Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

LO SPETTRO DI UN ANELLO E I SUOI PUNTI

Tesi di Laurea in Geometria Algebrica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
LUCA MIGLIORINI

Presentata da:
GAUDENZIO FALCONE

II Sessione
Anno Accademico 2015-2016

Introduzione

Tradizionalmente la geometria algebrica è lo studio degli insiemi algebrici, sottoinsiemi, spesso di $\mathbb{C}^n$, definiti come luogo di zeri di un insieme di polinomi. Questo studio conduce inevitabilmente a questioni di algebra commutativa: a un insieme algebrico è associato l'ideale dei polinomi che vi si annullano, ed è importante capire a fondo la natura di questa corrispondenza tra ideali e insiemi e quali siano le controparti algebriche di certe nozioni geometriche. Lo studio di questi problemi ha condotto a uno sviluppo importante dell'algebra commutativa nel XX secolo, con le ricerche fondamentali di E. Noether, W. Krull, O. Zariski. Lo sviluppo moderno della geometria algebrica, condotto essenzialmente da A. Grothendieck (a seguito dei fondamentali contributi di A. Weil, C. Chevalley, J.P. Serre) ha portato agli estremi questa tendenza di algebrizzazione, allargando la nozione di varietà algebrica e sostituendola con la nozione di schema, molto più generale e flessibile. Questa tesi studia le prime nozioni di geometria algebrica, cercandone la motivazione in questioni geometriche. Si pone l'accento soprattutto sulla nozione di punto di uno schema, che è molto meno immediata della nozione classica. Mostreremo in particolare come, nel caso classico di una varietà definita su un sottocampo di un campo algebricamente chiuso, la nozione di punto e del suo campo residuo con l'azione del suo gruppo di Galois riflettano fedelmente le questioni di razionalità. Il primo capitolo introduce brevemente le varietà algebriche affini mettendo in luce la stretta corrispondenza tra oggetti geometrici e oggetti algebrici: si vedrà che ad un ideale dell'anello $K[x_1, \ldots, x_n]$ è associato un luogo geometrico di $\mathbb{A}^n_K$, detto insieme algebrico, e viceversa. In seguito verrà introdotto il concetto, molto importante e centrale nell'elaborato, di spazi geometrici con funzioni definite su di essi: in particolare, se X è una varietà algebrica, vedremo che partendo da un approccio globale sarà possibile definire l'anello delle coordinate affni su X mentre, effettuando un'analisi locale, si possono costruire delle funzioni su ogni aperto U di X, dette funzioni regolari. Queste ultime anticipano il concetto di fascio che verrà analizzato nel secondo capitolo e che rappresenta uno strumento fondamentale nella costruzione degli spazi localmente anellati. A tal proposito tratteremo nel dettaglio lo spettro di un anello, la sua topologia e il fascio di anelli su di esso in modo tale da rendere $(Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)})$ uno spazio localmente anellato, per ogni anello A commutativo con unità. Nell'ultimo capitolo analizzeremo i punti di uno schema: infatti i punti dello spettro di un anello non sono tutti chiusi ma esiste un'altra classe di punti molto importanti, detti punti generici. Successivamente verrà trattato il caso delle varietà su un campo non algebricamente chiuso e la decomposizione di uno schema su un campo K algebricamente chiuso come prodotto fibrato di sottoschemi; inoltre definiremo la mappa di coniugazione analizzando in che modo il gruppo $Gal(K/K_0)$ agisce sullo spazio topologico sottostante uno schema X. Infine verrà introdotto il funtore dei punti di uno schema e si parlerà della distinzione tra punti schematici e K-punti di uno schema X, esaurendo il caso in cui K rappresenta lo spettro di un campo fissato (in questo caso se il campo è algebricamente chiuso i K-punti verranno chiamati punti geometrici) e il caso in cui K sia lo spettro di un qualche anello locale.

Indice

Introduzione **1**

1 Varietà algebriche affini **5**

1.1 Il Teorema degli zeri di Hilbert 7

1.2 L'anello delle coordinate affini 8

1.3 Funzioni Regolari 9

2 Schemi **11**

2.1 Fasci 11

2.2 Spazi anellati 14

2.3 Lo spettro di un anello 15

2.3.1 La topologia sullo spettro di un anello 16

3 Caratterizzazioni degli Schemi **23**

3.1 I punti di uno schema 23

3.2 Varietà su un campo non algebricamente chiuso 28

3.2.1 Prodotto fibrato di schemi 28

3.2.2 La mappa di coniugazione 29

3.3 Il funtore dei punti di uno schema 33

Bibliografia **39**

Capitolo 1

Varietà algebriche affini

Nel seguito K denoterà un campo fissato algebricamente chiuso. Consideriamo lo spazio affine n-dimensionale

$$\mathbb{A}^n_K = \{(a_1, ..., a_n) \in K^n \,|a_i \in K\}$$

e sia inoltre $A = K\,[x_1, ..., x_n]$ l'anello dei polinomi in n indeterminate a coefficienti nel campo K.

Definizione 1.1. Sia $\mathbf{a} \subseteq A$ un'ideale; chiamiamo **insieme algebrico** l'insieme degli zeri di $\mathbf{a}$ ossia il seguente:

$$Z(\mathbf{a}) = \{(a_1, ..., a_n) \in K^n \,|f(a_1, ..., a_n) = 0 \;\forall f \in \mathbf{a}\}\,.$$

Osservazione 1. Ogni insieme algebrico è descritto da un numero finito di equazioni. Infatti l'anello $A = K[x_1, ..., x_n]$ é Noetheriano, quindi ogni suo ideale è finitamente generato; in particolare preso un ideale $\mathbf{a} \subseteq A$ $\exists f_1, ..., f_r \in A$ tali che $\mathbf{a} = (f_1, ..., f_n)$. Pertanto:

$$Z(\mathbf{a}) = Z((f_1, ..., f_r)) = \{(a_1, ..., a_n) \in K^n \,|f_i(a_1, ..., a_n) = 0 \; per \; 0 \leq i \leq r\}$$

.

Definizione 1.2. Definiamo Topologia di Zariski su $\mathbb{A}^n_K$ la topologia i cui sottoinsiemi chiusi sono i sottoinsiemi algebrici di $\mathbb{A}^n_K$.

Esempio 1.1. Sia K un campo algebricamente chiuso e consideriamo la retta affine $\mathbb{A}^1_K$. Il corrispondente anello dei polinomi $A = K[x]$ è un dominio di integrità a ideali principali, quindi ogni ideale $\mathbf{a} \subseteq A$ è generato da un unico polinomio $f(x) \in A$. Poichè K è algebricamente chiuso, ogni polinomio f di grado r si scompone nel prodotto di r fattori lineari

$$f(x) = c(x - a_1) \cdot ... \cdot (x - a_r)$$

con $c, a_1, ..., a_r \in K$. Pertanto si ha:

$$Z(\mathbf{a}) = Z((f)) = \{a_1, ..., a_r\}$$

Possiamo concludere che i chiusi della Topologia di Zariski della retta affine $\mathbb{A}^1_K$ sono, oltre all'insieme vuoto e $\mathbb{A}^1_K$, gli insiemi con un numero finito di elementi. Di conseguenza i sottoinsiemi aperti, essendo i complementari dei chiusi, sono i complementari dei sottoinsiemi finiti di $\mathbb{A}^1_K$.
Inoltre, essendo K algebricamente chiuso, esso è infinito; pertanto tutti i sottoinsiemi aperti di $\mathbb{A}^1_K$ hanno infiniti elementi e sono densi in $\mathbb{A}^1_K$ (in particolare i loro complementari sono insiemi finiti). Da questo segue che presi due qualsiasi aperti, questi hanno sempre intersezione non vuota. Pertanto $\mathbb{A}^1_K$ munito della Topologia di Zariski non è di Hausdorff.

Definizione 1.3. Sia X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ un sottoinsieme non vuoto. Si dice che Y è **irriducibile** se non è unione di due sottoinsiemi propri e chiusi di Y. Si dice **riducibile** altrimenti.

Definizione 1.4. Una **varietà affine** sul campo K è un sottoinsieme chiuso irriducibile di $\mathbb{A}^n_K$ munito della Topologia di Zariski.

Proposizione 1.0.1. *Ogni insieme algebrico $X \subset \mathbb{A}^n_K$ può essere espresso in modo unico come unione finita di varietà nessuna delle quali ne contiene un' altra.*

Per adesso, si è visto che dato un ideale in $K[x_1, ..., x_n]$ ad esso è associato un sottoinsieme algebrico di $\mathbb{A}^n_K$. Con la seguente definizione vedremo che è lecito eseguire il procedimento opposto, ossia a partire da un sottoinsieme di $\mathbb{A}^n_K$ ad esso sarà possibile associare un ideale in $K[x_1, ..., x_n]$.

Definizione 1.5. Sia $Y \subseteq \mathbb{A}^n_K$ un sottoinsieme. L'ideale di Y è definito ponendo:

$$I(Y) = \{f \in A \,|\, f(a_1, ..., a_n) = 0 \ \forall (a_1, ..., a_n) \in Y\}.$$

Inoltre valgono le seguenti proprietà:

- per ogni $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{A}^n_K$ tali che $Y_1 \subseteq Y_2$ si ha: $I(Y_1) \supseteq I(Y_2)$;
- per ogni $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{A}^n_K$ vale la seguente uguaglianza

$$I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2).$$

Abbiamo trovato quindi due applicazioni:

- $Z : \{\textit{ideali di } A\} \rightarrow \{\textit{insiemi algebrici di } \mathbb{A}^n_K\}$
- $I : \{\textit{insiemi algebrici di } \mathbb{A}^n_K\} \rightarrow \{\textit{ideali di } A\}$

che in generale non rappresentano una l'inversa dell'altra. A tal proposito possiamo osservare il seguente:

Esempio 1.2. Sia $A = K[x]$ e consideriamo l'ideale $\mathbf{a} = (x^n)$ con $n \geq 2$. L'insieme degli zeri di $\mathbf{a}$ è dato da $Y = Z(\mathbf{a}) = \{0\} \subseteq \mathbb{A}^1_K$; di conseguenza l'ideale di Y é $I(Y) = (x)$. Pertanto di ha:

$$\mathbf{a} \subseteq I(Z(\mathbf{a}))$$

Notiamo tuttavia che:

$$\textit{se } f \in I(Z(\mathbf{a})) \Rightarrow f^r \in \mathbf{a} \textit{ per un qualche } r \geq 0$$

1.1 Il Teorema degli zeri di Hilbert

Definizione 1.6. Sia A un anello e $\mathbf{a} \subseteq A$ un ideale. Definiamo **radicale** di $\mathbf{a}$

$$\sqrt{\mathbf{a}} = \{f \in A \,|f^r \in \mathbf{a} \textit{ per un qualche } r \geq 0\}.$$

Di conseguenza un ideale $\mathbf{a} \subseteq A$ è detto radicale se $\mathbf{a} = \sqrt{\mathbf{a}}$.

