

**ESTUDIO DE LA ESTRUCTURA DE BANDAS EN  
CRISTALES FOTÓNICOS SUPERCONDUCTORES 2D  
USANDO POLARIZACIÓN TM**

**BRAYAN FERNANDO DIAZ VALENCIA**

Trabajo presentado al programa Académico de Magister en Física  
como requisito para optar al título de Magister en Ciencias-Física

Director

**Dr. JESÚS MARÍA CALERO Q.**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS  
PROGRAMA ACADÉMICO DE MAGISTER EN FÍSICA  
SANTIAGO DE CALI**

**2014**

*Este trabajo está dedicado a mis padres, a mi hermano y a mi novia*

---

# Agradecimientos

---

Primero, agradezco a Dios por darme la oportunidad de vivir, por mi familia y el poder culminar mis estudios. Agradezco a mis padres, Mario Fernando Diaz y Maria del Carmen Valencia por todo su amor y comprensión, siendo ellos quienes me han ayudado a cumplir mi deseo de estudiar y prepararme académicamente, a mis abuela y a mi hermano Mario Rousselle Diaz por su colaboración. A mi novia Jenny María Ortiz por su paciencia, amor y ayuda académica.

Al profesor Jesús M. Calero, por haberme brindado la oportunidad de trabajar en el grupo de Física teórica del Estado Sólido y ser director de mi tesis, al igual de compartir sus conocimientos en muchas áreas de la física para mi formación como físico.

Agradezco a los profesores del departamento de física, por el interés que tienen en formar estudiantes con calidad científica y hacer reconocer la universidad como una de las mejores del país y hacer del departamento lo importante que es.

---

# Resumen

---

En el presente trabajo se desarrolla un estudio teórico de la estructuras de bandas en cristales fotónicos superconductores 2D a temperaturas de 5 K y 15 K, usando ondas planas de polarización TM incidentes sobre el cristal. Se utilizó el método de expansión en ondas planas (PWM) para obtener la relación de dispersión de las ondas electromagnéticas en una red compuesta de varillas superconductoras sólidas y huecas, dispuestas en redes cuadradas y triangulares sumergidas en una matriz de aire. También se consideran varillas superconductoras huecas, con un núcleo de material dieléctrico. Se asume que las varillas superconductoras están hechas del material  $\text{Bi}_{1,85}\text{Pb}_{0,35}\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_{3,1}\text{O}_y$ , el cual es un superconductor de alta temperatura crítica y cuya respuesta eléctrica está bien representada por el modelo de los dos fluidos, en donde los efectos de disipación a temperaturas suficientemente bajas, pueden despreciarse.

Se compara las estructuras de bandas para ambos tipos de varillas y geometrías, donde se pudo observar la formación de nuevos *band gaps* fotónicos al cambiar las varillas sólidas por huecas, esto particularmente para la disposición en una red cuadrada. En el caso de la red triangular, se encontró la desaparición de *band gaps* y su reaparición al sustituir las varillas sólidas por huecas. Se analizó la modificación de la estructura de bandas fotónicas debido a la variación de la constante dieléctrica del núcleo, en el caso de las varillas superconductoras huecas con núcleo dieléctrico.

---

# Índice general

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Resumen</b>	<b>II</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Marco teórico</b>	<b>6</b>
2.1. Cristales fotónicos y la ecuación maestra para los cristales fotónicos . . .	6
2.2. Método de ondas planas . . . . .	10
2.2.1. Método de ondas planas en cristales fotónicos 2D . . . . .	13
2.3. Cálculo de la función dieléctrica para varillas huecas . . . . .	16
2.4. Modelo de los dos fluidos . . . . .	17
2.5. Ecuación de onda en sistemas dispersivos . . . . .	20
<b>3. Resultados y discusión</b>	<b>22</b>
3.1. Estructura de bandas fotónicas para varillas superconductoras en una red cuadrada . . . . .	23
3.2. Estructura de bandas fotónicas para varillas superconductoras en una red triangular . . . . .	31
3.3. Estructura de bandas fotónicas para varillas superconductoras huecas con núcleo dieléctrico . . . . .	37
<b>4. Conclusiones</b>	<b>40</b>
<b>5. Apéndice</b>	<b>42</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>44</b>

# CAPÍTULO 1

---

## Introducción

---

La construcción de circuitos electrónicos ha ido evolucionando a lo largo de las últimas décadas, a tal punto que la miniaturización de los componentes electrónicos se ha hecho evidente en los dispositivos que tenemos en nuestras manos. De otro lado, también se ha incrementado el estudio de nanodispositivos fotónicos, al igual que sus posibilidades de aplicación como elementos básicos en el diseño de sistemas adecuados para el procesamiento óptico de información. De hecho, en las últimas dos décadas, los cristales fotónicos han sido considerados como candidatos para la implementación de circuitos ópticos.

En general, los cristales fotónicos son estructuras periódicas cuya periodicidad determina las respuestas electromagnéticas, y por ende en el índice de refracción, para la propagación de ondas electromagnéticas a través del cristal fotónico. Como una consecuencia de la periodicidad en el índice de refracción, las ondas electromagnéticas se dispersan dentro del cristal dando lugar al efecto de difracción, y a la interferencia constructiva y destructiva de las ondas. Debido a este hecho, los cristales fotónicos presentan la propiedad de no permitir la propagación de la luz en ciertos rangos de frecuencia de la radiación electromagnética, rangos que reciben el nombre de brechas o *band gaps*, los cuales pueden ser observados en la estructura de bandas fotónicas del cristal. Esta estructura de bandas fotónicas depende tanto de la periodicidad espacial del sistema, como del índice de refracción, reflejando la relación de dispersión de las ondas electromagnéticas dentro del cristal.

Un creciente interés por el estudio de los cristales fotónicos se ha manifestado desde

finales de la década de 1980, momento en el cual los profesores Eli Yablonovich<sup>1</sup> y Sajeev John,<sup>2</sup> de forma independiente, buscaban la posibilidad de obtener materiales en los cuales se pudieran evitar las pérdidas por emisión espontánea, el primero, y la obtención de la localización de la luz, por parte del segundo. Para el profesor John, la localización de la luz era una consecuencia de la formación de bandas prohibidas, así como ocurre con los electrones que se encuentran confinados en sistemas desordenados. En el año 1991, el profesor Yablonovitch presenta el primer material con un gap fotónico,<sup>3</sup> el cual se conoce en la actualidad como yablonovita, dando así inicio a un campo de investigación que hasta el día de hoy es muy explotado. Desde los trabajos iniciales de Yablonovich y John, los cristales fotónicos han sido tema de investigación debido a la posibilidad de sintonizabilidad y control de la luz que pasa a través de ellos; es así como aplicaciones en celdas solares,<sup>4</sup> LEDs<sup>5-6</sup> y fibras ópticas,<sup>7</sup> han sido consideradas.

Diversos materiales dieléctricos han sido utilizados como constituyentes de los cristales fotónicos, evitando así los problemas de absorción, sin embargo, la utilización de materiales metálicos, que presentan una respuesta dieléctrica dispersiva, ha crecido inevitablemente.<sup>8-14</sup> Usando polarización TM, en el rango de frecuencias bajas, los cristales se comportan como reflectores perfectos. Adicionalmente, también han sido propuestos como fuentes de luz visible.<sup>14</sup> Además, es importante mencionar que el uso de materiales metálicos produce la excitación de modos Mie plasmon-polariton al utilizar polarización TE.<sup>10</sup> Estos modos pueden servir como herramienta a la hora de fabricar celdas solares, debido a que presentan una alta absorción de la luz; además de jugar un importante rol en la implementación de filtros ópticos, por la casi nula velocidad de grupo que pueden tener y la permanencia casi inalterable del gap fotónico, ya que el gap plasmónico es robusto al desorden.

Por otra parte, también se ha evidenciado gran interés por el estudio de cristales fotónicos basados en materiales superconductores, tanto convencionales como de alta temperatura crítica,<sup>15-26</sup> principalmente en el rango de frecuencias del orden de los Terahertz. Este tipo de cristales fotónicos, se puede despreciar los efectos de disipación, en comparación con aquellos fabricados con componentes metálicos; además de que

---

permiten controlar o sintonizar los *band gaps* fotónicos a través de una diversidad de parámetros externos, tales como la temperatura del sistema, campos magnéticos externos aplicados y la propia geometría de los elementos que conforman la estructura periódica del cristal fotónico.

Las respuestas electromagnéticas de los superconductores de alta temperatura crítica, se pueden considerar asumiendo que son materiales no magnéticos, y que poseen una permitividad dieléctrica dependiente de la frecuencia  $\epsilon(\omega)$ .<sup>18</sup> En el contexto del modelo fenomenológico de los dos fluidos, en el que se asume que el sistema electrónico está compuesto de una fracción de electrones normales y otra que participa en el condensado superconductor. La permitividad puede ser reducida a una forma similar a la obtenida en el modelo de Drude para los metales, solo que para el caso de los superconductores, la disipación es despreciable.<sup>18</sup>

La estructura periódica usada en la red del cristal fotónico es de vital importancia a la hora de estudiar su estructura de bandas fotónicas, además de la forma geométrica de los elementos que conforman dicha red. Un cristal fotónico bidimensional puede formarse mediante la disposición de varillas infinitamente largas en cada uno de los sitios de una red periódica bidimensional, como por ejemplo, una red cuadrada o triangular. La geometría de la sección transversal de las varillas, juega un papel muy importante en la dispersión de las ondas electromagnéticas dentro del cristal fotónico, y por lo tanto, es uno de los factores determinantes en su estructura de bandas fotónicas. En la implementación de diferentes tipos de cristales fotónicos bidimensionales se han utilizado varillas con geometría cilíndrica, de sección transversal circular. Takeda y Yoshino,<sup>17</sup> efectuaron cálculos teóricos de estructuras de bandas fotónicas en cristales fotónicos bidimensionales formados por varillas cilíndricas superconductoras de alta temperatura crítica, hechas del material  $\text{Bi}_{1,85}\text{Pb}_{0,35}\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_{3,1}\text{O}_y$ , dispuestos en una red cuadrada. Ellos encontraron que, a temperaturas menores que  $0.4 T_c$  solo se forma un *band gap* fotónico en la estructura de bandas, por debajo de una cierta frecuencia de corte. Más recientemente, se ha considerado la posibilidad de usar varillas huecas, en lugar de sólidas, para la implementación de diferentes tipos de cristales fotónicos bidimen-

sionales,<sup>27–31</sup> con el objetivo de favorecer la formación de nuevos *band gaps* fotónicos en las respectivas estructuras de bandas, al igual que permitir un mejor control sobre dichos *band gaps* a través de la variación de algunos parámetros externos, tales como temperatura y campo magnético aplicado. Sin embargo, este tipo de geometría de varillas huecas no ha sido considerada para el caso de cristales fotónicos bidimensionales con constituyentes superconductores.

En el presente trabajo, se estudia el comportamiento de la estructura de bandas fotónicas en cristales fotónicos bidimensionales (2D), basados en varillas cilíndricas huecas superconductoras de  $\text{Bi}_{1,85}\text{Pb}_{0,35}\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_{3,1}\text{O}_y$ , con radios interno y externo  $R_1$  y  $R_2$ , respectivamente, en principio inmersas en aire. Se consideran arreglos periódicos de dichas varillas en redes cuadradas y triangulares, asumiendo ondas incidentes de polarización TM. En esta polarización, el campo eléctrico de la onda incidente es paralelo al eje de las varillas y el respectivo campo magnético es perpendicular al eléctrico. Las varillas superconductoras se suponen fabricadas de tal forma que su eje coincide con el eje de anisotropía (eje  $c$ ) del cuprato superconductor, es decir, perpendicular a los planos de óxido de cobre (planos  $ab$ ) del mismo material. De acuerdo a esta geometría, el campo eléctrico para ondas incidentes con polarización TM, apuntaría en dirección paralela al eje  $c$  del  $\text{Bi}_{1,85}\text{Pb}_{0,35}\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_{3,1}\text{O}_y$ . Adicionalmente, se consideran varillas superconductoras huecas con un núcleo dieléctrico, de radio  $R_1$ , y se analiza la variación de la estructura de bandas fotónicas con respecto a la permitividad dieléctrica del núcleo. Todos los cálculos de estructuras de bandas fotónicas se efectuaron para dos temperaturas diferentes (5 K y 15 K) del sistema.

El método numérico empleado para el cálculo de las estructuras de bandas fotónicas, es el método de expansión en ondas planas,<sup>32</sup> debido al poco recurso computacional requerido para realizar los cálculos, en comparación con otros métodos; así como la confiabilidad de los resultados obtenidos, ya que se puede hacer uso de un gran número de ondas planas en las expansiones de los campos electromagnéticos y las permitividades dieléctricas, lo cual permite un buen control sobre la exactitud de los cálculos numéricos realizados.

En el capítulo 2 del presente trabajo, se describe tanto el modelo teórico como el método numérico empleados en el cálculo de las diferentes estructuras de bandas fotónicas. En el capítulo 3 se presentan y discuten los principales resultados del trabajo de investigación. Finalmente, en los capítulos 4 y 5, aparecen las conclusiones obtenidas y las principales referencias bibliográficas utilizadas en el desarrollo de este trabajo.

## CAPÍTULO 2

---

# Marco teórico

---

### 2.1. Cristales fotónicos y la ecuación maestra para los cristales fotónicos

Los cristales fotónicos son estructuras periódicas, donde la periodicidad del cristal está dada por el contraste de las respuestas electromagnéticas y por consiguiente del índice de refracción a lo largo de toda la estructura. Debido al contraste de las respuestas electromagnéticas en las distintas regiones, que está presente en toda la estructura del cristal, se pueden definir los cristales fotónicos de acuerdo a tal variación a lo largo de las direcciones en las cuales la luz incidente “siente” los cambios en las respuestas electromagnéticas. Por tal motivo, se definen los cristales fotónicos 1D, 2D y 3D, de acuerdo a que el índice de refracción de tales estructuras cambia en una, dos o tres direcciones, respectivamente, las cuales son las direcciones de preferencia que nosotros tenemos en cuenta. En la Figura 2.1 se pueden observar los tres tipos de cristales fotónicos.

