# TEOREMA DE KALMAN TOPOLÓGICO

LILIAN JOHANA CRUZ MERA

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2013

# TEOREMA DE KALMAN TOPOLÓGICO

LILIAN JOHANA CRUZ MERA

Trabajo de investigación presentado para optar
al título de Magister en Matemáticas.

Director
Guillermo Ortíz Rico.
Ph.D

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2013

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

LILIAN JOHANA CRUZ MERA, 1981

# TEOREMA DE KALMAN TOPOLÓGICO

**Palabras claves**: Categorías duales, retículos distributivos, Teorema de Kalman, Álgebras de De Morgan, Álgebras de Kleene, espacios topológicos estructurados.

SANTIAGO DE CALI
2013

# DEDICATORIA

*A mi hijo, mi familia.*

# AGRADECIMIENTOS

*Quiero agradecer a mi familia por su apoyo, a Oscar por su compañía y cariño y al profesor Guillermo Ortíz, por darme la oportunidad de trabajar con él este proyecto.*

# Índice general

# RESUMEN

En términos propios del Álgebra Universal, el Teorema de Kalman afirma que las variedades generadas por las álgebras de De Morgan Booleana de dos elementos, el álgebra de Kleene de tres elementos y el álgebra Diamante de cuatro elementos están relacionadas de manera única.
En este trabajo, se traslada el Teorema de Kalman a un lenguaje más general y moderno, el de la teoría de categórias via dualidades, al reconstruir los clones que dan las dualidades fuertes sobre cada una de las variedades generadas por las álgebras de De Morgan. Los clones encontrados generan a su vez la categoría de los espacios topológicos estructurados, a los cuales también se traslada el Teorema de Kalman, es decir, se prueba que éstos espacios están relacionados de manera única de la misma manera que su comtraparte algebraica.

# INTRODUCCIÓN

En su deseo por entender las álgebras Booleanas, Stone en 1936, descubrió un teorema de representación para todas las álgebras Booleanas que proporciona a los algebristas una forma de entender esta estructura de una manera más práctica. En el lenguaje moderno, Stone probó que la categoría de las álgebras Booleanas es dualmente equivalente a la categoría de los espacios Booleanos. Esto lo logró al usar espacios topológicos para construir la representación y al probar que toda álgebra Booleana es isomorfa al álgebra de todos los conjuntos abiertos y cerrados (clopen) de un espacio compacto totalmente disconexo.

En nuestro trabajo, nos interesa realizar esta técnica, con álgebras un poco más generales que el álgebra de Bool y poder representar un teorema de la teoría de retículos a un lenguaje más sofisticado y general utilizando la teoría de categorías y representaciones para pasar de una estructura a otra, de una forma similar a como lo hizo Stone.

Recientes estudios matemáticos han probado que aparte de la dualidad mencionada anteriormente, existen otros tipos de dualidades entre las álgebras finitas, muchas de las cuales son muy importantes tanto para las matemáticas como para las ciencias de la computación. Entre éstas se encuentra la dualidad de Priestley (1970) entre retículos distributivos y los espacios de Priestley [6], [10] y [15]. La importancia de estos estudios de representación radica en que no sólo son útiles para entender las estructuras, sino también son útiles en el campo de las ciencias de la computación interesadas en las lógicas no clásicas, las cuales pueden modelar mejor la toma de decisiones que la lógica Booleana. En este trabajo nos interesa precisamente los resultados que se obtienen al estudiar ciertas estructuras como la contraparte algebraica y topológica de algunas lógicas no clásicas, pues un problema algebraico puede ser resuelto muy fácilmente en otras áreas como la topológica.

Por ejemplo, si trabajamos con un objeto finito $M$ el cual posee una estructura algebraica $\underline{\mathbf{M}}$ podemos obtener del mismo objeto una estructura topológica $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$. Así $M$ tiene dos personalidades que generan dos categorías superficialmente distintas, la algebraica $\mathcal{Q}$ y la topológica $\mathcal{X}$, que bajo condiciones adecuadas llegan a ser un espejo una de la otra. Es precisamente este hecho, el que motiva nuestro trabajo. Las álgebras de De Morgan son estructuras algebraicas con aplicaciones en otras áreas diferentes a la matemática y quizá encontrar y estudiar su contraparte topológico pueda generar nuevos resultados.

El Teorema de Kalman ampliamente conocido, formulado en el artículo de 1958 [12] para la teoría de retículos, afirma en otro lenguaje, que las variedades generadas por el álgebra de De Morgan de cuatro elementos, tiene dos subvariedades generadas por las álgebras de tres y dos elementos que son las álgebras de Kleene y de Bool respectivamente. En términos de la lógica matemática, esto significa que las lógicas generadas por las las álgebras de De Morgan son comparables, siendo la Booleana la más fuerte y la de De Morgan la más débil. Siguiendo estos lineamientos, surgió la pregunta si este teorema pudiera o no tener su formulación en el lado topológico via dualidades y la respuesta fue afirmativa. Entonces, producto de la investigación se logró trasladar el Teorema de Kalman a un lenguaje más general y moderno, el de la teoría de categorías y su formulación en los espacios topológicos generados por los duales de las álgebras de De Morgan.

En vía de desarrollar esta construcción se realizaron varios aportes como: la reformulación del Teorema de Kalman en el lenguaje de la teoría de categorías, el cual permite incluir una mirada topológica; la demostración alternativa del Teorema de Stone, utilizando transformaciones naturales y teoremas de dualidad fuerte, para cambiar los funtores por los conocidos en la literatura [10, 15]; la demostración de una consecuencia del teorema de dualidad fuerte para el álgebra de Kleene citado en [6], el cual permite pasar de un espacio topológico que pertenece a la cuasi-variedad topológica a un álgebra de Kleene; se encontraron las 55 subálgebras junto con sus respectivas representaciones gráficas, para mostrar cómo actúan las construcciones admisibles por vinculación y cómo sólo dos operaciones vinculan fuertemente al resto de ellas y por último, determinamos que, aunque el Teorema de Kalman se puede trasladar a los espacios topológicos, no así la parte lógica que conlleva el teorema, pues las cuasi-variedades topológicas encontradas no son estándar [8], lo que implica que estas categorías no se pueden axiomatizar como su contraparte algebraica. De esta forma desarrollaremos el presente trabajo en cinco capítulos los cuales están distribuidos de la siguiente manera:

En el primer capítulo, los preliminares, se exponen de manera breve algunos conceptos que se usarán a lo largo de todo el trabajo. Están relacionados con teoría de retículos, álgebra universal, teoría de categorías y topología.

En el segundo capítulo, se exponen los conceptos del álgebra universal necesarios para reconstruir la demostración del Teorema de Kalman y trasladarlo al lenguaje de las variedades y cuasi-variedades.

En el tercer capítulo, se construye una estructura topológica dual a la estructura algebraica, para obtener una representación dual y se reconstruyen los teoremas de dualidad fuerte para cada una de las álgebras de De Morgan. Las estructuras obtenidas por los teoremas de dualidad fuerte deben reducirse y simplificarse hasta obtener una estructura óptima y después dar una descripción de ellas utilizando los teoremas de separación y preservación.

En el cuarto capítulo, establecemos el objetivo principal de nuestro trabajo, dar una formulación en el lenguaje categórico del Teorema de Kalman y establecer que este teorema se cumple para las cuasi-variedades topológicas generadas por los duales topológicos de las álgebras de De Morgan, además mostrar que ellas no se pueden axiomatizar.

# Capítulo 1

# Preliminares

En este capítulo expondremos definiciones y resultados que serán de utilidad en el desarrollo del presente trabajo que se hacen necesarios mencionar, sean de conocimiento o no, por ser de utilidad en la resolución de los objetivos propuestos. Estos conceptos de la teoría de retículos, álgebra universal, categorías y topología se citarán de una manera breve sin entrar en detalles.

## 1.1. Retículos

Los resultados de esta sección se encuentran en [5, 15].

Un conjunto no vacío $L$ junto con dos operaciones binarias $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ ("union" e "intersección" respectivamente) es llamado un *retículo* si satisface las siguientes identidades:

L1: a) $x \vee y = y \vee x$
b) $x \wedge y = y \wedge x$

L2: a) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
b) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

L3: a) $x \vee x = x$
b) $x \wedge x = x$

L4: a) $x = x \vee (x \wedge y)$
b) $x = x \wedge (x \vee y)$

Un conjunto parcialmente ordenado $\langle L, \leq \rangle$ es un retículo si y sólo si para todo $a, b \in L$ ambos $sup(a, b) = a \vee b$ y el $inf(a, b) = a \wedge b$ existen en $L$. El orden en el retículo está dado por: $a \leq b$ si y sólo si $a \wedge b = a$ o equivalentemente $a \vee b = b$.

Un *retículo distributivo* es aquel que satisface alguna (y por lo tanto ambas) de las siguientes afirmaciones:

D1: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

D2: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Un retículo es *acotado* si existen elementos $0, 1 \in L$ tales que satisfacen las identidades:

i) $a \wedge 0 = 0$,

ii) $a \vee 1 = 1$.

Diremos que $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ es un *retículo distributivo acotado* si $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ es un retículo distributivo y 0 y 1 satisfacen i) y ii).

Un retículo es *complementado* si para $a \in L$ existe un elemento $b \in L$ tal que $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$. A $b$ lo denominamos complemento de $a$ y lo denotamos por $a'$.

Un subconjunto no vacío $J$ de un retículo $L$ es un *ideal* si:

i) $a, b \in J$ implica $a \vee b \in J$.

ii) $a \in L, b \in J$ y $a \leq b$ implica $a \in J$.

El dual de un ideal es llamado *filtro.* Un subconjunto no vacío $G$ de $L$ es un filtro si:

i) $a, b \in G$ implica $a \wedge b \in G$.

ii) $a \in L, b \in G$ y $b \leq a$ implica $a \in G$.

El conjunto de todos los ideales (filtros) de $L$ es denotado por $\mathcal{I}(L)$ $(\mathcal{F}(L))$.

Un ideal o filtro es *propio* si no coincide con $L$ y es *maximal* si para todo ideal $I$ (filtro) propio, $J \subseteq I \subseteq L$ implica que $I = J$ o $I = L$. Los filtros maximales se denominan *ultrafiltros.*

Un ideal propio $J$ en un retículo $L$, se denomina *ideal primo* si $a, b \in L$ y $a \vee b \in J$ implica que $a \in J$ ó $b \in J$. El conjunto de ideales primos se denota $\mathcal{I}_p(L)$. Este conjunto es ordenado bajo la inclusión. Un *filtro primo* es definido dualmente y el conjunto de los filtros primos se denota por $\mathcal{F}_p(L)$.

Existencia de ideales y filtros primos. Los siguientes axiomas son equivalentes y son implicaciones del Lema de Zorn: "*Si $S$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadena no vacía $U$ tenga una cota superior, entonces $S$ tiene un elemento maximal.*"

**(DPI)** Dado un retículo distributivo $L$, un ideal $J$ y un filtro $G$ en $L$ tal que $J \cap G = \emptyset$, existe $I \in \mathcal{I}_p(L)$ y $F = L \setminus I \in \mathcal{F}_p(L)$ tal que $J \subseteq I$ y $G \subseteq F$.

**(BPI)** Dado un ideal propio $J$ en un retículo Booleano $B$, existe $I \in \mathcal{I}_p(B)$ tal que $J \subseteq I$.

**(BUF)** Dado un filtro propio $G$ en un retículo Booleano $B$, existe $F \in \mathcal{F}_p(B)$ tal que $G \subseteq F$.

En un álgebra Booleana $B$ para todo $a \neq b$ en $B$, existe un filtro primo $F \in \mathcal{F}_p(B)$ tal que $F$ contiene uno y sólo uno de los elementos $a$ y $b$.

Sea $B$ un álgebra Booleana y $F$ un filtro propio. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $F$ es un filtro primo;

ii) Para todo $a \in B$, $a \in F$ si y sólo si $a' \notin F$.

Una función $f : A \to B$ *preserva el orden* si para todo $x, y \in A$ tal que $x \leq y$ implica que $f(x) \leq f(y)$. Se dice que $f$ *preserva el orden estrictamente* si $x < y$ implica $f(x) < f(y)$ para todo $x, y \in A$, y $f$ es una *inmersión de orden* si y sólo si para $x \leq y$ se tiene $f(x) \leq f(y)$, donde $f$ es inyectiva.

## 1.2. Álgebra Universal

Un estudio más detallado acerca de esta sección puede verse en [5].

Sea $A$ un conjunto no vacío y $n$ un número natural. Una *operación $n$-aria* sobre $A$ es una función $f : A^n \to A$, donde $n$ se denomina la *aridad* o rango de $f$. Una *operación finitaria* sobre $A$ es una operación de rango $n$, para cierto número natural $n$.

Un *lenguaje* o *tipo* de álgebras es un conjunto $\mathcal{F}$, cuyos elementos se llaman *símbolos de función*, tal que un número natural $n$ es asignado a cada miembro $f$ de $\mathcal{F}$. Este número es llamado la aridad (o rango) de $f$, y $f$ se dice un *símbolo de función $n$-ario.*

Si $\mathcal{F}$ es un lenguaje de álgebras, entonces un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ es un par $\underline{\mathbf{A}} = \langle A; F\rangle$, donde $A$ es un conjunto no vacío denominado *universo* y $F$ es un conjunto de operaciones finitarias sobre $A$ indexada por $F$, tal que a cada símbolo de función $n$-ario $f \in F$ le corresponde una operación $n$-aria $f^{\underline{\mathbf{A}}}$ sobre $A$ que pertenece a $\mathcal{F}$.

Si $F = \{f_1, \ldots f_k\}$ es finito, (en donde la aridad de cada $f_i$ es finita y aridad $f_1 \geq$ aridad $f_2 \geq \ldots \geq$ aridad $f_k$), escribiremos $\underline{\mathbf{A}} = \langle A; f_1, \ldots, f_k\rangle$. Diremos en tal caso que el álgebra es de tipo (aridad $f_1$, aridad $f_2$,...aridad $f_k$).

Sean $\underline{\mathbf{A}}$ y $\underline{\mathbf{B}}$ dos álgebras del mismo tipo $F$. Una función $h : A \to B$ se dice un *homomorfismo* si para cada símbolo de función $n$-ario $f \in F$,

$$h(f^{\underline{\mathbf{A}}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\underline{\mathbf{B}}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

para cada $n$-upla $(a_1, \ldots, a_n)$ de elementos de $A$. Si $h$ es inyectiva, entonces $h$ se dice un *monomorfismo* o una *inmersión* . Si $h$ es sobreyectiva, entonces $h$ se dice un *epimorfismo* y en tal caso diremos que $\underline{\mathbf{B}}$ es una *imagen homomorfa* de $\underline{\mathbf{A}}$. Si $h$ es biyectiva, entonces $h$ se dice un *isomorfismo*.

Sean $\underline{\mathbf{A}}$ y $\underline{\mathbf{B}}$ dos álgebras del mismo tipo $F$. Diremos que $\underline{\mathbf{B}}$ es una *subálgebra* de $\underline{\mathbf{A}}$ si $B \subseteq A$ y para cada símbolo de función $f \in \mathcal{F}$, $f^{\underline{\mathbf{B}}}$ es la restricción de $f^{\underline{\mathbf{A}}}$ a $B$.

Dada una clase de álgebras $K$ del mismo tipo, denotaremos como $\mathbb{H}(\underline{\mathbf{K}})$, $\mathbb{I}(\underline{\mathbf{K}})$, $\mathbb{S}(\underline{\mathbf{K}})$ y $\mathbb{P}(\underline{\mathbf{K}})$ a las clases de imágenes homomorfas, imágenes isomorfas, subálgebras y productos de álgebras de $\underline{\mathbf{K}}$, respectivamente. Diremos que $\underline{\mathbf{K}}$ es una *variedad* si es cerrada bajo imágenes homomorfas, subálgebras y productos, es decir si $\mathbb{H}(\underline{\mathbf{K}}) \subseteq \underline{\mathbf{K}}$, $\mathbb{S}(\underline{\mathbf{K}}) \subseteq \underline{\mathbf{K}}$ y $\mathbb{P}(\underline{\mathbf{K}}) \subseteq \underline{\mathbf{K}}$.

Denotaremos como $\mathcal{V}(\underline{\mathbf{K}})$ a la menor variedad de álgebras que contiene a $\underline{\mathbf{K}}$. Tarski probó que $\mathcal{V}(\underline{\mathbf{K}}) = \mathbb{HSP}(\underline{\mathbf{K}})$.

Si $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son variedades tales que todo miembro de $\mathcal{V}$ es miembro de $\mathcal{W}$, se dice que $\mathcal{V}$ es una *subvariedad* de $\mathcal{W}$.

Sea $K$ una clase de álgebras de tipo $F$ y sea $\mathbf{U}(X)$ el álgebra de tipo $F$ generada por $X$. Si para cada $\mathbf{A} \in K$ y para cada función $\alpha : X \to \mathbf{A}$ existe un homomorfismo $\beta : \mathbf{U}(X) \to \mathbf{A}$ que extiende $\alpha$ (es decir, $\beta(x) = \alpha(x)$ para cada $x \in X$), diremos que $\mathbf{U}(X)$ tiene la *propiedad universal para $K$ sobre $X$*. En tal caso el conjunto $X$ es llamado un *conjunto de generadores libres* de $\mathbf{U}(X)$, y $\mathbf{U}(X)$ se dice que está *libremente generado* por $X$. Si $\mathbf{U}(X)$ tiene la propiedad universal para $K$ sobre $X$ entonces el homomorfismo $\alpha$ mencionado previamente es único.

Un conjunto $C$ de operaciones finitas sobre un conjunto $A$ es llamado un *clon* de $A$ si $C$ contiene las funciones proyección $\{\pi_i : A^n \to A | i = 1, 2, ..., n\}$ para cada número natural $n$ y $C$ es cerrado bajo composición. El clon de $\mathbf{A}$ es un álgebra, $\mathbf{clon}\,\mathbf{A} = \langle A, C\rangle$, con el mismo conjunto base del álgebra $\mathbf{A} = \langle A, F\rangle$ y las operaciones de $C$.

## 1.3. Categorías

En esta sección utilizamos los resultados y las notaciones dadas en [6].

Una *categoría* $\mathcal{C}$ consiste de los siguientes datos:

- Una colección de *objetos* de $\mathcal{C}$.
- Una colección $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ para cada par de objetos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ en $\mathcal{C}$ denominada *morfismos* de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$.
- Una operación binaria " $\circ$ " llamada *composición* en la colección de todos los morfismos de $\mathcal{C}$ que cumple: para cada $f \in \mathcal{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ y $g \in \mathcal{C}(\mathbf{B}, \mathbf{C})$, se tiene que $g \circ f \in \mathcal{C}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$.

Usaremos la notación $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ para decir que $f \in \mathcal{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Decimos que $\mathcal{C}$ es una categoría si satisface:

i) Para cada objeto $\mathbf{A}$ de $\mathcal{C}$ existe un morfismo $id_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, llamado *identidad* en $\mathbf{A}$, tal que $id_{\mathbf{A}} \circ f = f$ y $g \circ id_{\mathbf{A}} = g$, donde $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son objetos de $\mathcal{C}$ y $f : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ y $g : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ son morfismos.

ii) Para objetos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in \mathcal{C}$ y los morfismos $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $g : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ y $w : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ se tiene $w \circ (g \circ f) = (w \circ g) \circ f$.

