

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Fisica dell'accrescimento

Tesi di Laurea

Presentata da:
Angelo Giuseppe Ferrari

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa



Sessione I
Anno Accademico 2015/2016

Sommario

Questo elaborato presenta una descrizione del fenomeno dell'accrescimento di materia su oggetti compatti, esponendo i principali modelli fisici a riguardo. Dopo un'introduzione, in cui viene mostrato come l'accrescimento rappresenti la più importante fonte di energia in astrofisica, si discute nel **capitolo 1** il più semplice modello di accrescimento, dovuto ad Hermann Bondi (1952). Tale modello, proprio per la sua semplicità, risulta molto importante, nonostante trascuri importanti aspetti fisici. Nel **capitolo 2** si studia la fisica dei dischi di accrescimento, analizzando sia il caso generale che alcuni casi particolari, come quello stazionario o a viscosità costante. L'elaborato si conclude con una breve analisi dell'emissione termica da parte del disco di accrescimento.

Indice

Introduzione	1
1 Modello di accrescimento di Bondi	2
1.1 Ipotesi di lavoro	2
1.2 Le equazioni del modello	3
1.3 Analisi delle funzioni $g(\mathcal{M})$ e $f(x)$ e soluzione	4
2 Dischi di accrescimento	7
2.1 Disco di accrescimento in presenza di viscosità	7
2.1.1 Equazioni del disco di accrescimento viscoso	8
2.1.2 Disco di accrescimento con viscosità costante	9
2.1.3 Disco sottile stazionario	12

Introduzione

L'accrescimento è un processo fisico, attraverso il quale, grazie alla forza di gravità, viene accumulata materia su un oggetto compatto, come un buco nero, una stella di neutroni o una nana bianca. In astrofisica, questo fenomeno risulta molto importante, in quanto libera un' enorme quantità di energia gravitazionale, con un' efficienza superiore anche a quella delle reazioni di fusione nucleare. Vista questa grande efficienza, si ritiene che molta dell'emissione energetica prodotta dai nuclei galattici attivi (AGN) sia dovuta al rilascio di energia gravitazionale durante i processi di accrescimento.

Per fare una stima qualitativa, si prenda una particella di massa m che cade su un buco nero di massa M_{BH} , e raggio pari al raggio di Schwarzschild (distanza in corrispondenza della quale la velocità di fuga è quella della luce)

$$r_s = \frac{2GM_{BH}}{c^2}. \quad (\text{I.1})$$

La relatività generale ci dice che una particella non può più sfuggire a un buco nero quando si trova ad una distanza di $3r_s$, pertanto, in una caduta viriale, si avrà un rilascio di energia dato da

$$\Delta E_{acc} = \frac{1}{2} \left(\frac{GM_{BH}}{r_s} - \frac{GM_{BH}}{3r_s} \right) m = \frac{GM_{BH}}{3r_s} m \simeq 0.2mc^2;$$

cioè un' efficienza $\epsilon \simeq \Delta E_{acc}/mc^2 \simeq 0.2$, molto superiore a quella delle reazioni nucleari negli interni stellari, che risulta approssimativamente 10^{-3} . Ci si aspetta che parte di questa energia sia rilasciata sotto forma di radiazione elettromagnetica. La luminosità dipenderà, ovviamente, dalla massa accresciuta dal buco nero per unità di tempo, \dot{M} , secondo la relazione $L_{acc} = \epsilon \dot{M} c^2$. Per valori di luminosità molto alti il tasso di accrescimento viene auto-limitato dalla radiazione stessa, in quanto la pressione di radiazione si oppone alla caduta del materiale, diminuendo così la produzione di energia. In caso di accrescimento sferico stazionario (modello di Bondi) avremo quindi un limite, detto limite di Eddington, oltre il quale il buco nero non può irraggiare perché l'accrescimento viene bloccato dalla pressione della radiazione emessa. Questo limite è dato da:

$$L_{Edd} = \frac{4\pi GM_{BH} m_p}{\sigma_T}, \quad (\text{I.2})$$

dove σ_T è la sezione d'urto Thomson, e m_p è la massa del protone. Nei casi in cui non si ha simmetria sferica questo limite non vale, in quanto si può avere un disco di accrescimento ed emissione lungo i poli, che non incontrando materia non può frenarne la caduta. Per questo motivo è possibile, negli AGN più luminosi come i Quasar, raggiungere luminosità elevatissime, dell'ordine delle $10^{13} \div 10^{14}$ luminosità solari, quindi superiori alle luminosità tipiche delle galassie.

Capitolo 1

Modello di accrescimento di Bondi

Tra tutti i modelli di accrescimento, quello di Bondi è senza dubbio il più semplice, in quanto affronta l'accrescimento su un oggetto isolato, immerso in una distribuzione di gas infinita. Questa trattazione è di tipo puramente idrodinamico, per cui vengono trascurati alcuni aspetti importanti da un punto di vista fisico. Rimane comunque un modello molto usato in astrofisica, vista la sua semplicità e analiticità.

1.1 Ipotesi di lavoro

Si consideri un oggetto compatto e isolato a riposo, immerso in una nube infinita di gas distribuito uniformemente, in quiete all'infinito, dove si hanno i valori di densità ρ_∞ , pressione p_∞ , e temperatura T_∞ . Date queste informazioni si vuole ricavare il valore di tali grandezze ad ogni distanza dall'oggetto centrale. Le assunzioni sono le seguenti:

- problema stazionario ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$);
- simmetria sferica: le equazioni differenziali dipendono solo dalla variabile r , sono pertanto ODE. Questa richiesta matematica implica fisicamente che il momento angolare sia nullo $\mathbf{J} = \mathbf{0}$;
- assenza di campi magnetici $\mathbf{B} = \mathbf{0}$;
- campo gravitazionale dovuto solo al corpo centrale, trascurandone l'aumento di massa in modo tale che il campo di forza non cambi¹:

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r}; \quad (1.1)$$

- feedback elettromagnetico trascurato;
- gas perfetto non viscoso, che esegue solo trasformazioni politropiche:

$$p = p_\infty \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^\gamma, \quad \text{con } 1 \leq \gamma \leq \frac{5}{3}. \quad (1.2)$$

La velocità del suono all'interno del fluido sarà quindi

$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}. \quad (1.3)$$

¹Le soluzioni trovate saranno pertanto valide in un intervallo di tempo ristretto, nel quale la massa centrale non varia sostanzialmente

1.2 Le equazioni del modello

Si consideri l'equazione di continuità di un fluido nel caso stazionario: $\text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$; dato che le grandezze dipendono solo dalla variabile r , possiamo integrarla facendo uso del teorema di Gauss, ottenendo

$$4\pi r^2 u(r) \rho(r) = \text{cost} = \dot{M} \quad \forall r; \quad (1.4)$$

che dice che \dot{M} , cioè la massa che attraversa una superficie sferica di raggio r per unità di tempo, è costante. Ciò significa che il segno di $u(r)$ non cambia, permettendo o un moto dal centro del sistema verso l'esterno (soluzione di vento di Parker) o, al contrario, dall'esterno verso l'interno (soluzione di accrescimento di Bondi).

