Danna, R. (2016). Leonardo Fibonacci, *La Nuova Informazione Bibliografica*, iii, 2016, Bologna, Il Mulino, pp. 471-496.

Leonardo Fibonacci

> Qua re amplectens strictius ipsum modum indorum, et attentius studens in eo, ex proprio sensu quedam addens, et quedam etiam ex subtilitatibus Euclidis geometrice artis apponens, summam huius libri, quam intelligibilius potui, in XV capitulis distinctam componere laboravi, fere omnia que inserui, certa probatione ostendens, ut extra, perfecto pro ceteris modo, hanc scientiam appetens instruantur, et gens latina de cetero, sic hactenus, absque illa minime inveniatur. [1]

Introduzione: il contesto

I secoli XII e XIII sono un periodo di grande abbondanza per le repubbliche marinare italiane. I mercanti pisani e genovesi avevano progressivamente minato e sconfitto il dominio arabo sul Tirreno, conquistando la Sardegna (1022), la Sicilia (fra 1058 e 1090), la Corsica (1091) e saccheggiando e imponendo vantaggiose condizioni commerciali a Mehédia (1087). In quegli anni le repubbliche marinare tirreniche presero attivamente parte alle crociate, ponendo le basi per la conquista di un dominio cristiano sul Mediterraneo. In seguito alla riconquista da parte del Saladino di

---

[1] Così, considerando sinteticamente questo metodo degli Indi, e studiandolo attentamente, e aggiungendo qualche cosa di mio insieme ad alcune delle sottigliezze della geometria di Euclide, ho rielaborato nel modo più comprensibile possibile la somma di questo libro divisa in XV capitoli corredando quasi tutto con dimostrazioni. Questo perché chi desidera essere istruito in questa scienza lo possa fare in modo perfetto e perché i popoli latini non ne restino esclusi come ne sono stati fino a questo momento.
La lezione latina riportata segue quella presentata in R. Franci, al quale si può fare riferimento anche per una traduzione alternativa, *Il Liber Abaci di Leonardo Fibonacci 1202-2002*, «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», S. VIII, Vol. 5a (2002) 2, pp. 293-328, ma cfr. anche B. Boncompagni (a cura di), *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimo terzo*. III voll., vol. I., *Il* «Liber Abbaci» *di Leonardo Pisano*, pubblicato secondo la lezione del Codice Magliabecchiano I, 2616, Badia Fiorentina, n° 73, Roma, 1857.

Gerusalemme (1187) si diffuse in occidente una vera e propria corsa alla crociata che arrivò a coinvolgere i più potenti sovrani del tempo: l'imperatore di Germania Federico I Barbarossa, il re d'Inghilterra Riccardo cuor di Leone e il re di Francia Filippo Augusto. Tuttavia gli esiti militari di queste campagne non furono quelli sperati: Barbarossa morì prima di arrivare in Terrasanta e le conquiste si limitarono ad Acri e a pochi altri territori costieri.[2]

Alle imprese dei crociati si accompagnò tuttavia un'importante espansione commerciale delle repubbliche marinare italiane, le cui flotte divennero presto il vettore preferenziale per il trasporto degli eserciti e degli approvvigionamenti in Terrasanta. Dal momento che svolgevano un ruolo non sostituibile, le marine italiane ebbero buon gioco nel garantirsi ingenti guadagni dai principati cristiani in Siria e nell'ottenere condizioni particolarmente favorevoli per il proprio commercio. Anche per questo motivo le repubbliche marinare poterono consolidare una fitta rete commerciale che si estendeva sulla maggior parte delle coste del Mediterraneo, grazie a fondaci dislocati dalla Siria e dall'Africa settentrionale fino a Marsiglia. Questa rete commerciale era destinata a sopravvivere alle imprese crociate, tanto che è possibile concludere «che il risultato durevole e fondamentale delle crociate fu proprio quello di aver dato alle città italiane [...] la possibilità di affermare il proprio dominio sul Mediterraneo».[3]

Nel XII e XIII secolo il Mediterraneo metteva in comunicazione tre grandi aree culturalmente e linguisticamente distinte: la cristianità occidentale, di lingua latina, la cristianità orientale, di lingua greca, e il mondo islamico, di lingua araba. Le repubbliche marinare furono un importante tramite di scambio fra l'occidente latino e il mondo arabo della Siria e del Maghreb. La lingua italiana conserva ancora tracce di questi contatti. Basti pensare a termini come "dogana", che deriva dall'arabo [dīwān], "registro, ufficio"[4]; come "zecca", che deriva dall'arabo [sikka]; come "carato", che deriva dall'arabo [qīrāṭ][5]; come "algebra", che deriva dall'arabo [al-giabr], "riduzione, restaurazione (di una serie numerica)", e quindi "riduzione", inizialmente

---

[2] N. Ambrosetti, *L'eredità arabo-islamica nelle scienze e nelle arti del calcolo nell'Europa medievale*, Milano, Edizioni Universitarie di Lettere Economia Diritto, 2008, p. 216.

[3] H. Pirenne, *Storia economica e sociale del Medioevo*, Milano, Garzanti, 1967, p. 46.

[4] Cfr. anche il nostro "divano".

[5] Letteralmente "ventiquattresima parte", a sua volta derivante dal greco *kerátion*, diminutivo di *keras* ovvero "corno", ad indicare la siliqua del carrubo, i cui semi avrebbero una massa eccezionalmente uniforme, di circa 1/5 di grammo.

nel significato medico-chirurgico, e successivamente in quello matematico di “scienza delle riduzioni e comparazioni”[6]; come “algoritmo”, che deriva dal nome d’origine geografica di Muḥammad ibn Mūsa, chiamato al-Khuwārizmī perché nativo di Khwarizm, regione dell’Asia Centrale.[7]

Pisa in modo particolare riuscì a stabilire importanti scambi con il mondo arabo, alternando i commerci agli scontri, come testimonia con intatto splendore la magnificenza della cattedrale della città. La città toscana riuscì a mantenere un ruolo di primo piano in Maghreb e in Terrasanta anche dopo la battaglia della Meloria (1284) e la caduta di Acri (1291). Ne è rimasta testimonianza negli archivi documentali della città, il cui studio ha permesso di portare alla luce diversi documenti redatti sia in arabo sia in latino (trattati, accordi commerciali, scambi epistolari, trattative per il rilascio di prigionieri) che testimoniano contatti fra le autorità pisane e arabe.[8]

Interessante documento di questo contesto di così particolare scambio di materiale commerciale e linguistico fra la repubblica di Pisa e il sud del Mediterraneo è un diploma del 1366 stilato a conclusione di un accordo mercantile fra il doge di Pisa Giovanni dell’Agnello e Abu-l-Abbas Ahmed, emiro delle città di Bona e Bugia. Il documento è particolarmente curioso ed esemplare perché si tratta di un testo in lingua indubbiamente toscana, ma scritto in caratteri arabi.[9] Vale la pena di ricordare che la rete commerciale delle città italiane sul Mediterraneo si collocava nel mezzo di una rete di portata intercontinentale e costituiva un vero e proprio «ponte» fra oriente

---

[6] Il lemma compare per la prima volta nel trattato di al-Khawarizmi nel significato di una delle due operazioni fondamentali dell’algebra.

[7] Cfr. *La romània d’oltremare: francese e veneziano nel levante*, in G. Folena, *Culture e lingue nel Veneto medievale*, Padova, Editoriale Programma, 1990, pp. 269-286, in particolar modo le pp. 277-278.

[8] Cfr. M. Tangheroni, *Pisa e il Mediterraneo all’epoca di Fibonacci*, in E. Giusti, R. Petti (a cura di), *Un ponte sul Mediterraneo: Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente*, Firenze: Polistampa, 2002; N. Ambrosetti, *L’eredità arabo-islamica nelle scienze e nelle arti del calcolo nell’Europa medievale*, Milano, Edizioni Universitarie di Lettere Economia Diritto, 2008, pp. 216-217.

[9] Cfr. E. Banfi, *Le lingue d’Italia fuori d’Italia. Europa, Mediterraneo e Levante dal Medioevo all’età moderna*, Bologna, Il Mulino, 2014, p. 104: «parte del carteggio diplomatico tra Abu-l-Abbas Ahmed, emiro delle algerine città di Bona (‘Annāba) e Bugia (Biǧāya) e Giovanni dell’Agnello (Giovanni de’ Conti), doge di Pisa, il diploma in questione – unico esempio a noi noto di testo italo-romanzo reso mediante caratteri arabi – è datato 10 giugno 1366 ed è da intendersi quale «contatto linguistico» tra i due interlocutori. […] Si tratta di una promessa di sicurezza e favori per i mercanti pisani da parte di Abu-l-Abbas Ahmed, promessa destinata, assai probabilmente, a essere «letta/recitata» di fronte al destinatario».

e occidente.[10] Le navi pisane permettevano alle merci prodotte in oriente – e trasportate dalle carovane fino alle coste orientali e meridionali del Mediterraneo – di raggiungere la Penisola italiana per poi attraversare le Alpi e arrivare, ad esempio, nelle celebri fiere della Champagne e nei mercati delle Fiandre nel cuore del continente europeo.

La vita e le opere

La storia di Leonardo Fibonacci (Pisa, 1170/80 ca. – ?, *post* 1241) è paradigmatica del tempo in cui visse e si colloca al centro del contesto che si è rapidamente cercato di delineare. Leonardo nacque a Pisa intorno al 1170 nella famiglia mercantile dei discendenti di Bonaccio,[11] in una città che era riuscita, attraverso la propria flotta commerciale, a controllare buona parte dei traffici marittimi sul Mediterraneo, a entrare in quotidiano contatto con il resto del continente europeo e a stabilire stretti rapporti con la fiorente civiltà islamica.

