

Robuste Regelung aktiver Rotoren: Unsicherheitsbeschreibungen in der μ -Synthese

Dissertation am Fachbereich Maschinenbau der Technischen Universität Darmstadt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Vom Fachbereich Maschinenbau
an der Technischen Universität Darmstadt
zur
Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing)
genehmigte

DISSERTATION

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Bernd Riemann

aus Hanau

Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. S. Rinderknecht
Mitberichterstatter: Prof. Dr.-Ing. U. Konigorski

Tag der Einreichung: 21.11.2013
Tag der mündlichen Prüfung: 28.01.2014

Darmstadt 2014

D 17

Kurzfassung

Für schnelldrehende rotordynamische Systeme stoßen passive Maßnahmen zur Reduktion von Biegeschwingungen in extremen Anwendungsfällen an Grenzen, so dass aktive Maßnahmen eine vielversprechende Alternative darstellen. Die Dynamik der Biegeschwingungen ist dabei oftmals stark von der Rotordrehzahl abhängig. Dies ist meist auf Einflüsse von hydrodynamischen Schmierfilmen in Gleitlagern sowie auf den gyroskopischen Effekt zurückzuführen.

Regelungen zur aktiven Schwingungsreduktion müssen die drehzahlabhängige Systemdynamik berücksichtigen, wenn robuste Stabilität und Performance gefordert sind. Eine Analyse robuster Regelverfahren zeigt die Eignung der μ -Synthese zum Reglerentwurf für unsichere, elastische Strukturen. Anwendungen der μ -Synthese für hydrodynamisch gelagerte Rotoren sind bisher nicht bekannt und verfügbare Veröffentlichungen zur Anwendung auf Rotoren mit gyroskopischem Effekt erreichen nur geringe Robustheit. Die vorliegende Arbeit präsentiert daher übertragbare Methodiken zum robusten Reglerentwurf mittels μ -Synthese für drei verschiedene Anwendungsfälle anhand von repräsentativen Rotor-Prüfständen.

Der erste Reglerentwurf dient der Unterdrückung von *Oil Whip*-Instabilitäten, die beim Einsatz von Gleitlagern für elastische Rotoren durch Destabilisierung der ersten Biegemode entstehen. Es wird gezeigt, dass deutliche Vereinfachungen für das dynamische Modell getroffen werden können. So kann die μ -Synthese ohne weitere Anpassungen zum Reglerentwurf verwendet werden.

Bei einem zweiten Reglerentwurf für hydrodynamisch gelagerte Rotoren mit stark ausgeprägten *Oil Whirl*-Schwingungen sind einige der zuvor getroffenen Vereinfachungen nicht zulässig. Zudem ergibt die starke Veränderung der Eigenfrequenz einer speziellen Eigenmode eine große Robustheitsanforderung. Modale Unsicherheiten, die deutlich größer als in bekannten Anwendungsfällen sind, werden hier spezifisch eingestellt, so dass ein robuster Reglerentwurf erfolgreich durchgeführt werden kann.

Für den dritten Reglerentwurf zur Berücksichtigung gyroskopischer Unsicherheiten sind die Dynamikveränderungen des untersuchten Rotorsystems besonders stark. Eine effiziente Unsicherheitsbeschreibung ist dabei nur über eine direkte mathematische Beschreibung der Gyroskopie möglich. Um diese ohne Konservativität einzustellen, werden reelle Unsicherheiten verwendet. Lösungsverfahren zur Behandlung dieser Unsicherheiten sind jedoch oft nicht zuverlässig, so dass bisher kein erfolgreicher Entwurf möglich war. Um dennoch eine Lösung mit der sog. *DK-Iteration* zu ermöglichen, werden die Unsicherheitsbereiche daher stets um komplexe Werte erweitert. Diese Konservativität wird mit der hier entwickelten Entwurfsmethodik überwunden, so dass ein Regler mit robuster Stabilität und Performance für den gesamten Drehzahlbetriebsbereich entworfen werden kann. Die vorgestellte Methodik umfasst eine Modellierung mit minimaler Unsicherheitsstruktur sowie eine Synthese mit einer optimierten Version der sog. μK -Iteration. Dies ermöglicht erstmals einen Entwurf mit reellen gyroskopischen Unsicherheiten. Der Entwurf zeigt, dass eine robuste Reglersynthese für elastische Strukturen mit großen, reellen Unsicherheiten möglich ist und leistet somit einen allgemeinen Beitrag zur robusten Regelung.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation und Zielsetzung	1
1.2	Aufbau der Arbeit.....	2
2	Grundlagen Rotordynamik und Regelungstechnik	3
2.1	Einführung in die Rotordynamik	3
2.1.1	Kreiselwirkung.....	6
2.1.2	Hydrodynamisch gelagerte Rotoren	7
2.2	Schwingungsreduktion	10
2.3	Grundbegriffe der Regelungstechnik	11
2.4	Lineare Regelverfahren	14
2.4.1	Klassische Methoden.....	14
2.4.2	Moderne Methoden	14
2.4.3	Post-moderne Methoden.....	15
2.5	Robuste Regelung	17
2.5.1	Unsicherheiten.....	17
2.5.2	Robuste moderne Verfahren	18
2.5.3	Robuste quasi-klassische Verfahren.....	19
2.5.4	Robuste post-moderne Verfahren.....	19
2.5.5	Weitere Verfahren	20
2.5.6	Diskussion	21
2.6	Theorie der H_∞ - und μ -Synthese	22
2.6.1	Small Gain Theorem	22
2.6.2	H_∞ -Synthese	23
2.6.3	Der Strukturierte Singulärwert	25
2.6.4	μ -Synthese.....	28
2.6.5	DK- und (D,G)K-Iteration.....	29
2.6.6	μ K-Iteration	31
3	Stand der Technik und Zielsetzung	35
3.1	Stand der Technik: Regelung von aktiven Rotorsystemen.....	35
3.1.1	Aktive Rotoren in hydrodynamischen Lagern.....	35

3.1.2	Rotoren in aktiven Piezolagern	36
3.1.3	Rotoren in aktiven Magnetlagern.....	37
3.1.4	Entwurfsmethodik	39
3.2	Diskussion.....	39
3.3	Zielsetzung und Vorgehensweise	41
4	Prüfstände	43
4.1	Oil Whip-Prüfstand.....	43
4.2	Oil Whirl-Prüfstand	47
4.3	Prüfstand für starke Gyroskopie	50
5	Entwurf zur Oil Whip-Unterdrückung	53
5.1	Systemanalyse und Vorgehensweise	53
5.2	Modellbildung.....	54
5.3	Unsicherheiten	55
5.4	Performance-Vorgaben.....	57
5.5	Synthese.....	58
5.6	Iterative Optimierung und Synthesergebnisse	59
5.7	Validierung und Implementierung.....	61
5.8	Diskussion der Ergebnisse	63
6	Entwurf zur Oil Whirl-Unterdrückung	65
6.1	Systemanalyse und Vorgehensweise	65
6.2	Modellbildung.....	66
6.3	Unsicherheiten	68
6.4	Performance-Vorgaben.....	71
6.5	Synthese.....	72
6.6	Iterative Optimierung und Synthesergebnisse	73
6.7	Validierung und Implementierung.....	76
6.8	Diskussion der Ergebnisse	78
7	Entwurf mit gyroskopischem Effekt	79
7.1	Systemanalyse und Vorgehensweise	79
7.2	Modellbildung und Unsicherheiten.....	80
7.2.1	Reduktion des nominellen Systems	83
7.2.2	Reduktion der gyroskopischen Unsicherheit.....	84



7.2.3	Gesamtmodell.....	84
7.3	Performance-Vorgaben.....	86
7.4	Implementierung und Optimierung der μ K-Iteration.....	89
7.5	Synthese.....	90
7.6	Iterative Optimierung und Synthesergebnisse	92
7.7	Validierung und Implementierung.....	94
7.8	Diskussion der Ergebnisse	95
8	Diskussion der Entwurfsmethodiken	97
9	Zusammenfassung und Ausblick	103
	Literaturverzeichnis	107
Anhang:	Beispiel zur Singulärwertberechnung	A.1
A.1	Entkoppeltes System	A.1
A.2	System mit Kopplung	A.3

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

Lateinische Symbole

Symbol	Beschreibung	Einheit
A	Systemmatrix	-
$\hat{\mathbf{A}}$	Modale Systemmatrix	-
b	Vektor der Unsicherheits-Ausgänge	-
B	Bewegungsgleichung: Dämpfungsmatrix	N/(m s)
B	Zustandsraumsystem: Eingangsmatrix	-
<i>B</i>	Magnetfeld	T
$\hat{\mathbf{B}}$	Modale Eingangsmatrix	-
c	Vektor der Unsicherheits-Eingänge	-
C	Zustandsraumsystem: Ausgangsmatrix	-
$\hat{\mathbf{C}}$	Modale Ausgangsmatrix	-
d	Vektor der Störgrößen	-
<i>D_i</i>	Modaler Dämpfungsgrad der <i>i</i> -ten Mode	-
D	Zustandsraumsystem: Durchgangsmatrix	-
D-Scales	Dyn. System: Skalierungsmatrizen D	-
D_ω	Frequenzpunktweise berechnete D-Scales	-
D_{fit}	Gefittete D-Scales	-
e	Vektor der Regelabweichungen	-
<i>f</i>	Frequenz	Hz
<i>f_{Eck}</i>	Eckfrequenz	Hz
F	Kraft/Moment bzw. Kraft-/Moment-Vektor	N bzw. N m
G_Ω	Gyroskopiematrix für $\Omega = 1 \text{ rad/s}$	N/(m s ²)
G	Regelstrecke	-
G-Scales	Dynamische Skalierungsmatrizen G	-
G_ω	Frequenzpunktweise berechnete G-Scales	-
G_{fit}	Gefittete G-Scales	-
<i>j</i>	Imaginäre Einheit	-
K	Bewegungsgleichung: Steifigkeitsmatrix	N/m
K	Regler	-
<i>m</i>	Masse	kg
M	Bewegungsgleichung: Massenmatrix	kg

M	LTI-System: Ungewichtetes Synthesystem	-
M_G	Gyroskopie-Moment	Nm
n	Vektor der Rauschgrößen	-
P	Synthesystem	-
P_D	Skaliertes Synthesystem für <i>DK-Iteration</i>	-
P_{Dr}	Skaliertes Synthesystem für μ K-Iteration	-
P_M	Geschlossener Regelkreis für Synthesystem	-
q	Vektor der Auslenkungen	m bzw. rad
q_φ	Vektor der rotatorischen Winkelauslenkungen	rad
r	Vektor der Sollgrößen	-
<i>s</i>	Laplace-Variable	-
<i>So</i>	Sommerfeldzahl	-
<i>t</i>	Zeit	s
u	Vektor der Stell- bzw. Eingangsgrößen	-
<i>U</i>	Unwucht	kgm
<i>U_{Aktor}</i>	Aktorspannung	V
w	Vektor der gewichteten Performance-Eingänge	-
w_M	Vektor der ungewichteten Performance-Eingänge	-
W_x	Gewichtungsfunktionen für x	-
x	Zustandsvektor	-
<i>x</i>	Koordinatenrichtung	m
x₀	Zustandsvektor für $t = 0$	-
y	Vektor der Zielgrößen (bzw. Sensorausgänge)	-
<i>y</i>	Koordinatenrichtung	m
z	Vektor der gewichteten Performance-Ausgänge	-
z_M	Vektor der ungewichteten Performance-Ausgänge	-

Griechische Symbole

Symbol	Beschreibung	Einheit
α	Hilfsgröße für μK -Iteration	-
β	Hilfsgröße für μK -Iteration	-
β_ω	Frequenzpunktweise berechnete Hilfsgröße für μK -Iteration	-
β_{DGK}	Hilfsgröße zur herkömmlichen Berechnung von μ_{gemischt}	-
δ	Unsicherheiten: Unsicherer Parameter	-
Δ	Unsicherheitsmatrix	-
ε	Exzentrizität	m
γ	Obere Schranke des größten Singulärwertes $\bar{\sigma}$	-
γ_μ	SISO-Filter für μK -Iteration	-
$\gamma_{\mu,\omega}$	Frequenzpunktweise berechneter SISO-Filter für μK -Iteration	-
$\gamma_{\mu,\text{fit}}$	Gefitteter SISO-Filter γ_μ für μK -Iteration	-
Γ_μ	MIMO-Filter für μK -Iteration	-
κ	Hilfsgröße für μK -Iteration	-
μ	Strukturierter Singulärwert (SSV)	-
μ_Δ	Stabilitäts-SSV	-
μ_{gemischt}	SSV für gemischt komplex-reelle Unsicherheiten	-
μ_{komplex}	SSV für komplexe Unsicherheiten	-
μ_ω	Frequenzpunktweise berechneter SSV	-
ω	Kreisfrequenz	rad/s
ω_i	i -te Eigenkreisfrequenz	rad/s
Ω	Rotationskreisfrequenz	rad/s
$\bar{\sigma}$	Größter Singulärwert	-
Θ	Polares Flächenträgheitsmoment	kg m ²

Wie aus der vorangegangenen Auflistung zu entnehmen, werden Matrizen und Vektoren durch fetten Druck gekennzeichnet. Die Notation orientiert sich dabei weitestgehend an den Definitionen der verwendeten Literatur. Sind Variablen doppelt definiert, ergibt sich deren Bedeutung aus dem Kontext.

Abkürzungen

Abkürzung	Beschreibung
BWE	Gegenlaufeliminierung (engl. Backward Whirl Elimination)
CS	Stellübertragungsfunktionen
FE	Finite Elemente
GS	Störübertragungsfunktionen
LFT	Linear Fractional Transformation
LMIs	Lineare Matrix-Ungleichungen (engl. Linear Matrix Inequalities)
LPV	Linear parameterabhängig (engl. Linear Parameter Varying)
LQG	Linear Quadratischer Gaußscher Regler
LQR	Linear Quadratischer Regler
LTI	Linear zeitinvariant (engl. Linear Time Invariant)
LTR	Loop Transfer Recovery
PEM	Prediction Error Method
PSD	Leistungsdichtespektrum (engl. Power Spectral Density)
S	Empfindlichkeitsfunktionen
SSV	Strukturierter Singulärwert (engl. Structured Singular Value)
T	Führungsübertragungsfunktionen
T_i	Inverse Eingangsempfindlichkeitsfunktionen

1 Einleitung

Regelungen ermöglichen einen verlässlichen und effizienten Betrieb von technischen Systemen unter mannigfaltigen Umgebungsbedingungen. Die Möglichkeit, das Systemverhalten verlässlich und effizient einstellen zu können, begründet den stetig zunehmenden Einsatz in vielen Teilen unseres täglichen Lebens. Beispiele hierfür sind unter anderem in Automobilen, Unterhaltungselektronik, industriellen Produktionsprozessen, in der Beleuchtung und Energieversorgung von Gebäuden, modernen Transport- und Kommunikationssystemen oder in der Raumfahrt zu finden. In einem Report zu Trends der Regelungstechnik betonte ein Komitee führender Wissenschaftler bereits 2002 die Bedeutung der Behandlung von Unsicherheiten im Betrieb technischer Systeme [1]. Um einen sicheren und effizienten Betrieb zu gewährleisten, müssen Regelungen den Einfluss veränderlicher Umgebungsbedingungen berücksichtigen. Daher werden Regler auch als „Instrument zum Unsicherheitsmanagement“ bezeichnet. D. h., dass die Regelung robust gegenüber nicht genau bekannten und veränderlichen Systemdynamiken sein muss.

Elastische Rotoren sind Systeme mit stark veränderlicher Dynamik. Die Veränderungen sind insbesondere von der Rotordrehfrequenz abhängig. Dies ist auf die Kreiselwirkung, auch Gyroskopie genannt, sowie beim Einsatz von hydrodynamischen Gleitlagern auf die Eigenschaften des Schmierfilms zurückzuführen. In der vorliegenden Arbeit werden Methodiken zum Einsatz robuster Regelverfahren für die Berücksichtigung der veränderlichen Systemdynamik in der aktiven Schwingungsminderung von schnelldrehenden, elastischen Rotoren entwickelt.

1.1 Motivation und Zielsetzung

Forderungen nach stetiger Steigerung der Effizienz technischer Systeme führen in der Weiterentwicklung von rotierenden Maschinen für extreme Anwendungsfälle wie Flugtriebwerke, High-Speed-Cutting Werkzeugmaschinen oder Abgasturboladern zu Zielkonflikten. So werden zur Steigerung des Wirkungsgrades von Flugtriebwerken Gewichtsreduktion und hohe Drehzahlen bei simultaner Reduktion der Biegeschwingungen der Triebwerksrotoren gefordert [2]. Letzteres ermöglicht geringere Schaufelspitzenpalte, die zu verringerten Strömungsverlusten und somit besseren Wirkungsgraden führen. In Bezug auf den Triebwerksrotor soll also bei geringerem Gewicht, d. h. in der Regel auch bei reduzierter Biegesteifigkeit und Biegeeigenfrequenz, die Betriebsdrehzahl gesteigert werden. Solch schnelldrehende, elastische Rotoren sind besonders anfällig für unwuchterregte Schwingungen, so dass rein passive Maßnahmen zur Schwingungsminderung an Grenzen stoßen. In derartigen Anwendungsfällen kann die aktive Schwingungsminderung eine vielversprechende Alternative darstellen. In aktuellen industriellen Produkten sind aktive Rotorsysteme hauptsächlich in Form von magnetgelagerten Rotoren zu finden, u. a. als magnetgelagerte Pumpen und Verdichter. Für Rotoren in konventionellen Wälz- oder Gleitlagern wird zudem die Erweiterung um aktive Komponenten in der Forschung untersucht.

Um die veränderliche Systemdynamik dieser Rotoren im Entwurf einer Regelung zur aktiven Schwingungsminderung zu berücksichtigen, werden adaptive oder robuste Verfahren eingesetzt. Für sicherheitskritische Systeme werden robuste Verfahren bevorzugt, da adaptive Verfahren zusätzliche Informationen über die Systemveränderung benötigen, von der Stabilität und Schwingungsreduktion abhängen. Aktuelle robuste Entwurfsmethoden erreichen in bekannten Anwendungen jedoch keine robuste Stabilität für große Drehzahlbereiche.

Ziel dieser Arbeit ist daher die Entwicklung eines methodischen Vorgehens zum robusten Reglerentwurf für die aktive Schwingungsminderung schnell-drehender, elastischer Rotoren unter Berücksichtigung der veränderlichen Systemdynamik für große Drehzahlbereiche. Dazu wird die Eignung verfügbarer Regelverfahren analysiert und die sog. μ -Synthese als geeignetes Verfahren für den Reglerentwurf ausgewählt. Innerhalb der μ -Synthese sind unterschiedliche Vorgehensweisen gebräuchlich, die sich insbesondere durch die Definition der Modellunsicherheiten unterscheiden. Für drei verschiedene rotordynamische Anwendungsfälle werden geeignete Vorgehensweisen mit passenden Unsicherheitsdefinitionen ausgewählt und Entwurfsmethodiken anhand von übertragbaren Beispielsystemen präsentiert.

1.2 Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 wird zunächst in die Rotordynamik eingeführt, um die Drehzahlabhängigkeit der Systemeigenschaften aufzuzeigen. Weiterhin werden die Grundlagen linearer Regelverfahren dargestellt, auf deren Basis verfügbare robuste Verfahren analysiert werden. Anhand einer Diskussion zur Eignung für die Schwingungsminderung von rotordynamischen Systemen werden passende Verfahren ausgewählt und detailliert beschrieben.

Im dritten Kapitel wird der Stand der Technik zur Regelung von Rotorbiegeschwingungen vorgestellt, um Potenziale zur Weiterentwicklung und die wissenschaftliche Einordnung dieser Arbeit aufzuzeigen.

In Kapitel 4 werden drei repräsentative Rotorprüfstände vorgestellt, anhand derer in den Kapiteln 5 bis 7 geeignete Entwurfsmethodiken entwickelt werden. Die Entwurfskapitel beinhalten die Modellierung, die Reglersynthese sowie Ergebnisse aus Simulation und Experiment. Kapitel 5 beschäftigt sich dabei mit der Stabilisierung der sog. *Oil Whip*-Instabilität und simultaner Schwingungsreduktion für elastische, hydrodynamisch gelagerte Rotoren. Im sechsten Kapitel wird die Unterdrückung von sog. *Oil Whirl*-Schwingungen durch Berücksichtigung einer zugehörigen, stark veränderlichen Eigenmode untersucht. In Kapitel 7 wird die Unterdrückung von Unwuchtschwingungen unter Berücksichtigung des gyroskopischen Effekts als Unsicherheit für einen wälzgelagerten Rotor mit aktivem Piezolager untersucht.

Abschließend erfolgen eine Diskussion und Einordnung der für die unterschiedlichen Rotorsysteme entwickelten Entwurfsmethodiken in Kapitel 8 sowie eine Zusammenfassung der Arbeit mit Ausblick auf mögliche weiterführende Untersuchungen in Kapitel 9.

2 Grundlagen Rotordynamik und Regelungstechnik

In diesem Kapitel werden zunächst die wichtigsten Systemeigenschaften von rotordynamischen Systemen und hydrodynamischen Gleitlagern beschrieben. Anschließend wird in die lineare Regelungstechnik eingeführt, um eine Bewertung und Auswahl geeigneter robuster Regelverfahren zur aktiven Schwingungsminderung von schnelldrehenden, elastischen Rotoren vorzunehmen. Im letzten Teil wird die Theorie der ausgewählten H_∞ - und μ -Syntheseverfahren vertieft.

2.1 Einführung in die Rotordynamik

Die theoretische Beschreibung der grundlegenden dynamischen Eigenschaften schnelldrehender, elastischer Rotoren ist weitgehend erforscht und in zahlreichen Veröffentlichungen beschrieben [3], [4], [5], [6]. Dieser Abschnitt beschränkt sich auf einen kurzen Überblick der für diese Arbeit entscheidenden Begrifflichkeiten, Systemeigenschaften und Modellierungsansätze.

Als Abgrenzung zu starren Rotoren wird für elastische Rotoren in der aktuellen ISO Norm 11342 relativ unscharf eine drehzahlabhängige Dynamik genannt. In anderen Quellen wird anhand der maximalen Betriebsdrehzahl des Rotors unterschieden und eine Grenze von 50% [3] bzw. 70% [7] der ersten biegekritischen Eigenfrequenz definiert, bis zu der ein Rotor als starr betrachtet werden kann.

Die Biegung eines elastischen Rotors infolge von Erregerkräften orthogonal zur Drehachse ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Radiale Schwingungen in der Resonanz infolge von Unwuchtkräften sind für schnelldrehende Rotoren üblicherweise ein zentrales Problem und somit Auslegungskriterium. Diese Schwingungen können durch Auswuchten verringert, aber nie vollständig eliminiert werden. Bei der Auslegung ist weiterhin zu beachten, dass die Dynamik der Biegeschwingungen infolge von Gyroskopie und/oder der Schmierfilmeigenschaften von hydrodynamischen Gleitlagern drehzahlabhängig sowie für die x - und y -Richtung in Abbildung 2.1 gekoppelt ist.

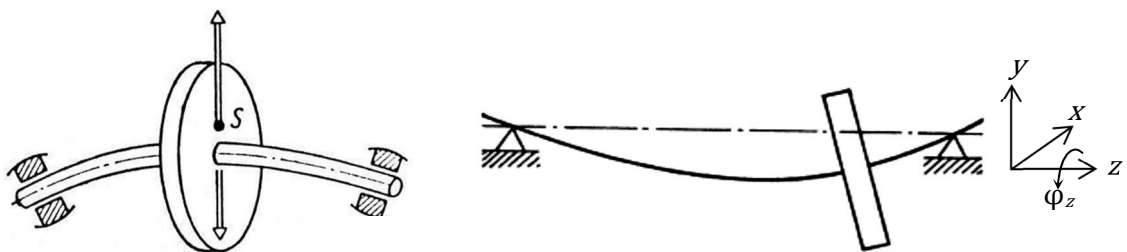


Abbildung 2.1: Laval-Rotor (links), elastischer Rotor mit Gyroskopieeinfluss (rechts) [3]

Um die Systemdynamik in der Auslegungsphase voraussagen zu können, werden mathematische Modelle des Systemverhaltens benötigt. Insbesondere Simulation und modellbasierte Reglerentwürfe erfordern genaue Modelle der Dynamik des Systems bzw. der Regelstrecke. Dynamische Modelle mechanischer Systeme können direkt anhand von Messdaten mittels *Black Box*-Identifikation oder

über die theoretische Herleitung zugrundeliegender Differentialgleichungen der physikalischen Zusammenhänge (*White Box*-Modelle) gebildet werden [8]. *Black Box*-Modelle sind relativ leicht zu ermitteln und prinzipbedingt optimal bezüglich der Abweichung zwischen Messung und Modell. Es können jedoch ausschließlich die Freiheitsgrade der Mess- und Erregerstellen, d. h. Aktor- bzw. Sensorpositionen berücksichtigt werden. Die theoretische *White Box*-Modellierung erfordert einen höheren Aufwand und führt üblicherweise zu größeren Abweichungen zwischen Modell und Messung. Vorteilhaft ist jedoch die Kenntnis der inneren Systemzustände wie Auslenkungen oder Geschwindigkeiten an sämtlichen Positionen auch außerhalb von Aktor-/Sensorpositionen, was zum Verständnis des globalen Systemverhaltens beitragen kann. Weiterhin können theoretische Modelle leicht an Modifikationen der Geometrie angepasst werden, um ohne Prototyp oder Prüfstand das dynamische Verhalten bereits in der Auslegungsphase des Systems vorherzusagen. Zur Berücksichtigung von Systemeigenschaften wie Dämpfung infolge von Reibung, deren physikalische Zusammenhänge nur mit unverhältnismäßig großem Aufwand nachgebildet werden können, wird die *Grey Box*-Identifikation eingesetzt. Dabei wird das System bis auf die unbekannt Parameter theoretisch modelliert und anschließend eine Minimierung der Abweichungen zwischen Modell und Messung durchgeführt, um den Parametern geeignete Werte zuzuweisen. Eine umfangreichere Darstellung und ausführliche Beschreibung der Verfahren ist z. B. in [9], [10] zu finden.

Die Beschreibung der Dynamik von Rotoren erfolgt üblicherweise mittels numerischer Berechnung der linearen Matrix-Bewegungsgleichungen für diskrete Freiheitsgrade [3]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \Omega\mathbf{G}_\Omega\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (2.1)$$

Darin sind \mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{G}_Ω und \mathbf{K} die Massen-, Dämpfungs-, Gyroskopie- und Steifigkeitsmatrizen, \mathbf{q} der Vektor der translatorischen und rotatorischen Freiheitsgrade senkrecht zur Drehachse und \mathbf{F} der Vektor äußerer Kräfte. Die Gyroskopie \mathbf{G}_Ω wird hier für eine Rotorwinkelgeschwindigkeit Ω von 1 rad/s eingeführt. Dabei werden Kopplungen zur Bewegungsdifferentialgleichung der Drehbewegung vernachlässigt, was bei ausreichend hohen Antriebsleistungen zulässig ist [6].

U. a. aufgrund von Montageungenauigkeiten, Fertigungstoleranzen und Materialinhomogenitäten treten stets Unwuchten $U = m\varepsilon$ auf, da der Schwerpunkt des Rotationskörpers der Masse m um eine Exzentrizität ε relativ zur Drehachse verschoben ist. Fliehkräfte der Unwuchten führen dann bei Rotation zu umlaufenden Erregerkräften und somit zu Biegeschwingungen. In der Regel sind die Unwuchten an Scheiben konzentriert, wo große Massen m auftreten und bereits kleine Exzentrizitäten ε relativ große Unwuchten bewirken. Im stationären Betrieb mit der Rotorwinkelgeschwindigkeit Ω berechnen sich die umlaufenden Unwuchtkräfte für Freiheitsgrade des Wellendurchstoßpunktes in ortsfesten Koordinaten anhand von:

$$\begin{aligned} F_x &= m|\varepsilon|\Omega^2\cos(\Omega t + \delta) \\ F_y &= m|\varepsilon|\Omega^2\sin(\Omega t + \delta) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dies ergibt sich aus den Trägheiten der Unwuchtmasse bei einer Rotation in die in Abbildung 2.1 definierte Drehrichtung um die z-Achse. Der Startwinkel δ gibt die Winkelposition des Scheibenschwerpunktes zum Zeitpunkt $t=0$ an. Anhand der Gleichungen (2.2) ist ersichtlich, dass Erregerfrequenz und Amplitude der Unwuchtkräfte direkt von der Rotorwinkelgeschwindigkeit Ω

abhängig sind und die Phase zwischen den Kräften in x - und y -Richtung entsprechend Kosinus und Sinus stets 90° beträgt.

