

EUR 1089 . d

REPRINT

EUROPÄISCHE ATOMGEMEINSCHAFT — EURATOM

LÖSUNG DER INSTATIONÄREN
WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG MIT ZEITABHÄNGIGER
UMGEBUNGSTEMPERATUR UND ZEITLICH
VERÄNDERLICHER UND RÄUMLICH UNGLEICHMÄSSIG
VERTEILTER WÄRMEQUELLE

von

R. PALINSKI

1965



Gemeinsame Kernforschungsstelle
Forschungsanstalt Ispra — Italien
Hauptabteilung Reaktorphysik

Sonderdruck aus
NUKLEONIK
6. Band, 6. Heft — 1964

HINWEIS

Das vorliegende Dokument ist im Rahmen des Forschungsprogramms der Kommission der Europäischen Atomgemeinschaft (EURATOM) ausgearbeitet worden.

Es wird darauf hingewiesen, daß die Euratomkommission, ihre Vertragspartner und alle in deren Namen handelnden Personen :

- 1° — keine Gewähr dafür übernehmen, daß die in diesem Dokument enthaltenen Informationen richtig und vollständig sind, oder daß die Verwendung der in diesem Dokument enthaltenen Informationen, oder der in diesem Dokument beschriebenen technischen Anordnungen, Methoden und Verfahren nicht gegen gewerbliche Schutzrechte verstößt;
- 2° — keine Haftung für die Schäden übernehmen, die infolge der Verwendung der in diesem Dokument enthaltenen Informationen oder der in diesem Dokument beschriebenen technischen Anordnungen, Methoden oder Verfahren entstehen könnten.

This reprint is intended for restricted distribution only. It reproduces, by kind permission of the publisher, an article from "NUKLEONIK", 6. Band, 6. Heft - 1964, S. 289-303. For further copies please apply to Springer-Verlag, 1 Berlin 31, Heidelberger Platz 3 (Deutschland).

Dieser Sonderdruck ist für eine beschränkte Verteilung bestimmt. Die Wiedergabe des vorliegenden in „NUKLEONIK“, 6. Band, 6. Heft - 1964, S. 289-303 erschienenen Aufsatzes erfolgt mit freundlicher Genehmigung des Herausgebers. Bestellungen weiterer Exemplare sind an Springer-Verlag, 1 Berlin 31, Heidelberger Platz 3 (Deutschland) zu richten.

Ce tiré-à-part est exclusivement destiné à une diffusion restreinte. Il reprend, avec l'aimable autorisation de l'éditeur, un article publié dans « NUKLEONIK », 6. Band, 6. Heft - 1964, S. 289-303. Tout autre exemplaire de cet article doit être demandé à Springer-Verlag, 1 Berlin 31, Heidelberger Platz 3 (Deutschland).

Questo estratto è destinato esclusivamente ad una diffusione limitata. Esso è stato riprodotto, per gentile concessione dell'Editore, da « NUKLEONIK », 6. Band, 6. Heft - 1964, S. 289-303. Ulteriori copie dell'articolo debbono essere richieste a Springer-Verlag, 1 Berlin 31, Heidelberger Platz 3 (Deutschland).

Deze overdruk is slechts voor beperkte verspreiding bestemd. Het artikel is met welwillende toestemming van de uitgever overgenomen uit „NUKLEONIK“, 6. Band, 6. Heft - 1964, S. 289-303. Meer exemplaren kunnen besteld worden bij Springer-Verlag, 1 Berlin 31, Heidelberger Platz 3 (Deutschland).

EUR 1089 . d

REPRINT

LÖSUNG DER INSTATIONÄREN WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG MIT ZEITABHÄNGIGER UMGEBUNGSTEMPERATUR UND ZEITLICH VERÄNDERLICHER UND RÄUMLICH UNGLEICHMÄSSIG VERTEILTER WÄRMEQUELLE von R. PALINSKI

Europäische Atomgemeinschaft - EURATOM
Gemeinsame Kernforschungsstelle
Forschungsanstalt Ispra (Italien)
Hauptabteilung Reaktorphysik
Sonderdruck aus „Nukleonik“
6. Band, 6. Heft - 1964, S. 289-303.

Die Wärmeleitungsgleichung mit zeitlich variabler Umgebungstemperatur sowie mit einer raum- und zeitabhängigen Quellenverteilung wird der Laplace-Transformation bezüglich der Zeit unterworfen und die Lösung im Unterbereich angegeben. Es handelt sich um Fälle, in denen die klassische Methode der Eigenfunktionen versagt. Diffusionsprobleme, die mathematisch einer Gleichung desselben Types genügen, können genau so behandelt werden.

→

EUR 1089 . d

REPRINT

SOLUTION OF THE NONSTATIONARY THERMAL CONDUCTION EQUATION WITH TIME-DEPENDENT AMBIENT TEMPERATURE AND A TEMPORALLY VARIABLE AND SPATIALLY UNEQUALLY DISPOSED HEAT SOURCE by R. PALINSKI

European Atomic Energy Community - EURATOM
Joint Nuclear Research Center
Ispra Establishment (Italy)
Reactor Physics Department
Reprinted from "Nukleonik"
6. Band, 6. Heft - 1964, pp. 289-303.

Fourier's equation of heat conduction with time dependent ambient temperature and space and time dependent source distribution is treated by a Laplace transformation with respect to time and a solution is given in the complex plane. In the given problems the classical method of eigen-functions is not possible. Diffusion problems which are described by the same type of equation may be treated in the same manner.

→

EUR 1089 . d

REPRINT

SOLUTION OF THE NONSTATIONARY THERMAL CONDUCTION EQUATION WITH TIME-DEPENDENT AMBIENT TEMPERATURE AND A TEMPORALLY VARIABLE AND SPATIALLY UNEQUALLY DISPOSED HEAT SOURCE by R. PALINSKI

European Atomic Energy Community - EURATOM
Joint Nuclear Research Center
Ispra Establishment (Italy)
Reactor Physics Department
Reprinted from "Nukleonik"
6. Band, 6. Heft - 1964, pp. 289-303.

Fourier's equation of heat conduction with time dependent ambient temperature and space and time dependent source distribution is treated by a Laplace transformation with respect to time and a solution is given in the complex plane. In the given problems the classical method of eigen-functions is not possible. Diffusion problems which are described by the same type of equation may be treated in the same manner.

→

EUR 1089 . d

REPRINT

SOLUTION OF THE NONSTATIONARY THERMAL CONDUCTION EQUATION WITH TIME-DEPENDENT AMBIENT TEMPERATURE AND A TEMPORALLY VARIABLE AND SPATIALLY UNEQUALLY DISPOSED HEAT SOURCE by R. PALINSKI

European Atomic Energy Community - EURATOM
Joint Nuclear Research Center
Ispra Establishment (Italy)
Reactor Physics Department
Reprinted from "Nukleonik"
6. Band, 6. Heft - 1964, pp. 289-303.

Fourier's equation of heat conduction with time dependent ambient temperature and space and time dependent source distribution is treated by a Laplace transformation with respect to time and a solution is given in the complex plane. In the given problems the classical method of eigen-functions is not possible. Diffusion problems which are described by the same type of equation may be treated in the same manner.

→

Die Lösung in der Bildebene wird sodann nur für gewisse interessierende Temperaturen an diskreten Stellen der Ortskoordinate betrachtet, und ferner — für die Mitteltemperatur — die Ortsabhängigkeit durch Mittelbildung eliminiert. Beim Übergang in den Oberbereich werden gewisse Temperaturfunktionen eingeführt, die einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen nach der Zeit genügen. Außerdem werden einige Konstanten als Parameter benutzt, die die Anwendung und die Übersichtlichkeit der Methode wesentlich erleichtern.

Auf diese Weise gewinnt man die zeitabhängige Lösung für jede der erwähnten Stellen als Lösung je eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, wobei die Genauigkeit durch Mitnahme einer hinreichenden Anzahl von Gleichungen beliebig gesteigert werden kann. Das Problem ist somit auch auf einem Analogrechner behandelbar.

Es besteht eine gewisse Analogie zu einem Differenzenverfahren bezüglich der Ortskoordinate, doch liegt der Vorteil dieser Methode darin, daß die Genauigkeit nicht von der Wahl einer Schrittweite abhängt.

The solution in the subsidiary domain is then considered only for some interesting temperatures at discrete values of the spatial coordinate, and moreover — for the mean temperature — the space dependency is eliminated by an averaging process. When going back to the real domain certain temperature functions are introduced which satisfy a system of ordinary differential equations with respect to time. Furthermore some constants are introduced as parameters which facilitate the use and the clearness of the method.

In this way the time-dependent solution for each of the mentioned discrete positions is obtained as a solution of a system of ordinary differential equations, where the accuracy can be improved arbitrarily by increasing the number of equations. The problem becomes thus treatable also by means of an analogue computer.

There is a certain analogy with the method of finite differences with respect to space. However, the advantage of this method lies in the fact that the accuracy does not depend on the choice of lattice stepwidth.

The solution in the subsidiary domain is then considered only for some interesting temperatures at discrete values of the spatial coordinate, and moreover — for the mean temperature — the space dependency is eliminated by an averaging process. When going back to the real domain certain temperature functions are introduced which satisfy a system of ordinary differential equations with respect to time. Furthermore some constants are introduced as parameters which facilitate the use and the clearness of the method.

In this way the time-dependent solution for each of the mentioned discrete positions is obtained as a solution of a system of ordinary differential equations, where the accuracy can be improved arbitrarily by increasing the number of equations. The problem becomes thus treatable also by means of an analogue computer.

There is a certain analogy with the method of finite differences with respect to space. However, the advantage of this method lies in the fact that the accuracy does not depend on the choice of lattice stepwidth.

The solution in the subsidiary domain is then considered only for some interesting temperatures at discrete values of the spatial coordinate, and moreover — for the mean temperature — the space dependency is eliminated by an averaging process. When going back to the real domain certain temperature functions are introduced which satisfy a system of ordinary differential equations with respect to time. Furthermore some constants are introduced as parameters which facilitate the use and the clearness of the method.

In this way the time-dependent solution for each of the mentioned discrete positions is obtained as a solution of a system of ordinary differential equations, where the accuracy can be improved arbitrarily by increasing the number of equations. The problem becomes thus treatable also by means of an analogue computer.

There is a certain analogy with the method of finite differences with respect to space. However, the advantage of this method lies in the fact that the accuracy does not depend on the choice of lattice stepwidth.

Lösung der instationären Wärmeleitungsgleichung mit zeitabhängiger Umgebungstemperatur und zeitlich veränderlicher und räumlich ungleichmäßig verteilter Wärmequelle

Von R. PALINSKI

Aus der gemeinsamen Kernforschungsstelle EURATOM, Ispra/Italien

Mit 10 Textabbildungen

(Eingegangen am 27. Mai 1964)

Zusammenfassung. Die Wärmeleitungsgleichung mit zeitlich variabler Umgebungstemperatur sowie mit einer raum- und zeitabhängigen Quellenverteilung wird der Laplace-Transformation bezüglich der Zeit unterworfen und die Lösung im Unterbereich angegeben. Es handelt sich um Fälle, in denen die klassische Methode der Eigenfunktionen versagt. Diffusionsprobleme, die mathematisch einer Gleichung desselben Types genügen, können genau so behandelt werden.

Die Lösung in der Bildebene wird sodann nur für gewisse interessierende Temperaturen an diskreten Stellen der Ortskoordinate betrachtet, und ferner — für die Mitteltemperatur — die Ortsabhängigkeit durch Mittelbildung eliminiert. Beim Übergang in den Oberbereich werden gewisse Temperaturfunktionen eingeführt, die einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen nach der Zeit genügen. Außerdem werden einige Konstanten als Parameter benutzt, die die Anwendung und die Übersichtlichkeit der Methode wesentlich erleichtern.

Auf diese Weise gewinnt man die zeitabhängige Lösung für jede der erwähnten Stellen als Lösung je eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, wobei die Genauigkeit durch Mitnahme einer hinreichenden Anzahl von Gleichungen beliebig gesteigert werden kann. Das Problem ist somit auch auf einem Analogrechner behandelbar.

Es besteht eine gewisse Analogie zu einem Differenzenverfahren bezüglich der Ortskoordinate, doch liegt der Vorteil dieser Methode darin, daß die Genauigkeit nicht von der Wahl einer Schrittweite abhängt.

Summary. FOURIER'S equation of heat conduction with time dependent ambient temperature and space and time dependent source distribution is treated by a Laplace transformation with respect to time and a solution is given in the complex plane. In the given problems the classical method of eigen-functions is not possible. Diffusion problems which are described by the same type of equation may be treated in the same manner.

The solution in the subsidiary domain is then considered only for some interesting temperatures at discrete values of the spatial coordinate, and moreover — for the mean temperature — the space dependency is eliminated by an averaging process. When going back to the real domain certain temperature functions are introduced which satisfy a system of ordinary differential equations with respect to time. Furthermore some constants are introduced as parameters which facilitate the use and the clearness of the method.

In this way the time-dependent solution for each of the mentioned discrete positions is obtained as a solution of a system of ordinary differential equations, where the accuracy can be improved arbitrarily by increasing the number of equations. The problem becomes thus treatable also by means of an analogue computer.

There is a certain analogy with the method of finite differences with respect to space. However, the advantage of this method lies in the fact that the accuracy does not depend on the choice of lattice stepwidth.

Einleitung

Die Lösung nach der klassischen Methode der Eigenfunktionen der instationären Diffusions- bzw. Wärmeleitungsprobleme, die durch eine partielle Differentialgleichung von parabolischem Typ beschrieben werden, setzt den Wert des Flusses bzw. der Temperatur in der „Umgebung“ (θ_R — s. Text) als konstant voraus.

Nur bei dieser Annahme gelingt ein Separationsansatz. In den meisten Problemen der Reaktordynamik ist die erwähnte Annahme jedoch nicht zulässig; besonders bei schnellen Vorgängen ist die Brauchbarkeit der Ergebnisse in Frage gestellt. Bei schnellen Reaktoren und bei solchen, die einen relativ großen positiven Temperaturkoeffizienten der Reaktivität aufweisen, interessiert aus Sicherheitsgründen bei der Auslegung der Regelung und der Verriegelungen sowie z. B. auch bei Stabilitätsuntersuchungen eine möglichst genaue Erfassung des instationären Anteils des Wärmeflusses. Der bisher gebrauchte Ausdruck für den Wärmefluß ist nur der „stationäre Anteil“, d. h. daß die Wärmequelle sowie die Temperatur erst nach der Lösung des stationären Problems als instationär betrachtet werden. Eine andere Methode besteht in der sog. Schichtenaufteilung, wobei es sich um eine Rechnung mit „stationärem Anteil“ innerhalb der einzelnen Schichten mit willkürlich gewählter Dicke handelt.

