

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

**TEOREMA FONDAMENTALE  
DEI  
POLITOPOLI CONVESSI**

Tesi di Laurea in Geometria

**Relatore:**  
Chiar.mo Prof.  
FABRIZIO CASELLI

**Presentata da:**  
ALICE  
DELL'ARCIPRETE

*III* Sessione  
Anno Accademico 2015 - 2016

# Introduzione

I protagonisti di questa tesi sono i politopi convessi. I politopi sono degli affascinanti oggetti geometrici noti agli studiosi fin dall'antichità: la teoria dei poliedri regolari, infatti, fu studio di grandi personaggi del passato come Euclide, Archimede e Keplero. D'altra parte anche l'attuale ricerca sui politopi è molto attiva e tratta una grande varietà di temi e problemi.

Il nostro scopo è il seguente: presentare alcuni metodi di base e risultati significativi della teoria dei politopi. In particolare, inizialmente abbiamo cercato tramite definizioni e soprattutto esempi di costruire un'idea intuitiva del concetto di politopo. In un secondo momento, invece, il nostro obiettivo è stato quello di dimostrare l'equivalenza tra le due definizioni di  $\mathcal{H}$ -politopo e di  $\mathcal{V}$ -politopo. Questo ci ha portato a introdurre alcuni metodi come l'eliminazione di Fourier-Motzkin per coni e a descrivere, grazie al lemma di Farkas, alcune importanti costruzioni come il cono di recessione e l'omogeneizzazione di un insieme convesso.

Nello specifico, per dimostrare il Teorema fondamentale dei politopi, cioè l'equivalenza tra le definizioni di politopo, abbiamo, prima, generalizzato il teorema al caso dei poliedri e poi lo abbiamo ridotto al caso particolare dei coni. Abbiamo, perciò, dimostrato quest'ultima versione perchè di più facile verifica e infine abbiamo provato come dal Teorema fondamentale dei coni seguisse quello sui poliedri e quindi quello sui politopi.

Ovviamente, la maggior parte della nostra intuizione geometrica deriva dalla vita in  $\mathbb{R}^3$ , ma bisogna prestare attenzione al fatto che quest'intuizione può portare fuori strada, infatti: ci sono molti teoremi sui politopi tridimen-

sionali i cui analoghi in dimensione maggiore falliscono miseramente. Perciò uno dei principali scopi della teoria dei politopi è quello di sviluppare strumenti per analizzare e, se possibile, “visualizzare” la geometria dei politopi di dimensione maggiore.

# Indice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduzione</b>                                    | <b>i</b>  |
| <b>1 Nozioni principali ed Esempi</b>                  | <b>1</b>  |
| 1.1 Inviluppo convesso . . . . .                       | 2         |
| 1.2 Politopi . . . . .                                 | 5         |
| 1.3 Esempi . . . . .                                   | 7         |
| <b>2 Politopi, Poliedri e Coni</b>                     | <b>19</b> |
| 2.1 Il “Teorema fondamentale” . . . . .                | 19        |
| 2.2 Eliminazione di Fourier-Motzkin per Coni . . . . . | 28        |
| 2.3 Il Lemma di Farkas . . . . .                       | 32        |
| 2.4 Cono di Recessione e Omogeneizzazione . . . . .    | 37        |
| 2.5 Teorema di Carathéodory . . . . .                  | 42        |
| <b>Bibliografia</b>                                    | <b>45</b> |



# Capitolo 1

## Nozioni principali ed Esempi

In questo primo capitolo vengono presentate le principali nozioni e definizioni della tesi.

**Notazione 1.** Innanzitutto esplicitiamo la notazione che useremo in seguito. Tali convenzioni di notazione sono state scelte in modo tale che tutte le espressioni che verranno scritte risultino “chiaramente” invarianti rispetto al cambio di coordinate.

Nel seguito  $\mathbb{R}^d$  rappresenta lo spazio vettoriale di tutti i vettori colonna di lunghezza  $d$  con componenti reali. Analogamente,  $(\mathbb{R}^d)^*$  denota lo spazio vettoriale duale, cioè lo spazio vettoriale reale di tutte le applicazioni lineari  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , che sono rappresentate dai vettori riga reali di lunghezza  $d$ .

I simboli  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots$  denotano sempre vettori colonna in  $\mathbb{R}^d$  (o in  $\mathbb{R}^{d \pm 1}$ ) e rappresentano punti (affini). Le matrici  $X, Y, Z, \dots$  rappresentano insiemi di vettori colonna; perciò si tratta solitamente di matrici  $(d \times m)$  o  $(d \times n)$ . L'ordine delle colonne non è importante per tali insiemi di vettori.

Inoltre, abbiamo bisogno dei vettori colonna unitari  $\mathbf{e}_i$  in  $\mathbb{R}^d$  e dei vettori colonna  $\mathbf{0}$  e  $\mathbf{1} = \sum_i \mathbf{e}_i$  di tutti zero e, rispettivamente, di tutti uno.

I simboli  $\mathbf{a}, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$  denotano sempre vettori riga in  $(\mathbb{R}^d)^*$  e rappresentano applicazioni lineari. Infatti, il vettore riga  $\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^d)^*$  rappresenta l'applicazione lineare  $\ell = \ell_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{a}\mathbf{x}$ ; dove  $\mathbf{a}\mathbf{x}$  è lo scalare ottenuto come prodotto di matrici di un vettore riga (cioè una ma-

trice ( $1 \times d$ ) per un vettore colonna (una matrice ( $d \times 1$ )). Le matrici come  $A, A', B, \dots$  rappresentano un insieme di vettori riga; perciò di solito sono matrici ( $n \times d$ ) o ( $m \times d$ ). Inoltre l'ordine delle righe non è importante.

Usiamo  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$  per denotare il vettore riga di tutti uno in  $(\mathbb{R}^d)^*$ , o in  $(\mathbb{R}^{d \pm 1})^*$ . Quindi  $\mathbf{1}\mathbf{x}$  è la somma delle coordinate del vettore colonna  $\mathbf{x}$ . Analogamente,  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$  denota il vettore riga di tutti zero.

Il grassetto è riservato ai vettori; gli scalari compaiono in corsivo, ad esempio  $a, b, c, d, x, y, \dots$ . Quindi le coordinate di un vettore colonna  $\mathbf{x}$  saranno  $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$ , e le coordinate di un vettore riga  $\mathbf{a}$  saranno  $a_1, \dots, a_d$ .

Gli oggetti di base della geometria sono punti, rette, piani e così via, che sono detti *sottospazi affini*. Di questi, i sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^d$  (quelli che contengono l'origine  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$ ) sono detti *sottospazi lineari*. Perciò i sottospazi affini non vuoti sono i traslati dei sottospazi lineari.

La *dimensione* di un sottospazio affine è la dimensione del corrispondente spazio vettoriale lineare. I sottospazi affini di dimensione 0, 1, 2 e  $d - 1$  in  $\mathbb{R}^d$  sono chiamati *punti, rette, piani e iperpiani*, rispettivamente.

Infine, precisiamo che le trasformazioni affini  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{x}_0$  rappresentano un cambiamento di coordinate affine se  $A$  è una matrice quadrata invertibile o un'arbitraria trasformazione affine nel caso generale.

## 1.1 Involuppo convesso

**Definizione 1.** Sia  $\{P_1, \dots, P_n\}$  un insieme finito di punti. Si definisce l'*inviluppo affine* di  $\{P_1, \dots, P_n\}$  come l'intersezione di tutti i sottospazi affini che contengono l'insieme.

**Definizione 2.** Un insieme di  $n \geq 0$  punti è *affinemente indipendente* se il suo inviluppo affine ha dimensione  $n - 1$ , cioè se ogni sottoinsieme proprio ha un inviluppo affine più piccolo.

**Definizione 3.** Un insieme di punti  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  si dice *convesso* se per ogni coppia di punti  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$  il segmento di estremi  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , cioè  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} : 0 \leq \lambda \leq 1\}$  è interamente contenuto in  $K$ .

*Osservazione 1.* L'intersezione di una famiglia qualsiasi di insiemi convessi è un insieme convesso.

*Dimostrazione.* Siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  due punti appartenenti a  $\bigcap_i X_i$  dove  $X_i$  sono insiemi convessi.

Quindi:

$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subseteq X_i \forall i$  poichè  $X_i$  è un insieme convesso per ogni  $i$ , allora concludiamo che  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subseteq \bigcap_i X_i$ .  $\square$

**Definizione 4.** Sia  $K \subseteq \mathbb{R}^d$ . L'*inviluppo convesso* di  $K$  è il più piccolo sottinsieme convesso di  $\mathbb{R}^d$  che contiene  $K$ , cioè l'intersezione di tutti i sottinsiemi convessi che contengono  $K$ :

$$\text{conv}(K) := \bigcap \{K' \subseteq \mathbb{R}^d : K \subseteq K', K' \text{ convesso}\}.$$

**Proposizione 1.1.** Sia  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  un insieme arbitrario. Allora vale che:

$$\text{conv}(K) = \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k : \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\} \subseteq K, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\}.$$

*Dimostrazione.* Per dimostrare l'uguaglianza si dimostra la doppia inclusione.

Per provare l'inclusione " $\supseteq$ " si vuole far vedere che  $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k \in \text{conv}(K)$  con  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\} \subseteq K$  e  $\lambda_i \geq 0$  tali che  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ .

Si procede in tal caso per induzione su  $k$ .

PASSO BASE:  $k = 1$

Per ipotesi si ha che:

$$\mathbf{x}_1 \subseteq K \text{ e } \lambda_1 \geq 0 \text{ tale che } \lambda_1 = 1 \Rightarrow \lambda_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 \in K \subseteq \text{conv}(K).$$

PASSO D'INDUZIONE: supponiamo vera l'affermazione per  $k - 1$  e la proviamo per  $k$ .

Se  $\lambda_k = 1$ , allora vale che  $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k \in K \subseteq \text{conv}(K)$ ;

altrimenti

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k = (1 - \lambda_k) \left( \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_k} \mathbf{x}_1 + \dots + \frac{\lambda_{k-1}}{1 - \lambda_k} \mathbf{x}_{k-1} \right) + \lambda_k \mathbf{x}_k \in \text{conv}(K),$$



infatti:

$\frac{\lambda_1}{1-\lambda_k}\mathbf{x}_1 + \dots + \frac{\lambda_{k-1}}{1-\lambda_k}\mathbf{x}_{k-1} \in \text{conv}(K)$  per ipotesi induttiva in quanto:

- $0 \leq \frac{\lambda_i}{1-\lambda_k} \leq 1$
- $\frac{\lambda_1}{1-\lambda_k} + \dots + \frac{\lambda_{k-1}}{1-\lambda_k} = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_{k-1}}{1-\lambda_k} = \frac{1-\lambda_k}{1-\lambda_k} = 1$

e  $(1 - \lambda_k)\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_k}\mathbf{x}_1 + \dots + \frac{\lambda_{k-1}}{1-\lambda_k}\mathbf{x}_{k-1}\right) + \lambda_k\mathbf{x}_k \in \text{conv}(K)$  per definizione di insieme convesso.

Per provare l'inclusione " $\subseteq$ " si vuole far vedere che

$$K' := \{\lambda_1\mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k\mathbf{x}_k : \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\} \subseteq K, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\}$$

è un insieme convesso che contiene  $K$  perchè per definizione  $\text{conv}(K)$  è il più piccolo sottoinsieme convesso che contiene  $K$ .

- $K'$  è un insieme convesso, infatti:  
se, assumendo che gli  $\mathbf{x}_i$  siano gli stessi a meno di aggiungere coefficienti nulli, consideriamo due punti  $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k\mathbf{x}_k$  e  $\mu_1\mathbf{x}_1 + \dots + \mu_k\mathbf{x}_k$  di  $K'$ , allora si ha che:

$$t \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i + (1-t) \sum_{i=1}^k \mu_i \mathbf{x}_i \in K'$$

con  $0 \leq t \leq 1$  in quanto  $t \geq 0$  e

$$\sum_{i=1}^k t\lambda_i + \sum_{i=1}^k (1-t)\mu_i = t \sum_{i=1}^k \lambda_i + (1-t) \sum_{i=1}^k \mu_i = t + 1 - t = 1.$$

- $K'$  contiene  $K$ , infatti:  
se  $\mathbf{x} \in K$ , allora  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i = 1\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i \Rightarrow \mathbf{x} \in K'$ ,  
quindi concludiamo che  $K \subseteq K'$ .

□

*Osservazione 2.* Se  $K = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$  è finito, allora il suo involucro convesso è

$$\text{conv}(K) = \{\lambda_1\mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_n\mathbf{x}_n : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}.$$

## 1.2 Politopi

**Definizione 5.** Si dice  $\mathcal{V}$ -politopo l'involuppo convesso di un insieme finito di punti di uno spazio  $\mathbb{R}^d$ .

