

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO

Robert Zorko

# Različni Voronoijevi diagrami

DIPLOMSKO DELO

UNIVERZITETNI INTERDISCIPLINARNI ŠTUDIJ  
RAČUNALNIŠTVO IN MATEMATIKA

MENTOR: izred. prof. dr. Sergio Cabello

Ljubljana 2014



Rezultati diplomskega dela so intelektualna lastnina avtorja in Fakultete za računalništvo in informatiko Univerze v Ljubljani. Za objavljanje ali izkoriščanje rezultatov diplomskega dela je potrebno pisno soglasje avtorja, Fakultete za računalništvo in informatiko ter mentorja.

*Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil  $\text{\LaTeX}$ .*



Fakulteta za računalništvo in informatiko izdaja naslednjo nalogo:

Tematika naloge:

Voronojev diagram je razdelitev prostora glede na določene metrične lastnosti. Ponavadi je definiran za točke v Evklidski ravnini, glede bližine vhodnih točk. Obstaja več posplošitev takšnega osnovnega koncepta, uporabljamo lahko različne metrike, različne tipe vhodnih objektov (npr. daljice), razdalje do večih vhodnih objektov oziroma razdalje do najbolj oddaljene točke. Koncept Abstraktnega Voronoijevega diagrama, kjer bisekcijske krivulje nadomeščajo vlogo razdalje, združuje več takšnih posplošitev. Cilj diplome je razumevanje in predstavitev definicij, lastnosti ter učinkovitosti izračuna takšnih posplošenih Voronoijevih diagramov.



## IZJAVA O AVTORSTVU DIPLOMSKEGA DELA

Spodaj podpisani Robert Zorko, z vpisno številko **63080195**, sem avtor diplomskega dela z naslovom:

*Različni Voronoijevi diagrami*

S svojim podpisom zagotavljam, da:

- sem diplomsko delo izdelal samostojno pod mentorstvom izred. prof. dr. Sergia Cabella,
- so elektronska oblika diplomskega dela, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identični s tiskano obliko diplomskega dela
- soglašam z javno objavo elektronske oblike diplomskega dela v zbirki "Dela FRI".

V Ljubljani, dne 24. septembra 2014

Podpis avtorja:





# Kazalo

Povzetek

Abstract

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Voronoijev diagram</b>	<b>5</b>
2.1	Voronoijevi diagrami višjih redov . . . . .	8
2.2	Uteženi Voronoijevi diagrami . . . . .	10
2.3	Voronoijev diagram v različnih metrikah . . . . .	13
2.4	Voronoijev diagram za daljice . . . . .	15
<b>3</b>	<b>VD najbolj oddaljenih točk</b>	<b>17</b>
3.1	Algoritem in podatkovne strukture . . . . .	20
3.2	Analiza časovne zahtevnosti . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Abstraktni Voronoijevi diagrami</b>	<b>25</b>
4.1	Naključnostni prirastni algoritem . . . . .	27
4.2	Analiza . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Sklepne ugotovitve</b>	<b>37</b>



# Seznam uporabljenih kratic

kratica	angleško	slovensko
<b>VD</b>	Voronoi diagram	Voronoijev diagram
<b>DCEL</b>	doubly connected edge list	dvojno povezan seznam robov
<b>RIC</b>	randomized incremental construction	naključnostna prirastna konstrukcija



# Povzetek

V diplomskem delu predstavimo geometrijsko strukturo imenovano Voronoijev diagram. Najprej bomo pogledali definicijo in splošne lastnosti Voronoijevega diagrama. Nato bomo pregledovali različne variacije na osnovno idejo in njihove praktične uporabe ter za njih predstavili nekatere lastnosti.

Drugi del diplomskega dela se bo osredotočil na tako imenovane Voronoijeve diagrame najbolj oddaljenih točk, kjer bomo poleg njihovih posebnosti tudi pogledali algoritem za naključnostno prirastno konstrukcijo (*angl.*: randomized incremental construction) diagrama in zatem še analizirali njegovo pričakovano časovno zahtevnost.

Zadnji del je namenjen spoznanju posplošene oblike Voronoijevih diagramov, imenovano Abstraktni Voronoijevi diagrami. Tudi tukaj bomo pogledali idejo algoritma za naključno prirastno konstrukcijo in ocenili njeno pričakovano časovno in prostorsko zahtevnost.

**Ključne besede:** Voronoijev diagram, Voronoijev diagram najbolj oddaljenih točk, Abstraktni Voronoijev diagram, naključnostna prirastna konstrukcija.



# Abstract

In the thesis we present a geometric structure called Voronoi diagram. At first we will take a look at the definition and some basic properties of the Voronoi diagram. After that we will see different variations on the basic idea, their practical usage, and we will also present some of their properties.

The second part will focus on the so-called Farthest-Point Voronoi diagrams. Beside their specificities, we will also see a RIC (randomized incremental construction) algorithm to calculate the diagram and analyze its expected running time.

The last part is meant to show a generalized version of Voronoi diagrams, called Abstract Voronoi diagrams. Here we will also see the idea for a RIC algorithm and evaluate its expected running time and space.

**Keywords:** Voronoi diagram, Farthest-point Voronoi diagram, Abstract Voronoi diagram, randomized incremental construction.





# Poglavje 1

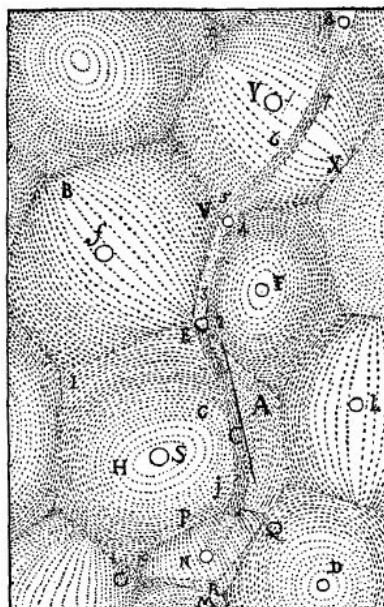
## Uvod

Najprej bomo pogledali zgodovino Voronoijevih diagramov in našeli raziskave in študije, ki so bili opravljeni v povezavi z njimi. Poglavje je povzeto po [2, 22, 25].

Voronoijevi diagrami spadajo med najbolj zanimive in uporabne strukture v geometriji. Segajo nazaj do Descartesa [11], odkar so postali znani matematikom (glej na primer Gruber [17]). Bili tema članka, ki sta ga napisala Shamos in Hoey [27], ki je ustvaril računsko geometrijo (*angl.*: computational geometry). R. Descartes je v svoji knjigi na temo principov filozofije [11] trdil da sončni sistem sestoji iz vrtincev. Njegova ilustracija prikazuje dekompozicijo prostora na konveksne regije, ki jih sestavlja snov, ki kroži okrog zvezd. Glej sliko 1.1.

Kljub temu, da Descartes ni točno določil razširitev teh regij, je osnovna ideja sledeča. Naj bosta prostor  $M$  in množica  $S$ , sestavljena iz elementov iz  $M$ , dani skupaj s pojmom vpliva ki jih imajo elementi iz  $S$  nad točko  $x$  iz  $M$ . Potem regija  $p \in S$  sestoji iz vseh točk  $x \in M$ , za katere ima  $p$  največji vpliv izmed vseh elementov iz  $S$ .

Koncept se je pojavil neodvisno in se izkazal za uporabnega v raznih vejah znanosti. Uporabljena so bila različna imena [2], kot na primer *medial axis transfer* v biologiji in fiziologiji, *Wigner-Seitz cone* v kemiji in fiziki, *domains of action* v kristalografiji, ter *Thiessenovi poligoni* v meteorologiji in



Slika 1.1: Descartova dekompozicija prostora na vrtince. Vir slike: [2].

geografiji. Matematika Dirichlet [12] in Voronoi [29, 28] sta bila prva, ki sta formalno predstavila koncept. Uporabila sta ga za študij kvadratnih form, kjer so bili objekti točke na mreži (*angl.*: lattice points) in je bil vpliv merjen kot Evklidska razdalja. Struktura, ki je tako nastala, je bila poimenovana *Dirichletova teselacija* [2] (*angl.*: Dirichlet tessellation) ali *Voronoijev diagram* (*angl.*: Voronoi diagram), ki je postalo standardno ime zanjo.

Medtem je na CiteSeer več kot 4800 člankov, ki se navezujejo na Voronoijeve diagrame. Raziskave, osredotočene na njihove strukturne in algoritmične aspekte, so predstavili avtorji Aurenhammer [1], Aurenhammer in Klein [2], Fortune [16], in za posplošene Voronoijeve diagrame Boissonnat et al. [5]. Znanе primere za uporabnost Voronoijevih diagramov lahko najdemo v Held [18] in v Okabe et al. [26].

V ravnini so bile najdene učinkovite metode za izračunanaje diagrama pod Evklidovo metriko: deli in vladaj pristop od Shamos in Hoey [27], metoda pometanja s črto od Fortune [15], metoda dvigovanja od Brown [6] ter Edelsbrunner in Seidel [14].

Delaunayeva triangulacija (*angl.*: delaunay triangulation) je dual Voronijevega diagrama in je tudi uporabna za številne probleme, zlasti za takšne, ki se ukvarjajo z bližino.



## Poglavje 2

# Voronoijev diagram

V tem poglavju bomo podali splošne definicije Voronoijevega diagrama. Povzeto je po [1, 19].