All'interno di un tale contesto non sorprende dunque apprendere che nel 1185 il padre di Leonardo, Guglielmo Fibonacci, si trovava in Maghreb in qualità di direttore della dogana pisana di Bugia (l'attuale Bejaïa, in Algeria). Si trattava di un importante porto dell'Africa settentrionale, fondato nel 1067 e collocato nello strategico punto di incontro fra il fondamentale asse est-ovest dell'impero arabo e il termine di una valle percorsa dalle carovane transahariane. Lo stesso Leonardo racconta nella propria opera principale che il padre aveva deciso di chiamare presso di sé il giovane figlio per metterlo a studiare il «calcolo indiano», vale a dire l'insieme degli strumenti e delle tecniche aritmetiche diffuse nel mondo arabo grazie a una tradizione consolidata di studi. La scuola matematica araba aveva raccolto l'eredità degli studi dei matematici indiani, che furono i primi (fra V e VI secolo d.C.) a introdurre un sistema di numerazione posizionale e a elaborare una matematica che facesse sistematicamente ricorso alla simbologia (punti e lettere) per rappresentare le incognite. Il più celebre esponente della tradizione matematica araba fu al-Khawarizmi, il cui trattato *Al-Kitab al-muktasar fi hisab al-jabr wa'lmuqabalah*

[10] E. Giusti, R. Petti (a cura di), *Un ponte sul Mediterraneo: Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente*, Firenze: Polistampa, 2002.
[11] *Filii Bonacij*, volgarizzato in Fibonacci

(tradotto in latino principalmente con il titolo di *Algebra* e simili varianti) è considerato il fondamento dell'algebra moderna.[12]

Quella di Guglielmo Fibonacci fu probabilmente una scelta non convenzionale per l'istruzione di un figlio, una scelta estremamente acuta[13] che avrebbe inciso profondamente non soltanto nella storia del giovane Leonardo. Sappiamo che era uso comune per i giovani intenzionati a entrare nell'attività mercantile-bancaria, una volta completato il ciclo di istruzione, trascorrere un periodo di apprendistato presso una sede estera di una delle grandi compagnie commerciali. Ma la pratica di mandare i figli all'estero per completare il ciclo di istruzione (e non già per avviarli alla professione) rimane un uso scarsamente attestato anche nei secoli successivi. All'epoca di Leonardo le tecniche matematiche di origine indiana e mediazione araba avevano una scarsa diffusione nell'occidente cristiano, dove si faceva ancora largo ricorso alla matematica classica e al sistema di numerazione romano.[14] Forte del riferimento alla tradizione indiana, la matematica araba del nostro tardo medioevo aveva affinato diversi strumenti molto poco diffusi in occidente, primo fra tutti il sistema di numerazione posizionale (che ancora oggi non a caso chiamiamo 'arabo', ma che Fibonacci correttamente definisce 'indiano').

Verosimilmente Leonardo giunse a Bugia dopo aver ottenuto una prima istruzione. Non sappiamo tuttavia in quale contesto possa aver acquisito questa prima

---

[12] Attivo nella Baghdad del califfo al-Mansur all'inizio del IX secolo d.C., al-Khawarizmi (Jafar Mohammed ibn Musa al-Khawarizmi, 780-850 ca.) scrisse fra l'812 e l'833 un trattato di algebra intitolato *Al-Kitab al-muktasar fi hisab al-jabr wa'lmuqabalah* che è considerato il fondamento dell'algebra moderna. Il testo presenta un metodo generale di risoluzione per equazioni di primo e secondo grado, ricondotte a sei casi fondamentali attraverso le due operazioni di *al-jabr* (spostamento di un termine da un lato all'altro dell'equazione) e di *al-muqabalah* (somma algebrica di termini simili). Dal nome di al-Khawarizmi deriva il nostro lemma "algoritmo". Da "al-jabr" si ottiene invece il lemma "algebra". Cfr. N. Ambrosetti, *L'eredità arabo-islamica nelle scienze e nelle arti del calcolo nell'Europa medievale*, Milano, Edizioni Universitarie di Lettere Economia Diritto, 2008; N. Ambrosetti, *Una traduzione dell'algebra di al-Khawarizmi nella Firenze del XIV secolo*, «Bollettino di storia delle scienze matematiche», 31 (2011) 2, pp. 137-166.

[13] È Fibonacci stesso a riconoscere il grande acume pedagogico del genitore: «inspecta utilitate et commoditate futura», cfr. *infra*.

[14] Esistevano delle traduzioni del trattato di al-Khawarizmi ad opera di Roberto di Chester (realizzata a Segovia intorno al 1145) e di Gerardo da Cremona (che opera a Toledo intorno al 1170), ma avevano avuto una scarsa diffusione nel mondo latino, cfr. N. Ambrosetti, *L'eredità arabo-islamica nelle scienze e nelle arti del calcolo nell'Europa medievale*, Milano, Edizioni Universitarie di Lettere Economia Diritto, 2008, pp. 113-133; P. D. Napolitani, *Il Rinascimento italiano*, in *La matematica*, IV voll. a cura di C. Bartocci e P. Odifreddi, Torino, Einaudi, 2007-2010, vol. I, *I luoghi e i tempi*, pp. 237-278, p. 252; R. Franci, *Rivoluzione commerciale e cifre indo-arabiche*, in *Storicità e attualità della cultura scientifica e insegnamento delle scienze*, Firenze, Marietti-Manzuoli, 1986, pp. 53-71, pp. 53-57.

preparazione (se già in una scuola pubblica comunale o se presso le tradizionali scuole legate a conventi o cattedrali), durante la quale i giovani imparavano a leggere, a scrivere e i primi rudimenti di matematica. Stando al suo stesso racconto, il giovane matematico-mercante, messo a studiare l'«abaco» in un contesto internazionale e presso un maestro arabo (di cui purtroppo non ci è nota l'identità), ebbe il merito di rendersi perfettamente conto dell'importanza che il sistema di numerazione arabo-indiano poteva avere per la semplificazione delle operazioni di conto. Si appassionò dunque allo studio di queste tecniche e anche durante le successive fasi della sua preparazione mercantesca, cioè durante diversi periodi di praticantato all'estero «apud Egyptum, Syriam, Greciam, Siciliam et Provinciam», approfittò di ogni occasione per approfondire e perfezionare le sue competenze. È inoltre attestata la sua presenza a Costantinopoli intorno al 1200, «dove svolgeva la mansione di interprete per l'avamposto commerciale pisano e dove avrebbe potuto conoscere i matematici locali».[15]

Il *Liber abaci*

Rientrato a Pisa al volgere del secolo, Leonardo raccolse i risultati dei suoi viaggi e dei suoi studi nell'opera che lo renderà celebre, il *Liber abaci*, pubblicato per la prima volta nel 1202 e in una successiva edizione rivista nel 1228. Vale la pena di riportare l'*incipit* al trattato, che costituisce anche la fonte principale da cui si ricava quanto finora riportato su Leonardo:

> Incipit liber abbaci compositus a leonardo filiorum bonacci pisano in año M.° CC.° II.° et correctus ab eodem XXVIII.
> Cum genitor meus a patria publicus scriba in duana bugee pro pisanis mercatoribus ad eam confluentibus constitutus preesset, me in pueritia mea ad se venire faciens, inspecta utilitate et commoditate futura, ibi me studio abbaci per aliquot dies stare voluit et doceri. Ubi ex mirabile magisterio in arte per novem figuras Indorum introductus, scientia artis in tantum mihi pre ceteris placuit, et intellexi ad illam, quod quidquid studebatur ex ea apud Egyptum, Syriam, Greciam, Siciliam et Provinciam cum suis variis modis, ad que loca negotiationis postea peragravi, per multum studium et disputationis didici conflictum. Qua re amplectens strictius ipsum modum indorum, et attentius studens in eo, ex proprio sensu quedam addens, et quedam etiam

[15] Cfr. N. Ambrosetti, *L'eredità arabo-islamica nelle scienze e nelle arti del calcolo nell'Europa medievale*, Milano, Edizioni Universitarie di Lettere Economia Diritto, 2008, p. 219.

> ex subtilitatibus Euclidis geometrice artis apponens, summam huius libri, quam intelligibilius potui, in XV capitulis distinctam componere laboravi, fere omnia que inserui, certa probatione ostendens, ut extra, perfecto pro ceteris modo, hanc scientiam appetens instruantur, et gens latina de cetero, sic hactenus, absque illa minime inveniatur.[16]

Le copie manoscritte che ci hanno tramandato il testo del *Liber abaci* sembrano tutte dipendere dalla seconda edizione del trattato, anche se la tradizione non è priva di ambiguità.[17] Bisogna segnalare inoltre che il testo non ha ancora ricevuto una edizione critica, e che la maggior parte dei passi qui riportati seguono ancora la lezione della edizione ottocentesca di Baldassarre Boncompagni, le cui erudite ricerche di archivio costituiscono ancora oggi un punto di riferimento imprescindibile per lo studio del matematico pisano.[18] Il testo è diviso in quindici

---

[16] Incomincia il Liber abaci composto da Leonardo Pisano figlio di Bonaccio nel 1202 e rivisto nel 1228.

Quando mio padre, scrivano pubblico per la dogana di Bugia al servizio dei mercanti pisani che confluivano in quella città, fu incaricato di dirigere la dogana per disposizione della madrepatria, prevedendo l'utilità e l'opportunità futura, volle che io, ancora fanciullo, lo raggiungessi, e volle che per diversi giorni venissi messo e istruito nello studio dell'abaco. Ivi, una volta introdotto a quell'arte grazie a quel mirabile insegnamento fondato sulle nove figure degli indiani, la conoscenza di quell'arte mi piacque così tanto, e mi ci dedicai in misura tale, che continuai ad apprendere con grande passione e con molte dispute quanto di essa se ne studiava in Egitto, Siria, Grecia, Sicilia e Provenza, luoghi in cui mi recai per motivi di mercanzia.

Così, considerando sinteticamente questo metodo degli Indi, e studiandolo attentamente, e aggiungendo qualche cosa di mio insieme ad alcune delle sottigliezze della geometria di Euclide, ho rielaborato nel modo più comprensibile che potei la somma di questo libro divisa in XV capitoli corredando quasi tutto con dimostrazioni. Questo perché chi desidera essere istruito in questa scienza lo possa fare in modo perfetto e perché i popoli latini non ne restino esclusi come ne sono stati fino a questo momento.

La lezione latina riportata segue quella presentata in R. Franci, al quale si può fare riferimento anche per una traduzione alternativa, *Il Liber Abaci di Leonardo Fibonacci 1202-2002*, «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», S. VIII, Vol. 5a (2002) 2, pp. 293-328. Ma cfr. anche il testo pubblicato da B. Boncompagni secondo la lezione del codice della Biblioteca Ambrosiana contrassegnato I.72 Parte superiore in *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo*, Roma, Tipografia delle Belle Arti, 1854, e soprattutto il testo completo in B. Boncompagni (a cura di), *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimo terzo*. III voll., vol. I., *Il* «Liber Abbaci» *di Leonardo Pisano,* pubblicato secondo la lezione del Codice Magliabechiano I, 2616, Badia Fiorentina, n° 73, Roma, 1857.

[17] Allard ha trattato delle due edizioni in A. Allard, *Les versions de 1202 et 1228 du Liber Abaci*, presentato a Leonardo Fibonacci, Matematica e società nel Mediterraneo del XIII secolo. Convegno internazionale di studi, Pisa-Firenze, 2002.