Un morfismo $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un *isomorfismo* si existe un morfismo $f^{-1} : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ llamado *inverso* de $f$ para el cual $f^{-1} \circ f = id_{\mathbf{A}}$ y $f \circ f^{-1} = id_{\mathbf{B}}$. En este caso decimos que $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ son *isomorfos*.

Un *funtor contravariante* $D : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ entre las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{X}$ cumple con las siguientes condiciones:

i) Para todo objeto $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{A}$ y todo morfismo $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B} \in \mathcal{A}$, los objetos $D(\mathbf{A})$ y $D(\mathbf{B})$ están en $\mathcal{X}$ y los correspondientes morfismos $D(f) : D(\mathbf{B}) \to D(\mathbf{A})$ están en $\mathcal{X}(D(\mathbf{B}), D(\mathbf{A}))$.

ii) $D(id_{\mathbf{A}}) = id_{D(\mathbf{A})}$.

iii) Si $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{C}$ y $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y $g : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ son morfismos, entonces $D(g \circ f) = D(f) \circ D(g) : D(\mathbf{C}) \to D(\mathbf{A})$ es un morfismo.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \\
& \mathbf{C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D(\mathbf{A}) & D(\mathbf{B}) \arrow[l, "D(f)"'] \\
& D(\mathbf{C}) \arrow[u, "D(g)"'] \arrow[ul, "D(g \circ f)"]
\end{tikzcd}
$$

Para los funtores contravariantes $D : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ y $E : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ y para cada objeto $\mathbf{A} \in \mathcal{C}$ y $X \in \mathcal{X}$ existen los morfismos $e_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to ED(\mathbf{A})$ y $\varepsilon_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \to DE(\mathbf{X})$, si los funtores $E$ y $D$ son adjuntos.

Una *adjunción dual* $\langle D, E, e, \varepsilon \rangle$ entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{X}$ satisface:

i) Para $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B} \in \mathcal{A}$ y $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{Y} \in \mathcal{X}$ existen únicas $e_{\mathbf{A}}$ y $\varepsilon_{\mathbf{X}}$ tal que $e_{\mathbf{B}} \circ f = ED(f) \circ e_{\mathbf{A}}$ y $\varepsilon_{\mathbf{Y}} \circ \varphi = DE(\varphi) \circ \varepsilon_{\mathbf{X}}$. En otras palabras, los siguientes diagramas conmutan.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e_{\mathbf{A}}"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "e_{\mathbf{B}}"] \\
ED(\mathbf{A}) \arrow[r, "ED(f)"'] & ED(\mathbf{B})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{X} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varepsilon_{\mathbf{X}}"'] & \mathbf{Y} \arrow[d, "\varepsilon_{\mathbf{Y}}"] \\
DE(\mathbf{X}) \arrow[r, "DE(\varphi)"'] & DE(\mathbf{Y})
\end{tikzcd}
$$

Se dice que $e : id_{\mathcal{A}} \to ED$ y $\varepsilon : id_{\mathcal{X}} \to DE$ son *transformaciones naturales* para los funtores $id_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $ED : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $id_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ y $DE : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ dados en la figura anterior.

ii) Para $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ y $\mathbf{X} \in \mathcal{X}$ existe una biyección natural entre $\mathcal{A}(\mathbf{A}, E(\mathbf{X}))$ y $\mathcal{X}(\mathbf{X}, D(\mathbf{A}))$ tal que $f = E(D(f) \circ \varepsilon_{\mathbf{X}}) \circ e_{\mathbf{A}}$ y $\varphi = D(E(\varphi) \circ e_{\mathbf{A}}) \circ \varepsilon_{\mathbf{X}}$ como lo muestran los siguientes diagramas.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "e_{\mathbf{A}}"] \arrow[dr, "f"'] & ED(\mathbf{A}) \arrow[d, "E(\varphi)"] \\ & E(\mathbf{X}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, "\varepsilon_{\mathbf{X}}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & DE(\mathbf{X}) \arrow[d, "D(f)"] \\ & D(\mathbf{A}) \end{tikzcd}$$

Una adjunción dual $\langle D, E, e, \varepsilon \rangle$ entre las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{X}$, es una *representación dual* si para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ y cada $\mathbf{X} \in \mathcal{X}$, $e_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to ED(\mathbf{A})$ es un isomorfismo. $\langle D, E, e, \varepsilon \rangle$ es una *equivalencia dual* si es una representación dual y $\varepsilon_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \to DE(\mathbf{X})$ es un isomorfismo.

Si $\langle D, E, e, \varepsilon \rangle$ es una equivalencia dual entre las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{X}$, dados $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{A}$ y $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}$:

i) Existe un objeto $\mathbf{X} \in \mathcal{X}$ llamado $\mathbf{X} = D(\mathbf{A})$, tal que $\mathbf{A} \cong E(\mathbf{X})$.

ii) Existe un objeto $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ llamado $\mathbf{A} = E(\mathbf{X})$, tal que $\mathbf{X} \cong D(\mathbf{A})$.

iii) $D$ y $E$ son plenos y fieles.

iv) Un morfismo $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo si y sólo si $D(f)$ es un isomorfismo, y por lo tanto $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ si y sólo si $D(\mathbf{A}) \cong D(\mathbf{B})$.

v) Un morfismo $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ es un isomorfismo si y sólo si $E(\varphi)$ es un isomorfismo, y por lo tanto $\mathbf{X} \cong \mathbf{Y}$ si y sólo si $E(\mathbf{X}) \cong E(\mathbf{Y})$.

Una estructura $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ es *inyectiva* en la categoría $\mathcal{X}$ si para cada morfismo $\alpha : \mathbf{X} \to \underset{\sim}{\mathbf{M}}$ e inmersión $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ en $\mathcal{X}$ existe un único morfismo $\beta : \mathbf{Y} \to \underset{\sim}{\mathbf{M}}$ tal que $\beta \circ \varphi = \alpha$.

(CLO): $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ da una dualidad en la categoría $\mathcal{A}(\mathbf{M})$ (generada por un álgebra $\mathbf{M}$) si y sólo si para cada $n \in \mathbb{N}$, cada morfismo $t : \underset{\sim}{\mathbf{M}}^n \to \underset{\sim}{\mathbf{M}}$ es una función término $n$-aria sobre el álgebra $\mathbf{M}$.

Si $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ es inyectiva en la categoría $\mathcal{X}$ y cumple la condición CLO, es equivalente a tener la *condición de interpolación* (IC): para cada $n$ y cada subestructura $\mathbf{X}$ de $\underset{\sim}{\mathbf{M}}^n$, cada morfismo $\alpha : \mathbf{X} \to \underset{\sim}{\mathbf{M}}$ extiende a una función término $t : M^n \to M$ del álgebra $\mathbf{M}$.

## 1.4. Topología

Los conceptos topológicos dados en esta sección se restringen a las definiciones básicas en esta área.

Una *topología* sobre un conjunto $X$ es una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de $X$ cerrada bajo intersecciones finitas, uniones arbitrarias y tal que $\emptyset$, $X \in \mathcal{T}$.

Un *espacio topológico* es un par $\langle X; \mathcal{T} \rangle$, donde $X$ es un conjunto y $\mathcal{T}$ una topología sobre $X$. Los elementos $U \in \mathcal{T}$ son llamados abiertos del espacio topológico $\langle X; \mathcal{T} \rangle$.

Un conjunto $F$ se dice cerrado si $F' = \{x \in X : x \notin F\}$ es abierto.

Un conjunto abierto y cerrado lo denominaremos *clopen*.

Si $x \in X$, diremos que $U_x$ es un entorno de $x$ si es un conjunto abierto que contiene al elemento $x$.

Si $X$ es un conjunto, una *base* para una topología sobre $X$ es una colección $\mathbf{B}$ de subconjuntos de $X$ (llamados elementos básicos) tales que:

i) Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico $B$ que contiene a $x$.

ii) Si $x$ pertenece a la intersección de dos elementos básicos $B_1$ y $B_2$, entonces existe un elemento básico $B_3$ que contiene a $x$ y tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Si $\mathbf{B}$ satisface las dos condiciones anteriores, se define la topología $\mathcal{T}$ generada por $\mathbf{B}$ de la siguiente manera:
Un subconjunto $U$ de $X$ se dice abierto en $X$, si para cada $x \in U$ existe un elemento básico $B$ de $\mathbf{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subseteq U$.
Se puede probar que $\mathcal{T}$ es igual a la colección de todas las uniones de elementos de $\mathbf{B}$.

Una familia $\mathcal{S}$ de conjuntos abiertos $U$ en $\mathcal{T}$ se dice una *subbase* de $\mathcal{T}$ si cada conjunto abierto en $\mathcal{T}$ es una unión de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.

Dados dos espacios topológicos $\langle X; \tau \rangle$ y $\langle Y; \delta \rangle$, una función $f : X \to Y$ se dice *continua*, si $f^{-1}(U) \in \tau$ para cada $U \in \delta$.

Un espacio topológico $\langle X; \mathcal{T} \rangle$ se dice *compacto* si para cada familia $A$ de abiertos tal que $\bigcup_{U \in A} U = X$, existe una subfamilia finita $B \subseteq A$ tal que $\bigcup_{U \in B} U = X$.

Se puede probar que un espacio topológico $\langle X; \mathcal{T} \rangle$ con una subbase $\mathcal{S}$ es compacto, probando que para todo cubrimiento de $X$ por elementos de $\mathcal{S}$ tiene un subcubrimiento finito. Este resultado se conoce como *Lema de las subbases de Alexander*.

Un espacio topológico $\langle X; \mathcal{T} \rangle$ se dice *Hausdorff* si para todo par de elementos $x \neq y \in X$ existen conjuntos disjuntos $U$ y $V$ tal que $x \in U$ y $y \in V$. Si $U$ y $V$ siempre se eligen clopen, entonces $X$ es *totalmente disconexo*.

Si $X$ es compacto y totalmente disconexo, entonces es llamado un *espacio Booleano o espacio de Stone*.

Un espacio topológico ordenado $\langle X; \leq, \mathcal{T} \rangle$ *totalmente separado en el orden* si los conjuntos clopen y decrecientes $x \downarrow = \{a \in X | a \leq x\}$ separan puntos, es decir, si $x \nleq y$ existe un subconjunto clopen y decreciente $D$ de $X$ tal que $y \in D$ y $x \notin D$. Si $\langle X; \mathcal{T} \rangle$ además es compacto, entonces es llamado *espacio ordenado Booleano o espacio de Priestley.*

# Capítulo 2

# Teorema de Kalman

Este capítulo está basado en el artículo de Kalman [12], en el cual nos dice, en otras palabras, que las álgebras de De Morgan forman una variedad $\mathcal{V}$ que tiene como únicas subvariedades las álgebras generadas por: un elemento $\underline{\mathbf{D}}_1$ (trivial), dos elementos $\underline{\mathbf{D}}_2$ (Booleana), tres elementos $\underline{\mathbf{D}}_3$ (Kleene) y cuatro elementos $\underline{\mathbf{D}}$ (De Morgan), y cumplen la relación $\underline{\mathbf{D}}_1 \subseteq \underline{\mathbf{D}}_2 \subseteq \underline{\mathbf{D}}_3 \subseteq \underline{\mathbf{D}}$. En su artículo Kalman denomina estas álgebras como $i$-retículos, que son retículos distributivos con una involución.
El retículo distributivo que satisface $x \wedge x' \leq y \vee y'$ para todo $x$ e $y$, Kalman lo denomina $i$-retículo *normal*, el cual es nuestra álgebra de Kleene.

El objetivo de este capítulo, es reconstruir el *Teorema de Kalman* y trasladarlo al lenguaje de las variedades. También mostrar que las álgebras de De Morgan forman una cuasi-variedad $\mathcal{Q}$ la cual es a su vez una variedad generada por el álgebra de cuatro elementos $\underline{\mathbf{D}}$.

## 2.1. Descomposición Subdirecta

Dado que todo retículo es un álgebra, primero daremos algunas definiciones y resultados en términos de álgebras, los cuales se encuentran en [5, 3, 15] y son necesarios para la demostración del Teorema de Kalman.

**Definición 2.1.1.** *Un álgebra* $\underline{\boldsymbol{A}}$ *es un* ***producto subdirecto*** *de una familia indexada* $(\underline{\boldsymbol{A}}_i)_{i\in I}$ *de álgebras si:*

*i)* $\underline{\mathbf{A}} \leq \prod_{i\in I} \underline{\mathbf{A}}_i$

*ii)* $\pi_i(\underline{\mathbf{A}}) = \underline{\mathbf{A}}_i$ *para cada* $i \in I$.

**Definición 2.1.2.** *Sea* $\underline{\mathbf{A}}$ *un álgebra y sea* $\underline{\mathcal{F}} = \{\mathbf{A}_i | i \in I\}$ *una familia de álgebras. Una inmersión* $\alpha : \underline{\mathbf{A}} \to \prod_{i\in I} \underline{\mathbf{A}}_i$ *es llamada una* ***representación subdirecta*** *de* $\underline{\mathbf{A}}$ *en* $\prod_{i\in I} \underline{\mathbf{A}}_i$ *si las proyecciones* $\pi_i : \underline{\mathbf{A}} \to \underline{\mathbf{A}}_i$ *son sobreyectivas para todo* $i \in I$*, esto es, si para todo* $x \in \underline{\mathbf{A}}_i$ *existe un* $a \in \underline{\mathbf{A}}$ *para el cual* $(\alpha a)(i) = x$.

**Definición 2.1.3.** *Un álgebra es* ***subdirectamente irreducible*** *si para toda representación subdirecta* $\alpha : \underline{\mathbf{A}} \to \prod_{i\in I} \underline{\mathbf{A}}_i$*, existe un* $i \in I$ *tal que* $\pi_i \circ \alpha : \underline{\mathbf{A}} \to \underline{\mathbf{A}}_i$*, es un isomorfismo.*

Estos conceptos son más visibles y más útiles en la práctica cuando se trabaja con el retículo de congruencias de $\underline{\mathbf{A}}$, lo que nos lleva a enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.4.** [5] *Un álgebra* $\underline{\mathbf{A}}$ *es subdirectamente irreducible si y sólo si* $\underline{\mathbf{A}}$ *es trivial o existe una congruencia mínima en* $Con\underline{\mathbf{A}} - \{\Delta\}$*. En este caso el elemento mínimo es* $\bigcap(\mathbf{Con}\underline{\mathbf{A}} - \{\Delta\})$*, una congruencia principal.*

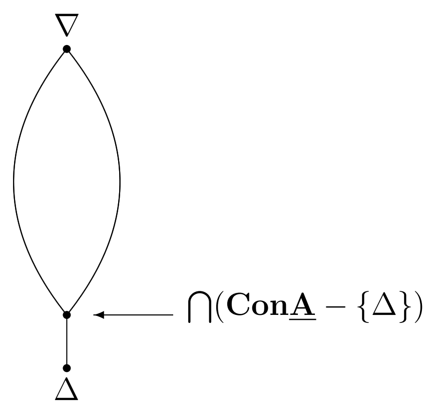



Fig. 3.1. Retículo de congruencias de $\mathbf{A}$.

**Definición 2.1.5.** [15] *Sea* $L$ *un retículo, un elemento* $m \in L$ *es infimo-irreducible si no es el elemento unitario y tiene la propiedad*

$$m = a \wedge b \Rightarrow m = a \text{ ó } m = b.$$

Se puede definir una noción análoga para "intersecciones" arbitrarias:

**Definición 2.1.6.** *Sea $L$ es un retículo completo, entonces un elemento $a \in L$ es* ***completamente infimo-irreducible*** *(**CMI** por sus siglas en inglés) si $a = \bigwedge S$ para un subconjunto $S \subseteq L$ implica que $a = s$ para algún $s \in S$.*

**Lema 2.1.7.** [6] *Para toda álgebra $\underline{\mathbf{A}}$ y toda congruencia $\theta \in Con\underline{\mathbf{A}}$, $\underline{\mathbf{A}}$ es subdirectamente irreducible si y sólo si $\Delta_A = \{(a,a) | a \in A\}$ (la menor congruencia en $\underline{\mathbf{A}}$) es **CMI**, Fig. 2.1.*

**Definición 2.1.8.** [15] *(Relación de congruencia en un retículo). Una relación de equivalencia $\theta$ en un retículo $L$ es una **relación de congruencia** si para todo $a$, $b$, $x$, $y \in L$,*

$$a\theta x \text{ y } b\theta y \Rightarrow (a \wedge b)\theta(x \wedge y) \text{ y } (a \vee b)\theta(x \vee y).$$

**Definición 2.1.9.** *Un elemento $a$ de un retículo $L$ es **neutral** si y sólo si toda tripla $\{a, x, y\}$ generan un subretículo distributivo.*

El lema que daremos a continuación es utilizado frecuentemente en la demostración del Teorema de Kalman y se encuentran en [3].

**Lema 2.1.10.** *Si $a$ es neutral, entonces $x \wedge a = y \wedge a$ y $x \vee a = y \vee a$ implica $x = y$.*

**Observación 2.1.1.** *En lo que resta del capítulo, vamos a asumir en las definiciones y resultados que todos los retículos distributivos tienen una involución o son i-retículos en el sentido Kalman.*

**Lema 2.1.11.** [12] *Sea $L$ un retículo distributivo subdirectamente irreducible. Entonces $x$ es comparable con $x'$ para cada $x$ en $L$, y para elementos $x$, $y$, $z$ de $L$, si $x' < x$ e $y' < y$ entonces $(x \wedge y)' < (x \wedge y)$ y, si $y' < y$ y $z \leq z'$ entonces $z < y$.*

Para cada elemento $x$ de un retículo distributivo dado, denotamos $|x| = x \vee x'$. El retículo de cuatro elementos y dos "ceros" en el sentido Kalman (un elemento que satisface $z = z'$ para algún $z$ en el retículo) lo denotaremos por $\underline{\mathbf{D}}$, que en realidad es nuestra álgebra de De Morgan.

En el artículo [12] de 1958, el resultado que nosotros denominamos "Teorema de Kalman" aparece como un lema enunciado en términos de $i$-retículos y afirma, en otras palabras, que las únicas subálgebras de De Morgan bajo isomorfismo son las álgebras trivial, de Boole, de Kleene y de De Morgan. En este trabajo vamos a reconstruir la demostración detalladamente.

**Teorema 2.1.12.** ***Teorema de Kalman.*** *Los retículos* $\underline{\mathbf{D}}_1$, $\underline{\mathbf{D}}_2$, $\underline{\mathbf{D}}_3$ *y* $\underline{\mathbf{D}}$ *son subdirectamente irreducibles y son bajo isomorfismos, los únicos retículos distributivos subdirectamente irreducibles.*

**Demostración.**
Cada uno de los retículos dados es subdirectamente irreducible por 2.1.5 y 2.1.7. Esto también se puede observar del hecho que las cuatro álgebras son simples.