**Definicija 2.1** Naj bo  $S$  množica elementov (točk) v ravnini. Za dva različna elementa  $p, q \in S$  definiramo *dominanco  $p$  nad  $q$* , označeno z  $D(p, q)$ , kot podmnožico ravnine, ki je vsaj enako oddaljena od  $p$  kot je od  $q$ . Torej

$$D(p, q) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \delta(x, p) \leq \delta(x, q)\}.$$

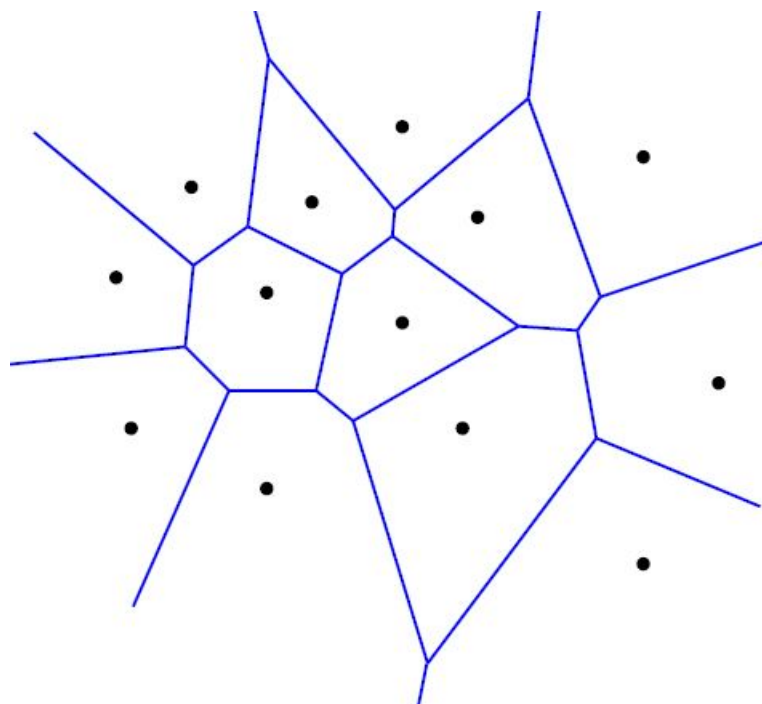
V zgornji formuli je  $\delta$  evklidska razdalja in razvidno je, da je  $D(p, q)$  zaprta polravnina, ki jo omejuje simetrala med elementoma  $p$  in  $q$ . Ta simetrala loči vse točke ravnine, ki so bližji točki  $p$  od tistih, ki so bližji točki  $q$ , in jo bomo imenovali *separator* od  $p$  in  $q$ . Separator bomo označili kot  $B(p, q)$ .

**Definicija 2.2** Naj bo  $S$  množica elementov v ravnini. *Regija elementa  $p \in S$*  je del ravnine, ki leži v preseku vseh dominanc  $p$  nad preostalimi točkami v množici  $S$ . Formalno zapišemo:

$$VR(p, S) = \bigcap_{q \in S \setminus \{p\}} D(p, q).$$

Ker je posamezna regija sestavljena iz presekov  $n - 1$  polravnin, predstavlja konveksno množico. Torej je meja regije sestavljena iz največ  $n - 1$

robov (*angl.: edges*) ter oglišč (*angl.: vertices*). Vsaka točka na robu je ekvidistančna do natanko dveh točk iz  $S$  in vsako oglišče je enako oddaljeno od najmanj treh. Posledica tega je, da so regije poligonalna razdelitev ravnine. To razdelitev imenujemo *Voronojev diagram* končne množice elementov  $S$  in jo označujemo z  $V(S)$  [1]. Primer Voronojevega diagrama je viden na sliki 2.1.



Slika 2.1: Primer Voronojevega diagrama. Vir slike: [9].

Ker je očitno, da je vsak element  $p \in S$  znotraj svoje regije ( $p \in VR(p, S)$ ), sledi da ima Voronoijev diagram natanko  $n$  regij. Nakatere od njih so nujno neomejene. Take regije definirajo elementi, ki se nahajajo na robu konveksne ovojnice množice  $S$ , saj samo za njih obstajajo točke, ki so poljubno oddaljene, ampak so jim še vedno najbližji. Voronoijev diagram nima vozlišč samo, kadar ležijo vsi elementi iz  $S$  na skupni premici. Takšna degeneracija tudi implicira obstoj regij, ki imajo le en neomejen rob. V drugih primerih se trije ali več robov stika v skupnem oglišču. Lahko opazimo da je vsako

---

oglišče središče krožnice, ki seka najmanj tri elemente iz  $S$ , vendar nobenega ne vsebuje v svoji notranjosti.

Imamo do  $\binom{n}{2}$  separatorjev za  $n$  elementov, vendar samo linearno mnogo separatorjev tvori robove za  $V(S)$ . To se lahko opazi, če pogledamo na Voronoijev diagram kot na planarni graf, ki ima  $n$  regij in minimalno stopnjo roba enako 3, ter dodatno vozlišče  $v_\infty$  v neskončnosti, kjer se končajo vsi neomejeni robovi. Vsak od  $e$  robov ima dve oglišči ter vsako od  $v$  oglišč pripada vsaj trem robovom. Torej velja  $2e \geq 3v$ . Eulerjeva enačba  $n+v-e \geq 2$  sedaj implicira  $e \leq 2n - 6$  in  $v \leq 2n - 4$ . Posledično, povprečno število robov na regijo ne doseže šest, saj je vseh robov manj kot  $3n$  in vsak od njih pripada natančno dvema regijama od  $n$ .

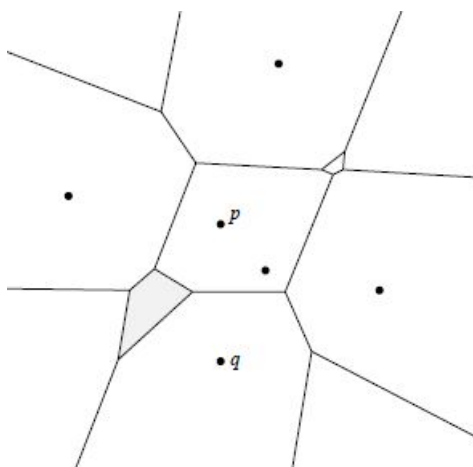
Linearno obnašanje velikosti Voronoijevega diagrama pomeni, da ta struktura ni veliko bolj zapletena kot osnovna konfiguracija točk v ravnini. To je eden izmed razlogov za pogosto uporabo diagrama. Drugi razlog je, da  $V(S)$  obsega vse informacije o bližini točk iz  $S$  v računalniško uporabnem načinu. Na primer uporaba pri problemu najbližje bolnice [19] temelji na trivialni opazki, da točka  $x$  spada v regijo točke  $p$  natanko tedaj, kadar je  $p$  bližja  $x$ , kot vse ostale točke iz  $S$ . Poleg tega, kadar je element  $p$  najbližji elementu  $q$ , imata regiji, ki pripadata  $p$  in  $q$  skupen rob [1].

Uporaba Voronoijevih diagramov je razvidna na primeru t.i. problemu pošt (*angl.*: post office problem). Pred leti je Knuth [24] postavil klasičen problem, pri kateremu se za dano množico točk v ravnini sprašujemo katera od njih je najbližja naši poizvedni točki  $q$ . Problem je fundamentalen in je postal osnovni gradbeni blok številnih algoritmov in podatkovnih struktur v računski geometriji. Dobro ga razumemo v malih dimenzijah [2]. Očitno lahko najdemo rešitev na problem s pomočjo  $V(S)$ , saj nam Voronoijeva regija v kateri se nahaja  $q$  pove katera točka iz  $S$  je najbližja.

## 2.1 Voronoijevi diagrami višjih redov

V tem poglavju bomo opisali varianto Voronoijevega diagrama imenovano Voronoijev diagram višjega reda (*angl.*: Higher Order Voronoi Diagram). Povzeto je po [3].

Celica Voronoijevega diagrama reda  $k$  je množica točk ki ima istih  $k$  elementov iz  $S$  kot  $k$  najbližjih sosedov (*angl.*:  $k$  nearest neighbours). Generiranje Voronoijevih diagramov višjih redov je lahko rekurzivno. Za  $k$ -ti red začnemo z diagramom reda  $k - 1$ , kjer zamenjamo vsako celico generirane z množico  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$  z diagramom generiranim na množici  $S \setminus X$ . Potem pa združujemo celice, ki imajo istih  $k$  najbližjih sosedov. Voronoijev diagram reda  $k$ , generiranim na množici  $S$ , označimo z  $V_k(S)$ . Primer regije reda 2 in Voronoijev diagram reda 2 je na sliki 2.2.



Slika 2.2: Regija dvojice  $\{p, q\}$  in  $V_2(S)$ . Vir slike: [2].

Če je  $|S| = n$ , potem imenujemo Voronoijev diagram reda  $n - 1$  Voronoijev diagram najbolj oddaljenih točk (*angl.*: Farthest-Point Voronoi diagram). Ravnino razdeli na celice, za katere velja da imajo skupno najbolj oddaljen element iz  $S$ .

Aplikacijo takšnega Voronoijevega diagrama najdemo pri proizvodnji, kjer se lahko pojavijo manjša odstopanja od zelene oblike. Kadar morajo



biti objekti popolnoma okrogli, se jih testira s pomočjo koordinatno merilnih napravah (*angl.*: coordinate measurement machines), ki vzorčijo točke na površini objekta. Predvidevamo da smo izdelali disk. Naprava nam bo vrnila množico točk v ravnini (označimo jo kot  $S$ ), ki ležijo skoraj na krožnici. Okroglost (*angl.*: roundness) množice točk je definirana kot širina najožjega obroča, ki vsebuje vse točke.

Obroč ima nekaj točk iz vhodne množice na svojih mejnih krožnicah. Zunanjo krožnico imenujemo  $C_{zunanja}$ , notranjo pa  $C_{notranja}$ . Očitno mora  $C_{zunanja}$  vsebovati vsaj eno točko iz  $S$ , sicer bi jo lahko zožili. Podobno mora tudi  $C_{notranja}$  vsebovati najmanj eno točko, sicer bi jo lahko razširili. Imamo tri različne položaje za obe krožnici:

- $C_{zunanja}$  vsebuje vsaj tri točke iz  $S$ ,  $C_{notranja}$  pa vsaj eno.
- $C_{zunanja}$  vsebuje vsaj eno točko iz  $S$ ,  $C_{notranja}$  pa vsaj tri.
- Obe krožnici vsebujeta po dve točki.

Da določimo obroč minimalne širine je dovolj, da najdemo njegovo središče, ki ga bomo poimenovali  $q$ . Potem ko imamo  $q$ , je obroč definiran s točkami, ki so najbližji  $q$  in tistim, ki so najdlje oddaljeni od  $q$ . Če imamo Voronoijev diagram od  $S$ , potem je najbližja tista točka, v čigar celici se nahaja  $q$ . Izkaže se da imamo podobno strukturo tudi za najbolj oddaljeno točko in sicer Voronoijev diagram najbolj oddaljenih točk.

V primeru, da ima obroč središče takšno da  $C_{notranja}$  vsebuje vsaj tri točke, potem je  $q$  oglišče navadnega Voronoijevega diagrama od  $S$ . Sorodno tudi kadar  $C_{zunanja}$  vsebuje vsaj tri točke je  $q$  oglišče Voronoijevega diagrama najbolj oddaljenih točk. Sicer, ko imata obe krožnici natanko dve točki, je  $q$  na robu navadnega Voronoijevega diagrama in na robu Voronoijevega diagrama najbolj oddaljenih točk. Takšen pristop nam omogoča da imamo dokaj malo množico točk, ki so kandidati za središče obroča [3].

Več podrobnosti o Voronoi diagramih najbolj oddaljenih točk je v poglavju 3.

