in O aperto con $\overline{\Omega} \subseteq O$.
Sia $\varphi \in C_0^\infty(O)$, $\varphi \equiv 1$ in $\overline{\Omega}$. Poichè Γ è la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$, abbiamo che

$$u(x) = u(x)\varphi(x) = -\int_O \Gamma(y^{-1} \circ x) \mathcal{L}(u\varphi)(y) dH^N(y), \quad \forall x \in \Omega.$$

Integrando su Ω e scambiando gli integrali otteniamo

$$\int_\Omega u(x) d\mu(x) = -\int_O \mathcal{L}(u\varphi)(y) \Big(\int_\Omega \Gamma(y^{-1} \circ x) d\mu(x) \Big) dH^N(y).$$

Ora, in $\overline{\Omega}$ si ha $\mathcal{L}u = 0$ e $\varphi \equiv 1$, quindi $\mathcal{L}(u\varphi) \equiv 0$, inoltre per ipotesi $\big(\Omega, \mu, x_0\big)$ è una Γ-tripla, quindi

$$\begin{aligned} &\int_O \mathcal{L}(u\varphi)(y) \Big(\int_\Omega \Gamma(y^{-1} \circ x) d\mu(x) \Big) dH^N(y) = \\ &= \int_{O \setminus \overline{\Omega}} \mathcal{L}(u\varphi)(y) \Big(\int_\Omega \Gamma(y^{-1} \circ x) d\mu(x) \Big) dH^N(y) = \\ &= \int_{O \setminus \overline{\Omega}} \mathcal{L}(u\varphi)(y) \Gamma(y^{-1} \circ x_0) dH^N(y). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Ora, poichè $\mathcal{L}(u\varphi) = 0$ in $\overline{\Omega} \cup \big(\mathbb{R}^N \setminus O\big)$, l'equazione (3.15) diventa

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{L}(u\varphi)(y) \Gamma(y^{-1} \circ x_0) dH^N(y) = -(u\varphi)(x_0) = -u(x_0).$$

Abbiamo quindi dimostrato che

$$u(x_0) = \int_\Omega u(x) d\mu(x).$$

Viceversa, per ogni $x \notin \overline{\Omega}$, la funzione $\Gamma(x^{-1} \circ \cdot)$ è $\mathcal{L}$-armonica in $\overline{\Omega}$ e per ipotesi vale (3.14), quindi

$$\Gamma(x^{-1} \circ x_0) = \int_\Omega \Gamma(x^{-1} \circ y) d\mu(y) = \Gamma_\mu(x), \quad \forall x \notin \overline{\Omega}.$$

Sia ora $x \in \partial\Omega$, allora esiste $(x_j)_j$ in $\overline{\Omega}^c$ tale che $x_j \to x$, per $j \to \infty$ Allora, sfruttando la continuità di $\Gamma_\mu(x)$, abbiamo

$$\Gamma(x^{-1} \circ x_0) = \lim_{j\to\infty} \Gamma(x_j^{-1} \circ x_0) = \lim_{j\to\infty} \Gamma_\mu(x_j) = \Gamma_\mu(x).$$

Cioè vale

$$\Gamma(x^{-1} \circ x_0) = \Gamma_\mu(x) \quad \forall x \in \Omega^c$$

e quindi $\big(\Omega, \mu, x_0\big)$ è una Γ-tripla. □

3.2.2 Stime della funzione di Green e del nulceo di Poisson

Il punto (ii) Teorema 3.2.6 afferma che se $\omega \in L^q(\Omega)$, $q \in]\frac{Q}{2}, \infty]$, allora $\big(\Omega, \mu, x_0\big)$ è una Γ-tripla forte. In questo paragrafo ci occupiamo di trovare delle condizioni su Ω e su φ affinchè questo accada.

In [12] Uguzzoni e Lanconelli hanno trovato delle stime della funzione di Green e del nucleo di Poisson per il Laplaciano di Kohn su domini limitati del gruppo di Heisenberg. Basandoci sui loro risultati troveremo stime analoghe per un qualsiasi sub-Laplaciano su un generico gruppo di Carnot e tramite queste stime riusciremo a trovare delle condizioni affinchè $\omega \in L^q(\Omega)$.

Sia dunque Ω un sottinsieme aperto del gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ e sia $\mathcal{L} = \sum Y_j^2$ un qualsiasi sub-Laplaciano su $\mathbb{G}$. Iniziamo dando una stima delle derivate di una funzione $\mathcal{L}$-armonica lungo i campi vettoriali invarianti a sinistra Y_j.

Teorema 3.2.8. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ aperto, sia u tale che $\mathcal{L}u = 0$ e $\overline{B_r^d(x)} \subseteq \Omega$. Allora per ogni $Z_1, \ldots, Z_k \in \{Y_1, \ldots, Y_{N_1}\}$, abbiamo*

$$|Z_1 \ldots Z_k u(x)| \le \frac{c}{r^k} \sup_{B_r^d(x)} |u|, \tag{3.16}$$

dove $c = c\big(k, Q\big)$ e Q è la dimensione omogenea del gruppo $\mathbb{G}$.

