



INSTITUTO DE PSICOLOGÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES EN PSICOLOGÍA,
COGNICIÓN Y CULTURA
DOCTORADO EN PSICOLOGÍA

**EL PENSAMIENTO ESTADÍSTICO ASOCIADO A LAS MEDIDAS DE
TENDENCIA CENTRAL: UN ESTUDIO PSICOGENÉTICO SOBRE LA
MEDIA ARITMÉTICA, LA MEDIANA Y LA MODA.**

Tesis doctoral presentada por:
YILTON RIASCOS FORERO

CALI, 2014



INSTITUTO DE PSICOLOGÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES EN PSICOLOGÍA,
COGNICIÓN Y CULTURA
DOCTORADO EN PSICOLOGÍA

**EL PENSAMIENTO ESTADÍSTICO ASOCIADO A LAS MEDIDAS DE
TENDENCIA CENTRAL: UN ESTUDIO PSICOGENÉTICO SOBRE LA
MEDIA ARITMÉTICA, LA MEDIANA Y LA MODA.**

Tesis doctoral presentada por:
YILTON RIASCOS FORERO

Bajo la Dirección de:
ROBERTO BEHAR GUTIÉRREZ Ph.D.

CALI, 2014

*Para empezar a aprender debemos tomar conciencia
de que no sabemos, cuando estamos convencidos que
lo sabemos todo...*

El agradecimiento a todas las personas que ayudaron a que este trabajo llegara a buen término, comienza por reconocer todos los errores que cometí y que son totalmente de mi responsabilidad. Sin embargo, el valor y comprensión de ellos, me ayudaron a corregir y aprender cuando creía que tenía toda la razón, estando totalmente equivocado:

A todos los profesores del Doctorado en Psicología, por aceptarme y comprender que mi forma de pensar requería de más tiempo que el promedio para captar la importancia del trabajo que debía realizar.

A mis directores de tesis, los dos primeros, Mariela Orozco y César Delgado por sus impulsos y animaciones para que continuara a pesar de mi ceguera conceptual. A la Doctora María Helena Fávero, por su acompañamiento y orientación para darle rumbo a este trabajo. A Roberto Behar, por los incansables años de trabajo y compañía a través del pregrado la Maestría y el Doctorado.

A mis compañeros de estudio, hoy casi todos doctores, por su ayuda y animación cuando más lo necesité.

A Miguel Santiago, porque con su llegada ha colmado mi vida de una dicha que apenas comienzo a disfrutar y a quien espero acompañar por muchos años.

A las tres mujeres más maravillosas que la vida puso en mi camino, aunque desafortunadamente para mí en un mismo período de tiempo, y quienes se encargaron de darme motivos para entender que a pesar de fallar y defraudar es posible recuperarse y continuar avanzando. Ellas son: María Helena, con su fortaleza, carácter y capacidad conceptual, me enseñó que la vida hay que vivirla con placer completo; Erika Rosana, con su entrega desinteresada, su honestidad y su amor por hacer las cosas bien, me enseñó que no todo en la vida es conocimiento, que se debe vivir por los otros y con los otros; María Elena, con su abnegación, inteligencia y perseverancia, se ha mantenido a mi lado por todos estos años y me ha enseñado que sembrando, trabajando y andando se logra llegar muy lejos, con buen paso pero sin prisa.

A mi padre, quien siempre nos ha inculcado la honradez y los valores morales; a mis hermanas, mi hermano y sobrinos que nunca han dejado de quererme y creer en mí como ejemplo de persona confiable.

Finalmente y no menos importante, a todas aquellas personas que siempre me han mostrado su aprecio y cariño y que por todas sus manifestaciones se hizo posible la culminación de este esfuerzo.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN.....	1
INTRODUCCIÓN.....	3
PARTE I: FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA.....	7
CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES	7
1.1. Investigaciones sobre Desarrollo Cognitivo de conceptos Estadísticos	7
1.2. Investigaciones sobre comprensión de conceptos Estadísticos.....	9
1.3. Investigaciones sobre Razonamiento y Razonamiento Estadístico	13
1.4. Importancia de la Estadística en el currículo de matemáticas y en la formación de docentes.....	17
CAPÍTULO 2. PERSPECTIVA COGNITIVA.....	20
2.1 Psicogénesis del conocimiento Estadístico	20
2.2 Los esquemas como instrumentos de construcción de conocimiento	24
2.3 Representación y Desarrollo Cognitivo.....	30
2.4 Estrategias Cognitivas	33
2.5 Procesos de Abstracción y de Generalización.....	42
2.6 Proceso de Toma de Conciencia.....	45
2.7 Metacognición	48
2.8 Psicología del Conocimiento	52
CAPÍTULO 3. CONOCIMIENTO ESTADÍSTICO.....	58
3.1 Pensamiento Estadístico	58
3.2 Génesis de las medidas de tendencia central.....	64
3.3 La Moda.....	66
Elementos estructurales de la moda	67
3.4 La Mediana	69
Elementos estructurales de la mediana.....	70
3.5 La Media aritmética.....	72

Elementos estructurales de la media aritmética.....	75
CAPÍTULO 4. INVESTIGACIÓN SOBRE APRENDIZAJE DE CONCEPTOS ESTADÍSTICOS.....	77
4.1 Los esquemas en Didáctica de la Matemática.....	77
4.2 Prácticas de enseñanza y prácticas de evaluación formal.....	78
4.3 Formación de docentes	81
4.4 La investigación sobre formación de profesores de estadística.....	82
PARTE II: EL ESTUDIO.....	87
CAPÍTULO 5. UN PROBLEMA Y UN MÉTODO	87
5.1 Delimitación del Problema y Escogencia del Método.....	87
5.2 Niños y niñas Participantes.....	91
5.3 Procedimiento de Recolección de Datos	93
5.4 Diseño y elaboración de las tareas.....	94
5.5 Análisis Objetivo de las Tareas	97
5.5.1 Descripción de las tareas.....	97
5.5.2 Entrevista general.....	98
5.5.3 Estructura de la tarea.....	100
5.6 Análisis Subjetivo de la Tarea	106
5.6.1 Demanda cognitiva de la tarea y niveles de desempeño	106
5.6.2 Esquemas de Clasificación.....	107
5.6.3 Esquemas de Conteo	108
5.6.4 Construcción de indicadores de tendencia central	110
5.7 Procedimiento de Análisis de los Datos	114
5.7.1 De Videos a Rejillas de Registro	114
5.7.2 De Rejillas de Registro a Tablas de Niveles	116
CAPÍTULO 6. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS	119
6.1 Ubicación en el Contexto	119
6.2 Condiciones iniciales de la investigación.....	121
6.3 Descripción de las estrategias identificadas	123
6.3.1 Máximo de un Conjunto:	125
6.3.2 Cardinal o Cantidad de un Conjunto.....	126
6.3.3 Ley de Tricotomía Simple o por Etapas.....	128
6.3.4 Suma Iterada o Continua.....	129

6.3.5 Regla de proporcionalidad	132
6.4 Desempeños de las Estrategias en las Tareas	133
6.5 Resultados de desempeño para niños y niñas de la fase etaria de 9 años.....	143
6.6 Resultados de desempeño para niños y niñas de la fase etaria de 10 años.....	145
6.7 Resultados de desempeño para niños y niñas de la fase etaria de 11 años.....	147
6.8 Resultados de desempeño para niños y niñas de la fase etaria de 12 años.....	149
6.9 Resultados de desempeño para niños y niñas de la fase etaria de 13 años.....	151
6.10 Resultados de desempeño para niños y niñas de la fase etaria de 14 años	153
6.11 Resultados de desempeño general de los niños y niñas	155
CONSIDERACIONES FINALES	159
1 Consideraciones en relación al primero objetivo	159
2 Consideraciones en relación al segundo objetivo.....	160
3 Consideraciones en relación al tercer objetivo	162
4 Consideraciones en relación al cuarto objetivo	164
CONCLUSIONES.....	167
ANEXOS.....	173
BIBLIOGRAFÍA.....	175

LISTA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Ejemplos de instantes de sesiones de trabajo con algunos participantes.....	92
Ilustración 2. Conjuntos de cajas de fósforos utilizados en las tareas.....	97
Ilustración 3. Secuencia de trabajo en la presentación de la situación	98
Ilustración 4 Marcas de las cajas de fósforos utilizadas en la investigación.....	100
Ilustración 5 Ejemplo de suma iterada (dos términos a la vez).....	130
Ilustración 6 Ejemplo de suma continua.....	130
Ilustración 7 Ejemplo de suma continua a partir de tablas de frecuencias	131

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Listas de datos de la tarea de la Moda para las 40 cajas de fósforos	96
Figura 2. Listas de datos de la tarea de la Mediana para las 40 cajas de fósforos.....	96
Figura 3. Lista de datos de la tarea la Media Aritmética para las 50 cajas de fósforos.....	96
Figura 4 Distribución de los contenidos de las cajas presentadas en la parte de ambientación.....	102
Figura 5 Rejilla de Registro elaborada con información del video	124

LISTA DE TABLAS

Tabla I Temas y preguntas de investigación del Estudio Conjunto de la IASE y el ICMI	84
Tabla II. Características de las edades del grupo participante.....	93
Tabla III. Características sociodemográficas del grupo participante	93
Tabla IV Análisis de varianza para comparar la distribución de las estrategias por tarea	137
Tabla V Descripción y secuencias de acciones en la elaboración de las Estrategias utilizadas por niños y niñas al resolver la tarea de la Moda.....	138
Tabla VI Descripción y secuencias de acciones en la elaboración de las Estrategias utilizadas por niños y niñas al resolver la tarea de la Mediana.	140
Tabla VII: Descripción y secuencias de acciones en la elaboración de las Estrategias utilizadas por niños y niñas al resolver la tarea de la Media Aritmética.....	141
Tabla VIII Distribución según el desempeño de los niños de 9 años al resolver las Tareas	144
Tabla IX Distribución según el desempeño de los niños de 10 años al resolver las Tareas	146
Tabla X Distribución según el desempeño de los niños de 11 años al resolver las Tareas	148
Tabla XI Distribución según el desempeño de los niños de 12 años al resolver las Tareas	150
Tabla XII Distribución según el desempeño de los niños de 13 años al resolver las Tareas	152
Tabla XIII Distribución según el desempeño de los niños de 14 años al resolver las Tareas	154

LISTA DE GRÁFICAS

Gráfico 1 Distribución porcentual de la utilización de Cajas y Escritura (Lápiz y Papel) para resolver las tareas.	134
Gráfico 2 Distribución porcentual de la utilización de Estrategias para resolver las tareas.	134
Gráfico 3 Distribución porcentual del desempeño exitoso de las Estrategias al resolver las tareas.....	136
Gráfico 4 Distribución porcentual del uso de Cajas para resolver las tareas, según la Edad.	136
Gráfico 5 Distribución porcentual del uso de Escritura (Lápiz y Papel) para resolver las tareas según la edad.	137
Gráfico 6 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 9 años en la tarea de la Moda.....	145
Gráfico 7 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 9 años en la tarea de la Mediana.....	145
Gráfico 8 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 9 años en la tarea de la Media.....	145

Gráfico 9 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 10 años en la tarea de la Moda.....	147
Gráfico 10 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 10 años en la tarea de la Mediana	147
Gráfico 11 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 10 años en la tarea de la Media Aritmética.....	147
Gráfico 12 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 11 años en la tarea de la Moda.....	149
Gráfico 13 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 11 años en la tarea de la Mediana	149
Gráfico 14 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 11 años en la tarea de la Media Aritmética.....	149
Gráfico 15 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 12 años en la tarea de la Moda.....	151
Gráfico 16 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 12 años en la tarea de la Mediana	151
Gráfico 17 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 12 años en la tarea de la Media Aritmética.....	151
Gráfico 18 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 13 años en la tarea de la Moda.....	153
Gráfico 19 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 13 años en la tarea de la Mediana	153
Gráfico 20 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 13 años en la tarea de la Media Aritmética.....	153
Gráfico 21 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 14 años en la tarea de la Moda.....	155
Gráfico 22 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 14 años en la tarea de la Mediana	155
Gráfico 23 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 14 años en la tarea de la Media Aritmética.....	155
Gráfico 24 Desempeño General Tarea de la Moda	156
Gráfico 25 Desempeño General Tarea de la Mediana.....	156
Gráfico 26 Desempeño General Tarea de la Media	157

RESUMEN

Las investigaciones de la psicología cognitiva en lo que se refiere a la génesis de los conceptos estadísticos no se encuentra muy avanzado, debido a que la preocupación por esos conceptos se encuentra en los desarrollos que la educación pueda ofrecer, aunque se piense en la actividad de los sujetos (Batanero C. , 2002).

Los orígenes de estos trabajos inician con Piaget & Inhelder (1951) y Fischbein (1975) que luego continuaron y a partir de los años 80's (Cobb, 1986; Nisbett & Ross, 1980) comenzaron una dinámica hasta alcanzar la relevancia que hoy ostenta en todos los niveles de formación (Ottaviani, 2002).

La preocupación particular por indagar acerca de los problemas de enseñanza y aprendizaje de los conceptos estadísticos básicos, particularmente por la media aritmética, comienza con los trabajos de Pollatsek, Lima, & Well (1981) y los de Mevarech (1983); alcanzando avances significativos con el trabajo de los profesores Batanero y Godino (1991) quienes fortalecieron su trabajo con los desarrollos alcanzados en el programa de doctorado de la Universidad de Granada, donde Belen Cobo (2003) presenta su tesis doctoral "Significado de las Medidas de posición central para los estudiantes de secundaria" que es el referente que más cercano que encontramos a la investigación aquí desarrollada.

El objetivo propuesto en esta investigación en acuerdo con la propuesta piagetiana y haciendo énfasis en el desarrollo de los esquemas como procesos básicos que van a continuar desarrollándose durante toda la vida a través de procedimientos de aprendizaje, se estableció en términos de contribuir en la explicación de la psicogénesis de los conceptos estadísticos elementales de moda, mediana y media aritmética, en niños de edades entre 9 y 14 años

Empleando el método clínico crítico (Bang, 1970 (1968)) como método de indagación y teniendo en cuenta los procesos de Abstracción, Generalización, Toma de conciencia y Metacognición, se adelantó un trabajo de caracterización de los esquemas de pensamiento en términos de estrategias (Inhelder B. , 1978; Inhelder & de Caprona, 2007) logrando, con la participación de 79 niños de dos municipios de Colombia que resolvieron la tarea propuesta, identificar 5 estrategias (Máximo de un conjunto, Cardinal o cantidad de un conjunto, Ley de tricotomía simple o por etapas, Suma iterada o continua y Regla de proporcionalidad) que en su organización jerárquica permiten evidenciar los indicios buscados en la dirección propuesta

Palabras clave: Indicadores de tendencia central, Estudio psicogenético, Pensamiento Estadístico, Estrategias de Pensamiento, Psicología del Conocimiento.

SUMMARY

The investigations of the cognitive psychology regarding the genesis of the statistical concepts he is not very advanced, due to the fact that the worry for these concepts is in the developments that the education could offer, though it is thought about the activity of the subjects (Batanero C. , 2002).

The origins of these uncial works with Piaget and Inhelder (1951) and Fischbein (1975) that then continued and from the years 80's (Cobb, 1986; Nisbett & Ross, 1980) they began a dynamic up to reaching the relevancy that today it shows in all the training levels (Ottaviani, 2002).

The particular worry for investigating brings over of the problems of education and learning of the statistical basic concepts, particularly for the arithmetic mean, begins with Pollatsek's works, Lima, and Well (1981) and those of Mevarech (1983); reaching significant advances with the work of the teachers Batanero and Godino (1991) who strengthened his work with the developments reached in the program of doctorate of the University of Granada, where Bethlehem Sea snail (2003) presents his doctoral thesis " Meaning of the Measures of central position for the students of secondary " that is the modal that more nearby we find to the investigation here developed.

The aim proposed in this investigation in agreement with the offer Piagetian and doing emphasis in the development of the schemes as basic processes that are going to continue developing during the whole life across procedures of learning, it was established like to contribute in the explanation of the psychogenesis of the statistical elementary fashionable concepts, median and arithmetic mean, in children of ages between 9 and 14 years

Using the clinical critical method (Bang, 1970 (1968)) as method of investigation and having in mind the processes of Abstraction, Generalization, Capture of conscience and Metacognition, there went forward a work of characterization of the schemes of thought in terms of strategies (Inhelder B. , 1978; Inhelder & de Caprona, 2007) managing, with the participation of 79 children of two municipalities of Colombia who solved the proposed task, to identify 5 strategies (Maximum of a set, Cardinal or quantity of a set, Simple tricotomía law or for stages, Iterate or constant sum and Rule of proportionality) that in his hierarchic organization allow to demonstrate the indications looked in the proposed direction

Key words: Indicators of central trend, Psychogenetic Study, Statistical Thinking, Strategies of Thought, Psychology of the Knowledge.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo pretende descubrir mecanismos de pensamiento que permiten construir posibles explicaciones acerca del funcionamiento del pensamiento de los niños cuando construyen conceptos estadísticos básicos a través de la solución de una situación problema que requiere los conceptos de medidas de tendencia central.

En el estudio se tomaron éstas medidas porque, además de ser consideradas básicas en la construcción y el fortalecimiento de la alfabetización estadística y ser instrumentos clave en la solución de un importante campo de problemas, (Batanero C. , 2002; Batanero C. , 2000; Batanero C. , 2001; Ben-Zvi & Gardfiel, 2004), se han observado numerosas dificultades en los procesos de comprensión, construcción y aplicación o utilización, reportadas en las investigaciones que desde la perspectiva de la formación curricular se han realizado (Strauss & Bichler, 1988; Watson & Moritz, 1999; Watson & Moritz, 2000; Jones, Langrall, Mooney, & Thornton, 2004; Cobo B. , 2003; Cobo & Batanero, 2000; Russell & Mokros, 1990). (Pollatsek, Lima, & Well, 1981)

El problema se enfocó desde la perspectiva de la psicología cognitiva buscando identificar y mostrar evidencias, desde la actividad del niño, que permitan ampliar la comprensión acerca del funcionamiento y la organización de los instrumentos, procesos y mecanismos cognitivos que asisten la génesis de estas medidas estadísticas.

Desde esta perspectiva teórica asumimos una posición sobre la construcción de conocimientos basada en la epistemología genética (Piaget, 1975 (1978); Piaget, Inhelder, García, & Vonèche, 1981; Piaget, 1970 (1986); Piaget & García, 1982; Pascual-Leone, 1997), que permitió identificar las estrategias como unidades de análisis para abordar el estudio genético de los instrumentos cognoscitivos entendiendo que éstos “*están sometidos a las normas que se da o acepta el sujeto en sus actividades intelectuales*” (Piaget & García, 1982, pág. 15)

Este trabajo se efectuó a través de tres tipos de análisis: el *formalizante* que se orienta hacia los “problemas de estructura formal de los conocimientos y la validez de sus sistemas”; el análisis *histórico-crítico* que aborda la “*reconstitución de la historia de la ciencia en tanto análisis de los procesos conducentes de un nivel de conocimiento a otro*” (Piaget & García, 1982, pág. 18) y el análisis *psicogenético* que da cuenta de los orígenes y mecanismos que hacen posible el desarrollo de tales estructuras.

Empleando la entrevista clínica en un ambiente escolarizado, a través de un diseño transversal, con 79 niños y niñas, sin formación estadística previa, de edades comprendidas entre 9 y 14 años, estudiantes de colegios rurales y urbanos de nivel socioeconómico medio y bajo de los municipios de Cali y Popayán (capitales de los Departamentos de Valle del Cauca y Cauca, Colombia, respectivamente), y de los grados 4° a 9° del Sistema Educativo Colombiano, se les solicitó resolver una situación problema constituida por tres tareas cada una de las cuales involucraba en su solución la necesidad de una medida de tendencia central (Moda, Mediana y Media Aritmética).

Todas las entrevistas fueron registradas en video y procesadas utilizando una metodología cualitativa que permitió la construcción de tablas de síntesis de las observaciones, a través de las cuales se logró la identificación de las 5 estrategias empleadas por los niños y niñas, así como su clasificación en niveles jerárquicos (Fávero M. H., 2005). Estas estrategias, en su orden de complejidad se denominaron: 1. Máximo de un conjunto; 2. Cardinal o cantidad de un conjunto; 3. Ley de tricotomía simple o por etapas; 4. Suma iterada o continua, y 5. Regla de proporcionalidad.

Los resultados de esta investigación se diferencian de otros reportados en la bibliografía ya que éstos últimos han sido obtenidos del estudio de conceptos estadísticos a partir de propuestas basadas en la evaluación del aprendizaje producto

de la aplicación u observación de situaciones de enseñanza, tales como la observación de errores y dificultades, del significado personal de los conceptos de los niños y niñas, y su contraste con significados institucionales (formales). En este trabajo se intenta explicar, en términos del funcionamiento cognitivo del pensamiento del niño, la génesis de los mecanismos que éste utiliza, en los cuales involucra los conceptos asociados a indicadores de tendencia central para resolver tareas que los requieren, considerando las variables de la tarea, su conocimiento matemático previo y el conocimiento que el contexto le provee y que el niño considera necesario.

Finalmente se discute la importancia de considerar la Psicología del Conocimiento como un argumento teórico eficiente para el estudio de los fenómenos de enseñanza y aprendizajes de las matemáticas en general y la estadística en particular, así como del estudio de los fundamentos de las prácticas de los docentes de matemáticas y estadística.

PARTE I: FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

El concepto fundamental de la psicología de la Ilustración había sido sencillamente la naturaleza humana. Al terminar el siglo XIX, ese concepto fue reemplazado por algo diferente: la persona normal
(Hacking, 1995, pág. 17)

CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES

1.1. Investigaciones sobre Desarrollo Cognitivo de conceptos Estadísticos

En lo que hace referencia al desarrollo cognitivo de conceptos estadísticos, los estudios de Piaget e Inhelder (1951) son los primeros que se ubican en la perspectiva que los entiende como un desarrollo por etapas, en lo que Piaget denominó etapas de desarrollo cognitivo.

Estos autores se centraron en la descripción de la forma de adquisición de las ideas de aleatoriedad y probabilidad, del razonamiento combinatorio, de la intuición de la frecuencia relativa, la distribución y la convergencia, así como de la capacidad de cuantificación de probabilidades por parte de los niños; determinando, en consecuencia, diferentes estadios del proceso del razonamiento probabilístico (Matalon, 1979).

Los trabajos de estos autores proporcionan una información sustantiva para comprender el desarrollo de los esquemas básicos utilizados en el estudio de fenómenos aleatorios, que a la vez resultan importantes para avanzar en la investigación acerca del desarrollo de esquemas cognitivos relacionados con conceptos estadísticos; sin embargo, estos últimos no recibieron atención por parte de Piaget ni de otros psicólogos interesados en los estudios del desarrollo evolutivo de las ideas matemáticas en niños y adolescentes (Cobo B. , 2003).

Otro autor que en particular aportó resultados que permearon el campo de estudio del desarrollo cognitivo en la Educación Estadística fue Efrain Fischbein (1975), quien además de ser uno de los primeros en establecer relaciones entre la Psicología y la Educación Matemática, se interesó por comprender y explicar la construcción de conceptos formales, por el descubrimiento de intuiciones sobre los conceptos estocásticos y por el efecto de la enseñanza en la comprensión de conceptos probabilísticos.

Sus investigaciones apoyan la conveniencia de adelantar la enseñanza de la estadística en la escuela y también evidencian que sin enseñanza es difícil que se desarrolle un razonamiento estocástico adecuado, incluso una vez que se alcanza la etapa de las operaciones formales que señala Piaget (Batanero C. , 2001).

La mayoría de estudios relacionados con el desarrollo de conceptos estadísticos han continuado y profundizado las propuestas iniciales de éstos autores, enfatizando

más en observar el desarrollo de tales conceptos a partir de la implementación de propuestas de enseñanza (Batanero C. , Godino, Holmes, & Vallecillos, 1993; Friel, Bight, Frierson, & Kader, 1997; Garfield, 1995; Godino, Batanero, & Cañizares, 1991), sin centrar el interés en las ideas iniciales que pueden tener su génesis en conocimientos matemáticos previos que son utilizados por los niños al intentar resolver problemas de naturaleza estadística sin contar con los conocimientos básicos en esta área.

1.2. Investigaciones sobre comprensión de conceptos Estadísticos

En el campo de investigación del aprendizaje de la estadística, se presentan estudios que cubren rangos de edad muy amplios, desde los 8 hasta los 22 años, para explicar los problemas y las dificultades que los estudiantes encuentran para comprender los conceptos estadísticos que se les enseña.

Los primeros estudios (Pollatsek, Lima, & Well, 1981; Mevarech, 1983) evidenciaron problemas relacionados con errores de los estudiantes al resolver las tareas propuestas. Estudios posteriores (Garfield & Ahlgren, 1988; Strauss & Bichler, 1988), además de presentar explicaciones a los errores, justificados en el incumplimiento de algunas propiedades matemáticas de los conceptos, particularmente de la media aritmética, en la presencia de creencias equivocadas y conocimientos previos que operan como obstáculos, encontraron que estas explicaciones no

justificaban todos los hechos reportados, concluyendo que muchos de estos errores no se debían exclusivamente a la falta de atención o de motivación de los estudiantes, aunque no lo pudieron exponer con mayores detalles. Estas explicaciones las avalaron con evidencias encontradas al evaluar grupos grande de estudiantes (más de 100 jóvenes).

Estudios posteriores, realizados con la intención de buscar mayores explicaciones para estos hechos, (Watson & Moritz, 1999; Garfield, 1995; Garfield & Gall, 1997), se apoyaron en planteamientos cognitivos para explicar la evolución de la comprensión de los conceptos estadísticos basándose en los supuestos de que: a) La comprensión, que una persona realiza, de un determinado concepto, pasa por diversos estadios¹ que se manifiestan en sus respuestas y b) En un momento determinado, la complejidad de los razonamientos de un sujeto está relacionada con el estadio en el que se encuentra. Para esto utilizaron como metodología el modelo de desarrollo neopiagetiano de Biggs y Collis (1982; 1991), que clasifica las respuestas de los alumnos en una jerarquía que refleja la estructura de los resultados del aprendizaje observados (modelo de la teoría de la taxonomía SOLO²) en el dominio de contenidos de las tareas.

¹ Piaget y su equipo de colaboradores, interesados en la comprensión del desarrollo cognitivo del ser humano presentan una propuesta para comprender sus estadios, Piaget (1946), Inhelder y Piaget (1955), Piaget (1969), Piaget (1979), desde la infancia hasta la adolescencia, explicando cómo las estructuras psicológicas se desarrollan a partir de los reflejos innatos, se organizan durante el primer año en esquemas de conducta, se interiorizan durante el segundo año de vida como modelos de pensamiento y se desarrollan durante la infancia, la adolescencia y la adultez en complejas estructuras intelectuales que caracterizan la vida adulta.

² Sigla del término inglés Structure of the Observed Learning Outcome (Estructura de los logros de aprendizaje observados) definida por sus autores como un modelo del objetivo y la evaluación sistemática de la calidad del aprendizaje. Para su construcción los autores estudiaron la organización de las respuestas de cientos de estudiantes de los niveles básicos universitarios en asignaturas como historia, matemáticas, creación literaria, lectura, geografía e idiomas extranjeros, encontrando que en todos los casos emerge una estructura similar. Esta Estructura Observada como Resultado del Aprendizaje forma la base de la Taxonomía SOLO, que puede ser aplicada para evaluar el aprendizaje en una gran variedad de situaciones escolares y universitarias en muchas asignaturas de diferentes áreas.

En un estudio posterior, Watson & Moritz (2000) utilizando una metodología de corte longitudinal complementada con entrevistas, corroboran los resultados de su anterior investigación, mostrando desde el análisis de los protocolos y con los niveles de la escala, que los niños y niñas mejoran la comprensión al resultar evaluados en niveles superiores de la misma, pero no consiguen explicar la evolución de los esquemas mentales asociados.

Los trabajos que desde hace más de 20 años adelantan los profesores Godino y Batanero (Batanero C. , Godino, Holmes, & Vallecillos, 1993; Godino J. D., 1995) de la Universidad de Granada en España, recogen muchos de los interrogantes que se han planteado investigaciones anteriores y ubicaron, desde la perspectiva de la Didáctica de las Matemática, un modelo cognitivo centrado en la evaluación del significado de los conceptos, para explicar tal evolución. Este trabajo establece una propuesta teórica denominada “Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática” (Godino J. D., 2002; Godino J. D., 2012), que ha sido uno de los pilares de trabajo sobre los que se apoya el programa de doctorado en Didáctica de las Matemáticas de esa universidad.

Uno de los trabajos desarrollados bajo esta perspectiva y que tiene estrecha relación con lo adelantado en esta investigación, es el trabajo de Cobo (2003), quien realiza un estudio teórico-experimental sobre el significado y la comprensión de las medidas de posición central en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) de España, para analizar los tipos de problemas, representaciones, procedimientos de cálculo,

definiciones, propiedades y argumentaciones relacionados con estos objetos, tanto en su faceta institucional como personal.

Bruner (1991), señala que es el estudio del significado el centro de atención que siempre ha tenido la Psicología, desde antes de la época de la denominada “Revolución Cognitiva”, haciendo énfasis en que son los actos de los niños y niñas, en interacción con la sociedad a la que pertenecen y deben integrarse, los que constituyen la fuente de información sobre la cual se deben realizar los estudios relacionados con los problemas de interés de esta ciencia.

Es así que, además de tener formulada una perspectiva del desarrollo cognitivo que tenga en cuenta las propiedades formales de los productos del pensamiento, su naturaleza instrumental, la importancia de la cultura en el modelado de estos productos y el lugar del hombre en su contexto evolutivo, debe igualmente plantearse si también con ello se contribuye a la comprensión de cómo educar al hombre para que utilice plenamente su patrimonio intelectual. Porque si una teoría del desarrollo de la mente no puede ayudar en esta empresa, no contribuye al conocimiento del proceso educativo y, lo más probable es que tal teoría sea errónea.

En esta dirección y apoyados en el marco de la epistemología genética, intentamos centrar el esfuerzo investigativo que aquí se presenta, con la intención de contribuir en el avance de resultados que permitan explicar las particularidades que estos interrogantes presentan a la comunidad de Educadores Estadísticos del Mundo.

1.3. Investigaciones sobre Razonamiento y Razonamiento Estadístico

Entendiendo el razonamiento como el proceso que permite a los seres humanos, particularmente a los niños y niñas, extraer conclusiones a partir de premisas o hechos acaecidos previamente, es decir, obtener algo nuevo a partir de algo ya conocido, este proceso de extracción de conclusiones o proceso de inferencia, se suele dividir tradicionalmente en razonamiento deductivo e inductivo.

El primero, supone que la conclusión se infiere a partir de las premisas, por estar lógicamente incluidas en ellas. La verdad de las conclusiones en este tipo de razonamiento depende de la verdad de las premisas. El segundo, posibilita únicamente la extracción de conclusiones probables, debido a que la información de las premisas no asegura la verdad de la conclusión.

De esta forma, el razonamiento inductivo resulta ser un proceso de generalización por medio del cual obtenemos una regla a partir de un determinado número de situaciones concretas que hacen verdadera tal regla. El no cumplimiento de la regla en una situación, la hará falsa. Esta distinción podría no servir cuando lo que se plantea es el desempeño de un sujeto enfrentado a un proceso de razonamiento, puesto que las evidencias observadas en los comportamientos del sujeto no permiten asegurar que se deban a la utilización permanente de una regla generalizable a ese tipo de situaciones.

En este caso, la propuesta de Wason (1984), que sostiene que sería más práctica la distinción entre problemas “cerrados” y “generativos”, podría ser mejor. Ya que en los problemas cerrados se les presenta a los niños y niñas toda la información relevante y suelen ser problemas con una estructura lógica bien definida; mientras que en los problemas generativos se le exige al sujeto producir o generar información para encontrar la solución. Los problemas lógicos, propios de este último tipo, y en particular el silogismo, han llamado la atención de los psicólogos y han sido utilizados a menudo tanto para investigar el razonamiento, como para medir la capacidad intelectual (Carretero & García Madruga, 1984, pág. 49).

En el campo de la Didáctica de las Matemáticas, el razonamiento es un término muy frecuente en las propuestas investigativas. Para los interesados en ella, y en particular en la Didáctica de la Estadística, la preocupación fundamental es identificar los puntos difíciles y los errores que persisten al finalizar la enseñanza, para poder diseñar actividades didácticas adecuadas y superar estas dificultades e informar a los profesores sobre las mismas (Cobo B. , 2003).

En los contextos en que se abordan los procesos de enseñanza y aprendizaje de la estadística, el razonamiento, como sustantivo aplicado a la disciplina, se usa indistintamente para referirse a conceptos como pensamiento científico, razonamiento científico, pensamiento crítico y razonamiento informal, lo que dificulta el interés al abordar una discusión rigurosa al respecto.

Por otra parte, en diversos ámbitos educativos se ha reconocido la necesidad de diseñar ambientes de aprendizaje que faciliten el desarrollo de las habilidades de los estudiantes para razonar, considerando aspectos como: evaluar críticamente los datos, hacer inferencias y defender argumentos de manera lógica y sistemática a partir de los mismos.

Otros investigadores (Garfield, 1994; Ben-Zvi & Gardfiel, 2004; Garfield, 1995) postulan que la idea central en el fortalecimiento del razonamiento crítico es que los individuos piensen reflexivamente, más que solo acepten los supuestos y lleven a cabo los procedimientos sin atender a la comprensión ni atribuirle sentido a lo que se pretende aprender, una postura que se puede interpretar como centrada en los procesos y algoritmos de la disciplina y no pensada desde el sujeto que interactúa con tales conceptos y le otorga sentido a partir de sus acciones.

Desde aquí, se puede observar que no aparece una postura rigurosamente apoyada en la psicología cognitiva que permita determinar una definición de pensamiento estadístico, es así como se pueden encontrar expresiones circulares en el sentido de que un “buen” razonamiento estadístico ocurre cuando los problemas están relacionados completa y apropiadamente con reglas abstractas y satisfacen los principios estadísticos; sin aclarar lo que se debe entender por un “principio estadístico”; ó, que el razonamiento estadístico implica el uso de estrategias heurísticas, adicionales al conocimiento y la aplicación de las reglas estadísticas en el contexto en el que son

utilizadas; sin aclarar, en este caso, lo que se entiende por “reglas estadísticas”; ó, finalmente, que en la literatura especializada se encuentran evidencias de que el entrenamiento o la instrucción en reglas abstractas mejoran el razonamiento estadístico.

Las investigaciones en este campo no abundan, y las iniciales (Lavigne, 1999), tratan de evidenciar factores que inciden en el razonamiento a partir de la enseñanza, otros (Wild & Pfannuch, 1999), analizando los resultados de las aplicaciones en el contexto de los resultados esperados en los cursos y en la formación de profesionales en estadística, plantean modelos teóricos para su explicación o intentan una sistematización de las investigaciones en el área (Hawkins, Jolliffe & Glickman, 1992; (citados en Garfield (1994)) sin diferenciar entre pensamiento y razonamiento.

En la mayor parte de la literatura de didáctica de la estadística, los términos centrales que se utilizan para hablar de “razonamiento estadístico” son los de pensamiento estadístico, razonamiento estadístico y alfabetización estadística. Aun cuando estos términos han sido usados indistintamente dentro de la literatura, se observa la urgencia por iniciar una discusión que permita delimitar los aspectos a los que cada uno de ellos hace referencia.

El aprendizaje de la estadística se ha convertido en un área de gran importancia en la educación, por ello la falta de claridad en la definición de las habilidades que se espera que los estudiantes desarrollen, no permite vincular lo que se enseña, con lo que

los estudiantes aprenden y la forma en que se evalúa. Al respecto del Mas, R. (2002) señala la necesidad de definir y estudiar las diferencias y similitudes entre estos términos con el objeto de clarificar los objetivos y las metas instruccionales de la enseñanza de la estadística.

En aras de sentar una postura acerca de lo que entenderemos por razonamiento estadístico en el marco de esta tesis, diremos que se entenderá como *“el proceso que permite a los seres humanos extraer conclusiones a partir de premisas o hechos, evidenciados en datos, acaecidos previamente, ayudados por las técnicas y teorías estadísticas disponibles para las personas en el contexto de su conocimiento y utilizados en el marco de la situación”*.

1.4. Importancia de la Estadística en el currículo de matemáticas y en la formación de docentes

El reconocimiento de la importancia de que el público en general aprenda estadística, la ha llevado a ser considerada parte integral del currículo de matemáticas, primero en el nivel universitario, luego en los últimos años de la secundaria y hoy, aunque no se ha implementado en todas las instituciones educativas, también en los niveles de básica primaria (Batanero C. , 2001; Batanero C. , 2003)

Esta posición en el currículo, se ha consolidado a partir de un trabajo de investigación, de más de 60 años³, alrededor de las problemáticas de la enseñanza y el aprendizaje de la estadística, que además ha permitido la creación y el fortalecimiento de una comunidad de investigadores que se denomina Educadores Estadísticos.

Los resultados de las investigaciones que esta comunidad ha realizado, han permitido que propuestas curriculares, como la alfabetización cuantitativa, para todas las personas, sean implementadas principalmente en países tecnológicamente avanzados, como el Reino Unido, Italia, Sudáfrica, Australia y Nueva Zelanda, realizando en la escuela actividades de comparación del censo escolar en los países participantes, y preparando materiales didácticos, recursos y actividades para la enseñanza de la estadística, basadas en proyectos (Batanero C. , 2002; Gal, 2004); así como la propuesta de mecanismos para su implementación en otros países; con lo que se espera promover la adquisición, no solo del conocimiento formal sino también de una postura crítica, de la población general, frente al tipo de información cuantitativa que reciben a través de los medios masivos de información y comunicación (prensa, radio, televisión e Internet).