En el momento en que la luz viaja a lo largo del cristal fotónico, ésta es dispersada por los materiales que componen el cristal, de tal manera que se produce interferencia constructiva y destructiva de las ondas electromagnéticas, dando lugar así a regiones de frecuencia llamadas *band gaps*, en las cuales no existen estados fotónicos. En contraste a los *band gaps*, existen regiones llamadas bandas, en las cuales los modos electromagnéticos están presentes. En los cristales fotónicos, puede obtenerse la relación de dispersión de las ondas electromagnéticas que se propagan en el sistema, a partir de la solución de las ecuaciones de Maxwell; entendiéndose por relación de dispersión, a la relación

de la frecuencia de las ondas electromagnéticas como función del respectivo vector de onda.<sup>32</sup>

Particularmente, los cristales fotónicos 2D presentan periodicidad del índice de refracción a lo largo de dos direcciones, mientras que en la tercera dirección el medio es uniforme. De esta manera, un cristal fotónico 2D puede considerarse conformado por varillas (rods) de longitud infinita, debido a que si esto no fuera así, se deberían tener en cuenta las respectivas condiciones de frontera en los extremos superior e inferior de las varillas.<sup>33</sup> Con esto presente, podemos definir un plano perpendicular a las varillas del cristal, de tal forma que este plano (además de la simetría de espejo (mirror)) define el tipo de polarización de la luz incidente sobre el cristal fotónico. Cuando sobre este plano se encuentra la componente de campo magnético, se dice que la polarización es TM, mientras que en el caso en el cual el campo eléctrico está contenido en dicho plano, se dice que la polarización es TE. Por supuesto, todo esto es válido porque se asume que la onda incidente es una onda plana, en la cual los campos eléctrico y magnético y además el vector de onda, forman una triada ortogonal. En nuestro caso, se considera un cristal fotónico 2D, formado por varillas superconductoras huecas, organizadas en redes cuadrada y triangular.

Además de lo mencionado anteriormente, se debe considerar un método numérico el cual sirva como herramienta a la hora de calcular las estructuras de bandas fotónicas. El método empleado para tal fin es el método de ondas planas, el cual describiremos más adelante. Sin embargo, para implementar ese método numérico, es preciso escribir una ecuación que sirva para obtener información acerca del comportamiento del campo electromagnético en el interior del cristal fotónico, cuya solución conduce a la relación de dispersión para las ondas electromagnéticas que se propagan en el medio.

Como es bien conocido, los fenómenos electromagnéticos están gobernados por las ecuaciones de Maxwell, las cuales en ausencia de fuentes (en el sistema internacional (SI)) están dadas por<sup>32</sup>

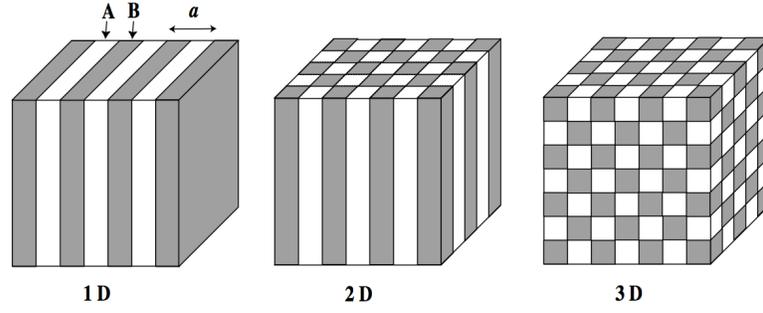


Figura 2.1: Descripción gráfica de los cristales fotónicos 1D, 2D y 3D. Como caso particular, en el cristal fotónico 1D, se puede ver el periodo de la red definido como  $a = A + B$ . Figura tomada del libro “*Optical Properties of Photonic Crystals*”, Kazuaki Sakoda.<sup>35</sup>

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.4)$$

donde  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  son los campos eléctrico y magnético,  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  es el campo de desplazamiento eléctrico y  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mu(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  es el campo de inducción magnética; por lo tanto, las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir de la siguiente forma

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = 0, \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (2.8)$$

en la cuales se ha tenido en cuenta que para materiales no magnéticos se cumple  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ .

Suponiendo soluciones en modos armónicos temporales de la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad (2.10)$$

tenemos que las soluciones de las ecuaciones 2.5 y 2.6 son

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{\epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}) \omega} \nabla \times H, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{-i}{\mu_0 \omega} \nabla \times E. \quad (2.12)$$

Ahora bien, combinando las anteriores ecuaciones (tomando el rotacional en la primera), y teniendo en cuenta que  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  es la velocidad de la luz en el vacío, podemos obtener la siguiente ecuación para el campo magnético

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (2.13)$$

la cual es la ecuación maestra de los cristales fotónicos. De forma análoga, se puede obtener una ecuación para el campo eléctrico, la cual está dada por

$$\frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \left( \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (2.14)$$

La ecuación 2.13 puede ser vista como una ecuación de valores propios, que están dados por  $\omega^2/c^2$  y los eigenvectores (eigen-estados) son los modos magnéticos. Por lo tanto, resolviendo la ecuación maestra se obtiene el campo magnético y por medio de la ecuación 2.11 se obtiene el campo eléctrico, obteniéndose de esta manera el comportamiento del campo electromagnético en forma general.

Teniendo en cuenta la ecuación de valores propios, se puede asociar un operador que actúe sobre el campo magnético, de la misma forma en que se define un operador Hamiltoniano en mecánica cuántica, el cual actúa sobre una función de onda para obtener la energía de un sistema. En el contexto de los cristales fotónicos, el operador que se define es<sup>33</sup>

$$\Theta = \nabla \times \left( \frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \right), \quad (2.15)$$

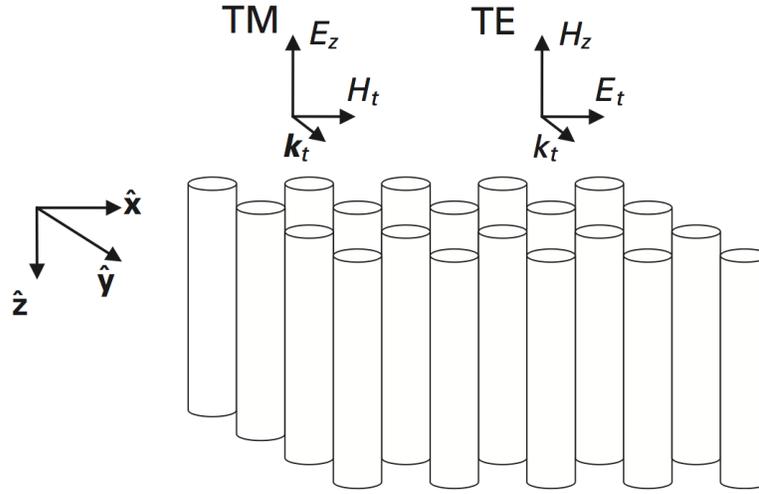


Figura 2.2: Representación de una red 2D. Las polarizaciones TM y TE son mostradas, de tal forma que los campos magnéticos y eléctricos son paralelos al plano perpendicular a las varillas para cada tipo de polarización. Figura tomada del libro “*Fundamentals of Photonic Crystal Guiding*”, M. Skorobogatiy and Jianke yang.<sup>36</sup>

el cual se puede demostrar que es un operador Hermítico,<sup>33</sup> por lo tanto los valores propios correspondientes a dicho operador son reales.

En el caso de la ecuación de valores propios para el campo eléctrico, se puede demostrar que el operador definido para ese caso no es Hermítico, por lo tanto se debe transformar el operador de tal manera que se obtenga un operador Hermítico asociado.

## 2.2. Método de ondas planas

Antes de explicar el método de ondas planas, es preciso definir la red del cristal fotónico 2D, la cual es mostrada en la figura 2.2, donde puede apreciarse claramente las diferentes polarizaciones de la onda plana incidente. En la Figura 2.2, se puede observar que la periodicidad de las varillas está bien definida, de tal forma que la permitividad dieléctrica del sistema es una función periódica con el periodo de la red.

De forma general, se definen las características para un cristal fotónico 3D, ya que de esta manera el caso 2D se puede estudiar como un caso particular. En cualquier cristal fotónico, podemos decir que la permitividad es periódica con el periodo de la

red, es decir,  $\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{R})$ , siendo  $\mathbf{R} = l\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2 + n\mathbf{a}_3$  un vector de traslación de la red, el cual está relacionado con los vectores primitivos de la red de igual manera que se hace en las redes cristalinas en estado sólido.<sup>34</sup> En particular, en la figura 2.3 se muestran algunas redes periódicas 2D y los respectivos vectores de red.

De la misma manera que en los sistemas semiconductores, para la red cristalina, aquí definimos las componentes de los vectores de la red recíproca

$$b_i = 2\pi \frac{e_{ijk} a_j a_k}{a_i (e_{ijk} a_j a_k)}, \quad (2.16)$$

donde la suma sobre índices repetidos se tiene en cuenta. Aquí,  $e_{ijk}$  es el simbolo de permutación de tercer orden. De forma general, se puede definir un vector de traslación a lo largo de la red recíproca como combinación lineal de los vectores de la red recíproca, es decir,  $\mathbf{G} = \alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2 + \delta\mathbf{b}_3$ . En el caso particular de sistemas 2D, se tienen sólo dos vectores de red, y por lo tanto dos vectores de la red recíproca. Además, debido a la simetría discreta que poseen estos sistemas, se pueden escoger los vectores de onda en tal forma que se encuentren sobre el plano perpendicular a las varillas que conforman el cristal fotónico; tales vectores los denotaremos como  $k_{\parallel}$ .

Por otra parte, debido a que los sistemas son periódicos, los modos electromagnéticos se pueden representar como funciones de Bloch para sistemas 3D, de igual forma que se hace en estado sólido, esto es<sup>32</sup>

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{\mathbf{k},n}(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_{\mathbf{k},n}(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.18)$$

donde  $\mathbf{E}_{\mathbf{k},n}(\mathbf{r})$  y  $\mathbf{H}_{\mathbf{k},n}(\mathbf{r})$  son funciones periódicas con la periodicidad de la red. Aquí los índices indican que las funciones periódicas dependen del vector de onda  $\mathbf{k}$  y del eigenestado  $n$  en que se encuentra el modo electromagnético, éste último se conoce de la teoría del estado sólido como la  $n$ -ésima banda asociada a la solución de valores propios para un vector de onda de la red recíproca. Debido a que las funciones son periódicas, los modos satisfacen<sup>32</sup>

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k},n}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = \mathbf{E}_{\mathbf{k},n}(\mathbf{r}), \quad (2.19)$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k},n}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = \mathbf{H}_{\mathbf{k},n}(\mathbf{r}), \quad (2.20)$$

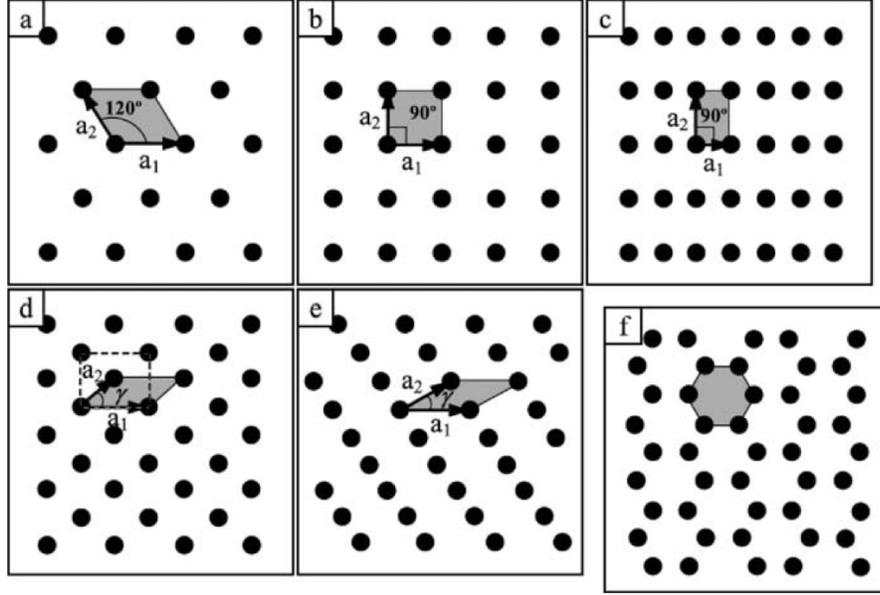


Figura 2.3: Redes 2D y los respectivos vectores de red. Figura tomada del libro “*Photonic Crystals: Physics and Technology*”, C. Sibilia, T.M. Benson, M. Marciniak, T. Szoplik.<sup>37</sup>

donde  $\mathbf{R}$  es el vector de la red definido anteriormente.

Del análisis de Fourier, se sabe que las funciones periódicas se pueden expandir en términos de una suma discreta infinita de armónicos espaciales, utilizando este hecho, los modos electromagnéticos pueden ser escritos como<sup>32</sup>

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k},n}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \mathbf{E}_{\mathbf{k},n}(\mathbf{G}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G})\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k},n}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \mathbf{H}_{\mathbf{k},n}(\mathbf{G}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G})\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.22)$$

donde  $\mathbf{G}$  es el vector de la red recíproca definido con anterioridad.

Atendiendo el mismo argumento de la periodicidad del sistema, podemos expandir la función dieléctrica en la forma

$$\epsilon(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \chi(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.23)$$

donde  $\chi(\mathbf{G})$  son los coeficientes de la expansión de Fourier. Ahora, insertando las ecuaciones 2.21, 2.22 y 2.23 en las ecuaciones 2.13 y 2.14, y utilizando la ortogonalidad de

las ondas planas en el sentido de  $\int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} \approx \delta(\mathbf{G})$  (función delta de Dirac), obtenemos las siguientes ecuaciones de valores propios para los coeficientes de la expansión de Fourier<sup>32</sup>

$$-\sum_{\mathbf{G}'} \chi(\mathbf{G} - \mathbf{G}') A(\mathbf{k}) \times \left\{ (\mathbf{k} + \mathbf{G}') \times \Psi_{\mathbf{k},n}(\mathbf{G}') \right\} = \frac{\omega_{\mathbf{k},n}^2}{c^2} \Psi_{\mathbf{k},n}(\mathbf{G}) \quad (2.24)$$

donde las funciones  $\Psi_{\mathbf{k},n}(\mathbf{G})$  y  $A(\mathbf{k})$  están relacionadas con los coeficientes de Fourier de los campos por medio de

$$\Psi_{\mathbf{k},n}(\mathbf{G}) = \begin{cases} \mathbf{E}_{\mathbf{k},n}(\mathbf{G}), & \text{con } A(\mathbf{k}) = \mathbf{k} + \mathbf{G}', \\ \mathbf{H}_{\mathbf{k},n}(\mathbf{G}), & \text{con } A(\mathbf{k}) = \mathbf{k} + \mathbf{G}. \end{cases} \quad (2.25)$$

La ecuación (2.24) es la ecuación maestra para cristales fotónicos 3D.<sup>35</sup> Solucionando esta ecuación, se puede calcular la relación de dispersión, o lo que es igual, la estructura de bandas de los modos electromagnéticos dentro del cristal fotónico. Ya que las componentes de cada campo son tres, se tiene en general un sistema de  $3N$  ecuaciones acopladas para ser resueltas. Aunque para el campo magnético, se tienen  $2N$  ecuaciones, debido a la existencia de la condición de ortogonalidad que cumple el campo magnético  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ , aún en presencia de fuentes, algo de mucha importancia en cuanto al ahorro de tiempo computacional cuando se requiere calcular numéricamente la estructura de bandas de un cristal fotónico.