Dimostrazione. Sia $\varphi \in C_0^\infty\big(]0,1[, [0,+\infty[\big)$ tale che $\int \varphi = 1$. Per ogni $\varepsilon > 0$, poniamo $\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ e definiamo $\Phi : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) = Q(Q-2)\beta_d \Psi_{\mathcal{L}}(x) \int_{d(x)}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^Q}\, dt,$$

dove $\Psi_{\mathcal{L}}(x)$ è il nucleo delle formule di media definito in 2.5.8. Poniamo inoltre $\Phi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^Q}\Phi \circ \delta_{\frac{1}{\varepsilon}}$. Per ogni $x \in \mathbb{G}$ risulta, data la omogeneità di d,

$$\Phi_\varepsilon(x) = Q(Q-2)\beta_d \Psi_{\mathcal{L}}(x) \int_{d(x)}^{+\infty} \frac{\varphi_\varepsilon(t)}{t^Q}\, dt.$$

Inoltre, per ogni $x \in \Omega_\varepsilon := \{x | \overline{B^d_\varepsilon(x)} \subseteq \Omega\}$, abbiamo

$$u(x) = (\Phi_\varepsilon * u)(x) := \int \Phi_\varepsilon(x^{-1} \circ x') u(x')\, dx'. \tag{3.17}$$

Quest'ultimo fatto viene dalla Formula di media per le funzioni $\mathcal{L}$-armoniche, infatti risulta

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^{+\infty} \varphi_\varepsilon(t) u(x)\, dt = \int_0^\varepsilon \frac{Q(Q-2)\beta_d \varphi_\varepsilon(t)}{t^Q} \int_{d(x^{-1}\circ x')<t} \Psi_{\mathcal{L}}(x^{-1}\circ x') u(x')\, dx'\, dt = \\ &= \int_{\mathbb{G}} \Big(Q(Q-2)\beta_d \Psi_{\mathcal{L}}(x^{-1}\circ x') \int_{d(x^{-1}\circ x')}^{+\infty} \frac{\varphi_\varepsilon(t)}{t^Q}\, dt \Big) u(x')\, dx' = (\Phi_\varepsilon * u)(x). \end{aligned}$$

Ora, se denotiamo con Z il k-esimo operatore $Z_1 \cdots Z_k$, derivando (3.17) e tenendo in mente che gli Z_j sono invarianti a sinistra (cioè invarianti rispetto alle traslazioni a sinistra su $\mathbb{G}$), per ogni $x \in \Omega_\varepsilon$ otteniamo

$$\begin{aligned} |Zu(x)| &= |((Z\Phi_\varepsilon) * u)(x)| \le \Big(\sup_{B^d_\varepsilon(x)} |u| \Big) \int |Z\Phi_\varepsilon| = \\ &= \Big(\sup_{B^d_\varepsilon(x)} |u| \Big) \varepsilon^{-k} \int |Z\Phi| \le \frac{C}{\varepsilon^k} \sup_{B^d_\varepsilon(x)} |u| \end{aligned}$$

e questo completa la dimostrazione. □

Con questa stima si possono ottenere delle stime della funzione di Green, ma prima ci servono ulteriori risultati.

Lemma 3.2.9. *Sia $r > 0$ e $x, x' \in \mathbb{G} \smallsetminus B^d_r(0)$. Allora*

$$|\Gamma(x) - \Gamma(x')| \le c r^{1-Q} d(x^{-1} \circ x'), \tag{3.18}$$

dove Γ indica la soluzione fondamentale del sub-Laplaciano $\mathcal{L}$ e $c = c(Q)$.

Dimostrazione. Poniamo $t = d(x)$ e $t' = d(x')$ e applichiamo il Teorema del valor medio alla funzione t^{2-Q}. Poichè t, $t' \ge r$, esiste $t_0 \ge 0$ tale che:

$$\begin{aligned} |\Gamma(x) - \Gamma(x')| &= c|t^{2-Q} - t'^{2-Q}| = c|(2-Q) t_0^{1-Q} (t - t')| \le \\ &\le c r^{1-Q} |d(x) - d(x')| \le c r^{1-Q} d(x^{-1} \circ x'). \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che le norme omogenee su un gruppo di Carnot verificano una pseudo-disuguaglianza triangolare (si veda [4, Cap. 5, Teorema 5.14.1]) e abbiamo rinominato le costanti. □

Ci serve ora un ultimo risultato, che mostra il comportamento di una funzione $\mathcal{L}$-armonica vicino ai punti del bordo dove si annulla.

Lemma 3.2.10. *Sia D un sottinisieme aperto e limitato di $\mathbb{G}$, $x_0 \in \partial D$ e u una funzione $\mathcal{L}$-armonica e continua fino al bordo. Poniamo $\varphi = u_{|\partial D}$. Se esiste $r > 0$ e $y_0 \in \mathbb{G}$ tali che:*

(i) $B^d_r(y_0) \cap D = \varnothing$, $x_0 \in \partial B^d_r(y_0)$,

(ii) $\varphi \equiv 0$ *in* $\partial D \cap B^d_{2r}(y_0)$,

allora

$$|u(x)| \leq c(\max_{\partial D}|\varphi|)\frac{d(x^{-1}\circ x_0)}{r} \quad \forall x \in D, \tag{3.19}$$

dove $c = c(Q)$.

Dimostrazione. Poniamo $M := \max_{\partial D}|\varphi|$ e definiamo

$$w(x) = M\frac{\Gamma(r) - \Gamma(y_0^{-1}\circ x)}{\Gamma(r) - \Gamma(2r)}, \quad x \in D.$$

Per come è definita w, essa è $\mathcal{L}$-armonica in D e inoltre, per l'ipotesi (ii), risulta $w \geq |\varphi|$ su ∂D, in quanto $\frac{\Gamma(r)-\Gamma(y_0^{-1}\circ x)}{\Gamma(r)-\Gamma(2r)}$, su ∂D, è ≤ 1 solo quando $x \in \partial D \cap B^d_{2r}(y_0)$ ma in questo caso si ha che $\varphi = 0$. Allora, per il Principio del massimo, si ha che $w \geq |u|$ in D e, per il Lemma 3.2.9, si ha

$$|u(x)| \leq M\frac{\Gamma(y_0^{-1}\circ x_0) - \Gamma(y_0^{-1}\circ x)}{cr^{2-Q}} \leq cM\frac{r^{1-Q}d(x_0^{-1}\circ x)}{r^{2-Q}},$$

con c che dipende solo da Q. Così abbiamo ottenuto la tesi. □

Definizione 3.2.11 (Proprietà della palla esterna uniforme). *Diciamo che un sottinisieme aperto* $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ *verifica la* ***proprietà della palla esterna uniforme*** *(o, in breve, che verifica (P)) se esiste* $r_0 > 0$ *tale che*

$(P)_{r_0}$ *Per ogni* $x \in \partial\Omega$, *per ogni* $r \in]0, r_0]$, *esiste* $y \in \mathbb{G}$ *tale che* $B^d_r(y) \cap \Omega = \varnothing$ *e* $x \in \partial B^d_r(y)$.