De manera inversa, sea $L$ un retículo subdirectamente irreducible y demostremos que tienen que ser una de las cuatro álgebras. Para elementos $x$, $y$ de $L$ formamos la relación $x \approx y$ si y sólo si una de las siguientes afirmaciones es cierta:

*a*) $x' < x$ y $y' < y$,

*b*) $x < x'$ y $y < y'$,

*c*) $x = x' = y = y'$.

**Afirmación 2.1.1.** $\approx$ *define una relación de congruencia.*

En efecto, $\approx$ es una relación de equivalencia. Ahora, si tenemos que se cumple *a*), entonces, para todo $x, y, z, w \in L$ tal que $x \approx y$ y $z \approx w$, por 2.1.11, $(x \wedge z)' < x \wedge z$ y $(y \wedge w)' < y \wedge w$, así $x \wedge z \approx y \wedge w$. Como $x' < x$ y $z' < z$, entonces $(x \vee z)' = x' \wedge z' < x \vee z$. De la misma manera $(y \vee w)' < y \vee w$, luego, $x \vee z \approx y \vee w$. Por lo tanto, vemos que $\approx$ define una relación de congruencia en $L$ para este caso.

Si se cumple la condición *b*), entonces para $x < x'$, $y < y'$, $z < z'$ y $w < w'$ en $L$ se tiene que $x \wedge y < x \vee y < x' \vee y' = (x \wedge y)'$ así $x \wedge z < (x \wedge z)'$ donde, para $y$ y $w$ se tiene lo mismo $y \wedge w < (y \wedge w)'$, entonces $x \wedge z \approx y \wedge w$. Ahora, por 2.1.11, $(x' \wedge z')' < x' \wedge z'$, pero $x \vee y = (x' \wedge y')' < x' \wedge y' = (x \vee y)'$, y también $y \vee w < (y \vee w)'$, por lo cual $x \vee z \approx y \vee w$. Para este caso, $\approx$ es una relación de congruencia en $L$.

La condición *c*) se cumple trivialmente.

Ahora, para cada $p$ en $L$, definimos las relaciones $D(p)$ y $E(p)$ en $L$ dadas por, $x \equiv y\ (D(p))$ si y sólo si $x \approx y$ y $|x| \wedge p = |y| \wedge p$, y $x \equiv y\ (E(p))$ si y sólo si $x \approx y$

y $|x| \vee p = |y| \vee p$.

**Afirmación 2.1.2.** *$D(p)$ y $E(p)$ son relaciones de congruencia.*

Ya probamos que $\approx$ define una relación de congruencia en $L$, falta mostrar que $|x| \wedge p = |y| \wedge p$ y $|x| \vee p = |y| \vee p$, definen una congruencia, ya que la intersección de congruencias es una congruencia.

Definamos $x \equiv_1 y$ si $x \vee p = y \vee p$, y $x \equiv_2 y$ si $x \wedge p = y \wedge p$.
Primero, $\equiv_1$ y $\equiv_2$ son relaciones de equivalencia.

Si $x \vee p = y \vee p$, para todo $a \in L$ se tiene $(x \vee a) \vee p = (y \vee a) \vee p$.

Así, si $x \equiv_1 y \Rightarrow (x \vee a) \equiv_1 (y \vee a)$. Ahora, si $x \equiv_1 y \Rightarrow x \vee p = y \vee p$, esto implica $(x \vee p) \wedge (a \vee p) = (y \vee p) \vee (a \vee p)$, por la ley distributiva se tiene $(x \wedge a) \vee p = (y \wedge a) \vee p \Rightarrow x \wedge a \equiv_1 y \wedge a$.

De manera análoga se prueba para $\equiv_2$, por lo que concluimos que $\equiv_1$ y $\equiv_2$ son relaciones de congruencia en $L$ y por tanto, $D(p)$ y $E(p)$ también lo son.

Usando 2.1.10 vemos que $D(p) \cap E(p) = O$ para todo $p$ en $L$, y dado que $L$ es subdirectamente irreducible, se tiene que $D(p) = O$ o $E(p) = O$ para cada $p$ en $L$. $(*)$

Si $x = x'$ para todo $x$ en $L$, entonces $L \cong \underline{\mathbf{D}}_1$. Podemos por lo tanto, asumir en el resto de la prueba que $L$ tiene un elemento $c$ tal que $c' < c$.

**Afirmación 2.1.3.** *Si $L$ tiene un elemento $x$ distinto de $c$ y $c'$ entonces $x$ es un cero de $L$.*

Primero, $L$ no puede tener tres elementos distintos $x$ tales que $x' < x$; así, suponiendo que $L$ los tuviera, entonces se tiene una cadena $w < y < x$, en efecto, por 2.1.11, si $x' < x$ e $y' < y$ entonces $(x \wedge y)' < (x \wedge y)$ y además, si suponemos que $x \vee y = z$ es distinto de los dos elementos, entonces $z' < z$, con los cuales se forma una cadena $(x \wedge y) < x < z$ de tales elementos, como son sólo tres elementos que cumplen esta condición, necesariamente $z$ es igual a uno de ellos y se tiene la cadena. De aquí se obtienen las congruencias, $x \equiv y\ (D(y))$ y $w \equiv y\ (E(y))$, pues, $x \approx y$, $x \vee y = y \vee y = y$ y $w \wedge y = y \wedge y = y$ lo que contradice $(*)$. Luego se tiene que $L$ tiene dos de tales elementos, y que ellos deben ser comparables si existen.

Pero, si $x' < y' < y < x$ y $F$ es la relación de congruencia en $L$ con clases de congruencia $[x]$, $[x']$ y $[w : y' \leq w \leq y]$, entonces $F \neq O$, dado que todos los elementos en el intervalo $y' \leq w \leq y$ son congruentes, así por ejemplo, si $y' \leq y$, e $y' \equiv y$, entonces para $w \in [y', y]$ se tiene $x = y \wedge x \equiv y' \wedge x = y'$. También $D(y) \neq O$ pero $F \cap D(y) = O$, pues $x$ no pertenece al intervalo $[y', y]$, lo que contradice la subdirecta irreducibilidad de $L$.

Luego, así como afirmamos, todo elemento de $L$ distinto de $c$ y $c'$ es un cero de $L$; más aún, por 2.1.10, $L$ tiene a lo más dos ceros. Así, $L \cong \underline{\mathbf{D}}_2, \underline{\mathbf{D}}_3, \underline{\mathbf{D}}$ de acuerdo a los ceros de $L$, esto es, 0, 1 ó 2 respectivamente. $\square$

**Teorema 2.1.13.** *Todo retículo distributivo es isomorfo a una unión subdirecta de imágenes isomorfas de* $\underline{\mathbf{D}}$.

**Demostración.**
Toda algebra $\underline{\mathbf{A}}$ puede ser representada como una unión subdirecta de imágenes homomorfas subdirectamente irreducibles de $\underline{\mathbf{A}}$. Observemos que $\underline{\mathbf{D}}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ es isomorfo a un subretículo de $\underline{\mathbf{D}}$, y toda imagen homomorfa de un retículo distributivo es de nuevo un retículo distributivo, así, el teorema se tiene. $\square$

**Teorema 2.1.14.** *Todo retículo normal es isomorfo a una unión subdirecta de imágenes isomorfas de* $\underline{\mathbf{D}}_3$.

**Demostración.**
Este resultado se deduce del teorema anterior. $\square$

De 2.1.13 se tiene que toda álgebra Booleana excepto $\underline{\mathbf{D}}_1$ es isomorfa a una unión subdirecta de imágenes isomorfas de $\underline{\mathbf{D}}_2$.

## 2.2. Variedades de De Morgan

Un tema de mayor importancia en el álgebra universal es el estudio de las clases de álgebras del mismo tipo, cerradas bajo una o más construcciones, este es el caso de las variedades. En esta sección definiremos las variedades generadas por las álgebras de De Morgan para enunciar el equivalente del Teorema de Kalman desde el punto de vista del álgebra universal.

**Definición 2.2.1.** *Un álgebra de De Morgan es un retículo distributivo acotado* *con una involución* $\langle A, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$ *del tipo (2,2,1,0,0) que satisface las leyes de De Morgan, es decir, satisface las siguientes identidades:*

$$\begin{aligned} x'' &= x. \\ (x \wedge y)' &= x' \vee y'. \\ (x \vee y)' &= x' \wedge y'. \end{aligned}$$

Las álgebras siguientes son del mismo tipo que la anterior pero cada vez más restrictivas una con respecto a la otra.

**Definición 2.2.2.** *Un álgebra de Kleene es un álgebra de De Morgan del tipo (2,2,1,0,0) que satisface*

$$x \wedge x' \leq y \vee y'$$

*para todo* $x$, $y$.

**Definición 2.2.3.** *Un álgebra Booleana es un álgebra de De Morgan del tipo (2,2,1,0,0) que satisface*

$$x \wedge x' = 0 \;\; y \;\; x \vee x' = 1.$$

**Ejemplo 2.2.4.** *Las siguientes álgebras son ejemplos de álgebras de De Morgan, [11] y [9]:*

1. $\underline{\mathbf{2}} = \langle \{0,1\}, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$ *los dos elementos del álgebra Boolena.*

2. $\underline{\mathbf{K}} = \langle \{0,a,1\}, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$, *donde* $\{0,a,1\}$ *es el retículo*

$$\begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \\ a \\ \uparrow \\ 0 \end{array}$$

*con las operaciones usuales de retículos* $\wedge, \vee$ *y* $'$ *fija* $a$ *e intercambia* $0$ *y* $1$.

3. $\underline{\mathbf{D}} = \langle D, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$ *donde* $D = \{0,a,b,1\}$ *es el retículo*

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ a & & & & b \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & & 0 & & \end{array}$$

*$\wedge$ y $\vee$ son las operaciones de retículo, y $'$ intercambia el* $0$ *y el* $1$ *y fija a y b. Esta álgebra es llamada diamante.*

4. *$\mathbb{I} = \langle [0,1], \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$ el álgebra de valores de verdad para la lógica fuzzy clásica .*

   *Se tiene que $\langle [0,1], \leq\rangle$ es un retículo distributivo acotado, no complementado. Entonces se definen las operaciones de retículo con la propiedad que para todo $x, y \in [0,1]$ $x \vee y = \text{máx}\{x, y\}$ es alguno de los dos elementos. De manera similar, $x \wedge y = \text{ínf}\{x, y\}$. La negación $'$ está dada por $x' = 1 - x$. $\mathbb{I}$ es un álgebra de De Morgan y a su vez es un álgebra de Kleene.*

5. *$\mathbb{I}^{[2]} = \langle \{(a,b) : a, b \in [0,1], a \leq b\}, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$ el álgebra de valores de verdad para la lógica de los intervalos de valuación fuzzy.*

   *Para el álgebra $\mathbb{I}^{[2]}$, el conjunto es $\{(a,b) : a, b \in [0,1], a \leq b\}$ y se toman las operaciones que vienen del intervalo unitario, definidas componente a componente.*
   *Se define el orden $(a,b) \leq (c,d)$ si y sólo sí $a \leq c$ y $b \leq d$, las cuales dan las operaciones usuales de retículo* mín *y* máx :

   $$(a,b) \vee (c,d) = (a \vee c, b \vee d)$$
   $$(a,b) \wedge (c,d) = (a \wedge c, b \wedge d)$$

   *y la negación en $\mathbb{I}^{[2]}$ está dada por*

   $$(a,b)' = (b', a')$$

   *donde $x' = 1 - x$.*
   *Esta álgebra es un álgebra de De Morgan.*

El álgebra diamante $\underline{\mathbf{D}}$, la cadena trivaluada $\underline{\mathbf{K}}$ y el álgebra $\underline{\mathbf{2}}$ generan todas las variedades de De Morgan, de Kleene y Booleanas respectivamente. Las álgebras de Kleene también son generadas por el álgebra fuzzy clásica $\mathbb{I}$ y las álgebras de De Morgan por las álgebras de intervalos de valuación fuzzy $\mathbb{I}^{[2]}$.

El siguiente resultado es otra versión del teorema de Birkhoff utilizado para la demostración del teorema 2.1.13, el cual se encuentra en [5].

**Teorema 2.2.5.** *Si $K$ es una variedad, entonces todo miembro de $K$ es isomorfo a un producto subdirecto de miembros subdirectamente irreducibles de $K$.*

**Corolario 2.2.6.** *Toda variedad está determinada por sus miembros subdirectamente irreducibles.*

Como las variedades que nos interesan son las generadas por las álgebras de De Morgan, vamos a denotarlas de la siguiente manera: $\mathcal{V}(\underline{\mathbf{D}})$, es la variedad generada por el retículo de cuatro elementos, *Diamante*, que es un álgebra de De Morgan y que habíamos llamado $i$-retículo; $\mathcal{V}(\underline{\mathbf{D}}_3) := \mathcal{V}(\underline{\mathbf{K}})$, la variedad generada por el retículo de tres elementos el cual es un álgebra de Kleene y habíamos llamado $i$-retículo normal $\underline{\mathbf{D}}_3$; $\mathcal{V}(\underline{\mathbf{D}}_2) := \mathcal{V}(\underline{\mathbf{2}})$, la variedad generada por el retículo de dos elementos $\underline{\mathbf{D}}_2$, que es un álgebra Booleana y $\mathcal{V}(\underline{\mathbf{D}}_1)$ la variedad trivial.

Ahora, podemos enunciar el Teorema de Kalman en términos de variedades.

**Teorema 2.2.7.** *Las únicas subvariedades de $\mathcal{V}(\underline{\mathbf{D}})$ son:*

$$\mathcal{V}(\underline{\mathbf{D}}_1) \subseteq \mathcal{V}(\underline{\mathbf{2}}) \subseteq \mathcal{V}(\underline{\mathbf{K}}) \subseteq \mathcal{V}(\underline{\mathbf{D}}).$$

*Más aún, para $\mathbf{A} \in \mathcal{V}(\underline{\mathbf{D}})$, $\mathbf{A} \in \mathcal{V}(\underline{\mathbf{2}})$ si y sólo si $x \wedge x' = 0$ es una identidad en $\mathbf{A}$ ($\mathcal{V}(\underline{\mathbf{2}})$ es la clase de álgebras Booleanas), y $\mathbf{A} \in \mathcal{V}(\underline{\mathbf{K}})$ si y sólo si $x \wedge x' \leq y \vee y'$ es una identidad en $\mathbf{A}$ ($\mathcal{V}(\underline{\mathbf{K}})$ la clase de álgebras de Kleene).*

Una clase de estructura necesaria para obtener las dualidades, tema central de nuestro trabajo, son las **cuasi-variedades** generadas por un álgebra $\underline{\mathbf{B}}$, $\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{B}})$, que se define como la menor clase de álgebra que contiene a $\underline{\mathbf{B}}$, cerrada bajo copias isomorfas $\mathbb{I}$, subálgebras $\mathbb{S}$ y productos directos $\mathbb{P}$, es decir $\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{B}}) = \mathbb{ISP}(\underline{\mathbf{B}})$.

Ahora, relacionemos las variedades generadas por las álgebras de De Morgan con las cuasi-variedades generadas por éstas mismas álgebras. El siguiente teorema da condiciones sobre en qué casos la variedad y la cuasi-variedad generadas por un álgebra finita coinciden.

**Teorema 2.2.8.** *Sea $\mathcal{V} = \mathbb{HSP}(\underline{\mathbf{M}})$ y $\mathcal{Q} = \mathbb{ISP}(\underline{\mathbf{M}})$ la variedad y la cuasi-variedad generada por el álgebra finita $\underline{\mathbf{M}}$, y sea $\mathcal{V}_{si}$ la clase de miembros subdirectamente irreducibles de $\mathcal{V}$, entonces:*

*i)* $\mathcal{V} = \mathbb{ISP}(\mathcal{V}_{si})$.

*ii)* $\mathcal{V} = \mathcal{Q}$ *si* $\mathcal{V}_{si} \subseteq \mathbb{IS}(\underline{\mathbf{M}})$.

*iii)* $\mathcal{V} = \mathcal{Q}$ *si* $\mathcal{V}$ *es una congruencia distributiva y* $\mathbb{HS}(\underline{\mathbf{M}}) \subseteq \mathbb{IS}(\underline{\mathbf{M}})$.

Puesto que los teoremas de dualidades están dados para cuasi-variedades, se hace necesario trasladar el Teorema de Kalman a éste lenguaje como parte del objetivo de este capítulo y como un primer aporte del trabajo a la literatura especializada, pues aunque este resultado es muy utilizado no se encuentra escrito en el lenguaje moderno mencionado. Para ello, utilizamos el teorema anterior.

**Teorema 2.2.9.** *Las cuasi-variedades generadas por las álgebras de De Morgan cumplen la relación*

$$\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{D}}_1) \subseteq \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{2}}) \subseteq \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{K}}) \subseteq \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{D}})$$

*y son únicas.*

**Demostración.**
Por 2.1.12, los únicos retículos distributivos subdirectamente irreducibles salvo isomorfismos son $\underline{\mathbf{2}}$, $\underline{\mathbf{K}}$ y $\underline{\mathbf{D}}$, las álgebras de De Morgan, luego la clase $\mathcal{V}_{si} = \underline{\mathbf{D}}$, $\underline{\mathbf{K}}$, $\underline{\mathbf{2}}$, dependiendo del tipo de álgebra, de De Morgan, de Kleene o Booleana respectivamente. Así por el item *i)* del teorema anterior se tiene que $\mathcal{V}(\underline{\mathbf{D}}) = \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{D}})$, $\mathcal{V}(\underline{\mathbf{K}}) = \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{K}})$ y $\mathcal{V}(\underline{\mathbf{2}}) = \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{2}})$. □

**Observación 2.2.1.** *El objetivo principal de nuestro trabajo es precisamente verificar si el resultado anterior se cumple o no en los duales topológicos de las cuasi-variedades generadas por las álgebras de De Morgan.*

# Capítulo 3

# Cuasi-variedades Topológicas

El objetivo de este capítulo es construir una categoría dual $\mathcal{X}$ la cual actúa como un espejo y refleja efectivamente la categoría $\mathcal{Q}$. Si se tiene una copia exacta (pero reversada) $\mathcal{Q}$ dentro de $\mathcal{X}$, entonces se tiene una *representación dual,* siendo, la *dualidad natural* una clase especial de representación dual entre una cuasi-variedad $\mathcal{Q}$ finitamente generada y la categoría $\mathcal{X}$.

Para construir la categoría dual $\mathcal{X}$, mencionaremos los teoremas de dualidades fuertes aplicables a las álgebras de De Morgan $\underline{\mathbf{D}}$, $\underline{\mathbf{K}}$ y $\underline{\mathbf{2}}$, los cuales darán una inmediata elección de los clones $\underset{\sim}{\mathbf{D}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{K}}$ y $\underset{\sim}{\mathbf{2}}$ para obtener dualidades fuertes sobre $\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{D}}) = \mathbb{ISP}(\underline{\mathbf{D}})$, $\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{K}}) = \mathbb{ISP}(\underline{\mathbf{K}})$ y $\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{2}}) = \mathbb{ISP}(\underline{\mathbf{2}})$, que reconstruiremos detalladamente para cada una de ellas.