Der in Abbildung 2.1 links dargestellte Rotor mit nur einer Scheibe und symmetrischem Aufbau ist ein sog. *Laval-Rotor* und kann unterhalb der zweiten Biegeeigenfrequenz durch zwei Freiheitsgrade, den Auslenkungen der Scheibe in x - und y -Richtung, abgebildet werden. Reale Systeme sind meist nicht symmetrisch (Abbildung 2.1 rechts), und/oder weisen mehrere Scheiben auf, so dass weitere Freiheitsgrade zur Systembeschreibung notwendig sind. Daher wird die *Finite Elemente*- (FE-) Methode verwendet, um die beschreibenden Matrizen der Gleichung (2.1) rechnergestützt zu ermitteln [8]. Die Bestimmung der Dämpfungsmatrix \mathbf{B} ist damit jedoch meist nicht mit vertretbarem Aufwand möglich, so dass Erfahrungswerte oder an Messwerte angepasste Dämpfungswerte verwendet werden.

Eine Überführung der Bewegungsgleichung (2.1) in die Zustandsraumdarstellung bietet Vorteile u. a. bei Simulation und Reglerentwurf für Mehrgrößensysteme sowie bei der Verknüpfung von Teilsystemen [8], [11]. Die Matrix-Bewegungsgleichung (2.1) wird dabei von n Differentialgleichungen zweiter Ordnung in $2n$ Gleichungen erster Ordnung (2.3) überführt. Voraussetzung zur Transformation ist, dass die Anzahl der System-Pole mindestens gleich der Anzahl der System-Nullstellen ist [12]. Dies ist stets erfüllt, da die rechte Seite von (2.1) keine Ableitungen enthält.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

Die Freiheitsgrade im Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ müssen die Systemenergie zu jedem Zeitpunkt beschreiben können, wozu bei üblichen mechanischen Systemen die Auslenkungen \mathbf{q} und Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ verwendet werden. Der zeitliche Verlauf des Ausgangsvektor $\mathbf{y}(t)$ bei Erregung durch den Verlauf des Eingangsvektor $\mathbf{u}(t)$ kann mittels Systemmatrix \mathbf{A} , Eingangsmatrix \mathbf{B} , Ausgangsmatrix \mathbf{C} und Durchgangsmatrix \mathbf{D} berechnet werden. Die Systemmatrix \mathbf{A} bestimmt das Eigenverhalten des Systems, d. h. Eigenformen und Eigenwerte [8].

In der Praxis haben u. a. folgende unerwünschte Effekte zusätzlichen Einfluss auf die Dynamik von Rotorbiegeschwingungen:

- Schlag (plastische Krümmung des Rotors)
- Lagerluft (Spiel in Wälzlagern)
- Nichtlineare Kontaktsteifigkeiten in Wälzlagern
- Einflüsse von Kupplungen

Für die Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit werden diese vernachlässigt, da nur relativ geringe Dynamikveränderungen entstehen. In rotordynamischen Grundlagenwerken sind umfangreiche Erläuterungen zu den genannten Effekten angegeben [3].

2.1.1 Kreiselwirkung

Der gyroskopische Term $\Omega \mathbf{G}_\Omega \dot{\mathbf{q}}$ in Gleichung (2.1) ist proportional zur Rotordrehkreisfrequenz Ω und bewirkt aufgrund des antimetrischen Aufbaus der Gyroskopiatrix \mathbf{G}_Ω eine Aufspaltung der Stillstandseigenmoden in sog. Gleichlauf- und Gegenlaufmoden mit steigender Drehzahl. Gleichläufe weisen komplexe, in (positiver) Drehrichtung des Rotors rotierende Eigenformen auf, deren Eigenfrequenzen mit der Rotordrehzahl ansteigen. Gegenläufe rotieren in entgegengesetzte Richtung und die zugehörigen Eigenfrequenzen sinken bei steigender Drehzahl [13]. Das sog. Campbell-Diagramm dient der grafischen Darstellung der Aufspaltung in Gleich-/Gegenläufe und zeigt die Entwicklung der zugehörigen Eigenfrequenzen über der Rotordrehzahl [14]. Abbildung 2.2 zeigt exemplarisch ein Campbell-Diagramm für die Aufspaltung von zwei Eigenmoden eines Rotors in Gleich- und Gegenläufe. Die markierten Resonanzdrehzahlen ergeben sich dort, wo die Anregungsfrequenz der Unwucht mit einer Gleichlauf-Eigenfrequenz zusammenfällt. Die zur Rotordrehzahl, d. h. Unwuchterregung, synchronen Frequenzen sind dazu als *Fahrstrahl* eingezeichnet. Die Gegenlaufeigenformen stehen orthogonal zur Unwuchterregung und werden daher nicht angeregt [13]. U. a. bei anisotroper Lagerung, d. h. unterschiedlicher Lagersteifigkeiten in horizontaler und vertikaler Richtung, können Unwuchtkräfte jedoch auch Gegenlaufmoden anregen [3].

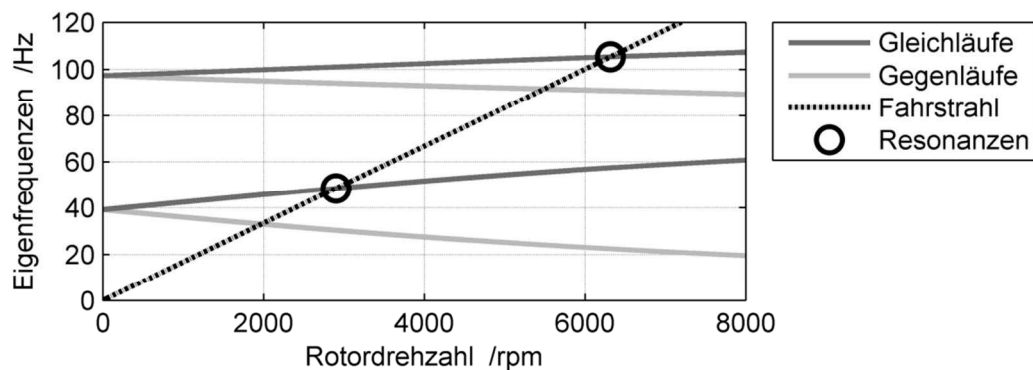


Abbildung 2.2: Campbell-Diagramm

Der gyroskopische Term $\mathbf{G}_\Omega \dot{\mathbf{q}}$ in Gleichung (2.1) bewirkt dabei Momente um die x - und y -Achse jedes Rotorelementes und wird durch Drehbewegungen der Elemente $\dot{\mathbf{q}}_{\varphi,x}$ und $\dot{\mathbf{q}}_{\varphi,y}$ um die x - und y -Achse verursacht. Bei FE-Modellen werden diese Freiheitsgrade üblicherweise explizit für jedes Element eingefügt, so dass die translatorischen Geschwindigkeiten bei der Berechnung der Gyroskopie vernachlässigt werden können.

Im instationären Betrieb, d. h. bei veränderlicher Drehkreisfrequenz Ω , ist die Gyroskopiatrix \mathbf{G}_Ω der Differentialgleichung (2.1) nicht konstant und es liegt ein zeitvariantes Systemverhalten vor. Bei der Beurteilung der Systemstabilität wird jedoch üblicherweise von einem quasi-stationären System ausgegangen, d. h. die zeitliche Ableitung der Drehzahl wird vernachlässigt. Somit gilt das gesamte System als stabil, wenn alle Drehzahlen individuell stabil sind. Diese u. a. in [15], [16] erwähnte Annahme wird durch zahlreiche Anwendungen der H_∞ - und μ -Synthese für aktive Rotoren bestätigt, vgl. Abschnitt 3.1.

2.1.2 Hydrodynamisch gelagerte Rotoren

Zur radialen Lagerung von Rotoren sind Gleit- und Wälzlager stark verbreitet [17]. Gleitlager zeichnen sich u. a. durch geringe Reibung, gute Dämpfung, geringe Geräusentwicklung, geringen radialen Bauraum und hohe Lebensdauer aus. Nachteilig sind erhöhte Kosten und Aufwand zur Schmiermittelversorgung und Wartung, Anlaufreibwerte und das Auftreten von Instabilitäten unter spezifischen Betriebsbedingungen. In anspruchsvollen rotordynamischen Systemen mit hohen Drehzahlen und/oder hohem Gewicht wie Kraftwerksturbinen, Kühlmittelpumpen, Abgasturboladern, Verbrennungsmotor-Kurbelwellen und (Magnetscheiben-)Festplatten werden Rotoren oft hydrodynamisch gelagert [18].

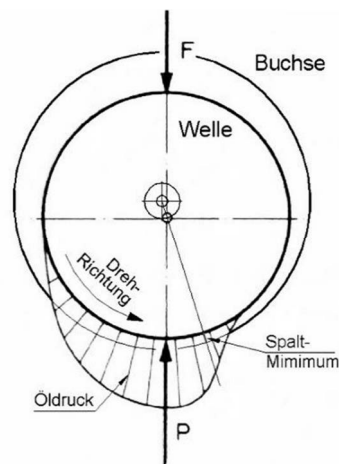


Abbildung 2.3: Druckaufbau im hydrodynamischen Gleitlager [19]

Hydrodynamische (Radial-)Gleitlager tragen den Rotor auf einem Flüssigkeitsschmierfilm, der sich infolge der Drehbewegung aufbaut. Die dynamischen Eigenschaften des Schmierfilms in radialer Richtung hängen von der Strömung im Lagerspalt ab, also von der Geometrie des Lagerzapfens (Welle) und der Lagerschale, der Rotationsgeschwindigkeit, dem Schmiermittel sowie der Bewegung des Lagerzapfens [20]. Die Lagerkraft ergibt sich aus der Druckverteilung, die sich im Schmiermittel ausbildet (Abbildung 2.3).

Besonders hervorzuheben beim Einsatz von hydrodynamisch gelagerten Rotoren ist das Auftreten der Phänomene *Oil Whirl* und *Oil Whip*. Wie 1925 erstmals von Newkirk und Taylor [21] nachgewiesen, entsteht der *Oil Whirl* unter bestimmten Bedingungen unterhalb der ersten biegekritischen Drehzahl als Schwingung mit ca. der halben Rotordrehfrequenz. Die *Oil Whirl*-Frequenz entspricht der mittleren Rotationsfrequenz des Fluids, da dessen Geschwindigkeit an der Lagerschale Null ist. Beträgt die Rotordrehfrequenz ca. das Doppelte der ersten biegekritischen Drehzahl, so regt der *Oil Whirl* die Biegemode an. Dies führt zum sog. *Oil Whip*, einem selbsterregten Instabilitätsphänomen bzw. einem Grenzyklus mit sehr hohen Amplituden. Die Destabilisierung der Biegemode bleibt auch bei weiterer Erhöhung der Rotordrehzahl erhalten, so dass ein Durchfahren der *Oil Whip*-Instabilität unmöglich ist. Das Auftreten von *Oil Whirl* und *Oil Whip* hängt von den Konfigurationen des hydrodynamischen Lagers und des Rotors ab. Die Bedingungen zum Auftreten der Phänomene sind in weiten Teilen erforscht und in zahlreichen Grundlagenwerken zu finden [3], [18].

Die Ausprägung dieser Phänomene ist u. a. von der Bauart des Gleitlagers abhängig. Hori [18] teilt Ausführungen hydrodynamischer Radialgleitlager dabei anhand der Lagerschalengeometrie ein:

- Kreislager: Das Lager mit kreisrunder Lagerschale ist einfach zu fertigen und weit verbreitet.
- Teillager: Im oberen Teil ist die Lagerschale unterbrochen, die verringerte Oberfläche führt zu geringeren Reibungsverlusten.
- Mehrflächenlager: Die Lagerschale setzt sich aus meist zwei oder drei Teilkreisen mit größeren Radien zusammen. Dies verbessert das Stabilitätsverhalten des Rotors.
- Kippsegmentlager: Kippfreie Segmente stellen sich entsprechend der Lastverhältnisse an. So können Instabilitätsphänomene sehr wirksam vermieden werden.
- Schwimmbuchsenlager: Frei bewegliche, dünnwandige Metallzylinder im Lagerspalt werden eingesetzt, um Rotorschwingungen zu verringern.

Das Kreislager wird am häufigsten verwendet und weist besonders starke Ausprägungen der spezifischen Phänomene *Oil Whirl* und *Oil Whip* auf. Daher wird dieser Lagertyp in den Untersuchungen dieser Arbeit eingesetzt. Dies geschieht in Verbindung mit horizontalen Rotoren, deren Gewichtskraft die Ruheposition des Zapfens aus dem sehr nachgiebigen Lagerzentrum verschiebt. Daher ist eine Linearisierung des Kraft-Weg-Zusammenhangs zulässig [3]. Zur einheitlichen, normierten Bewertung derartiger Systeme in Bezug auf *Oil Whirl* und *Whip* wird die *Sommerfeldzahl* So [22] verwendet:

$$So = \frac{F_G \Psi^2}{B_L D_L \eta \Omega} \quad (2.4)$$

Darin sind die üblicherweise konstanten Größen der statischen Gewichtskraft F_G , des bezogenen Lagerspiels $\Psi = \delta/R_L$ mit Lagerspiel δ und Zapfenradius R_L , der Lagerbreite B_L , des Durchmessers D_L und der dynamischen Viskosität des Schmiermittels η sowie die im Betrieb variable Rotordrehkreisfrequenz Ω verknüpft. Die *Sommerfeldzahl* ist antiproportional zur Rotordrehkreisfrequenz Ω und sinkt demzufolge für steigende Drehzahlen ab. Vogelpohl [23] definiert Bereiche für *Schwerlastbetrieb* mit $So > 1$ und *Schnelllaufbetrieb* mit $So \leq 1$, bei dem sich der Rotor dem nachgiebigen Zentrum der Lagerschale annähert. *Oil Whirl*-Schwingungen nehmen mit der Annäherung an das Lagerzentrum, d. h. mit sinkendem So , deutlich zu. Sehr nachgiebige Rotoren mit kleiner Biegeeigenkreisfrequenz ω_1 können bereits im Schwerlastbetrieb die Stabilitätsgrenze des *Oil Whips* erreichen. Dann treten zuvor keine messbaren Schwingungen des *Oil Whirls* auf (Abbildung 2.4 c), was Hori als *schweren Rotor* bezeichnet [18]. Sog. *leichte Rotoren* sind im Vergleich zum Lager steifer und weisen höhere Biegeeigenfrequenzen ω_1 auf, so dass die *Oil Whip*-Instabilität erst im Schnelllaufbetrieb auftritt. Diese Rotoren zeigen im Betrieb deutliche Schwingungen des *Oil Whirls* mit ca. der Hälfte der Rotordrehzahl (Abbildung 2.4 a). Zudem existiert ein Übergangsbereich zwischen *leichten* und *schweren Rotoren* mit geringeren *Oil Whirl*-Schwingungen (Abbildung 2.4 b).

Die modellbasierte Auslegung hydrodynamisch gelagerter Rotoren mit Vorhersage von *Oil Whirl*-Schwingungen und *Oil Whip*-Instabilität erfordert ein Kraftgesetz für die hydrodynamischen Radialgleitlager. Stodola [24] führte 1925 dazu erstmals Federkonstanten für die Ölfilmelastizität ein. Später wurden Druckverhältnisse anhand von Strömungsberechnungen ermittelt und Lagerkräfte als Integral über die Druckverteilung berechnet. Die allgemeinen *Navier-Stokesschen Strömungsgleichungen* in Verbindung mit der Kontinuitätsgleichung lassen sich zur *Reynolds-*

gleichung (der Schmierfilmtheorie) vereinfachen [25]. Diese ist weiterhin nicht analytisch lösbar, so dass entweder weitere Vereinfachungen getroffen oder numerische Berechnungsverfahren eingesetzt werden. Mittels der sog. *Gümbel-* oder *Reynolds-Randbedingungen* werden dabei Bereiche negativen Druckes zu Null gesetzt [26], da Fluide ausschließlich Druckkräfte auf den Wellenzapfen übertragen. Übliche numerische und analytische Lösungen führen zunächst zu nichtlinearen Kraftgesetzen. Durch Differenzieren nach Auslenkungen und Geschwindigkeit können daraus lineare Kraftgesetze, d. h. Steifigkeits- und Dämpfungskonstanten, ermittelt werden.

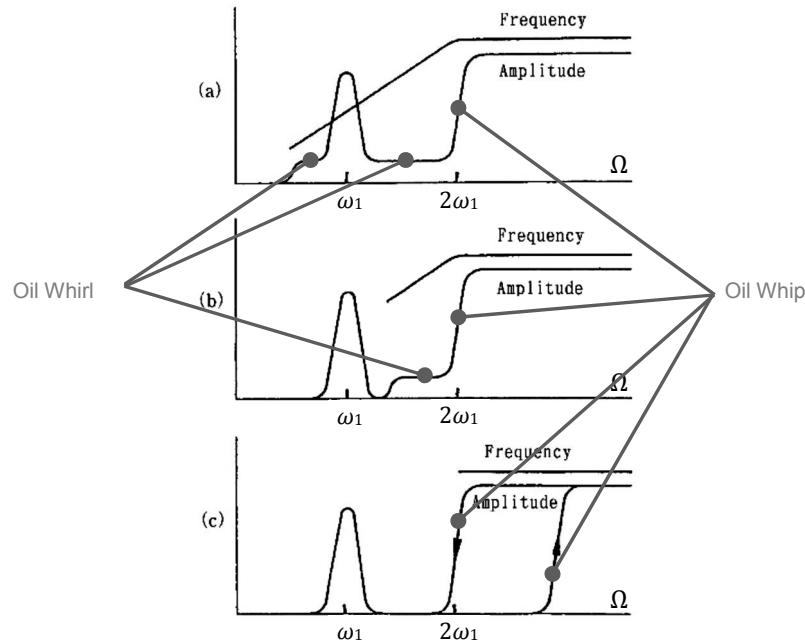


Abbildung 2.4: Hochlaufkurven mit *Oil Whirl*-Schwingungen und *Oil Whip*-Instabilität [18]

Um eine analytische Lösung zu ermöglichen, sind weitere Terme der *Reynoldsgleichung* (der *Schmierfilmtheorie*) zu vernachlässigen. In der sog. *Kurzlagertheorie* nach DuBios und Ocvirk [27] werden Terme vernachlässigt, die vom Druckgradienten in Umfangsrichtung abhängen, was für unendlich kurze Lager bzw. kleine Verhältnisse aus Lagerbreite und Lagerdurchmesser zulässig ist. In der Literatur werden dabei unterschiedliche zulässige Obergrenzen für das Verhältnis aus Lagerbreite und Lagerdurchmesser zwischen 0,5 und 1 angegeben [3], [27], [28]. Bei numerischer Lösung kann auf diese Vereinfachungen verzichtet werden, so dass die Berechnung genauer ist. Jedoch sind die Lösungen aufwendiger und müssen für jede Lagergeometrie gesondert berechnet werden. Die *Reynoldsgleichung* wird im Problemgebiet mittels *Finiter Elemente*, *Differenzen* oder *Volumen* diskretisiert und rechnergestützt gelöst. Da sich Position und Geschwindigkeit des Wellenzapfens ständig ändern, muss in jedem Simulationszeitschritt eine numerische Lösung berechnet werden. Um den Aufwand der Lagerkraftberechnung signifikant zu reduzieren, kann das Kraftgesetz in Form von Kennfeldern/Tabellen für eine gewählte Anzahl von horizontalen und vertikalen Auslenkungen und Geschwindigkeiten im Voraus berechnet und in der Simulation interpoliert werden. Eine Linearisierung kann durch numerisches Differenzieren erfolgen [29].

2.2 Schwingungsreduktion

Zur Einordnung der aktiven Schwingungsminderung für rotordynamische Systeme wird ein allgemeiner Überblick über verschiedene Maßnahmen zur Minderung mechanischer Schwingungen elastischer Strukturen gegeben. Die vorgenommene Einteilung nach der Art des Energieaufwandes unterscheidet zwischen passiven, semiaktiven und aktiven Maßnahmen. Passive Maßnahmen erfordern keine Hilfsenergie, während semiaktive Maßnahmen situativ Hilfsenergie verwenden, um die Systemeigenschaften zu beeinflussen, wie z. B. adaptive Dämpfungssysteme [30]. Aktive Maßnahmen benötigen ununterbrochen Hilfsenergie zur Regelung bzw. Steuerung mittels Aktoren, die Kräfte zur Schwingungskompensation in das System einleiten. In der Praxis werden stets passive Maßnahmen angewendet, da diese üblicherweise kostengünstig und weniger aufwendig als semiaktive und aktive Maßnahmen sind. Die erreichbare Schwingungsreduktion ist jedoch limitiert, so dass in Extremfällen semiaktive und/oder aktive Maßnahmen zusätzlich eingesetzt werden.

Zu den wichtigsten passiven Maßnahmen bei der Reduktion von Rotorschwingungen zählen:

- Vermindern der Erregung durch Auswuchten: Da die Auswucht-Genauigkeit nicht beliebig steigerbar ist, bleibt stets eine Restunwucht bestehen, siehe z. B. [4].
- Verstimmen, d. h. Verschieben von Eigenfrequenzen in unkritische Frequenzbereiche: In Extremfällen ist es unmöglich, alle Eigenfrequenzen geeignet zu verschieben und es verbleiben Resonanzdrehfrequenzen im Betriebsbereich des Rotorsystems.
- Tilgen: Passive Tilger gleichen Eigenschwingungen lokal durch Gegenschwingungen aus. Für rotierende Systeme ist die Applikation infolge der Drehbewegung jedoch problematisch [31].
- Dämpfen: Als Dämpfungselemente für Rotoren eignen sich Quetschfilmdämpfer, die häufig in Flugtriebwerken eingesetzt werden. Es ist jedoch nicht möglich, mehr als eine Resonanz effektiv aktiv zu dämpfen. Weiterhin ist die Auslegung sehr aufwendig und es wird eine Ölversorgung für das System benötigt [32].

Semiaktive Systeme zur Reduktion von Rotorbiegeschwingungen werden nur in geringem Umfang eingesetzt. Neben aktiven Auswuchtsystemen zum Beeinflussen des Wuchtzustandes im Betrieb [33] werden adaptive Quetschfilmdämpfer zur Anpassung der Dämpfung [30], [34] sowie elektromechanische Tilger mit einstellbarer Tilgungsfrequenz [35] untersucht. Problematisch ist hier insbesondere die Zugänglichkeit des rotierenden Systems.

Aktive Maßnahmen werten die Soll- und Messgrößen in einer Regelung oder Steuerung aus, um das System gezielt über Aktoren zu beeinflussen. Werden elektrisch angesteuerte Aktoren für ein mechanisches System als Regelstrecke verwendet, so spricht man von einem mechatronischen System [8]. Für die Aktorik in aktiven Rotorsystemen werden unterschiedliche Konzepte verwendet, wie eine Übersicht von Ulbrich [36] zeigt. Aktive Magnetlager sind in der Lage, berührungslos Kräfte auf den Rotor aufzuprägen und finden dort Anwendung, wo geringe Reibung gefordert ist, z. B. in Schwungmassenspeichern [37]. Da Magnetlager relativ nachgiebig sind, werden in anderen Anwendungen elektromagnetische Aktoren parallel zu herkömmlichen Wälz- oder Gleitlagern eingesetzt [38], [39]. Weniger verbreitet ist die Anwendung von Piezopatches, da diese direkt am Rotor appliziert werden und entsprechend eine Übertragung von Stellenergie und Signalen auf das drehende System notwendig ist [35], [40]. Ein alternatives Konzept ist die aktive Lagerabstützung, die Kräfte über ein konventionelles Gleit- oder Wälzlager indirekt auf den Rotor überträgt. Da die Akto-

ren dabei im Kraftfluss angeordnet sind, werden vornehmlich die sehr steifen piezoelektrischen Aktoren eingesetzt [41]. Weitere Vorteile von piezoelektrischen Stapelaktoren sind hohe Aktorkräfte und hohe Dynamik. Es sind jedoch nur geringe Stellwege realisierbar [42]. Elastische Rotoren weisen typischerweise Schwingungsknoten der ersten Biegemoden in Lagernähe auf. Es werden demzufolge hohe Aktorkräfte bei geringen Stellwegen benötigt, so dass piezoelektrische Stapelaktoren ideal für dieses Konzept geeignet sind.

2.3 Grundbegriffe der Regelungstechnik

Die folgende Einführung in die lineare Regelungstechnik dient der Begriffserklärung und ist an die übliche Grundlagenliteratur angelehnt [43], [44], [45], [46]. Die verwendeten Bezeichnungen weichen dabei in weiten Teilen von den DIN Normen 19226 und 19229 ab, da mit den genormten Begriffen eine einheitliche, eindeutige Bezeichnung nur schwer möglich ist [47].

Eine grundlegende Unterscheidung wird zwischen Steuerungen und Regelungen getroffen. Steuerungen berücksichtigen keine Auswirkungen unbekannter Störungen und Veränderungen von Umgebungsbedingungen und berechnen Stellgrößen ausschließlich anhand von Sollwertvorgaben \mathbf{r} . Entsprechend ist bei Steuerungen keine Rückführung von Sensorsignalen vorhanden [8], [43]. Regelungen verarbeiten hingegen Messgrößen als Rückführung in einem Regelkreis, so dass auf externe Störungen \mathbf{d} reagiert werden kann (Abbildung 2.5). Es besteht jedoch die Gefahr eines instabilen Systemverhaltens des geschlossenen Regelkreises [8], [43].

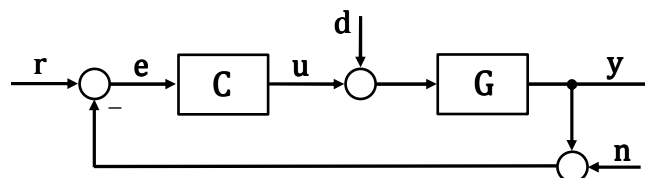


Abbildung 2.5: Regelkreis mit Regler \mathbf{C} und Regelstrecke \mathbf{G}

Die in der Abbildung eingeführten, zeitabhängigen Signale sind:

- Regelgrößen \mathbf{y} : Zu regelnde Zielgrößen, auch als Istwerte bezeichnet
- Führungsgrößen \mathbf{r} : Sollwerte
- Regelabweichungen \mathbf{e} : Abweichungen der Istwerte von den Sollwerten
- Stellgrößen der Aktorik \mathbf{u}
- Störgrößen \mathbf{d} : Von außen auf das System wirkende Störungen
- Rauschen \mathbf{n} : Störungen in Sensorsignalen (z. B. elektrische Störungen)

Diese Größen sind als Vektoren angegeben, da Systeme mehrere Ein- und Ausgänge aufweisen können. Solche Mehrgrößensysteme werden als MIMO-Systeme (engl. *Multiple Input Multiple Output*) bezeichnet. Sog. Eingrößen- oder SISO-Systeme (engl. *Single Input Single Output*) haben hingegen nur jeweils einen Ein- und Ausgang.

Wird gefordert, dass die Regelgröße einem Sollgrößenverlauf mit geringer Abweichung folgt, spricht man von einer *Folgeregelung*. Sollen die Auswirkungen externer Störungen reduziert wer-

den, wird von einer *Störgrößenregelung* gesprochen [8]. Dies ist z. B. in der aktiven Schwingungsminderung der Fall.

Die Ein- und Ausgänge einer Komponente des Regelkreises werden im Folgenden als „Kanäle“ dieser Komponente bezeichnet. Dies ermöglicht eine einfache Zuordnung der System-Ein- und Ausgänge. Für die Übertragung zwischen bestimmten Ein- und Ausgängen werden feste Bezeichnungen verwendet, s. Tabelle 2.1. Das Verhalten entlang eines Übertragungspfades wird für lineare Systeme üblicherweise im Frequenzbereich anhand von Amplituden- und Phasengängen der *Übertragungsfunktionen* im Bode-Diagramm, dargestellt. Dazu wird eine Laplace-Transformation durchgeführt, die in der genannten Grundlagenliteratur ausführlich beschrieben ist. Im Frequenzbereich werden die Signale mit den entsprechenden Großbuchstaben bezeichnet und hängen anstatt von der Zeit t von der komplexen Laplace-Variable $s = \sigma + j\omega$ ab. Systemresonanzen treten an den Polstellen auf, die als Nullstellen des Nenners der Empfindlichkeitsfunktion berechnet werden. Für die Pole können anhand des Real- und Imaginärteils Eigenkreisfrequenzen ω_i und modale Dämpfungsgrade D_i berechnet werden. Für schwingungsfähige Pole liegt in dieser Beschreibung stets ein konjugiert-komplexes Polpaar vor. Nullstellen des Übertragungsverhaltens sind Frequenzen, an denen lokale Minima der Übertragungsfaktoren auftreten. Nullstellen sind in mechanischen Systemen meist ortsabhängige Phänomene, die für verschiedene Übertragungspfade bei unterschiedlichen Frequenzen auftreten, entsprechend von Knotenpunkten in Eigenformen. Systemweite Nullstellen treten nur dann auf, wenn die rechte Seite der Bewegungsgleichung (2.1) Ableitungen enthält.