Assumendo come ipotesi che Ω verifichi la proprieà della palla esterna uniforme, arriveremo alle stime della funzione di Green volute.

Teorema 3.2.12 (Stime della funzione di Green). *Sia* Ω *un sottinsieme aperto, connesso, limitato e* $\mathcal{L}$*-regolare di* $\mathbb{G}$ *che verifichi la proprietà della palla esterna uniforme (P) e sia* G *la sua funzione di Green. Allora per ogni* x, $y \in \Omega$, $x \neq y$, *abbiamo*

$$0 < G(x,y) \leq cd(y^{-1}\circ x)^{2-Q}, \tag{3.20}$$

$$G(x,y) \leq cd(y, \partial\Omega)d(y^{-1}\circ x)^{1-Q}, \tag{3.21}$$

$$|\nabla_{\mathcal{L}}G(x,\cdot)|(y) \leq cd(y^{-1}\circ x)^{1-Q}, \tag{3.22}$$

dove d *è la* $\mathcal{L}$*-gauge del gruppo.*

Dimostrazione. La (3.20) segue dal Principio del massimo e dalla definizione di G. Per quanto dimostrato in [9], su ogni gruppo di Carnot esiste una norma omogenea che verifica la disuguaglianza triangolare. Sia $\widehat{d}$ tale norma. Inoltre è noto che le norme omogenee su un gruppo di Carnot sono equivalenti (si veda [4, Cap. 5, Teorema 5.1.4]), quindi esistono due costanti $c', c'' > 0$ tali che

$$c'\widehat{d}(x) \leq d(x) \leq c''\widehat{d}(x), \quad \forall x \in \mathbb{G}. \tag{3.23}$$

Da (3.20) e da (3.23) otteniamo

$$0 < G(x,y) \le cd(y^{-1}\circ x)^{2-Q} \le c'c\widehat{d}(y^{-1}\circ x)^{2-Q},$$

cioè la (3.20) vale anche per la norma $\widehat{d}$.

Dimostriamo ora la (3.21). Per ipotesi esiste $r_0 = r_0(\Omega)$ tale che valga $(P)_{r_0}$ (si veda Definizione 3.2.11). Fissiamo x_0 e $y_0 \in \Omega$, con $x_0 \ne y_0$ e poniamo

$$\delta = \widehat{d}(y_0, \partial\Omega), \qquad \rho = \widehat{d}(y_0^{-1}\circ x_0), \qquad r = \min\{\frac{\rho}{8}, r_0\}. \tag{3.24}$$

Ora, se $\delta \ge 2r_0$ oppure $\rho \le 4\delta$, allora la (3.21) segue dalla (3.20) dato che Ω è limitato. Supponiamo dunque che $\delta < 2r_0$ e $\rho > 4\delta$, cioè che

$$\delta < 2r.$$

Per definizione di δ, esiste $y_1 \in \partial\Omega$ tale che

$$\widehat{d}(y_1^{-1}\circ y_0) = \delta$$

e inoltre, poichè Ω verifica $(P)_{r_0}$ e $r \le r_0$, esiste $y_2 \in \mathbb{G}$ tale che

$$B_r^{\widehat{d}}(y_2) \cap \Omega = \varnothing, \quad y_1 \in \partial B_r^{\widehat{d}}(y_2).$$

Definiamo quindi

$$B_1 = B_r^{\widehat{d}}(y_2), \quad B_2 = B_{2r}^{\widehat{d}}(y_2), \quad B_4 = B_{4r}^{\widehat{d}}(y_2)$$
$$D = \Omega \cap B_4, \quad \partial_0 = (\partial\Omega)\cap B_2, \quad \partial_1 = (\partial B_4)\cap\Omega.$$

Scegliamo ora $\varphi \in \mathcal{C}(\partial D)$ tale che $\varphi \equiv 0$ su ∂_0, $\varphi \equiv 1$ su ∂_1 e $0 \le \varphi \le 1$. Ω è $\mathcal{L}$-regolare per ipotesi, inoltre possiamo modificare B_4 affinchè anch'essa sia $\mathcal{L}$-regolare, in quanto possiamo fare in modo che sia arbitrariamente "vicina" ad una d-palla, con d gauge, che è $\mathcal{L}$-regolare (si veda [4, Cap. 7, Teorema 7.2.8]); allora anche D lo è, quindi esiste u $\mathcal{L}$-armonica su D e continua fino al bordo tale che $u = \varphi$ su ∂D. Inoltre, per il Principio del massimo e per come è definita φ, si ha $0 \le u \le 1$.
Allora possiamo utilizzare il Lemma 3.2.10 e ottenere

$$|u(x)| \le c\frac{d(y_1^{-1}\circ x)}{r} \overset{(3.23)}{\le} c\frac{\widehat{d}(y_1^{-1}\circ x)}{r}, \quad \forall x \in D. \tag{3.25}$$