## 2.2 Uteženi Voronoijevi diagrami

V tem poglavju bomo govorili o variaciji Voronoijevega diagrama imenovano Uteženi Voronoijev diagram (*angl.*: Weighted Voronoi diagram). Povzeto je po [13].

Zdaj obravnavamo posplošitev, v kateri je vloga posameznega elementa določena z položajem in težo. V prejšnjem primeru smo pokrili situacijo, v kateri imajo vsi elementi enako težo. Prirejanje teže vsakemu elementu je v nekaterih primerih bolj uporabno, kot da imajo vsi elementi uniformno težo. Primeri uporabnosti uteženih točk dobimo ob pogledu na število prebivalcev v naselju, število trgovin v trgovskem centru, ali velikosti atoma v kristalni strukturi [13].

Kljub drugačni formuli za izračun regije dominance je ideja za konstrukcijo Voronoijeve regije za element  $p$  še vedno ta, da gledamo presek vseh regij dominance  $p$  nad drugimi elementi iz  $S$ . Dominanco  $p$  nad  $q$  za utežene Voronoijeve diagrame označimo kot

$$D_w(p, q) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_w(x, p) \leq d_w(x, q)\},$$

kjer je  $d_w(x, p)$  utežena razdalja med točkama. Uteženo Voronoijevo regijo bomo označili kot  $VR_w(p, S, w)$ , uteženi voronoijev diagram pa  $V_w(S, w)$ .

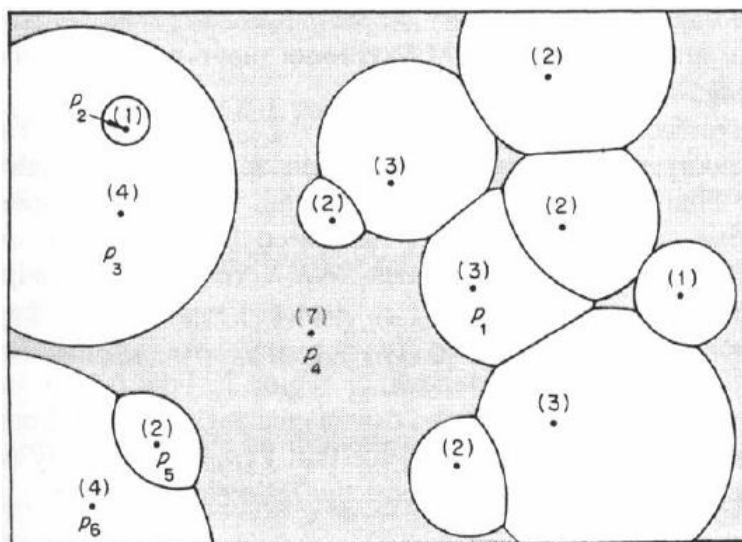
Ločimo dve vrsti uteženih Voronoijevih diagramov:

- multiplikativno uteženi Voronoijev diagram (primer je na sliki 2.3) in
- aditivno utežen diagram (primer je na sliki 2.4).

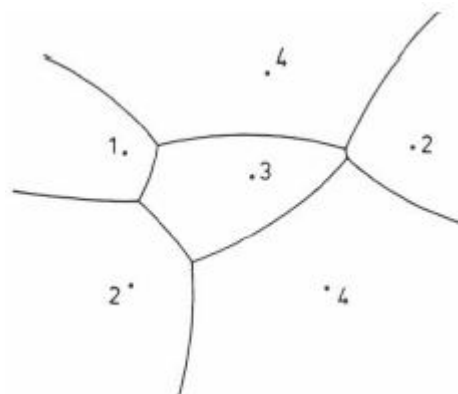
Utežena razdalja za multiplikativno utežen Voronoijev diagram je:

$$d_{mw}(x, p) = \frac{\|x - p\|}{w_p}, \text{ kjer je } w_p > 0.$$

To imenujemo multiplikativna utežena razdalja (*angl.*: multiplicatively weighted distance). Pripadajoči Voronoijev diagram bomo označili z  $V_{mw}$  in



Slika 2.3: Primer multiplikativno uteženega Voronoijevega diagrama (številke v oklepajih so uteži). Vir slike: [13].



Slika 2.4: Primer aditivno uteženega Voronoijevega diagrama (številke v oklepajih so uteži). Vir slike: [13].

voronoijevo regijo kot  $VR_{mw}$ . Torej je

$$VR_{mw}(p, S, w) = \bigcap_{q \in S \setminus \{p\}} \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - p\|w_p \leq \|x - q\|w_q\}.$$

$VR_{mw}(p, S, w)$  je neprazna množica, ki ni nujno konveksna ali povezana. Ima lahko eno ali več lukenj.  $VR_{mw}(p, S, w)$  je konveksna natanko tedaj, ko uteži sosednjih regij niso manjše kot utež za element  $p$  (označenega kot  $w_p$ ). Dve uteženi Voronoijevi regiji si lahko delita nepovezani stranici. Stranice so krožne natanko tedaj, ko uteži obeh pripadajočih regij različni. Stranice so ravne natanko tedaj, ko sta uteži pripadajočih regij enaki.

Naj bo  $w_{max} = \max\{w_p; p \in S\}$  in  $S_{max} = \{p \in S \mid w_p = w_{max}\}$ .  $VR(p, S, w)$  je neomejena samo takrat, ko je  $p \in P_{max}$  in ko je  $p$  na robu konveksne ovojnice od  $P_{max}$  [13].

Utežena razdalja  $d_{aw}$  za aditivno uteženi Voronoijev diagram je:

$$d_{aw}(x, p) = \|x - p\| - w_p.$$

Regija dominance točke  $p$  nad  $q$ , označena  $D_{aw}(p, q)$ , je dana kot:

$$D_{aw}(p, q) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - p\| - \|x - q\| \leq w_p - w_q\}.$$

Če označimo  $\|p - q\| = \alpha$  in  $w_p - w_q = \beta$ , dobimo sledeče rezultate. Če je  $\alpha = \beta$ , potem je regija dominance  $p$  nad  $q$  poltrak, ki izhaja iz  $p_j$  in poteka stran od  $p$ . Če je  $0 < \alpha < \beta$ , potem  $p$  popolnoma dominira nad  $q$  in posledično je  $VR_{aw}(q, S, w) = \emptyset$ .

Vsaka stranica v  $V_{aw}$  je hiperbolična krivulja, daljica, premica ali poltrak.

Če je najmanj ena utež  $w$  drugačna od preostalih in ima  $VR_{aw}(p, S, w)$  pozitivno površino, potem obstaja najmanj ena ne konveksna aditivno utežena Voronoijeva regija [13].

## 2.3 Voronojjev diagram v različnih metrikah

V tem poglavju bomo pogledali različice Voronojjevih diagramov za različne metrike. Povzeto je po [2, 10].

Za modeliranje okoliščin, kot so ovire ali premikanje znotraj cestnega omrežja mest, uporabimo koncept *metrike*.

**Definicija 2.3** *Metrika  $m$  je funkcija na dveh točkah ravnine. Za vsaki dve točki  $p, q$  velja:*

- $m(p, q)$  je nenegativno realno število in  $m(p, q) = 0$  natanko tedaj, ko je  $q = p$ ,
- $m(p, q) = m(q, p)$  in
- za vsako točko  $r$  je  $m(p, r) \leq m(p, q) + m(q, r)$  (trikotniška neenakost).

Dominanco  $p$  nad  $q$  pod metriko  $m$  označimo kot  $D_m(p, q)$ . Voronojjevo regijo za element  $p \in S$  pod metriko  $m$  označimo kot  $VR_m(p, S)$

**Definicija 2.4** *Naj bo  $m$  metrika. Za  $p, q \in S$  naj bo*

$$B_m(p, q) = \{x \mid m(p, x) = m(q, x)\}$$

*bisektor  $p$  in  $q$  pod metriko  $m$ .*

**Definicija 2.5** *Metrika  $m$  v ravnini imenujemo lepa (angl.: nice) če ima sledeče lastnosti:*

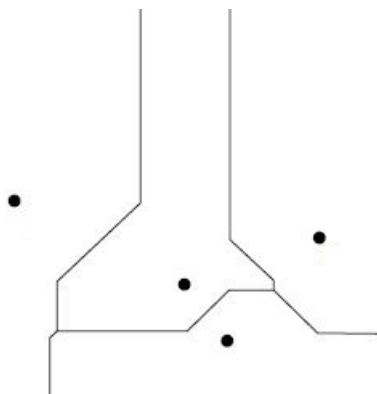
- zaporedje  $(p_i)_{i \geq 0}$  konvergira proti  $p$  pod  $m$  natanko tedaj, ko to velja za evklidsko razdaljo. Primer  $p = \infty$  je vključen.
- Za poljubni različni točki  $p, r$  obstaja tretja točka  $q$ , različna od obeh  $p$  in  $r$ , za katero velja  $m(p, r) = m(p, q) + m(q, r)$ .
- Za poljubni dve točki  $p$  in  $q$ ,  $p \neq q$ , obstaja skupna meja med  $D_m(q, p)$  in  $B_m(p, q)$ , ki je krivulja homeomorfna premici. Imenujemo jo bisektorska krivulja  $J_m(p, q)$ .

- Presek dveh različnih bisektorskih krivulj je sestavljen le iz končno mnogo delov.

Lepe metrike imajo sledečo strukturno lastnost.

**Izrek 2.1** Naj bo  $m$  lepa metrika in naj bo  $S$  množica elementov. Potem je za vsak  $p \in S$  Voronoijeva regija pod metriko  $m$ , označena kot  $VR_m(p, S)$ , povezana: vsaka  $m$ -ravna pot  $\pi$  od  $p$  do poljubne točke  $x \in VR_m(p, S)$  je v celoti vsebovana v  $VR_m(p, S)$ . Torej so Voronoijeve regije pod lepo metriko  $m$  oblikovane  $m$ -zvezdasto [2].

Primer Voronoijevega diagrama v t.i. Manhattenski metriki je na sliki 2.5.



Slika 2.5: Primer Voronoijevega diagrama v Manhattenski metriki. Vir slike: [2].

Oblika Voronoijevih regij pod lepo metriko je lastnost, ki je dovolj močna da lahko izračunamo Voronoijev diagram učinkovito [10].

**Izrek 2.2** Voronoijev diagram na  $n$ -tih vhodnih elementih pod lepo metriko v ravnini lahko izračunamo v  $O(n \log n)$  korakih.

Za dokaz glej [2].

## 2.4 Voronoijev diagram za daljice

V tem razdelku bomo govorili o variaciji Voronoijevega diagrama, kjer spremenimo elemente v vhodni množici. Povzet je po [3].