Si prenda ora in considerazione l'equazione del moto di Eulero

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi, \quad (1.5)$$

imponendo le condizioni di stazionarietà, la si integra lungo una linea di flusso e, dalle condizioni all'infinito, si ottiene il teorema di Bernoulli nella seguente forma:

$$\frac{u^2}{2} + \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho} + \phi = 0. \quad (1.6)$$

Combinando quest'ultima espressione con la (1.2), e ricordando la definizione di velocità del suono (1.3), si ha

$$\frac{u^2}{2} + \frac{c_{s\infty}^2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] - \frac{GM}{r} = 0. \quad (1.7)$$

È possibile ora adimensionalizzare le equazioni (1.4) e (1.7). Per farlo, si introducono le seguenti grandezze normalizzate rispetto ai loro valori all'infinito:

$$\tilde{\rho}(r) = \frac{\rho}{\rho_\infty}; \quad \tilde{u}(r) = \frac{u(r)}{c_{s\infty}}; \quad \tilde{p}(r) = \frac{p(r)}{p_\infty}. \quad (1.8)$$

Facendo uso del raggio di Bondi r_B , si definisce anche il raggio adimensionale

$$x = \frac{r}{r_B}, \quad \text{con} \quad r_B = \frac{GM}{c_{s\infty}^2} \quad (1.9)$$

Con queste definizioni l'equazione (1.4) è pertanto scrivibile nella forma adimensionale

$$\lambda = \frac{\dot{M}}{4\pi r_B^2 \rho_\infty c_{s\infty}} = \tilde{\rho} \tilde{u} x^2, \quad (1.10)$$

dove λ è detto autovalore del problema di Bondi. Se si conoscono la massa dell'oggetto centrale e le condizioni del gas all'infinito, noto λ , si può ricavare dalla (1.10) il tasso di accrescimento \dot{M} .

Con l'introduzione del numero di Mach, $\mathcal{M} = u/c_s$, e della velocità del suono normalizzata, $\tilde{c}_s = c_s/c_{s\infty}$, le equazioni del problema di Bondi possono essere ulteriormente modificate, giungendo quindi alle seguenti relazioni:

$$\frac{\mathcal{M}^2 \tilde{c}_s^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} (\tilde{\rho}^{\gamma-1} - 1) - \frac{1}{x} = 0 \quad (1.11)$$

$$\lambda = \mathcal{M} x^2 \tilde{\rho}^{\frac{\gamma+1}{2}} \quad (1.12)$$

Combinando le equazioni (1.11) e (1.12), si ottiene l'espressione finale del problema di Bondi:

$$\mathcal{M}^{2\frac{1-\gamma}{\gamma+1}} \left[\frac{\mathcal{M}^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \right] = \Lambda \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{\gamma-1} \right] x^{4\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \quad (1.13)$$

$$\Lambda = \lambda^{-2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \quad (1.14)$$

La precedente equazione può essere espressa in forma sintetica come:

$$g(\mathcal{M}) = \Lambda f(x) \quad (1.15)$$

dove

$$g(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^{2\frac{1-\gamma}{\gamma+1}} \left[\frac{\mathcal{M}^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \right], \quad (1.16)$$

e

$$f(x) = x^{4\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{\gamma-1} \right]. \quad (1.17)$$

Risolvere l'equazione (1.15), permette di trovare il valore di \mathcal{M} , e quindi della velocità radiale del fluido a qualsiasi raggio, e dato che tutte le grandezze coinvolte nel problema possono essere ricavate a partire dal numero di Mach, ciò significa aver risolto il problema di Bondi.

1.3 Analisi delle funzioni $g(\mathcal{M})$ e $f(x)$ e soluzione

L'equazione (1.15), in cui sono coinvolte la $f(x)$ e la $g(\mathcal{M})$, è un'equazione trascendente; le due funzioni sono però studiabili analiticamente. Come si vede dai loro grafici in figura (1.1), entrambe hanno un minimo. La g si minimizza nel punto sonico, corrispondente a $\mathcal{M} = 1$, mentre il minimo di f cade vicino al raggio di Bondi per $1 < \gamma < 5/3$, più precisamente in

$$x_{min} = \frac{5 - 3\gamma}{4}. \quad (1.18)$$

Dato che entrambe le funzioni presentano un minimo, l'autovalore Λ non potrà essere arbitrario; esiste infatti un valore critico

$$\Lambda_{cr} = \frac{g_{min}}{f_{min}}, \quad \text{che equivale a} \quad \lambda_{cr} = \left(\frac{g_{min}}{f_{min}} \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}. \quad (1.19)$$

Viene così limitato dalla condizione $\Lambda > \Lambda_{cr}$ ($\lambda < \lambda_{cr}$), l'intervallo di valori che l'autovalore può assumere. Questo perché quando la $f(x)$ assume il suo minimo in corrispondenza di x_{min} , se la condizione sopracitata non fosse rispettata, non sarebbe verificata l'equazione (1.15). È bene notare che λ è legato al tasso di accrescimento \dot{M} attraverso la relazione (1.10); pertanto, l'esistenza di un λ_{cr} si traduce in un limite superiore al tasso di accrescimento stesso. Inoltre, λ_{cr} è funzione solo dell'indice politropico γ , cioè dipende solo dal tipo di fluido preso in considerazione. Calcolando esplicitamente λ_{cr} si vede che diminuisce all'aumentare dell'indice politropico, di conseguenza un'accrescimento isoterma ($\gamma = 1$) risulta il più efficiente, mentre un'accrescimento adiabatico ($\gamma = 5/3$) è il meno efficiente possibile.