In particolare, poichè $y_0 \in D$ (infatti $\delta = \widehat{d}(y_0, \partial\Omega) < 2r$ e $D = \Omega \cap B_4$) si ha

$$|u(y_0)| \le c\frac{\widehat{d}(y_1^{-1}\circ y_0)}{r} = c\frac{\delta}{r}. \tag{3.26}$$

Confrontiamo ora $v := G(x_0, \cdot)$ e u in D. Per definizione di r, poichè $\delta < 2r$ e per la proprietà $(P)_{r_0}$ su Ω, si ha, sfruttando la disuguaglianza triangolare

$$\widehat{d}(y_2^{-1}\circ x_0) \ge \widehat{d}(y_0^{-1}\circ x_0) - \widehat{d}(y_2^{-1}\circ y_0) \ge \rho - \widehat{d}(y_1^{-1}\circ y_0) - \widehat{d}(y_2^{-1}\circ y_1) =$$
$$= \rho - \delta - r > \rho - 3r \ge \rho - \frac{3}{8}\rho = \frac{5}{8}\rho.$$

Così
$$\widehat{d}(x_0,\overline{D}) \geq \widehat{d}(x_0,\overline{B_4}) \geq \widehat{d}(y_2^{-1}\circ x_0) - 4r \geq \frac{5}{8}\rho - \frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{8}.$$
Ora, richiamando la (3.20), per ogni $x \in \overline{D}$ abbiamo ($Q \geq 3$)
$$v(x) = G(x_0,x) \leq c\widehat{d}(x_0^{-1}\circ x)^{2-Q} \leq c\widehat{d}(x_0,\overline{D})^{2-Q} \leq c_0\rho^{2-Q}.$$
Quindi, se poniamo
$$w = \frac{v}{c_0\rho^{2-Q}},$$
abbiamo $w \leq 1$ su $\overline{D}$ e come conseguenza, poichè $u = \varphi \equiv 1$ su ∂_1, si ha
$$w \leq 1 = u \quad \text{su } \partial_1.$$
Ora, poichè $G(x_0,x) = 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$, abbiamo anche che
$$w = 0 \leq u \quad \text{su } \partial\Omega \cap \partial D = \partial D \smallsetminus \partial_1.$$
Abbiamo cioè provato che
$$w \leq u \quad \text{su } \partial D. \tag{3.27}$$
Ora, poichè $x_0 \notin \overline{D}$, si ha che w è $\mathcal{L}$-armonica su D. Per il Principio del massimo otteniamo quindi che
$$w \leq u \quad \text{su } D \Longrightarrow v \leq c_0\rho^{2-Q}u \quad \text{su } D. \tag{3.28}$$
Da (3.28) e da (3.25) otteniamo
$$\begin{aligned} G(x_0,y_0) = v(y_0) &\leq c_0\rho^{2-Q}u(y_0) \leq c\frac{\delta}{r}\rho^{2-Q} = \\ &= c\delta\Big(\frac{\rho}{r}\Big)\rho^{1-Q} = c\Big(\frac{\rho}{r}\Big)\widehat{d}(y_0,\partial\Omega)\widehat{d}(y_0^{-1}\circ x_0)^{1-Q} \leq \\ &\overset{(3.23)}{\leq} c\Big(\frac{\rho}{r}\Big)d(y_0,\partial\Omega)d(y_0^{-1}\circ x_0)^{1-Q}, \end{aligned}$$
così è provata la (3.21), dato che $\frac{\rho}{r} \leq c(\Omega)$ (per definizione di r).

Proviamo ora la (3.22). Con le notazioni precedenti, definiamo
$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{\rho,\delta\}, \quad B = B_{\varepsilon}^{\widehat{d}}(y_0), \quad B_0 = B_{2\varepsilon}^{\widehat{d}}(y_0). \tag{3.29}$$
Risulta $\overline{B} \subseteq B_0 \subseteq \Omega$ e $x_0 \notin B_0$, così w è $\mathcal{L}$-armonica su B_0. Inoltre, per ogni $y \in B$, si ha
$$\begin{cases} \widehat{d}(y^{-1}\circ x_0) \geq \widehat{d}(y_0^{-1}\circ x_0) - \widehat{d}(y_0^{-1}\circ y) \geq \rho - \varepsilon \geq \frac{\rho}{2} \\ \widehat{d}(y,\partial\Omega) \leq \widehat{d}(y_0,\partial\Omega) + \widehat{d}(y_0^{-1}\circ y) \leq \delta + \varepsilon \leq \frac{3}{2}\delta. \end{cases} \tag{3.30}$$
Utilizzando ora la stima del Teorema 3.2.8, modificando B affinchè sia arbitrariamente vicina a una palla della gauge, abbiamo
$$|\nabla_{\mathcal{L}}v(y_0)| \leq \frac{c}{\varepsilon}\sup_B |v| \quad \text{su } B. \tag{3.31}$$

Allora, se $\delta \leq \rho$, cioè $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$, usando (3.21) e (3.30) otteniamo

$$|\nabla_{\mathcal{L}} v(y_0)| \leq \frac{c}{\varepsilon} \sup_{y \in B} \left(\widehat{d}(y, \partial\Omega) \widehat{d}(y^{-1} \circ x_0)^{1-Q} \right) \leq \frac{c}{\varepsilon} \delta \rho^{1-Q} = c\rho^{1-Q}.$$

D'altra parte, se $\delta \geq \rho$, cioè $\varepsilon = \frac{\rho}{2}$, usando (3.20) e (3.30) otteniamo

$$|\nabla_{\mathcal{L}} v(y_0)| \leq \frac{c}{\varepsilon} \sup_{y \in B} \widehat{d}(y^{-1} \circ x_0)^{2-Q} \leq \frac{c}{\varepsilon} \rho^{2-Q} = c\rho^{1-Q}.$$

Ricordando la definizione di v e di ρ e applicando nuovamente la (3.23), abbiamo cocluso la dimostrazione. □

Ora dimostreremo una stima del nucleo di Poisson

$$P(x, y) = -\langle A \cdot \nabla^T G(x, y), \nu(y) \rangle,$$

tuttavia le ipotesi fatte finora su Ω non sono più sufficienti a garantire la regolarità di G fino al bordo e quindi non sono sufficienti a garantire la buona definizione di P.