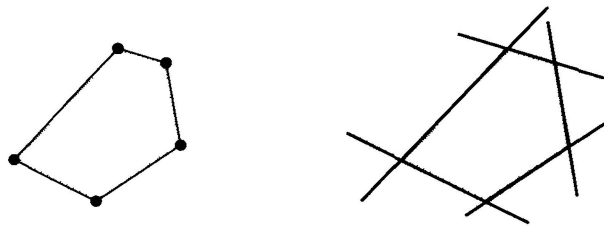
**Definizione 6.** Un  $\mathcal{H}$ -poliedro è un'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi di  $\mathbb{R}^d$ .

**Definizione 7.** Un  $\mathcal{H}$ -politopo è un'intersezione limitata di un numero finito di semispazi chiusi di  $\mathbb{R}^d$ , cioè un  $\mathcal{H}$ -poliedro limitato.

**Definizione 8.** Un *politopo* è un insieme di punti  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  che può essere definito o come un  $\mathcal{V}$ -politopo o come un  $\mathcal{H}$ -politopo.

La *dimensione* di un politopo è la dimensione del suo involuppo affine.

Un  $d$ -politopo è un politopo di dimensione  $d$  nello spazio  $\mathbb{R}^e$  ( $e \geq d$ ).



Questi schizzi cercano di illustrare i due concetti: la figura a sinistra mostra un pentagono costruito come un  $\mathcal{V}$ -politopo, cioè come l'involuppo convesso di cinque punti; la figura a destra mostra lo stesso pentagono costruito come un  $\mathcal{H}$ -politopo, cioè come l'intersezione di cinque semispazi limitati dalle cinque rette.

Dimostreremo, poi, nel Capitolo 2 che la Definizione 5 e la Definizione 7 sono equivalenti.

Di solito assumiamo (senza perdere di generalità) che i politopi che studiamo sono di dimensione massima, cosicchè  $d$  denota sia la dimensione del politopo che stiamo studiando sia la dimensione dello spazio ambiente  $\mathbb{R}^d$ .

**Definizione 9.** Le *facce* di un politopo sono le intersezioni con iperpiani tali che il politopo è interamente contenuto in uno dei due semispazi determinato dall'iperpiano.

*Osservazione 3.* Una faccia banale è il politopo stesso. Tutte le altre facce sono dette *facce proprie*; alcune delle quali sono:

- l'insieme vuoto che è una faccia per ogni politopo;
- i *vertici* del politopo che sono punti singoli;
- gli *spigoli* che sono segmenti di dimensione 1;
- le *facette*, cioè le facce proprie massimali, la cui dimensione è la dimensione del politopo meno uno.

Le seguenti definizioni stabiliscono, invece, le possibili relazioni tra politopi.

**Definizione 10.** Due politopi  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  e  $Q \subseteq \mathbb{R}^e$  si dicono *affinemente isomorfi*, indicato con  $P \cong Q$ , se esiste una trasformazione affine  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^e$  che è una biezione tra i punti dei due politopi. (Si noti che tale applicazione non deve essere iniettiva o suriettiva sugli “spazi ambiente”.)

**Definizione 11.** Due politopi  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  e  $Q \subseteq \mathbb{R}^e$  si dicono *combinatoriamente equivalenti*, indicato  $P \simeq Q$ , se esiste una biezione tra le loro facce che conserva l'inclusione.

Detto ciò, è possibile osservare che:

*Osservazione 4.* Se due politopi  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  e  $Q \subseteq \mathbb{R}^e$  sono affinemente isomorfi, allora sono combinatoriamente equivalenti. Ma non vale il viceversa.

*Dimostrazione.* Se due politopi sono affinemente isomorfi, allora sono combinatoriamente equivalenti perchè se esiste una trasformazione affine che è una biezione tra i punti dei due politopi a maggior ragione questa sarà una biezione tra le facce dei politopi che conserva l'inclusione.

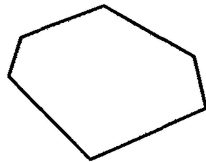
Il viceversa non è sempre vero, come chiariremo nell'Esempio 1.1. □

## 1.3 Esempi

Ora facciamo alcuni esempi per chiarire meglio il concetto di politopo appena introdotto.

**Esempio 1.1.** I politopi di dimensione 0 sono i punti, i politopi di dimensione 1 sono i segmenti. Perciò due 0-politopi qualsiasi sono affinemente isomorfi e quindi combinatoriamente equivalenti, così come due 1-politopi qualsiasi.

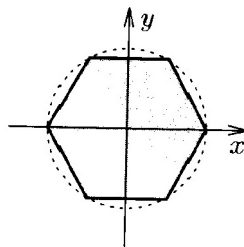
I politopi di dimensione 2 sono detti *poligoni*. Un poligono con  $n$  vertici è detto  *$n$ -gono*. La convessità della definizione richiede che gli angoli interni (ai vertici) siano tutti più piccoli di  $\pi$ . Il seguente disegno mostra un *esagono*.



Due 2-politopi sono combinatoriamente equivalenti se e solo se hanno lo stesso numero di vertici. Perciò, possiamo usare il termine “l’ $n$ -gono convesso” per la classe di equivalenza combinatoria di un 2-politopo convesso con esattamente  $n$  vertici. Infatti, c’è un rappresentante privilegiato per questa classe: l’  *$n$ -gono regolare*,

$$P_2(n) := \text{conv} \left\{ \left( \cos \frac{2\pi k}{n}, \sin \frac{2\pi k}{n} \right) : 0 \leq k < n \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

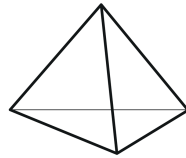
Il seguente disegno mostra l’esagono regolare  $P_2(6)$  in  $\mathbb{R}^2$ .



$P_2(6)$  è combinatoriamente equivalente, ma non affinemente isomorfo, all’esagono disegnato sopra. Infatti, i due esagoni hanno lo stesso numero di vertici, ma non esiste una trasformazione affine che è una biezione

tra i punti dei due politopi in quanto una volta stabilita l'immagine di tre punti non allineati, il comportamento della trasformazione è completamente determinato.

**Esempio 1.2.** Il *tetraedro*, che è un oggetto geometrico familiare in  $\mathbb{R}^3$ , è un politopo di dimensione 3:



Allo stesso modo, la sua generalizzazione in dimensione  $d$  forma la prima (e più semplice) famiglia infinita di politopi di dimensione superiore che possiamo considerare.

**Definizione 12.** Si definisce un  $d$ -simpleso come l'involuppo convesso di  $d + 1$  punti affinemente indipendenti in uno spazio  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq d$ ).

Perciò, possiamo notare che un  $d$ -simpleso è un politopo di dimensione  $d$  con  $d + 1$  vertici.

È facile verificare che due  $d$ -simplessi qualsiasi sono affinemente isomorfi. Per questo, è spesso conveniente specificare un modello canonico. Nel caso del  $d$ -simpleso, infatti, usiamo il  $d$ -simpleso standard  $\Delta_d$  con  $d + 1$  vertici in  $\mathbb{R}^{d+1}$ ,

$$\Delta_d := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d+1} : \mathbf{1}\mathbf{x} = 1, \mathbf{x}_i \geq 0 \right\} = \text{conv}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d+1}\}.$$

**Esempio 1.3.** Ci sono poche, ma semplici e molto utili, *operazioni di riciclo* che permettono di produrre “nuovi politopi partendo da quelli vecchi”.

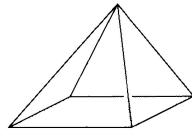
**Definizione 13.** Se  $P$  è un  $d$ -politopo e  $\mathbf{x}_0$  è un punto che non appartiene all'involuppo affine di  $P$  (per questo includiamo  $P$  in  $\mathbb{R}^n$  con  $n > d$ ), allora l'involuppo convesso

$$\text{pyr}(P) := \text{conv}(P \cup \{\mathbf{x}_0\})$$

è un politopo di dimensione  $d + 1$  chiamato *piramide* su  $P$ .

Chiaramente la classe affine e combinatoria di  $\text{pyr}(P)$  non dipendono dalla particolare scelta di  $\mathbf{x}_0$ , che determina solo un cambiamento del sistema di coordinate. Le facce di  $\text{pyr}(P)$  sono le facce di  $P$  stesso e tutte le piramidi sulle facce di  $P$ .

Degli esempi molto famigliari di piramidi sono i semplici (la piramide su  $\Delta_d$  è  $\Delta_{d+1}$ ), e la *piramide Egiziana*  $\text{Pyr}_3 = \text{pyr}(P_2(4))$ : la piramide su un quadrato.



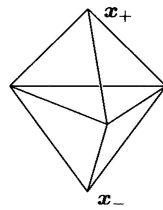
Con una costruzione analoga:

**Definizione 14.** Se  $P$  è un  $d$ -politopo e i due punti  $\mathbf{x}_+$  e  $\mathbf{x}_-$ , che non appartengono all'involuppo affine di  $P$ , sono tali che un punto interno al segmento  $[\mathbf{x}_+, \mathbf{x}_-]$  appartenga a  $P$ , allora l'involuppo convesso

$$\text{bipyr}(P) := \text{conv}(P \cup \{\mathbf{x}_+, \mathbf{x}_-\})$$

è un politopo di dimensione  $d + 1$  chiamato *bipiramide*.

Un esempio di bipiramide è la bipiramide su un triangolo:



Specialmente importante e abbastanza ovvia è la seguente definizione:

**Definizione 15.** Siano  $P \subseteq \mathbb{R}^p$  e  $Q \subseteq \mathbb{R}^q$  due politopi. Definiamo il *prodotto* di due (o più) politopi come l'insieme

$$P \times Q := \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} : \mathbf{x} \in P, \mathbf{y} \in Q \right\} \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$$

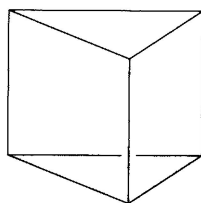
che è un politopo di dimensione  $\dim(P)+\dim(Q)$ , le cui facce non vuote sono i prodotti di facce non vuote di  $P$  e facce non vuote di  $Q$ .

In particolare,

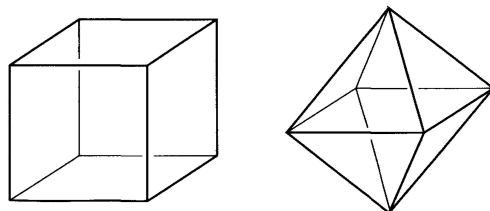
**Definizione 16.** Il *prisma* su un politopo  $P$  è il prodotto di  $P$  con un segmento

$$\text{prism}(P) := P \times \Delta_1.$$

Ad esempio, un prisma non banale è quello su un triangolo,  $\Delta_2 \times \Delta_1$ , noto anche come *prisma triangolare*.



**Esempio 1.4.** Anche il *cubo* tridimensionale  $C_3$  e l'*ottaedro*  $C_3^\Delta$  sono oggetti geometrici famigliari:



Analogamente all'Esempio 1.2 possiamo considerare la loro generalizzazione di dimensione  $d$ :

**Definizione 17.**

$$C_d := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : -1 \leq \mathbf{x}_i \leq 1\} = \text{conv}\{\{+1, -1\}^d\}$$

è detto *ipercubo* di dimensione  $d$  o *d-cubo*.

$$C_d^\Delta := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \sum_i |\mathbf{x}_i| \leq 1\} = \text{conv}\{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d, -\mathbf{e}_d\}$$

è detto *crosspolytope* di dimensione  $d$ .

Possiamo osservare che i cubi possono essere interpretati come prismi iterati, partendo da un punto. In particolare, abbiamo  $C_d \times [-1, 1] = C_{d+1}$ . Inoltre, notiamo che c'è una connessione molto stretta tra i due politopi  $C_d$  e  $C_d^\Delta$ , infatti:

**Proposizione 1.2.** *Siano  $C_d$  e  $C_d^\Delta$  rispettivamente un  $d$ -cubo e un crosspolytope di dimensione  $d$ .*

*Allora essi soddisfano la relazione:*

$$C_d^\Delta \cong \{\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^d)^* : \mathbf{a}\mathbf{x} \leq 1 \text{ per tutti gli } \mathbf{x} \in C_d\}$$

$$C_d \cong \{\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^d)^* : \mathbf{a}\mathbf{x} \leq 1 \text{ per tutti gli } \mathbf{x} \in C_d^\Delta\}$$

*cioè questi due politopi sono polari l'uno con l'altro.*

*Dimostrazione.* Vogliamo mostrare che il polare di  $C_d$ , che è dato da

$$P = \{\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^d)^* : \mathbf{a}\mathbf{x} \leq 1 \text{ per tutti gli } \mathbf{x} \text{ tali che } -1 \leq x_i \leq 1\},$$

è proprio  $C_d^\Delta$ .