Los pasos que vamos a seguir son los siguientes:

i) Reducir y simplificar las estructuras $\underset{\sim}{\mathbf{D}}$ y $\underset{\sim}{\mathbf{K}}$, para obtener una dualidad optima usando construcciones por vinculación 3.3.1.

ii) Dar una descripción útil de las categorías $\mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{D}}} = \mathbb{IS}_c\mathbb{P}^+(\underset{\sim}{\mathbf{D}})$, $\mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{K}}} = \mathbb{IS}_c\mathbb{P}^+(\underset{\sim}{\mathbf{K}})$ y $\mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{2}}} = \mathbb{IS}_c\mathbb{P}^+(\underset{\sim}{\mathbf{2}})$ utilizando el teorema de preservación 3.2.1 y el teorema de separación 3.2.2.

## 3.1. Cuasi-variedades Topológicas

En términos categóricos $\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{M}})$ es la categoría de todas las álgebras cuyos elementos pueden ser separados por homomorfismos en el "cogenerador" $\underline{\mathbf{M}}$, [6].

Podemos formar la categoría $\mathcal{X}$ de espacios topológicos estructurados de una manera similar a una cuasi-variedad $\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{M}}) = \mathbb{ISP}(\underline{\mathbf{M}})$ de una álgebra finita $\underline{\mathbf{M}} = \langle M, \mathcal{F} \rangle$. Si $\underset{\sim}{\mathbf{M}} = \langle M, G, H, R, \mathcal{T} \rangle$ es un espacio topológico estructurado donde $M$ es un conjunto base finito para ambas estructuras (algebraica y topológica) y $\mathcal{T}$ la topología discreta, entonces $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ genera la clase $\mathcal{X} = \mathbb{IS}_c\mathbb{P}^+\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ que consiste de todas las copias isomorfas $\mathbb{I}$, subestructuras cerradas $\mathbb{S}_c$ y potencias directas $\mathbb{P}^+$ de copias de $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$. Como los modelos de la "*teoría topológica cuasi-atómica*" [6] de $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$, son exactamente los miembros de $\mathcal{X}$, esta categoría es llamada *cuasi-variedad topológica.*

La categoría $\mathcal{X}$ está conformada por $\mathbf{X} = \langle X, G, H, R, \mathcal{T} \rangle$ , *los espacios topológicos estructurados* que son estructuras de tipo $\langle G, H, R \rangle$ , donde $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ es un espacio topológico y
$G :=$ conjunto de símbolos finitos de operaciones totales,
$H :=$ conjunto de símbolos finitos de operaciones parciales,
$R :=$ conjunto de símbolos finitos de relaciones.

Es necesario mencionar lo anterior, pues el dual de una cuasi-variedad finitamente generada $\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{M}})$ bajo una dualidad natural siempre es una categoría de la forma $\mathcal{X} = \mathbb{IS}_c\mathbb{P}^+\underset{\sim}{\mathbf{M}}$. Además, en el lenguaje de la teoría de categorías muchas de las preguntas acerca de las estructuras algebraicas pueden ser fácilmente resueltas en sus duales topológicos, dado que ellos son más tratables o más entendibles que la estructura original [2, 6, 8, 13, 14, 15].

## 3.2. Teoremas de Preservación y Separación

Los siguientes teoremas 3.2.1 y 3.2.2 se utilizan para mostrar que, dada una estructura arbitraria de $\mathcal{X} = \mathbb{IS}_c\mathbb{P}^+\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ se encuentra una descripción particular de ella y que cualquier estructura con la descripción encontrada está en $\mathcal{X}$, respectivamente.

**Teorema 3.2.1.** ***Teorema de Preservación.*** *Sea* $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ *un espacio topológico* *estructurado discreto finito y sea* $\mathbf{X} \in \mathbb{IS}_c\mathbb{P}^+\underset{\sim}{\mathbf{M}}$.

*i)* $\mathbf{X}$ *es un espacio estructurado Booleano el cual satisface toda fórmula cuasi-atómica que satisface* $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$.

*ii) Si* $h \in G \cup H$ *es n-ario, entonces* $dom(h^{\mathbf{X}})$ *es un subconjunto cerrado de* $X^n$ *y* $h^{\mathbf{X}} : dom(h^{\mathbf{X}}) \to X$ *es continua.*

*iii) Si* $r \in R$ *es n-aria, entonces* $r^{\mathbf{X}}$ *es un subconjunto cerrado de* $X^n$.

**Teorema 3.2.2.** ***Teorema de Separación.*** *Sea* $\mathbf{X}$ *un espacio topológico estructurado compacto del mismo tipo que el espacio estructurado discreto finito* $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$. *Entonces* $\mathbf{X} \in \mathbb{IS}_c\mathbb{P}^+\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ *si y sólo si existe al menos un morfismo de* $\mathbf{X}$ *a* $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ *que cumpla las siguientes condiciones:*

*i) Para cada* $x, y \in X$ *donde* $x \neq y$, *existe un* $\alpha : \mathbf{X} \to \underset{\sim}{\mathbf{M}}$ *tal que* $\alpha(x) \neq \alpha(y)$.

*ii) Para cada* $h \in H$ *n-aria y* $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n \backslash dom(h^{\mathbf{X}})$, *existe un* $\alpha : \mathbf{X} \to \underset{\sim}{\mathbf{M}}$ *tal que* $(\alpha(x_1), \alpha(x_2), ..., \alpha(x_n)) \notin dom(h^{\underset{\sim}{\mathbf{M}}})$.

*iii) Para cada* $r \in R$ *n-aria y* $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n \backslash r^{\mathbf{X}}$, *existe un* $\alpha : \mathbf{X} \to \underset{\sim}{\mathbf{M}}$ *tal que* $(\alpha(x_1), \alpha(x_2), ..., \alpha(x_n)) \notin r^{\underset{\sim}{\mathbf{M}}}$.

## 3.3. Construcciones por Vinculación.

Cuando vamos a obtener dualidades, aún cuando $M$ sea pequeño el conjunto de relaciones $\mathbb{S}(\underline{\mathbf{M}}^2)$ puede ser muy grande y no dar una dualidad de uso práctico, así que se deben eliminar las relaciones sin destruir la dualidad, para ello daremos una definición y las operaciones admisibles que nos permiten realizar esto.

**Definición 3.3.1.** ***Vinculación.*** *Sea* $\underset{\sim}{\mathbf{M}} = \langle M; G, H, R, \tau\rangle$ *y sea* $s$ *una relación algebraica finita fija u operación (parcial) en* $\underline{\mathbf{M}}$. *Dado* $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}$ *decimos que* $G \cup H \cup R$, *o* $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ *vincula a* $s$ *en* $D(\mathbf{A})$ *si para toda función continua* $\alpha$ *de* $D(\mathbf{A})$ *a* $M$, *la cual preserva las relaciones y las operaciones (parciales) en* $G \cup H \cup R$ *también preserva* $s$. *El conjunto* $G \cup H \cup R$ *vincula a* $s$, $G \cup H \cup R \vdash s$, *si* $G \cup H \cup R$ *vincula a* $s$ *en* $D(\mathbf{A})$ *para todo* $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}$. *Sea* $\underset{\sim}{\mathbf{M}} = \langle M; G, H, R, \tau\rangle$ *y* $\underset{\sim}{\mathbf{M}}' = \langle M; G', H', R', \tau\rangle$. *Si* $G \cup H \cup R \vdash s$ *para todo* $s \in G' \cup H' \cup R'$, *entonces decimos que* $G \cup H \cup R$ *vincula a* $G' \cup H' \cup R'$ *o* $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ *vincula a* $\underset{\sim}{\mathbf{M}}'$ *y escribimos*

$G \cup H \cup R \vdash G' \cup H' \cup R'$.

**Observación 3.3.1.** *El funtor $D$ está definido como $D(\mathbf{A}) := \mathcal{Q}(\mathbf{A}, \underline{\mathbf{M}})$ donde $D(\mathbf{A})$ es un subestructura de $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$, es decir, $D(\mathbf{A}) \leq \underset{\sim}{\mathbf{M}}^A$.*

En la práctica, si $G \cup H \cup R \vdash s$, nos gustaría saber si $s$ puede ser obtenido de un subconjunto finito de $G \cup H \cup R$ aplicando un número finito de construcciones como intersecciones, productos, composiciones e inversas de funciones (parciales).

Como habíamos mencionado antes, las álgebras de De Morgan son subdirectamente irreducibles, lo que implica que generan una variedad de congruencia distributiva, por lo cual las construcciones por vinculación que vamos a mencionar son completas, lo que quiere decir que $s$ puede ser obtenido de un subconjunto finito de $G \cup H \cup R$ aplicando un número finito de construcciones admisibles.

### 3.3.1. Construcciones Admisibles por Vinculación

Las construcciones admisibles para las álgebras no triviales subdirectamente irreducibles son 15 [6]. Para otro tipo de ejemplos este conjunto debe ampliarse. Sólo citaremos las construcciones que se necesitan para obtener las dualidades que vamos a trabajar y de ser posible los casos particulares.

1. **Relación Trivial.** Si $\theta$ es una relación de equivalencia en $\{1, ..., n\}$, entonces todo conjunto de relaciones, vincula $\Delta^\theta := \{(c_1, ..., c_n) \in M^n | i\theta j \Rightarrow c_i = c_j\}$. Como un caso especial tenemos las relaciones $M^2$ y $\Delta_M := \{(c, c) | c \in M\}$, la cual puede ser vista como la relación de igualdad en $M$ o el grafo del endomorfismo $id_{\underline{\mathbf{M}}}$.

2. **Manipulación Subscripta.** Si $r$ es una relación unaria, se pueden construir las relaciones binarias $r \times M$ y $M \times r$; si $r$ es una relación binaria se puede construir la relación unaria $r^1 := \pi_1(r \cap \Delta)$ y las relaciones binarias $r^1 \times M$, $M \times r^1$, y la inversa $r^c := \{(c_2, c_1) | (c_1, c_2) \in r\}$ de $r$.

3. **Eliminación por Repetición.** Si $r$ es una relación $n$-aria y para $i, j$ fijos tenemos que $c_i = c_j$ para todo $(c_1, ..., c_n) \in r$, entonces se tiene que $r$ vincula a $r'_j := \{(c_1, ..., c_{j-1}, c_{j+1}, ..., c_n) \in M^{n-1} | \ (c_1, ..., c_n) \in r\}$.

4. **Intersección.** Si $r$ y $s$ son relaciones $n$-arias, entonces $r \cap s$ está vinculado por $\{r, s\}$, si $r \cap s \neq \emptyset$.

5. **Proyección.** Todo conjunto de relaciones vincula la $i$-ésima coordenada de la proyección $\pi_i : M^n \to M$.

6. **Grafo.** Una operación (parcial) $h$, vincula su grafo, $graf(h)$, y de manera inversa si $r$ es el grafo de una $n$-aria operación parcial, $graf^{-1}(r)$, entonces $r$ vincula $graf^{-1}(r)$. En particular, una operación constante $c$ vincula la relación unaria $\{c\}$ e inversamente.

7. **Conjunto Punto Fijo.** El conjunto $fix(e) := \{c \in N | e(c) = c\}$ es vinculado por el conjunto $\{e, id_{\underline{\mathbf{M}}}\}$, donde $e$ es un endomorfismo parcial, $e : N \to \underline{\mathbf{M}}$ y $N$ es una subálgebra de $\underline{\mathbf{M}}$.

8. **Acción por un Endomorfismo Parcial.** Si $r$ es una relación $n$-aria y $e$ es un endomorfismo parcial de $\underline{\mathbf{M}}$, entonces el conjunto $\{e, r\}$ vincula $e \cdot r := \{(c_1, ..., c_n) \in M^n | c_1 \in dom(e) \,\&\, (e(c_1), c_2, ..., c_n) \in r\}$, si este conjunto es distinto de vacío.

## 3.4. Teoremas de Dualidad Fuerte

Una dualidad es un teorema de representación: para un álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}$ existe una estructura $\mathbf{X} \in \mathcal{X}$ y un isomorfismo $u : \mathbf{A} \to E(\mathbf{X})$, en símbolos $\mathcal{Q} = \mathbb{I}E(\mathcal{X})$, donde tomamos $\mathbf{X} = D(\mathbf{A})$ y $u = e_{\mathbf{A}}$, es decir, se tiene una copia exacta (pero reversada) de $\mathcal{Q}$ dentro de $\mathcal{X}$. Si $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ da una dualidad fuerte en $\mathcal{Q}$ entonces también se tiene una representación en el lado topológico: para toda estructura $\mathbf{X} \in \mathcal{X}$ existe un álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}$ y un isomorfismo $\varphi : \mathbf{X} \to D(\mathbf{A})$, en símbolos $\mathcal{X} = \mathbb{I}D(\mathcal{Q})$, donde $\mathbf{A} = E(\mathbf{X})$ y $\varphi = \varepsilon_{\mathbf{X}}$ [6], en otras palabras,

$$e_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to ED(\mathbf{A}) \quad y \quad \varepsilon_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \to DE(\mathbf{X})$$

son isomorfismos para cada álgebra $\mathbf{A}$ y cada espacio topológico $\mathbf{X}$, es decir, $\langle D, E, e, \varepsilon \rangle$ es una equivalencia dual.

**Observación 3.4.1.** *Bajo una adjunción dual se tiene que $\mathbb{I}E(\mathcal{X})$ es una subcategoría propia de $\mathcal{Q} = \mathbb{ISP}\underline{\mathbf{M}}$ e $\mathbb{I}D(\mathcal{Q})$ es una subcategoría propia de $\mathcal{X} = \mathbb{IS}_c\mathbb{P}^+\underset{\sim}{\mathbf{M}}$.*

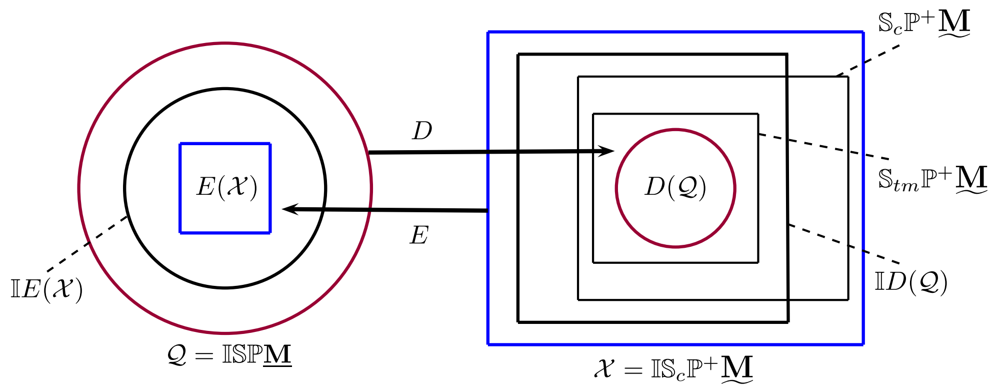



Fig. 4.4. Subcategorías de $\mathcal{X}$ bajo una adjunción dual.

**Definición 3.4.1.** *Un subconjunto $X \subseteq M^S$ es un término-cerrado (en $M^S$) si para todo $y \in M^S \setminus X$ existen funciones término $S$-arias $\rho, \tau : M^S \to M$ sobre $\underline{\mathbf{M}}$ que coinciden en $X$ pero no en $y$.*

**Definición 3.4.2.** *Cuando $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ da una dualidad en $\mathcal{Q}$ y toda subestructura cerrada de una potencia de $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ es un término-cerrado, decimos que $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ da una **Dualidad Fuerte en** $\mathcal{Q}$, es decir, las subcategorías $\mathbb{S}_c\mathbb{P}^+\underset{\sim}{\mathbf{M}} = \mathbb{S}_{tm}\mathbb{P}^+\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ coinciden.*

Bajo una dualidad fuerte, $\langle D, E, e, \varepsilon \rangle$ es una equivalencia dual, $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ es inyectiva en $\mathcal{X}$ y se cumple la condición de interpolación (IC).

A continuación mencionamos algunos teoremas importantes de dualidad fuerte, los cuales son necesarios para las demostraciones de las dualidades fuertes de las álgebras de De Morgan. Las demostraciones de estos resultados se encuentran en [6, 4].

**Lema 3.4.3. $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$-*Cambio de Dualidad Fuerte.***
*Considere la estructura $\underset{\sim}{\mathbf{M}}' = \langle M; G', H', R', \mathcal{T} \rangle$.*

*i) Si $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ vincula fuertemente $\underset{\sim}{\mathbf{M}}'$ y $\underset{\sim}{\mathbf{M}}'$ da una dualidad fuerte en $\mathcal{A}$, entonces $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ también da una dualidad fuerte en $\mathcal{A}$.*

*ii) $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ vincula fuertemente $\underset{\sim}{\mathbf{M}}'$ si este es obtenido de $\underset{\sim}{\mathbf{M}}'$ por:*

*a) ampliar $G'$, $H'$, o $R'$,*

*b) eliminar miembros de $G'$ o $H'$ los cuales pueden ser obtenidos como composiciones de los miembros restantes de $G'$ y $H'$ y las proyecciones,*

*c) eliminar un miembro $h$ de $H'$ los cuales tienen una extensión entre los* *miembros restantes de $G' \cup H'$ y adicionando dom(h) a $R'$.*

*iii)* $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ *vincula fuertemente* $\underset{\sim}{\mathbf{M}}'$ *si* $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ *vincula* $\underset{\sim}{\mathbf{M}}'$ *y este es obtenido de* $\underset{\sim}{\mathbf{M}}'$ *por:*

*a) eliminar miembros de $R'$, o*

*b) eliminar miembros de $H'$ el cual tiene una extensión en $G'$ o $H'$.*

**Teorema 3.4.4.** ***Dualidad Fuerte NU.*** *Sea $k \geq 2$ y asuma que* $\underline{\mathbf{M}}$ *tiene un término cuasi-unánime de aridad $(k+1)$. Si*

$$\underset{\sim}{\mathbf{M}} = \langle M; K, H, \mathcal{B}_k, \mathcal{T} \rangle \quad \textit{donde} \quad H = \bigcup \{\mathcal{P}_n | 1 \leq n \leq \mathrm{Irr}(\underline{\mathbf{M}})\}$$

*entonces toda estructura que vincula fuertemente* $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ *da una dualidad fuerte en $\mathcal{Q}$.*

Los conjuntos $\mathcal{P}_n$ y $\mathcal{B}_n$ para $n = 1, 2, 3 \ldots$, se definen como los conjuntos de todas las operaciones (parciales) y relaciones respectivamente, las cuales son algebraicas sobre $\underline{\mathbf{M}}$ y $K$ es la subálgebra de un elemento. Irr($\underline{\mathbf{M}}$) indica el índice de irreducibilidad, que para las álgebras de De Morgan es $\mathrm{Irr}(\underline{\mathbf{M}}) = 1$, pues todas sus subálgebras son subdirectamente irreducibles. Un término de aridad $(k+1)$, $n(x_1, ..., x_{k+1})$ con $k \geq 2$ se dice término cuasi-unánime sobre $\underline{\mathbf{M}}$ si ésta satisface las identidades

$$n(x, \ldots, x, y) \approx n(x, \ldots, y, x) \approx \ldots \approx n(y, x, \ldots, x) \approx x.$$

**Ejemplo 3.4.5.** *Las álgebras con estructuras de retículos como las álgebras de De Morgan satisfacen para $k = 2$ el término cuasi-unánime de aridad tres, pues si tomamos*

$$m(x, y, z) := (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x),$$

*entonces*

$$m(x, x, y) \approx m(x, y, x) \approx m(y, x, x) \approx x.$$

*Este término se conoce como Término Mayoritario.*

**Corolario 3.4.6.** *Asuma que* $\underline{\mathbf{M}}$ *tiene un término mayoritario y que todas las subálgebras no triviales de* $\underline{\mathbf{M}}$ *son subdirectamente irreducibles. Entonces toda estructura que vincula fuertemente* $\underset{\sim}{\mathbf{M}} = \{M; K, \mathcal{P}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{T}\}$ *da una dualidad fuerte en $\mathcal{Q}$.*

El anterior resultado es aplicable a las álgebras de De Morgan, pues $k = 2$ como vimos en el ejemplo 3.4.5, luego $\mathcal{B}_2 = \mathbb{S}(\underline{\mathbf{M}}^2)$ e $\mathrm{Irr}(\underline{\mathbf{M}}) = 1$ para las álgebras $\underline{\mathbf{D}}$,

$\underline{\mathbf{K}}$ y $\underline{\mathbf{2}}$, así sólo resta buscar las estructuras que vinculen fuertemente a $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ para cada una de ellas.