Supponiamo dunque che Ω sia un aperto $\mathcal{L}$-regolare di $\mathbb{G}$. Diremo che Ω soddisfa (I_1) se

(I_1) $\partial\Omega$ è liscio.

Osservazione 3.2.13. *Per i risultati in [7], si ha che*

$$\sigma(K_\Omega) = 0,$$

dove K_Ω è l'insieme dei punti caratteristici di $\partial\Omega$.

Osservazione 3.2.14. *Se Ω è limitato, allora K_Ω è compatto.*

Osservazione 3.2.15. *La funzione $G(x, \cdot)$ è liscia fino a $\partial\Omega \smallsetminus K_\Omega$ (si veda [11]), quindi il nucleo di Poisson è ben definito.*

Prima di dimostrare la stima per il nucleo di Poisson ci serve un ulteriore lemma.

Lemma 3.2.16. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{G}$ che verifichi (P), (I_1) e sia $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega)$. Supponiamo che φ sia costante in un intorno di $K = K_\Omega$. Allora, se denotiamo con u la soluzione classica di*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

abbiamo

$$|\nabla_{\mathcal{L}} u| \in L^\infty(\Omega) \tag{3.32}$$

e

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} P(x, \cdot) \varphi \, d\sigma, \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.33}$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che $\varphi = 0$ in $V \cap \partial\Omega$, dove V è un sottinsieme aperto di $\mathbb{G}$ contenente K. Poichè K è compatto e Ω verifica (P), esiste un altro intorno V_1 di K, $V_1 \subseteq V$, e un raggio $r_1 > 0$ tale che: per ogni $y \in (\partial\Omega) \cap V_1$ esiste una palla esterna di raggio r_1 che tocca Ω in y e tale che la corrispettiva palla di raggio doppio è contenuta in V. Allora, per il Lemma 3.2.10, per ogni $x \in \Omega$ e $y \in (\partial\Omega) \cap V_1$,

$$|u(x)| \le c \max_{\partial\Omega} |\varphi| \frac{d(x,y)}{r_1} = cd(x,y).$$

Inoltre esiste un altro intorno V_2 di K, $V_2 \subseteq V_1$, tale che per ogni $x \in V_2 \cap \Omega$ e per ogni $x' \in B_x := B^d(x, \frac{d(x,\partial\Omega)}{2})$, esiste $y' \in (\partial\Omega) \cap V_1$ tale che $d(x', \partial\Omega) = d(x', y')$. Quindi,

$$|u(x')| \le cd(x', \partial\Omega) \quad \forall x' \in B_x.$$

Abbiamo inoltre che, per la pseudo-disuguaglianza triangolare $d(x', \partial\Omega) \le d(x', x) + \beta d(x, \partial\Omega) \le (\frac{1}{2} + \beta) d(x, \partial\Omega)$. Quindi, usando la stima (3.16) per $|\nabla_{\mathcal{L}} u|$ in B_x, otteniamo per ogni $x \in V_2 \cap \Omega$

$$|\nabla_{\mathcal{L}} u(x)| \le \frac{c}{d(x,\partial\Omega)} \sup_{B_x} |u| \le \frac{c'}{d(x.\partial\Omega)} \sup_{x' \in Bx} d(x', \partial\Omega) \le c'.$$

Questo prova che $|\nabla_{\mathcal{L}} u|$ è limitato in $V_2 \cap \Omega$. Inoltre, per i risultati in [11], $|\nabla_{\mathcal{L}} u| \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \setminus V_2})$. Così la (3.32) è provata.

Mostriamo ora che la (3.33) segue dalla (3.33). Sia $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ una famiglia di aperti lisci tali che $\overline{\Omega_\varepsilon} \subseteq \Omega$ e

$$\bigcup_{\varepsilon > 0} \Omega_\varepsilon = \Omega.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo applicare la Formula di rappresentazione (3.8) su Ω_ε. Mandando ε a zero, da questa formula di rappresentazione otteniamo proprio la (3.33). Infatti, per ogni fissato $x \in \Omega$, $G(x,y)$ tende a zero quando y si avvicina a $\partial\Omega$. Inoltre per la (3.20) e la (3.32),

$$\begin{aligned}|\langle A\nabla u, \nu\rangle G(x,\cdot)| &\le \langle A\nabla u, \nabla u\rangle^{\frac{1}{2}} \langle A\nu, \nu\rangle^{\frac{1}{2}} G(x,\cdot) \le \\ &\le |\nabla_{\mathcal{L}} u| \|A\|^{\frac{1}{2}} G(x,\cdot) \le cd(x,\cdot)^{2-Q} \le c_x\end{aligned}$$

e, per la (3.22),

$$|u\langle A\nabla G(x,\cdot), \nu\rangle| \le |u \nabla_{\mathcal{L}} G(x,\cdot)| \cdot \|A\|^{\frac{1}{2}} \le cd(x,\cdot)^{1-Q} \le c_x$$

in $\partial\Omega_\varepsilon$, se ε è sufficientemente piccolo. $\square$

Teorema 3.2.17 (Stima per il nucleo di Poisson). *Sia Ω un sottinsieme aperto, lmitato e $\mathcal{L}$-regolare di $\mathbb{G}$ che verifichi (P), (I_1) e sia $x \in \Omega$. Allora vale la seguente stima per il nucleo di Poisson P:*

$$0 \le P(x,y) \le cd(y^{-1} \circ x)^{1-Q}, \quad \forall x \in \Omega, \forall y \in \partial\Omega, \tag{3.34}$$

dove $c = c(\Omega, Q)$.