### 2.2.1. Método de ondas planas en cristales fotónicos 2D

Aprovechando que las ecuaciones generales que describen los modos electromagnéticos en términos de los coeficientes de Fourier, usando el método de ondas planas, se pueden proyectar tales ecuaciones sobre un plano 2D y expresar así la ecuación maestra de tal forma que utilicemos las nuevas ecuaciones para el cálculo de la relación de dispersión en cristales fotónicos 2D. Debido a que se define un plano perpendicular a las varillas que forman cristal fotónico, éste cual sirve para definir los estados de polarización de la onda incidente. Sin embargo, para ser un poco más claros en los cálculos, se emplea un camino diferente para obtener la ecuación maestra para los cristales fotónicos 2D.

Utilizando la notación dada en la Figura 2.2, se pueden definir las polarizaciones de los campos de la siguiente forma<sup>33</sup>

$$\text{TM} : (H_x, H_y, 0); (0, 0, E_z), \quad (2.26)$$

$$\text{TE} : (E_x, E_y, 0); (0, 0, H_z), \quad (2.27)$$

de esta forma, y utilizando las ecuaciones de Maxwell consideradas con anterioridad, se pueden obtener las siguientes ecuaciones diferenciales<sup>33</sup>

$$-\frac{1}{\epsilon(\mathbf{r}_{\parallel})} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} E_{z, \mathbf{k}_{\parallel}}(\mathbf{r}_{\parallel}) = E_{z, \mathbf{k}_{\parallel}}(\mathbf{r}_{\parallel}), \quad (2.28)$$

$$-\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\epsilon(\mathbf{r}_{\parallel})} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\epsilon(\mathbf{r}_{\parallel})} \frac{\partial}{\partial y} \right\} H_{z, \mathbf{k}_{\parallel}}(\mathbf{r}_{\parallel}) = \frac{\omega^2}{c^2} H_{z, \mathbf{k}_{\parallel}}(\mathbf{r}_{\parallel}), \quad (2.29)$$

donde  $\mathbf{r}_{\parallel}$  es un vector 2D en el espacio de coordenadas y  $\mathbf{k}_{\parallel}$  es el vector de onda, los cuales se encuentran sobre el plano perpendicular a las varillas del cristal fotónico.

De la misma manera que en el caso general, el paso siguiente consiste en reemplazar las expansiones de Fourier, de los campos y de la respuesta dieléctrica, en las ecuaciones anteriores. De esta manera, es posible demostrar que las ecuaciones para los coeficientes de Fourier de los campos son

$$\sum_{\mathbf{G}'_{\parallel}} \chi(\mathbf{G}_{\parallel} - \mathbf{G}'_{\parallel}) \left| \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{G}'_{\parallel} \right|^2 E_{z, \mathbf{k}_{\parallel} n}(\mathbf{G}'_{\parallel}) = \frac{\omega_{\mathbf{k}_{\parallel}, n}^2}{c^2} E_{z, \mathbf{k}_{\parallel} n}(\mathbf{G}_{\parallel}), \quad (2.30)$$

$$-\sum_{\mathbf{G}'_{\parallel}} \chi(\mathbf{G}_{\parallel} - \mathbf{G}'_{\parallel}) \left( \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{G}'_{\parallel} \right) \cdot \left( \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{G}_{\parallel} \right) H_{z, \mathbf{k}_{\parallel} n}(\mathbf{G}'_{\parallel}) = \frac{\omega_{\mathbf{k}_{\parallel}, n}^2}{c^2} H_{z, \mathbf{k}_{\parallel} n}(\mathbf{G}_{\parallel}), \quad (2.31)$$

las cuales son las ecuaciones maestras para los cristales fotónicos 2D en la expansión de ondas planas, para las polarizaciones TM y TE respectivamente.

Aquí, se definen los coeficientes de Fourier relacionados con la permitividad dieléctrica (ver Ec 2.23) como

$$\chi(\mathbf{G}_{\parallel}) = \frac{1}{S_u} \int_{S_u} \frac{1}{\epsilon(\mathbf{r}_{\parallel})} e^{-i\mathbf{G}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} d\mathbf{r}_{\parallel}, \quad (2.32)$$

donde la integración se realiza dentro del área de la celda unitaria  $S_u$ .

Para el caso en que el cristal fotónico 2D está compuesto por varillas cilíndricas de radio  $R$ , se puede escribir el recíproco de la permitividad dieléctrica del cristal en la forma siguiente<sup>32</sup>

$$\frac{1}{\epsilon(\mathbf{r}_{\parallel})} = \frac{1}{\epsilon_b} + \left( \frac{1}{\epsilon_r} - \frac{1}{\epsilon_b} \right) S_{rod}, \quad (2.33)$$

donde hemos definido la función escalón

$$S_{rod}(\mathbf{r}_{\parallel}) = \begin{cases} 1, & 0 < r < R \\ 0, & \text{Otro caso,} \end{cases} \quad (2.34)$$

y las permitividades dieléctricas de las varillas y la matriz, en la cual se encuentran inmersas, son  $\epsilon_r$  y  $\epsilon_b$  respectivamente.

Reemplazando la ecuación (2.33) en la ecuación 2.32 se tiene que<sup>32</sup>

$$\chi(\mathbf{G}_{\parallel}) = \frac{1}{\epsilon_b} \delta_{\mathbf{G}_{\parallel}} + \left( \frac{1}{\epsilon_r} - \frac{1}{\epsilon_b} \right) \int_S e^{-i\mathbf{G}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} d\mathbf{r}_{\parallel}, \quad (2.35)$$

en la cual el área  $S$  corresponde al área de la sección transversal de las varillas, y se usa la definición de la función delta de Dirac en el espacio de Fourier

$$\delta_{\mathbf{G}_{\parallel}} = \frac{1}{S_u} \int_{S_u} e^{-i\mathbf{G}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} d\mathbf{r}_{\parallel} = \begin{cases} 1, & \mathbf{G}_{\parallel} = \mathbf{0} \\ 0, & \text{Otro caso.} \end{cases} \quad (2.36)$$

Teniendo en cuenta la función generatriz de las funciones de Bessel, se puede demostrar la siguiente útil relación, con la cual se puede resolver la integral que aparece en la ecuación (2.35)

$$e^{-i\mathbf{G}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(G_{\parallel} r_{\parallel}) e^{il(\phi - \pi/2)}, \quad (2.37)$$

donde  $l$  es el orden de la función de Bessel. Teniendo en cuenta lo anterior, los coeficientes de Fourier de la permitividad dieléctrica, están dados por<sup>32</sup>

$$\chi(\mathbf{G}) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_b} + \left( \frac{1}{\epsilon_r} - \frac{1}{\epsilon_b} \right) f, & \mathbf{G}_{\parallel} = 0 \\ \frac{2\pi R}{GS} \left( \frac{1}{\epsilon_r} - \frac{1}{\epsilon_b} \right) J_1(GR), & \mathbf{G}_{\parallel} \neq 0, \end{cases} \quad (2.38)$$

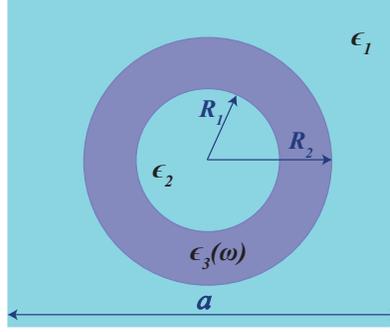


Figura 2.4: Representación gráfica de la sección transversal de una varilla cilíndrica hueca del cristal fotónico para las redes triangular y cuadrada. El cilindro sólido, se obtiene haciendo el límite  $R_1 \rightarrow 0$ .

donde se ha definido  $f$  como la fracción de llenado (razón entre el área transversal de las varillas y el área de la celda unitaria),  $G = G_{\parallel} = |\mathbf{G}_{\parallel}|$ , y  $J_1(x)$  es la función de Bessel de primer orden.

De manera similar es posible calcular los coeficientes de Fourier de la permitividad dieléctrica, en el caso en que se usan varillas cilíndricas huecas como elementos básicos del cristal fotónico.

### 2.3. Cálculo de la función dieléctrica para varillas huecas

En la figura 2.4 se observa que la sección transversal de una varilla cilíndrica hueca. En tal figura, tenemos la permitividad de las varillas huecas (cascarón) representada por  $\epsilon_r = \epsilon_3(\omega)$ . Las varillas están inmersas en una matriz cuya permitividad es  $\epsilon_b = \epsilon_1$  y tienen una permitividad en la cavidad dada por  $\epsilon_2$ .

En la sección anterior se discutió el método empleado para calcular los coeficientes de Fourier de la permitividad dieléctrica para un cristal fotónico compuesto de cilindros sólidos. Extendiendo tales cálculos a un sistema de varillas huecas, se puede escribir el recíproco de la permitividad dieléctrica en la forma

$$\frac{1}{\epsilon(\mathbf{r}_{\parallel})} = \frac{1}{\epsilon_1} + \left( \frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) S_{rod} + \left( \frac{1}{\epsilon_3} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) S_{shell}, \quad (2.39)$$

donde se definen  $\epsilon(\mathbf{r}_{\parallel}) = \epsilon(\mathbf{r}_{\parallel}, \omega)$ ,  $\epsilon_3 = \epsilon_3(\omega)$  y  $\mathbf{r}_{\parallel} = (x, y)$  por simplicidad. Por otra

parte, las funciones escalón para las varillas sólidas y los cascarones se definen de la siguiente manera

$$S_{rod}(\mathbf{r}_{||}) = \begin{cases} 1, & 0 < r < R_1 \\ 0, & \text{Otro caso,} \end{cases} \quad (2.40)$$

y

$$S_{shell}(\mathbf{r}_{||}) = \begin{cases} 1, & R_1 < r < R_2 \\ 0, & \text{Otro caso.} \end{cases} \quad (2.41)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el cálculo de los coeficientes de Fourier de la función dieléctrica realizado en la sección anterior, se puede demostrar que tales coeficientes para el caso de las varillas huecas están dados por

$$\chi(\mathbf{G}_{||}) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_1} + \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1}\right)f_1 + \left(\frac{1}{\epsilon_3} - \frac{1}{\epsilon_1}\right)f_2, & \mathbf{G}_{||} = 0 \\ 2f_1 \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1}\right) \frac{J_1(GR_1)}{GR_1} + \\ \frac{2\pi}{GS} \left(\frac{1}{\epsilon_3} - \frac{1}{\epsilon_1}\right) \left[ R_2 J_1(GR_2) - R_1 J_1(GR_1) \right], & \mathbf{G}_{||} \neq 0, \end{cases} \quad (2.42)$$

donde  $f_1$  y  $f_2$  son las fracciones de llenado de las varillas sólidas (en caso de tener una permitividad diferente a la del vacío) y de los cascarones, respectivamente. De nuevo,  $J_1(x)$  es la función de Bessel de primer orden.

## 2.4. Modelo de los dos fluidos

En el presente trabajo se ha considerado el tipo de polarización TM para las ondas electromagnéticas incidentes sobre el cristal fotónico. Por tal razón, el campo eléctrico esta dirigido a lo largo del eje  $z$ , de manera que se debe calcular la permitividad dieléctrica en la dirección paralela al eje de las varillas del cristal fotónico, la cual coincide con el eje  $c$  del cuprato superconductor.

El modelo de los dos fluidos es un modelo fenomenológico, por medio del cual se puede describir la permitividad dieléctrica de los sistemas superconductores,<sup>17</sup> en particular

para la respuesta dieléctrica a lo largo de la dirección  $c$  en los cupratos superconductores de alta temperatura crítica. En este modelo, se asume que una fracción  $n_s$  de la densidad total de electrones  $n$  se encuentra en el estado superconductor, mientras que otra fracción  $n_n$  se encuentra en el estado normal, tal que la densidad total  $n = n_s + n_n$  se conserva.

La ecuación de onda correspondiente al campo eléctrico en la dirección paralela a las varillas (asumiendo materiales no magnéticos) está dada por<sup>17</sup>

$$\frac{\partial^2 E_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(x, y) E_z(x, y) - i\mu_0 \omega (J_{sz} + J_{nz}), \quad (2.43)$$

donde

$$\begin{aligned} J_{sz} &= n_s(x, y)(-e)v_{sz}(\omega) \\ &= -\frac{n_s(x, y)e^2}{im\omega} E_z(x, y), \end{aligned} \quad (2.44a)$$

$$\begin{aligned} J_{nz} &= n_n(x, y)(-e)v_{nz}(\omega) \\ &= -\frac{n_n(x, y)e^2}{im(\omega + i\gamma)} E_z(x, y), \end{aligned} \quad (2.44b)$$

son las densidades de corriente asociadas con el movimiento de los portadores de carga en los estados superconductor y normal respectivamente, las cuales dependen de las respectivas densidades de portadores  $n_s$  y  $n_n$ . En el estado normal, se deben tener en cuenta los efectos de disipación a través del parámetro  $\gamma$ , que tiene unidades de frecuencia. Introduciendo las ecuaciones anteriores en la ecuación de onda 2.43, se obtiene

$$\frac{\partial^2 E_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{eff}(x, y) E_z(x, y) = 0. \quad (2.45)$$

En la anterior ecuación  $\epsilon_{eff}$  es la constante dieléctrica efectiva del superconductor a la frecuencia  $\omega$ , dada por la expresión<sup>17</sup>

$$\epsilon_{eff}(\omega) = \epsilon_\infty \left( 1 - \frac{\omega_{sp}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{np}^2}{\omega(\omega + i\gamma)} \right), \quad (2.46)$$

donde

$$\omega_{sp} = \frac{c}{\lambda\sqrt{\epsilon_\infty}}, \quad \omega_{np} = \sqrt{\frac{n_n e^2}{m\epsilon_0 \epsilon_\infty}}, \quad (2.47)$$

son las frecuencias de plasma de los electrones en el estado superconductor y normal, respectivamente. Por otra parte,  $\epsilon_\infty$  es la permitividad dieléctrica relativa, a altas frecuencias, del material superconductor,  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío,  $m$  la masa de los electrones y  $\lambda_L$  la longitud de penetración de London. Esta última está relacionada con la temperatura en los superconductores cupratos por medio de la siguiente expresión<sup>40</sup>

$$\lambda_L(T) = \frac{\lambda_{L_0}}{\sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}}, \quad (2.48)$$

donde  $\lambda_{L_0}$  es la longitud de penetración a temperatura cero y  $T_c$  es la temperatura crítica del superconductor. De esta manera, se puede reescribir la frecuencia de plasma de los electrones en el estado superconductor como

$$\omega_{sp}(T) = \omega_{sp_0} \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}, \quad (2.49)$$

donde  $\omega_{sp_0}$  es la frecuencia de plasma a temperatura cero.