Tabelle 2.1: Übertragungsfunktionen

Bezeichnung	Abkürzung	Signale
Empfindlichkeitsfunktionen	S	$e/r = -e/n$
Störübertragungsfunktionen	GS	$y/d = -e/d$
Stellübertragungsfunktionen	CS	$u/r = -u/n$
Führungsübertragungsfunktionen	T	$y/r = -y/n$
Inverse Eingangsempfindlichkeitsfunktionen	T_i	u/d

„Stabilität“ ist eine essentielle Forderung an das Verhalten des Gesamtsystems. Als Stabilitätskriterien für lineare Systeme werden vornehmlich die *E/A- (Eingangs-/Ausgangs-)Stabilität* und die *Ljapunov-Stabilität (Zustandsstabilität im Sinne von Ljapunov)* verwendet. Ein System ist *E/A-stabil*, wenn jedes begrenzte Eingangssignal zu einem begrenzten Ausgangssignal führt, sofern keine Anfangsauslenkung vorliegt [43]. Die *Zustandsstabilität im Sinne von Ljapunov* liegt vor, wenn eine Trajektorie der Regelgröße infolge einer beschränkten Anfangsauslenkung für $t \rightarrow \infty$ einen endlichen, positiven Abstand zur Nulllage bzw. für nichtlineare Systeme zur untersuchten Gleichgewichtslage einnimmt. Dies wird zur *asymptotischen Stabilität* erweitert, wenn das System für $t \rightarrow \infty$ zurück in die Nulllage bzw. für nichtlineare Systeme in die zu untersuchende Gleichgewichtslage läuft. Eine verbreitete Betrachtung der Stabilität von linearen Systemen ist die Überprüfung der Pollagen des Systems in der komplexen Ebene. Liegen alle Pole in der linken Halbebene, so ist das System nach allen erwähnten Definitionen stabil. Liegen hingegen (einfache) Pole auf der imaginären Achse, ist das System *zustandsstabil im Sinne von Ljapunov*, jedoch nicht *E/A-* und *asymptotisch stabil*. Die Definition der *inneren Stabilität* verlangt zudem, dass alle inneren Zustände stabil sind,

auch wenn diese keine Auswirkungen auf den Systemausgang haben – so darf z. B. kein instabiler Pol durch eine (Regler-)Nullstelle kompensiert werden. Kriterien zur Stabilitätsprüfung orientieren sich hauptsächlich am charakteristisches Polynom, das für einen geschlossenen Regelkreis mit dem Nenner der Empfindlichkeitsfunktion übereinstimmt, (*Hurwitzkriterium* und *Routhkriterium*), oder an der *Nyquistkurve* des offenen Regelkreises [43]. Das *Nyquistkriterium* führt darüber hinaus zur Definition des *Phasenrands* als Stabilitätsreserve. Weisen sowohl Strecke als auch Regler keine Pole mit positiven Realteilen auf, so ist der geschlossene SISO-Regelkreis stabil, wenn der offene Regelkreis an der *Durchtrittsfrequenz* (Frequenz mit Amplitudenverstärkung Eins) der Phasenverlust weniger als 180° beträgt. Der Abstand der Phase zu 180° an der Durchtrittsfrequenz wird als *Phasenrand* bezeichnet. Für MIMO-Systeme wird das *verallgemeinerte Nyquistkriterium* verwendet, für das über den sog. größten Singulärwert ebenfalls ein *Phasenrand* definiert werden kann [44], [48]. Im Rahmen der robusten Stabilität wird in Abschnitt 2.6 das auf dem *verallgemeinerten Nyquistkriterium* basierende, sog. *Small Gain Theorem* verwendet. Dieses ermöglicht die Beurteilung von robuster Stabilität gegenüber Unsicherheiten [45]. Das Theorem kann in den Zeitbereich überführt werden, was zur Definition der *quadratischen Stabilität* führt. Diese lässt sich über sog. *Linear Matrix Inequalities* (LMIs) berücksichtigen und findet als Nebenbedingung in entsprechenden robusten und nicht-linearen Regelungen Anwendung [49].

Steuerbarkeit und *Beobachtbarkeit* bewerten, ob bzw. wie gut ein Systemzustand mit den Aktoren beeinflusst bzw. anhand der Sensorsignale rekonstruiert werden kann. Sind alle Systemzustände mit den Aktoren beeinflussbar bzw. mit den Sensorsignalen rekonstruierbar, so wird von vollständiger *Steuer-* bzw. *Beobachtbarkeit* gesprochen. Zur mathematischen Berechnung sei auf die genannte Fachliteratur verwiesen [43], [47], [50].

Als „Performance“ wird in dieser Arbeit eine Bewertung der Leistungsfähigkeit des geschlossenen Regelkreises in Bezug auf den Grad der Funktionserfüllung bezeichnet. Für die Beurteilung einer Regelung und als Minimierungsziel für eine Reglersynthese wird dies meist als ein quantitatives Gütemaß formuliert, wie z. B. das integrale Gütemaß im Sinne der sog. *Linear Quadratischen* (LQ-) Regelung.

„Robustheit“ wird in der Regelungstechnik als (quantitatives) Maß der Unempfindlichkeit gegenüber langsamen Änderungen des dynamischen Verhaltens der Regelstrecke bezeichnet [47]. Im Rahmen von robusten Reglerentwürfen werden Unsicherheitsbereiche angegeben, in denen Modellabweichungen liegen können, ohne das System zu destabilisieren (robuste Stabilität) bzw. ohne die geforderten Performance-Anforderungen zu verletzen (robuste Performance) [45]. Zur Überprüfung der robusten Stabilität existieren verschiedene Robustheitsmaße wie die Phasenreserve oder tolerierbare Abweichungen kritischer Streckenparameter, vgl. z. B. [43].

Adaptive Regelungen sind in der Lage, sich an Veränderungen der Strecke und/oder an Störungen anzupassen. Zur Anpassung ist eine Information über die Streckenveränderung notwendig, die entweder messbar oder durch Identifikation ermittelbar sein muss [43], [51]. Das *Gain-Scheduling*-Verfahren verwendet in Abhängigkeit der aktuellen Systemeigenschaften passende Reglereinstellungen, die im Vorfeld für zu erwartende Szenarien entworfen wurden [51]. Auch wenn zwischen linearen Reglern umgeschaltet wird, entsteht durch die Adaption ein nichtlineares Regelverfahren, so dass der Stabilitätsnachweis relativ aufwendig ist [52].

2.4 Lineare Regelverfahren

Der folgende Überblick teilt die linearen Regelverfahren in *klassische* Methoden zum Entwurf von (PID-)Reglern, *moderne Methoden* der Zustandsregelung und *post-moderne* Methoden im Frequenzbereich ein, vgl. [45]. Es werden darin nur diejenigen Verfahren aufgeführt, die Bezug zur vorliegenden Arbeit haben. Das „Regelverfahren“ bezeichnet hier die Struktur und/oder die Auslegung eines Reglers.

2.4.1 Klassische Methoden

Klassische Methoden dienen hauptsächlich der Einstellung von PID-Reglern, vornehmlich für SISO-Systeme. Zu den wichtigsten Verfahren gehören:

- *Pol-Nullstellenbild* bzw. die *Wurzelortskurve* [46]
- *Frequenzkennlinienverfahren* [53]
- Analytische Optimierung der Reglerparameter anhand der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises mit dem *Betragsoptimum* oder dem *symmetrischen Optimum* [53]
- Parametrisierung von PID-Reglern für PT_n -Strecken mit den Verfahren von *Ziegler und Nichols* oder Stabilitätsrand-Tabellen nach Unbehauen [46]

Lunze [43] und Unbehauen [46] nennen weiterhin einige analytische Verfahren, die den Übergang zwischen den einfachen PID-Reglern und den komplexeren modellbasierten Reglern darstellen. Dabei wird ein meist inverses Modell der Regelstrecke verwendet, z. B. beim *Kompensationsregler* nach *Truxal-Guillemin*, der *Internal Model Control* und dem *Smith-Prädiktor*.

2.4.2 Moderne Methoden

Zum direkten Entwurf von MIMO-Regelungen mittels mathematischer Optimierung für ein dynamisches Modell der Regelstrecke werden Zustandsregler verwendet, auch als *moderne* Regelverfahren bezeichnet [45], [53]. Der Regler verarbeitet die Zustände des Systems, die direkt gemessen oder über einen *Zustands-Beobachter* rekonstruiert werden. Der *Beobachter* verwendet dazu ein mathematisches Modell der Regelstrecke sowie die Stellgrößen und die Abweichung von Sensor- zu Beobachteraussgängen. Die wichtigsten linearen Verfahren der Zustandsregelung sind die *Linear Quadratische Regelung (LQR)* und das *Polvorgabe-Verfahren*. Darin werden Performance-Anforderungen relativ abstrakt mittels gewünschter Pollagen bzw. Gewichtungen von Zuständen und Stellgrößen beim Ausschwingen infolge von Anfangsbedingungen formuliert. Der Entwurf der Beobachterrückführmatrix wird meist analog zum Reglerentwurf als LQ-Problem bzw. durch Polvorgabe für den Beobachterkreis durchgeführt. Da der *Beobachter* ein dynamisches System darstellt, wird die erreichbare Performance im Vergleich zur theoretisch möglichen Regelung bei direkter Kenntnis aller Systemzustände teils deutlich reduziert.

Die LQR weist theoretisch einen Phasenrand von mindestens 60° auf, der bei der Verwendung eines *Zustandsbeobachters* jedoch nicht mehr garantiert ist [54]. Beim Entwurf des *Beobachters* als sog. *Kalman-Filter* werden Gewichtungen vorgenommen, die Bezug zu statistischen Größen des Prozess-

rauschens und Sensorrauschens aufweisen. Die Kombination aus LQR und *Kalman-Filter* führt zum bekannten LQG-Regler (engl. *Linear Quadratic Gaussian Regulator*) [55].

Durch Polvorgaberegler wird die Dynamik des Regelkreises ähnlich dem Wurzelortskurvenverfahren durch die Pollagen eingestellt, wobei die Polvorgabe eine annähernd beliebige Beeinflussung aller Pole erlaubt. Nach [56] eignet sich dies insbesondere für den Entwurf von Führungsgrößenregelungen. Probleme können durch hohe Stellgrößen verursacht werden sowie im Beobachterentwurf durch hohe Rauschverstärkungen. Die Wahl geeigneter Pollagen soll dies vermeiden, wozu in der Fachliteratur Richtlinien angegeben sind, s. z. B. [44], [53]. Zum Beobachterentwurf ist die Polvorgabe besonders geeignet, da geeignete Pollagen des Beobachtersystems links des geregelten Systems schnelle Konvergenz der geschätzten zu den tatsächlichen Zuständen ermöglichen [44].

2.4.3 Post-moderne Methoden

Post-moderne Verfahren vereinigen Vorteile *klassischer* und *moderner* Verfahren zu einem intuitiven Entwurf durch mathematische Optimierung von Ausgangsrückführungen. Besonderen Stellenwert nehmen die sog. H_2 -, H_∞ - und μ -Synthese ein. Das Grundprinzip dieser Verfahren wird hier in Anlehnung an die Grundlagenliteratur [45], [57], [58] erklärt. In Abschnitt 2.6 folgt dann eine Vertiefung der Theorie zu H_∞ - und μ -Synthese.

Zum Reglerentwurf werden insbesondere 2- und ∞ -Matrixnormen der Übertragungsmatrix des geschlossenen Regelkreises in Gleichung (2.5) und (2.6) mit mathematischen Optimierungen minimiert. Die „ H “-Norm ist im sog. *Hardy-Raum* definiert, der sich auf die Menge der in der rechten komplexen Halbebene analytischen Funktionen beschränkt [48]. Zum Reglerentwurf ist die Zustandsraumdarstellung der Regelstrecke G aufgrund einfacher Verknüpfbarkeit von Strecke, Regler und Unsicherheiten sowie Auswahl geeigneter Performance-Ein- und -Ausgängen w_M nach z_M besonders geeignet. Die Erweiterung der Strecke um diese Kanäle entsprechend Abbildung 2.6 ergibt das (ungewichtete) Synthesystem.

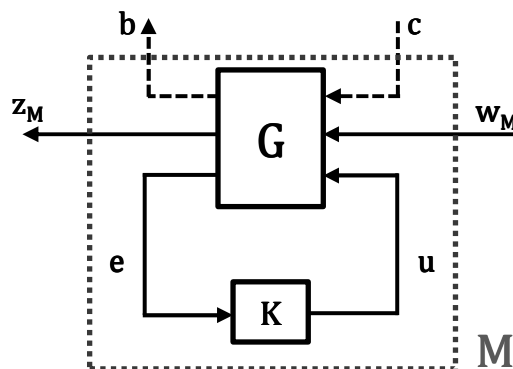


Abbildung 2.6: Synthesystem von H_2 - und H_∞ -Reglern

Das typische Entwurfsproblem definiert die zu optimierenden Performancekanäle von den Performance-Eingängen w_M zu den Performance-Ausgängen z_M sowie die Kanäle u und e des Reglers K . Die Synthesaufgabe ist die Minimierung einer Norm des geschlossenen Regelkreises M von w_M nach z_M durch Auffinden des optimalen Reglers K . Zur Einstellung der Performance werden fre-

quenzabhängige Gewichtungsfunktionen für \mathbf{w}_M und \mathbf{z}_M eingefügt, die eine entscheidende Bedeutung für den Erfolg des Entwurfs haben, vgl. Abschnitt 2.6.2. Für eine Berücksichtigung von Unsicherheiten werden später die Unsicherheitskanäle \mathbf{b} und \mathbf{c} hinzugefügt.

Die H_2 - und H_∞ -Normen sind für beliebige Systeme definiert, die kausal und asymptotisch stabil sind [45], [48]. Die 2-Matrixnorm stellt allgemein ein Energiemaß bei der Übertragung von Signalen dar. Die Definition der 2-Norm lautet für \mathbf{M} :

$$\|\mathbf{M}(j\omega)\|_2 \triangleq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Spur}(\mathbf{M}^*(j\omega)\mathbf{M}(j\omega)) d\omega} \quad (2.5)$$

Die ∞ -Norm für \mathbf{M} ist das Supremum des größten Singulärwertes $\bar{\sigma}$ von \mathbf{M} über der Frequenz ω :

$$\|\mathbf{M}(j\omega)\|_\infty \triangleq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(\mathbf{M}(j\omega)) \quad (2.6)$$

Die Berechnung von H_2 - bzw. H_∞ -Reglern für \mathbf{G} kann nun kompakt notiert werden:

$$\min_{\mathbf{K}} \|\mathbf{M}(j\omega)\|_2 \quad \text{bzw.} \quad \min_{\mathbf{K}} \|\mathbf{M}(j\omega)\|_\infty \quad (2.7)$$

Im H_∞ -Entwurf können durch die Wahl der Gewichtungsfunktionen selektive Performance-Einstellungen vorgenommen werden, die in nicht relevanten Frequenzbereichen auch gezielte Verschlechterungen ermöglichen. Auswirkungen von Restriktionen wie dem sog. *Bode-Integral*, für das die Bode-Lecture von Stein [59] besonders empfohlen wird, können damit einfach berücksichtigt werden. Eine umfangreiche Beschreibung von Limitierungen bei der Wahl von Gewichtungsfunktionen ist z. B. in [48] zu finden. Die H_2 -Norm ist weniger selektiv, da sie in eine Summe sämtlicher, über alle Frequenzen integrierten, Singulärwerte umgewandelt werden kann, s. z. B. [57].

Für SISO-Systeme kann das dynamische Verhalten anhand der Übertragungsfunktion übersichtlich beschrieben werden. MIMO-Systeme verfügen hingegen über mehrere Ein- und Ausgänge, so dass die zugehörige Übertragungsmatrix zunächst schwer zu analysieren ist. Dies kann durch die Verwendung des größten Singulärwertes $\bar{\sigma}(j\omega)$ überwunden werden, der die größte Verstärkung zwischen Eingangs- und Ausgangsvektor über der Frequenz wiedergibt. Dies ist das maximale Verhältnis der Beträge von Ausgangs- und Eingangsvektor, also eine worst-case Verstärkung. Die Amplitudenverstärkungen aller Übertragungspfade des Systems sind daher stets kleiner als $\bar{\sigma}(j\omega)$. Im Anhang ist dazu ein einfaches Beispiel zur Veranschaulichung des größten Singulärwertes angegeben. Dort werden insbesondere die Auswirkungen von Kopplungen im System dargestellt sowie die Verbindung zum *Strukturierten Singulärwert* (SSV, engl. *Structured Singular Value*) hergestellt, vgl. Abschnitt 2.6.3. Der größte Singulärwert ist nicht direkt berechenbar, kann jedoch in guter Genauigkeit durch eine obere Schranke angenähert werden.

In der H_∞ -Synthese wird der größte Singulärwert $\bar{\sigma}(j\omega)$ bzw. dessen obere Schranke, d. h. die H_∞ -Norm des geschlossenen Regelkreises minimiert. Eine direkte Minimierung, z. B. mittels LMI-Optimierungen ist mathematisch aufwendig, so dass üblicherweise ein sog. *suboptimaler* H_∞ -Regler berechnet wird [60], [61], [62]. Dazu wird eine obere Schranke γ für $\bar{\sigma}(j\omega)$ angenommen und dafür, sofern möglich, ein H_∞ -Regler berechnet. Die obere Schranke wird dann in der sog. γ -Iteration so weit wie möglich verkleinert [45]. Mit dem *Small Gain Theorem* kann die robuste Stabilität eines Systems anhand der H_∞ -Norm, d. h. der oberen Schranke des größten Singulärwertes, beurteilt werden. Daher ist die H_∞ -Synthese besonders zum Entwurf robuster Regelungen geeignet.

2.5 Robuste Regelung

Das dynamische Verhalten von realen Regelstrecken ist weder ideal linear noch exakt bekannt und kann sich zudem im Betrieb verändern. Robuste Regelverfahren dienen dazu, dies im Reglerentwurf direkt zu berücksichtigen und führen bei erfolgreichem Entwurf zu einem Regelkreis mit garantierter Stabilität und Performance für den definierten Unsicherheitsbereich [48]. Dieser Abschnitt gibt einen Überblick über verfügbare robuste Verfahren, eingeteilt in robuste *moderne*, robuste *quasi-klassische*, robuste *post-moderne* sowie *sonstige* Verfahren. Da wesentliche Unterschiede der Verfahren in der Art der Unsicherheitsmodellierung zur Berücksichtigung im Entwurf bestehen, werden übliche Unsicherheitsbeschreibungen zunächst kurz erläutert.

2.5.1 Unsicherheiten

Um die Robustheit zu quantifizieren, werden Unsicherheiten von Streckeneigenschaften definiert, gegenüber denen Unempfindlichkeit der Stabilität und Performance des geschlossenen Regelkreises gefordert wird. Um Unsicherheiten in einem robusten Reglerentwurf berücksichtigen zu können, müssen diese in einer zum Verfahren passenden Beschreibung vorliegen.

Multimodelle beschreiben durch eine begrenzte Anzahl meist linearer Modelle verschiedene Systemdynamiken. Nachteilig ist der diskontinuierliche Unsicherheitsbereich, so dass Robustheit für Bereiche zwischen den Einzelmodellen nicht garantiert werden kann. Zudem sind wenige Entwurfsverfahren für diese Unsicherheit bekannt, s. z. B. [63], [64].

Polytope Unsicherheiten ermöglichen insbesondere Definitionen von Abweichungen der Systemmatrix in Zustandsraumdarstellung. Unsichere Bereiche von Parametern werden durch Polytope, d. h. durch eine diskrete Anzahl von Polynomen zusammengesetzter Begrenzungslinien, beschrieben. Eine ausführliche Darstellung und mathematische Robustheitsanalyse mittels quadratischer Stabilitätskriterien ist z. B. in [65], [66] dargestellt.

In robusten *post-modernen* Verfahren werden Unsicherheiten als Matrix $\mathbf{\Delta}$ definiert und über die Unsicherheits-Aus- und -Eingänge \mathbf{b} und \mathbf{c} in Abbildung 2.7 als „obere“ *Linear Fractional Transformation (upper LFT)* mit dem System \mathbf{M} verbunden [45]. Die Unsicherheitsmatrix $\mathbf{\Delta}$ definiert die maximale Abweichung in Bezug auf ein nominelles System \mathbf{M} . Diese Darstellung ermöglicht eine einfache Stabilitätsbetrachtung über das *Small Gain Theorem* und den größten Singulärwert. Unterschiede ergeben sich dabei in der Beschaffenheit der Unsicherheitsmatrix $\mathbf{\Delta}$. *Wiederholte Unsicherheiten* treten an mehreren Stellen simultan auf und stehen in festem Verhältnis zueinander. Wird dieser Bezug vernachlässigt, indem sie als individuelle Unsicherheiten betrachtet werden, entsteht signifikante Konservativität [45].

Sog. *unstrukturierte Unsicherheiten* weisen eine voll besetzte Matrix $\mathbf{\Delta}$ auf und wirken global auf das Übertragungsverhalten von allen Ein- zu allen Ausgängen des Systems. *Strukturierte Unsicherheiten* wirken im Gegensatz dazu „lokal“ im Modell und haben unterschiedliche Auswirkungen auf die einzelnen Übertragungspfade. In der Unsicherheitsmatrix $\mathbf{\Delta}$ ergeben sich (block-)diagonale Strukturen, so dass die Unsicherheiten keine Kopplung zu den restlichen Ein- und Ausgängen aufweisen [45]. Da der größte Singulärwert $\bar{\sigma}(j\omega)$ Kopplungen zwischen den Ein- und Ausgängen berücksichtigt, ist dieser nicht für strukturierte Unsicherheiten geeignet. Dies wird erst durch den *SSV* möglich.

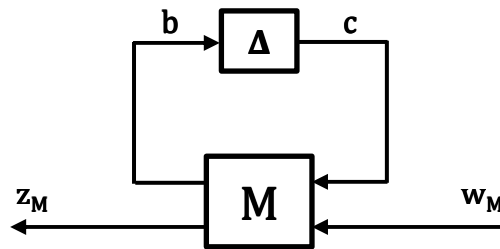


Abbildung 2.7: Upper LFT einer Unsicherheitsmatrix

In den üblichen Verfahren der H_∞ - und μ -Synthese mittels *DK-Iteration* können aus mathematischen Gründen nur *komplexe Unsicherheiten* verwendet werden. Es ergibt sich ein Unsicherheitsbereich, der auch komplexe Werte beinhaltet. Dabei ist zu beachten, dass parametrische Unsicherheiten oft für physikalische Parameter verwendet werden, die in den meisten Fällen rein reellwertig sind. Um den Unsicherheitsbereich in diesen Fällen auf reelle Werte zu beschränken, werden *reelle Unsicherheiten* verwendet. Werden komplexe und reelle Unsicherheiten kombiniert, so spricht man von *gemischten Unsicherheiten* [45], [67]. Da die mathematische Behandlung von rein komplexen Unsicherheiten sowohl in der Robustheitsanalyse als auch in der Reglersynthese jedoch wesentlich einfacher ist, werden gemischte Unsicherheiten trotz der Vorteile von exakten, nichtkonservativen Unsicherheitsbereichen bisher kaum verwendet.

2.5.2 Robuste moderne Verfahren

Der *Robustheitsentwurf mittels Straffunktion* wurde in den 1980er Jahren von Konigorski [63] zur Polvorgabe eines Multimodell-Problems entwickelt und platziert die Pole in einen festzulegenden Bereich der komplexen Ebene. Die Straffunktion „erzwingt“ dies für alle Betriebspunkte des Multimodells, wobei unterschiedlichen Betriebspunkten individuelle Pol-Bereiche zugewiesen werden können.

Die *Loop Transfer Recovery* (LTR) nach Kwakernaak [68] bzw. Doyle und Stein [69] dient der Annäherung des LQG-Reglers an den Phasenrand von 60° einer LQR. Der Entwurf ist für komplexe Strecken aufwendig und es treten signifikante Probleme für schwach gedämpfte Systempole auf [57]. Aktuelle Weiterentwicklungen nutzen H_2 -/ H_∞ -Frequenzbereichskriterien und -lösungsverfahren, um die Nachteile zu überwinden [70]. Da keine echten Unsicherheiten berücksichtigt werden können bzw. Analogien zu H_2 -/ H_∞ -Verfahren vorliegen, wird die LTR im Folgenden nicht weiter berücksichtigt.

LMIs ermöglichen eine Berücksichtigung von Robustheitsnebenbedingungen in konvexen Optimierungsproblemen und gewinnen seit den 1990er Jahren an Bedeutung [49], [71]. Die Robustheit wird üblicherweise über quadratische Stabilität unter der Verwendung von *Ljapunov Funktionen* berücksichtigt, was jedoch in der Regel zu nicht-konvexen Problemen führt. Werden diese konvex angenähert, entsteht Konservativität [49].

Die *MinMax LQG-Regelung* integriert die quadratische Stabilität in einem quadratischen Gütefunktional [72], [73]. Unstrukturierte Unsicherheiten können aus der Darstellung im *Small Gain Theorem* übernommen werden, so dass eine Erweiterung des H_∞ -Verfahrens um LQG-Gütefunktionale möglich ist. Wird die Performance ebenfalls analog zum H_∞ -Problem über Gewichtungsfunktionen defi-

niert, ist eine Lösung als (skaliertes) H_∞ -Problem möglich [72], [74]. Über LMIs können weitere Randbedingungen berücksichtigt werden [75], wobei die genannten Einschränkungen zu beachten sind. Im Folgenden wird die *MinMax LQG-Regelung* nicht weiter vom H_∞ -Verfahren unterschieden, da die möglichen Erweiterungen keine entscheidenden Vorteile für diese Arbeit bieten.

2.5.3 Robuste quasi-klassische Verfahren

Quasi-klassische Verfahren führen MIMO-Reglerentwürfe auf den Entwurf mehrerer SISO-Regler zurück. Die Performance wird ähnlich den *klassischen* Frequenzkennlinien-Verfahren anhand der Übertragungsfunktionen des offenen Kreises definiert. Als Vorgänger der *post-modernen* Verfahren wie H_2 -/ H_∞ -Synthese werden sie in der aktuellen Literatur zur robusten Regelung oft nicht mehr erwähnt. Zu diesen Verfahren gehören u. a. das *Direct Nyquist Array* und das *Reverse Frame Normalizing* Verfahren. Im *Direct Nyquist Array* Verfahren wird robuste Stabilität anhand breiter Bereiche um die *Nyquistkurve* berücksichtigt, sog. verallgemeinerter Gershgorin-Bänder. Das Verfahren ist auf diagonaldominante Strecken beschränkt und erreicht keine robuste Performance. Vorteile sind Möglichkeiten zur parametrischen Unsicherheitsdefinition und zur Beschränkung der Reglerstruktur [48]. Das *Reverse Frame Normalizing* führt neben der Formung der *Nyquistkurve* eine Normalisierung der Übertragungsmatrix durch, so dass Singulärwerte durch die Eigenwerte angenähert werden und robuste Stabilität gegenüber unstrukturierten Unsicherheiten berücksichtigt werden kann. Das Verfahren ist wenig intuitiv und erfordert ähnliche Größenordnungen für alle Regelgrößen, um geringe Abweichungen der Eigenwerte zu den Singulärwerten zu erreichen [48], [76].

2.5.4 Robuste post-moderne Verfahren

Post-moderne Verfahren basieren auf dem *Small Gain Theorem* zur Berücksichtigung von Unsicherheiten in *LFT*-Darstellung [45]. Wie in Abbildung 2.7 wird die Unsicherheitsmatrix Δ als *LFT* mit dem System verbunden und es liegt robuste Stabilität vor, wenn die Verstärkung von Unsicherheits-Ein- und -Ausgängen unter einem bestimmten Wert liegt. In Verbindung mit Gewichtungsfunktionen für Performancekanäle kann zudem robuste Performance erreicht werden.

