Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

SUCCESSIONI DI POLINOMI DI TIPO BINOMIALE E OPERATORI DELTA

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:
Chiar.mo Prof.
MARILENA BARNABEI

Presentata da:
FRANCESCA LARESE FILON

I Sessione
2015-2016

A mia mamma Rosanna …

Introduzione

In matematica prima degli anni 1970, con il termine *calcolo umbrale* si indicavano le sorprendenti somiglianze tra molte identità polinomiali allora prive di collegamenti logici, nonché certe tecniche poco giustificate che potevano essere usate per 'dimostrare' tali identità. Queste tecniche erano state introdotte nel XIX secolo e da taluni sono state chiamate metodo simbolico di Blissard, da altri sono state attribuite a James Joseph Sylvester (che le ha utilizzate ampiamente) e da altri ancora a Edouard Lucas.

Nelgi anni 1930 e 1940 Eric Temple Bell ha cercato di fornire il calcolo umbrale di fondamenti rigorosi, riuscendoci solo in parte.

Negli anni 1970 Gian-Carlo Rota, Steven Roman e altri sono riusciti a sviluppare il calcolo umbrale sulla solida base degli operatori lineari sugli spazi di polinomi.

In questa tesi riportiamo le definizioni ed i risultati principali relativi a quest'ultima impostazione, basata essenzialmente sulla corrispondenza tra le successioni di polinomi di tipo binomiale (particolari basi dello spazio dei polinomi a coefficienti reali) e gli operatori delta, cioè operatori lineari sullo spazio dei polinomi che commutano con gli operatori di traslazione e il cui nucleo è costituito dai polinomi costanti.

Nel capitolo 1 richiamiamo i concetti fondamentali sull'algebra delle serie formali e definiamo l'algebra degli operatori lineari invarianti per traslazione, dimostrando in particolare l'isomorfismo tra queste algebre.

Nel capitolo 2, dopo aver dimostrato l'unicità della successione di base relativa a un operatore delta, ricaviamo come esempio le successioni di base di tre operatori delta, che useremo durante tutto il capitolo: l'operatore derivata, l'operatore di differenza in avanti e l'operatore di differenza all'indietro. Arriviamo quindi a dimostrare un importante risultato, il Primo Teorema di Sviluppo, in cui facciamo vedere come le potenze di un operatore delta siano una base per l'algebra degli operatori invarianti per traslazione. Introducendo poi le successioni di Sheffer, possiamo dimostrare anche il Secondo Teorema di Sviluppo in cui esplicitiamo l'azione di un operatore invariante per traslazione su un polinomio, tramite un operatore delta fissato e una sua successione di Sheffer.

Nell'ultima parte della tesi, presentiamo i formalismi e alcune semplici operazioni del calcolo umbrale, che useremo per determinare le cosiddette *costanti di connessione*, ovvero le costanti che definiscono lo sviluppo di una successione binomiale in funzione di un'altra successione binomiale usata come base dello spazio dei polinomi.

Indice

Capitolo 1

Polinomi e operatori lineari

1.1 Polinomi e serie formali

1.1.1 Algebra dei polinomi e algebra delle serie formali

Definizione 1.1. Un polinomio a coefficienti reali è una successione $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ tale che $\exists n : a_n \neq 0$ e $a_{n'} = 0 \ \forall n' > n$. L'intero n è detto *grado del polinomio* (a_i) e si indica con *deg* (a_i). Per convenzione il grado del polinomio nullo è $-\infty$.

Se si pone $x = (0, 1, 0, ...)$ e $x^n = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ con l'1 in n-esima posizione, possiamo rappresentare i polinomi a coefficienti reali in modo unico:

$$(a_i) = a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n.$$

Indichiamo con $\mathbb{R}[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti reali, che risulta essere un'algebra con le operazioni definite di seguito.
Siano $p(x)$ e $q(x)$ due polinomi a coefficienti reali di grado rispettivamente n e m. Si definisce la loro somma

$$p(x) + q(x) = \sum_{k \geq 0} (p_k + q_k) x^k,$$

il loro prodotto

$$p(x)q(x) = \sum_{k \geq 0} r_k x^k$$

dove $r_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$,
e il prodotto per scalare

$$ap(x) = \sum_{k \geq 0} ap_k x^k \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Osservazione 1. Notiamo che tutte le sommatorie risultanti dalle operazioni sono finite, in quanto da un certo indice in poi i coefficienti di $p(x)$ e $q(x)$ si annullano. Quindi i risultati delle operazioni tra polinomi sono ancora polinomi.

Per i gradi dei polinomi ottenuti dalla somma e dal prodotto valgono le relazioni

$$deg\ (p(x) + q(x)) \leq max(deg\ p(x), deg\ q(x))$$

$$deg\ (p(x)q(x)) = deg\ p(x) + deg\ q(x).$$

L'elemento neutro dell'operazione somma tra polinomi è la successione (0,0,...). L'unità dell'operazione prodotto tra polinomi è la successione (1,0,0,...).

È ben noto che, rispetto alle operazioni appena definite, $\mathbb{R}[x]$ è effettivamente un'algebra commutativa.

Osservazione 2. $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}[x]$. Infatti gli elementi di $\mathbb{R}$ sono esattamente i polinomi per cui $a_j = 0\ \forall j > 0$.

Possiamo estendere l'algebra dei polinomi $\mathbb{R}[x]$ all'algebra delle serie formali $\mathbb{R}[[x]]$.

Definizione 1.2. Definiamo *serie formale* una successione infinita in $\mathbb{R}$

$$f = (f_0, f_1, f_2, f_3, ...)$$

e diciamo che ha *ordine* n se $f_n \neq 0$ e $f_{n'} = 0\ \forall n' < n$.

Usando la stessa convenzione dei polinomi, $x = (1, 0, 0...)$ e $x^n = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ con l'1 in n-esima posizione, possiamo rappresentare una serie formale a coefficienti reali con la somma infinita

$$f = f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + ... = \sum_{n \geq 0} f_n x^n.$$

Indichiamo con $\mathbb{R}[[x]]$ l'insieme delle serie formali, che risulta essere un'algebra commutativa con le operazioni di somma e prodotto di convoluzione (o prodotto di Cauchy) così definite:
siano $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} f_n x^n$ e $g(x) = \sum\limits_{m\geq 0} g_m x^m$ due serie formali a coefficienti reali, abbiamo

$$f(x) + g(x) = \sum_{j\geq 0} (f_j + g_j) x^j$$

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{j\geq 0} c_j x^j$$

dove $c_j = \sum\limits_{k=0}^{j} f_k g_{j-k}$.
L'elemento neutro della somma è la successione nulla, mentre l'unità del prodotto è la successione $(1, 0, 0, ...)$.

Osservazione 3. $\mathbb{R}[x] \subseteq \mathbb{R}[[x]]$. Infatti i polinomi sono serie formali i cui coefficienti, da un certo indice in poi, sono tutti nulli.