[18] Per una discussione della tradizione del testo del *Liber abaci*, cfr. E. Ulivi, *Su Leonardo Fibonacci e sui maestri d'abaco pisani dei secoli XIII-XV*, «Bollettino di storia delle scienze matematiche», 31 (2011) 2, pp. 247-88. Dobbiamo le prime pubblicazioni a stampa dei mss. delle opere di Leonardo

capitoli, che possono essere raccolti in quattro sezioni principali: presentazione del sistema di numerazione posizionale (capitoli 1-7), regola del tre e discussione di problemi legati alla mercatura (capitoli 8-11), *questiones erraticae* (capitoli 12-13), e una sezione finale dedicata al calcolo con i radicali e al calcolo algebrico (capitoli 14-15).[19]

Il primo capitolo è dedicato alla presentazione delle nuove cifre "indiane" e a una prima esposizione del nuovo sistema di numerazione. Vediamone l'*incipit*:

Incipit primum capitulum

Nouem figurem indorum he sunt

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Cvm his itaque nouem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zephirum appellatur, scribitur cuilibet numerus, ut inferius demonstratum. Nam numerus est unitatum perfusa collectio siue congregatio unitatum, que per suos in infinitum ascendit gradus. Ex quibus primus ex unitatibus, que sunt ab uno usque in decem, constat. Secundus ex decenis, que sunt a decem usque in centum, fit. Tertius fit ex centenis que sunt a centum usque in mille. Quartus fit ex millenis que sunt a mille usque in decem milia, et sic sequentium graduum in infinitum, quilibet ex decuplo sui antecedentis constat.[20]

Pisano agli studi di Baldassarre Boncompagni, cfr. B. Boncompagni, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo*, Roma, Tipografia delle Belle Arti, 1854. Pubblicato anche in «Giornale Arcadico di Scienze, Lettere ed Arti», 131-132-133 (1853); *Idem* (a cura di), *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimo terzo*. III voll.; vol. I. Il *Liber abaci* secondo la lezione del Codice Magliabechiano C.I, 2616; vol. II. La *Practica Geometriae* secondo la lezione del Codice Urbinate n. 292 della Biblioteca Vaticana; vol. III *Opuscoli* secondo la lezione del Codice della Biblioteca Ambrosiana di Milano contrassegnato E.75 Parte Superiore. I voll. II e III sono pubblicati in un unico tomo intitolato *Leonardi Pisani Practica geometriae ed opuscoli*, Roma, Tipografia delle Scienze Matematiche, 1857-1862. Più di recente Sigler ha effettuato una traduzione in lingua inglese del testo, cfr. L. E. Sigler, *Fibonacci's Liber abaci. A translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, New York, Springer, 2003; S. Cuomo, «Fibonacci's Liber Abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's book of Calculation by Laurence E. Sigler reviewed», *Aestimatio*, I (2004), pp. 19-27.

[19] Cfr. R. Franci, *Leonardo Pisano e la trattatistica dell'abaco in Italia nei secoli XIV e XV*, in «Bollettino di storia delle scienze matematiche», XXIII (2003), fasc. II, pp. 33-54, p. 35.

[20] Incomincia il primo capitolo

Le nove figure degli Indi sono:

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Con queste nove figure, e con questo segno 0, che in arabo viene chiamato zefiro, si scrive qualsiasi numero, come viene mostrato più sotto. Il numero infatti è collezione o congregazione di unità, che aumenta all'infinito secondo i propri gradi. Di questi il primo grado consiste nelle unità, che sono da uno a dieci. Il secondo è composto dalle decine, che sono da dieci a cento. Il terzo è composto

Grazie a questo primo capitolo del *Liber abaci* la diffusione del sistema di numerazione posizionale in occidente entra in una fase di forte espansione. Già a partire da questo primo testo, che è seguito da numerosi esempi che illustrano il nuovo metodo di scrittura dei numeri, è possibile osservare la grande portata di novità dell'opera di Fibonacci. Dopo aver dato una definizione di numero assai vicina a quella del VII libro degli *Elementi* («numerus est unitatum perfusa collectio siue congregatio unitatum»), Fibonacci passa a presentare il nuovo metodo di scrittura dei numeri senza darne definizioni, ma muovendo direttamente a illustrarne la costruzione, il funzionamento.

Tale metodo di costruzione dei numeri non segue un procedimento additivo, come nel caso del sistema di numerazione romano, ma viene sviluppato attraverso un processo algoritmico, vale a dire seguendo una precisa sequenza di istruzioni che non trovano altra giustificazione se non nella loro stessa funzionalità. La prima cifra sta ad indicare le unità, la seconda le decine, la terza le centinaia e così via. Si tratta di un processo iterativo potenzialmente estendibile all'infinito, come Fibonacci nota esplicitamente: «et sic sequentium graduum in infinitum». Bisogna notare inoltre che l'elemento fondamentale per introdurre il nuovo sistema di numerazione, che solo apparentemente viene presentato in secondo piano, è quel *signum 0*, «quod arabice zephirum appellatur». Per l'occidente latino lo zero è infatti un numero nuovo, dal momento che è completamente sconosciuto alla matematica classica, come avremo modo di vedere meglio più avanti.

I capitoli dal secondo al sesto contengono un'esposizione dettagliata delle diverse operazioni con numeri interi e frazionari. In questi capitoli Leonardo introduce algoritmi per il calcolo delle quattro operazioni che sono sotto diversi aspetti equivalenti a quelli ancora in uso oggi. Particolarmente interessante è la presentazione del metodo per il calcolo in colonna delle quattro operazioni elementari, che naturalmente è concepibile solo in presenza di un sistema di numerazione posizionale. A questo argomento viene dedicato ampio spazio e cura espositiva, a

---

dalle centinaia che sono da cento fino a mille. Il quarto è composto dalle migliaia, che sono da mille fino a diecimila, e così all'infinito per i gradi successivi, che sono sempre dieci volte il grado antecedente.
La lezione latina è tratta da B. Boncompagni (a cura di), *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimo terzo*. III voll., vol. I., *Il* «Liber Abbaci» *di Leonardo Pisano*, pubblicato secondo la lezione del Codice Magliabecchiano I, 2616, Badia Fiorentina, n° 73, Roma, 1857, p. 2.

testimonianza della consapevolezza, da parte di Fibonacci, della forte novità della trattazione. Naturalmente anche il metodo di calcolo in colonna è possibile solo grazie all'introduzione della decima cifra. Altro strumento di grande novità è il sistema di rappresentazione dei numeri frazionari (detti numeri "rotti"), in tutto simile a quello ancora in uso. Ogni regola viene presentata con grande chiarezza e attenzione all'esposizione didattica, ogni nuova nozione viene corredata da un dettagliato seguito di esempi, che in massima parte sono problemi facenti esplicito riferimento a calcoli necessari alla pratica di mercatura.

Anche i capitoli dall'ottavo all'undicesimo contengono diversi passi in cui gli strumenti matematici vengono direttamente applicati alla risoluzione di problemi mercantili. La *Regola del tre* è l'esempio principe in questo senso. Essa non è altro che il metodo risolutivo di una proporzione fra quattro numeri in cui un termine sia ignoto. La regola del tre, su cui insisterà anche Luca Pacioli nella sua interpretazione metamatico-teologica della proporzione, era prima di tutto uno strumento di lavoro fondamentale per il mercante del XIII secolo. In un momento in cui quasi ogni città coniava una propria moneta e utilizzava un proprio sistema di misura, la regola del tre diventava lo strumento fondamentale per riuscire ad orientarsi e per esprimere un valore adeguandolo di volta in volta ai mutevoli sistemi di riferimento. Troviamo un ottimo esempio della peculiare commistione di matematica e di mercatura che il *Liber abaci* immediatamente ed esplicitamente propone nell'*incipit* dell'ottavo capitolo:

> In omnibus itaque negotiationibus quattuor numeri proportionales semper reperiuntur, ex quibus tres sunt noti, reliquus vero est ignotus: primus quidem illorum trium notorum numerorum est numerum uenditionis cuiuslibet mercis, siue constet numero, siue pondere, siue mensura. Numero quidem ut centum coria, uel centum beccune et similium: pondera quoque ut cantarum, uel centum, uel libre, aut unce et similium. Mensura quidem ut metra olei, sextaria frumenti, et canne panni et similium. Secundum autem est pretium illius uenditionis, hoc est illius primi numeri, siue sit quantitas quorumlibet denariorum, siue bizantiorum, siue tarenorum, uel alicuius alie currentis monete. Tertius vero quandoque erit aliqua eiusdem uenditie mercis quantitas, cuius pretium, scilicet quartus numerus, ignoratur; et quandoque erit aliqua similis quantitas secundi pretii, cuius merces, scilicet quartus ignotus numerus, iterum ignorabitur. Quare, ut ignotus numerus per notos reperiatur, talem in omnibus tradimus regulam universalem, uidelicet ut in capite tabule, in dextera parte scribas primum numerum, scilicet mercem; retro in eadem linea ponas prertium ipsius

> mercis, uidelicet secundum numerum; tertium quoque si fuerit mercis, scribe sub merce, scilicet sub primo; et si fuerit pretium, scribe eum sub pretio, uidelicet sub secundo.[21]

La seconda parte di questo ottavo capitolo è significativamente chiamata: «pars secunda octaui capituli de cambiis monetarum»,[22] in cui la regola del tre viene applicata al caso del cambio.

Altri problemi che Leonardo tratta nella sua esposizione sono il calcolo degli interessi, il calcolo di tassi di sconto, di prezzi, di guadagni, di cambi fra diverse valute, di baratti in termini di moneta di conto. I capitoli dal dodici al tredici portano delle «questiones erratice», cioè non riconducibili a una sola formula risolutiva. Fra questi esercizi se ne trova uno nel quale si chiede di calcolare «Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinantur»,[23] cioè di calcolare il numero di cuccioli generati da una popolazione di conigli che si riproduce ogni anno secondo una determinata ragione, a partire da una singola coppia. Nel corso della discussione di questo problema Fibonacci presenta i primi dodici termini della successione che porta ancora il suo nome e che diventerà celebre solo a partire dal XVII secolo. Fra le «questiones erratice» si trova anche un problema intitolato *de duplicatione scacherii*, «un vero e proprio pezzo di bravura sul numero di chicchi di grano richiesto dall'inventore della scacchiera: Fibonacci si ferma a

---

[21] In tutte le negoziazioni si trovano sempre quattro numeri proporzionali, dei quali tre sono noti, mentre il quarto è ignoto: il primo di quei tre numeri noti è la quantità di guadagno di una merce qualsiasi, e consta di un numero o di un peso o di una misura. Numero del tipo di cento pezze di cuoio, o cento capre e simili; peso come un cantaro, o un cento, o una libra, un'oncia e simili. Misura come quantità di olio, sestarie di frumento, di canne, panni e simili. Il secondo dei numeri noti è invece il prezzo di questa merce, vale a dire è la quantità di denari, bisanti, tarì e altre monete correnti. Il terzo numero sarà in alcuni casi un certo guadagno di cui si ignora il prezzo, vale a dire il quarto numero; negli altri casi [il terzo numero] è il prezzo, il cui guadagno, vale a dire il quarto numero, di nuovo si ignora. Per calcolare il numero ignoto da quelli noti indichiamo una regola universale a tutti questi casi. In cima a una tavola, nella parte destra scrivi il primo numero, vale a dire il guadagno; più indietro sulla stessa linea metti il prezzo di quella stessa merce, vale a dire il secondo numero. Il terzo numero, nel caso fosse il guadagno, scrivilo sotto il guadagno, vale a dire il primo numero; nel caso fosse il prezzo, scrivilo sotto il prezzo, vale a dire sotto il secondo.
B. Boncompagni (a cura di), *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimo terzo*. III voll., I. Il *Liber abaci* secondo la lezione del Codice Magliabechiano C.I, 2616, pp. 83-84.