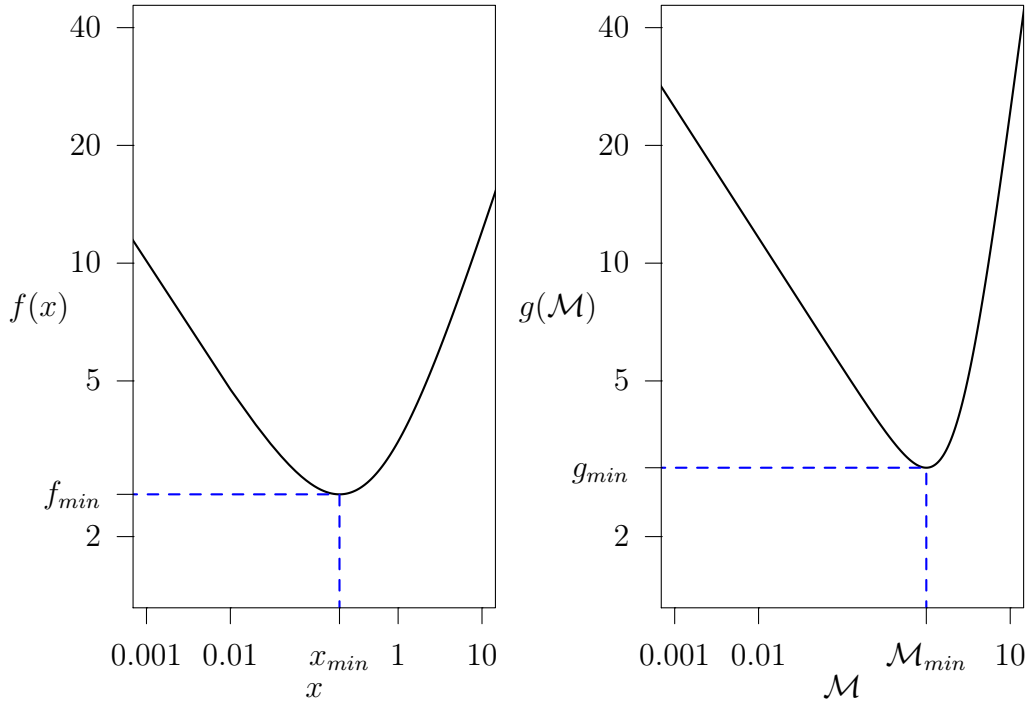


Figura 1.1: Funzioni $f(x)$ e $g(\mathcal{M})$ per $\gamma = \frac{7}{5}$.

L'equazione (1.15) non è risolvibile con metodi analitici e deve pertanto essere risolta numericamente. Le soluzioni sono riportate in figura (1.2). Ogni curva corrisponde a due regimi di flusso, in quanto si possono avere soluzioni sia per velocità positive che negative. È quindi possibile percorrerle in entrambi i sensi: si ottengono così soluzioni di accrescimento per velocità negative e soluzioni di vento per velocità positive. Per $\lambda = \lambda_{cr}$ si hanno le cosiddette soluzioni critiche, rappresentate in rosso ed in blu, aventi un punto in comune in x_{min} , dove $\mathcal{M} = 1$. Si può quindi avere una transizione dal regime subsonico a quello supersonico e viceversa. Per tale motivo queste soluzioni vengono anche dette transoniche. In figura (1.2) sono mostrate in nero e in verde le soluzioni per $\lambda < \lambda_{cr}$. Come si vede, queste soluzioni rimangono sempre supersoniche (curva nera) o subsoniche (curva verde) e presentano entrambe un estremo in x_{min} . Eventuali soluzioni per $\lambda < \lambda_{cr}$ non sono state trattate in quanto non rappresentative di una realtà fisica. Applicando le condizioni al contorno viste nella sezione (1.1) è possibile capire quali siano le soluzioni di interesse per il problema in analisi. Innanzitutto, la restrizione di gas a riposo all'infinito esclude la curva rossa e quella nera. Rimangono così la soluzione di accrescimento subsonica (curva verde) e quella transonica (curva blu), entrambe percorse con velocità negativa. Si possono sviluppare due diverse argomentazioni per chiarire quale sia la soluzione fisicamente più rappresentativa. La prima è quella di studiare la stabilità del sistema confrontandone la stabilità dei vari stati: ci si aspetta che lo stato di minore energia sia l'unico stato stabile. Si può notare, confrontando le densità per raggi piccoli, come la soluzione critica di accrescimento rappresenti questo stato di più bassa energia ed è conseguentemente quella "scelta" dalla natura (si veda [1] per maggiori dettagli). Alternativamente, per escludere la soluzione subsonica, si osservi che nei pressi dell'origine, per la curva verde in figura (1.2) $u \rightarrow 0$.

Si crea così una situazione di quasi-equilibrio idrostatico descritta da

$$\frac{1}{\rho} \nabla p \simeq -\nabla \phi. \quad (1.20)$$

Per mantenere questo flusso subsonico è necessario un enorme aumento della densità, in prossimità della superficie della stella centrale, rispetto a quella del mezzo interstellare. Questo aumento richiederebbe più atomi di idrogeno nei pressi della stella di quelli presenti in tutto l'universo osservabile (si veda [7], p. 80-81 per maggiori dettagli). Rimane dunque solo una soluzione, vale a dire quella transonica, che presenta una transizione dal regime subsonico a quello supersonico in corrispondenza del punto x_{min} , il quale separa i due regimi estremi in cui si trova il fluido: equilibrio idrostatico a grande distanza e caduta libera per raggi piccoli. Per grandi distanze, infatti, l'equazione del moto è la (1.20), mentre nel limite $x \rightarrow 0$ è

$$\frac{u^2}{2} \simeq -\frac{GM}{r}; \quad (1.21)$$

conseguentemente, tutte le grandezze fisiche in prossimità dell'oggetto centrale assumeranno i tipici andamenti di caduta libera. Si noti, inoltre, che questa è la soluzione che massimizza il tasso di accrescimento. Un particolare caso d'interesse è quello adiabatico, nel quale, come già accennato, il tasso di accrescimento risulta il più piccolo possibile. In questa situazione il fluido rimane sempre subsonico e raggiunge il punto sonico in corrispondenza dell'origine, come si può vedere dall'equazione (1.18).