Es conveniente notar que la ecuación (2.46) es válida para frecuencias  $\omega$  por debajo del gap superconductor  $2\Delta$ , ya que para frecuencias de la onda incidente por encima del gap, el estado superconductor desaparece. Esto puede evidenciarse en la ecuación mencionada, donde la permitividad del superconductor a altas frecuencias es aquella de una material con permitividad  $\epsilon_\infty$ .

Debido a la dependencia de la frecuencia de plasma con respecto a la temperatura, para temperaturas suficientemente bajas es posible despreciar la disipación debida los electrones en el estado normal. Considerando que a temperaturas muy pequeñas comparadas con la temperatura crítica  $T \ll T_c$ , es posible asumir que  $n_s \rightarrow n$ ; por lo tanto, la contribución de los electrones en el estado normal a la permitividad dieléctrica es despreciable. Por consiguiente, en el régimen de temperaturas muy bajas, la permitividad dieléctrica toma la forma

$$\epsilon_{eff}(\omega) = \epsilon_\infty \left( 1 - \frac{\omega_{sp}^2}{\omega^2} \right), \quad (2.50)$$

la cual es similar a la permitividad dieléctrica para materiales metálicos sin pérdidas por disipación en el modelo de Drude.<sup>34</sup> Conociendo la respuesta dieléctrica de los

superconductores y la ecuación maestra para cristales fónicos 2D, se puede calcular la respectiva estructura de bandas fotónicas.

## 2.5. Ecuación de onda en sistemas dispersivos

Como se discutió ampliamente en la sección anterior, la permitividad dieléctrica del material superconductor presenta dispersión temporal, es decir, depende de la frecuencia  $\omega$  de la onda incidente. En consecuencia, la solución de la ecuación de valores propios, ya no es tan obvia como cuando se tienen cristales fotónicos constituidos por materiales que no exhiben este tipo de dispersión. En el presente caso, la frecuencia  $\omega$  aparece tanto en la permitividad dieléctrica del superconductor, como en la expresión obtenida para el valor propio del problema inicial. Diversos métodos han sido utilizados para enfrentar este tipo de problemas.<sup>38,39</sup>

Teniendo en cuenta la forma de la permitividad dieléctrica del superconductor (tipo Drude sin disipación), para el cálculo de las estructuras de bandas fotónicas, se puede adoptar un método análogo al empleado por Halevi y Ramos-Mendieta<sup>39</sup> en la solución de un problema similar. El punto de partida es expresar la ecuación de valores propios incluyendo la dependencia explícita de la permitividad dieléctrica con la frecuencia, en la forma

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\mathbf{r}_{\parallel}, \omega) \mathbf{E}, \quad (2.51)$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\mathbf{r}_{\parallel}) \left( 1 - \frac{\omega_{sp}^2}{\omega^2} \right) \mathbf{E}, \quad (2.52)$$

la cual puede ser escrita como

$$\frac{1}{\epsilon(\mathbf{r}_{\parallel})} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{\omega_{sp}^2}{c^2} \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}. \quad (2.53)$$

Definiendo  $\Omega_p(\mathbf{r}_{\parallel}) = \omega_{sp}^2/c^2$  y expandiendo en ondas planas el campo eléctrico y la permitividad dieléctrica como se hizo anteriormente, además de la nueva función  $\Omega_p(\mathbf{r}_{\parallel})$ , se obtiene la siguiente ecuación de valores propios<sup>39</sup>

$$\sum_{\mathbf{G}'_{\parallel}} \left( \chi(\mathbf{G}_{\parallel} - \mathbf{G}'_{\parallel}) \left| \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{G}'_{\parallel} \right|^2 + \Omega(\mathbf{G}_{\parallel} - \mathbf{G}'_{\parallel}) \right) E_{z, \mathbf{k}_{\parallel} n}(\mathbf{G}'_{\parallel}) = \frac{\omega_{\mathbf{k}_{\parallel}, n}^2}{c^2} E_{z, \mathbf{k}_{\parallel} n}(\mathbf{G}_{\parallel}), \quad (2.54)$$

donde  $\Omega(\mathbf{G})$  representa los coeficientes de Fourier de la función  $\Omega_p(\mathbf{r}_{||}) = \omega_{sp}^2/c^2$ . Puede notarse que esta es una solución bastante sencilla a un problema que en principio es complicado, sencilla en el sentido de que volvemos al problema inicial de valores propios, con la frecuencia incluida únicamente en la expresión para el eigenvalor que va a ser hallado.

Por medio de éste método, se pueden obtener coeficientes de Fourier para la frecuencia de plasma con la misma estructura que aquellos obtenidos para la permitividad dieléctrica, tal como aparece en la ecuación (2.42). En efecto, solo se deben hacer las sustituciones  $\epsilon_1 \rightarrow \Omega_{p1}$ ,  $\epsilon_2 \rightarrow \Omega_{p2}$ ,  $\epsilon_3 \rightarrow \Omega_{p3}$ , donde se define  $\Omega_{pi} \equiv \omega_{pi}^2/c^2$ , como el término asociado directamente con la frecuencia de plasma en las distintas regiones de la celda unitaria.

Como ya se mencionó, una característica destacable de este método es que permite introducir la frecuencia de plasma a lo largo de toda la estructura, de manera similar que la permitividad dieléctrica. Sin embargo, el método no es aplicable, al menos en la forma que se ha discutido, para situaciones en las que la permitividad dieléctrica contiene términos de disipación.

## CAPÍTULO 3

---

# Resultados y discusión

---

Tal como fue establecido en los capítulos precedentes, en el cálculo de estructuras de bandas en cristales fotónicos 2D, se utilizó el método de expansión en ondas planas. Se consideraron dos tipos diferentes de geometrías, correspondientes a las redes cuadrada y triangular. Los cristales fotónicos se asumieron conformados por varillas superconductoras sólidas y huecas, de sección transversal circular, hechas del cuprato superconductor de alta temperatura crítica  $\text{Bi}_{1,85}\text{Pb}_{0,35}\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_{3,1}\text{O}_y$ . También se consideraron varillas superconductoras huecas con un núcleo de material dieléctrico. Se efectuaron cálculos de estructuras de bandas fotónicas para sistemas conformados por varillas con un radio externo fijo y diferentes valores del radio interno, al igual que para diferentes valores de la constante dieléctrica del núcleo, en el caso de las varillas con núcleo de material dieléctrico. En cada caso, se realizaron los cálculos respectivos para dos temperaturas diferentes del sistema, 5 K y 15 K, las cuales son mucho menores que la temperatura crítica del material superconductor, que es de 107 K aproximadamente.

Tanto para la red cuadrada, como para la triangular, se asumió que las ondas incidentes sobre el cristal fotónico poseen polarización TM. Fundamentalmente se consideraron ondas electromagnéticas en el rango de los Terahertz. Las relaciones de dispersión fueron obtenidas, en cada caso, a lo largo de direcciones de simetría dentro de la primera zona de Brillouin. En la Figura 3.1 se muestra el camino entre puntos de alta simetría para los dos tipos de redes que fueron considerados.<sup>32</sup> Los vectores de onda asociados con los puntos de alta simetría son  $\Gamma = (0, 0)$ ,  $X = (1/2, 0)$  y  $M = (1/2, 1/2)$  para el caso de la red cuadrada. Para el caso de la red triangular, se tienen  $\Gamma = (0, 0)$ ,

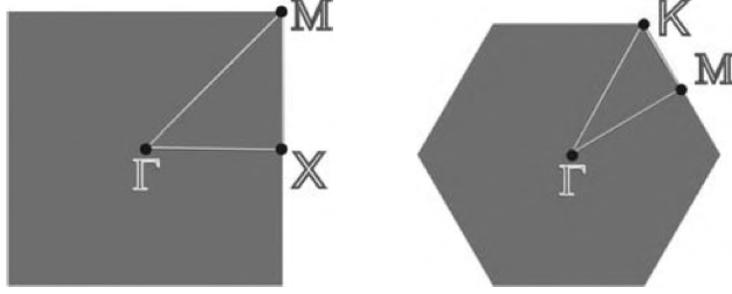


Figura 3.1: Descripción gráfica de los caminos entre puntos de alta simetría para las redes cuadrada (izquierda) y triangular (derecha). Figura tomada del libro “*Photonic Crystals Physics*”, Igor Sukhoivanov, Igor Guryev.<sup>32</sup>

$M = (0, 1/\sqrt{3})$  y  $K = (1/3, 1/\sqrt{3})$ , todos normalizados con respecto a  $2\pi/a$  por simplicidad.

Teniendo en cuenta que las ondas electromagnéticas incidentes tienen polarización TM, se debe resolver la respectiva ecuación de valores propios (2.54), de tal forma que se pueda obtener la relación de dispersión de las ondas en el cristal.

### 3.1. Estructura de bandas fotónicas para varillas superconductoras en una red cuadrada

Inicialmente se considera una red bidimensional cuadrada, la cual tiene un parámetro de red  $a$ , donde tal parámetro representa la distancia entre los centros de las varillas superconductoras huecas. Nosotros asumimos varillas superconductoras hechas del cuprato superconductor  $\text{Bi}_{1,85}\text{Pb}_{0,35}\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_{3,1}\text{O}_y$ . Las varillas sólidas tienen un radio  $R$ , mientras que las varillas huecas poseen radios internos y externos  $R_1$  y  $R_2$ , respectivamente. La temperatura crítica del material superconductor es  $T_c = 107 \text{ K}$ <sup>40</sup> y la permitividad dieléctrica a altas frecuencias es  $\epsilon_3(\infty) = 12$ .

En esta primera parte del trabajo, se asume que las varillas superconductoras se encuentran inmersas en una matriz de aire ( $\epsilon_1 = 1$ ), además que la permitividad de la cavidad es  $\epsilon_2 = \epsilon_1$ . Por supuesto, esta última condición puede generalizarse y obtener otro tipo de resultados, en el caso donde  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ , ya que las anteriores ecuaciones para

la función dieléctrica y los coeficientes de Fourier pueden ser usadas, por que tales resultados son generales. Con esto, se quiere mostrar el efecto de la fracción de llenado del cascarón sobre la relación de dispersión, además de comparar dichas relaciones de dispersión con aquellas obtenidas para el caso de varillas sólidas. Ya que el rango de interés en frecuencias para los cupratos superconductores está en los Terahertz, se escogió el parámetro de red del cristal fotónico como  $a = 300\mu\text{m}$ . En efecto, considerando una temperatura de  $T = 5\text{ K}$ , la longitud de penetración de London es  $\lambda(5K) = 23\mu\text{m}$ ,<sup>40</sup> por lo tanto la frecuencia de plasma de los electrones superconductores es  $\omega_{sp}(5K) = 3.77\text{ THz}$  ( $\omega_{sp}a/2\pi c = 0.6$ ), la cual se encuentra en la región infrarroja, más exactamente en la región del infrarrojo lejano sub milimétrico. Para una temperatura más elevada, por ejemplo  $T = 15\text{ K}$ , la frecuencia de plasma es  $\omega_{sp}(15K) = 3.58\text{ THz}$  ( $\omega_{sp}a/2\pi c = 0.57$ ), donde se ha usado la ecuación (2.49) para obtener el último valor. Por otra parte, debido a que se quiere despreciar los efectos disipativos, se considera que la temperatura del sistema es baja en comparación con con la temperatura crítica de las varillas superconductoras, de tal forma que la permitividad del material superconductor está dada por la ecuación (2.50).