1.  $C_d^\Delta \subseteq P$ , infatti:

sia  $\mathbf{a} \in C_d^\Delta$ , allora vale che  $\sum_i |a_i| \leq 1$ , quindi:

$$\sum_i a_i x_i \leq \sum_i |a_i| |x_i| \leq \sum_i |a_i| \leq 1$$

2.  $P \subseteq C_d^\Delta$ , infatti:

sia  $\mathbf{a} \in P$ , allora vale che  $\sum_i a_i x_i \leq 1$  per ogni  $\mathbf{x}$  tale che  $-1 \leq x_i \leq 1$ .

Perciò, in particolare, prendiamo:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se } a_i \geq 0 \\ -1 & \text{se } a_i < 0. \end{cases}$$

cosicchè  $a_i x_i = |a_i|$ , per cui concludiamo che:

$$\sum_i a_i x_i = \sum_i |a_i| \leq 1.$$



Analogamente per l'altra relazione.  $\square$

**Definizione 18.** Un  $d$ -politopo si dice *simpliciale* se tutte le sue facce proprie sono semplici, cioè ogni faccetta ha il minimo numero di vertici, ovvero  $d$  vertici.

Un  $d$ -politopo si dice *semplice* se ogni vertice è in comune al numero minimo di faccette, ovvero  $d$ .

*Osservazione 5.*

1. Il crosspolytope di dimensione  $d$  è un politopo simpliciale.
2. L'ipercubo di dimensione  $d$  è un politopo semplice.

*Dimostrazione.*

1. Per dimostrare che il crosspolytope è un politopo simpliciale, basta osservare che si tratta di una bpiramide iterata su un punto, cioè

$$\text{bipyr}(C_d^\Delta) = C_{d+1}^\Delta,$$

che è chiaramente un politopo simpliciale. Infatti, le faccette di una bpiramide sono semplici e tali rimangono ad ogni passo nel momento in cui andiamo ad aggiungere due punti per costruire la bpiramide di dimensione maggiore.

2. Per dimostrare, invece, che l'ipercubo è un politopo semplice basta osservare che ha  $2d$  faccette che giacciono sugli iperpiani di equazione  $x_i = \pm 1$  e quindi ogni vertice appartiene esattamente a  $d$  faccette.

$\square$

Inoltre, c'è anche un altro aspetto che rende rilevanti il  $d$ -cubo e il  $d$ -crosspolytope: sono politopi simmetrici sia rispetto all'origine sia rispetto ai piani coordinati.

**Esempio 1.5.** La curva del momento in  $\mathbb{R}^d$  è definita da

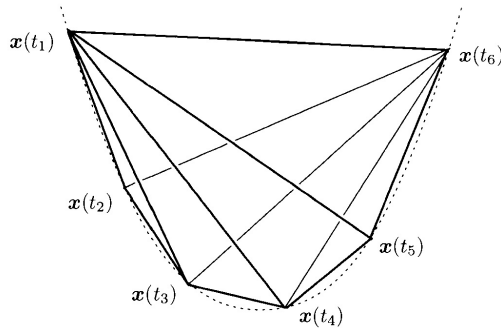
$$\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad t \mapsto \mathbf{x}(t) := \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d.$$

Il politopo ciclico  $C_d(t_1, \dots, t_n)$  è l'involuppo convesso

$$C_d(t_1, \dots, t_n) := \text{conv}\{\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \dots, \mathbf{x}(t_n)\}$$

di  $n > d$  punti distinti  $\mathbf{x}(t_i)$ , con  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , sulla curva del momento.

Vedremo che, grazie alla “condizione di parità di Gale”, i punti  $\mathbf{x}(t_i)$  sono vertici e la classe di equivalenza combinatoria del politopo non dipende dalla scelta dei parametri  $t_i$ . Questo giustifica il fatto che denotiamo tale politopo con  $C_d(n)$  e lo chiamiamo “il” politopo ciclico con  $n$  vertici. Il seguente disegno mostra  $C_3(6)$ .



I seguenti teorema e corollario contengono una completa descrizione della struttura combinatoria dei politopi ciclici.

Prima, però, premettiamo un utile lemma.

**Lemma 1.3.** Siano  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$  con  $n > d$  e  $P = \text{conv}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ . Supponiamo che per ogni  $i_1, \dots, i_{d+1}$  tali che  $1 \leq i_1 < \dots < i_{d+1} \leq n$  i punti  $\{\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_{d+1}}\}$  siano affinementemente indipendenti. Allora  $P$  è un  $d$ -politopo simpliciale.

*Dimostrazione.* Prendiamo  $d + 1$  punti affinementemente indipendenti, allora  $P$  ha dimensione  $d$ . Perciò le faccette hanno dimensione  $d - 1$  e non possono contenere né meno di  $d$  vertici perchè sarebbero troppo pochi, né più di  $d$  vertici perchè genererebbero tutto  $\mathbb{R}^d$ . Quindi le faccette hanno  $d$  vertici, cioè il minimo numero di vertici.

Dunque  $P$  è un  $d$ -politopo simpliciale.  $\square$

**Teorema 1.4 (Condizione di parità di Gale).**

Sia  $n > d \geq 2$ . Denotiamo con  $[n]$  l'insieme  $\{1, \dots, n\}$  e scegliamo  $t_1, \dots, t_n$  parametri reali.

Il politopo ciclico

$$C_d(n) = \text{conv}\{\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \dots, \mathbf{x}(t_n)\}$$

è un  $d$ -politopo simpliciale. Inoltre, un sottoinsieme  $S \subseteq [n]$  di dimensione  $d$  forma una faccetta di  $C_d(n)$  se e solo se viene soddisfatta la seguente "condizione di parità":

se  $i < j$  non appartengono a  $S$ , allora il numero di  $k \in S$  tra  $i$  e  $j$  è pari:

$$2 \mid \#\{k : k \in S, i < k < j\} \text{ per } i, j \notin S.$$

*Dimostrazione.* Per il Lemma 1.3, basta mostrare che presi  $d + 1$  punti qualsiasi sulla curva del momento, questi sono affinementemente indipendenti. Per verificare ciò mostriamo che la giacitura del sottospazio affine, generato dai  $d + 1$  punti, è generata da  $d + 1$  vettori linearmente indipendenti, cioè che il determinante della seguente matrice è  $\neq 0$ .

Ricordando la famosa identità del determinante di Vandermonde, si ha che:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mathbf{x}(t_0) & \mathbf{x}(t_1) & \dots & \mathbf{x}(t_d) \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_0 & t_1 & \dots & t_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_0^{d-1} & t_1^{d-1} & \dots & t_d^{d-1} \\ t_0^d & t_1^d & \dots & t_d^d \end{pmatrix} = \\ &= \prod_{0 \leq i < j \leq d} (t_j - t_i) \neq 0 \quad \forall i \neq j. \end{aligned}$$

Da questo segue che, presi  $d + 1$  punti qualsiasi sulla curva del momento, questi ultimi non sono affinemente dipendenti. In particolare, ciò mostra che  $C_d(n)$  è un  $d$ -politopo simpliciale per quanto esplicitato nel Lemma 1.3.

Ora sia  $S = \{i_1, \dots, i_d\} \subseteq [n]$ . Allora l'iperpiano  $H_S$  attraverso i corrispondenti punti  $\mathbf{x}(t_{i_s})$  è dato da

$$H_S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : F_S(\mathbf{x}) = 0\},$$

dove

$$F_S(\mathbf{x}) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mathbf{x} & \mathbf{x}(t_{i_1}) & \dots & \mathbf{x}(t_{i_d}) \end{pmatrix}$$

Infatti,  $F_S(\mathbf{x})$  è una funzione affine in  $\mathbf{x}$  che si annulla nei punti prescritti.

Ora facciamo muovere il punto  $\mathbf{x}(t)$  sulla curva del momento  $\{\mathbf{x}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ . Si noti che  $F_S(\mathbf{x}(t))$  è un polinomio in  $t$  di grado  $d$  che si annulla per  $t = t_{i_s}$ : perciò tale polinomio ha  $d$  zeri distinti e cambia di segno in corrispondenza di ognuno di essi.

Allora  $S$  forma una faccetta se e solo se  $F_S(\mathbf{x}(t_i))$  ha lo stesso segno per tutti i punti  $\mathbf{x}(t_i)$  con  $i \in [n] \setminus S$ ; cioè se  $F_S(\mathbf{x}(t))$  ha un numero pari di cambi di segno tra  $t = t_i$  e  $t = t_j$ , per  $i < j$  e  $i, j \in [n] \setminus S$ .  $\square$

In particolare, questo criterio mostra che la classe combinatoria di  $C_d(t_1, \dots, t_n)$  non dipende dalla scelta specifica dei parametri  $t_i$ , così  $C_d(n)$  è ben definito come classe di equivalenza combinatoria di politopi.

È abbastanza semplice estendere la condizione di parità per la caratterizzazione di tutte le facce di  $C_d(n)$ . Da questa caratterizzazione deriva il seguente corollario.

**Corollario 1.5.** *Se un sottoinsieme  $S \subseteq [n]$  ha cardinalità  $|S| \leq \frac{d}{2}$ , allora  $\{\mathbf{x}(t_i) : i \in S\}$  è una faccia del politopo ciclico  $C_d(n)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $C_d(n) = C_d(t_1, \dots, t_n)$  con  $t_1 < \dots < t_n$  e sia  $T = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq [n]$  un sottoinsieme di cardinalità  $k \leq \frac{d}{2}$ .

Scegliamo un  $\epsilon > 0$  abbastanza piccolo in modo tale che  $t_i < t_i + \epsilon < t_{i+1}$  per ogni  $i < n$  e un  $M$  tale che  $M > t_n + \epsilon$ .

Usando  $\mathbf{x}(M+1), \mathbf{x}(M+2), \dots$  come punti fittizi “molto lontani”, definiamo la funzione lineare  $F_T(\mathbf{x})$  come

$$\det\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}(t_{i_1}), \mathbf{x}(t_{i_1} + \epsilon), \dots, \mathbf{x}(t_{i_k}), \mathbf{x}(t_{i_k} + \epsilon), \mathbf{x}(M+1), \dots, \mathbf{x}(M+d-2k)\right).$$

Questa è una funzione lineare in  $\mathbf{x}$  che si annulla sui punti  $\mathbf{x}(t_i)$  per  $i \in T$ . Se consideriamo  $F_T(\mathbf{x}(t))$ , si ha che questo è un polinomio in  $t$  di grado  $d$  e che ha  $d$  “ovvi” zeri distinti

$$t_{i_1}, t_{i_1} + \epsilon, \dots, t_{i_k}, t_{i_k} + \epsilon, M+1, \dots, M+d+2k.$$

C'è un numero pari di zeri tra  $t = t_i$  e  $t = t_j$  per  $i, j \in [n] \setminus T$  perchè a uno zero in  $t = t_l$  corrisponde sempre uno zero in  $t = t_l + \epsilon$ . Perciò  $F_T(\mathbf{x})$  ha lo stesso segno su tutti i punti  $\mathbf{x}(t_i) : i \in [n] \setminus T$ .  $\square$

Per  $d \leq 3$  il Corollario 1.5 dice solo che i punti  $\mathbf{x}(t_i)$  formano i vertici di  $C_d(n)$ : i punti sulla curva del momento sono in posizione convessa. Tuttavia, per  $d \geq 4$  il Corollario 1.5 afferma qualcosa di “controintuitivo”: descrive, infatti, una proprietà che non si manifesta in dimensione  $d \leq 3$ , cioè il fatto che per  $d \geq 4$  ogni coppia di vertici forma uno spigolo del politopo  $C_d(n)$ , dove  $n$  può essere più grande di  $d$ .

**Esempio 1.6.** Se applichiamo una trasformazione affine  $\pi$  a un politopo  $P$ , allora otteniamo un nuovo politopo  $\pi(P)$ : questo è abbastanza ovvio sia dalla Definizione 5 di  $\mathcal{V}$ -politopo sia dalla Definizione 7 di  $\mathcal{H}$ -politopo. Se la trasformazione affine è iniettiva, allora l'immagine  $\pi(P)$  è un politopo (affinemente) isomorfo al politopo di partenza.

Inoltre, si possono anche considerare trasformazioni affini che proiettano  $P$  in un politopo  $f(P)$  di dimensione minore.

In particolare, l'involuppo convesso

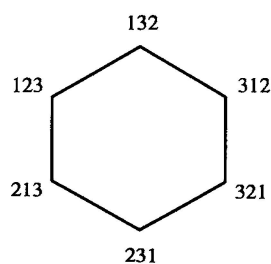
$$\text{conv}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

può essere interpretato come l'immagine del simpleso standard  $\Delta_{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ , tramite l'applicazione lineare  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  che manda  $\mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{x}_i$ . In questi casi solitamente in geometria si parla di *proiezione* di politopo (che suggerisce una particolare scelta di coordinate, dove  $\mathbb{R}^d$  è contenuto in  $\mathbb{R}^n$  come sottospazio).