1.1.2 Inversa di una serie rispetto al prodotto

Sia $f(x)$ una serie formale. La sua inversa rispetto al prodotto, se esiste, è la serie $g(x)$ tale che $f(x) \cdot g(x) = 1$

Osservazione 4. Una serie formale $f(x)$ è invertibile in $\mathbb{R}[[x]]$ se e solo se $f_0 \neq 0$. Infatti, se esiste l'inversa $f(x)^{-1} = g(x)$ allora $f(x) \cdot g(x) = 1$, quindi $f_0 g_0 = 1$, cioè $f_0 \neq 0$. Viceversa, se $f_0 \neq 0$, l'inversa $f(x)^{-1}$ è univocamente determinata delle condizioni

$$f_0 g_0 = 1$$

$$f_1 g_0 + f_0 g_1 = 0$$

$$f_2 g_0 + f_1 g_1 + f_0 g_2 = 0$$

$$...$$

che permettono di calcolare induttivamente i coefficienti $g_0, g_1, g_2, ...$

Esempio 1.1. Consideriamo la serie $1 - x$. Facciamo vedere che la sua inversa è la serie geometrica $1 + x + x^2 + x^3 + ...$
Cerchiamo l'inversa di $1 - x$ tra le serie della forma $1 + xf(x)$. Infatti deve essere $(1 - x)(1 - x)^{-1} = 1$ ed essendo il coefficiente di grado 0 del prodotto uguale al prodotto dei coefficienti di grado 0, per forza l'inversa deve avere 1 come coefficiente di grado 0.
Imponiamo

$$(1 - x)(1 + xf(x)) = 1$$

e dopo alcuni passaggi otteniamo

$$x(f(x) - 1 - xf(x)) = 0$$

da cui ricaviamo la condizione su $f(x)$

$$f(x) = 1 + xf(x).$$

Introduciamo ora l'operatore $T : \mathbb{R}[[x]] \to \mathbb{R}[[x]]$, $T(f) = 1 + xf(x)$. In questo modo la condizione su $f(x)$ che vogliamo soddisfare coincide con la ricerca del punto fisso dell'operatore T.
Cerchiamo il punto fisso di T partendo dal punto iniziale $h_0 = 0$ e costruendo

$$h_1 = T(h_0) = 1$$

$$h_2 = T(h_1) = 1 + x$$

$$h_3 = T(h_2) = 1 + x + x^2$$

$$h_4 = T(h_3) = 1 + x + x^2 + x^3$$

etc...
Ad ogni passo ci avviciniamo sempre di più alla serie geometrica $1 + x + x^2 + x^3 + ...$ che risulta essere dunque l'inversa di $1 - x$.
L'unicità è garantita da quanto detto nell'osservazione 4.

1.1.3 Composizione di serie formali

Date le serie formali di potenze

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$$

definiamo *composizione di f con g* la serie

$$g(f(x)) := \sum_{k=0}^{\infty} g_k (f(x))^k = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n \right)^k. \tag{1.1}$$

Osservazione 5. La definizione di composizione di serie è ben posta, perché la serie $f(x)$ ha ordine ≥ 1. Infatti, questo ci assicura che la formula 1.1 permette di calcolare ogni coefficiente di $g(f(x))$ con un numero finito di operazioni di somma e prodotto.

L'elemento neutro dell'operazione di composizione è la serie$f(x) = x$.

Proposizione 1.1.1. *Una serie formale $f(x)$ è invertibile rispetto alla composizione se e solo se il suo ordine è 1.*

L'inversa di una serie formale rispetto alla composizione (se esiste) sarà indicata con $\tilde{f}$.

1.1.4 Derivata di serie formali

Data una serie formale di potenze a coefficienti reali

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} f_n x^n,$$

definiamo *derivata formale di f* la serie

$$Df = \sum_{n \geq 1} f_n n x^{n-1}.$$

Per l'operatore di *derivata formale D*, valgono le seguenti regole di calcolo:

- $D(\alpha f + \beta g) = \alpha Df + \beta Dg \quad \forall f, g \in \mathbb{R}[[x]],\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $D(f \cdot g) = Df \cdot g + f \cdot Dg, \quad \forall f, g \in \mathbb{R}[[x]]$
- $D(g(f)) = Dg(f) \cdot Df, \quad \forall f, g \in \mathbb{R}[[x]]$ per cui è definita la composizione $g(f(x))$.

Quindi l'algebra delle serie formali è un'algebra con derivazione.

1.2 Operatori lineari

Studieremo gli operatori lineari applicati all'algebra $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi.

Sia $T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ un operatore lineare; denoteremo la sua azione sul polinomio $p(x)$ con $Tp(x)$.

Definizione 1.3. Un *operatore di traslazione* è un operatore lineare $E^\alpha : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, tale che $E^\alpha p(x) = p(x + \alpha)$.
E^1 è spesso indicato con E.
Se $\alpha = 0$ allora l'operatore è l'identità e viene indicato con I.

Definizione 1.4. Un operatore lineare T che commuta con ogni operatore di traslazione E^α, in simboli $TE^\alpha = E^\alpha T$, è detto *operatore invariante per traslazione.*

Esempio 1.2. 1. Definiamo *operatore derivata sui polinomi* l'operatore $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ tale che

- $D(1) = 0$
- $D(x^n) = nx^{n-1}\ \forall n \geq 0$

L'operatore D è invariante per traslazione, cioè è verificata la relazione $DE^\alpha = E^\alpha D$, $\forall E^\alpha$ operatore di traslazione con $\alpha \in \mathbb{R}$.
Infatti se valutiamo entrambi i membri sulla base $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$, otteniamo

$$DE^\alpha(x^n) = D(x + \alpha)^n = n(x + \alpha)^{n-1}$$

e

$$E^\alpha(Dx^n) = E^\alpha(nx^{n-1}) = n(x+\alpha)^{n-1}$$

$\forall n \geq 0$.

2. Definiamo *operatore di differenza in avanti* l'operatore $\Delta : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ tale che

$$\Delta p(x) = p(x+1) - p(x).$$

Δ è un operatore invariante per traslazione. Infatti, per ogni polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ abbiamo:

$$\Delta(E^\alpha p(x)) = \Delta(p(x+\alpha)) = p(x+\alpha+1) - p(x+\alpha)$$

e

$$E^\alpha(\Delta p(x)) = E^\alpha(p(x+1)-p(x)) = E^\alpha p(x+1)-E^\alpha p(x) = p(x+1+\alpha)-p(x+\alpha).$$

Allora $\Delta(E^\alpha p(x)) = E^\alpha(\Delta p(x))$.

Vediamo come gli operatori invarianti per traslazione formino un'algebra commutativa Σ isomorfa all'algebra delle serie formali $\mathbb{R}[[x]]$.

Teorema 1.2.1. *Sia T un operatore invariante per traslazione e sia D l'operatore derivata. Allora*

$$T = \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{n!} D^n \tag{1.2}$$

dove $c_n = [Tx^n]_{x=0}$.

Osservazione 6. La somma che compare in 1.2 è solo apparentemente infinita: infatti, ogni volta che se ne considera l'azione su un polinomio, essa ha solo un numero finito di addendi non nulli.

Dimostrazione del teorema. Tendendo presente l'osservazione appena fatta, per dimostrare il teorema, basta verificare che

$$Tx^k = \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{n!} D^n x^k \quad \forall k.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = \sum_{k\geq 0}\frac{n!}{(n-k)!k!}x^k y^{n-k}\\ &= \sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!}\left[\frac{n!}{(n-k)!}y^{n-k}\right] = \sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!}D^k y^n\end{aligned}$$

Applicando T a entrambi i membri (considerando x come variabile di T e y come parametro) otteniamo

$$T(x+y)^n = \sum_{k\geq 0}\frac{Tx^k}{k!}D^k y^n.$$

Poniamo $x = 0$ e successivamente rinominiamo x e y invertendole, otteniamo quindi

$$Tx^k = \sum_{k\geq 0}\frac{[Ty^k]_{y=0}}{k!}D^k x^n$$

e se poniamo $c_n = [Ty^k]_{y=0}$ otteniamo la tesi. □

Dal teorema precedente possiamo dedurre che l'insieme degli operatori invarianti per traslazione è in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathbb{R}[[x]]$ delle serie formali a coefficienti reali, perché la funzione Φ tale che:

$$\Phi : T \to \sum_{k\geq 0}\frac{c_k}{k!}x^k$$

dove $c_k = [Tx^k]_{x=0}$, è iniettiva e suriettiva.

Definizione 1.5. La serie formale

$$f(x) = \sum_{k\geq 0}\frac{c_k}{k!}x^k$$

con $c_k = [Ty^k]_{y=0}$, è detta *indicatore dell'operatore T.*

Inoltre, siano T e S due operatori invarianti per traslazione, allora valgono:

1. $\Phi(T \circ S) = \Phi(T) \cdot \Phi(S)$ dove $\circ$ è l'operazione di composizione tra operatori, mentre $\cdot$ è l'operazione di convoluzione di serie formali.

2. $\Phi(T+S) = \Phi(T) + \Phi(S)$

3. $\Phi(\alpha T) = \alpha\Phi(T)\ \forall\alpha \in \mathbb{R}$

Allora l'insieme degli operatori invarianti per traslazione è un'algebra isomorfa a $\mathbb{R}[[x]]$. Essendo $\mathbb{R}[[x]]$ commutativa, anche l'algebra Σ degli operatori lineari invarianti per traslazione è commutativa.