Die partielle Differentialgleichung der instationären Diffusions- bzw. Wärmeleitungsprobleme wird hier durch ein System von unendlich vielen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung ersetzt. Bei der Lösung des Problems wird die Umgebungstemperatur als Funktion der Zeit und die Wärmequelle (Neutronenfluß) als Funktion von Raum und Zeit betrachtet. Alle Operationen werden im Unterbereich durchgeführt. Anschließend wird die Rücktransformation angegeben.

In dieser Arbeit wird ein Wärmeleitungsproblem in Zylindergeometrie behandelt, da der physikalische Vorgang der Wärmeleitung anschaulicher ist als der der Neutronendiffusion. Bei Reaktorbrandstäben tritt die gewählte Geometrie am häufigsten auf. Einer Anwendung der Methode auf andere Geometrien, z. B. mit kartesischem oder sphärischem Koordinatensystem, und außerdem auf Diffusionsprobleme stehen keine prinzipiellen Schwierigkeiten im Wege.

1. Der Fall nur zeitlich veränderlicher, aber räumlich konstanter Wärmequelle

1.1. Lösung des Problems in der komplexen Bildebene nach Laplace-Transformation

Die Temperaturverteilung $\theta(\vec{r}, t)$ in einem Brennelement wird im allgemeinsten Fall durch die instationäre Fourier-Wärmeleitungsgleichung

beschrieben.

$$\gamma_u c_u \frac{\partial \theta(\vec{r}, t)}{\partial t} = \text{div} [\lambda_u \text{grad } \theta(\vec{r}, t)] + W(t) \quad (1)$$

Wir behandeln das Problem in Zylinderkoordinaten, da diese der Geometrie nuklearer Brennelemente meist am besten angepaßt sind. Mit $\lambda_u = \text{const}$ und unter Vernachlässigung des Wärmeflusses in Achsenrichtung, d. h. $\frac{\partial \theta}{\partial z} \ll \frac{\partial \theta}{\partial r}$, gilt:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} + \frac{W(t)}{\lambda_u}, \quad (2)$$

wobei $a^2 = \frac{\lambda_u}{\gamma_u c_u} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$ Temperaturleitfähigkeit,
 $\theta [^\circ\text{C}]$ Temperatur,
 $t [\text{s}]$ Zeit,
 $r [\text{m}]$ Zylinderkoordinate,
 $W \left[\frac{\text{kcal}}{\text{m}^3 \text{s}} \right]$ Wärmequelle (pro Volumeneinheit),
 $\lambda_u \left[\frac{\text{kcal}}{\text{ms } ^\circ\text{C}} \right]$ Wärmeleitfähigkeit,
 $\gamma_u \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$ spezifisches Gewicht,
 $c_u \left[\frac{\text{kcal}}{\text{kg } ^\circ\text{C}} \right]$ spezifische Wärme.

Die Laplace-transformierte Gl. (2) mit $\theta(r, 0) = 0$ lautet [die Laplace-Transformierte von $\theta(r, t)$ bzw. $W(t)$ wird mit $\Theta(r, s)$ bzw. $\tilde{W}(s)$ bezeichnet]:

$$\frac{s}{a^2} \Theta(r, s) = \frac{\partial^2 \Theta(r, s)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta(r, s)}{\partial r} + \frac{\tilde{W}(s)}{\lambda_u}. \quad (3)$$

Um die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Theta(r, s)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta(r, s)}{\partial r} - \frac{s}{a^2} \Theta(r, s) = 0 \quad (4)$$

zu bestimmen, wird (4) der Transformation

$$\sigma = \frac{r}{a} \sqrt{s}$$

unterworfen; dabei geht die Differentialgleichung (4) in die bekannte Differentialgleichung der modifizierten Bessel-Funktion über, d. h. in

$$\frac{d^2 \Theta(\sigma)}{d\sigma^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{d\Theta(\sigma)}{d\sigma} - \Theta(\sigma) = 0. \quad (5)$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (3) lautet dann:

$$\Theta(r, s) = \Phi_1(s) I_0\left(\frac{r}{a} \sqrt{s}\right) + \Phi_2(s) K_0\left(\frac{r}{a} \sqrt{s}\right) + \left. \begin{aligned} &+ \frac{\tilde{W}(s)}{s} \frac{1}{\gamma_u c_u} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Für die im folgenden benutzten Bessel-Funktionen gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 J_0(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} & I_0(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \\
 J_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!} & I_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!} \\
 J_0(iz) &= I_0(z) & I_0(iz) &= J_0(z) \\
 J_1(iz) &= iI_1(z) & I_1(iz) &= iJ_1(z) \\
 \frac{dJ_0(z)}{dz} &= -J_1(z) & \frac{dI_0(z)}{dz} &= I_1(z) \\
 \frac{dJ_1(z)}{dz} &= J_0(z) - \frac{J_1(z)}{z} & \frac{dI_1(z)}{dz} &= I_0(z) - \frac{I_1(z)}{z}
 \end{aligned}$$

Aus den beiden Randbedingungen des Problems werden $\Phi_1(s)$ und $\Phi_2(s)$ bestimmt. Aus der Randbedingung

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

folgt, daß $\Phi_2(s) = 0$.

Bezeichnet man die Oberflächentemperatur des Brennstabes mit $\Theta_{r_0}(s)$, d.h. $\Theta(r, s)|_{r=r_0} = \Theta_{r_0}(s)$, so bekommt man aus (6) die gesuchte Funktion $\Phi_1(s)$:

$$\Phi_1(s) = \frac{1}{I_0\left(\frac{r_0}{a} \sqrt{s}\right)} \left[\Theta_{r_0}(s) - \frac{\tilde{W}(s)}{s \gamma_u c_u} \right]$$

mit r_0 [m]-Brennstabhalbmesser.

Die Temperaturänderung im instationären Betrieb kann in der Bildebene wie folgt geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{W}(s)}{\gamma_u c_u} &= \frac{s}{I_0\left(\frac{r_0}{a} \sqrt{s}\right) - I_0\left(\frac{r}{a} \sqrt{s}\right)} \times \\ &\times \left[I_0\left(\frac{r_0}{a} \sqrt{s}\right) \Theta(r, s) - I_0\left(\frac{r}{a} \sqrt{s}\right) \Theta_{r_0}(s) \right]. \end{aligned} \right\} (7)$$

Aus der Randbedingung zweiter Art

$$\left. \frac{\partial \Theta(r, s)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = E [\Theta_{r_0}(s) - \Theta_R(s)] \quad (8)$$

mit

$$E = - \frac{1}{r_0 \lambda_u} \frac{1}{\lambda_h \ln \frac{r_0 + \delta_h}{r_0}} + \frac{1}{\lambda_z \ln \frac{r_0 + \delta_h + \delta_z}{r_0 + \delta_h}} \left[\frac{1}{\text{m}} \right]$$

- $\lambda_h \left[\frac{\text{kcal}}{\text{ms}^\circ\text{C}} \right]$ = Wärmeleitfähigkeit der Gasfüllung zwischen Brennstoff und Hülle,
- $\lambda_z \left[\frac{\text{kcal}}{\text{ms}^\circ\text{C}} \right]$ = Wärmeleitfähigkeit der Brennstabhülle,
- δ_h [m] = Dicke des Gasspaltes,
- δ_z [m] = Wanddicke des Hüllrohres,
- Θ_R [°C] = Randtemperatur = Umgebungstemperatur (Rand des Problems)

und (7) ergibt sich die Oberflächentemperatur des Brennstabes:

$$\Theta_{r_0}(s) = \frac{\frac{\sqrt{s}}{s a \gamma_u c_u} I_1\left(\frac{r_0}{a} \sqrt{s}\right) \tilde{W}(s) - E I_0\left(\frac{r_0}{a} \sqrt{s}\right) \Theta_R(s)}{\frac{\sqrt{s}}{a} I_1\left(\frac{r_0}{a} \sqrt{s}\right) - E I_0\left(\frac{r_0}{a} \sqrt{s}\right)} \quad (9)$$

Der angegebene E -Faktor gilt für die in Abb. 1 dargestellte Anordnung.

Als θ_R wurde die äußere Oberflächentemperatur der Brennstabhülle gewählt.

Soll z. B. die Speicherung der Wärme in der Brennstabhülle berücksichtigt werden, so wird man θ_R als die innere Oberflächentemperatur der Hülle betrachten.

In diesem Falle hat der E -Faktor die einfachere Form

$$\bar{E} = - \frac{1}{r_0 \lambda_u} \frac{1}{\frac{1}{\lambda_h} \ln \frac{r_0 + \delta_h}{r_0}}$$

Benutzt man den exakten Ausdruck der mittleren Temperatur des Brennstoffes

$$\Theta_u(s) = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} r \Theta(r, s) dr. \quad (10)$$

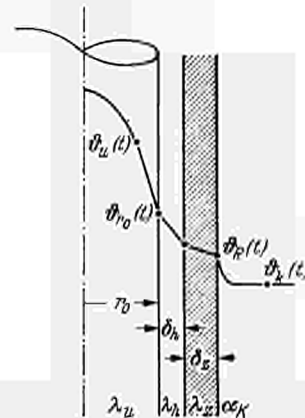


Abb. 1. Längsschnitt eines Reaktor-Kühlmantels

so ergibt sich aus (7):

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{r_0}(s) &= \frac{\frac{r_0}{a} \sqrt{s} I_0\left(\frac{r_0}{a} \sqrt{s}\right)}{2 I_1\left(\frac{r_0}{a} \sqrt{s}\right)} \times \\ &\times \Theta_u(s) + \left[1 - \frac{\frac{r_0}{a} \sqrt{s} I_0\left(\frac{r_0}{a} \sqrt{s}\right)}{2 I_1\left(\frac{r_0}{a} \sqrt{s}\right)} \right] \frac{\tilde{W}(s)}{s \gamma_u c_u} \end{aligned} \right\} (11)$$

Aus (9) und (11) bekommt man

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{W}(s)}{\gamma_u c_u} &= \frac{r_0 s \left[s I_1\left(\frac{r_0}{a} \sqrt{s}\right) - E a \sqrt{s} I_0\left(\frac{r_0}{a} \sqrt{s}\right) \right] \times \\ &\times \Theta_u(s) + 2 a^2 E s I_1\left(\frac{r_0}{a} \sqrt{s}\right) \Theta_R(s)}{(r_0 s + 2 a^2 E) I_1\left(\frac{r_0}{a} \sqrt{s}\right) - E r_0 a \sqrt{s} I_0\left(\frac{r_0}{a} \sqrt{s}\right)} \end{aligned} \right\} (12)$$

Nach weiterer Umformung folgt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{W}(s)}{\gamma_u c_u} &= s \Theta_u(s) + \\ &+ \frac{2 E a^2 s I_1\left(\frac{r_0}{a} \sqrt{s}\right)}{E r_0 a \sqrt{s} I_0\left(\frac{r_0}{a} \sqrt{s}\right) - (r_0 s + 2 E a^2) I_1\left(\frac{r_0}{a} \sqrt{s}\right)} \times \\ &\times [\Theta_u(s) - \Theta_R(s)]. \end{aligned} \right\} (13)$$

Es werden nun zwei Konstanten als Abkürzung eingeführt, nämlich:

$$p = -\frac{4}{E r_0} [-],$$

$$\nu = \frac{r_0^2}{a^2} [s].$$

Die Einführung dieser beiden Konstanten ist entscheidend für die Übersichtlichkeit der weiteren Operationen; sie sind als Parameter des Problems zu betrachten. Die Gl. (13) kann damit geschrieben werden:

$$\frac{\tilde{W}(s)}{\gamma_u c_u} = s \Theta_u(s) + \varphi(s) [\Theta_u(s) - \Theta_R(s)], \quad (14)$$

wobei

$$\varphi(s) = \frac{2s I_1(\sqrt{\nu s})}{\sqrt{\nu s} I_0(\sqrt{\nu s}) - 2 \left(1 - \frac{p}{8} \nu s\right) I_1(\sqrt{\nu s})}. \quad (15)$$

Damit ist es gelungen, die partielle Differentialgleichung (1) durch die gewöhnliche Gl. (14) in der Bildebene zu ersetzen. Die physikalische Bedeutung der einzelnen Terme ist nach wie vor erhalten geblieben, nämlich:

$$W(\vec{r}, t) \rightarrow \tilde{W}(s) \quad \text{Wärmequelle,}$$

$$\gamma_u c_u \frac{\partial \theta(\vec{r}, t)}{\partial t} \rightarrow \gamma_u c_u s \Theta_u(s) \quad \text{Wärmespeicherung,}$$

$$\text{div} [\lambda_u \text{grad } \theta(\vec{r}, t)] \rightarrow \gamma_u c_u \varphi(s) [\Theta_u(s) - \Theta_R(s)]$$

Wärmefluß.

Im Ausdruck (14) tritt nur eine Temperatur des Körpers auf, und zwar die mittlere; die zweite Temperatur, $\theta_R(t)$, ist eine zeitabhängige Randtemperatur, die beliebig gewählt werden kann. Bei genauere Rechnung wird man z. B. für $\theta_R(t)$ die Innentemperatur der Brennstabhülle wählen und damit die Wärmespeicherung in der Hülle von der des Brennstabes trennen. In vereinfachten Rechnungen kann θ_R auch als die mittlere Kühlmitteltemperatur betrachtet werden.

Die Konstante p wird entsprechend der Wahl der Randtemperatur berechnet. Kann z. B. die Wärmeübergangszahl zwischen Brennstabhülle und Kühlmittel nicht als Konstante betrachtet werden (Siedewasserreaktoren, Durchsatz- und Druckänderung des Gases bei gasgekühlten Reaktoren, nicht vernachlässigbare Temperaturabhängigkeit der Wärmeübergangszahl bei organischen Kühlmitteln), so darf $\theta_R(t)$ höchstens als Außentemperatur der Brennstabhülle betrachtet werden.

Wird z. B. als Kontrollfläche des zu betrachtenden Problems die Oberfläche eines Brennelements angenommen, so ist (14) eine Gleichung des simultanen Differentialgleichungssystems, das das instationäre Verhalten beschreibt.