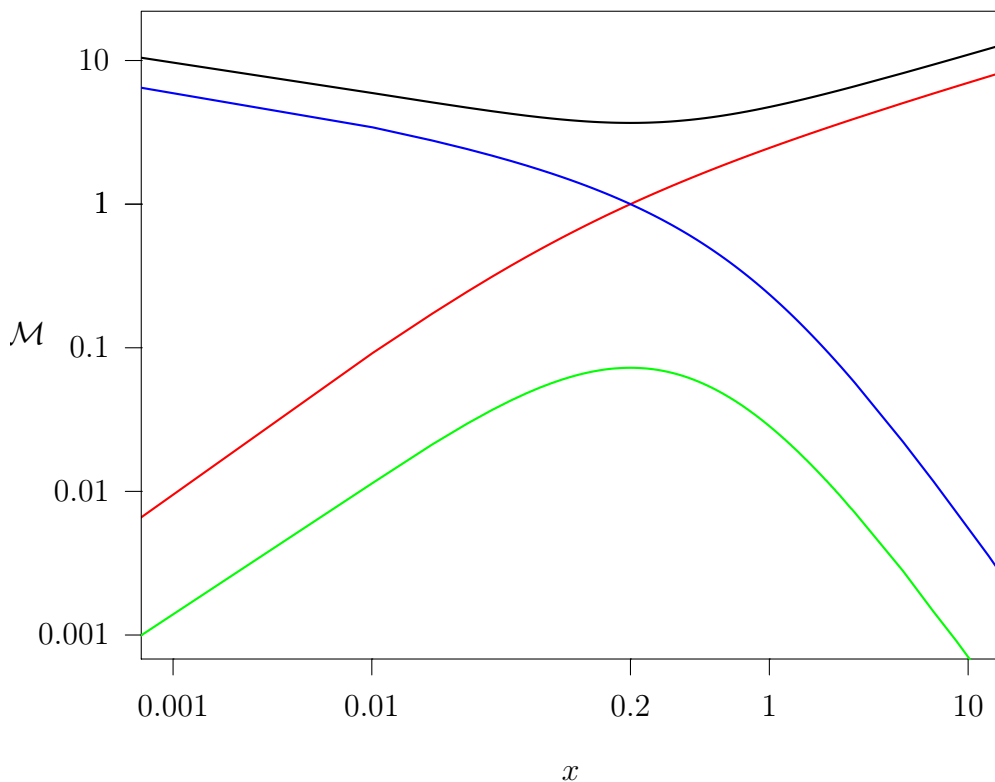


Figura 1.2: Soluzioni del problema di Bondi per $\gamma = \frac{7}{5}$: in rosso e in blu le soluzioni critiche corrispondenti a λ_{cr} , la curva nera e quella verde sono soluzioni per $\lambda < \lambda_{cr}$.

Capitolo 2

Dischi di accrescimento

Nel precedente capitolo si è preso in considerazione un fluido privo di momento angolare. Sebbene questa semplificazione sia matematicamente molto utile, portando anche ad alcune considerazioni e predizioni interessanti dal punto di vista fisico, risulta un'assunzione estremamente restrittiva che, in astronomia, quasi mai viene rispettata. La materia che va ad accrescere, infatti, se dotata di momento angolare, tende ad appiattirsi su un disco di accrescimento che risulta essere la configurazione di minore energia. Sorge, dunque, la necessità di affinare il modello, tenendo conto del fatto che la materia è distribuita su un disco.

2.1 Disco di accrescimento in presenza di viscosità

La viscosità è la grandezza fondamentale che permette il verificarsi dell'accrescimento. Il suo effetto è quello di redistribuire il momento angolare del gas in rotazione, creando una situazione in cui si ha un flusso di momento angolare verso l'esterno ed un flusso di massa verso l'interno. Il concetto alla base di tutto ciò è molto semplice: si consideri della materia su un'orbita circolare ad un raggio R , attorno ad una massa M . La gravità del corpo centrale è l'unica forza presa in considerazione e si può pertanto riscrivere come una forza centripeta¹:

$$\Omega^2 R = \frac{GM}{R^2}, \quad (2.1)$$

da cui

$$\Omega = \left(\frac{GM}{R^3} \right)^{1/2}. \quad (2.2)$$

Dove Ω è la velocità angolare. Un disco gassoso, in cui domina la gravità dell'oggetto centrale, rispetta la (2.2), che esprime una rotazione differenziale nella quale gli strati interni ruotano più velocemente di quelli esterni. In presenza di viscosità lo strisciamento tra un anello di materia più interno, con velocità angolare maggiore di uno più esterno, fa sì che la regione interna perda momento angolare a favore di quella più esterna, spiraleggiando così verso il centro del sistema. In assenza di viscosità questo non accadrebbe e gli elementi del disco rimarrebbero in orbite circolari.

¹È un errore piuttosto comune in letteratura quello di sostenere che la forza di gravità sia bilanciata dalla forza centrifuga per arrivare a scrivere l'equazione (2.1). Se così fosse, si avrebbe un equilibrio di forze e per la prima legge della dinamica, un moto rettilineo uniforme. La gravità è l'unica forza in gioco, e le orbite circolari sono dovute solo ad essa.

2.1.1 Equazioni del disco di accrescimento viscoso

Prima di procedere con la derivazione delle equazioni, bisogna premettere che è possibile una derivazione più formale di quella che verrà condotta in questa trattazione, partendo dall'equazione di continuità e dalla componente azimutale dell'equazione di Navier-Stokes in coordinate cilindriche. La suddetta ha il vantaggio di essere più rigorosa ed elegante, mancando tuttavia di approccio e ragionamento fisico. Si è pertanto preferita una trattazione più fisica ed altrettanto efficiente.

Il primo passo per poter affrontare il problema da un punto di vista più quantitativo è passare ad un più comodo sistema di coordinate cilindriche (R, ϕ, z) . Si consideri un disco sottile, con tutta la materia che giace su un piano identificato da $z = 0$. Un'ulteriore assunzione è quella di orbite circolari, con velocità angolare $\Omega = u_\phi/R$. Queste restrizioni non sono forti come quelle fatte per il problema di Bondi, in quanto l'orbita di minore energia per un dato momento angolare è quella circolare. Risulta quindi plausibile che il gas si disponga in rotazione circolare su un disco sottile.