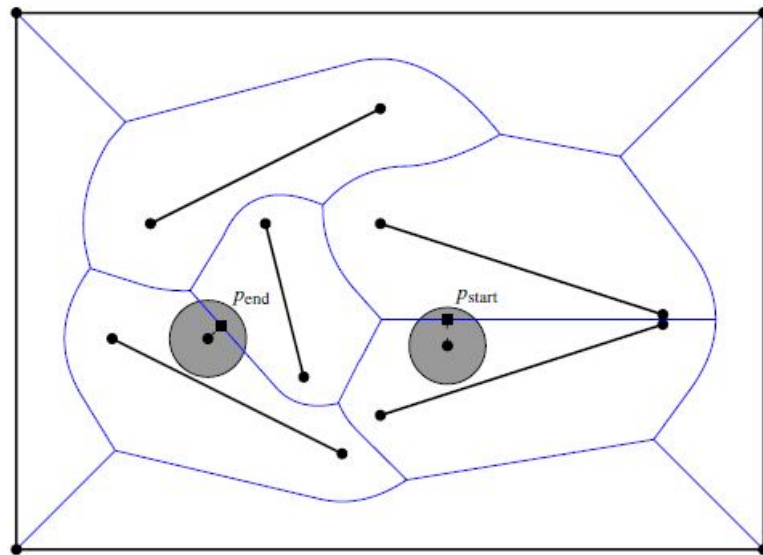
Možno je definirati Voronoijev diagram za razne objekte, kot so na primer daljice ali večkotniki. Razdalja od točke v ravnini do objekta je merjena do najbližje točke objekta. Medtem ko je bisektor dveh točk enostavno premica, je bisektor dveh neprekrivajočih daljic bolj kompleksne oblike. Bisektor je sestavljen iz sedmih delov, ki so ali daljice ali parabolične krivulje. Krivulje nastanejo, kadar je najbližja točka ene daljice končna točka ter je najbližja točka druge daljice v notranjosti prve. V vseh ostalih primerih je del bisektorja raven. Kljub večji zahtevnosti Voronoijevega diagrama  $n$ -tih daljic je število oglišč, stranic in celic v njemu še vedno samo  $O(n)$ .

Uporabo za takšne diagrame najdemo na primeru načrtovanja premikanja (*angl.*: motion planning). Predpostavimo, da imamo dano množico ovir, ki jih sestavlja  $n$  daljic in da imamo robota  $\mathcal{R}$ . Predpostavimo, da se robot lahko giblje prosto in da je aproksimiran s pomočjo očrtanega kroga  $D$ . Želimo izračunati premik brez trčenja iz ene lokacije do druge ali ugotoviti, da takšno gibanje ni mogoče.

Ena tehnika za načrtovanje gibanja je t.i. *retraction*. Ideja je, da loki Voronoijevega diagrama prikažejo sredino med daljicami in tako določajo pot, ki ima največ prostora. Posledično je pot preko lokov diagrama najboljša možnost za gibanje brez trčenja. Slika 2.6 kaže množico daljic znotraj pravokotnika, skupaj z Voronoijevim diagramom teh daljic ter stranic pravokotnika [3].

Z uporabo Voronoijevih diagramov je v [3] pokazan naslednji rezultat.

**Izrek 2.3** Če imamo  $n$  ovir oblikovanih kot disjunktne daljice ter robota v obliki kroga, lahko določimo obstoj premika brez trčenja med dvema pozicijama v  $O(n \log n)$  časa.



Slika 2.6: Voronoijev diagram daljic in začetna ter končna pozicija kroga.  
Vir slike [3].



## Poglavje 3

# Voronoijev diagram najbolj oddaljenih točk

V tem poglavju si bomo bolj podrobno pogledali Voronoijev diagram najbolj oddaljenih točk. Povzeto je po [2, 9].

Voronoijev diagram najbolj oddaljenih točke za dane elemente iz  $S$  je definiran kot razdelitev ravnine na celice, ki imajo sledečo lastnost: vsaka točka v celici ima istih  $n-1$  skupnih najbližjih točk iz  $S$ . Drugače povedano je celica takšnega Voronoijevega diagrama množica točk, ki ima skupen najbolj oddaljen element iz dane množice  $S$ .

Točke iz  $S$  bomo označili  $\{p_1, \dots, p_n\}$ . Da poenostavimo to poglavje bomo Voronoijev diagram najbolj oddaljenih točk imenovali samo Voronoijev diagram.

**Definicija 3.1** *Rob celice je množica točk, ki je ekvidistančna do dveh elementov iz  $S$  in bližje ostalim točkam iz  $S$ .*

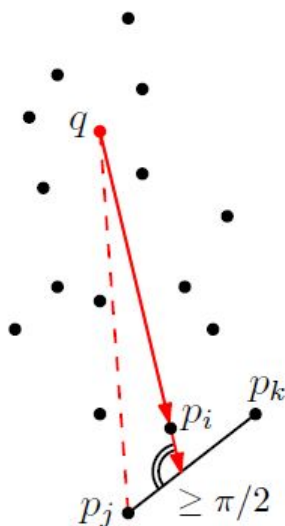
**Definicija 3.2** *Oglišče je točka, ki ima enako razdaljo do treh vhodnih elementov iz  $S$  in je bližja preostalim elementom iz  $S$ .*

Velja, da je središče najmanjše krožnice, ki vsebuje celotno množico  $S$ , eno izmed vozlišč Voronoijevega diagrama za  $S$ .

**Trditev 3.1** *Voronojeve celice so lahko prazne. Natanko elementi, ki ležijo na konveksni ovojnici množice  $S$ , imajo neprazne celice.*

*Dokaz.* Najprej dokažimo, da elementi, ki niso na konveksni ovojnici, nimajo celice v VD.

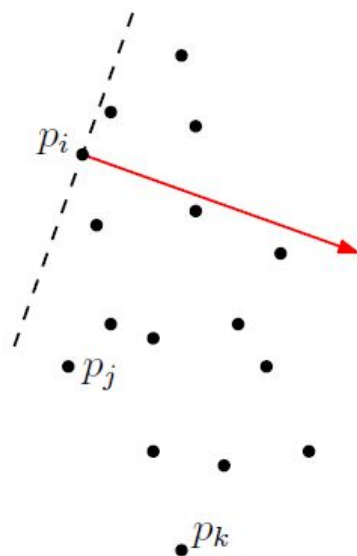
Naj bo  $p_i \in S$  element, ki ne leži na konveksni ovojnici elementov iz  $S$ , in  $q$  poljubna točka na ravnini. Naj bo  $p_j p_k$  stranica konveksne ovojnice, ki je bližja  $p_i$  kot  $q$  in jo seka premica skozi  $q$  in  $p_i$  (glej sliko 3.1). Imenujmo točko kjer premica seka stranico ovojnice  $x$ . Predpostavimo, da ima trikotnik med  $q, p_j$  in  $x$  kot  $qxp_j \geq \frac{\pi}{2}$ . Zaradi velikosti kota je razdalja od  $q$  do  $p_j$  večja kot razdalja od  $q$  do  $x$  (glej sliko 3.1). Iz tega sledi, da je razdalja med  $q$  in  $p_i$  je kvečjemu še manjša. Torej imamo element  $p_j$ , za poljubno točko  $q$ , ki je dlje od nje oddaljen kot je element  $p_i$ . Sklepamo, da  $p_i$  ni najdlje oddaljena od nobene točke v ravnini. Če je velikost kota  $qxp_j < \frac{\pi}{2}$  lahko naredimo enak dokaz s pomočjo kota  $qxp_k$ .



Slika 3.1: Dokaz, da imajo le točke na konveksni ovojnici celico v VD. Vir slike: [9].

Zdaj moramo dokazati, da ima vsak element konveksne ovojnice svojo

neprazno celico v VD. Naj bo element  $p_i$  na konveksni ovojnici. Naj bo  $a$  ena od premic, ki se dotika konveksne ovojnice samo v točki  $p_i$  (slika 3.2). Naj  $b$  označuje neskončni poltrak, ki se začne v  $p_i$ , je pravokoten na  $a$  ter seka konveksno ovojnico še v eni točki različni od  $p_i$ . Obstaja točka na  $a$ , ki je bližja vsem elementom iz  $S - p_i$  kot samim elementom  $p_i$ .  $\square$



Slika 3.2: Dokaz, da imajo vse točke na konveksni ovojnici celico v VD. Vir slike: [9].

**Trditev 3.2** *Celice diagrama so neomejene.*

*Dokaz.* Spomnimo se poltraka  $b$  iz dokaza 3. Vemo da na njemu obstaja točka (recimo ji  $q$ ), ki je dlje od našega elementa na ovojnici ( $p_i$ ), kot od preostalih elementov iz  $S$ . Za vsako točko  $\{x \in b \mid D(x, p_i) > D(x, q)\}$  tudi velja, da je najdlje odaljene od  $p_i$ . Torej je celotni neskončni poltrak od nekod naprej najbolj oddaljen od  $p_i$ . Sklepamo da mora celica Voronoijevega diagrama biti neomejena v to stran.  $\square$

**Trditev 3.3** *Iz neomejenosti celic sledi da stranice in oglišča diagrama sestavljajo drevo.*

*Dokaz.* Predpostavimo da diagram ni drevesne oblike. Torej obstaja cikel, ki omeji celico. Posledično pridemo do protislovja s predpostavko da imamo Voronoijev diagram, saj so vse celice neomejene.  $\square$

### 3.1 Algoritem in podatkovne strukture

V tem razdelku bomo pogledali psevdokodo za algoritem, ki izračuna Voronoijev diagram, in podatkovne strukture, ki jih uporabljamo v njemu. Povzeto je po [3, 9].