Dimostrazione. Dal Principio del massimo dalla Formula (3.33) segue che $P \geq 0$. Infatti, seguendo le notazioni del Lemma 3.2.16, per ogni $\varphi \geq 0$ su $\partial\Omega$, applicando il Principio del massimo, si ha che $u \geq 0$ su Ω. Questo fatto implica che $P(x, y) \geq 0$ per ogni $y \in \partial\Omega \setminus K_\Omega$; infatti supponiamo per assurdo che esista $y_0 \in \partial\Omega \setminus K_\Omega$ tale che $P(x, y_0) < 0$, allora, per la permanenza del segno, $P(x, y) < 0$ per ogni $y \in V_{y_0}$, con V_{y_0} intorno di y_0. Ma allora se $\varphi \geq 0$ su $\partial\Omega$ con $\operatorname{supp}\varphi \subseteq V_{y_0}$, $\varphi \not\equiv 0$, si ha che $u(x) < 0$ e questo è assurdo. Ora, sfruttando la regolarità di $P(x, \cdot)$ e dall'osservazione 3.2.13, segue che $P(x, y) \geq 0$ per ogni $y \in \partial\Omega$.

Infine, utilizzando la disuguaglianza (3.22), otteniamo

$$\begin{aligned} P(x, y) &\leq \left(\langle A \cdot \nabla^T G(x, \cdot), \nabla^T G(x, \cdot)\rangle^{\frac{1}{2}} \langle A\nu, \nu\rangle^{\frac{1}{2}}\right)(y) \leq \\ &\leq |\nabla_{\mathcal{L}} G(x, \cdot)|(y) \cdot \|A(y)\|^{\frac{1}{2}} \leq c d(x, y)^{1-Q}. \end{aligned}$$

□

3.2.3 Scelta di φ

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto che se il dominio Ω soddisfa certe proprietà, allora valgono delle stime per la funzione di Green e per il nucleo di Poisson. Ora vedremo che, con una certa scelta della funzione φ e sfruttando le suddette stime, troveremo una condizione sufficiente affinchè sia verificata la condizione (ii) del Teorema 3.2.6.

Teorema 3.2.18. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ aperto, connesso, limitato ed $\mathcal{L}$-regolare, con $\mathcal{L}$ qualsiasi sub-Laplaciano su $\mathbb{G}$. Supponiamo che Ω verifichi la proprietà della palla esterna uniforme (P). Sia inoltre $x_0 \in \Omega$ e $G(x_0, \cdot)$ la funzione di Green di Ω con polo in x_0. Allora, posto*

$$\varphi(t) = \frac{1}{\left(t + \beta_d d(x_0, \partial\Omega)^{2-Q}\right)^{1+\frac{\alpha}{Q-2}}}, \tag{3.35}$$

si ha che la funzione $\omega(x) = \varphi\big(G(x_0, x)\big)\|\nabla G(x_0, x)\|_A^2$, $x \in \Omega \setminus \{x_0\}$, sta in $L^q(\Omega)$, per almeno un $q > \frac{Q}{2}$, per ogni $\alpha > Q - 2$.

Qui la costante β_d è la stessa che compare nelle formule di media per i sub-Laplaciani ed è la stessa per cui vale che $\Gamma = \beta_d d^{2-Q}$, con Γ soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$ e d l'unica $\mathcal{L}$-gauge su $\mathbb{G}$.

Dimostrazione. Per definizione, $G(x_0, x) = \Gamma(x_0^{-1} \circ x) - h_{x_0}(x)$, dove Γ è la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$ e h_{x_0} è la soluzione di

$$\begin{cases} \mathcal{L}h = 0 & \text{in } \Omega \\ h(z) = \Gamma(x_0^{-1} \circ z) & \forall z \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.36}$$

Inoltre, per definizione di misura armonica, si ha che

$$h_{x_0}(x) = \int_{\partial\Omega} \Gamma(x_0^{-1} \circ z)\, d\mu_x^\Omega.$$

Così

$$G(x_0, x) = \Gamma(x_0^{-1} \circ x) - \int_{\partial\Omega} \Gamma(x_0^{-1} \circ z)\, d\mu_x^\Omega.$$

Sostituendo,

$$\varphi(G(x_0,x)) = \frac{1}{\left(\Gamma(x_0^{-1}\circ x) - \int_{\partial\Omega}\Gamma(x_0^{-1}\circ z)\,d\mu_x^\Omega + \beta_d d(x_0,\partial\Omega)^{2-Q}\right)^{1+\frac{\alpha}{Q-2}}}. \tag{3.37}$$

Ora, sfruttando il fatto che $\int_{\partial\Omega} d\mu_x^\Omega = 1$ (questo fatto si può vedere dalla definizione di misura armonica considerando la funzione costante 1) e sfruttando il fatto che $\Gamma(x_0^{-1}\circ x) = \beta_d d(x_0^{-1}\circ x)^{2-Q}$, si ha che

$$\begin{aligned} &\beta_d d(x_0,\partial\Omega)^{2-Q} - \int_{\partial\Omega}\Gamma(x_0^{-1}\circ z)\,d\mu_x^\Omega = \\ &= \int_{\partial\Omega}\left(\beta_d d(x_0,\partial\Omega)^{2-Q} - \beta_d d(x_0^{-1}\circ z)^{2-Q}\right)d\mu_x^\Omega \overset{d(x_0^{-1}\circ z)\geq d(x_0^{-1},\partial\Omega)}{\geq} 0. \end{aligned}$$