Teorema 1.1.1. *(Teorema degli zeri di Hilbert) Sia K un campo algebricamente chiuso e $\boldsymbol{a}$ un ideale dell'anello dei polinomi $K[x_1, ..., x_n]$. Allora $I(Z(\boldsymbol{a})) = \sqrt{\boldsymbol{a}}$, cioè $f \in I(Z(\boldsymbol{a}))$ se e solo se $f^r \in \boldsymbol{a}$ per un qualche intero $r \geq 1$.*

Dai risultati enunciati possiamo comprendere quindi che in generale la corrispondenza tra ideali di $K[x_1, ..., x_n]$ non è biunivoca, lo diventa solo se ci limitiamo a considerare ideali radicali.
Vediamo ora come si traduce algebricamente il concetto geometrico di irriducibilità:

Proposizione 1.1.2. *Un insieme algebrico $Y \subseteq \mathbb{A}^n_K$ è irriducibile se e solo se il suo ideale $I(Y)$ è primo.*

Pertanto, alla luce della biezione tra sottoinsiemi algebrici di $\mathbb{A}^n_K$ e ideali radicali di $K[x_1, ..., x_n]$, l'analogo algebrico della decomposizione di un insieme algebrico come unione finita di insiemi algebrici irriducibili (le varietá affini) non è altro che la decomposizione di un ideale radicale come intersezione finita di ideali primi.

1.2 L'anello delle coordinate affini

Quello che si vuole trattare in questa sezione è la possibilità di definire su un insieme algebrico delle funzioni. Sappiamo, in generale, che preso $f \in K[x_1, ..., x_n]$ questo definisce una funzione:

$$\tilde{f} : \mathbb{A}^n_K \to K$$

tale che

$$(a_1, ..., a_n) \longmapsto f(a_1, ..., a_n).$$

Sia ora $X \subseteq \mathbb{A}^n_K$ un sottoinsieme algebrico e supponiamo di voler definire, come si è fatto per $\mathbb{A}^n_K$, delle funzioni su X. Ci si può chiedere, ad esempio, quando due polinomi $f, g \in K[x_1, ..., x_n]$ definiscono la stessa funzione su X: sicuramente questo accade quando

$$f(a_1, ..., a_n) - g(a_1, ..., a_n) = 0$$

$\forall (a_1, ..., a_n) \in X$, ma ciò equivale a dire che $f - g \in I(X)$. Pertanto, identificando i polinomi che prendono gli stessi valori su X, gli elementi dell'anello quoziente $K[x_1, ..., x_n]/I(X)$ definiscono delle funzioni su X a valori in K.

Definizione 1.7. Per ogni insieme algebrico $X \subseteq \mathbb{A}^n_K$ si definisce **anello delle coordinate affini su X** l'anello $A(X) = K[x_1, ..., x_n]/I(X)$.

1.3 Funzioni Regolari

Gli elementi dell'anello delle coordinate affini su X definiscono delle funzioni (polinomiali) globali sull'insieme algebrico X, ottenute per restrizione dalle funzioni polinomiali definite su $\mathbb{A}^n_K$.
Potremmo però cercare di definire queste funzioni da un altro punto di vista, ossia quello "locale". In generale se X è uno spazio topologico e $\{U_i\}_{i\in I}$ è un ricoprimento aperto di X, una funzione su X può essere ottenuta costruendo una famiglia di funzioni f_i definite su ciascuno degli aperti U_i e tali che $f_{i|U_i\cap U_j} = f_{j|U_i\cap U_j}$ per ogni $i, j \in I$. Il vantaggio di questo approccio è che la descrizione delle funzioni locali definite sugli aperti U_i risulta più semplice della descrizione delle funzioni definite su tutto lo spazio X.

Definizione 1.8. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n_K$ un sottoinsieme algebrico e sia U un aperto di X. Una funzione $f : U \to K$ si dice **funzione regolare** in un punto $P \in U$ se esistono un intorno aperto V di P in U e due polinomi $g, h \in K[x_1, ..., x_n]$ con $h \neq 0$ su V, tali che $f_{|V} = \frac{g}{h}$. Di conseguenza la funzione f è detta regolare su U se essa é regolare in ogni punto di U.

Per ogni aperto $U \subseteq X$ indichiamo con $\mathcal{O}_X(U)$ l'insieme delle funzioni regolari su U il quale, essendo somme e prodotti di funzioni regolari ancora funzioni regolari, possiede una struttura di anello.

Osservazione 2. Il simbolo $\mathcal{O}_X$ può essere pensato come una mappa che ad ogni aperto U di X associa l'anello $\mathcal{O}_X(U)$ delle funzioni regolari su U. Inoltre ad ogni inclusione di aperti $V \subseteq U$ è associato un omomorfismo di anelli

$$\rho_{UV} : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$$

che ad ogni funzione regolare $f \in \mathcal{O}_X(U)$ associa la sua restrizione $f_{|V} \in \mathcal{O}_X(V)$. Questo tipo di struttura è un prototipo di **fascio di anelli** su X, un concetto molto importante che è alla base della teoria degli schemi e che analizzeremo nel dettaglio nei capitoli successivi.

Capitolo 2

Schemi

2.1 Fasci

Come si è detto alla fine del capitolo precendete il concetto di **fascio** è centrale nella teoria degli schemi. Pertanto diamo la seguente:

Definizione 2.1. Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{C}$ una categoria (in genere $\mathcal{C}$ può essere la categoria degli insiemi, dei gruppi oppure quella degli anelli commutativi). Un **prefascio** $\mathcal{F}$ su X a valori in $\mathcal{C}$ consiste dei seguenti dati:

- per ogni sottoinsieme aperto U di X, un oggetto $\mathcal{F}(U)$ di $\mathcal{C}$;
- per ogni inclusione di aperti di X $V \subseteq U$, un morfismo nella categoria $\mathcal{C}$
$$\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V).$$

Inoltre valgono le seguenti proprietà:

- $\mathcal{F}(\emptyset)=\{0\}$;
- $\rho_{UU} = id$ per ogni sottoinsieme aperto U di X;
- $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$ per ogni inclusione di aperti $W \subseteq V \subseteq U$.

Osservazione 3. Se $\mathcal{F}$ é un prefascio di anelli su X, gli elementi di $\mathcal{F}(U)$ sono detti **sezioni** di $\mathcal{F}$ sull'aperto U mentre le mappe $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ sono chiamate **mappe di restrizione**.

Possiamo quindi adesso dare la definizione di fascio:

Definizione 2.2. Un prefascio $\mathcal{F}$ su X è detto **fascio** se esso soddisfa le seguenti proprietà:

- dato U sottoinsieme aperto di X e $\{V_i\}_{i\in I}$ ricoprimento aperto di U, se $f \in \mathcal{F}(U)$ è tale che $f_{|V_i} = \rho_{UV_i}(f) = 0$ per ogni $i \in I$ allora $f = 0$;
- dato U sottoinsieme aperto di X e $\{V_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di U, se sono date delle sezioni $f_i \in \mathcal{F}(V_i)$ tali che $f_{i|V_i \cap V_j} = f_{j|V_i \cap V_j}$ per ogni $i, j \in I$ allora esiste $f \in \mathcal{F}(U)$ tale che $f_{|V_i} = f_i$ per ogni $i \in I$.

Esempio 2.1. Esempi naturali di fasci sono rappresentati dal fascio delle funzioni continue su uno spazio topologico oppure dal fascio delle funzioni C^∞ su una varietà differenziabile reale.

Nell'ambito della geometria algebrica, si è visto precedentemente che dato un insieme algebrico $X \subseteq \mathbb{A}^n_K$, ad ogni aperto U di X è possibile associare l'anello delle funzioni regolari $\mathcal{O}_X(U)$ con le mappe di restrizione usuali. In questo modo quello che si ottiene è un fascio, indicato con $\mathcal{O}_X$, detto **fascio delle funzioni regolari** o **fascio strutturale** su X.

Definizione 2.3. Sia X uno spazio topologico, $\mathcal{F}$ un fascio su X e $P \in X$. Si definisce la **spiga** $\mathcal{F}_P$ del fascio $\mathcal{F}$ come l'insieme di tutte le coppie della forma (U, f) con U intorno aperto di P in X e $f \in \mathcal{F}(U)$, modulo la relazione di equivalenza data da: (U_1, f_1) è in relazione con (U_2, f_2) se esiste un intorno aperto V di P con $V \subseteq U_1 \cup U_2$ tale che $f_{1|V} = f_{2|V}$.
Gli elementi di una spiga $\mathcal{F}_P$ sono detti **germi** di sezioni di $\mathcal{F}$ in P.

Osservazione 4. Se X è una varietà algebrica e $\mathcal{O}_X$ è il suo fascio strutturale, allora la spiga di $\mathcal{O}_X$ nel punto P è l'anello locale $\mathcal{O}_{X,P}$, cioè un anello con un unico ideale massimale $\mathbf{m}_P$.