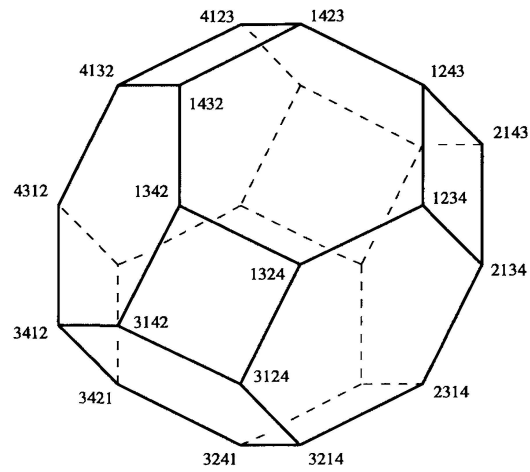
**Esempio 1.7.** Il *permutaedro*  $\Pi_{d-1} \subseteq \mathbb{R}^d$  è definito come l'involuppo convesso di tutti i vettori che sono ottenuti permutando le coordinate del vettore  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ d \end{pmatrix}$ .

*Osservazione 6.* Il permutaedro è un politopo veramente interessante. I suoi vertici possono essere identificati con le permutazioni in  $S_d$  (basta associare a  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$  la permutazione tale che  $x_i \mapsto i$ ), in modo tale che due vertici sono connessi da uno spigolo se e solo se le corrispondenti permutazioni differiscono di una trasposizione adiacente.

Come si può vedere nei seguenti disegni che mostrano  $\Pi_2$ :



e  $\Pi_3$ :



C'è una semplice descrizione combinatoria di tutte le facce di  $\Pi_{d-1}$ : le sue  $k$  facce corrispondono alle partizioni ordinate dell'insieme  $[d]$  in  $d - k$  parti non vuote. Perciò i vertici sono permutazioni e le faccette sono partizioni di  $[d]$  in  $(S, [d] \setminus S)$  con  $\emptyset \subset S \subset [d]$ .

# Capitolo 2

## Politopi, Poliedri e Coni

In questo secondo capitolo proveremo alcune proprietà fondamentali, come l'equivalenza tra le due definizioni di politopo della Definizione 8.

### 2.1 Il “Teorema fondamentale”

Innanzitutto diamo alcune definizioni.

Distinguiamo, perciò, i due concetti di poliedro con cui lavoreremo:

**Definizione 19.** Un  $\mathcal{H}$ -poliedro è l'intersezione finita di semispazi chiusi in  $\mathbb{R}^d$ , cioè un insieme  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  tale che

$$P = P(A, \mathbf{z}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : A\mathbf{x} \leq \mathbf{z}\} \text{ con } A \in \mathbb{R}^{m \times d}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m.$$

(Qui “ $A\mathbf{x} \leq \mathbf{z}$ ” è l'usuale abbreviazione per un sistema di disuguaglianze, cioè  $\mathbf{a}_1\mathbf{x} \leq z_1, \dots, \mathbf{a}_m\mathbf{x} \leq z_m$ , dove  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$  sono le righe di  $A$  e  $z_1, \dots, z_m$  sono le componenti di  $\mathbf{z}$ .)

Per dare la seconda versione di definizione di poliedro abbiamo bisogno delle seguenti nozioni:

**Definizione 20.** Un cono è un insieme non vuoto di vettori  $C \subseteq \mathbb{R}^d$  tale che per ogni sottoinsieme finito di vettori contiene anche tutte le loro combinazioni lineari a coefficienti non negativi.



*Osservazione 7.* Ogni cono contiene il vettore nullo  $\mathbf{0}$ .

*Osservazione 8.* L'intersezione di una famiglia qualsiasi di coni è un cono.

*Dimostrazione.* Sia  $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\} \subseteq \mathbb{R}^d$  un insieme finito di vettori contenuto in  $\bigcap_i C_i$  dove  $C_i$  sono coni.

Quindi:

$\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\} \subseteq C_i \forall i$  e anche tutte le combinazioni lineari di  $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$  a coefficienti non negativi sono contenute in  $C_i \forall i$  poichè  $C_i$  è un cono per ogni  $i$ .

Allora concludiamo che  $\bigcap_i C_i$  è un cono. □

**Definizione 21.** Sia  $Y \subseteq \mathbb{R}^d$  un sottoinsieme arbitrario. L'*inviluppo conico* (o l'*inviluppo positivo*), indicato con  $\text{cone}(Y)$ , è l'intersezione di tutti i coni in  $\mathbb{R}^d$  che contengono  $Y$ .

*Osservazione 9.*  $C = \text{cone}(Y)$  è un cono per ogni  $Y \subseteq \mathbb{R}^d$ .

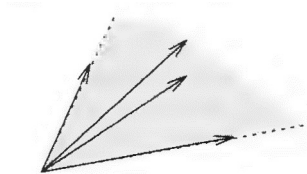
Con un ragionamento analogo a quello fatto per l'inviluppo convesso nel Capitolo 1 si può facilmente dimostrare che:

**Proposizione 2.1.** Sia  $Y \subseteq \mathbb{R}^d$  un sottoinsieme arbitrario.

$$\text{cone}(Y) = \{\lambda_1 \mathbf{y}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{y}_k : \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\} \subseteq Y, \lambda_i \geq 0\}.$$

Se  $Y = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$  è un insieme finito, allora:

$$\text{cone}(Y) := \{t_1 \mathbf{y}_1 + \dots + t_n \mathbf{y}_n : t_i \geq 0\} = \{Y\mathbf{t} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}.$$

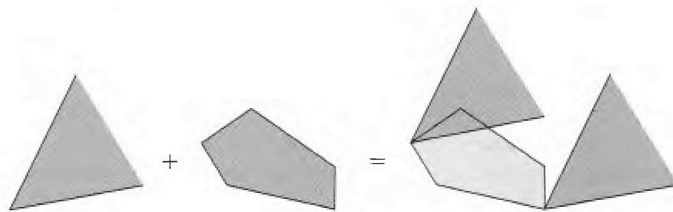


*Osservazione 10.* Se  $Y$  è l'insieme vuoto, cioè se  $n = 0$ , allora  $\text{cone}(Y) = \{\mathbf{0}\}$ .

**Definizione 22.** La *somma di vettori* (o *somma di Minkowski*) di due insiemi  $P, Q \subseteq \mathbb{R}^d$  si definisce nel seguente modo:

$$P + Q := \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in P, \mathbf{y} \in Q\} \subseteq \mathbb{R}^d.$$

Tale disegno mostra la somma di Minkowski di dimensione 2 di un cono e di un politopo.



Quindi, ora, possiamo dare la seguente definizione:

**Definizione 23.** Un  $\mathcal{V}$ -*poliedro* è una combinazione conica convessa finitamente generata, cioè un insieme  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  che è dato da

$$P = \text{conv}(V) + \text{cone}(Y) \quad \text{con } V \in \mathbb{R}^{d \times n}, Y \in \mathbb{R}^{d \times n'}$$

come somma di Minkowski di un involucro convesso di un insieme finito di punti e di un cono generato da un insieme finito di vettori.

Perciò, confrontando questa definizione con la Definizione 5 si ha che:

*Osservazione 11.* Un  $\mathcal{V}$ -politopo è un  $\mathcal{V}$ -poliedro limitato.

*Dimostrazione.* Per provare ciò, basta far vedere che  $\text{conv}(V)$  è sempre limitato. Infatti:

se  $\mathbf{x} \in \text{conv}(V)$ , allora:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \lambda_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} v_{n1} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix}$$

con  $n \geq 1$ ,  $\lambda_i \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ ,  
quindi per ogni  $k = 1, \dots, n$  si ha che:

$$\begin{aligned} x_k &= \lambda_1 v_{1k} + \dots + \lambda_n v_{nk} \\ &\leq \lambda_1 \max\{v_{ik} : 1 \leq i \leq n\} + \dots + \lambda_n \max\{v_{ik} : 1 \leq i \leq n\} \\ &= (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \max\{v_{ik} : 1 \leq i \leq n\} \\ &= \max\{v_{ik} : 1 \leq i \leq n\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_k &= \lambda_1 v_{1k} + \dots + \lambda_n v_{nk} \\ &\geq \lambda_1 \min\{v_{ik} : 1 \leq i \leq n\} + \dots + \lambda_n \min\{v_{ik} : 1 \leq i \leq n\} \\ &= (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \min\{v_{ik} : 1 \leq i \leq n\} \\ &= \min\{v_{ik} : 1 \leq i \leq n\} \end{aligned}$$

cioè per ogni  $k = 1, \dots, n$  vale:

$$\min\{v_{ik} : 1 \leq i \leq n\} \leq x_k \leq \max\{v_{ik} : 1 \leq i \leq n\}$$

il che prova che  $\text{conv}(V)$  è racchiuso in una “scatola” limitata e quindi è limitato. Concludiamo, perciò, che un  $\mathcal{V}$ -politopo è un  $\mathcal{V}$ -poliedro limitato, cioè  $P = \text{conv}(V)$  con  $V \in \mathbb{R}^{d \times n}$ .  $\square$

Allo stesso modo, per la Definizione 7 vale che:

*Osservazione 12.* Un  $\mathcal{H}$ -politopo è un  $\mathcal{H}$ -poliedro limitato.

Ora diamo la versione base del “teorema di rappresentazione dei politopi”, che sarà nel corso della dimostrazione rafforzato e generalizzato in maniera considerevole.

**Teorema 2.2 (Teorema fondamentale sui politopi).**

*Un sottoinsieme  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  è l’involuppo convesso di un insieme finito di punti (un  $\mathcal{V}$ -politopo)*

$$P = \text{conv}(V) \quad \text{con } V \in \mathbb{R}^{d \times n}$$

*se e solo se è l’intersezione limitata di semispazi chiusi (un  $\mathcal{H}$ -politopo)*

$$P = P(A, \mathbf{z}) \quad \text{con } A \in \mathbb{R}^{m \times d}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m.$$

Questo teorema è importante perchè fornisce due differenti caratterizzazioni dei politopi che possono essere utilizzate in base al problema che si sta studiando.

Per esempio, consideriamo le seguenti quattro affermazioni:

- ogni intersezione di un politopo con un sottospazio affine è un politopo,
- ogni intersezione di un politopo con un poliedro è un politopo,
- la somma di Minkowski di due politopi è un politopo,
- ogni proiezione di un politopo è un politopo.

Le prime due affermazioni sono banali per un politopo presentato nella forma  $P = P(A, \mathbf{z})$ , ma entrambe non sono banali per l’involuppo convesso di un insieme finito di punti. Analogamente, le ultime due affermazioni sono facili da verificare per l’involuppo convesso di un insieme finito di punti, mentre non sono banali per intersezioni limitate di semispazi.

Il Teorema 2.2 è la versione di cui veramente abbiamo bisogno ed è un’affermazione fondamentale sui politopi; però è anche la versione più difficile da dimostrare. Perciò lo generalizziamo a un teorema sui poliedri.

**Teorema 2.3 (Teorema fondamentale sui poliedri).**

*Un sottoinsieme  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  è una somma di un involuppo convesso di un insieme finito di punti e di una combinazione conica (un  $\mathcal{V}$ -poliedro)*

$$P = \text{conv}(V) + \text{cone}(Y) \quad \text{con } V \in \mathbb{R}^{d \times n}, Y \in \mathbb{R}^{d \times n'}$$

*se e solo se è un’intersezione di semispazi chiusi (un  $\mathcal{H}$ -poliedro)*

$$P = P(A, \mathbf{z}) \quad \text{con } A \in \mathbb{R}^{m \times d}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m.$$

*Osservazione 13.* Il Teorema 2.2 segue dal Teorema 2.3.

*Dimostrazione.* I politopi, infatti, abbiamo visto che sono poliedri limitati per entrambe le definizioni (di  $\mathcal{V}$ -politopo e di  $\mathcal{H}$ -politopo).  $\square$

Il Teorema 2.3 può essere provato direttamente, anche se è abbastanza faticoso principalmente perchè i punti in  $\text{conv}(V) + \text{cone}(Y)$  sono difficili da manipolare. Perciò, essendo più facile, si preferisce “omogeneizzare”: si passa, cioè, da un  $d$ -spazio affine a un  $(d + 1)$ -spazio vettoriale. Per fare ciò si aggiunge un’ulteriore coordinata (che chiameremo 0-ima coordinata), mandando il punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  nel vettore  $\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$ .

Così da ricondurre il Teorema 2.3 a un caso speciale in cui  $P$  è un cono, che è più semplice da provare.