La componente azimutale della velocità sarà quella dominante, con una piccola componente radiale u_R , dovuta alla viscosità. Il disco è caratterizzato dalla sua densità superficiale $\Sigma(R, t)$, ottenuta integrando la densità del gas, ρ , su z .

Si consideri un anello di gas con raggio interno R con un'estensione radiale ΔR , di massa e momento angolare dati da:

$$m = 2\pi R \Delta R \Sigma \quad (2.3)$$

$$j = 2\pi R \Delta R \Sigma R^2 \Omega \quad (2.4)$$

La variazione di queste quantità è dovuta al flusso netto di materia che attraversa l'anello dagli anelli vicini. Si ha cioè un flusso netto di materiale che trasporta con sé momento angolare, modificando quindi queste due grandezze che descrivono l'anello considerato. Per quanto riguarda la massa si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(2\pi R \Delta R \Sigma) &= u_R(R, t) 2\pi R \Sigma(R, t) \\ &- u_R(R + \Delta R, t) 2\pi(R + \Delta R) \Sigma(R + \Delta R, t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Prendendone il limite per $\Delta R \rightarrow 0$ si ottiene

$$R \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial R}(R \Sigma u_R) = 0. \quad (2.6)$$

Per quanto concerne il momento angolare, oltre a questo flusso di massa, va considerato anche l'effetto di un momento torcente viscoso, $G(R, t)$, dovuto allo strisciare tra gli anelli. $G(R, t)$ è quindi il momento torcente che esercita un anello più esterno su uno più interno, pertanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(2\pi R \Delta R \Sigma R^2 \Omega) &= u_R(R, t) 2\pi R \Sigma(R, t) R^2 \Omega(R) \\ &- u_R(R + \Delta R, t) 2\pi(R + \Delta R) \Sigma(R + \Delta R, t) (R + \Delta R)^2 \Omega(R + \Delta R) \\ &+ G(R + \Delta R, t) - G(R, t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Facendo anche in questo caso il limite per $\Delta R \rightarrow 0$ otteniamo

$$R \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma R^2 \Omega) + \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma u_R R^2 \Omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial G}{\partial R}. \quad (2.8)$$

La forza che la viscosità esercita per unità di lunghezza su una circonferenza a un raggio R è $\nu \Sigma (R d\Omega/dR)$, dove ν prende il nome di viscosità cinematica ed è, in generale, il rapporto tra il primo coefficiente di viscosità e la densità del fluido. Il momento torcente viscoso su tutta la circonferenza è dunque

$$G(R, t) = 2\pi R \nu \Sigma R^2 \frac{d\Omega}{dR}. \quad (2.9)$$

Grazie a questa nuova espressione, possiamo riscrivere la (2.8) come

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Sigma R^2 \Omega) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma u_R R^2 \Omega) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dR} \right) \quad (2.10)$$

Il primo termine del membro di sinistra è la variazione di momento angolare per unità di superficie di un anello di raggio R , mentre il secondo termine rappresenta la perdita netta di momento angolare dovuta all'advezione dello stesso col flusso radiale. Il membro di destra deve pertanto essere un momento torcente viscoso netto, agente sulla regione. L'anello sperimenta un momento torcente, dovuto al materiale più interno, che tende ad aumentarne la velocità di rotazione. Al contrario, il materiale più esterno rallenta la rotazione; si ha, quindi, una variazione di momento angolare quando non c'è bilanciamento tra questi due effetti.

Si prenda ora in considerazione l'ipotesi di orbite kepleriane, che equivale a considerare un potenziale dovuto solo ed esclusivamente ad una massa centrale puntiforme, cioè la gravità dell'oggetto centrale domina su quella del disco, di cui, se ne trascura pertanto l'autogravità. Inserendo quindi l'espressione (2.2) per la velocità angolare nelle precedenti equazioni e combinandole per eliminare u_R , dopo un po' di manipolazione algebrica si ottiene:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(\nu \Sigma R^{\frac{1}{2}} \right) \right]. \quad (2.11)$$

Quest'ultima relazione descrive l'evoluzione del disco di accrescimento, più precisamente della sua densità. Il ridistribuirsi della densità superficiale (verso l'interno nelle zone centrali, favorendo l'accrescimento, e verso l'esterno nelle parti più lontane per conservare il momento angolare totale) è un processo diffusivo; vale a dire che la Σ soddisfa una equazione differenziale alle derivate parziali (PDE), che presenta una derivata temporale e due derivate spaziali, con un coefficiente di diffusione dell'ordine della viscosità cinematica. Quest'ultima potrebbe essere funzione di Σ , R e t ; la (2.11) è dunque una PDE non lineare in Σ . Se la ν fosse una funzione solo del raggio, avremmo un'equazione lineare in Σ ; inoltre, nel caso in cui la viscosità cinematica variasse come una potenza del raggio, risulta possibile una risoluzione analitica attraverso la separazione delle variabili.

2.1.2 Disco di accrescimento con viscosità costante

L'analisi dei casi risolvibili analiticamente risulta molto interessante, in quanto le soluzioni danno un'idea qualitativa di come effettivamente avviene l'accrescimento. Questa

scelta non deriva da una predizione fisica sulla natura della viscosità; è bensì una scelta puramente matematica, utile per risolvere l'equazione e capire come avviene questo processo a grandi linee, senza pretesa di stringente rigosità e precisione dal punto di vista fisico.

Considerando ν costante e $s = 2\sqrt{R}$ l'equazione (2.11) diventa

$$\frac{\partial}{\partial t}(R^{\frac{1}{2}} \Sigma) = \frac{12\nu}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2}(R^{\frac{1}{2}} \Sigma). \quad (2.12)$$

Cerchiamo una soluzione a variabili separate: $R^{\frac{1}{2}} \Sigma = T(t)S(s)$, otteniamo così

$$\frac{T'}{T} = \frac{12\nu}{s^2} \frac{S''}{S} = \text{costante} = -\lambda^2 \quad (2.13)$$

Gli apici denotano la derivazione rispetto alla variabile da cui dipende la funzione, quindi t per il membro di sinistra e s per quello di destra. La soluzione della parte temporale è un esponenziale, mentre la parte spaziale ha come soluzione una funzione di Bessel di ordine $\frac{1}{4}$.