Definizione 2.4. Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due fasci di anelli su uno spazio topologico X. Un **morfismo di fasci** $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è costituito da un omomorfismo di anelli $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ per ogni U sottoinsieme aperto di X, con la condizione che, per ogni inclusione $V \subseteq U$ di sottoinsiemi aperti di X, il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi(U)"] \arrow[d, "\rho_{UV}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho'_{UV}"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\phi(V)"'] & \mathcal{G}(U) \end{tikzcd}$$

dove ρ_{UV} e ρ'_{UV} sono rispettivamente le mappe di restrizione di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$.

Osservazione 5. Si osservi che dato un morfismo di fasci $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ questo induce un morfismo sulle spighe $\phi_P : \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ per ogni $P \in X$.

Osservazione 6. Un morfismo di fasci $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è un isomorfismo se esso ammette un morfismo inverso $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ tale che $\phi \circ \psi = id$.

Adesso enunciamo e dimostriamo un teorema molto importante che illustra la natura locale della nozione di fascio.

Teorema 2.1.1. *Sia $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci su uno spazio topologico X. Allora ϕ è un isomorfismo se e solo se le mappe $\phi_P : \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ sono isomorfismi per ogni punto $P \in X$.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Se $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è un isomorfismo, allora necessariamente i morfismi indotti sulle spighe $\phi_P : \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ sono isomorfismi.

($\Leftarrow$) Viceversa, supponiamo che $\phi_P : \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ sia un isomorfismo per ogni punto $P \in X$. Per provare che ϕ è un isomorfismo è sufficiente dimostrare che $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ è un isomorfismo per ogni aperto U di X, perchè in tal caso potremmo definire il morfismo inverso $\psi(U) : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ ponendo $\psi(U) = \phi(U)^{-1}$ per ogni aperto U di X.

- Proviamo che $\phi(U)$ è iniettiva.
  Sia $s \in \mathcal{F}(U)$ e supponiamo che $\phi(s) = 0$. Allora per ogni punto $P \in U$ l'immagine di s nella spiga $\mathcal{G}_P$ è zero, ossia $\phi(s)_P = 0$. Ma dato che per ipotesi ϕ_P è un isomorfismo, in particolare è iniettiva e quindi si ha $s_P = 0$ in $\mathcal{F}_P$, per ogni $P \in U$. Ma dire che $s_P = 0$ equivale a dire che esiste un intorno aperto W_P di P in U tale che $s_{|W_P}$=0 in $\mathcal{F}(W_P)$. Dato che gli intorni W_P, al variare di P in U, costituiscono un ricoprimento aperto di U, in base alla prima

proprieta dei fasci, si deduce che $s = 0$ in U. In particolare ciò significa che ϕ è iniettiva.

– Proviamo che $\phi(U)$ è suriettiva.
Supponiamo di avere una sezione $t \in \mathcal{G}(U)$. Per ogni $P \in U$, consideriamo $t_P \in \mathcal{G}_P$ il suo germe in P. Dato che ϕ_P è suriettiva (essendo un isomorfismo), sicuramente $\exists\ s_P \in \mathcal{F}_P$ tale che $\phi_P(s_P) = t_P$. Supponiamo che s_P sia rappresentata da una sezione $s(P)$ in un intorno V_P di P. Allora $\phi(s(P))$ e $t_{|V_P}$ sono due elementi di $\mathcal{G}(V_P)$ i cui germi in P coincidono. Pertanto, sostituendo eventualmente V_P con un intorno aperto di P più piccolo, possiamo supporre che $\phi(s(P)) = t_{|V_P}$ in $\mathcal{G}(V_P)$. Ora U è ricoperto dagli aperti V_P e su ogni V_P abbiamo una sezione $s(P) \in \mathcal{F}(V_P)$. In particolare se P e Q sono due punti, allora $s(P)_{|V_P \cap V_Q}$ e $s(Q)_{|V_P \cap V_Q}$ sono due sezioni di $\mathcal{F}(V_P \cap V_Q)$ la cui immagine tramite ϕ coincide con $t_{|V_P \cap V_Q}$. Per l'iniettività di ϕ dimostrata precedentemente, esse sono dunque uguali. Ricordando la seconda proprietà dei fasci, ciò significa che esiste una sezione $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s_{|V_P} = s(P)$, per ogni $P \in U$. Ora rimane solo da dimostrare che $\phi(s) = t$. Ma $\phi(s)$ e t sono due sezioni di $\mathcal{G}(U)$ con la proprietà che, per ogni P, $\phi(s)_{|V_P} = t_{|V_P}$. Quindi possiamo applicare la prima proprietà dei fasci alla sezione $\phi(s) - t$ e concludere che $\phi(s) = t$.

$\square$

2.2 Spazi anellati

Il concetto di fascio serve a generalizzare la nozione di "spazio con funzioni". Di fatti in geometria non si è solo interessati allo spazio in sé, bensì allo spazio insieme ad un anello di funzioni definite su di esso. Ovviamente la scelta del tipo di funzioni da considerare dipende dal contesto.

Definizione 2.5. Uno **spazio anellato** è una coppia $(X, \mathcal{A})$ dove X è uno spazio topologico e $\mathcal{A}$ un fascio di anelli su X.

Definizione 2.6. Un morfismo di spazi anellati da $(X, \mathcal{A}_X)$ a $(Y, \mathcal{A}_Y)$ è una coppia (f, f^*) , dove $f : X \to Y$ è una funzione continua e f^* è un morfismo di fasci di anelli su Y,

$$f^* : \mathcal{A}_Y \to f_*\mathcal{A}_X$$

dove il fascio di anelli $f_*\mathcal{A}_X$ è definito su Y ponendo $f_*\mathcal{A}_X(V) = \mathcal{A}_X(f^{-1}(V))$ per ogni aperto $V \subseteq Y$.

Osservazione 7. Se X è una varietà algebrica e $\mathcal{O}_X$ è il suo fascio strutturale allora la coppia $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio anellato. In particolare il fascio $\mathcal{O}_X$ è un fascio di anelli commutativi con unità pertanto diremo che $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno *spazio commutativamente anellato*. Inoltre la spiga $\mathcal{O}_{X,P}$ è un anello locale.

Definizione 2.7. Uno **spazio localmente anellato** è uno spazio commutativamente anellato $(X, \mathcal{O}_X)$ tale che, per ogni $P \in X$, la spiga $\mathcal{O}_{X,P}$ sia un anello locale.

Definizione 2.8. Un morfismo di spazi localmente anellati è un morfismo di spazi anellati

$$(f, f^*) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

tale che, per ogni $P \in X$, l'omomorfismo $f_P^* : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \to \mathcal{O}_{X,P}$ sia un omomorfismo locale di anelli locali.

Osservazione 8. In generale dati due anelli locali A e B con ideali massimali $\mathbf{m}_A$ e $\mathbf{m}_B$, un omomorfismo $\phi : A \to B$ è detto omomorfismo locale di anelli locali se $\phi^{-1}(\mathbf{m}_B) = \mathbf{m}_A$.

Osservazione 9. Dato $\mathbf{m}_P$ ideale massimale di $\mathcal{O}_{X,P}$, chiameremo **campo residuo** il quoziente $k(P) = \mathcal{O}_{X,P}/\mathbf{m}_P$.

2.3 Lo spettro di un anello

Precedentemente si è visto che data una varietà affine X, ad essa è possibile associare un anello, l'anello delle coordinate affini $A(X)$. In particolare $A(X)$ è una K-algebra finitamente generata priva di zero divisori, pertanto si induce un'equivalenza di categorie tra la categoria delle varietà affini e

quella delle K-algebre finitamente generate e prive di zero divisori. A partire da questo, l'idea di Grothendieck (fondatore della teoria degli schemi) è stata quella di estendere tale equivalenza alla categoria di tutti gli anelli (commutativi con unità). Per fare ciò bisogna innanzitutto trovare il modo di associare ad un anello A commutativo con unità un qualche spazio topologico X il quale dovrà essere dotato di un fascio di anelli $\mathcal{O}_X$ in modo tale che l'anello A possa essere identificato con l'anello delle funzioni definite su X, in particolare con le sezioni globali del fascio $\mathcal{O}_X$.
Poichè una verione del Teorema degli zeri di Hlbert assicura che i punti di ogni insieme algebrico $Z(\mathbf{a})$ sono in corrispondenza biunivoca con gli ideali massimali dell'anello $K[x_1, \ldots, x_n]/\mathbf{a}$, si potrebbe pensare di considerare come spazio topologico il seguente:

$$X = X_A = \{\mathbf{m} \,|\, \mathbf{m} \subseteq A \textit{ ideale massimale}\}$$

Tuttavia questo tipo di approccio non è quello giusto. Infatti: se $\phi : A \to B$ é un omomorfismo di anelli e $\mathbf{m}$ è un ideale massimale di B, sicuramente $\phi^{-1}(\mathbf{m})$ sará un ideale primo di A, ma non massimale. Ciò significa che ad un omomorfismo di anelli $\phi : A \to B$ non possibile associare una funzione $f : X_B \to X_A$ tra gli spazi corrispondenti, pertanto non può essere indotta una corrispondenza di categorie.
Il problema si risolve se, invece di considerare gli ideali massimali di A, prendiamo l'insieme dei suoi ideali primi.

Definizione 2.9. Sia A un anello commutativo con unità. Definiamo **spettro primo** di A l'insieme degli ideali primi di A, ossia:

$$Spec(A) = \{\mathbf{p} \,|\mathbf{p} \subseteq A \textit{ ideale primo}\}\,.$$

In questo modo, $Spec(A)$ è lo spazio topologico associato all'anello A. Pertanto, in questo caso, ogni omomorfismo di anelli $\phi : A \to B$ induce una funzione $f : Spec(B) \to Spec(A)$ tale che ad ogni punto $\mathbf{p} \in Spec(B)$ associa il punto $\phi^{-1}(\mathbf{p}) \in Spec(A)$.

2.3.1 La topologia sullo spettro di un anello

Il problema che ci poniamo adesso è quello di dare una topologia allo spazio topologico $X = Spec(A)$. Innanzitutto per ogni ideale $\mathbf{a} \subseteq A$, non necessariamente primo, poniamo:

$$V(\mathbf{a}) = \{\mathbf{p} \in Spec(A) \,|\, \mathbf{p} \supseteq \mathbf{a}\}$$

Questo insieme va pensato come il "sottoinsieme algebrico"' definito dall'ideale $\mathbf{a}$, infatti risulta essere l'analogo di $Z(\mathbf{a})$ nel caso classico.