[22] *Ivi*, p. 103.

[23] Quante coppie di conigli vengono generate in un anno da una coppia di conigli.

340282366920938463374607431768211456, aggiungendo *et sic multiplicando possumus procedere in infinitum*».[24]

Gli ultimi due capitoli «costituiscono nel loro insieme quello che si può considerare il primo trattato d'algebra scritto in lingua latina».[25] Il capitolo XIV presenta dei metodi per il calcolo delle radici quadrate e cubiche aggiungendo indicazioni ed esempi su come estrarle e come utilizzarle nei calcoli. Particolarmente interessante è il fatto che Leonardo presenta questi metodi paragonandoli esplicitamente a quelli geometrici degli *Elementi* di Euclide, ponendo da un lato grande cura nel mostrare la compatibilità e complementarità dei due strumenti e denunciando dall'altro la consapevolezza di stare proponendo un metodo altro rispetto a quello euclideo.

L'ultimo capitolo infine, oltre a presentare delle soluzioni di problemi facendo ricorso al teorema di Pitagora, contiene una sorta di trattato d'algebra indipendente, intitolato *De solutione quarundam questionum secundum modum algebre et almuchabale,* che riporta i metodi di risoluzione algebrica di equazioni di secondo grado. Fibonacci considera sei diversi metodi di risoluzione per sei diversi modi in cui il «numerus» (vale a dire il termine noto), la «radix» o la «chosa» (vale a dire il termine di primo grado) e il «census» (cioè il quadrato) si possono disporre fra loro. Bisogna infatti ricordare che la notazione simbolica con cui noi siamo abituati a concepire le equazioni e i principi di equivalenza con cui siamo soliti operare su di esse non erano ancora stati introdotti. La matematica che Fibonacci importa nell'Occidente latino è ancora prevalentemente verbale e priva di simbolismi, come del resto era la matematica della scuola araba. Vediamone un esempio in questo passo:

> Et cum numerus non habet respectum ad quadratum uel radicem, tunc sinpliciter numerus appellatur: he autem in solutionibus questionum inter se equantur sex modis, ex quibus tres sunt simplices, et tres compositi. Primus quidem modus est, quando

---

[24] N. Ambrosetti, *L'eredità arabo-islamica nelle scienze e nelle arti del calcolo nell'Europa medievale*, Milano, Edizioni Universitarie di Lettere Economia Diritto, 2008, p. 223.

[25] Cfr. R. Franci, *Il Liber Abaci di Leonardo Fibonacci 1202-2002*, «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», S. VIII, Vol. 5a (2002) 2, pp. 293-328, p. 314.

quadratus, qui census dicitur, equatur radicibus. Secundus quando census equatus numero; tertius quando radix equatur numero.[26]

Riassumendo, nel *Liber abaci*, oltre alla successione di Fibonacci (che per il mercante medievale non era altro che un *curiosum*), il lettore del XIII secolo poteva trovare metodi di risoluzione di equazioni di secondo grado, metodi per il calcolo delle proporzioni, dei tassi di cambio, dei tassi di interesse, fino al calcolo dell'ammortamento a interesse composto (caso che naturalmente presuppone il concetto di valore attuale). Ma soprattutto vi trovava degli strumenti di calcolo (il sistema di numerazione decimale e gli algoritmi per lo svolgimento delle operazioni) profondamente innovativi.

La *Practica geometriae*

Oltre al *Liber abaci* Leonardo pubblicò una *Practica geometriae*, la seconda opera destinata ad avere una grande diffusione nei secoli seguenti. Contrariamente al caso del *Liber abaci*, le principali fonti cui Fibonacci fa ricorso in questa seconda opera sono greche. Il riferimento principale è naturalmente al metodo deduttivo-dimostrativo degli *Elementi* di Euclide, ma è probabile che egli attinse, attraverso la mediazione araba, anche ai *Metrica* di Erone. Dedicata a Domenico Ispano, la *Practica* è un trattato diviso in otto distinzioni, precedute da un'introduzione in cui, fedele alla tradizione euclidea, Fibonacci definisce gli enti geometrici fondamentali, enuncia i principi del I libro degli *Elementi* (postulati, assiomi e diverse proposizioni), e riporta inoltre le unità di misura lineari e di superficie allora in uso a Pisa. Le diverse distinzioni affrontano questioni geometriche che solo in parte possono corrispondere al titolo di "pratica" a causa della sorprendente vastità e qualità degli argomenti. [27]

---

[26] Quando il numero non viene considerato rispetto a un quadrato o una radice, viene semplicemente chiamato numero. Nella risoluzione dei problemi tuttavia questi numeri vengono eguagliati in sei modi, dei quali tre sono semplici, e tre composti. Il primo modo si ha quando il quadrato, che viene detto censo, è eguagliato a delle radici. Il secondo quando il censo è eguagliato a un numero; il terzo quando la radice viene eguagliata a un numero.
B. Boncompagni (a cura di), *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimo terzo*. III voll., vol. I., Il *Liber abaci* secondo la lezione del Codice Magliabechiano C.I, 2616, pp. 406-407.

[27] Come afferma A. Simi, «il livello generale della trattazione è assai elevato: ogni questione è illustrata minuziosamente e giustificata meticolosamente ricorrendo ad argomentazioni teoriche e dottrinali di notevole spessore che, se da un lato mostrano le grandi doti didattiche dell'autore, dall'altro vanno indubbiamente ben oltre le mere esigenze pratiche». Cfr. A. Simi, *L'eredità della* Practica geometriae

Si va infatti dal calcolo delle aree di quadrati e rettangoli (distinzione I), al calcolo di aree di triangoli, quadrilateri (rombi, romboidi e trapezi), quadrangoli concavi, pentagoni e cerchi, corredando l'esposizione con consigli e metodi utili ai geometri misuratori (distinzione III). Le distinzioni II e V trattano le radici quadratiche e cubiche e il calcolo con radicali di grado secondo e terzo. Nella distinzione IV si espongono metodi di divisione di superfici mediante rette. La distinzione VI affronta il calcolo dei volumi dei solidi, compresi i poliedri regolari. La distinzione VII, quella più vicina al genere delle pratiche di geometria, presenta diversi modi per calcolare distanze e altezze sfruttando le proprietà dei triangoli simili e facendo uso del quadrante. La distinzione VIII è dedicata a delle "sottigliezze geometriche" (fra cui problemi su poligoni regolari e su rettangoli inscritti in triangoli equilateri) e alla questione delle soluzioni razionali all'equazione $x^2 + 5 = y^2$. [28]

Gli altri scritti e le ultime vicende

Oltre a queste due opere principali Leonardo scrisse un «liber minoris» di aritmetica, che si direbbe perduto, e un *Libro sopra il 10° di Euclide*, che si ipotizza possa essere confluito nel capitolo XIV della seconda redazione del *Liber abaci*. Oltre a queste due opere di cui non ci sono giunte copie, Leonardo scrisse un trattatello dedicato al cardinale Ranieri Capocci arrivatoci sotto il titolo di *Flos* (*Flos super solutionibus quarundam questionum ad numerum vel ad geometriam vel ad utrumque* pertinentium) in cui Fibonacci espone una sorta di antologia di soluzioni ai problemi postigli da Giovanni da Palermo nel 1226. Fra questi problemi spiccano le soluzioni a equazioni di secondo grado, che riprendono i problemi esposti nella distinzione VIII della *Practica geometriae*. Ci è giunta inoltre una piccola opera nota come *Epistula ad Magistrum Theodorum*, considerata da diversi studiosi la dedica dell'edizione del 1228 del *Liber Abaci*. [29] Tale Maestro Teodoro fu uno degli intellettuali,

---

di Leonardo Pisano nella geometria del basso Medioevo e del primo Rinascimento, «Bollettino di storia delle scienze matematiche», 24 (2004) 1, pp. 9-41, p. 11.

[28] A. Simi, *L'eredità della* Practica geometriae *di Leonardo Pisano nella geometria del basso Medioevo e del primo Rinascimento*, «Bollettino di storia delle scienze matematiche», 24 (2004) 1, pp. 9-41, pp. 9-10.

[29] Dobbiamo la scoperta dell'originale latino del *Liber quadratorum* e dei mss. contenenti il *Flos* e l'*Epistula ad Magistrum Teodorum* agli studi di B. Boncompagni, cfr. B. Boncompagni, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo*, Roma, Tipografia delle Belle Arti, 1854. Pubblicato anche in «Giornale Arcadico di Scienze, Lettere ed Arti», 131-132-133 (1853). Cfr. anche N. Ambrosetti, *L'eredità arabo-islamica nelle scienze e nelle arti del calcolo nell'Europa medievale*, Milano, Edizioni Universitarie di Lettere Economia Diritto, 2008, p. 220.

probabilmente un astrologo, presenti alla corte di Federico II. Egli viene ricordato anche nell'ultima opera di Fibonacci di cui siamo a conoscenza, il *Liber quadratorum*, scritto la cui scarsa diffusione è probabilmente dovuta alla sua complessità, dedicato a Federico II. Si tratta di un testo di natura strettamente teorica dedicato alla teoria dei numeri, tanto da essere ancora considerata l'opera principale in questo campo fra XIV e XVI secolo. Anche in questo scritto si approfondiscono questioni che erano già state poste nella *Practica geometriae*.[30]

Nel 1226 l'imperatore Federico II di Svevia sostò a Pisa durante un viaggio di ritorno in Sicilia. Dal *Flos* e dal *Liber quadratorum* sappiamo che in tale occasione Fibonacci, introdotto da un non meglio identificato Maestro Domenico da Pisa, ebbe modo di discutere di questioni matematiche con il filosofo e matematico di corte Maestro Giovanni da Palermo. Si tratta del secondo evento centrale della vita di Fibonacci, il quale probabilmente rimase in contatto con l'imperatore e con i dignitari della sua corte, fra cui vanno ricordati Michele Scoto[31] e i già citati Maestro Teodoro e Maestro Giovanni.[32] Pare dunque lecito supporre che Fibonacci intraprese le ricerche della maturità anche attraverso lo stimolo e la frequentazione degli ambienti della corte sveva. L'aver instaurato rapporti di corrispondenza e discussione con questi intellettuali può forse essere una spiegazione della prospettiva progressivamente più teorica assunta dagli scritti successivi al *Liber abaci* e alla *Practica geometriae*.