È interessante trovare la Funzione di Green, che è la soluzione $\Sigma(R, t)$, quando si considera la distribuzione di massa iniziale come una delta di Dirac. In questo modo risulta facile capire come la viscosità influenza il disco e come la densità si modifica a partire da una situazione in cui si ha, praticamente, tutta la massa concentrata in un anello infinitamente sottile ad un certo raggio R_0 , vale a dire

$$\Sigma(R, 0) = \frac{m}{2\pi R_0} \delta(R - R_0). \quad (2.14)$$

Normalizzando il problema attraverso l'introduzione delle variabili adimensionali

$$x = \frac{R}{R_0}; \quad \tau = \frac{12\nu t}{R_0^2}, \quad (2.15)$$

si ottiene

$$\Sigma(x, \tau) = \frac{m}{\pi R_0^2 \tau x^{1/4}} \exp\left(-\frac{1+x^2}{\tau}\right) I_{\frac{1}{4}}(2x/\tau) \quad (2.16)$$

Il fattore $I_{\frac{1}{4}}(2x/\tau)$ è una funzione di Bessel modificata. In figura (2.1) è mostrata l'evoluzione della densità superficiale, e si può vedere come la materia che costituisce l'anello venga diffusa. L'effetto della viscosità è dunque quello di allargare l'anello distribuendone la materia su un disco sempre più ampio all'avanzare del tempo. La maggior parte della massa si muove verso il centro perdendo energia e momento angolare, ma una coda di materia si muove a raggi maggiori acquisendo momento angolare. Nel caso di interesse, il momento angolare specifico è dato da $j = R^2\Omega \propto R^{1/2}$, che tende quindi ad infinito a grandi raggi. Così, idealmente, tutta la materia finisce accresciuta nell'origine e una sola particella ad un raggio infinito possiede tutto il momento angolare. Ovviamente, l'anello non viene diffuso istantaneamente. Dato che il tempo entra nell'equazione (2.16) attraverso $\tau = 12\nu t R_0^{-2}$, il tempo scala caratteristico di questa espansione per un anello di raggio R_0 è dato da:

$$t_{visc} \sim \frac{R_0^2}{\nu}. \quad (2.17)$$

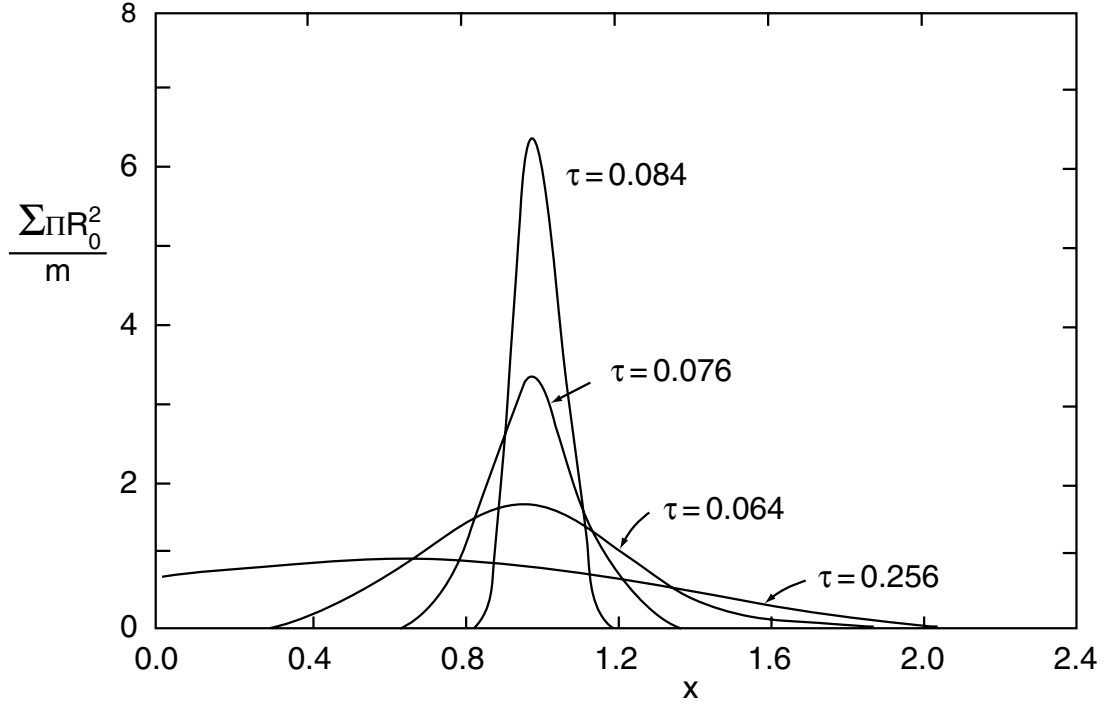


Figura 2.1: Evoluzione della densità superficiale Σ di un anello di massa m in presenza di viscosità. Σ espressa in funzione del raggio adimensionale x e del tempo adimensionale τ definiti dalle (2.15).

Come si è visto in precedenza, ad un dato istante, parte della massa viene accresciuta e parte si trasferisce a raggi maggiori; dovrà pertanto esserci un raggio nel quale la velocità radiale cambia segno. Ci si aspetta intuitivamente che questo raggio si sposti verso valori sempre più grandi all'aumentare del tempo. Conseguentemente, per tempi lunghi, tutta la massa verrà accresciuta. Ciò può essere formalizzato facilmente analizzando il comportamento asintotico della velocità radiale, la cui forma generale è

$$u_R = -3\nu \frac{\partial}{\partial R} \ln(R^{\frac{1}{2}}\Sigma) \quad (2.18)$$

Scrivendola in forma adimensionale e studiandone l'andamento si ha:

$$u_R \sim \frac{3\nu}{R_0} \left[\frac{1}{4x} + \frac{2x}{\tau} - \frac{2}{\tau} \right], \quad \text{per } 2x \gg \tau; \quad (2.19)$$

Che è > 0 per $x > 1$, e

$$u_R \sim -\frac{3\nu}{R_0} \left[\frac{1}{2x} - \frac{2x}{\tau} \right], \quad \text{per } 2x \ll \tau \quad (2.20)$$

che risulta < 0 quando $\tau > 4x^2$

Le regioni più esterne ($2x > \tau$) si muovono verso l'esterno, in quanto $u_R > 0$ nella (2.19), mentre quelle più interne vanno verso l'oggetto centrale ($u_R < 0$ nella (2.20)). Inoltre, il raggio nel quale u_R cambia segno si muove verso l'esterno. Ciò è spiegabile dal fatto che, preso un tempo equivalente a τ , e dato un x molto maggiore di τ , se si aspetta abbastanza tempo si avrà inevitabilmente $x \ll \tau$, finendo così nel regime

descritto dalla (2.20). Questo comportamento è visibile anche in figura (2.1), da cui si evince che il centro di massa dell'anello si muove verso raggi sempre più piccoli.