Para aprovechar el hecho de que en la actualidad los currículos de matemáticas, de enseñanza básica y media, particularmente en Colombia, han incorporado la estadística (Miniterio de Educación Nacional, 1998), se requiere dirigir la atención hacia el análisis

³ En 1948 el International Statistical Institute (ISI) preocupado por la situación del mundo a causa de la posguerra, creó el *Comité de Educación* con el objetivo de formar estadísticos profesionales, que ayudaran con la economía y desarrollo de los países afectados. En este proceso se evidenciaron dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la estadística, es así como en 1991 es creada la *International Association for Statistical Education* (IASE, <http://www.stat.auckland.ca.nz/~iase>) como evolución del *Comité de Educación*, cuyo objetivo principal es contribuir al desarrollo y mejora de la educación estadística en el ámbito Internacional (Batanero C. , 2003; Batanero C. , 2000; Batanero, Garfield, Ottaviani, & Truran, 2000; Ottaviani, 2002)

de los procesos que los estudiantes siguen en su camino de construcción de estos conocimientos, no solo de los resultados que en estos niveles iniciales de formación se están obteniendo; puesto que para procurar nuevas contribuciones que apunten al mejoramiento de resultados ya obtenidos, se requiere identificar, en el sentido que esta investigación propone, las características del desarrollo de los esquemas cognitivos, ligados a conceptos estadísticos, que los niños construyen cuando enfrentan situaciones problema ligadas a lo cotidiano.

De esta forma se espera ayudar en el avance de la consolidación de la investigación en Educación Estadística, específicamente en lo relacionado con la formación y el desarrollo del razonamiento estadístico de la población en general, lo que involucra la promoción de este conocimiento, tanto dentro de las instituciones de formación como fuera de ellas, y en la identificación de los mecanismos cognitivos que favorecen este tipo de razonamiento.

CAPÍTULO 2. PERSPECTIVA COGNITIVA

2.1 Psicogénesis del conocimiento Estadístico

A pesar de la amplia bibliografía que se refiere a procesos cognitivos en general (Varela, 1998; Lepore & Pylyshyn, 1999; Rumelhart & McClelland, 1992) y en psicología en particular (Bruner, 1991; Perner, 1994; Duval, 2004; Pozo J. I., 1989; Bruner, 1984), se muestra ausencia de planteamientos teóricos relacionados con los mecanismos mentales que tienen que ver con el pensamiento estadístico.

Esta perspectiva, referida al saber estadístico en relación con los mecanismos mentales y su funcionamiento, debido a que la revisión bibliográfica muestra la ausencia de planteamientos teóricos en esta dirección, más allá de los estudios de Piaget (1951) y de Fischbein (1975; Fischbein, Tirosh, & Hess, 1979), que trabajaron en problemas de conocimientos generales, como los de la idea de azar y de probabilidad; los estudios de Gigerenzert (2007) sobre el concepto de intuición, y los estudios de Nisbett y Ross (1980), Kahneman, Solvit y Tversky, (1982), Tversky y Kahneman, (1974), que se centraron en las heurísticas y los sesgos en la toma de

decisiones bajo situaciones de incertidumbre en profesionales de diferentes disciplinas, no intentan llegar a la búsqueda de explicación de los mecanismos que permiten la comprensión de los conceptos, dejándolo en la actualidad como un conocimiento por desarrollar, es un motivo para constituirlo en contenido importante de este trabajo.

Por su parte, la comunidad de Educadores Estadísticos, en su preocupación por avanzar en esta dirección, ha centrado su esfuerzo en el problema didáctico de los procesos de enseñanza y aprendizaje, sin dejar de reconocer la importancia de averiguar por la génesis mental de estos conocimientos.

De esta forma, la fundamentación teórica que tomamos para esta investigación, considera también las fuentes adicionales referidas por esta comunidad, partiendo de los resultados de investigaciones de reconocidos miembros (Cobo & Batanero, 2000; Garfield, 1995; Batanero C. , Godino, Holmes, & Vallecillos, 1993; Batanero C. , 2002; Batanero C. , 2001; Garfield & Gall, 1997).

El compromiso de estudiar un fenómeno como el funcionamiento del pensamiento, en lo que a la organización de los instrumentos, procesos y mecanismos que permiten la construcción de los conceptos estadísticos de medida de tendencia central (moda, mediana y media aritmética), implica comprender cómo se produce tal funcionamiento, cómo se manifiesta a través de las actividades del sujeto y cómo puede ser explicado con un marco teórico adecuado que garantice inferencias plausibles y que muestre su presencia en la realidad.

En términos generales y en palabras de Piaget (1983) diríamos que

“...no existe conocimiento alguno resultante de un simple registro de observaciones, sin una estructuración derivada de las actividades del sujeto. No obstante, tampoco existen (en el hombre) estructuras cognoscitivas *a priori* o innatas: únicamente es hereditario el funcionamiento de la inteligencia, y éste solo engendra estructuras a través de una organización de acciones sucesivas ejercidas sobre los objetos” (pág. 51).

La implicación anterior obliga a considerar que

“...una epistemología conforme a los datos de la psicogénesis no podría ser ni empirista ni preformista, sino que ha de consistir en un constructivismo, con la elaboración continua de operaciones y de estructuras nuevas. El problema central es el de comprender cómo se efectúan tales creaciones y por qué, siendo consecuencia de construcciones no predeterminadas, pueden durante el camino hacerse lógicamente necesarias” (Piaget, 1983, pág. 51)

Los hechos históricos que permitieron la constitución formal de estos conocimientos estadísticos, juegan un papel importante en este marco de explicación debido a que prueban la existencia de tal conocimiento, que no deja de estar sometido a la crítica y revisión continua que fortalecen su condición conceptual.

En esta dirección, la tesis fundamental de la epistemología genética de Piaget, que se puede resumir en la afirmación “conocimiento es adaptación⁴”, resulta una teoría proclive de ser utilizada en la descripción del fenómeno que nos ocupa.

Esta adaptación, a la que se refiere Piaget, es intelectual, y resulta ser un equilibrio progresivo a partir de dos procesos: la asimilación o incorporación de un elemento exterior, y la acomodación “o necesidad en que se encuentra la asimilación de tener en

⁴ No hace referencia a una adaptación pasiva a las presiones del medio “selección natural darwiniana”, ni tampoco como el resultado del “poder de la vida” manifestado en la tendencia hacia la perfección en la acomodación del organismo a las variaciones externas “Lamarckismo”, sino a que “...existe adaptación cuando el organismo se transforma en función del medio, y cuando esta variación tiene por efecto un crecimiento de los intercambios entre el medio y él mismo favorables a su conservación”. (Piaget, 1959, pág. 15)

cuenta las particularidades propias de los elementos que hay que asimilar” (Piaget, 1975 (1978), pág. 8), productos de la acción y generadoras de conocimiento.

Los estudios psicogenéticos desarrollados por Piaget, prueban que los instrumentos iniciales del conocimiento son los esquemas de acción sensorio-motrices que dominan las percepciones, iniciando con los actos reflejos, desde el comienzo de la existencia del sujeto; percepciones que luego se interiorizan en esquemas operatorios y cuando se ligan al lenguaje se convierten en objeto de tematización para devenir en esquemas conceptuales que constituyen la inteligencia verbal o reflexiva.

Desde esta perspectiva interesa la génesis y en particular el paso del uso implícito de un conocimiento a su aplicación consciente, que Piaget denomina “tematización”. Es decir, estamos interesados en los productos de los procesos de toma de conciencia⁵ en los cuales se presenta un juego dialéctico entre el sujeto y el objeto que da lugar a su constitución mutua de una manera progresiva, en la que los contextos socio-culturales en los que están insertos, tanto el sujeto como el objeto, son un factor del desarrollo que gana en importancia a medida que el niño se socializa e interactúa con otros.

Se trata entonces de estudiar la génesis de los esquemas conceptuales teniendo presente los factores internos y externos, pero apartándose de toda posición empirista (primacía del objeto) o innatista (primacía del sujeto) y tomando como unidad de

⁵ Tales productos se caracterizan en términos de equilibraciones Intra, Inter y Trans. Así: Intra; descubrimiento de propiedades en los objetos o eventos (las razones se encuentran en las relaciones interobjetales). Inter; relaciones entre las transformaciones entre los objetos. Conducen a establecer vínculos entre ellas. Trans; construcción de estructuras (Piaget & García, 1982)

análisis el concepto de esquema piagetiano a través de las acciones realizadas por los niños y niñas.

2.2 *Los esquemas como instrumentos de construcción de conocimiento*

El conocimiento no se encuentra reducido a nuestras impresiones o juicios ni a nuestros sentidos, ni son las imágenes mentales o categorías que de ellos hacemos; según Kant (Kant & Larroyo, 1996), existe entonces un término que debe estar en reciprocidad tanto con la categoría como con el fenómeno, y debe hacer posible la aplicación de la primera al último.

La representación que medie este proceso, dice Kant, ha de ser pura (sin nada empírico) y sin embargo, por una parte, intelectual y, por otra, sensible. Tal término es el esquema, que según Radford (2003), es el resultado de un procedimiento general de la imaginación que le procura su imagen mental a un concepto, o en otras palabras, devela la unión que se presenta entre el intelecto y los sentidos, en el curso de su ejecución empírica.

Piaget, en sus investigaciones, posteriormente amplía y redefine la noción de esquema kantiano en términos de sucesión de acciones reales o interiorizadas, susceptibles de repetirse en condiciones semejantes (y no solo idénticas), explicando cómo, a partir de las estructuras fisiológicas, los actos reflejos y el instinto, herencia de

la evolución, el sujeto construye sus instrumentos cognitivos de intercambio con el medio a través de la acción, y establece que

“Conocer no consiste, en efecto, en copiar lo real, sino en obrar sobre ello y en transformarlo (en apariencia o en realidad), a fin de comprenderlo en función de los sistemas de transformación a los que están ligadas estas acciones” (Piaget, 1969, pág. 7).

Se entiende de esta forma que conocer es actuar, y que las acciones son manifestaciones del funcionamiento de estructuras internas que son las que Piaget denomina esquemas y que son componentes de los subsistemas del sistema cognitivo total, indisociable de la clase de situaciones que son su fuente de activación.

En la definición clásica piagetiana “*el esquema caracteriza lo que es repetible y generalizable de la acción*”; es una forma porque responde no sólo a una situación particular sino a una clase de situaciones y, en ése sentido, es independiente de los contenidos particulares de cada situación aunque éstos sean necesarios para su funcionamiento y organización (Delgado C. A., 2007).

De aquí que, para Piaget,

“Las acciones, en efecto, no suceden por azar, sino que se repiten y se aplican de manera semejante a situaciones comparables. Más precisamente, se reproducen tal y como son si, a los mismos intereses, corresponden situaciones análogas; pero se diferencian o se combinan de manera nueva si las necesidades o situaciones cambian.” (Piaget, 1969, pág. 8)

Piaget llama esquema de acción “*a lo que, en una acción, es de tal manera transponible, generalizable o diferenciable de una situación a la siguiente, o dicho de*

otra manera, a lo que hay de común en las diversas repeticiones o aplicaciones de la misma acción.” Ídem (págs. 8, 9)

Un ejemplo de esto lo encontramos en Delgado (1998), quien adoptó como unidad de análisis el concepto piagetiano de esquema de acción por ser instrumento de intercambio con el medio en términos de asimilaciones y acomodaciones que dan paso a la adaptación a situaciones nuevas, por lo que la observación del comportamiento del sujeto hace posible inferir plausiblemente las equilibraciones que expresan estados de adaptación cada vez más ajustados a lo real.

Pero además, atendiendo a los procesos de interiorización de la acción y su representación en el pensamiento en términos de las propiedades de tal representación, se puede establecer el carácter operatorio (aquello que es interiorizado y reversible) o conceptual (esquemas operatorios ligados al lenguaje) del esquema de acción, que es evidencia de su “tematización” y su transformación.

Así, se puede comprender que la representación de acciones en el pensamiento implica la interiorización y la adquisición de nuevas propiedades para los esquemas, que no se tenían en el plano de la acción.

Para los esquemas conceptuales, por estar ligados al lenguaje, el sujeto debe ser más consciente de su significación y uso que para los esquemas operatorios, que no exigen una conciencia más allá de los resultados de la acción misma; de esta forma los

esquemas operatorios, al no verbalizarse, pueden funcionar y organizar las acciones sin ser *tematizados*, es decir de forma inconsciente (Delgado C. A., 2007).

En este proceso se tiene en cuenta que en la evolución de los esquemas se preservan las características previas, es decir que todo esquema conceptual es operatorio y que todo esquema operatorio es un esquema de acción, aunque esta evolución no esté garantizada para todos los esquemas.

Muchos autores han utilizado y contribuido a la ampliación de la definición del concepto piagetiano de esquema (Vergnaud, 1982; 1990; 1996; Pascual-Leone, 1995; 1997); particularmente, Pascual Leone (1995) en su propuesta teórica sobre análisis de tareas, que define como *“una metateoría, o teoría de un observador que cuidadosamente modela los procesos subjetivos y objetivos del organismo ‘psicológico’”*, emplea de manera fundamental la noción de esquema para explicar el funcionamiento de su teoría y establecer que un esquema, entendido como unidad de conocimiento subjetivo, es una unidad neuropsicológica: un paquete unitario de conexiones neurales, que para él es un subsistema modular en la red neuronal, que funciona como una unidad intencional en la praxis del sujeto, y le informa, en el sentido de dar forma, a esta praxis (Pascual-Leone, 1995, pág. 341).

En referencia a los esquemas conceptuales, Pascual Leone (1995, pág. 343) afirma que están basados en *“...sistemas funcionales semántico-pragmáticos de procesamiento de información o paquetes de resistencias o paquetes de paquetes”* los

cuales se utilizan para significar y clasificar la experiencia, y a menudo estos sistemas son enriquecidos no solo al asignar esquemas adecuadamente, sino también porque “...*sintetizan dinámicamente nuevas configuraciones relacionales para epireflectar, en sentido epistemológico, verdaderamente nuevos aspectos de la información que la realidad nos impone*”, aclarando que, hasta el momento, estas formas de enriquecimiento de los sistemas funcionales no se encuentran modelados adecuadamente por la ciencia cognitiva

En esta teoría,

“los significados experienciales e intencionales son concretos (entidades particulares e individuales) y corresponden a los esquemas puramente experienciales que Piaget y los neopiagetianos han denominado infralógicos o mereológicos⁶. Sin embargo, en el modelo intelectual representacional del procesamiento, las unidades que se usan, ya sean operativas o figurativas, son genéricas y ellas describen tipos de conocimiento más que experiencias concretas/particulares. Estas unidades genéricas suelen ser denominadas por los psicólogos (Case, 1985, 1991; Mandler, 1992) y los neurocientíficos (Edelman, 1989) como conceptos”; Pascual Leone (1997, pág. 82)

Igualmente afirma que los esquemas genéricos, conceptos en el sentido amplio del término, nunca se encuentran en los niños antes de los 12 meses de edad.

El aporte significativo que Pascual Leone ofrece a la definición de esquemas de Piaget, tiene que ver con la clasificación y explicación que los ubica en el organismo del sujeto, puesto que los correspondientes esquemas figurativos/declarativos son

⁶ “Piaget los llamó unidades “infralógicas” (inspirado por la Teoría de los Tipos de Bertrand Russell) porque representan y constituyen los objetos particulares de la experiencia, y partes de los objetos mismos, que la Lógica puede simbolizar y representar usando categorías y relaciones genéricas. Otros (Carbonell, 1978, 1982; Houde, 1992, 1994; Pascual-Leone, 1976, 1984) han llamado a eso unidades “mereológicas” (una referencia a la lógica de parte/todo de Lesniewski para la construcción de los objetos concretos) para significar que las relaciones parte/todo dentro de los objetos concretos de la experiencia es la característica fundamental de esos esquemas, que componen el contenido crudo (la presentación sin la representación) de cualquier experiencia particular”. (Pascual Leone 1995; pág. 7)

estructuras de conocimiento central es decir, sistemas de estructura compleja, organizados temporalmente, tales como "marcos", "guiones" o "narrativas".

Los afectos se pueden formular psicológicamente como esquemas; los esquemas operativos siempre están localizados en el lóbulo frontal; los ejecutivos operativos en el prefrontal; los esquemas figurativos están localizados en los lóbulos parietal, occipital o temporal, dependiendo de la modalidad de procesamiento (Pascual-Leone, 1997).

Somos conscientes que es necesario profundizar y contrastar esto aún más, así como el estudio de otros autores que en sus trabajos, en psicología cognitiva, aporten a la ampliación y generalización del concepto de esquema, en el sentido de la perspectiva que seguimos, pero consideramos que la discusión hasta aquí planteada contribuye suficientemente a nuestros objetivos.

Debe reconocerse, en este mismo sentido, que aunque el modelo cognitivo de Piaget ha sido ampliamente criticado en numerosas oportunidades, con referencia, entre otras, a la falta de consideración de la influencia del factor socio-cultural en el desarrollo del sujeto; factor éste, que siendo reconocido por los didactas como responsable de acelerar o retardar el desarrollo, no hace parte del modelo, entendemos que para Piaget, la cognición es un sistema complejo y autorregulado, con construcción de novedades, con la superación de conflictos y ampliación de dominios inherentes a ella, que se convierten en su propia motivación, por lo que es de aceptar

que *los procesos constructivos son automotivados*, es decir que es suficiente que estén presentes las condiciones idóneas, incluyendo lo social, para que el proceso siga desarrollándose adecuadamente.

2.3 *Representación y Desarrollo Cognitivo*

Un concepto importante para entender el desarrollo cognitivo es el de Representación. Aunque no profundizaremos en la discusión sobre la representación, para lo que recomendamos entre otros a Perner (1994), Rumelhard & McClelland (1992), Jhonson-Lair (1990), Bruner (1991; 1984), Duval (2004), Smith & Kosslyn (2008) y Lepore & Pylyshyn (1999), señalaremos algunos aspectos que consideramos importantes para este trabajo.

La representación, o un sistema de representaciones, es un conjunto de reglas mediante las cuales se puede conservar aquello que ha sido experimentado en acontecimientos anteriores diferentes; por ejemplo, la representación del mundo o de una parte de nuestra experiencia, poseen determinadas características que son de gran interés.

Podría decirse que la representación, en cierto sentido, realiza el papel de un “medium”, de tal manera que se pueden representar algunos sucesos por las acciones que requieren, a través de una imagen, de palabras o con símbolos; así, la

representación de un suceso siempre es selectiva, en equivalencia a lo que se da en la construcción de un modelo de algo, nunca se logra incluir todo lo que tiene que ver con él.

El principio de selectividad suele estar determinado por el propio objetivo de la representación, es decir, aquello que nos proponemos hacer al representar algo, de tal forma que las representaciones, debido a su naturaleza sintética, deben estar reguladas porque cada representación no es una muestra arbitraria o aleatoria de lo representado, sino que, por el contrario, la representación de un fenómeno que se extiende espacialmente utiliza una notación especial, que es común para un conjunto más amplio de fenómenos con esta misma característica espacial (Bruner, 1984).

Por ello, gran parte del aprendizaje espontáneo consiste en inducir reglas más generales para obtener formas más económicas o más eficaces para representar fenómenos semejantes; por lo que en muchas ocasiones este aprendizaje consiste en traducir de un modelo de representación al otro, es decir, no solo se es capaz de seguir el mismo camino habitual, sino que lo podemos representar mediante una imagen mental.

Existen según Bruner (1984), tres tipos de representación que operan durante el desarrollo de la inteligencia humana y cuya interacción es crucial para ésta. Cada uno de estos tres tipos puede especificarse en términos muy concisos y se puede

comprobar que se modifican y adquieren formas nuevas gracias a su vinculación con determinadas herramientas o con sistemas instrumentales.

Estos tres modos son: i) La representación enactiva; que consiste en conocer algo a través de la acción, ii) La representación icónica; conocer algo a través de un dibujo o una imagen, y iii) La representación simbólica; conocer algo mediante formas simbólicas como el lenguaje.

Bajo estos aspectos, diremos que conocemos algo, cuando hacemos referencia al dominio de un acto habitual que podemos repetir; hábito que se encuentra organizado secuencialmente en un esquema que guarda estrecha relación con su ejecución. Lo esencial de todo esto, es que la representación se expresa por medio de la acción, por lo cual tiene sus mismas limitaciones, entre las que resaltan su carácter secuencial e irreversible.

En lo que concierne al problema de este trabajo, el tipo de sistema de representación que aspiramos relacionar se refiere al de tipo iii, para lo cual es importante señalar que si bien se puede reconocer la imagen de un suceso una vez que se lo ha experimentado, no es posible conocer la palabra que designa un suceso por el hecho de haberlo experimentado. En este sentido, es fácil entender que la significación lingüística es básicamente arbitraria y depende del dominio del código simbólico utilizado.

Por lo tanto, para hacer una descripción de un código lingüístico es necesario conocer, además de los referentes de las palabras, las reglas para construir y transformar las emisiones; reglas que son específicas del lenguaje.

Siguiendo a Bruner (1984), diremos que *“el desarrollo no supone una secuencia de etapas, sino un dominio progresivo de estas tres formas de representación y de su traducción parcial de un sistema a otro”*, lo cual da pie a justificar una intervención metodológica basada en la entrevista clínica.

2.4 *Estrategias Cognitivas*

Las investigaciones de la psicología cognitiva, que proliferan a partir de la década de 1980 (Kirchner, Stoltz, & Pasos, 2008), llegarían a demostrar que el aprendizaje no puede ser entendido como resultado exclusivo de la estimulación del medio externo, sino como consecuencia de las estrategias utilizadas por los propios niños y niñas para responder a esas estimulaciones.

Se trata de niños y niñas que se inquietan con las observaciones que hacen sobre el mundo que les rodea y no están esperando pasivamente que alguien les lleve las respuestas a sus preguntas. Por el contrario, intentan activamente comprender lo que pasa a su alrededor, y para ello construyen categorías de pensamiento, mientras organizan internamente el universo que van descubriendo.

Para diferenciar los tipos de sujeto a los que alude la investigación educativa y la psicológica, entenderemos, de acuerdo con Inhelder (1978), por sujeto epistémico, aquello que tienen en común las estructuras intelectuales de niños y niñas de un mismo nivel de desarrollo y por sujeto psicológico lo que es propio de los niños y niñas individuales, que se manifiesta, por ejemplo, en la necesidad de una organización general que debe operarse entre el objetivo a alcanzar o fin, y los medios disponibles (pág. 4); de aquí que resulte importante para esta investigación centrar la atención en este último sujeto, lo que significa acompañar el cambio de perspectiva que en el campo de la psicología y la epistemología genéticas se suscitó en la escuela de Ginebra, sin pérdida de la relación investigativa ni de las hipótesis interpretativas.

Esto implica asumir que el estudio de los procedimientos de resolución de problemas adquiere una verdadera significación si se inscribe en un marco epistemológico constructivista elaborado a partir de análisis estructurales previos y apoyados en leyes funcionales del progreso del conocimiento.

De esta forma, la distinción entre comprensión de la realidad y procesos de invención no debe ser entendida como algo radical, puesto que en el progreso de la comprensión que el niño realiza en el curso de su evolución psicogenética es posible discernir un acto de invención y, recíprocamente, en todo acto de descubrimiento hay una parte de comprensión.

Por lo anterior, este trabajo se identifica con estudios cuyos objetivos procuran la búsqueda de mecanismos funcionales que subyacen en las estrategias particulares del sujeto individual en su proceso de desarrollo cognitivo.

Aunque en la teoría especializada viene definiéndose el concepto de estrategia, desde la establecida por Bruner, Goodnow y Austin (1966) citado por Bruner (1984), quienes consideran que “*una estrategia hace referencia a un patrón de decisiones en la adquisición, retención y utilización de la información que sirve para lograr ciertos objetivos, es decir para asegurarse que se den ciertos resultados y no se produzcan otros*” (pág. 130), con base en la línea de argumentación anterior, aquí asumiremos inicialmente con el término estrategia (Inhelder B. , 1978) “*todo sistema y toda secuencia de procedimientos, susceptible de ser repetidos y transferidos a otras situaciones, que constituyen los medios para alcanzar el fin hacia el que tiende el sujeto*” (pág. 6), teniendo en cuenta que las nociones de **medio** y **fin** son relativas, ya que un medio puede ocasionalmente convertirse en fin y viceversa.

Así que, si por un lado la mente humana construye representaciones de los objetos de conocimiento a partir de un proceso activo de interacción de los niños y niñas con el medio, en el cual las concepciones previas del aprendiz son reformuladas cuando reformula el conocimiento sobre los objetos, por otro lado, al contrario de otros sistemas de conocimiento solamente mecánicos, la inteligencia humana no se limita a un mecanismo para almacenar información: es capaz de adquirir conciencia de sí

misma, reflexionar sobre sus producciones y regular su propia actividad (Pozo J. I., 1989).

Una notable característica de las estrategias, una vez dominadas, y que constituyen su regla fundamental genérica, es que pueden ser aplicadas a una extensa variedad de circunstancias, en relación a los estímulos que son relevantes y a las respuestas que son admisibles. Estas estrategias llevan incorporado un principio de transferencia que constituye un tipo de generalización instantánea que caracteriza a muchas de las primeras estrategias usadas por los niños pequeños para obtener información. La transferencia directa de una estrategia parece depender de la comprensión y el reconocimiento de los requisitos de la tarea.

La epistemología genética de las categorías fundamentales del pensamiento permitió explicitar muchas de las leyes generales subyacentes a la génesis de las funciones cognitivas. Es así como la universalidad del orden de las etapas de elaboración les confiere un carácter de necesidad intrínseca, y la evolución de las formas del conocimiento, que el método genético logró reconstituir, en términos de interacción sujeto-objeto, condujo a sistemas coherentes de acciones que mantienen entre sí un conjunto de relaciones analizadas por Piaget (1975 (1978)) en términos de estructuras, las cuales mantienen un estatuto psicológico pleno de controversias que las llevan a ser consideradas como modelos heurísticamente válidos o a ser inherentes a la actividad del sujeto; aclarando que las estructuras se definen como “lo que el sujeto sabe hacer” y no como “lo que el sujeto piensa” (Inhelder B. , 1978, pág. 5)

El análisis estructuralista permite determinar los límites superiores e inferiores de las posibilidades del sujeto epistémico frente a un problema dado y en el seno de un nivel de desarrollo, sugiriendo constantemente aproximaciones posibles entre conductas aparentemente sin relación que ponen en evidencia su parentesco.

Pero el verdadero problema de este análisis consiste en establecer esos grados de isomorfismo entre modelos estructurales y comportamientos psicológicos de tal forma que conduzca al establecimiento del orden jerárquico de las formas atemporales pero siendo incapaz de explicar la dinámica del progreso intelectual.

Ese motor de progreso debe buscarse en la dirección de los mecanismos autoreguladores que aseguran las equilibraciones mayorantes, como ha postulado Piaget (1975 (1978); 1978).

Las numerosas observaciones recogidas por Inhelder, Sinclair y Bovet (1974 (1975)), mostraron cómo la confrontación entre esquemas de diferentes niveles de elaboración produce una serie de desequilibrios que, a través de los conflictos y contradicciones generales, movilizan un conjunto de procesos que permiten alcanzar un equilibrio mayorante.

Estas investigaciones permitieron precisar leyes estructurales y funcionales del desarrollo cognitivo de los mecanismos de *comprensión de la realidad* asignadas al sujeto epistémico. Llevando al estudio de los *procesos de invención y los*

procedimientos utilizados por el sujeto psicológico en la búsqueda de una solución a problemas concretos.

Mientras los modelos lógico-matemáticos y biológicos resultan muy útiles para el análisis de las formas más generales de la comprensión de la realidad, el análisis de las estrategias individuales en el transcurso de la resolución de problemas resulta mucho más delicado.

El problema central del estudio psicológico de las estrategias consistirá en determinar sus condiciones de éxito, es decir, precisar los acomodamientos progresivos de los medios al fin y en analizar esa formación. El análisis de las estrategias cognitivas versará así sobre los sucesivos descubrimientos del sujeto y sobre las razones de las modificaciones realizadas.

Centrado en los resultados, este trabajo dejará de lado el análisis de las condiciones previas, las cuales vienen definidas por los esquemas generales y estructuras intelectuales que Piaget llamó *esquemas “presentativos”* con el fin de distinguirlos de los *esquemas “procedurales”*, que presuponen una finalidad⁷.

⁷ “Conviene distinguir a este propósito tres tipos de esquemas. Llamaremos esquemas *presentativos* a aquellos que hacen referencia a los caracteres permanentes y simultáneos de objetos comparables; así, los esquemas representativos o conceptos (por ejemplo, "cuadrado", "gato", etc.). Los llamamos presentativos porque, además de los conceptos, esta clase incluye también una gran cantidad de esquemas sensoriomotores (...). En segundo lugar, llamaremos, de acuerdo con B. Inhelder, esquemas *procedurales* a las series de acciones que sirven de medios para alcanzar un fin (...). En tercer lugar, los esquemas operatorios son en un sentido procedurales, puesto que implican la utilización de medios regulados y generales (las operaciones); pero además aparecen coordinados en estructuras (clasificación, seriación, etc.), que son de naturaleza presentativa” (Piaget, 1976).

Todos los psicólogos estamos de acuerdo en afirmar que no es el fin el que actúa causalmente sobre los medios, sino que es la representación actual del fin junto con la conciencia de las necesidades las que deben ser satisfechas para su consecución. Sin embargo, queda todavía por precisar los mecanismos a través de los cuales el fin genera y guía la formación y coordinación de los medios y de los procedimientos. En este contexto, son tres los problemas que llaman la atención:

El primero se refiere a la distinción entre dos órdenes de procedimientos: un orden *productivo*, causal en el sentido amplio (una acción del sujeto produce un efecto como resultado), y un orden que se puede calificar como *precursivo o teleonómico*, que constituye en cierto modo una inversión del orden de producción (la consecución del fin comporta una serie de anticipaciones).

El problema principal de la organización de las estrategias consiste en intentar aprehender el proceso de coordinación entre estos dos órdenes de sucesión. Así, los resultados psicogenéticos obtenidos permiten afirmar, por ejemplo, que los niños pequeños tienden, bien a explorar las relaciones de orden productivo olvidando momentáneamente la precursividad, o a intentar alcanzar el fin directamente sin conocer las propiedades causales de los medios adecuados.

El segundo problema hace referencia a las relaciones existentes entre los procedimientos utilizados y los sistemas subyacentes de interpretación que el niño atribuye a cada una de sus acciones. Estos sistemas de interpretación corresponden a

los esquemas más generales del sujeto, es decir a sus modos de comprensión de la realidad.

Estudios psicogenéticos realizados (Inhelder & Piaget, 1955; Inhelder, Sinclair, & Bovet, 1974 (1975); Delgado C. A., 1998), permiten conocer las grandes líneas de la evolución de estos esquemas, que forman el telón de fondo de los procedimientos particulares utilizados por el niño para resolver los problemas concretos a los que es confrontado.

Sin embargo, resultaría simplista pensar que los procedimientos salen directamente del conjunto de los esquemas organizados que posee el sujeto. Creemos (Inhelder B. , 1978), por el contrario, que hay dos planos distintos pero interconectados: el de los esquemas generales orientados hacia la comprensión y el de las estrategias particulares orientadas hacia la consecución del fin.

Estos modos de comprensión de la realidad contribuyen a la resolución de los problemas planteados, pero nunca directamente. De esta forma, el niño, cuando intenta comprender el porqué de un obstáculo o de un fracaso, se refiere generalmente al conjunto de estos esquemas y la comprensión obtenida puede contribuir a afinar sus procedimientos ulteriores.

Puede ocurrir también que un primer procedimiento, aun conduciendo a un resultado positivo, sea considerado demasiado laborioso; en este caso, la búsqueda de

simplificaciones y de economías lleva a una exploración más amplia de los objetos presentes con el fin de obtener una mejor comprensión de sus relaciones espaciales y causales.

Observamos de esta forma una especie de alternancia cíclica entre los procedimientos precursivos o proactivos (orientados hacia el fin) y los esfuerzos de comprensión retroactiva. Este ritmo alternativo constituiría una constante funcional presente en todos los niveles del desarrollo, aunque naturalmente su eficacia aumenta progresivamente como consecuencia de la riqueza creciente de las estructuras ya organizadas.

Estas reflexiones condujeron al tercer problema, que se refiere a la necesidad de explicitar en cada situación el juego de significaciones –o de representaciones significantes– que el niño parece atribuir, por una parte a los medios y al fin, y por otra a sus propias acciones e intervenciones.

Este juego de representaciones significantes, que constituye el puente entre los procedimientos de resolución y la comprensión, y que es tal vez responsable de la posible adecuación de los medios disponibles a la representación del fin, es de suma importancia para el estudio de las estrategias.

Pero este juego de representaciones no se presta a la observación directa y por ello la tarea, extremadamente difícil, consiste en inferir, a partir de los comportamientos,

todos los índices susceptibles de informar sobre los proyectos del sujeto y sobre la manera como concibe la realización de los mismo. Se trata, en definitiva, de establecer cómo se opera el paso de un saber-hacer, general, a un cómo-hacer, particular.

2.5 *Procesos de Abstracción y de Generalización.*

Regularmente, el conocimiento se observa en dos direcciones: hacia el exterior, que permite la comprensión de los fenómenos y conforma la experiencia práctica de un sujeto; y hacia el interior, que organiza los contenidos de la conciencia o conceptos y estructura la experiencia conceptual; ambas se apoyan en la acción y transitan en direcciones distintas y complementarias; proceden de un proceso de abstracción que, de acuerdo a su dominio de aplicación, se puede considerar de tres tipos: empírica, pseudo-empírica y reflexiva.

En la teoría piagetiana, la abstracción y sus variedades se originan en la asimilación de esquemas a estructuras de esquemas previos, sin entender que los primeros se encuentran contenidos en las estructuras de los segundos, sino que estas son su origen. Así, dependiendo de las fuentes de la asimilación que permiten la activación y/o producción de los diferentes esquemas, la clasificación que Piaget hace de ella, se define de la siguiente manera:

- Llamaremos “abstracciones empíricas” a las que se refieren a los objetos físicos, a sus relaciones o a los aspectos materiales de la acción propia, tales como los movimientos o los impulsos. Consisten en sacar su información de los objetos mismos de los cuales sólo se consideran ciertas propiedades, osea aquellas que existían en ellos antes de cualquier constatación por parte del sujeto.

- Las abstracciones pseudo-empíricas, tienen dominio de acción en niveles que ya son representativos pero aún preoperatorios cuando el sujeto no puede realizar construcciones, que tenderán a volverse deductivas, sin apoyarse constantemente en resultados comprobables de dicha construcción.

- Las abstracciones reflexionantes, se refieren a las formas anteriores y a todas las actividades cognitivas del sujeto para extraer de ellas ciertos caracteres y utilizarlos con otros fines, dominando sobre las coordinaciones de la acción del sujeto. No proceden a partir de los objetos sino de la coordinación de las acciones que el sujeto ejerce sobre los mismos, o de las operaciones en general del sujeto. Por ello, consisten primero en reflejar, en el sentido de una “transposición” en un nivel superior, lo que se obtiene de lo inferior, y, por otra parte, en reflexionar, en el sentido de una “reflexión” mental, cuya función es reconstruir en el nuevo plano lo abstracto que está contenido en el primero. (Piaget, 1977 (1979))

Estas variedades de abstracción que se constituyen en instrumentos de construcción de conocimientos, entrañan dos problemas que son: la identificación de los mecanismos de la abstracción reflexionante y, el otro, sus relaciones complejas con las

abstracciones empíricas, ya que mientras las primeras se vuelven cada vez más autónomas, las segundas solo progresan si se apoyan en las primeras (Piaget, 1977 (1979)), por lo que serán un apoyo fundamental para las explicaciones del fenómeno que interesa a esta investigación.

Un análisis complementario acerca de estas diversas formas de abstracción es realizado a través del estudio de las variedades de la generalización (Piaget, 1984), ya que el estudio de los procesos de generalización conlleva, más allá del examen de lo que sigue, dos grandes misterios del conocimiento: el hecho de engendrar estructuras constantemente nuevas y, que dichas construcciones siempre se apoyan en lo que está en proceso de devenir, que aún no está acabado.

De esta forma, no cabe duda que existirán al menos dos formas de generalizaciones: la que parte de lo observable, contenido en los objetos, por tanto de abstracciones empíricas, y que se remite a ellos para constatar la validez de las relaciones observadas para establecer el grado de generalidad y sacar de ello previsiones posteriores. Esta forma es de naturaleza esencialmente extensiva y consiste en proceder del “algunos” a “todos” o del “hasta aquí” a “siempre” y es denominada generalización inductiva (Piaget, 1984).

Por otra parte, cuando la generalización se funda en, o se refiere a, las operaciones del sujeto o a sus productos, su naturaleza, en esos casos, es simultáneamente comprensiva y extensiva, y conduce a la producción de nuevas formas e incluso de

nuevos contenidos, los cuales surgen de esas formas pero no son dadas en lo observable empíricamente por lo que se denominan “generalizaciones constructivas” (Piaget, 1984).

Para poder entender el papel fundamental de las generalizaciones constructivas, es necesario tener en cuenta que en las inducciones mismas, cuando un sujeto establece una relación (p.e. entre dos variables X e Y), y averigua la constancia de dicha relación, se constituye un procedimiento extensivo que supone un marco de asimilación anterior debido a las actividades del sujeto.