## 3.5. Dualidades Fuertes de De Morgan

En esta sección trataremos uno de los objetivos principales de este trabajo, reconstruir detalladamente los teoremas de dualidades fuertes para las álgebras de De Morgan $\underline{\mathbf{D}}$, $\underline{\mathbf{K}}$ y $\underline{\mathbf{2}}$ que se encuentran en [6].

Para cada álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}$ y para cada estructura $\mathbf{X} \in \mathcal{X}$, el conjunto de homomorfismos $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \underline{\mathbf{M}})$ determinan una subestructura cerrada $D(\mathbf{A})$ de $\underset{\sim}{\mathbf{M}}^A$ y el conjunto de morfismos $\mathcal{X}(\mathbf{X}, \underset{\sim}{\mathbf{M}})$ determinan una subálgebra $E(X)$ de $\underline{\mathbf{M}}^X$. Así tenemos los funtores $D : \mathcal{Q} \to \mathcal{X}$ y $E : \mathcal{X} \to \mathcal{Q}$. Más aún, si $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ en $\mathcal{Q}$ y $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ en $\mathcal{X}$, entonces definimos $D(f) : D(\mathbf{B}) \to D(\mathbf{A})$ por $D(f)(x) = x \circ f$ y $E(\varphi) : E(\mathbf{Y}) \to E(\mathbf{X})$ por $E(\varphi)(\alpha) = \alpha \circ \varphi$. El resultado es que los funtores contravariantes $D$ y $E$ son fieles entre $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{X}$.

Ahora, las composiciones

$$ED : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q} \quad y \quad DE : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$$

para $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}$ y $\mathbf{X} \in \mathcal{X}$, definimos las funciones evaluación

$$e_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to ED(\mathbf{A}) \quad y \quad \varepsilon_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \to DE(\mathbf{X})$$

por $e_{\mathbf{A}}(a)(x) = x(a)$ y $\varepsilon_{\mathbf{X}}(x)(\alpha) = \alpha(x)$, las cuales son siempre inmersiones [6, 7].

### 3.5.1. Dualidad Fuerte para el Álgebra Booleana

Dado que las álgebras Booleanas son primales el siguiente teorema aplica para estás álgebras.

**Teorema 3.5.1.** *Sea $\underline{\mathbf{P}}$ un álgebra primal, y sea $\underset{\sim}{\mathbf{P}} := \langle P; \mathcal{T} \rangle$.*

i) *$\underset{\sim}{\mathbf{P}}$ da una dualidad fuerte sobre la variedad $\mathbb{ISP}\underline{\mathbf{P}}$ generada por $\underline{\mathbf{P}}$.*

ii) *El dual $\mathbb{IS}_c\mathbb{P}^+\underset{\sim}{\mathbf{P}}$ es exactamente la categoría de todos los espacios booleanos.*

**Demostración.**

i) Se obtiene del teorema *Dualidad Fuerte Semi-primal* y *Dualidad Fuerte Dos por Una* [6].

ii) Se obtiene aplicando el *Teorema de Separación* 3.2.2. $\square$

Al tomar el álgebra Booleana de dos elementos $\underline{\mathbf{2}} = \langle \{0,1\}, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ y el espacio Booleano $\underset{\sim}{\mathbf{2}} = \langle \{0,1\}, \tau\rangle$ obtenemos una formulación para el Teorema de Stone. Para demostrarlo utilizando dualidades fuertes necesitamos un teorema que nos permita cambiar los funtores $D$ y $E$.

El siguiente teorema aparece propuesto en [6], y lo vamos a demostrar como parte de nuestro trabajo, pues es necesario para cambiar los funtores $D$ y $E$ por los funtores conocidos en las demostraciones del Teorema de Stone.

**Teorema 3.5.2.** *Sea $\langle D, E, e, \varepsilon\rangle$ una equivalencia dual entre las categorías $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{X}$. Si $\eta : D \to D'$ y $\mu : E \to E'$ son isomorfismos naturales para todo $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}$ y para todo $\mathbf{X} \in \mathcal{X}$, entonces $\langle D', E', e', \varepsilon'\rangle$ es una equivalencia dual.*

**Demostración.**
Primero probemos que $\langle D', E', e', \varepsilon'\rangle$ es una representación dual. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}$, como $\langle D, E, e, \varepsilon\rangle$ es una equivalencia dual, entonces

$$e_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to ED(\mathbf{A})$$

es un isomorfismo. Por otro lado, dado que $E : \mathcal{X} \to \mathcal{Q}$ es un funtor contravariante, $D(\mathbf{A})$ y $D'(\mathbf{A})$ están en $\mathcal{X}$ y $\eta_{\mathbf{A}} : D(\mathbf{A}) \to D'(\mathbf{A})$ es un isomorfismo, pues $\eta$ es un isomorfismo natural, tenemos que

$$E(\eta) : ED'(\mathbf{A}) \to ED(\mathbf{A})$$

es un isomorfismo y $E(\eta)^{-1} = E(\eta^{-1})$, por lo cual $E(\eta)^{-1} : ED(\mathbf{A}) \to ED'(\mathbf{A})$ es también un isomorfismo. Por último, dado que $D'(A) \in \mathcal{X}$ y $\mu$ es un isomorfismo natural, entonces $\mu_{D'(\mathbf{A})} : ED'(\mathbf{A}) \to E'D'(\mathbf{A})$ es un isomorfismo.
Si definimos

$$e'_{\mathbf{A}} = \mu_{D'(\mathbf{A})} \circ E(\eta_{\mathbf{A}})^{-1} \circ e_{\mathbf{A}}$$

donde

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "e_{\mathbf{A}}"] \arrow[rrr, bend right, "e'_{\mathbf{A}}"'] & ED(\mathbf{A}) \arrow[r, "E(\eta_{\mathbf{A}})^{-1}"] & ED'(\mathbf{A}) \arrow[r, "\mu_{D'(\mathbf{A})}"] & E'D'(\mathbf{A})
\end{tikzcd}$$

$e_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to ED(\mathbf{A})$, $E(\eta_{\mathbf{A}})^{-1} : ED(\mathbf{A}) \to ED'(\mathbf{A})$ y $\mu_{D'(\mathbf{A})} : ED'(\mathbf{A}) \to E'D'(\mathbf{A})$ son isomorfismos. Entonces $e'_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to E'D'(\mathbf{A})$ está bien definido y es un isomorfismo.

Sea $\mathbf{X} \in \mathcal{X}$, definamos

$$\varepsilon'_{\mathbf{X}} = \eta_{E'(\mathbf{X})} \circ D(\mu_{\mathbf{X}})^{-1} \circ \varepsilon_{\mathbf{X}}$$

entonces

$$\varepsilon_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \to DE(\mathbf{X})$$

es un isomorfismo por ser $\langle D, E, e, \varepsilon \rangle$ una equivalencia dual.
Como $E$ y $E'$ son funtores contravariantes $E(\mathbf{X}), E'(\mathbf{X}) \in \mathcal{Q}$ y dado que $\mu$ es un isomorfismo natural, entonces $D(\mu_{\mathbf{X}}) : DE'(\mathbf{X}) \to DE(\mathbf{X})$ es un isomorfismo lo que implica que $D(\mu_{\mathbf{X}})^{-1} : DE(\mathbf{X}) \to DE'(\mathbf{X})$ es un isomorfismo. Dado que $\eta$ es un isomorfismo natural, $\eta_{E'(\mathbf{X})} : DE'(\mathbf{X}) \to D'E'(\mathbf{X})$ es un isomorfismo. Luego, tenemos que

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X} \arrow[r, "\varepsilon_{\mathbf{X}}"] \arrow[rrr, bend right, "\varepsilon'_{\mathbf{X}}"'] & DE(\mathbf{X}) \arrow[r, "D(\mu_{\mathbf{X}})^{-1}"] & DE'(\mathbf{X}) \arrow[r, "\eta_{E'(\mathbf{X})}"] & D'E'(\mathbf{X})
\end{tikzcd}$$

$\varepsilon'_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \to D'E'(\mathbf{X})$ está bien definida y es un isomorfismo.
Por lo tanto, concluimos que $\langle D', E', e', \varepsilon' \rangle$ es una equivalencia dual. $\Box$

El Teorema de Stone es ampliamente conocido en la literatura [5, 6], su demostración aparece propuesta en [6] y la vamos a realizar utilizando los teoremas 3.5.1 y 3.5.2, lo cual hace parte de nuestros objetivos del presente capítulo.

**Teorema 3.5.3.** ***Dualidad de Stone.*** *El cuádruple* $\langle F, C, e, \varepsilon \rangle$ [1] *es una equivalencia dual entre la categoría* $\mathcal{B} = \mathbb{ISP}\underline{\mathbf{2}}$ *de las álgebras Booleanas y la categoría* $\mathcal{Z} = \mathbb{IS}_c\mathbb{P}^+\underset{\sim}{\mathbf{2}}$ *de los espacios booleanos.*

**Demostración.**
Sea $\langle D, E, e, \varepsilon \rangle$ una dualidad fuerte entre la variedad $\mathcal{B}$ de álgebras Booleanas y la categoría $\mathcal{Z}$ de los espacios Booleanos dada por 3.5.1. Para un álgebra Booleana $\mathbf{B}$ definimos $F : \mathcal{B} \to \mathcal{Z}$, $F(\mathbf{B})$ como el conjunto de ultrafiltros de $\mathbf{B}$, el cual forma un espacio Booleano cuyos subconjuntos clopen son los conjuntos $e_{\mathbf{B}}(a) := \{U \in F(\mathbf{B}) | a \in U\}$, donde $a$ recorre $B$.

Sea $\eta : D \to F$ una transformación natural. Vamos a probar que $\eta$ es un isomorfismo natural.

Sea $\eta_{\mathbf{B}} : D(\mathbf{B}) \to F(\mathbf{B})$ definida para cada $x \in D(\mathbf{B})$ como $\eta_{\mathbf{B}}(x) = x^{-1}(1)$, donde $x : \mathbf{B} \to \underline{\mathbf{2}}$. Dado $U \in F(\mathbf{B})$, si definimos

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in U \\ 0 & \text{si} \quad t \notin U. \end{cases}$$

entonces para $x \in D(\mathbf{B})$ se tiene que $\eta_{\mathbf{B}}(x) = x^{-1}(1) = U$, luego $\eta$ es sobreyectiva.

Ahora, para $x, y \in D(\mathbf{B})$ tales que $\eta_{\mathbf{B}}(x) = \eta_{\mathbf{B}}(y)$ se tiene que $x^{-1}(1) = y^{-1}(1) = U$ para algún $U \in F(\mathbf{B})$. Dado que $y, x : \mathbf{B} \to \underline{\mathbf{2}}$ entonces $x(t) = y(t) = 1$ para todo $t \in U$ y $x(t) = y(t) = 0$ para $t \notin U$, luego $x = y$. Por lo tanto $\eta$ es un isomorfismo.

Falta demostrar que, dado un homomorfismo $f$ entre las álgebras Booleanas $\underline{\mathbf{2}}$ y $\mathbf{B}$, $F(f) \circ \eta_{\mathbf{B}} = \eta_{\underline{\mathbf{2}}} \circ D(f)$, lo que es equivalente a probar que el cuadro del siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
 & & D(\mathbf{B}) \arrow[r, "D(f)"] \arrow[dd, "\eta_{\mathbf{B}}"'] & D(\underline{\mathbf{2}}) \arrow[dd, "\eta_{\underline{\mathbf{2}}}"] \\
\underline{\mathbf{2}} \arrow[r, "f"] & \mathbf{B} \arrow[ur, "D"] \arrow[dr, "F"'] & & \\
 & & F(\mathbf{B}) \arrow[r, "F(f)"'] & F(\underline{\mathbf{2}})
\end{tikzcd}$$

Sea $x \in D(\mathbf{B})$, entonces $[F(f) \circ \eta_{\mathbf{B}}](x) = F(f)[\eta_{\mathbf{B}}(x)] = F(f)[x^{-1}(1)]$. Si definimos $F(f) = f^{-1}$, entonces $[F(f) \circ \eta_{\mathbf{B}}](x) = f^{-1}(x^{-1}(1)) = (x \circ f)^{-1}(1)$.

[1] En aras de la claridad, decidimos cambiar los dos funtores que en el libro "Natural Dualities for the working Algebraist" denotan con el mismo símbolo "$*$", por los funtores $F$ y $C$.

Por otro lado, $[\eta_{\underline{\mathbf{2}}} \circ D(f)](x) = \eta_{\underline{\mathbf{2}}}[D(f)(x)] = [D(f)(x)]^{-1}(1)$, donde $D(f)(x) = x \circ f$ para $x \in D(\mathbf{B})$. Luego, $[\eta_{\underline{\mathbf{2}}} \circ D(f)](x) = (x \circ f)^{-1}(1)$.

Concluimos entonces que $\eta$ es un isomorfismo natural. Así tenemos que $\langle F, C, e, \varepsilon \rangle$ es una representación dual.

Por otro lado, para un espacio Booleano $\mathbf{X}$ definimos $C : \mathcal{Z} \to \mathcal{B}$, $C(\mathbf{X})$ como el conjunto de subconjuntos clopen de $\mathbf{X}$, el cual forma un álgebra Booleana bajo la unión, intersección y complemento, cuyos subconjuntos de ultrafiltros son los conjuntos $\varepsilon_{\mathbf{X}}(x) := \{A \in C(\mathbf{X}) | x \in A\}$, donde $x$ recorre $X$.

Vamos a probar la transformación natural $\mu : E \to C$ es un isomorfismo natural.

Procediendo de manera similar que para $\eta$, se define $\mu_{\mathbf{X}} : E(\mathbf{X}) \to C(\mathbf{X})$ para cada $\alpha \in E(\mathbf{X})$ como $\mu_{\mathbf{X}}(\alpha) = \alpha^{-1}(1)$, donde $\alpha : \mathbf{X} \to \underset{\sim}{\mathbf{2}}$.
De este modo $\mu$ es sobreyectivo, pues dado $A \in C(\mathbf{X})$ si definimos

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in A \\ 0 & \text{si} \quad t \notin A. \end{cases}$$

entonces $\mu_{\mathbf{X}}(\alpha) = \alpha^{-1}(1) = A$.

Además, $\mu$ es inyectiva, pues dados $\alpha, \beta \in E(\mathbf{X})$ tales que $\mu_{\mathbf{X}}(\alpha) = \mu_{\mathbf{X}}(\beta)$, es decir, $\alpha^{-1}(1) = \beta^{-1}(1) = A$ para algún $A \in C(\mathbf{X})$, entonces $\alpha(t) = \beta(t) = 1$ para $t \in A$ y $\alpha(t) = \beta(t) = 0$ para $t \notin A$, por lo tanto $\alpha = \beta$.

Después de probar que $\mu$ es biyectiva, basta probar que $C(g) \circ \mu_{\mathbf{X}} = \mu_{\underset{\sim}{\mathbf{2}}} \circ E(g)$.

$$\begin{tikzcd}
 & & E(\mathbf{X}) \arrow[r, "E(g)"] \arrow[dd, "\mu_{\mathbf{X}}"'] & E(\underset{\sim}{\mathbf{2}}) \arrow[dd, "\mu_{\underset{\sim}{\mathbf{2}}}"] \\
\underset{\sim}{\mathbf{2}} \arrow[r, "g"] & \mathbf{X} \arrow[ur, "E"] \arrow[dr, "C"'] & & \\
 & & C(\mathbf{X}) \arrow[r, "C(g)"'] & C(\underset{\sim}{\mathbf{2}})
\end{tikzcd}$$

Si definimos $C(g) = g^{-1}$ y $E(g)(\alpha) = \alpha \circ g$,

$$[C(g) \circ \mu_{\mathbf{X}}](\alpha) = C(g)[\mu_{\mathbf{X}}(\alpha)] = C(g)[\alpha^{-1}(1)] = g^{-1}[\alpha^{-1}(1)] = (\alpha \circ g)^{-1}(1),$$

y $[\mu_{\underset{\sim}{\mathbf{2}}} \circ E(g)](\alpha) = \mu_{\underset{\sim}{\mathbf{2}}}[E(g)(\alpha)] = [E(g)(\alpha)]^{-1}(1) = (\alpha \circ g)^{-1}(1)$.
De este modo, $\mu$ es un isomorfismo natural, por lo cual $\langle F, C, e, \varepsilon \rangle$ es una equiva-

lencia dual, es decir,

$$e_{\mathbf{B}} : \mathbf{B} \to CF(\mathbf{B}) \quad y \quad \varepsilon_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \to FC(\mathbf{X})$$

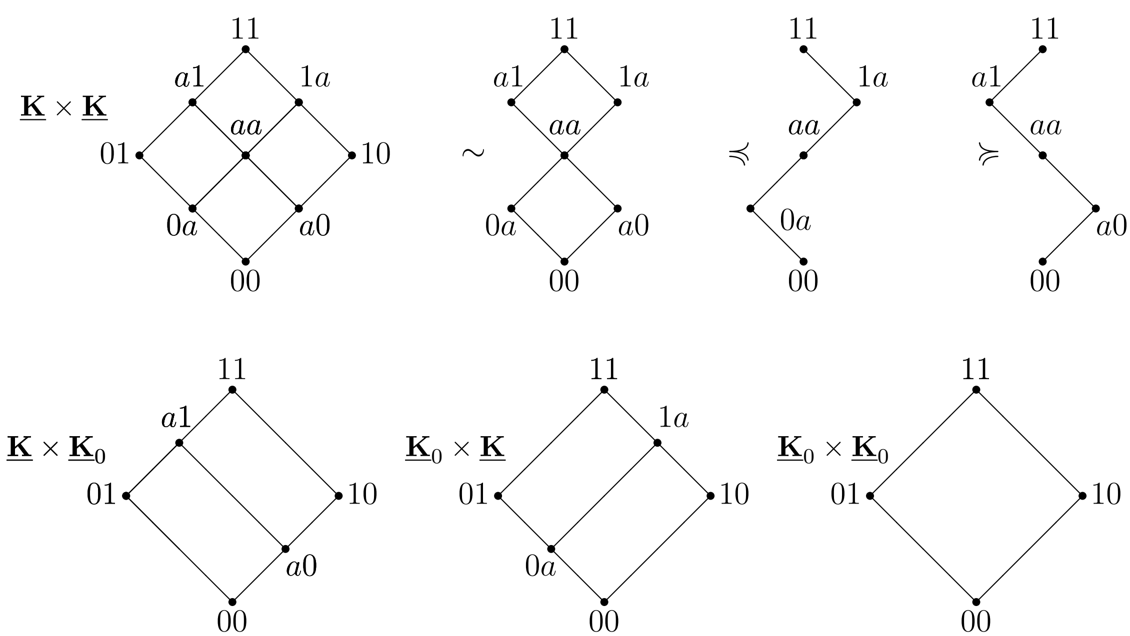
son isomorfismos para cada álgebra Booleana $\mathbf{B}$ y cada espacio topológico $\mathbf{X}$. $\square$

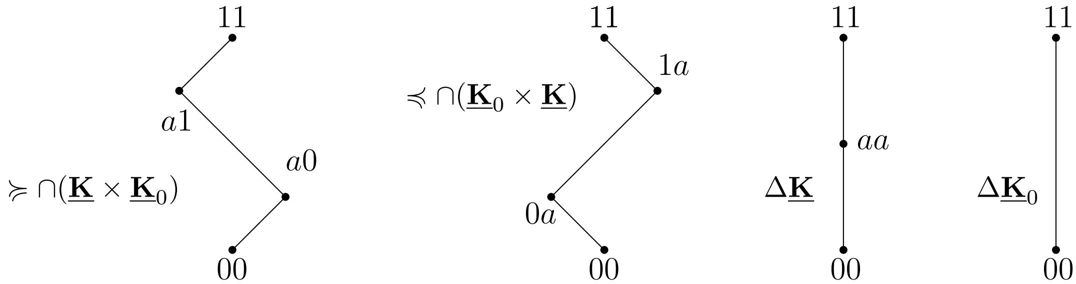
**Observación 3.5.1.** *Los teoremas 3.5.2 y 3.5.3, están enunciados como ejercicios en [6]. Utilizando trasformaciones naturales y dualidades fuertes, se realizaron las demostraciones en detalle de dichos teoremas como un aporte del trabajo a la literatura especializada.*

### 3.5.2. Dualidad Fuerte para el Álgebra de Kleene

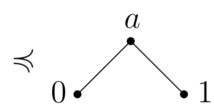
Vamos a construir un clon para el álgebra de Kleene que dé una dualidad fuerte para $\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{K}})$. En las operaciones del clon, la relación de orden siempre debe estar presente.