Natura della viscosità nel disco

Prima di proseguire, trattando il caso stazionario, è bene spendere qualche parola sulla viscosità da cui, come si è visto, dipende l'intero meccanismo del disco di accrescimento. Ci si chiede quale possa essere la sua origine. Molti modelli sono stati proposti, ma nessuno di essi risulta essere pienamente soddisfacente. Data la vastità e la difficoltà dell'argomento, che vanno ben oltre il livello di questa tesi, ci si limiterà ad un'analisi superficiale della possibile sorgente della viscosità. L'unica certezza, in questo campo, è che la viscosità molecolare non è sufficiente per spiegare i tempi scala nei quali avviene l'accrescimento. La viscosità cinematica molecolare, infatti, è dell'ordine del libero cammino medio delle particelle per la velocità termica: $\nu \simeq \ell_{UT}$. Per valori tipici dei dischi di accrescimento, utilizzando la relazione (2.17), si ottengono dei tempi scala 7 o 8 ordini di grandezza superiori a quelli associati ai suddetti. Quindi, se l'accrescimento dovuto alla viscosità spiega questi oggetti, deve esistere una sorgente alternativa. Un'ipotesi è quella di una viscosità dovuta alla turbolenza, $\nu_{turb} \simeq \ell_{turb} u_{turb}$, dove u_{turb} e ℓ_{turb} sono rispettivamente le velocità e le lunghezze tipiche associate alla turbolenza. Essendo la turbolenza uno dei problemi meno compresi di tutta la fisica classica, usarla per la descrizione della viscosità rende tutto molto complicato. Al momento, infatti, non esiste un modo per determinare le lunghezze di scala ℓ_{turb} e le velocità u_{turb} , ma è possibile solamente porre dei limiti superiori a queste grandezze. Assumendo $u_{turb} \leq c_s$ e $\ell \leq H$, dove H è l'altezza del disco, si può scrivere

$$\nu_{turb} \simeq \alpha c_s H \quad (\alpha \lesssim 1) \quad (2.21)$$

Questa è forse la parametrizzazione più usata per modellizzare la viscosità. L'ignoranza riguardo la viscosità va a finire tutta all'interno del parametro α da cui abbiamo guadagnato solo la condizione che esso sia minore di 1. Risulta interessante il fatto che si può giungere alla stessa parametrizzazione assumendo che la causa della viscosità non sia la turbolenza, ma la presenza di campi magnetici, sia radiali che lungo l'asse di rotazione, e instabilità magnetoidrodinamiche che causano l'avvolgimento di suddetti campi sul piano del disco.

2.1.3 Disco sottile stazionario

Un'altra soluzione di interesse astrofisico è quella stazionaria. Qui viene trattata per poter poi affrontare con facilità il problema dell'emissione termica da parte di questo tipo di disco. In una situazione stazionaria ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) le equazioni (2.6) e (2.10) diventano:

$$R\Sigma u_R = C_1 \quad (2.22)$$

$$\Sigma R^3 \Omega u_R - \nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dR} = C_2 \quad (2.23)$$

Con C_1 e C_2 costanti. Per un disco stazionario, la massa che attraversa un raggio R arbitrario per unità di tempo è data da $\dot{m} = -2\pi R\Sigma u_R$, e risulta costante:

$$C_1 = -\frac{\dot{m}}{2\pi} \quad (2.24)$$

Per calcolare la costante C_2 è necessaria una condizione al contorno. Un modo possibile è quello di assumere l'esistenza di un raggio dove lo scorrimento tra strati circolari sparisca. Consideriamo un raggio R_* , il quale può essere sia il raggio della stella sulla quale avviene l'accrescimento, sia il raggio dell'ultima orbita circolare stabile per un buco nero, che come già detto è $3r_s$, con r_s raggio di Schwarzschild definito da (I.1). In una situazione realistica, la stella ruoterà ad una velocità inferiore a quella di un'orbita Kepleriana sulla sua superficie. In questo caso la velocità angolare del disco aumenterà andando verso il centro fin quando non comincerà a diminuire verso il valore Ω_* , in uno strato limite vicino alla superficie della stella. Ci sarà pertanto un raggio $R = R_* + b$ nel quale lo scorrimento è nullo, vale a dire $\Omega' = 0$. Se $b \ll R$ allora il valore di Ω è molto vicino al valore Kepleriano nel punto in cui si ha $\Omega' = 0$. Cioè

$$\Omega(R_* + b) \simeq \Omega_K(R_*) = \left(\frac{GM}{R_*^3} \right)^{1/2}. \quad (2.25)$$

Ciò permette, insieme alle precedenti equazioni, di calcolare il valore della seconda costante:

$$C_2 = -\frac{\dot{m}}{2\pi} R_*^2 \Omega = -\frac{\dot{m}}{2\pi} (GM R_*)^{1/2} \quad (2.26)$$

Inserendo C_2 in (2.23):

$$\nu \Sigma = \frac{\dot{m}}{3\pi} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right]. \quad (2.27)$$

Da considerazioni fluidodinamiche, la dissipazione di energia per unità di area generata dalla viscosità cinematica ν è

$$D(R) = \nu \Sigma \left(R \frac{d\Omega}{dR} \right)^2 = \frac{3GM\dot{m}}{4\pi R^3} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right]^2 \quad (2.28)$$