Die H_∞ -Synthese minimiert das Maximum des größten Singulärwert $\bar{\sigma}(j\omega)$ über alle Frequenzen, d. h. die H_∞ -Norm. Die Anwendung auf die Unsicherheitskanäle \mathbf{b} und \mathbf{c} führt somit direkt zur Optimierung der robusten Stabilität. Zur Erweiterung auf robuste Performance werden Performancekanäle hinzugefügt, für die das Übertragungsverhalten optimiert wird. Der Singulärwert koppelt jedoch Unsicherheits- und Performancekanäle, so dass der Entwurf konservativ wird. Um dies zu vermeiden, führte Doyle [77] den *Strukturierten Singulärwert (SSV)* für die μ -Synthese ein, der die Struktur der Unsicherheits- und Performancekanäle berücksichtigt.

In der H_∞ -Synthese und in üblichen μ -Synthese-Algorithmen können Unsicherheiten auch komplexe Werte annehmen, was sich für unstrukturierte additive und multiplikative Unsicherheiten eignet. In der komplexen μ -Synthese mittels *DK-Iteration* nach Doyle [78] können auch parametrische, komplexe Unsicherheiten verwendet werden. Zur Synthese für gemischt komplex-reelle Unsicherheiten wurden die *(D,G)K-Iteration* von Young [79] und die μ *K-Iteration* von Toffner-Clausen et al. [80] als Erweiterungen zur *DK-Iteration* entwickelt.

Vorteile der H_∞ -Synthese sind geringerer Entwurfsaufwand und verfügbare Software zur Lösung wie in Matlab [81]. Nachteilig sind die Beschränkung auf komplexe Unsicherheiten und die Konservativitäten durch unerwünschte Kopplungen über $\bar{\sigma}(j\omega)$. Die Reglerordnung entspricht der Summe von Strecken- und Gewichtungso Ordnungen. Die komplexe μ -Synthese überwindet diese Konservativität, ist jedoch aufwendiger, benötigt zusätzliche Einstellungen und erhöht die Reglerordnung durch zusätzliche Skalierungen. Trotz des nicht-konvexen Problems konvergiert die Iteration zuverlässig [45]. Die gemischte μ -Synthese mittels sog. $(D,G)K$ - oder μK -Iteration ermöglicht die Integration von reellen parametrischen Unsicherheiten, erfordert jedoch sehr hohen Berechnungsaufwand, ist anfälliger bezüglich lokaler Optima und numerischer Probleme und erhöht zudem die Reglerordnung weiter. Detaillierte Darstellungen sind in den Abschnitten 2.6.3 bis 2.6.6 angegeben.

In den 1990er Jahren wurden von Banjerdpongchai und How [82] sowie Tchernychev und Sideris [83] unabhängig voneinander LMI-basierte Verfahren zur Synthese mit reellen parametrischen Unsicherheiten entwickelt, die im Gegensatz zu DK -, $(D,G)K$ - und μK -Iteration auf das Fitten der sog. \mathbf{D} -Scales verzichten können. Aufgrund fehlender Unterstützung von wiederholten Unsicherheiten hat sich die sog. μ/K_m -Synthese jedoch nicht durchgesetzt. Die kürzlich vorgestellte nicht-glatte μ -Synthese (engl. *nonsmooth μ -Synthesis*) von Apkarian [84] verzichtet ebenfalls auf Fits der \mathbf{D} -Scales und ist zudem auch auf wiederholte Unsicherheiten anwendbar. Anwendungen sind bisher nicht bekannt und da Apkarian nur grobe Angaben zur verwendeten Optimierung macht, können etwaige Schwachstellen noch nicht bewertet werden. Lantto et al. [64] führen mit einem Hinweis auf Konvergenzprobleme weitere Vereinfachungen ein, die eine glatte Optimierung ermöglichen. Auch dieses Verfahren erfordert ein Fitten von Singulärwerten und es ist zudem auf einfache Reglerstrukturen begrenzt.

2.5.5 Weitere Verfahren

Linear Parameter Varying (LPV)-Regler nach Packard [85] werden in der Literatur oft als robuste Verfahren bezeichnet, auch wenn sie primär adaptive Verfahren sind. Ist die Strecke in bekannter, linearer Weise von messbaren Parametern abhängig, können parametervariante H_∞ -Regler entworfen werden. So kann die Stabilität auch für schnelle Änderungen des variablen Parameters garantiert werden [86], [87]. Zusätzlich können unstrukturierte Unsicherheiten entsprechend dem robusten H_∞ -Entwurf berücksichtigt werden. Zur nicht-konservativen Lösung müsste jedoch eine in der Synthese benötigte *Ljapunov Funktion* ebenfalls parameterabhängig sein, was aktuell nicht möglich ist. Die Verwendung einer konstanten Funktion führt zu deutlicher Konservativität im Vergleich zu üblichem *Gain-Scheduling* manuell entworfener Regler, wie Mason et al. [88] am Beispiel eines Rotors demonstrieren.

Die *exakte Linearisierung* eliminiert nichtlineare, glatte Terme des Streckenmodells durch direktes Aufschalten. Entsprechend muss ein sehr exaktes Modell der nichtlinearen Regelstrecke vorliegen und der Zustandsvektor muss jederzeit vollständig bekannt sein [89].

An optimalen, nicht-konservativen Regelverfahren für unsichere Systeme mit konvexer Optimierung wird aktuell geforscht, s. z. B. [90]. Diese sind aktuell jedoch auf eine Offline-Berechnung von Steuerungserfolgen ohne Berücksichtigung von Störgrößen beschränkt.

2.5.6 Diskussion

Eine Bewertung der robusten Verfahren erfolgt primär anhand der Möglichkeit zur Unsicherheitsbeschreibung im Entwurf. Zur Umsetzbarkeit sind zudem der numerische Aufwand bei der Synthese und die Konvergenz des Lösungsverfahrens sowie die resultierende Reglerordnung zu beachten. Ein weiteres Kriterium ist die Beschreibung der Performance-Vorgaben im Entwurf. Verfahren, mit denen keine robuste Stabilität und Performance für explizit definierte Unsicherheiten erreicht werden kann, werden im Folgenden nicht berücksichtigt. Dies betrifft die LTR und die *quasi-klassischen* Verfahren. Weiterhin wird der Robustheitsentwurf mittels Straffunktion nicht weiter verfolgt, da dieser nicht für kontinuierliche Unsicherheitsbereiche geeignet ist.

Liegt ein lineares Modell vor, dessen Parameter sich proportional zu einem messbaren Parameter(vektor) ändern, ist eine *LPV*-Regelung geeignet und bietet robuste Stabilität mit adaptiver Performance. Gyroskopische Unsicherheiten von Rotoren lassen sich geeignet durch ein *LPV*-System abbilden. Nachteile bestehen in der Gefahr von Instabilitäten bei fehlerhaftem oder ausgefallenem Adaptionssignal sowie in einer deutlichen Konservativität gegenüber *Gain-Scheduling* von manuell entworfenen H_∞ -Reglern.

Robuste Frequenzbereichsverfahren unterscheiden sich in der Besetzung der Unsicherheitsmatrix Δ sowie den zugehörigen Lösungsverfahren. Für unstrukturierte Unsicherheiten ist die H_∞ -Regelung geeignet, jedoch führen Kopplungen über den größten Singulärwert aller Ein- und Ausgänge zu Konservativität. Mit der μ -Synthese wird diese aufgehoben, so dass auch strukturierte Unsicherheiten sinnvoll eingesetzt werden können. Die nicht-konvexe Optimierung ist aufwendiger und numerisch anfälliger, dennoch hat sich für komplexe Unsicherheiten die *DK-Iteration* als sehr zuverlässig erwiesen. Für reelle parametrische Unsicherheiten in einem praxisrelevanten dynamischen System höherer Ordnung stehen theoretische Grundlagen innerhalb der μ -Synthese zur Verfügung. Dazu gehören die *(D,G)K-Iteration*, die μK -Iteration sowie die nicht-glatte μ -Synthese. Die *(D,G)K*- und die μK -Iteration werden in der Literatur bisher nur auf Benchmark-Probleme [91], einfache Beispiele geringer Ordnung [92] oder kleine Unsicherheiten [93] erfolgreich angewendet. Für komplexere Systeme höherer Ordnung mit großen Unsicherheiten sind keine erfolgreichen Anwendungen bekannt. Einige Quellen beschreiben Versuche der Anwendung, die aufgrund von numerischen Problemen und hohen Skalierungsordnungen scheitern [37] bzw. nicht über die Performance eines *DK*-Reglers hinauskommen [94]. Die neue nicht-glatte μ -Synthese soll diese Problematik überwinden, jedoch sind bisher noch keine Anwendungen bekannt.

Zusammenfassend lässt sich für die robuste Regelung komplexer mechanischer Systeme mit großen Unsicherheiten festhalten, dass die Art der Unsicherheit auf das zu favorisierende Regelverfahren schließen lässt. Für unstrukturierte sowie für komplex-parametrische Unsicherheiten ist die μ -Synthese mittels *DK-Iteration* vorzuziehen. Liegen reell-parametrische Unsicherheiten vor, stehen die *(D,G)K*- und μK -Iteration sowie die nicht-glatte μ -Synthese zur Verfügung. Höhere Performance ist für die *LPV*-Regelung zu erwarten, da eine Adaption vorgenommen wird. Allerdings sind Stabilität und Performance von der Verfügbarkeit eines messbaren Adaptionparameters abhängig. In dieser Arbeit werden robuste Verfahren bevorzugt, die höheren Sicherheitsansprüchen gerecht werden.

2.6 Theorie der H_∞ - und μ -Synthese

In diesem Abschnitt erfolgt eine Beschreibung der H_∞ - und μ -Synthese in Anlehnung an [45], [57]. Dazu wird zunächst das *Small Gain Theorem* eingeführt, über das Stabilitätsbedingungen für die Unsicherheitsmatrix Δ eingebunden sind.

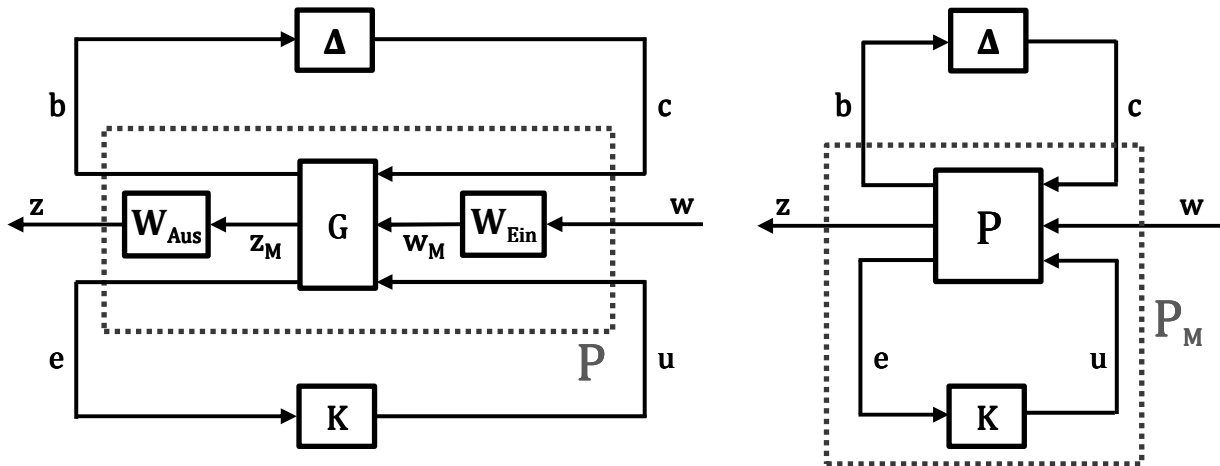


Abbildung 2.8: Synthesystem P der H_∞ - und μ -Synthese inkl. Gewichtungen

In der allgemeinen Struktur des Entwurfsproblems nach Abbildung 2.8 sind die Unsicherheitsmatrix Δ über eine *upper LFT* und der Regler K über eine *lower LFT* verbunden. Die Performance-Ein- und -Ausgänge der Strecke G werden im Entwurf mit einstellbaren Gewichtungsmatrizen W_{Ein} und W_{Aus} für die Performance-Ein- und -Ausgänge an die geforderten Performance-Anforderungen angepasst, so dass das Synthesystem P entsteht. Die gewichteten Performance-Ein- und -Ausgänge werden als z und w bezeichnet. Der geschlossene Regelkreis P_M wird in der Synthese durch Auffinden eines Reglers mathematisch optimiert.

2.6.1 Small Gain Theorem

Das *Small Gain Theorem* ist ein notwendiges und hinreichendes Kriterium robuster Stabilität [45]:

Ein System $M \in \mathcal{RH}_\infty$ ist stabil gegenüber allen Unsicherheiten $\Delta \in \mathcal{RH}_\infty$ entsprechend Abbildung 2.7 mit

$$(a) \|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma \text{ dann und nur dann, wenn } \|M\|_\infty < \gamma;$$

$$(b) \|\Delta\|_\infty < 1/\gamma \text{ dann und nur dann, wenn } \|M\|_\infty \leq \gamma$$

Darin ist γ die obere Schranke für den größten Singulärwert, vgl. Abschnitt 2.4.3.

Ein anschauliches Beispiel bietet die Betrachtung des instabilen Grenzfalles $\gamma = 1$, $\|M\|_\infty = 1$ und $\|\Delta\|_\infty = 1$ für ein SISO-System, da hier der größte Singulärwert mit dem Amplitudengang übereinstimmt. Die maximale Systemverstärkung beträgt 1 und die Unsicherheit kann komplexe Werte mit

Beträgen bis zu 1 annehmen. Dies beinhaltet stets einen Fall, in dem die Unsicherheit die Systemverstärkung aufhebt. Damit wird die Grenze robuster Stabilität $\det(\mathbf{I} - M\Delta) = 0$ erreicht, da $M\Delta$ zu 1 wird.

Das *Small Gain Theorem* ermöglicht eine Interpretation des größten Singulärwertes im Sinne der Robustheit: Der größte Singulärwert gibt für jede Frequenz an, wie weit die Unsicherheit Δ von der Grenze robuster Stabilität entfernt ist:

$$\bar{\sigma}(\mathbf{M}(j\omega)) = \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) : \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}(j\omega)\Delta) = 0, \Delta \text{ ist unstrukturiert}\}} \quad (2.8)$$

Dies gilt z. B. für das System in Abbildung 2.7, wenn die Performancekanäle entfallen. Ansonsten wird der Singulärwert konservativ durch die Kopplung von Unsicherheits- und Performancekanälen. Die Stabilitätsbedingung ist dann weiterhin hinreichend, jedoch nicht mehr notwendig.

Der Verlauf des größten Singulärwertes über der Frequenz zeigt an, in welchen Bereichen die Unsicherheiten und/oder die Performance besonders kritisch sind. In der Synthese zur Minimierung des größten Singulärwertes werden dann Gewichtungen für die Performance eingefügt, um Reduktionen des größten Singulärwertes gezielt vorzunehmen.

2.6.2 H_∞ -Synthese

Der größte Singulärwert als Maß für die erreichte Performance und Stabilität wird in der H_∞ -Synthese als Optimierungsziel verwendet. Es wird der H_∞ -optimale Regler gesucht, der den größten Singulärwert des geschlossenen Regelkreises minimiert, vgl. Gleichungen (2.6) bis (2.7). Diese Synthese wird als die in Abschnitt 2.4.3 erwähnte *suboptimale* Lösung über die γ -Iteration durchgeführt, wozu folgende Voraussetzungen erfüllt sein müssen [95]:

1. Das obere Teilsystem $\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{b}$ (Abbildung 2.8) ist mit dem Regler stabilisier- und beobachtbar.
2. Das „untere“ Teilsystem der Reglerkanäle $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}$ ist stabilisier- und beobachtbar.
3. Alle inneren Zustände des Gesamtsystems sind über den Regler stabilisierbar.

Sind diese Annahmen erfüllt, kann die in der Fachliteratur ausführlich erläuterte Lösung für eine feste obere Schranke γ über zwei Riccati-Gleichungen berechnet werden [45]. In der γ -Iteration wird die obere Schranke dann so weit wie möglich verkleinert.

Performance-Einstellungen werden über frequenzabhängige Gewichtungsfunktionen \mathbf{W}_{Ein} und \mathbf{W}_{Aus} für die Performance-Ein- und -Ausgänge \mathbf{w}_M und \mathbf{z}_M eingefügt (Abbildung 2.8). Die relevanten Übertragungspfade können in den relevanten Frequenzbereichen gewichtet werden. Dann haben diese einen hohen Einfluss auf den größten Singulärwert des gewichteten Synthesystems \mathbf{P} und werden in der Synthese stärker reduziert. Die Integration dieser Performance-Vorgabe über frequenzabhängige Gewichtungsfunktionen wird anhand eines Beispiels gezeigt. Die Performance-Ausgänge \mathbf{z}_M seien Regelabweichungen \mathbf{e} und Stellgrößen \mathbf{u} . Als Performance-Eingänge \mathbf{w}_M werden Sollgrößen \mathbf{r} und Störungen \mathbf{d} ausgewählt. Daraus ergeben sich die Performance-Übertragungsfunktionen $[\mathbf{r} \ \mathbf{d}]' \rightarrow [\mathbf{e} \ \mathbf{u}]'$:

- $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{e}$ (Empfindlichkeitsfunktionen \mathbf{S})
- $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{u}$ (Stellübertragungsfunktionen \mathbf{CS})
- $\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{e}$ (negative Störübertragungsfunktionen $-\mathbf{GS}$)
- $\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{u}$ (sog. negative inverse Eingangsempfindlichkeitsfunktionen $-\mathbf{T}_i$ nach [96])

Die Erweiterung des Streckenmodells \mathbf{G} um die Performance-Ein- und -Ausgänge ergibt für das System \mathbf{M} entsprechend Abbildung 2.6:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & -\mathbf{GS} \\ \mathbf{CS} & \mathbf{T}_i \end{bmatrix}$$

Durch diagonale Performance-Gewichtungen für Ein- und Ausgänge ergibt sich das System \mathbf{P} als (gewichtetes) Synthesystem:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_e & \\ & \mathbf{W}_u \end{bmatrix} \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_r & \\ & \mathbf{W}_d \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Die Gewichtungsfunktionen $\mathbf{W}_{\text{Ein/Aus}}$ sind für MIMO-Systeme zur individuellen Gewichtung einzelner Einträge der Vektoren \mathbf{e} , \mathbf{u} , \mathbf{r} und \mathbf{d} wiederum diagonal besetzt.

Die H_∞ -Synthese minimiert nun die obere Schranke γ des größten Singulärwertes, also die worst-case Verstärkung des gewichteten Systems, vgl. Abschnitt 2.4.3 und den Anhang. Daraus resultiert, dass die Amplitudenverstärkungen aller individuellen Übertragungsfunktion kleiner als der größte Singulärwert $\bar{\sigma}(j\omega)$ sind. Mit den Performance-Gewichtungen ergeben sich folgende Performance-Ungleichungen in Abhängigkeit der oberen Schranke γ für den größten Singulärwert des geschlossenen Regelkreises \mathbf{M} :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(\mathbf{GS}) &\leq \gamma |\mathbf{W}_e \mathbf{W}_d|^{-1} \\ \bar{\sigma}(\mathbf{CS}) &\leq \gamma |\mathbf{W}_u \mathbf{W}_r|^{-1} \\ \bar{\sigma}(\mathbf{S}) &\leq \gamma |\mathbf{W}_e \mathbf{W}_r|^{-1} \\ \bar{\sigma}(\mathbf{T}_i) &\leq \gamma |\mathbf{W}_u \mathbf{W}_d|^{-1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Es handelt sich um Ungleichungen, da die größten Singulärwerte die Beträge von Eingangsvektor $\mathbf{w}_M = [\mathbf{r} \ \mathbf{d}]'$ und Ausgangsvektor $\mathbf{z}_M = [\mathbf{e} \ \mathbf{u}]'$ von \mathbf{P} auswerten, in denen auch die Kopplungen (hier \mathbf{S} und \mathbf{T}_i) enthalten sind, vgl. auch das Beispiel im Anhang. Je mehr Performancekanäle betrachtet werden, desto „ungleicher“ bzw. konservativer werden die Ungleichungen (2.11).

Wird $\gamma \leq 1$ für das gewichtete System erreicht, so ist die worst-case Verstärkung inklusive der Gewichtungen garantiert kleiner 1. Für den geschlossenen Regelkreis \mathbf{M} können die Inversen der Gewichtungen entsprechend Gleichung (2.11) daher als Begrenzungsfunktionen für die einzelnen Übertragungsfunktionen \mathbf{GS} , \mathbf{CS} , \mathbf{S} und \mathbf{T}_i interpretiert werden [96]. Werden beispielsweise die Sollgrößen \mathbf{r} mit 2 und die Regelabweichungen \mathbf{e} mit 5 gewichtet, so ist die Amplitude der Empfindlichkeitsfunktionen \mathbf{S} für den Regelkreis \mathbf{M} garantiert kleiner oder gleich $1/(2 \times 5) = 0,1$, falls $\gamma \leq 1$ erreicht wird.

Die Ordnung von H_∞ -Reglern entspricht stets der Ordnung des Synthesystems, d. h. der Ordnung der Strecke plus der Summe aus den Ordnungen aller Gewichtungsfunktionen. Es sind jedoch effiziente Methoden zur Reduktion der Reglerordnung verfügbar, insbesondere das Verfahren von Wortelboer [97], in dem die Auswirkung der Reduktion auf die H_∞ -Norm direkt berücksichtigt wird.

Unsicherheiten Δ werden im Modell über eine *upper LFT* mit dem System verbunden, s. Abbildung 2.8. Da üblicherweise auf $\|\Delta\|_\infty = 1$ normiert wird, liegt nach dem *Small Gain Theorem* garantierte robuste Stabilität vor, wenn $\gamma < 1$ erreicht wird. Treten Performance- und Unsicherheitskanäle gemeinsam auf, entsteht robuste Performance, die für alle in Δ definierten Unsicherheiten garantiert ist. Die Minimierung des größten Singulärwertes für Unsicherheits- und Performancekanäle gemeinsam erhöht jedoch die angesprochene Konservativität in Ungleichung (2.11) durch die Kopplung aller Kanäle über den größten Singulärwert.

2.6.3 Der Strukturierte Singulärwert

Der *Strukturierte Singulärwert (SSV)* wurde von Doyle [77] eingeführt, um unerwünschte Kopplungen über den größten Singulärwert zu vermeiden. Dies ermöglicht nicht-konservative Robustheitsanalysen sowie Reglersynthesen mittels *SSV*-Minimierung in der μ -Synthese [78]. Die Verwendung des *SSV* zur Berücksichtigung einer Struktur von Δ erhöht jedoch den Berechnungsaufwand im Vergleich zum größten Singulärwert deutlich. Die Definition des *SSV*, der mit der Variablen μ bezeichnet wird, ist die direkte Erweiterung des größten Singulärwertes für strukturierte Unsicherheiten:

$$\mu(\mathbf{M}(j\omega)) = \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) : \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}(j\omega)\Delta) = 0, \Delta \text{ ist strukturiert}\}} \quad (2.12)$$

Zur Berechnung des *SSV* wird eine Struktur für Δ vorgegeben und alle unerwünschten koppelnden Elemente außerhalb dieser Struktur werden vernachlässigt. Einzelne unsichere Parameter, d. h. strukturierte Unsicherheiten, ergeben skalare Einträge δ auf der Hauptdiagonalen von Δ . Für unstrukturierte Unsicherheiten treten blockdiagonale Einträge auf. Diese sind zwar weiterhin innerhalb des jeweiligen Blockes gekoppelt, jedoch nicht mit den übrigen Unsicherheiten und dem Performance-Block. Analog zum Verlauf des größten Singulärwertes zeigen Überhöhungen des *SSV* an, für welche Frequenzen die Unsicherheit und/oder Performance besonders kritisch ist.

Die Grenze robuster Stabilität ist nach dem *Small Gain Theorem* $\mu \leq 1$, sofern jeder Block von Δ auf $\|\Delta_i\|_\infty = 1$ normiert wurde. Ist μ sehr klein, so besteht eine hohe Reserve, die in der Synthese zur Steigerung der Performance genutzt werden kann. Ist μ hingegen größer eins, so werden robuste Stabilität und Performance nicht erreicht.

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & \\ & \Delta_2 \end{bmatrix}, \Delta_i \in \mathbb{C}^{n_c \times n_b} \quad (2.13)$$

Als ein einfaches Beispiel strukturierter Unsicherheit sei eine unsichere Steifigkeit genannt, die normiert und als Skalar $\Delta_1 = \delta$ auf der Hauptdiagonale von Δ eingetragen wird. Der zugehörige Eingang \mathbf{b}_i des Unsicherheitsblocks ist eine Auslenkung, der Ausgang \mathbf{c}_i eine (Feder-)Kraft. Werden zusätzlich Störkräfte als Performance-Eingänge eingeführt, beeinflussen diese indirekt die Federkraft und es kommt zu Kopplungen über den größten Singulärwert. Hier ermöglicht die Berücksichtigung

tigung der 1×1 Struktur für δ die Vernachlässigung der Kopplungen zu den Unsicherheitskanälen von $\mathbf{\Delta}_2$ sowie zu den Performancekanälen.

Die Existenz und Berechnung des SSV als μ -Test gehen auf das sog. *Main Loop Theorem* zurück, das die Aufteilung der μ -Tests von (2.13) für $\mathbf{\Delta}_1$ und $\mathbf{\Delta}_2$ formal definiert. Die beiden Tests sind zwar weiterhin zusammen durchzuführen, jedoch werden für jedes $\mathbf{\Delta}_i$ jeweils nur die zugehörigen Ein- und Ausgänge betrachtet, so dass die Kopplungen verschwinden [45].

Um allein die robuste Stabilität unabhängig von der Performance zu beurteilen, kann ein μ -Test ohne die Performancekanäle \mathbf{w} und \mathbf{z} von \mathbf{P}_M durchgeführt werden. Das Ergebnis wird im Folgenden als *Stabilitäts-SSV* μ_{Δ} bezeichnet. Eine Betrachtung der Performance ohne die Unsicherheitskanäle liefert hingegen nur eine Information über die Performance des nominellen Systems. Da diese als nicht aussagekräftig angesehen wird, ist keine entsprechende Betrachtung üblich und als Performance- μ wird stets der SSV für das gesamte System \mathbf{P}_M mit allen Kanälen angegeben.

Der SSV kann nicht direkt berechnet werden, so dass eine obere Schranke durch Optimierung ermittelt wird. Für komplexe Unsicherheiten werden dazu Transformationsmatrizen \mathbf{D} (sog. *D-Scales*) bestimmt, so dass der größte Singulärwert des skalierten Systems \mathbf{DMD}^{-1} mit dem SSV von \mathbf{M} übereinstimmt, s. Gleichung (2.14). Bisher kann der Verlauf der *D-Scales* zudem nicht kontinuierlich ermittelt werden, so dass die Optimierung punktweise für diskrete Frequenzstützstellen erfolgt. Im Folgenden werden die punktweisen Scales, die zur Menge der punktweise berechneten Matrizen \mathcal{D}_{κ} gehören, mit \mathbf{D}_{ω} bezeichnet. Die so berechneten SSV-Werte sind ebenfalls punktweise für diskrete Stützstellen berechnet und werden mit μ_{ω} bezeichnet.

$$\mu_{\omega}(\mathbf{M}(j\omega)) \leq \inf_{\mathbf{D}_{\omega} \in \mathcal{D}_{\kappa}} \bar{\sigma}(\mathbf{D}_{\omega} \mathbf{M}(j\omega) \mathbf{D}_{\omega}^{-1}) \quad (2.14)$$

Innerhalb der komplexen μ -Synthese zur Regelung elastischer Strukturen wird die modale Unsicherheit besonders häufig verwendet. Dabei werden den Eigenwerten des Systems Unsicherheitsbereiche zugewiesen. Komplexe Unsicherheitsbereiche definieren hier kreisrunde Bereiche der unsicheren Eigenwerte in der komplexen Ebene.

Pole von schwach gedämpften Eigenwerten liegen nah an der imaginären Achse, so dass schon relativ geringe Unsicherheiten einen Kreis erzeugen, der in die rechte, instabile Halbebene überlappt, vgl. Abbildung 2.9.