**Teorema 2.4 (Teorema fondamentale sui coni).**

*Un sottoinsieme  $C \subseteq \mathbb{R}^d$  è una combinazione conica di un numero finito di vettori*

$$C = \text{cone}(Y) \quad \text{con } Y \in \mathbb{R}^{d \times n}$$

*se e solo se è un’intersezione finita di semispazi lineari chiusi*

$$C = P(A, \mathbf{0}) \quad \text{con } A \in \mathbb{R}^{m \times d}.$$

Quindi, ora, diamo alcune definizioni e proviamo alcuni risultati preliminari che ci saranno utili per dimostrare che il Teorema fondamentale sui poliedri segue dal Teorema fondamentale sui coni:

**Definizione 24.** Un  $\mathcal{V}$ -cono è una combinazione conica di un numero finito di vettori, cioè un insieme  $C \subseteq \mathbb{R}^d$  della forma

$$C = \text{cone}(Y) \quad \text{con } Y \in \mathbb{R}^{d \times n}.$$

**Definizione 25.** Un  $\mathcal{H}$ -cono è l’intersezione finita di semispazi vettoriali chiusi, cioè un insieme  $C \subseteq \mathbb{R}^d$  tale che

$$C = P(A, \mathbf{0}) \quad \text{con } A \in \mathbb{R}^{m \times d}.$$

**Lemma 2.5.** *Ad ogni poliedro  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  possiamo associare un cono  $C(P) \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ , come segue:*

1. Se  $P = P(A, \mathbf{z})$  è un  $\mathcal{H}$ -poliedro in  $\mathbb{R}^d$ , allora definiamo

$$C(P) := P\left(\begin{pmatrix} -1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{z} & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\right), \quad (2.1)$$

che è un  $\mathcal{H}$ -poliedro in  $\mathbb{R}^{d+1}$ .

Inoltre,

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \in C(P) \right\}.$$

2. Se  $P = \text{conv}(V) + \text{cone}(Y)$  è un  $\mathcal{V}$ -poliedro in  $\mathbb{R}^d$ , allora definiamo

$$C(P) := \text{cone} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ V & Y \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

che è un  $\mathcal{V}$ -poliedro in  $\mathbb{R}^{d+1}$ .

Inoltre,

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \in C(P) \right\}.$$

*Dimostrazione.*

1. Se  $P$  è definito come  $\mathcal{H}$ -poliedro in  $\mathbb{R}^d$ , cioè dalle disuguaglianze

$$\mathbf{a}_i \mathbf{x} \leq z_i, \text{ allora } C(P) \text{ è definito dalle disuguaglianze } \begin{cases} x_0 \geq 0 \\ -z_i x_0 + \mathbf{a}_i \mathbf{x} \leq 0 \end{cases}.$$

Chiaramente,  $C(P)$  è un  $\mathcal{H}$ -poliedro in  $\mathbb{R}^{d+1}$ .

Inoltre, vale che  $P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \in C(P) \right\}$ , infatti:

$$\text{se } \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \in C(P), \text{ allora } \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{z} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\text{che equivale a } \begin{cases} -1 \leq 0 \\ -z_i + \mathbf{a}_i \mathbf{x} \leq 0 \end{cases}, \text{ cioè } \mathbf{a}_i \mathbf{x} \leq z_i.$$

2. Se  $P$  è definito come un  $\mathcal{V}$ -poliedro in  $\mathbb{R}^d$ , allora  $C(P)$  è un  $\mathcal{V}$ -poliedro in  $\mathbb{R}^{d+1}$  per la Definizione (2.2) e per definizione di  $\mathcal{V}$ -poliedro.

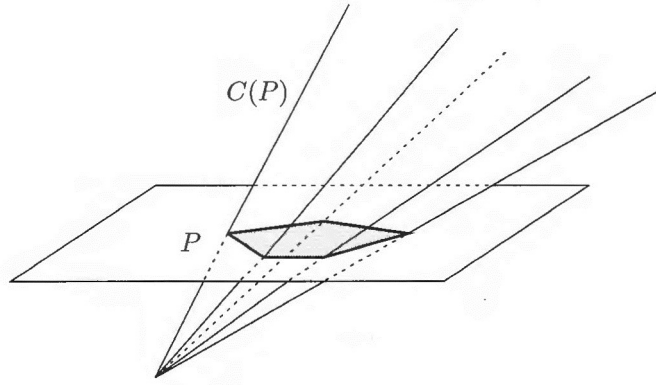
Inoltre, vale che  $P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \in C(P) \right\}$ , infatti:

se  $\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \in C(P)$ , allora  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ V & Y \end{pmatrix} \mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}$  con  $\mathbf{t} \geq \mathbf{0}$

che equivale a  $P = \text{conv}(V) + \text{cone}(Y)$ .

□

In entrambi i casi  $C(P)$  realizza l'omogeneizzazione di  $P$ , che vedremo in seguito dopo aver introdotto e analizzato il Lemma di Farkas. L'idea geometrica alla base di questo procedimento è rappresentata nel seguente disegno che mostra un cono in  $\mathbb{R}^3$  associato a un politopo affine in  $\mathbb{R}^2$ .



**Lemma 2.6.** 1. Se  $P = P(B, \mathbf{u})$  è un  $\mathcal{H}$ -poliedro arbitrario in  $\mathbb{R}^{d+1}$ , allora  $\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \in P \right\}$  è un  $\mathcal{H}$ -poliedro in  $\mathbb{R}^d$ .

2. Se  $C = \text{cone}(W)$  è un cono arbitrario in  $\mathbb{R}^{d+1}$  generato dai vettori  $\mathbf{w}_i$  con  $w_{i,0} \geq 0$ , allora  $\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \in C \right\}$  è un  $\mathcal{V}$ -poliedro in  $\mathbb{R}^d$ .

*Dimostrazione.*

1. Sia  $P = P(B, \mathbf{u})$  è un  $\mathcal{H}$ -poliedro in  $\mathbb{R}^{d+1}$ , dove  $B = \begin{pmatrix} b_0 & \mathbf{b} \\ \mathbf{y} & B' \end{pmatrix}$ . Allora

$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \in P \right\}$  è un  $\mathcal{H}$ -poliedro in  $\mathbb{R}^d$ .

Infatti, se  $\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \in P$ , si ha che  $B \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \leq \mathbf{u}$ , da cui segue che

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ B' \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \mathbf{u} - \begin{pmatrix} b_0 \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}.$$

2. Siano  $C = \text{cone}(W)$  e  $W = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r\}$  con  $\mathbf{w}_i = (w_{i,0}, \dots, w_{i,d})$  e  $w_{i0} \geq 0$ , allora

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \in C \right\} = \\ & = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} w_{1,0} \\ w_{1,1} \\ \vdots \\ w_{1,d} \end{pmatrix} + \dots + t_r \begin{pmatrix} w_{r,0} \\ w_{r,1} \\ \vdots \\ w_{r,d} \end{pmatrix} \right\} = \\ & = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} w_{1,1} \\ \vdots \\ w_{1,d} \end{pmatrix} + \dots + t_r \begin{pmatrix} w_{r,1} \\ \vdots \\ w_{r,d} \end{pmatrix} : 1 = t_1 w_{1,0} + \dots + t_r w_{r,0} \right\}. \end{aligned}$$

Se  $w_{i,0} = 0$  non abbiamo restrizioni su  $t_i \geq 0$ ; supponiamo, a meno di riordinarli, che  $w_{1,0} = \dots = w_{k,0} = 0$  e  $w_{k+1,0} \neq 0, \dots, w_{r,0} \neq 0$ .

Dunque:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} w_{1,1} \\ \vdots \\ w_{1,d} \end{pmatrix} + \dots + t_k \begin{pmatrix} w_{k,1} \\ \vdots \\ w_{k,d} \end{pmatrix} + t_{k+1} w_{k+1,0} \frac{1}{w_{k+1,0}} \begin{pmatrix} w_{k+1,1} \\ \vdots \\ w_{k+1,d} \end{pmatrix} + \right. \\ & \quad \left. + \dots + t_r w_{r,0} \frac{1}{w_{r,0}} \begin{pmatrix} w_{r,1} \\ \vdots \\ w_{r,d} \end{pmatrix} : 1 = t_{k+1} w_{k+1,0} + \dots + t_r w_{r,0} \right\} = \\ & = \text{cone}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k) + \text{conv}\left(\frac{1}{w_{k+1,0}} \mathbf{w}_{k+1}, \dots, \frac{1}{w_{r,0}} \mathbf{w}_r\right). \end{aligned}$$

□

A questo punto possiamo dimostrare la seguente proposizione.



**Proposizione 2.7.** *Il Teorema 2.3 segue dal Teorema 2.4 per omogeneizzazione.*

*Dimostrazione.* Dato un qualunque  $\mathcal{H}$ -poliedro, possiamo applicare il Teorema fondamentale dei coni a  $C(P)$  per il punto 1 del Lemma 2.5 e concludere che  $C(P)$  è un  $\mathcal{V}$ -cono contenuto in  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d+1} : x_0 \geq 0\}$ , da cui segue che  $P$  è un  $\mathcal{V}$ -poliedro per il punto 2 del Lemma 2.6.

Viceversa, se  $P$  è un  $\mathcal{V}$ -poliedro, possiamo applicare il Teorema fondamentale dei coni a  $C(P)$  (cono associato a  $P$ ) per il punto 2 del Lemma 2.5 e concludere che  $C(P)$  è un  $\mathcal{H}$ -cono da cui segue che  $P$  è un  $\mathcal{H}$ -poliedro per il punto 1 del Lemma 2.5.  $\square$

## 2.2 Eliminazione di Fourier-Motzkin per Coni

Il principale obiettivo di questa sezione è provare il Teorema 2.4 che presenta due implicazioni.

Ma prima di fare ciò, diamo alcune utili definizioni.

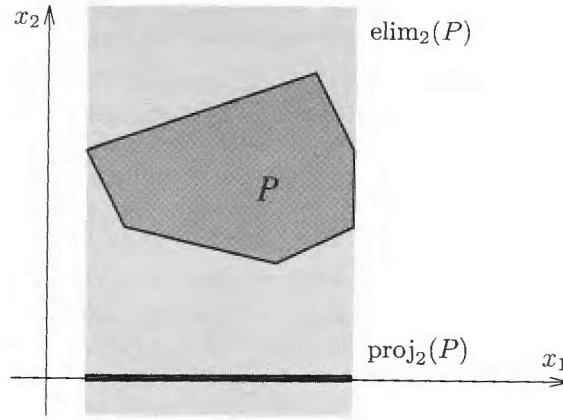
**Definizione 26.** La *proiezione* di  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  nella direzione  $\mathbf{e}_k$  si definisce come

$$\begin{aligned} \text{proj}_k(P) &:= \{\mathbf{x} - x_k \mathbf{e}_k : \mathbf{x} \in P\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : x_k = 0, \exists y \in \mathbb{R} : \mathbf{x} - y \mathbf{e}_k \in P\}. \end{aligned}$$

**Definizione 27.** L'*eliminazione* di  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  si definisce come

$$\begin{aligned} \text{elim}_k(P) &:= \{\mathbf{x} - t \mathbf{e}_k : \mathbf{x} \in P, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \exists y \in \mathbb{R} : \mathbf{x} + y \mathbf{e}_k \in P\}. \end{aligned}$$

Il disegno nella pagina seguente mostra la proiezione del 2-politopo  $P$  su  $\text{proj}_2(P)$ , eliminando la variabile  $x_2$ . In tale figura  $\text{elim}_2(P)$  è la striscia infinita (colorata) di tutti i punti che si trovano sopra o sotto  $\text{proj}_2(P)$ .



Ora proviamo la seguente implicazione del Teorema 2.4:

$$\mathcal{V}\text{-cono} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}\text{-cono}$$

Sia, perciò,  $C = \text{cone}(Y) \subseteq \mathbb{R}^d$  un  $\mathcal{V}$ -cono con  $Y = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ .

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} C &= \{Y\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \exists \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} = Y\mathbf{t}\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_d)^\tau \in \mathbb{R}^d : (x_1, \dots, x_d)^\tau = \sum_{i=1}^n t_i \mathbf{y}_i \text{ con } t_i \geq 0\} \end{aligned}$$

Quindi l'insieme

$$\begin{aligned} \{(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \mathbb{R}^{d+n} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} = Y\mathbf{t}\} &= \\ = \left\{ (x_1, \dots, x_d, t_1, \dots, t_n)^\tau \in \mathbb{R}^{d+n} : (x_1, \dots, x_d)^\tau = \sum_{i=1}^n t_i \mathbf{y}_i \text{ con } t_i \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

è chiaramente un  $\mathcal{H}$ -cono. Perciò  $C = \text{cone}(Y)$  può essere scritto come la proiezione di questo cono sul sottospazio  $\{(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \mathbb{R}^{d+n} : \mathbf{t} = \mathbf{0}\}$ . Questa proiezione può essere realizzata iterativamente, proiettando rispetto alle singole coordinate  $t_k$ . Dunque è sufficiente provare il seguente lemma.

**Lemma 2.8.** *Se  $C = P(A, \mathbf{0})$  è un  $\mathcal{H}$ -cono in  $\mathbb{R}^d$ , allora sono  $\mathcal{H}$ -coni anche:*

- l'eliminazione  $\text{elim}_k(C) = \{\mathbf{x} - t\mathbf{e}_k : \mathbf{x} \in C, t \in \mathbb{R}\}$ ,

- la proiezione  $\text{proj}_k(C) = \text{elim}_k(C) \cap H_k$   
dove  $H_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : x_k = 0\} \equiv \mathbb{R}^{d-1}$ .