Proposizione 2.3.1. *Valgono le seguenti proprietà:*

(1) se $\boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{b}$ *sono due ideali di* A

$$V(\boldsymbol{a}) \cup V(\boldsymbol{b}) = V(\boldsymbol{ab})$$

(2) per ogni famiglia di ideali di A $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i\in I}$

$$V(\sum_{i\in I} \boldsymbol{a}_i) = \bigcap_{i\in I} V(\boldsymbol{a}_i)$$

(3) se $\boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{b}$ *sono due ideali di* A

$$V(\boldsymbol{a}) \subseteq V(\boldsymbol{b}) \Leftrightarrow \sqrt{\boldsymbol{a}} \supseteq \sqrt{\boldsymbol{b}}$$

Dimostrazione. (1) Mostriamo la doppia inclusione:

- $V(\mathbf{a}) \cup V(\mathbf{b}) \supseteq V(\mathbf{ab})$:
  se $p \supseteq \mathbf{ab}$ e se, ad esempio, $\mathbf{p}$ non contiene $\mathbf{b}$, allora deve esistere $b \in \mathbf{b}$ tale che $b \notin \mathbf{p}$. Ma allora per ogni $a \in \mathbf{a}$, si ha $\mathbf{ab} \in \mathbf{p}$ e di conseguenza $a \in \mathbf{p}$ poichè $\mathbf{p}$ è primo;
- $V(\mathbf{a}) \cup V(\mathbf{b}) \subseteq V(\mathbf{ab})$: questo è banale in quanto se $\mathbf{p} \supseteq \mathbf{a}$ oppure $\mathbf{p} \supseteq \mathbf{b}$ allora necessariamente $\mathbf{p} \supseteq \mathbf{ab}$;

(2) $\mathbf{p}$ contiene $\sum \mathbf{a}_i$ se e solo se contiene ciascuno degli $\mathbf{a}_i$ semplicemente perchè $\sum \mathbf{a}_i$ è il più piccolo ideale contenente gli $\mathbf{a}_i$;

(3) deriva dal fatto che il radicale di $\mathbf{a}$ è l'intersezione di tutti gli ideali primi contenenti $\mathbf{a}$.

□

Questo risultato, insieme al fatto che $V(\emptyset) = Spec(A)$ e $V(A) = \emptyset$, mostra che i sottoinsiemi di $Spec(A)$ del tipo $V(\mathbf{a})$ soddisfano le proprietà dei chiusi di una topologia. Pertanto abbiamo mutito $Spec(A)$ di una topologia in cui i sottoinsiemi chiusi sono della forma $V(\mathbf{a})$, detta **Topologia di Zariski**.

Osservazione 10. $Spec(A)$ con la Topologia di Zariski non soddisfa l'assioma di separazione **T1**, cioè per ogni coppia di punti distinti x e y non sempre esiste un aperto di $Spec(A)$ che contiene x e non y o che contiene y e non x. Questo equivale a dire che non tutti i punti di $Spec(A)$ sono chiusi. Infatti, in generale, preso $T \subseteq Spec(A)$ la sua chiusura è data dall'intersezione di tutti i sottoinsiemi chiusi di $Spec(A)$ che contengono T; in particolare

$$\overline{T} = \bigcap_{V(\mathbf{a}) \supseteq T} V(\mathbf{a}) = V(\sum_{V(\mathbf{a}) \supseteq T} \mathbf{a}).$$

Tuttavia dire che $T \subseteq V(\mathbf{a})$ equivale a dire che ogni ideale primo $\mathbf{p} \in T$ contiene $\mathbf{a}$, quindi $\mathbf{a} \subseteq \bigcap_{\mathbf{p} \in T} \mathbf{p}$. Pertanto si può riscrivere

$$\overline{T} = V(\bigcap_{\mathbf{p} \in T} \mathbf{p})$$

Allora se $T = \{\mathbf{p}\}$ (T è un punto di $Spec(A)$), si ha $\overline{T} = V(\mathbf{p})$. Da questo possiamo dedurre che un punto $\mathbf{p} \in Spec(A)$ è chiuso se e solo se $\mathbf{p}$ è un ideale massimale.

Esempio 2.2. Consideriamo, ad esempio, l'anello delle serie di potenze formali in un'indeterminata, ossia $A = K[[X]]$. In questo caso $Spec(A)$ possiede solo due punti: uno corrispondente all'ideale (0) e l'altro corrispondente all'ideale (X). Pertanto si vede esplicitamente che $Spec(A)$ non soddisfa l'assioma di separazione $T1$ in quanto ogni intorno di (X) contiene anche (0) e viceversa.

Adesso, quello che si è interessati a fare è costruire un fascio di anelli $\mathcal{O}_X$ sullo spazio topologico $X = Spec(A)$. In particolare, per ogni $\mathbf{p} \in X$ (cioè per ogni ideale primo $\mathbf{p} \subseteq A$) consideriamo l'anello locale $A_{\mathbf{p}}$, localizzazione di A in $\mathbf{p}$. Per ogni sottoinsieme aperto $U \subseteq Spec(A)$, definiamo $\mathcal{O}_X(U)$ come l'insieme delle funzioni del tipo

$$s : U \to \bigcup_{\mathbf{p} \in U} A_{\mathbf{p}}$$

tali che $s(\mathbf{p}) \in A_{\mathbf{p}}$ per ogni $\mathbf{p} \in U$. Richiediamo inoltre che s sia localmente un quoziente di elementi di A, cioè per ogni $\mathbf{p} \in U$ deve estistere un intorno aperto $V \subseteq U$ di $\mathbf{p}$ e due elementi $a, b \in A$ tali che per ogni $\mathbf{q} \in V$ si abbia

$b \notin \mathbf{q}$ e $s(\mathbf{q}) = \frac{a}{b}$ in $A_{\mathbf{q}}$. In questo modo $\mathcal{O}_X$ è un fascio di anelli sullo spazio $X = Spec(A)$ e inoltre per ogni punto $\mathbf{p} \in X$ la spiga $\mathcal{O}_{X,\mathbf{p}}$ è identificata con l'anello locale $A_{\mathbf{p}}$. Pertanto la coppia $(X, \mathcal{O}_X)$ assume la struttura di spazio localmente anellato.

Osservazione 11. Si noti che questa costruzione è in perfetta analogia con la definizione di funzione regolare su una varietà affine, di fatti gli elementi di $\mathcal{O}_X(U)$ vanno intuitivamente pensati come delle funzioni regolari sullo spazio $X = Spec(A)$. Inoltre la condizione $b \notin \mathbf{q}$ fa si che, nell'espressione locale di s come rapporto di due elementi di A, il denominatore sia diverso da zero.

Sia ora $f \in A$ e consideriamo il sottoinsieme aperto di $Spec(A)$ definito da $D(f) = V((f))^C$ (in sostanza $D(f)$ è l'insieme degli ideali primi che non contengono f).

Proposizione 2.3.2. *Gli aperti del tipo $D(f)$ formano una base di aperti per la topologia di Zariski su $Spec(A)$.*

Dimostrazione. Bisogna provare che ogni aperto $U \subseteq Spec(A)$ è unione di aperti del tipo $D(f)$. Passando ai complementari, è sufficiente dimostrare che ogni chiuso è intersezione di chiusi del tipo $V((f))$. Per definizione sappiamo che i chiusi di $Spec(A)$ sono tutti della forma $V(\mathbf{a})$, per un qualche ideale $\mathbf{a} \subseteq A$. Allora si verifica facilmente che

$$V(\mathbf{a}) = \bigcap_{f \in \mathbf{a}} V((f))$$

□

Osservazione 12. Valgono inoltre le seguenti proprietà degli aperti $D(f)$:

(1) $D(f) \cap D(g) = D(fg)$

(2) $D(f) = \emptyset \Leftrightarrow f$ *nilpotente*

(3) $D(f) = Spec(A) \Leftrightarrow f$ *invertibile*

(4) $D(f) = D(g) \Leftrightarrow \sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$

Adesso consideriamo $A_f = A\left[f^{-1}\right]$, ossia la localizzazione di A ottenuta invertendo l'elemento f. Allora si ha un omomorfismo di anelli $A \to A_f$

che, identificando gli ideali primi di A_f con gli ideali primi di A che non contengono f, ci permette di scrivere

$$D(f) = Spec(A_f).$$

Pertanto vale la seguente:

Proposizione 2.3.3. *Sia* $\{f_\alpha \,|\, \alpha \in S\}$ *un insieme di elementi di* A*. Allora*

$$Spec(A) = \bigcup_{\alpha \in S} Spec(A_{f_\alpha})$$

se e solo se $1 \in (\ldots, f_\alpha, \ldots)$ *dove* $(\ldots, f_\alpha, \ldots)$ *è l'ideale generato dagli elementi* f_α*.*

Dimostrazione. $Spec(A)$ è l'unione degli $Spec(A_{f_\alpha})$ se e solo se ogni punto $p \in Spec(A)$ non contiene qualche elemento del tipo f_α. Ciò significa che nessun ideale primo di A contiene l'ideale $(\ldots, f_\alpha, \ldots)$ e, poichè ogni ideale non banale è contenuto in un ideale massimale (conseguenza del lemma di Zorn), questo accade se e solo se $1 \in (\ldots, f_\alpha, \ldots)$.
Si noti inoltre che se $1 \in (\ldots, f_\alpha, \ldots)$ allora $\exists\, f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n} \in \{f_\alpha \,|\, \alpha \in S\}$ e $\exists\, g_1, \ldots, g_n \in A$ tali che

$$1 = \sum_{i=1}^{n} f_{\alpha_i} g_i$$

□

Adesso mostriamo un importante risultato di topologia valido per lo spettro primo di un qualsiasi anello (commutativo con unità).