Allora la (3.37) diventa

$$\varphi(G(x_0,x)) \leq \frac{1}{\Gamma(x_0^{-1}\circ x)^{1+\frac{\alpha}{Q-2}}}.$$

Ora, sostituendo nell'espressione di ω e utilizzando la stima (3.22), otteniamo

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \varphi\big(G(x_0,x)\big)\|\nabla G(x_0,x)\|_A^2 \leq \\ &\leq c\frac{d(x_0^{-1}\circ x)^{2-2Q}}{d(x_0^{-1}\circ x)^{2-Q-\alpha}} = c\,d(x_0^{-1}\circ x)^{\alpha-Q}. \end{aligned}$$

Ora, sfruttando il Teorema 2.5.7, abbiamo che $d(x_0^{-1}\circ x)^{\alpha-Q}\in L^q(\Omega)$ se e solo se

$$q(\alpha-Q) > -Q \iff \alpha > Q-\frac{Q}{q} \overset{\text{imponendo } q>\frac{Q}{2}}{\iff} \alpha > Q-2.$$

Questo completa la dimostrazione. □

3.3 Problema inverso

Per quanto riguarda il problema inverso, Cupini e Lanconelli, in [6], hanno ottenuto il seguente Torema.

Teorema 3.3.1. *Siano Ω e D aperti limitati $\subseteq \mathbb{G}$ e contenenti x_0. Supponiamo:*

(i) $\big(\Omega,\mu,x_0\big)$ *Γ-tripla forte con $\mu=0$ in Ω^c;*

(ii) $\big(D,\nu,x_0\big)$ *Γ-tripla con $\nu=0$ in D^c;*

(iii) $\mu_{|\Omega\cap D} = \nu_{|\Omega\cap D}$;

(iv) $\partial D \subseteq \operatorname{supp}\nu$;

(v) Ω *è un* insieme solido, *cioè $\overline{\Omega}^c$ è connesso e $\Omega = \operatorname{int}\overline{\Omega}$.*

Allora $\Omega = D$ e $\mu=\nu$.

La prova si basa sul confronto tra Γ_μ e Γ_ν e sul Principio del Massimo per $\mathcal{L}$. Ricordiamo che

$$\operatorname{supp} u := \{x \in \mathbb{R}^N : \text{ se } A \text{ è aperto e } x \in A, \text{ allora } \mu(A) = 0\}.$$

Dimostrazione. (I) *Dimostriamo che* $\Gamma_\mu \leq \Gamma_\nu$ *in* $\mathbb{R}^N$.

(a) *Proviamolo in* $\mathbb{R}^N \setminus D$*:* dalle ipotesi (i) e (ii) abbiamo che:

$$\Gamma_\mu(x) = \Gamma_\nu(x) = \Gamma(x^{-1} \circ x_0), \quad \forall x \in (D \cup \Omega)^c. \tag{3.38}$$

Poichè $\big(D, \nu, x_0\big)$ Γ-tripla e $\big(\Omega, \mu, x_0\big)$ Γ-tripla forte, si ha:

$$\Gamma_\mu(x) \leq \Gamma(x^{-1} \circ x_0) = \Gamma_\nu(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus D.$$

In particolare vale su ∂D.

(b) *Proviamolo su* D*:* dall'ipotesi (iii) e poichè $\mu = 0$ in Ω^c, otteniamo che, in senso distribuzionale,

$$\mathcal{L}(\Gamma_\mu - \Gamma_\nu) \geq 0 \text{ in } D. \tag{3.39}$$

Inoltre Γ_ν è inferiormente semi-continua e, per l'ipotesi (i), Γ_μ è continua, quindi, sfruttando quanto dimostrato nel punto precedente:

$$\limsup_{y \to x \in \partial D} (\Gamma_\mu - \Gamma_\nu)(y) \leq \Gamma_\mu(x) - \Gamma_\nu(x) \leq 0, \quad \forall x \in \partial D.$$

Allora, per il Principio del Massimo Debole per $\mathcal{L}$ su D, si ha che

$$\Gamma_\mu - \Gamma_\nu \leq 0 \text{ su } D.$$

(II) *Proviamo che* $\partial D \setminus \overline{\Omega} = \varnothing$. Per assurdo, supponiamo che esista $x \in \partial D \setminus \overline{\Omega}$. Allora esiste $r > 0$ tale che

$$B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}.,$$

ma, per definizione di Γ-tripla, $\mu = 0$ in Ω^c, quindi $\mu\big(B_r(x)\big) = 0$.
Per l'ipotesi (iv) $\partial D \subseteq \operatorname{supp} \nu$, quindi $x \in \operatorname{supp} \nu$, perciò $\nu\big(B_r(x)\big) = 0$. In senso distribuzionale otteniamo, quindi

$$\mathcal{L}(\Gamma_\mu - \Gamma_\nu) = \nu > 0 \text{ in } B_r(x). \tag{3.40}$$

Ora, per lo step (I), $\Gamma_\mu - \Gamma_\nu \leq 0$ in $B_r(x)$. Di più, poichè $\partial D \subseteq \big(\overline{\Omega} \cup D\big)^c$, per (3.38) abbiamo che $\Gamma_\mu(x) - \Gamma_\nu(x) = 0$. Quindi, per il Principio del Massimo Forte per funzioni $\mathcal{L}$-subarmoniche, otteniamo

$$\Gamma_\mu(x) = \Gamma_\nu(x) = 0 \text{ in } B_r(x),$$

perciò $\mathcal{L}(\Gamma_\mu - \Gamma_\nu) = 0$ in $B_r(x)$, quindi $\nu\big(B_r(x)\big) = 0$, che è in contraddizione con quanto detto in precedenza.