Die Beschreibung des Wärmeüberganges von Brennstaboberfläche zu Kühlmittel und die des Wärmetransportes durch das Kühlmittel längs der Brennelemente ist ein Problem für sich, das hier nicht betrachtet wird.

1.2. Greensche Funktion des Wärmeflusses

Der wichtigste Term bei der Lösung des Problems (14) ist das Produkt von zwei Funktionen, und zwar der Temperaturdifferenz $[\Theta_u(s) - \Theta_R(s)]$, genannt

„Eingangsfunktion“ (Ursache), mit $\varphi(s)$, genannt „Übertragungsfunktion“ (Gewichtsfunktion).

Die „Greensche Funktion“ des Problems $Q(t)$ ist die Laplace-rücktransformierte Übertragungsfunktion, d. h.

$$G(t) = \mathcal{C}^{-1}\{\varphi(s)\}. \quad (16)$$

Die Gewichtsfunktion $\varphi(s)$ ist meromorph mit unendlich vielen Polen, die in der ganzen komplexen Ebene isoliert liegen. Trotz der vorkommenden \sqrt{s} ist diese Funktion in der Umgebung von $s=0$ eindeutig. Nach einmaligem Umlauf (wenn \sqrt{s} in $-\sqrt{s}$ übergegangen ist) kehrt die Funktion $\varphi(s)$ zu ihrem ursprünglichen Wert zurück. Für $s=0$ verschwindet außer dem Nenner auch der Zähler von $\varphi(s)$, so daß hier keine Singularität vorliegt. Es läßt sich leicht zeigen, daß

$$\lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s) = \frac{8}{\nu(1+p)}. \quad (17)$$

1.3. Rücktransformation der Übertragungsfunktion

Die meromorphe Funktion $\varphi(s)$ wird in eine Partialbruchreihe entwickelt:

$$\varphi(s) = \frac{\Pi(s)}{\psi(s)} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s + \frac{\varrho_n^2}{\nu}} \quad (18)$$

mit

$$\Pi(s) = 2s I_1(\sqrt{\nu s})$$

$$\psi(s) = \sqrt{\nu s} I_0(\sqrt{\nu s}) - 2 \left(1 - \frac{p}{8} \nu s\right) I_1(\sqrt{\nu s})$$

$$\frac{\varrho_n^2}{\nu} = \text{Pole der Funktion } \varphi(s) \text{ und}$$

$$a_n = \text{Residuen von } \varphi(s) \text{ in den Polen } \frac{\varrho_n^2}{\nu}.$$

Man findet:

$$a_n = \lim_{s \rightarrow -\frac{\varrho_n^2}{\nu}} \frac{\Pi(s)}{\psi(s) - \psi\left(-\frac{\varrho_n^2}{\nu}\right)} = \frac{\Pi\left(-\frac{\varrho_n^2}{\nu}\right)}{\left.\frac{d\psi}{ds}\right|_{s=-\frac{\varrho_n^2}{\nu}}}. \quad (19)$$

Die Lage der Pole bestimmt man aus:

$$\psi(s) = \sqrt{\nu s} I_0(\sqrt{\nu s}) - 2 \left(1 - \frac{p}{8} \nu s\right) I_1(\sqrt{\nu s}) = 0. \quad (20)$$

Die Lösungen der transzendenten Gl. (20) werden auf der negativen reellen Achse der komplexen Bildebene s gesucht, d. h.:

$$\nu s = -\varrho^2 \rightarrow \varrho = \pm i \sqrt{\nu s}, \quad (21)$$

so ergibt sich aus (20)

$$\left. \begin{aligned} \varrho J_0(\varrho) - 2 \left(1 + \frac{p}{8} \varrho^2\right) J_1(\varrho) = 0 \rightarrow \\ (\varrho_1; \varrho_2; \dots; \varrho_k \dots) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

In der Gl. (22) tritt die eingeführte Konstante p als Parameter auf. Die ersten 9 Nullstellen der Gl. (22) können aus den Abb. 2–10 für $\chi=1$ entnommen werden.

Da die negativen ϱ dieselben Nullstellen wie die positiven ergeben, kann man sie weglassen.

Um die Koeffizienten a_n zu bestimmen, wird zuerst die Ableitung der Funktion $\psi(s)$ berechnet:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi}{ds} = \left[\frac{p}{4} \nu s - 1 \right] \frac{\nu}{2\sqrt{\nu s}} I_0(\sqrt{\nu s}) + \\ + \left[\frac{\nu}{8} (4+p) + \frac{1}{s} \right] I_1(\sqrt{\nu s}). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Unter Berücksichtigung des Ausdruckes (21) folgt:

$$\frac{\nu}{2\sqrt{\nu s}} \frac{I_0(\sqrt{\nu s})}{I_1(\sqrt{\nu s})} = \frac{\nu}{\pm 2i\varrho} \frac{J_0(\varrho)}{\pm iJ_1(\varrho)} = -\frac{\nu}{2\varrho} \frac{J_0(\varrho)}{J_1(\varrho)}$$

Aus (22) bekommt man

$$\frac{J_0(\varrho_n)}{J_1(\varrho_n)} = \frac{2\left(1 + \frac{p}{8}\varrho_n^2\right)}{\varrho_n}$$

Für

$$a_n = \left[\frac{p}{4} \nu s - 1 \right] \frac{\nu}{2\sqrt{\nu s}} \frac{I_0(\sqrt{\nu s})}{I_1(\sqrt{\nu s})} + \left[\frac{\nu}{8}(4+p) + \frac{1}{s} \right] \Big|_{s=-\frac{\varrho_n^2}{\nu}}$$

ergibt sich daher:

$$a_n = -\frac{4}{\nu^2(1+p)} \frac{\varrho_n^2}{1 + \frac{p^2}{16(1+p)}\varrho_n^2} \quad (25)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\omega = \frac{p^2\nu}{16(1+p)},$$

$$\tau_n = \frac{\nu}{\varrho_n^2},$$

so nehmen die Koeffizienten a_n eine sehr einfache Form an:

$$a_n = -\frac{4}{\nu(1+p)} \frac{1}{\omega + \tau_n}, \quad (26)$$

wobei man zeigen kann, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{64}{\nu^2 p^2}. \quad (27)$$

Die Übertragungsfunktion (18) ist damit bis auf die Konstante a_0 bestimmt:

$$\varphi(s) = a_0 - \frac{4}{\nu(1+p)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega + \tau_n} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau_n}} \quad (28)$$

Aus dem Grenzübergang (17) und (28) bestimmt man schließlich:

$$a_0 = \frac{4}{\nu(1+p)} \left[2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n}{\omega + \tau_n} \right] \quad (29)$$

Damit nimmt die gesuchte Greensche Funktion in der Bildebene ihre endgültige einfache Form an:

$$\varphi(s) = \frac{4}{\nu(1+p)} \left[2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n}{\omega + \tau_n} \right] - \frac{4}{\nu(1+p)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega + \tau_n} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau_n}} \quad (30)$$

Nach Rücktransformation von $\varphi(s)$ bekommt man die gesuchte „Greensche Funktion“ $G(t)$

$$G(t) = \mathcal{G}^{-1}\{\varphi(s)\} = \frac{4}{\nu(1+p)} \left[2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n}{\omega + \tau_n} \right] \times \delta(t) - \frac{4}{\nu(1+p)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t}{\tau_n}}}{\omega + \tau_n} \quad (31)$$

$\delta(t) = \text{Dirac-Funktion.}$

1.4. Die Wärmeleitungsgleichung in der Originalebene

Die rücktransformierte Gl. (14) heißt:

$$\frac{W(t)}{\gamma_u c_u} = \dot{\theta}_u(t) + G(t) * [\theta_u(t) - \theta_R(t)], \quad (32)$$

wobei * der Faltungsoperator ist.

Setzt man (31) in (32) ein, so ergibt sich die Integro-Differentialgleichung

$$\frac{W(t)}{\gamma_u c_u} - \dot{\theta}_u(t) = \frac{4}{\nu(1+p)} \left[2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n}{\omega + \tau_n} \right] \times [\theta_u(t) - \theta_R(t)] - \frac{4}{\nu(1+p)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n}{\omega + \tau_n} \times e^{-\frac{t}{\tau_n}} \int_0^t [\theta_u(\tau) - \theta_R(\tau)] e^{\frac{\tau}{\tau_n}} d\tau.$$

Nach einmaliger partieller Integration im letzten Term erhält man folgende Form der Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{W(t)}{\gamma_u c_u} - \dot{\theta}_u(t) = \frac{8}{\nu(1+p)} [\theta_u(t) - \theta_R(t)] + \frac{4}{\nu(1+p)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega + \tau_n} \times e^{-\frac{t}{\tau_n}} \int_0^t \frac{d}{d\tau} [\theta_u(\tau) - \theta_R(\tau)] e^{\frac{\tau}{\tau_n}} d\tau \quad (33)$$

Dabei ist zu beachten, daß $\theta_{u_0} = \theta_{R_0} = 0$ ist, d.h. als Anfangsbedingung für θ wurde Null gewählt.

Multipliziert man (33) mit dem Wasserwert $W_u \left[\frac{\text{kcal}}{\text{°C}} \right]$ des Brennelementes, so kann man den einzelnen Termen der Integralgleichung eine physikalische Deutung geben, nämlich:

$$P(t) - P_W(t) = P_{LG}(t), \quad (34)$$

wobei

$P(t) = \frac{W(t)}{\gamma_u c_u} W_u \left[\frac{\text{kcal}}{\text{s}} \right]$ = die gesamte Wärmeleistung, die im Brennelement erzeugt wird (Wärmequelle),

$P_W(t) = W_u \dot{\theta}_u(t) \left[\frac{\text{kcal}}{\text{s}} \right]$ = die im Brennelement vorübergehend gespeicherte Wärmeleistung,

$P_{LG}(t) = \frac{8 W_u}{\nu(1+p)} [\theta_u(t) - \theta_R(t)] + \frac{4 W_u}{\nu(1+p)} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n}{\omega + \tau_n} e^{-\frac{t}{\tau_n}} \int_0^t \frac{d}{d\tau} [\theta_u(\tau) - \theta_R(\tau)] \times e^{\frac{\tau}{\tau_n}} d\tau$ = Wärmeleistung, die aus dem Brennelement abgeführt wird. (35)

Man bezeichnet

$$P_L(t) = \frac{8 W_u}{\nu(1+p)} [\theta_u(t) - \theta_R(t)] \quad (36)$$

als „stationären Anteil“ der abgeführten Wärmeleistung, d.h. die gesamte aus dem Brennelement abgeführte Wärmeleistung

$$P_{LG}(t) = P_L(t), \quad \text{so lange } \frac{d}{dt} [\theta_u(t) - \theta_R(t)] \equiv 0 \quad (37)$$

und damit $P_{LG} = P_L = \text{Konstante}$.

Diese Bedingung ist nur im stationären Fall erfüllt.

Die Aussage ist an und für sich trivial, aber dennoch wird bei instationären Vorgängen gewöhnlich mit $P_{LG}(t) = P_L(t)$ gerechnet, obwohl $\frac{d}{dt} [\theta_u(t) - \theta_R(t)] \neq 0$

ist. Diese Rechnungsart kann unter Umständen zu nicht ausreichender Genauigkeit führen.

Mit den neuen Abkürzungen schreibt man die Gl. (35) folgendermaßen:

$$P_{LG}(t) = P_L(t) + \left. \begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \times \\ &\times [P_L^{(m)}(t) - P_L^{(m)}(0)] \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n \tau_n^{m-1}, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

wenn

$$r_0 < \varrho_1 \sqrt{\frac{\lambda_u}{\gamma_u c_u}} A, \quad (39)$$

A [s^{1/2}] = Dimensionsfaktor, wobei

$$P_L^{(m)}(t) = \frac{d^m P_L(t)}{dt^m}$$

und

$$\Omega_n = \frac{\tau_n^2}{2(\omega + \tau_n)}.$$

So erhält man die erste Näherung der Zeitkonstanten Ω_{L1} des instationären Wärmeflusses

$$\Omega_{L1} = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n^2}{2(\omega + \tau_n)} = \frac{\nu}{24(1+p)}. \quad (40)$$

Der hier angegebene Wert der unendlichen Summe wird später nachgewiesen werden.

Die Gl. (38) ist eine Differentialgleichung mit unendlich vielen Gliedern, deren Koeffizienten rasch zu Null streben, wenn die Bedingung (39) erfüllt ist. Andernfalls gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n \tau_n^{m-1} \rightarrow \infty,$$

d.h. die Darstellung (38) ist dann nicht zulässig.

1.5. Der effektive Temperaturgradient des instationären Wärmeflusses

Der Übergang von der partiellen Differentialgleichung (1) auf eine gewöhnliche (33) bedingt die Einführung einer repräsentativen Temperatur des Körpers, und zwar der mittleren, die als exakter Ausdruck (10) in Form eines Integrals gegeben ist. Die erste Ableitung der mittleren Temperatur θ_u nach der Zeit, multipliziert mit dem Wasserwert des Körpers, gibt gerade die gespeicherte Wärmeleistung. Um den instationären Wärmefluß, d.h. die Wärmeleistung, die die Kontrollfläche des Körpers passiert, exakt zu beschreiben, muß man eine andere Temperatur des Körpers definieren, die wir „effektive Temperatur des instationären Wärmeflusses θ_{uL} “ nennen wollen:

$$\theta_{uL} = f(\theta_u).$$

Der effektive Temperaturgradient $\delta \theta_G$ des instationären Wärmeflusses wird durch folgenden Ausdruck definiert:

$$\delta \theta_G = \theta_{uL}(t) - \theta_R(t) = \frac{\nu(1+p)}{8 W_u} P_{LG}(t) \quad (41)$$

oder

$$\theta_{uL}(t) = \theta_u(t) + \left. \begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \times \\ &\times [\theta_u(t) - \theta_R(t)]^{(m)} \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n \tau_n^{m-1}, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

falls

$$r_0 < \varrho_1 \sqrt{\frac{\lambda_u}{\gamma_u c_u}} A. \quad (43)$$

Der effektive Temperaturgradient des stationären Wärmeflusses soll hingegen mit $\delta \theta$, d.h.

$$\delta \theta = \theta_u(t) - \theta_R(t) \quad (44)$$

bezeichnet werden.