1.2.1 La derivata di Pincherle

Vogliamo ora mostrare come la derivazione nell'algebra delle serie formali, che abbiamo descritto nel paragrafo 1.1.4 si possa trasportare tramite Φ nell'algebra degli operatori invarianti per traslazione.

Sia $p(x) \in \mathbb{R}[x]$. Definiamo *operatore di moltiplicazione* l'operatore

$$\mathbf{x} : p(x) \to xp(x)$$

dove $xp(x)$ è il polinomio ottenuto moltiplicando ogni termine di $p(x)$ per la variabile x. Evidentemente, $\mathbf{x} \notin \Sigma$.

Definizione 1.6. Per ogni operatore $T \in \Sigma$, l'operatore

$$T' = T\mathbf{x} - \mathbf{x}T$$

è chiamato *Derivata di Pincherle* dell'operatore T.

Teorema 1.2.2. *Sia $T \in \Sigma$, allora $T' \in \Sigma$.*

Dimostrazione. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Consideriamo $E^\alpha T' = E^\alpha T\mathbf{x} - E^\alpha \mathbf{x}T$.
Dato che $T \in \Sigma$, sarà

$$T = \sum_{k\geq 0} \frac{c_k}{k!} D^k$$

con $c_k = [Tx^k]_{x=0}$. Di conseguenza

$$Tx^n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} c_k x^{n-k}.$$

Allora

$$\begin{aligned} T'x^n &= Tx^{n+1} - \mathbf{x}Tx^n \\ &= \sum_{k\geq 0} \binom{n+1}{k} c_k x^{n+1-k} - \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} c_k x^{n+1-k} \\ &= \sum_{k\geq 1} \binom{n}{k-1} c_k x^{n+1-k} \\ &= \sum_{k\geq 1} \frac{c_k}{(k-1)!} D^{k-1} x^n, \end{aligned}$$

quindi

$$T' = \sum_{k\geq 0} \frac{c_{k+1}}{k!} D^k,$$

perciò $T' \in \Sigma$. □

Corollario 1.2.3. *Se $f(x)$ è l'indicatore di $T \in \Sigma$, allora l'indicatore di T' è $f'(x)$, cioè la serie derivata di $f(x)$.*

Da cui segue immediatamente il seguente

Corollario 1.2.4. *La derivata di Pincherle sugli operatori invarianti per traslazione è una derivazione, cioè*

$$(TS)' = TS' + T'S$$

1.3 Sequenze polinomiali

Definizione 1.7. Definiamo *sequenza polinomiale* una successione di polinomi $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dove $p_n \in \mathbb{R}[x]$ e p_n è di grado n $\forall n \geq 0$.

Ogni sequenza polinomiale è una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$.
La successione $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una sequenza polinomiale e con la formula di Taylor possiamo calcolare esplicitamente i coefficienti di un dato polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ rispetto a tale base, abbiamo dunque

$$p(x) = \sum_{i\geq 0} \frac{[D^i p(x)]_{x=0}}{i!} x^i. \tag{1.3}$$

Osservazione 7. La sommatoria 1.3 è finita poiché $D^i p(x) = 0$ per $i \geq n+1$.

Tra le sequenze polinomiali avranno particolare importanza, in ciò che diremo in seguito, le sequenze di tipo binomiale.

Definizione 1.8. Una sequenza polinomiale si dice *di tipo binomiale* se $\forall x, y$ e $\forall n \geq 0$ risulta

$$p_n(x+y) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y) \tag{1.4}$$

Esempio 1.3. La sequenza polinomiale $p_n(x) = x^n$ è di tipo binomiale. Infatti, tenendo presente la formula del binomio di Newton sulle potenze n-esime, si ha

$$p_n(x+y) = (x+y)^n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Osservando che

$$x^k = p_k(x) \quad e \quad y^{n-k} = p_{n-k}(y)$$

la relazione 1.4 è subito dimostrata.

Capitolo 2

Operatori delta

2.1 Operatori delta

Definizione 2.1. Definiamo *operatore delta* un operatore lineare invariante per traslazione Q tale che $Qx = c$, con c costante non nulla.

Esempio 2.1. 1. L'operatore di derivata D e l'operatore di differenza in avanti Δ sono operatori delta; infatti per definizione abbiamo

$$D(x) = 1 \neq 0$$

$$\Delta x = x + 1 - x = 1 \neq 0.$$

2. Definiamo *operatore di differenza all'indietro*, l'operatore $\nabla : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ tale che

$$\nabla p(x) = p(x) - p(x-1).$$

L'operatore $\nabla \in \Sigma$, infatti è verificata la relazione $\nabla E^\alpha = E^\alpha \nabla$, $\forall E^\alpha$ operatore di traslazione, con $\alpha \in \mathbb{R}$.
Per dimostrarlo valutiamo entrambi i membri sul polinomio arbitrario $p(x) \in \mathbb{R}[x]$:

$$\nabla(E^\alpha p(x)) = \nabla(p(x+\alpha)) = p(x+\alpha) - p(x+\alpha-1)$$

e

$$E^\alpha(\nabla p(x)) = E^\alpha(p(x)-p(x-1)) = E^\alpha p(x)-E^\alpha p(x-1) = p(x+\alpha)-p(x-1+\alpha).$$

Allora $\nabla(E^\alpha p(x)) = E^\alpha(\nabla p(x))$.
Anche ∇ è un operatore delta, infatti

$$\nabla x = x - (x-1) = 1 \neq 0$$

Proposizione 2.1.1. *Se Q è un operatore delta, allora $Qa = 0$ per ogni costante a.*

Dimostrazione. Essendo Q un operatore invariante per traslazione, allora $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$QE^\alpha x = E^\alpha Qx.$$

Per linearità di Q,

$$QE^\alpha x = Q(x+\alpha) = Qx + Q\alpha = c + Q\alpha$$

dove c è per definizione una costante non nulla.
Vale anche

$$E^\alpha Qx = E^\alpha c = c.$$

Mettendo insieme le due relazioni, otteniamo

$$c + Q\alpha = c$$

da cui segue $Q\alpha = 0$. □

Proposizione 2.1.2. *Se $p(x)$ è un polinomio di grado $n \geq 1$ e Q è un operatore delta, allora $Qp(x)$ è un polinomio di grado $n-1$.*

Dimostrazione. Per dimostrare la proposizione, verifichiamo la tesi per il polinomio $p_n(x) = x^n$. Essendo la sequenza polinomiale $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ di tipo binomiale, vale la formula 1.4, a cui possiamo applicare Q a entrambi i membri, ottenendo

$$Q(x+\alpha)^n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} \alpha^k Q x^{n-k}.$$

Inoltre, tenendo presente che Q è invariante per traslazione, valgono le uguaglianze

$$Q(x+\alpha)^n = QE^\alpha x^n = E^\alpha Q x^n = r(x+\alpha)$$

dove $r(x) := Qx^n$.
Così abbiamo

$$r(x+\alpha) = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} \alpha^k Q x^{n-k}.$$

Poniamo $x = 0$ e scriviamo il polinomio r come un polinomio nella variabile α:

$$r(\alpha) = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} \alpha^k [Qx^{n-k}]_{x=0}.$$

Nella formula appena scritta, il coefficiente del termine di grado n è

$$[Qx^{n-n}]_{x=0} = [Q1]_{x=0} = 0,$$

mentre il coefficiente del termine di grado $n-1$ è

$$\binom{n}{n-1} [Qx^{n-n+1}]_{x=0} = n[Qx]_{x=0} = nc \neq 0.$$

Quindi r è di grado $n-1$. □

Proposizione 2.1.3. *Condizione necessaria e sufficiente affinché $Q \in \Sigma$ sia un operatore delta è che $Q = DP$, con $P \in \Sigma$ invertibile.*