Dove nella seconda uguaglianza sono state utilizzate le relazioni (2.27) e (2.2). L'equazione (2.28) è un risultato molto importante e soprattutto semplice, che permette di capire perché lo studio del disco sottile stazionario è così interessante. La viscosità, che rappresenta la più grande incognita e il più grande problema della teoria, non compare, a spese dell'assunzione che possa modificarsi in modo tale da mantenere un flusso di massa \dot{M} stazionario. Si noti che l'energia rilasciata tra un raggio R e $R + dR$ è approssimativamente $(3GM\dot{m}/2R^2)dR$, per $R \gg R_*$, vale a dire 3 volte maggiore della differenza di energia orbitale $(GM\dot{m}/2R^2)dR$. Questo eccesso è dovuto ad energia rilasciata a raggi più piccoli e trasportata ad R da forze viscosi. La luminosità totale emessa dal disco di accrescimento si ottiene integrando $D(R)$ su tutta l'area:

$$L = \int_{R_*}^{\infty} D(R) 2\pi R dR = \frac{GM\dot{m}}{2R_*} \quad (2.29)$$

Questo risultato sta a significare che metà dell'energia gravitazionale persa nella caduta da distanza infinita ad R_* viene emessa. L'altra metà rimane nella forma di energia cinetica del fluido a R_* . In caso di accrescimento su un buco nero, questa energia viene persa nel buco nero stesso, invece nel caso di accrescimento su un oggetto compatto con una superficie, questa energia viene rilasciata in uno strato limite.

Emissione da un disco sottile stazionario

Nel caso in cui gli anelli che compongono il disco siano otticamente spessi (cioè la radiazione è termalizzata), si ha emissione di corpo nero alla temperatura $T_{eff}(R)$ in modo tale che il flusso emesso bilanci la dissipazione; vale a dire, per la legge di Stefan-Boltzmann

$$2\sigma T_{eff}(R)^4 = D(R) = \frac{3GM\dot{m}}{4\pi R^3} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right]. \quad (2.30)$$

Dove il fattore 2 esplicita il fatto che il disco irradia da due superfici, quella superiore e quella inferiore, mentre σ è la costante di Stefan-Boltzmann. Per $R \gg R_*$ la temperatura assume il caratteristico profilo a legge di potenza del disco di accrescimento stazionario: $T_{eff} \propto R^{-3/4}$. Lo spettro emesso si ottiene sommando gli spettri di corpo nero di ciascun anello, pesandoli per la loro area. Il flusso ad una determinata frequenza ν sarà quindi dato da

$$F_\nu = \int_{R_*}^{R_{out}} B_\nu(T_{eff}(R)) 2\pi R dR, \quad (2.31)$$

in cui B_ν è la ben nota funzione di Planck e R_{out} è il raggio del disco. Lo spettro risultante è mostrato in figura (2.2). I termini del regime di Rayleigh-Jeans della Planckiana, che descrivono le regioni più fredde del disco, dominano lo spettro a basse frequenze, il quale risulta quindi proporzionale a ν^2 . Ad alte frequenze, nel regime di Wien, lo spettro presenta un cutoff esponenziale. Le zone del disco che più contribuiscono all'emissione in questa banda sono quelle più interne, vicino ad R_* . A frequenze intermedie, vale a dire per $kT_{out}/h \ll \nu \ll kT_*/h$, dove T_{out} è la temperatura a R_{out} , lo spettro avrà un andamento tanto più simile a $\nu^{1/3}$ quanto maggiore è la differenza di temperatura tra le zone esterne e quelle in prossimità di R_* . Quindi, dato che $T_{eff} \propto R^{-3/4}$, nei dischi di maggiori dimensioni è più facile osservare questo andamento nella zona centrale dello spettro, come si può vedere in figura (2.2).

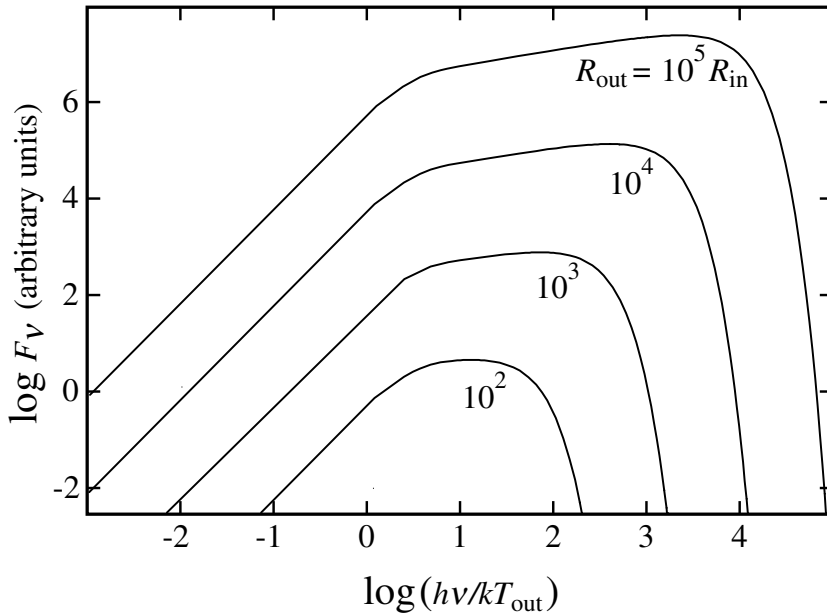


Figura 2.2: Spettro di un disco di accrescimento otticamente spesso, che irradia localmente come corpo nero, per diversi rapporti R_{out}/R_* .

Bibliografia

- [1] Bondi, H. *On spherically symmetrical accretion*. MNRAS, **112**, 195. 1952
- [2] Clarke, C.J.; Carswell, R. *Principles of Astrophysical Fluid Dynamics*. Cambridge University Press. 2007
- [3] Frank, J.; King, A. and Raine, D.J. *Accretion Power in Astrophysics*. Cambridge University Press, third edition. 2002
- [4] Korol, V. *Accrescimento di Bondi con electron scattering per buchi neri al centro di galassie*. Tesi di laurea magistrale, università di Bologna. 2014
- [5] Padmanabhan, T. *Theoretical Astrophysics Vol. II: Stars and Stellar Systems*. Cambridge University Press.
- [6] Pringle, J. E. *Accretion discs in astrophysics*. ARA&A **19**, 307. 1981
- [7] Shu, Frank H. *The physics of Astrophysics, Vol. II Gas dynamics*. University Science Books. 1991
- [8] Appunti delle lezioni del corso di Astrofisica Extragalattica tenuto da Luca Ciotti. A.A. 2014/2015.