Le notizie che abbiamo intorno alla biografia di Leonardo Pisano sono tuttavia scarse e ricavate in grande parte, come abbiamo visto, dai pochi passi autobiografici contenuti nelle sue opere. Le altre fonti dirette cui è possibile attingere informazioni sulla sua vita sono un atto notarile del 1226 e una delibera del Comune di Pisa

---

[30] R. Franci, *Le matematiche dell'abaco nel Quattrocento*, in *Contributi alla storia delle matematiche, scritti in onore di G. Arrighi*, Accademia Nazionale di Scienze Lettere e Arti, Modena, Mucchi, 1992, pp. 53-74, p. 73.

[31] Figura controversa sulla quale si sono conservate diverse leggende. Ricordato anche da Dante nel canto XX dell'*Inferno*, vv. 115-117, che lo colloca fra gli indovini: «Quell'altro che ne' fianchi è così poco, / Michele Scotto fu, che veramente / de le magiche frode seppe 'l gioco». Tradusse diversi scritti dall'arabo, che aveva appreso dai traduttori toledani, primi fra tutti Avicenna e Averroè. Cfr. N. Ambrosetti, *L'eredità arabo-islamica nelle scienze e nelle arti del calcolo nell'Europa medievale*, Milano, Edizioni Universitarie di Lettere Economia Diritto, 2008, p. 102-103.

[32] Per una rassegna delle fonti intorno a questo episodio, si rimanda ancora al lavoro di B. Boncompagni, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo*, Roma, Tipografia delle Belle Arti, 1854. Pubblicato anche in «Giornale Arcadico di Scienze, Lettere ed Arti», 131-132-133 (1853).

databile tra il 1233 e il 1241.[33] Quest'ultimo documento costituisce il termine *post quem* collocare la data di morte di Leonardo. Non sappiamo infatti nulla della vecchiaia del matematico. Si tratta di una nota inclusa nelle addizioni del 1241 al *Constitutum Pisanum legis et usus* del 1233 che riporta la seguente decisione da parte degli Ufficiali del Comune:[34]

> Considerantes nostre civitatis et civium honorem atque profectum, qui eis, tam per doctrinam quam per sedula obsequia discreti et sapientis viri magistri Leonardi Bigolli, in abbacandis estimationibus et rationibus civitatis eiusque officialium et aliis quoties expedit, conferuntur; ut eidem Leonardo, merito dilectionis et gratiae, atque scientie sue prerogativa, in recompensationem laboris sui quem substinet in audiendis et consolidandis estimationibus et rationibus supradictis, a Comuni et camerariis publicis, de Comuni et pro Comuni, mercede sive salario suo, annis singulis, libre XX denariorum et amisceria consueta dari debeant (ipseque pisano Comuni et eius officialibus in abbacatione de cetero more solito serviat), presenti costitutione firmamus.[35]

È sulla base di questa nota che si sono operate le congetture circa le attività svolte da Fibonacci al di fuori dei due episodi di cui egli stesso ci racconta. Gli Ufficiali riconoscono «merito dilectionis et gratiae, atque scientie sue prerogativa» un salario annuo di venti libre di denari all'ormai maturo matematico. I motivi di tale onore sono da ricercarsi «tam per doctrinam quam per sedula obsequia […] in abbacandis estimationibus et rationibus civitatis eiusque officialium et aliis». Questa dicitura ha permesso agli storici sia di ipotizzare che Leonardo avesse esercitato in vita la professione di insegnante di matematica commerciale sia di supporre che

---

[33] Crf. R. Franci, *Il Liber Abaci di Leonardo Fibonacci 1202-2002*, «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», S. VIII, Vol. 5a (2002) 2, pp. 293-328, p. 293.

[34] Il documento è stato trovato e pubblicato da Francesco Bonaini, cfr. F. Bonaini, *Memoria unica sincrona di Leonardo Fibonacci*, «Giornale storico degli archivi toscani», Firenze, G. P. Vieusseux, 1 (1857), pp. 239-246.

[35] Consideranto l'onore e il progresso per la nostra città e per i nostri cittadini che sono derivati tanto dalla dottrina quanto dalla assidua disciplina del discreto maestro Leonardo Bigollo e che giovarono nelle valutazioni d'abaco e nelle ragioni della città e dei suoi ufficiali e in molte altre occasioni, abbiamo stabilito che a Leonardo, in conseguenza dell'affetto e dell'amicizia, e della scienza sua propria, in ricompensa della fatica che sostenne nell'approvare e consolidare le valutazioni e le ragioni sopraddette, siano dovute dal Comune e dal camerario pubblico, dal Comune e per il Comune, come ricompensa o come salario, ogni anno, XX libre di denari [amisceria consueta?] (e che egli debba servire come di consueto il Comune di Pisa e i suoi ufficiali con le sue abbacazioni). Firmiamo il presente provvedimento.

svolgesse attività di ‘consulenza finanziaria’ per la gestione del bilancio del Comune di Pisa.[36] Anche nel successivo periodo «ipseque pisano Comuni et eius officialibus in abbacatione de cetero more solito serviat» il lemma *abbacatione* non risulta dirimente fra le due ipotesi.

Non è da escludersi infine che egli esercitasse anche l’arte della mercatura alla quale era stato avviato e alla quale da giovane aveva affiancato, come egli stesso racconta, lo studio e la passione per la matematica. Lo stesso soprannome “bigollo” con cui Leonardo era noto presso i suoi concittadini sembra avallare quest’ultima ipotesi.[37] Non è da scartare tuttavia la possibilità che egli abbia svolto tutte queste attività nel corso della sua vita, dal momento che l’attività di ‘consulenza finanziaria’ costituiva verosimilmente un impegno saltuario e che non mancano testimonianze nei secoli successivi di mercanti dediti anche all’insegnamento.[38] In ogni caso, le addizioni del 1241 sono la testimonianza del fatto che Fibonacci era un personaggio noto alla comunità cittadina, felicemente inserito nelle sue strutture e riconosciuto come utile allo sviluppo della vita urbana anche e soprattutto per via delle sue competenze intellettuali.

Figurae indorum

Si può affermare che l’opera di Fibonacci ricopre un’importanza straordinaria in numerose storie diverse. Dal punto di vista della storia della matematica, recenti studi hanno ridimensionato l’immagine di un Fibonacci fondatore dell’algebra. Le ricerche sulle fonti euclidee cui Fibonacci fa riferimento hanno mostrato una sorprendente corrispondenza letterale con una traduzione latina da un codice greco

---

[36] Cfr. F. Melis, *Storia della ragioneria, contributo alla conoscenza e interpretazione delle fonti più significative della storia economica*, Bologna, Zuffi, 1950, p. 591; N. Ferguson, *Ascesa e declino del denaro*, trad. it. P. Canton, Milano, Mondadori, 2009.

[37] ‘Bigollo’ costituisce un soprannome particolarmente interessante. Esso compare anche nell’atto notarile del 1226 di cui sopra (un rogito in cui Leonardo compare come il procuratore del fratello per l’acquisto di alcuni beni immobili) e nell’*incipit* del *Flos*. È assai probabile che si tratti dell’epiteto con cui Fibonacci era noto presso i suoi concittadini. Dopo una iniziale derubricazione dell’aggettivo come equivalente di bigollone, cioè bighellone, in senso ironico o addirittura dispregiativo, oggi prevale la soluzione proposta da G. Milanesi [G. Milanesi, *Documento inedito sconosciuto intorno a Lionardo Fibonacci*, «Giornale arcadico», 52 (1867)] che riconduce l’aggettivo alla voce bigollo/pigollo nel senso di “trottola”, attestato nell’uso toscano dei secoli XIII e XIV. L’aggettivo ‘bigollus’ andrebbe allora a significare per via metaforica nient’altro che “viaggiatore”.
Fonte: http://www.accademiadellacrusca.it/it/lingua-italiana/consulenza-linguistica/domanderisposte/leonardo-pisano-bigollo.

[38] Crf. R. Franci, *Il Liber Abaci di Leonardo Fibonacci 1202-2002*, «Bollettino dell’Unione Matematica Italiana», S. VIII, Vol. 5a (2002) 2, pp. 293-328, p. 301.

degli *Elementi* redatta in Sicilia probabilmente dopo il 1165,[39] testimoniando ancora una volta quanto complesso e mediterraneo sia l'orizzonte in cui Leonardo si muove. Attraverso un'indagine delle fonti arabe cui Leonardo pare avere attinto si è mostrato il profondo debito del matematico pisano anche nei confronti dalla matematica orientale, e in particolar modo nei confronti dei suoi più autorevoli esponenti: al-Khawarizmi e Abu Kamil.[40] Si è concluso quindi che «la grandezza e l'importanza del *Liber abaci* non si misurano […] nell'originalità dei suoi contenuti, ma in una completezza e organicità che, per quanto è noto, non ha uguali nella matematica araba che ha ispirato il suo autore».[41] Bisogna aggiungere che tali capacità espositive e didattiche restano ineguagliate anche nelle opere di matematica occidentale a lui contemporanee.

Un elemento di profonda originalità sia del *Liber abaci* sia della *Practica geometriae* consiste nel fatto che gli strumenti matematici e geometrici che vi sono esposti sono esplicitamente applicati alla realtà mercantile, come abbiamo visto. Si tratta di una caratteristica non secondaria, sicuramente dettata dall'estrazione sociale del matematico pisano, che ritengo abbia giocato un ruolo rilevante nel determinare la notevole diffusione dei testi di Fibonacci all'interno della classe mercantile. È possibile infatti affermare che il *Liber abaci* si colloca all'origine della cosiddetta "cultura dell'abaco", vale a dire della tradizione di matematica commerciale che costituì la preparazione indispensabile per il mercante e il banchiere tardo medievali.[42]

Come già accennato, vale la pena di ricordare che il nome di *Liber abaci* probabilmente non va inteso come titolo autoriale, ma come titolo posto dalla tradizione successiva. Quando vi fa riferimento in altre sue opere, il Pisano indica il suo scritto più celebre come *Liber de numero* o *Liber maior de numero*, titoli in realtà

---

[39] V. Gavagna, *Leonardo Fibonacci*, in *Enciclopedia italiana di scienze, lettere ed arti: Il contributo italiano alla storia del pensiero*, Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana, 2013, appendice VIII. Il riferimento è a Folkerts, in *Leonardo Fibonacci, matematica e società nel Mediterraneo nel secolo XIII*, II voll., 2005, pp. 93-113.