(III) *Proviamo che* $D \subseteq \Omega$. Abbiamo, sfruttando lo step precedente:

$$\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega} = (D \cup D^c) \setminus \overline{\Omega} = (D \setminus \overline{\Omega}) \cup (\partial D \setminus \overline{\Omega}) \cup (\overline{D}^c \cap \overline{\Omega}^c) = \\ = (D \setminus \overline{\Omega}) \cup (\partial D \setminus \overline{\Omega}) \cup (\overline{D} \cup \overline{\Omega})^c = (D \setminus \overline{\Omega}) \cup (\overline{D} \cup \overline{\Omega})^c.$$

Per la limitatezza di Ω e D, $(\overline{D} \cup \overline{\Omega})^c \neq \varnothing$. Di più, $(D \setminus \overline{\Omega})$ e $(\overline{D} \cup \overline{\Omega})^c$ sono aperti e disgiunti.
Ma $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ è connesso (per l'ipotesi (v)), quindi

$$D \setminus \overline{\Omega} = \varnothing \Rightarrow D \subseteq \overline{\Omega}.$$

Inoltre, sempre per l'ipotesi (v), abbiamo che $\operatorname{int} \overline{\Omega} = \Omega$ e D è aperto, quindi $D \subseteq \Omega$.

(IV) *Proviamo che* $\Omega \subseteq D$. Per assurdo, assumiamo che esista $x \in \Omega \setminus D$. Per i passi (I) e (III), $\Gamma_\mu \leq \Gamma_\nu$ e $D \subseteq \Omega$, quindi per le ipotesi (i), (ii) e (iii), abbiamo:

$$\Gamma(x^{-1} \circ x_0) > \Gamma_\mu(x) = \int_D \Gamma(x^{-1} \circ y) d\mu(y) + \int_{\Omega \setminus D} \Gamma(x^{-1} \circ y) d\mu(y) \geq \\ \geq \int_D \Gamma(x^{-1} \circ y) d\nu(y) = \Gamma_\nu(x) = \Gamma(x^{-1} \circ x_0),$$

che è assurdo.
Abbiamo quindi provato che $\Omega = D$, di conseguenza $\mu = \nu$. □

Nella dimostrazione mancano da dimostrare le equazioni (3.39) e (3.40). Lo faremo nel seguente Lemma.

Lemma 3.3.2. *Sotto le ipotesi del Teorema 3.3.1, valgono le equazioni* (3.39) *e* (3.40).

Dimostrazione. Proviamo la (3.39). Su $D \cap \Omega$ abbiamo $\Gamma_\mu - \Gamma_\nu = 0$, quindi $\mathcal{L}(\Gamma_\mu - \Gamma_\nu) = 0$. D'altra parte, in $D \setminus \Omega$ abbiamo $\Gamma_\mu(x) = \Gamma(x^{-1} \circ x_0)$ che è $\mathcal{L}$-armonica, quindi

$\mathcal{L}(\Gamma_\mu - \Gamma_\nu) = -\mathcal{L}\Gamma_\nu$ e, in senso distribuzionale, abbiamo:

$$\langle -\mathcal{L}\Gamma_\nu, \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma_\nu(x) \mathcal{L}\varphi(x) dH^N(x) = -\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_D \Gamma(x^{-1} \circ y) d\nu(y) \right) \mathcal{L}\varphi(x) dH^N(x) = \\ = -\int_D \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x^{-1} \circ y) \mathcal{L}\varphi(x) dH^N(x) \right) d\nu(y) = \\ = -\int_D \langle \mathcal{L}\Gamma(x^{-1} \circ \cdot), \varphi \rangle (y) d\nu(y) \geq 0,$$

poichè $\mathcal{L}\Gamma(x^{-1} \circ \cdot) \leq 0$ su D.

Per quanto riguarda la (3.40), la dimostrazione è analoga alla precedente, sfruttando che

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x^{-1} \circ y) \mathcal{L}\varphi(x) dH^N(x) = -\varphi(y).$$

□

Bibliografia

[1] D. Aharonov, M.M. Schiffer and L. Zalcman: *Potato kugel*, Israel J. Math. 40 (1981) 331-339.

[2] H. Aikawa: *Densities with the mean value property for harmonic functions in a Lipschitz domain*, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997) 229-234.

[3] H. Aikawa: *Integrability of superharmonic functions and subharmonic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 120 (1994), 109-117.

[4] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli and F. Uguzzoni: *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their sub-Laplacians*, Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2007.

[5] G. Cupini, E. Lanconelli: *On an inverse problem in potential theory*, Rend. Lincei Mat. Appl. 27 (2016), 431-442.

[6] G. Cupini, E. Lanconelli: *Densities with the mean value property for sub-Laplacians: an inverse problem*, Applied and Numerical Harmonic Analysis - Special volume in honor of Richard Wheeden, to appear.

[7] M. Derridj: *Sur un théorème de trace*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 22 (1972), 72-83.

[8] W. Hansen, I. Netuka: *Volume densities with the mean value property for harmonic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995) 135-140.

[9] W. Hebisch, A. Sikora: *A smooth subadditive homogeneous norm on a homogeneous group*, Studia Mathematica, T. XCVI (1990), 231-236.

[10] E. Lanconelli: *"Potato kugel" for sub-Laplacians*, Israel J. Math. 194 (2013) 277-283.

[11] J. J. Kohn – L. Nirenberg: *Non-coercive boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math., 18 (1965), 443-492.

[12] F. Uguzzoni: *On the Poisson kernel for the Kohn Laplacian*, Rend. Mat. Serie VII, Vol. 17, Roma (1997), 659-677.

[13] K.O. Widman: *Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations*, Math. Scand. 21 (1967) 17-37.