Como $\underline{\mathbf{K}}$ y su única subálgebra $\underline{\mathbf{K}}_0 = \langle\{0,1\}, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ son simples y no tienen endomorfismo distintos a la identidad, obtenemos una dualidad fuerte al tomar $G = H = \emptyset$ y $R = \mathbb{S}(\underline{\mathbf{K}} \times \underline{\mathbf{K}})$. Las relaciones que resultan ser subálgebras en $R$ son 11, las cuales encontramos para entender de qué forma tres de ellas vinculan fuertemente al resto y completar el teorema de dualidad fuerte para esta álgebra.






De $R$ se extrae la relación $\preccurlyeq = \{(0,0),(0,a),(1,a),(a,a),(1,1)\}$, que da el orden sobre $\underline{\mathbf{K}}$,




junto con $K_0 = \{0,1\}$ y la relación reflexiva y simétrica $\sim = (\underline{K}\times\underline{K})\backslash\{(0,1),(1,0)\}$, obtenemos así el clon

$$\underset{\sim}{\mathbf{K}} = \langle \{0,a,1\}; \preccurlyeq, \sim, K_0, \tau\rangle.$$

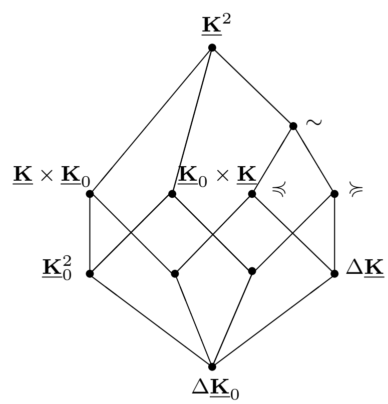



Fig.4.5.2. Retículo de las subálgebras de $\underline{\mathbf{K}}^2$

**Teorema 3.5.4.**

i) $\underset{\sim}{\mathbf{K}}$ *da una dualidad fuerte sobre la variedad* $\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{K}})$ *de álgebras de Kleene.*

ii) $\mathbf{X} = \langle X; \preccurlyeq, \sim, X_0, \mathcal{T}\rangle$ *pertenece al dual de la categoría* $\mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{K}}} = \mathbb{IS}_c\mathbb{P}^+\underset{\sim}{\mathbf{K}}$ *si y sólo si* $\langle X; \preccurlyeq\rangle$ *es un espacio de Priestley,* $\sim$ *es una relación binaria cerrada,* $X_0$ *es un subespacio cerrado y se tienen los siguientes axiomas universales:*

a) $x \sim x$,

b) $x \sim y \wedge x \in X_0 \Longrightarrow x \preccurlyeq y$,

c) $x \sim y \wedge y \preccurlyeq z \Longrightarrow z \preccurlyeq x$.

**Demostración.**

i) $\underset{\sim}{\mathbf{K}}$ vincula todas las relaciones algebraicas binarias. Como vimos anteriormente, hay 11 subálgebras obtenidas de $\underset{\sim}{\mathbf{K}}$ por construcciones por vinculación 3.3.1, es decir, todas las subálgebras de $\mathbb{S}(\underline{\mathbf{K}}^2)$ son obtenidas de $\preccurlyeq$, $\sim$ y $K_0$.

ii) El Teorema de Preservación 3.2.1 nos asegura que todo miembro de $\mathbb{IS}_c\mathbb{P}^+\underset{\sim}{\mathbf{K}}$ tiene las propiedades listadas.

De manera recíproca, sea $\mathbf{X} = \langle X; \preccurlyeq, \sim, X_0, \tau \rangle$ que cumple con las propiedades. Las cuasi-ecuaciones:

d) $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$,

e) $y \preccurlyeq z \Longrightarrow z \sim y$,

f) $y \preccurlyeq x$ y $x \in X_0 \Longrightarrow y \approx z$,

g) $x \preccurlyeq y$ y $x \preccurlyeq z \Longrightarrow y \sim z$,

h) $x \in X_0 \Longrightarrow (x \sim y \Leftrightarrow x \preccurlyeq y)$

se sigue de a), b) y c). Con el fin de aplicar el Teorema de Separación 3.2.2, notemos que la función $\alpha : X \to K$ es un homomorfismo continuo si y sólo si $I = \alpha^{-1}(0)$ y $J = \alpha^{-1}(1)$ son conjuntos clopen decrecientes tales que $(I \times J) \cap \sim = \emptyset$ y $X_0 \subset I \cup J$.

Sean $x, y \in X$ tales que $x \nsim y$. Encontraremos $I, J$ con $x \in I$ y $y \in J$. Como $\sim$ es cerrada, el conjunto $\{z | z \nsim x\}$ es cerrado y por c) este es $\preceq$-creciente. De este modo, $\{z | z \nsim x\}$ es abierto, $\preceq$-decreciente y contiene a $y$. Como $\mathbf{X}$ es un espacio de Priestley, esta es la unión de conjuntos clopen decrecientes. Sea $J$ un conjunto clopen decreciente que contiene a $y$ tal que $z \nsim x$ para cada $z \in J$. Sea $L$ el conjunto de todos los $w \in X$ que no están relacionados mediante $\sim$ con algún elemento de $J$. Entonces $L$ es abierto pues $\sim$ es cerrada y $J$ es compacto; $L$ es decreciente por c) y cada elemento de $X_0 \backslash J$ está en $L$ por h) y $x \in L$. Como $\mathbf{X}$ es un espacio de Priestley, $L$ es una unión de conjuntos clopen decrecientes. Por lo tanto, existe un subconjunto clopen decreciente $I$ de $L$, que contiene al conjunto cerrado $\{x\} \cup \{X_0 \backslash J\}$. Esta escogencia de $I$ y $J$ da el morfismo de separación $\alpha$.

Elijamos $x, y \in X$ tal que $x \not\preccurlyeq y$. Si $x \not\sim y$, podemos usar el $\alpha$ obtenido antes. Entonces elijamos $x \sim y$. Por h) sabemos que $x \notin X_0$ y por f) tenemos que $x \not\preccurlyeq z$ para cada $z \in X_0$. Así, podemos encontrar un conjunto clopen decreciente $J$ que contiene el conjunto compacto $\{y\} \cup X_0$ que no contiene a $x$. Sea $\beta : \mathbf{X} \to \underset{\sim}{\mathbf{K}}$ que a $J$ lo envía a 0 y $X \setminus J$ lo envía a $a$.

Supongamos que $x \notin X_0$. Si $X_0 = \emptyset$, sea $\gamma$ la función que envía $X$ a $a$. Por otro lado, sea $y \in X_0$. Por f) tenemos que $x \not\preccurlyeq y$ y de nuevo usamos $\beta$. □

**Observación 3.5.2.** *El siguiente resultado, se encuentra enunciado en [6] sin demostración. Vamos a realizar su prueba como parte del cumplimiento de los objetivos planteados en la elaboración del presente trabajo. Esta proposición es importante pues permite pasar de un espacio topológico $\mathbf{X} \in \mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{K}}}$ a un álgebra de Kleene.*

**Proposición 3.5.1.** *Sean $\mathbf{X} \in \mathbb{IS}_c\mathbb{P}^+\underset{\sim}{\mathbf{K}}$, $C$ el conjunto de los subconjuntos clopen decrecientes de $\mathbf{X}$ y*

$$A = \{(I, J)|I, J \in C; (I \times J) \cap \sim = \emptyset \text{ y } X_0 \subset I \cup J\}.$$

*Entonces,*

$$\underline{\mathbf{A}} = \langle A; \vee, \wedge, \neg, (X, \emptyset), (\emptyset, X)\rangle$$

*es un álgebra de Kleene donde*

$$\begin{aligned}(I, J) \vee (I', J') &= (I \cap I', J \cup J'),\\ (I, J) \wedge (I', J') &= (I \cup I', J \cap J'),\\ \neg(I, J) &= (J, I).\end{aligned}$$

*Más aún, $\alpha \mapsto (\alpha^{-1}(0), \alpha^{-1}(1))$ es un isomorfismo de $E(\mathbf{X})$ sobre $\underline{\mathbf{A}}$.*

**Demostración.**
Definamos el orden en $\underline{\mathbf{A}}$ dado por $(I, J) \wedge (I', J') = (I, J)$ si y sólo si $(I, J) \leq (I', J')$ si y sólo si $I' \subseteq I$ y $J \subseteq J'$, para $(I, J), (I', J') \in A$.

Debemos probar que para cualquier par de elementos en $A$, cumplan con

$$(I, J) \wedge \neg(I, J) \leq (I', J') \vee \neg(I', J').$$

En efecto, dado que $(I \times J) \cap \sim = \emptyset$ y $(I' \times J') \cap \sim = \emptyset$, entonces $I \cap J = \emptyset$ e $I' \cap J' = \emptyset$, pues si $I \cap J \neq \emptyset$, entonces $(x, x) \in (I \times J) \cap \sim$, pues para todo $x \in X$ se tiene que $x \sim x$.

Ahora,

$$
\begin{aligned}
(I, J) \wedge \neg(I, J) &= (I, J) \wedge (J, I) = (I \cup J, I \cap J) = (I \cup J, \emptyset), \\
(I', J') \vee \neg(I', J') &= (I', J') \vee (J', I') = (I' \cap J', I' \cup J') = (\emptyset, I' \cup J').
\end{aligned}
$$

Como, $\emptyset \subseteq I \cup J$ y $\emptyset \subseteq I' \cup J'$ entonces concluimos que

$$(I, J) \wedge \neg(I, J) \leq (I', J') \vee \neg(I', J').$$

Luego, $\underline{\mathbf{A}}$ es un álgebra de Kleene.

Vamos a probar ahora que $\varphi : E(\mathbf{X}) \to \underline{\mathbf{A}}$ definido como $\varphi(\alpha) = (\alpha^{-1}(0), \alpha^{-1}(1))$ es un homomorfismo.

Sean $\alpha, \beta \in E(\mathbf{X})$ y $(I, J), (I', J') \in \underline{\mathbf{A}}$, entonces $\alpha, \beta : \mathbf{X} \to \underset{\sim}{\mathbf{K}}$ las definimos de la siguiente manera:

$$
\alpha(x) = \begin{cases} 0\ , & x \in I \\ 1\ , & x \in J \\ a\ , & \text{en otro caso.} \end{cases}
\qquad
\beta(x) = \begin{cases} 0\ , & x \in I' \\ 1\ , & x \in J' \\ a\ , & \text{en otro caso.} \end{cases}
$$

Probemos para la operación $\neg$ que $\varphi(\neg\alpha) = \neg\varphi(\alpha)$, para ello definamos $\neg\alpha$.

$$
\neg\alpha(x) = \begin{cases} 0\ , & x \in J \\ 1\ , & x \in I \\ a\ , & \text{en otro caso.} \end{cases}
$$

Sea $(x, y) \in \varphi(\neg\alpha) = ((\neg\alpha)^{-1}(0), (\neg\alpha)^{-1}(1))$ si y sólo si $\neg\alpha(x) = 0$ y $\neg\alpha(y) = 1$. Por la definición de $\neg\alpha$ tenemos que $x \in J$ e $y \in I$, y por la definición de $\alpha$ tenemos que $\alpha(x) = 1$ y $\alpha(y) = 0$. Por lo cual $(y, x) \in ((\alpha)^{-1}(0), (\alpha)^{-1}(1)) = \varphi(\alpha)$ si y sólo si $(x, y) \in \neg\varphi(\alpha)$, por lo tanto $\varphi(\neg\alpha) = \neg\varphi(\alpha)$.

Probemos ahora que $\varphi(\alpha \vee \beta) = \varphi(\alpha) \vee \varphi(\beta)$, para ello definamos $\alpha \vee \beta$.

$$
(\alpha \vee \beta)(x) = \begin{cases} 0\ , & x \in I \cap I' \\ 1\ , & x \in J \cup J' \\ a\ , & \text{en otro caso.} \end{cases}
$$

Sea $(x, y) \in \varphi(\alpha \vee \beta) = ((\alpha \vee \beta)^{-1}(0), (\alpha \vee \beta)^{-1}(1))$ si y sólo si $(\alpha \vee \beta)(x) = 0$ y $(\alpha \vee \beta)(y) = 1$, lo que implica que $x \in I \cap I'$ e $y \in J \cup J'$, donde por la definición de $\alpha$ y $\beta$ tenemos que $\alpha(x) = 0$ y $\beta(x) = 0$, y $\alpha(y) = 1$ o $\beta(y) = 1$. Lo anterior es equivalente a $x \in \alpha^{-1}(0) \cap \beta^{-1}(0)$ e $y \in \alpha^{-1}(1) \cup \beta^{-1}(1)$. Así que $(x, y) \in (\alpha^{-1}(0) \cap \beta^{-1}(0), \alpha^{-1}(1) \cup \beta^{-1}(1))$, lo que es equivalente a que

$$(x, y) \in (\alpha^{-1}(0), \alpha^{-1}(1)) \vee (\beta^{-1}(0), \beta^{-1}(1)) = \varphi(\alpha) \vee \varphi(\beta).$$

De este modo $\varphi(\alpha \vee \beta) = \varphi(\alpha) \vee \varphi(\beta)$.

De manera análoga se demuestra para $\varphi(\alpha \wedge \beta) = \varphi(\alpha) \wedge \varphi(\beta)$, definiendo

$$(\alpha \wedge \beta)(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in I \cup I' \\ 1\,, & x \in J \cap J' \\ a\,, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo cual concluimos que $\varphi$ es un homomorfismo.

Ahora probemos que $\varphi$ es un isomorfismo. Sea $(I, J) \in \underline{\mathbf{A}}$, tenemos que $\alpha \in E(\mathbf{X})$ y $\varphi(\alpha) = (I, J)$, para $\alpha$ definida anteriormente. Por lo tanto $\varphi$ es sobreyectiva.

Para $\alpha, \beta \in E(\mathbf{X})$ definidos como antes, tales que $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. Sin pérdida de generalidad, para $(I, J), (I', J') \in \underline{\mathbf{A}}$, entonces $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ implica que $\alpha^{-1}(0) = \beta^{-1}(0)$ y $\alpha^{-1}(1) = \beta^{-1}(1)$, por lo tanto $I = \alpha^{-1}(0) = \beta^{-1}(0) = I'$ y $J = \alpha^{-1}(1) = \beta^{-1}(1) = J'$. De este modo $\alpha = \beta$ y $\varphi$ es inyectiva. □

### 3.5.3. Dualidad Fuerte para el Álgebra de De Morgan

El álgebra $\underline{\mathbf{D}}$ tiene cuatro subálgebras determinadas por los subconjuntos

$$D = \{0, a, b, 1\}, \quad A = \{0, a, 1\}, \quad B = \{0, b, 1\}, \quad C = \{0, 1\}.$$

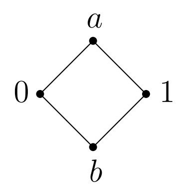
Dado que cada una de las subálgebras de $\underline{\mathbf{D}}$ son simples, obtenemos una dualidad fuerte para $\mathcal{D}$ al tomar en $G$ el automorfismo $f$, el cual intercambia $a$ y $b$, para $H$ los isomorfismos entre $A$ y $B$, y $\mathcal{B}_2 = \mathbb{S}(\underline{\mathbf{D}} \times \underline{\mathbf{D}})$. Al hacer el cálculo de las relaciones para $\mathcal{B}_2$ se tienen 55 subálgebras, lo que hace que se requieran esfuerzos adicionales para reducir el número y obtener una dualidad óptima de una longitud más tratable.

Hay dos miembros de $\mathcal{B}_2$ que vinculan fuertemente las demás relaciones. Así obtenemos,

$$\underset{\sim}{\mathbf{D}} = \langle D; f, \preccurlyeq, \tau \rangle,$$

donde el orden $\preccurlyeq \in \mathcal{B}_2$ está dado por:

$\preccurlyeq$




Las subálgebras de $\underline{\mathbf{D}} \times \underline{\mathbf{D}}$ las obtenemos utilizando las construcciones por vinculación 3.3.1.

De los productos entre los conjuntos $D = \{0, a, b, 1\}$, $A = \{0, a, 1\}$, $B = \{0, b, 1\}$ y $C = \{0, 1\}$, obtenemos para $\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{A}}$, 11 subálgebras como en las álgebras de Kleene, lo mismo que para $\underline{\mathbf{B}} \times \underline{\mathbf{B}}$, pero de la suma de éstas subálgebras restamos dos, pues $\Delta\underline{\mathbf{C}}$ y $\underline{\mathbf{C}} \times \underline{\mathbf{C}}$ también están en $\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{A}}$, así obtenemos 20 subálgebras.