Infatti,  $\text{elim}_k(C) = P(A^{/k}, \mathbf{0})$  con

$$A^{/k} := \{\mathbf{a}_i : a_{ik} = 0\} \cup \{a_{ik}\mathbf{a}_j + (-a_{jk})\mathbf{a}_i : a_{ik} > 0, a_{jk} < 0\}.$$

(Qui interpretiamo  $A$  e  $A^{/k}$  come insiemi di vettori riga).

*Dimostrazione.* Innanzitutto proviamo che  $\text{elim}_k(C) = P(A^{/k}, \mathbf{0})$ .

Poichè i vettori riga di  $A^{/k}$  sono combinazioni positive di vettori riga in  $A$ ,

$$P(A^{/k}, \mathbf{0}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \begin{cases} \mathbf{a}_i \mathbf{x} \leq 0 & \text{se } a_{ik} = 0 \\ (a_{ik}\mathbf{a}_j + (-a_{jk})\mathbf{a}_i) \mathbf{x} \leq 0 & \text{se } a_{ik} > 0, a_{jk} < 0 \end{cases} \right\}$$

e  $C = P(A, \mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a}_i \mathbf{x} \leq 0 \forall i\}$ ,

si ha che le disuguaglianze valide per  $P(A^{/k}, \mathbf{0})$  sono valide anche per  $C$  e quindi  $C \subseteq P(A^{/k}, \mathbf{0})$ .

Inoltre, i vettori riga in  $A^{/k}$  hanno tutti la  $k$ -esima componente uguale a zero (per costruzione), cioè la variabile  $x_k$  non compare nel sistema  $A^{/k}\mathbf{x} \leq 0$ , che prova che  $\text{elim}_k(C) \subseteq P(A^{/k}, \mathbf{0})$ .

Viceversa, sia  $\mathbf{x} \in P(A^{/k}, \mathbf{x})$  e sia  $x_k = 0$  (senza perdita di generalità).

Allora  $\mathbf{x} - ye_k \in C$  per un opportuno  $y$ , infatti:

sostituendo  $\mathbf{x} - ye_k$  nel sistema  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$  si ha che  $y$  deve soddisfare

$$\max_i \left\{ \frac{1}{a_{ik}} \mathbf{a}_i \mathbf{x} : a_{ik} > 0 \right\} \leq y \leq \min_j \left\{ \frac{1}{-a_{jk}} (-\mathbf{a}_j) \mathbf{x} : a_{jk} < 0 \right\} \quad (2.3)$$

in quanto da  $A(\mathbf{x} - ye_k) \leq \mathbf{0}$  si ha che:

- se  $a_{ik} > 0$ :

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{x} - ye_k) \leq 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_i \mathbf{x} - ya_i e_k \leq 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_i \mathbf{x} - ya_{ik} \leq 0 \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{a_{ik}} \mathbf{a}_i \mathbf{x}$$

- se  $a_{jk} < 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_j(\mathbf{x} - ye_k) \leq 0 &\Leftrightarrow \mathbf{a}_j \mathbf{x} - ya_j e_k \leq 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_j \mathbf{x} - ya_{jk} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{a}_j \mathbf{x} + y(-a_{jk}) \leq 0 \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{-a_{jk}} (-\mathbf{a}_j) \mathbf{x} \end{aligned}$$

ed inoltre la relazione (2.3) ha senso dal momento che, se  $a_{ik} > 0$  e  $a_{jk} < 0$ , vale che:

$$(a_{ik}\mathbf{a}_j + (-a_{jk})\mathbf{a}_i)\mathbf{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a_{ik}}(\mathbf{a}_i)\mathbf{x} \leq \frac{1}{-a_{jk}}(-\mathbf{a}_j)\mathbf{x}$$

poichè  $\mathbf{x} \in P(A^{/k}, \mathbf{0})$ .

Quindi  $P(A^{/k}, \mathbf{0}) \subseteq \text{elim}_k(C)$ .

Abbiamo provato così che l'eliminazione è un  $\mathcal{H}$ -cono. D'altra parte la proiezione è anche un  $\mathcal{H}$ -cono perchè è l'intersezione di un  $\mathcal{H}$ -cono,  $\text{elim}_k(P)$ , con un semispazio lineare chiuso,  $H_k$ .  $\square$

Proviamo, quindi, l'implicazione restante del Teorema 2.4:

$$\mathcal{H}\text{-cono} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V}\text{-cono}.$$

Sia  $C = P(A, \mathbf{0}) \subseteq \mathbb{R}^d$  un  $\mathcal{H}$ -cono.

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} C &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : A\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\} \\ &\cong \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+m} : A\mathbf{x} \leq \mathbf{w} \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+m} : \mathbf{w} = \mathbf{0} \right\}. \end{aligned}$$

L'insieme  $C_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+m} : A\mathbf{x} \leq \mathbf{w} \right\}$  è un  $\mathcal{V}$ -cono, infatti può essere scritto come:

$$C_0(A) = \text{cone}\left(\left\{ \pm \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i \\ A\mathbf{e}_i \end{pmatrix} : 1 \leq i \leq d \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_j \end{pmatrix} : 1 \leq j \leq m \right\}\right)$$

decomponendo

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^d |x_i|(\text{sign}(x_i)) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i \\ A\mathbf{e}_i \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^m (w_j - (A\mathbf{x})_j) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_j \end{pmatrix}.$$

L'intersezione con  $\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+m} : \mathbf{w} = \mathbf{0} \right\}$  può essere ottenuta ricorsivamente imponendo una coordinata alla volta uguale a zero, cioè intersecando con iperpiani coordinati della forma  $H_k = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d+m} : y_k = 0\}$ . Perciò è sufficiente provare il seguente lemma.

**Lemma 2.9.** *Se  $C = \text{cone}(Y)$  è un  $\mathcal{V}$ -cono in  $\mathbb{R}^d$ , allora è un  $\mathcal{V}$ -cono anche l'intersezione  $C \cap H_k$ . Infatti,  $C \cap H_k = \text{cone}(Y^{/k})$  con*

$$Y^{/k} := \{\mathbf{y}_i : y_{ik} = 0\} \cup \{y_{ik}\mathbf{y}_j + (-y_{jk})\mathbf{y}_i : y_{ik} > 0, y_{jk} < 0\}.$$

(Qui interpretiamo  $Y$  e  $Y^{/k}$  come insiemi di vettori colonna).

*Dimostrazione.* Innanzitutto notiamo che i vettori in  $Y^{/k}$  hanno tutti la coordinata  $x_k$  nulla, così chiaramente  $C \cap H_k \supseteq \text{cone}(Y^{/k})$  perchè sicuramente i vettori di  $Y^{/k}$  appartengono a  $C$  in quanto sono combinazioni lineari a coefficienti non negativi di vettori di  $Y$  e avendo la componente  $k$ -esima nulla appartengono anche a  $H_k$ .

Per l'inclusione nell'altro verso, consideriamo  $\mathbf{v} = Y\mathbf{t} \in \text{cone}(Y)$  ( $\mathbf{t} \geq \mathbf{0}$ ) con  $v_k = 0$ . Ora o abbiamo che  $t_i y_{ik} = 0 \forall i$  e quindi  $\mathbf{v} \in \text{cone}(\{\mathbf{y}_i : y_{ik} = 0\})$ , o possiamo esplicitare  $v_k = 0$  definendo:

$$\Lambda := \sum_{i:y_{ik}>0} t_i y_{ik} = \sum_{j:y_{jk}<0} t_j (-y_{jk}) > 0.$$

In questo modo, possiamo riscrivere  $\mathbf{v}$  come

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_{i:y_{ik}=0} t_i \mathbf{y}_i + \sum_{i:y_{ik}>0} t_i \mathbf{y}_i + \sum_{j:y_{jk}<0} t_j \mathbf{y}_j \\ &= \sum_{i:y_{ik}=0} t_i \mathbf{y}_i + \frac{1}{\Lambda} \sum_{i:y_{ik}>0} \left( \sum_{j:y_{jk}<0} t_j (-y_{jk}) \right) t_i \mathbf{y}_i + \frac{1}{\Lambda} \sum_{j:y_{jk}<0} \left( \sum_{i:y_{ik}>0} t_i y_{ik} \right) t_j \mathbf{y}_j \\ &= \sum_{i:y_{ik}=0} t_i \mathbf{y}_i + \sum_{\substack{i:y_{ik}>0 \\ j:y_{jk}<0}} \frac{t_i t_j}{\Lambda} ((-y_{jk})\mathbf{y}_i + y_{ik}\mathbf{y}_j). \end{aligned}$$

Questo prova l'affermazione in quanto abbiamo dato un'esplicita rappresentazione di  $\mathbf{v}$  come somma conica di vettori di  $Y^{/k}$ .  $\square$

Così abbiamo completato la dimostrazione del Teorema 2.4.

## 2.3 Il Lemma di Farkas

Il lemma di Farkas è estremamente importante e si può trovare in molte versioni differenti in tutta la teoria dei politopi e dei poliedri.

Essenzialmente, questo lemma fornisce una caratterizzazione per la risolubilità di un sistema di disuguaglianze.

Ci sono molti modi diversi di formulare i teoremi “del tipo di Farkas”:

- come *teoremi di alternativa* (un sistema di disuguaglianze ha una soluzione se e solo se un secondo sistema non ne ha nessuna),
- come *teoremi di trasposizione* (perchè il secondo sistema può essere ricavato trasponendo la matrice e i vettori del primo),
- come *certificati di validità* (se una disuguaglianza è valida per l'insieme soluzione di un sistema, allora è una combinazione conica delle disuguaglianze del sistema),
- come *teoremi di separazione* (se un punto non appartiene a un inviluppo convesso, allora può essere separato da quest'ultimo da un funzionale lineare).

La seguente proposizione è una versione base del lemma di Farkas che caratterizza la risolubilità di un generale sistema di disuguaglianze.

**Proposizione 2.10 (Lemma di Farkas I).**

Sia  $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$  e sia  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ . Allora vale esattamente una delle due seguenti condizioni:

- esiste un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  tale che  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{z}$ ;
- esiste un vettore riga  $\mathbf{c} \in (\mathbb{R}^m)^*$  con  $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$  tale che  $\mathbf{c}A = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{c}\mathbf{z} < 0$ .

*Dimostrazione.* Per prima cosa osserviamo che entrambe le condizioni non possono verificarsi. Infatti, in caso contrario, esisterebbero un vettore colonna  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  e un vettore riga  $\mathbf{c} \in (\mathbb{R}^m)^*$  tali che:

$$0 = \mathbf{0}\mathbf{x} = (\mathbf{c}A)\mathbf{x} = \mathbf{c}(A\mathbf{x}) \leq \mathbf{c}\mathbf{z} < 0$$

il che porta a una contraddizione.

Definiamo ora  $P := P(A, \mathbf{z})$  e  $Q := P((- \mathbf{z}, A), \mathbf{0})$ . Osserviamo che esiste

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  tale che  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{z}$  se e solo se  $Q$  contiene un punto con  $x_0 > 0$ . In questo caso  $Q$  è un  $\mathcal{H}$ -cono. Eliminiamo ora le variabili  $x_1, \dots, x_d$  da  $Q$ , per ottenere l' $\mathcal{H}$ -cono  $\text{elim}_1\text{elim}_2\dots\text{elim}_d(Q)$ .

L'osservazione chiave è che se applichiamo l'eliminazione di Fourier-Motzkin per ottenere  $\text{elim}_i P(D, \mathbf{0}) = P(D^{/i}, \mathbf{0})$ , allora ogni disuguaglianza nel sistema eliminato  $\text{elim}_i(D)$  è una combinazione positiva di al più due righe di  $D$ ; perciò  $D^{/i}$  può essere scritto come  $C^i D$  per una matrice  $C^i$  con solo elementi non negativi, dei quali al più due per riga sono non nulli.

Iterando questa idea, otteniamo:

$$\begin{aligned} \text{elim}_1\text{elim}_2\dots\text{elim}_d(Q) &= P((-z, A)^{/d/d-1\dots/2/1}, \mathbf{0}) = \\ &= P(C^1 C^2 \dots C^d (-z, A), \mathbf{0}) =: P(C(-z, A), \mathbf{0}), \end{aligned}$$

dove  $C$  è una matrice non negativa.

Tutte le disuguaglianze nel sistema  $C(-z, A) \leq \mathbf{0}$  sono della forma  $\gamma_{i0}x_0 \leq 0$ , siccome tutte le variabili tranne  $x_0$  sono state eliminate.