Para el ejemplo citado, estas variables, sus variaciones y la existencia de sus relaciones, pertenecen al campo de lo observable, pero el establecimiento de relaciones se debe a las acciones u operaciones del sujeto, que son solamente “aplicadas” y no aún “atribuidas” causalmente a los objetos, y resultan de generalizaciones constructivas anteriores que intervienen después de los morfismos o correspondencias sensorio-motores (Piaget, 1984).

2.6 *Proceso de Toma de Conciencia.*

Piaget (1976) afirma que el proceso de toma de conciencia tiene su origen en el plano de la acción, considerada, en sí misma, un saber autónomo y eficaz, pero no aún conocimiento consciente.

De hecho, existen muchas acciones que, a pesar de ser complejas, pueden ser realizadas con éxito por el sujeto desde períodos precoces de su desarrollo, y que ya tienen los atributos de un saber, aunque sea un saber eminentemente práctico, o sea, un *saber hacer*. Se trata de una forma práctica de conocimiento cuyo paso al nivel de pensamiento se da por medio del proceso de toma de conciencia, en el que esquemas de acción se transforman en nociones y en operaciones (Piaget, 1978).

En otras palabras, la acción en si misma constituye un saber que se mantiene autónomo hasta que se torne consciente y resulte en una conceptualización. A partir de ese momento, la acción pasa a sufrir la influencia de esa conceptualización, que permite la comprensión del saber-hacer y, por tanto, su planeamiento y control.

De esta forma, Piaget (1978) diferencia hacer y comprender, aclarando que

Hacer es comprender en acción una situación dada en forma suficiente para atender los fines propuestos, y comprender es conseguir dominar, en pensamiento, las mismas situaciones hasta poder resolver los problemas por ellos levantados, en relación al por qué y al cómo de las relaciones evidenciadas y, por otro lado, utilizadas en la acción (pág. 176)

Piaget enfatiza que la comprensión implica la identificación de las razones de los hechos y conocimientos, mientras que el hacer se ocupa solo por obtener el éxito pretendido, lo que no deja de ser una condición preliminar para que la comprensión sea alcanzada posteriormente. Al comienzo permite alcanzar un saber que es capaz de preceder la acción, ya que puede planearla y hacer previsiones sobre sus efectos, controlándolos (1978).

Así, el saber-hacer que antes culminaba en “conseguir”, es sustituido por la conceptualización, que resulta en “comprensión”, pudiendo ahora sustituir la acción o precederla, orientándola y regulando sus efectos.

Por lo tanto, el proceso de toma de conciencia no se restringe a una simple aclaración, o una iluminación, se trata de un proceso de conceptualización que se da, algunas veces después de una cantidad de años, posterior a la obtención del éxito práctico. Y es un proceso de reconstrucción en el cual ocurre el paso de un nivel de asimilación práctica a un nivel de asimilación conceptual.

Piaget (1976) enuncia lo que considera una ley general que rige los procesos de toma de conciencia, según la cual ese proceso se direcciona desde los elementos de la periferia hacia los elementos centrales. Los dos datos de observación inicial, considerados periféricos, serían la consciencia del *objetivo* a alcanzar, que desencadena la acción, y la consciencia del *resultado* obtenido, en términos del éxito o el fracaso.

Así, la toma de conciencia parte de una región periférica (objetivos y resultados) para posteriormente alcanzar una región central, en la cual procura alcanzar los mecanismos internos utilizados como medios para llegar al fin propuesto, bien como los motivos de sus elecciones o de sus sustituciones.

Cuando ha fracasado en el alcance del objetivo, por ejemplo, el individuo intenta detectar donde ocurrirán las fallas de adaptación del esquema del que dispone para

asimilar el objeto y, teniendo claro su objetivo, concentra su atención en los medios que fueron empleados, focalizando las correcciones o sustituciones necesarias. En ese proceso de vaivén, la toma de conciencia alcanza paulatinamente el mecanismo interno del acto (Piaget, 1976).

Piaget (1976) aclara, que la interiorización de la acción permite la concientización de los problemas a resolver, lo que posibilita la concientización de los medios, ahora cognitivos y ya no materiales, que fueron empleados. Es por esa razón que el niño pequeño cuando es interrogado acerca de lo que hizo para alcanzar el éxito en una acción, simplemente relata todo lo que hizo concretamente, mientras que más tarde es capaz de hacer declaraciones como “yo percibí que..., yo tuve la idea de que...”

Concluyendo, para Piaget (1976), el mecanismo de toma de conciencia es ante todo un proceso de conceptualización, y como proceso se desarrolla y alcanza diferentes niveles. Inicialmente, reconstruye, para luego traspasar, en el plano semiótico y de la representación, lo que fue adquirido en el plano de los esquemas de acción.

2.7 *Metacognición*

Existe todo un conjunto de competencias que solo pueden ser explicadas si fuera reconocida la existencia de algún mecanismo intrapsicológico que permite la consciencia de los conocimientos que manejamos, así como de los procesos mentales

que empleamos para gestionar tales conocimientos. A este mecanismo fue dado el nombre de *metacognición*, esto es, “conciencia de la propia cognición”.

Los primeros estudios sobre la metacognición surgieron con Flavell, discípulo de Piaget, en la década de 1970, y fue él quien de hecho acuñó el término “metacognición” (Pozo, Monereo, & Castello, 1996).

Entre tanto, el término metacognición comprende un concepto bastante amplio y una gran variedad de investigación producida en su nombre. Así, se puede encontrar metacognición: –como introspección reflexiva (filosofía de la mente), –como habilidad de auto–observación (cognitivismo-procedimental), –como cualidad de control ejecutivo (procesamiento de la información), –como un tipo de reflexión sobre la propia acción (investigación acción) o –como un proceso de internalización de la regulación interpsicológica e intrapsicológica (enfoque sociocultural). (Pozo, Monereo, & Castello, 1996, pág. 153)

En realidad, se pueden sintetizar los estudios sobre la metacognición en torno a dos dimensiones distintas, aunque no excluyentes: el conocimiento de los niños y niñas sobre sus propios procesos cognitivos y la regulación y control de esos procesos (Madruga & La Casa, 1995).

Al referirse a esas dos categorías del conocimiento metacognitivo, se debe aclarar que la primera está asociada a las reflexiones sobre el propio saber, mientras que la segunda alude al control de ese conocimiento.

La dimensión reguladora de la metacognición incluye el *planeamiento* de las actividades cognitivas antes de iniciar una tarea, el *control del monitoreo* de la ejecución de esas actividades y la posterior *evaluación* de los resultados obtenidos, confrontándolos con los objetivos iniciales (Martín & Marchesi, 1995).

Luego, la dimensión reguladora de la metacognición exige la participación activa del individuo en tres momentos distintos del proceso: *antes* (planeamiento) *durante* (control) y *después* (evaluación). Para Madruga y La Casa (1995), esa dimensión de regulación metacognitiva es bastante interesante en el contexto educativo, ya que es aprendiendo a controlar sus propios mecanismos de aprendizaje que el niño se capacita para “aprender a aprender”.

Se observa, de esta forma, una estrecha relación entre la dimensión reguladora de la metacognición y el concepto de estrategia. Lo que diferencia una estrategia de lo que podría ser denominado una habilidad o destreza es el hecho de que la primera requiere un planeamiento anterior de una secuencia de actividades, con el propósito de alcanzar algún objetivo específico, mientras que la segunda puede ser representada por la ejecución mecánica y automática de una actividad cualquiera (Pozo J. I., 1996; Madruga & La Casa, 1995).

Siendo, por tanto, la estrategia concebida como un conjunto de procedimientos planeados para alcanzar un objetivo, se concluye que cualquier estrategia implica la activación de la *función reguladora* de la metacognición, sea por involucrar algún nivel de planeación, de control o de posterior evaluación.

Por otro lado, la otra dimensión de la metacognición, aquella que se refiere al conocimiento de los propios procesos cognitivos, puede ser dividido en tres categorías, de acuerdo con lo propuesto por Flavell (1979): el conocimiento sobre *personas, tareas y estrategias*.

En la categoría que engloba el conocimiento sobre *personas* según Flavell (1979), estarían incluidos los conocimientos que la persona tiene sobre su propia cognición y los juicios que hace sobre las posibilidades cognitivas de las otras personas, además del conocimiento que tiene sobre la cognición de forma general. Manifestaciones de ese tipo de conocimientos pueden ser encontradas, según el autor, en testimonios de estudiantes que dicen que aprenden mejor oyendo que leyendo, por ejemplo.

Los conocimientos sobre la *tarea* contemplan informaciones sobre su naturaleza, sus objetivos y funciones, su grado de complejidad y de familiaridad para el sujeto, que resulta en el reconocimiento de la tarea como fácil o difícil para él. Ese conocimiento influye en gran parte en las decisiones de los niños y niñas sobre cuales estrategias adoptar para abordar la tarea en cuestión y, asociado al conocimiento que el sujeto

tiene de su propia cognición, determina su expectativa de éxito o fracaso frente a la situación.

La categoría que incluye los conocimientos de los niños y niñas sobre *estrategias*, según Flavell (1979), incluye el conocimiento sobre cuáles son las estrategias eficaces y más adecuadas al desarrollar una tarea para lograr el objetivo propuesto.

De esta forma, las categorías que determina el proceso metacognitivo de una persona se convierten en elementos importantes a tener en cuenta dentro del estudio de la construcción de los objetos estadísticos que interesan a esta investigación

2.8 *Psicología del Conocimiento*

Basados en el consenso entre los principales teóricos de la Psicología – Piaget (1976), Wallon (1963) y Vygotski (1979) –, así como de otros grandes pensadores – como George Mead (1992) y Bakhtin (1981) – y los pensadores contemporáneos como Bourdieu (1982), Barthes (1992), Bruner (1984; 1991), Lotman (1988) y Moscovici (1988), defendemos la tesis que apoya la Psicología del Conocimiento: *El ser humano se desarrolla a través de la construcción de la interacción dialéctica y la adaptación al entorno sociocultural, sustentada en los procesos de internalización y externalización que engendran la conciencia –entendida la externalización como una re-elaboración de la internalización y no una copia – y para los cuales el sistema de signos es*

especialmente importante, ya que se trata de la representación (Fávero, 2005 a, 2007 a, 2008).

De este hecho se esbozan cuatro aspectos teóricos–conceptuales. El primero se refiere a la evidencia de la interacción entre las reglas cognitivas y las normas sociales cambiando el énfasis de la diada sujeto–objeto a la tríada sujeto–objeto–otro, que desde el punto de vista de la Psicología del Conocimiento se traduce en un consenso que considera la interacción humana como un intercambio de significados y desarma, así, la clásica dicotomía entre cuerpo y mente, individuo y medio ambiente, pensamiento y lenguaje, emoción y cognición (Fávero M. H., 2005).

El segundo aspecto señala el papel de la mediación semiótica en el proceso de desarrollo psicológico humano, lo que significa comprender que tanto los objetos como las acciones humanas tienen significados socio–culturales, de modo que las prácticas sociales, incluidas las prácticas educativas escolares, tienen un fundamento que les da significado.

Ahora, suponer que la actividad humana está mediada, lleva al tercer aspecto: es esencial considerar los efectos de los sistemas de signos en el desarrollo psicológico de la cognición y de las comunicaciones individuales; y que las formas como las prácticas de las instituciones sociales interactúan con el funcionamiento mental del individuo. Es decir, la construcción del conocimiento y la adquisición de nuevas competencias dentro de la escuela y la práctica educativa implican mucho más que construir las estrategias

cognitivas, ya que implican también la cuestión de identificar cómo y cuáles son los valores sociales que impregnan la información, los procedimientos de sus actividades que fundamentan sus propios paradigmas (Fávero M. H., 2005).

El cuarto aspecto supone la toma de conciencia de que: las acciones humanas no son al azar, por el contrario se trata de prácticas sociales con un contenido que les da fundamento; que tanto los objetos y acciones funcionan en sí mismos como vehículos en la mediación de significados, que incluye las representaciones sociales de las áreas del conocimiento; que existe una interacción entre los paradigmas personales e institucionales; que la creación de un nuevo discurso y una nueva práctica social deben basarse en la transformación de los significados, esto es, en las posibilidades de su reelaboración.

Considerar estos aspectos en la práctica de la enseñanza, significa admitir no sólo que el ser humano es activo en su interacción dialéctica sociocultural, si no también cambiar el énfasis de la diada estudiante–conocimiento, por la tríada profesor–estudiante–conocimiento, lo que significa admitir que las actividades en los procesos de enseñanza y aprendizaje son mediadas.

Considerar esta tríada, en el contexto de la interacción en las aulas de clase, y que los efectos reguladores siempre son mediados por la red de interacciones entre los alumnos, no significa descartar el impacto de estas regulaciones en el proceso de autorregulación propia del individuo (Fávero M. H., 2001; 2007; 2010). Esto significa

que, aunque las regulaciones de una situación en la que la escuela se encuentra en una dinámica socio–cognitiva, debe considerarse su papel en el aprendizaje, desde el punto de vista de las construcciones cognitivas elaboradas y exploradas por cada individuo en esta situación.

Así, en términos de la Psicología del Conocimiento, mantenemos la importancia de la autorregulación en el funcionamiento cognitivo de cada sujeto en la interacción, de modo que la conciencia, en términos piagetianos, desempeña un papel crucial.

Para Piaget (1976) la toma de conciencia *“aparece en todos los aspectos como un proceso de conceptualización reconstruido más allá, en términos de semiotización de la representación, que fue adquirido en el plano de los esquemas de acción”* (pág. 271). Por lo tanto, es un movimiento de internalización a partir de la acción que conduce, en palabras de Piaget (1976), a comprender que *“el plan de acción refleja la conciencia de los problemas a resolver y de los medios cognitivos (y no materiales) utilizados para resolverlos”* (pág. 263) .

El hecho de hacer referencia a los procesos individuales internos no es incompatible con el proceso de mediación semiótica como se mencionó anteriormente. Por el contrario, el análisis de los procesos de internalización y externalización en las teorías de Piaget y Vygotsky, presenta un importante conjunto de principios epistemológicos y metodológicos comunes a los dos autores: para ambos la relación entre el interior (acciones interiorizadas para Piaget, funciones intrapsicológicas para Vygotsky) y externos (acción manifiesta para Piaget y función interpsicológica para Vygotsky) está

en constante cambio a través del desarrollo, para ambos, la realidad interna y externa no son dos entidades diferentes, estáticas, definidas de una vez por todas: ellas son construidas en las fronteras inestables.

Por lo tanto, el conocimiento para Piaget se basa en el progreso en dos direcciones: en la internalización y externalización, que es compatible con la formulación de Vygotski que, lejos de considerar la internalización como una simple transposición de las propiedades del funcionamiento interpersonal para el plano interno, considera la internalización como una reconstrucción interna, que a su vez, altera la función interpsicológica.

Es decir, ambos sostuvieron, como se ha insistido, que el plano de funcionamiento interno no se da, se construye. Según este marco teórico y teniendo en cuenta la situación de interacción que requiere una clase, se defiende la necesidad de ir más allá de la idea de la transmisión de los procesos de comunicación en el aula, para adoptar la idea de interlocución, lo que implica por lo tanto, considerar la situación de interacción social con el fin de evidenciar las regulaciones cognitivas de los sujetos en su toma de conciencia en función de un campo conceptual particular (y no la memorización de normas) y el análisis de estos procesos a partir de la producción de los procesos de comunicación desarrollados en esta interacción.

Lo que se está proponiendo implica la consideración de al menos tres aspectos psicológicos: la formación de conceptos y su sistema lógico de representación, la toma

de conciencia de estos conceptos y su lógica, y la interacción social que caracteriza a la situación didáctica en la cual son construidos.

Considerar esta propuesta implica también considerar que la evaluación es más que la medición de las respuestas "ciertas" o "erradas" del alumno. Asumir esta propuesta significa considerar la evaluación como una etapa que alimenta a su propia práctica didáctica, una vez que se considera, para los contextos de enseñanza y aprendizaje, tres tareas distintas y articuladas:

1. Evaluar las competencias de los alumnos y sus dificultades y el análisis de la relación entre las competencias y dificultades,
2. La sistematización de la práctica en el aula en términos de objetivos y descripción de las actividades propuestas, teniendo en cuenta la evaluación y el análisis a que se refiere,
3. Un análisis minucioso del desarrollo de las actividades propuestas, evidenciando:
 - a) la secuencia de acciones de los alumnos, b) el significado de estas acciones en relación con sus adquisiciones conceptuales, y c) la naturaleza de la mediación establecida entre el profesor y los alumnos (Fávero M. H., 2001; 2009a)

No se trata de defender un procedimiento didáctico particular, se trata de defender la formación de los profesores como instancia para el desarrollo de competencias en lo que respecta a la sistematización de los datos recogidos en la situación didáctica sobre las adquisiciones conceptuales particulares de las áreas del conocimiento, datos que serán la base para la mediación de este conocimiento, y para su evaluación.

CAPÍTULO 3. CONOCIMIENTO ESTADÍSTICO

3.1 Pensamiento Estadístico

En la actualidad desde diversas asociaciones, como la International Association for Statistical Education (IASE), la Royal Statistical Society (RSS), la American Statistical Association (ASA), entre otras, se adelantan trabajos motivados por la preocupación de mejorar la enseñanza, el aprendizaje, el uso y la aplicación de la Estadística en procura de incrementar una “Cultura Estadísticas” para fortalecer el “Pensamiento Estadístico” de la población (Batanero C. , 2002; Batanero & Godino, 2005; Batanero C. , 2000).

Es así como la importancia que la estadística ha alcanzado a nivel mundial, al igual que su incorporación en el currículo de matemáticas en los distintos niveles escolares, ha llevado a los Educadores Estadísticos a acuñar términos como Pensamiento Estadístico, Razonamiento Estadístico, Razonamiento Estocástico, Cultura Estadística o Capacidad Estadística, entre otros, para referirse a diferentes aspectos que la enseñanza, el aprendizaje y la implementación de la estadística deben implicar.

A pesar de que el término Pensamiento Estadístico hace alusión a un concepto complejo y que en la actualidad no se ha establecido un consenso acerca de su definición, algunos autores que han avanzado investigaciones en esta dirección, (Pfannkuch & Wild, 2002; Wild & Pfannkuch, 1999) expresan que el término pensamiento estadístico es como un mantra que evoca cosas entendidas de manera vaga, de nivel intuitivo, pero sobre todo muy poco estudiadas.

En su documento de 1999 citan a Snee (1990), quien considera el pensamiento estadístico como “procesos de pensamiento que reconocen que la variación está presente entre nosotros y en todo lo que hacemos, todo trabajo es una serie de procesos interconectados que al identificar, caracterizar, cuantificar, controlar y reducir la variación proveen oportunidades para mejorar”. Igualmente citan a Moore (1997), que presenta la lista de los elementos que para él constituyen el Pensamiento Estadístico y que son: la necesidad de los datos, la importancia de la producción de datos, la omnipresencia de la variabilidad, la medición y la modelación de la variabilidad.

Estas apreciaciones concuerdan con lo expresado por Salcedo (2005) quien manifiesta que el pensamiento estadístico implica la comprensión del por qué y del cómo se realizan las investigaciones estadísticas, lo que incluye reconocer y comprender el proceso investigativo completo (desde la pregunta de investigación hasta la recolección de datos, así como la selección de la técnica para analizarlos, probar las suposiciones, etc.), entendiendo cómo se utilizan los modelos para simular los fenómenos aleatorios, cómo los datos se producen para estimar las probabilidades,

reconocimiento de cómo, cuándo, y por qué los instrumentos deductivos existentes se pueden utilizar, y permiten entender y utilizar el contexto de un problema para emitir conclusiones y planear investigaciones. Estos autores realizan sus aportes basándose en la experiencia que en prácticas investigativas han tenido.

En otra apreciación, presentada por Moreno y Vallecillos (2001) e inferida de las ideas expuestas por Wild y Pfannkuch, se plantea que el Pensamiento Estadístico resulta de la integración entre la comprensión del problema real y el problema estadístico y que elementos como la interconexión de procesos, comprender y ocuparse de la variación, buscar explicaciones alternativas para los fenómenos bajo estudio, y la transnumeración, lo facilitan.

Por otra parte, y en la dirección de la calidad de los productos esperados, Ito, citado por Batanero y otros (2000), cita la definición de Pensamiento Estadístico del AQL⁸ (1996) que lo establece como una filosofía más que como el uso de ciertas herramientas. En la misma dirección, Behar y Grima (2004) comentan que cuando se habla de pensamiento se intenta expresar la necesidad de trascender el conocimiento, entendido éste último, como cosas que ahora se saben, pero que pueden olvidarse, mientras que Pensamiento Estadístico tiene la acepción de algo permanente, algo que forma parte de nuestra lógica corriente, es trascender la lógica determinista y complementarla con nuevos elementos que resultan más eficientes en situaciones de variabilidad e incertidumbre.

⁸ Acceptable Quality Level

De una manera más general, se infiere de Porter (1997), que el Pensamiento Estadístico es una herramienta social, construida con métodos estadísticos a partir de la necesidad de ordenar y tener conocimiento de la sociedad, en procura de mejorar sus condiciones.

Las definiciones anteriores están referidas explícitamente al término Pensamiento Estadístico, pero también se encuentran autores que utilizan otros términos para referir el mismo concepto, como la presentada por Garfield (1998)⁹, quien asegura que el Razonamiento Estadístico se puede definir como la manera en la que los niños y niñas razonan con ideas estadísticas o dan sentido a la información estadística.

Esto abarca las interpretaciones de conjuntos de datos, representaciones de datos, o resúmenes estadísticos de datos. Implícito al razonamiento estadístico está la comprensión de importantes ideas como distribución, incertidumbre, aleatoriedad y muestreo.

En forma similar, Salcedo (2005) enuncia que el Razonamiento Estadístico es la manera como las personas argumentan sobre las ideas estadísticas y el sentido que le dan a la información estadística. El Razonamiento Estadístico implica conectar un concepto a otro (por ejemplo, el centro de la distribución y la variabilidad) o combinar ideas acerca de los datos y la probabilidad. Razonar estadísticamente significa entender

⁹ Citado por Moreno y Vallecillos 2001, p.5.

y estar en capacidad de explicar los procesos estadísticos y de interpretar completamente los resultados estadísticos.

Batanero (2002) utiliza definiciones de Wild y Pfannkuch (1999), para mencionar las cinco componentes fundamentales del Razonamiento Estadístico que son: reconocer la necesidad de los datos, transnumeración, percepción de la variación, razonamiento con modelos estadísticos e integración de la estadística y el contexto; y en esta misma dirección se encuentran los aportes de Álvarez (2003) y Vallecillos (1999), quienes presentan los elementos básicos a tener en cuenta para el Razonamiento Estadístico, que son:

- El razonamiento debe describir en general las acciones de un investigador para resolver un problema de la vida, y particulariza las acciones para la resolución del problema estadístico.
- El razonamiento debe manifestar la interrelación de la teoría con la técnica.
- El razonamiento debe ser concebido por etapas que concretizan las acciones mentales, evidenciando una estructura orgánica de principio a fin.

Adicionalmente explican que la participación del Razonamiento Estadístico en la resolución de problemas estadísticos se presenta a través de cinco etapas que son: 1) Interpretación del problema general y derivación del problema particular; 2) exploración de los conocimientos conocidos y elección y/o creación del (de los) método(s) adecuado(s); 3) construcción de la técnica de solución a emplear (entendida

la técnica de solución como la estructuración adecuada de métodos); 4) aplicación de la técnica construida y 5) análisis de resultados y elaboración de las respuestas.

Aunque no se conocen muchas investigaciones que relacionen las similitudes entre todos estos términos, Salcedo (2005) manifiesta que en las investigaciones de delMas (2002) se señala que a menudo se utilizan de forma indiferente términos como Cultura Estadística, Razonamiento Estadístico y Pensamiento Estadístico; y que hasta la fecha no se ha establecido una definición formal de estos términos.

En esta dirección estableceremos nuestra posición respecto de lo que consideramos pueda entenderse por Pensamiento Estadístico (Riascos Forero, 2007), resumido como la habilidad mental, a partir de sus conocimientos y formación en estadística, que un individuo construye para leer, analizar e interpretar datos estadísticos; complementada esta habilidad con la actitud que éste asume al enfrentar y manipular dichos datos estadísticos.

Esta posición intenta enlazar la intencionalidad del trabajo a realizar aquí con la de los autores que plantean consideraciones de orden constructivista para el desarrollo del pensamiento estadístico.

En lo que concierne al alcance de este trabajo y sus objetivos, debemos enfatizar que no se intentó plantear una diferencia entre los conceptos mencionados. La intención se centró en establecer una organización, desde la perspectiva de los

resultados de investigación encontrados, que permitan visualizarlos y ubicarlos en función de su utilización y aplicación.

3.2 *Génesis de las medidas de tendencia central*

En la tradición clásica, el conocimiento estadístico científico ha sido considerado compuesto por dos grandes bloques: Estadística Inferencial y Estadística Descriptiva.

La Estadística Inferencial se refiere al conjunto de métodos y técnicas estadísticas que se pueden utilizar para lograr conclusiones que, a partir de una muestra probabilística (porción de una población), se pueden generalizar a la población de la cual se extrajo dicha muestra. Encontramos así métodos como las estimaciones de parámetros, las pruebas de hipótesis, los Modelos de regresión lineal, etc., que sirven para estos propósitos (Canavos, 1988; Calot, 1988; Behar & Yepes, 1988).

La Estadística Descriptiva, se refiere al conjunto de métodos y técnicas estadísticas utilizadas para obtener conclusiones referidas a la muestra estudiada. Entre tales técnicas se encuentran las tablas (distribuciones) de frecuencias, y sus gráficos asociados, como el primer método de síntesis para tratar un cúmulo de información numérica y obtener mayor comprensión del fenómeno que les dio origen; sin embargo, aunque con estos métodos se alcanzan, en muchos casos, niveles aceptables de

comprensión, generalmente se requieren más y mejores elementos de síntesis para realizar análisis complementarios.

Elementos tales como las medidas de tendencia central, medidas de forma y las medidas de dispersión, entre otros, son conceptos que se utilizan para caracterizar una distribución de datos estadísticos y permiten realizar comparaciones de la forma y/o la posición de las distribuciones de los datos.

La moda, la mediana y la media aritmética, son los principales indicadores de tendencia central que se utilizan en la estadística. Ellas, en general, reciben el nombre de “estadísticos”, características, medidas o indicadores de posición (o tendencia) central (Canavos, 1988; Calot, 1988; Behar & Yepes, 1988).

Aunque no son las únicas medidas de tendencia central utilizadas en estadística, cumplen, como todas, las características que, según Calot (1988, págs. 55-56), Yule¹⁰ definió, y la comunidad de estadísticos aceptó, como deseables para una medida de tendencia central. Estas características pueden resumirse así:

1. *Objetividad*: siempre se debe llegar al mismo resultado numérico.
2. *Exhaustividad*: se deben utilizar *todos* los datos.
3. *Significado concreto*: su interpretación debe ser sencilla e inmediata.
4. *Sencillez de cálculo*: debe utilizar relaciones simples entre los datos
5. *Fortaleza matemática*: debe estar dotado de propiedades matemáticas.

¹⁰ George Undy Yule (1871 – 1951) fue uno de los personajes que contribuyó a la construcción de la actual teoría estadística

6. *Robustez*: debe ser “*resistente*” a las fluctuaciones de los datos.

A partir de estas consideraciones, se presentan y describen los indicadores que serán utilizados en esta investigación.

3.3 *La Moda*

También llamada valor dominante, se denota por la sílaba M_o o en otros casos por M_0 , se define estadísticamente como el dato que presenta la mayor frecuencias o el dato que más se repite; corresponde al valor de la abscisa asociado al máximo en el diagrama diferencial (diagrama de barras o histograma según el caso).

No satisface las condiciones 5 y 6 de Yule, lo que constituye su mayor inconveniente. Depende de la frecuencia del dato y no del valor. Además, la agrupación de los datos en grupos puede hacerla pasar de un valor a otro, según la dimensión de los intervalos que se consideren.

Por su misma definición, un conjunto de datos puede tener más de una moda, lo que permite evidenciar un comportamiento central que no lo pueden determinar otros indicadores; de esta forma si existe una única moda, la distribución de los datos se denomina unimodal, si existen dos modas, bimodal y si hay más de dos modas se le llama multimodal o polimodal.

En general es una medida de tendencia central poco eficaz ya que si las frecuencias se concentran en algunos valores, al tomar uno de ellos como representante, los restantes pueden no quedar bien representados. Sin embargo, tiene importancia por ser la única característica de valor central que se puede tomar para datos de tipo cualitativo.

Elementos estructurales de la moda

La estructura de la moda corresponde al proceso de determinar el valor de la variable asociado al máximo de su conjunto de frecuencias. Requiere de una operación de clasificación de los valores de la variable estadística observada, seguida de una operación de conteo de frecuencias, finalizando con una comparación de dichas frecuencias para determinar la mayor de ellas, y a partir de esto, identificar la moda como el valor de la variable asociado a la mayor frecuencia. La estructura de este indicador permite entender la posibilidad de que en este proceso puedan aparecer distintos valores de la variable que puedan ser denominados modas.

El procedimiento de cálculo a partir de un conjunto de datos no agrupados sería el siguiente:

1. Clasificar los datos: Separar el conjunto de datos por sus distintos valores o características.

2. Conteo de frecuencias: Encontrar la frecuencia o el número de veces que se repite cada valor o característica.
3. Comparación de valores: Asociar cada valor o características con su frecuencia.
4. Determinación del Máximo valor: Seleccionar el valor o característica asociado al máximo del conjunto de frecuencias.

El procedimiento de cálculo a partir de un conjunto de datos agrupados sería:

1. Clasificación de datos:
 - a. Identificar el total de grupos o clases
 - b. Identificar la columna que contiene los valores de frecuencia de cada grupo de valores o características
 - c. Identificar un valor o característica que represente a cada grupo (Marca de Clase)
2. Conteo de frecuencias: Determinar el total de datos o frecuencia de cada grupo
3. Comparación de valores: Determinar el máximo del conjunto de frecuencias¹¹
4. Determinación del Máximo valor: Determinar la marca de clase asociada al valor máximo del conjunto de frecuencias.

En caso de encontrarse varias frecuencias con el mismo valor máximo, se determinarán tantas modas como frecuencias encontradas.

¹¹ En caso de que las clases o grupos tengan diferente amplitud, es necesario considerar las densidades de las frecuencias para poder realizar adecuadamente el proceso de identificación de la Moda

3.4 *La Mediana*

Si suponemos ordenados todos los datos de una variable estadística, se llama mediana al valor de la variable estadística que divide el conjunto en dos grupos con el mismo número de datos en ellos y se denota por Me o por M_e .

La mediana satisface las condiciones 1, 3, 4 y 6 de Yule. Depende de los datos observados solo por su orden y poco por su valor y frecuencia, lo que favorece la condición 6 cuando la distribución puede tener observaciones erróneas, pero perjudica la condición 2.

Para calcular la mediana a partir de una tabla de frecuencias o de un polígono de frecuencias acumuladas, se requiere encontrar el valor de la abscisa para el cual la frecuencia relativa acumulada corresponde a $1/2$.

La mediana presenta, en algunas distribuciones, ciertas ventajas como medida de tendencia central frente a la media aritmética ya que no se ve afectada por valores extremos de los datos; por ello su uso es particularmente adecuado en las distribuciones asimétricas.

También se puede utilizar con variables estadísticas ordinales.

Algunas propiedades de la mediana son:

1. La suma de las distancias de los datos a un punto “ a ” es mínima cuando ese punto es la mediana.
2. La mediana es invariante si se disminuyen o aumentan simultáneamente valores de observaciones inferiores a ella y valores de observaciones superiores.

Elementos estructurales de la mediana

De igual forma que en el análisis realizado en el caso anterior, para la mediana se encontró que su estructura corresponde a la del proceso de determinar el valor que separa en dos grupos de igual frecuencia a un conjunto de datos de acuerdo a su magnitud.

El procedimiento de cálculo a partir de un conjunto de datos no agrupados sería:

1. Determinar la cantidad de datos:
 - a. Contar el total de datos
 - b. Determinar si el número total de datos es par
2. Ordenar datos: Organizar de manera ascendente o descendente el conjunto de datos
3. Determinar los grupos y el valor del indicador:
 - a. Si el número total de datos (n) es impar, entonces la mediana se define como el dato que ocupa la posición $((n+1)/2)$;
 - b. en caso contrario, se define como el valor de la semisuma de los datos centrales ubicados, el primero, en la posición $(n/2)$, y el segundo, en la posición siguiente; $((n/2)+1)$.

El procedimiento de cálculo a partir de un conjunto de datos agrupados sería:

1. Determinar la cantidad de datos:
 - a. Determinar el total de grupos o clases, a partir del conteo de las frecuencias de cada clase.
 - b. Identificar o determinar el valor que representa a cada clase (marca de clase)
 - c. Determinar el total de datos de cada clase (frecuencia)
 - d. Calcular la suma de frecuencias para obtener el total de datos
2. Determinar los grupos y el valor del indicador:
 - a. Frecuencias Acumuladas: Calcular, en una columna y para cada clase, la suma de las frecuencias de las clases anteriores, a partir de la primera hasta incluir la clase en la que se escribirá la suma.
 - b. Identificar la clase en la que se encuentra el primer valor de frecuencias acumuladas que supera al 50% de los datos.
 - c. Calcular, a través de interpolación, el valor de la variable al que le correspondería una frecuencia acumulada equivalente al 50% de los datos.
 - d. Asignar este valor a la Mediana de los datos.

El cálculo a partir de la interpolación, se utiliza para impedir que el valor de la mediana no se considere como único, debido a que, en primera instancia, todos los valores de la variable contenidos en esa clase, cumplirían con el criterio de ser considerados como medianas del conjunto de datos.

3.5 La Media aritmética

También conocida como promedio aritmético, valor promedio y, en teoría de la probabilidad, como valor esperado o esperanza matemática; es considerada, en estadística, la principal medida de tendencia central porque, además de cumplir todas las características propuestas por Yule, posee las mejores características algebraicas.

Simbólicamente se representa por la letra griega μ cuando se habla de la inclusión de todos los posibles valores de la variable (población) o fenómeno observado o \bar{x} si se trata de una parte de ellos (muestra). Se define estadísticamente como el valor alrededor del cual oscilan o tienden a concentrarse los datos.

Su valor se obtiene al sumar todos los valores (x_i) de la variable estadística y dividir esta suma por el total de términos sumados¹². Atendiendo al tipo de variable estadística, el cálculo se realiza de forma diferente; así, para el caso de una variable de tipo discreta corresponderá a la suma de los datos dividida por el total de los mismos, o como la integral, en el rango definido, del producto de valores la variable por su correspondiente valor de la función de densidad, si se trata de una variable de tipo continua.

En símbolos sería:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \text{para el caso de una variable de tipo discreta y}$$

¹² En la nomenclatura estadística, se utiliza el simbolismo N , para referirse a los datos de la población y n , para los datos de la muestra

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

para el caso de una variable de tipo continua.

Estas fórmulas se adecúan a las características que presente la colección de datos; por ejemplo, si los valores aparecen en una tabla de frecuencia, el cálculo se realiza multiplicando cada valor de la variable por su frecuencia relativa (f_i) observada.

Simbólicamente, $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i f_i}{n}$; donde m representa el total de categorías o clases observadas y n el total de datos. Esta forma de la ecuación de la media aritmética se conoce en la literatura como media ponderada o promedio ponderado.

Algunas aproximaciones a descripciones prácticas de la media aritmética (Batanero & Godino, 2001; Cobo B. , 2003), la presentan como la mejor medida de estimación de una cantidad desconocida cuando no se puede conocer su valor exacto y se han realizado varias medidas de la misma.

Este es, por ejemplo, el caso de la media cuando se usa para calificar el rendimiento de un estudiante a partir de varias evaluaciones o cuando se estima el tiempo de espera en la parada de un autobús.

Otras descripciones afirman que es la cantidad equitativa a repartir cuando se tienen diferentes valores y se quiere distribuirlos en forma uniforme; como cuando hablamos del número medio de niños por familia o de la renta per cápita de un país.

Las principales propiedades matemáticas de la media aritmética (Behar & Yepes, 1988; Calot, 1988), son las siguientes:

- 1) La suma de las desviaciones¹³ de los datos con respecto a la media es cero

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0.$$
- 2) La suma de los cuadrados de las desviaciones de los datos con respecto a un valor “a” ($\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$), es mínima cuando $a = \bar{x}$.
- 3) Si los datos de la variable son constantes ($x_i = k$), entonces la media será igual a la constante ($\bar{x} = k$).
- 4) Si todos los datos de una variable son multiplicados por un valor constante k , el promedio de los nuevos datos resulta multiplicando la media de los datos por el valor constante ($\bar{x}_{nueva} = k\bar{x}$).
- 5) Si $z_i = ax_i + by_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$ donde a y b son valores constantes, entonces, la media de la variable Z se obtiene como: $\bar{z} = a\bar{x} + b\bar{y}$
- 6) Si un conjunto de n datos se divide en k subconjuntos excluyentes y exhaustivos, que tienen n_1, n_2, \dots, n_k observaciones cada uno, tal que $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$; con promedios $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ respectivamente, entonces el promedio del conjunto global estará dado por: $\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + \dots + n_k\bar{x}_k}{n}$.