Proposizione 2.3.4. $Spec(A)$ *è quasi compatto.*

Dimostrazione. È sufficiente mostrare che da ogni ricoprimento aperto di $Spec(A)$ è possibile estrarre un sottoricoprimento finito. Grazie alla proposizione precedente, questo segue dal fatto che se $1 \in (\ldots, f_\alpha, \ldots)$ allora in particolare $\exists\, f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n} \in \{f_\alpha \,|\, \alpha \in S\}$ tali che $1 \in (f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n})$ e in particolare si ha

$$Spec(A) = \bigcup_{i=1}^{n} Spec(A_{f_{\alpha_i}})$$

. □

Possiamo adesso enunciare due risultati importanti:

Proposizione 2.3.5. *Sia A un anello (commutativo con unità) e sia $X = Spec(A)$ il suo spettro, munito del fascio di anelli $\mathcal{O}_X$. Allora:*

- *per ogni $\boldsymbol{p} \in Spec(A)$ la spiga $\mathcal{O}_{X,\boldsymbol{p}}$ è isomorfa all'anello locale $A_{\boldsymbol{p}}$;*
- *per ogni $f \in A$ l'anello $\mathcal{O}_X(D(f))$ è isomorfo alla localizzazione*

$$A_f = \{a/f^n \, | a \in A, n \geq 0\}$$

- *esiste un isomorfismo naturale $A \cong \mathcal{O}_X(Spec(A))$.*

Proposizione 2.3.6. *Per ogni anello A (commutativo con unità), la coppia $(Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)})$ è uno spazio localmente anellato; in particolare:*

- *un omomorfismo di anelli $\phi : A \to B$ induce un morfismo di spazi localmente anellati*

$$(f, f^*) : (Spec(B), \mathcal{O}_{Spec(B)}) \to (Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)});$$

- *dati due anelli A e B, ogni morfismo di spazi localmente anellati è indotto da un omomorfismo di anelli $\phi : A \to B$.*

Siamo ora in grado di dare la definizione di schema, dando prima, però, la definizione di schema affine.

Definizione 2.10. Uno **schema affine** è uno spazio localmente anellato $(X, \mathcal{O}_X)$ isomorfo, come spazio localmente anellato, allo spettro di un anello.

Definizione 2.11. Uno **schema** è uno spazio localmente anellato $(X, \mathcal{O}_X)$ in cui ogni punto $P \in X$ possiede un intorno aperto $U \subseteq X$ tale che lo spazio topologico U dotato del fascio di anelli $\mathcal{O}_{X|U}$ sia uno schema affine.

Capitolo 3

Caratterizzazioni degli Schemi

3.1 I punti di uno schema

Nel capitolo precedente si è visto che i punti dello spettro di un anello non sono tutti uguali. In particolare abbiamo provato che un punto $\mathbf{p} \in Spec(A)$ è un punto chiuso se e solo se $\mathbf{p} \subseteq A$ è un ideale massimale. Oltre ai punti chiusi, però, esiste un'altra tipologia di punti, detti punti generici. Diamone la definizione:

Definizione 3.1. Sia Z un sottoinsieme chiuso e irriducibile di $Spec(A)$. Diremo che un punto $x \in Z$ è un **punto generico** di Z se $\overline{\{x\}} = Z$. In modo equivalente, un punto $x \in Z$ è un punto generico se ogni sottoinsieme aperto $Z_0 \subseteq Z$ contiene x.

Proposizione 3.1.1. *Sia x un punto di $Spec(A)$. Allora la chiusura di x è irriducibile e $x \in \overline{\{x\}}$ è un punto generico. Viceversa, ad ogni sottoinsieme chiuso e irriducibile $Z \subseteq Spec(A)$ corrisponde un insieme del tipo $V(\boldsymbol{p})$ per un qualche ideale primo $\mathbf{p} \subseteq A$ e in tal caso $\boldsymbol{p}$ è l'unico punto generico di Z.*

Dimostrazione. Sia $Z = \overline{\{x\}}$. Per assurdo supponiamo che Z non sia irriducibile e che quindi si possa scrivere come $Z = W_1 \cup W_2$ con W_1, W_2 sottoinsiemi propri, irriducibili e chiusi in Z. Allora $x \in W_1$ oppure $x \in W_2$. Tuttavia, in entrambi i casi W_1 (o W_2) è un sottoinsieme chiuso e irriducibile contenuto nella chiusura di x. Ma, essendo la chiusura di x il più piccolo sottoinsieme chiuso contenente x, dovrà risultare necessariamente $Z = W_1$

oppure $Z = W_2$ che è assurdo. Questo implica che Z è irriducibile.
Viceversa, supponiamo $V(\mathbf{a})$ sia irriducibile. Grazie all'uguaglianza $V(\mathbf{a}) = V(\sqrt{\mathbf{a}})$, possiamo assumere $\mathbf{a} = \sqrt{\mathbf{a}}$, cioè possiamo supporre che $\mathbf{a}$ sia un ideale radicale. Dopodichè richiediamo che $\mathbf{a}$ sia anche primo. Di fatti, se $\mathbf{a}$ non fosse primo, $\exists f, g \in A$ tali che $f \cdot g \in \mathbf{a}$ con $f, g \notin \mathbf{a}$. Perciò potremmo considerare $\mathbf{b} = \mathbf{a} + (f)$ e $\mathbf{c} = \mathbf{a} + (g)$. Allora $\mathbf{a} = \mathbf{b} \cap \mathbf{c}$. Infatti se prendiamo $h = \alpha \cdot f + a_1 = \beta \cdot g + a_2 \in \mathbf{b} \cap \mathbf{c}$ con $a_1, a_2 \in \mathbf{a}$ e $\alpha, \beta \in A$ si ha:

$$h^2 = \alpha\beta \cdot f \cdot g + a_1(\beta \cdot g + a_2) + a_2(\alpha \cdot f) \in \mathbf{a}$$

quindi $h \in \mathbf{a}$. Di conseguenza si avrebbe:

$$V(\mathbf{a}) = V(\mathbf{b}) \cup V(\mathbf{c})$$

.

D'altra parte, poiché $\mathbf{a}$ é radicale, si ha che $\mathbf{a}$ é l'intersezione di tutti gli ideali primi $\mathbf{p}$ che contengono $\mathbf{a}$. In particolare esiste un ideale primo $\mathbf{p}$ tale che $\mathbf{p} \supseteq \mathbf{a}$ ma $f \notin \mathbf{p}$. Allora $\mathbf{p} \in V(\mathbf{a}) - V(\mathbf{b})$, e ciò vuol dire che $V(\mathbf{a}) \supset V(\mathbf{b})$. Per lo stesso discorso, $V(\mathbf{a}) \supset V(\mathbf{b})$. Allora $V(\mathbf{b}), V(\mathbf{c})$ sono due sottoinsiemi propri e chiusi di $V(\mathbf{a})$, e ciò mostra che $V(\mathbf{a})$ non è irriducibile, contraddicendo l'ipotesi. Quindi affinchè $V(\mathbf{a})$ sia irriducile è necessario che $\mathbf{a}$ sia primo. Ma allora, poichè $V(\mathbf{a})$ è la chiusura del punto $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}$ è un punto generico di $V(\mathbf{a})$.
Resta da provare l'unicità: se $\mathbf{p}'$ è un altro punto generico di $V(\mathbf{a})$, allora $\mathbf{p}' \in V(\mathbf{a})$ e questo implica $\mathbf{p}' \supseteq \mathbf{a}$. D'altro canto, $\mathbf{a} \in V(\mathbf{p}') = \overline{\{\mathbf{p}'\}}$, allora $\mathbf{a} \supseteq \mathbf{p}'$. Pertanto si trova che $\mathbf{a} = \mathbf{p}'$, e questo prova che il punto generico è unico. □

Come conseguenza di questa proposizione, si ha una corrispondenza iniettiva tra i punti generici di $Spec(A)$ e i suoi sottoinsieme chiusi e irriducibili. Vediamo ora alcuni esempi:

Esempio 3.1. Sia K un campo qualsiasi. Lo spettro $Spec(K)$ é uno schema affine il cui spazio topologico sottostante consiste di un solo punto, corrispondente all'ideale (0). Il suo fascio strutturale, invece, viene identificato col campo K in quanto le uniche funzioni definite su un solo punto sono le costanti.

Esempio 3.2. Sia ora l'anello degli interi $\mathbb{Z}$ e consideriamo $Spec(\mathbb{Z})$. Gli unici ideali primi di $\mathbb{Z}$ sono (0) e (p) con p numero primo, quindi si ha

$$Spec(Z) = \{(p) \,|\, p = 0 \text{ oppure } p \text{ primo}\}$$

I punti corrispondenti a (p) con p primo sono punti chiusi il cui campo resisuo è $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mentre il punto (0) è l'unico punto generico la cui chiusura è tutto $Spec(\mathbb{Z})$ e il suo campo residuo è $\mathbb{Q}$.
Ogni intero $n \in \mathbb{Z}$ può essere pensato come una "funzione" su $Spec(\mathbb{Z})$ il cui valore nel punto (p) non è altro che la classe di congruenza modulo p di n, in particolare

$$[n]_p \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = k(p)$$

Invece il valore di n nel punto generico (0) è semplicemente $n \in \mathbb{Q}$.

Osservazione 13. L'esempio appena visto si generalizza allo spettro di un qualsiasi **dominio di Dedekind** D (anello Noetheriano in cui tutti gli ideali primi non nulli sono anche ideali massimali). In questo caso $Spec(R)$ è un insieme di punti chiusi più un punto generico corrispondente all'ideale (0).