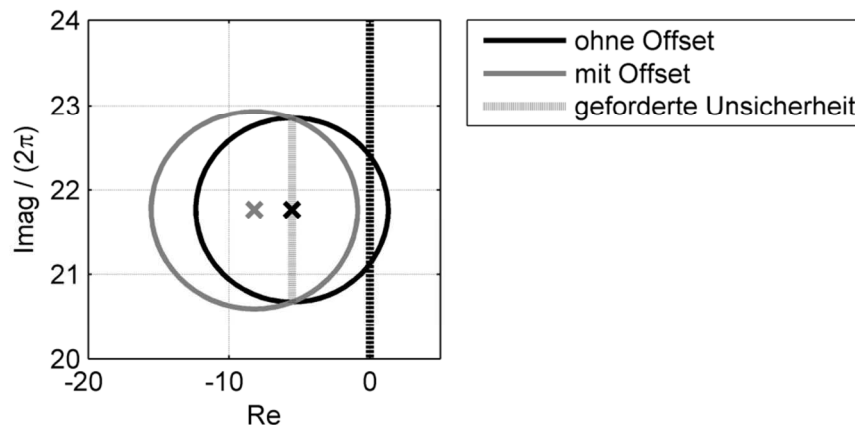


Abbildung 2.9: Komplexe modale Unsicherheit ohne/mit Offset (*Oil Whip*-Prüfstand)

Diese Überlappung ist üblicherweise unerwünscht, da dann auch instabile Systeme zum Unsicherheitsbereich gehören, obwohl (passive) mechanische Regelstrecken meist inhärent stabil sind. Durch die Erweiterung um instabile Systeme kann Konservativität entstehen, da nur noch Regler verwendet werden können, die den (fiktiv) instabilen Teilbereich stabilisieren. Um instabile Unsicherheitsbereiche für inhärent stabile Systeme zu vermeiden, wird der Mittelpunkt um ein „Offset“ nach links verschoben. Um dennoch den Unsicherheitsbereich für die Eigenfrequenz des ursprünglichen Pols abzudecken, ist der Radius der Scheibe, d. h. der Betrag der Unsicherheit, zu vergrößern. Abbildung 2.9 zeigt dies für den unsicheren Pol eines später untersuchten Rotorsystems.

Um die Eigenwertunsicherheit einzufügen wird eine bimodale Transformation in eine reelle Darstellung der Zustandsraummatrizen durchgeführt [98]. Polpaare schwingungsfähiger Eigenwerte werden dann von 2×2 Blöcken $\hat{\mathbf{A}}_i$ auf der Hauptdiagonalen der modalen Systemmatrix $\hat{\mathbf{A}}$ dargestellt. In der mittleren Zeile treten sowohl δ_i als auch δ_i^2 auf, wozu zunächst zwei Unsicherheiten verwendet werden müssen. Die auch als „Linearisierung“ bezeichnete Umformung in der unteren Zeile von Gleichung (2.15) entsteht durch Vernachlässigung des Terms $-\omega_i^2 \delta_i^2$ und ist daher für kleine Unsicherheiten δ_i geeignet. Da hier δ_i nur einmal und ohne Exponenten auftritt, ermöglicht dies die Verwendung einer einzigen Unsicherheit [99]. Somit entsteht eine kleinere Unsicherheitsstruktur, was vorteilhaft für die Synthese ist.

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \hat{\mathbf{A}}_i & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2D_i\omega_i \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{i,\text{unsicher}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2(1+\delta_i)^2 & -2D_i\omega_i(1+\delta_i) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\cong \hat{\mathbf{A}}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta_i \begin{bmatrix} -2\omega_i^2 & -2D_i\omega_i \end{bmatrix}$$

Im Folgenden wird die Vereinfachung/Linearisierung als *vereinfachte modale Unsicherheit* bezeichnet, die mittlere Zeile hingegen als *exakte modale Unsicherheit*.

Weiterhin sind komplexe und reelle bzw. gemischt komplex-reelle Unsicherheiten zu unterscheiden. Beispielsweise ist eine komplexe, multiplikative Unsicherheit von 5% ein unsicherer Faktor von 1, um den ein Kreis mit dem Radius von 0,05 in der komplexen Ebene gelegt wird. Der komplexe Anteil des Faktors bewirkt, dass auch der Phasenverlauf unsicher wird. Dabei ist zu beachten, dass parametrische Unsicherheiten oft für physikalische Parameter wie Steifigkeiten verwendet werden. Solche Parameter sind in den meisten Fällen physikalisch reellwertig und die Verwendung von komplexen Unsicherheiten bewirkt eine Erweiterung des Unsicherheitsbereiches - hier um komplexwertige Steifigkeiten. Imaginärteile für die Steifigkeit bewirken, dass zusätzlich eine unsichere Dämpfung entsteht. Diese nicht sinnvolle Vergrößerung des Unsicherheitsbereiches um komplexe Werte ist konservativ und sollte daher vermieden werden.

Für reelle und gemischt komplex-reelle Unsicherheiten ist die μ -Berechnung jedoch deutlich aufwendiger, vgl. Young bzw. Fan et al. [67], [100], [101]. Im üblichen Verfahren wird analog zum Vorgehen für komplexe Unsicherheiten eine Transformation mit \mathbf{D}_ω -Scales durchgeführt. Allerdings werden zusätzliche \mathbf{G}_ω -Scales aus der punktweisen Menge \mathcal{G}_x sowie ein Parameter β_{DGK} benötigt. Für das transformierte System stimmt der SSV (für gemischt komplex-reelle Unsicherheiten) dann wieder mit dem größten Singulärwert $\bar{\sigma}(j\omega)$ überein:

$$\mu_\omega(\mathbf{M}(j\omega)) \leq \inf_{\mathbf{D}_\omega \in \mathcal{D}_K, \mathbf{G}_\omega \in \mathcal{G}_K} \inf_{0 < \beta_{\text{DGK}} \in \mathbb{R}} \left\{ \beta_{\text{DGK}} : \bar{\sigma} \left(\left(\frac{\mathbf{D}_\omega \mathbf{M}(j\omega) \mathbf{D}_\omega^{-1}}{\beta_{\text{DGK}}} - j \mathbf{G}_\omega \right) (\mathbf{I} + \mathbf{G}_\omega^2)^{-1/2} \right) \leq 1 \right\} \quad (2.16)$$

Diese mehrfache Optimierung ist mathematisch deutlich aufwendiger als für rein komplexe Unsicherheiten in Gleichung (2.14) und die Berechnungsgenauigkeit ist oft nicht zufriedenstellend. Eine deutlich genauere, aber numerisch aufwendigere Methode nach Young et al. [102] verwendet LMIs zur Berechnung des reellen und gemischten μ_ω .

2.6.4 μ -Synthese

Die μ -Synthese ist die direkte Erweiterung der H_∞ -Synthese in Bezug auf die Strukturiertheit der Unsicherheiten, was durch Minimierung des SSV anstelle des größten Singulärwertes $\bar{\sigma}(j\omega)$ erreicht wird. Abgesehen von der Berücksichtigung der Unsicherheitsstruktur sind die Synthesysteme \mathbf{P} der μ - und der H_∞ -Synthese identisch.

Die Erweiterung der μ -Synthese ist bei Verwendung der üblichen Lösungsverfahren relativ einfach. Das Synthesystem \mathbf{P} wird mit den erwähnten Transformationen so skaliert, dass der größte Singulärwert und der SSV für das transformierte System zusammenfallen. Dann führt eine Minimierung des größten Singulärwertes gleichzeitig auch zur Minimierung des SSV, so dass eine H_∞ -Synthese für das skalierte System den μ -optimalen Regler findet. Dieses Prinzip wird von der DK -, der $(D,G)K$ - und der μK -Iteration verwendet.

Da die mathematische Berechnung des SSV jedoch relativ aufwendig ist, ist auch die Transformation von \mathbf{P} für die Synthese kritisch. Die Transformation verändert sich, wenn sich das System verändert – also auch wenn der Regelkreis mit einem neuen Regler geschlossen wird. Wurde also eine Transformation für das unregelte System durchgeführt und damit ein Regler berechnet, stimmen Singulärwert und SSV für den geschlossenen Regelkreis nicht mehr überein. Daher werden in den DK -, der $(D,G)K$ - und μK -Iterationen abwechselnd die Transformationen durchgeführt und für das skalierte System der H_∞ -Regler \mathbf{K} berechnet. Für den so geschlossenen Regelkreis wird die Transformation neu berechnet und mit dem neu skalierten System wieder ein H_∞ -Regler berechnet. Dies wird fortgeführt, bis die Transformation sich nicht mehr ändert. Es ist jedoch festzustellen, dass auch die Berechnung der Transformationen in den Gleichungen (2.14) und (2.16) Optimierungen beinhaltet. In der Synthese findet also eine abwechselnde Optimierung des Reglers und der Transformation statt, so dass die Gesamtoptimierung nicht mehr konvex ist.

Unterschiede in den Lösungsverfahren ergeben sich anhand der Transformationen. Für komplexe Unsicherheiten ist es laut Gleichung (2.14) ausreichend, \mathbf{D} -Scales für die Transformation zu ver-

wenden. Der Lösungsalgorithmus wird *DK-Iteration* genannt, da die Scales \mathbf{D} und Regler \mathbf{K} abwechselnd berechnet werden. Für gemischt komplex-reelle Unsicherheiten ist die Transformation entsprechend Gleichung (2.16) aufwendiger, und es werden zusätzlich \mathbf{G} -Scales benötigt. Die abwechselnde Berechnung von \mathbf{D} - und \mathbf{G} -Scales sowie des Reglers \mathbf{K} führt entsprechend zur Bezeichnung als *(D,G)K-Iteration*. Die $\mu\mathbf{K}$ -Iteration optimiert den SSV für gemischt komplex-reelle Unsicherheiten indirekt und verwendet dafür Scales, die vom Verhältnis aus komplexen und gemischt komplex-reellen μ_ω -Verläufen abhängen. Es ist zu beachten, dass alle Transformationen, d. h. die \mathbf{D} - und \mathbf{G} -Scales sowie die Transformation der $\mu\mathbf{K}$ -Iteration, frequenzabhängig sind. Da die H_∞ -Synthese ein Zustandsraumsystem als Synthesensystem benötigt, müssen auch die Transformationen als Zustandsraumsysteme vorliegen. Aktuell können die Transformationsmatrizen jedoch nur punktweise für diskrete Frequenzstützstellen berechnet werden. Für die Synthese müssen daher LTI-Systeme an die punktweisen Frequenzverläufe angenähert werden. Wie in der Fachliteratur üblich, wird dies im Folgenden als „Fitten“ bezeichnet. Die folgenden Kapitel zeigen die vollständigen Algorithmen und beschreiben insbesondere die Eigenschaften der Transformationen und Fits.

2.6.5 DK- und (D,G)K-Iteration

DK- bzw. *(D,G)K-Iterationen* ermöglichen eine direkte Minimierung des SSV für komplexe bzw. reell-komplex gemischte Unsicherheiten. Die *DK-Iteration* zur Behandlung komplexer Unsicherheiten führt zu einer bi-konvexen, alternierenden Optimierung von \mathbf{D} -Scales und H_∞ -Regler \mathbf{K} für das skalierte System \mathbf{DPD}^{-1} (Abbildung 2.10).

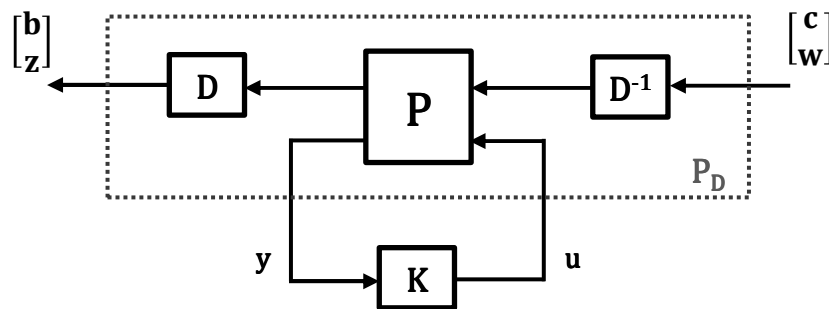


Abbildung 2.10: Skaliertes H_∞ -Problem der *DK-Iteration*

In der Iteration werden die \mathbf{D} -Scales und der Regler \mathbf{K} abwechselnd optimiert, bis die Abweichung der neuen Scales zu denen der vorigen Iteration unter einem Toleranzwert liegt. Eine analytische Berechnung der „echten“ \mathbf{D} -Scales ist bisher unmöglich, so dass die punktweise Berechnung von \mathbf{D}_ω nach Gleichung (2.14) verwendet und ein LTI-System \mathbf{D}_{fit} gefittet wird. Da die Reglerkanäle \mathbf{y} und \mathbf{u} des Synthesystems \mathbf{P} nicht skaliert werden dürfen, ist \mathbf{D}_{fit} zudem um eine blockdiagonal angefügte Einheitsmatrix mit Dimensionen der Regler-Ein- bzw. -Ausgänge zu erweitern:

$$\mathbf{D}_{\text{fit}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\text{fit}} & \\ & \mathbf{I}_y \end{bmatrix}, \dim(\mathbf{I}_y) = n_y \quad \text{und} \quad \mathbf{D}_{\text{fit}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\text{fit}} & \\ & \mathbf{I}_u \end{bmatrix}, \dim(\mathbf{I}_u) = n_u \quad (2.17)$$

Auch wenn die alternierende Berechnung von \mathbf{D}_{fit} und \mathbf{K} eine bikonvexe Optimierung mit Ungenauigkeiten beim Fitten darstellt, zeigt sich in der Praxis eine gute Konvergenz der *DK-Iteration*. Da die Ordnung von H_∞ -Reglern stets der Streckenordnung entspricht, erhöht sich die Ordnung der gewichteten Regelstrecke $\mathbf{D}_{\text{fit}}\mathbf{P}\mathbf{D}_{\text{fit}}^{-1}$ um das Doppelte der Scale-Ordnung von \mathbf{D}_{fit} .

Der Algorithmus der *DK-Iteration* ist in fünf Schritte unterteilt:

1. Initialisieren:
 Starten der Iteration $i = 1$;
 Festlegen von Startwerten der \mathbf{D} -Scales, üblicherweise als Einheitsmatrix;
 dies führt zur Verwendung des unskalierten Systems \mathbf{P} , so dass im ersten Iterationsschritt ein üblicher H_∞ -Regler berechnet wird
2. Fitten:
 Fitten stabiler, phasenminimaler LTI Systeme $\mathbf{D}_{\text{fit},i}$ für $\mathbf{D}_{\omega,i}$ (im ersten Schritt als $\mathbf{D}_{\text{fit},1} = \mathbf{I}$);
 erweitern von \mathbf{D}_{fit} und $\mathbf{D}_{\text{fit}}^{-1}$ um Einheitsmatrizen für Reglerkanäle, vgl. Gleichung (2.17);
 bilden des skalierten Systems $\mathbf{P}_{D,i} = \mathbf{D}_{\text{fit},i} \mathbf{P} \mathbf{D}_{\text{fit},i}^{-1}$
3. Synthese:
 Berechnen des μ -Reglers \mathbf{K}_i durch den H_∞ -Entwurf für $\mathbf{P}_{D,i}$
4. Berechnung neuer (punktweiser) Scales $\mathbf{D}_{\omega,i+1}$:
 Lösen der Optimierung zur Berechnung neuer (punktweiser) $\mathbf{D}_{\omega,i+1}$ -Scales für den Regelkreis $\mathcal{F}_i(\mathbf{P}, \mathbf{K}_i)$ mit dem neuen Regler \mathbf{K}_i :

$$\mathbf{D}_{\omega,i+1} = \arg \inf_{\mathbf{D}_\omega \in \mathcal{D}_K} \bar{\sigma}(\mathbf{D}_{\omega,i+1} \mathcal{F}_i(\mathbf{P}(j\omega), \mathbf{K}_i(j\omega)) \mathbf{D}_{\omega,i+1}^{-1})$$
5. Abbruchkriterium:
 Vergleich von $\mathbf{D}_{\omega,i}$ und $\mathbf{D}_{\omega,i+1} \rightarrow$ Beenden bei guter Übereinstimmung, ansonsten Fortfahren mit Schritt 2 für $\mathbf{D}_{\omega,i} = \mathbf{D}_{\omega,i+1}$, $\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_{i+1}$ und $i = i+1$

Abgesehen vom Fitten der \mathbf{D} -Scales kann diese Optimierung unter der Notation $\mathcal{F}_l(\mathbf{P}, \mathbf{K})$ für die *lower LFT* des Reglers \mathbf{K} am Synthesystem \mathbf{P} (Abbildung 2.10) kompakt definiert werden:

$$\mathbf{K}_\mu = \arg \inf_{\mathbf{K}} \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \inf_{\mathbf{D}_\omega \in \mathcal{D}_K} \bar{\sigma}(\mathbf{D}_\omega \mathcal{F}_l(\mathbf{P}(j\omega), \mathbf{K}(j\omega)) \mathbf{D}_\omega^{-1}) \quad (2.18)$$

Im Vergleich zur H_∞ -Synthese muss der Anwender zusätzlich die Unsicherheitsstruktur, die Frequenzstützstellen für die Berechnung von \mathbf{D}_ω , ein Verfahren zum Fitten der Scales und ein Abbruchkriterium festlegen. In der hier genutzten, kommerziell verfügbaren Implementierung der MATLAB Robust Control Toolbox [81] sind dazu Standardwerte hinterlegt. Die Standardwerte für Fit-Verfahren und -parameter sowie Abbruchkriterium sind gut geeignet für die Untersuchungen in der vorliegenden Arbeit. Die Frequenzstützstellen werden jedoch für jedes System individuell angepasst, was zu deutlichen Verbesserungen führt. Spezifische Kriterien für die Auswahl sind in den einzelnen Entwurfskapiteln 5 bis 7 angegeben.

Die $(D,G)K$ -Iteration nach Young [67], [79] für gemischt komplex-reelle Unsicherheiten läuft nach ähnlichem Schema ab und ist ebenfalls in der MATLAB Robust Control Toolbox verfügbar. Zur Systemtransformation nach Abbildung 2.11 müssen jedoch zusätzlich der (punktweise) frequenzabhängige Parameter $\beta_{DGK,\omega}$ und die (punktweise) frequenzabhängigen \mathbf{G}_ω -Scales für Unsicherheits- und Performancekanäle mittels Optimierung berechnet und gefittet werden. Der Algorithmus weist entsprechend zwei zusätzliche Schritte auf. Ideale Übereinstimmung der Fits vorausgesetzt, lautet das Optimierungsproblem:

$$\mathbf{K}_\mu = \arg \inf_{\mathbf{K}} \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \inf_{\mathbf{D}_\omega \in \mathcal{D}_K, \mathbf{G}_\omega \in \mathcal{G}_K} \inf_{\beta_{DGK,\omega} \in \mathbb{R}, \beta_{DGK,\omega} > 0} \left\{ \beta_{DGK,\omega} : \Gamma \leq 1 \right\}$$

$$\text{mit } \Gamma = \bar{\sigma} \left(\left(\frac{\mathbf{D}_\omega \mathcal{F}_l(\mathbf{P}(j\omega), \mathbf{K}(j\omega)) \mathbf{D}_\omega^{-1}}{\beta_{DGK,\omega}} - j\mathbf{G}_\omega \right) (\mathbf{I} + \mathbf{G}_\omega^2)^{-1/2} \right) \quad (2.19)$$

In der praktischen Anwendung der $(D,G)K$ -Iteration ist das Fitten der \mathbf{G}_{fit} -Scales problematisch, da diese Scales als LTI Systeme auf Betrag und Phase von punktuellen Verläufen gefittet werden müssen. Die Verläufe sind jedoch teilweise nicht durch LTI Systeme darstellbar, was z. B. in [103] die Konvergenz unmöglich macht, so dass kein Regler berechnet werden kann.

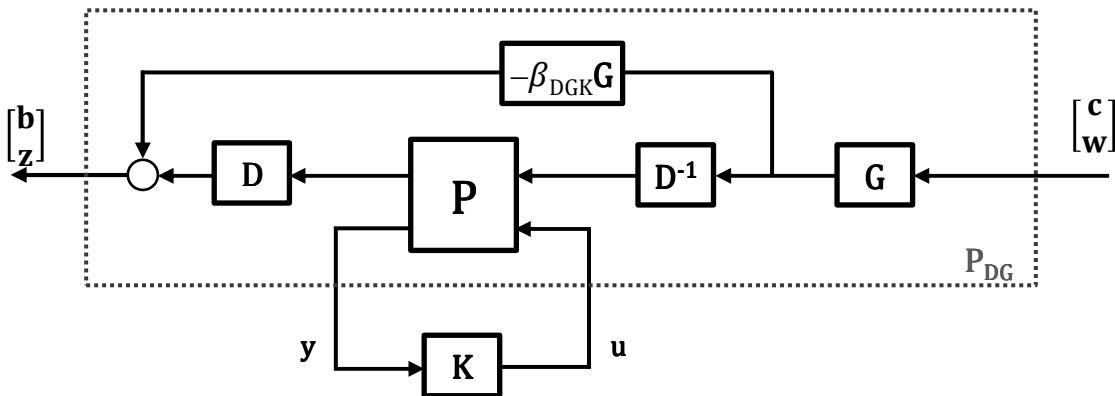


Abbildung 2.11: Skaliertes H_∞ -Problem der $(D,G)K$ -Iteration

Da die $(D,G)K$ -Iteration für die untersuchten Systeme keine zufriedenstellenden Ergebnisse erzielt, wird an dieser Stelle nicht genauer auf den Algorithmus eingegangen. Weiterführende Informationen zur Theorie und eine Anwendung für eines der später untersuchten Systeme sind in [104] angegeben.

2.6.6 μK -Iteration

Ein alternativer Algorithmus für die Behandlung gemischt komplex-reeller Unsicherheiten ist die μK -Iteration nach Toffner-Clausen [80]. Für ein bekanntes Benchmark-Problem der robusten Regelung erzielt diese bessere Ergebnisse als die $(D,G)K$ -Iteration [91]. Ein großer Vorteil der μK - im Vergleich zur $(D,G)K$ -Iteration ist der Verzicht auf das problematische Fitten der \mathbf{G} -Scales.

Im Gegensatz zur $(D,G)K$ -Iteration wird der SSV durch die μK -Iteration indirekt optimiert. Die reellen Unsicherheiten werden durch komplexe ersetzt, so dass der Unsicherheitsbereich erweitert wird und eine DK -Iteration durchgeführt werden kann. Um die Synthese nachträglich auf die reellen Unsicherheitsbereiche einzustellen, wird zusätzlich ein Filter $\gamma_\mu = \mu_{\text{gemischt}} / \mu_{\text{komplex}}$ für die Unsicherheits- und Performance-Ausgänge verwendet (Abbildung 2.12). Der Filter bildet das (frequenzabhängige) Verhältnis aus dem SSV bei Berücksichtigung der reellen Unsicherheit μ_{gemischt} und dem SSV bei komplexer Substitution der reellen Unsicherheit μ_{komplex} ab.

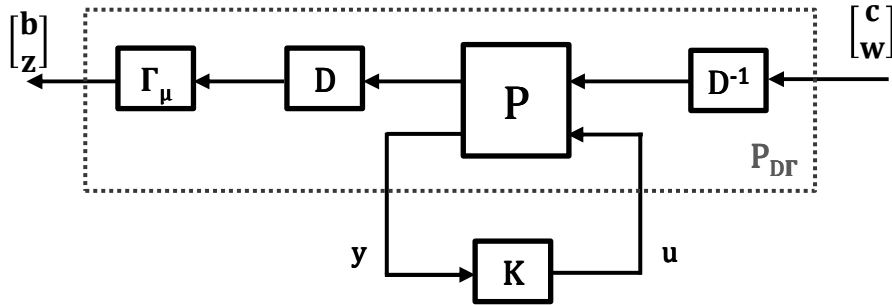


Abbildung 2.12: Skaliertes H_∞ -Problem der μK -Iteration

Wie bereits die punktweise zu berechnenden μ_ω nach Gleichung (2.14) bzw. (2.16), kann auch der Filter nur punktweise als $\gamma_{\mu,\omega}$ ermittelt werden und muss in der Synthese als $\gamma_{\mu,\text{fit}}$ gefittet werden. Im Gegensatz zu den G -Scales der $(D,G)K$ -Iteration muss $\gamma_{\mu,\text{fit}}$ jedoch nur an den Amplitudenverlauf von $\gamma_{\mu,\omega}$ gefittet werden. Wie bereits die D - und G -Scales ist auch der Filter γ_μ vom aktuellen Regler K abhängig und muss in jedem Iterationsschritt neu ermittelt werden. Teilweise führt die Skalierung mit $\gamma_{\mu,\text{fit}}$ während der Iteration zu nicht lösbaren Synthesesystemen P_{Dr} . Dann wird ein gewichteter Mittelwert des neuen und des vorigen $\gamma_{\mu,\omega}$ gebildet. Die Gewichtung wird sukzessive vom neuen zum vorigen $\gamma_{\mu,\omega}$ verlagert, bis die Synthese lösbar ist. Es sei angemerkt, dass der Filter γ_μ in der μK -Iteration und die obere Schranke γ für den größten Singulärwert im Sinne der H_∞ -Synthese in Abschnitt 2.6.2 trotz ähnlicher Variablenbezeichnung nicht miteinander verwandt sind.

Zunächst ist $\gamma_{\mu,\text{fit}}$ ein SISO-System, muss jedoch an alle Unsicherheits- und Performance-Ausgänge von DPD^{-1} multipliziert werden. Daher wird eine Multiplikation mit einer Einheitsmatrix $\Gamma_{\mu,\text{fit}} = \gamma_{\mu,\text{fit}}I$ durchgeführt. Um das skalierte Synthesesystem $P_{rD} = \Gamma_{\mu,\text{fit}}DPD^{-1}$ zu bilden, sind zudem die Reglerkanäle y und u zu beachten, die nicht skaliert werden dürfen. Daher wird $\Gamma_{\mu,\text{fit}}$ um einen zusätzlichen blockdiagonalen Eintrag einer Einheitsmatrix der Dimension von y erweitert, wie im ersten Iterationsschritt des μK -Algorithmus dargestellt. Die Gesamtordnung des skalierten Systems und somit auch des Reglers setzt sich aus den Ordnungen der Bestandteile von $\Gamma_{\mu,\text{fit}}DPD^{-1}$ zusammen. Die Ordnung von $\Gamma_{\mu,\text{fit}}$ entspricht dabei dem Produkt aus Fitordnung und Anzahl der Unsicherheits- und Performancekanäle. Dies führt im Vergleich zur $(D,G)K$ -Iteration zu höheren Reglerordnungen. In [96] wird eine zu hohe Ordnung von γ_μ -Fits als Hindernis in der Anwendung für ein Rotorsystem mit starkem gyroskopischem Effekt genannt.

Im Folgenden ist eine freie Übersetzung des μK -Algorithmus angegeben.