En la Figura 3.2 se muestra la estructura de bandas de una red cuadrada, para el caso donde el radio externo de los cilindros superconductores es  $R_2 = 0.3a$ . Adicionalmente, se asumen temperaturas de  $T = 5\text{ K}$  y  $T = 15\text{ K}$  en los paneles superiores e inferiores de cada figura, respectivamente. Para el cálculo de las estructuras de bandas, se consideraron varios valores del radio interno ( $R_1$ ), notándose que para el valor de  $R_1 = 0$  se tiene precisamente el caso límite de las varillas sólidas. Para obtener una precisión considerable, se utilizan 441 ondas planas en los cálculos numéricos. Como una característica general de las estructuras de bandas, puede observarse la presencia de una cierta frecuencia de corte ( $\omega_c$ ) por debajo de la frecuencia de plasma del superconductor, donde se inhibe la propagación de las ondas electromagnéticas para frecuencias por debajo de tal frecuencia de corte. Característica bien conocida para el tipo de polarización usada (TM), y bien explicada en la aproximación de longitudes de onda larga.<sup>10</sup>

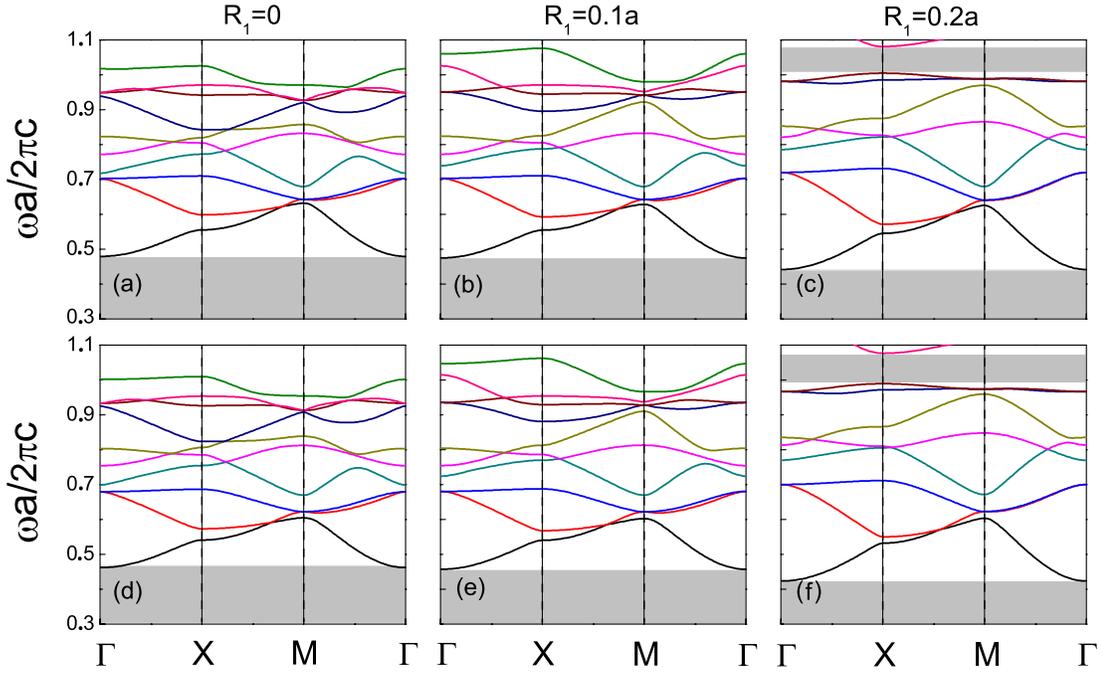


Figura 3.2: Estructura de bandas de una red cuadrada 2D de cilindros con radio externo  $R_2 = 0.3a$ , con  $a = 300\mu m$ . Del lado izquierdo, se consideran varillas sólidas. En el medio  $R_1 = 0.1a$  y al lado derecho para  $R_1 = 0.2a$ . En los paneles superiores e inferiores se asume  $T = 5$  K y  $T = 15$  K, respectivamente.

En la Figura 3.2 puede notarse que cuando el radio interno es  $R_1 = 0.1a$ , pocas variaciones de la estructura de bandas son observadas en comparación con las varillas sólidas, para ambas temperaturas del sistema (paneles (b) y (e)). Pero, cuando el radio interno es  $R_1 = 0.2a$ , se puede observar una diferencia importante con las varillas sólidas, tal diferencia es la separación de las bandas fotónicas, donde la banda más baja se ha desplazado a frecuencias más bajas y por consiguiente la frecuencia de corte. Además, se puede observar a simple vista la apertura de un *band gap* alrededor de la frecuencia (normalizada)  $\omega a/2\pi c = 1.0$ , paneles (c) y (f). De aquí que, al romper la simetría de las varillas sólidas, para formar varillas huecas, tiene como consecuencia la formación de *gaps* fotónicos, aún conservando los mismos parámetros de red y respuestas electromagnéticas. Adicionalmente, se puede observar que los modos son dispersivos, ya que la fracción de llenado no es demasiado pequeña como para despreciarse, y tanto el

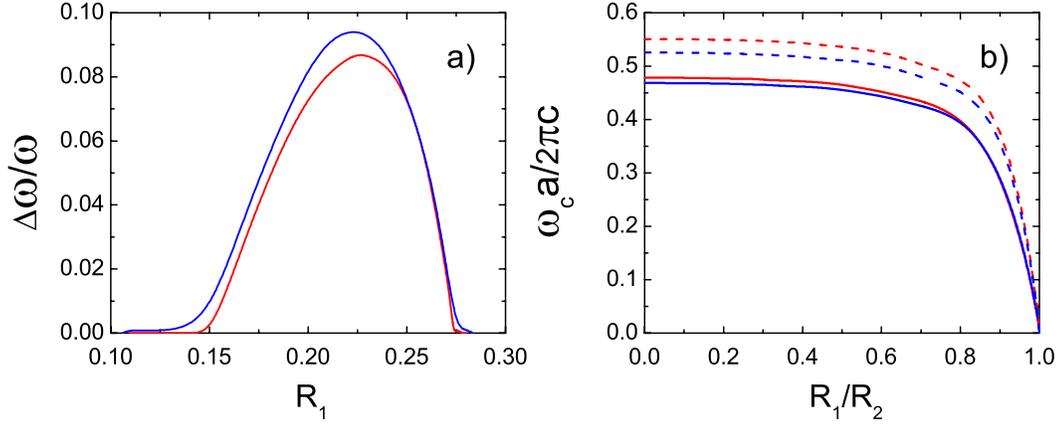


Figura 3.3: a) Comparación de la razón gap-midgap para el gap que se presenta por encima de la frecuencia de corte para las temperaturas 5 K y 15 K. b) Comportamiento del ancho del *band gap* a medida que aumenta el radio interno. Las líneas sólidas y punteadas para el caso en que el radio externo es  $R_2 = 0.3a$  y  $R_2 = 0.4a$ , respectivamente. En ambos paneles, las líneas rojas y azules se utilizan para las temperaturas del sistema  $T = 5$  K y  $T = 15$  K, respectivamente

contraste de las permitividades como el efecto de la frecuencia de plasma son relevantes.

En cuanto al decrecimiento de la frecuencia de corte, éste puede explicarse por medio de argumentos geométricos. Teniendo en cuenta que cuando la fracción de llenado del cascarón disminuye por el incremento del radio interno, los modos fotónicos se pueden ver como modos electromagnéticos en el vacío, en el límite donde la fracción de llenado se hace nula.<sup>9</sup> Adicionalmente, los modos fotónicos comienzan a separarse a medida que el radio interno aumenta, y nuevos *band gaps* aparecen debido al contraste de las permitividades del cristal fotónico.

En la Figura 3.3 se puede observar el comportamiento de la frecuencia de corte con respecto a la variación del radio interno de las varillas (panel b)). En el panel a) se muestra el comportamiento del ancho del *band gap* por medio de la razón gap-midgap de los *band gaps* más anchos por encima de la frecuencia de corte. Dicha razón se define como el cociente entre el ancho del respectivo gap y su valor medio. Las líneas rojas y azules se usan para diferenciar las temperaturas de 5 K y 15 K. En el panel b), se observa el decrecimiento de la frecuencia de plasma a medida que el radio interno

aumenta. Aquí se ha normalizado el radio interno con respecto al radio externo para observar el decrecimiento de la frecuencia de plasma para los valores de radio externo  $R_2 = 0.3a$  y  $R_2 = 0.4a$ , en donde se representan las curvas para cada radio por medio de líneas sólidas y punteadas respectivamente.

Otro factor que influye apreciablemente en la disminución de la frecuencia de corte, es la variación de la temperatura del sistema. Cuando la temperatura aumenta, la frecuencia de plasma disminuye y como consecuencia de esto, la permitividad dieléctrica de las varillas aumenta. De esta manera, se reducen (bajan) las frecuencias en la estructura de bandas, resultado que está de acuerdo con el teorema variacional electromagnético.<sup>33</sup>

En lo que se refiere a la formación de los *band gaps*, en la Figura 3.4 se puede ver de manera más precisa la formación y la respectiva evolución de los *band gaps* fotónicos en la red cuadrada para el caso de radio externo  $R_2 = 0.3a$ . En los paneles a) y b), se observan los mapas de *band gaps* por encima de la frecuencia de corte para temperaturas de 5 K y 15 K, respectivamente. En el panel a), a partir del valor del radio interno  $R_1 = 0.12a$  de las varillas, se forman dos *band gaps* fotónicos, los cuales inicialmente crecen en cuanto a su ancho a medida que aumenta el radio interno, alcanzando un ancho máximo, y que decrece hasta anularse para el valor de radio interno  $R_1 = 0.22a$  y  $R_1 = 0.28a$  para los *gaps* inferior y superior respectivamente. En el panel b), se puede observar que los *gaps* se abren y cierran para valores de los radios cercanos a los que se presentan en el panel a). De los paneles a) y b) se puede observar que el mayor ancho del *band gap* se resenta alrededor del valor de radio interno  $R_1 = 0.23a$  para el caso de  $T = 5$  K y  $R_1 = 0.22a$  para el caso de temperatura  $T = 15$  K. En los paneles c) y d), se muestra el comportamiento de la razón gap-midgap como función del radio interno para las temperaturas 5 K y 15 K en cada panel, respectivamente. Allí se aprecia más claramente el comportamiento no monótono del ancho de los *band gaps* fotónicos con respecto al radio interno de las varillas. Este comportamiento no monótono puede explicarse, teniendo en cuenta que para valores del radio interno muy próximos al radio externo, la fracción de material superconductor en el cristal fotónico se va volviendo insignificante y el sistema tiende a comportarse como un medio no dispersivo.

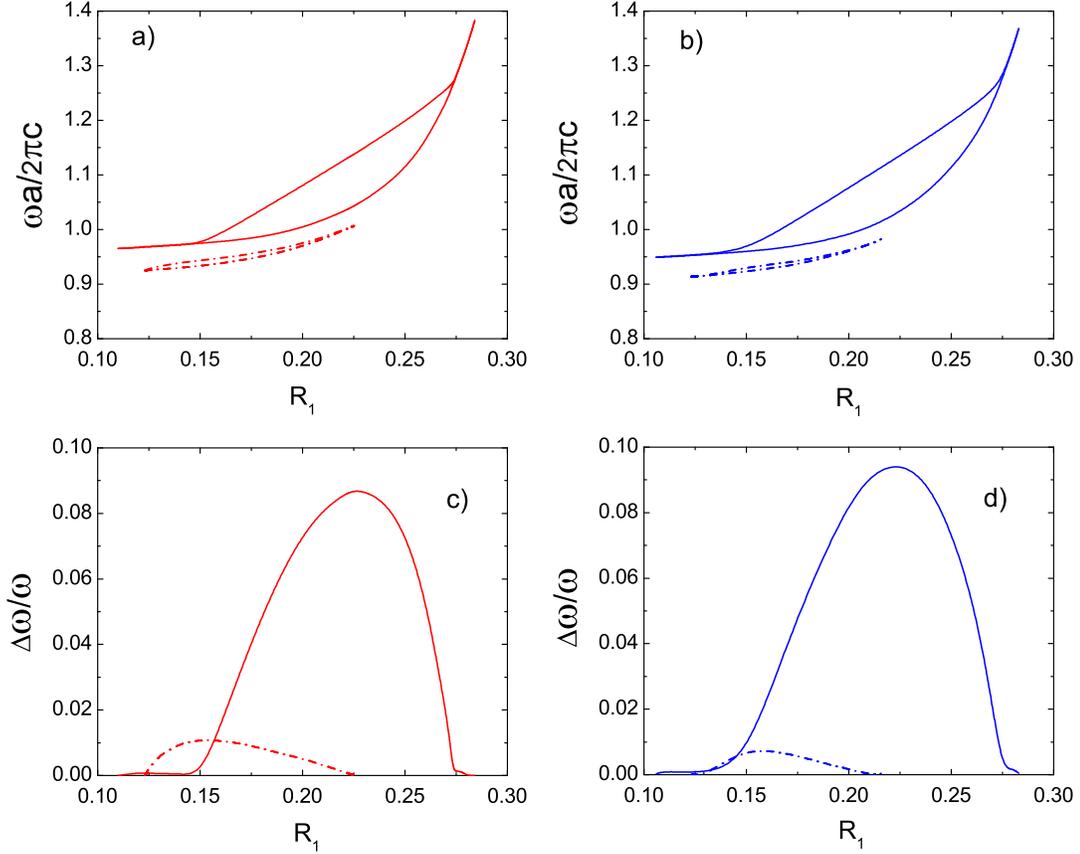


Figura 3.4: Mapa de los *band gaps* fotónicos, por encima de la frecuencia de corte para el caso del radio externo  $R_2 = 0.3a$ , como función del radio interno para a)  $T = 5$  K, b)  $T = 15$  K. c) Razón gap-midgap para los *band gaps* que se muestran en el panel a). d) Razón gap-midgap para los *band gaps* que se muestran en el panel b). Las líneas sólidas y punteadas relacionan los gaps y la razón gap-midgap entre los paneles para mayor claridad. Las líneas rojas y azules para  $T = 5$  K  $T = 15$  K, respectivamente.

Por otra parte, en la Figura 3.5 se muestra la estructura de bandas fotónicas de una red cuadrada, utilizando un radio externo  $R_2 = 0.4a$  para las varillas cilíndricas. Se utiliza la misma configuración en los paneles que se muestran en la Figura 3.2. Al ser comparada con la Figura 3.2, en la Figura 3.5 se puede observar el mismo comportamiento de la frecuencia de corte y la separación de los modos cuando la temperatura y el radio interno de las varillas aumentan, por lo tanto las mismas conclusiones son válidas. Sin embargo, una característica apreciable para el valor de radio interno  $R_1 = 0.2a$ ,

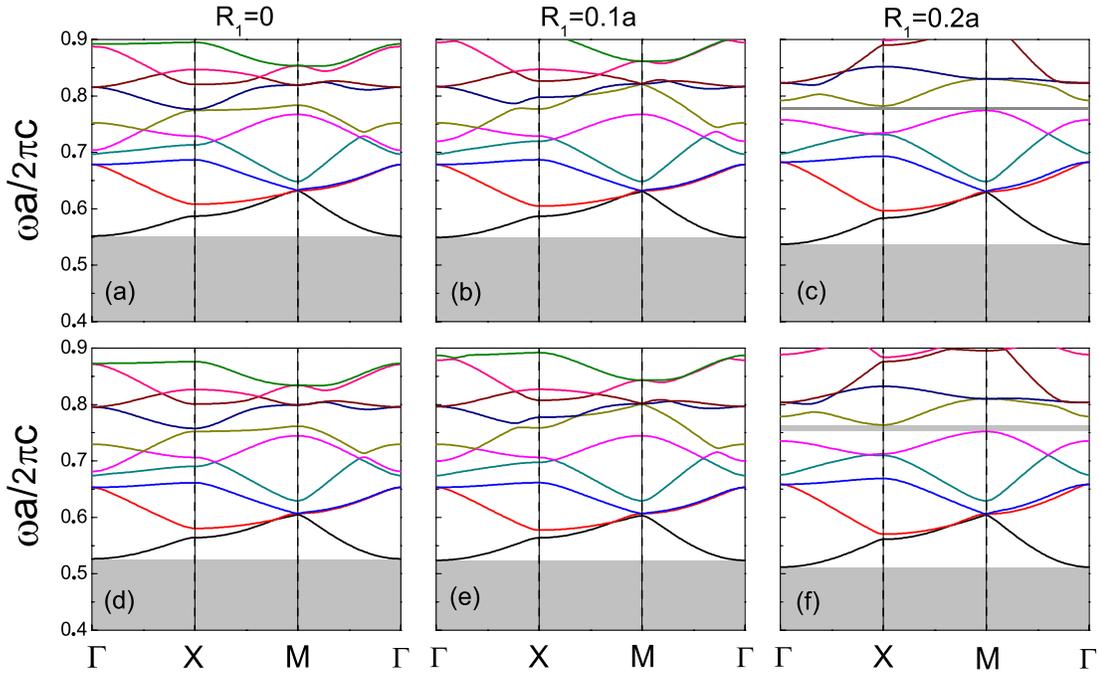


Figura 3.5: Estructura de bandas de una red cuadrada 2D de cilindros con radio externo  $R_2 = 0.4a$ , Como en la Figura 3.2, la misma configuración de los paneles es usada aquí.