Selbstverständlich gilt:

$$\delta \theta_G(t) \equiv \delta \theta(t), \quad (45)$$

falls

$$\frac{d}{dt} [\theta_u(t) - \theta_R(t)] \equiv 0.$$

Mit den eingeführten Bezeichnungen folgt:

$$\delta \theta_G(t) = \delta \theta(t) + \left. \begin{aligned} &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n}{2(\omega + \tau_n)} e^{-\frac{t}{\tau_n}} \int_0^t \delta \dot{\theta}(\tau) e^{\frac{\tau}{\tau_n}} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

oder

$$\delta \theta_G(t) = \delta \theta(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega_n}{\tau_n} I_n(t), \quad (47)$$

wobei die Funktionen I_n den Differentialgleichungen

$$I_1(t) + \tau_1 \dot{I}_1(t) = \tau_1 \delta \dot{\theta}(t)$$

$$I_2(t) + \tau_2 \dot{I}_2(t) = \tau_2 \delta \dot{\theta}(t)$$

$$\vdots$$

$$I_n(t) + \tau_n \dot{I}_n(t) = \tau_n \delta \dot{\theta}(t) \quad (n = 1; 2; \dots; \infty)$$

$$\vdots$$

genügen.

Die Temperaturfunktionen $I_n(t)$ haben also die Gestalt:

$$I_n(t) = e^{-\frac{t}{\tau_n}} \int_0^t \delta \dot{\theta}(\tau) e^{\frac{\tau}{\tau_n}} d\tau. \quad (48)$$

Man kann jetzt die partielle Differentialgleichung (1) mit einer zeitabhängigen Wärmequelle $W(t)$ und einer zeitabhängigen Randbedingung $\theta_R(t)$ durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen ersetzen, d.h. anstatt (1) kann man für eine große Anzahl von Problemen benutzen:

$$\left. \begin{aligned} &\gamma_u c_u \dot{\theta}_u(t) + \frac{8\gamma_u c_u}{\nu(1+p)} [\theta_u(t) - \theta_R(t)] + \\ &\quad + \frac{8\gamma_u c_u}{\nu(1+p)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega_n}{\tau_n} I_n(t) = W(t) \\ &I_1(t) + \tau_1 \dot{I}_1(t) = \tau_1 [\dot{\theta}_u(t) - \dot{\theta}_R(t)] \\ &I_2(t) + \tau_2 \dot{I}_2(t) = \tau_2 [\dot{\theta}_u(t) - \dot{\theta}_R(t)] \\ &\vdots \\ &I_n(t) + \tau_n \dot{I}_n(t) = \tau_n [\dot{\theta}_u(t) - \dot{\theta}_R(t)] \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Anfangsbedingungen: $W(0) = 0$

$$\theta(r, 0) = 0$$

$$\theta_R(0) = 0$$

$$I_n(0) = 0 \quad (n = 1; 2; \dots).$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Omega_n}{\tau_n} \rightarrow 0.$$

Außerdem sind die Funktionen I_n in physikalisch sinnvollen Fällen beschränkt, was übrigens schon bei der Laplace-Transformation vorausgesetzt werden mußte.

Infolgedessen genügt es, bei der Anwendung des Systems (49) nur die ersten Γ -Funktionen zu berücksichtigen.

Der durch Abbruch der (konvergenten) Reihe in (49) begangene Fehler läßt sich durch Abschätzung der ersten vernachlässigten Γ angeben.

1.6. Reihenentwicklung der Übertragungsfunktion $\varphi(s)$

Zwecks Rücktransformation wird $\varphi(s)$ in eine Reihe entwickelt, und zwar wählt man statt des Ansatzes (18) die Potenzreihe in s :

$$\varphi(s) = \bar{b}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n s^n. \tag{50}$$

Setzt man $\sigma^2 = \nu s$ in (50) ein, so folgt:

$$\frac{2\sigma^2 I_1(\sigma)}{\sigma \nu I_0(\sigma) - 2\nu \left(1 - \frac{p}{8} \sigma^2\right) I_1(\sigma)} \equiv \bar{b}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{b}_n}{\nu^n} \sigma^{2n}. \tag{51}$$

Die Koeffizienten \bar{b}_n werden durch Vergleich mit den Reihendarstellungen von I_0 und I_1 berechnet. Die ersten Glieder der Funktion $\varphi(s)$ lauten:

$$\varphi(s) = \left. \begin{aligned} & \frac{8}{\nu(1+p)} + \frac{1}{3(1+p)^2} s - \frac{(3p+1)\nu}{2^4 3^2 (1+p)^3} s^2 + \\ & + \frac{(12p^2+9p+2)\nu^2}{2^6 3^3 5 (1+p)^4} s^3 - \\ & - \frac{(78p^3+93p^2+42p+7)\nu^3}{2^{11} 3^4 5 (1+p)^5} s^4 + \dots \end{aligned} \right\} \tag{52}$$

Die \mathcal{C}^{-1} -transformierte Gl. (14) mit der Übertragungsfunktion (52) nimmt folgende Form an:

$$\left. \begin{aligned} \frac{W(t)}{\gamma_u c_u} - \dot{\theta}_u(t) &= \frac{8}{\nu(1+p)} [\theta_u(t) - \theta_R(t)] + \\ & + \frac{1}{3(1+p)^2} [\dot{\theta}_u(t) - \dot{\theta}_R(t)] - \\ & - \frac{(3p+1)\nu}{2^4 3^2 (1+p)^3} [\ddot{\theta}_u(t) - \ddot{\theta}_R(t)] + \\ & + \frac{(12p^2+9p+2)\nu^2}{2^6 3^3 5 (1+p)^4} [\dddot{\theta}_u(t) - \dddot{\theta}_R(t)] - \dots \\ & - \lim_{t \rightarrow +0} \left\{ \frac{8}{\nu(1+p)} [\theta_u(t) - \theta_R(t)] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3(1+p)^2} [\dot{\theta}_u(t) - \dot{\theta}_R(t)] - \dots \right\}. \end{aligned} \right\} \tag{53}$$

Diese Form der Wärmeleitungsgleichung kann auf eine andere Art gewonnen werden. Der Nachteil ihrer praktischen Anwendung liegt an der Bestimmung des Grenzwertes.

1.7. Lösung des Problems nach der Galerkin-Methode

Es soll nur bemerkt werden, daß man durch die Anwendung der Galerkin-Methode auf die partielle Differentialgleichung (1) mit gleichen Rand- und Anfangsbedingungen das gleiche Ergebnis bekommt wie mit dem Ansatz (50). Da diese Methode nichts Neues zu dem behandelten Problem liefert, wird dieses Verfahren und seine Ergebnisse nicht näher diskutiert.

1.8. Näherungsformel zur Berechnung der Zeitkonstanten τ_1 der Funktion I_1

Für die Zeitkonstante τ_1 soll jetzt eine Formel angegeben werden, mit deren Hilfe jene in vielen Fällen mit genügender Genauigkeit berechnet werden kann.

Aus dem Koeffizientenvergleich der Ausdrücke (53) und (33) folgt:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n^2}{\omega + \tau_n} &\approx \frac{\nu}{2^2 3(1+p)} = \frac{(1+p)\nu}{2^2 1!} \varphi'(0) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n^3}{\omega + \tau_n} &\approx \frac{(3p+1)\nu^2}{2^6 3^2(1+p)^2} = -\frac{(1+p)\nu}{2^2 2!} \varphi''(0) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n^4}{\omega + \tau_n} &\approx \frac{(12p^2+9p+2)\nu^3}{2^8 3^3 5(1+p)^3} \\ &= \frac{(1+p)\nu}{2^2 3!} \varphi'''(0) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n^5}{\omega + \tau_n} &\approx \frac{(78p^3+93p^2+42p+7)\nu^4}{2^{13} 3^4 5(1+p)^4} \\ &= -\frac{(1+p)\nu}{2^2 4!} \varphi^{IV}(0) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n^6}{\omega + \tau_n} &\approx \frac{(891p^4+1464p^3+999p^2+}{2^{18} 3^5 5 \cdot 7 \times} \\ &\quad \vdots + 330p+44)\nu^5}{\times (1+p)^5} = \frac{(1+p)\nu}{2^2 5!} \varphi^V(0). \end{aligned} \right\} \tag{54}$$

Aus dem ersten Ausdruck (54) folgt dabei die erste Näherung der Zeitkonstanten Ω_{L1} des instationären Wärmeflusses bei zeitabhängiger Randbedingung.

Das System der Koeffizienten (54) kann man wie folgt schreiben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n^m}{\omega + \tau_n} = K_m \quad (m = 2, 3, 4, \dots) \tag{55}$$

oder

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n^m = \omega K_m + K_{m+1}. \tag{56}$$

Mit entsprechendem K_m und K_{m+1} aus (54) folgt, für $m=5$, aus (56):

$$\left. \begin{aligned} \omega K_5 + K_6 &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n^5 = \frac{\nu^5}{2^{15} 3^5 (1+p)^5} \times \\ &\times \frac{1638p^5 + 3735p^4 + 3810p^3 + 2145p^2 + 660p + 88}{140}. \end{aligned} \right\} \tag{57}$$

Man unterscheidet zwei Fälle, nämlich:

a) $\omega K_5 + K_6 = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n^5 \leq 1. \tag{58}$

Dann sind alle $\tau_n \leq 1$. Da $\tau_n > \tau_{n+1}$ ist, kann man z. B. die fünften Potenzen höherer τ_n vernachlässigen und erhält näherungsweise

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &\cong \Omega_{L1} \times \\ &\times \sqrt[5]{\frac{1638p^5 + 3735p^4 + 3810p^3 + 2145p^2 + 660p + 88}{140}}. \end{aligned} \right\} \tag{59}$$

Auf diese Weise läßt sich mit Hilfe der Formel (59), in der die beiden Parameter ν und p des physikalischen Systems enthalten sind, der τ_1 -Wert berechnen.

b) $\omega K_5 + K_6 > 1. \tag{60}$

In diesem Falle ist im allgemeinen die Größenordnung von τ_2 , d. h. $\tau_2 \leq 1$ nicht bekannt.

Mit dem aus einem konkreten Brennelement stammenden Beispiel $\omega K_5 + K_6 = 1,582$ wurde für τ_1 mit der Formel (59) eine sehr gute Genauigkeit erreicht ($\tau_1 = 1,096$, $\tau_2 = 0,371$, $\tau_3 = 0,183$, $\tau_4 = 0,108$ sec etc., für $\nu = 19,64$ sec und $p = 1,87$).

Hieraus läßt sich folgern, daß auch in Fällen mit $\tau_1 \geq 1$ und $\omega K_m + K_{m+1} > 1$, jedoch $\tau_2 < 1$, in der Formel (59) noch eine sehr gute Näherung für τ_1 erzielt werden kann.

2. Der Fall zeitlich und räumlich veränderlicher Wärmequelle

2.1. Lösung des Problems in der komplexen Bildebene

Die partielle Differentialgleichung der Wärmeleitung — mit gleichen Annahmen wie in (1.1), jedoch mit dem Unterschied, daß die Wärmequelle W außer von der Zeit noch von der Ortskoordinate r abhängt — lautet:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} + \frac{W(r, t)}{\lambda_u} \quad (61)$$

Die Laplace-transformierte Gl. (61) mit der Anfangsbedingung $\theta(r, 0) = 0$ hat folgende Form:

$$\frac{s}{a^2} \Theta(r, s) = \frac{\partial^2 \Theta(r, s)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta(r, s)}{\partial r} + \frac{\tilde{W}(r, s)}{\lambda_u} \quad (62)$$

Es ist nicht möglich eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung (62) in der komplexen Bildebene anzugeben, wenn die Wärmequelle eine beliebige Funktion von r ist. Im folgenden wird daher ein spezieller Fall untersucht, der für praktische Zwecke der Reaktordynamik brauchbar ist.

Durch Selbstabschirmung tritt in den Brennstäben eine ungleichmäßige, von der Zylinderkoordinate r abhängige Wärmequelle auf. Der Zylindergeometrie wegen setzen wir den räumlichen Anteil als Bessel-Funktion an:

$$\tilde{W}(r, s) = K \tilde{W}_0(s) I_0(\kappa r) \quad (63)$$

mit κ = reziproke Diffusionslänge,

\tilde{W}_0 = Wärmequelle längs der Stabachse ($\tilde{W}(0, s)$),

K = eine Konstante (Korrekturfaktor für dünne Stäbe).

Für dünne Stäbe ist, wie bekannt, die Anwendung der Diffusionstheorie nicht zulässig. Wird einmal die Form des Neutronenflusses nach der Transporttheorie bestimmt, so kann man den Wärmequellenterm wie folgt schreiben:

$$W(r, s) = \frac{I_0(\bar{\kappa} r_0)}{I_0(\bar{\kappa} r_0) - 1} W_0(s) - \frac{1}{I_0(\bar{\kappa} r_0) - 1} W_m(s) + \left\{ \begin{aligned} &+ \frac{1}{I_0(\bar{\kappa} r_0) - 1} [W_m(s) - W_0(s)] I_0(\bar{\kappa} r), \end{aligned} \right\} \quad (64a)$$

wobei W_m = Wärmequelle an der Staboberfläche, $\bar{\kappa}$ [m⁻¹] = eine Konstante, die so bestimmt ist, daß der Mittelwert von W nach (64a) mit dem der Transporttheorierechnung übereinstimmt.

Der Wärmequellenterm (64a) ist eine lineare Kombination der Terme von (63) und (1). Im weiteren wird jedoch nur der Ansatz (63) als charakteristischer Fall behandelt.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (62) mit Quellterm (63) ist:

$$\Theta(r, s) = \frac{I_0\left(\frac{r}{a} \sqrt{s}\right)}{I_0(\sqrt{s})} \Theta_{r_0}(s) + \left\{ \begin{aligned} &I_0(\kappa r) - \\ & - \frac{I_0\left(\frac{r}{a} \sqrt{s}\right)}{I_0(\sqrt{s})} I_0(\kappa r_0) \end{aligned} \right\} \frac{K \tilde{W}_0(s)}{\gamma_u c_u (s - \kappa^2 a^2)} \quad (64)$$

Für $\kappa = 0$, d.h. für gleichmäßig verteilte Wärmequelle, sind die Lösungen (7) und (64) gleich, d.h. (7) ist ein Sonderfall von (64).