Esempio 3.3. Sia K un campo qualsiasi e consideriamo lo spettro dell'anello dei polinomi in un'indeterminata a coefficienti nel campo K, ossia $X = Spec(K[x])$. Gli ideali primi di $K[x]$ sono (0) e $(f(x))$ con $f(x)$ polinomio irriducibile, pertanto i punti di X del tipo $(f(x))$ sono punti chiusi mentre il punto (0) è un punto generico la cui chiusura è tutto $Spec(K[x])$. In particolare se $p = (f(x)) \in X$, l'anello locale di X in p è $\mathcal{O}_{X,p} = K[x]_{(f)}$, pertanto il suo campo residuo è dato da

$$K(p) = K[x]/fK[x]_{(f)} \cong K[x]/(f)$$

che rappresenta un'estensione finita del campo K di grado pari al grado del polinomo f.
Se $p = (0)$, allora $\mathcal{O}_{X,p} = K[x]_{(0)}$ e il campo residuo di X nel punto p non è altro che il campo delle frazioni di $K[x]$, ovvere $K(p) = K(x)$.
Analizziamo il caso in cui K sia un campo algebricamente chiuso: i polinomi irriducibili di $K[x]$ sono i polinomi lineari del tipo $f(x) = x - a$ con $a \in K$, pertanto i punti chiusi di $Spec(K[x])$ sono gli ideali $(x - a)$ al variare di $a \in K$ e possono essere identificati con il punto $x = a$ della retta affine $\mathbb{A}^1_K$.

Inoltre il campo residuo di punti di questo tipo coincide con K.
Quindi si deduce che, ad eccezione del punto generico (0), lo schema affine $Spec(K[x])$ può essere identificato con la retta affine $\mathbb{A}^1_K$ tramite la corrispondenza che ad un punto $P \in \mathbb{A}^1_K$ di coordinata $a \in K$ associa l'ideale primo $(x-a) \in Spec(K[x])$.
Adesso analizziamo il caso in cui K sia un campo non algebricamente chiuso, ad esempio consideriamo $Spec(\mathbb{R}[x])$. Essendo $\mathbb{R}[x]$ un PID (dominio a ideali principali), ogni ideale primo è del tipo $p = (f(x))$ con $f(x)$ polinomio irriducibile oppure $p = (0)$. I polinomi irriducibili di $\mathbb{R}[x]$ sono essenzialmente di due tipi:

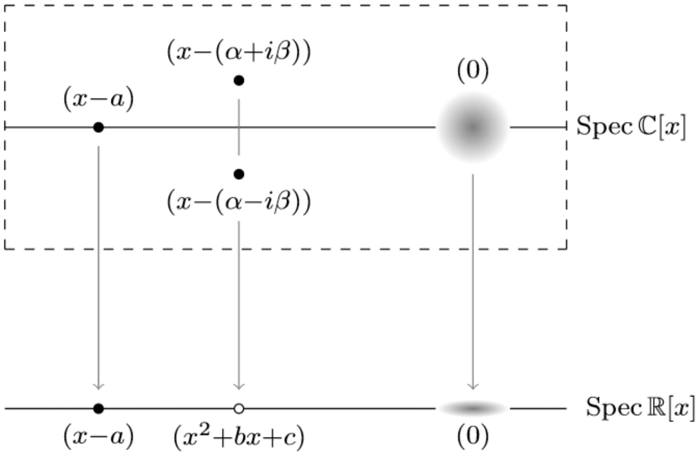
(1) polinomi lineali del tipo $f(x) = (x-a)$ con $a \in \mathbb{R}$;

(2) polinomi quadratici con discriminante negativo, ossia $f(x) = x^2+bx+c$ con $b^2 - 4ac \leq 0$.

Passando dal campo dei numeri reali a quello dei numeri complessi, il polinomio $x^2 + bx + c$ si scompone nel modo seguente:

$$x^2 + bx + c = (x - (\alpha + i\beta))(x - (\alpha - i\beta)),$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\beta \neq 0$.
Si noti che l'immersione $\mathbb{R}[x] \hookrightarrow \mathbb{C}[x]$ (che è un omomorfismo di anelli) determina un morfismo di schemi $Spec(\mathbb{C}[x]) \to Spec(\mathbb{R}[x])$ che manda il punto generico di $Spec(\mathbb{C}[x])$ nel punto generico di $Spec(\mathbb{R}[x])$, un punto del tipo $(x-a) \in Spec(\mathbb{C}[x])$ con $a \in \mathbb{R}$ nell'analogo $(x-a) \in Spec(\mathbb{R}[x])$ e infine i due punti $(x - (\alpha + i\beta))$ e $(x - (\alpha - i\beta))$ nel punto $(x^2 + bx + c)$.
In definitiva, come si può osservare in figura, lo schema affine $Spec(\mathbb{R}[x])$ contiene i punti $(x-a)$ con $a \in \mathbb{R}$ corrispondenti ai punti di coordinata a della retta affine $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ e dei nuovi punti dati da ideali del tipo $(x^2 + bx + c)$ e corrispondenti a coppie di punti con coordinate complesse coniugate.



Si noti che il campo residuo dei punti del tipo $(x-a)$ con $a \in \mathbb{R}$ è $\mathbb{R}$, mentre il campo residuo dei punti del tipo (x^2+bx+c) è $\mathbb{C}$; infine il campo residuo del punto generico (0) è $\mathbb{R}(x)$, ossia il campo delle frazioni di $\mathbb{R}[x]$.

Definizione 3.2. Sia R un anello commutativo con unità. Uno **schema X su R** è un morfismo $\pi : X \to Spec(R)$.

Osservazione 14. Chiedere che X sia uno schema su R equivale a dare all'anello $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ una struttura di R-algebra e in questo modo le mappe di restrizione diventano omomorfismi di R-algebre. Ad esempio se $R = K$ è un campo, avremo una mappa iniettiva da K in $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Definizione 3.3. Siano X e Y schemi su R. Un **R-morfismo** è un morfismo di schemi $f : X \to Y$ tale che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi_X"'] & Y \arrow[d, "\pi_Y"] \\ & Spec(R) \end{tikzcd}$$

Alternativamente, questo significa che le mappe f_V^* sono omomorfismi di R-algebre per ogni $V \subseteq Y$ aperto.

Definizione 3.4. Uno schema X su R si dice **di tipo finito su R** se X è quasi compatto e se, per ogni sottoinsieme aperto $U \subseteq X$, $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ è una R-algebra finitamente generata.

Proposizione 3.1.2. *Sia X uno schema su R. Se esiste un ricoprimento aperto finito $\{U_i\}_{1\leq i\leq n}$ di X tale che $R_i = \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ è una R-algebra finitamente generata allora X è uno schema di tipo finito su R.*

Osservazione 15. Non vale il viceversa: se X è uno schema di tipo finito su R non è detto che $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ sia una R-algebra finitamente generata.

Definizione 3.5. Uno schema X si dice **ridotto** se il fascio di anelli $\mathcal{O}_X$ non possiede sezioni nilpotenti, cioè se l'anello $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ non contiene elementi nilpotenti per ogni sottoinsieme aperto $U \subseteq X$.

Osservazione 16. Si può verificare che questo vale se e solo se la spiga $\mathcal{O}_{X,P}$ non possiede elementi nilpotenti per ogni $P \in X$.

Definizione 3.6. Uno schema X si dice **irriducibile** se l'anello $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ ha un unico ideale primo minimale (equivalentemente se il suo nilradicale è primo) per ogni sottoinsieme aperto $U \subseteq X$.

Teorema 3.1.3. *Sia K un campo algebricamente chiuso. Allora vale la seguente equivalenza di categorie fra:*

- *la categoria degli schemi ridotti, irriducibili e di tipo finito su K con i K-morfismi,*
- *la categoria delle varietá affini su K e con i morfismi di varietá.*

Grazie a questo teorema possiamo identificare una varietà affine su K con uno schema ridotto, irriducibile e di tipo finito su K.

3.2 Varietà su un campo non algebricamente chiuso

3.2.1 Prodotto fibrato di schemi

Definizione 3.7. Dati $f : X \to S$ e $g : Y \to S$ due morfismi in una categoria $\mathcal{C}$, si definisce **prodotto fibrato** $X \times_S Y$ come l'unico oggetto della categoria $\mathcal{C}$ tale che:

- abbia due morfismi proiezione in X e Y che commutino con f e g;
- per ogni oggetto T con la proprietà sopra, esiste un morfismo $\theta : T \to X \times_S Y$ che commuti con le proiezioni di T e di $X \times_S Y$.

Per passare al prodotto fibrato di schemi, lavoriamo innanzitutto con gli anelli. Date A,B R-algebre sappiamo che $A \otimes_R B$ fa commutare il digramma sotto con le inclusione di A e B nel prodotto tensore. Questo rende il prodotto tensore una R-algebra in maniera unica, e se prendiamo un'altra R-algebra C, con due omomorfismi di R-algebre $A \to C$ e $B \to C$, allora per la proprietà universale del prodotto tensore esiste una mappa $A \otimes_R B \to C$ tale che il seguente diagramma sia commutativo:

$$
\begin{tikzcd}
R \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
B \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & A \otimes_R B \arrow[dr, dashed] & \\
& & C
\end{tikzcd}
$$

In termini di schemi, tutto il diagramma viene ribaltato e otteniamo il seguente:

$$
\begin{tikzcd}
Spec(C) \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& Spec(A \otimes_R B) \arrow[r] \arrow[d] & Spec(A) \arrow[d] \\
& Spec(B) \arrow[r] & Spec(R)
\end{tikzcd}
$$

Da questo si deduce che, nella categoria degli schemi affini, il prodotto fibrato è definito come segue:

$$Spec(A) \times_{Spec(R)} Spec(B) = Spec(A \otimes_R B).$$

3.2.2 La mappa di coniugazione

Avendo definito il prodotto fibrato di schemi, possiamo adesso analizzare l'argomento principale di questa sezione.

Sia K un campo algebricamente chiuso e X una sottovarietà chiusa di $\mathbb{A}^n_K$ definita da equazioni:

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \ con \ 1 \leq i \leq n$$

Consideriamo un sottocampo K_0 di K e poniamo

$$A = (f_1, \dots, f_n) = I(X)$$

Allora, se i coefficienti dei polinomi f_i appartengono a K_0, si ha che:

- $A = K \cdot A_0$ dove $A_0 = A \cap K_0[x_1, \dots, x_n]$,
- se $R_0 = K_0[x_1, \dots, x_n]/A_0$, allora l'anello delle coordinate affini $R = K[x_1, \dots, x_n]/A$ di X si puó scrivere nella forma $R = R_0 \otimes_{K_0} K$.