¹³ La desviación se refiere a la diferencia matemática entre un dato y el promedio (x-me), de tal forma que cuando el resultado es positivo, indica que el dato será mayor que el promedio, y en caso de ser negativa la diferencia, indicará que el dato es inferior al promedio

7) La suma de los datos es igual al producto del promedio por el total de los mismos:

$$\sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}$$

8) La media es un valor comprendido entre los extremos de la distribución: $x_{\min} <$

$$\bar{x} < x_{\max}$$

9) El valor de la media está influenciado por el valor de cada uno de los datos.

10) La media no siempre es igual a uno de los datos. Incluso puede no tener "sentido" para los datos considerados (como decir que el número medio de hijos en un conjunto de familias colombianas es 3.1).

11) Hay que tener en cuenta los valores nulos en el cálculo de la media.

12) La media se expresa en las mismas unidades de medida que los datos.

Elementos estructurales de la media aritmética

Entendiendo la estructura de un concepto como la distribución, el orden y las relaciones de los elementos que lo componen, y atendiendo a las demandas cognitivas que dicha estructura exige para su construcción, se puede decir que en su definición

matemática $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$, la media aritmética establece un cociente entre dos valores, el dividendo, que se refiere a la suma de los valores de la variable¹⁴; y el divisor, que se refiere al total de datos involucrados¹⁵.

¹⁴ Datos numéricos que pueden pertenecer a cualquier conjunto numérico (Naturales, Enteros, Racionales, Irracionales, Reales o Complejos) dependiendo de la naturaleza del fenómeno medido

¹⁵ Es un valor que, por provenir de un conteo, pertenece al conjunto de los números Naturales

La estructura de demandas cognitivas, en términos de procedimientos para calcular la media aritmética, se presentan de la siguiente forma:

El procedimiento de cálculo a partir de un conjunto de datos no agrupados sería:

1. Calcular el dividendo: Sumar los datos
2. Calcular el divisor: Contar los datos
3. Determinar el valor: Calcular el cociente de la suma de los datos por el total de ellos.
4. Determinar el resultado como la media aritmética del conjunto de datos.

El procedimiento de cálculo a partir de un conjunto de datos agrupados sería:

1. Calcular el divisor: Determinar la cantidad de datos a partir de la suma de las frecuencias.
2. Calcular el dividendo:
 - a. Determinar el total de grupos o clases, a partir del conteo las celdas de las frecuencias
 - b. Identificar o Determinar la frecuencia en cada grupo o clase
 - c. Determinar el valor del dato que representa a cada clase (marca de clase)
 - d. Calcular, para cada clase, el producto entre la frecuencia y su marca
 - e. Sumar los productos obtenidos en el punto anterior.
3. Determinar el valor: Calcular la división de la suma del punto anterior por la cantidad de datos.
4. Determinar el resultado como la media aritmética del conjunto de datos.

CAPÍTULO 4. INVESTIGACIÓN SOBRE APRENDIZAJE DE CONCEPTOS ESTADÍSTICOS

4.1 Los esquemas en Didáctica de la Matemática

En el campo de la Didáctica de las Matemáticas, a pesar de no encontrarse muchos estudios que enfatizan en la construcción de esquemas mentales, no ha sido extraño el término, aunque éste no siempre ha sido bien comprendido y utilizado, cabe destacar, en esta dirección, los trabajos de autores como Tall & Vinner (1981), quienes instauran su *Advanced Mathematical Thinking*; Brousseau (1986), con su Teoría de las Situaciones Didácticas; Dubinsky (1992) con la teoría APOS (Action, Process, Object, Squem), Artigue (1995), con la teoría de la dualidad herramienta–objeto, Vergnaud (1990) con su Teoría de los Campos Conceptuales y, en el campo nacional, se encuentran los trabajos doctorales de De la Torre (2000), con su modelación del espacio y el tiempo, Esteban (2000), con su Estudio comparativo del concepto de aproximación local, y Delgado (1998), con un estudio micro genético de los esquemas asociados al concepto de límite; quienes apoyados en la definición del concepto de esquema que dio Piaget plantearon metodologías audaces y estrategias novedosas para explicar fenómenos en el caso particular del aprendizaje de las matemáticas.

Un artículo que presenta una reflexión del concepto, desde la perspectiva de la representación en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, es el escrito por Font (2002), en el cual contrasta las propuestas de Tall & Vinner (1981), Brousseau (1986), Vergnaud (1990), Artigue (1995) y Delgado & Azcárate, (1996) mostrando cómo ha sido utilizado por ellos el concepto de esquema, con un enfoque claramente cognitivo, pero con sus intereses en la perspectiva didáctica.

En el campo de la enseñanza y el aprendizaje de la estadística, la revisión bibliográfica inicial no permitió reportar trabajos en esta dirección, como para establecer una postura en ese sentido.

El planteamiento que pretende realizar esta investigación se centra en el punto de vista netamente psicológico y cognitivo del concepto, caracterizando sus inicios y constitución, previo a una orientación académica formal de los conceptos estadísticos, ya que se pretende encontrar indicios que permitan orientar trabajos posteriores en didáctica de la estadística en este sentido.

4.2 *Prácticas de enseñanza y prácticas de evaluación formal*

Las investigaciones muestran al menos dos consensos. Por un lado, la importancia de comprender la lógica del sistema decimal de numeración para comprender la lógica de los algoritmos matemáticos y su aplicación en otras áreas del conocimiento. Por otro,

la importancia de la notación matemática una vez que se entiende que la notación explicita la relación de las elaboraciones matemáticas propias de los niños, adolescentes y adultos con las formas típicas escolares de presentación y representación de conceptos matemáticos en elaboración.

Las calificaciones reflejan, en última instancia, lo que la literatura en el área denomina “aprensión conceptual” de las nociones involucradas y que tienen innegable importancia en el proceso de adquisición de instrumentos ya acordados para representar las diferentes áreas del conocimiento humano. Sin embargo, se pueden deducir de informes oficiales de evaluación en Colombia (PISA, 2012), de referencias bibliográficas del área y de datos obtenidos en las investigaciones que se han desarrollado, que hay una gran dificultad: Por un lado, los profesores no consideran los resultados de los estudiantes como herramientas importantes para la elaboración de resultados convencionales, aunque la evaluación se basa en el pasado; por otro, los alumnos persisten en su uso inadecuado, porque desconocen su lógica. Una de las explicaciones recurrente de los profesores es la comprensión textual como un requisito previo para el éxito de la resolución de problemas.

Esa fue una de las razones que llevaron a estudiar la comprensión textual, adoptando el diseño de Lotman (1988), cuyo análisis se centra en la semiótica de la cultura, y concibe el texto como “*un generador de información con los rasgos de una persona inteligente*” (pág. 57), de modo que el texto no pretende llevar un mensaje en

un idioma determinado, sino representar un complejo sistema de almacenamiento de diversos códigos capaces de transformar los mensajes entrantes y generar otros.

Este enfoque es tan relevante para el análisis del texto de un problema de estadística o matemáticas, como el texto científico, literario y periodístico, es decir, si tenemos en cuenta la función semiótica del texto, entonces, necesariamente, debe reformularse nuestra concepción de la naturaleza de la relación entre el lector y el texto: en lugar de la fórmula conocida como *“el lector descifra el texto”*, puede ser más precisa: *“el lector se comunica con el texto”* (Fávero M. H., 1995, pág. 16).

La investigación señala también la falta de interacción de los estudiantes con el texto, lo que Fávero y Trajano (1998) denominan impermeabilidad del texto escrito. ¿Se podría hablar de la falta de impermeabilidad textual en referencia al texto de problemas en matemáticas y estadística? ¿Será esto lo que significan las exclamaciones de los profesores cuando dicen: “Ellos no leen el problema”?, pero la pregunta que queda por responder es: ¿qué promueve esta impermeabilidad en la escuela?

Esta situación preocupa por la paradoja que ella engendra, después de todo, la educación en general y la educación matemática, en particular, estaría preparando a las personas para tomar parte en las decisiones sociales y, por tanto, para el ejercicio de la ciudadanía. (Fávero M. H., 2005; 2009a).

4.3 *Formación de docentes*

Estas cuestiones llevan a reflexionar sobre la formación de docentes en general y en particular sobre los programas de licenciatura, y llevan a defender la importancia de dos puntos importantes en la formación: la búsqueda de adquisiciones conceptuales particulares en las áreas del conocimiento y el desarrollo de competencias para mediar este conocimiento.

En lo que se refiere al primer punto, los resultados que aquí presentamos hacen énfasis en considerar, la forma de la psicogénesis de los conceptos estadísticos ubicando sus bases en la formación matemática previamente recibida en la escuela, dando apertura al trabajo que los currículos de estadística en los primeros cursos de educación básica deben considerar; en cuanto al segundo punto, se trata de considerar los conocimientos que un futuro profesor de estadística debe tener en cuenta para una buena mediación entre el conocimiento y el que construyen sus aprendices.

Sin embargo, esto requiere una educación que considere la filosofía y la epistemología de la construcción de los saberes particulares y el desarrollo de los procesos psicológicos que subyacen a la construcción, es decir, requiere de una formación basada en la Psicología del conocimiento (Fávero M. H., 2009a).

4.4 *La investigación sobre formación de profesores de estadística*

Es bien sabido que uno de los factores más importantes, cuando se habla del proceso de aprendizaje en general, es la formación que tienen los docentes; de ahí que esa preocupación haya llevado a la comunidad interesada, IASE e ICMI¹⁶, a concentrar esfuerzos en la realización de un trabajo que involucrara temáticas amplias en procura de conseguir aportes para avanzar en la comprensión de los factores que intervienen en el campo, particularmente en la formación de docentes.

Las consideraciones contempladas por estas dos asociaciones las llevaron a poner en marcha en 2008 un Estudio Conjunto (Documento de discusión, 2006; Molina Ortin, 2001) orientado a la reflexión sobre la especificidad de la enseñanza de la estadística en los niveles escolares y en la educación de los profesores.

Este Estudio Conjunto se inició oficialmente con la IASE Round Table Conference realizada del 30 de junio al 4 de julio en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (México).

La justificación para la realización de este Estudio Conjunto se basó en elementos como la situación de la enseñanza de la estadística en los niveles escolares, aspecto sobre el cual se han establecido suficientes razones para su consideración (Batanero C. , 2000; Wild & Pfannuch, 1999), así como los retos que se tienen para la formación

¹⁶ International Commission on Mathematical Instruction, <http://www.mathunion.org/ICMI/>

inicial y el desarrollo profesional de los profesores (Gattuso L. , 2006; Gattuso & Mary, 1998), y la especificidad de la Educación Estadística, en lo que se refiere a la participación de institutos y asociaciones de estadísticos en la preparación de materiales y organización de acciones para mejorar la Cultura Estadística, así como la fuerte especificidad de las cuestiones filosóficas, éticas, procedimentales y políticas que reflejan la Educación Estadística.

El Estudio Conjunto se orienta a la reflexión sobre la especificidad de la enseñanza de la estadística en los niveles escolares y en la educación de los profesores e intenta proporcionar una panorámica de la situación actual, tanto en la enseñanza de la estadística en las escuelas, como en la preparación inicial de los profesores de matemáticas (Documento de discusión, 2006).

Este Estudio Conjunto se relaciona con el 15° realizado por el ICMI sobre Formación Profesional y Desarrollo de los Profesores de Matemática, por lo que muchas conclusiones pueden aplicarse al caso de la estadística.

Se espera que los resultados de este Estudio Conjunto sean de utilidad para Educadores Matemáticos y Educadores Estadísticos, así como a psicólogos y profesores de otras disciplinas que usan la estadística como herramienta. Se tiene una invitación extensiva a personas con diversos grados de experiencia, desde las más conocidas en el área, como a algunos jóvenes investigadores que están comenzando a

formarse, invitación que asumimos en este trabajo como una oportunidad y un espacio para compartir conocimientos y experiencias que involucran nuestros contextos.

Los 6 temas que son considerados cuestiones de investigación para el Estudio Conjunto se presentan en la tabla continuación (Documento de discusión, 2006).

Tabla I Temas y preguntas de investigación del Estudio Conjunto de la IASE y el ICMI

Tema	Responsable	Algunas Preguntas
1. Situación actual de la enseñanza de la estadística en las escuelas.	Dani Ben.Zvi y Chris Reading	¿cuál es la situación actual de la enseñanza de la estadística en los niveles de educación primaria y secundaria en diferentes países? ¿Qué estatuto tiene el análisis de datos y la estadística en el currículo de diferentes países?, entre otras
2. Actitudes, conocimientos, concepciones y creencias de los profesores, con relación a la educación estadística.	Carmen Batanero y Gail Burrill	¿Cuáles son las actitudes y creencias de los profesores sobre la estadística y su papel en las matemáticas escolares? ¿Qué conocimiento y competencias pedagógicas básicas requieren los profesores para enseñar exitosamente estadística en los diversos niveles escolares?
3. Análisis de las prácticas actuales en formación de profesores respecto a la enseñanza de la estadística.	Doreen Connor y Lionel Pereira-Mendoza	¿cuáles son las prácticas actuales de formación de profesores para enseñar estadística en diversos países? ¿Qué oportunidades de desarrollo profesional tienen los profesores mientras enseñan estadística?
4. Mejorando la formación de los profesores para enseñar estadística. Una mirada al futuro.	Joachin Engel y Maxine Pfannkuch	¿a qué retos se enfrentan los profesores y qué apoyo necesitan cuando enseñan estadísticas? ¿Cómo puede ayudarse a los profesores a ser capaces de crear diseños didácticos que permitan a sus estudiantes adquirir las ideas básicas de estadística?, entre otras.
5. Formación de profesores en países en desarrollo.	Jun Li y Victor Polaki	¿cuáles son los desafíos y perspectivas de los profesores de países en desarrollo, donde la infraestructura es generalmente pobre, la tecnología adecuada como calculadoras u ordenadores puede estar disponible pero no es alcanzable y donde el software estadístico no está disponible o no es alcanzable incluso cuando se dispone de computadores?
6. Construyendo la colaboración entre educadores matemáticos y educadores estadísticos para la formación de profesores.	Joan Garfield y María Gabriela Ottaviani	¿Cuáles son los modelos productivos para la colaboración de miembros de departamentos universitarios de estadística y educación matemática para proporcionar cursos de estadística a los profesores en formación? ¿Qué conocimientos y habilidades necesitan los educadores de profesores

Tema	Responsable	Algunas Preguntas
		(que trabajan con profesores en formación) para desarrollar y mejorar el razonamiento, cultura y conocimiento estadístico de los futuros profesores?

Si bien la comunidad se ha preocupado por desarrollar esfuerzos en todos estos temas (Batanero & Godino, 2002; Batanero, Godino, & Navas, 1997; Behar & Yepes, 1988; Batanero, Garfield, Ottaviani, & Truran, 2000; Ben-Zvi & Gardfiel, 2004; Garfield, 1995), debe reconocerse que en lo que concierne al aprendizaje, el conocimiento que desde la perspectiva psicológica se ha producido, ha aportado elementos importantes en esta discusión.

Aunque existen aportes significativos en este sentido pero amplios para los propósitos particulares de la enseñanza de la estadística, partiendo de los textos clásicos de Piaget e Inhelder (1951) y Fishbein (1975) hasta aportes más específicos en el campo de la enseñanza (Garfield, 1995; Cobo B. , 2003; Strauss & Bichler, 1988; Watson & Moritz, 1999; Godino, Batanero, & Cañizares, 1991), centrar la atención en este aspecto, considerando una condición en la cual el objeto estadístico no ha sido enseñado con anterioridad al niño y observar la forma natural como éste organiza su pensamiento y elabora estrategias para su solución, lo que Puche (2003) denomina como la “descompactación de la mente del niño”, resulta ser una perspectiva interesante para aportar a la explicación del fenómeno del aprendizaje de la estadística, y un elemento de consideración para tener en cuenta en el diseño de currículos y contenidos de los procesos de formación de docentes.

Pensando en la utilidad de los resultados de esta investigación, es evidente que la población de profesores en formación resulta importante, no sólo por las necesidades que ellos tienen para el desarrollo de sus actividades de enseñanza, sino por los aportes en términos de las relaciones con otros aspectos aparentemente alejados de la problemática, como lo es la epistemología de los objetos estadísticos y la psicología del conocimiento estadístico como lo plantea, en términos más amplios, Fávero (2005).

Consideramos importante hacer énfasis en que los resultados que aquí se reportan pueden contribuir al llamado que hace la comunidad para trabajar en el fortalecimiento del campo, sobre todo desde estos países en desarrollo, y esperar que su contribución se aúne a las de otros para continuar fortaleciendo no solo el campo sino también la misma comunidad

PARTE II: EL ESTUDIO

CAPÍTULO 5. UN PROBLEMA Y UN MÉTODO

5.1 Delimitación del Problema y Escogencia del Método

El camino propuesto para desarrollar el análisis de una situación, acorde con la propuesta piagetiana, que haga énfasis en el desarrollo de los esquemas como procesos básicos que van a continuar desarrollándose durante toda la vida a través de procedimientos de aprendizaje, se basa en la consideración de esquemas que ya han evolucionado al nivel de esquemas de pensamiento y no de aquellos ligados a lo sensorio motriz, denominados esquemas motores.

En esta tesis, el conteo de objeto (Kamii, 1995) es tomado como un esquema de pensamiento vinculado a esquemas más elaborados que hemos de denominar estrategias.

Las preguntas que guían esta investigación se expresan de la siguiente forma:

¿Qué características del funcionamiento del pensamiento (instrumentos: abstracciones empíricas, pseudo empíricas y reflexivas, procesos: generalización y toma de conciencia, y mecanismos: estrategias y metacognición) se evidencian en la construcción de los conceptos estadísticos elementales de moda, mediana y media aritmética?

¿Cómo se organizan y funcionan estas características, a nivel psicogenético, para permitir la construcción de estos conceptos?

Las hipótesis que emergen de las preguntas de investigación, que guían este trabajo y que pretenden encontrar explicación a través del diseño metodológico implementado para su verificación, son las siguientes:

Existe un dominio específico de situaciones en el cual el funcionamiento del pensamiento de un sujeto, interpretable en términos de esquemas (instrumentos, procesos y mecanismos), determina la génesis en la construcción de los conceptos estadísticos elementales de moda, mediana y media aritmética.

La observación de la actividad del sujeto que enfrenta y resuelve situaciones problemáticas no escolarizadas de estadística, permite caracterizar el funcionamiento del pensamiento para la construcción de los conceptos estadísticos elementales de moda, mediana y media aritmética.

Los objetivos que se propone alcanzar durante el desarrollo de esta investigación, se presentan a continuación desagregados en términos de generales y específicos.

Objetivo General:

Contribuir en la explicación de la psicogénesis de los conceptos estadísticos elementales de moda, mediana y media aritmética, en niños de edades entre 9 y 14 años.

Objetivos Específicos:

- Diseñar, construir y aplicar, a partir de una situación problema, tareas cognitivas para el estudio de la comprensión de los conceptos estadísticos elementales de moda, mediana y media aritmética.
- Describir el desempeño de los niños al resolver las tareas que involucran en su solución los conceptos estadísticos elementales de tendencia central moda, mediana y media aritmética.
- Caracterizar, en términos de estrategias, los esquemas mentales que los niños utilizan al resolver tareas que involucran en su solución los conceptos estadísticos elementales de moda, mediana y media aritmética.
- Organizar jerárquicamente, por su grado de complejidad en la elaboración, las estrategias de solución que los niños utilizan al resolver estas tareas.

Para ello, se creó una situación de aprendizaje cognoscitivo que resultará susceptible de favorecer el desarrollo de los conceptos estadísticos involucrados, a partir del reconocimiento de su génesis, y permitiera centrar la atención en un análisis cualitativo más fino de los procesos de transformación e integración del pensamiento en el transcurso del desarrollo de los procedimientos (estrategias) elaborados por los niños, más allá de la sola cuantificación de los efectos observados.

En este sentido, no se está interesado en lo que pudiera suceder con niños más pequeños a los que se refiere esta investigación, ni con lo que pudiera suceder con niños con algún tipo de deficiencia, por ejemplo, síndrome de Down (Fávero M. H., 2005), en los cuales se hace evidente centrar la atención en el desarrollo de esquemas de tipo motor.

El tipo de investigación en el que se inscribe esta investigación, corresponde a aquellos de corte observacional, prospectivos, transversal y descriptivo (Mendez Ramírez, Namihira Guerrero, Moreno Altamirano, & Sosa de Martínez, 1990 (reimp. 2001)) comúnmente denominado encuesta descriptiva, cuya utilidad se centra en poder sugerir hipótesis, fundamentar estudios longitudinales y obtener buena representatividad con sus resultados

En esta tesis, los procesos de aprendizaje de que nos hemos servido, a la vez que se ajustan a métodos experimentales, se apoyan en los interrogatorios clínicos que ha practicado la escuela de Ginebra (Inhelder, Sinclair, & Bovet, 1974 (1975); Bang, 1970

(1968)) y que ha denominado método clínico o “método de la exploración crítica”. Este método, que ha provocado desde sus comienzos reacciones que van desde pequeños asombros hasta los más profundos escepticismos por parte de los experimentadores estrictos (Inhelder, Sinclair, & Bovet, 1974 (1975)), ha mostrado eficientes resultados en la búsqueda de explicaciones de diversos fenómenos tanto en Psicología como en Educación.

Toda vez que el objetivo de esta tesis es de naturaleza psicogenética, el desafío era describir las estrategias implementadas por los niños y niñas según la fase etaria y establecer un orden de complejidad en términos de la elaboración de tales estrategias, para los conceptos estudiados en relación con dicha fase etaria.

Para explorar los razonamientos de los niños, se entabló una conversación en el curso de la cual se hizo un esfuerzo por seguir los meandros de su pensamiento. Esto constituyó el fundamento para la descripción, análisis y categorización, por complejidad, de los datos de acuerdo con las fases etarias y los conceptos estudiados.

5.2 *Niños y niñas Participantes*

De acuerdo con la revisión de antecedentes y las estipulaciones que la disciplina estadística esbozan, los conceptos estadísticos básicos sobre los que se pretende investigar, no resultan susceptibles de ser comprendidos por niños que no hayan

alcanzado el nivel del pensamiento formal, que corresponde, aproximadamente, a edades entre 11 y 12 años.



Ilustración 1. Ejemplos de instantes de sesiones de trabajo con algunos participantes

Teniendo en cuenta las condiciones actuales de cotidianidad a las que los niños se ven enfrentados, en términos de los avances tecnológicos, que generan situaciones que exigen habilidades para comprender e implementar una solución, se considera como población objeto de estudio los niños cuyas edades oscilaran en el rango 9 a 14 años, de tal forma que se cubra un espectro amplio del rango de edad establecido teóricamente y se pueda observar la aparición de esquemas que participen en la construcción de los conceptos que interesan a esta investigación.

En el diseño de la investigación se proponen 6 fases de edad en rangos de un año así: 9, 10, 11, 12, 13 y 14 años, considerando una amplitud de ± 0.5 años y un tamaño de muestra de 15 niños por cada una de las fases para un total de 90 niños. Se realizó un muestreo no probabilístico por cuotas realizando consentimiento informado tanto en los colegios como a los padres de familia de los niños, lo que, aunado a inconvenientes de logística y tiempo de disponibilidad de los niños, solo permitió completar la información de 79 niños distribuidos en los rangos de edad de la forma que se ilustra en la Tabla I a continuación.

Tabla II. Características de las edades del grupo participante

Fase Edad	# Niños	Edad Media	DS Edad
9	13	9,1	0,32
10	14	10,0	0,28
11	14	11,0	0,20
12	15	12,1	0,32
13	10	13,2	0,32
14	13	14,3	0,39

Otras características sociodemográficas de los participantes se observan en la Tabla III, resaltando el hecho de que aunque el diseño de la investigación siempre procuró mantener un equilibrio, que no se aprecia en todas las características de la muestra, los inconvenientes ya mencionados se impusieron en algunos, sin afectar los resultados de la investigación en lo que se refiere a la identificación de las estrategias desarrolladas por los participantes.

Tabla III. Características sociodemográficas del grupo participante

Ciudad	Cali			Popayán			Total General
Grado	Niñas	Niños	Total	Niñas	Niños	Total	
4°	5	6	11	2	5	7	18
5°	3	2	5	4	3	7	12
6°	1	7	8	4	5	9	17
7°	1	4	5	3	6	9	14
8°	2	2	4		1	1	5
9°	3	3	6	3	4	7	13
Total General	15	24	39	16	24	40	79

5.3 Procedimiento de Recolección de Datos

Para este estudio se diseñaron inicialmente 3 tareas a partir de una situación problema que fueron presentadas a cada niño y niña, en un orden pre-establecido, a lo largo de una sesión. Esta situación se denominó, de acuerdo con sus características, “Selección de la marca de fósforos”. Fue construida a partir de la revisión de diferentes ejemplos sobre situaciones problema tanto en Psicología como en Educación Estadística, basadas en problemas reales como los que reportan diferentes autores

(Inhelder, Sinclair, & Bovet, 1974 (1975); Inhelder & Karmiloff-Smith, 1974-1975; Russell & Mokros, 1990; Kamii, 1995; Batanero C. , 2001; Batanero & Godino, 2001; Batanero & Godino, 2002), (Watson & Moritz, 1999; Puche, 2003; Cobo B. , 2003), y se ajustó de acuerdo con el marco teórico y metodológico que se sigue en esta investigación.

5.4 *Diseño y elaboración de las tareas*

El objetivo de las tareas diseñadas para esta investigación fue permitir observar, a través de los desempeños y estrategias que los niños utilizan, el funcionamiento cognitivo en una situación de resolución de problemas relacionada con el uso de los indicadores estadísticos de tendencia central.

La preparación que se adelantó en el adiestramiento para la elaboración de estas tareas, consistió en un inicio, en la revisión de los trabajos realizados por los grupos de trabajo del doctorado (Puche, 2003; Puche & Lozano, 2001; Orozco, y otros, 2003), prosiguiendo a replicar varias de las tareas que la escuela de Ginebra realizó en sus estudios (Piaget & Szeminska, 1967; Piaget & Inhelder, 1982; Piaget & Inhelder, 1976), con lo que finalmente se dio paso a la elaboración de nuevas tareas en el área de interés de esta investigación, lo que permitió asegurar la consecución del objetivo de diseñar una tarea para esta investigación. Es de anotar que fueron muchas las horas de trabajo que se invirtieron y muchos los niños que participaron en este proceso.

Las tareas han sido diseñadas tomando una situación cotidiana para los niños. La cual se refiere a la verificación del contenido de fósforos que regularmente se encuentra en una cajita cuyo valor ofrecido es de 40 fósforos por caja. Se exige la comparación, en cada tarea, de dos conjuntos de valores identificados según la marca del fabricante, para lo cual se requiere comparar los valores numéricos de contenido promedio de los dos conjuntos de valores en las distintas marcas. La distribución de los datos ha sido ajustado a las características de cada uno de los tres indicadores de tendencia central (Moda, Mediana y Media Aritmética) que interesan a esta investigación.

Las tareas están diseñadas en dos formas de presentación; una escrita, utilizando tablas numéricas encabezadas con el nombre de la marca del fabricante de los fósforos, cuyos elementos son las cantidades de contenido de fósforos de cada caja; y una presentación con material concreto, que corresponde a las cajas de fósforos, etiquetadas con la cantidad de contenido como aparecen en las listas.

Los conjuntos de datos, en todas las tareas, se encuentran en el rango 37 a 41, en el cual, la cantidad de cajas, para estos valores, varía según la tarea asociada al tipo de indicador de tendencia central.

A continuación se presenta el diseño de las tareas formuladas para cada uno de los indicadores de tendencia central.

Todas las tareas se presentan inicialmente a través de material escrito en dos listados. En la tarea de la Moda se presentan inicialmente dos listados con los contenidos que se observan en la Figura 1:

Póker			El Sol		
39	37	40	40	39	37
37	40	38	40	40	38
41	39	39	39	38	41
37	37	38	41	40	39
40	39	39	39	39	38
39	40	39	37	40	40
41	39	Mo	37	40	Mo

Figura 1 Listas de datos de la tarea de la Moda para las 40 cajas de fósforos

En la tarea de la Mediana los dos listados que se presenta son los que corresponden a la Figura 2:

Póker			El Sol		
37	41	38	41	37	38
40	38	40	37	38	41
38	40	39	40	38	40
41	41	38	38	40	37
39	37	40	38	41	37
41	38	41	38	40	41
38	40	Me	40	41	Me

Figura 2. Listas de datos de la tarea de la Mediana para las 40 cajas de fósforos

En la tarea de la Media Aritmética los dos listados que se presenta contienen los datos que se observan en la Figura 3:

Póker				El Sol		
39	39	39	39	39	41	40
39	41	40	37	37	38	40
39	39	40	40	39	41	39
40	39	39	39	39	38	39
37	38	39	37	41	39	38
37	41	41	38	39	37	38
40	40	38	37	39	41	
	39	37				

Figura 3. Lista de datos de la tarea la Media Aritmética para las 50 cajas de fósforos

La presentación de las tareas con material concreto conserva equivalencia con las cantidades de contenido (valores numéricos) de los listados a través de la cantidad de cajas de fósforos. Esta segunda presentación sólo se hace con los niños que manifiestan no poder resolver la tarea a través de la primera forma de presentación que son los

listados. Si el niño no resuelve la tarea con esta segunda forma de presentación se da por terminada la sesión.

5.5 *Análisis Objetivo de las Tareas*

5.5.1 *Descripción de las tareas*

Tanto en la tarea de la Moda como en la de la Mediana se utilizan dos listados de 20 números cada uno, a 3 columnas, en papel de dimensión 6 cm de ancho por 13,5 cm de largo (Figura 1 Figura 2), que presentan las cantidades de contenido de las cajas de fósforos de las marcas¹⁷ El Sol y Póker, que representan el material de naturaleza abstracta y de presentación inicial de la tarea. Esos nombres de las marcas encabezan cada uno de los listados.

Para la presentación de naturaleza concreta de la tarea se utilizaron 40 cajas de fósforos cuyas dimensiones son 4,5 cm x 3,5 cm x 1 cm, 20 de cada marca, las cuales en su cara superior presentaban, pegada o escrita, una etiqueta con la cantidad de fósforos que contenía (Ilustración 2).



Ilustración 2. Conjuntos de cajas de fósforos utilizados en las tareas.

El material utilizado en la tarea de la Media Aritmética difiere de los anteriores en que, para este caso, se utiliza un listado de 20 números y otro de 30 números, el

¹⁷ Estas marcas son registradas y distribuidas en la zona noroccidente del territorio colombiano.

primero similar a los de las tareas anteriores, y éste último con dimensión 8 cm de ancho por 15 cm de largo (Figura 3). Las 50 cajas de fósforos utilizadas en esta tarea, mantienen las mismas características que las cajas de las otras tareas.

Las cantidades de contenido de fósforos reportados en las etiquetas de las cajas, conservan las características de las cajas de las otras tareas y se corresponden con los valores impresos en los listados.

5.5.2 *Entrevista general*

Para presentar la tarea, inicialmente se entabla un diálogo con el niño o la niña, procurando que éste se sienta cómodo y confiado para participar en el interrogatorio. Después se inicia la familiarización con la tarea, previa a la presentación de la situación problema que el niño deberá resolver.



Ilustración 3. Secuencia de trabajo en la presentación de la situación

En la fase de familiarización se le plantea la situación al niño, diciéndole: “*Las cajas de fósforos de estas dos marcas (mientras se muestra una caja de cada marca, cuyas cantidades de contenido han sido modificados por el investigador) traen escrito 40 fósforos como contenido (permitiéndolo que el niño verifique la impresión que cada*

fabricante pone en el costado de cada una de las dos cajitas), *yo he contado el contenido de varias de ellas y he encontrado que algunas traen menos de 40 fósforos, otras traen más de 40 fósforos y otras traen los 40 fósforos que dice la etiqueta. ¿Quieres por favor verificar cuantos fósforos contiene cada una de estas cajas?*”

Una vez el niño ha realizada la acción solicitada, y prosiguiendo con la familiarización de la tarea, se le dice: *“Lo ves, estas tampoco traen lo que dice la etiqueta. Presta atención ahora a estas cajas en las cuales yo he escrito, después de contarlos, tal y como tú lo has hecho, la cantidad de contenido de fósforos, (presentando en forma mezclada sobre la mesa un grupo de 10 cajas, 5 de cada marca). Observa las cantidades de contenido de fósforos anotadas en las cajas, y ahora quiero que me digas **¿cuál crees tú que es la marca que trae mayor contenido de fósforos en sus cajas?; ¿cuál crees tú que es la marca que tiene más fósforos por caja?**”*

Las acciones realizadas por el niño para conseguir una respuesta, proporcionan información suficiente para determinar que el niño ha alcanzado una comprensión de la situación que permite dar paso a la presentación de las tareas que el niño deberá resolver.

La presentación de las tareas, objeto de la investigación, se inicia cuando el entrevistador dice: *“Yo conté muchas otras cajas y anote las cantidades de contenido en estas listas, (presentándole al niño dos listados correspondientes a la tarea en cuestión) podrías ahora, observando los contenidos de fósforos anotados en estas*

listas, decirme ¿cuál crees tú que es la marca que trae mayor contenido de fósforos en sus cajas?; ¿cuál crees tú que es la marca que tiene más fósforos por caja?

Se observan las acciones del niño y se registran sus expresiones verbales y corporales, y si éste manifiesta incompreensión para poder resolver la tarea utilizando los listados, entonces el entrevistador le ofrece las cajas diciéndole: *“Yo también tengo las cajas de fósforos. En cada una anoté el contenido de fósforos que tienen. Te las doy para que puedas resolver la situación. Recuerda que yo quiero saber cómo piensas cuando resuelves problemas matemáticos. Ahora (pasándole el conjunto de cajas) me puedes decir: ¿cuál crees tú que es la marca que trae mayor contenido de fósforos en sus cajas?; ¿cuál crees tú que es la marca que tiene más fósforos por caja?”* Una vez que el niño alcance una respuesta, decidiéndose por una marca, el entrevistador le dice: *“Muy bien, ¿cómo supiste que esa marca es la que tiene más?”*. Observando y registrando las acciones del niño al resolver la tarea, finaliza la sesión.

5.5.3 Estructura de la tarea



Ilustración 4 Marcas de las cajas de fósforos utilizadas en la investigación

La fase de *familiarización* de la tarea, tiene dos partes. En la primera, se encuentra la determinación de la cantidad de contenido de dos cajas de fósforos presentadas, que implica el proceso de conteo, lo que constituye el primer elemento estructurante de esta fase de la tarea.

En la segunda parte, se encuentra la presentación de una colección de 10 cajas de fósforos, 5 de cada marca; en esta parte, la consigna de la tarea le proporciona al niño una meta o fin que debe alcanzar, y que involucra procesos de clasificación, conteo, comparación y otras operaciones aritméticas que constituyen los elementos estructurantes en esta fase de la tarea y que serán presentadas con mayor detalle en la situación propiamente dicha.

En la primera parte de la familiarización de la tarea, la unidad de análisis la constituye el esquema de contar que permite la determinación de la cantidad de contenido en cada caja de fósforos.

En la segunda parte, la pregunta o consigna presentada inicialmente, es el generador de situaciones problema que se puede diferenciar de acuerdo al contenido matemático exigido para su solución.

En la presentación del grupo de 10 cajas (5 de cada marca), la pregunta genera una situación problema cuyos elementos constitutivos son:

- Dos colecciones o Marcas de fósforos (El Sol y Póker)

- Cada colección es un conjunto de cantidades de elementos, un conjunto de conjuntos de fósforos o un conjunto de cajas de fósforos (5 cajas) provenientes de una población infinita
- En cada colección se encuentran sub-colecciones, definidas por la cantidad de contenido de fósforos en las cajas, es decir 37, 38, 39 o 40 fósforos.
- La cantidad de cada sub-colección o frecuencia de cada sub-colección, es decir, el número de veces que se repite cada cantidad de fósforos.
- Finalmente, está el orden de presentación de las cajas sobre la mesa.

Las distribuciones que se presentan se ilustran a continuación:

El Sol		Póker	
Contenido	Cajas	Contenido	Cajas
38	2	37	1
39	2	38	1
40	1	39	1
		40	2

Figura 4 Distribución de los contenidos de las cajas presentadas en la parte de ambientación

Las unidades de análisis en esta fase de la tarea están constituidas por los esquemas, necesarios para su solución, que permitan:

- Identificar o determinar las dos colecciones o marcas de fósforos.
- Identificar o determinar las sub-colecciones en cada colección a partir de las cantidades de contenido.
- Calcular la cantidad de elementos (frecuencia absoluta) de cada sub-colección.
- Identificar la diversidad de valores e intuir la posibilidad de caracterizar el conjunto a partir de representar dichos elementos por un único valor en cada colección.

- Construir el valor representante a través de un indicador de tendencia central para cada colección en función de la cantidad de elementos de las sub-colecciones y considerando las propiedades de los mismos.
- Establecer un criterio de comparabilidad para determinar la colección que más favorece la consigna.

Finalizado este proceso de familiarización, se da paso a la presentación de cada una de las tareas, inicialmente a través del formato escrito constituido por las dos listas de números (tablas de datos) que corresponden a las cantidades de contenido de cada caja.

El orden de presentación de las tareas se realiza de acuerdo con la numeración antes presentada, de tal forma que será primero la de la Moda, después la de la Mediana y finalmente la de la Media Aritmética. Esto se definió asumiendo un grado de dificultad asociado al cálculo de los indicadores de tendencia central.

En los casos en que algún niño participante presentó inconvenientes para resolver alguna de las tareas en el formato escrito, se procedió a realizar la presentación de la misma tarea a través del formato concreto con las cajas de fósforos.