Aus (64) und der Randbedingung (8) folgt:

$$\Theta_{r_0}(s) = \left. \begin{aligned} &\frac{E I_0(\sqrt{s}) \Theta_R(s) + [\kappa I_1(\kappa r_0) I_0(\sqrt{s}) - \\ & - \frac{\sqrt{s}}{a} I_1(\sqrt{s}) I_0(\kappa r_0)] \frac{K \tilde{W}_0(s)}{\gamma_u c_u (s - \kappa^2 a^2)}}{E I_0(\sqrt{s}) - \\ & - \frac{\sqrt{s}}{a} I_1(\sqrt{s})} \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Wenn man wieder die Mitteltemperatur $\Theta_u(s)$ gemäß (10) benutzt, ergibt sich aus (64)

$$\Theta_{r_0}(s) = \left. \begin{aligned} &I_0(\sqrt{s}) \Theta_u(s) + \left[\frac{2}{\sqrt{s}} I_1(\sqrt{s}) I_0(\kappa r_0) - \right. \\ & \left. \frac{2}{\sqrt{s}} \right] \frac{K \tilde{W}_0(s)}{\gamma_u c_u (s - \kappa^2 a^2)} \times \\ & \left. \frac{1}{I_1(\sqrt{s})} \right\} \quad (66)$$

Eliminiert man jetzt $\Theta_{r_0}(s)$ aus den Gln. (65) und (66), so bekommt man:

$$\frac{K \tilde{W}_0(s)}{\gamma_u c_u} = \frac{(s - \kappa^2 a^2) \frac{\kappa r_0}{2} \times}{\left[\sqrt{s} I_1(\kappa r_0) [\sqrt{s} I_1(\sqrt{s}) - a E I_0(\sqrt{s})] + \right.} \Theta_u(s) + \left. \begin{aligned} &+ \sqrt{s} [\sqrt{s} I_1(\sqrt{s}) - E a I_0(\sqrt{s})] \\ &+ \kappa a^2 I_1(\sqrt{s}) [E I_0(\kappa r_0) - \kappa I_1(\kappa r_0)] \end{aligned} \right] \frac{1}{I_1(\sqrt{s})} \times \left. \begin{aligned} &+ \frac{(s - \kappa^2 a^2) \times}{\left[\sqrt{s} I_1(\kappa r_0) [\sqrt{s} I_1(\sqrt{s}) - a E I_0(\sqrt{s})] + \right.} \\ & \left. \left. \frac{\kappa a^2 E I_1(\sqrt{s})}{\kappa a^2 I_1(\sqrt{s}) [E I_0(\kappa r_0) - \kappa I_1(\kappa r_0)]} \right] \Theta_R(s)} \right\} \quad (67)$$

Um die Wärmebilanz durchzuführen, ersetzt man in (67) die Wärmequelle $\tilde{W}_0(s)$ in der Brennstabachse durch die mittlere Quelledichte $\tilde{W}(s)$, die wie üblich definiert ist als

$$\tilde{W}(s) = \frac{2K \tilde{W}_0(s)}{r_0^2} \int_0^{r_0} I_0(\kappa r) r dr \quad (68)$$

Aus (67) und (68) folgt dann

$$\frac{\tilde{W}(s)}{K \gamma_u c_u} = s \Theta_u(s) + \left. \begin{aligned} &\frac{E r_0 a^3 \kappa^2 \sqrt{s} I_0(\sqrt{s}) - a^2 s [2E \times \\ & \left[r_0 s + 2a^2 E \left(\frac{\kappa r_0}{2} \frac{I_0(\kappa r_0)}{I_1(\kappa r_0)} - \right. \right. \\ & \times \left. \left. \left(\frac{\kappa r_0}{2} \frac{I_0(\kappa r_0)}{I_1(\kappa r_0)} - \frac{r_0 \kappa^2}{2E} \right) + r_0 \kappa^2 \right] I_1(\sqrt{s}) \right]}{I_1(\sqrt{s}) - E a r_0 \sqrt{s} I_0(\sqrt{s})} \Theta_u(s) + \\ & \left. \frac{2E a^2 (s - a^2 \kappa^2) \times}{\left[r_0 s + 2a^2 E \left(\frac{\kappa r_0}{2} \frac{I_0(\kappa r_0)}{I_1(\kappa r_0)} - \frac{r_0 \kappa^2}{2E} \right) \right] \times} \right. \\ & \left. \frac{\times I_1(\sqrt{s})}{\times I_1(\sqrt{s}) - E a r_0 \sqrt{s} I_0(\sqrt{s})} \Theta_R(s) \right\} \quad (69)$$

Die Lösungen (13) und (69) sind nunmehr vergleichbar: für $\kappa = 0$ geht Gl. (69) in Gl. (13) über, was auch zu erwarten war.

Um das vorliegende Problem weiter behandeln zu können, wird außer ν und p noch eine dritte Konstante χ eingeführt, die folgendermaßen definiert ist:

$$\chi = \frac{r_0 \kappa}{2} \frac{I_0(\kappa r_0)}{I_1(\kappa r_0)} + \frac{(r_0 \kappa)^2}{8} p = \chi_N + \chi_W \quad (70)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} \frac{r_0 \chi}{2} \frac{I_0(\chi r_0)}{I_1(\chi r_0)} &= \chi_N \\ &= \frac{\text{Flußdichte an Brennstoffoberfläche}}{\text{Mittlere Flußdichte im Brennstoff}} \end{aligned} \right\} (71)$$

der bekannte Absenkungsfaktor (disadvantage factor) ist, während man dem anderen Summanden die Bedeutung

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 \chi^2 &= \frac{(r_0 \chi)^2 p}{8} = \chi_W \\ &= \frac{\text{Wärmestromdichte im Brennstoff}}{\text{Wärmestromdichte in der Gasfüllung}} \end{aligned} \right\} (72)$$

zulegen muß. Um dies einzusehen, erteilt man vorübergehend dem Brennstab einen Halbmesser $r_0 = \sqrt{2}/\chi$ und nimmt in beiden Medien den gleichen Temperaturgradienten $\Delta\theta$ an. Dann ergibt sich für χ_W der physikalisch leicht zu deutende Ausdruck:

$$\chi_W = \frac{\frac{\lambda_u}{r_0} \Delta\theta}{\frac{\lambda_h}{\delta_h} \Delta\theta}$$

Mit den eingeführten Konstanten kann man die Gl. (69) wie folgt schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{W}(s)}{K \gamma_u c_u} &= s \Theta_u(s) + \\ &+ \frac{2\chi s I_1(\sqrt{\nu s}) - \chi_W \left[2s I_1(\sqrt{\nu s}) + \frac{8\sqrt{\nu s}}{p\nu} I_0(\sqrt{\nu s}) \right]}{\sqrt{\nu s} I_0(\sqrt{\nu s}) - 2 \left(\chi - \frac{p\nu}{8} s \right) I_1(\sqrt{\nu s})} \times \\ &\times \Theta_u(s) - \frac{2 \left(s - \frac{8}{p\nu} \chi_W \right) I_1(\sqrt{\nu s})}{\sqrt{\nu s} I_0(\sqrt{\nu s}) - 2 \left(\chi - \frac{p\nu}{8} s \right) I_1(\sqrt{\nu s})} \times \\ &\times \Theta_R(s). \end{aligned} \right\} (73)$$

Durch eine Umformung kann der Gl. (73) ein ähnlicher Aufbau wie Gl. (14) erteilt werden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{W}(s)}{K \gamma_u c_u} &= s \Theta_u(s) + \\ &+ \frac{2s I_1(\sqrt{\nu s})}{\sqrt{\nu s} I_0(\sqrt{\nu s}) - 2 \left(\chi - \frac{p\nu}{8} s \right) I_1(\sqrt{\nu s})} [\Theta_u(s) - \\ &- \Theta_R(s)] + \frac{(\chi_N - 1) 2s I_1(\sqrt{\nu s}) - \chi_W \frac{8\sqrt{\nu s}}{p\nu} I_0(\sqrt{\nu s})}{\sqrt{\nu s} I_0(\sqrt{\nu s}) - 2 \left(\chi - \frac{p\nu}{8} s \right) I_1(\sqrt{\nu s})} \times \\ &\times \Theta_u(s) + \frac{\chi_W \frac{16}{p\nu} I_1(\sqrt{\nu s})}{\sqrt{\nu s} I_0(\sqrt{\nu s}) - 2 \left(\chi - \frac{p\nu}{8} s \right) I_1(\sqrt{\nu s})} \Theta_R(s). \end{aligned} \right\} (74)$$

Die Funktion, die mit der Temperaturdifferenz $\Theta_u(s) - \Theta_R(s)$ multipliziert ist, weist eine ähnliche Form wie die Übertragungsfunktion $\varphi(s)$, Gl. (15), auf, nämlich:

$$\bar{\varphi}(s) = \frac{2s I_1(\sqrt{\nu s})}{\sqrt{\nu s} I_0(\sqrt{\nu s}) - 2 \left(\chi - \frac{p\nu}{8} s \right) I_1(\sqrt{\nu s})} \quad (75)$$

mit dem Spezialfall

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \bar{\varphi}(s) = \varphi(s). \quad (76)$$

Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Funktionen $\bar{\varphi}(s)$ und $\varphi(s)$ ist ihr Grenzwert (Ausgleichszustand):

$$\lim_{s \rightarrow 0} \bar{\varphi}(s) = 0, \quad (77)$$

hingegen

$$\lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s) = \frac{8}{\nu(1+p)}. \quad (78)$$

Aus (77) und (78) folgt, daß Θ_u und Θ_R nicht mehr dieselben Übertragungsfunktionen haben:

$$\tilde{\varphi}(s) = \frac{2\chi s I_1(\sqrt{\nu s}) - \chi_W \left[2s I_1(\sqrt{\nu s}) + \frac{8\sqrt{\nu s}}{p\nu} I_0(\sqrt{\nu s}) \right]}{\sqrt{\nu s} I_0(\sqrt{\nu s}) - 2 \left(\chi - \frac{p\nu}{8} s \right) I_1(\sqrt{\nu s})}, \quad (79)$$

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(s) = \frac{2 \left(s - \frac{8}{p\nu} \chi_W \right) I_1(\sqrt{\nu s})}{\sqrt{\nu s} I_0(\sqrt{\nu s}) - 2 \left(\chi - \frac{p\nu}{8} s \right) I_1(\sqrt{\nu s})}. \quad (80)$$

Die Wärmeleitungsgleichung in der komplexen Ebene lautet:

$$\frac{\tilde{W}(s)}{K \gamma_u c_u} = s \Theta_u(s) + \tilde{\varphi}(s) \Theta_u(s) - \tilde{\tilde{\varphi}}(s) \Theta_R(s), \quad (81)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \tilde{\varphi}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{\tilde{\varphi}}(s) = \frac{8\chi_W}{\nu p(\chi - 1)}. \quad (82)$$

Die anderen Eigenschaften der Übertragungsfunktionen $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\tilde{\varphi}}$ sind gleich denen bei der Funktion φ bereits betrachteten. Es ist einfach zu beweisen, daß

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{\tilde{\varphi}}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s) = \frac{8}{\nu(1+p)}, \quad (83)$$

da

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi_W}{\chi - 1} = \frac{p}{1+p}. \quad (84)$$

Um die Wärmeleitungsgleichung (81) physikalisch etwas deutlicher interpretieren zu können, ist folgende Schreibweise zweckmäßig:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{W}(s)}{K \gamma_u c_u} &= \left(s - \frac{8}{p\nu} \chi_W \right) \times \\ &\times \frac{\sqrt{\nu s} I_0(\sqrt{\nu s}) - 2 \left(1 - \frac{p\nu}{8} s \right) I_1(\sqrt{\nu s})}{\sqrt{\nu s} I_0(\sqrt{\nu s}) - 2 \left(\chi - \frac{p\nu}{8} s \right) I_1(\sqrt{\nu s})} \Theta_u(s) + \\ &+ \frac{2 \left(s - \frac{8}{p\nu} \chi_W \right) I_1(\sqrt{\nu s})}{\sqrt{\nu s} I_0(\sqrt{\nu s}) - 2 \left(\chi - \frac{p\nu}{8} s \right) I_1(\sqrt{\nu s})} \times \\ &\times [\Theta_u(s) - \Theta_R(s)], \end{aligned} \right\} (85)$$

oder in abgekürzter Form

$$\frac{\tilde{W}(s)}{K \gamma_u c_u} = \varphi_0(s) \Theta_u(s) + \varphi^*(s) [\Theta_u(s) - \Theta_R(s)], \quad (86)$$

wobei

$$\varphi^*(s) = \frac{2 \left(s - \frac{8}{p\nu} \chi_W \right) I_1(\sqrt{\nu s})}{\sqrt{\nu s} I_0(\sqrt{\nu s}) - 2 \left(\chi - \frac{p\nu}{8} s \right) I_1(\sqrt{\nu s})}, \quad (87)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(s) &= \frac{\left(s - \frac{8}{p\nu} \chi_W \right) \left[\sqrt{\nu s} I_0(\sqrt{\nu s}) - 2 \left(1 - \frac{p\nu}{8} s \right) I_1(\sqrt{\nu s}) \right]}{\sqrt{\nu s} I_0(\sqrt{\nu s}) - 2 \left(\chi - \frac{p\nu}{8} s \right) I_1(\sqrt{\nu s})} \end{aligned} \right\} (88)$$

Die Grenzwerte sind:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \varphi^*(s) = \frac{\chi W}{\chi - 1} \frac{8}{p\nu}, \quad (89)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \varphi_0(s) = 0 \quad (90)$$

und

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \lim_{s \rightarrow 0} \varphi^*(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s) = \frac{8}{\nu(1+p)}, \quad (91)$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \varphi_0(s) = s. \quad (92)$$

Damit wurde eine Übertragungsfunktion $\varphi^*(s)$ für die Temperaturdifferenz $\Theta_u(s) - \Theta_R(s)$ gefunden.

Eigenartig ist das Auftreten der Funktion $\varphi_0(s)$, die im Grenzfall (92), d. h. bei gleichmäßiger Wärmequellenverteilung, mit dem Wärmespeicherungsterm übereinstimmt.