Pertanto esiste uno schema affine $X_0 = Spec(R_0)$ di tipo finito su K_0 tale che

$$X = X_0 \times_{Spec(K_0)} Spec(K).$$

Viceversa, supponiamo che X sia una varietà affine su K e che X_0 sia uno schema di tipo finito su K_0 tale che $X = X_0 \times_{Spec(K_0)} Spec(K)$. Consideriamo $R_0 = \Gamma(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$ e scriviamo R_0 come quoziente di anelli di polinomi, ossia $R_0 = K_0[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_m)$. Da questo segue che, se $R = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ allora $R \cong K[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_m)$ e pertanto X è isomorfa alla sottovarietà affine chiusa di $\mathbb{A}^n_K$ definita da $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ per $1 \leq i \leq m$.
Analogamente si procede nel caso in cui X_0 sia uno schema su K_0 e $X = X_0 \times_{Spec(K_0)} Spec(K)$. Infatti se X_0 è unione di schemi affini del tipo $(U_0)_i = Spec(R_i)$ allora anche X è dato dall'unione degli schemi affini

$$U_i = Spec(R_i \otimes_{K_0} K)$$

Definizione 3.8. Sia σ un automorfismo del campo K su K_0. Allora la **mappa di coniugazione** $\sigma_X : X \to X$ è la mappa sottostante del seguente morfismo

$$\begin{tikzcd}
X_0 \times_{Spec(K_0)} Spec(K) \arrow[r, "1_{X_0} \times \phi"] \arrow[d] & X_0 \times_{Spec(K_0)} Spec(K) \arrow[d] \\
X & X
\end{tikzcd}$$

dove $\phi : Spec(K) \to Spec(K)$ é definito prendendo σ^{-1} come omomorfismo $\phi^* : K \to K$.

Osservazione 17. Si può verificare che $(\sigma \circ \tau)_X = \sigma_X \circ \tau_X$ e in questo modo il gruppo di Galois $Gal(K/K_0)$ agisce sullo spazio topologico X. In particolare le mappe di coniugazione σ_X sono omeomorfismi su X.

Vediamo adesso come agisce la mappa di coniugazione. Assumiamo che:

- $K_0 = Spec(K_0[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_m))$
- $K = Spec(K[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_m))$

Proposizione 3.2.1. *Sia $x \in X$ un punto chiuso definito dall'ideale massimale $(x_1 - \alpha_1, \ldots, x_n - \alpha_n)$ con $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ e $f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, m$. Allora si ha che $\sigma_X(x)$ è il punto chiuso definito da $(x_1 - \sigma(\alpha_1), \ldots, x_n - \sigma(\alpha_n))$.*

Dimostrazione. Per definizione si ha che $\sigma_X(x) = (1_{X_0} \times \phi)(x)$ e l'omomorfismo associato $(1_{X_0} \times \phi)^*$ manda $g(x_1, \ldots, x_n)$ in $g^{\sigma^{-1}}(x_1, \ldots, x_n)$, che rappresenta il polinomio g ai cui coefficienti viene applicato σ^{-1}. Sappiamo che $x = (x_1 - \alpha_1, \ldots, x_n - \alpha_n)$, allora si ha che

$$\sigma_X(x) = ((1_{X_0} \times \phi)^*)^{-1}(x_1 - \alpha_1, \ldots, x_n - \alpha_n).$$

Dal fatto che $(1_{X_0} \times \phi)(x_i - \sigma(\alpha_i)) = (x_i - \alpha_i)$, segue che $\sigma_X(x) = (x_1 - \sigma(\alpha_1), \ldots, x_n - \sigma(\alpha_n))$. □

Allora vale il seguente:

Teorema 3.2.2. *Sia X_0 uno schema su K_0 e sia $X = X_0 \times_{Spec(K_0)} Spec(K)$; sia inoltre $p : X \to X_0$ la proiezione di X su X_0. Assumiamo che K sia una chiusura algebrica di K_0, ossia $\overline{K_0} = K$. Allora:*

(1) la proiezione p è suriettiva ed è sia aperta che chiusa;

(2) per ogni $x, y \in X$, $p(x) = p(y)$ se e solo se $x = \sigma_X(y)$ per un qualche $\sigma \in Gal(K/K_0)$. In altre parole, per ogni $x \in X_0$, $p^{-1}(x)$ è un'orbita dell'azione di $Gal(K/K_0)$ su X.

Corollario 3.2.3. *X_0 come spazio topologico è il quoziente dato dall'azione del gruppo $Gal(K/K_0)$ sullo spazio topologico X.*

Definizione 3.9. Definiamo **K_0-topologia** su X, la topologia i cui i sottoinsieme aperti sono della forma $p^{-1}(U)$ con $U \subseteq X_0$ sottoinsieme aperto.

Teorema 3.2.4. *Sia X_0 uno schema su K_0 e sia $X = X_0 \times_{Spec(K_0)} Spec(K)$; sia inoltre $p : X \to X_0$ la proiezione di X su X_0. Assumiamo che X_0 sia di tipo finito su K_0, allora si ha:*

(1) per ogni $U \subseteq X_0$ sottoinsieme aperto, la mappa

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_{X_0}) \otimes_{K_0} K \to \Gamma(p^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$$

è biettiva. Inoltre le funzioni $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{X_0})$ soddisfano la seguente relazione

$$f(\sigma_X(x)) = \sigma(f(x))$$

per ogni punto chiuso $x \in p^{-1}(U)$ e per ogni automorfismo $\sigma \in Gal(K/K_0)$;

(2) se K_0 è un campo perfetto e X è uno schema ridotto, allora $\Gamma(U, \mathcal{O}_{X_0})$ è esattamente il sottoanello degli elementi $f \in \Gamma(p^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$ che soddisfano la relazione $f(\sigma_X(x)) = \sigma(f(x))$.

Osservazione 18. Da questo teorema segue che X_0, come schema su K_0, può essere ricostruito a partire da tre dati:

- lo schema X su K,
- l'azione del gruppo $Gal(K/K_0)$ su X attraverso la mappa di coniugazione,
- il sottofascio $\mathcal{O}_{X_0}$ di $\mathcal{O}_X$ definito solo sui sottoinsiemi aperti della K_0-topologia su X, detto **fascio delle K_0-funzioni razionali**.

Pertanto scrivere X come un prodotto fibrato del tipo $X_0 \times_{Spec(K_0)} Spec(K)$ equivale a dare a X una K_0-struttura data dall'azione delle mappe di coniugazione σ_X e dal fascio delle K_0-funzioni razionali $\mathcal{O}_{X_0}$.

Proposizione 3.2.5. *Sia $y \in X_0$ un punto chiuso. Allora il campo residuo $K_0(y)$ è un'estensione algebrica finita di K_0. Inoltre esiste una biezione naturale tra l'insieme dei punti $x \in p^{-1}(y)$ e l'insieme dei K_0-isomorfismi da $K_0(y)$ in K.*

Definizione 3.10. Un punto chiuso $y \in X_0$ si dice **razionale su** K_0 se $K_0(y) \cong K_0$.

Proposizione 3.2.6. *Se K_0 è un campo perfetto e $x \in X$, allora $p(x)$ è razionale su K_0 se e solo se $\sigma_X(x) = x$ per ogni mappa di coniugazione σ_X.*

3.3 Il funtore dei punti di uno schema

Da quanto detto nelle sezioni precedenti, si evince che in uno schema ogni punto non è simile ad un altro: si hanno punti chiusi così come si hanno punti non-chiusi e, a meno che non si lavori su un campo algebricamente chiuso, i punti chiusi si distinguono l'un l'altro dall'avere differenti campi residui: ad esempio, se consideriamo $\mathbb{Z}$, i punti di $Spec(\mathbb{Z})$ si differenziano nell'avere campi residui di caratteristiche diverse. Tuttavia queste differenze non emergono se ci limitiamo a guardare solo l'insieme dei punti sottostanti lo schema. Esiste un modo alternativo di vedere gli schemi attraverso uno strumento chiamato **il funtore dei punti**. Per introdurre il concetto di funtore dei punti iniziamo col dire che in molte categorie, i cui oggetti sono insiemi muniti di una particolare struttura, è possibile identificare l'insieme sostegno $|X|$ di un oggetto X con l'insieme dei morfismi da un oggetto prestabilito ad X. Vediamo alcuni esempi:

(1) Sia $\mathcal{C}$ la categoria della varietà differenziabili e sia z la varietà costituita da un unico punto. Allora per ogni varietà differenziabile $X \in Ob(\mathcal{C})$ si ha:

$$Mor(z, X) \cong |X|;$$

(2) Sia $\mathcal{C}$ la categoria dei gruppi, allora per ogni gruppo $G \in Ob(\mathcal{C})$ si ha:

$$Mor(\mathbb{Z}, G) \cong |G|;$$

(3) Sia $\mathcal{C}$ la categoria degli anelli commutativi con unità, allora per ogni anello $A \in Ob(\mathcal{C})$ si ha:

$$Mor(\mathbb{Z}[x], A) \cong |A|.$$

In generale, data una categoria $\mathcal{C}$ e un oggetto $Z \in Ob(\mathcal{C})$, la mappa

$$X \longmapsto Mor_{\mathcal{C}}(Z, X)$$

definisce un funtore ϕ tra la categoria $\mathcal{C}$ e quella degli insiemi. Affinchè questo sia ben definito è necessario che, per ogni $X_1, X_2 \in Ob(\mathcal{C})$, un morfismo

$$f : X_1 \to X_2$$

venga determinato dall'applicazione di insiemi

$$\bar{f} : Mor_{\mathcal{C}}(Z, X_1) \to Mor_{\mathcal{C}}(Z, X_2)$$

e questo non è sempre possibile in quanto non è sempre possibile scegliere l'oggetto Z tale che questa condizione sia soddisfatta. In particolare, nella categoria degli schemi non esiste alcun oggetto Z che svolga questo compito. Per aggirare il problema, l'idea di Grothendieck, è stata quella di associare ad X non più un solo $Mor_{\mathcal{C}}(Z, X)$, bensì:

$$X \longmapsto \bigcup_{Z \in Ob(\mathcal{C})} Mor_{\mathcal{C}}(Z, X)$$

In questo modo si ottiene un funtore ben definito dalla categoria $\mathcal{C}$ alla categoria degli insiemi. Inoltre per l'insieme $\bigcup_{Z \in Ob(\mathcal{C})} Mor_{\mathcal{C}}(Z, X)$ vale la decomposizione in sottoinsiemi della forma $S_Z = Mor_{\mathcal{C}}(Z, X)$ per ciascuno degli $Z \in Ob(\mathcal{C})$; in particolare presi $Z_1, Z_2 \in Ob(\mathcal{C})$, ogni morfismo $g : Z_1 \to Z_2$ induce una mappa naturale di insiemi $S_{Z_1} \to S_{Z_2}$.