Ahora, para

$\underline{\mathbf{D}} \times \underline{\mathbf{D}} = \{(0,0), (0,a), (0,b), (0,1), (a,0), (a,a), (a,b), (a,1), (b,0), (b,a), (b,b), (b,1), (1,0), (1,a), (1,b), (1,1)\}$,

por construcciones por vinculación 3.3.1, tenemos las siguientes subálgebras:

$\Delta\underline{\mathbf{D}} = \{(0,0), (a,a), (b,b), (1,1)\}$,

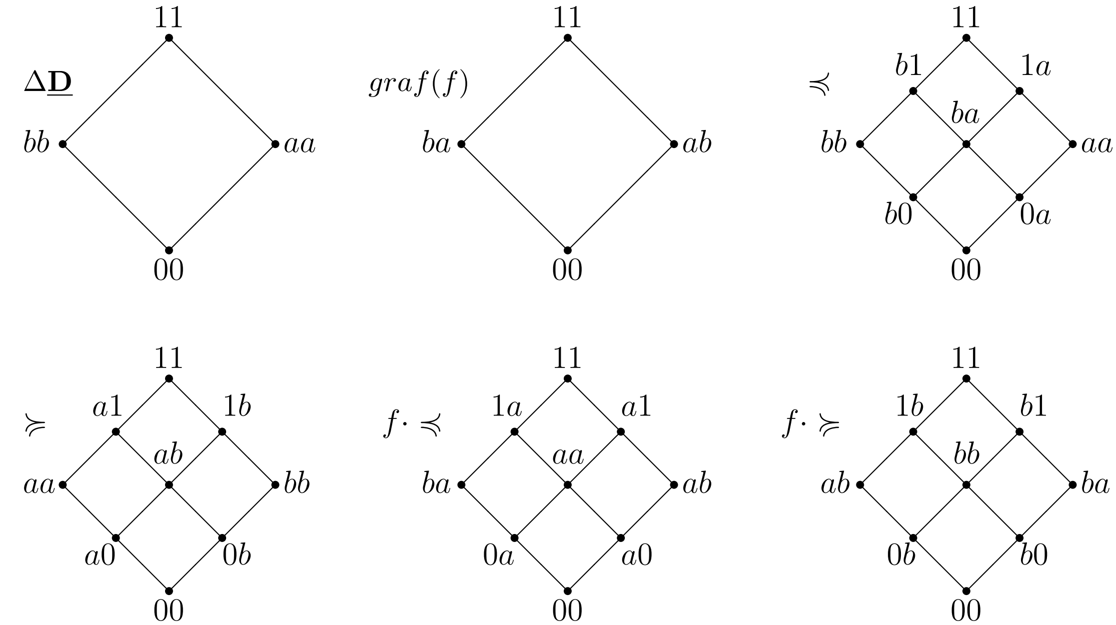
$graf(f) = \{(0,0), (a,b), (b,a), (1,1)\}$,

$\preccurlyeq = \{(0,0), (0,a), (1,a), (b,0), (b,1), (a,a), (b,b), (b,a), (1,1)\}$,

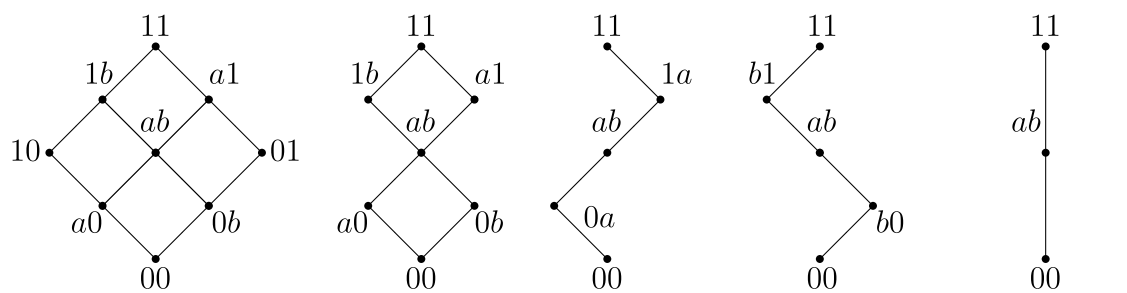
$\preccurlyeq^c = \succcurlyeq = \{(0,0), (0,b), (1,b), (a,0), (a,1), (a,a), (b,b), (a,b), (1,1)\}$,

$f \cdot \preccurlyeq = \{(0,0), (0,a), (1,a), (a,0), (a,1), (a,a), (a,b), (b,a), (1,1)\}$,

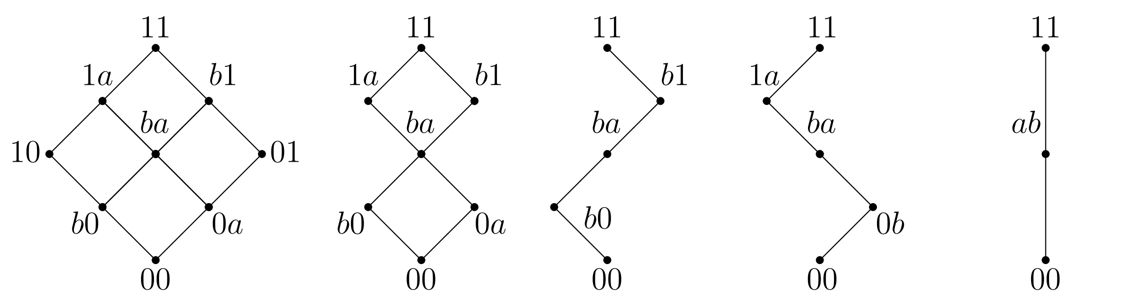
$f \cdot \succcurlyeq = \{(0,0), (0,b), (1,b), (b,0), (b,1), (b,b), (a,b), (b,a), (1,1)\}$.



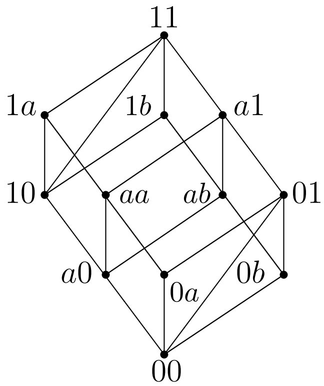

Hasta ahora tenemos 27 subálgebras. Las subálgebras restantes las obtenemos de los productos $\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{B}}$, $\underline{\mathbf{B}} \times \underline{\mathbf{A}}$, $\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{D}}$, $\underline{\mathbf{D}} \times \underline{\mathbf{A}}$, $\underline{\mathbf{B}} \times \underline{\mathbf{D}}$, $\underline{\mathbf{D}} \times \underline{\mathbf{B}}$, intersectados con las 6 subálgebras halladas anteriormente.



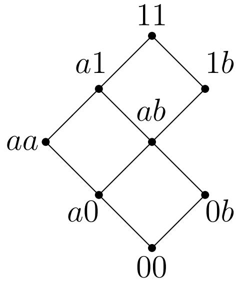

$\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{B}}$ $\quad(\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{B}})\cap \succcurlyeq$ $\quad(\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{B}}) \cap f\cdot \preccurlyeq$ $\quad(\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{B}})\cap f\cdot \succcurlyeq$ $\quad(\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{B}}) \cap graf(f)$



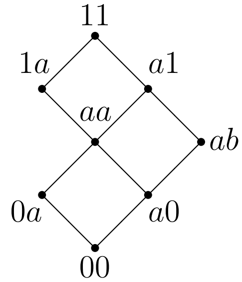

$\underline{\mathbf{B}} \times \underline{\mathbf{A}}$ $\quad(\underline{\mathbf{B}} \times \underline{\mathbf{A}})\cap \preccurlyeq$ $\quad(\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{B}}) \cap f\cdot \succcurlyeq$ $\quad(\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{B}})\cap f\cdot \preccurlyeq$ $\quad(\underline{\mathbf{B}} \times \underline{\mathbf{A}}) \cap graf(f)$



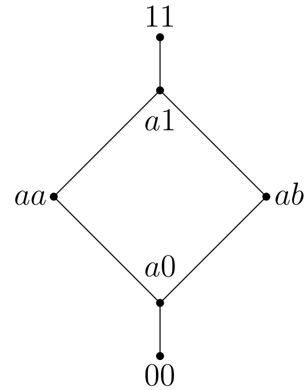

$\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{D}}$



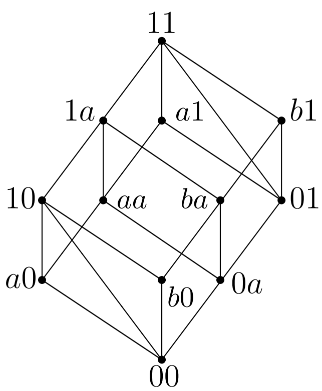

$(\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{D}}) \cap \succcurlyeq$



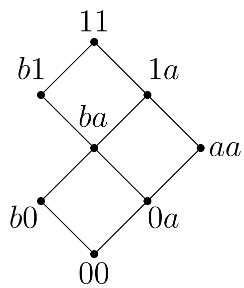

$(\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{D}}) \cap f\cdot \preccurlyeq$



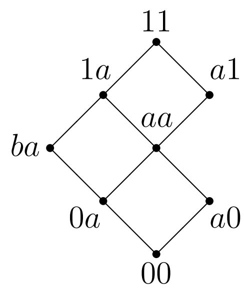

$(\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{D}} \cap \succcurlyeq) \cap f\cdot \preccurlyeq$



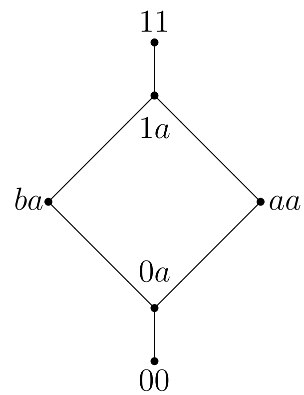

$\underline{\mathbf{D}} \times \underline{\mathbf{A}}$



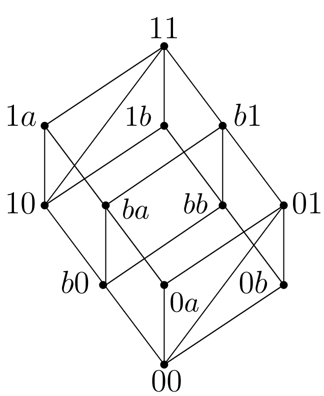

$(\underline{\mathbf{D}} \times \underline{\mathbf{A}}) \cap \preccurlyeq$



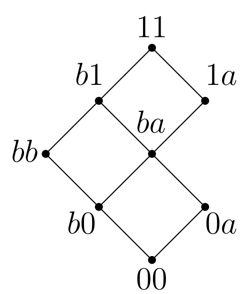

$(\underline{\mathbf{D}} \times \underline{\mathbf{A}}) \cap f\cdot \preccurlyeq$



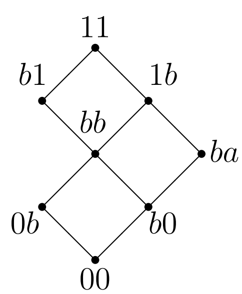

$(\underline{\mathbf{D}} \times \underline{\mathbf{A}} \cap \preccurlyeq) \cap f\cdot \preccurlyeq$



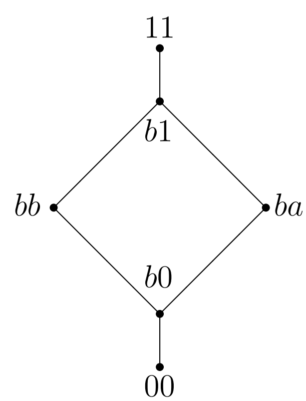

$\underline{\mathbf{B}} \times \underline{\mathbf{D}}$



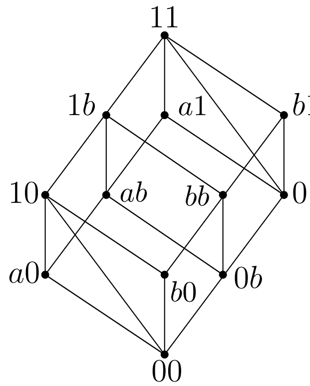

$(\underline{\mathbf{B}} \times \underline{\mathbf{D}}) \cap \preccurlyeq$



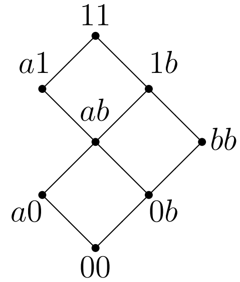

$(\underline{\mathbf{B}} \times \underline{\mathbf{D}}) \cap f\cdot \succcurlyeq$



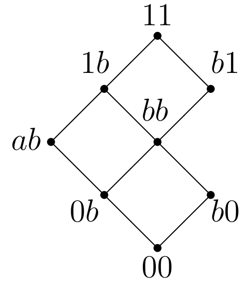

$(\underline{\mathbf{B}} \times \underline{\mathbf{D}} \cap \preccurlyeq) \cap f\cdot \succcurlyeq$



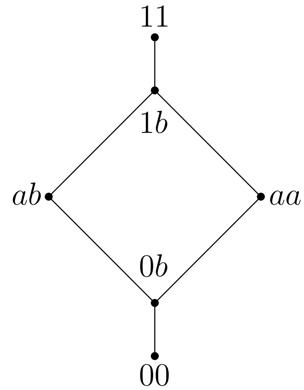

$\underline{\mathbf{D}} \times \underline{\mathbf{B}}$



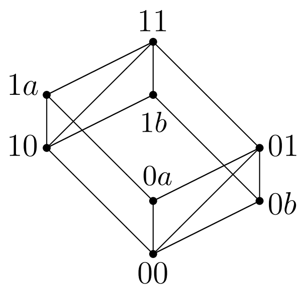

$(\underline{\mathbf{D}} \times \underline{\mathbf{B}}) \cap \succcurlyeq$



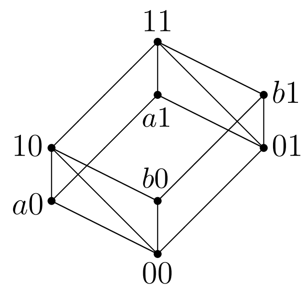

$(\underline{\mathbf{D}} \times \underline{\mathbf{B}}) \cap f\cdot \preccurlyeq$




$(\underline{\mathbf{D}} \times \underline{\mathbf{B}} \cap \succcurlyeq) \cap f\cdot \preccurlyeq$




$\underline{\mathbf{C}} \times \underline{\mathbf{D}}$




$\underline{\mathbf{D}} \times \underline{\mathbf{C}}$

**Observación 3.5.3.** *El conteo de las 55 subálgebras y sus representaciones gráficas se realizó como parte del estudio de esta teoría. Las subálgebras fueron encontradas una a una para identificarlas, entender las construcciones por vinculación y la manera en que dos de las subálgebras vinculaban fuertemente al resto.*

**Teorema 3.5.5.**

i) $\underset{\sim}{\mathbf{D}}$ *da una dualidad fuerte sobre la variedad* $\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{D}})$ *de las álgebras de De Morgan.*

ii) *La categoría dual* $\mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{D}}} = \mathbb{IS}_c\mathbb{P}^+\underset{\sim}{\mathbf{D}}$ *es exactamente la categoría de los espacios de Priestley* $\mathbf{X} = \langle X; f, \preccurlyeq, \mathcal{T}\rangle$ *con un homeomorfismo de orden dos* $f$ *que intercambia el or*den.

**Demostración.**

i) Por 3.4.3 (ii)(c),

$$\langle \{0, a, b, 1\}; f, \mathcal{B}_2 \cup \{A, B, C\}, \mathcal{T}\rangle$$

también da una dualidad fuerte en la variedad de álgebras de De Morgan $\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{D}})$. Por las construcciones realizadas anteriormente, sabemos que $\mathcal{B}_2$ tiene 55 subálgebras, de las cuales podemos eliminar $C = fix(f)$, y eliminar $A$ y $B$ que son obtenidos de $f\cdot \preccurlyeq$ y $f\cdot \succcurlyeq$ utilizando eliminación por repetición 3.3.1.

ii) Por el Teorema de Preservación 3.2.1, todo miembro de $\mathbb{IS}_c\mathbb{P}^+\underset{\sim}{\mathbf{D}}$ es un espacio de Priestley con un homomorfismo de orden dos que invierte el orden. Para probar lo inverso, por el Teorema de Separación 3.2.2, sean $x, y \in X$ donde $\mathbf{X}$ es el espacio tal que $x \not\preccurlyeq y$. Sea $U$ un conjunto clopen decreciente que contiene a $y$ pero no a $x$. Entonces el homomorfismo de orden dos requerido es

$$\alpha(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; z \in U \cap f(U), \\ b & \text{si } \; z \in U \backslash f(U), \\ a & \text{si } \; z \in f(U) \backslash U, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

□

# Capítulo 4

# Teorema de Kalman Topológico

En este capítulo vamos a abordar el resultado principal de nuestro trabajo, trasladar el Teorema de Kalman 2.1.12 a un equivalente en los espacios topológicos, es decir, comprobar que se cumplen las relaciones

$$\mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{2}}} \subseteq \mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{K}}} \subseteq \mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{D}}},$$

para los espacios topológicos de las álgebras de De Morgan dados en el capítulo anterior. Como referencia tomamos los resultados de [6, 8].

## 4.1. Representación Categórica de Kalman

Bajo una representación dual, se tiene que para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}$ existe una estructura $\mathbf{X} \in \mathcal{X}$ donde $e_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to E(\mathbf{X})$ es un isomorfismo. Si consideramos esto y lo aplicamos al Teorema 2.2.9, podemos trasladar este resultado del álgebra universal al lenguaje de la teoría de las categorías, resultado que obtuvimos al estudiar la teoría de dualidades fuertes.

**Teorema 4.1.1.** *Dada cualquier subcategoría $\mathcal{Q}'$ de las álgebras de De Morgan $\mathcal{Q}$, existe un espacio topológico estructurado $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{Q}' = \mathbb{I}E(\mathcal{X})$.*

**Demostración.**
Las estructuras $\underset{\sim}{\mathbf{2}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{K}}$ y $\underset{\sim}{\mathbf{D}}$ dan dualidades fuertes sobre $\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{2}})$, $\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{K}})$ y $\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{D}})$ por los teoremas 3.5.3, 3.5.4 y 3.5.5 respectivamente.

**Corolario 4.1.2.** *Las únicas subcategorías de las álgebras de De Morgan son:* $\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{K}}) = \mathbb{I}E(\mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{K}}})$ *y* $\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{D}}) = \mathbb{I}E(\mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{D}}})$, *y cumplen la relación*

$$\mathbb{I}E(\mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{2}}}) \subseteq \mathbb{I}E(\mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{K}}}) \subseteq \mathbb{I}E(\mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{D}}}).$$

**Demostración.**
Por el teorema 2.2.9 éstas estructuras están relacionadas de manera única. $\square$

## 4.2. Teorema de Kalman Topológico

Primero comparemos las estructuras $\underset{\sim}{\mathbf{2}}, \underset{\sim}{\mathbf{K}}, \underset{\sim}{\mathbf{D}}$.