Supponiamo ora che  $P = \emptyset$ ; allora avremmo  $Q \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d+1} : x_0 \leq 0\}$ . Per eliminazione si ottiene:

$$\text{elim}_1\text{elim}_2\dots\text{elim}_d(Q) \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d+1} : x_0 \leq 0\},$$

e così il sistema  $C(-z, A)\mathbf{x} \leq 0$  contiene la disuguaglianza  $\gamma_{i0}x_0 \leq 0$ , con  $\gamma_{i0} > 0$ . Sia ora  $\mathbf{c}$  la riga di  $C$  corrispondente a  $\gamma_{i0}$ ; allora si ha che  $\mathbf{c}(-z, A) = (\gamma_{i0}, 0)$ , cioè  $\mathbf{c}\mathbf{z} = -\gamma_{i0} < 0$  e  $\mathbf{c}A = 0$ .  $\square$

Ora andiamo a enunciare un'altra versione del lemma di Farkas, per soluzioni non negative di sistemi di disuguaglianze. Ogni sistema del genere può essere riscritto come un sistema di disuguaglianze, che è esattamente ciò che andremo a dimostrare. Infatti la prova illustra diverse tecniche semplici ma importanti per riscrivere sistemi di disuguaglianze, come l'introduzione di variabili ausiliarie e la riscrittura di variabili senza vincoli come differenze di variabili non negative.

**Proposizione 2.11 (Lemma di Farkas II).**

Sia  $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$  e sia  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ . Allora vale esattamente una delle due seguenti condizioni:

- esiste un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  tale che  $A\mathbf{x} = \mathbf{z}$ , con  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ ;
- esiste un vettore riga  $\mathbf{c} \in (\mathbb{R}^m)^*$  tale che  $\mathbf{c}A \geq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{c}\mathbf{z} < 0$ .

*Dimostrazione.* La tesi segue dalla seguente catena di equivalenze:

$$\exists \mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{z}, \text{ con } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\iff \exists \mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq \mathbf{z}, (-A)\mathbf{x} \leq -\mathbf{z}, -\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$$

$$\iff \exists \mathbf{x} : \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I_d \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ -\mathbf{z} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{FLI}}{\iff} \nexists \mathbf{c}_1 \geq \mathbf{0}, \mathbf{c}_2 \geq \mathbf{0}, \mathbf{b} \geq \mathbf{0} :$$

$$(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{b}) \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I_d \end{pmatrix} = \mathbf{0}, (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{b}) \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ -\mathbf{z} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} < 0$$

$$\iff \nexists \mathbf{c}_1 \leq \mathbf{0}, \mathbf{c}_2 \geq \mathbf{0}, \mathbf{b} \geq \mathbf{0} : (\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2)A - \mathbf{b} = \mathbf{0}, (\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2)\mathbf{z} < 0$$

$$\iff \nexists \mathbf{c} = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2, \mathbf{b} \geq \mathbf{0} : \mathbf{c}A - \mathbf{b} = \mathbf{0}, \mathbf{c}\mathbf{z} < 0$$

$$\iff \nexists \mathbf{c} : \mathbf{c}A \geq \mathbf{0}, \mathbf{c}\mathbf{z} < 0 \quad \square$$

Andiamo ora ad enunciare un'altra formulazione del lemma di Farkas. Questa afferma che se una disuguaglianza è valida per un poliedro, allora può essere ottenuta come combinazione di disuguaglianze che definiscono il poliedro, oppure il poliedro è vuoto, nel qual caso la disuguaglianza  $\mathbf{0}\mathbf{x} \leq -1$  può essere ottenuta come combinazione positiva. Questa versione del lemma di Farkas include la versione *I* come caso speciale:  $\mathbf{0}\mathbf{x} \leq -1$  è valido per tutti i punti  $\mathbf{x}$  tali che  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{z}$  se e solo se  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{z}$  non ha soluzione.

**Proposizione 2.12 (Lemma di Farkas III).**

Siano  $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{a}_0 \in (\mathbb{R}^d)^*$ , e  $z_0 \in \mathbb{R}$ .

Allora  $\mathbf{a}_0\mathbf{x} \leq z_0$  è valido per tutti gli  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  tali che  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{z}$  se e solo se vale almeno una delle seguenti due condizioni:



1. esiste un vettore riga  $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$  tale che  $\mathbf{c}A = \mathbf{a}_0$  e  $\mathbf{c}z \leq z_0$ ;
2. esiste un vettore riga  $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$  tale che  $\mathbf{c}A = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{c}z < 0$ .

*Dimostrazione.* L'implicazione da destra a sinistra è di facile verifica, infatti basta dimostrare la contronominale.

Supponiamo, perciò, che esista  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  tale che  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{z}$  e  $\mathbf{a}_0\mathbf{x} > z_0$ , questo contraddice sia l'ipotesi (2) per il lemma di Farkas I sia l'ipotesi (1) perchè:

$$z_0 < \mathbf{a}_0\mathbf{x} = \mathbf{c}A\mathbf{x} \leq \mathbf{c}z \leq z_0$$

che produce un assurdo.

Per l'implicazione da sinistra a destra, supponiamo che nè (1) nè (2) siano soddisfatte. Allora concludiamo che non esiste  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$  e  $\beta \geq 0$  tale che  $\mathbf{b}A = \beta\mathbf{a}_0$  e  $\mathbf{b}z < \beta z_0$ :

altrimenti (1) sarebbe soddisfatta per  $\mathbf{c} := \frac{1}{\beta}\mathbf{b}$  se  $\beta > 0$ , oppure (2) sarebbe soffisfatta per  $\mathbf{c} := \mathbf{b}$  se  $\beta = 0$ .

Perciò possiamo applicare il lemma di Farkas I:

$$\begin{aligned} \nexists(\beta, \mathbf{b}) \geq (0, \mathbf{0}) : (\beta, \mathbf{b}) \begin{pmatrix} -\mathbf{a}_0 \\ A \end{pmatrix} = 0, (\beta, \mathbf{b}) \begin{pmatrix} -z_0 \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} < 0 \\ \stackrel{\text{FL I}}{\iff} \exists \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} -\mathbf{a}_0 \\ A \end{pmatrix} \mathbf{w} \leq \begin{pmatrix} -z_0 \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} \\ \iff \exists \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d : A\mathbf{w} \leq \mathbf{z}, \mathbf{a}_0\mathbf{w} \geq z_0. \end{aligned}$$

Ora riformuliamo la condizione che (1) non vale, introducendo una variabile ausiliaria  $\gamma$  e poi applichiamo il lemma di Farkas II al problema nello spazio duale:

$$\begin{aligned} \neg(1) \iff \nexists(\gamma, \mathbf{c}) \geq (0, \mathbf{0}) : \gamma + \mathbf{c}z = z_0, \mathbf{c}(-A) = -\mathbf{a}_0 \\ \iff \nexists(\gamma, \mathbf{c}) \geq (0, \mathbf{0}) : (\gamma, \mathbf{c}) \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{z} & -A \end{pmatrix} = (z_0, -\mathbf{a}_0) \\ \stackrel{\text{FL II}}{\iff} \exists \begin{pmatrix} y_0 \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1} : \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{z} & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, (z_0, \mathbf{a}_0) \begin{pmatrix} y_0 \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} < 0 \\ \iff \exists y_0 \geq 0, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : A\mathbf{y} \leq y_0\mathbf{z}, \mathbf{a}_0\mathbf{y} > y_0z_0. \end{aligned}$$

Ora:

se  $y_0 > 0 \Rightarrow \mathbf{x} := \frac{1}{y_0}\mathbf{y}$  e  $\mathbf{x}$  soddisfa  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{z}$  e  $\mathbf{a}_0\mathbf{z} > z_0$ ,

se  $y_0 = 0 \Rightarrow \mathbf{x} := \mathbf{w} + \mathbf{y}$  e  $\mathbf{x}$  soddisfa  $A\mathbf{x} = A\mathbf{w} + A\mathbf{y} \leq \mathbf{z} + \mathbf{0} = \mathbf{z}$  e  $\mathbf{a}_0\mathbf{x} = \mathbf{a}_0\mathbf{w} + \mathbf{a}_0\mathbf{y} > z_0 + 0 = z_0$ .  $\square$

La seguente, quarta e ultima, versione mostra che il lemma di Farkas può anche essere usato per separare un punto da un  $\mathcal{V}$ -poliedro: se  $\mathbf{x}$  non è contenuto in  $P := \text{conv}(V) + \text{cone}(Y)$ , allora c'è una disuguaglianza  $\mathbf{a}\mathbf{x} \leq \alpha$  soddisfatta da  $P$ , ma non da  $\mathbf{x}$ .

**Proposizione 2.13 (Lemma di Farkas IV).**

Siano  $V \in \mathbb{R}^{d \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{d \times n'}$  e  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ .

Allora o esistono  $\mathbf{t}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0}$  tali che  $\mathbf{1}\mathbf{t} = 1$  e  $\mathbf{x} = V\mathbf{t} + Y\mathbf{u}$ ,

oppure esiste un vettore riga  $(\alpha, \mathbf{a}) \in (\mathbb{R}^{d+1})^*$  tale che  $\mathbf{a}\mathbf{v}_i \leq \alpha$  per ogni  $i \leq n$ ,  $\mathbf{a}\mathbf{y}_j \leq 0$  per ogni  $j \leq n'$  e  $\mathbf{a}\mathbf{x} > \alpha$ .

Le due condizioni non possono essere verificate entrambe.

*Dimostrazione.* Partiamo dalla prima condizione

$\exists \mathbf{t}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0}$  tali che  $\mathbf{1}\mathbf{t} = 1$  e  $\mathbf{x} = V\mathbf{t} + Y\mathbf{u}$

$$\iff \exists \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ V & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{FL II}}{\iff} \nexists (\alpha, -\mathbf{a}) \in (\mathbb{R}^{d+1})^* : (\alpha, -\mathbf{a}) \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ V & Y \end{pmatrix} \geq (\mathbf{0}, \mathbf{0}), (\alpha, -\mathbf{a}) < \mathbf{0}$$

$$\iff \nexists (\alpha, -\mathbf{a}) \in (\mathbb{R}^{d+1})^* : \alpha\mathbf{1} + \mathbf{a}V \geq \mathbf{0}, \mathbf{a}\mathbf{x} > \alpha$$

che è equivalente alla negazione della seconda condizione.  $\square$

## 2.4 Cono di Recessione e Omogeneizzazione

Usando il lemma di Farkas, possiamo dare una descrizione invariante di alcune costruzioni molto importanti (in particolare il cono di recessione e l'omogeneizzazione di un insieme convesso) e stabilire le loro proprietà di base.

**Definizione 28.** Sia  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  un insieme convesso. Lo *spazio lineale* di  $P$  è definito come

$$\text{lineal}(P) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} + t\mathbf{y} \in P \text{ per ogni } \mathbf{x} \in P, t \in \mathbb{R}\}$$

e il *cono di recessione* (o *cono caratteristico*) di  $P$  è definito come

$$\text{rec}(P) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} + t\mathbf{y} \in P \text{ per ogni } \mathbf{x} \in P, t \geq 0\}.$$

Direttamente dalla definizione segue che:

*Osservazione 14.* Lo spazio lineale  $\text{lineal}(P)$  è un sottospazio lineare in  $\mathbb{R}^d$ .

*Osservazione 15.* Se  $U$  è un sottospazio complementare di  $\text{lineal}(P)$  (cioè  $U \cap \text{lineal}(P) = \{\mathbf{0}\}$  e  $U + \text{lineal}(P) = \mathbb{R}^d$ ), allora  $P$  può essere decomposto come somma di Minkowski

$$P = \text{lineal}(P) + (P \cap U)$$

di un sottospazio lineare e un insieme il cui spazio lineale è zero:

$$\text{lineal}(P \cap U) = \{\mathbf{0}\}.$$

Questa osservazione rende possibile considerare solo i poliedri con spazio lineale  $\{\mathbf{0}\}$ , noti come *poliedri puntati* (se non sono vuoti).

Per gli  $\mathcal{H}$ -poliedri si ha che  $\text{lineal}(P(A, \mathbf{z})) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ . Quindi, tranne per un banale addendo lineare possiamo solitamente considerare i poliedri  $P(A, \mathbf{z}) \subseteq \mathbb{R}^d$  per i quali  $A$  ha rango massimo  $d$ .

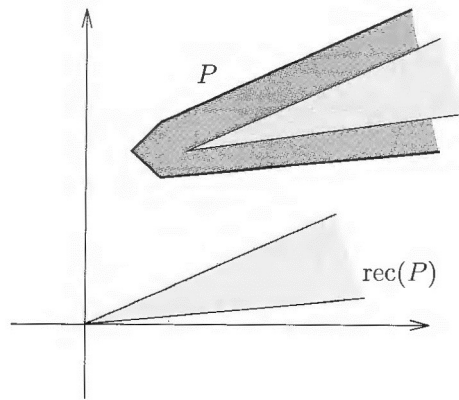
Inoltre, possiamo osservare che:

*Osservazione 16.*  $\text{rec}(P)$  è un cono convesso.

*Dimostrazione.*  $\text{rec}(P)$  è un cono convesso, infatti  $\text{rec}(P)$  contiene:

- il vettore  $\mathbf{0}$ ,
- ogni multiplo positivo di un vettore,
- ogni combinazione convessa di due qualunque dei suoi vettori.