La estructura de cada tarea, de acuerdo con el indicador asociado, será la siguiente:

La estructura de la tarea de la Moda corresponde a la del proceso de determinar como representante, la sub-colección, de cajas fósforos, que presente la mayor cantidad

o frecuencia, es decir, la sub-colección asociada al máximo del conjunto de frecuencias absolutas (cantidad de elementos) de cada colección.

Las exigencias para la solución de la tarea presentada en formato escrito serían:

1. Determinar las colecciones o marcas de fósforos como muestras de poblaciones infinitas.
2. Determinar, en cada colección, las sub-colecciones a partir de las cantidades de contenido de fósforos.
3. Ordenar, en cada colección, las sub-colecciones en función de la cantidad de contenido o frecuencia.
4. Identificar, en cada colección, la cantidad o frecuencia absoluta de cada sub-colección.
5. Determinar como representante, en cada colección, el valor de la sub-colección que presente la máxima cantidad o frecuencias absolutas.
6. Establecer una comparación entre los valores y las frecuencias de la sub-colección de cada colección.
7. Seleccionar la colección que presenta el mayor valor y frecuencia de sub-colección.

La estructura de la tarea de la Mediana corresponde a la del proceso de determinar un indicador a partir del valor medio en un conjunto de datos ordenados.

Las exigencias de la tarea a partir de la presentación en formato escrito serán:

1. Identificar dos colecciones o marcas de fósforos como muestras de poblaciones infinitas.
2. Identificar, en cada colección, las sub-colecciones a partir de los diferentes valores de cada una.
3. Ordenar, en forma creciente o decreciente, en cada colección las sub-colecciones en función de su cantidad.
4. Determinar como representante, de cada colección, el valor la sub-colección ubicado en la posición central de la colección. Para ello se debe:
 - 4.1. Determinar el total de elementos de cada colección.
 - 4.2. Clasificar las sub-colecciones equitativamente en dos grupos, los mayores y los menores.
 - 4.3. Calcular la semisuma de las cantidades de las sub-colecciones que se ubican en los límites de los grupos; extremo superior del grupo de los menores y en el extremo inferior del conjunto de mayores.
5. Establecer una comparación entre los valores de la sub-colección de cada colección.
6. Determinar la colección que tiene mayor cantidad de fósforos.

La estructura de la tarea de la Media Aritmética corresponde al proceso de determinar el valor de la cantidad de contenido de fósforos promedio, a partir de la división construida con la suma de las cantidades de contenido de la colección y el total de sus elementos.

Las exigencias de la tarea a partir de la presentación en formato escrito serían:

1. Identificar o determinar las colecciones o marcas de fósforos como muestras de poblaciones infinitas.
2. Determinar, en cada colección, las sub-colecciones a partir de las cantidades de contenido de fósforos.
3. Determinar la cantidad total fósforos, en cada colección.
4. Contar, en cada colección, el número de elementos.
5. Calcular, en cada colección, el cociente entre la cantidad total de fósforos y el total de elementos.
6. Determinar como representante de la colección el cálculo anterior
7. Establecer una comparación entre los valores de la sub-colección de cada colección.
8. Determinar la colección con mayor valor de cantidad de fósforos.

Se espera que en la presentación de la tarea en formato escrito se suscite el uso de lápiz y papel, mientras que en la presentación de la tarea en formato concreto, esta exigencia puede retrasarse debido a la manipulación física de las cajas de fósforo.

5.6 *Análisis Subjetivo de la Tarea*

5.6.1 *Demanda cognitiva de la tarea y niveles de desempeño*

Para el análisis subjetivo de estas actividades y siguiendo a Pascual Leone (1997), es necesario escoger las unidades de análisis que reflejen los *invariantes de los*

procesos cognitivos del sujeto ante la tarea. Estas unidades de análisis serán los *esquemas de acción* utilizados por los individuos.

En la parte previa se utilizó como unidad de análisis el algoritmo de resolución del experto, dado que conduce a la resolución correcta y eficiente de la situación problema; sin embargo, dada la concepción de la actividad como instrumento para caracterizar *el desempeño* de los niños más que el resultado correcto, y la concepción sobre la variabilidad en sus habilidades cognitivas, se han planteado *niveles de desempeño*, desde los menos efectivos, respecto de la solución de la situación, hasta el desempeño más eficaz o solución integral, como se presentan a continuación.

5.6.2 *Esquemas de Clasificación*

La comparación de sub-colecciones (cajas de fósforos) a partir de sus características (marca y cantidad de contenido) permite la determinación de colecciones, que es una de las acciones invariantes que debe realizar un niño en todas estas tareas. Cuando se realiza la comparación a partir de varias características, se establecen clasificaciones múltiples y se exigen mayores demandas al sujeto.

Los niveles de desempeño que se pueden esperar para estas tareas son:

- a. Clasificación simple basada en una característica, puede ser la marca o la cantidad de contenido, pero no ambas, en ningún caso considerando el orden de las cantidades de contenido de fósforos de las sub-colecciones.
- b. Clasificación simple basada en una característica, puede ser la marca o el valor numérico del contenido, pero no ambas, en este caso considerando el orden de las cantidades de contenido de fósforos de las sub-colecciones.
- c. Clasificación múltiple, realizada secuencialmente, primero por marca y posteriormente por cantidad de contenido, en ningún caso considerando el orden de las cantidades de contenido de las sub-colecciones.
- d. Clasificación múltiple, realizada secuencialmente, primero por marca y posteriormente por valor numérico del contenido, en este caso considerando el orden de las cantidades de contenido de las sub-colecciones.

5.6.3 *Esquemas de Conteo*

El conteo es otro procedimiento invariante en la solución de las tareas, que permite establecer la cantidad de elementos de una colección, es decir, permite cumplir la meta de *cuantificar*.

Este procedimiento se basa por lo menos en tres principios:

- 1) la *correspondencia uno a uno*, que consiste en la asignación de una sola etiqueta o palabra verbal a uno y solo un objeto de la colección contada,

- 2) el *orden estable*, que consiste en que el orden de las palabras enunciadas ha de ser el mismo siempre que se cuente y no se puede alterar y
- 3) la *cardinalidad*, que dice que la última etiqueta o palabra utilizada durante el conteo, representa el total de los objetos de la colección contada.

Los principios son innatos y dirigen el aprendizaje de la secuencia verbal de conteo (Gelman & Gallistel, 1978). Con la experiencia los niños aprenden la secuencia estandarizada, hasta que se vuelve fija e inmodificable. Cuando un niño ha terminado de contar y se le pregunta: “¿Cuántos hay?”, responden una palabra-número con significado dual: Representa el nombre dado al último objeto contado y representa también el total de objetos contados. Este es un significado cardinal que los niños deben construir, para lograr números propiamente dichos. Si el niño vuelve a contar es porque todavía el significado no es cardinal, y la última palabra expresada representa sólo el último objeto contado. En este sentido, es una unidad simple. Los significados cardinales son representaciones de unidades compuestas (Steffe, 1990).

Independientemente de la presencia y el dominio de los principios de conteo en la cultura, indican su intención y su capacidad de cuantificar y alcanzar una meta matemática. Igualmente los niños pueden lograr conteos sobre sus dedos, en voz alta, con la mirada, sin señalar o sin ver los objetos. Los niveles de desempeño propuestos respecto a los esquemas de conteo son los siguientes:

- a. Conteo utilizando la secuencia numérica en el orden convencional y al contar hacer corresponder una palabra numérica pronunciada con uno, y sólo un objeto de la colección contada.
- b. Conteo utilizando la secuencia numérica en el orden convencional y al contar hacer corresponder un toque de los dedos con uno, y sólo un objeto de la colección contada, sin pronunciar palabra.
- c. Conteo utilizando la secuencia numérica en el orden convencional y al contar hacer corresponder una palabra numérica pronunciada con grupos de objetos; conteo de dos en dos, tres en tres, cinco en cinco, ó combinados, etc.
- d. Conteo utilizando la secuencia numérica en el orden convencional y al contar hacer corresponder un toque de los dedos con grupos de objetos; conteo de dos en dos, tres en tres, cinco en cinco, ó combinados, etc.
- e. Conteo silencioso errado, mediante el cual solo se observa finalmente un resultado incorrecto del conteo.
- f. Conteo silencioso certero, mediante el cual solo se observa finalmente un resultado correcto del conteo

5.6.4 Construcción de indicadores de tendencia central

Lograr la habilidad de sumar, restar, multiplicar y dividir, es una de las metas de la enseñanza en las escuelas de primaria. Sin embargo, los niños conocen mucho de lo

que significan estas operaciones aritméticas, incluso antes de acceder a su conocimiento formal.

Por lo tanto, aunque el logro de la operatividad mental es bastante complejo y los niños no utilizan desde temprana edad el procedimiento del cálculo mental, si evidencian formas avanzadas de razonamiento aritmético y resuelven correctamente problemas de suma, resta, multiplicación y división (Otálora & Orozco, 2006)

En esta investigación, la actividad permite a través de las tres tareas, identificar otros esquemas que los niños pueden poner en práctica, y en forma implícita, al resolver la situación que requiere de la utilización de los indicadores de tendencia central.

Existen variados desempeños que los niños puedan utilizar para resolver problemas a partir de los listados de números que se le ofrecen como insumos. Por ejemplo, quienes no establezcan clasificaciones adecuadas, harán uso de conteos uno a uno de los elementos visibles, pues las palabras de la secuencia están significadas como unidades simples que se utilizan en correspondencia uno a uno con los elementos contados.

Aquellos niños que no logran establecer las clasificaciones múltiples no pueden avanzar en la construcción de un indicador de tendencia central que les permita

resolver el problema planteado, ya que no construyen las frecuencias absolutas que son las que les permiten realizar comparaciones y tomar decisiones al respecto.

Los niveles de desempeño propuestos para este caso son:

- a. Para establecer **la Moda** como criterio de decisión, se deberá realizar lo siguiente:
 - Clasificación múltiple de elementos (cajas) utilizando colección (marca) y subcolección (cantidad de contenido de fósforos)
 - Contar elementos (frecuencias absolutas) de la cantidad de contenido de fósforos en cada marca
 - Ordenar las cantidades de contenido de fósforos en función de la frecuencia absoluta.
 - Determinar la máxima frecuencia absoluta de cada marca
 - Determinar la cantidad de contenido de fósforos asociada a la máxima frecuencia encontrada
 - Determinar la marca que contiene la mayor cantidad de contenido de fósforos asociada a la mayor frecuencia.

- b. Para establecer **la Mediana** como criterio de decisión del problema, se tendrá que realizar lo siguiente:
 - Clasificación múltiple de elementos utilizando marca y cantidad de contenido de fósforos
 - Clasificación simétrica de los elementos de cada marca según su cantidad de contenido obteniendo dos grupos, los mayores y los menores.

- Determinar el valor de cantidad de contenido ubicado en la posición central de la marca, a partir del cálculo de la semisuma de los valores de contenido de las últimas dos cajas clasificadas.
 - Determinar la marca que contiene la mayor cantidad de contenido de fósforos de acuerdo con el valor del dato de la posición central.
- c. Para establecer la **Media Aritmética** como criterio de decisión del problema, se requiere realizar lo siguiente:
- Clasificación múltiple de elementos utilizando colección y cantidad de contenido de fósforos
 - Determinar el total de datos de cada marca.
 - Sumar los valores de cantidad de contenido de fósforos en cada colección. Este procedimiento será más eficaz si se realiza en forma abreviada utilizando las frecuencias absolutas y los valores de cantidad de contenido.
 - Dividir la suma de los valores de cantidad de contenido de fósforos por el total de cajas de la marca.
 - Determinar la marca que corresponde al mayor valor calculado.

Estos criterios presentan una serie de exigencias cognitivas que además de involucrar esquemas que serán caracterizados en el transcurso de la investigación, deben modificarse a medida que se va pasando de un indicador a otro o, en forma equivalente, de una tarea a otra.

5.7 *Procedimiento de Análisis de los Datos*

5.7.1 *De Videos a Rejillas de Registro*

Cada una de las sesiones en las cuales los niños enfrentaban los tres tipos de tareas, fue grabada en video; con una duración que osciló entre los 35 y los 50 minutos.

A partir de estos videos se procedió a identificar las distintas estrategias de solución que para cada tarea y fase etaria se presentaron, incluyendo también en este procedimiento el registro de las notaciones escritas en papel que fueron producidas por los niños.

La información de los videos se transcribió en un formato denominado “Rejillas de registro”, el cual se adjunta en los anexos; constituido por 5 columnas, en cuyo encabezado se reportan los datos de los niños, que son: código de registro; edad, grado escolar, código de la institución educativa, código de la ciudad y código de la tarea.

La 1ª columna de esta tabla, denominada “Preguntas del Entrevistador”, presenta, en forma estándar, las preguntas que el entrevistador presentó a cada niño y que tenían como intención, por un lado, centrar y enfatizar la consigna de la tarea y, por el otro, abrir el espacio para las explicaciones de los niños pertinentes a sus acciones.

La 2ª columna, denominada “Configuración”, presenta la descripción de los elementos o medios físicos con los cuales el niño intentó resolver la tarea, éstos

inicialmente fueron las listas de datos y posteriormente, si el niño lo requería, las cajitas de fósforos.

En la 3ª columna, llamada “Respuesta verbal del niño”, se transcriben las expresiones verbales de los niños relacionadas con las acciones desarrolladas en la solución de la tarea.

En la 4ª columna, “Acciones del Niño”, se describen las acciones gestuales o comportamentales asociadas o no a las expresiones verbales referidas en la columna anterior. En estas columnas se presentan en consecuencia los detalles del desarrollo de la actividad adelantada por los niños durante el intento de solución de la tarea.

La 5ª y última columna de la Rejilla de Registro, denominada “Estrategia de solución” corresponde al espacio en el cual se organiza y da forma a las respuestas verbales y acciones realizadas por el niño, revelando los esquemas que se encuentran en la base de la misma. Para alcanzar confianza y credibilidad en la realización de esta clasificación, previamente se realizó una aplicación a través de formulario escrito a un grupo de 137 estudiantes de una escuela de Brasilia (Brasil) y bajo el acompañamiento y la dirección de la profesora Dra. María Helena Fávero, Coordinadora del *Cogito* – Laboratório de Psicologia do Conhecimento– del Instituto de Psicología de la Universidad de Brasilia, se recibió entrenamiento y se obtuvo una publicación al respecto (Riascos Forero & Fávero, 2010) que garantiza la confiabilidad de este procedimiento.

Este trabajo se realizó inmediatamente digitada la información del video, procurando aprovechar la revisión hecha y facilitando la condensación de la información. De esta forma se logra obtener un total de 237 rejillas de registro correspondientes a 3 tareas y 79 niños en total para las 6 fases etarias estudiadas. De esta forma, cada tarea contó con 79 registros de información.

5.7.2 De Rejillas de Registro a Tablas de Niveles

En cada una de las 6 fases etarias y para las tres medidas de tendencia estudiadas, se ha procedido a agrupar las estrategias desarrolladas por los niños, de tal forma que se pueda observar un avance progresivo de las mismas en virtud de los elementos involucrados y registrados en el proceso de solución de la tarea.

Este avance progresivo, es considerado desde estrategias en las cuales se observa la imposibilidad de resolver la situación, hasta aquellas en las que aparecen formas más elaboradas de solución, considerando igualmente tanto el uso de lista de datos como de cajas de fósforo.

A partir de esta agrupación se constituyen los niveles de complejidad; esta constitución produce como resultado una tabla que denominamos “Tabla de niveles”, que consta de 3 columnas.

La 1ª columna, denominada “Nivel de complejidad de las estrategias”, presenta en orden creciente de complejidad, los nombres asignados a cada estrategia, colocando en paréntesis el nivel.

La 2ª columna, denominada “Características de la estrategia”, presenta la descripción que ubica esta estrategia en el nivel de complejidad asignado.

La 3ª columna, denominada “Secuencia de acciones de la estrategia” presenta la descripción de las diversas acciones seguidas por los niños durante el desarrollo de la estrategia, identificada en la información de la rejilla de registro.

Cada estrategia, según el nivel de complejidad, se encuentra ubicada en una fila, de modo que el número de filas o estrategias varía en cada fase etaria y tarea, según se presente o no la estrategia.

Después de la presentación de las estrategias observadas en cada fase etaria para cada una de las tareas, se presenta una discusión de las mismas y al final una discusión de las estrategias en las tres tareas comparando las distribuciones de frecuencias a través de la prueba estadística de chi-cuadrado.

Así, finalmente se tendrán para cada fase etaria, las estrategias desarrolladas por los niños para cada tarea (Moda, Mediana y Media Aritmética), en una explicación según sus niveles de complejidad y diferencias significativas.

La discusión final, de todos los resultados de las fases etarias, constituye un cierre en el que se vinculan los resultados obtenidos en este estudio, mostrando el aporte que los mismos proporcionan a los campos de la psicología de la educación matemática, de la enseñanza de la Estadística y de la formación de profesores.

CAPÍTULO 6. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

6.1 *Ubicación en el Contexto*

Para dar comienzo al trabajo de establecer un punto dentro del ámbito teórico en el que se inscribe este trabajo, es necesario dejar a la vista el principal aspecto teórico que se encuentra en su base y que en palabras de Piaget (1967 (1983)) estaría expresado de la siguiente manera:

“Para captar el mecanismo de la formación de las operaciones, es necesario comprender previamente qué es lo que falta construir, es decir, qué falta a la inteligencia sensorio-motriz para prolongarse en pensamiento conceptual. Nada sería tan superficial, en efecto, como suponer la construcción de la inteligencia ya acabada en el plano práctico y apelar entonces simplemente al lenguaje y a la representación imaginada para explicar cómo esta inteligencia ya construida habrá de interiorizarse en pensamiento lógico” (pág. 123)

Este trabajo se inserta en el campo de investigación de la comprensión de conceptos estadísticos, en el cual se presentan estudios que cubren rangos de edad muy amplios, desde los 8 hasta los 22 años, para explicar los problemas de las dificultades que los estudiantes encuentran al intentar comprender éstos conceptos. La mayoría de estos estudios parte del hecho cierto de la presentación previa de esos conceptos, tanto de su definición como de sus propiedades, y la ejercitación con datos (Batanero C. , 2000b; Cobo B. , 2003; Inzunza, 2006), de aquí que este trabajo marca una diferencia al poner

una mirada sobre el sujeto psicológico, el niño, y no en el estudiante, y apuntando particularmente hacia la identificación de la génesis de estos conceptos.

Los primeros estudios en los años 1980 (Mevarech, 1983; Nisbett & Ross, 1980; Garfield & Ahlgren, 1988) evidenciaron los problemas relacionados con los errores que los estudiantes cometen al resolver tareas que involucran conceptos estadísticos elementales concluyendo que muchos de estos errores no se debían exclusivamente a la falta de atención o de motivación de los estudiantes, aunque no lo pudieron explicar con mayores detalles.

Los estudios posteriores entre los años 1990 y 2000 (Watson & Moritz, 1999; Shaughnessy, Garfield, & Greer, 1996; Garfield, 1995), se apoyaron en planteamientos cognitivos, para explicar la evolución de la comprensión de los conceptos estadísticos basándose en los supuestos de que la comprensión, que una persona realiza, de un determinado concepto pasa por diversos estadios que se manifiestan en sus respuestas y que en un momento determinado, la complejidad de los razonamientos de un sujeto está relacionada con el estadio en el que se encuentra, sin entrar en detalles de la construcción inicial de estos razonamientos.

Utilizando una metodología longitudinal los estudios evidenciaron que los sujetos mejoran la comprensión al resultar evaluados en niveles superiores de la misma escala, pero no consiguieron explicar la evolución de los esquemas de pensamiento asociados, dejando así el espacio en el que se quiso inscribir el objetivo de este trabajo.

6.2 *Condiciones iniciales de la investigación*

La información obtenida en la fase de ambientación de la tarea permitió anticipar que a pesar de las condiciones de tiempo y de actividad de los niños (cansancio) para las dos modalidades de la tarea (cajas y listas), no representarían inconvenientes que afectaran la información pertinente a esta investigación, así como sólo el 9,4% de los niños y niñas intentaron resolver la situación a partir de la información proporcionada por las cajas (material concreto) y no a través de las listas de datos como lo propuso inicialmente cada una de las tareas.

De esta forma, las tareas que se presentan en la situación de las cajas de fósforos es idéntica para la Moda, la Mediana y la Media Aritmética; de tal manera que solo la variación en la distribución de los datos de contenido es la fuente que origina la necesidad de modificación o cambio de estrategia para alcanzar una solución, porque es ella, la distribución de los datos asociada a cada tarea, la que cambia las condiciones y establece las necesidades de utilización de un cierto indicador como el más adecuado para esa solución.

La presentación de ambientación de la situación, iniciando por la solicitud de contar el contenido de fósforos que contiene una caja, permitió observar la presencia de esquemas de clasificaciones simples y múltiples, así como de conteo que se diferenciaron según la edad de los niños, partiendo de conteos uno a uno, pasando por agrupaciones de dos en dos, tres en tres y cinco en cinco, depositando los fósforos en la

mano o en la mesa, hasta alcanzar conteos mentales, que finalizaban con la determinación del total solicitado, tal como se había presupuestado en la descripción del método de esta investigación y se observó en los antecedentes.

Muy pocos niños y niñas mostraron equivocaciones que desembocaran en un resultado incorrecto del conteo, lo que se atribuye a diversos factores, entre los que principalmente se encuentran el nerviosismo provocado por la presencia del investigador y la premura por dar respuesta a la solicitud.

Estos procesos tienen correspondencia con las edades de los niños, cuando se encontró que en las clasificaciones simples y los conteos secuenciales uno a uno o dos a dos, los niños y niñas más pequeños utilizaron conteos en voz alta pronunciando la cantidad que se correspondía con el total de fósforos que se iba acumulando, lo que implicaba más tiempo para realizar el conteo, mientras que en los niños y niñas más grandes se observó el requerimiento de menos tiempo para realizar el conteo, así como la utilización de conteos mentales.

El que los niños y niñas tuvieran una vivencia del proceso de consecución de los valores de contenido con los que se trabaja cada una de las tareas, permitió reconocer los datos asociados, en el sentido de establecer un contexto para los valores de contenido presentados (Cobb, 1999), con el valor del parámetro establecido, toda vez que, posterior a la entrevista, los niños trabajaron con la información sin cuestionar ni manifestar desconocimiento del origen de los datos suministrados.

El paso por la segunda parte, familiarización de la situación, que consistió en resolver la tarea utilizando material concreto (10 cajas de fósforos), permitió observar un primer ejercicio de elaboración de estrategias, algunas de los cuales se mantuvieron y vincularon a las estrategias finales en lo que se refiere a la manipulación de las representaciones simbólicas utilizando lápiz y papel y al desarrollo de cálculos.

Otras acciones, referidas a cálculos mentales, que fueron más difíciles de identificar y caracterizar, son tenidas en cuenta en la descripción y clasificación jerárquica, según nivel de complejidad en el que se ubicaron las estrategias utilizadas por los niños y niñas, y que se describen a continuación.

6.3 Descripción de las estrategias identificadas

A partir de la información de los videos, que se registró en los formatos de rejillas de registro, un ejemplo se observa en la Figura 5, se pudo realizar la descripción de las estrategias y su jerarquía partiendo de la complejidad que de cada una se pudo observar en las acciones realizadas por los niños al resolver las tareas.

Código : 02092141
 Nombre : Carolina

Edad : 8,48 años
 Grado : 4º

Colegio : 2
 Tarea : 1

Ciudad : 1

Preguntas de entrevistador	Configuración	Respuestas verbal del niño	Acciones del niño	Secuencia de acciones para elegir la marca	Estrategia
¿Cuál es la marca que trae más fósforos en sus cajas que la otra?	Dos listas con los contenidos de fósforos de las marcas P y S	Las dos traen igual porque la (cantidad) que más sería es 41 y ambas traen 41, entonces traen iguales	Coloca las listas S y P una al lado de la otra, mira los numerales y señala el mayor (41) en una y otra lista.	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Señala numeral mayor (41) en lista S. ✓ Señala numeral mayor (41) en lista P ✓ Compara numerales entre listas ✓ Señala numerales mayores (41 y 40) en lista S. ✓ Cuenta en forma independiente numerales mayores en lista S. ✓ Señala numerales mayores (41 y 40) en lista P. ✓ Cuenta en forma independiente numerales mayores en lista P. ✓ Compara cantidad de numerales entre listas ✓ Elige marca con más cantidad de numerales mayores 	Máximo de un conjunto Cardinal o cantidad de un conjunto
Si tuvieras que escoger una marca ¿cuál escogerías?	S 40, 39, 40 40, 40, 38 39, 38, 41	Escojo esta (P)			
¿Por qué?	41, 40, 39 39, 39, 38 37, 40, 40 37, 40	No sé			
Intenta escoger una marca teniendo en cuenta los valores, ¿cuál escogerías?	P 39, 37, 40 37, 40, 38 41, 39, 39 37, 37, 38 40, 39, 39 39, 40, 39 41, 39	Escojo esta (S)	Observa una y otra lista, y señala S		
¿Cómo sabes que esa marca es la que tiene las cajas con más contenido que la otra?		Porque es una marca nueva para mí y... tiene más números mayores aquí y en todo lado: de 41 tiene 2 y de 40 tiene 9... no, tiene 10 (se equivoca) y ésta (P) de 41 tiene 2 y de 40 tiene 4. Entonces escojo ésta (S) por los números mayores	En S, señala y cuenta en forma separada numerales 41 y 40 En P, señala y cuenta en forma separada numerales 41 y 40 Compara en forma separada los conteos y elije la marca que tiene más valores 40.		

Figura 5 Rejilla de Registro elaborada con información del video

Las secuencias de acciones orientadas hacia la consecución del fin propuesto en cada tarea centró: *Encontrar 2 valores para determinar el mayor y seleccionar la marca asociada a éste*, lo que permite la organización de los medios disponibles e identificados por los niños para la construcción de las estrategias.

Un total de 5 estrategias, organizadas en orden ascendente de complejidad, y que no se encuentran ligadas en exclusividad con una única tarea, terminaron concentrando el conjunto de las acciones que realizaron los niños y niñas participantes de esta investigación. Estas estrategias, además de permitir alcanzar la solución, parcial o total de la tarea, también permiten observar la aparición de características de naturaleza escolar que han sido señalados por otros autores y por nosotros mismos (Riascos Forero & Fávero, 2010; Fávero M. H., 2005; Fávero & Soares, 2001).

En cuanto a los cambios de estrategia surgidos de los intentos fallidos por alcanzar la solución de una tarea, se pudo observar que los niños más pequeños son los que más realizan esta acción al resolver la tarea de la Moda, seguida de las variaciones en la tarea de la Mediana, mientras que en la solución de la tarea de la Media Aritmética se observó regularmente la aplicación de una única estrategia de solución.

Este hecho puede atribuirse a la inexperiencia que los niños de 9 y 10 años pueden tener con el manejo de datos numéricos en términos de manipulación para una posterior comparación, ya que los niños más grandes, acudían directamente y casi de inmediato a la aplicación del algoritmo de la suma, lo que constituye una clásica estrategia de carácter netamente escolar (Fávero & Soares, 2002).

6.3.1 Máximo de un Conjunto:

Este nombre fue asignado al conjunto de acciones que consistieron en establecer la solución de las tareas mediante la localización del valor máximo de todos, o una parte de, los números de la lista o del conjunto de cajas, para cada una de las marcas, y posteriormente realizar la comparación de estos valores para obtener una solución.

Involucra entonces esquemas de clasificación simple para las marcas, los valores, y los subconjuntos cuando se aplica a una parte de los datos. Los niños y niñas de menor edad, al considerar el máximo del total de datos, o cajas, para aplicar esta estrategia, no

consiguen alcanzar la solución, puesto que los valores encontrados son iguales, mientras que cuando establecen una partición del conjunto de datos, que regularmente obedece a la selección de la última fila de los listados, que contiene 2 datos en lugar de los 3 que tienen las otras filas, alcanzan un resultado exitoso para el fin de la tarea, aunque el procedimiento no obedeció al desarrollo planificado en la metodología de trabajo.

Esta estrategia es más utilizada para la solución de la tarea de la Media Aritmética, ya que en ella los niños no determinan el máximo sólo en función de los valores numéricos, sino que algunos toman como referencia el tamaño de los listados “*éste es más grande*” y centran la atención en el hecho que uno de los listados cuenta con 30 datos mientras que el otro cuenta con 20 y, por ende, los tamaños son diferentes y los totales de las sumas también.

6.3.2 *Cardinal o Cantidad de un Conjunto*

Esta estrategia, que resulta regularmente después de verificar que la anterior estrategia no permitió tomar una decisión en función del requerimiento de la tarea, consiste en involucrar el concepto de frecuencia, aplicando el esquema de conteo, y realizar particiones del conjunto, centrado en las comparaciones, ya no de los conjuntos iniciales, sino de las particiones elaboradas.

De esta forma, una primera partición que realizan los niños y las niñas se refiere a la que permite la comparación de las frecuencias de los valores máximos encontrados (41), y cuando esto no permite alcanzar una solución, es seguido por la comparación de las frecuencias de los valores de los grupos denominados “*los más grandes*”, que incluyen rangos de valores que pueden ser 40 y 41 o 39 a 41. Otra forma consiste en la comparación, entre las marcas, de las frecuencias de cada uno de los diferentes valores de contenido.

Esta estrategia es muy eficiente para la tarea de la Moda, pero la tarea de la Mediana requiere de la consideración de que la distribución de los datos se encuentra desequilibrada hacia valores pequeños, por lo que la conclusión se debe realizar considerando proporcionalidad inversa en el sentido que a mayor cantidad de valores de contenido pequeños se concluye que esa marca tendrá menos cantidad de fósforos por caja.

Pero esta estrategia conduce al fracaso cuando se aplica a la tarea de la Media Aritmética, debido a que no considera incluir el total de datos por marca, lo que lleva a que las frecuencias no puedan compararse adecuadamente.

6.3.3 Ley de Tricotomía Simple o por Etapas

Considerando que la inclusión de más variables de la tarea implica mayor nivel de complejidad de la estrategia que se elabore, la estrategia denominada con este nombre, considera, además de las variables involucradas en las estrategias anteriores, un trabajo de conteo mental que se convierte en un factor que lleva fácilmente al fracaso de esta estrategia en la solución.

En el sentido “Simple”, la estrategia consiste en ir comparando entre marcas, uno a uno los valores de las listas y a partir de esta comparación ir acumulando las diferencias a favor de cada marca para finalmente realizar el cómputo de la diferencia que permite determinar la marca con mayor cantidad de contenido por caja. La determinación de la diferencia es la que da origen al nombre de la estrategia, puesto que al comparar dos números reales (x e y , por ejemplo), solo es posible conseguir uno de tres resultados: $x < y$; $x > y$ ó $x = y$, que se conoce como la ley de tricotomía, que al cumplirse asegura el orden en el conjunto.

El calificativo de “por Etapas”, implica que la comparación se realiza en subgrupos, regularmente entre las filas de los listados, estableciendo los cálculos de diferencias a favor de manera distinta ya que no siempre se comparaban los valores en el orden que aparecen, sino también de acuerdo con la cantidad de valores observados en el subconjunto.

Muy pocos niños y niñas (2,5%) realizaron el cálculo de las diferencias de forma aritmética, lo que implicó un mayor esfuerzo en la utilización de esta estrategia, puesto que se involucraban cálculos de diferencias en la comparación de los términos y luego un cálculo de adición y otro de diferencias para ir determinando el resultado final; este trabajo exige el uso de lápiz y papel para garantizar el éxito, aunque la mayoría de los niños no lo hicieron lo que explicó el fracaso en el resultado final obtenido.

Puede observarse que esta última forma descrita de la estrategia, no es más que una forma muy elaborada de realizar el cálculo de las diferencias de los totales de cada conjunto de datos, que se hace evidente en el desarrollo de la siguiente estrategia.

6.3.4 *Suma Iterada o Continua*

Esta estrategia tiene su base en las actividades escolares cotidianas que los niños realizan en las clases de matemáticas, al tener que operar con conjuntos de números. Requiere inevitablemente del uso de lápiz y papel y consiste en calcular la suma del total de los términos involucrados.

Esta estrategia involucra como variables de la tarea o medios, las marcas de los fósforos, los valores de contenido y considera la suma total como noción de representante natural de un conjunto de datos en función de sus valores.

El calificativo de “Iterada” implica que solo se suman dos términos a la vez y posteriormente al resultado se incrementa un nuevo valor para volver a calcular la suma con estos dos términos, repitiendo el proceso hasta finalizar con el último dato del listado, como se observa en la Ilustración 5, a continuación.

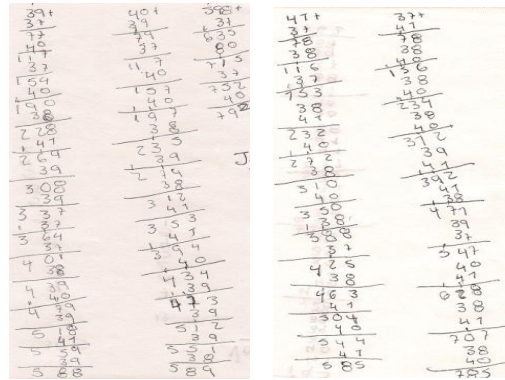


Ilustración 5 Ejemplo de suma iterada (dos términos a la vez)

Otra forma de realizar los cálculos para establecer esta estrategia como solución de las tareas, consistió en realizar sumas continuas o por rangos de valores, escribiendo secuencialmente los valores más grandes y realizando la suma de los mismos, prosiguiendo con los demás valores hasta obtener el resultado final para cada marca, resultados que eran comparados para tomar una decisión; un ejemplo de esta forma de proceder se observa en la Ilustración 6 a continuación.

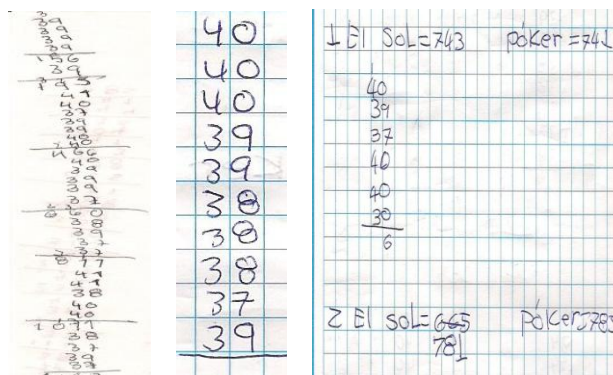


Ilustración 6 Ejemplo de suma continua

Una última forma de calcular la suma de los datos, se presentó en una forma que puede relacionarse con una tabla de frecuencias, en la cual se observan los valores de contenido acompañados de sus frecuencias. Debido a que los niños no tienen información de lo que es una tabla de frecuencias, pudo evidenciarse la presencia de esquemas en acto (Vergnaud, 1990) y la forma de escritura muestra una recursividad implementada para mostrar esa relación, tal como se observa en la Ilustración 7 a continuación.

P	f
2 41	7 40
8 39	2 41
4 37	3 38
4 40	5 39
2 38	3 37

Ilustración 7 Ejemplo de suma continúa a partir de tablas de frecuencias

Estas tres formas de escritura, además de ser las únicas que se presentaron durante la implementación de esta investigación, se encontraron directamente asociada con esta estrategia, aunque no de forma exclusiva, puesto que para otras estrategias se presentó igualmente, alguna de estas formas de escritura.

Esta estrategia es efectiva cuando se realizan comparaciones en diseños balanceados, es decir diseños con la misma cantidad de datos en los grupos a comparar, pero es inadecuada cuando esta condición no se cumple, como es el caso de la tarea de la Media Aritmética, lo que se convierte en un elemento adicional que obliga el cambio de estrategia o la modificación de la misma.

6.3.5 *Regla de proporcionalidad*

Esta estrategia solo se encontró al momento de solucionar la tarea de la Media Aritmética, y aunque la mayoría de los niños evidencian la necesidad del uso de una variable de la tarea, como la cantidad de datos, que obliga el cambio o la modificación de la estrategia de la suma, la mayoría expresaron verbalmente este inconveniente pero no encontraron la forma de incluir esta variable para modificar efectivamente la estrategia. Solo un niño de 14 años logró realizar la inclusión de esa variable y elabora la estrategia que denominamos con este nombre, y que consistió en reconocer que debido a que la suma se ve afectada por el total de datos involucrados en la operación, considerando que el rango de valores es similar, pudo establecer una proporcionalidad que se obtiene al dividir la suma total de los datos por el total de los mismos, lo que evidentemente da origen al cálculo de la Media Aritmética.

Cabe aclarar que el niño que realizó esta estrategia nunca dio cuenta del indicador estadístico y se remitió a hacer referencia a la regla de proporcionalidad, en términos de regla de tres, que había visto en sus cursos de matemáticas y que hace referencia a que si una cierta cantidad de cajas contiene un total de fósforos, es posible por proporcionalidad, encontrar el número de fósforos que contendrá una sola caja

6.4 *Desempeños de las Estrategias en las Tareas*

Hasta este momento se presentó las descripciones de las estrategias identificadas a partir de las acciones de los niños y las niñas, lo que no es suficiente para cubrir todo el espectro de resultados que las tareas permitieron conocer. A continuación se presentan otros resultados que se encontraron al observar la interacción de las estrategias con las tareas, otras variables de las tareas y características de los niños y niñas participantes.

Al observar la distribución porcentual del uso de cajas y de escritura (lápiz y papel) para solucionar las tareas, se encontró que en general, el 32,8% de los niños y niñas participantes acudieron al uso de lápiz y papel para solucionar las tareas, siendo la tarea de la Moda la que presentó el mayor porcentaje (37,8%), como se observa en el Grafico 1, pero no se encontraron diferencias significativas al comparar las diferencias de estos porcentajes entre las tres tareas.