**function** KONSTRUIRAJVD( $S$ )

Konstruiramo konveksno ovojnico

Naj bojo točke  $p_1, \dots, p_n$  točke na konveksni ovojnici, preostale točke ignoriramo

Nalkjučno permutiramo točke in jih ponovno označimo z  $p_1, \dots, p_n$

Zapomnimo si red konveksne ovojnice

▷ Faza 1: Odstranjevanje in pomnjenje

**for**  $i = n$  downto 4 **do**

Odstrani  $p_i$  iz konveksne ovojnice

Zapomnimo si njeni sosedi  $cw(p_i)$  in  $ccw(p_i)$  ▷ sosedi ob času

▷ odstranjevanja

**end for**

▷ Faza 2: Dodajanje in konstruiranje

Konstruiramo Voronoijev diagram  $F_3$  na  $p_1, p_2, p_3$

**for**  $i = 4$  to  $m$  **do**

Dodaj  $p_i$  v  $F_{i-1}$  da dobiš  $F_i$

▷ celico za  $p_i$  določimo tako, da se

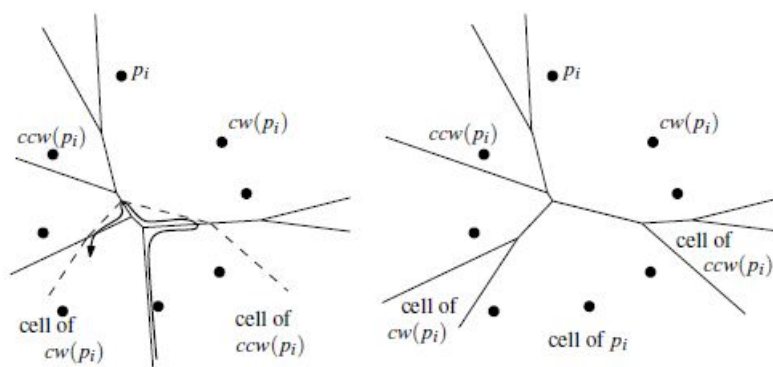
▷ sprehodimo po  $F_{i-1}$  in posodobimo  $F_{i-1}$

**end for**

**end function**

Poglejmo podrobnejši opis dodajanja novega elementa v  $F_{i-1}$ . Podrobnosti so vidne na sliki 3.3. Nova regija bo prišla med regiji od  $cw(p_i)$  in  $ccw(p_i)$ .

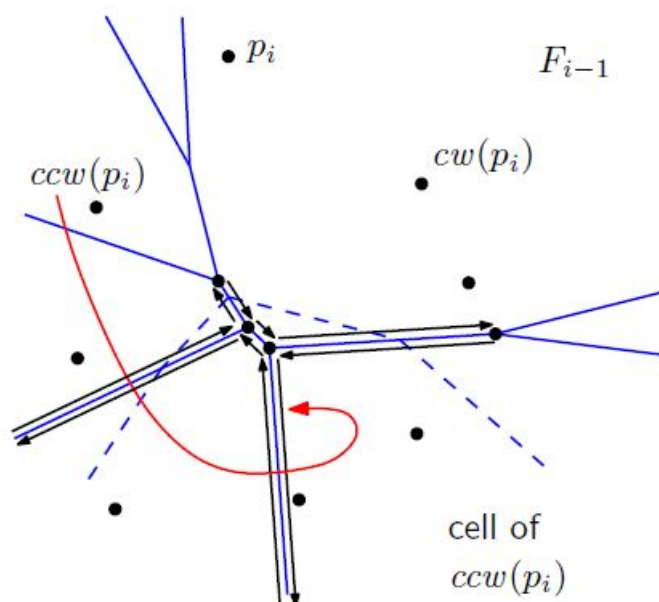
Praden dodamo  $p_i$  sta  $cw(p_i)$  in  $ccw(p_i)$  sosedi na konveksni ovojnici množice  $\{p_1, \dots, p_{i-1}\}$ , torej sta njuni regiji ločeni s poltrakom, ki leži na njuni simetrali. Simetrala med  $p_i$  in  $ccw(p_i)$  da nov poltrak, ki leži v Voronoijevi regiji od  $ccw(p_i)$  in je del meje Voronoijeve regije od  $p_i$ . Prehodimo regijo  $ccw(p_i)$  v smeri urinega kazalca, da vidimo katere stranice seka simetrala. Na drugi strani je ta stranica del Voronoijeve regije druge točke  $p_j$  iz  $\{p_1, \dots, p_{i-1}\}$  in simetrala med  $p_j$  in  $p_i$  tudi doda stranico k Voronoijevi regiji  $p_i$ . Nato prehodimo regijo  $p_j$  v smeri urinega kazalca, da določimo kje je drugi presek meje regije in simetrale. Zadnja simetrala, ki bo dopolnila Voronoijevo celico  $p_i$  je z  $cw(p_i)$ . Vse najdene stranice so dodane, medtem ko so vse stranice znotraj nove regije odstranjene [3].



Slika 3.3: Dodajanje točke v  $F_{i-1}$ . Vir slike: [3].

Implementacija druge faze zahteva reprezentacijo Voronoijevega diagrama. Uporabimo DCEL, pri kateremu ne upoštevamo težav pri stranicah, ki so polovično neskončne.

Za vsako točko iz  $p_1, \dots, p_{i-1}$ , vzdržujemo kazalec do mejnega poltraka, ki je najbolj proti smeri urinega kazalca. Za ilustracijo podatkovnih struktur glej sliko 3.4.



Slika 3.4: Ilustracija podatkovnih struktur. Vir slike: [9].

## 3.2 Analiza časovne zahtevnosti

V tem poglavju bomo ocenili časovno zahtevnost algoritma iz poglavja 3.1. Povzeto je po [3, 9].

**Izrek 3.1** *Diagram se lahko izračuna v pričakovano  $O(n \log n)$  časa, kjer je  $n = |S|$ .*

*Dokaz.* Ker smo si zapomnili  $ccw(p_i)$  imamo  $ccw(p_i)$  dostopno v času  $O(1)$  in tako dobimo prvi bisektor ki omeji celico od  $p_i$ . Zaradi kazalca na mejni poltrak celice od  $ccw(p_i)$  lahko začnemo obhod v času  $O(1)$ . Če ima celica od  $p_i$   $k_i$  stranic, bomo obiskali  $O(k_i)$  pol stranic in vozlišč  $F_{i-1}$ , da konstruiramo celico za  $p_i$ .  $O(k_i)$  vozlišč ter pol stranic tudi odstranimo,  $O(k_i)$  pol stranic skrajšamo in  $O(k_i)$  pol stranic ter vozlišč ustvarimo. Torej dodajanje  $p_i$  traja  $O(k_i)$  časa, kjer je  $k_i$  kombinatorična zahtevnost celice elementa  $p_i$  v  $F_i$ .

Zdaj analiziramo matematično upanje vrednosti  $k_i$ . Za to uporabimo povratno indukcijo. Predvidevamo, da je  $p_i$  že bila dodana in opazimo

$F_i$ . Vsaka od  $i$  točk  $\{p_1, \dots, p_i\}$  ima enako verjetnost, da je bila dodana zadnja, saj smo točke naključno permutirali. Pričakovan čas za dodajanje  $p_i$  je linearen za povprečno kombinatorično zahtevnost celic v  $F_i$ .

Voronoijev diagram na  $i$  točkah ima največ  $2i-3$  stranic (manj v degeneriranih primerih) in vsaka stranica meji na natanko 2 celici. Torej je povprečna kombinatorična zahtevnost celice Voronoijevega diagrama na  $i$  točkah:

$$\mathbb{E}[k_i] \leq \frac{2 \times (2i - 3)}{i} = \frac{4i - 6}{i} < 4.$$

Pričakovan čas konstrukcije  $F_i$  iz  $F_{i-1}$  je torej  $O(1)$

Časovna zahtevnost izračuna postane  $O(n)$ , če so vse točke iz  $S$  na konveksni ovojnici in so podane v urejenem zaporedju. V nasprotnem primeru porabimo  $O(n \log n)$  časa, ker potrebujemo toliko časa za izračun konveksne ovojnice.  $\square$





## Poglavje 4

# Abstraktni Voronoijevi diagrami

V tem poglavju bomo videli posplošitev Voronojvega diagrama. Povzeto je po [22, 23].

Matematiki so v zgodovini študirali razne oblike Voronojjevih diagramov in algoritmi so bili izdelani za vsakega posebej. Situacija je zahtevala bolj splošen pristop. Strukturno eleganten pristop je bil razvit od Edelsbrunner in Seidel [14], ki sta predlagala definiranje splošnih Voronojjevih diagramov kot spodnjo ovojnico sprejemljivih stožcev. Neodvisno so bili Abstraktni Voronojjevi diagrami prvič predstavljeni v [20], kot skupen splošen koncept za strukturno teorijo in algoritmično računanje.

Osnova je bila, da so vsi Voronojjevi diagrami sestavljeni iz sistemov sekajočih krivulj, ki imajo nekaj skupnih kombinatoričnih lastnosti, medtem ko so funkcije razdalje in narava vhodnih podatkov drugotne.

Na podlagi tega so bili definirani Abstraktni Voronojjevi diagrami na sledeči način. Za par vhodnih elementov  $p, q \in S$  naj bo  $D(p, q)$  množica, ki je bodisi prazna, bodisi neomejena podmnožica  $\mathbb{R}^2$ , ter naj bo  $J(p, q)$  rob množice  $D(p, q)$ . Predpostavimo da velja:

- $J(p, q) = J(q, p)$  in za vsaka  $p, q$ , za katera velja  $p \neq q$ , regije  $D(p, q)$ ,  $J(q, p)$ ,  $D(q, p)$  tvorijo particijo  $\mathbb{R}^2$  na tri disjunktne množice.

- Če drži da je  $\emptyset \neq D(p, q) \neq \mathbb{R}^2$  potem je  $J(p, q)$  homeomorfna odpretem intervalu  $(0, 1)$ .

$J(p, q)$  imenujemo bisekcijska krivulja (*angl.*: bisecting curve) za elementa  $p$  in  $q$  in  $D(p, q)$  regijo dominance  $p$  nad  $q$ . Po [21] je definicija abstraktnega Voronoijevega diagrama naslednja.

**Definicija 4.1** Naj bo  $S = \{1, \dots, n\}$  in

$$R(p, q) := \begin{cases} D(p, q) \cup J(p, q) & \text{če } p < q, \\ D(p, q) & \text{če } p > q, \end{cases}$$

$$EVR(p, S) := \bigcap_{q \in S, q \neq p} R(p, q),$$

$$VR(p, S) := \text{int } EVR(p, S),$$

$$V(S) := \bigcup_{p \in S} \text{bd } EVR(p, S).$$

$VR(p, S)$  je Voronoijeva regija elementa  $p$ ,  $EVR(p, S)$  je razširjena Voronoijeva regija od  $p$  ter  $V(S)$  je Voronoijev diagram za vhodno množico  $S$ .

Od Voronoijevih regij in bisekcijskih krivulj zahtevamo, da izpolnijo sledeča pogoja:

- Katerekoli dve bisekcijski krivulji se presekata samo v končnem številu povezanih komponent.
- Za vse neprazne podmnožice  $S' \subset S$  velja:
  - za vse  $p \in S'$ , za katere je  $EVR(p, S')$  neprazna, je  $VR(p, S')$  neprazna in  $EVR(p, S')$  ter  $VR(p, S')$  sta povezani s potmi (*angl.*: path-connected)
  - $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{p \in S'} EVR(p, S')$

Abstraktni Voronoijski diagrami vključujejo veliko število konkretnih Voronoijskih diagramov, na primer diagrame za vhodne podatke v obliki točk pod poljubno  $L_p$ -metriko ( $1 \leq p \leq \infty$ ), ali pod poljubno konveksno funkcijo razdalje (*angl.*: convex distance function) s semi-algebraično enotsko krožnico. Vsebujejo tudi tako imenovane power diagrame ter Voronoijske diagrame za daljice ali krožnice pod Evklidsko metriko. Daljice se lahko dotikajo na svojih končnih točkah, kar omogoča tvorbo poligonov, in krožnice se lahko sekajo [23].