□



**Proposizione 2.14.** Sia  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  un insieme convesso.

1. Se  $P = P(A, \mathbf{z})$  è un  $\mathcal{H}$ -poliedro, allora anche il suo cono di recessione è un  $\mathcal{H}$ -poliedro:

$$\text{rec}(P) = P(A, \mathbf{0}).$$

2. Se  $P = \text{conv}(V) + \text{cone}(Y)$  è un  $\mathcal{V}$ -poliedro, allora anche il suo cono di recessione è un  $\mathcal{V}$ -poliedro:

$$\text{rec}(P) = \text{cone}(Y).$$

*Dimostrazione.*

1.  $\text{rec}(P) \subseteq P(A, \mathbf{0})$ , infatti:

sia  $\mathbf{y} \in \text{rec}(P)$ , allora  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  tale che  $\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in P$  che equivale a  $A(\mathbf{x} + t\mathbf{y}) \leq \mathbf{z}$ .

Ma ciò è possibile se e solo se  $A\mathbf{y} \leq \mathbf{0}$  perchè altrimenti per  $t \rightarrow +\infty$  si avrebbe che  $At\mathbf{y} \rightarrow +\infty$  e quindi  $\mathbf{x} + t\mathbf{y}$  non appartenerrebbe a  $P$  il che porterebbe a una contraddizione.

$\text{rec}(P) \supseteq P(A, \mathbf{0})$ , infatti:

sia  $\mathbf{y} \in P(A, \mathbf{0})$ , allora  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  tale che  $A\mathbf{y} \leq \mathbf{0}$ .

Si vuole, quindi, mostrare che  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  è tale che  $\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in P(A, \mathbf{z})$  per ogni  $\mathbf{x} \in P(A, \mathbf{z})$  e  $t \geq 0$  che equivale a provare che  $A(\mathbf{x} + t\mathbf{y}) \leq \mathbf{z}$ .

Perciò verifichiamo tale disuguaglianza:

$$A(\mathbf{x} + t\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + At\mathbf{y} \leq \mathbf{z} + \mathbf{0} = \mathbf{z}.$$

2.  $\text{rec}(P) \subseteq \text{cone}(Y)$ , infatti:

se  $\mathbf{y} \notin \text{cone}(Y)$ , allora per il lemma di Farkas IV (con  $V = 0$ ) esiste un funzionale lineare  $\mathbf{a}$  tale che  $\mathbf{a}Y \leq 0$  e  $\mathbf{a}\mathbf{y} > 0$ .

Ora consideriamo  $\mathbf{z} = V\mathbf{t} + Y\mathbf{u} \in \text{conv}(V) + \text{cone}(Y)$  con  $\mathbf{t}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{1}\mathbf{t} = 1$ . Da ciò otteniamo che:

$$\mathbf{a}\mathbf{z} = \mathbf{a}V\mathbf{t} + \mathbf{a}Y\mathbf{u} = \sum_{1 \leq i \leq n} t_i \mathbf{a}\mathbf{v}_i \leq \max_{1 \leq i \leq n} \mathbf{a}\mathbf{v}_i =: K,$$

con  $K$  che dipende solo da  $\mathbf{a}$  e  $V$ . Tuttavia, otteniamo che  $\mathbf{a}(\mathbf{z} + t\mathbf{y}) = \mathbf{a}\mathbf{z} + t(\mathbf{a}\mathbf{y}) \rightarrow +\infty$ , cosicchè  $\mathbf{z} + t\mathbf{y} \notin P$  per  $t$  abbastanza grande e quindi  $\mathbf{y} \notin \text{rec}(P)$ .

$\text{rec}(P) \supseteq \text{cone}(Y)$ , infatti:

sia  $\mathbf{y} \in \text{cone}(Y)$ , ciò che si vuole mostrare è che, se  $\mathbf{y} \in \text{cone}(Y)$ , allora  $\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in \text{cone}(Y)$  per ogni  $\mathbf{x} \in \text{cone}(Y)$  e  $t \geq 0$ . Questo è verificato perchè  $\text{cone}(Y)$  è chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione per uno scalare non negativo.

□

**Definizione 29.** Sia  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  un insieme convesso. L'omogeneizzazione di  $P$  è definita come

$$\text{homog}(P) := \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} : \mathbf{x} \in P, t > 0 \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} : \mathbf{y} \in \text{rec}(P) \right\}.$$

*Osservazione 17.* Sia  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  un insieme convesso. L'omogeneizzazione  $\text{homog}(P)$  è un cono convesso in  $\mathbb{R}^{d+1}$ .

Inoltre,  $P$  può essere facilmente ricavato dalla sua omogeneizzazione come

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \in \text{homog}(P) \right\}.$$

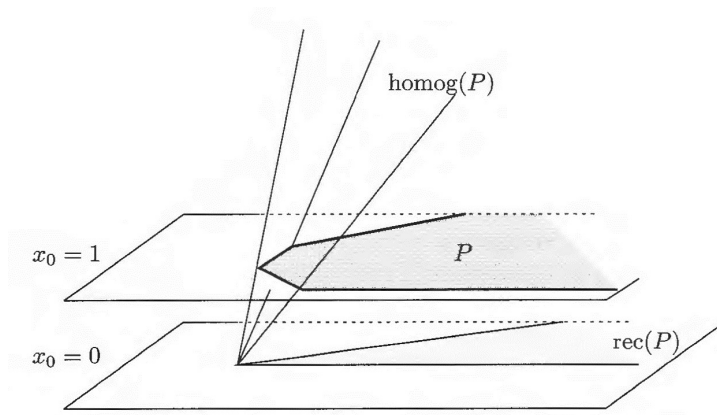
*Dimostrazione.*  $\text{homog}(P)$  è un cono convesso, infatti contiene:

- il vettore  $\mathbf{0}$  perchè  $\text{rec}(P)$  lo contiene,

- ogni multiplo positivo di un vettore,
- ogni combinazione convessa di due qualunque di suoi vettori.

Inoltre  $P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \in \text{homog}(P) \right\}$  perchè:

se  $\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \in \text{homog}(P)$ , allora  $\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}$  con  $\mathbf{x} \in P$ . □



**Proposizione 2.15.** *Sia  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  un insieme convesso.*

1. *Se  $P = P(A, \mathbf{z})$  è un  $\mathcal{H}$ -poliedro, allora la sua omogeneizzazione è anche un  $\mathcal{H}$ -poliedro:*

$$\text{homog}(P) = P\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\mathbf{z} & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\right) = C(P).$$

2. *Se  $P = \text{conv}(V) + \text{cone}(Y)$  è un  $\mathcal{V}$ -poliedro, allora la sua omogeneizzazione è anche un  $\mathcal{V}$ -poliedro:*

$$\text{homog}(P) = \text{cone}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ V & Y \end{pmatrix} = C(P).$$

*Dimostrazione.* Segue dalla Proposizione 2.14. □

Con questa proposizione abbiamo dimostrato, quindi, che l'omogeneizzazione  $\text{homog}(P)$  di un poliedro coincide con il "cono associato"  $C(P)$  che abbiamo usato nella Sezione 2.1.

## 2.5 Teorema di Carathéodory

La seguente proposizione presenta due versioni (lineare e affine) di un altro strumento base, noto come teorema di Carathéodory. Vogliamo enfatizzare che in contrasto con il lemma di Farkas questo risultato è del tutto elementare e anche abbastanza banale da un punto di vista computazionale. Comunque, può essere applicato ed utilizzato con successo, ad esempio, per rafforzare i lemmi di Farkas.

### Proposizione 2.16 (Teorema di Carathéodory).

Siano  $X \in \mathbb{R}^{d \times n}$  e  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ .

1. Se  $\mathbf{x} \in \text{cone}(X)$ , allora  $\mathbf{x} \in \text{cone}(X')$  per un sottoinsieme  $X' \subseteq X$  con al più  $\text{rg}(X) = \dim(\text{cone}(X))$  vettori in  $X$ .
2. Se  $\mathbf{x} \in \text{conv}(X)$ , allora  $\mathbf{x} \in \text{conv}(X')$  per un sottoinsieme  $X' \subseteq X$  con al più  $\text{rg} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ X \end{pmatrix} = \dim(\text{conv}(X)) + 1$  vettori in  $X$ .

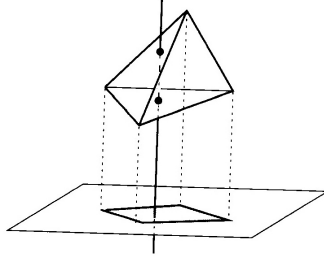
Innanzitutto descriviamo l'idea geometrica (versione lineare).

Sia  $\dim(\text{cone}(X)) = k$ . Supponiamo per assurdo che  $k' \geq k + 1$  sia il più piccolo numero tale che  $\mathbf{x} \in \text{cone}(X)$  può essere rappresentato come somma positiva di  $k'$  vettori di  $X$ . (Otteniamo che  $k' \leq n$  da  $\mathbf{x} \in \text{cone}(X)$ ).

Il cono  $\text{cone}(X') = \{\sum_i t_i \mathbf{v}_i : t_i \geq 0\}$  generato da  $X' \subseteq X$  di  $k'$  vettori di  $X$  può essere interpretato come una proiezione dell'ortante positivo di  $\mathbb{R}^{k'}$ , ove  $\text{orth}_+(\mathbb{R}^{k'}) = \{\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{k'}) : t_i \geq 0\}$ . Dal momento che  $k'$  è minimale, il punto  $\mathbf{x}$  giace nell'immagine dell'interno dell'ortante,  $\{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{k'} : \mathbf{t} > \mathbf{0}\}$ . Da  $k' > k$  si ottiene che la controimmagine di  $\mathbf{x}$  tramite tale proiezione è almeno di dimensione 1. Perciò la controimmagine contiene l'intersezione di una retta con l'ortante  $\text{orth}_+(\mathbb{R}^{k'})$ . Poichè l'ortante non contiene l'intera retta, la controimmagine contiene un punto di frontiera dell'ortante e quindi  $\mathbf{x}$  può essere rappresentato come una combinazione conica di meno di  $k'$  vettori.

Analogamente (versione affine), consideriamo la proiezione di un semplice sul politopo  $\text{conv}(X)$ . Se l'immagine ha una dimensione minore del

simpleso, allora ogni punto del politopo ha come controimmagine l'intersezione del simpleso con una retta. Ma il simpleso non contiene l'intera retta, così la retta deve contenere un punto di frontiera del simpleso, che porta a una rappresentazione con meno coefficienti non nulli.



Diamo ora una prova algebrica.

*Dimostrazione.*

1. Senza perdita di generalità, considerando lo spazio vettoriale generato da  $X$  ( $\text{span}(X)$ ), possiamo supporre che abbia rango massimo,  $\text{rg}(X) = d$ . Ora sia  $\mathbf{x} \in \text{cone}(X)$  tale che  $\mathbf{x} = X\mathbf{t}$  con  $\mathbf{t} \geq \mathbf{0}$  di supporto minimale  $\text{supp}(\mathbf{t}) = \{i : t_i > 0\}$ , cioè con almeno  $|\{i : t_i > 0\}|$  componenti non nulle. Ora, se  $|\text{supp}(\mathbf{t})| > d$ , allora  $\{\mathbf{x}_i : t_i > 0\}$  sono linearmente dipendenti. Questo significa che c'è una dipendenza lineare della forma  $\mathbf{0} = \sum_{i=1}^n \lambda_i t_i \mathbf{x}_i$  con tutti  $\lambda_i \neq 0$ . Moltiplicando questo per uno scalare non nullo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , potremmo assumere che  $\lambda_i > 0$  per qualche  $i \in \text{supp}(\mathbf{t})$  e che  $\lambda_j := \max\{\lambda_i : t_i > 0\} = 1$ . Ma in tal caso si otterrebbe che

$$\mathbf{x} = \sum_i t_i \mathbf{x}_i = \sum_i (1 - \lambda_i) t_i \mathbf{x}_i = \sum_{i \neq j} (1 - \lambda_i) t_i \mathbf{x}_i,$$

che è una rappresentazione con un supporto più piccolo, contraddicendo la minimalità di  $\mathbf{t}$ .

2. Segue direttamente da

$$\mathbf{x} \in \text{conv}(X) \iff \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \in \text{cone} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ X \end{pmatrix}. \quad \square$$





# Bibliografia

- [1] Günter M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, 1995



# Ringraziamenti

Vorrei ringraziare il Professore Fabrizio Caselli, relatore di questa tesi, per la disponibilità e per tutto l'aiuto fornito durante la stesura.

Un sentito ringraziamento ai miei genitori che, con il loro incrollabile sostegno, mi hanno permesso di raggiungere questo traguardo.

Desidero, inoltre, ringraziare di cuore i miei amici, i compagni di studio e le mie coinquiline per essermi stati vicini sia nei momenti difficili sia nei momenti felici.

Infine, un grazie speciale va a Davide per il suo costante incoraggiamento, a Roberta e a Francesca con cui ho condiviso gran parte della mia esperienza universitaria.