Formalmente, associamo a ciuscun $X \in Ob(\mathcal{C})$ il funtore h_X (funtore controvariante dalla categoria $\mathcal{C}$ alla categoria degli insiemi), il quale agisce come segue:

- $h_X(Z) = Mor_{\mathcal{C}}(Z, X)$ per ogni $Z \in Ob(\mathcal{C})$;
- $h_X(g) = \{mappa\ indotta\ da\ Mor_{\mathcal{C}}(Z_1, X)\ a\ Mor_{\mathcal{C}}(Z_2, X)\}$ per ogni morfismo $g : Z_2 \to Z_1$ in $\mathcal{C}$.

Adesso, a sua volta, il funtore h_X è un oggetto della categoria $Funct(\mathcal{C}, (insiemi))$ (categoria dei funtori da $\mathcal{C}$ alla categoria degli insiemi). È chiaro inoltre che, se $g : X_1 \to X_2$ è un morfismo in $\mathcal{C}$, ad esso è associato un morfismo di funtori $h_g : h_{X_1} \mapsto h_{X_2}$. Pertanto il risultato finale è un unico funtore, ossia

$$h : \mathcal{C} \to Funct(\mathcal{C}, (insiemi))$$

il quale permette di identificare un oggetto X della categoria $\mathcal{C}$ con il funtore h_X.

Considerando la categoria degli schemi su un dato anello S, ossia $\mathcal{C} = (S - Schemi)$, in cui i morfismi sono gli S-morfismi, troviamo il seguente funtore:

$$(S - schemi) \to Funct((S - Schemi), (insiemi))$$

e l'immagine tramite questo funtore di un dato schema X, ossia il funtore h_X, viene detto *funtore dei punti associato allo schema* X.
Ora diamo la seguente:

Definizione 3.11. Dati due schemi X e K, si definisce **K-punto di** X il morfismo $f : K \to X$. Se $K = Spec(R)$, esso viene chiamato R-punto di X. Inoltre l'insieme dei K-punti di X viene denotato con $X(K)$.

Da questa definizione segue che, nell'ambito degli schemi, la parola "punto" assume due diversi significati: in particolare, si possono considerare sia i punti di X in quanto schema, detti **punti schematici**, che l'insieme dei K-punti di X, per ogni schema K. Tuttavia le due nozioni sono completamente differenti: ad esempio se consideriamo $K = Spec(L)$ con L estensione finita di $\mathbb{Q}$, troviamo la seguente mappa:

$$\{K - punti\ di\ X\} \to |X|$$

la quale non è nè iniettiva, nè suriettiva. In particolare, l'immagine dell'insieme dei K-punti è il sottoinsieme dei punti $p \in X$ tali che il loro campo residuo è un sottocampo di L. Un'altra differenza consiste nel fatto che l'insieme dei punti di X è un insieme assoluto, mentre quello dei K-punti è un insieme relativo, ossia dipende da quale schema K scegliamo di considerare e dalla struttura del morfismo $f : K \to X$. Infine, nel caso in cui $K = Spec(R)$, l'insieme degli R-punti di X é costituito dai punti $p \in X$ tali che $k(p) = R$, ossia dai punti razionali su R.
Un cosa molto interessante è che uno schema X puó essere determinato dal funtore dei suoi R-punti; più precisamente se X è uno schema, possiamo considerare il funtore covariante h_X^o dalla categoria degli anelli (commutativi con unità) alla categoria degli insiemi definito nel modo seguente:

$$h_X^o(R) = h_X(Spec(R)) = Mor(Spec(R), X).$$

Proposizione 3.3.1. *Per ogni coppia di schemi* X_1, X_2*, si ha:*

$$Mor(X_1, X_2) \cong Mor(h_{X_1}^o, h_{X_2}^o),$$

pertanto il funtore h^o *è ben definito come funtore dalla categoria degli schemi alla categoria* $Funct((Anelli), (Insiemi))$ *(categoria dei funtori tra la categoria degli anelli e quella degli insiemi).*

Vediamo come un morfismo di funtori $F : h^o_{X_1} \to h^o_{X_2}$ induce un morfismo di schemi $f : X_1 \to X_2$. Consideriamo un ricoprimento aperto $U_i \cong Spec(A_i)$ di X_1 e l'inclusione

$$I_i : Spec(A_i) \cong U_i \to X_1.$$

Allora I_i é un A_i-punto di X_1 e pertanto $F(I_i) = f_i$ é un A_i punto di X_2, in particolare è un morfismo

$$Spec(A_i) \cong U_i \to X_2.$$

Modulo verificare che le f_i coincidono sulle intersezioni $U_i \cap U_j$, si ottiene $f : X_1 \to X_2$ dal seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\subseteq"'] & X_2 \\ X_1 \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Osservazione 19. Siano X e $Y = Spec(R)$ due schemi e consideriamo il caso in cui $R = K$ sia un campo. Vogliamo capire in questo caso cos'è un K-punto su X. $Spec(K)$ è costituito da un solo punto, quindi la mappa $f : Spec(K) \to X$ ha solo un punto $x \in X$ come immagine; inoltre la funzione tra anelli $f^* : \mathcal{O}_{X,x} \to K$ è un omomorfismo di anelli locali quindi fattorizza attraverso $\mathbb{K}(x)$. Viceversa, se abbiamo un punto $x \in X$ e un'inclusione di campi $\mathbb{K}(x) \subset K$, allora otteniamo un K-punto con immagine X a patto di definire l'omomorfismo f^* attraverso il seguente diagramma:

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_{X,x} \to \mathbb{K}(x) \hookrightarrow K$$

per ogni $U \subset X$, $x \in U$. Pertanto troviamo la seguente equivalenza:

$$\Big\{K - punti\ di\ X\Big\} \cong \Big\{punti\ di\ X\ con\ le\ inclusioni\ \mathbb{K}(x) \subset K\Big\}$$

Infatti, per ciascun punto $x \in X$, esiste un morfismo canonico

$$i_x : Spec(\mathbb{K}(x)) \to X$$

con immagine x. Se invece consideriamo un sottocampo $K_0 \subset K$ e uno schema X su K_0, un K-punto di X su K_0 corrisponde a un punto $x \in X$ tale che l'inclusione $\mathbb{K}(x) \hookrightarrow K$ ristretta al sottocampo K_0 sia l'identità.
Ad esempio, nel caso in cui $K_0 = K$ sia un campo algebricamente chiuso e X sia uno schema di tipo finito su K, troviamo:

$$\left\{K - punti\ di\ X\ su\ K\right\} \cong \left\{punti\ di\ X\ tali\ che\ \mathbb{K}(x) \cong K\right\}$$

Ma d'altro canto:

$$\left\{punti\ di\ X\ tali\ che\ \mathbb{K}(x) \cong K\right\} = \left\{punti\ chiusi\ di\ X\right\}$$

Pertanto riusciamo ad identificare i K-punti di X su K, che in questo caso sono detti **punti geometrici**, con i punti chiusi di X.

In ultima istanza, quello che si vuole fare è descrivere l'insieme degli R-punti di uno schema X, quando R è un qualche anello locale. In particolare, se $\mathbf{m}$ è l'unico ideale massimale di R, allora $Spec(R)$ ha solo un punto chiuso e ciò implica che, se $f : Spec(R) \to X$ è un morfismo, allora un sottoinsieme aperto di X che contiene $f(\mathbf{m})$, contiene automaticamente l'insieme $Im(f)$. Possiamo quindi dare la seguente:

Proposizione 3.3.2. *Sia $x \in X$. Allora esiste una biezione tra l'insieme degli R-punti di X tali che $f(\mathbf{m}) = x$ e l'insieme degli omomorfismi di anelli locali $g : \mathcal{O}_{X,x} \to R$.*

Dimostrazione. Si noti innanzitutto che $\mathcal{O}_{Spec(R),\mathbf{m}} = R$, quindi da $f : Spec(R) \to X$ si ottiene un omomorfismo di anelli locale $g : \mathcal{O}_{X,x} \to R$. Poichè $x \in X$ allora possiamo supporre che x sia contenuto in uno schema affine, ossia $x \in Spec(A)$ per un qualche anello A. Supponiamo inoltre che il punto x corrisponda all'ideale primo $\mathbf{p} \subseteq A$. Allora si ha che ogni morfismo $f : Spec(R) \to X$ con la proprietà $f(\mathbf{m}) = x$ è determinato da un morfismo di anelli $\phi : A \to R$ tale che $\phi^{-1}(\mathbf{m}) = \mathbf{p}$ il quale a sua volta induce un omomorfismo di anelli locale $g : A_{\mathbf{p}} = \mathcal{O}_{X,x} \to R$ e, dal momento che vale anche il ragionamento opposto, la tesi è provata. $\square$

Bibliografia

[1] Mumford D., The Red Book of Varieties and Schemes, second ex-panded edition, Lecture Notes in Mathematics, Springer, New York, 1999

[2] Eisenbud D., Harris J., The Geometry of Schemes, Springer, New York, 2000

[3] Altman A., Kleiman S., A Term of Commutative Algebra, Worldwide Center of Mathematics, LLC, 2013