1. Initialisieren und Vorgabe eines Reglers \mathbf{K}_0 , der die nominelle Strecke stabilisiert

$$i = 1, \quad \gamma_{\mu,\omega,0} = 1 \quad \text{und} \quad \Gamma_{\mu,0} = \begin{bmatrix} \gamma_{\mu,0} \mathbf{I} & \\ & \mathbf{I} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{P}_{\text{DR},0}(j\omega) = \mathbf{P}(j\omega)$$

Berechnung für den geschlossenen Regelkreis $\mathcal{F}_l(\mathbf{P}, \mathbf{K}_{i-1})$ aus \mathbf{P}_{DR} und \mathbf{K}_{i-1} (punktweise):

$\mu_{\text{gemischt},\omega,i}$ und Scales $\mathbf{D}_{\omega,i}$ (Gl. (2.14)), $\mu_{\text{komplex},\omega,i}$ (Gl. (2.16))

2. Berechnung der Hilfsgröße $\beta_{\omega,i}$ (punktweise):

$$\beta_{\omega,i} = \frac{\mu_{\text{gemischt},\omega,i}}{\mu_{\text{komplex},\omega,i}} \frac{1}{|\gamma_{\mu,\omega,i-1}|} - 1$$

3. Fitten der Scales: $\mathbf{D}_{\text{fit},i}$ an $\mathbf{D}_{\omega,i}$, Erweitern um Einheitsmatrizen für Reglerkanäle (Gl. (2.17))

4. Abschätzung einer oberen Schranke für die Hilfsgröße zur Mittelwertbildung $\alpha_i \in [0,1]$:

$$\bar{\alpha}_{\omega,i} = \begin{cases} \min\{1, \xi_{\omega,i}\}, & \text{wenn } \beta_{\omega,i} > 0 \\ 1, & \text{wenn } \beta_{\omega,i} \leq 0 \end{cases},$$

$$\xi_{\omega,i} = \left(\frac{\|\mathcal{F}_l(\mathbf{P}_{\text{DR},i-1}(j\omega), \mathbf{K}_{i-1}(j\omega))\|_{\infty}}{\bar{\sigma}(\mathcal{F}_l(\mathbf{D}_{\text{fit},i}(j\omega)\mathbf{P}(j\omega)\mathbf{D}_{\text{fit},i}^{-1}(j\omega), \mathbf{K}_i(j\omega)))} |\gamma_{\omega,i-1}|} - 1 \right) \frac{1}{\beta_{\omega,i}}$$

5. Initialisieren der Hilfsgröße zur Einstellung von α_i : $\kappa = 1$

Festlegen: $\alpha_i = \kappa \inf_{\omega \geq 0, \epsilon \in \mathbb{R}} \bar{\alpha}_{\omega,i}$, mit $\kappa \in [0,1]$

Berechnung (punktweise): $\gamma_{\omega,i} = (1 - \alpha_i) |\gamma_{\omega,i-1}| + \alpha_i \frac{\mu_{\omega,\text{gemischt},i-1}(\mathcal{F}_l(\mathbf{P}(j\omega), \mathbf{K}_i(j\omega)))}{\mu_{\omega,\text{komplex},i-1}(\mathcal{F}_l(\mathbf{P}(j\omega), \mathbf{K}_i(j\omega)))}$

Fitten der γ_{μ} Scales: LTI System $\gamma_{\mu,\text{fit},i}(j\omega)$ an den $\gamma_{\mu,\omega,i}$ -Verlauf und Erweitern auf $\Gamma_{\mu,\text{fit},i}$

6. H_{∞} -Synthese des Reglers \mathbf{K}_{i+1} für: $\mathbf{P}_{\text{DR},i}(j\omega) = \Gamma_{\mu,\text{fit},i}(j\omega)\mathbf{D}_{\text{fit},i}(j\omega)\mathbf{P}(j\omega)\mathbf{D}_{\text{fit},i}^{-1}(j\omega)$

$$\text{mit } \Gamma_{\mu,\text{fit},i}(j\omega) = \begin{bmatrix} \gamma_{\mu,\text{fit},i} \mathbf{I} & \\ & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{s. Abbildung 2.12})$$

7. Berechnung der neuen \mathbf{D} -Scales für den neuen Regelkreis $\mathcal{F}_l(\mathbf{P}(j\omega), \mathbf{K}_{i+1})$ (punktweise):

Scales $\mathbf{D}_{\omega,i+1}$, $\mu_{\text{gemischt},\omega,i+1}$, $\mu_{\text{komplex},\omega,i+1}$

8. Berechnung der Hilfsgröße $\beta_{\omega,i+1}$ (punktweise):

$$\beta_{\omega,i+1} = \frac{\mu_{\text{gemischt},\omega}(\mathcal{F}_l(\mathbf{P}(j\omega), \mathbf{K}_{i+1}(j\omega)))}{\mu_{\text{komplex},\omega}(\mathcal{F}_l(\mathbf{P}(j\omega), \mathbf{K}_{i+1}(j\omega)))} \frac{1}{|\gamma_{\mu,\omega,i}|} - 1$$

9. Prüfen: $\sup_{\omega \geq 0, \epsilon \in \mathbb{R}} |\beta_{\omega,i+1}| > |\beta_{\omega,i}|$:

Falls erfüllt, Sprung zu Schritt 6 und Reduktion von κ

10. Abbruchkriterium:

Vergleichen von $\mathbf{D}_{\omega,i+1}$ mit $\mathbf{D}_{\omega,i}$ und von $\gamma_{\mu,\omega,i+1}$ mit $\gamma_{\mu,\omega,i}$

Abbruch bei guter Übereinstimmung, ansonsten $i = i+1$ und Sprung zu Schritt 4

In der Initialisierung (Schritte 1 bis 3) ist ein stabilisierender Regler für die nominelle Strecke vorzugeben, üblicherweise mittels H_∞ -Synthese. Die Schritte 4 und 5 liefern die aktuellen \mathbf{D} -Scales und die Gewichtung α als Grundlage für die Aufstellung des skalierten Synthesystems. In Schritt 6 wird das Synthesystem (Abbildung 2.12) durch Integration des Filters $\Gamma_{\mu, \text{fit}, i}$ vervollständigt. Führt die folgende Synthese (Schritt 7) zu keiner Verbesserung, ist eine Mittelwertbildung des neuen $\gamma_{\mu, \omega, i+1}$ mit dem vorherigen Verlauf $\gamma_{\mu, \omega, i}$ erneut durchzuführen, wozu eine Reduktion der Hilfsgrößen α zur Beeinflussung der Gewichtung der Mittelwertbildung vorgenommen wird.

In Schritt 8 werden für den neuen geschlossenen Regelkreis, d. h. unter Verwendung des soeben berechneten Reglers, neue Scales $\mathbf{D}_{\omega, i+1}$ und μ_ω -Verläufe sowie die Hilfsgrößen β_ω für die Prüfung des Abbruchkriteriums berechnet. Anhand des Abbruchkriteriums wird entschieden, ob die Berechnung beendet oder eine weitere Iteration durchgeführt wird. Erfahrungen, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit sowie von Sehr [104] gemacht wurden, zeigen für die μK -Iteration deutlich bessere Ergebnisse als für die $(D, G)K$ -Iteration, die zudem häufig aufgrund von unüberwindbaren Problemen beim Fitten der \mathbf{G} -Scales abbricht. Kritisch für die Konvergenz der Iteration sind die Genauigkeit der Berechnung des (punktweisen) SSV für gemischt komplex-reelle Unsicherheiten $\mu_{\text{gemischt}, \omega}$ sowie das Fitten des Filters $\gamma_{\mu, \text{fit}}$.

3 Stand der Technik und Zielsetzung

In diesem Kapitel wird ein Überblick über die relevante Literatur zur Feststellung des Stands der Technik zur Regelung von aktiven, elastischen Rotoren gegeben, um die wissenschaftliche Einordnung der vorliegenden Arbeit vorzunehmen. Besonderer Wert wird dabei auf die Berücksichtigung der drehzahlabhängigen Dynamik gelegt.

3.1 Stand der Technik: Regelung von aktiven Rotorsystemen

Da die Einflüsse von Gleitlagern und gyroskopischen Effekten unterschiedliche Dynamikveränderungen des Rotorsystems bewirken, wird die Literatur primär anhand der Lagerung eingeteilt. Steuerungen werden nicht behandelt, da diese Verfahren keine definierbare Robustheit gegenüber Systemveränderungen erreichen. Auch für adaptive Steuerungen wie das sog. FxLMS-Verfahren ist eine Stabilitätsvorhersage kaum möglich [54], so dass robuste Stabilität nicht garantiert werden kann. Es besteht insbesondere die Gefahr, dass der Adaptionalgorithmus instabil wird.

3.1.1 Aktive Rotoren in hydrodynamischen Lagern

Hydrodynamische Lager tragen Rotoren auf einem Schmierfilm, dessen dynamische Eigenschaften sich mit der Rotordrehzahl ändern. Veröffentlichungen zu Reglerentwürfen beschäftigen sich vor allem mit kreisrunden hydrodynamischen Lagern. Die spezifischen hydrodynamischen Effekte der *Oil Whip*-Instabilität und der *Oil Whirl*-Schwingungen sind für diesen Lagertyp besonders stark ausgeprägt. Zur Regelung werden üblicherweise elektromagnetische Aktoren verwendet. Dimitri und El-Shafei [105] integrieren diese direkt in ein Gleitlager, so dass ein aktives Hybridlager entsteht.

Eine Linearisierung des Kraftgesetzes für den Schmierfilm ergibt 2×2 Matrizen für die Steifigkeit und Dämpfung, in denen horizontale und vertikale Bewegungsrichtung gekoppelt sind. Für einen zweifach gelagerten Rotor treten insgesamt also 16 Koeffizienten auf, die in unterschiedlichen Abhängigkeiten zur Rotordrehzahl stehen.

Es werden bisher vornehmlich PD-Regler zur Stabilisierung des *Oil Whips* eingesetzt, oft in Verbindung mit Schwingungsreduktionen durch unterlagerte, adaptive Steuerungen (vgl. Abschnitt 2.1.2). Aktive Schwingungsreduktionen für Rotorsysteme mit stark ausgeprägten *Oil Whirl*-Schwingungen oder simultan auftretenden gyroskopischen Effekten sind bisher nicht bekannt.

Kollokierte Anordnungen von Aktoren und Sensoren ermöglichen die Erhöhung der Stabilitätsgrenze der *Oil Whip*-Instabilität durch einfache P- bzw. PD-Regler, vgl. Sahinkaya und Burrows [106], [107] bzw. Dimitri und El-Shafei [105]. Anhand von theoretischen Modellen werden die Systempole betrachtet und der Regler so eingestellt, dass die *Oil Whip*-Instabilität erst bei sehr hohen Rotordrehzahlen auftritt. Diese Regelung zur Stabilisierung bewirkt jedoch keine zufriedenstellende Re-

duktion von Unwuchtschwingungen, so dass vielfach zusätzlich drehzahladaptive Störgrößenaufschaltungen verwendet werden [105], [106]. Ein ähnliches Regelkonzept wird von Tuma et al. [108] in Verbindung mit einem aktiv auf Piezoaktoren abgestützten Gleitlager verwendet.

Untersuchungen zur Anwendung modellbasierter Regelverfahren sind bisher kaum verfügbar. Simulationsstudien zeigen Potenziale von LQ- bzw. LQG-Reglern zur Stabilisierung und Schwingungsreduktion, jedoch vernachlässigen Fürst und Ulbrich [109] die Gyroskopie und die Beobachterdynamik bzw. Elmadany und Abduljabbar [110] die Aktor- und Sensordynamik. Eine kürzlich von Siqueira et al. [111] veröffentlichte Arbeit zeigt eine *LPV*-Regelung für einen der im Folgenden untersuchten hydrodynamisch gelagerten Rotoren. Diese erreicht eine Amplitudenreduktion der Resonanzbiegeschwingungen, jedoch ohne die kritische Rotordrehzahl der *Oil Whip*-Instabilität zu erhöhen. Im Vergleich zu PD- und μ -Regelungen, die im Rahmen dieser Arbeit sowie in [39] entworfen wurden, zeigt diese *LPV*-Regelung einen deutlich geringeren Stabilitätsbereich, geringere Schwingungsreduktionen und höheren Entwurfsaufwand.

3.1.2 Rotoren in aktiven Piezolagern

Die von Palazzolo [41] entwickelten aktiven Piezolager eignen sich zum Einsatz für die Schwingungsminderung für schnelldrehende Rotoren. Die ersten Eigenformen weisen für elastische Rotoren Schwingungsknoten in Lagernähe auf, so dass die piezoelektrischen Aktoren trotz stark begrenzten Hubs verwendet werden können. Da die Dynamik der Aktoren nur durch den verwendeten Verstärker begrenzt wird, können Rotorschwingungen auch bei sehr hohen Drehzahlen effektiv geregelt werden. Hohe Drehzahlen führen zu starken gyroskopischen Effekten, so dass die Systemdynamik vielfach stark veränderlich ist. Spezifische Effekte wie die Hysterese der Piezoaktoren oder nichtlineare Kontaktsteifigkeiten von Wälzlagern führen typischerweise zu geringeren Dynamikveränderungen und können vernachlässigt bzw. vereinfacht mittels unstrukturierter Unsicherheiten abgebildet werden.

In Fällen mit kollozierter Anordnung und vernachlässigbaren Dynamiken von Aktoren und Sensoren sowie geringen Anforderungen an Rausch- und Stellgrößenbegrenzung erreichen einfache PID-Reglerstrukturen gute Ergebnisse wie u. a. von Borsdorf et al. gezeigt [112].

Um eine LQG-Regelung für einen Rotor mit starkem gyroskopischem Effekt einzusetzen, nimmt Horst [35] eine Adaption mit dem *Gain-Scheduling*-Verfahren vor. Schittenhelm et al. [113] erreichen hingegen Robustheit für einen großen Drehzahlbereich durch eine überlagerte, iterative Optimierung mit einem speziell angepassten Gütefunktional.

Für Rotoren mit geringen gyroskopischen Effekten berücksichtigt Li [114] unstrukturierte Unsicherheiten in der H_∞ -Synthese. Ehmman [115] erweitert dies um unsichere Eigenwerte im Rahmen einer μ -Synthese mittels *DK-Iteration*. Für einen Rotor mit starkem gyroskopischem Effekt verwendet Horst [35] modale Unsicherheiten, um die Drehzahlabhängigkeit von Gleichlauf-Eigenfrequenzen infolge von Gyroskopie in der μ -Synthese abzubilden. Der Unsicherheitsbereich der Eigenfrequenzen ist jedoch kleiner als erforderlich und die Veränderung von Gegenlaufmoden ist explizit ausgeschlossen. Daher handelt es sich letztendlich nicht um einen Entwurf mit robuster Stabilität und Performance. Trotzdem wird ein stabiles Verhalten für einen relativ großen Drehzahlbereich erzielt.

Schittenhelm et al. [15] zeigen, dass Robustheit auch ohne Unsicherheitsbeschreibung im Entwurf erreicht werden kann. Dazu werden Gewichtungen für modale Zustände und die Stellgrößen in einem H_∞ -Entwurf iterativ angepasst, bis ein für alle Drehzahlen stabiler Regler mit geeigneter Performance gefunden ist. Dieses Vorgehen erreicht eine hohe Schwingungsreduktion für einen in dieser Arbeit untersuchten Prüfstand. Das Auffinden geeigneter Gewichtungsfunktionen ist jedoch wenig intuitiv und es kann dazu keine Methodik angegeben werden. Der Erfolg des Entwurfs hängt daher stark von Erfahrung des Anwenders ab.

Eine robuste Regelung mit direkter Berücksichtigung starker gyroskopischer Effekte wird erst im Rahmen der vorliegenden Arbeit sowie den zugehörigen Veröffentlichungen [116], [117] vorgestellt.

3.1.3 Rotoren in aktiven Magnetlagern

Zur Regelung von Rotoren in aktiven Magnetlagern liegen zahlreiche Veröffentlichungen vor, da die negative Steifigkeit der Lager zu einem inhärent instabilen Systemverhalten führt und stets eine Regelung benötigt wird. Da Magnetlager insbesondere für hohe Drehzahlen eingesetzt werden, ist die veränderliche Systemdynamik aufgrund gyroskopischer Effekte in vielen Anwendungsfällen relevant. Weitere Unsicherheiten bezüglich linearer Regelverfahren entstehen aus nichtlinearen Kraft-Weg-Zusammenhängen für magnetische Kräfte sowie Sättigungseffekten in Verstärkern. Zur Regelung werden üblicherweise Wegsensoren kolloziert an den Magnetlagern eingesetzt. Für den Reglerentwurf wurden neben einfachen adaptiven PD- oder Zustandsreglern wie von Lee und Chen [118] zahlreiche modellbasierte und robuste Ansätze untersucht.

Für starre Rotoren kann mittels der sog. *Cross Feedback Control* von Ahrens und Kucera [119] der gyroskopische Term $\Omega \mathbf{G}_\Omega \dot{\mathbf{q}}$ der Bewegungsgleichung (2.1) über die Regelung kompensiert werden. Idealerweise bleibt durch die Kompensation das dynamische Verhalten des Rotors im Stillstand erhalten und es kann ein zusätzlicher Regler zur Stabilisierung und Schwingungsminderung für das kompensierte System entworfen werden. Dies ist für starre Rotoren möglich, da $\dot{\mathbf{q}}$ zur Berechnung des Terms $\Omega \mathbf{G}_\Omega \dot{\mathbf{q}}$ vollständig über die Signale der Lagersensoren bestimmt und Kompensationsterme über die Aktoren exakt eingeleitet werden können. In der praktischen Anwendung behindern Phasenverluste von Filtern, Abtastsystemen und Verstärkern die Kompensationswirkung, so dass eine Kompensation von max. 75% empfohlen wird. Für elastische Rotoren ist das Verfahren aufgrund fehlender Steuer- und Beobachtbarkeit der gyroskopischen Terme ungeeignet. Der Vektor $\dot{\mathbf{q}}$ ist anhand der Sensorsignale nicht mehr direkt berechenbar und die Aktoren sind nicht in der Lage, die Kompensationsmomente an allen relevanten Freiheitsgraden zu erzeugen.

In den letzten Jahren wird verstärkt die *LPV*-Regelung zur aktiven Schwingungsminderung von aktiven Rotorsystemen untersucht. Diese ermöglicht einen methodischen Entwurf drehzahlvarianter, adaptiver H_∞ -Regler ohne Umschaltvorgänge mit garantierter Stabilität auch bei instationären Drehzahlverläufen. Es wird dabei eine Adaption der Regelung in Abhängigkeit der aktuell gemessenen Rotordrehzahl vorgenommen. Anwendungen für Rotoren mit starkem gyroskopischem Effekt werden u. a. von Sivrioglu und Nonami [120] sowie von Zhang et al. [121] gezeigt. Balini et al. verwenden eine drehzahlabhängige Performance-Gewichtung für einen Rotor ohne ausgeprägten, gyroskopischen Einfluss [122]. So ist es möglich, die synchronen Schwingungen in jeder Drehzahl

besonders stark zu reduzieren. Das Risiko einer Instabilität verdeutlichen Schlotter und Keogh [123] anhand von experimentellen Untersuchungen mit falsch gemessenem Drehzahlsignal für einen Rotor mit starkem gyroskopischem Effekt. Mason und Tsiotras [88] zeigen, dass ein Umschalten mittels *Gain-Scheduling* von manuell für kleine Drehzahlteilbereiche entworfenen H_∞ -Reglern deutlich höhere Performance erreichen kann. Dies ist auf die Konservativität im *LPV*-Reglerentwurf aufgrund einer aktuell nicht-parametrisch wählbaren *Ljapunov Funktion* zurückzuführen, vgl. Abschnitt 2.5.5. Beim *Gain-Scheduling* treten durch das Umschalten zwischen zwei Reglern jedoch Schwingungen durch Stellgrößensprünge auf, die auch mit sanften Umschaltstrategien wie von Kern et al. [124] nicht vollständig verhindert werden können.

Da in der *LPV*-Regelung neben der Adaption nur unstrukturierte Unsicherheiten verwendet werden können, kombinieren Lanzon und Tsiotras *LPV*-Regelung und μ -Synthese [16]. So ist es in begrenztem Umfang möglich, zusätzlich modale Unsicherheiten zu verwenden. Begründet mit unzulänglicher Echtzeit-Hardware wird die Regelung nur für Rotorstillstand, d. h. ohne die Funktionalität der *LPV*-Regelung, experimentell validiert. Die Abhängigkeit der Systemstabilität vom Drehzahlsignal zur Adaption bleibt jedoch auch hier bestehen.

Um einen einzigen Regler mit garantierter robuster Stabilität und Performance im gesamten Drehzahlbereich ohne Notwendigkeit der Adaption zu entwerfen, werden die H_∞ - und die μ -Synthese verwendet. Fujita et al. [125] berücksichtigen die Auswirkungen von Lagernichtlinearitäten, Modellfehlern und geringen gyroskopischen Effekten als unstrukturierte Unsicherheiten in einer H_∞ -Synthese. Für starke gyroskopische Effekte sind unstrukturierte Unsicherheiten jedoch ungeeignet, so dass die μ -Synthese eingesetzt wird. Vorteile der μ -Synthese mittels *DK-Iteration* gegenüber der H_∞ -Synthese bei der Regelung elastischer Rotoren mit unsicherer Masse und unstrukturierten Unsicherheiten zeigen z. B. Nonami und Ito [126] sowie Fittro und Knospe [127].

Eine direkte Berücksichtigung der Rotordrehfrequenz als parametrische Unsicherheit im gyroskopischen Term $\Omega \mathbf{G}_\Omega \dot{\mathbf{q}}$ zeigen Namerikawa und Fujita [128] für einen starren Rotor mit gyroskopischem Effekt. Der Einsatz der μ -Synthese überwindet hier die Konservativität von unstrukturierten Unsicherheiten. Allerdings wird die *DK-Iteration* zur Lösung verwendet, mit der ausschließlich komplexe Unsicherheitsbereiche behandelt werden können. Durch die Erweiterung des Unsicherheitsbereiches auf komplexe Werte für den physikalisch rein reellen Drehzahlparameter Ω entsteht somit neue Konservativität.

Um eine Beschränkung auf reelle Unsicherheitsbereiche für Ω zu erreichen, wird von Li et al. [37] sowie von Schönhoff et al. [129] die Synthese mittels *(D,G)K*- und μK -Iteration untersucht. Dies bleibt jedoch erfolglos und es muss auf die *DK-Iteration* mit Umwandlung in komplexe Unsicherheiten zurückgegriffen werden. Da die *DK-Iteration* keinen Regler mit robuster Stabilität für den gesamten Drehzahlbereich findet, muss der Drehzahlbetriebsbereich in bis zu fünf Teilbereiche mit individuellen Reglern unterteilt werden. Die Umschaltung erfolgt mittels *Gain-Scheduling* in Abhängigkeit der Rotordrehzahl. Als Ursachen für das Scheitern der *(D,G)K*- und μK -Synthese werden numerische und Konvergenzprobleme angegeben. Zusätzlich nennt Schönhoff extrem hohe Ordnungen des Filters Γ_μ als Problem in der μK -Iteration [96].

Der einzige erfolgreiche Einsatz von reellen Unsicherheiten für aktive Rotorsysteme wird von Ahn und Han [93] angegeben. Der untersuchte Rotor weist im betrachteten Drehzahlbereich nur geringe

gyroskopische Effekte auf, so dass die reelle Beschreibung auf kleine modale Unsicherheiten angewendet wird. Im Vergleich zu komplexen modalen Unsicherheiten ist der Unsicherheitsbereich des betroffenen Pols keine kreisrunde Scheibe in der komplexen Halbebene, sondern eine Linie [99]. Ein Vergleich mit Ergebnissen der *DK-Iteration* bestätigt die geringere Konservativität durch die Wahl des kleineren Unsicherheitsbereiches.

Die Anwendbarkeit der nicht-glatten μ -Synthese von Apkarian [84] zur Behandlung gemischt komplex-reeller Unsicherheiten konnte bisher nicht nachgewiesen werden. Lantto et al. [64] weisen auf Konvergenzprobleme der nicht-glatten Optimierung hin und treffen weitere Vereinfachungen, um ein glattes Optimierungsproblem zu erzeugen. Dieses Verfahren erfordert hohen numerischen Aufwand und ist daher auf dezentrale Reglerstrukturen beschränkt.

3.1.4 Entwurfsmethodik

Vorgehensweisen zum robusten Reglerentwurf speziell für aktive Rotorsysteme werden in den genannten Veröffentlichungen nicht vorgestellt. Das bekannte „ H_∞ -Loop-Shaping“ dient üblicherweise als Grundlage zur Einstellung der Gewichtungen [57], [130]. Eine Anwendung auf aktive Rotorsysteme von Font et al. [131] gibt jedoch nur eine grobe Strategie ohne exakten Ablauf der Einstellung vor. Die Anwendung auf Systeme mit großen Unsicherheiten ist daher schwierig. Die Angegebene Einstellung für Rotoren in aktiven Magnetlagern ist zudem nicht auf andere Aktorkonzepte übertragbar. Magnetlager erfordern statische Genauigkeit, die für aktive Rotoren in Gleit- oder Wälzlagern nicht erforderlich ist. Sehr allgemeine Ansätze zur Einstellung der Begrenzungsfunktionen für die μ -Synthese werden von Schönhoff [96] vorgeschlagen. Diese orientieren sich an den erwarteten Übertragungsfunktionen für PID-Regelkreise mit festen Einstellregeln für die Reglerparameter. Um die Ansätze universal einsetzbar zu machen, werden weitere Annahmen getroffen, z. B. dass Störungen ausschließlich an den Aktor-Freiheitsgraden wirken und Performance-Ausgänge ausschließlich an den Sensorfreiheitsgraden definiert werden. Diese Annahmen schränken die Möglichkeiten zur Performance-Einstellung teils stark ein, zudem sind die PID-Einstellregeln und somit auch die angelegten Begrenzungen für rotordynamische Systeme kaum geeignet.

3.2 Diskussion

Die drehzahlabhängigen Eigenschaften hydrodynamischer Gleitlager können bisher nicht adäquat berücksichtigt werden. Abgesehen von den zugehörigen Veröffentlichungen des Autors liegen bisher keine Ansätze zur robusten Regelung dieser Systeme vor.

Für Rotoren in aktiven Piezo- und Magnetlagern treten durch den gyroskopischen Effekt in vielen Fällen besonders starke Veränderungen der Systemdynamik auf. Insbesondere die Veröffentlichungen zum Stand der Technik von Rotorsystemen in aktiven Magnetlagern zeigen Potenziale der μ -Synthese und der *LPV*-Regelung zur Berücksichtigung der Drehzahlabhängigkeit im Reglerentwurf. Die μ -Synthese ist zum Entwurf von robusten Reglern auch bei großen, strukturierten Unsicherheiten geeignet. *LPV*-Regelungen erreichen eine höhere Performance, benötigen jedoch eine Adaption

an die aktuelle Rotordrehzahl. Da in der *LPV*-Regelung neben der Adaption nur unstrukturierte Unsicherheiten berücksichtigt werden können, sind Stabilität und Performance von der Adaption abhängig. Ideal erscheint eine (fiktive) Erweiterung der *LPV*-Regelung um reelle Unsicherheiten im Sinne der μ -Synthese. Dann könnten Stabilität und minimale Performance gegenüber der Unsicherheit garantiert und die Adaption zur weiteren Verbesserung der Performance genutzt werden. Aktuell ist jedoch bereits die Synthese von robusten Reglern für unsichere Rotorsysteme bereits ohne Adaption nur mit hoher Konservativität möglich.

Aus Sicht des Autors ist die Art der Unsicherheitsbeschreibung ein entscheidendes Merkmal zur Einteilung und Bewertung der aufgeführten Veröffentlichungen zur robusten Regelung aktiver Rotorsysteme mittels μ - und H_∞ -Synthese. Daher wird hier eine Einteilung in „direkte“ und „indirekte“ Unsicherheiten eingeführt.

Direkte Unsicherheiten werden anhand der mathematischen Beschreibung eines physikalischen Zusammenhangs definiert, beispielsweise für die spaltabhängige Aktorverstärkung von Magnetlagern. Für diese wird ein unsicherer Parameter eingeführt, dessen Unsicherheitsbereich durch die magnetische Wirkung physikalisch vorgegeben ist. Die Quantifizierung der Unsicherheit ist somit direkt aus der Systemmodellierung bekannt und es ist kein iteratives Einstellen nötig. Um diese Unsicherheit einzufügen, ist es erforderlich, dass die unsichere physikalische Größe explizit im Modell enthalten ist. Daher ist eine aufwendigere, theoretische Modellbildung des gesamten Systems erforderlich. Vorteilhaft ist die zielgerichtete, direkt quantifizierbare Definition der unsicheren Parameter, so dass der Unsicherheitsbereich die Systemvariationen ohne weitere Konservativität exakt wiedergibt. Es ist jedoch zu beachten, dass die übliche Verwendung der *DK-Iteration* als Lösungsalgorithmus ausschließlich komplexe Unsicherheitsbereiche zulässt. Da parametrische Unsicherheiten mit physikalischem Hintergrund üblicherweise rein reelle Werte annehmen, entsteht eine neue Konservativität durch die Erweiterung auf komplexe Unsicherheitsbereiche. Direkte gyroskopische Unsicherheiten für den physikalisch stets reellen Term $\Omega \mathbf{G}_\Omega \dot{\mathbf{q}}$ können so nur für relativ kleine Unsicherheiten erfolgreich verwendet werden, wie in [126], [127], [128]. Für schnelldrehende elastische Rotoren mit starkem gyroskopischem Effekt kann jedoch kein Regler für den gesamten Drehzahlbetriebsbereich gefunden werden [37], [129]. Versuche, dies mittels reellen Gyroskopieunsicherheiten zu überwinden, sind stets an numerischen Problemen in der Synthese gescheitert [129].