Dimostrazione. Consideriamo un operatore delta

$$Q = \sum_{n\geq 0} \frac{c_n}{n!} D^n$$

dove $c_n = [Qx^n]_{x=0}$. Allora valgono le condizioni sui coefficienti $c_0 = 0$ e $c_1 = c \neq 0$. Quindi possiamo riscrivere Q

$$\begin{aligned} Q &= cD + \sum_{n\geq 2} \frac{c_n}{n!} D^n \\ &= D\left(c + \sum_{n\geq 2} \frac{c_n}{n!} D^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Notiamo che il termine dentro parentesi è lo sviluppo di un operatore invertibile che possiamo denominare P. La tesi è dunque dimostrata. □

Proposizione 2.1.4. *La composizione di due operatori delta Q, $\bar{Q}$ non è un operatore delta; si ha però che $(Q\bar{Q})'$ è un operatore delta.*

Dimostrazione. La dimostrazione segue dal fatto che, per la proposizione precedente, possiamo scrivere $Q = DP$, $\bar{Q} = D\bar{P}$ con P,$\bar{P}$ invertibili.
Allora

$$Q\bar{Q} = \frac{a_2}{2!}D^2 + \frac{a_3}{3!}D^3 + ... = D\left(\frac{a_2}{2!}D + \frac{a_3}{3!}D^2 + ...\right) =: DT$$

con $a_2 \neq 0$ e T operatore non invertibile, quindi $Q\bar{Q}$ non è un operatore delta. Mentre

$$(Q\bar{Q})' = a_2 D + \frac{a_3}{2!}D^2 + ... = D\left(a_2 + \frac{a_3}{2!}D + ...\right)$$

con $a_2 \neq 0$; quindi $(Q\bar{Q})'$ risulta essere un operatore delta poiché è esprimibile nella forma DR, con R operatore invertibile.

□

2.1.1 Successioni di base

Definizione 2.2. Sia Q un operatore delta. Una sequenza polinomiale è detta *successione di base* per Q se:

1. $p_0(x) = 1$
2. $p_n(0) = 0$ per ogni $n \geq 1$
3. $Qp_n(x) = np_{n-1}(x)$

Proposizione 2.1.5. *Ad ogni operatore delta Q è associata una ed una sola successione di base.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che $\forall n$ esiste uno e un solo polinomio $p_n(x)$ di grado n tale che $Qp_n(x) = np_{n-1}(x)$ e $p_n(0) = 0$ se $n > 0$.
Procediamo per induzione completa su n.
Poniamo $p_0(x) = 1$ e supponiamo vera la tesi $\forall k < n$.

Essendo $(p_0, p_1, ..., p_{n-1})$ una base dello spazio vettoriale dei polinomi di grado $\leq n-1$, allora un generico polinomio di grado n può essere scritto nella forma

$$p(x) = ax^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k p_k(x)$$

con $a \neq 0$.
Applichiamo Q a entrambi i membri

$$Qp(x) = aQx^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot kp_{k-1}(x);$$

ed essendo Qx^n esattamente di grado $n-1$, esiste una e una sola scelta dei coefficienti $a, c_1, c_2, ..., c_{n-1}$ per cui $Qp(x) = np_{n-1}(x)$.
Notando che anche anche il termine costante c_0 è unicamente determinato dalla condizione $p(0) = 0$, allora la proposizione risulta dimostrata. □

Esempio 2.2. Vediamo le successioni di base per i tre operatori portati come esempi di operatori delta.

1. La successione $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ è la successione di base per l'operatore derivata D. Infatti

   - $x^0 = 1$
   - $0^n = 0$ per $n \geq 1$
   - $Dx^n = nx^{n-1}$.

2. L'operatore di differenza in avanti Δ ha come successione di base la sequenza

   $$(x)_n := x(x-1)(x-2)...(x-n+1).$$

   Infatti

   - $(x)_0 = 1$
   - $(0)_n = 0$ per $n \geq 1$

- $$\begin{aligned}\Delta(x)_n &= (x+1)x(x-1)...(x-n+2) - x(x-1)...(x-n+1)\\ &= x(x-1)...(x-n+2)[x+1-(x-n+1)] = n(x)_{n-1}.\end{aligned}$$

3. L'operatore di differenza all'indietro ∇ ha come successione di base la sequenza
$$\langle x\rangle_n := x(x+1)(x+2)...(x+n-1).$$
Infatti
   - $\langle x\rangle_0 = 1$
   - $\langle 0\rangle_n = 0$ per $n \geq 1$
   - $$\begin{aligned}\nabla\langle x\rangle_n &= x(x+1)...(x+n-1) - (x-1)x(x+1)...(x+n-2)\\ &= x(x+1)...(x+n-2)[x+n-1-(x-1)] = n\langle x\rangle_{n-1}.\end{aligned}$$

Teorema 2.1.6 (Formule chiuse)**.** *Dato l'operatore delta $Q = DP$ con successione di base $q_n(x)$, allora per ogni n valgono le seguenti formule:*

1. $q_n(x) = Q'P^{-n-1}x^n$
2. $q_n(x) = P^{-n}x^n - (P^{-n})'x^{n-1}$
3. $q_n(x) = xP^{-n}x^{n-1}$
4. *(formula di Rodriguez)* $q_n(x) = x(Q')^{-1}q_{n-1}(x)$

Dimostrazione. Dapprima proviamo che il secondo membro della 1) e quello della 2) sono uguali. Basta osservare che, $\forall n \geq 1$:
$$Q'P^{-n-1} = (DP)'P^{-n-1} = D'P^{-n} + DP'P^{-n-1} = P^{-n} - \frac{1}{n}(P^{-n})'D$$
per cui
$$Q'P^{-n-1}x^n = P^{-n}x^n - \frac{1}{n}(P^{-n})'Dx^n = P^{-n}x^n - (P^{-n})'x^{n-1}.$$

Da cui segue che anche il secondo membro della 3) è uguale ai precedenti, infatti

$$P^{-n}x^n - (P^{-n})'x^{n-1} = P^{-n}x^n - (P^{-n}\mathbf{x} - \mathbf{x}P^{-n})x^{n-1} = xP^{-n}x^{n-1}.$$

Basta quindi dimostrare che i polinomi dati dalla formula 1) sono effettivamente una successione di base per l'operatore Q.
Posto $q_n(x) = Q'P^{-n-1}x^n$, abbiamo che

$$Qq_n(x) = (DP)Q'P^{-n-1}x^n = Q'P^{-n}Dx^n = nq_{n-1}(x);$$

quindi, $q_n(x)$ è la successione di base di Q, purché valga $q_n(0) = 0$ per $n \geq 1$.
E questo è vero perché abbiamo detto che $q_n(x) = xP^{-n}x^{n-1}$.
Infine per provare la 4) , osserviamo che, dalla 1) abbiamo $q_{n-1}(x) = Q'P^{-n}x^{n-1}$, da cui $x^{n-1} = (Q')^{-1}P^n q_{n-1}(x)$; e dalla 3) abbiamo $q_n(x) = xP^{-n}x^{n-1} = xP^{-n}(Q')^{-1}P^n q_{n-1}(x) = x(Q')^{-1}q_{n-1}(x)$. □

Esempio 2.3. Consideriamo l'operatore $\nabla = I - E^{-1}$; abbiamo che

$$\nabla = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} D^k$$

per cui

$$\nabla' = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} D^k = E^{-1},$$

da cui segue che $(\nabla')^{-1} = E$. Allora per la formula di Rodrigues

$$q_n(x) = xEq_{n-1}(x)$$

quindi $q_1(x) = x$, $q_2(x) = x(x+1)$, ecc.

Teorema 2.1.7. *1) Se $p_n(x)$ è una successione di base per qualche operatore Q, allora è anche una successione di tipo binomiale.*

2) Se $p_n(x)$ è una successione di tipo binomiale, allora è anche la successione di base per uno e un solo operatore delta.