Die Funktion $\varphi_0(s)$ wird nun aufgeteilt in den Wärmespeicherungsterm s und in eine Übertragungsfunktion der Temperatur Θ_u , d. h.

$$\varphi_0(s) = s + \varphi_u(s), \quad (93)$$

$$\left. \begin{aligned} & \varphi_u(s) \\ &= \frac{2 \left[(\chi_N - 1)s + \frac{8\chi W}{p\nu} \right] I_1(\sqrt{\nu s}) - \frac{8\chi W}{p\nu} \sqrt{\nu s} I_0(\sqrt{\nu s})}{\sqrt{\nu s} I_0(\sqrt{\nu s}) - 2 \left(\chi - \frac{p\nu}{8} s \right) I_1(\sqrt{\nu s})} \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Die endgültige Form der instationären Wärmeleitungsgleichung mit zeitabhängiger Randbedingung $\Theta_R(s)$ und zeit- und ortsabhängiger Wärmequelle $K\tilde{W}_0(s) I_0(\chi r)$ lautet somit:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\tilde{W}(s)}{K\gamma_u c_u} = s + \\ & + \frac{2 \left[(\chi_N - 1)s + \frac{8\chi W}{p\nu} \right] I_1(\sqrt{\nu s}) - \frac{8\chi W}{p\nu} \sqrt{\nu s} I_0(\sqrt{\nu s})}{\sqrt{\nu s} I_0(\sqrt{\nu s}) - 2 \left(\chi - \frac{p\nu}{8} s \right) I_1(\sqrt{\nu s})} \times \\ & \times \Theta_u(s) + \frac{2 \left(s - \frac{8}{p\nu} \chi W \right) I_1(\sqrt{\nu s})}{\sqrt{\nu s} I_0(\sqrt{\nu s}) - 2 \left(\chi - \frac{p\nu}{8} s \right) I_1(\sqrt{\nu s})} \times \\ & \times [\Theta_u(s) - \Theta_R(s)]. \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Aus (90) folgt, daß die Übertragungsfunktion $\varphi_u(s)$ nur im instationären Teil des Vorganges zur Wirkung kommt, d. h. im Ausgleichszustand ist $\varphi_u \equiv 0$. Aus (95) kann man entnehmen, daß es nicht möglich ist, während des instationären Teiles des Vorganges bei zeitabhängiger Randbedingung und zeit- und ortsabhängiger Wärmequelle die aus dem System abgeführte Wärme P_{LG} durch die Temperaturdifferenz $\Theta_u(s) - \Theta_R(s)$ allein zu erfassen, sondern hier muß zusätzlich die mittlere Temperatur des multiplizierenden Mediums herausgezogen werden. Dasselbe lautet, in Formelsprache ausgedrückt:

$$\mathcal{U} \left\{ \frac{P_{LG}}{W_u} \right\} = \varphi_u(s) \Theta_u(s) + \varphi^*(s) [\Theta_u(s) - \Theta_R(s)]. \quad (96)$$

Im weiteren werden wir uns mit der Rücktransformation der beiden Übertragungsfunktionen $\varphi_u(s)$ und $\varphi^*(s)$ und mit der Ableitung von Näherungsformeln befassen, die ein möglichst gutes Bild über den physikalischen Vorgang vermitteln.

2.2. Lösung der stationären Wärmeleitungsgleichung mit ungleichmäßig verteilter Wärmequelle

Zur Kontrolle des Grenzwertes (89) wird die Differentialgleichung (61) für den stationären Fall betrachtet, d. h.

$$\frac{d^2 \theta_\infty(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta_\infty(r)}{dr} = - \frac{K W_0}{\lambda_u} I_0(\chi r). \quad (97)$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (97) ist

$$\theta_\infty(r) = - \frac{K W_0}{\lambda_u \chi^2} I_0(\chi r) + c_1 \ln r + c_2. \quad (98)$$

Mit der Bezeichnung

$$\theta_\infty(r)|_{r=r_0} = \theta_{\infty r_0}$$

und der Randbedingung

$$\left. \frac{d\theta_\infty(r)}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (99)$$

ergibt sich aus (98)

$$\theta_\infty(r) = \frac{K W_0}{\lambda_u \chi^2} [I_0(\chi r_0) - I_0(\chi r)] + \theta_{\infty r_0}. \quad (100)$$

Die weitere Randbedingung

$$\left. \frac{d\theta_\infty}{dr} \right|_{r=r_0} = - \frac{4}{r_0 p} (\theta_{\infty r_0} - \theta_{\infty R}), \quad (101)$$

ergibt

$$\theta_{\infty r_0} = \frac{\nu p}{8K} \frac{W_0}{\gamma_u c_u} + \theta_{\infty R} \quad (102)$$

mit

$$W_0 = \frac{W \chi_N}{I_0(\chi r_0)}.$$

Bildet man den Mittelwert $\theta_{\infty u}$ der Temperatur $\theta_\infty(r)$, wie er in (10) definiert wurde, so folgt:

$$\theta_{\infty r_0} = \frac{\nu p}{8\chi W} (1 + \chi W - \chi) \frac{W}{K\gamma_u c_u} + \theta_{\infty u}. \quad (103)$$

Eliminiert man $\theta_{\infty r_0}$ aus (102) und (103), so bekommt man die gesuchte stationäre Lösung der Differentialgleichung (97):

$$\frac{W}{K\gamma_u c_u} = \frac{8}{\nu p} \frac{\chi W}{\chi - 1} (\theta_{\infty u} - \theta_{\infty R}). \quad (104)$$

Die Richtigkeit des Grenzwertes (89) ist damit bewiesen. Eine Kontrolle der Grenzübergänge $s \rightarrow 0$ mittels direkter Lösung der stationären Wärmeleitungsgleichung ist überhaupt stets zweckmäßig.

2.3. Rücktransformation der Übertragungsfunktionen φ_u und φ^*

Die beiden Übertragungsfunktionen φ_u und φ^* sind meromorph und in der Umgebung von $s=0$ eindeutig. Außerdem besitzen die beiden Funktionen die gleichen Pole, da die Nenner gleich sind. In $s=0$ liegt keine Singularität vor, was aus (89) und (90) zu entnehmen ist.

Für die Übertragungsfunktionen φ_u und φ^* werden entsprechende Partialbruchreihen wie für die Funktion φ angesetzt:

$$\varphi^*(s) = \tilde{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{a}_n}{s + \frac{\tilde{\sigma}_n^2}{\nu}}, \quad (105)$$

$$\varphi_u(s) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{s + \frac{\tilde{\sigma}_n^2}{\nu}}. \quad (106)$$

Die Pole \tilde{q}_n^2/ν der beiden Funktionen sind die einfachen Nullstellen der Gleichung

$$\tilde{q} J_0(\tilde{q}) - 2 \left(\chi + \frac{p}{8} \tilde{q}^2 \right) J_1(\tilde{q}) = 0, \quad (107)$$

welche ähnlich wie Gl. (22) gewonnen wird. Außer dem Parameter p tritt hier noch der weitere Parameter χ auf, der eine Verkleinerung der Werte \tilde{q}_n der

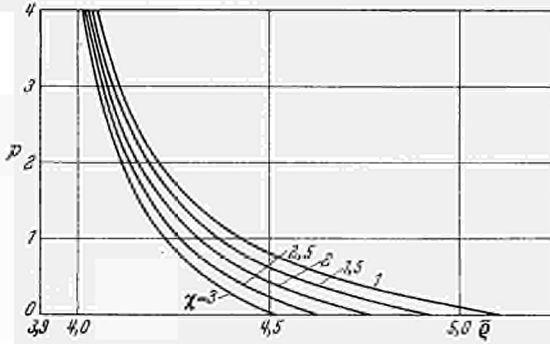


Abb. 2. Die erste Nullstelle \tilde{q}_1 der Gl. (107)

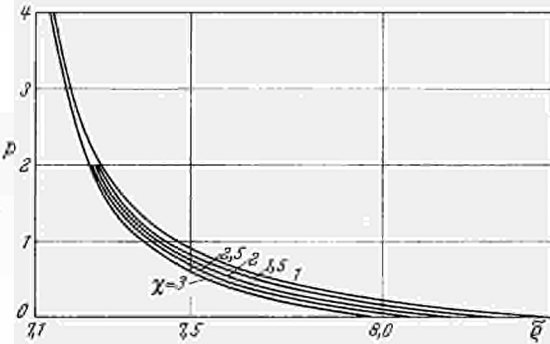


Abb. 3. Die zweite Nullstelle \tilde{q}_2 der Gl. (107)

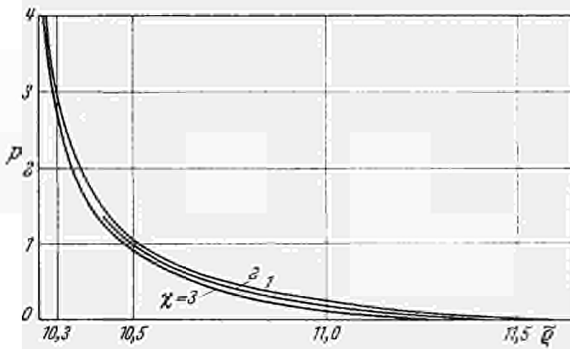


Abb. 4. Die dritte Nullstelle \tilde{q}_3 der Gl. (107)

Pole (gegenüber $\chi = 1$) zur Folge hat. Vom physikalischen Standpunkt aus ist dieses Verhalten einleuchtend, da die betrachtete räumliche Verteilung der Wärmequelle eine Vergrößerung der Zeitkonstanten der mittleren Temperatur des multiplizierenden Mediums bewirkt. Die ersten 9 Wurzeln der Gl. (107) sind in folgenden Abb. 2—10 dargestellt.

Die Koeffizienten \tilde{a}_n und \tilde{b}_n werden ähnlich wie a_n berechnet:

$$\tilde{a}_n = \frac{\mu^* \left(-\frac{\tilde{q}_n^2}{\nu} \right)}{\left. \frac{d\mu^*}{ds} \right|_{s = -\frac{\tilde{q}_n^2}{\nu}}}, \quad (108)$$

$$\tilde{b}_n = \frac{\mu_n \left(-\frac{\tilde{q}_n^2}{\nu} \right)}{\left. \frac{d\mu^*}{ds} \right|_{s = -\frac{\tilde{q}_n^2}{\nu}}}, \quad (109)$$

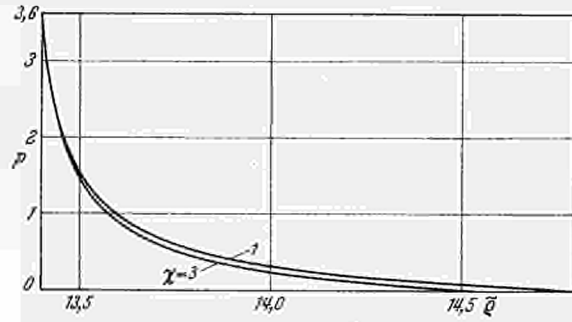


Abb. 5. Die vierte Nullstelle \tilde{q}_4 der Gl. (107)

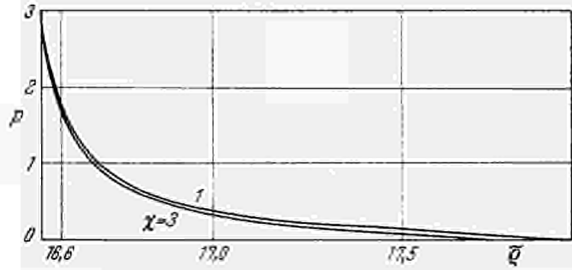


Abb. 6. Die fünfte Nullstelle \tilde{q}_5 der Gl. (107)

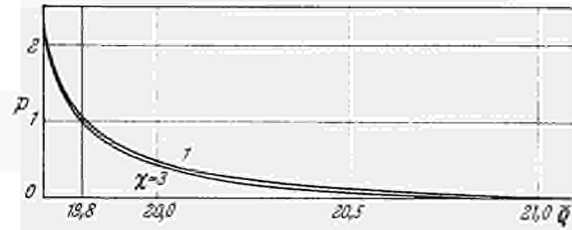


Abb. 7. Die sechste Nullstelle \tilde{q}_6 der Gl. (107)

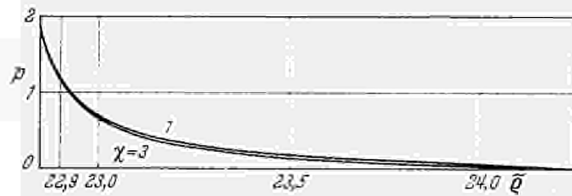


Abb. 8. Die siebente Nullstelle \tilde{q}_7 der Gl. (107)

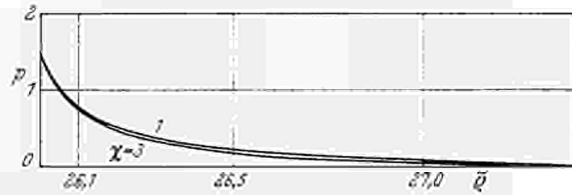


Abb. 9. Die achte Nullstelle \tilde{q}_8 der Gl. (107)

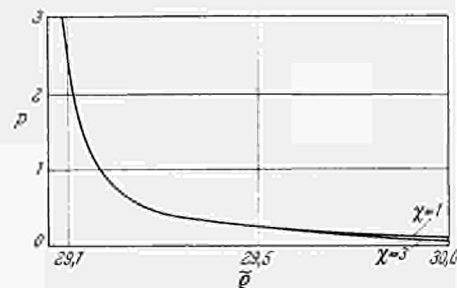


Abb. 10. Die neunte Nullstelle \tilde{q}_9 der Gl. (107)

mit:

$$\psi^*(s) = \sqrt{\nu} s I_0(\sqrt{\nu} s) - 2 \left(\chi - \frac{p\nu}{8} s \right) I_1(\sqrt{\nu} s), \quad (110)$$

$$\mu^*(s) = 2 \left(s - \frac{8}{p\nu} \chi W \right) I_1(\sqrt{\nu} s), \quad (111)$$

$$\mu_u(s) = 2 \left[(\chi_N - 1) s + \frac{8\chi W}{p\nu} \right] \times \left. \begin{aligned} & \times I_1(\sqrt{\nu} s) - \frac{8\chi W}{p\nu} \sqrt{\nu} s I_0(\sqrt{\nu} s). \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

Der Differentialquotient von (110) ist

$$\frac{d\psi^*(s)}{ds} = \left(\frac{p}{4} \nu s + 1 - 2\chi \right) \frac{\nu}{2\sqrt{\nu} s} \times \left. \begin{aligned} & \times I_0(\sqrt{\nu} s) + \left[\frac{\nu}{8} (4 + p) + \frac{\chi}{s} \right] I_1(\sqrt{\nu} s). \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

Aus (108), unter Berücksichtigung von (107), (111) und (113), folgen die gesuchten Koeffizienten \tilde{a}_n :

$$\tilde{a}_n = - \frac{4}{\nu^2 (p\chi + 1)} \frac{\left(\frac{8\chi W}{p} + \tilde{q}_n^2 \right) \tilde{q}_n^2}{\frac{4\chi(\chi - 1)}{p\chi + 1} + \tilde{q}_n^2 + \frac{p^2}{16(p\chi + 1)} \tilde{q}_n^4}. \quad (114)$$