Indirekte Beschreibungen verzichten auf den Bezug zur physikalischen Ursache der Unsicherheit. Stattdessen werden multiplikative, additive und modale Unsicherheiten so eingestellt, dass die Auswirkungen der Unsicherheiten auf das Übertragungsverhalten nachgebildet werden. Vorteilhaft bei der Verwendung von indirekten Unsicherheiten ist die Möglichkeit, *Black Box*-Modelle für die Modellierung des Systems zu verwenden. Der Einsatz dieser Unsicherheiten ist für nicht quantifizierbare Einflüsse wie nicht modellierte Dynamiken im hohen Frequenzbereich, zu erwartende Alterung des Systems oder allgemeine Modellierungsungenauigkeiten sinnvoll [93], [124], [125]. Kern et al. [124] nennen dabei Modellierungsungenauigkeiten als Hauptursache und passen modale und unstrukturierte Unsicherheiten iterativ solange an, bis das unsichere Modell gemessene Frequenzgänge vollständig abdeckt. Die indirekte Unsicherheitsbeschreibung ist jedoch so unspezifisch, dass zur Abdeckung der experimentellen Frequenzgänge sehr große Unsicherheiten eingestellt werden müssen. In der Regel entstehen so deutlich größere Unsicherheitsbereiche als erforderlich.

3.3 Zielsetzung und Vorgehensweise

In sicherheitskritischen Systemen wird besonderer Wert auf die Zuverlässigkeit gelegt. Robuste Verfahren ermöglichen einen sicheren Betrieb, ohne dass Systemstabilität und -performance von der Verfügbarkeit eines Drehzahlsignals abhängig sind. Diese Arbeit beschäftigt sich daher mit dem robusten Reglerentwurf mittels μ -Synthese für rotordynamische Systeme unter Berücksichtigung der drehzahlabhängigen Systemdynamik. Da sich die Dynamikveränderungen infolge der drehzahlabhängigen Eigenschaften des hydrodynamischen Schmierfilms in Gleitlagern und der gyroskopische Effekt in sehr unterschiedlicher Weise auswirken, werden drei unterschiedliche Rotorsysteme betrachtet. Diese werden anhand von repräsentativen, aktiven Rotorprüfständen untersucht. Für die Prüfstände werden Methodiken zum robusten Reglerentwurf mit angepasster Modellierung, Unsicherheitsdefinition und Performance-Vorgabe entwickelt.

Zuerst werden Regelungen für hydrodynamisch gelagerte Rotoren untersucht, für die bisher keine robusten Regelungen erfolgreich eingesetzt wurden. Die spezifischen Phänomene der *Oil Whip*-Instabilität und der *Oil Whirl*-Schwingungen werden getrennt in zwei unterschiedlichen Reglerentwürfen untersucht. Anschließend wird ein Vorgehen zum Reglerentwurf für elastische Rotoren mit starkem gyroskopischem Effekt präsentiert, das anhand eines Rotorprüfstands mit aktivem Piezolager demonstriert wird.

Zur systematischen Einstellung des Entwurfs für rotordynamische Anwendungsfälle werden angepasste Methodiken entwickelt, mit denen auch Extremfälle in Bezug auf die Robustheit effektiv behandelt werden können. Die Methodik umfasst dabei das gesamte Vorgehen inklusive Modellierung, Performance- und SyntheseEinstellung sowie der Analyse und iterativen Optimierung des Entwurfs. Dazu wird auf die universelle Einsetzbarkeit verzichtet und ein höheres Maß an Fachkenntnis vom Anwender gefordert. Als Basis der entwickelten Methodiken dient die Struktur in Abbildung 3.1, deren Ausführung für die einzelnen Rotorsysteme an die jeweiligen Systemeigenschaften angepasst wird. Im Vergleich zum Vorgehen von Schönhoff [96] umfasst diese zusätzlich die Auswahl und Einstellung des Lösungsalgorithmus für die μ -Synthese, passende Unsicherheitsbeschreibungen und geeignete Modellierungsansätze.

Das Vorgehen startet mit einer Analyse der Regelstrecke bezüglich des unsicheren Systemverhaltens, auf deren Basis der Lösungsalgorithmus als DK -, $(D,G)K$ - oder μK -Iteration ausgewählt wird. Weiterhin ist eine passende Modellierung der nominellen Strecke auszuwählen, abhängig von der Wahl direkter oder indirekter Unsicherheiten sowie der zu optimierenden Performance-Freiheitsgrade. Nach der Konzeptionierung erfolgt die Durchführung der Modellierung des nominellen Systems und der Unsicherheiten, die Festlegung der Performance-Gewichtungen sowie die eigentliche Regler-Synthese. Da im Gegensatz zu den festen Strukturen der Begrenzungsfunktionen nach Schönhoff ein flexibleres Einstellen der Performance, der Unsicherheiten sowie der Syntheseparameter notwendig ist, gewinnt die iterative Optimierung der Begrenzungen an Bedeutung. Daher werden Strategien zur geeigneten Analyse des entworfenen Regelkreises vorgestellt, um Schlussfolgerungen zur Optimierung der SyntheseEinstellungen und der Begrenzungsfunktionen sowie gegebenenfalls der Unsicherheiten zu ziehen. Abschließend ist eine experimentelle Validierung durchzuführen, um die Gültigkeit des Modell inklusive Unsicherheiten zu bestätigen. Wird die im Entwurf garantierte Performance nicht erreicht, ist das Modell zu überprüfen und nach geeigneten Verbesserungen die Synthese erneut durchzuführen.

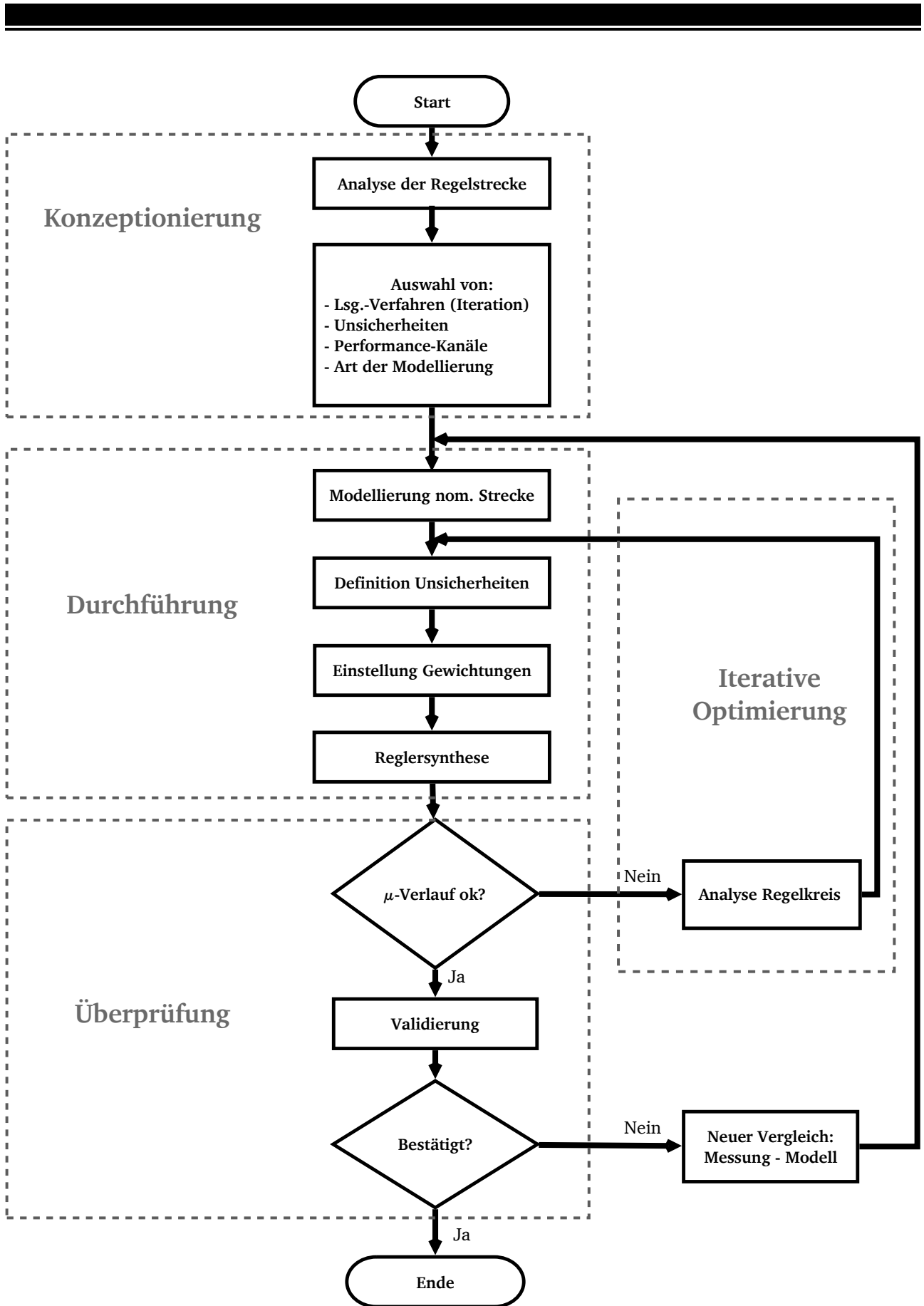


Abbildung 3.1: Struktur der Methodik zum robusten Reglerentwurf für schnelldrehende Rotoren

4 Prüfstände

Dieses Kapitel dient der Beschreibung von drei Prüfständen, die rotordynamische Systeme mit unterschiedlichen dynamischen Eigenschaften repräsentieren. Anhand dieser Prüfstände werden in den weiteren Kapiteln Methodiken zum Entwurf robuster Regelungen entwickelt, die auf jeweils ähnliche Rotorsysteme übertragbar sind.

4.1 Oil Whip-Prüfstand

Untersuchungen zur aktiven Schwingungsminderung und simultanen Unterdrückung der *Oil Whip*-Instabilität an hydrodynamisch gelagerten Rotoren werden mit einem Prüfstand des Institutes LAMAR an der Universität Unicamp in Campinas (Brasilien) durchgeführt. Zur Regelung verfügt der Prüfstand über einen elektromagnetischen Aktor (Abbildung 4.1, rechts).

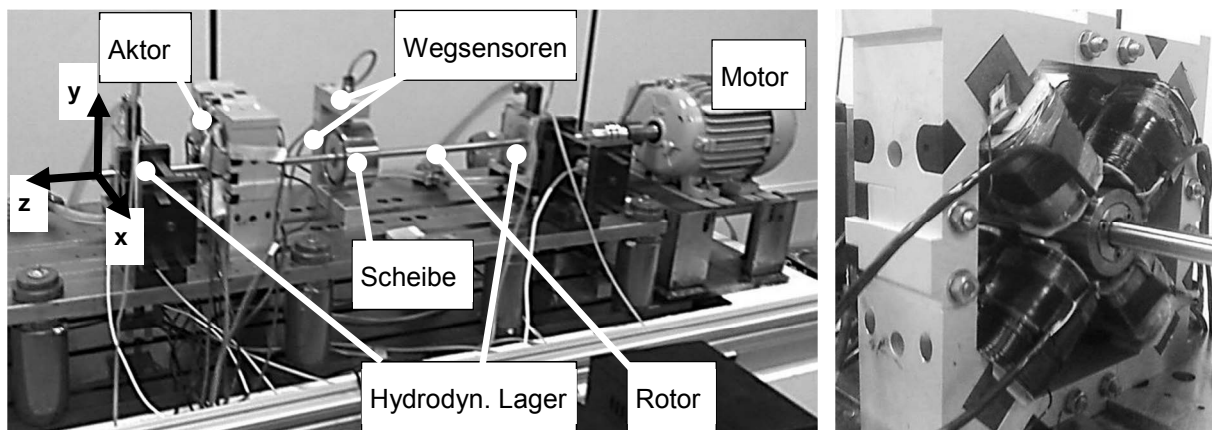


Abbildung 4.1: *Oil Whip*-Prüfstand (links), elektromagnetischer Aktor (rechts)

Der Rotor mit einem Durchmesser von 12 mm bei einem Lagerabstand von 600 mm und einer mittig montierten Scheibe der Masse 2,3 kg ist sehr elastisch und weist eine erste Biegeeigenfrequenz von ca. 23 Hz auf.

Tabelle 4.1: Daten *Oil Whip*-Prüfstand

Rotordurchmesser	12,0 mm	Dyn. Viskosität Lageröl (25°C)	0,04 Ns/m ²
Lagerabstand	600,0 mm	Maximale Motordrehfrequenz	60 Hz
Scheibendurchmesser	95,0 mm	Biegekritische Drehfrequenz	~23 Hz
Scheibenmasse	2,3 kg	<i>Oil Whip</i> -Drehfrequenz (Instabilität)	~41 Hz
Lagerdurchmesser (Innenring)	31,3 mm	Abtastrate (dSPACE)	10 kHz
Lagerbreite	20,0 mm	Eckfrequenz AA-Filter (PT ₁)	150 Hz
Lagerspalt	~90 µm		

Der Motor erreicht eine maximale Drehfrequenz von 60Hz, so dass die erste biegekritische Drehfrequenz durchfahren und die *Oil Whip*-Instabilität bei ca. 41Hz erreicht werden können. Zur Datenerfassung, Ansteuerung und zur Implementierung der Schwingungsregelung wird ein dSPACE Echtzeitsystem DS-1104 mit einer Abtastrate von 10kHz verwendet. Weitere Prüfstandsdaten sowie Angaben zur Signalverarbeitung sind der Tabelle 4.1 zu entnehmen.

Der elektromagnetische Aktor verfügt über vier vormagnetisierte Spulen in Differenzanordnung bezüglich der Magnetfelder B gegenüberliegender Spulen nach Maslen [132]. Diese werden mit einer Vormagnetisierung B_{Vormag} sowie mit Steuerfeldern B_{Steuer} gleichen Betrags, jedoch unterschiedlichen Vorzeichens, beaufschlagt. Dadurch weist die (Aktor-)Kraft bei nicht ausgelenktem Rotor eine lineare Beziehung zum Magnetfeld B auf. Da sich die Beziehung aus Verstärkerstrom und Magnetfeld B bei Auslenkung des Rotors aus der Mittelposition ändert, wird eine Magnetfeldregelung verwendet. Dazu sind Hall-Sensoren auf den Stirnflächen der Spulen aufgeklebt, deren Signale analogen P-Reglern zugeführt werden. Diese steuern Stromverstärker an, um das geforderte Magnetfeld einzustellen. Da die elektromagnetische Aktorkraft idealerweise proportional zum Magnetfeld ist, kann dies auch als Regelung der Aktorkraft betrachtet werden. Die Sollwerte für den Aktorregelkreis werden über den überlagerten Regler zur Schwingungsminderung vorgegeben, dessen Auslegung hier untersucht wird. In Abbildung 4.2 ist das Blockschaltbild für die Regelung des Prüfstands dargestellt. Die Magnetfelder und Kräfte sind hier vektorielle Größen mit Komponenten für x - und y -Richtung. Die Aktoren sind um 45° versetzt angeordnet (Abbildung 4.1), so dass zusätzlich eine triviale Koordinatentransformation für die Aktorkräfte durchzuführen ist. Diese und weitere Erläuterungen zum Prüfstand können [39] und [133] entnommen werden.

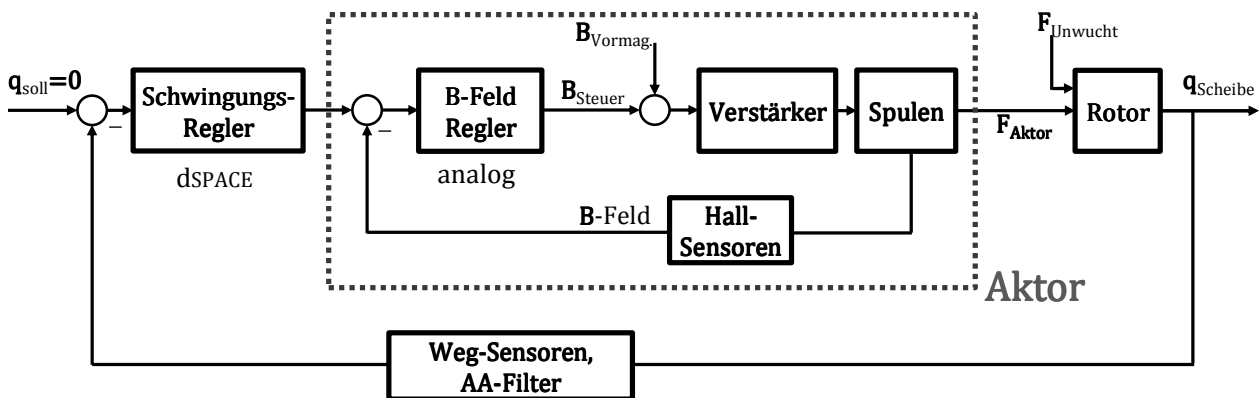


Abbildung 4.2: Blockschaltbild der Regelkreise (*Oil Whip*-Prüfstand)

Im stabilen Drehzahlbereich bis ca. 41 Hz treten in den Lagern geringe *Oil Whirl*-Schwingungen mit halber Rotordrehfrequenz auf, vgl. Abschnitt 2.1.2. Da der Rotor im Vergleich zu den Lagern deutlich nachgiebiger ist, weist die erste (Biege-)eigenform Schwingungsknoten in Lagernähe auf. Daher ist der *Oil Whirl* außerhalb der Lager nicht beobachtbar und kann für Performance-Betrachtungen im Reglerentwurf vernachlässigt werden. Abbildung 4.3 zeigt dies anhand von Frequenzspektren (*Power Spectral Density*, PSD) vertikaler Scheibenschwingungen infolge von Unwucht bei variabler Rotordrehfrequenz. Zur Rotordrehfrequenz synchrone Schwingungen ($1 \times \Omega$) zeigen die Resonanzüberhöhung bei ca. 23Hz. Subharmonische *Oil Whirl*-Schwingungen ($0,5 \times \Omega$) sind erst kurz vor dem Einsetzen der *Oil Whip*-Instabilität zu erkennen. Das Auftreten einer höheren Harmonischen

zweiter Ordnung ($2 \times \Omega$) mit geringen Amplituden ist auf die nichtlinearen Lagereigenschaften sowie Einflüsse der Kupplung zwischen Motorwelle und Rotor zurückzuführen.

Ziel der zu entwerfenden Schwingungsregelung ist die Unterdrückung der *Oil Whip*-Instabilität sowie der synchronen Schwingungen an der Scheibe. Dort treten für die ersten Biegemoden stets die größten Schwingungsamplituden auf.

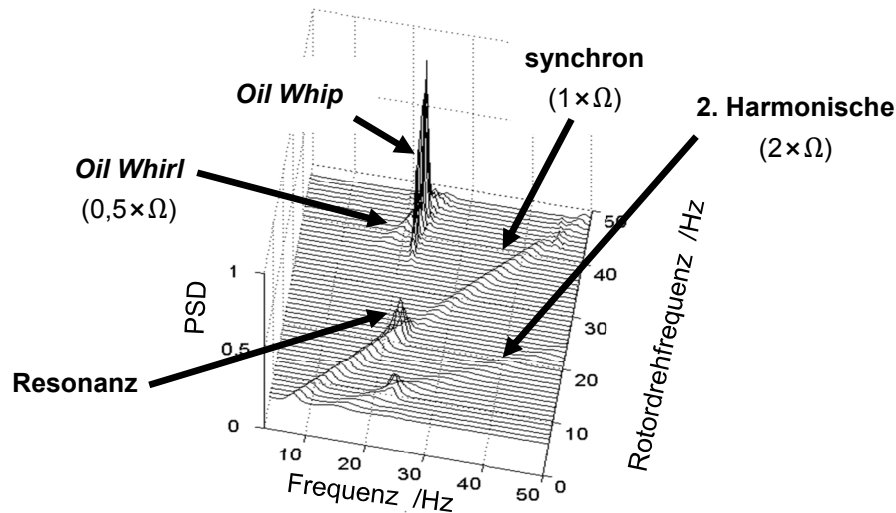


Abbildung 4.3: Hochlauf-PSD der Scheibenschwingungen, vertikal (*Oil Whip*-Prüfstand) [39]

In [134] wurde vom Autor der vorliegenden Arbeit ein Simulationsmodell für den Prüfstand vorgestellt, das ein FE-Modell des Rotors mit Lagerkoeffizienten für Steifigkeit und Dämpfung des Ölfilms verbindet. Die linearisierten Koeffizienten wurden vom Projektpartner LAMAR mittels der *Finiten Differenzen* Methode zur Lösung der *Reynoldsgleichung* im Lagerspalt berechnet. Im Campbell-Diagramm für dieses Modell (Abbildung 4.4) spaltet sich die erste Biegeeigenfrequenz des Rotors durch die drehzahlabhängigen Lagereigenschaften im betrachteten Betriebsdrehzahlbereich um ca. 3 Hz auf. Die Resonanzdrehzahl bei synchroner Unwuchterregung tritt am Schnittpunkt mit dem Fahrstrahl zwischen ca. 21 Hz und 23 Hz auf.

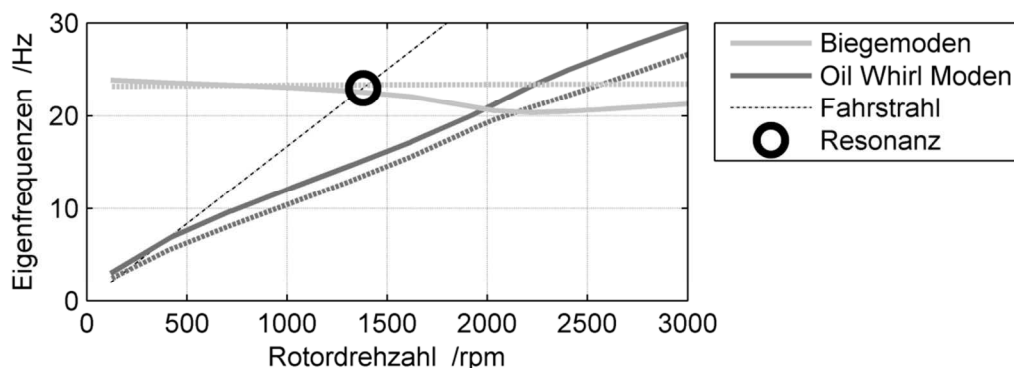


Abbildung 4.4: Campbell-Diagramm (*Oil Whip*-Prüfstand)

Zusätzlich treten zwei Eigenfrequenzen bei etwas mehr als der halben Rotordrehzahl auf, die dem *Oil Whirl* zuzuordnen sind. Untersuchungen anhand von theoretischen Modellen des Rotorsystems

aus [134] weisen auf starrkörperartige Eigenformen hin, denen eine leichte Biegung überlagert ist. Die Dämpfungsgrade dieser Moden sinken im Drehzahlbetriebsbereich von ca. 0,9 auf 0,65. Die deutlich geringere Dämpfung der Biegemoden sinkt ebenfalls mit steigender Rotordrehzahl und nimmt bei Erreichen der *Oil Whip*-Instabilität negative Werte an. Die Instabilität kann demnach anhand der Biegemode abgebildet werden. Der Einfluss der *Oil Whip*-Moden ist somit vernachlässigbar gering. Die in [39] vorgestellten Reglerentwürfe mit experimenteller Modellbildung bestätigen die Zulässigkeit dieser Vereinfachung. Die Eigenfrequenz der zweiten Biegemode beträgt ca. 150Hz und spielt im betrachteten Drehzahlbereich keine Rolle.

Experimentell bestimmte Übertragungsfunktionen von Aktoranregung zur Scheibenschwingung in vertikaler Richtung sind in Abbildung 4.5 für die Rotordrehfrequenzen zwischen 5Hz und 40Hz (300rpm und 2400rpm) dargestellt.

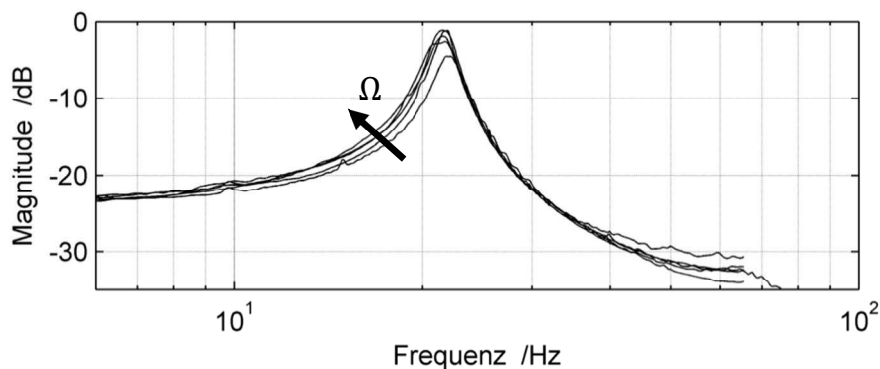


Abbildung 4.5: Experimentelle Amplitudengänge $U_{\text{Aktor},y} \rightarrow q_y$, $\Omega \in [5\text{ Hz}, 40\text{ Hz}]$ (*Oil Whip*-Prüfstand)

Es bestätigt sich, dass die *Oil Whip*-Moden keinen Einfluss auf das Übertragungsverhalten haben und dass Eigenfrequenz und Dämpfung der Biegemode mit steigendem Ω leicht abnehmen. Die Dynamik in horizontaler Richtung ist ähnlich, die Kopplungen zwischen den Bewegungsrichtungen hingegen sind vernachlässigbar klein. Der symmetrisch aufgebaute Rotor ist im betrachteten Frequenzbereich annähernd gyroskopiefrei, so dass Kopplungen ausschließlich auf die Eigenschaften der Lager zurückzuführen sind. Die erste Biegemode ist durch die Lager jedoch nur geringfügig steuer- und beobachtbar, so dass die Lagerkopplung das Übertragungsverhalten von Aktor zu Sensor im betrachteten Frequenzbereich kaum beeinflusst.

In Bezug auf den späteren Reglerentwurf ist festzustellen, dass die *Oil Whip*-Moden keinen relevanten Einfluss auf die betrachteten Übertragungsfunktionen haben. Auch für die Stabilitätsbetrachtung können die *Oil Whip*-Moden vernachlässigt werden, da die *Oil Whip*-Instabilität vom (negativen) Dämpfungsgrad der ersten Biegemode verursacht wird.

4.2 Oil Whirl-Prüfstand

In einer zweiten Untersuchung werden hydrodynamische Rotoren behandelt, in denen starke *Oil Whirl*-Schwingungen auch außerhalb der Lagerstellen auftreten. Der zuvor beschriebene Prüfstand wurde daher umgebaut, s. Abbildung 4.6.

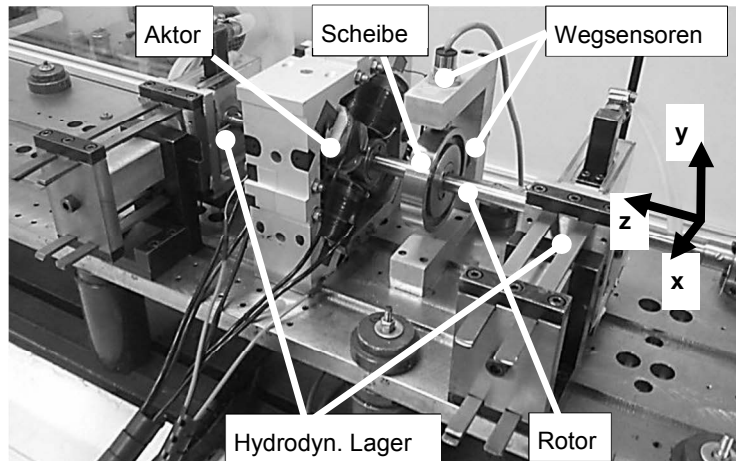


Abbildung 4.6: *Oil Whirl*-Prüfstand

Mit dem Prüfstand können die für den *Oil Whirl* typischen Eigenschaften jedoch nicht direkt erreicht werden. Erst durch starke Vormagnetisierung des Aktor-Regelkreises kann das Rotorsystem so beeinflusst werden, dass der *Oil Whirl* wie gewünscht auftritt. Dieses Verhalten tritt in praktischen Anwendungen auch ohne eine derartige Wechselwirkung auf, z. B. für Rotoren mit (noch) höherer Steifigkeit. Auch bei Positionierung der Sensoren und Aktoren in Lagernähe muss der *Oil Whirl* in der Regelung berücksichtigt werden.