Dimostrazione. (1) Iterando la proprietà (3) delle successioni di polinomi di base, si ottiene

$$Q^k p_n(x) = \frac{n!}{(n-k)!} p_{n-k}(x).$$

Quindi per $k = n$,

$$[Q^n p_n(x)]_{x=0} = n!$$

mentre per $k < n$,

$$[Q^k p_n(x)]_{x=0} = 0.$$

Così possiamo esprimere $p_n(x)$ in questo modo

$$p_n(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{[Q^k p_n(x)]_{x=0}}{k!} p_k(x).$$

Siccome ogni polinomio $p(x)$ è una combinazione lineare dei polinomi di base $p_n(x)$, l'ultima relazione vale anche per tutti i polinomi $p(x)$:

$$p(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{[Q^k p(x)]_{x=0}}{k!} p_k(x). \tag{2.1}$$

Ora supponiamo che $p(x)$ sia il polinomio $p_n(x+y)$ con y fissata. Allora

$$p_n(x+y) = \sum_{k \geq 0} \frac{[Q^k p_n(x+y)]_{x=0}}{k!} p_k(x).$$

Ma

$$\begin{aligned} [Q^k p_n(x+y)]_{x=0} &= [Q^k E^y p_n(x)]_{x=0} = [E^y Q^k p_n(x)]_{x=0} \\ &= \left[E^y \left(\frac{n!}{(n-k)!} p_{n-k}(x) \right) \right]_{x=0} = \frac{n!}{(n-k)!} p_{n-k}(y) \end{aligned}$$

così

$$p_n(x+y) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y);$$

quindi la sequenza $p_n(x+y)$ è di tipo binomiale.

(2) Supponiamo ora che $p_n(x)$ sia una sequenza polinomiale di tipo binomiale. Ponendo $y = 0$ nell'identità 1.4, si ottiene

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(0) \\ &= p_n(x)p_0(0) + np_{n-1}(x)p_1(0) + ... \end{aligned}$$

Siccome ogni polinomio $p_i(x)$ è esattamente di grado i, allora $p_0(0) = 1$ (e quindi $p_0(x) = 1$) e $p_i(0) = 0$ $\forall i \geq 1$. Ho dimostrato che valgono le proprietà (1) e (2) delle successioni di base.
Per la proprietà (3), andiamo a definire un operatore delta Q, per cui $p_n(x)$ è una successione di base. Sia Q l'operatore lineare tale che $Qp_0(x) = 0$ e $Qp_n(x) = np_{n-1}(x)$ per $n \geq 1$. Chiaramente Qx è una costante non nulla. Perciò ci rimane da dimostrare che Q è invariante per traslazione. Possiamo scrivere la proprietà di $p_n(x)$ di essere di tipo binomiale, in questo modo:

$$p_n(x + y) = \sum_{k\geq 0} \frac{p_k(x)}{k!} Q^k p_n(y),$$

estendendola a tutti i polinomi $p(x)$ come nel punto (1), otteniamo

$$p(x + y) = \sum_{k\geq 0} \frac{p_k(x)}{k!} Q^k p(y).$$

Applicando Q a ogni membro, e rinominando x e y scambiandole, otteniamo

$$(Qp)(x + y) = \sum_{k\geq 0} \frac{p_k(y)}{k!} Q^{k+1} p(x).$$

Ma

$$(Qp)(x + y) = E^y(Qp)(x) = E^y Qp(x),$$

e mettendo insieme

$$E^y Qp(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{p_k(y)}{k!} Q^{k+1} p(x) = Q\left(\sum_{k\geq 0} \frac{p_k(y)}{k!} Q^k p(x) \right) = Q(p(x+y)) = QE^y p(x).$$

L'unicità di Q segue dal fatto che sono assegnati i suoi valori sui polinomi di una base di $\mathbb{R}[x]$. $\square$

Nel corso della dimostrazione del teorema precedente, abbiamo provato l'identità 2.1, che possiamo esprimere come

Teorema 2.1.8 (Teorema di sviluppo per polinomi). *Ogni $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ può essere espresso come*

$$p(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{[Q^k p(x)]_{x=0}}{k!} p_k(x)$$

dove Q è un operatore delta e $p_n(x)$ è la sua successione di base.

Esempio 2.4.

1. La successione

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)...(x-n+1)$$

è la successione di base per l'operatore di differenza in avanti $\Delta = E^1 - I$, quindi per il teorema 2.1.7 è di tipo binomiale e vale la relazione 1.4:

$$(x+y)_n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} (x)_k (y)_{n-k} \quad \forall n \geq 0$$

2. La successione

$$\langle x \rangle_n = x(x+1)(x+2)...(x+n-1)$$

è la successione di base per l'operatore di differenza all'indietro $\nabla = I - E^{-1}$, quindi per il teorema 2.1.7 è di tipo binomiale e vale la relazione 1.4:

$$\langle x+y \rangle_n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} \langle x \rangle_k \langle y \rangle_{n-k} \quad \forall n \geq 0$$

2.1.2 Primo teorema di sviluppo

Teorema 2.1.9 (Primo teorema di sviluppo per operatori). *Sia T un operatore invariante per traslazione e sia Q un operatore delta con successione di base $p_n(x)$. Allora*

$$T = \sum_{k\geq 0} \frac{c_k}{k!} Q^k$$

con $c_k = [Tp_k(x)]_{x=0}$.

Dimostrazione. Per il teorema 2.1.7 possiamo dire che $p_n(x)$ è di tipo binomiale, allora

$$p_n(x+y) = \sum_{k\geq 0} \frac{p_k(x)}{k!} Q^k p_n(y).$$

Applichiamo T a entrambi i membri (considerando x come variabile e y come parametro)

$$Tp_n(x+y) = \sum_{k\geq 0} \frac{Tp_k(x)}{k!} Q^k p_n(y).$$

Per linearità possiamo estendere a tutti i polinomi $p(x)$.
Ponendo inoltre $x = 0$ e rinominando x e y invertendole, otteniamo

$$Tp(x+y) = \sum_{k\geq 0} \frac{[Tp_k(y)]_{y=0}}{k!} Q^k p(x).$$

□

Possiamo quindi associare a ogni operatore invariante per traslazione T, la serie di potenze formali

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{c_k}{k!} x^k$$

con $c_k = [Tp_k(x)]_{x=0}$, che chiameremo *indicatore di T rispetto all'operatore delta Q.*

Esempio 2.5. Considerando l'operatore di derivata in avanti Δ come operatore delta e l'operatore di derivata D come operatore invariante per traslazione, abbiamo

$$D = \sum_{n\geq 0} \frac{c_n}{n!} \Delta^n$$

dove $c_n = [D(x)_n]_{x=0}$; inoltre

$$(x)_n = \sum_{k\geq 0} s(n,k) x^k$$

dove $s(n,k)$ sono i numeri di Stirling di I specie, per cui $[D(x)_n]_{x=0} = s(n,1)$.
Dunque

$$D = \sum_{n\geq 0} \frac{s(n,1)}{n!} \Delta^n$$

Sia ora $p_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di polinomi di tipo binomiale. Consideriamo la funzione generatrice della successione

$$F(x,t) = \sum_{n\geq 0} \frac{p_n(x)}{n!} t^n.$$

Dato che $p_n(x)$ è di tipo binomiale, si ha

$$F(x+a,t) = F(x,t)F(a,t) \tag{2.2}$$

per cui F è soluzione dell'equazione funzionale 2.2, quindi è del tipo

$$F(x,t) = e^{xf(t)}.$$

Teorema 2.1.10. *Sia Q un operatore delta e sia $p_n(x)$ la sua successione di base. Sia poi*

$$Q = \sum_{k\geq 1} \frac{c_k}{k!} D^k$$

con $c_k = [Qx^k]_{x=0}$; consideriamo l'indicatore di Q

$$g(t) = \sum_{k\geq 1} \frac{c_k}{k!} t^k$$

e la funzione generatrice della successione $p_n(x)$ che, come abbiamo visto, è del tipo

$$F(x,t) = e^{xf(t)};$$

allora $g(f(t)) = f(g(t)) = t$.