Auf ähnliche Art wie die Koeffizienten \tilde{a}_n werden die Koeffizienten b_n aus (109), (107) und (112) berechnet:

$$b_n = - \frac{4(\chi - 1)}{\nu^2 (p\chi + 1)} \frac{\left(\frac{8\chi W}{p} + \tilde{q}_n^2 \right) \tilde{q}_n^2}{\frac{4\chi(\chi - 1)}{p\chi + 1} + \tilde{q}_n^2 + \frac{p^2}{16(p\chi + 1)} \tilde{q}_n^4}. \quad (115)$$

Zwischen den Koeffizienten \tilde{a}_n und b_n besteht eine Proportionalität:

$$b_n = (\chi - 1) \tilde{a}_n. \quad (116)$$

Die beiden Grenzwerte sind:

$$\lim_{\tilde{q}_n \rightarrow \infty} \tilde{a}_n = - \frac{64}{\nu^2 p^2}. \quad (117)$$

Dieser Grenzwert ist dem bei (27) gefundenen gleich.

$$\lim_{\tilde{q}_n \rightarrow \infty} b_n = - \frac{64}{\nu^2 p^2} (\chi - 1). \quad (118)$$

Es bleiben noch die Koeffizienten \tilde{a}_0 und b_0 zu bestimmen, die dem Ausgleichszustand des Systems ($s \rightarrow 0$) zugeordnet sind. Den ersten Koeffizienten berechnet man aus (89), (105) und (114). Das Ergebnis lautet:

$$\tilde{a}_0 = \left. \begin{aligned} & \frac{\chi W}{\chi - 1} \frac{8}{p\nu} + \frac{4}{\nu(p\chi + 1)} \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{8\chi W}{p} + \tilde{q}_n^2}{\frac{4\chi(\chi - 1)}{p\chi + 1} + \tilde{q}_n^2 + \frac{p^2}{16(p\chi + 1)} \tilde{q}_n^4} \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

Der zweite Koeffizient läßt sich aus (93), (106) und (115) bestimmen:

$$b_0 = \left. \begin{aligned} & \frac{4(\chi - 1)}{\nu(p\chi + 1)} \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{8\chi W}{p} + \tilde{q}_n^2}{\frac{4\chi(\chi - 1)}{p\chi + 1} + \tilde{q}_n^2 + \frac{p^2}{16(p\chi + 1)} \tilde{q}_n^4} \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

Die beiden Übertragungsfunktionen φ^* und φ_u können somit folgendermaßen geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \varphi^*(s) &= \frac{\chi W}{\chi - 1} \frac{8}{p\nu} + \frac{4}{\nu(p\chi + 1)} \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{8\chi W}{p} + \tilde{q}_n^2}{\frac{4\chi(\chi - 1)}{p\chi + 1} + \tilde{q}_n^2 + \frac{p^2}{16(p\chi + 1)} \tilde{q}_n^4} - \\ & - \frac{4(\chi - 1)}{\nu^2 (p\chi + 1)} \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{8\chi W}{p} + \tilde{q}_n^2 \right) \tilde{q}_n^2}{\frac{4\chi(\chi - 1)}{p\chi + 1} + \tilde{q}_n^2 + \frac{p^2}{16(p\chi + 1)} \tilde{q}_n^4} \frac{1}{s + \frac{\tilde{q}_n^2}{\nu}} \\ \varphi_u(s) &= \frac{4(\chi - 1)}{\nu(p\chi + 1)} \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{8\chi W}{p} + \tilde{q}_n^2}{\frac{4\chi(\chi - 1)}{p\chi + 1} + \tilde{q}_n^2 + \frac{p^2}{16(p\chi + 1)} \tilde{q}_n^4} - \\ & - \frac{4(\chi - 1)}{\nu^2 (p\chi + 1)} \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{8\chi W}{p} + \tilde{q}_n^2 \right) \tilde{q}_n^2}{\frac{4\chi(\chi - 1)}{p\chi + 1} + \tilde{q}_n^2 + \frac{p^2}{16(p\chi + 1)} \tilde{q}_n^4} \frac{1}{s + \frac{\tilde{q}_n^2}{\nu}} \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

Nun werden weitere Konstanten zur Abkürzung eingeführt:

$$\tilde{\omega} = \frac{p^2 \nu}{16(p\chi + 1)}, \quad (123)$$

$$\tilde{\tau}_n = \frac{\nu}{\tilde{q}_n^2}, \quad (124)$$

$$\xi = \frac{4\chi(\chi - 1)}{p\chi + 1}, \quad (125)$$

$$\mu = \frac{8\chi W}{p\nu} = \alpha^2 \chi^2. \quad (126)$$

Hierbei gilt: $\lim_{\chi \rightarrow 1} \tilde{\omega} = \omega$; $\lim_{\chi \rightarrow 1} \tilde{\tau}_n = \tau_n$; $\lim_{\chi \rightarrow 1} \xi = 0$ und $\lim_{\chi \rightarrow 1} \mu = 0$.

Nach Rücktransformation der Übertragungsfunktionen (121) und (122) in die Originalebene ermöglichen die so eingeführten Parameter des Systems eine Untersuchung vom physikalischen Standpunkt aus und erhöhen die Übersichtlichkeit.

$$\varphi^*(s) = \left. \begin{aligned} & \frac{1}{\chi - 1} \left[\mu + \frac{\xi}{\chi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \mu \tilde{\tau}_n) \tilde{\tau}_n}{\nu \tilde{\omega} + \nu \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2} - \right. \\ & \left. - \frac{\xi}{\chi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \mu \tilde{\tau}_n}{\nu \tilde{\omega} + \nu \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2} \frac{1}{s + \frac{1}{\tilde{\tau}_n}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

$$\varphi_u(s) = \left. \begin{aligned} & \frac{\xi}{\chi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \mu \tilde{\tau}_n) \tilde{\tau}_n}{\nu \tilde{\omega} + \nu \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2} - \\ & - \frac{\xi}{\chi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \mu \tilde{\tau}_n}{\nu \tilde{\omega} + \nu \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2} \frac{1}{s + \frac{1}{\tilde{\tau}_n}} \end{aligned} \right\} \quad (128)$$

Aus dieser Schreibweise der Übertragungsfunktionen φ^* und φ_u erkennt man ihren linearen Zusammenhang:

$$\varphi_u(s) = (\chi - 1) \varphi^*(s) - \mu. \quad (129)$$

Daraus folgt, daß die Greensche Funktion G_u aus der Greenschen Funktion G^* gemäß (129) angegeben werden kann.

2.4. Rücktransformation
der Wärmeleitungsgleichung (95)

Das behandelte Problem wird durch die folgenden beiden Greenschen Funktionen beschrieben:

$$G^*(t) = \mathcal{U}^{-1} \{ \varphi^*(s) \}, \tag{130}$$

$$G_u(t) = \mathcal{U}^{-1} \{ \varphi_u(s) \}. \tag{131}$$

Damit können wir die rücktransformierte Wärmeleitungsgleichung (95) schreiben

$$\left. \begin{aligned} \frac{W(t)}{K\gamma_u c_u} = \dot{\theta}_u(t) + G_u(t) * \theta_u(t) + \\ + G^*(t) * [\theta_u(t) - \theta_R(t)]. \end{aligned} \right\} \tag{132}$$

Die Integralkombination (Faltung) der Funktionen $\theta(t)$ und $G(t)$ hat die einfache Form:

$$\left. \begin{aligned} G_u(t) * \theta_u(t) = \frac{\xi}{\chi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \mu \tilde{\tau}_n) \tilde{\tau}_n}{\nu \tilde{\omega} + \nu \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2} \theta_u(t) - \\ - \frac{\xi}{\chi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \mu \tilde{\tau}_n}{\nu \tilde{\omega} + \nu \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2} e^{-\frac{t}{\tilde{\tau}_n}} \int_0^t \theta_u(\tau) e^{\frac{\tau}{\tilde{\tau}_n}} d\tau, \end{aligned} \right\} \tag{133}$$

$$\left. \begin{aligned} G^*(t) * [\theta_u(t) - \theta_R(t)] \\ = \frac{1}{\chi - 1} \left\{ \left[\mu + \frac{\xi}{\chi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \mu \tilde{\tau}_n) \tilde{\tau}_n}{\nu \tilde{\omega} + \nu \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2} \right] \times \right. \\ \times [\theta_u(t) - \theta_R(t)] - \frac{\xi}{\chi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \mu \tilde{\tau}_n}{\nu \tilde{\omega} + \nu \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2} \times \\ \left. \times e^{-\frac{t}{\tilde{\tau}_n}} \int_0^t [\theta_u(\tau) - \theta_R(\tau)] e^{\frac{\tau}{\tilde{\tau}_n}} d\tau \right\}. \end{aligned} \right\} \tag{134}$$

Die Faltungsintegrale (133) und (134) werden partiell integriert:

$$\left. \begin{aligned} G_u(t) * \theta_u(t) = \frac{\xi}{\chi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \mu \tilde{\tau}_n) \tilde{\tau}_n}{\nu \tilde{\omega} + \nu \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2} \times \\ \times e^{-\frac{t}{\tilde{\tau}_n}} \int_0^t \frac{d\theta_u(\tau)}{d\tau} e^{\frac{\tau}{\tilde{\tau}_n}} d\tau, \end{aligned} \right\} \tag{135}$$

$$\left. \begin{aligned} G^*(t) * [\theta_u(t) - \theta_R(t)] \\ = \frac{1}{\chi - 1} \left\{ \mu [\theta_u(t) - \theta_R(t)] + \right. \\ + \frac{\xi}{\chi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \mu \tilde{\tau}_n) \tilde{\tau}_n}{\nu \tilde{\omega} + \nu \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2} e^{-\frac{t}{\tilde{\tau}_n}} \times \\ \left. \times \int_0^t \frac{d}{d\tau} [\theta_u(\tau) - \theta_R(\tau)] e^{\frac{\tau}{\tilde{\tau}_n}} d\tau \right\}. \end{aligned} \right\} \tag{136}$$

Die Faltungen (135) und (136) werden zum Schluß zwecks Elimination der Integrale durch ein Differentialgleichungssystem ersetzt. Hierzu werden — ähnlich wie bei gleichmäßig verteilter Wärmequelle — Funktionen $\tilde{I}(t)$ definiert, mit deren Hilfe die in die Originalebene rücktransformierte Wärmeleitungsgleichung (95) geschrieben werden kann:

$$\left. \begin{aligned} \frac{W(t)}{K\gamma_u c_u} - \dot{\theta}_u(t) = \frac{\mu}{\chi - 1} [\theta_u(t) - \theta_R(t)] + \\ + \frac{\xi}{\chi(\chi - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \mu \tilde{\tau}_n) \tilde{\tau}_n}{\nu \tilde{\omega} + \nu \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2} \tilde{I}_n(t) + \\ + \frac{\xi}{\chi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \mu \tilde{\tau}_n) \tilde{\tau}_n}{\nu \tilde{\omega} + \nu \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2} \tilde{I}_{nu}(t) \\ \tilde{I}_1(t) + \tilde{\tau}_1 \dot{\tilde{I}}_1(t) = \tilde{\tau}_1 [\dot{\theta}_u(t) - \dot{\theta}_R(t)] \\ \vdots \\ \tilde{I}_n(t) + \tilde{\tau}_n \dot{\tilde{I}}_n(t) = \tilde{\tau}_n [\dot{\theta}_u(t) - \dot{\theta}_R(t)] \\ \vdots \\ \tilde{I}_{nu}(t) + \tilde{\tau}_1 \dot{\tilde{I}}_{1n}(t) = \tilde{\tau}_1 \dot{\theta}_u(t) \\ \vdots \\ \tilde{I}_{nu}(t) + \tilde{\tau}_n \dot{\tilde{I}}_{nu}(t) = \tilde{\tau}_n \dot{\theta}_u(t) \\ \vdots \\ (n = 1; 2; \dots). \end{aligned} \right\} \tag{137}$$

Die gesamte Wärmeleitung $\tilde{P}_{LG}(t)$ des multiplizierenden Mediums, die durch die θ_R -Kontrollfläche hindurchgeht, ist:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{P}_{LG}(t) = \frac{\mu W_u}{\chi - 1} [\theta_u(t) - \theta_R(t)] + \\ + \frac{\xi W_u}{\chi(\chi - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \mu \tilde{\tau}_n) \tilde{\tau}_n}{\nu \tilde{\omega} + \nu \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2} \tilde{I}_n(t) + \\ + \frac{\xi W_u}{\chi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \mu \tilde{\tau}_n) \tilde{\tau}_n}{\nu \tilde{\omega} + \nu \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2} \tilde{I}_{nu}(t), \end{aligned} \right\} \tag{138}$$

wobei die Funktionen \tilde{I}_n und \tilde{I}_{nu} durch die Differentialgleichungen (137) definiert sind.

Der „stationäre Anteil“ der abgeführten Wärmeleistung, ähnlich (36), hat folgende Form:

$$\tilde{P}_L(t) = \frac{\mu W_u}{\chi - 1} [\theta_u(t) - \theta_R(t)]. \tag{139}$$

Die Ausdrücke (104) und (139) sind identisch, wenn in (139) die Temperaturdifferenz $\theta_u(t) - \theta_R(t)$ zeitunabhängig ist.

Ist in einem System (wie in Abschnitt 1) die Bedingung erfüllt

$$r_0 < \tilde{q}_1 \sqrt{\frac{\lambda_u}{\gamma_u c_u}} A, \tag{140}$$

so kann man das Differentialgleichungssystem (137) in Form von Wärmeleistungstermen schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{P}_{LG}(t) = \tilde{P}_L(t) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} [\tilde{P}_L^{(m)}(t) - \tilde{P}_L^{(m)}(0)] \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Omega}_n \tilde{\tau}_n^{m-1} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} [P_{LR}^{(m)}(t) - P_{LR}^{(m)}(0)] \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Omega}_{nR} \tilde{\tau}_n^{m-1}, \end{aligned} \right\} \tag{141}$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Omega}_{L1} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Omega}_n = \frac{p\nu}{2(p\chi + 1)} \frac{\chi - 1}{\chi W} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \mu \tilde{\tau}_n) \tilde{\tau}_n^2}{\nu \tilde{\omega} + \nu \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2}, \end{aligned} \right\} \tag{142}$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Omega}_{LR1} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Omega}_{nR} = \frac{p\nu}{2(p\chi + 1)} \frac{(\chi - 1)^2}{\chi W} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \mu \tilde{\tau}_n) \tilde{\tau}_n^2}{\nu \tilde{\omega} + \nu \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2}. \end{aligned} \right\} \tag{143}$$

Zwischen den beiden Zeitkonstanten besteht eine einfache Proportionalität:

$$\tilde{\Omega}_{LR1} = (\chi - 1) \tilde{\Omega}_{L1}. \quad (144)$$

Es bleibt noch einer der obigen Ausdrücke zu definieren, nämlich:

$$P_{LR}(t) = \frac{\mu W_u}{\chi - 1} [\theta_u(t) - \bar{\theta}_{R_0}], \quad (145)$$

wobei

$\bar{\theta}_{R_0}$ = Anfangswert auf dem Rand. Im vorliegenden Fall wurde $\bar{\theta}_{R_0} = 0$ gesetzt.