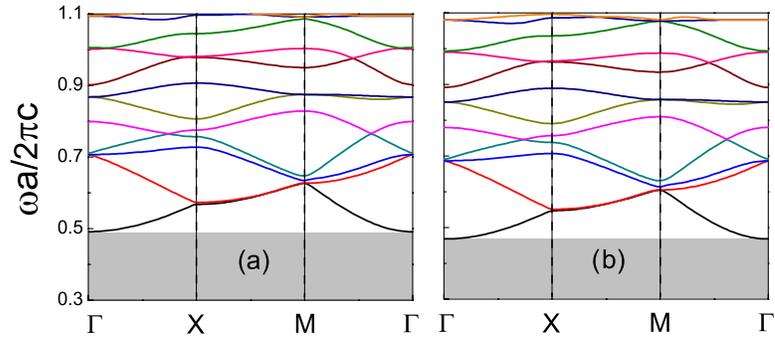


Figura 3.6: Estructura de bandas de una red cuadrada 2D de cilindros superconductores para los valores  $R_1 = 0.3a$  y  $R_2 = 0.4a$  de los radios interno y externo, a las temperaturas del sistema  $T = 5$  K (a), y  $T = 15$  K (b).

es que los *band gaps* fotónicos formados son más angostos, tanto a la temperaturas de 5 K como a 15 K, esto se muestra en los paneles (c) y (f). Se debe tener en cuenta que la anchura de los *band gaps* fotónicos es muy pequeña en comparación con los *band*

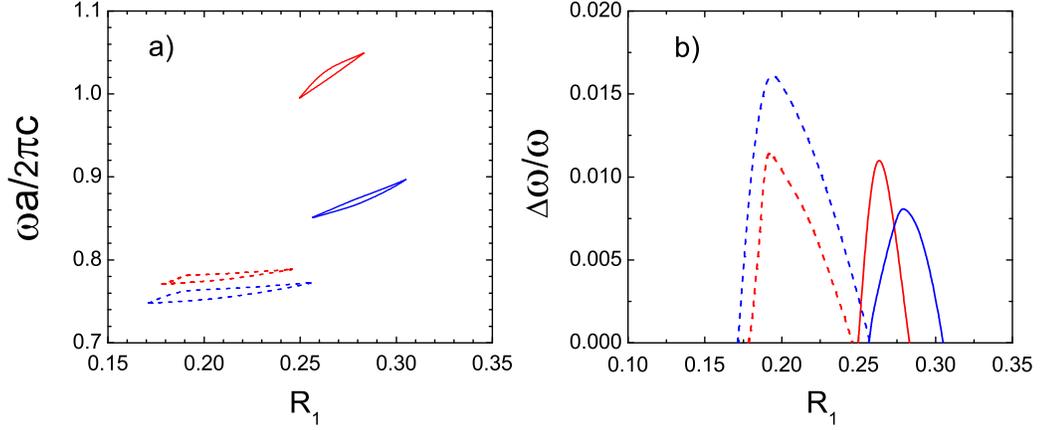


Figura 3.7: a) Mapa de los *band gaps* fotónicos para la red cuadrada, considerando el radio externo  $R_2 = 0.4a$ . b) Razon gap-midgap para cada *band gap* que se muestra en el panel a). Se relacionan los gaps y la razón gap-midgap por medio de líneas sólidas y punteadas. Las líneas rojas y azules son para las temperaturas del sistema  $T = 5$  K y  $T = 15$  K, respectivamente.

*gaps* que se muestran en la Figura 3.2. Es conveniente resaltar que la constante de red del cristal fotónico permanece inalterada, con relación al caso anterior en que el radio externo de las varillas era  $R_2 = 0.3a$ , y por ende los bordes externos de las varillas que conforman el cristal fotónico, ahora están más próximos. Cuando el radio externo de las varillas es  $R_2 = 0.4a$ , para el caso de un radio interno  $R_1 = 0.3a$ , no se pueden observar con facilidad los *band gaps* fotónicos por encima de la frecuencia de corte, esto se puede apreciar en la Figura 3.6, donde los paneles (a) y (b) corresponden a temperaturas de 5K y 15K, respectivamente. En esta figura, las similitudes de los modos fotónicos están presentes, pero se muestra de nuevo el desplazamiento a frecuencias más bajas de la estructura de bandas fotónicas debido al incremento en la temperatura del sistema.

Teniendo en cuenta que el ancho y ubicación en la estructura de bandas de los *band gaps* fotónicos dependen tanto de la temperatura del sistema, como de la relación entre los radios interno y externo de las varillas, se puede aprovechar esta dependencia para la aplicación en dispositivos ópticos que requieran controlar dichos *band gaps*. En este caso, el control de los *band gaps* podría realizarse con la temperatura, como parámetro

externo, al igual que con la geometría de las varillas.

En la Figura 3.7 panel a), se muestran los map gaps fotónicos para el caso de una red cuadrada formada por varillas con radio externo  $R_2 = 0.4a$  para las mismas temperaturas mencionadas anteriormente. En tal figura se utiliza nuevamente la convención de las líneas rojas y azules, para temperaturas de 5 K y 15 K, respectivamente. De nuevo, se puede observar fácilmente que al aumentar la temperatura del sistema, los *band gaps* fotónicos tienden a desplazarse hacia rangos de menores frecuencias. En el panel b), se muestra la razón gap-midgap de los band gaps que se muestran en el panel a). Se puede observar en el panel b) que para ambos casos de temperaturas, no se presentan dos *band gaps* simultáneamente para los mismos valores de radio interno.

### 3.2. Estructura de bandas fotónicas para varillas superconductoras en una red triangular

En la segunda etapa del trabajo, se considera una red con simetría triangular para el cálculo de la estructura de bandas. Igual que en el caso de la red cuadrada, se asumen varillas superconductoras huecas como elementos básicos constituyentes del cristal fotónico. En la Figura 3.8 se muestra la estructura de bandas fotónicas utilizando varillas con un radio externo  $R_2 = 0.3a$ , en donde los parámetros y la configuración de los paneles son los mismos que en las figura anteriores. La frecuencia de corte aparece nuevamente en esta geometría, y ninguna propagación de modos electromagnéticos están presentes por debajo de esta frecuencia. Para el caso de la red triangular, se puede ver que cuando se aumentan la temperatura y el radio interno, la estructura de bandas se desplaza a frecuencias más bajas y se disminuye la frecuencia de corte, por lo tanto, pueden obtenerse conclusiones similares a las obtenidas para la red cuadrada.

Desde el punto de vista de los *band gaps* fotónicos, pueden observarse diferencias importantes en las estructuras de bandas, calculadas para la red triangular, con respecto a las obtenidas en el caso de la red cuadrada. Por ejemplo, para las varillas sólidas podemos observar, en la Figura 3.8, tres *band gaps* fotónicos a las temperaturas consi-

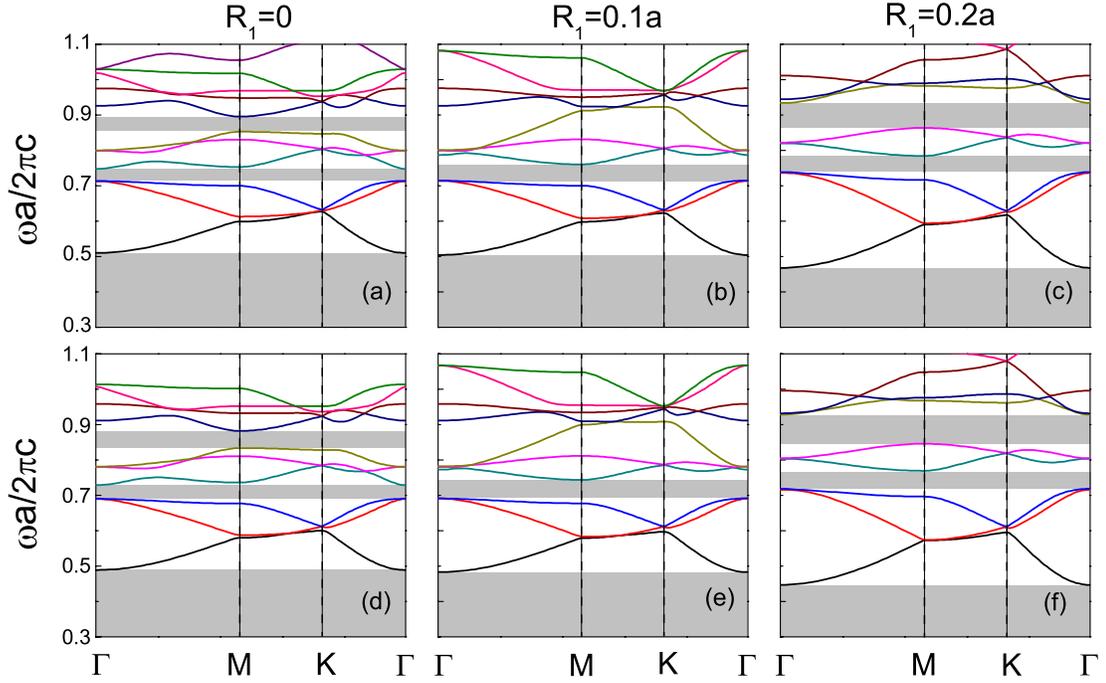


Figura 3.8: Estructura de bandas de una red triangular para  $R_2 = 0.3a$  para distintos valores del radio interno  $R_1$ . En los paneles superiores e inferiores se presentan las estructuras de bandas para las temperaturas de 5 K y 15 K, respectivamente.

deradas, dos de ellos por encima de la frecuencia de corte. Para  $R_1 = 0.1a$ , aparecen únicamente dos *band gaps* fotónicos, en donde, por encima de la frecuencia normalizada  $\omega a/2\pi c = 0.7$ , un solo *band gap* está presente. Es decir, ha desaparecido uno de los *band gaps* fotónicos, que existía por encima de la frecuencia de corte, cuando se consideraron las varillas sólidas. Para un radio interno  $R_1 = 0.2a$ , se aprecia nuevamente la formación de los tres *band gaps* fotónicos, tal como en el caso de las varillas sólidas, para frecuencias similares. También puede notarse que, usando varillas huecas, los *band gaps* fotónicos son más anchos que aquellos obtenidos cuando se utilizan varillas sólidas, esto para ambas temperaturas del sistema. Lo anteriormente enunciado, puede observarse con más claridad en la Figura 3.9. Aquí se muestran los map gaps fotónicos para la red triangular, como función del radio interno  $R_1$  de las varillas, y para las dos temperaturas consideradas. En el panel a) se considera la temperatura de 5 K y en el

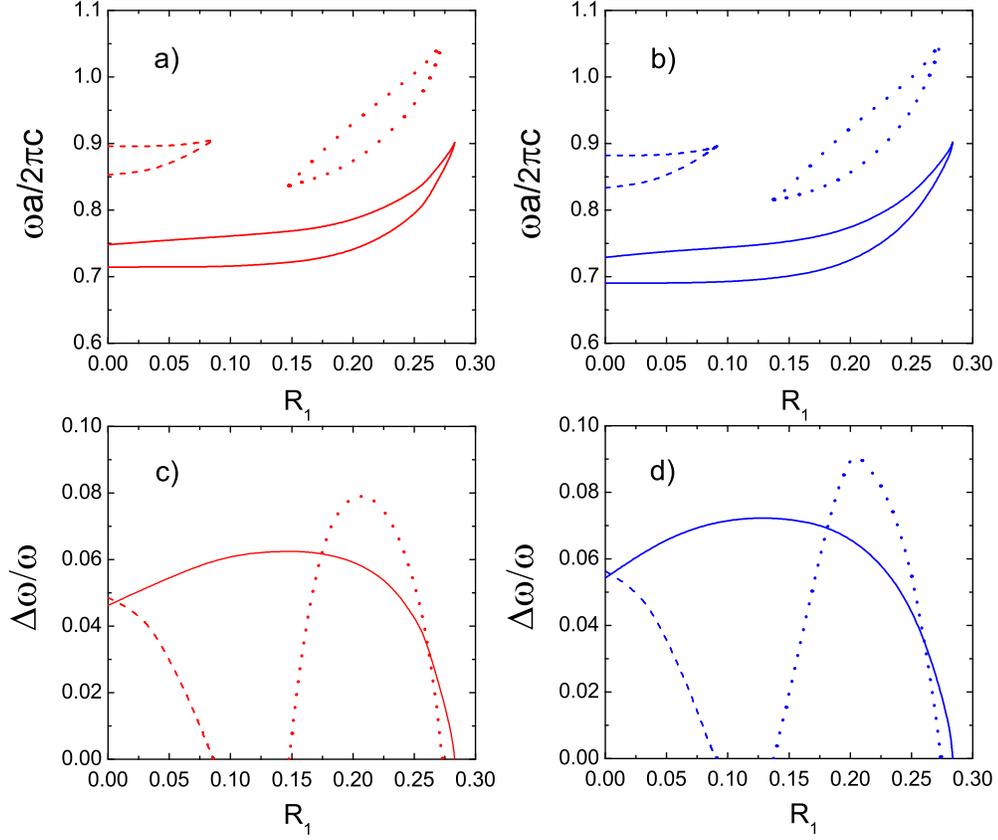


Figura 3.9: Mapa de los *band gaps* fotónicos para la red triangular, considerando el radio externo  $R_2 = 0.3a$  para las temperaturas 5K y 15 K, paneles a) y b) respectivamente. c) razón gap-midgap para los *band gaps* del panel a). d) razón gap-midgap para los *band gaps* del panel b).