Dimostrazione. Abbiamo, sviluppando E^α secondo Q

$$\sum_{k\geq 0} \frac{p_k(\alpha)}{k!} Q^k = E^\alpha = e^{\alpha D},$$

scrivendo formalmente $Q = g(D)$

$$\sum_{k\geq 0} \frac{p_k(\alpha)}{k!} (g(D))^k = e^{\alpha D},$$

ponendo $g(D) = t$

$$e^{\alpha g^{-1}(t)} = \sum_{k\geq 0} \frac{p_k(\alpha)}{k!} t^k = F(\alpha,t) = e^{\alpha f(t)}$$

da cui $f = \tilde{g}$. □

Esempio 2.6. Consideriamo l'operatore delta Δ, il suo indicatore è

$$g(t) = e^t - 1$$

perché $\Delta = e^D - 1$. Allora $\tilde{g}(t) = log(1+t)$, per cui

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(x)_n}{n!} t^n = e^{xlog(1+t)}$$

il che è ovvio, perché $e^{xlog(1+t)} = (1+t)^x = \sum_{n=0}^{x} \binom{x}{n} t^n$

2.1.3 Secondo Teorema di sviluppo

Definizione 2.3. Una sequenza polinomiale $s_n(x)$ è detta *successione di Sheffer per l'operatore delta Q* se:

1. $s_0(x) = c \neq 0$
2. $Qs_n(x) = ns_{n-1}(x)$

Proposizione 2.1.11. *Sia Q un operatore delta con successione di base $q_n(x)$. Allora $s_n(x)$ è una successione di Sheffer per Q se e solo se esiste un operatore invertibile invariante per traslazione S tale che*

$$s_n(x) = S^{-1} q_n(x)$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che $s_n(x) = S^{-1}q_n(x)$, dove S è un operatore invertibile invariante per traslazione, quindi vale $S^{-1}Q = QS^{-1}$. Vale allora la serie di uguaglianze

$$Qs_n(x) = QS^{-1}q_n(x) = S^{-1}Qq_n(x) = S^{-1}nq_{n-1}(x) = nS^{-1}q_{n-1}(x) = ns_{n-1}(x).$$

Inoltre

$$s_0(x) = S^{-1}q_0(x) = S^{-1}1 = c \neq 0.$$

Abbiamo dunque fatto vedere che $s_n(x)$ è una successione di Sheffer per Q. Viceversa, sia $s_n(x)$ una successione di Sheffer per l'operatore Q. Definiamo S come l'operatore $S : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ tale che

$$S : s_n(x) \to q_n(x).$$

I polinomi $s_n(x)$ e $q_n(x)$ sono entrambi di grado n e $s_0(x) \neq 0$, quindi S è invertibile.
Rimane da dimostrare che S è invariante per traslazione e per verificarlo basta notare che S commuta con Q.
Infatti

$$SQs_n(x) = nSs_{n-1}(x) = nq_{n-1}(x) = Qq_n(x) = QSs_n(x)$$

e dato che la successione (s_n) è una successione di base di $\mathbb{R}[x]$ si ha $QS = SQ$, da cui $SQ^n = Q^nS$.
Infine, ricordando il primo teorema di sviluppo, sia

$$E^\alpha = \sum_{n\geq 0} \frac{c_n}{n!} Q^n$$

dove $c_n = [E^\alpha q_n(x)]_{x=0}$, allora $E^\alpha S = SE^\alpha$.
Possiamo quindi concludere che S è invariante per traslazione. □

Osservazione 8. Dalla proposizione precedente possiamo dedurre che ad ogni operatore delta sono associate infinite successioni di Sheffer, una per ogni operatore invariante per traslazione ed invertibile. Diremo quindi che $s_n(x)$ è la successione di Sheffer associata alla coppia (Q, S).

Teorema 2.1.12 (Secondo teorema di sviluppo per operatori)**.** *Siano Q un operatore delta con successione di base $q_n(x)$ e S un operatore invariante per traslazione invertibile. Sia $s_n(x)$ la successione di Sheffer associata alla coppia (Q, S). Se T è un operatore invariante per traslazione e $p(x)$ è un qualunque polinomio, la seguente identità vale per ogni scelta del parametro y:*

$$Tp(x+y) = \sum_{n\geq 0} \frac{s_n(y)}{n!} Q^n STp(x).$$

Dimostrazione. Dal primo teorema di sviluppo abbiamo

$$E^y = \sum_{n\geq 0} \frac{c_n}{n!} Q^n$$

con $c_n = [E^y q_n(x)]_{x=0} = [q_n(x+y)]_{x=0} = q_n(y)$, cioè

$$E^y = \sum_{n\geq 0} \frac{q_n(y)}{n!} Q^n.$$

Applichiamo questo risultato a $p(x)$

$$E^y p(x) = p(x+y) = \sum_{n\geq 0} \frac{q_n(y)}{n!} Q^n p(x).$$

Scambiando le variabili x e y nella sommatoria, otteniamo

$$p(x+y) = \sum_{n\geq 0} \frac{q_n(x)}{n!} Q^n p(y).$$

Applicando poi S^{-1}, tenendo x come variabile e y come parametro, otteniamo

$$S^{-1}p(x+y) = \sum_{n\geq 0} \frac{S^{-1}q_n(x)}{n!} Q^n p(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{s_n(x)}{n!} Q^n p(y)$$

per ogni y. Scambiando le variabili x e y, otteniamo

$$S^{-1}p(x+y) = \sum_{n\geq 0} \frac{s_n(y)}{n!} Q^n p(x).$$

Ora considerando y come una costante e x come una variabile, applichiamo prima S e successivamente T

$$Tp(x+y) = \sum_{n\geq 0} \frac{s_n(y)}{n!} Q^n STp(x).$$

□

2.2 Calcolo umbrale

2.2.1 Composizione umbrale

Definizione 2.4. Siano $p_n(x)$ una successione polinomiale e $r(x) = \sum_{k\geq 0} c_k x^k$ un polinomio. Chiamiamo *composizione umbrale* di $r(x)$ con la successione $p_n(x)$, la successione polinomiale

$$r(\underline{p}(x)) := \sum_{k\geq 0} c_k p_k(x).$$

Se poi $p_n(x)$, $r_n(x)$ sono due successioni polinomiali, la loro *composizione umbrale* è la successione polinomiale

$$r_n(\underline{p}(x)) := \sum_{k\geq 0} c_{n,k} p_k(x)$$

se $r_n(x) = \sum\limits_{k\geq 0} c_{n,k} x^k$.

2.2.2 Operatore umbrale

Definizione 2.5. Un operatore $U : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ si dice *operatore umbrale* se muta una successione di tipo binomiale $p_n(x)$ in un'altra successione di tipo binomiale.

Notiamo che un operatore umbrale, portando una base di $\mathbb{R}[x]$ in un'altra base $\mathbb{R}[x]$, è un automorfismo di $\mathbb{R}[x]$ (pensato come spazio vettoriale). Osserviamo poi che, date due successioni di tipo binomiale $p_n(x)$ e $q_n(x)$, essendo due basi per lo spazio $\mathbb{R}[x]$, esiste uno e un solo operatore lineare $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ che porta $p_n(x)$ in $q_n(x)$ $\forall n$, e questo risulta essere un operatore umbrale. In particolare, per ogni successione di tipo binomiale $p_n(x)$, esiste uno e un solo operatore umbrale U tale che $U : x^n \to p_n(x)$; se allora $a_n(x)$ è una sequenza polinomiale, abbiamo che

$$a_n(\underline{p}(x)) = U a_n(x).$$

Così la composizione umbrale di polinomi è semplicemente l'applicazione di un operatore umbrale, e viceversa.

Osservazione 9. Se $r_n(x)$, $p_n(x)$ sono successioni di tipo binomiale, allora la loro composizione umbrale $q_n(x) = r_n(\underline{p}(x))$ è una successione di tipo binomiale.