**Definición 4.2.1.** *La estructura* $\mathbf{Y} = \langle Y; G^{\mathbf{Y}}, H^{\mathbf{Y}}, R^{\mathbf{Y}}, \mathcal{T}^{\mathbf{Y}}\rangle$, *es una subestructura del espacio topológico estructurado* $\mathbf{X} = \langle X; G^{\mathbf{X}}, H^{\mathbf{X}}, R^{\mathbf{X}}, \mathcal{T}^{\mathbf{X}}\rangle$, $\mathbf{Y} \leq \mathbf{X}$, *si* $Y \subseteq X$ *y:*

i) *Para cada* $g \in G$ *n-aria, las operaciones* $g^{\mathbf{Y}}$ *y* $g^{\mathbf{X}}$ *coinciden en* $Y^n$.

ii) *Para cada* $h \in H$ *n-aria,* $dom(h^{\mathbf{Y}}) = dom(h^{\mathbf{X}}) \cap Y^n$, *y* $h^{\mathbf{Y}}$ *coincide con* $h^{\mathbf{X}}$ *en* $Y^n$.

iii) *Para cada* $r \in R$ *n-aria,* $r^{\mathbf{Y}} = r^{\mathbf{X}} \cap Y^n$.

iv) $\mathcal{T}^{\mathbf{Y}}$ *es la topología relativa obtenida de* $\mathcal{T}^{\mathbf{X}}$.

Por la anterior definición podemos afirmar que $\underset{\sim}{\mathbf{2}} = \langle\{0,1\}, \tau\rangle$ es una subestructura de $\underset{\sim}{\mathbf{K}}$ y de $\underset{\sim}{\mathbf{D}}$ trivialmente, pues $G = H = R = \emptyset$ con $\tau$ la topología discreta y es la única subestructura no trivial de $\underset{\sim}{\mathbf{K}}$, pues $K$ no tiene más subconjuntos en los cuales se pueda definir un estructura algebraica de aridad 2, por lo cual $\underset{\sim}{\mathbf{2}}$ es la única subestructura de $\underset{\sim}{\mathbf{K}}$.

Del conjunto $D$ obtenemos 16 subconjuntos de los cuales, los subconjuntos de un elemento forman una subestructura trivial. $\{0,1\}$, $\{0,a,1\}$ y $\{0,b,1\}$ son los conjuntos que observamos son vinculados por las operaciones $f$ y $\preccurlyeq$ de $\underline{\mathbf{D}} \times \underline{\mathbf{D}}$. Luego, $\underset{\sim}{\mathbf{K}}$ es una subestructura que es isomorfa a la estructura generada por $\langle\{0,b,1\}; \preccurlyeq^c, \sim, K_0\rangle$. Por lo cual concluimos que

$$\underset{\sim}{\mathbf{2}} \leq \underset{\sim}{\mathbf{K}} \leq \underset{\sim}{\mathbf{D}}.$$

Ahora comparemos las cuasi-variedades topológicas que generan estos espacios, es decir, si cumplen la relación

$$\mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{2}}} \subseteq \mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{K}}} \subseteq \mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{D}}}$$

y son las únicas.

Si $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ da una dualidad en $\mathcal{Q}$, entonces $D$ y $E$ restringidos a $\mathbb{I}D(\mathcal{Q})$ nos da una equivalencia dual entre las categorías $\mathcal{Q}$ e $\mathbb{I}D(\mathcal{Q})$, observación 3.4.1. A continuación vamos a dar una descripción de la categoría dual $\mathbb{I}D(\mathcal{Q})$.

**Lema 4.2.2.** $D(\mathbf{A}) = \mathcal{Q}(\mathbf{A}, \underline{\mathbf{M}})$ *es termino-cerrado en* $M^A$ *para todo* $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}$.

**Corolario 4.2.3.** *Sea* $\mathbf{X} \in \mathcal{X}$. *Entonces* $\mathbf{X} \in \mathbb{I}D(\mathcal{Q})$ *si y sólo si* $\mathbf{X}$ *es isomorfo a un subconjunto de un termino-cerrado de* $\underset{\sim}{\mathbf{M}}^S$, *para algún conjunto no vacío* $S$, *ver Fig.3.4.*

Ahora, recordemos que en presencia de una dualidad fuerte se tiene que $\mathcal{X} = \mathbb{I}D(\mathcal{Q})$ si y sólo si toda subestructura cerrada de una potencia de $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ es isomorfa a una estructura de término-cerrado de una potencia de $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$, es decir los cuadrados internos de Fig.3.4 son uno solo.

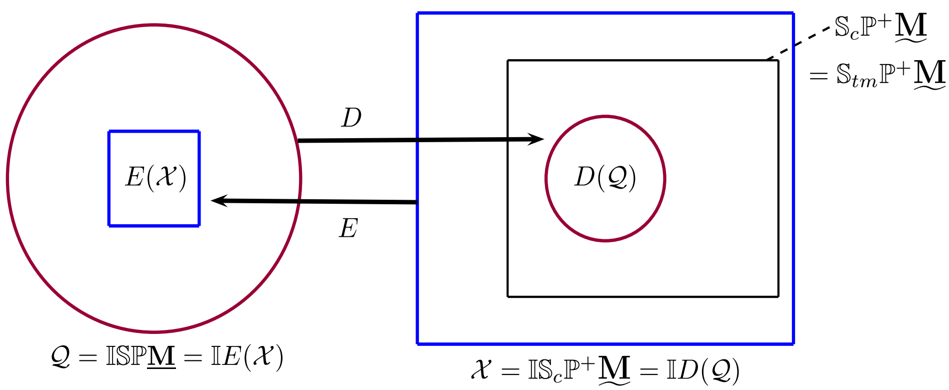



Fig.5.2. Subcategorías de $\mathcal{X}$ bajo una dualidad fuerte.

Así podemos abordar el resultado principal de nuestro trabajo, extender un teorema de la teoría de retículos, a los espacios topológicos generados por los duales algebraicos de las álgebras de De Morgan.

**Teorema 4.2.4.** ***Teorema de Kalman Topológico.*** *Las cuasi-variedades topológicas generadas por los duales de las álgebras de De Morgan,* $\mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{2}}}$, $\mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{K}}}$ *y* $\mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{D}}}$, *cumplen la relación*

$$\underset{\sim}{\mathcal{X}}_{\underline{\mathbf{2}}} \subseteq \underset{\sim}{\mathcal{X}}_{\underline{\mathbf{K}}} \subseteq \underset{\sim}{\mathcal{X}}_{\underline{\mathbf{D}}}$$

*y son únicas.*

**Demostración.**
Para todo espacio topológico $\mathbf{X} \in \mathbb{I}D(\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{K}}))$ tenemos que existe un álgebra de Kleene $\mathbf{A} = E(\mathbf{X}) \in \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{K}})$.

Ahora, dado que toda álgebra de Kleene es un álgebra de De Morgan, tenemos que para $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{K}})$, $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{D}})$ por el lema 4.2.2 y por el corolario 4.2.3 tenemos que $D(\mathbf{A}) = \mathbf{X} \in \mathbb{I}D(\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{D}}))$ para toda $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{K}})$.

Por lo tanto, existe un único morfismo $\underset{\sim}{u} = D \circ t \circ E$ el cual es una inmersión, como se puede observar en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{I}D(\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{D}})) & \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{D}}) \arrow[l, "D"'] \\
\mathbb{I}D(\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{K}})) \arrow[u, dashed, "\underset{\sim}{u}"] \arrow[r, "E"] & \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{K}}) \arrow[u, "t"']
\end{tikzcd}$$

Donde $\langle D, E, e, \varepsilon \rangle$ es una equivalencia dual entre las categorías $\mathbb{I}D(\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{D}}))$ y $\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{D}})$, $\langle D, E, e^{'}, \varepsilon^{'} \rangle$ es una equivalencia dual entre las categorías $\mathbb{I}D(\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{K}}))$ y $\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{K}})$ y $t$ es una inmersión pues $\underline{\mathbf{K}}$ tiene la propiedad universal [5].

De manera análoga, para todo espacio topológico $\mathbf{X} \in \mathbb{I}D(\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{2}}))$ tenemos que existe $\mathbf{A} = E(\mathbf{X}) \in \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{2}})$, como $\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{2}}) \subseteq \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{K}})$, entonces $D(\mathbf{A}) = \mathbf{X}' \in \mathbb{I}D(\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{K}})$, luego $D(\mathbf{A}) = \mathbf{X} \in \mathbb{I}D(\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{K}}))$.

Por lo cual, existe un morfismo $\underset{\sim}{u}' = D \circ t' \circ E$ el cual es una inmersión, como se puede observar en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{I}D(\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{K}})) & \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{K}}) \arrow[l, "D"'] \\
\mathbb{I}D(\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{2}})) \arrow[u, dashed, "\underset{\sim}{u}^{'}"] \arrow[r, "E"] & \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{2}}) \arrow[u, "t'"']
\end{tikzcd}$$

pues $\langle D, E, e^*, \varepsilon^* \rangle$ es una equivalencia dual entre las categorías $\mathbb{I}D(\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{2}}))$ y $\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{2}})$, y $t'$ es una inmersión dado que $\underline{\mathbf{2}}$ tienen la propiedad universal [5].

Luego, tenemos la relación que estamos buscando

$$\mathbb{I}D(\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{2}})) \subseteq \mathbb{I}D(\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{K}})) \subseteq \mathbb{I}D(\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{D}})),$$

en otros términos

$$\mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{2}}} \subseteq \mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{K}}} \subseteq \mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{D}}}.$$

Las cuales son únicas bajo isomorfismos. $\square$

## 4.3. Cuasi-variedades Topológicas No Estándar

Una cuasi-variedad topológica se dice estándar en un sentido general, si existe una bonita descripción de sus miembros. Lastimosamente, para las cuasi-variedades topológicas de las álgebras de De Morgan no es posible axiomatizar sus miembros como su contraparte algebraica, pues estas estructuras no son *estándar* [8]. En otras palabras, la categoría $\mathcal{X} = \mathbb{IS}_c\mathbb{P}^+(\underset{\sim}{\mathbf{M}})$ no puede ser descrita como la categoría de todos los espacios estructurados Booleanos, los cuales son modelos de la teoría cuasi-atómica de $\langle M; G, H, R \rangle$.

**Teorema 4.3.1.** [8] *Sea $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ una estructura finita. Entonces, $\mathcal{X} = \mathbb{IS}_c\mathbb{P}^+(\underset{\sim}{\mathbf{M}})$ es no estandar si y sólo si existe un espacio estructurado Booleano localmente finito $\mathbf{X}$ tal que cada subestructura finita de $\mathbf{X}$ está en $\mathcal{X}$ pero $\mathbf{X}$ no está en $\mathcal{X}$.*

Para comprobar que las álgebras de De Morgan no son estándar, definamos el espacio de Cantor $\langle C, \tau \rangle$, visto como un subespacio del intervalo $[0, 1]$. El conjunto $C$ lo vamos a obtener removiendo los intervalos abiertos que dan los tercios medios, es decir, eliminamos los intervalos $(1/3, 2/3)$, $(1/9, 2/9)$, $(7/9, 8/9), \ldots$ El conjunto restante, tiene una sucesión enumerable de parejas que cubren bajo el orden usual $1/3 < 2/3$, $1/9 < 2/9$, $7/9 < 8/9, \ldots$

Definimos el orden de Stralka $\preceq$ en $C$ por $x \preceq y$ si $x = 0$, $x = y$, $y = 1$ o $y$ cubre a $x$ en el orden usual. Por ejemplo, $1/9 \preceq 2/9$ pero $1/9$ y $1/3$ no son comparables.

Puesto que $\preceq$ es cerrado en $C \times C$, el espacio ordenado $\mathbf{X} = \langle C, \preceq, \tau \rangle$ es una estructura Booleana.

Además, todo subespacio finito de $\mathbf{X}$ es un espacio de Priestley dado que su topología es discreta y $\mathbf{X}$ es localmente finito puesto que no tiene operaciones. Los únicos subconjuntos clopen decrecientes de $\mathbf{X}$ son los intervalos $[0, x]$ donde $x$ es el extremo izquierdo del intervalo eliminado.

Así, $\mathbf{X}$ no es un espacio de Priestley, pues si por ejemplo tomamos $1/4 \npreceq 3/4$, no existen conjuntos clopen decrecientes que contengan a $3/4$ pero no a $1/4$.

**Ejemplo 4.3.2.** [8] *La categoría $\mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{D}}}$ dada en el teorema 3.5.5, no es estándar.*

*Sea $\mathbf{X} = \langle C, f, \preccurlyeq, \tau \rangle$, donde $\langle C, \tau \rangle$ es el espacio de Cantor, $\preccurlyeq$ el orden de Stralka y $f(x) = 1 - x$, una función continua que invierte el orden. Entonces, $\mathbf{X}$ es localmente finito y toda subestructura de $\mathbf{X}$ pertenece a $\mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{D}}}$, pero $\langle C, \preccurlyeq, \tau \rangle$ no es un espacio de Priestley , así $\mathbf{X} \notin \mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{D}}}$ y $\mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{D}}}$ no es estándar.*

**Ejemplo 4.3.3.** [8] *La categoría $\mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{K}}}$ dada en el teorema 3.5.4, no es estándar.*

*Sea $\mathbf{X} = \langle C, X_0, \sim, \preccurlyeq, \tau \rangle$ donde $\langle C, \tau \rangle$ es el espacio de Cantor, $\preccurlyeq$ es el orden de Stralka, $\sim = \preccurlyeq \cup \succcurlyeq$ y $X_0 = \{0, 1\}$. Entonces, $\sim$ y $X_0$ son cerrados, así que $\mathbf{X}$ es una estructura Booleana y es localmente finita.*

*$\mathbf{X}$ satisface los axiomas a), b) y c) dados en 3.5.4 por la definición del orden de Stralka y de $\sim$ . Así toda subestructura de $\mathbf{X}$ está en $\mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{K}}}$. Dado que $\langle C, \preccurlyeq, \tau \rangle$ no es un espacio de Priestley, $\mathbf{X} \notin \mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{K}}}$ y $\mathcal{X}_{\underset{\sim}{\mathbf{K}}}$ no es estándar.*

# Capítulo 5

# Conclusiones

- El Teorema de Kalman fue formulado y demostrado en el lenguaje de la teoría de retículos, después se trasladó a un lenguaje más general del álgebra universal, en términos de variedades y se demostró que las variedades generadas por las álgebras de De Morgan coinciden con las cuasi-variedades generadas por éstas álgebras.

- La subdirecta irreducibilidad de las álgebras de De Morgan permite que las variedaades que ellas generan coincidan con la estructura de las cuasi-variedades, que son las estructuras para las cuales se desarrolló la teoría de dualidades expuesta en este trabajo.

- Las variedades de De Morgan pueden ser generadas también por los intervalos fuzzy y los intervalos de evaluación fuzzy, pero su estructura es infinita así que se hace imposible trabajar la teoría de dualidades con ellas.

- Los teoremas de dualidad fuerte, nos dicen que tipo de estructura $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ debemos tomar como el clon de una clase de álgebra finita $\underline{\mathbf{M}}$ para obtener la dualidad. Al realizar esto nos damos cuenta que, a pesar de la estructura ser finita, $\mathbb{S}(\underline{\mathbf{M}}^2)$ puede ser muy grande y no dar una dualidad de uso práctico. Así que se debe realizar un esfuerzo adicional para disminuir las operaciones sin destruir la dualidad, como es el caso de $\underset{\sim}{\mathbf{D}}$, donde $\mathbb{S}(\underline{\mathbf{D}}^2)$ tiene 55 subálgebras.

- En aras de entender los teoremas de dualidad fuerte y las construcciones por vinculación se realizó el conteo de las 55 subálgebras de $\mathbb{S}(\underline{\mathbf{D}}^2)$ obtenidas por productos directos y la representación gráfica de cada una de ellas, para poder exhibir las construcciones admisibles por vinculación realizadas y aclarar el por qué sólo dos operaciones, $f$ y $\preccurlyeq$ vinculan fuertemente el resto de operaciones en $\underset{\sim}{\mathbf{D}}$, lo cual no aparece de forma explícita en ninguna parte de la literatura.

- No fue posible aplicar el Teorema de Separación directamente a la categoría $\mathcal{X}$, para mostrar las relaciones de las cuasi-variedades topológicas generadas por los duales de las álgebras de De Morgan. Una vez encontrada la caracterización $\mathcal{X} = \mathbb{I}D(\mathcal{Q})$ bajo dualidades fuertes, se optó por utilizar las funciones de evaluación dadas por la equivalencia dual y un homomorfismo dado por la propiedad universal entre las variedades de De Morgan.
- Se pudo obtener una representación del Teorema de Kalman para retículos distributivos con involución en los espacios topológicos obtenidos por los duales generados por las álgebras de De Morgan bajo una dualidad fuerte.
- Los cálculos proposicionales que tienen la lógica Booleana, la lógica clásica fuzzy y los intervalos de evaluación fuzzy son los mismos que generan el álgebra de dos elementos $\underline{\mathbf{2}}$, el álgebra de Kleene $\underline{\mathbf{K}}$ de tres elementos y el álgebra diamante $\underline{\mathbf{D}}$ respectivamente, por ser estas estructuras las que generan las variedades. Sin embargo, las cuasi-variedades topológicas generadas por los duales de cada una de las álgebras mencionadas anteriormente no tienen una axiomatización, pues esta categoría no es la categoría de todos los espacios estructurados Booleanos. Lo que deja una puerta abierta para conjeturar que existen lógicas que generan los duales topológicos, las cuales no se comportan de la misma manera que su contraparte algebraica.

# Bibliografía


[1] Awodey Steve, *Categort Theory*, Carnegie Mellon University, 2006.

[2] Benjamin Pierce, *Basic Category Theory for Computer Scientist*, Cambridge, Massachusetts, 1991.

[3] Birkhoff, G. *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol.25, rev. ed., New York, 1948.

[4] Brian A. Davey, *Natural Dualities for Structures*, La Trobe University, 2006.

[5] Burris S. y Sankappanavar, H. *A Course In Universal Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[6] Clark, D. and Davey, B. *Natural Dualites for the working algebraist*, Cambridge University Press, New York, 1998.

[7] Clark, D. and Davey, B. *When a Natural Duality is Good?*, Algebra Universalis, 35, pp 265-295, 1996.

[8] Clark, D.M., Davey, B.A., Haviar, M., Pitkethly, J.G. and Taukder, M.R. *Standar Topological Quasi-Varieties,* HOUSTON JOURNAL OF MATHEMATICS, vol 29, No. 4, 2003.

[9] Cruz, L. *Algunas Álgebras de De Morgan y Lógica Fuzzy*, Universidad del Valle, 2008.

[10] Davey, B. and Priestley, H. *Introduction to lattices and order*, Cambridge University Press, New York, 1990.

[11] Genhrke Mai, Walker Carol y Walker Elbert. *Fuzzy Logics Arinsing From Strict De Morgan Sistems.* TRENDS IN LOGICS 2003, vol.20, pp 257-276.

[12] Kalman J. A. *Lattice With Involution*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol.87, No. 2, pp.485-491, 1958.

[13] Metcalfe George, Rothlisberger Christoph. *Admissibility in De Morgan Algebras.* FOCUS 16:1875-1882, 2012.

[14] Pynko AP. *Implicational classes of De Morgan lattices.* Discrete Math, 205(1-3), pp.171-181, 1999.

[15] Roman S. *Lattices and ordered sets*, Springer, 2008.