panel b) la de 15 K. De manera general, podemos ver claramente que al aumentar el radio interno, desaparece y luego reaparece un *band gap* fotónico, como se mencionó en la discusión de las estructuras de bandas. En el panel a), se puede observar como un gap desaparece para el valor de radio interno  $R_1 = 0.086a$  y aparece uno nuevo para el valor de radio interno  $R_1 = 0.148a$ , desapareciendo éste último en el valor de radio interno  $R_1 = 0.273a$  aproximadamente. En el panel b), la desaparición del *band gap* ocurre para el radio interno  $R_1 = 0.091a$ , la aparición del nuevo *band gap* ocurre para el valor  $R_1 = 0.137a$  y la desaparición de éste ocurre para el valor de radio interno

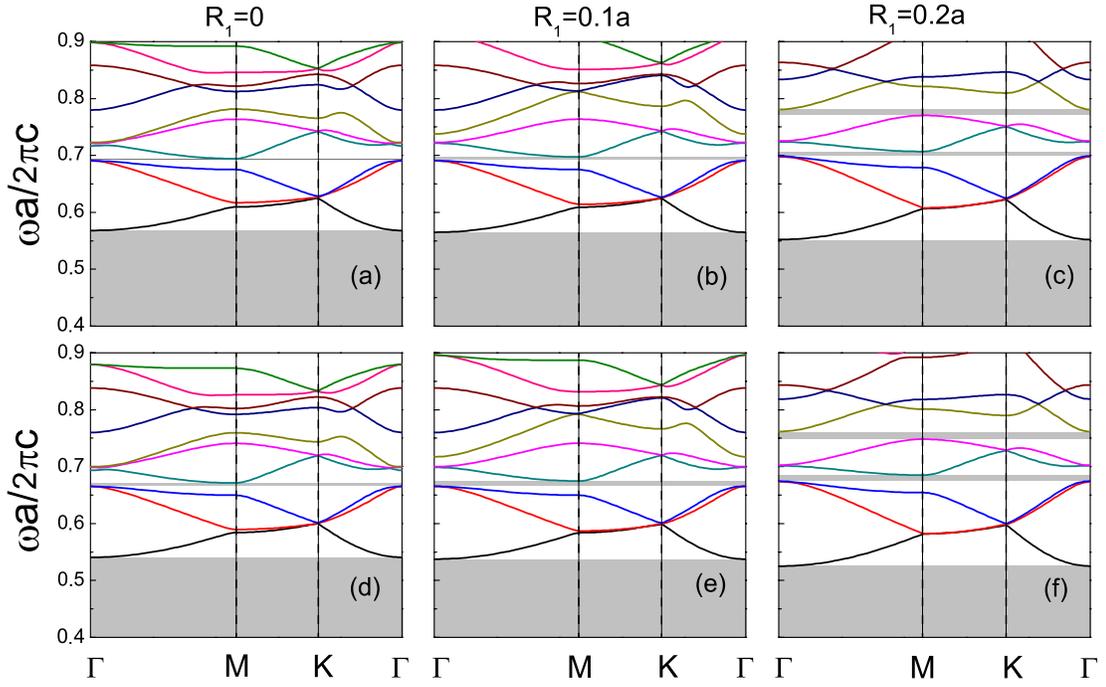


Figura 3.10: Estructura de bandas de una red triangular para  $R_2 = 0.4a$ . Como en la Figura 3.2, la misma configuración en los paneles es usada aquí.

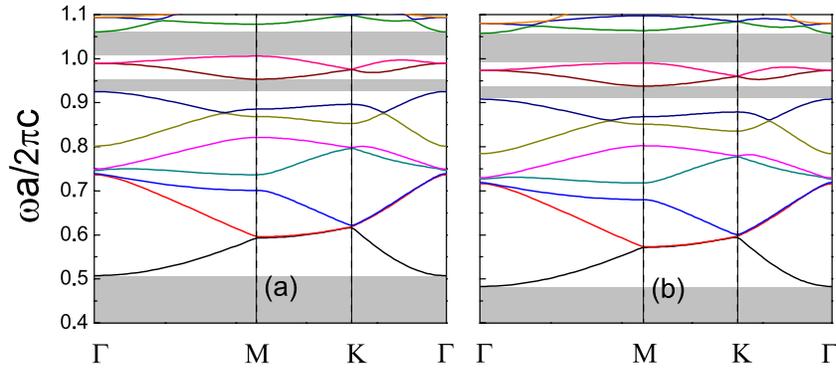


Figura 3.11: Estructura de bandas de una red triangular 2D de cilindros superconductores para los valores  $R_2 = 0.4a$  y  $R_1 = 0.3a$  de los radios, a las temperaturas del sistema  $T = 5$  K (a), y  $T = 15$  K (b).

$R_1 = 0.274a$  aproximadamente. Tal como ocurre en el caso de la red cuadrada, en este caso los *band gaps* fotónicos se desplazan hacia regiones de menor frecuencia, al

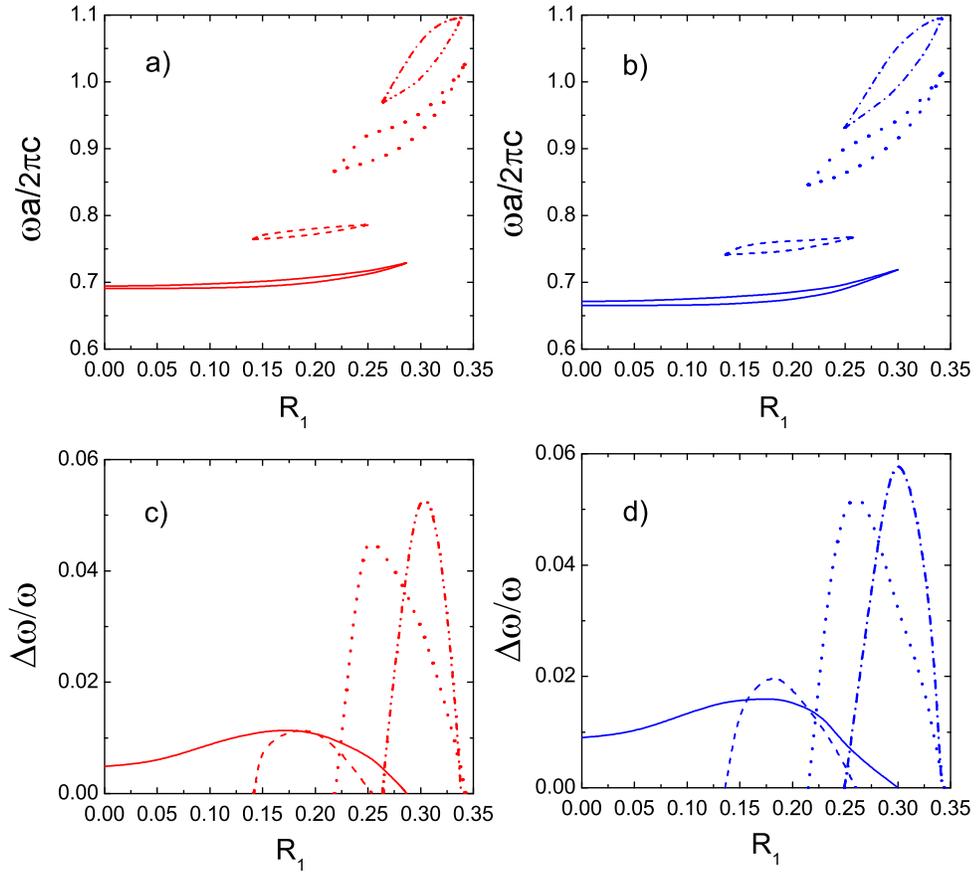


Figura 3.12: Mapa de los *band gaps* fotónicos para la red triangular, considerando el radio externo  $R_2 = 0.4a$  para las temperaturas 5 K y 15 K, paneles a) y b), respectivamente. c) Razón gap-midgap para los *band gaps* del panel a). d) Razón gap-midgap para los *band gaps* del panel b). Las líneas rojas y azules son para las temperaturas del sistema  $T = 5$  K y  $T = 15$  K, respectivamente.

aumentar la temperatura del sistema.

En la Figura 3.10 se presenta la estructura de bandas fotónicas para una red triangular formada por varillas superconductoras huecas, con un radio externo  $R_2 = 0.4a$ . De nuevo, se utiliza la misma configuración en los paneles como en las figuras anteriores. En este caso, para el cristal fotónico basado en varillas sólidas, sólo aparece un pequeño *band gap* por encima de la frecuencia de corte alrededor de la frecuencia normalizada  $\omega a/2\pi c = 0.69$ , a diferencia de los dos *band gaps* que se forman, por encima de la

frecuencia de corte, cuando  $R_2 = 0.3a$  (Figura 3.8). Para el caso de varillas huecas, con un radio interno  $R_1 = 0.1a$ , la situación es muy parecida a la observada cuando se tienen las varillas sólidas, salvo por un aumento muy pequeño en el ancho del *band gap* fotónico ubicado por encima de la frecuencia de corte, lo cual evidencia una pequeña separación adicional entre los diferentes modos fotónicos. Cuando se utilizan varillas huecas con radio interno  $R_1 = 0.2a$ , aparece un *band gap* adicional, alrededor de la frecuencia  $\omega a/2\pi c = 0.77$  para  $T = 5$  K (panel c)), y un gap alrededor de  $\omega a/2\pi c = 0.74$  para el caso de  $T = 15$  K (panel f)). Notándose un incremento en el ancho de los *band gaps* fotónicos, en relación con las dos situaciones anteriores. Para cada uno de los valores del radio interno de las varillas, se presenta un comportamiento similar de la estructura de bandas, a las temperaturas  $T = 5$  K y  $T = 15$  K. Sin embargo, puede apreciarse el típico desplazamiento de las bandas con el cambio de la temperatura.

Otro de los resultados obtenidos mediante el uso de la red triangular, para un radio interno de las varillas  $R_1 = 0.3a$  y un radio externo  $R_2 = 0.4a$ , es la formación de *band gaps* fotónicos por encima de la frecuencia de corte, los cuales no están presentes en el caso de la red cuadrada (Figura 3.6). En la Figura 3.11 se muestran las gráficas de la estructuras de bandas fotónicas para la red triangular, en la cual los paneles (a) y (b) se refieren a las temperaturas de 5 K y 15 K, respectivamente. En esta figura, están presentes dos *band gaps* por encima de la frecuencia normalizada  $\omega a/2\pi c = 0.9$ . Además, se puede ver con mayor claridad, el desplazamiento de las bandas fotónicas, hacia frecuencias más bajas, debido al aumento de temperatura del sistema. En la Figura 3.12 se muestra el map gap fotónico, en función del radio interno  $R_1$ , para el caso de la red triangular formada por varillas con radio externo  $R_2 = 0.4a$  para las temperaturas  $T = 5$  K y  $T = 15$  K (paneles a) y b)). Se puede ver la desaparición y formación de *band gaps* fotónicos a medida que el radio interno aumenta en ambos paneles. En el panel c), un aspecto importante de resaltar es que para valores del radio interno entre  $R_1 = 0.22a$  y  $R_1 = 0.25a$ , se pueden obtener tres *band gaps* fotónicos. En el panel d), para valores del radio interno entre  $R_1 = 0.215a$  y  $R_1 = 0.25a$ , se pueden obtener tres *band gaps* fotónicos. Adicionalmente, para valores de radio interno

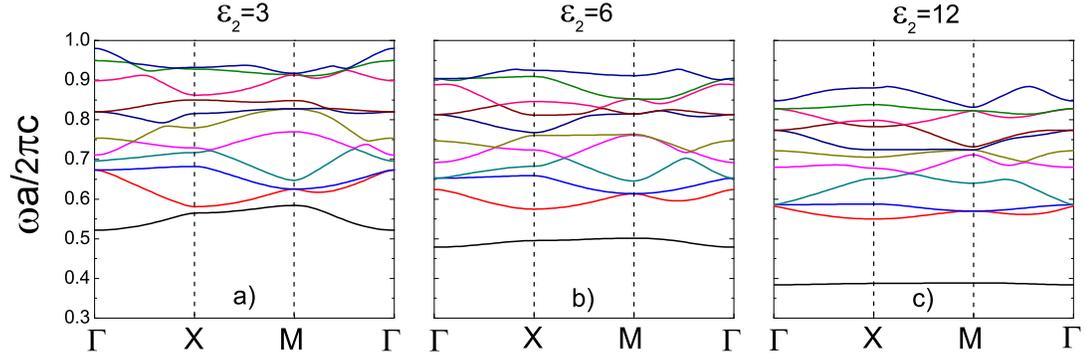


Figura 3.13: Estructura de bandas de una red cuadrada de cilindros dieléctricos cubiertos por una capa superconductora para distintos valores de la permitividad de las varillas dieléctricas. El radio de la varilla dieléctrica es  $R_1 = 0.2a$  y el espesor de la capa superconductora es  $R_2 - R_1 = 0.2a$ . Se considera una temperatura de  $T = 5$  K.

entre  $R_1 = 0.25a$  y  $R_1 = 0.26a$ , se pueden obtener cuatro *band gaps*. Esto nos provee una evidencia adicional de que el uso de varillas superconductoras huecas, en lugar de sólidas, puede enriquecer considerablemente la estructura de bandas de dichos cristales fotónicos.