Dimostrazione. Basta considerare l'operatore umbrale $U : x^n \to p_n(x)$; abbiamo allora che $q_n(x) = U r_n(x)$, da cui si deduce che $q_n(x)$ è di tipo binomiale. □

Proposizione 2.2.1. *Sia U un operatore umbrale. Allora U^{-1} esiste e*

1. *l'applicazione* $T \to UTU^{-1}$ *è un automorfismo dell'algebra* Σ*;*

2. *se* Q *è un operatore delta, allora* $P = UQU^{-1}$ *è ancora un operatore delta;*

3. U *manda ogni successione di tipo binomiale in una successione di tipo binomiale;*

4. *se* $S = s(Q)$*, con* $s(t)$ *serie formale di potenze, e* Q *operatore delta, allora* $USU^{-1} = s(P)$*, con* $P = UQU^{-1}$

Dimostrazione. Sia U un operatore umbrale e siano $p_n(x)$ e $q_n(x)$ due successioni di tipo binomiale tali che $Up_n(x) = q_n(x)$. Siano poi P l'operatore delta relativo a $p_n(x)$ e Q quello relativo a $q_n(x)$.
È chiaro che U è invertibile poiché manda polinomi di grado n in polinomi di grado n, $\forall n$.
Per provare 1), abbiamo le uguaglianze

$$UPp_n(x) = U(np_{n-1}(x)) = nU(p_{n-1}(x)) = nq_{n-1}(x) = Qq_n(x) = QUp_n(x)$$

e poiché ogni polinomio è combinazione lineare di $p_n(x)$, allora vale $UPp(x) = QUp(x)$ per ogni polinomio $p(x)$, quindi $UP = QU$.
Essendo U invertibile, $UPU^{-1} = Q$, e di conseguenza $UP^nU^{-1} = Q^n$ $\forall n \geq 1$.
Sia $T \in \Sigma$, sarà

$$T = \sum_{k \geq 0} \frac{c_k}{k!} P^k,$$

allora

$$UTU^{-1} = U\left(\sum_{k \geq 0} \frac{c_k}{k!} P^k\right)U^{-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{c_k}{k!} Q^k$$

che è un operatore invariante per traslazione. Così la mappa $T \to UTU^{-1}$ è un automorfismo.
Se in particolare T è un operatore delta, sarà

$$T = \sum_{k \geq 0} \frac{c_k}{k!} P^k$$

con $c_0 = 0$ e $c_1 \neq 0$; allora

$$UTU^{-1} = \sum_{k \geq 1} \frac{c_k}{k!} Q^k$$

con $a_1 \neq 0$, da cui segue che anche UTU^{-1} è un operatore delta. E ciò prova la 2).

Per provare 3), sia $r_n(x)$ una sequenza di tipo binomiale e sia R il suo operatore delta. Vediamo che $Ur_n(x)$ è anch'essa di tipo binomiale in quanto è successione di base per l'operatore URU^{-1}. Innanzitutto

$$URU^{-1}(Ur_n(x)) = URr_n(x) = nUr_{n-1}(x).$$

Inoltre è ovvio che $Ur_0(x) = 1$ perché U è lineare.

Per completare la prova, rimane da mostrare che $Ur_n(0) = 0$ per $n \geq 1$. Abbiamo per $n \geq 1$, in quanto $p_n(x)$ è successione di base di un operatore delta,

$$r_n(x) = \sum_{k \geq 1} c_k p_k(x),$$

siccome $c_0 = 0$, poiché $r_n(0) = 0$ $\forall n$. Dunque

$$Ur_n(x) = \sum_{k \geq 1} c_k U p_k(x) = \sum_{k \geq 1} c_k q_k(x),$$

e quindi $Ur_n(0) = 0$ per $n \geq 1$, poiché $q_n(x)$ è di tipo binomiale.

Viene direttamente anche la dimostrazione di 4). □

Osservazione 10. Dalla proposizione precedente segue, in particolare, che un operatore umbrale non è necessariamente invariante per traslazione.

Teorema 2.2.2. *Ogni automorfismo di Σ è del tipo $S \to USU^{-1}$, con U operatore umbrale.*

Dimostrazione. Proviamo innanzitutto che ogni automorfismo ϕ di Σ muta operatori delta in operatori delta. Sia D l'operatore di derivata; sarà sufficiente provare che $\phi(D)$ è un operatore delta.

Osserviamo che $\phi(D)$ e le sue potenze formano una base per Σ, perché ϕ è

un automorfismo. Sia $\phi(D) = c_0 + c_1 D + c_2 D^2 + ...$; allora $c_0 = 0$ perché altrimenti $\phi(D)$ sarebbe invertibile, mentre D non lo è; inoltre $c_1 \neq 0$ perché altrimenti $\phi(D) = c_2 D^2 + c_3 D^3 + ...$ e le sue potenze non potrebbero generare Σ. Quindi $\phi(D)$ è un operatore delta.
Sia ora $p_n(x)$ la successione di base per $\phi(D)$ e sia U l'operatore umbrale tale che $Ux^n = p_n(x)$. Allora $\phi(D) = UDU^{-1}$, e di conseguenza, per ogni $S \in \Sigma$, $\phi(S) = USU^{-1}$. □

2.2.3 Costanti di connessione

Teorema 2.2.3. *Siano $p_n(x)$, $q_n(x)$ due successioni binomiali e P, Q i relativi delta. Siano poi $p(t)$, $q(t)$ gli indicatori di P, Q rispettivamente. Se $r_n(x) = p_n(\underline{q}(x))$ ed R è l'operatore delta associato a $r_n(x)$, allora l'indicatore di R è $r(t) = p(q(t))$.*

Dimostrazione. Come abbiamo detto, $r_n(x) = Up_n(x)$ dove U è l'operatore umbrale tale che $Ux^n = q_n(x)$. Allora, ricordando la dimostrazione della 3) del teorema 2.2.1, l'operatore delta di $r_n(x)$ è UPU^{-1}.
Se $p(t) = c_1 t + c_2 t^2 + ...$, allora

$$P = \sum_{k \geq 1} \frac{c_k}{k!} D^k$$

e quindi

$$UPU^{-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{c_k}{k!} UD^k U^{-1}.$$

Ma $UDU^{-1} = Q$, quindi

$$UPU^{-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{c_k}{k!} Q^k.$$

Dunque

$$r(D) = c_1 UDU^{-1} + c_2 UD^2 U^{-1} + ... = c_1 q(D) + c_2 q^2(D) + ... = p(q(D)).$$

Da ciò segue che $r(t) = p(q(t))$. □

Definizione 2.6. Siano ora $p_n(x)$, $q_n(x)$ due sequenze di tipo binomiale; diciamo *costanti di connessione* le costanti $c_{n,k}$ tali che

$$q_n(x) = \sum_{k\geq 0} c_{n,k} p_k(x) \quad \forall n.$$

Per determinare queste costanti, si può procedere così:
sia $r_n(x) = \sum_{k\geq 0} c_{n,k} x^k$, allora $q_n(x) = r_n(\underline{p}(x))$. Se $q(t)$, $p(t)$, $r(t)$ sono gli indicatori degli operatori delta relativi a $q_n(x)$, $p_n(x)$, $r_n(x)$ rispettivamente; allora per il teorema precedente, $q(t) = r(p(t))$, da cui $r(t) = q(\tilde{p}(t))$, dove $\tilde{p}(t)$ è l'inversa rispetto alla composizione della serie formale $p(t)$.
Dunque conoscendo $p(t)$ e $q(t)$, si ottiene l'indicatore di $r(t)$ e di conseguenza l'operatore delta di $r_n(x)$; da questo infine si ricava $r_n(x)$.

Esempio 2.7. Siano $q_n(x) = \langle x \rangle_n$ e $p_n(x) = (x)_n$ le successioni di base rispettivamente degli l'operatore delta $\nabla = I - E^{-1}$ e $\Delta = E - I$. Dunque in questo caso, $p(t) = e^t - 1$ e $q(t) = 1 - e^{-t}$ sono gli indicatori di ∇ e Δ.
Abbiamo $\tilde{p}(t) = log(1 + t)$, quindi

$$r(t) = 1 - e^{-log(1+t)} = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}$$

per cui l'operatore delta della successione $r_n(x)$ è

$$Q = \frac{D}{D+1}$$

cioè $Q = DP$ con

$$P = \frac{1}{D+1}.$$

Per trovare $r_n(x)$ si possono usare le formule del teorema 2.1.6. Per esempio usando la formula 3) si ha

$$r_n(x) = xP^{-n}x^{n-1} = x(1+D)^n x^{n-1} = x\left(\sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} D^k\right) x^{n-1}$$

e quindi $r_n(x)$ è un polinomio di Laguerre.
Osservando invece che $1 + D = e^{-x} D e^x$, si ha

$$r_n(x) = x(e^{-x} D e^x)^n x^{n-1} = x e^{-x} D^n (e^x x^{n-1})$$

e quindi ritroviamo la formula di Rodrigues (formula 4 del teorema 2.1.6).