Abstraktni Voronoijski diagrami so definirani s pomočjo bisekcijskih krivulj. To pomeni, da se kompleksnost bisektorjev spreminja glede na konkretni Voronoijski diagram. Zaradi enostavnosti bomo predpostavili da so bisektorji računsko enostavni.

## 4.1 Naključnostni prirastni algoritem

V tem razdelku bomo pogledali naključnostno prirastni algoritem za konstrukcijo Abstraktnega Voronoijskega diagrama. Povzet je po [23].

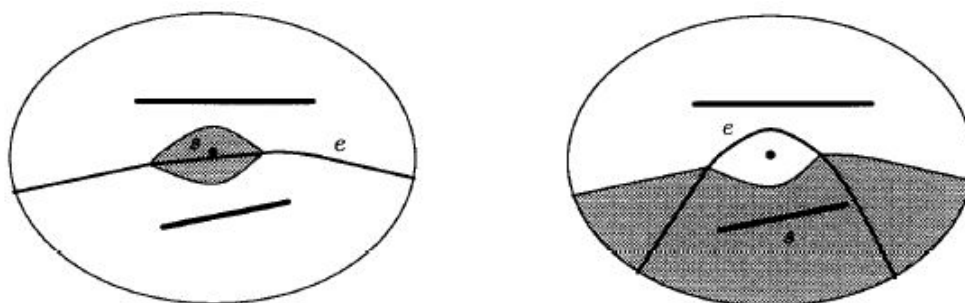
Algoritem konstruira Abstraktni Voronoijski diagram  $V(S)$  z dodajanjem enega vhodnega podatka za drugim. Naj bo  $\infty \in S$ ,  $R \subseteq S$ ,  $\infty \in R$ ,  $s \in S \setminus R$  in  $\mathcal{S} = VR(s, R \cup \{\infty\})$ .

**Definicija 4.2** *Naj bo  $e$  rob v  $V(R)$  in naj bo  $v$  ena končna točka od  $e$ . Potem*

1.  $s$  seka  $e$ , glede na  $R$ , natanko tedaj, ko  $e \cap \overline{\mathcal{S}} \neq \emptyset$  in
2.  $s$  odreže  $e$  pri  $v$ , glede na  $R$ , natanko tedaj, ko  $e \cap \overline{\mathcal{S}}$  vsebuje komponento incidentno v  $v$ .

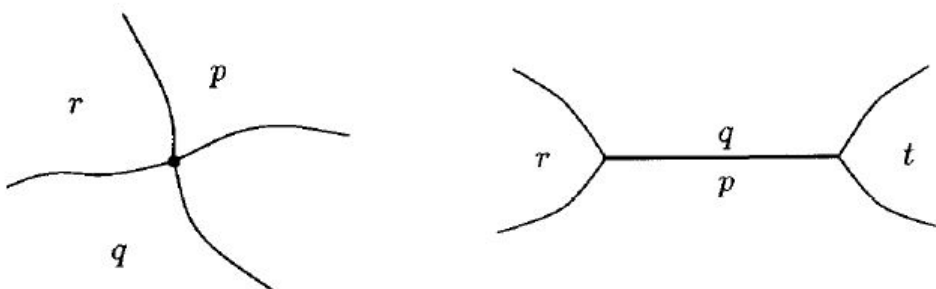
Za primer sekanja in rezanja glej sliko 4.1.

**Definicija 4.3** *Naj bojo  $p, q, r$  in  $t$  elementi iz  $R$ .*



Slika 4.1: na levi vidimo kako element  $s$  seka rob  $e$ , brez da bi ga odrezal, medtem ko na desni strani element  $s$  odreže  $e$  na obeh končnih točkah. Vir slike: [23].

- Ogljšče  $v \in V(R)$  imenujemo  $pqr$ -oglišče (glej sliko 4.2), če je  $v$  sosed  $p$ -,  $q$ - in  $r$ - regij in če obstaja prečkanje sosednjih regij v smeri urinega kazalca, ki sreča regijo  $p$  pred regijo  $q$  pred regijo  $r$  pred regijo  $p$
- Stranica  $e \in V(R)$  imenujemo  $prqt$ -stranica (glej sliko 4.2), če  $e$  deli regiji  $p$  in  $q$  in če sta končni točki od  $e$   $prq$ - in  $qtp$ - oglišči.



Slika 4.2:  $pqr$ -oglišče in  $prqt$ -stranica. Vir slike: [23].

**Trditev 4.1** Naj bo  $e$   $prqt$ -stranica od  $V(R)$ . Potem množica točk  $e$  tudi tvori  $prqt$ -stranico za  $V(R')$  za vse  $R'$ , za katere velja  $\{p, r, q, t\} \subseteq R' \subseteq R$ . Poleg tega velja za vsak  $s \notin R$ ,  $e \cap \overline{VR(s, R \cup \{s\})} = e \cap \overline{VR(s, R' \cup \{s\})}$

Sledečo operacijo definiramo kot osnovno operacijo našega algoritma. Ozaničimo jo kot *basic\_op*. *Vhod*: peterico  $(p, r, q, t, s)$  za katero velja:

1.  $V(\{p, r, q, t\})$  vsebuje *prqt*-stranico  $e$ ,
2.  $s \in S$ ,  $s \notin \{p, r, q, t\}$ ,

*Izhod*: Kombinatorična struktura  $e \cap \overline{VR(s, \{p, r, t, s\})}$ . Kar predstavlja eno od sledečih opcij:

1. presek je prazen,
2. presek je neprazen in je sestavljen iz enega dela:
  - (a) sam  $e$ ,
  - (b) segment od  $e$ , ki meji na *prq*-točko,
  - (c) segment od  $e$ , ki meji na *qtp*-točko,
  - (d) segment, ki ne meji na nobeno robno točko od  $e$ ,
3. presek je neprazen in je sestavljen iz natanko dveh delov.

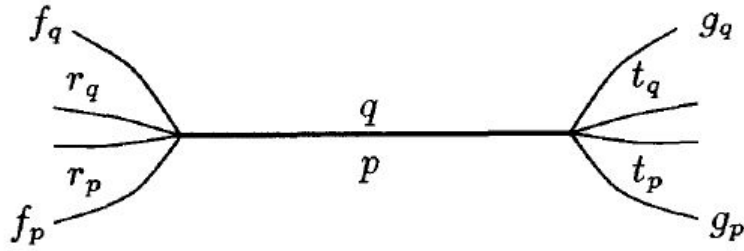
Vsakem klicu *basic\_op* pripišemo eno časovno enoto. Vhodni podatek za osnovno operacijo je kombinatoričen objekt, peterica  $(p, r, q, t, s)$  in izhodni podatek je tudi kombinatorični objekt, ki je simbol iz  $\{1, 2a, 2b, 2c, 2d, 3\}$ .

Osnovna operacija nam tudi omogoča, da določimo, ali je stranica sekana, ali odrezana od elementa množice  $S$ . Naj bo  $e$  *prqt*-stranica od  $V(R)$  in  $s \in S \setminus R$ , potem  $s$  seka  $e$  natanko tedaj, ko  $basic\_op(p, r, q, t, s) \in \{2a, 2b, 2c, 2d, 3\}$ , ter  $s$  odreže  $e$  na končni *prq*-točki natanko tedaj, ko  $basic\_op(p, r, q, t, s) \in \{2a, 2b, 3\}$ . [23]

**Definicija 4.4** 1. Naj bo  $e$  rob  $V(R)$ , ki loči  $p$ - in  $q$ -regijo. Naj bosta  $f_p$  in  $g_p$  robova, ki sta pred in za  $e$ , če imamo obhod meje  $VR(p, R)$  v smeri urinega kazalca, ter naj bosta  $f_q$  in  $g_q$  robova pred in za  $e$  pri obhodu meje  $VR(q, R)$  v smeri nasproti urinega kazalca (glej sliko 4.3). Naprej predpostavimo, da  $f_p$  loči  $p$ - in  $r_p$ -regiji,  $g_p$  loči  $p$ - in  $t_p$ -regiji,

$g_q$  loči  $q$ - in  $t_q$ -regiji, ter  $f_q$  loči  $q$ - in  $r_q$ -regiji. Potem imenujemo  $D_R(e) = \{(r_q, q, p, r_p), (t_p, p, q, t_q)\}$  opis (angl.: description) od  $e$  glede na  $R$ . Z oznako  $\text{set}(D_R(e))$  opisujemo na množico  $\{p, q, r_p, r_q, t_p, t_q\}$ .

2. Naj bo  $D$  opis stranice  $e$  (iz  $VD(R)$ ) in naj bo  $s \in S \setminus \text{set}(D)$ . Potem  $s \in S$  preseka opis  $D$  natanko tedaj, ko  $e \cap \overline{VR(s, \text{set}(D) \cup \{s\})} \neq \emptyset$ .



Slika 4.3: Stranica z opisom  $\{(r_q, q, p, r_p), (t_p, p, q, t_q)\}$ . Vir slike: [23]

Algoritem se začne z množico  $R_3 = \{\infty, p, q\}$ , kjer sta  $p$  in  $q$  izbrana naključno iz  $S \setminus \infty$  in nato doda manjkajoče elemente v naključnem vrstnem redu, torej  $R_{k+1} = R_k \cup \{s\}$ , kjer je  $s$  naključen element iz  $S \setminus R_k$ . Sledeče podatkovne strukture se vzdržujejo za trenutno množico  $R = R_k$ :

1. Voronoijev diagram  $V(R)$ : shranjen je kot DCEL; z vsako celico  $V(R)$  je shranjen tudi pripadajoči element iz  $R$ .
2. Graf zgodovine  $\mathcal{H}(R)$ : je usmerjen acikličen graf z enim samim izvorom. Njegova vozlišča so dana kot

$$\{\text{izvor}\} \cup \bigcup_{3 \leq i \leq k} \{D_{R_i}(e) \mid e \text{ je stranica od } V(R_i)\}$$

Sledeče invariante zgodovinskega grafa se ohranjajo:

1. Vsako vozlišče od  $\mathcal{H}(R)$  ima izhodno stopnjo največ 5 in vozlišča v  $\{D_R(e) \mid e \text{ je stranica } V(R)\}$  imajo izhodno stopnjo 0, torej so listi grafa.