P_{LR} = „stationärer Anteil“ der abgeführten Wärmeleistung bei konstanter Randbedingung.

Entwickelt man die Terme der Gl. (95) in Potenzreihen nach s , zu deren Konvergenz die Bedingung (140) erfüllt sein muß, so stellt man zwecks Koeffizientenvergleich die beiden Faltungen auf folgende Weise dar:

$$\left. \begin{aligned} G^*(t) * [\theta_u(t) - \theta_R(t)] &= (\theta_u - \theta_R) \frac{\mu}{\chi - 1} + \\ &+ (\dot{\theta}_u - \dot{\theta}_R) \frac{\xi}{\chi(\chi - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \mu \tilde{\tau}_n) \tilde{\tau}_n^2}{v \tilde{\omega} + v \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2} - \\ &- (\ddot{\theta}_u - \ddot{\theta}_R) \frac{\xi}{\chi(\chi - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \mu \tilde{\tau}_n) \tilde{\tau}_n^3}{v \tilde{\omega} + v \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2} + \\ &+ (\ddot{\theta}_u - \ddot{\theta}_R) \frac{\xi}{\chi(\chi - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \mu \tilde{\tau}_n) \tilde{\tau}_n^4}{v \tilde{\omega} + v \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2} - \dots - \\ &- \lim_{t \rightarrow +0} \left\{ (\theta_u - \theta_R) \frac{\mu}{\chi - 1} + (\dot{\theta}_u - \dot{\theta}_R) \times \right. \\ &\left. \times \frac{\xi}{\chi(\chi - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \mu \tilde{\tau}_n) \tilde{\tau}_n^2}{v \tilde{\omega} + v \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2} - \dots \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (146)$$

$$\left. \begin{aligned} G_u(t) * \theta_u(t) &= \dot{\theta}_u \frac{\xi}{\chi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \mu \tilde{\tau}_n) \tilde{\tau}_n^2}{v \tilde{\omega} + v \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2} - \\ &- \ddot{\theta}_u \frac{\xi}{\chi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \mu \tilde{\tau}_n) \tilde{\tau}_n^3}{v \tilde{\omega} + v \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2} + \\ &+ \ddot{\theta}_u \frac{\xi}{\chi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \mu \tilde{\tau}_n) \tilde{\tau}_n^4}{v \tilde{\omega} + v \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2} - \dots - \\ &- \lim_{t \rightarrow +0} \left\{ \dot{\theta}_u \frac{\xi}{\chi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \mu \tilde{\tau}_n) \tilde{\tau}_n^2}{v \tilde{\omega} + v \tilde{\tau}_n + \xi \tilde{\tau}_n^2} - \dots \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

Eine unbeschränkte Differenzierbarkeit der Temperaturen θ_u und θ_R muß in (146) und (147) vorausgesetzt werden. Diese Bedingung schränkt die Anwendbarkeit der beiden Ausdrücke weitgehend ein. Man benutzt diese zweite Methode (Reihenentwicklung), da man doch brauchbare Näherungsformeln zur Bestimmung der ersten Residuen der Übertragungsfunktionen bekommt, wenn man mit dem Ergebnis der ersten Methode (Residuen) vergleicht. Dabei erübrigt sich die Bestimmung der Wurzeln der Gl. (107), die nur etwas mühsam numerisch mit Hilfe von Bessel-Funktionstafeln möglich ist.

Aus (129) geht hervor, daß es ausreichend ist, nur eine der beiden Übertragungsfunktionen φ_u bzw. φ^* in eine Reihe zu entwickeln, da die Koeffizienten der anderen sofort aus der ersten angegeben werden können.

Die Reihenentwicklung der φ_u -Funktion mit einigen ersten der berechneten Koeffizienten hat folgende Form:

$$\varphi_u(s) = \tilde{d}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{d}_n s^n, \quad (148)$$

$$\tilde{d}_0 = 0$$

$$\tilde{d}_1 = \frac{1}{p(\chi - 1)} [(\chi_W + 1 - \chi)p + \chi_W]$$

$$\tilde{d}_2 = \frac{v}{2^3 3 p (\chi - 1)^2} \times \\ \times [3(\chi_W + 1 - \chi)p^2 + 3(2\chi_W + 1 - \chi)p + (\chi + 2)\chi_W]$$

$$\tilde{d}_3 = \frac{v^2}{2^7 3 p (\chi - 1)^3} [6(\chi_W + 1 - \chi)p^3 + 6(3\chi_W - 2\chi + 2) \times \\ \times p^2 + 2(\chi^2 - 5\chi + 9\chi_W + 4)p - 3\chi_W(\chi^2 - \chi - 1)] \\ \vdots$$

3. Die maximale Temperatur des Brennstabes bei instationären Vorgängen

3.1. Die Ableitung der Übertragungsfunktion der maximalen Temperatur

Die maximale Temperatur des Brennstabes ist einer der Grenzwerte für die Anlage. Ihr dazugehöriger Gefährdungswert wird je nach Art des multiplizierenden Mediums angegeben, z.B. Schmelztemperatur des $UO_2 \cong 2750^\circ C$.

Im vorliegenden wird aus der partiellen Differentialgleichung der Wärmeleitung (1) mit gleichen Anfangs- und Randbedingungen wie in 1.1 ein exakter Ausdruck für die maximale Brennstabtemperatur gesucht.

Setzt man in Gl. (7) $r = 0$ und bezeichnet

$$\Theta(r, s)|_{r=0} = \Theta_m(s)$$

als maximale Temperatur des Brennstabes, so bekommt man folgenden Ausdruck:

$$\frac{W(s)}{s\gamma_u c_u} = \frac{I_0(\sqrt{v}s)}{I_0(\sqrt{v}s) - 1} \Theta_m(s) - \frac{1}{I_0(\sqrt{v}s) - 1} \Theta_{r_0}(s). \quad (149)$$

Um $\Theta_{r_0}(s)$ und $\frac{W(s)}{s\gamma_u c_u}$ in der letzten Gleichung durch $\Theta_u(s)$ und $\Theta_R(s)$ zu ersetzen, benutzt man die Gln. (9) und (12). Die Elimination ergibt:

$$\Theta_m(s) = \Theta_u(s) + \left. \begin{aligned} &+ \frac{2I_1(\sqrt{v}s) - \sqrt{v}s}{\sqrt{v}s I_0(\sqrt{v}s) - 2 \left(1 - \frac{p\nu}{8} s\right) I_1(\sqrt{v}s)} \times \\ &\times [\Theta_u(s) - \Theta_R(s)]. \end{aligned} \right\} \quad (150)$$

Die hier auftretende Übertragungsfunktion

$$\varphi_m(s) = \frac{2I_1(\sqrt{v}s) - \sqrt{v}s}{\sqrt{v}s I_0(\sqrt{v}s) - 2 \left(1 - \frac{p\nu}{8} s\right) I_1(\sqrt{v}s)} \quad (151)$$

hat die gleichen Pole wie die Funktion $\varphi(s)$.

Die Gl. (150) ist physikalisch leicht interpretierbar. Ist die Bedingung (39) erfüllt, so kann man φ_m in eine Potenzreihe nach s entwickeln, d.h.

$$\varphi_m(s) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n s^n. \quad (152)$$

Ihre ersten Glieder ergeben sich wie folgt:

$$\varphi_m(s) = \frac{1}{(p+1)} - \frac{(2p+1)v}{2^3 3(p+1)^2} s + \left. \begin{aligned} &+ \frac{(7p^2+7p+3)v^2}{2^7 3^2(p+1)^3} s^2 - \\ &- \frac{(117p^3+173p^2+125p+39)v^3}{2^{11} 3^2 5(p+1)^4} s^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (153)$$

Aus

$$\lim_{s \rightarrow 0} \varphi_m(s) = \frac{1}{(p+1)} \quad (154)$$

erfolgt die stationäre Lösung von (150)

$$\Theta_m(0) = \Theta_u(0) + \frac{1}{(p+1)} [\Theta_u(0) - \Theta_R(0)], \quad (155)$$

was dem Laplace-transformierten Ausgleichszustand entspricht.

3.2. Rücktransformation der instationären Maximaltemperatur des Brennstabes

Zum Zwecke der Rücktransformation der Übertragungsfunktion wird eine Partialbruchreihe angesetzt:

$$\varphi_m(s) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{s + \frac{\alpha_n^2}{v}} = \frac{\mu_m(s)}{\psi_m(s)} \quad (156)$$

mit

$$\mu_m(s) = 2I_1(\sqrt{v}s) - \sqrt{v}s \quad \text{und} \quad \psi_m(s) = \psi(s)$$

aus Gl. (20).

Die Koeffizienten d_n bekommt man aus

$$d_n = \frac{\mu_m(s)}{\frac{d\psi(s)}{ds}} \Big|_{s = -\frac{\alpha_n^2}{v}} \quad (157)$$

Durch Umformung ergibt sich

$$d_n = \frac{8}{v} \frac{[2J_1(\alpha_n) - \alpha_n] \alpha_n^2}{[(p+4)\alpha_n^2 - 8]J_1(\alpha_n) + \alpha_n[p\alpha_n^2 + 4]J_0(\alpha_n)} \quad (158)$$

Benutzt man die Bestimmungsgleichung (22), so erhält der Ausdruck (158) eine ganz einfache Form:

$$d_n = \frac{2}{v(p+1)} \frac{2 - \frac{\alpha_n}{J_1(\alpha_n)}}{1 + \frac{\omega}{v} \alpha_n^2} \quad (159)$$

Zur Bestimmung des Koeffizienten d_0 benutzt man (154), (156) und (159). Das Ergebnis lautet:

$$d_0 = \frac{1}{p+1} - \frac{2}{p+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - \frac{\alpha_n}{J_1(\alpha_n)}}{\left(1 + \frac{\omega}{v} \alpha_n^2\right) \alpha_n^2} \quad (160)$$

Die Greensche Funktion der maximalen Temperatur des Brennstabes wird mit $G_m(t)$ bezeichnet:

$$G_m(t) = \mathcal{U}^{-1} \{ \varphi_m(s) \}. \quad (161)$$

Die rücktransformierte Gl. (150) erhält durch Ausführung der Faltungsoperation die Form:

$$\theta_m(t) = \theta_u(t) + \frac{1}{p+1} \left\{ [\theta_u(t) - \theta_R(t)] - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - \frac{\alpha_n}{J_1(\alpha_n)}}{\left(1 + \frac{\omega}{v} \alpha_n^2\right) \alpha_n^2} e^{-\frac{\alpha_n^2}{v} t} \times \int_0^t \frac{d}{d\tau} [\theta_u(\tau) - \theta_R(\tau)] e^{\frac{\alpha_n^2}{v} \tau} d\tau \right\} \quad (162)$$

Benutzt man die Temperaturfunktionen $I_n(t)$ wie in (48), so kann der Lösung (162) nach Umformung ihre endgültige einfache Form gegeben werden:

$$\theta_m(t) = \theta_u(t) + \frac{1}{p+1} [\theta_u(t) - \theta_R(t)] + \frac{8}{v(p+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha_n}{2J_1(\alpha_n)} - 1 \right] \Omega_n I_n(t) \left. \begin{aligned} I_1(t) + \tau_1 \dot{I}_1(t) &= \tau_1 [\dot{\theta}_u(t) - \dot{\theta}_R(t)] \\ \vdots \\ I_n(t) + \tau_n \dot{I}_n(t) &= \tau_n [\dot{\theta}_u(t) - \dot{\theta}_R(t)] \\ \vdots \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

Aus (163) ist zu ersehen, daß man bei instationären Vorgängen nicht nur mit dem üblichen „stationären Anteil“ der maximalen Temperatur

$$\theta_{ms}(t) = \theta_u(t) + \frac{1}{p+1} [\theta_u(t) - \theta_R(t)] \quad (164)$$

rechnen darf, sondern das Differentialgleichungssystem (163) zu verwenden hat, das die physikalischen Vorgänge exakt beschreibt. Man wird sich bei der Anwendung auf einige wenige Differentialgleichungen beschränken. Den durch die Vernachlässigung der restlichen Differentialgleichungen gemachten Fehler kann man mit beliebiger Genauigkeit abschätzen.

Es wird noch auf das Auftreten des Ausdruckes

$$\alpha_n = \frac{\alpha_n}{2J_1(\alpha_n)} - 1 \quad (165)$$


in (163) hingewiesen, der die Vorzeichenänderung der einzelnen Summanden zur Folge hat. Die Folgerung daraus ist, daß bei der Wahl der Anzahl der Gleichungen im System (163) die letzte Temperaturfunktion mit positivem Vorzeichen versehen sein soll, da man sich nur dann auf der „sicheren Seite“ der Abschätzung befindet.

Anders war das Verhalten des Ausdruckes (47), wo es sich um eine monotone Konvergenz an den exakten Wert handelte. Im Falle der für die Maximaltemperatur auftretenden alterierenden Konvergenz erhöht zwar auch jeder Summand die Genauigkeit, doch ist zu beachten, daß jeder zweite Summand eine Näherungslösung auf der „unsicheren Seite“ ergibt.

Literatur: [1] WATSON, G.N.: A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge: Cambridge University Press 1958. — [2] DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation, Bd. 1—3. München: R. Oldenburg 1955.

Anschrift: R. PALINSKI
EURATOM CCR
Ispra/Varese/Italien

Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz A.G., Würzburg



Erkenntnisse verbreiten ist soviel wie Wohlstand verbreiten — ich meine den allgemeinen Wohlstand, nicht den individuellen Reichtum — denn mit dem Wohlstand verschwindet mehr und mehr das Böse, das uns aus dunkler Zeit vererbt ist.

Alfred Nobel

CDNA01089DEC

EURATOM — C.I.D.
51-53, rue Belliard
Bruxelles (Belgique)