De igual forma, puede observarse en la misma gráfica, que en promedio un 9,4% de los niños y las niñas participantes decidieron utilizar las Cajas en lugar de los listados para desarrollar una estrategia de solución a las tareas. Como en el caso de la escritura, el mayor porcentaje se observó en la tarea de la Moda con un 13,3%, pero en este caso si se encontraron diferencias significativas ($p < 0,05$) al comparar los porcentajes de las tres tareas, señalando la tarea de la Media Aritmética como aquella en la que menos se utilizaron las cajas para buscar una solución, lo que permite hipotetizar que

posiblemente al incrementarse la cantidad de datos se suprime la necesidad de utilización de material concreto.

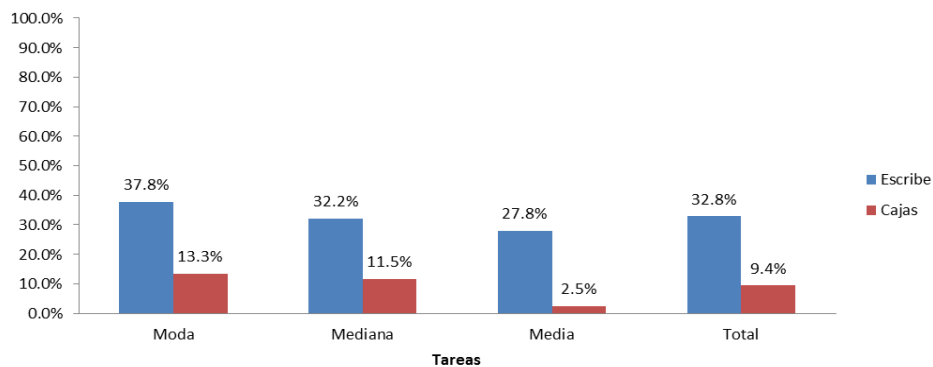


Gráfico 1 Distribución porcentual de la utilización de Cajas y Escritura (Lápiz y Papel) para resolver las tareas.

En cuanto al desarrollo de estrategias en la solución de las distintas tareas, se encontró que, excepto en la estrategia “Regla de Proporcionalidad”, las otras aparecen en todas las tareas, siendo la estrategia “Cardinal o cantidad de un Conjunto” junto con la “Suma Iterada o Continua” las de mayores frecuencias de utilización en la solución de las tareas como se observa en la Gráfica 2.

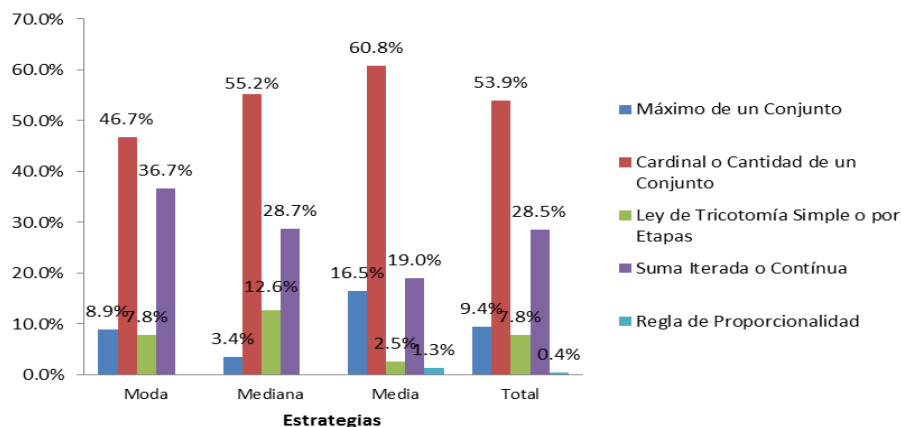


Gráfico 2 Distribución porcentual de la utilización de Estrategias para resolver las tareas.

En relación con otros estudios que apuntan en la dirección del desarrollo de habilidades matemáticas y su relación con el currículo (Steffe, 1990; Lakoff & Núñez, 2000), y particularmente en lo relacionado con la estadística (Batanero & Serrano, 1995; Batanero C. , 2000; Batanero & Diaz, 2003; Langrall & Mooney, 2002; Jones, y otros, 2000; Jones, Mooney, Langrall, & Thornton, 2002), los resultados de esta investigación propician un aporte importante al introducir el interés por la génesis de estos conceptos, complementando los trabajos realizados y apuntando en la dirección general que originalmente plantearon Piaget y García (1982) y que posteriormente complementa García (2000).

En cuanto al grado de dificultad que tenían las tareas para permitir alcanzar una solución, se encontró que la mayoría de los niños y niñas lograron un resultado exitoso para el caso de la Moda y la Mediana, lo que no ocurrió en el caso de la Media Aritmética, que, como puede observarse en el Gráfico 3, mientras en las dos primeras tareas los porcentajes generales de éxito se encuentran alrededor del 80%, para el caso de la última tarea ese porcentaje no llega al 7%, lo que evidencia la que la dinámica de construcción de las estrategias en relación con el éxito que puede producir en cada situación, no es independiente de esta última y por ende es indispensable su análisis para considerar su papel en la construcción de los indicadores de tendencia central.

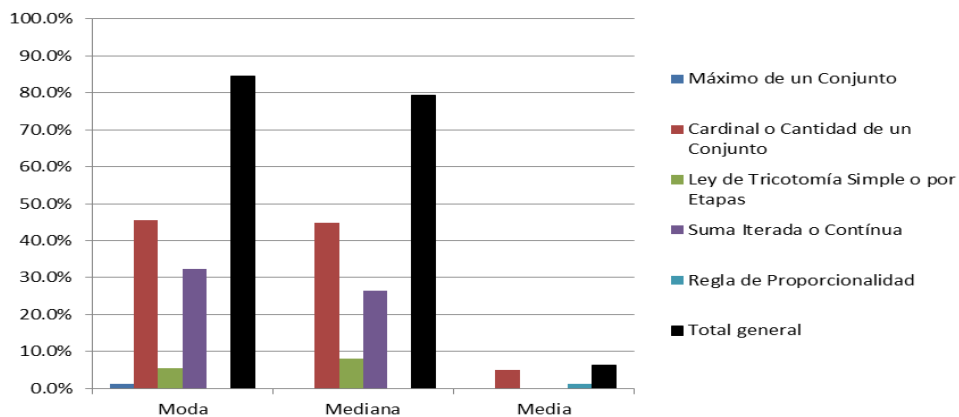


Gráfico 3 Distribución porcentual del desempeño exitoso de las Estrategias al resolver las tareas.

Al revisar el comportamiento de la edad en lo que se refiere al uso de las cajas para resolver las tareas, se encontró que esta característica, como era de esperarse, disminuye con la edad, como se observa en la Gráfica 4.

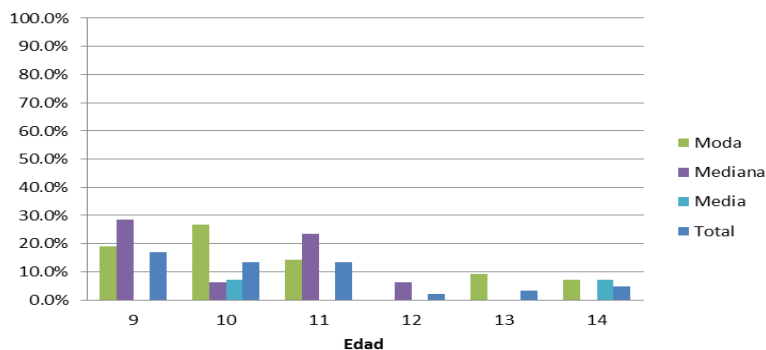


Gráfico 4 Distribución porcentual del uso de Cajas para resolver las tareas, según la Edad.

Por su parte, el uso de lápiz y papel (escritura) tiene un comportamiento en el que se observa un incremento en los primeros tres años seguido de un descenso brusco para la edad de 12 años y luego el comienzo de un descenso en los niños y niñas de edades superiores, como se observa en la Gráfica 5.

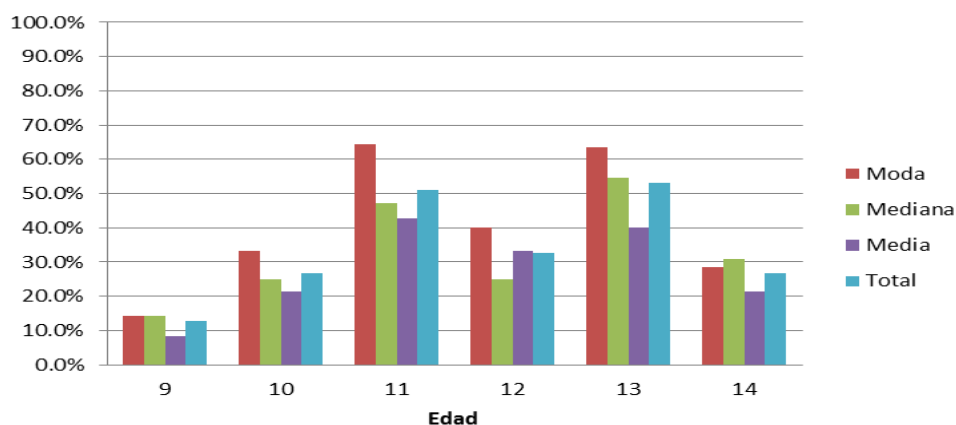


Gráfico 5 Distribución porcentual del uso de Escritura (Lápiz y Papel) para resolver las tareas según la edad.

El análisis de comparación del comportamiento de las estrategias encada una de las tareas mostró diferencias significativas que, como se observa en la tabla de análisis de varianza, alcanzan valores de significancias muy altos ($p < 0,01$)

Tabla IV Análisis de varianza para comparar la distribución de las estrategias por tarea

Fuente de Variación		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Moda	Inter-grupos	1.086	4	.272	17.470	.000
	Intra-grupos	.389	25	.016		
	Total	1.475	29			
Mediana	Inter-grupos	1.218	4	.304	33.377	.000
	Intra-grupos	.228	25	.009		
	Total	1.446	29			
Media	Inter-grupos	1.427	4	.357	35.091	.000
	Intra-grupos	.254	25	.010		
	Total	1.681	29			

Estos resultados permiten interpretar que la dinámica interna de la distribución de las estrategias en cada tarea, presenta un comportamiento distinto y por ende una relación con la estructura o elementos de la tarea que son considerados como medios para al canzar el fin propuesto. Estos resultados, en relación con lo propuesto por autores que se han preocupado por los marcos en los cuales se desarrolla el

pensamiento estadístico de los niños (Langrall & Mooney, 2002; Jones, y otros, 2000; Jones, Langrall, Mooney, & Thornton, 2004), complementa el aspecto relacionado con la dinámicas de cambio para avanzar en los niveles de conocimiento que ellos proponen.

Finalmente y en forma complementaria para establecer las características de las acciones de los niños observadas y registradas en la caracterización de las estrategias desarrolladas en cada una de las tres tareas utilizadas en esta investigación, a continuación aparecen las Tablas V, VI y VII, que resumen este proceso.

Tabla V Descripción y secuencias de acciones en la elaboración de las Estrategias utilizadas por niños y niñas al resolver la tarea de la Moda

(Nivel) Estrategia	Características de la estrategia	Secuencia de acciones de la estrategia
(1) <i>Máximo de un conjunto</i>	<p>Identificar el problema a resolver, reduciendo su complejidad, como el cálculo del máximo del conjunto, global, de valores de contenido de las cajas de fósforos, utilizando criterios de gusto propio o del de algún familiar (padre, madre, tío, etc.) para justificar la decisión.</p> <p>Seleccionar un valor de contenido, mayor que el valor objetivo (40), en una marca y verificar si existe en la otra comparándolos para determinar la marca asociada al mayor.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Seleccionar una caja con valor de contenido superior al valor objetivo - Identificar la marca asociada a ese valor como la elegida. - Utilizar criterios asociados a sus gustos o al gusto de familiares sobre una las marcas en comparación - Seleccionar en una marca un valor de contenido igual o superior al valor objetivo - Verificar si en la otra marca se encuentra el valor seleccionado
(2) <i>Cardinal o cantidad de un conjunto</i>	<p>Se considera el grupo de datos como un todo, y se determina el cardinal como el indicador de magnitud a comparar.</p> <p>A partir del fracaso de la estrategia inicial, se clasifican los datos (manipulando las cajas) por marca y por valor de contenido y ubicando el grupo de mayor cardinal (cantidad) realiza la comparación de los valores de contenido y selecciona la marca correspondiente como la ganadora</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Clasificar las cajas según la marca a la que pertenece - Contar el total de cajas para una marca - Repetir el proceso anterior para la siguiente marca - Comparar los totales - Seleccionar la marca asociada al mayor determinado en el paso previo. - Clasificar las cajas por marca - En cada marca, clasificar los datos por valor de contenido - Calcular en cada marca, por inspección visual, el sub grupo con mayor cardinal - Identificar, en cada marca, el valor de contenido del sub grupo de mayor cardinal - Comparar los valores de contenido de esos sub grupos - Seleccionar la marca asociada al mayor

(Nivel) Estrategia	Características de la estrategia	Secuencia de acciones de la estrategia
<p>(3) <i>Ley de tricotomía simple o por etapas</i></p>	<p>Con los valores de una marca realiza comparaciones sucesivas de dos cantidades de contenido, hasta obtener el máximo del conjunto. Luego repite el procedimiento con los valores de contenido de la otra marca, obteniendo el máximo del otro conjunto, para finalmente compararlos y elegir la marca asociada al mayor de ellos</p> <p>A partir del fracaso de la estrategia inicial, se construye un subgrupo en cada marca, conformado por los valores mayores al valor objetivo (40). Se determinan los cardinales de estos grupos y se realiza la comparación de ellos para elegir la marca asociada al mayor</p> <p>Realizando comparaciones entre dos valores, uno de cada marca, determina el mayor y señala la marca como la ganadora en cada renglón de la tabla. Continúa el proceso acumulando el número de veces que cada marca gana. Se elige la marca que tenga más comparaciones a favor.</p>	<p>determinado en el paso previo</p> <ul style="list-style-type: none"> - Buscar el mayor valor de contenido en los datos de una marca - Repetir el procedimiento con los valores de contenido de la otra marca - Comparar los máximos de cada marca - Seleccionar la marca asociada al mayor determinado en el paso previo. - Conformar, en cada marca, un grupo con los valores de mayor cantidad de contenido. - Calcular los cardinales de estos grupos - Comparar estos dos cardinales - Seleccionar la marca asociada al mayor determinado en el paso previo - Leer en voz alta los valores de contenido del primer renglón de la tabla de una marca - Repetir el proceso para la otra marca - Comparar y contar (mentalmente) el número de veces que cada marca gana - Hacer el cálculo y determinar la marca que más comparaciones ha ganado - Repetir el proceso para los demás renglones de la tabla - Seleccionar la marca asociada al mayor determinado en el proceso
<p>(4) <i>Suma iterada o continua</i></p>	<p>Identificando cada grupo como un solo conjunto, sin considerar la cantidad de datos, se determina su consolidación a través de un total que se convierte en un indicador que garantiza la comparabilidad de los datos</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Forma Iterada: - Escribir en papel los dos primeros valores del listado de una marca - Realizar la suma de los valores y escribir el resultado - Escribir el siguiente valor del listado debajo del valor de la suma calculada - Calcular la suma de los dos últimos términos - Repetir es procedimiento hasta que finalicen los datos del listado - Obtener la suma total - Repetir el procedimiento para el otro listado - Comparar los totales obtenidos - Elegir la marca de fósforos asociada al mayor de los totales - Forma Continua - Escribir en papel los valores del listado de una marca - Realizar la suma de los valores - Escribir en papel los valores del listado de la otra marca - Realizar la suma de los valores - Comparar los totales obtenidos - Elegir la marca de fósforos asociada al mayor de los totales

Tabla VI Descripción y secuencias de acciones en la elaboración de las Estrategias utilizadas por niños y niñas al resolver la tarea de la Mediana.

(Nivel) Estrategias	Características de la estrategia	Secuencia de acciones de la estrategia
<p>(2) <i>Cardinal de un conjunto</i></p>	<p>Realiza una cuantificación de la totalidad de unidades del conjunto y lo utiliza como criterio para establecer un orden entre los conjuntos</p> <p>Realiza particiones del conjunto utilizando diferentes criterios como: 1/ el mayor valor; 2/ los valores mayores; 3/ los valores más repetidos; y 4/ los diferentes valores. Proceden de diversas maneras para determinar la marca: 1/ calcula el número de elementos de la partición y compara los valores; 2/ para cada partición, compara los valores y cuenta las diferencias de orden en favor las marcas, y decide por la marca de mayor diferencias a favor. (algunas veces este proceso sólo es expresado verbalmente sin evidenciar algún proceso)</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Clasifica cajas por marca - Cuenta la cantidad de cajas en cada marca - Compara la cantidad contada - No puede elegir una marca - Clasifica y cuenta, en cada marca, las cajas con valor de contenido 40 y la de contenido 41 - Comparar, entre marcas, los valores contados. - Elige la marca que tiene mayor cantidad de cajas de contenido 40 - Clasifica en cada marca las cantidades - Cuenta las veces que se repite cada cantidad - Comparar, entre marcas, la cantidad contada - Elige la marca que se corresponde con el mayor valor en la mayor frecuencia - Clasifica y cuenta, en cada marca, los valores de contenido - Compara los conteos - Elige la marca que se corresponde con el mayor valor en la mayor cantidad comparada - Contar en cada marca la cantidad de cajas de un valor de contenidos - Comparar los valores contados - Decidir por la marca que se corresponde con el mayor valor comparado
<p>(3) <i>Ley de tricotomía simple o por etapas</i></p>	<p>Realiza comparaciones entre unidades (cajas) por marca, considerando las diferencias que en términos de orden se van presentando a favor de cada una de las marcas, para finalmente cuantificar esas diferencias y encontrar un valor general para el conjunto.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Selecciona los dos últimos valores de contenido de cada lista - Compara, entre marcas, estos valores - Elige la marca que se corresponde con el mayor valor comparado - Comparar, entre marcas, los valores de contenido de las filas de los listados, - Contar las diferencias, por fila, a favor y en contra de cada marca. - Elige la marca que presenta más diferencias a favor.
<p>(4) <i>Suma iterada o continua</i></p>	<p>A partir de transcripción de los datos al papel y de diferentes formas de sumar que van desde: 1/ sumar dos términos y al resultado sumar el término siguiente; 2/ sumar los términos de cada fila y después sumar los resultado; y 3/ sumar la totalidad de los términos escritos en una columna, se construye un indicador de cantidad asociado a cada conjunto, con el cual se realiza la comparación (algunas veces este proceso sólo es expresado verbalmente sin evidenciar algún proceso)</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Suma, en cada marca, los valores de contenido - Compara los resultados de las sumas. - Elige la marca que corresponde con la suma mayor - Calcula, para cada marca la suma de los valores de contenido - Comparar las sumas - Elige la marca que se corresponde con la suma mayor

Tabla VII: Descripción y secuencias de acciones en la elaboración de las Estrategias utilizadas por niños y niñas al resolver la tarea de la Media Aritmética

(Nivel) Estrategias	Características de la estrategia	Secuencia de acciones de la estrategia
(1) <i>Máximo de un conjunto</i>	Observas las diferencias en tamaño de los listados al igual que la mayor cantidad de valores de contenido en el más grande, lo que hace que éste sea el elegido.	<ul style="list-style-type: none"> - Observa los listados - Selecciona el listado de mayor tamaño - Argumenta que esta característica hace que ese sea la marca que trae más contenido.
(2) <i>Cardinal de un conjunto</i>	Realiza comparaciones entre unidades (cajas) por marca, procurando encontrar una diferencia a favor de una marca, a partir de la cual pueda inferir hacia la generalidad del conjunto.	<ul style="list-style-type: none"> - Selecciona, en cada lista, el mayor valor de contenido (41) - Compara estos valores - Encuentra igualdad en todas sus comparaciones - No elige ninguna marca (F) - Compara los diferentes valores de contenido de los listados, sin considerar las veces que cada valor aparece repetido - Encuentra igualdad en todas sus comparaciones - No elige ninguna marca (F) - Clasifica las cajas por marca - Selecciona cajas del mismo valor de contenido, en cada marca, realiza este proceso con los valores de contenido altos - Generaliza igualdad de distribuciones a partir de la igualdad en los valores de contenido en las dos marcas (M)
(3) <i>Ley de tricotomía simple o por etapas</i>	<p>Realiza comparaciones entre unidades (cajas) por marca, considerando las diferencias que en términos de orden se van presentando a favor de cada una de las marcas, para finalmente cuantificar esas diferencias y encontrar un valor general para el conjunto.</p> <p>Realiza particiones del conjunto utilizando diferentes criterios como: 1/ el mayor valor; 2/ los valores mayores; 3/ los valores más repetidos; y 4/ los diferentes valores. Proceden de diversas maneras para determinar la marca: 1/ calcula el número de elementos de la partición y compara los valores; 2/ para cada partición, compara los valores y cuenta las diferencias de orden en favor las marcas, y decide por la marca de mayor diferencias a favor. (algunas veces este proceso sólo es expresado verbalmente sin evidenciar algún proceso)</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Compara algunos valores de contenido entre marcas, considerando la posición ocupada en las listas. - Encuentra diferencias a favor y en contra de una y otra marca - No elige una marca (M) - Nombra los valores de contenido de las cajas de cada marca en la línea. - Comprara y cuenta, mentalmente, las veces que cada marca presenta los datos mayores en la línea - Define, con ese valor, la marca que gana en la línea - Acumula el número de líneas que cada marca gana - Selecciona la marca de más líneas ganadas. (M) - Selecciona los dos valores de contenido presentados en la última fila de cada listado (F) - Compara, entre marcas, los valores mínimos de cada marca - Compara, entre marcas, los valores máximos de cada marca - Escoge la marca que tiene los mayores valores en las comparaciones - Establece, la categoría de “números mayores” (40 y 41); - Cuenta frecuencia de números en la categoría - Compara entre marcas la frecuencia de esta categoría. (F) - Busca en cada lista el valor de contenido 40 - Cuenta las veces que aparece el valor en cada lista - Compara los valores contados - Escoge la marca que corresponda con el mayor valor (F)

(Nivel) Estrategias	Características de la estrategia	Secuencia de acciones de la estrategia
		<ul style="list-style-type: none"> - Clasifica cajas por marca, - En cada marca, clasifica las cajas, apilándolas, por valor de contenido - Cuenta las cajas en cada valor de contenido - Compara los números contados entre marcas - Elige la marca que corresponde con los mayores conteos encontrados en los valores de contenido más altos. (M) - Busca en cada lista el valor de contenido 40 - Calcula la cantidad de cajas en cada marca - Compara éstos cálculos - Elige la marca que se corresponde con el mayor de los términos comparados (M)
<p>(4) Suma iterada o continua</p>	<p>A partir de transcripción de los datos al papel y de diferentes formas de sumar que van desde: 1/ sumar dos términos y al resultado sumar el término siguiente; 2/ sumar los términos de cada fila y después sumar los resultado; y 3/ sumar la totalidad de los términos escritos en una columna, se construye un indicador de cantidad asociado a cada conjunto, con el cual se realiza la comparación (algunas veces este proceso sólo es expresado verbalmente sin evidenciar algún proceso)</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Suma, en cada marca, los valores de contenido de los listados. (Observaciones: Suma dos términos cada vez; erra en la suma de uno de los listados) - Compara, entre marcas, los valores obtenidos (F) - Escribe en columna, para cada marca, los valores de contenido de los listados - Suma, en cada marca, los valores de contenido de las listas - Compara los resultados de las sumas. - Escoge la marca que corresponde al mayor valor (F) - Escribe en columna (en forma incompleta), los números de cada lista - Calcula la suma de los valores - Compara los resultados - Escoge la marca que corresponde con el mayor valor (M)
<p>(5) Regla de proporcionalidad</p>	<p>Luego de verificar que la suma del total de los datos no para cada marca no es posible comparar, por el desbalance entre los totales, se considera la inclusión de una regla de proporcionalidad que permite resolver este inconveniente.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Calcula la suma para S - Calcula la suma para P - Establece una proporción entre el total de S y el total de datos de S - Establece una proporción entre el total de P y el total de datos de P - Compara los resultados obtenidos - Elige la marca correspondiente con el mayor valor

En cuanto a los aspectos metacognitivos observados y considerando que no estamos ubicados en el ámbito de la solución de problemas en la escuela, sino en un marco cognitivista que procura la identificación de esquemas de pensamiento más que de resultados exitosos, podemos afirmar que los niños establecen procesos de autoregulación referidos a las actividades que realizan para percibir sus necesidades de conocimiento en la planeación, implementación y validación de sus esfuerzos para

resolver la situación, ya que ellos continuamente seleccionan, estructuran y crean los ambientes materiales y sociales que optimizan su desempeño y permiten la generación de las estrategias para alcanzar el fin propuesto.

A continuación se realiza una descripción de las acciones del funcionamiento cognitivo de los niños según sus edades en lo que concierne al trabajo realizado para solucionar las tareas propuestas en esta investigación.

6.5 *Resultados de desempeño para niños y niñas de la fase etaria de 9 años*

Los 13 niños que pertenecieron a esta fase presentaron como características relevantes, que se encontraban en el rango de edad de los 8,5 a los 9,5 años, con un promedio de 9,1 años; el 53,8% eran de género masculino; su grado de escolaridad osciló entre 4° y 5° grado de educación básica, y un 30,7% eran de la ciudad de Popayán y el resto de la ciudad de Cali.

Para resolver las tareas, los niños hicieron uso de los medios disponibles en la situación, como se observa en la tabla VIII, el 71,8% utilizó las listas para resolver la tarea y de ellos el 30,8% utilizó el recurso de lápiz y papel, mientras que del 28,2% de los que utilizó las cajas, solo un 2,6% utilizó el recurso de lápiz y papel.

Los porcentajes para cada una de las tareas aparecen discriminados en la Tabla VIII. Las dos últimas filas de la tabla presentan los porcentajes globales de niños y niñas que en esta fase etaria usaron listas o cajitas y los que escribieron o no lo hicieron, respectivamente.

Tabla VIII Distribución según el desempeño de los niños de 9 años al resolver las Tareas

Tarea	Uso de Listas		Uso de Cajitas		Total
	Escribe	No Escribe	Escribe	No Escribe	
Moda	30,8%	30,8%	7,7%	30,8%	100%
Mediana	30,8%	38,5%	0,0%	30,8%	100%
Media Aritmética	30,8%	53,8%	0,0%	15,4%	100%
	30,8%	41,0%	2,6%	25,6%	100%
	71,8%		28,2%		
	33,4%		66,6%		

El desempeño de los niños y niñas de esta edad, en lo que concierne a las estrategias utilizadas en cada una de las tres tareas que enfrentaron se presentan en los gráficos 6, 7 y 8 a continuación.

Es de notar la forma como van disminuyendo los porcentajes en términos del éxito de las estrategias, encontrándose mayor afinidad con las dos primeras estrategias, aunque la primera no resulta para nada exitosa. Para el caso de la tarea de la Mediana los porcentajes se vuelcan hacia la segunda estrategia con un porcentaje alto de éxito, para finalmente, en la tarea de la Media Aritmética mantenerse en esta estrategia pero con un porcentaje de éxito casi nulo.

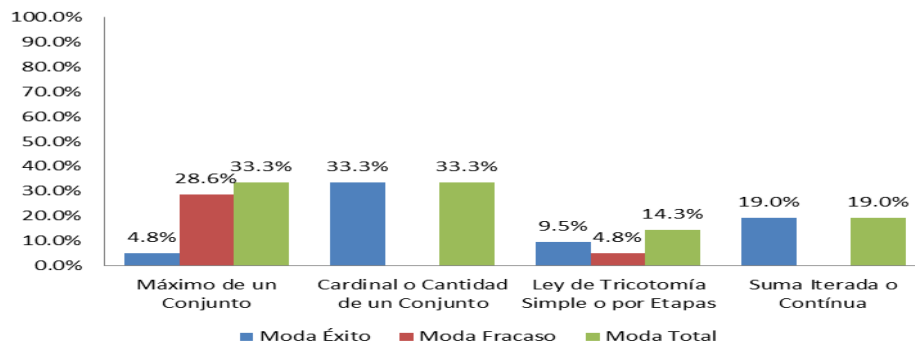


Gráfico 6 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 9 años en la tarea de la Moda.

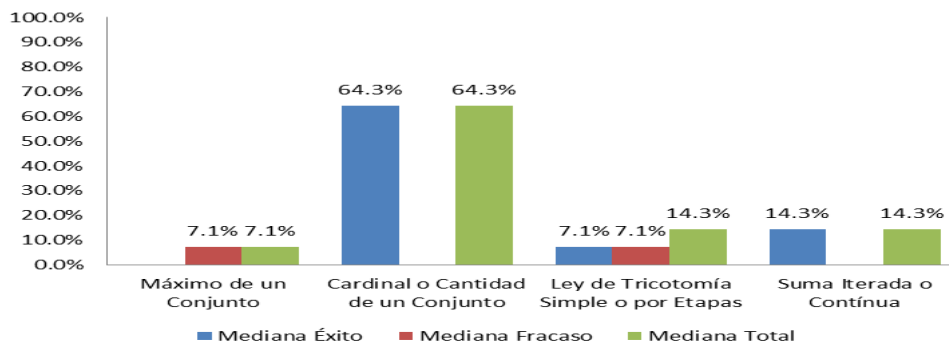


Gráfico 7 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 9 años en la tarea de la Mediana

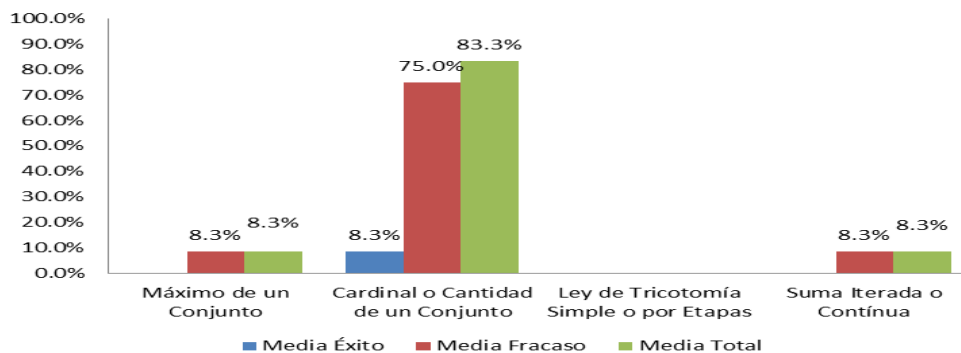


Gráfico 8 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 9 años en la tarea de la Media

6.6 Resultados de desempeño para niños y niñas de la fase etaria de 10 años

Los 14 niños que pertenecieron a esta fase presentaron como características relevantes, que se encontraban en el rango de edad de los 9,58 a los 10,44 años, con un promedio de 9,96 años; el 50% eran de género masculino; su grado de escolaridad

osciló entre 4° y 6° grado de educación básica, y un 57,1% eran de la ciudad de Popayán y el resto de la ciudad de Cali.

Al igual que los niños de fase etaria anterior, para resolver las tareas, hicieron uso de los medios disponibles en la situación, como se observa en la Tabla IX; el 90,5% utilizó las listas para resolver la tarea y de ellos el 42,9% utilizó el recurso de lápiz y papel, mientras que del 9,5% de los que utilizó las cajas, solo un 2,4% utilizó el recurso de lápiz y papel. En total, 45,3% de los niños y niñas de esta edad, utilizó lápiz y papel para solucionar esta tarea.

Los porcentajes para cada una de las tareas aparecen discriminados en la Tabla IX.

Tabla IX Distribución según el desempeño de los niños de 10 años al resolver las Tareas

Tareas	Uso de Listas		Uso de Cajitas		Total
	Escribe	No Escribe	Escribe	No Escribe	
Moda	50,0%	35,7%	7,1%	7,1%	100%
Mediana	42,9%	42,9%	0,0%	14,3%	100%
Media Aritmética	35,7%	64,3%	0,0%	0,0%	100%
	42,9%	47,6%	2,4%	7,1%	100%
	90,5%		9,5%		
	45,3%		54,7%		

El desempeño de los niños y niñas de esta edad, en lo que concierne a las estrategias utilizadas en las tres tareas que enfrentaron se presentan en los gráficos 9, 10 y 11 a continuación.

Se observa aquí la forma como van disminuyendo los porcentajes de éxito en las estrategias, encontrándose mayor afinidad con la segunda estrategia, aunque para la tarea de la Media Aritmética no resulta exitosa.

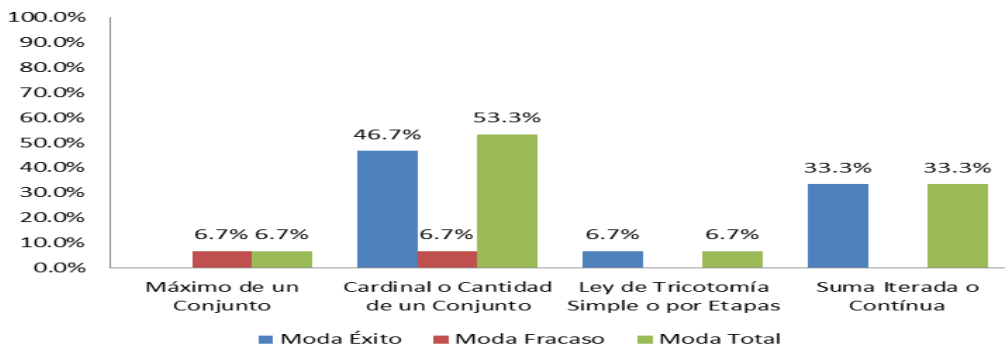


Gráfico 9 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 10 años en la tarea de la Moda.

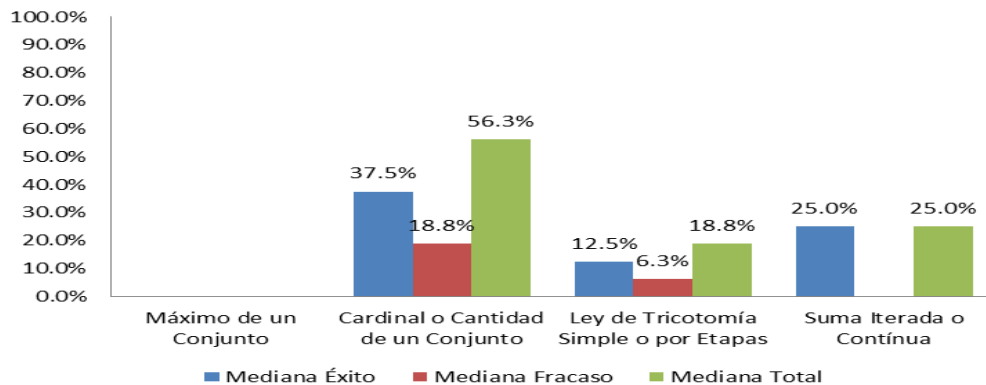


Gráfico 10 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 10 años en la tarea de la Mediana

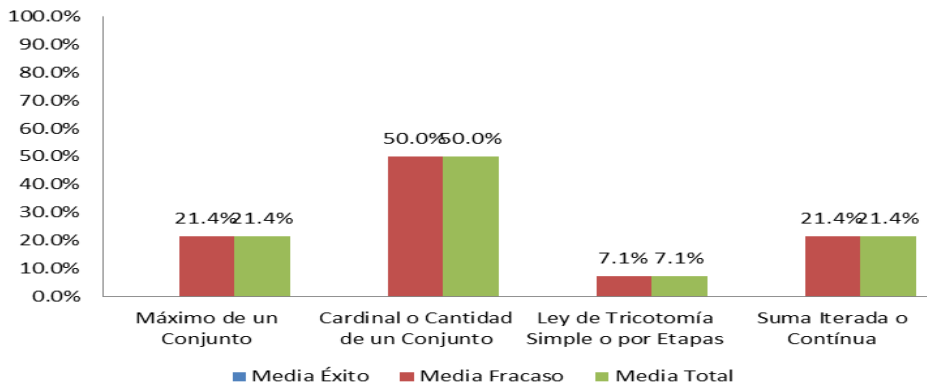


Gráfico 11 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 10 años en la tarea de la Media Aritmética

6.7 Resultados de desempeño para niños y niñas de la fase etaria de 11 años

Los 14 niños que pertenecieron a esta fase presentaron como características relevantes, que se encontraban en el rango de edad de los 10,62 a los 11,24 años, con

un promedio de 11,02 años; el 78,6% eran de género masculino; su grado de escolaridad osciló entre 5° y 7° grado de educación básica, y un 50% eran de la ciudad de Popayán y el resto de la ciudad de Cali.

Estos niños, para resolver las tareas, también hicieron uso de los medios disponibles en la situación, como se observa en la Tabla X; el 76,2% utilizó las listas para resolver la tarea y de ellos la mitad (38,1%) utilizó el recurso de lápiz y papel, mientras que del 23,8% de los que utilizó las cajas, solo un 4,8% utilizó el recurso de lápiz y papel.

Los porcentajes para cada una de las tareas aparecen discriminados en la Tabla X.