[40] Cfr. J. Høyrup, *Leonardo Fibonacci and Abbaco Culture. A Proposal to Invert the Roles*, «Revue d'histoire des mathématiques», 11 no. 1 (2005), pp. 23-56; N. Ambrosetti, *L'eredità arabo-islamica nelle scienze e nelle arti del calcolo nell'Europa medievale*, Milano, Edizioni Universitarie di Lettere Economia Diritto, 2008, pp. 225-226.

[41] V. Gavagna, *Leonardo Fibonacci*, in *Enciclopedia italiana di scienze, lettere ed arti: Il contributo italiano alla storia del pensiero*, Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana, 2013, appendice VIII.

[42] Cfr. P. D. Napolitani, *Il Rinascimento italiano*, in *La matematica*, IV voll. a cura di C. Bartocci e P. Odifreddi, Torino, Einaudi, 2007-2010, vol. I, *I luoghi e i tempi*, pp. 237-278.

più adeguati alla profonda innovatività matematica e all'impostazione algebrica dello scritto. Fibonacci era infatti prima di tutto un algorista (o algebrista), probabilmente il primo algorista occidentale, e non un abacista. I due sistemi di calcolo (l'algebra e l'abaco) resteranno in uso parallelamente ancora per secoli, tanto da poter parlare di una 'disputa' fra abacisti e algoristi.

L'abaco, strumento di origine antica e già in uso presso la grecità, pur nella diversità delle sue tipologie, si basa sull'utilizzo di oggetti simbolici che significano i numeri. L'algebra al contrario si fonda sull'utilizzo di segni astratti e di algoritmi. La matematica classica, pur nelle sue diverse forme, può essere considerata fedele all'impostazione euclidea, vale a dire un'impostazione mimetica della realtà, in cui la geometria viene posta a fondamento della matematica fino quasi a sovrapporsi ad essa. Nella prospettiva euclidea il numero (e lo stesso può dirsi per gli enti geometrici) è dotato di un forte statuto ontologico e costituisce un ente sia reale sia razionale. La prospettiva classica presuppone una implicita continuità fra gli enti matematico-geometrici e il mondo 'esterno'. Di conseguenza, all'interno di una tale prospettiva, l'avanzare della conoscenza matematica corrisponde e in un certo senso coincide con l'avanzare della conoscenza sul mondo: individuare una nuova proprietà di un ente geometrico significa svelare una nuova proprietà della struttura del mondo.

Non sorprende che una simile concezione della matematica, che interpreta il numero e gli enti geometrici come costituenti sostanziali della realtà, non sia mai riuscita a concepire un sistema di numerazione posizionale. Come già accennato, l'elemento fondamentale per l'invenzione di tale novità è l'introduzione del numero non sostanziale, infondato e vuoto: lo zero. La concezione del numero sviluppata dalla matematica arabo-indiana e diffusa in occidente anche grazie all'opera di Fibonacci è speculare rispetto alla concezione classica, è un radicale ribaltamento di prospettiva, che l'occidente non fu mai in grado di produrre da sé, ma che incontrò sulla sponda opposta del Mediterraneo.

Non credo sia eccessivo sostenere che l'introduzione del sistema di numerazione posizionale fu un evento di portata epocale. Come spesso accade alle innovazioni che successivamente si distribuiscono universalmente, oggi fatichiamo a comprendere cosa potesse significare fare di conto con il sistema di numerazione romano.[43] Portare le «figuras indorum» alla «gens latina» significava dotare l'occidente di una potenza di calcolo prima inimmaginabile e di uno strumento radicalmente nuovo attraverso il quale poter sviluppare la scienza matematica. Le conseguenze di questa innovazione saranno profonde e apriranno orizzonti probabilmente non concepibili né prevedibili dallo stesso Leonardo.

Un ottimo esempio di quanto detto può essere trovato nel procedimento adottato nella *Practica geometriae* per approssimare il valore di π. Nell'affrontare il problema, Fibonacci fa esplicito riferimento ai risultati già raggiunti dalla matematica classica, e in particolar modo da Archimede, a cui Fibonacci attribuisce il merito di aver approssimato il valore di π con $\frac{22}{7}$. Egli tuttavia sceglie consapevolmente di utilizzare un metodo di dimostrazione diverso da quello del «phylosopho» antico:

> OSTENDENDVM est etiam quomodo inventum fuit, lineam circumferentem omnis circulj esse triplam et septimam sui dyametrj ab ARCHIMEDE phylosopho; et fuit illa inventio pulcra et subtilis ualde: quam etiam reiterabo non cum suis numeris, quibus ipse usus fuit demonstrare; cum possibile sit cum paruis numeris ea que ipse usus cum magnis ostendit plenissime demonstrare.[44]

La dimostrazione di Fibonacci, che si fonda sull'approssimazione della circonferenza al perimetro dei poligoni inscritti e circoscritti, muove dal calcolo del perimetro dell'esagono regolare circoscritto al cerchio. A partire da questa misura, Fibonacci calcola il perimetro di altri poligoni circoscritti raddoppiando ogni volta il numero dei lati in modo da ottenere una successione di stime sempre più accurate. Fibonacci arriva ad approssimare la lunghezza della circonferenza con la misura del perimetro del poligono circoscritto di 96 lati, cioè alla quinta iterazione del suo procedimento. Non contento di questa approssimazione, che è per eccesso, Fibonacci ripete il procedimento utilizzando i poligoni inscritti al cerchio. Questa volta, la

[43] Invito il lettore a farne l'esperienza cimentandosi in una semplice operazione come 24+47, ma rappresentandola come XXIV+XLVII.

[44] Bisogna dimostrare in che modo Archimede scoprì che la misura della circonferenza di un cerchio qualsiasi è tre volte e un settimo [ventidue settimi] il suo diametro. E quella scoperta fu bella ed estremamente sottile. Ripeterò la dimostrazione senza usare i numeri cui egli fece ricorso, dal momento che è possibile dimostrare con grande chiarezza con numeri piccoli le cose che egli mostrò con numero grandi.
Leonardo Pisano, *Practica geometriae*, *La «Practica Geometriae» di Leonardo Pisano*, secondo la lezione del codice urbinate n° 292 della Biblioteca Vaticana, a cura di B. Boncompagni, Roma, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1862, f. 54r, p. 88.

misurazione ottenuta per difetto approssima la lunghezza della circonferenza al perimetro del poligono inscritto di 96 lati. Infine, Fibonacci conclude la sua stima della misura della circonferenza calcolando la media delle due approssimazioni ottenute per eccesso e per difetto. Per la rappresentazione grafica della costruzione geometrica con cui il matematico pisano correda la propria dimostrazione, si faccia riferimento alla figura disponibile in coda.

Volgendoci al testo, seguiamo il matematico pisano nella costruzione del poligono circoscritto. Egli muove dalla costruzione del lato dell'esagono circoscritto:

> Recta *.ez.* erit latus exagonj equilaterj et equiangulj continentis circulum *.abgd*.[45]

In seguito, seguendo il suo metodo ricorsivo, egli costruisce i successivi poligoni circoscritti, raddoppiando a ogni iterazione del processo il numero dei lati:

> Deinde diuidatur angulus *.eca.* in duo dimidia à linea *.cf.*, que diuidet arcum *.ab*. super punctum *.y*. Et cum habetur ex demonstrationibus Euclidis, equales angulos à centro super equales periferias consistere; equalis est ergo periferia *.ay*. periferie *.by.*: fuit itaque *.ae*. semilatus exagonicj. Quare et *.af.* erit semilatus dodecagonj continentis circulum *.abgd*. […] Deinde diuidam angulum *.fc.* in duo equa à linea *.ch.*; et erit *ah* semjlatus figure equilatere habentis latera .24., et descripta circa circulum *.abgd*. […] Rursus diuidam angulum *.hca.* in duo equa cum linea *.ci.*; et erit *.ai*. semjlatus equilatere figure habentis latera .48, et descripte circa circulum *.abgd.* […] Et diuidam iterum angulum *.ica*. in duo equa à linea *.ck.*, et erit *.ak.* semilatus figure descripte circa circulum *.abgd.*, habentis latera .96. continentia ipsum circulum.[46]

[45] Sia la retta *.ez.* il lato di un esagono equilatero ed equiangolo contente il cerchio *.abcd.*
Ivi, f. 54r, p. 89.

[46] In seguito si divida l'angolo *.eca*. in due metà per mezzo della linea *.cf.* che divide l'arco *.ab*. nel punto *.y*. E, dal momento che si ottiene dalla dimostrazione di Euclide che uguali angoli al centro insistono su uguali archi, allora l'arco *.ay*. è uguale all'arco *.by*. Dunque *.ae*. è il semilato dell'esagono. Perciò anche *.af.* sarà il semilato del dodecagono contenente il cerchio *.abgd*. […] In seguito dividerò l'angolo *.fc*. in due metà per mezzo della linea *.ch*. *ah* sarà il semilato della figura avente 24 lati circoscritta al cerchio *.abgd*. […] Di nuovo dividerò l'angolo *.hca*. in due metà attraverso la linea *.ci*. E *.ai.* sarà il semilato della figura di 48 lati circoscritta al cerchio *.abgd*. […] E dividerò ancora l'angolo *.ica*. in due parti uguali per mezzo della linea *.ck*. E *.ak*. sarà il semilato della figura circoscritta al cerchio *.abgd.* avente 96 lati e contenente il circolo stesso.
Ivi, ff. 54r-v, p. 89.

A ogni iterazione del processo Fibonacci calcola la misura del lato corrispondente facendo ricorso al teorema di Pitagora, ma sviluppandolo attraverso il calcolo delle proporzioni e quello delle radici che i suoi nuovi metodi gli permettono di eseguire. Una volta arrivato alla misura del lato del poligono circoscritto di 96 lati, egli calcola il rapporto fra il perimetro di tale poligono e il diametro, trovando un valore di $1440/(458+\frac{1}{3})$, che equivale a circa 3.141818182.