2.3 Esempi

2.3.1 Polinomi e operatore di Abel

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, si dice *polinomio di Abel di grado n relativo ad* α il polinomio

$$A_{\alpha,n}(x) = x(x - n\alpha)^{n-1}$$

e si dice *operatore di Abel relativo ad* α l'operatore

$$E^{\alpha}D.$$

L'operatore di Abel è un operatore delta, perché

$$DE^{\alpha} = D(1 + \alpha D + \frac{\alpha^2}{2!}D^2 + ...).$$

Possiamo quindi applicare il teorema 2.1.6, dove $Q = E^{\alpha}D$ e $P = E^{\alpha}$ invertibile, per cui dalla formula 3) abbiamo che la successione di base per DE^{α} è

$$q_n(x) = x(E^{\alpha})^{-n}x^{n-1} = x(x - n\alpha)^{n-1};$$

da cui deduciamo che la successione di base per l'operatore di Abel è la successione dei polinomi di Abel relativi allo stesso $\alpha \in \mathbb{R}$.
Di conseguenza, i polinomi di Abel sono una successione di tipo binomiale e quindi verificano la relazione

$$A_{\alpha,n}(x+y) = (x+y)(x+y-\alpha n)^{n-1} = \sum_{k}^{n} \binom{n}{k} x(x-\alpha k)^{k-1} y[y-\alpha(n-k)]^{n-k-1}$$

detta *identità di Abel*.

2.3.2 Polinomi e operatore di Laguerre

Definiamo l'operatore di Laguerre $K : \mathbb{R}[[x]] \to \mathbb{R}$ come

$$Kf(x) = -\int_0^{\infty} e^{-t} f'(x+t)dt.$$

Facilmente si verifica che K è invariante per traslazione; infatti abbiamo $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$E^\alpha K(x^n) = E^\alpha\left(-\int_0^\infty e^{-t} n(x+t)^{n-1} dt\right) = -\int_0^\infty e^{-t} n(x+\alpha+t)^{n-1} dt$$

e

$$KE^\alpha(x^n) = K(x+\alpha)^n = -\int_0^\infty e^{-t} n(x+\alpha+t)^{n-1} dt.$$

Possiamo applicare il primo teorema di sviluppo, per cui

$$K = \sum_{n\geq 1} \frac{c_n}{n!} D^n$$

dove $c_n = [Kx^n]_{x=0} = -n\int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt = -n!$; dunque

$$K = -D - D^2 - ... = \frac{D}{D-I}$$

e quindi l'operatore di Laguerre è un operatore delta in quanto è rispettata la condizione della proposizione 2.1.3.

Ricaviamo la successione di base per l'operatore di Laguerre usando la formula 3) del teorema 2.1.6

$$L_n(x) = xP^{-1}x^{n-1} = x(D-I)^n x^{n-1}$$

dove P è appunto l'operatore invertibile tale che $K = DP$.
Da $D - I = e^x De^{-x}$ abbiamo $(D-I)^n = e^x D^n e^{-x}$, che possiamo andare a sostituire nella formula di $L_n(x)$ ottenendo la formula di Rodrigues originale

$$L_n(x) = xe^x D^n e^{-x} x^{n-1}.$$

Dalla formula $L_n(x) = x(D-I)^n x^{n-1}$, sviluppando la potenza $(D-I)^n$, possiamo ricavare

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}(-x)^k$$

dove i coefficienti

$$\frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}$$

sono detti *numeri di Lah*.

2.3.3 Polinomi di Appell

Le successioni di Sheffer associate alle coppie (D, S), con $S \in \Sigma$ qualsiasi, sono chiamate *successioni di Appell*.
Abbiamo già detto, infatti, che $s_n(x)$ è una successione di Sheffer per D se e solo se esiste un operatore invertibile invariante per traslazione S tale che

$$s_n(x) = S^{-1}x^n.$$

Consideriamo ora l'operatore J descritto da

$$Jp(x) = \int_x^{x+1} p(t)dt.$$

J è invariante per traslazione, infatti abbiamo $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$E^\alpha J(x^n) = E^\alpha \left(\int_x^{x+1} t^n dt \right) = E^\alpha \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_x^{x+1} = \frac{(x+1+\alpha)^{n+1}}{n+1} - \frac{(x+\alpha)^{n+1}}{n+1}$$

e

$$JE^\alpha(x^n) = J(x+\alpha)^n = \int_x^{x+1} (t+\alpha)^n dt = \frac{(x+1+\alpha)^{n+1}}{n+1} - \frac{(x+\alpha)^{n+1}}{n+1}.$$

Essendo $J \in \Sigma$ allora

$$Jp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{n!} D^n p(x)$$

dove

$$c_n = \left[\int_x^{x+1} t^n \, dt \right]_{x=0} = \int_0^1 t^n \, dt = \frac{1}{n+1}$$

e quindi

$$Jp(x) = \int_x^{x+1} p(t) \, dt = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)!} D^n p(x)$$

Notiamo che $DJ = \Delta$, infatti

$$J = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)!} D^n$$

dunque

$$DJ = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} D^n = \Delta.$$

Quindi possiamo definire anche

$$J^a = \left(\frac{\Delta}{D} \right)^a = \left[\frac{(e^D - I)}{D} \right]^a.$$

2.3.4 Operatore di Gould

Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, consideriamo l'operatore A^z definito da

$$A^z = \frac{\Delta}{(1+\Delta)^2} = E^{-z}\Delta$$

cioè

$$A^z = \Delta + \binom{-z}{1}\Delta^2 + \binom{-z}{2}\Delta^3 + ... + \binom{-z}{n}\Delta^{n+1} + ...$$

L'operatore A^z è chiamato *operatore di Gould.*
Essendo Δ un operatore delta abbiamo

$$A^z = E^{-z}\Delta = \Delta E^{-z} = DPE^{-z},$$

quindi anche l'operatore di Gould è un operatore delta per la proposizione 2.1.3, con PE^{-z} invertibile.

La sua successione di base è

$$a_n^z = \sum_{k\geq 0} \frac{k}{n}\binom{nz}{n-k}(x)_k.$$

Bibliografia

[1] M. Barnabei, A. Brini e G. Nicoletti, POLYNOMIAL SEQUENCES OF INTEGRAL TYPE, Journal of Mathematical Analysis and Applications **78**, 590–617 (1980).

[2] S. Roman e G.-C. Rota, THE UMBRAL CALCULUS, ADVANCES IN MATHEMATICS **27**, 95–188 (1978).

[3] G.-C. Rota, D. Kahaner e A. Odlyzko, ON THE FOUNDATION OF COMBINATORIAL THEORY. VIII. FINITE OPERATOR CALCULUS, Journal of Mathematical Analysis and Applications **42**, 684–760 (1973).

Ringraziamenti

Un grande ringraziamento alla professoressa Barnabei per la pazienza con cui mi ha seguito.

Un grazie gigante alla mia famiglia...
...a mia mamma per la tenacia con cui mi ha spinto a non mollare,
...a mio babbo per i suoi baci in stazione prima di partire per Bologna e i suoi sorrisi quando tornavo,
...ai miei fratelli perché sono insopportabili, ma voglio loro un gran bene!

Grazie ovviamente ai miei amici...
...a Pino, Gigi, Bona, Ale, Giuli, Gabri, Scarp che ogni sabato sera mi hanno fatto dimenticare le fatiche della settimana,
...a Iaia, Angy, Sara, Clari, Fre, Marti, Eli perché studiare con loro ha reso più affrontabile ogni esame!

E un grazie davvero grande a Casa Magdala...
...a Erica S. I. M. G. perché i loro sorrisi hanno reso bellissimo il tempo in casa,
...a Ivana, Monica e Noemi, grazie per il supporto e le chiacchierate!

Grazie a tutti voi!!!