### 3.3. Estructura de bandas fotónicas para varillas superconductoras huecas con núcleo dieléctrico

Desde el punto de vista experimental, no parece una tarea sencilla fabricar varillas superconductoras huecas, manteniendo una orientación muy bien definida de los ejes cristalográficos del material de que están hechas dichas varillas. Experimentalmente sería más factible, crecer capas superconductoras sobre cilindros de material no magnético, tal como se fabrican las muestras para estudiar el efecto Little-Parks en superconductores. De esta manera, se obtendrían varillas superconductoras huecas, con un núcleo de material aislante, el cual está caracterizado por un cierto valor de su constante dieléctrica. En esta última parte del trabajo, se estudia un cristal fotónico conformado por este tipo de varillas, dispuestas en una red cuadrada. Se calculan estructuras de bandas fotónicas para diferentes valores de la constante dieléctrica y el

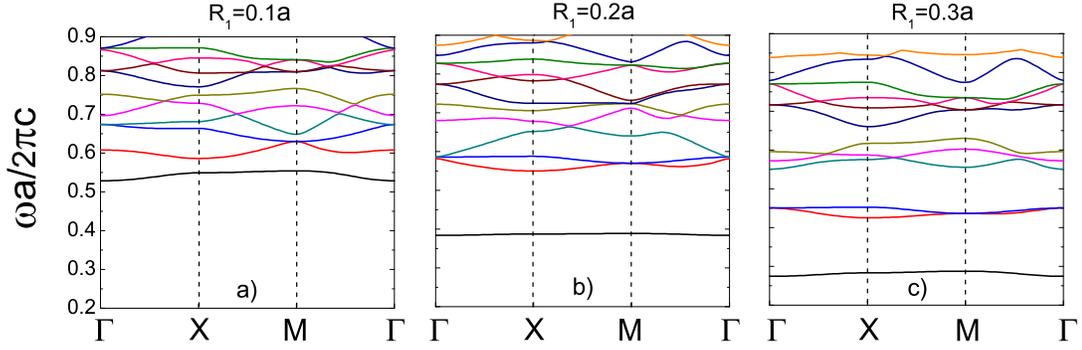


Figura 3.14: Estructura de bandas de una red cuadrada de cilindros dieléctricos cubiertos por una capa superconductora para distintos valores del radio interno. La permitividad dieléctrica considerada para las varillas dieléctricas es  $\epsilon_2 = 12$ . El espesor de la capa superconductora es  $R_2 - R_1 = 0.2a$ , y la temperatura del sistema es  $T = 5$  K.

radio de los núcleos dieléctricos.

En la Figura 3.13 se muestran las estructuras de bandas para varillas dieléctricas de diferente permitividad, recubiertas por cascarones de material superconductor, las cuales forman una red cuadrada. El radio de las varillas dieléctricas es  $R_1 = 0.2a$  y el espesor de la capa superconductor es  $R_2 - R_1 = 0.2a$ . Se puede ver que a medida que la permitividad de las varillas dieléctricas aumenta, las bandas fotónicas se desplazan hacia bajas frecuencias, resultado ya esperado debido al teorema variacional. Por otra parte, las bandas de frecuencias bajas, tienden a volverse bandas aplanadas, de tal forma que se obtiene un estado casi localizado para la primera banda, cuando la permitividad de las varillas dieléctricas es  $\epsilon_2 = 12$ . En consecuencia, se pueden obtener este tipo de estados, a medida que la permitividad de las varillas dieléctricas se hace más alta, resultado también observado en materiales con frecuencias de plasma grandes.<sup>15</sup>

Por otra parte, en la Figura 3.14 se muestran las estructuras de bandas para el caso en el cual la permitividad de las varillas es  $\epsilon_2 = 12$ , donde se asume un radio externo  $R_2 = 0.4a$  para el cascarón superconductor, y se varía el radio de las varillas dieléctricas ( $R_1$ ). En tal figura, se puede observar el desplazamiento de las bandas fotónicas hacia bajas frecuencias a medida que el radio de las varillas dieléctricas aumenta. Por otra parte, las bandas de frecuencias bajas se vuelven menos dispersivas hasta el valor  $R_1 =$

0.2a, y la formación de *band gaps* debido a las bandas planas se evidencia de manera clara. Pero, a medida que el radio de las varillas dieléctricas supera este valor, las bandas se vuelven nuevamente dispersivas, debido a que la fracción de llenado del material dieléctrico empieza a ser mucho mayor que la fracción de llenado de la capa del material superconductor.

De esta manera, puede apreciarse que el incremento en la permitividad del núcleo dieléctrico, tiene como efecto la tendencia a aplanar las bandas fotónicas de bajas frecuencias, siempre y cuando el espesor del cascarón superconductor no sea muy pequeño en comparación con el radio del núcleo. Ese aplanamiento de las bandas, conduciría a la formación de estados localizados a bajas frecuencias.

## CAPÍTULO 4

---

# Conclusiones

---

Mediante el método de expansión en ondas planas, se han calculado las estructuras de bandas fotónicas para redes cuadradas y triangulares, usando varillas superconductoras sólidas y huecas, al igual que cilindros dieléctricos recubiertos por capas superconductoras.

Se ha mostrado la formación de nuevos *band gaps* fotónicos en las estructuras de bandas de los dos tipos de redes considerados con respecto a los *band gaps* obtenidos para el caso de cilindros sólidos. Los *band gaps* obtenidos mediante el sistema de cilindros huecos pueden ser controlados mediante la variación de la temperatura del sistema y del radio interno de las varillas superconductoras. En comparación con las varillas sólidas, el rompimiento de la simetría de tales varillas para formar cilindros huecos, lleva a la formación de los nuevos *band gaps*. Sin embargo, para valores del radio interno muy cercanos al radio externo, los *band gaps* desaparecen debido a que prima el carácter no dispersivo del medio en que están inmersas las varillas.

Los cristales fotónicos basados en una red triangular, exhiben como propiedad característica, la desaparición y posterior reaparición de *band gaps* fotónicos, a medida que se incrementa el radio interno de las varillas huecas. Este hecho no se manifiesta en las estructuras de bandas fotónicas correspondientes a la red cuadrada. Adicionalmente, cuando se utilizan varillas superconductoras sólidas, sólo aparecen *band gaps* fotónicos por encima de la frecuencia de corte, en las estructuras de bandas de las redes triangulares.

Otra característica significativa en ambas clases de redes, es el desplazamiento de las diferentes bandas fotónicas, hacia rangos de frecuencias inferiores, como consecuencia del incremento en la temperatura del sistema. De hecho, cuando se produce tal

aumento de temperatura, la permitividad dieléctrica de las varillas superconductoras aumenta, y la estructura de bandas se desplaza de acuerdo con el teorema variacional electromagnético. Otra característica común a ambos tipos de redes, tiene que ver con el desplazamiento de los *band gaps* fotónicos hacia regiones más altas de frecuencia, con el incremento del radio interno de las varillas huecas.

Por otra parte, cuando se usan varillas dieléctricas cubiertas por una capa superconductora, se obtuvieron bandas planas y nuevos *band gaps* fotónicos. Cuando la permitividad dieléctrica de las varillas posee un valor comparable con la permitividad a altas frecuencias de la capa superconductora, las bandas fotónicas tienden a aplanarse, para valores del radio de las varillas dieléctricas que no sean muy cercanos al radio externo de la capa superconductora. este aplanamiento de las bandas conlleva a la aparición de una especie de estados localizados a bajas frecuencias.

Como perspectiva para desarrollar un trabajo futuro, puede considerarse el caso de polarización TE de las ondas incidentes, de tal manera que se pueda obtener la estructura de bandas y la excitación de modos Mie plasmón-polaritón similares a aquellos modos obtenidos en materiales metálicos,<sup>10</sup> los cuales pueden ser utilizados en aplicaciones tecnológicas, teniendo en cuenta el efecto de la disipación.

## CAPÍTULO 5

---

# Apéndice

---

Para el cálculo de las estructuras de bandas, se utilizó el algoritmo realizado en Matlab, y que se encuentra en la página web

<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/21834-photonic-bands-for-a-2d-photonic-crystal>

La única modificación que se debe realizar al algoritmo es añadir una función en la cual se introduzca la frecuencia de plasma a lo largo del cristal fotónico. Tal función para el caso de la red cuadrada es la siguiente

```
function epsil = epsmat1( r1,r2,n2,n1,n3,b1,b2,N1,N2 )
N = N1*N2;
a=1;
wp2=0;
wp1=0;
wp3=0.6;
epsilon1=zeros(N1,N2);
epsil=zeros(N,N);
f1 = pi * r1^2/(a * a);
f2 = pi * (r2^2 - r1^2)/(a * a);
A = 1;
for l=1:N1
for m=1:N2
for n=1:N1
for p=1:N2
```

---

```

GGx=(l-n)*b1(1)+(m-p)*b2(1);
GGy=(l-n)*b1(2)+(m-p)*b2(2);
GG = sqrt(GGx2 + GGy2);
x = 2 * pi * GG;
if (GG =0)
epsilon1(p, n) = 2 * f1 * (wp22 - wp12) * besselj(1, x * r2)/(x * r2) + ...
(2 * pi/(x * A)) * (wp32 - wp12) * (r2 * besselj(1, x * r2) - r1 * besselj(1, x * r1));
else
epsilon1(p, n) = f1 * wp22 + (1 - f1) * wp12 + f2 * (wp32 - wp12);
end;
end;
end;
end;
u = (l - 1) * N2 + m;
epsil1(u, :) = reshape(epsilon1, 1, N);
end;
end;
end

```

---

# Bibliografía

---

- [1] E. Yablonovitch, Phys. Rev. Lett. **58**, 2059 (1987).
- [2] S. John, Phys. Rev. Lett. **58**, 2486 (1987).
- [3] E. Yablonovitch, T. J. Gmitter, K. M. Leung, Phys. Rev. Lett. **67**, 2295 (1991).
- [4] S. Guldin, S. Hüttner, M. Kolle, M. E. Welland, P. Müller-Buschbaum, R. H. Friend, U. Steiner and N. Tétreault, Nano lett. **10**, 2303 (2010).
- [5] C. Wiesmann, K. Bergenek, N. Linder and U. T. Schwarz, Laser Photon. Rev. **3**, 262 (2009).
- [6] Y. Fan, X. Wang, Proc. Eng. **29**, 2332 (2012).
- [7] F. Poletti, N. V. Wheeler, M. N. Petrovich, N. Baddela, E. Numkam Fokoua, J. R. Hayes, D. R. Gray, Z. Li, R. Slavík and D. J. Richardson, Nature Photonics **7**, 279 (2013).
- [8] M. M. Sigalas, C. T. Chan, K. M. Ho, and C. M. Soukoulis, Phys. Rev. B **52**, 16 (1995).
- [9] V. Kuzmiak, A. A. Maradudin, and F. Pincemin, Phys. Rev. B **50**, 23 (1995).
- [10] K. Sakoda, N. Kawai, T. Ito, A. Chutinan, S. Noda, T. Mitsuyu, K. Hirao, Phys. Rev. B **64**, 045116 (2001).
- [11] Z. Wang, C. T. Chan, W. Zhang, N. Ming, and P. Sheng, Phys. Rev. B **64**, 113108 (2001).
- [12] G. Veronis, R. W. Dutton, and S. Fana, J. Appl. Phys. **97**, 093104 (2005).

- 
- [13] A. Pimenov and A. Loidl, *Phys. Rev. Lett* **96**, 063903 (2006).
- [14] S. Belousov, M. Bogdanova, A. Deinega, S. Eyderman, I. Valuev, Y. Lozovik, I. Polischuk, and B. Potapkin, *Phys. Rev. B* **86**, 174201 (2012).
- [15] W. M. Lee and P. M. Hui, *Phys. Rev. B* **51**, 8634 (1995).
- [16] C. H. Raymond Ooi, T. C. Au Yeung, C. H. Kam, and T. K. Lim, *Phys. Rev. B* **61**, 5920 (2000).
- [17] H. Takeda and K. Yoshino, *Phys. Rev. B* **67**, 245109 (2003).
- [18] H. Takeda and K. Yoshino, *Phys. Rev. B* **70**, 085109 (2004).
- [19] L. Feng, Xiao-Ping Liu, J. Ren, Yue-Feng Tang, Yan-Bin Chen, Yan-Feng Chen, and Yong-Yuan Zhu, *J. Appl. Phys.* **97**, 073104 (2005).
- [20] Ting-Hang Peia and Yang-Tung Huang, *J. Appl. Phys.* **101**, 084502 (2007).
- [21] A.N. Poddubny, E.L. Ivchenko, Yu.E. Lozovik, *Sol. St. Commun.* **146**, 143 (2008).
- [22] A. H. Alya,b, Sang-Wan Ryua, Heng-Tung Hsuec, Chien-Jang Wu, *Mater Chem Phys* **113**, 382 (2009).
- [23] N. N. Dadoenkova, A. E. Zabolotin, I. L. Lyubchanskii, Y. P. Lee, and Th. Rasing, *J. Appl. Phys.* **108**, 093117 (2010).
- [24] Wei-Hsiao Lin, Chien-Jang Wu, Tzong-Jer Yang, and Shoou-Jinn Chang, *Opt. exp.* **26**, 27155 (2010).
- [25] C. H. Raymond Ooi and Qihuang Gong, *J. Appl. Phys.* **110**, 063513 (2011).
- [26] A. Wall-Clarke and S. Savelév, *Phys. Rev. B* **85**, 214521 (2012).
- [27] T. Pana, F. Zhuang and Zhen-Ya Li, *Sol. St. Commun.* **129**, 501 (2004).
- [28] T. Trifonov, L. F. Marsal, A. Rodríguez, J. Pallarès, and R. Alcubilla, *Phys. Rev. B* **70**, 195108 (2004).

- 
- [29] H. Xiao, D.Z. Yao, C.X. Wang, and S. Chen, *Eur. Phys. J. B* **64**, 219 (2008).
- [30] C. A. Duque, N. Porras-Montenegro, S. B. Cavalcanti, and L. E. Oliveira, *J. Appl. Phys.* **105**, 034303 (2009).
- [31] D. Liu, H. Liu, and Y. Gao, *Sol. St. Commun.* **172**, 10 (2013).
- [32] I. A. Sukhoivanov and I. V. Guryev, “*Photonic Crystals: Physics and Practical Modeling*”, Springer (2009).
- [33] J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, R. D. Meade, “*Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*”, Princeton University Press, Princeton (1995).
- [34] C. Kittel “*Introduction to Solid State Physics*”, Wiley, NY (1996).
- [35] K. Sakoda, “*Optical Properties of Photonic Crystals*”, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2005).
- [36] M. Skorobogatiy and J. Yang, “*Fundamentals of Photonic Crystal Guiding*”, Cambridge University Press, Cambridge (2008).
- [37] C. Siglia, T.M. Benson, M. Marciniak, T. Szoplik, (Eds.) “*Photonic Crystals: Physics and Technology*”, Springer-Verlag, Italia (2008).
- [38] A. R. McGurn and A. A. Maradudin, *Phys. Rev. B* **48**, 17576 (1993).
- [39] P. Halevi and F. Ramos-Mendieta, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1875 (2000).
- [40] H. Shibata and T. Yamada, *Phys. Rev. B* **54**, 7500 (1996).