Tabla X Distribución según el desempeño de los niños de 11 años al resolver las Tareas

Tareas	Usa de Listas		Uso de Cajas		Total
	Escribe	No Escribe	Escribe	No Escribe	
Moda	50,0%	35,7%	7,1%	7,1%	100%
Mediana	42,9%	21,4%	7,1%	28,6%	100%
Media Aritmética	21,4%	57,1%	0,0%	21,4%	100%
	38,1%	38,1%	4,8%	19,0%	100%
	76,2%		23,8%		
	42,9%		57,1%		

El desempeño de los niños y niñas de esta edad, en lo que concierne a las estrategias utilizadas en las tres tareas que enfrentaron se presentan en los gráficos 12, 13 y 14 a continuación.

En este caso, los porcentajes en términos del éxito de las estrategias, se concentran en las estrategias dos y cuatro, aunque, como en el caso de los niños y las niñas de la fase etaria anterior, en el caso de la tarea de la Media Aritmética no resultan para nada exitosas, sorprendiendo la aparición de la primera estrategia en las dos últimas tareas.

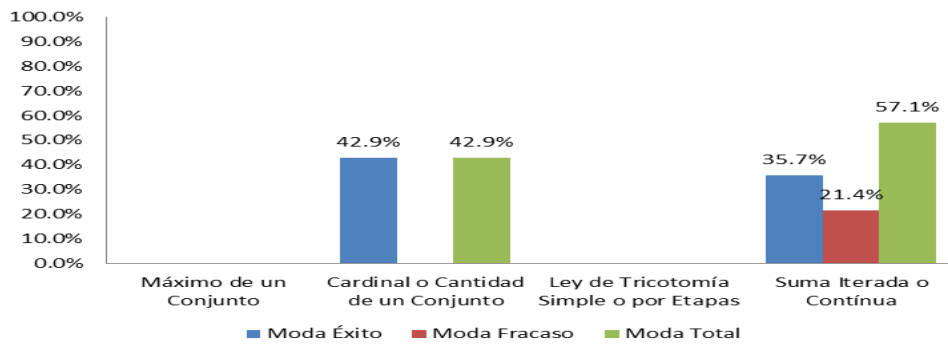


Gráfico 12 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 11 años en la tarea de la Moda.

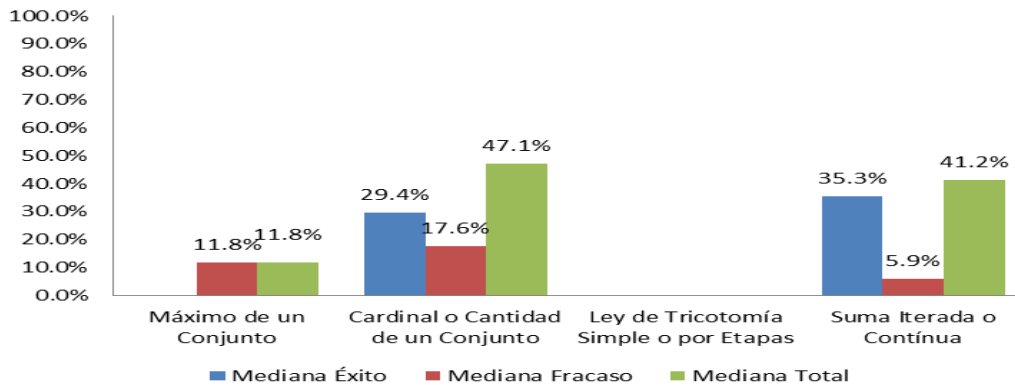


Gráfico 13 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 11 años en la tarea de la Mediana

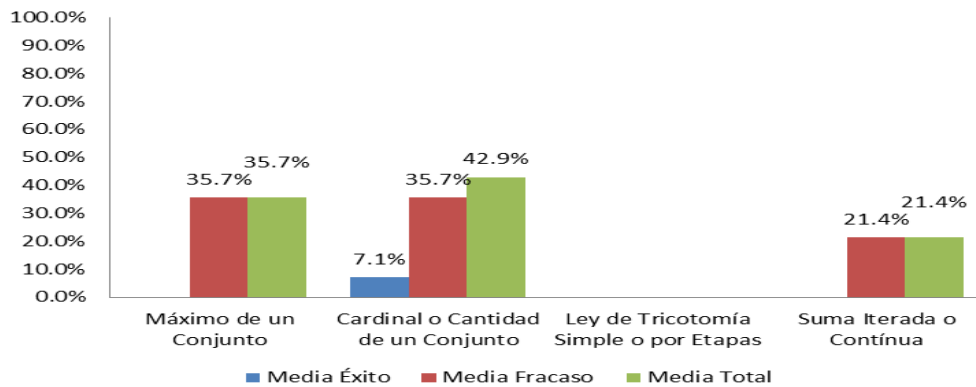


Gráfico 14 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 11 años en la tarea de la Media Aritmética

6.8 Resultados de desempeño para niños y niñas de la fase etaria de 12 años

Los 15 niños que pertenecieron a esta fase presentaron como características relevantes, que se encontraban en el rango de edad de los 11,55 a los 12,47 años, con

un promedio de 12,06 años; el 80% eran de género masculino; su grado de escolaridad osciló entre 6° y 7° grado de educación básica, y un 66,7% eran de la ciudad de Popayán y el resto de la ciudad de Cali.

Al igual que los niños de fase etaria anterior, para resolver las tareas, hicieron uso de los medios disponibles en la situación, como se observa en la Tabla XI, el 84,4% utilizó las listas para resolver la tarea y de ellos el 24,4% utilizó el recurso de lápiz y papel, mientras que del 15,5% de los que utilizó las cajas, ninguno utilizó el recurso de lápiz y papel.

Tabla XI Distribución según el desempeño de los niños de 12 años al resolver las Tareas

Tareas	Usa de Listas		Uso de Cajas		Total
	Escribe	No Escribe	Escribe	No Escribe	
Moda	33,3%	60,0%	0,0%	6,7%	100%
Mediana	26,7%	53,3%	0,0%	20,0%	100%
Media Aritmética	13,3%	66,7%	0,0%	20,0%	100%
	24,4%	60,0%	0,0%	15,6%	100%
	84,4%		15,5%		
	24,4%		75,6%		

El desempeño de los niños y niñas de esta edad, en lo que concierne a las estrategias utilizadas en cada una de las tres tareas que enfrentaron se presentan en los gráficos 15, 16 y 17 a continuación.

Es de notar la forma como van disminuyendo los porcentajes en términos de las estrategias, encontrándose mayor afinidad con las dos primeras estrategias, aunque la primera no resulta para nada exitosa. Para el caso de la tarea de la Mediana los porcentajes se vuelcan hacia la segunda estrategia con un porcentaje alto de éxito, para

finalmente, en la tarea de la Media Aritmética mantenerse en esta estrategia pero con un porcentaje de éxito casi nulo.

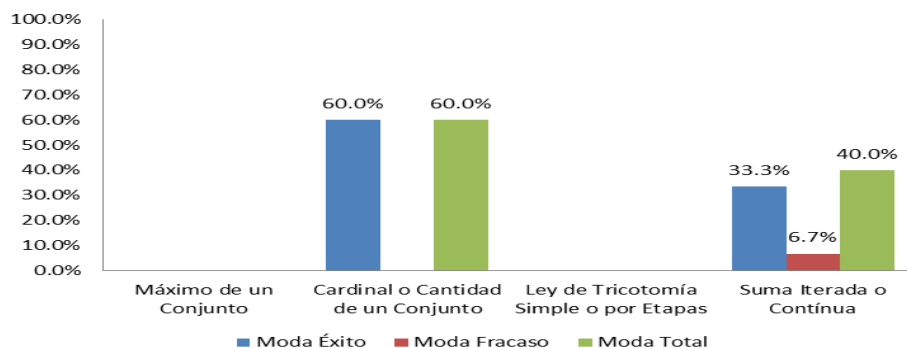


Gráfico 15 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 12 años en la tarea de la Moda.

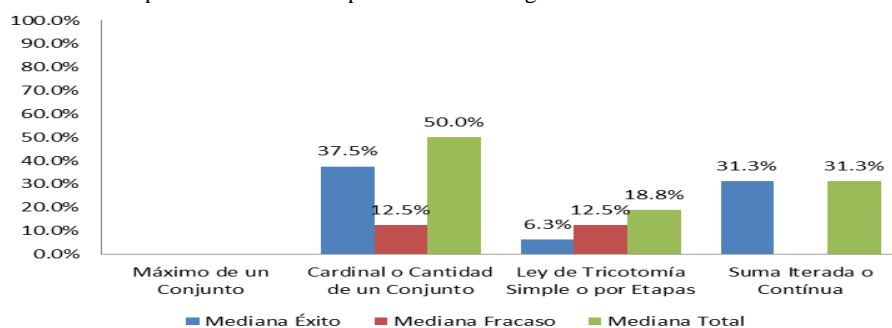


Gráfico 16 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 12 años en la tarea de la Mediana

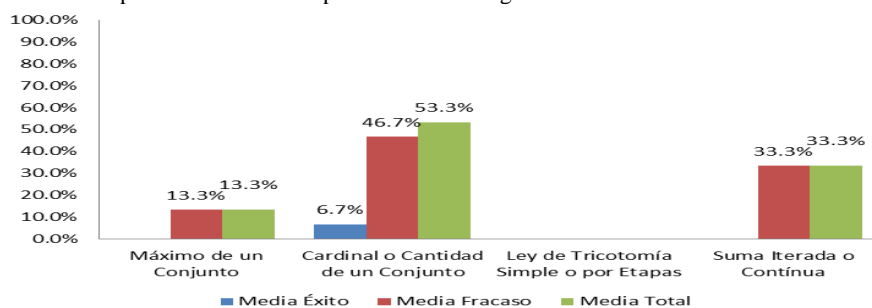


Gráfico 17 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 12 años en la tarea de la Media Aritmética

6.9 Resultados de desempeño para niños y niñas de la fase etaria de 13 años

Los 10 niños que pertenecieron a esta fase presentaron como características relevantes, que se encontraban en el rango de edad de los 12,52 a los 13,5 años, con un promedio de 13,22 años; el 50% eran de género masculino; su grado de escolaridad

osciló entre 7° y 8° grado de educación básica, y un 60,0% eran de la ciudad de Popayán y el resto de la ciudad de Cali.

Al igual que los niños y niñas de la fase etaria anterior, para resolver las tareas, hicieron uso de los medios disponibles en la situación, como se observa en la Tabla XII; el 93,3% utilizó las listas para resolver la tarea y de ellos el 53,3% utilizó el recurso de lápiz y papel, mientras que del 6,7% de los que utilizó las cajas, ninguno, como en el caso anterior, utilizó el recurso de lápiz y papel.

Tabla XII Distribución según el desempeño de los niños de 13 años al resolver las Tareas

Tareas	Usa de Listas		Uso de Cajas		Total
	Escribe	No Escribe	Escribe	No Escribe	
Moda	80,0%	20,0%	0,0%	0,0%	100%
Mediana	50,0%	40,0%	0,0%	10,0%	100%
Media Aritmética	30,0%	60,0%	0,0%	10,0%	100%
	53,3%	40,0%	0,0%	6,7%	100%
	93,3%		6,7%		
	53,3%		46,7%		

El desempeño de los niños y niñas de esta edad, en lo que concierne a las estrategias utilizadas en las tres tareas que enfrentaron se presentan en los gráficos 18, 19 y 20 a continuación.

Es de notar la forma como los porcentajes de éxito se evidencian significativos para las estrategias utilizadas en las tareas de la Moda y la Mediana, pero en el caso de la Media Aritmética, se observa un fracaso total con todas las estrategias utilizadas.

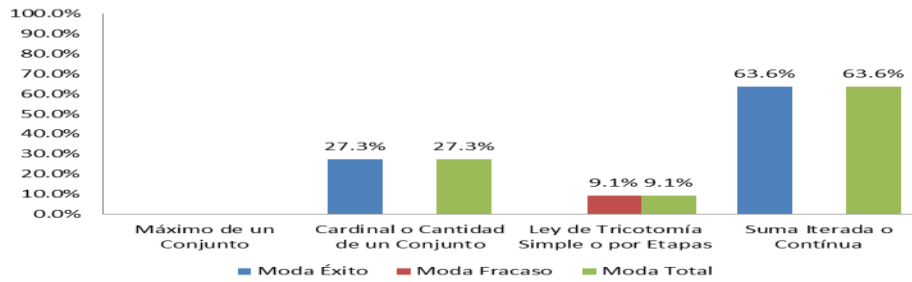


Gráfico 18 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 13 años en la tarea de la Moda.

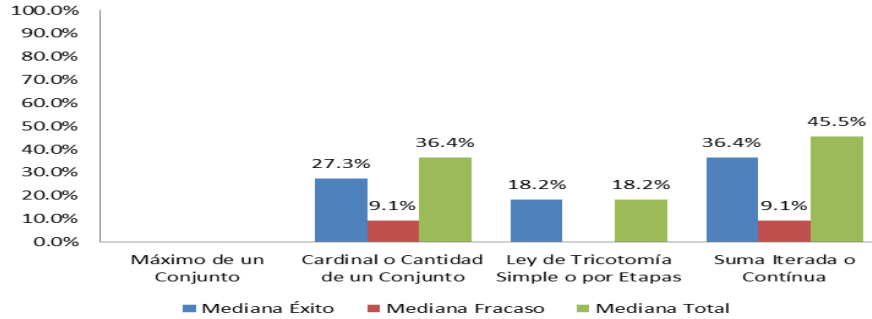


Gráfico 19 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 13 años en la tarea de la Mediana

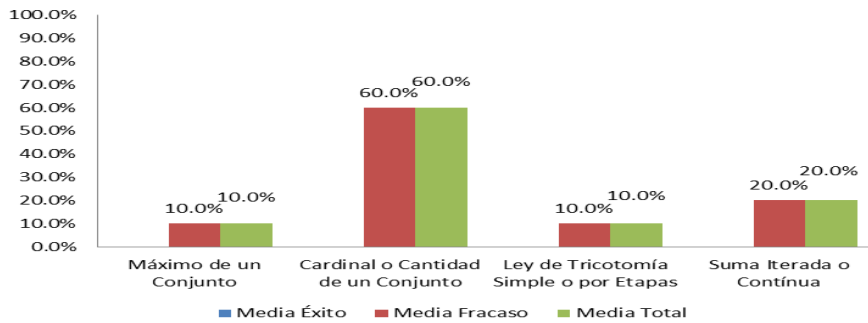


Gráfico 20 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 13 años en la tarea de la Media Aritmética

6.10 Resultados de desempeño para niños y niñas de la fase etaria de 14 años

Los 13 niños que pertenecieron a esta fase presentaron como características relevantes, que se encontraban en el rango de edad de los 13,80 a los 14,84 años, con un promedio de 14,35 años; el 46,2% eran de género masculino; su grado de

escolaridad osciló entre 8° y 9° de primaria, y un 46,2% eran de la ciudad de Popayán y el resto de la ciudad de Cali.

Al igual que los niños de las fases anteriores, para resolver las tareas, hicieron uso de los medios disponibles en la situación, como se observa en la Tabla XIII, el total de los niños de esta fase utilizó las listas para resolver la tarea y de ellos el 35,9% utilizó el recurso de lápiz y papel.

Tabla XIII Distribución según el desempeño de los niños de 14 años al resolver las Tareas

Tareas	Usa de Listas		Uso de Cajas		Total
	Escribe	No Escribe	Escribe	No Escribe	
Moda	23,1%	76,9%	0,0%	0,0%	100%
Mediana	53,8%	46,2%	0,0%	0,0%	100%
Media Aritmética	30,8%	69,2%	0,0%	0,0%	100%
	35,9%	64,1%	0,0%	0,0%	100%
	100%		0,0%		
	35,9%		64,1%		

El desempeño de los niños y niñas de esta edad, en lo que concierne a las estrategias utilizadas en las tres tareas que enfrentaron se presentan en los gráficos 21, 22 y 23 a continuación.

Es evidente la forma como los porcentajes de éxito muestran el desempeño de las niñas y niños de esta fase etaria en las tareas de la Moda y la Mediana, dejando ver también la dificultad en el caso de la tarea de la Media Aritmética, aunque aparecen porcentajes éxitos mínimos en algunas estrategias.

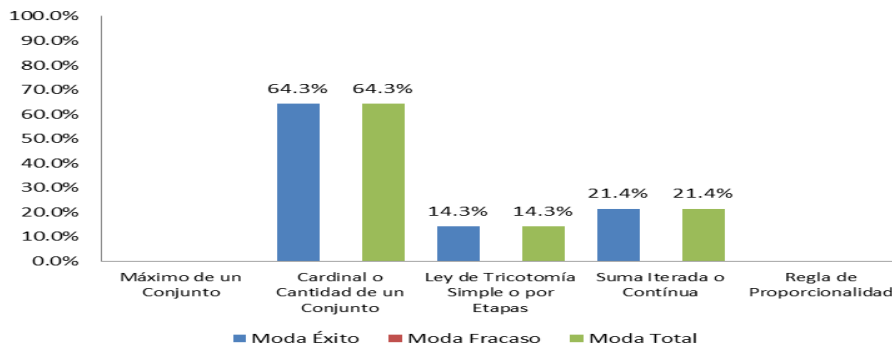


Gráfico 21 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 14 años en la tarea de la Moda.

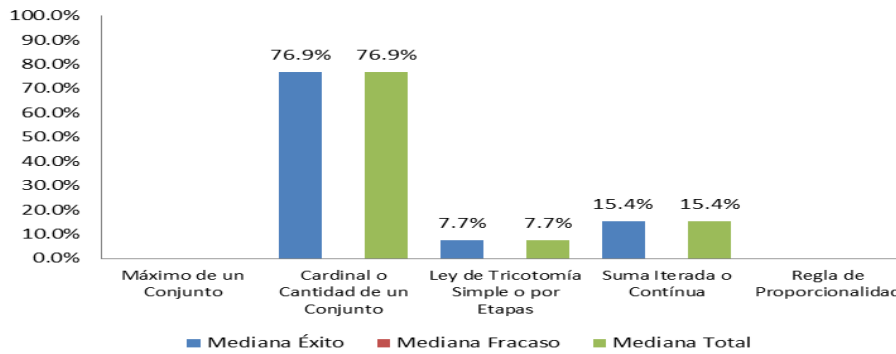


Gráfico 22 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 14 años en la tarea de la Mediana

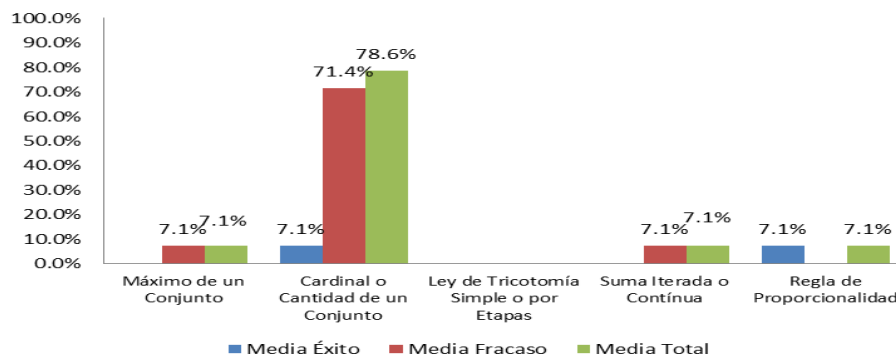


Gráfico 23 Distribución porcentual del desempeño de las estrategias de los niños de 14 años en la tarea de la Media Aritmética

6.11 Resultados de desempeño general de los niños y niñas

La información anterior permite observar la forma en que las estrategias del grupo de niños y niñas de estas fases etarias fueron desarrolladas en correspondencia con su

edad y la complejidad asociada, es así como se encuentran desempeños diferentes y que además varían de acuerdo con la tarea.

Al observar los gráficos 24, 25 y 26, se puede notar como el desempeño de los niños y niñas se va incrementando con la edad, el uso de estrategias más complejas y la distribución de los datos de la tarea.

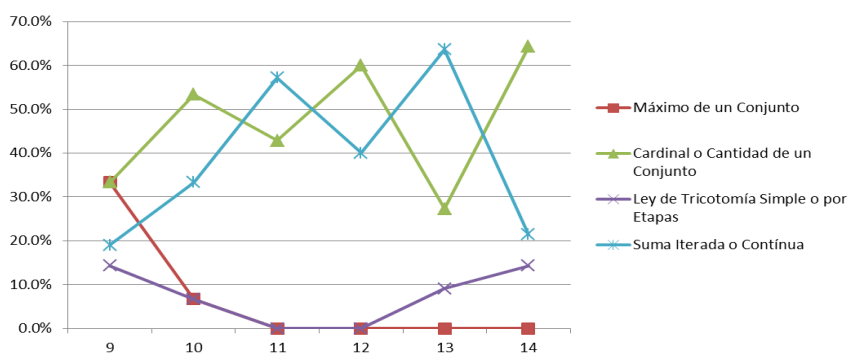


Gráfico 24 Desempeño General Tarea de la Moda

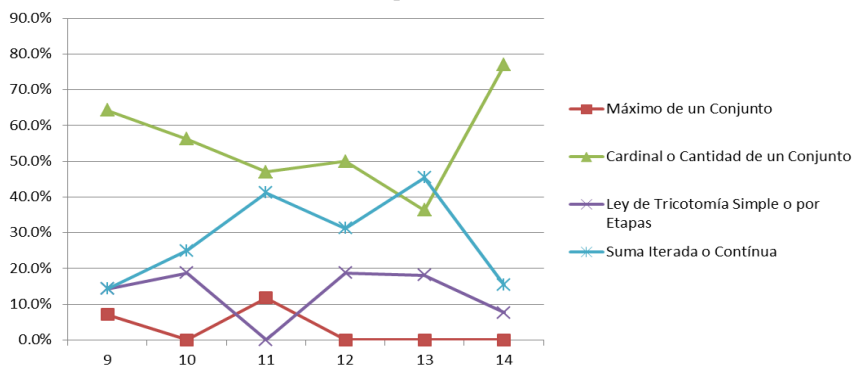


Gráfico 25 Desempeño General Tarea de la Mediana

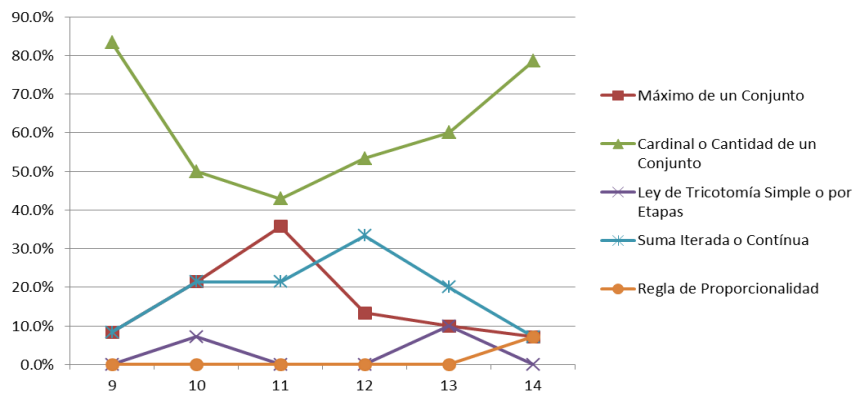


Gráfico 26 Desempeño General Tarea de la Media

En las estrategias de menor nivel de complejidad, desarrolladas por los niños y niñas más pequeños, aparece la utilización de argumentos deductivos más que inductivos, dejando evidencias de su inconformidad al tener que utilizar éste último tipo de argumentos requeridos por la situación de incertidumbre (Fernández Berrocal, 2004); ayudando a que se explique el hecho de que las primeras estrategias comenzaran presentando dificultad para la identificación de la consigna dejando aparecer una especie de heurísticas de representatividad (Kanheman, Slovic, & Tversky, 1982; Tversky & Kahneman, 1974) al asociar los elementos de la tarea a una consigna más sencilla (calcular el valor máximo de un conjunto de datos), o con situaciones de su cotidianidad (“*porque es la marca que compra mi papá*”).

De igual forma, el desempeño de los niños, en términos de identificar adecuadamente la consigna de la tarea, estuvo caracterizada por intentos iniciales de responder a una adivinanza, en el caso de los niños más pequeños, la cual iba cambiando por argumentos utilizados con mayor seguridad en los niños más grandes y

que se asociaban cada vez más con la consigna de la tarea, lo que indica el inicio de un proceso de toma de conciencia en el desarrollo de su proceso de aprendizaje, inicio determinado por Piaget (1967 (1983)) como la segunda condición esencial para pasar del plano sensorio–motor al plano reflexivo del pensamiento.

Apoyados en el punto de vista de Piaget (1959), consideramos la inteligencia como una forma de adaptación del organismo a las demandas del medio, siendo la adaptación y la organización invariantes funcionales de los seres vivos; lo que permite denominar “esquema” a la estructura intelectual involucrada en las relaciones que los niños establecieron con las tareas, consideradas en si mismas acciones o manifestaciones de la inteligencia de la cual, muchos niños no mostraron tener necesariamente conciencia; evidenciando que se trata de un saber hacer que precede a la comprensión, la cual puede originarse a partir de reconstrucciones que no son producto de la iluminación, sino que representan el paso de la asimilación práctica a una asimilación por medio de conceptos (Piaget, 1976; Piaget & Beth, 1961).

Esta toma de conciencia parte de los resultados exteriores de la acción para luego centrarse en la evaluación de los medios empleados y finalmente en las coordinaciones generales, es decir, en los mecanismos centrales, generalmente inconscientes, de la acción.

CONSIDERACIONES FINALES

Al comenzar estos estudios teníamos la creencia de que los aportes de este trabajo estarían señalando el camino hacia donde los investigadores debían dirigirse y daría elementos para cambiar la visión de la forma como debería adelantarse el trabajo de investigación respecto de los conceptos estadísticos.

Hoy, cuando acabamos la escritura de este documento, me encuentro convencido que estos aportes serán lineamientos que guiarán mi trabajo futuro y lo que puedo aportar para mejorar las condiciones actuales en las que el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Estadística se encuentran, al menos en la cercanía del territorio donde me encuentro.

Así las cosas, he planteado consideraciones finales en función de los objetivos propuestos en este trabajo como se desarrollan a continuación.

1 Consideraciones en relación al primero objetivo

Diseñar, construir, y validar, a partir de una situación problema, tareas cognitivas para el estudio de la comprensión de los conceptos estadísticos elementales de moda, mediana y media aritmética

El trabajo que durante todo el desarrollo de los estudios de doctorado se dio, en lo que se refiere a la práctica con tareas, desde su revisión en las actividades de los grupos de investigación que soportan el doctorado, pasando por largas horas de observación de videos, hasta los ejercicios de diseño e implementación de las mismas, con aplicación a niños y niñas pequeños, lo que implicó el acercamiento a los fenómenos cognitivos, son garantía de que la propuesta de diseño, prueba e implementación de las tareas utilizada en este trabajo, además de garantizar originalidad, produjera los resultados que son el sustento empírico de esta investigación.

Las tareas inicialmente fueron diseñadas en dos contextos, cajas de fósforos y fichas, durante el desarrollo del seminario de investigación de tal forma que la prueba de estas, además de permitirnos decidir por el primer contexto, ayudó en establecer la claridad de las consignas empleadas de tal forma que permitieron que los niños y niñas participantes pudieran desempeñarse y alcanzar una solución a la situación, dejando que las acciones y manifestaciones de cada uno pudieran ser recuperadas y organizadas para la determinación de las estrategias subyacentes descritas en este trabajo.

2 Consideraciones en relación al segundo objetivo

Describir el desempeño de los niños al resolver las tareas que involucran en su solución los conceptos estadísticos elementales de tendencia central moda, mediana y media aritmética.

Las propuestas educativas en lo que se refiere a los conceptos estadísticos han enfatizado diferentes condiciones para procurar que los estudiantes logren mayores

comprensiones y que los docentes perfeccionen sus métodos (Batanero C. , 2002; Batanero C. , 2001), mientras que por su parte, las investigaciones psicológicas han enfatizado en la caracterización del pensamiento estadístico en general (Fischbein, 1975; Piaget & Inhelder, 1951).

Haber presentado el desempeño del trabajo cognitivo de niños que, sin instrucción previa en estadística, atendieron las exigencias de un conjunto de tareas que exigían del uso de indicadores estadísticos de tendencia central, concretando esta caracterización en un conjunto de estrategias tan simples pero fundamentales para entender la génesis de estos conceptos, constituye un aporte para continuar el trabajo de comprensión de estos aspectos que son importantes en el avance del campo de la Educación Estadística.

Según Piaget (1976) todos los individuos tenemos dos grandes sistemas cognitivos: el sistema representativo, formado por esquemas y estructuras estables que sirven esencialmente a la comprensión, y el sistema procedimental, ligado a la acción. Los esquemas representativos se encuentran vinculados a conceptos y están ligados a la comprensión, siendo independientes de la relación directa con los objetos específicos. Los esquemas procedimentales, por su parte, se relacionan al hacer, a la acción práctica y están subordinados al contexto de utilización, aunque la mayoría de las veces permanecen sin acceso a la conceptualización, por lo que, para Piaget (1976) es tarea de los esquemas operatorios establecer la relación entre los esquemas representativos y los procedimentales.

Por ello se hace posible entender que los niños, al partir de conceptos cotidianos como “más grande que” o “mayor que” y a través de una situación problema, como la que se plantea en este trabajo, pueden alcanzar conceptos como máximo de un conjunto o, en lo que se refiere a la teoría de conjuntos, hacer aparecer el concepto de cardinal del conjunto y que este tránsito lleve hasta el cálculo de un total, sin intervención de ninguna propuesta de enseñanza, como lo reclama Fischbein (1975) para el concepto de probabilidad, hace evidenciar un proceso de psicogénesis del concepto de estadístico de tendencia central.

Aunque somos conscientes que se requiere de un trabajo adicional para pasar de los argumentos deductivos a los inductivos, necesarios para la construcción de la noción de azar (Piaget & Inhelder, 1951) que se requiere en la construcción del significado de los conceptos estadísticos de tendencia central, consideramos que la metodología adoptada en este trabajo puede aportar elementos para considerar la observación de fenómenos similares que desde la escuela asisten la articulación con el desarrollo del pensamiento estadístico general.

3 Consideraciones en relación al tercer objetivo

Caracterizar, en términos de estrategias, los esquemas mentales que los niños utilizan al resolver tareas que involucran en su solución los conceptos estadísticos elementales de moda, mediana y media aritmética.

Piaget (1978; 1976) describió tres niveles secuenciales y jerárquicos en el proceso de la conceptualización. El primero es el de la acción material sin ninguna

conceptualización, pero cuyo sistema de esquemas constituye un saber en sí. El segundo nivel es el de la conceptualización inicial, que obtiene sus elementos de la propia acción. En ese nivel, ocurre la transición entre el prodominio de las regulaciones automáticas de la acción y el de las coordinaciones inferenciales resultantes de la conceptualización, representando un período en que hay alternancia entre esas dos condiciones (Piaget, 1978). El tercer nivel corresponde al dominio de los esquemas conceptuales, en el cual el individuo se vuelve capaz de programar la acción a partir de los conceptos establecidos y de realizar operaciones de orden superior, vinculadas a conceptualizaciones, como abstracciones reflexivas a partir de abstracciones reflexionantes, teniendo como objeto no solo las situaciones involucradas en la formación de los conceptos sino también los procesos y posibilidades que a ellas se refieren.

El trabajo que finalmente se obtuvo al presentar 5 estrategias que en orden de complejidad van dando cuenta del desarrollo cognitivo de los niños y niñas desde los 9 hasta los 14 años en la construcción de los indicadores estadísticos de tendencia central, mostrando su variabilidad en el sentido que aunque se trabaje con las mismas variables de la tarea, la experiencia escolar adiciona condiciones que van fortaleciendo las relaciones entre estas variables y por ende el desarrollo de esta estrategia hasta lograr alcanzar sus límites requiriendo la incorporación de otras variables de la tarea que implican la construcción de una nueva estrategia de mayor nivel de complejidad, son muestra del trabajo realizado por los niños en términos de los niveles de conceptualización propuestos por Piaget (Piaget, 1978).

Es en este sentido que se entiende el alcance de este objetivo, debido a que para cualquiera de los indicadores estudiados en este trabajo, bajo la metodología expuesta y las restricciones consideradas, puede evidenciarse el desarrollo de los esquemas mentales que en términos de estrategias, como lo expresa Inhelder (1978), permiten el estudio de los procedimientos de resolución de problemas y garantizan un aporte a la comprensión del desarrollo de los conceptos aquí estudiados.

4 Consideraciones en relación al cuarto objetivo

Tipificar jerárquicamente, por su grado de complejidad en la elaboración, las estrategias de solución que los niños utilizan al resolver estas tareas

La intencionalidad relacionada con el objetivo a alcanzar y el reconocimiento de sus posibles resultados como fracaso o éxito, son condiciones establecidas a priori cuya génesis se encuentra, posiblemente, relacionada con la propia inteligencia práctica. En el caso de las acciones como resultado inmediato, pero con la toma de conciencia más tardía, sería difícil creer que los niños se limiten a conocimientos exclusivos de los objetos y de los resultados de la acción, sin ninguna conciencia de los medios empleados o de sus regulaciones. Ocurre que, como los alcances y correcciones sucesivas de los medios se realizan progresivamente, los estados momentáneos de conciencia fugaz que pudieran caracterizarlas no darían origen a una integración conceptual o representativa (Piaget, 1976).

El trabajo adelantado en las secciones 6.3.1 hasta la 6.3.5, en el cual se presenta la descripción de todas y cada una de las estrategias identificadas. Culminando con la construcción de las tablas V, VI y VII, que presentan el conjunto de las acciones que los niños y niñas, realizaron en el intento de solución de cada una de las tareas presentadas, son testimonio claro del alcance de este objetivo, toda vez que el desarrollo de este trabajo implicó horas interminables frente al computador para transcribir los videos al igual que otro tanto para revisar los argumentos textuales utilizados de tal forma que se pudiera conseguir la homogeneidad que diera paso a la simplificación y descripción de todas las estrategias identificadas.

Este tipo de trabajo, que regularmente no aparece descrito en los documentos finales, son los que aportan a los tesisistas los elementos de apego y “amor” al trabajo desarrollado, porque permiten entender ese esfuerzo inenarrable que hace parte del producto final expresado en términos de gráficos o tablas resumen de todo el proceso.

Finalmente, es imprescindible no dejar de expresar que somos conscientes que este trabajo no representa la panacea y que existen deficiencias que pueden y deben ser consideradas en los nuevos proyectos que a futuro se generarán como continuación de este trabajo. Deficiencias como por ejemplo no haber considerado que el problema involucra una comparación de distribuciones lo que lo hace de mayor dificultad para el estudio propuesto, al igual que el no haber involucrado la segunda situación y analizar el efecto en lugar de haber tomado la decisión de descartarlo para facilitar el trabajo final.

Pueden ser muchas otras las deficiencias a señalar, y estamos comprometidos en procurar sus correcciones a futuro, conscientes de que las oportunidades serán cada vez más y la conciencia, así como el apego a este trabajo redundaran como el combustible necesario para continuar este proceso.

No podría terminar este trabajo sin hacer referencia al hecho de que la propuesta de trabajar una psicología del conocimiento en procura de mejorar el desempeño de la práctica de la docencia, se convertirá en un bastión de trabajo que hoy en día hace parte de mi convicción como Educador Estadístico.

CONCLUSIONES

Las estrategias elaboradas por los niños y niñas de la fase etaria 9 a 14 años para la solución de las tareas, resultaron más efectivas para resolver las tareas de la Moda y la Mediana, debido a que para ello se reducía la importancia de tener en cuenta la cantidad de datos comparados, lo que facilitó el trabajo con valores absolutos o con datos individuales. La disminución de este éxito para la tarea de la Mediana, es justificable por la modificación en la distribución de los datos, dejando evidencia de su influencia en términos de la información que aportan en la situación.

Esas mismas estrategias fracasaron al hacer comparaciones en la tarea de la Media Aritmética puesto que además de contar con diferente cantidad de datos en cada grupo, la distribución de los datos también tuvo su influencia.

El cambio necesario en las estrategias para alcanzar la solución de cada una de las tareas, evidencia un avance significativo en el desarrollo cognitivo de los niños y niñas para la comprensión de los indicadores de tendencia central, porque mientras las primeras estrategias centran la atención en una sola variable, la cantidad de contenido de una caja, el fracaso obliga a trabajar con base en dos variables: la cantidad de contenido de una caja y la cantidad total de fósforos del conjunto, logrando la

incorporación de más información del conjunto, pasando a mirar un total como lo exigen los métodos estadísticos.

Aunque el estudio fue realizado con estudiantes de 4^a a 9^o grado de enseñanza media, lo que supone una historia de escolarización de los niños y niñas, la interacción de estos estudiantes con el conocimiento matemático, durante su formación escolar, se presentó como instrumento para la resolución de las situación propuesta.

Una prueba de esta afirmación, y que llama la atención, son los ejemplos de aplicación de los algoritmos de solución de problemas en el sentido de la simplificación consecutiva de cálculos hasta conseguir obtener un solo valor, como ocurre en la aplicación de la estrategia de la suma en la cual el estudiante culmina en una resta, posterior al proceso de suma de los datos de cada grupo, aunque no indica el significado que tiene ese resultado en el contexto del problema, simplemente se limita a expresar el resultado último, sin hacer referencia a la pregunta que plantea el problema.

En esta dirección, es posible señalar que la génesis de los conceptos estadísticos tiene asidero en nociones previas involucradas en los cursos de matemáticas escolares como se evidencian en la descripción de las estrategias elaboradas por los niños y niñas de esta fase etaria que no cuentan con conocimientos estadísticos previos, como por ejemplo la noción de dato, frecuencia absoluta, el concepto de variable y la aleatoriedad o el azar.