> Quare si multiplicauerimus 15 per 96, prouenient .1140. pro summa laterum ipsius figurę; ergo proportio omnium laterum figure supradicte ad dyametrum circulis cadentis in ipsa est sicut 1440 ad $\frac{1}{3}$ 458.[47]

Analogo procedimento è utilizzato per il calcolo del perimetro del poligono inscritto di 96 lati, a partire dalla costruzione dell'esagono:

> Inueniam rursus proportionem circulj ad dyametrum ipsius per latus figure cadentis in ipso habentis latera .96. in hunc modum: ponam in eodem circulo *abgd.* latus exagonici *.ad.*, quod est equale semidyametro *.ca*. […] Et diuidam angulum *.agd*. in duo equa à linea *.gm*. […] et est recta *.am*. latus dodecagoni, cum periferia *.am.* dimidium sit periferie *.amd*. Rursus diuidam angulum *.agm*. in duo equa cum linea *.gno*. […] et linea *.oa.* est latus figure descripte intra circulum *abgd*., habentis latera . 24.: diuidam rursus angulum *.ago*. in duo media à linea *.gq*.; et copulabo *.qa*. […] et est *aq*. latus figure habentis latera 48. Diuidam angulum *.agq*. in duo equa a linea *.grs.*; et copulabo *.sa*., que erit latus figure habentis latera .96. cadentis intra circulum *.abgd*.[48]

---

[47] Perciò se moltiplichiamo 15 per 96, otteniamo 1140 come somma dei lati di questa figura. Dunque il rapporto fra il diametro del cerchio e la somma dei lati della figura circoscritta sopraddetta, che approssima il cerchio per eccesso, è $1440/(458+\frac{1}{3})$.
Ivi, f. 55r, p. 90.

[48] Ancora, calcolerò il rapporto fra il diametro e il cerchio attraverso la figura inscritta avente 96 lati che lo approssima per difetto in questo modo. Porrò nel cerchio *abgd*. il lato *.ad*. dell'esagono [inscritto] che è uguale al semidiametro *.ca*. […] E dividerò l'angolo *.agd*. in due parti uguali per mezzo della linea *.gm*. […] e la retta *.am*. è il lato del dodecagono, poiché l'arco *.am*. è la metà dell'arco *.amd*. Ancora, dividerò l'angolo *.agm*. in due parti uguali per mezzo della linea *.gno*. […] e la linea *.oa*. è il lato della figura inscritta nel cerchio *.abgd*. avente 24 lati. Dividerò ancora una volta *.ago*. in due metà per mezzo della linea *.gq*. e unirò *.qa*. […] e *aq*. è il lato della figura avente 48 lati. Dividerò l'angolo *.agq*. in due parti uguali per mezzo della linea *.grs*., e unirò *.sa*., che sarà il lato della figura avente 96 lati approssimante il cerchio *.abgd*. per difetto.
Ivi, ff. 55r-v. p. 90.

Al termine di questo secondo procedimento Fibonacci calcola il valore di π ottenuto a partire dal poligono inscritto, ottenendo un valore di 1440/(458+$\frac{4}{9}$):

> Et coniuncto radicem inueniam, et habebis $\frac{4}{9}$ 458 pro dyametro *.ga.*: multiplicabo ergo rectam *.sa.* [vale a dire il lato del poligono inscritto con 96 lati] per .96, erunt .1440 pro summa omnium laterum figure descripte intra circulum *.abgd.*: quare est sicut 1440 ad $\frac{4}{9}$ 458.[49]

Arrivato a questo punto, Fibonacci sceglie di calcolare come valore approssimato di π la media dei valori calcolati precedentemente, per eccesso – vale a dire a partire dal poligono circoscritto – e per difetto, a partire dal poligono inscritto. Nell'ultima parte della dimostrazione Fibonacci mostra come questi calcoli siano coerenti con i risultati cui era già giunta la geometria classica:

> Inuenimus per inuestigationem lateris exterioris figure, quod proportio omnium laterum ipsius ad dyametrum circulj est sicut .1440 ad $\frac{1}{5}$ 458; et linea circunferens est minus omnium laterum figure continentis circulum; et est plus omnium laterum figure descripte intra circulum: erit proportio circulj ad suum dyametrum, sicut 1440 ad $\frac{1}{3}$ 458, cum sint medio inter $\frac{4}{9}$ 458 et $\frac{1}{5}$ 458. Sed proportio de 1440 ad $\frac{1}{3}$ 458 est sicut triplum unius numerorum ad triplum alterius, hoc est sicut 4320 ad 1375; quorum proportio in minimis numeris est sicut 864 ad 275: sed proportio de 864 ad 275, minus $\frac{1}{11}$, est sicut $\frac{1}{7}$ 3 ad 1; et quia parua est differentia inter proportionem, quam habet circulus ad suum dyametrum, et proportionem, quam habent $\frac{1}{7}$ 3 ad 1,; ideo posuerunt sapientes antiqui, circulum esse triplum et septimam sui dyametrj; et hoc uolui ostendere.[50]

---

[49] E raccolti i risultati, e avrai 458+$\frac{4}{9}$ per il diametro *.ga*. Moltiplicherò quindi la retta *.sa*. [vale a dire il lato del poligono inscritto di 96 lati] per 96. La somma di tutti i lati della figura inscritta nel cerchio *.abgd*. sarà 1440. Perciò il rapporto fra il diametro e la somma dei lati è come 1440/(458+$\frac{4}{9}$).
Ivi, f. 55v, p. 91.

[50] Abbiamo quindi trovato, attraverso l'indagine sui lati della figura circoscritta, che il rapporto di tutti i lati di questa con il diametro del cerchio è come 1440/(458+$\frac{1}{5}$). E la misura della circonferenza è minore della misura di tutti i lati della figura contenente il cerchio, ed è allo stesso tempo maggiore della misura di tutti i lati della figura inscritta nel cerchio. Il rapporto fra il cerchio e il suo diametro

È interessante notare che, in questo ultimo passaggio, Fibonacci non utilizza il risultato cui era arrivato precedentemente con il calcolo sviluppato a partire dal poligono circoscritto, e ricorre al valore di 1440/(458+$\frac{1}{5}$) invece di 1440/(458+$\frac{1}{3}$). Naturalmente tale svista può essere attribuita a un errore da parte del copista che ha redatto il codice cui Boncompagni fa riferimento nella sua edizione. Tuttavia, la mia impressione è che egli compia volontariamente questo errore onde riuscire con maggiore facilità a convergere sul valore di π che egli attribuisce ad Archimede. In ogni caso, ciò che è più interessante notare è che, in ogni caso – calcolando cioè il valore di π come media dei valori calcolati durante la dimostrazione – si ottengono delle approssimazioni di π più precise di quelle ottenute dai matematici classici.

Le prime cinque cifre decimali di π sono: 3,14159. Utilizzando il valore tradizionale della matematica classica – vale a dire $\frac{22}{7}$ – π viene approssimato a 3.14286 – un valore che approssima quello effettivo fino alla seconda cifra decimale. Il valore calcolato da Fibonacci al termine della sua dimostrazione – vale a dire quello riportato dal codice urbinate n° 292 della Biblioteca Vaticana – è 3,14182. Si tratta di un valore molto più preciso di quello attribuito ad Archimede, dal momento che diverge dai valori effettivi solo dopo la quarta cifra decimale. Ma se si utilizzano per il calcolo della media i due valori effettivamente calcolati da Fibonacci durante la dimostrazione – vale a dire 1440/(458+$\frac{1}{3}$) per il valore di π calcolato per eccesso e 1440/(458+$\frac{4}{9}$) per il valore calcolato per difetto – si ottiene un valore approssimato di 3,14144. Tale valore è addirittura molto vicino all'approssimazione della quarta cifra decimale di π, con una precisione del tutto sconosciuta alla matematica occidentale precedente.

Riassumendo, il tentativo presentato da Leonardo Pisano di quadrare il cerchio nella *Practica geometriae* è un esempio eccellente della novità che la matematica di

---

sarà dunque 1440/(458+$\frac{1}{3}$), dal momento che è medio fra 458+$\frac{4}{9}$ e 458+$\frac{1}{5}$. Ma il rapporto 1440/(458+$\frac{1}{3}$) è come il triplo di ogni numero al triplo degli altri, cioè come il rapporto fra 4320 e 1375, il cui rapporto ai minimi termini è come 864/275. Ma il rapporto 864/275, meno $\frac{1}{11}$, è come il rapporto fra 3+$\frac{1}{7}$ e 1. E poiché la differenza fra il rapporto fra il circolo e il suo diametro e il rapporto fra 3+$\frac{1}{7}$ e 1 è piccolo, per questo motivo gli antichi sapienti stabilirono che il cerchio è tre volte e un settimo il suo diametro. E questo è quanto volevo mostrare.
Ivi, f. 55v, p. 91.

Fibonacci è in grado di portare in occidente. Attraverso una dimostrazione fondata e diretta dal calcolo – non dalla costruzione geometrica, come invece è caratteristico della geometria euclidea – e applicando tecniche e strumenti di calcolo fino ad allora sconosciuti, il matematico pisano riuscì a calcolare il valore di π con una precisione fino ad allora ignota all'occidente latino.

Tuttavia Fibonacci sceglie al termine della sua dimostrazione di presentare come valore approssimato di π da utilizzare nella pratica, «quia parua est differentiam inter proportionem», il valore tradizionale, volendo inserirsi nella consolidata tradizione della matematica classica, ma forse rendendosi anche conto che il valore di π calcolato secondo i nuovi metodi poteva risultare scarsamente maneggevole. Anche in questa scelta operata in nome della praticità dello strumento matematico, in cui è difficile comprendere quanta consapevolezza si trovi di aver raggiunto un risultato più avanzato rispetto alla matematica classica, si trova un'ottima cifra del carattere della matematica fondata da Leonardo Pisano.

Traduttore del nulla

Il ruolo più importante che Fibonacci riveste dunque nell'orizzonte più ampio della storia della civiltà, più che di fondatore dell'algebra, è quello di essere stato uno straordinario *traduttore*. Egli stesso rivendica consapevolmente questo ruolo nell'incipit del *Liber abaci*, affermando di voler comunicare alla *gens latina* il frutto del suo studio sia dei metodi della matematica *indorum* sia di quella euclidea. In questa doppia operazione si trova al tempo stesso una immagine fedele del tempo in cui Leonardo visse e una innovazione rivoluzionaria, destinata a modificarlo profondamente.

Solo all'interno dell'impasto socio-linguistico-economico cui si è fatto riferimento è possibile concepire che un giovane pisano figlio di mercante, dotato di spiccata intelligenza matematica e spirito d'intraprendenza, si sia trovato in Maghreb ad apprendere da maestri arabi nuovi strumenti di calcolo indiani, ad affiancarli alla tradizione euclidea, ad approfondirli «apud Egyptum, Syriam, Greciam, Siciliam et Provinciam» e a organizzarli in un'opera coesa e comprensibile alla sua contemporaneità per la sua portata radicalmente innovativa.