2. Vsaka stranica  $e$  iz  $V(R)$  je povezana s svojim pripadajočim opisom  $D_R(e)$  iz  $\mathcal{H}(R)$  in obratno.
3. Za vsak element  $s \in S \setminus R$  in vsak list  $D$  iz  $\mathcal{H}(R)$ , ki ga seka  $S$ , obstaja pot od *izvora* do  $D$ , čigar vozlišča so vsa sekana od  $s$ .

Sledi opis konstrukcije  $V(R \cup \{s\})$  ter  $\mathcal{H}(R \cup \{s\})$  iz  $V(R)$  ter  $\mathcal{H}(R)$ . Naj bo  $E_s = \{e \mid e \text{ je stranica } V(R) \text{ in seka jo } s\}$ .

**Korak 1: Konstrukcija  $E_s$ .** Začnemo v izvoru  $\mathcal{H}(R)$  in iščemo vse opise iz  $\mathcal{H}(R)$ , ki jih seka  $s$ . Ker je izhodna stopnja  $\mathcal{H}(R)$  omejena s 5, je število obiskanih vozlišč proporcionalno s  $c$ . Odločitev ali element seka opis traja konstanten čas zaradi naše osnovne operacije. Torej traja iskanje  $O(c)$ . Zaradi tretje invariante zgodovinskega grafa iskanje najde vse liste  $\mathcal{H}(R)$ , ki jih seka  $s$ . Zaradi druge invariante je ta dobljena množica stranic od  $V(R)$ , čigar opisi seka  $s$ . Po 4.1 je ta množica  $E_s$ .

**Korak 2: Konstrukcija  $V(R \cup \{s\})$ .** Naj bo  $\mathcal{S} = VR(s, R \cup \{s\})$ . Velja da je  $\mathcal{S} \neq \emptyset$  natanko tedaj, ko  $E_s \neq \emptyset$  (za podrobnosti glej [23, Lemma 2]). Torej velja  $V(R \cup \{s\}) = V(R)$  in  $\mathcal{H}(R \cup \{s\}) = \mathcal{H}(R)$ , če je  $E_s = \emptyset$ . Posledično predpostavimo od zdaj naprej da je  $E_s \neq \emptyset$ . Za stranico  $e \in E_s$ , je  $e - \overline{\mathcal{S}}$  sestavljena iz največ dveh podsegmentov  $e$ . Če je  $e$  *prqt*-oglišče od  $V(R)$ , nam *basic\_op*( $p, r, q, t, s$ ) pove strukturo  $e - \overline{\mathcal{S}}$ . Točko  $v$  imenujemo končno točko od  $e - \overline{\mathcal{S}}$ , če je končna točka enega od podsegmentov od  $e$ . Torej ima  $e - \overline{\mathcal{S}}$  bodisi 0, 2, ali 4 različnih (glej [23, Lemma 2]) končnih točk. Naj bo  $V$  množica oglišč  $V(R)$ . Definiramo

- $V_{izbr} = \{v \mid v \in V \text{ in vse stranice, sosednje } v, \text{ element } s \text{ odreže pri } v\}$
- $V_{nespr} = \{v \mid v \in V \text{ in nobeno stranico, sosednjo } v, \text{ element } s \text{ ne odreže pri } v\}$
- $V_{sprem} = \{v \mid v \in V \text{ in nekatere (vendar ne vse) stranice, sosednje } v, \text{ element } s \text{ odreže pri } v\}$

- $V_{nov} = \{v \mid v \notin V \text{ in } v \text{ je končna točka od } e - \overline{\mathcal{F}} \text{ za nekatere } e \in E_s\}$

Vsako oglišče  $v$  od  $V(R \cup \{s\})$  je vsebovano v  $(V_{nespr} \cup V_{sprem}) \cap V_{nov}$  (za dokaz glej [23, Lemma 6]).

**Korak 3: Izračun  $\mathcal{H}(R \cup \{s\})$ .**

**Izrek 4.1** *Naj bo  $v \in V_{spremen}$ .*

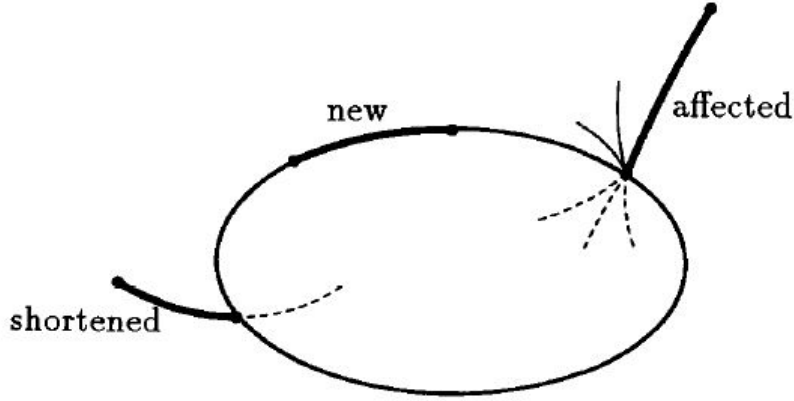
1. *V razporeditvi stranic iz  $V(R)$  okoli  $v$ , v smeri urinega kazalca, obstajata stranici  $f''$  in  $f'$  ( $f'' = f'$  je možno), za kateri velja, da nobena stranica med  $f'$  in  $f''$  (vključno) ni odrezana pri  $v$  od  $s$  ter da so vse stranice med  $f'$  in  $f''$  (izključeno) odrezani pri  $v$  od  $s$ .*
2. *Naj bo  $e'$  stranica, ki sledi  $f'$  in naj bo  $e''$  stranica, ki je pred  $f''$  v ureditvi stranic  $V(R)$  v smeri urinega kazalca okoli  $v$ . Naj bosta  $f'$  in  $e'$  mejna za regijo  $p$  ter  $f''$  in  $e''$  mejna za regijo  $q$ . Potem je  $v$  oglišče iz  $V(R \cup \{s\})$ , ki je incidenten sledečim stranicam: vse stranice med  $f''$  in  $f'$  (vključeno), stranica, ki loči  $p$ - in  $s$ -regijo ter stranica, ki loči  $s$ - in  $q$ -regijo*

Najprej karakteriziramo množico oglišč  $\mathcal{H}(R \cup \{s\})$ , ki niso že oglišča v  $\mathcal{H}(R)$ . Stranico  $e$  iz  $V(R \cup \{s\})$  imenujemo novo (*angl.*: new), če ni že podmnožica poljubne stranice iz  $V(R)$ , skrajšano (*angl.*: shortened), če je prava podmnožica stranice iz  $V(R)$ , prizadeto (*angl.*: affected), če je  $e$  stranica  $V(R)$  in obstaja oglišče iz  $V_{spremen}$  za katerega je  $e$  ena izmed stranic  $f'$  ali  $f''$  definiranih v izreku 4.1. Glej sliko 4.4.

Torej za vsako skrajšano ali prizadeto stranico  $e$  dodamo povezavo  $(D_R(e'), D_{R \cup \{s\}}(e))$  v graf zgodovine, kjer je  $e'$  rob iz  $V(R)$ , za katerega velja  $e \subseteq e'$ .

Za novo stranico  $e$  je situacija težja. Naj bosta  $x_1$  in  $x_2$  končni točki od  $e$  in naj bo  $p \in R$  takšen, da  $e$  loči  $p$ - ter  $s$ -regijo v  $V(R \cup \{s\})$ .





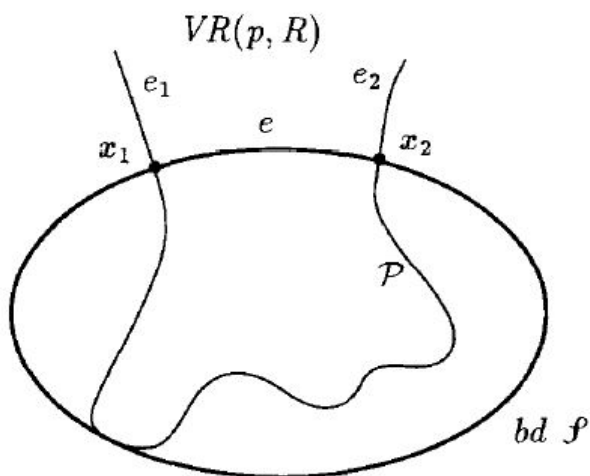
Slika 4.4: Karakterizacija stranic. Vir slike: [23].

Obstaja pot  $\mathcal{P}$  v  $V(R) \cap \overline{\mathcal{S}}$ , ki povezuje  $x_1$  in  $x_2$  (za podrobnosti glej [23] Lemma 1). Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je  $\mathcal{P}$  del  $bdVR(p, R)$ .  $\mathcal{P}$  je tisti del  $V(R) \cap \overline{\mathcal{S}}$ , ki je bil prehojen med konstrukcijo  $e$ . Naprej definiramo stranici  $e_1$  in  $e_2$  iz  $V(R)$ . Če je  $x_1 \in V_{nov}$ , potem je  $e_1$  stranica  $bdVR(p, R)$ , ki vsebuje  $x_1$ . Če je  $x_1 \in V_{sprem}$ , potem naj bo  $e_1$  stranica  $bdVR(p, R)$  incidentne  $x_1$  in ne vsebovane v  $\mathcal{P}$ . Stranica  $e_2$  je definirana analogno glede na  $x_2$ . Lahko si predstavljamo stranici  $e_1$  in  $e_2$  kot podaljška  $\mathcal{P}$  izven  $\overline{\mathcal{S}}$ . Glej sliko 4.5 za ilustracijo teh definicij. Za vse nove stranice  $e$  iz  $V(R \cup \{s\})$  in vse  $e' \in e_1 \cup \mathcal{P} \cup e_2$  dodamo stranice  $(D_R(e'), D_{R \cup \{s\}}(e))$  (za podrobnosti in dokaz glej [23, Lemma 13]).

**Trditev 4.2** • Naj bo  $\infty \in R$  in  $s \in S \setminus R$ . Potem lahko konstruiramo  $V(R \cup \{s\})$  in  $\mathcal{H}(R \cup \{s\})$  iz  $V(R)$  in  $\mathcal{H}(R)$  v času  $O(c)$ , kjer je  $c$  število vozlišč iz  $\mathcal{H}(R)$ , ki jih seka  $s$ .

- Za  $R \subseteq S$ ,  $|R| = 3$  in  $\infty \in R$ , se lahko pripravita podatkovni strukturi  $V(R)$  in  $\mathcal{H}(R)$  v času  $O(1)$ .

Za dokaz glej [23, Theorem 1].



Slika 4.5: Pot  $\mathcal{P}$  in stranici  $e_1$  in  $e_2$ . Vir slike: [23].

## 4.2 Analiza

V tem poglavju bomo analizirali pričakovano časovno zahtevnost algoritma, opisanega v poglavju 4.1. Povzeto je po [23].