Éstas nociones se van ligando a la necesidad de interpretación de los datos en relación con el problema que los generó para dar paso a la constitución del concepto inicial de “representante de un grupo”, el cual debe considerar el aporte de los elementos que componen la totalidad y dar cuenta de las características generales del conjunto, lo que implica un concepto de mayor elaboración: “indicador de tendencia central”

Así, podemos decir que con este trabajo se complementa la información de la literatura internacional sobre Educación Estadística, desde aquellos de los años de 1980 (Pollatsek, Lima, & Well, 1981; Mevarech, 1983) que como dijimos antes evidenciaron los errores presentados en la resolución de problemas que involucran conceptos estadísticos elementales que se relacionan con el desarrollo de la comprensión de algunas propiedades matemáticas del concepto de media aritmética, con creencias equivocadas y conocimientos ya adquiridos que operaban como obstáculos.

Del mismo modo, estos datos son compatibles con los estudios de la Psicología de la Educación Matemática, que han insistido en defender, como lo hace Fávero (1999; 2007; 2009a; Fávero M. H., 2009), que, detrás de ese hecho hay dos cuestiones centrales: la ruptura entre conocimiento científico y el pensamiento filosófico y una práctica de enseñanza en la cual la memorización de reglas tienen primacía sobre la comprensión conceptual.

La cuestión de notación del algoritmo matemático y del registro de las tentativas de solución en las situaciones de resolución de problemas vienen siendo bastante estudiadas, una vez que, como evidenció un estudio previo (Riascos Forero & Fávero, 2010), ella explica la manera como la educación formal lidia con el conocimiento matemático, en por lo menos dos aspectos: la naturaleza de su mediación y la competencia de los profesores. La cita abajo resalta tales aspectos:

En verdad, detrás de estas cuestiones de escolarización está la relación entre los conceptos y los sistemas de signos usados en el pensamiento y en la comunicación (...) La inserción del individuo, sea niño, adolescente o adulto, presupone la interacción de este individuo con los instrumentos de representación del conocimiento humano ya institucionalizados (Fávero & Soares, 2002, pág. 48)

Los datos obtenidos, corroboran esta discusión, aunque presenten algunas particularidades.

En la experiencia como docentes e investigadores hemos llegado a concluir que todavía es común pensar en que “la ciencia” –ciencias exactas, ciencias naturales, ciencias humanas y ciencias sociales– y “la filosofía” constituyen dos actividades separadas, tanto en su terminología como en las prácticas profesionales e institucionales.

Esta ruptura fundamenta una concepción que el medio educativo y la sociedad en general mantienen sobre la ciencia, al concebirla como un conjunto de conocimientos separados en diferentes áreas. Concepción que fundamenta a su vez una idea

equivocada de una ciencia exacta y acabada y que como tal debe ser transmitida a los estudiantes (Fávero M. H., 2005).

De forma similar, la investigación sobre la relación entre esa concepción del conocimiento, las áreas del conocimiento y la práctica de la educación, se ha referido a la permanencia de la idea de que el desempeño de los estudiantes depende, sobre todo, de su motivación intrínseca y de su capacidad para aprender, ya sean niños, adolescentes o adultos (Fávero M. H., 1999; Riascos Forero & Fávero, 2010), o individuos sanos con necesidades educativas especiales (Fávero & Pimenta, 2006).

Estas representaciones del conocimiento científico, por un lado y otro, son representaciones de lo que sería un buen estudiante, que se fundamentan en una práctica de enseñanza en la que la memorización de reglas tiene prioridad sobre la comprensión conceptual impidiendo el desarrollo de competencias conceptuales y del pensamiento crítico en relación al propio conocimiento, sin olvidar que aunque existen representaciones de los conocimientos científicos y representaciones que se basan en la práctica, lo contrario: representaciones de los conocimientos científicos y representaciones de lo que es un buen estudiante, siempre fundamentan una práctica.

También en lo concerniente al campo de la didáctica, los resultados obtenidos en esta investigación acompañan las tesis desarrolladas desde los años 1990 (Batanero, Godino, & Navas, 1997) acerca de la importancia del conocimiento didáctico de la estadística en la formación de profesores para los niveles de básica, toda vez que el

desconocimiento de las fuentes de los obstáculos cognitivos (Bachelard, 2004; Brousseau, 1986), que presentan los estudiantes al enfrentar problemas de esta naturaleza, no pueden ser comprendidos a partir del reconocimiento de la estadística como una parte de las matemáticas sino considerando que los objetos de la estadística responden a principios epistemológicos diferentes.

Finalmente, también puede señalarse el aporte que estos resultados proponen para las investigaciones acerca del desarrollo del concepto de media aritmética (Watson & Moritz, 1999; Watson & Moritz, 1999b; Watson & Moritz, 2000), al proponer una génesis de los conceptos estadísticos planteando como instrumentos los conceptos matemáticos previos y su transformación a partir de generalización y toma de conciencia, que permiten la aparición, en las estrategias, de estos concepto estadísticos. Así como ocurre con el trabajo desarrollado en la dirección de los marcos de evaluación del pensamiento estadístico (Jones, Mooney, Langrall, & Thornton, 2002; Jones, y otros, 2000; Jones, Langrall, Mooney, & Thornton, 2004) que marcan un derrotero hacia la comprensión de los problemas de enseñanza y aprendizaje de la Estadística.

ANEXOS

Anexo 1. Formato de Rejilla de Registro utilizada en la investigación

Código : 02092141 Edad : 8,48 años Colegio : 2 Ciudad : 1
 Nombre : Carolina Grado : 4º Tarea : 1

Preguntas de entrevistador	Configuración	Respuestas verbal del niño	Acciones del niño	Secuencia de acciones para elegir la marca	Estrategia
¿Cuál es la marca que trae más fósforos en sus cajas que la otra?	Dos listas con los contenidos de fósforos de las marcas P y S	Las dos traen igual porque la (cantidad) que más sería es 41 y ambas traen 41, entonces traen iguales	Coloca las listas S y P una al lado de la otra, mira los numerales y señala el mayor (41) en una y otra lista.	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Señala numeral mayor (41) en lista S. ✓ Señala numeral mayor (41) en lista P ✓ Compara numerales entre listas 	<p>Máximo de un conjunto</p> <p> </p> <p>Cardinal o cantidad de un conjunto</p>
Si tuvieras que escoger una marca ¿cuál escogerías?	S 40, 39, 40 40, 40, 38 39, 38, 41	Escojo esta (P)		<ul style="list-style-type: none"> ✓ Señala numerales mayores (41 y 40) en lista S. ✓ Cuenta en forma independiente numerales mayores en lista S. 	
¿Por qué?	41, 40, 39 39, 39, 38 37, 40, 40 37, 40	No sé		<ul style="list-style-type: none"> ✓ Señala numerales mayores (41 y 40) en lista P. 	
Intenta escoger una marca teniendo en cuenta los valores, ¿cuál escogerías?	P 39, 37, 40 37, 40, 38 41, 39, 39 37, 37, 38 40, 39, 39 39, 40, 39 41, 39	Escojo esta (S)	Observa una y otra lista, y señala S	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Cuenta en forma independiente numerales mayores en lista P. ✓ Compara cantidad de numerales entre listas ✓ Elige marca con más cantidad de numerales mayores 	
¿Cómo sabes que esa marca es la que tiene las cajas con más contenido que la otra?		Porque es una marca nueva para mí y... tiene más números mayores aquí y en todo lado: de 41 tiene 2 y de 40 tiene 9... no, tiene 10 (se equivoca) y ésta (P) de 41 tiene 2 y de 40 tiene 4. Entonces escojo ésta (S) por los números mayores	En S, señala y cuenta en forma separada numerales 41 y 40 En P, señala y cuenta en forma separada numerales 41 y 40 Compara en forma separada los conteos y elige la marca que tiene más valores 40.		

BIBLIOGRAFÍA.

- Álvares, H. R. (22 de junio de 2003). Pensamiento Estadístico en Mantenimiento. Cali, Valle del Cauca, Colombia.
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivo y didácticos. En P. Gómez, & P. Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (págs. 97-140). Bogotá: Empresa Docente & Grupo Editorial Iberoamericana.
- Bachelard, G. (2004). *La formación del espíritu científico* (25a. Edición en Español ed.). (J. Babini, Trad.) México: Siglo XXI Editores S. A.
- Bakhtin, M. (1981). *Marxismo e Filosofia da Linguagem*. (Les Éditions de Minuit 1977 ed.). (M. Lahud, & Y. F. Vieira, Trads.) São Pablo: Ucitec.
- Bang, V. (1970 (1968)). El Método Clínico y la Investigación en Psicología del Niño. En J. d. Ajuriaguerra, F. Bresson, P. Fraise, L. Godmann, P. Gréco, & B. Inhelder, *Psicología y Epistemología Genéticas: Temas Piagetianos* (págs. 39-51). Buenos Aires: Proteo S.C.A.
- Barthes, R. (1992). *Elementos de Semiología* (Éléments de Sémiologie, Paris: Seuil 1964 ed.). (I. Bilkstein, Trad.) São Pablo: Editora Cultrix.
- Batanero, C. (2000). ¿Hacía dónde va la Educación Estadística? *Blaix* (15), págs. 2-13.
- Batanero, C. (2000). Controversies around the role of statistical tests in experimental research. (B. Greer, Ed.) *Mathematical Thinking and Learning* , 2 (1-2), 75-98.
- Batanero, C. (2000b). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *UNO* , 25, 41-58.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Universidad de Granada.
- Batanero, C. (2001). Presente y Futuro de la Educación Estadística. *Jornades europees d'estadística. L'ensenyament i la difusó de l'estadística* (págs. 431-441). Sant Feliu: Conselleria d'Economia, Comerç i Indústria. Govern de les Illes Balears.
- Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística*, (págs. 2-13). Buenos Aires.
- Batanero, C. (2003). Veinte años de conferencias internacionales de Educación Estadística. *27 Congreso Nacional de Investigación Operativa*.
- Batanero, C., & Diaz, C. (2003). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la Estadística. En J. P. Royo, *Aspectos didácticos de las matemáticas* (págs. 125-164). Zaragoza: ICE.
- Batanero, C., & Godino, J. D. (2001). *Análisis de Datos y su Didáctica*. Granada: Universidad de Granada.
- Batanero, C., & Godino, J. D. (2002). *Estocástica y su didáctica para Maestros*. Recuperado el 7 de 3 de 2006, de www.ugr.es/~batanero

- Batanero, C., & Godino, J. D. (2005). Perspectiva de la Educación Estadística como área de investigación. En R. Luengo, Línea de investigación en Didáctica de las Matemáticas (págs. 203-226). Badajoz, España: Universidad de Extremadura.
- Batanero, C., & Serrano, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones. UNO , 15-28.
- Batanero, C., Garfield, J. B., Ottaviani, M. G., & Truran, J. (2000). Investigación en Educación Estadística: Algunas Cuestiones Prioritarias. Statistical Education Research Newsletter , 1 (2), págs. 2-6.
- Batanero, C., Godino, J. D., & Navas, F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. En H. Salmerón (Ed.), VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa, (págs. 304-310). Granada.
- Batanero, C., Godino, J. D., Holmes, R., & Vallecillos, A. (1993). Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales. International Journal of Mathematics Education in Science and Technology , 25 (4), págs. 527-547.
- de Santos.
- Behar, R., & Grima, P. (2004). La Estadística en la Educación Superior: ¿Formamos Pensamiento Estadístico? Ingeniería y Competitividad , 5 (2), 7-18.
- Behar, R., & Yepes, M. (1988). Estadística Un enfoque descriptivo (2a. ed.). Cali: Universidad del Valle.
- Ben-Zvi, D., & Gardfiel, J. (2004). Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking: Goals, Definitions, and Challenges. En D. Ben-Zvi, & J. Gardfiel, The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking (págs. 3-16). Dordrecht, The Netherlands: Kluber Academy Publishers.
- Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1982). Evaluating the quality of Learning. The SOLO Taxonomy (Structure of the Observed Learning Outcome. New York: Academic Press.
- Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1991). Multimodal Learning and the Quality of Intelligent Behavior. En H. A. Rowe, Intelligence. Reconceptualization and Measurement (págs. 57-77). New Jersey: LEA ACER.
- Bourdieu, P. (1982). Ce que parle veutdire. Paris: Fayard.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques , 7 (2), págs. 33-115.
- Bruner, J. (1984). Acción, Pensamiento y Lenguaje. Madrid, España: Alianza Editorial.
- Bruner, J. (1991). Actos de Significado. Más allá de la revolución cognitiva. Madrid: Alianza Editorial.
- Calot, G. (1988). Curso de Estadística Descriptiva. (F. J. Sevilla, Trad.) Madrid, España: Paraninfo.
- Canavos, G. (1988). Probabilidad y Estadística: Aplicaciones y métodos. México: McGraw-Hill.
- Carretero, M., & García Madruga, J. A. (1984). Lecturas de Psicología del Pensamiento, Razonamiento, solución de problemas y desarrollo cognitivo. Madrid: Alianza Editorial.
- Cobb, P. (1986). Goals, Beliefs and Learning Mathematics. The Learning of Mathematics , 6 (2).
- Cobb, P. (1999). Individual and collective mathematical development: The case of Statistical Data Analysis. Mathematical Thinking and Learning , I (1), 5-43.

- Cobo, B. (2003). Significado de las Medidas de posición central para los estudiantes de secundaria. Granada: Universidad de Granada, Tesis doctoral.
- Cobo, B., & Batanero, C. (2000). La mediana en la educación secundaria obligatoria: ¿un concepto sencillo? UNO , 23, págs. 85-96.
- De la Torre, A. (2000). La modelización del espacio y del tiempo: su estudio vía el modelo de van Hiele. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.
- Delgado, C. A. (1998). Estudio microgenético del concepto de límite y continuidad. Barcelona: Universidad de Barcelona.
- Delgado, C. A. (2007). Fundamentos epistemológicos y didácticos para la enseñanza de conceptos matemáticos del conocimiento explícito al conocimiento implícito. En M. Trujillo, N. M. Castro, J. d. Guerrero, & C. A. Delgado, Bases epistemológicas y didácticas en la enseñanza del concepto de función con la ayuda de calculadoras graficadoras (págs. 6-65). Bogotá: Universidad de la Salle.
- Delgado, C., & Azcárate, C. (1996). Study of the evolution of graduated student's concept images while learning the notions of limit and continuity . Proceedings of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education , págs. 289-296.
- delMas, R. (2002). Statistical Literacy, Reasoning, and Learning: A Commentary. Journal of Statistics Education , 10 (3).
- Desrosières, A. (1996). Reflejar o Instituir: La invención de los indicadores estadísticos. Paris: Observatorio.
- Documento de discusión. (2006). Educación Estadística en la Matemática Escolar: retos para la Enseñanza y la Formación de Profesores. Union: Revista Iberoamericana de Educación Matemática (8), 63-75.
- Dubinsky, E. (1992). Reflective Abstractio in Advance Mathematical Thinking. En D. (. Tall, Advnaced Mathematical Thinking (págs. 95-121). London: Kluwer Academic Publisher.
- Duval, R. (2004). Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales (2a. ed.). (M. Vega Restrepo, Trad.) Cali: Universidad del Valle.
- Esteban, P. V. (2000). Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de van Hiele. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.
- Fávero, M. H. (1991). Psicologia: Passado, Presente e Futuro. Psicologia: teoria e pesquisa , 7 (2), 111-117.
- Fávero, M. H. (1995). A relação entre os conceitos de saúde, doença y morte: Utilização do desenho na coleta de dados. Psicologia Teoría e pesquisa , 11 (3), 181-191.
- Fávero, M. H. (1999). Desenvolvimento cognivo adulto e a iniciação escolar: a resolução de problemas e a notação das operações. Temas em Psicologia , 7 (1), 79-88.
- Fávero, M. H. (2001). Regulações cognitivas e metacognitivas do professor: uma questão para a articulação entre a psicologia do desenvolvimento adulto e a psicologia da educação matemática. En S. B. Matemática, & S. B. (Org.), Anais: Trabalhos Completos. I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática (págs. 187-197). Curitiba: Editora da UFPR.
- Fávero, M. H. (2005). Psicologia e conhecimento. Subsidios da psicologia do desenvolvimento para a análise de ensinar e aprender. Brasília: Universidade de Brasília.

- Fávero, M. H. (2007). Paradigme pesonnel et camp conceptuel: implications pour les situations didactiques . En M. (. Merri, *Activité Humaine et Conceptualisation* (págs. 625-634). Toulouse: Presses Universitaires du Mirail.
- Fávero, M. H. (2009). La psicología del concimiento y la construcción de competencias conceptuales en la escuela. *Revista internacional Magisterio* (39), 18-22.
- Fávero, M. H. (2009a). Introdução: Os fundamentos teóricos e metodológicos da Psicologia do Conhecimento. En M. H. Fávero, & C. da Cunha, (Org.), *Psicologia do Conhecimento: O diálogo entre as ciências e a cidadania* (págs. 9-20). Brasilia: UNESCO, Instituto de Psicologia da Universidade de BRasília, Liber Livro Editora.
- Fávero, M. H. (2010). *Psicologia do Género: Psicobiografia, sociocultura e transformacones*. Curitiba, Paraná, Brasil: Editora UFPR.
- Fávero, M. H., & Pimenta, M. L. (2006). Pensamento e linguagem: a lingua de sinais na resolucao de problemas. *Psicologia: Reflexao & Critica* , 19 (2), 225-236.
- Fávero, M. H., & Soares, C. M. (2001). A resolução de problemas em física: Revisão de pesquisa, análise e proposta metodológica. *Investigações em ensino de ciências* , 6 (2), 143-196.
- Fávero, M. H., & Soares, C. M. (2002). Iniciação escolar e notação numérica: uma questão para o estudo do desenvolvimento adulto. *Psicologia Teoria e Pesquisa* , 43-50.
- Fávero, M. H., & Trajano, A. A. (1998). A leitura do adlolescente: mediação semioticae compreensão textual. *Psicologi: Teoria e Pesquisa* , 1, 131-136.
- Fernández Berrocal, P. (2004). Razonamiento Probabilístico. En M. Carretero, & M. Asensio, *Psicologia del Pensamiento* (págs. 101-122). Madrid, España: Alianza Editorial.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. New Yoork: Dordrecht: D. Reidel.
- Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education* , 28 (1), 96-105.
- Fischbein, E., Tirosh, D., & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics* , 10, 2-40.
- Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: a new area of cognitive-development inquiry. *American Psychologist* , 34 (10), 909 - 911.
- Font, V. (2002). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en Didáctica de las Matemáticas. *Representation in Mathematics Education* .
- Friel, S. N., Bight, G. W., Frierson, D., & Kader, G. D. (1997). A framework for assessing knowledge and Lerning in Satistics (K-8). En I. Gal, & J. Garfield, *The Assessment challenge in Statistics Education* (págs. 55-63).
- Gal, I. (2004). Statistical Literacy: meanings, components, responsibilities. En D. Ben-Zvi, & J. Garfield, *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (págs. 47 - 78). Londres: Kluwer Academic Publishers.
- García Alonso, I., & García Cruz, J. A. (2004). La Media Aritmética. *Formación de Profesores e Investigadores en Educación Matemática* , 6, 197-217.
- García, R. (2000). *El Conocimiento en Construcción: De las formulaciones de Jean Piaget a la teoría de sistemas complejos*. Barcelona, España: Gedisa.
- Garfield, J. B. (1994). Beyond Testing and Grading: Using Assessment To Improve Student Learning. *Journal of Statistics Education* , 2 (1).

- Garfield, J. B. (1995). How Students Learn Statistics. *International Statistical Review* , 63 (1), págs. 25-34.
- Garfield, J. B., & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in statistics: Implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education* , 19 (1), 44-63.
- Garfield, J. B., & Gal, I. (1999). Assessment and Statistics Education: Current challenge and Directions. *International Statistical Review* , 67 (1), 1-12.
- Garfield, J. B., & Gall, I. (1997). *The Assessment Challenge in Statistical Education*. Oxford: IOS Press.
- Gattuso, L. (2006). Statistics and Mathematics. Is it possible to create fruitfull links? En A. Rossman, & B. (. Chance, *Proceeding of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador (Bahía): IASE and ISI.
- Gattuso, L., & Mary, C. (1998). Development of the concept of weighted average among high-school children. *Proceedings of the 5th International Conference on Teaching of Statistics*, (págs. 686-692). Singapore.
- Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Gigerenzer, G. (2007). *Decisiones Instintivas: La inteligencia del inconsciente* (Primera edición, marzo de 2008 ed.). Barcelona: Ariel.
- Godino, J. D. (1995). Qué aportan los ordenadores a la enseñanza y aprendizaje de la estadística? *UNO* (5), 45-56.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque Ontológico y Semiótico de la Cognición Matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* , 22 (23), 237 - 284.
- Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de las Matemáticas. En A. Estepa, Á. D. Contreras, M. C. Penalva, F. J. García, & L. Ordoñez, *Investigación en Educación Matemática XVI* (págs. 49 - 68). Jaén, España: Jaén: SEIEM.
- Godino, J. D., Batanero, M. d., & Cañizares, M. d. (1991). *Azar y Probabilidad*. Madrid, España: Síntesis.
- Gutiérrez, C. S. (1983). *Filosofía de la Estadística*. Madrid: Tebar Flores.
- Hacking, I. (1995). *La Domesticación del Azar: La erosión del determinismo y el nacimiento de las ciencias del caos*. (A. L. Bixio, Trad.) Barcelona, España: Gedisa.
- Inhelder, B. (1978). Las estrategias cognitivas: Aproximación al estudio de los procedimientos de resolución de problemas. *Anuario de Psicología* (18), 3-20.
- Inhelder, B., & de Caprona, D. (2007). Hacia un constructuivismo psicológico: ¿Estructuras? ¿Procedimientos? Los dos indisociables. *CPU-e, Revista de investigaciones Educativas* (4), 1-66.
- Inhelder, B., & Karmilloff-Smith, A. (1974-1975). If you want to get ahead, get a theory. *Cognition* , 195-212.
- Inhelder, B., & Piaget, J. (1955). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente* (Primera reimpression en España, 1985 ed.). (M. T. Cevasco, Trad.) París, Francia: Presses Universitaires de France.
- Inhelder, B., Sinclair, H., & Bovet, M. (1974 (1975)). *Aprendizaje y estructuras del conocimiento*. (L. E. Rivera, Trad.) Madrid, España: Morata.

- Inzunza, S. (2006). Significado que estudiantes universitarios atribuyen a las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional y estadística dinámica. México: CINVESTAD (Tesis doctoral).
- Jhonson-Lair, P. N. (1990). *El Ordenador y la Mente: Introducción a la ciencia cognitiva*. Barcelona, España: Ediciones Paidós.
- Jones, G. A., Langrall, C. W., Mooney, E. S., & Thornton, C. A. (2004). Models of Development in Statistical Reasoning. En D. Ben-Zvi, & J. Garfield, *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (págs. 97-118). Netherland: Kluwer Academic Publishers.
- Jones, G. A., Mooney, E. S., Langrall, C. W., & Thornton, C. A. (2002). Students' Individual and Collective Statistical Thinking. *Proceedings of the 6th International Conference on Teaching of Statistics*. Ciudad del Cabo: IASE. CD ROM.: B. Phillips (Ed.).
- Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W., Mooney, E. S., Perry, B., & Putt, I. J. (2000). A framework for characterizing Children's Statistical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 2 (4), 269-307.
- Kamii, C. (1995). *El número en la Educación Primaria* (4a. ed.). (E. Martín, & A. Moreno, Trads.) Madrid, España: Visor Distribuciones S.A.
- Kanheman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.
- Kant, I., & Larroyo, F. (1996). *Crítica de la Razón Pura* (9 ed.). México: Porrúa.
- Kirchner, S. R., Stoltz, T., & Pasos, V. (2008). Da tomada de consciência à metacognição. En S. R. Kirchner, & T. Stoltz, *Tomada de consciência e conhecimento metacognitivo* (págs. 13 - 28). Curitiba - Brasil: UFPR.
- Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics come from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York, United State: Basic Books.
- Langrall, C. W., & Mooney, E. S. (2002). The Development of a Framework character. *Proceedings of the 6th International Conference on Teaching of Statistics*. Ciudad del Cabo: IASE. CD ROM.: B. Phillips (Ed.).
- Lavigne, N. C. (1999). *Project based investigations for producing and critiquing statistics*. Montreal: McGill University.
- Lepore, E., & Pylyshyn, Z. W. (1999). *¿Qué es la Ciencia Cognitiva? Una visión multidisciplinaria*. (V. Madrigal Hernández, Trad.) México: Oxford University Press.
- Lotman, Y. M. (1988). The semiotic of culture and the concept of a text. *Soviet Psychology*, 26 (3), 55-58.
- Madruga, J. A., & La Casa, P. (1995). Processos cognitivos básicos nos anos escolares. En C. Coll, P. Javier, & A. Marchesi, *Desenvolvimento psicológico e educação: Psicologia evolutiva* (Vol. 1, págs. 205 - 218). Porto Alegre, Brasil: Artes Médicas.
- Martín, E., & Marchesi, A. (1995). Desenvolvimento metacognitivo e problemas de aprendizagem. En C. Coll, J. Palacios, & A. Marchesi, *Desenvolvimento psicológico e educação: Necessidades educativas especiais e aprendizagem escolar* (Vol. 3, págs. 24-35). Porto Alegre, Brasil: Artes Médicas.
- Matalon, B. (1979). Epistemología de las Probabilidades. En J. Piaget, *Tratado de Lógica y Conocimiento Científico: III Epistemología de la Matemática* (pág. 197). Buenos Aires: Paidós.

- Mayén, S., Cobo, B., Batanero, C., & Balderas, P. (2007). Comprensión de las medidas de posición central en estudiantes mexicanos de bachillerato. *Union, Revista Iberoamericana de Educación Estadística* , págs. 187-201.
- Mayén, S., Díaz, C., & Batanero, C. (2009). Conflicto semiótico de estudiantes con el concepto de mediana. *Statistical Education Research Journal* , 8 (2), págs. 74-93.
- Mead, G. (1992). *Mind, Self and Society*. (C. W. Morris, Ed.) Chicago: University Chicago Press.
- Mendez Ramírez, I., Namihira Guerrero, D., Moreno Altamirano, L., & Sosa de Martínez, C. (1990 (reimp. 2001)). *El protocolo de Investigación: Lineamientos para su elaboración y análisis*. México, México: Trillas.
- Mevarech, Z. R. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics* , 14, 415-429.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas: Lineamientos Curriculares*. Bogotá, Cundinamarca, Colombia: Magisterio.
- Mokros, J., & Russell, S. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal of Research in Mathematics Education* , 20 (1), 20-39.
- Molina Ortin, M. d. (2001). La Estadística y Probabilidad en la formación de los maestros de educación primaria. *Jornadas Europeas d'estadística* , 266-272.
- Moreno Verdejo, A. J., & Vallecillos Jiménez, A. (12 de Julio de 2001). La inferencia estadística básica en la enseñanza secundaria. *Jornadas Europeas de Estadística* . Granada, Granada, España.
- Moscovici, S. (1988). Notes towards a description of Social Representations. *European Journal of Social Psychology* , 18, 211-250.
- Nisbett, R. E., & Ross, L. (1980). *Human inference: Strategies and shortcomings of social judgment*. En E. Cliffs (Ed.). New Jersey: Prentice-Hall.
- Orozco, B. C., Puche, R., Ordoñez, O., Correa, M., Orozco, M., & Otálora, Y. (2003). *El niño: científico, lector y escritor, matemático*. Cali, Colombia.
- Otálora, Y., & Orozco, M. (2006). ¿Por qué 7345 se lee como "setenta y tres cuarenta y cinco". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* , 9 (003), 407-433.
- Ottaviani, M. G. (2002). 1982 - 2002: From the past towards the future. *Proceedings of the 6th International Conference on Teaching of Statistics* (págs. 1-8). Ciudad del Cabo: IASE. CD ROM.: B. Phillips (Ed.).
- Pascual-Leone, J. (1995). Learning and Development as Dialectical Factors in Cognitive Growth. *Human Development* , 38, 338-348.
- Pascual-Leone, J. (1997). Constructivismo Dialectico como Fundamento Epistemológico de la Ciencia Humana. En H. F. Ospina Serna, & L. López Moreno, *Pedagogías Constructivistas, Pedagogías Activas y Desarrollo Humano: Memorias I Encuentro Internacional y IV Nacional* (págs. 29 - 57). Manizales, Caldas, Colombia: Universidad de Manizales, RED y CINDE.
- Pascual-Leone, J. (1997). Metasubjective Processes: The Missing Lingua Franca of Cognitive Science. En D. Martel Johnson, & C. E. Erneling, *The Future of the Cognitive Revolution* (págs. 75 - 101). New York, Oxford, U.S.A.: Oxford University Press.
- Pascual-Leone, J., & Johnson, J. (1991). The psychological unit and its role in task analysis: A reinterpretation of object permanence. En M. Chandler, & M. Chapman, *Criteria for*

- competence. Controversies in the conceptualization and assesment of children´s abilities (págs. 153-187). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.
- Perner, J. (1994). *Comprender la mente representacional*. Barcelona: Paidós.
- Pfannkuch, M., & Wild, C. J. (2002). *Statistical Thinking Models*. Actas ICOTS 6 .
- Piaget, J. (1959). *El Nacimiento de la Inteligencia en el Niño*. (L. Fernández Cancela, Trad.) Madrid, España: Aguilar (Edición consultada de 1972).
- Piaget, J. (1967 (1983)). *La Psicología de la Inteligencia (Primera Edición en Biblioteca de Bolsillo: Junio de 1999 ed.)*. (J. C. Foix, Trad.) Paris (Barcelona): Librairie Armand Colin (Editorial Crítica).
- Piaget, J. (1969). *Biología Conocimiento*. Madrid: Siglo Veintiuno Editores S. A.
- Piaget, J. (1970 (1986)). *La epistemología genética*. (J. Delval, Trad.) Madrid: Editorial Debate.
- Piaget, J. (1975 (1978)). *La equilibracion de las estructuras cognitivas proceso central del desarrollo*. (E. Bustos, Trad.) México: Siglo XXI Editores s.a. de c.v.
- Piaget, J. (1976). *La Toma de Conciencia*. Madrid: Morata.
- Piaget, J. (1976). *Lo posible, lo imposible y lo necesario: Las investigaciones en curso o proyectadas en el Centro Internacional de Epistemología Genética*. *Archives de Psychologie* , 44, 281-299.
- Piaget, J. (1977 (1979)). *Investigaciones sobre la abstracción reflexionante*. Buenos Aires: Presses Universitaires de Frances (Editorial Huemul S.A.).
- Piaget, J. (1978). *Fazer e compreender*. São Paulo: Melhoramentos/Universidade de São Paulo.
- Piaget, J. (1978). *Success and understanding*. London, England: Routledge & Kegan Paul.
- Piaget, J. (1983). *La Psicogénesis del Conocimiento y su Significado Epistemológico*. En M. Piattelli-Palmarini, *Teorías del Lenguaje Teorías del Aprendizaje: El debate entre Piaget y Chomsky* (S. Furió, Trad., págs. 51-86). Barcelona, España: Crítica.
- Piaget, J. (1984). *Investigaciones sobre la generalización (estudios de epistemología y psicología genética)*. (F. Brandu, Trad.) Tlhuapan, Puebla, México: Premiá.
- Piaget, J., & Beth, E. W. (1961). *Epistemología matemática y psicología: Una indagación sobre las relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real (2a ed.)*. (V. Sánchez De Zavala, Trad.) Barcelona, España: Crítica (Edición consultada de 1980).
- Piaget, J., & García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia (1a. ed.)*. México, México: Siglo veintiuno editores S.A.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1951). *A origem da idéia do acaso na criança*. (A. M. Cohelo, Trad.) Rio de Janeiro: Record Cultural.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1976). *Génesis de las Estructuras Lógicas Elementales: Clasificaciones y Seriaciones*. Buenos Aires, Argentina: Guadalupe.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1982). *El desarrollo de las cantidades en el niño*. Barcelona España: Hogar del libro.
- Piaget, J., & Szeminska, A. (1967). *Génesis del Número en en Niño*. Buenos Aires, Argentina: Guadalupe.
- Piaget, J., Inhelder, B., García, R., & Vonèche, J. (1981). *Homenaje a Jean Piaget. Epistemología genética y equilibración*. (J. M. Revuelta, Trad.) Madrid: Editorial Fundamentos.
- PISA. (2012). *Guía de Orientación Estudio Principal Colombia 2012*. Bogotá: Icfes.

- Pollatsek, A., Lima, S., & Well, A. D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics* , 12, 191-204.
- Porter, T. M. (1997). Universidad Uned - Dpto. de Sociología - Página de José María Arribas Macho. Recuperado el 14 de 05 de 2007, de <http://www.uned.es/dpto-sociologia-I/Arribas/Enquete/PORTER.HTML>
- Pozo, J. I. (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje* (8a Edición, 2003 ed.). Madrid: Morata.
- Pozo, J. I. (1996). Estrategias de aprendizagem. En C. Coll, J. Palacios, & A. Marchesi, *Desenvolvimento psicológico e educação: Psicologia da educação escolar* (Vol. 2, págs. 176 - 197). Porto Alegre, Brasil: Artes Médicas.
- Pozo, J. I., Monereo, C., & Castello, M. O. (1996). Uso estratégico del conocimiento. En C. Coll, A. Marchesi, & J. (. Palacios, *Desenvolvimento psicológico e educação: Psicologia da educação escolar* (Vol. 2, págs. 145 - 160). Porto Alegre, Brasil: Artmed.
- Puche, R. (2003). *El niño que piensa y vuelve a pensar*. Cali: Universidad del Valle.
- Puche, R., & Lozano, H. (2001). *El sentido del humor en el niño: Estudio empírico*. Cali, Colombia: Siglo del Hombre.
- Radford, L. (2003). The Semiotics of the Schema: Kant, Piaget, and the Calculator. En M. H. Hoffmann, J. Lenhard, & F. Seeger, *Activity and Sing: Grounding Mathematics Education*. (pág. 302). Netherland: Kluwer Academy Publisher.
- Riascos Forero, Y. (2007). Modelos Cognitivos en el estudio del Pensamiento Estadístico. *Unicauca Ciencia* , 11, 81-89.
- Riascos Forero, Y., & Fávero, M. H. (2010). La resolución de situaciones problema que involucran conceptos estadísticos: un estudio que articula datos cognitivos, género e implicaciones educativas. *UNO Revista Iberoamericana de Educación Matemática* (24), 27 a 43.
- Rumelhart, D. E., & McClelland, J. L. (1992). *Introducción al procesamiento distribuido en paralelo*. (J. A. Madruga, Trad.) Madrid, España: Alianza Editorial.
- Russell, S., & Mokros, J. (1990). What's Typical? Children's and Teachers' Ideas About Average. *ICOTS 3* (págs. 307- 314). New Zealand : Dunedin.
- Salcedo, A. (15 de Abril de 2005). Cultura, Razonamiento y Pensamiento Estadístico. (A. Salcedo, Ed.) *Hipótesis Alternativa*. Boletín de la IASE para España, México y Venezuela , 6 (1), págs. 2-9.
- Shaughnessy, M. J., Garfield, J. B., & Greer, B. (1996). Data Handling. En A. J. Bishop, M. A. Clements, J. Kilpatrick, & C. Laborde, *International Handbook of Mathematics Education* (págs. 205-287). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Smith, E. E., & Kosslyn, S. M. (2008). *Procesos Cognitivos: Modelos y Bases Neuronales*. Madrid: Pearson Prentice Hall.
- Steffe, L. (1990). Cómo construye el niño la significación de los términos aritméticos: Un problema curricular. *Cuadernos de Psicología* , 11 (1), 95-162.
- Strauss, S., & Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal of Research in Mathematics Education* , 19 (1), págs. 64-80.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept images and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* , 12, 151-169.

- Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: heuristics and biases. *Science* , 185 (1), 124-131.
- Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidences on learning difficulties about testinypothesis. *Proceeding of the 52nd Session of the Interntional Statistical Institute*. 2, págs. 201-204. The Netherlands: ISI.
- Varela, F. J. (1998). *Conocer. Las ciencias cognitivas: tendencias y perspectivas. Cartografía de las ideas actuales.* (C. Gardini, Trad.) Barcelona: Gedisa.
- Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theoretical and metodological issues. *For the Learning of Mathematics* , 3 (2), 31-41.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* , 10 (3), págs. 133-170.
- Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. México: Trillas.
- Vygotski, L. S. (1979). Consciousness as a problem en the Psychology of Behavior Soviet Psychology. *Summer* , XVIII (4), 1- 35.
- Wallon, H. (Janvier-Avril de 1963). *Psychologie et matérialisme dialectique. Enface*, Numero special "Henri Wallon, buts et méthodes de la psychologie" , 31-34 (Texto original publicado en 1951).
- Wason, P. C. (1984). Realismo y racionalidad en la tarea de selección. En M. Carretero, & J. A. García Madruga, *Lecturas de Psicología del pensamiento, razonamiento, solución de problemas y desarrollo cognitivo* (págs. 99-112). Madrid: Alizna.
- Watson, J. M., & Moritz, J. B. (1999). The developments of concepts of average. *Focus on Learning Problens in Mathematics* , 21 (4), págs. 15-39.
- Watson, J. M., & Moritz, J. B. (1999b). The beginning of statistical inference: Comparing two data e. *Educational Studies in Mathematics* , 37, 145-168.
- Watson, J. M., & Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learnind* , 2 (1 & 2), pág. 11.50.
- Wild, C. J., & Pfanncuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review* , 67 (3), págs. 221-266.