Introdurre il sistema di numerazione decimale e posizionale in questo momento di profondo fermento sia economico sia culturale significò, nel breve periodo, mettere a disposizione del lettore uno strumento di calcolo di affidabilità e potenza fino ad allora ignote, o note solo in circoli estremamente ristretti dell'occidente latino.[51] Nel medio periodo comportò la diffusione su vasta scala di questi dispositivi all'interno della classe mercantile, la quale ne sfruttò appieno le nuove potenzialità e le piegò abilmente alle proprie esigenze.[52] Nel lungo termine, significò inserire nel discorso scientifico occidentale il concetto rivoluzionario di *zero*. Segnalo che si tratta ancora una volta di un lemma derivante dall'arabo [ṣifr], "nulla", "zero", a sua volta calco del sanscrito [śūnyá] "vuoto", "zero".[53] In questo caso il traduttore a noi noto è proprio Fibonacci, che nel primo capitolo del *Liber abaci* riporta (o conia?) il latino 'medievale' *zephyrum*.[54]

Con questa operazione Fibonacci fu il primo a portare in sede di argomentazione razionale il vuoto, il non essere, il nulla, e a farne uso *come se* fosse qualcosa. Questo gesto non è affatto lontano da quello di Cardano che, a più di due secoli di distanza, pur non sapendo cosa fossero i numeri immaginari, preferì fermarsi al *quia* del suo oggetto,[55] e farne uso per trovare una soluzione alle equazioni di terzo grado. In quest'ultima operazione credo si possa di nuovo vedere in controluce l'immagine di quella civiltà in espansione che ha dato i natali a Fibonacci e che avrebbe fatto sentire la propria risonanza ancora per lungo tempo a venire.

---

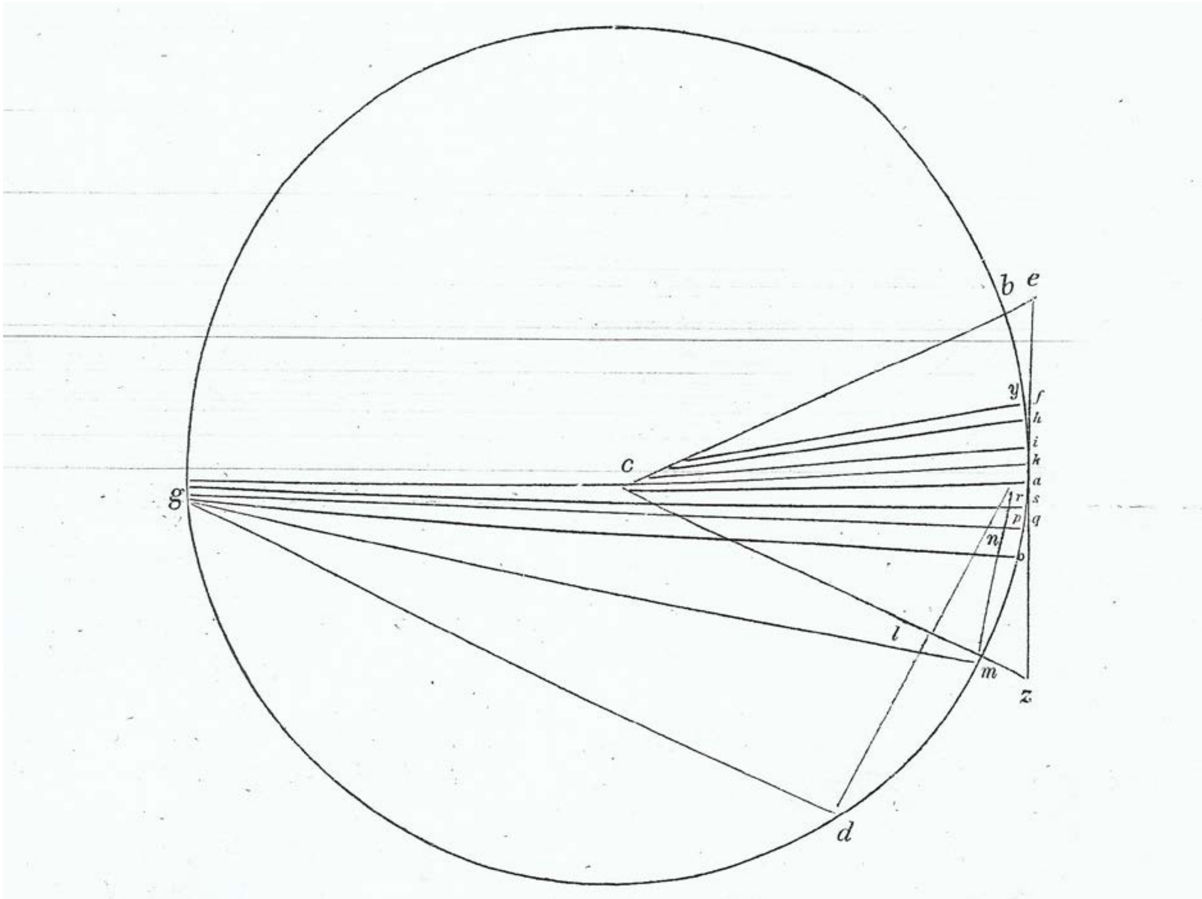
[51] «Anche se il sistema posizionale indiano e l'algebra erano già stati introdotti in Europa alcuni decenni prima tramite le traduzioni latine dei trattati di al-Khawarizmi, è nel testo di Leonardo che viene presentata per la prima volta in Occidente una trattazione dei problemi che si incontrano nell'esercizio del commercio», in R. Franci, *Leonardo Pisano e la trattatistica dell'abaco in Italia nei secoli XIV e XV*, «Bollettino di storia delle scienze matematiche», 23 (2003) 2, pp. 33-54, p. 35.

[52] A partire dal XIV secolo si assiste, nella maggior parte delle città italiane coinvolte nella "rivoluzione commerciale" del tardo medioevo, alla rapida diffusione di scuole specializzate nella matematica mercantile. La frequentazione di queste scuole divenne presto una tappa obbligata nella formazione di un mercante. In tali scuole, significativamente note come "scuole d'abaco", si insegnavano le novità aritmetiche introdotte da Fibonacci. Il divieto, nel 1299, da parte dell'Arte del Cambio di Firenze di utilizzare le cifre arabe è una testimonianza della larga diffusione che tali strumenti avevano raggiunto al volgere del secolo.

[53] La scarsità di documentazione rende particolarmente ardua la datazione della prima comparsa di India dello zero. Ifrah la fa risalire alla metà del V secolo d.C., epoca alla quale risale il documento più antico che ne riporta l'uso. Cfr. G. Ifrah, *Histoire universelle des chiffres*, Paris, Robert Laffont, 1981, trad. it. G. Ifrah, *Storia universale dei numeri*, trad. it. A. P. Silvestri, Milano, Mondadori, 1983.

[54] Cfr. E. Banfi, *Lingue d'Italia fuori d'Italia. Europa, Mediterraneo e Levante dal Medioevo all'età moderna*, Bologna, Il Mulino, 2014, pp. 66-67.

[55] Eppure questo avviso era servito ad ammonire l'uomo a contentarsi e ad arrestare l'analisi: cfr. il celeberrimo *Paradiso*, III, 37-39: «state contenti, umana gente, al *quia* / ché, se potuto aveste veder tutto, / mestier non era parturir Maria».



[56]

I libri

B. Boncompagni, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo,* Roma, Tipografia delle Belle Arti, 1854. Pubblicato anche in «Giornale Arcadico di Scienze, Lettere ed Arti», 131-132-133 (1853).

B. Boncompagni, *Tre scritti inediti di Leonardo Pisano*, Tipografia Galileana, Firenze, 1854.

B. Boncompagni (a cura di), *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimo terzo*. III voll.; vol. I. Il *Liber abaci* secondo la lezione del Codice Magliabechiano C.I, 2616; vol. II. La *Practica Geometriae* secondo la lezione del Codice Urbinate n. 292 della Biblioteca Vaticana; vol. III *Opuscoli* secondo la lezione del Codice della Biblioteca Ambrosiana di Milano contrassegnato E.75 Parte Superiore. I voll. II e III

---

[56] Costruzione dalla *Practica geometriae* per l'approssimazione del rapporto fra diametro e cerchio.

sono pubblicati in un unico tomo intitolato *Leonardi Pisani Practica geometriae ed opuscoli*, Roma, Tipografia delle Scienze Matematiche, 1857-1862.

F. Bonaini, *Memoria unica sincrona di Leonardo Fibonacci*, «Giornale storico degli archivi toscani», Firenze, G. P. Vieusseux, 1 (1857), pp. 239-246.

G. Milanesi, *Documento inedito sconosciuto intorno a Lionardo Fibonacci*, «Giornale arcadico», 52 (1867).

R. E. Grimm, «The Autobiography of Leonardo Pisano», *Fibonacci quarterly*, 11 (1973), pp. 99-104.

L. Pisano, *E' chasi della Terza Parte del XV capitolo del "Liber Abaci" nella trascelta a cura di Maestro Benedetto secondo la lezione del codice L.IV.21 (sec. XV) della Biblioteca Comunale di Siena*, a cura di L. Salomone, «Quaderni del centro studi della matematica medioevale», 10 (1984).

R. Franci, *Il Liber Abaci di Leonardo Fibonacci 1202-2002*, «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», S. VIII, Vol. 5a (2002) 2, pp. 293-328.

E. Giusti, R. Petti (a cura di), *Un ponte sul Mediterraneo: Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente*, Firenze: Polistampa, 2002.

A. Allard, *Les versions de 1202 et 1228 du Liber Abaci*, presentato a Leonardo Fibonacci, Matematica e società nel Mediterraneo del XIII secolo. Convegno internazionale di studi, Pisa-Firenze, 2002.

L. E. Sigler, *Fibonacci's Liber abaci. A translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, New York, Springer, 2003.

R. Franci, *Leonardo Pisano e la trattatistica dell'abaco in Italia nei secoli XIV e XV*, «Bollettino di storia delle scienze matematiche», 23 (2003) 2, pp. 33-54.

A. Simi, *L'eredità della* Practica geometriae *di Leonardo Pisano nella geometria del basso Medioevo e del primo Rinascimento*, «Bollettino di storia delle scienze matematiche», 24 (2004) 1, pp. 9-41.

S. Cuomo, «Fibonacci's Liber Abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's book of Calculation by Laurence E. Sigler reviewed», *Aestimatio*, I (2004), pp. 19-27.

J. Høyrup, *Leonardo Fibonacci and Abbaco Culture. A Proposal to Invert the Roles*, «Revue d'histoire des mathématiques», 11 (2005) 1, pp. 23-56.

Leonardo Fibonacci. Matematica e società nel Mediterraneo nel secolo XIII, «Bollettino di storia delle scienze matematiche», (2005) 1-2.

Elisabetta Ulivi, *Su Leonardo Fibonacci e sui maestri d'abaco pisani dei secoli XIII-XV*, «Bollettino di storia delle scienze matematiche», 31 (2011) 2.

K. Devlin, *The Man of Numbers: Fibonacci's Arithmetic Revolution*, London, Bloomsbury, 2011.

V. Gavagna, *Leonardo Fibonacci*, in *Enciclopedia italiana di scienze, lettere ed arti: Il contributo italiano alla storia del pensiero*, Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana, 2013, appendice VIII.