Analiza naključnostnih prirastnih algoritmov je narejena s pomočjo objektov, regij in konfliktov med njimi. V našem primeru so vhoni elementi iz  $S$  objekti in opisi so regije.

**Definicija 4.5** Naj bo  $R \subseteq S$ .

1.  $\mathcal{F}(R)$  označuje množico vseh opisov nad  $R$ .
2. Naj bo  $D$  opis nad  $R$  in naj bo  $s \in S \setminus \text{set}(D)$  element vhodnih podatkov. Element  $s$  je v konfliktu z  $D$  natanko tedaj, ko ni nobene omejene stranice v  $V(\text{set}(D) \cup \{s\})$  z opisom  $D$ . Definiramo  $\mathcal{F}_0(R) = \{D \in \mathcal{F} \mid D \text{ ni v konfliktu z nobenim elementom } s \in R \setminus \text{set}(D)\}$ .

Če element  $s$  seka opis  $D$ , potem je tudi v konfliktu z opisom  $D$ . Nasprotno pa ni nujno res. Motivacija za definiranje konflikta je sledeči izrek:

**Trditev 4.3** Naj bo  $\infty \in R \subseteq S$ . Potem je  $e \mapsto D_R(e)$  bijekcija med stranicami  $V(R)$  in opisim v  $\mathcal{F}_0(R)$ .

**Trditev 4.4** Naj bo  $R_r$  množica, ki že vsebuje  $r$  elementov iz  $S$ . Množica vozlišč  $\mathcal{H}(R_r)$  je enaka  $\{\text{izvor}\} \cup \bigcup_{3 \leq i \leq r} \mathcal{F}(R_i)$ .

Trditev 4.4 karakterizira množico vozlišč grafa zgodovine kot množico kombinatoričnih objektov definiranih iz strani malega števila vhodnih elementov. Torej lahko uporabimo rezultate meje pričakovane velikosti grafa zgodovine in število njegovih vozlišč, ki so v konfliktu z elementom vhodne množice (iz [8, 4, 7]) za analizo. Meje so dane v obliki pričakovane velikosti  $\mathcal{F}_0(R)$  za naključno podmnožico  $R \subseteq S$ ,  $|R| = r$ , kar označimo z  $f_r$ . Za to predpostavimo, da algoritem procesira elemente v naključnem vrstnem redu.

**Trditev 4.5** ([7, Theorem 3 in 4]) Naj bo  $s_r$  element, ki je zadnji dodan v množico  $R_r$ .

1. Pričakovana velikost  $\mathcal{H}(R_r)$  je  $O\left(\sum_{i \leq r} \frac{f_i}{i}\right)$ .
2. Pričakovano število vozlišč od  $\mathcal{H}(R_{r-1})$  v konfliktu s elementom  $s_r$  je  $O\left(\sum_{i \leq r} \frac{f_i}{i(i-1)}\right)$ .

Glede na to, da ima Voronoijev diagram za  $i$  elementov največ  $3i - 6$  stranic izrek 4.3 implicira da je  $F_i = O(i)$

**Izrek 4.2** Abstraktni Voronoijev diagram na  $n$  vhodnih elementih je lahko izračunan s pomočjo naključnostnega algoritma (angl.: randomized algorithm) v pričakovanem času  $O(n \log n)$ . Poleg tega je pričakovan čas za vstavljanje  $r$ -tega objekta  $O(\log r)$ . Naključnost vpliva samo vrstni red v katerem so elementi dodani.

Za dokaz glej [23, Theorem 2].



# Poglavje 5

## Sklepne ugotovitve

Videli smo osnovno definicijo in lastnosti Voronoijevega diagrama, kjer smo ugotovili, da je število Voronoijevih regij in njihovih robov le linearno mnogo glede na število vhodnih elementov. Torej shranjevanje Voronoijevega diagrama ni težje kot shraniti posamezne elemente. Opisali smo tudi razne variacije Voronoijevih diagramov in njihove posebnosti ter podali primere za njihovo uporabo v praksi. Variacije so nastale ob spremembi objektov, številu najbližjih objektov in definicije razdalje.

Ugotovili smo, da potrebujemo za Voronoijev diagram najbolj oddaljenih točk samo elemente na konveksni ovojnici vhodne množice. Zatem smo videli, da lahko izračunamo Voronoijev diagram najbolj oddaljenih točk s pomočjo naključnostnega prirastnega algoritma, ki deluje v pričakovanem času  $O(n \log n)$ .

Nazadnje smo se še posvetili splošnemu pristopu do Voronoijevih diagramov in prišli do skupnih kombinatoričnih lastnosti številnih variant Voronoijevih diagramov. Predstavili smo idejo za splošno konstrukcijo Voronoijevega diagrama, ki prav tako dela v pričakovanem času  $O(n \log n)$ , kjer je  $n$  velikost vhodne množice. Ker algoritem ne potrebuje asimptotično več časa kot algoritmi, ki do bili izdelani za točno določene vrste Voronoijevih diagramov, lahko sklepamo, da je možno s pomočjo pristopa Abstraktnih Voronoijevih diagramov napisati program za konstrukcijo Voronoijevih diagramov, ki bi

ga bilo potrebno zelo malo prirediti glede na konkretni primer. Algoritem je potrebno prirediti za konkretni primer samo v eni operaciji in sicer pri konstrukciji Voronoijevega diagrama na 5-ih vhodnih elementih. Poleg tega se vse numerične operacije zgodijo samo v tej določeni operaciji.

# Literatura

- [1] F. Aurenhammer, “Voronoi Diagrams: A Survey of a Fundamental Geometric Data Structure”, *ACM Computing Surveys*, 1991, št. 23 str. 345–405.
- [2] F. Aurenhammer, R. Klein, “Voronoi diagrams”, *Handbook of Computational Geometry*, v: J. Sack and G. Urrutia (Ur.), Elsevier, 2000, str. 201–290.
- [3] M. De Berg, O. Cheong, M. van Kreveld, M. Overmars, “Computational geometry: algorithms and applications”, Springer, 3. izdaja, 2008.
- [4] J.D. Boissonnat, O. Devillers, R. Schott, M. Teillaud, M. Yvinec, “Applications of random sampling to on-line algorithms in computational geometry”, *Discrete Comput. Geom.*, 1992, št. 8 str. 51–71.
- [5] J. D. Boissonnat, C. Wormser, M. Yvinec, “Curved Voronoi Diagrams”, v: J. D. Boissonnat and M. Teillaud (Eds.), *Effective Computational Geometry for Curves and Surfaces*. Springer, Mathematics and Visualization, 2006.
- [6] K.Q. Brown, “Voronoi diagrams from convex hulls”, *Inform. Process. Lett.*, 1979, št. 9 str. 223-228.
- [7] K.L. Clarkson, K. Mehlhorn, R. Seidel, “Four results on randomized incremental constructions”, *Comput. Geom. Theory Appl.*, 1993, št. 3, str. 185-211

- 
- [8] K.L. Clarkson, P.W. Shor, “Applications of random sampling in computational geometry, II”, *Discrete Comput. Geom.*, 1989, št. 4 str. 387–421.
- [9] Computational Geometry Lecture 13: More on Voronoi diagrams, Dostopno na: <http://www.cs.uu.nl/docs/vakken/ga/slides7b.pdf>
- [10] F. Dehne, R. Klein, “The Big Sweep: On the power of the wavefront approach to Voronoi diagrams”, *Algorithmica*, 1997, št. 17 str. 19-32.
- [11] R. Descartes, “Principia Philosophiae”, Ludovicus Elzevirius, Amsterdam, 1644.
- [12] G. L. Dirichlet. “Über die Reduktion der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen”, *J. Reine Angew. Math.*, 1850, št. 40 str. 209-227.
- [13] A. Dobrin, “A review of properties and variations of Voronoi diagrams”, *Whitman College*, 2005. Dostopno na: [whitman.edu/mathematics/SeniorProjectArchive/2005/dobrinat.pdf](http://whitman.edu/mathematics/SeniorProjectArchive/2005/dobrinat.pdf)
- [14] H. Edelsbrunner, R. Seidel, “Voronoi diagrams and arrangements”, *Discrete Comput. Geom. 1*, 1986, str. 25- 44.
- [15] S. Fortune, “A sweepline algorithm for Voronoi diagrams”, *Algorithmica* 2, 1987, str. 153-174.
- [16] S. Fortune, “Voronoi Diagrams and Delaunay Triangulations”, v: J.E. Goodman and J. O’Rourke (Ur.), *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, Chapter 20, CRC Press LLC, 1997, str. 377–388.
- [17] P. Gruber, “Convex and Discrete Geometry”, v zborniku: *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Vol. 336, Springer-Verlag, 2007.
- [18] M. Held, “On the Computational Geometry of Pocket Machining”, *Lecture Notes in Computer Science 500*, Springer-Verlag, 1991.



- 
- [19] P. Kamousi, T. M. Chan, S. Suri, “Closest Pair and the Post Office Problem for Stochastic Points”, *Computational Geometry*, 2014, št 47 str. 214-223.
- [20] R. Klein, “Abstract Voronoi Diagrams and Their Applications”, *Proceedings Workshop on Computational Geometry and its Applications*, LNCS 333, 1988, str. 148–157.
- [21] R. Klein, “Concrete and abstract Voronoi diagrams”, LNCS 400, Springer, 1989.
- [22] R. Klein, E. Langetepe, Z. Nilforoushan, “Abstract Voronoi diagrams revisited”, *Computational Geometry: Theory and Applications*, 2009, št. 42 str. 885-902.
- [23] R. Klein, K. Mehlhorn, S. Meister, “Randomized incremental construction of abstract Voronoi diagrams”, *Computational Geometry: Theory and Applications*, 1993, št. 3 str. 157-184.
- [24] D. E. Knuth, “The Art of Computer Programming”, *Volume III: Sorting and Searching.*, Addison-Wesley, 1973.
- [25] N.-M. Lê, “Randomized incremental construction of simple abstract Voronoi diagrams in 3-space”, *Computational Geometry*, 1997, št. 8 str. 279-298.
- [26] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, S. N. Chiu, “Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams”, *Wiley Series in Probability and Statistics*, 2000.
- [27] M.I. Shamos, D. Hoey, “Closest-point problems”, *Proc. 16th IEEE Symp. Found. Comput. Sci.*, 1975, str. 151-162.
- [28] G. F. Voronoï, “Deuxième mémoire: recherches sur les paralléloedres primitifs”, *J. Reine Angew. Math.*, 1909, št. 136 str. 67-181.

- [29] G. M. Voronoi, “Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques.”, *J. Reine Angew. Math.*, 1908, št. 134 str:198-287.