Um eine MIMO-Regelung mit hoher Reglerordnung implementieren zu können, wurde die Abtastrate des DS-1104 Echtzeitsystem auf 2,5 kHz gesenkt. Dies stellt einen geeigneten Kompromiss aus geringem Zeitverzug durch die Berechnungsdauer und implementierbarer Reglerordnung dar. Tabelle 4.2 gibt weitere Prüfstandsdaten an. Eine *Oil Whip*-Instabilitätsgrenzdrehzahl wird nicht angegeben, da diese außerhalb des Drehzahlbetriebsbereiches liegt.

Tabelle 4.2: Daten *Oil Whirl*-Prüfstand

Rotordurchmesser	15,0 mm	Dyn. Viskosität Lageröl (25°C)	0,04 Ns/m
Lagerabstand	350,0 mm	Maximale Motordrehfrequenz	80 Hz
Scheibendurchmesser	90,0 mm	Biegekritische Drehfrequenz	~95 Hz
Scheibenmasse	1,0 kg	<i>Oil Whip</i> -Drehfrequenz (Instabilität)	--
Lagerdurchmesser (Innenring)	31,3 mm	Abtastrate (dSPACE)	2,5 kHz
Lagerbreite	20,0 mm	Eckfrequenz AA-Filter (PT ₁)	150 Hz
Lagerspalt	~90 µm		

Die Leistungsfähigkeit des Aktors ist für diese Konfiguration deutlich begrenzt. Im Vergleich zur vorigen Konfiguration ist das System steifer und leichter, so dass die Biegeeigenfrequenz ca. 95 Hz beträgt. Dies erfordert eine entsprechende Bandbreite der Regelung zur Schwingungsreduktion. Da die erforderliche Versorgungsspannung zur Erzeugung von Magnetkräften gleichbleibender Amplituden quadratisch mit der Stellfrequenz ansteigt, erreicht eine Regelung ab ca. 80 Hz die verfügbare Maximalspannung des verwendeten Verstärkers und es treten Sättigungseffekte auf. Eine exakte Modellierung des Aktors ist aufgrund fehlender Informationen zum Kraftregelkreis unmöglich, wie Simulationen in [133] zeigen. Daher werden Erfahrungswerte aus vorausgegangenen Implementierungen einfacher Regler zur Quantifizierung der Stellgrößenlimitierung herangezogen.

Abbildung 4.7 zeigt das experimentell ermittelte Frequenzspektrum der Unwuchtschwingungen an der Scheibe in vertikaler Richtung in Abhängigkeit der Rotordrehfrequenz. Neben den synchronen Unwuchtschwingungen ($1 \times \Omega$) treten *Oil Whirl*-Schwingungen mit ca. der halben Rotordrehfrequenz ($0,5 \times \Omega$) auf.

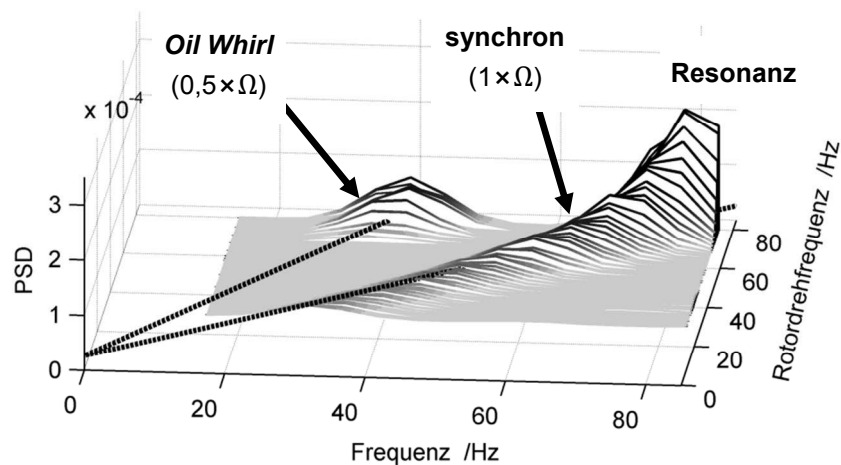


Abbildung 4.7: Hochlauf-PSD der Scheibenschwingungen, vertikal (*Oil Whirl*-Prüfstand)

Die Messung endet bei 80 Hz nicht mit einer Instabilität, sondern aufgrund hoher synchroner Schwingungsamplituden. Da die Stellgröße deutlich limitiert ist, zielt die später entworfene Regelung ausschließlich auf eine Reduktion der *Oil Whirl*-Schwingungen an der Scheibe ab, ohne die synchronen Schwingungen zu berücksichtigen. Die Entwurfsmethodik wird jedoch so entwickelt, dass eine Erweiterung zur Reduktion der synchronen Schwingungsanteile durch Anpassung der Begrenzungsfunktionen in einfacher Weise möglich ist.

Das Campbell-Diagramm in Abbildung 4.8 zeigt zwei übereinanderliegende *Oil Whirl*-Moden bei knapp halber Rotordrehfrequenz sowie die erste Biegeeigenfrequenz bei ca. 95 Hz. Theoretische Modelle in [133] weisen für die Eigenformen der *Oil Whirl*-Moden auf eine Mischform aus Starrkörpereigenformen und Biegung hin.

Messtechnisch ermittelte Übertragungsfunktionen von Aktorkraft zu Auslenkung, jeweils in vertikaler Richtung, zeigt Abbildung 4.9. Die Übertragungsfunktionen wurden anhand von Messungen für Rotordrehfrequenzen zwischen 15 Hz und 75 Hz ermittelt. Die Lagen der *Oil Whirl*-Moden bei ca. der halben Drehfrequenz sind im Amplitudengang deutlich zu erkennen.

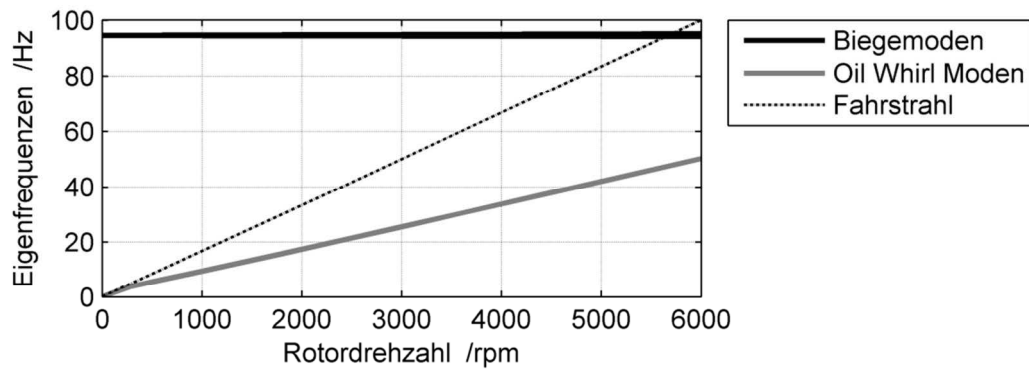


Abbildung 4.8: Campbell-Diagramm, lineares Modell (*Oil Whirl*-Prüfstand)

Für den Reglerentwurf stellt die Minderung der *Oil Whirl*-Amplituden für die stark veränderliche Eigenfrequenz der zugehörigen Mode eine robuste Performance-Anforderung für sehr große Unsicherheitsbereiche dar. Es ist weiterhin zu beachten, dass die Aktorkraft im relevanten Frequenzbereich stark limitiert ist.

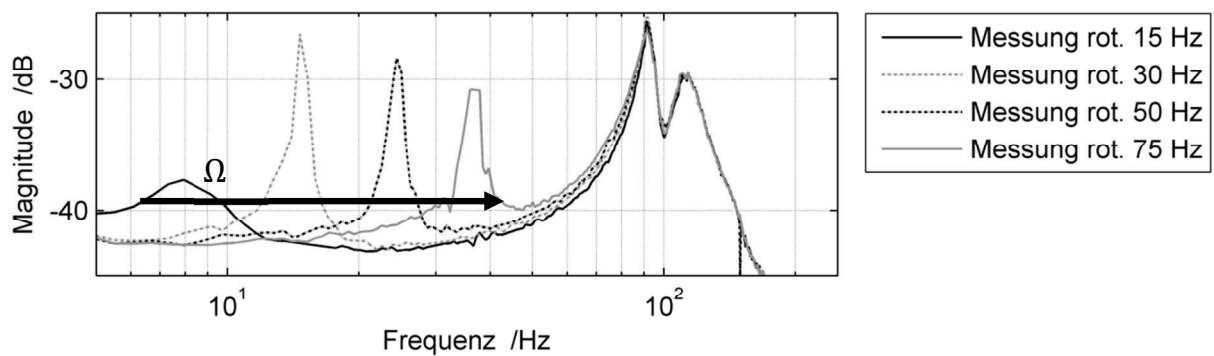


Abbildung 4.9: Experimentelle Amplitudengänge $U_{\text{Aktor},y} \rightarrow q_y$ (*Oil Whirl*-Prüfstand)

4.3 Prüfstand für starke Gyroskopie

Zur Untersuchung des Reglerentwurfs für Rotoren mit starkem gyroskopischem Effekt wurde der in Abbildung 4.10 dargestellte Prüfstand konstruiert [135]. Ein schlanker Rotor vom Durchmesser 9 mm ist in zwei Pendelkugellagern in einem Abstand von 180 mm gelagert. Um einen starken gyroskopischen Effekt zu erreichen, verfügt das System über eine überkragende Scheibe 1 der Masse 1,2 kg sowie eine Scheibe 2 der Masse 2,4 kg mittig zwischen den Lagern mit Durchmessern von 140 mm.

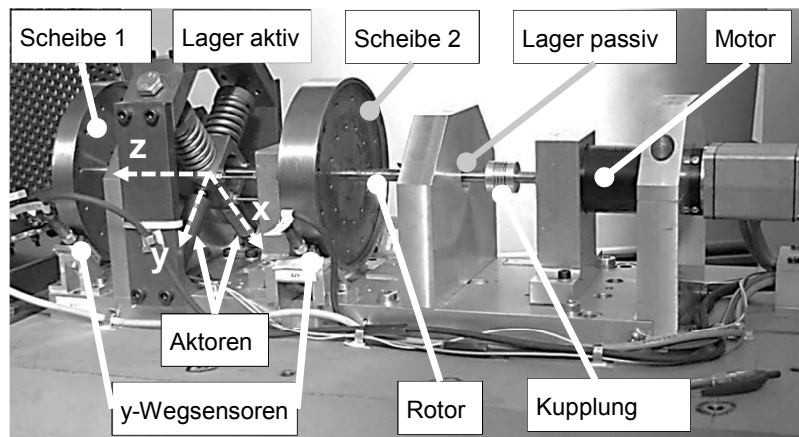


Abbildung 4.10: Gyroskopie-Prüfstand

Die in der Abbildung verdeckten x -Wegsensoren sind analog zu den y -Wegsensoren montiert. Das verwendete Koordinatensystem ist um 45° zur Horizontalen um die Rotorachse gedreht, da die Erfassung der Scheibenpositionen durch je zwei Wegsensoren und die Kraftwirkung der zwei piezoelektrischen Stapelaktoren zur Abstützung des aktiven Lagers in diese Richtung orientiert sind. Als Echtzeitsystem wird wie zuvor ein dSPACE DS-1104 verwendet, das mit einer Abtastfrequenz von 2,5 kHz betrieben wird. In Tabelle 4.3 sind weitere Eckdaten des Prüfstands und der Signalverarbeitung zusammengefasst.

Tabelle 4.3: Daten Gyroskopie-Prüfstand

Rotordurchmesser	9,0 mm	Maximale Motordrehfrequenz	133,0 Hz
Durchmesser Scheibe 1	140,0 mm	Biegekritische Drehfrequenz 1	~ 49 Hz
Masse Scheibe 1	1,2 kg	Biegekritische Drehfrequenz 2	~ 110 Hz
Durchmesser Scheibe 2	140,0 mm	Abtastrate (dSPACE)	2,5 kHz
Masse Scheibe 2	2,4 kg	Eckfrequenz AA-Filter (PT_1)	1,0 kHz
Lagerabstand	180,0 mm	Eckfrequenz Verstärker (PT_2)	1,1 kHz

Die maximale Motordrehzahl von 8000 rpm (133 Hz) ermöglicht ein Durchfahren von zwei biegekritischen Drehzahlen, wie das Campbell-Diagramm in Abbildung 4.11 zeigt. Die dritte Gegenlaufgegenfrequenz sinkt im Drehzahlbetriebsbereich bis in den relevanten Frequenzbereich ab.

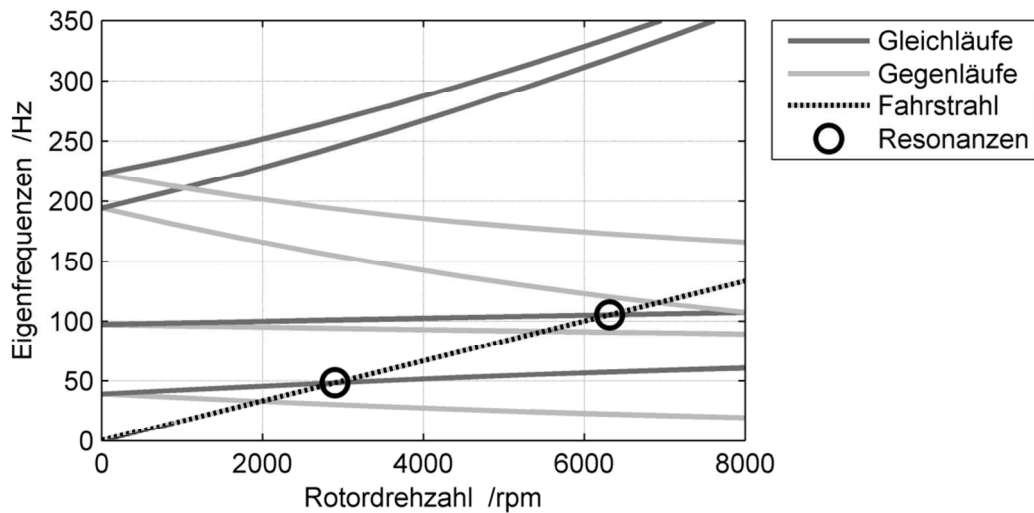


Abbildung 4.11: Campbell-Diagramm (Gyroskopie-Prüfstand)

Abbildung 4.12 zeigt die Amplituden der Unwuchtschwingungen von Scheibe 1 in x -Richtung für einen langsamen Hochlauf. Durch Filterung mit dem Wattmeter Verfahren [136] sind dabei nur die drehzahlsynchronen Schwingungsanteile dargestellt. Es treten zwei Resonanzen auf, deren Frequenzen mit Schnittpunkten von Gleichlaufmoden und dem Fahrstrahl im Campbell-Diagramm bei ca. 49 Hz und 110 Hz übereinstimmen.

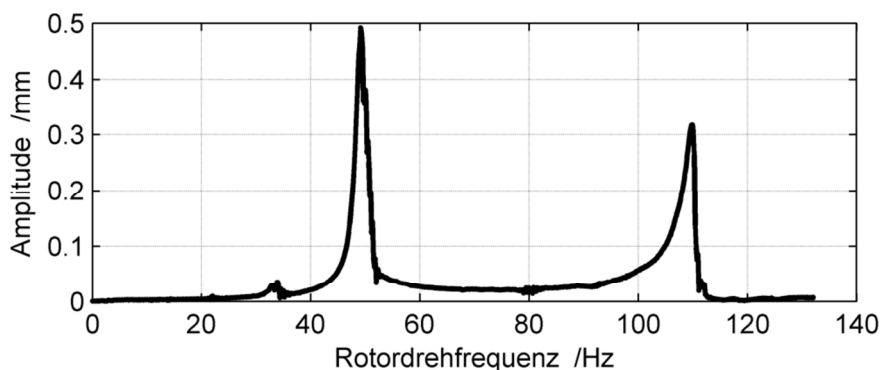


Abbildung 4.12: Gemessene Hochlauf-Schwingungsamplituden, Scheibe 1, x (Gyroskopie-Prüfstand)

Die Auswirkungen der Eigenfrequenzaufspaltung von Gleich- und Gegenläufen mit steigender Drehzahl auf die Übertragungsfunktion bei Anregung mit dem Aktor zur Auslenkung an Scheibe 1, jeweils in x -Richtung, sind in Abbildung 4.13 dargestellt. Die Moden im Stillstand (0 Hz) spalten sich für 2500 rpm (42 Hz) bereits deutlich in Gleich- und Gegenlauf auf. Bei der maximalen Drehzahl von 8000 rpm (133 Hz) ist insbesondere die Aufspaltung der ersten Mode besonders stark ausgeprägt.

Ziel der zu entwerfenden Schwingungsregelung ist die Reduktion der Resonanzamplituden an den beiden Scheiben. Zusätzlich auftretende sub- und höher-harmonische Schwingungsanteile, die z. B. infolge von Lagerspiel auftreten, werden im Folgenden vernachlässigt. Die simultane, starke Aufspaltung aller Eigenmoden stellt eine besondere Herausforderung beim robusten Reglerentwurf für derartige Systeme dar.

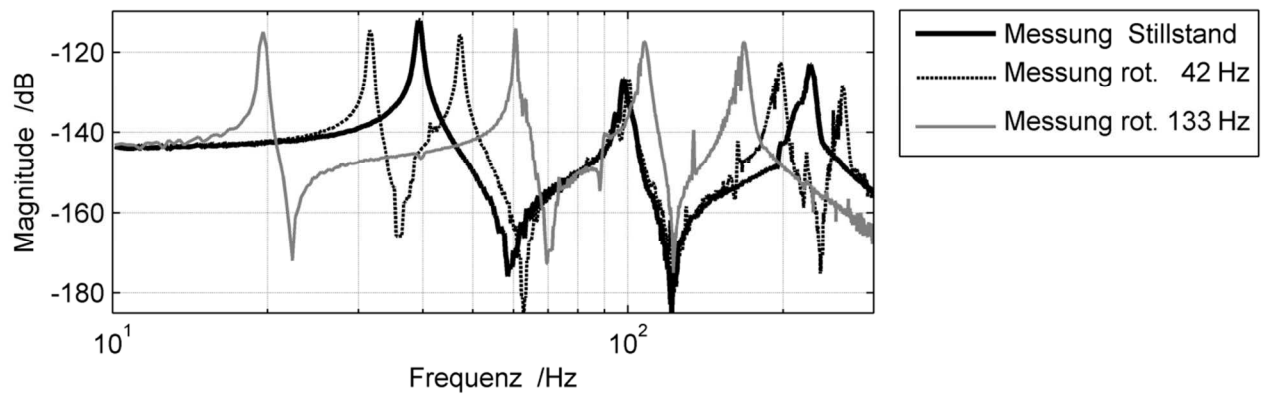


Abbildung 4.13: Experimentelle Amplitudengänge $U_{\text{Aktor},x} \rightarrow q_{\text{Scheibe1},x}$ (Gyroskopie-Prüfstand)

5 Entwurf zur Oil Whip-Unterdrückung

Dieses Kapitel stellt ein methodisches Vorgehen zum Reglerentwurf für die Unterdrückung von *Oil Whip*-Instabilitäten mit simultaner Reduktion von Unwuchtschwingungen hydrodynamisch gelagerter Rotorsysteme vor. Das Vorgehen wird anhand des in Abschnitt 4.1 vorgestellten *Oil Whip*-Prüfstands entwickelt. Der Aufbau des Kapitels orientiert sich an der allgemeinen Methodik in Abbildung 3.1.

5.1 Systemanalyse und Vorgehensweise

Wie in Abschnitt 4.1 festgestellt wurde, kann der Einfluss der *Oil Whirl*-Moden für das untersuchte System vernachlässigt werden. Allgemein ist dies möglich, wenn die erste Biegemode im betrachteten Frequenzbereich dominant ist sowie Aktoren und Sensoren außerhalb der Lagerungen positioniert sind. Die relevante Systemdynamik verändert sich dann nur in geringem Umfang mit der Rotordrehzahl, so dass eine indirekte Beschreibung mit modalen und unstrukturierten Unsicherheiten möglich ist. Diese Unsicherheiten sind komplex, so dass die bewährte *DK-Iteration* zur Lösung der μ -Synthese verwendet werden kann. Eine direkte Unsicherheitsmodellierung mit physikalischer Herleitung der Unsicherheiten ist hier mit aktuellen robusten Regelverfahren nicht zielführend. Eine direkte Beschreibung durch insgesamt 16 unabhängige Unsicherheiten für die Lagerparameter ist nicht zur Synthese mit bekannten Verfahren geeignet, vgl. Abschnitt 3.1.1.

Um garantierte Stabilität im Bereich jenseits des *Oil Whips* zu erreichen, muss der Unsicherheitsbereich auch das instabile Verhalten berücksichtigen. Die Modellbildung im instabilen Bereich ist jedoch aufwendig, so dass hier eine indirekte Stabilisierung vorgenommen wird. Die Analyse des Prüfstandsmodells in Abschnitt 4.1 zeigt, dass die *Oil Whip*-Instabilität durch negative Dämpfungsgrade der ersten Biegemode entsteht. Zur Stabilisierung wird diese Dämpfung durch die Regelung erhöht, so dass der Dämpfungsgrad auch für hohe Drehzahlen nicht negativ wird.

Zur indirekten Unsicherheitsbeschreibung können sowohl *Black Box*- als auch theoretische Modelle verwendet werden. Die *Black Box*-Identifikation ist für hydrodynamisch gelagerte Rotoren deutlich einfacher anzuwenden, da so auf eine mathematische Beschreibung der Schmierfilmeigenschaften verzichtet werden kann. Bei Verwendung der vorhandenen Aktoren und Sensoren für die Identifikation entsteht ein *Black Box*-Modell mit den Aktorkräften als Eingängen und den Scheibenschwingungen als Ausgängen. Diese Kanäle bilden die Ein- und Ausgänge für die Regler-*LFT* des Synthesystems **P** aus Abbildung 2.8.

Als Performancekanäle zur Minimierung von Unwuchtschwingungen sind Krafteingänge an der Scheibe geeignet, da hier erwartungsgemäß die Haupt-Unwuchterregung wirkt, vgl. Abschnitt 2.1. Im *Black Box*-Modell ist der Krafteingang an der Scheibe jedoch nicht vorhanden. Im relevanten Frequenzbereich ist die erste Biegeeigenmode des Rotors dominant, so dass die Auslenkungen an Aktor- und Scheibenposition ein annähernd proportionales Verhältnis aufweisen. Eine Minimierung

der Übertragungsfunktion von Aktorkräften zu Scheibenschwingungen bewirkt somit auch eine Minimierung der Übertragung von Scheibenkräften zu Scheibenschwingungen. Daher können identifizierte Übertragungsfunktionen auch für die Performance-Vorgabe zur Minimierung von Unwuchtschwingungen verwendet werden. Allgemein ist die Verwendung der Reglerkanäle als Performancekanäle zulässig, wenn der Rotor sehr elastisch ist und im relevanten Frequenzbereich die erste Biegemode dominant ist. Prinzipiell ist es möglich, dass eine modellbasiert entworfene Regelung zur Schwingungsreduktion einen Knoten der relevanten Eigenform an der Aktorstelle erzeugt, so dass Schwingungen infolge von Störkräften an der Scheibe nicht minimiert würden. Eine so starke Veränderung der Eigenform, insbesondere bei Berücksichtigung von Unsicherheiten, tritt hier erfahrungsgemäß jedoch nicht auf.

Der Modellierungsaufwand durch *Black Box*-Identifikation des Übertragungspfads von Aktor zu Sensor ist gering und es können dynamische Modelle mit hoher Genauigkeit erreicht werden. Da die *Oil Whirl*-Moden keinen erkennbaren Einfluss auf die Übertragungsfunktionen von Aktor zu Sensor haben, verschwinden diese bereits bei der Identifikation.

Kopplungen von horizontaler und vertikaler Bewegungsrichtung sind für die betrachteten Freiheitsgrade ebenfalls vernachlässigbar klein, vgl. Abschnitt 4.1. Somit können die Regelungen der Bewegungsrichtungen dezentral ausgeführt werden. Horizontale und vertikale Dynamik sind darüber hinaus sehr ähnlich. Es wird daher nur ein SISO-Modell ermittelt, mit dem ein Regler entworfen wird, der für beide Richtungen verwendet werden kann. Der Unsicherheitsbereich des Modells muss dazu die Dynamiken in beide Richtungen vollständig beinhalten.

5.2 Modellbildung

Zur *Black Box*-Identifikation wird die Implementierung der *PEM* (engl. *Prediction Error Method*) in der MATLAB System Identification Toolbox [137] verwendet, s. [138]. Diese führt eine Optimierung durch, um den *RMSE* (engl. *Root Mean Square Error*) der Abweichungen des identifizierten Modells zu experimentellen Messdaten zu minimieren. Um die Dynamikveränderung im gesamten Drehzahlbereich zu berücksichtigen, werden experimentelle Frequenzgänge bei unterschiedlichen Rotordrehfrequenzen für *x*- und *y*-Richtung ermittelt. Es werden Messungen bei Gleitsinuserregung mit dem elektromagnetischen Aktor durchgeführt und mit üblichen Verfahren über Autoleistungsdichte- und Kreuzleistungsdichtespektren in den Frequenzbereich transformiert [139]. Die Anregungsamplitude sollte zu Schwingungen in Größenordnung der Unwuchtschwingungen führen, so dass die Transformation in den (linearen) Frequenzbereich bereits eine geeignete Linearisierung des Systems beinhaltet. Die Möglichkeit zur Linearisierung des vorliegenden Systems wird durch Untersuchung der nichtlinearen Steifigkeitskennlinien in [39] bestätigt. Genauere Ausführungen zur *PEM* und der Anwendung auf den Prüfstand werden in [140] angegeben.

In der Frequenzbereichsdarstellung können unerwünschte Effekte gezielt durch Löschen der entsprechenden Datenpunkte eliminiert werden. So werden z. B. Störungen durch Unwuchtschwingungen in der Rotationsfrequenz oder Frequenzbereiche jenseits der Erregerfrequenz aus den Messdaten entfernt.

Experimentell ermittelte Übertragungsfunktionen für Anregungsfrequenzen bis 65 Hz in x - und y -Richtung sind in Abbildung 5.1 für Rotordrehfrequenzen in einem Bereich von 5 Hz bis 38 Hz dargestellt. Für höhere Anregungsfrequenzen ist der Übertragungsfaktor des Systems sehr gering und es müssten Messungen mit höheren Erregeramplituden durchgeführt werden. Der hohe Frequenzbereich ist für die Performance nur von geringem Interesse, da die maximale Motordrehfrequenz von 60 Hz auch die höchste Anregungsfrequenz für die synchrone Unwuchterregung darstellt.

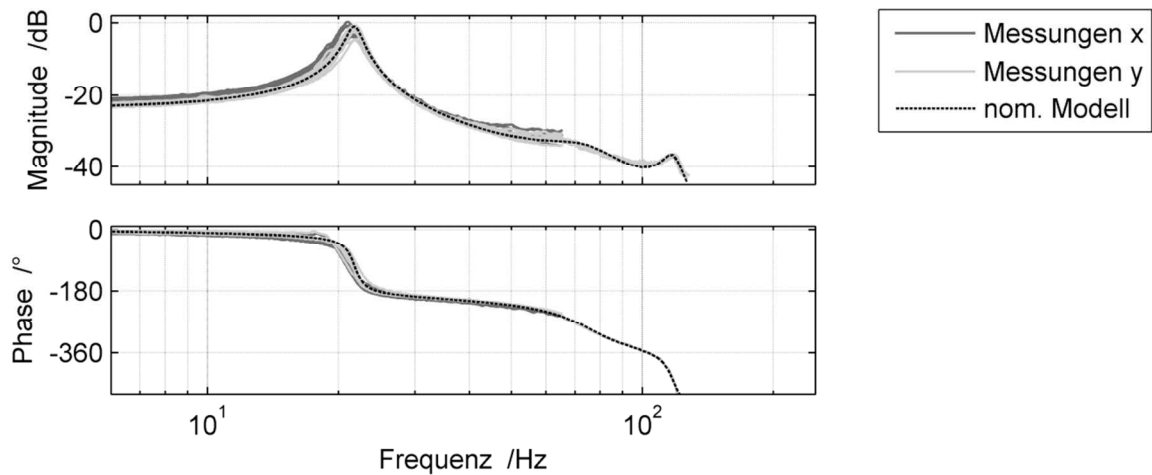


Abbildung 5.1: Experimentelle Amplitudengänge & Modell, $\Omega \in [5 \text{ Hz}, 38 \text{ Hz}]$ (*Oil Whip*-Prüfstand)

Zur Identifikation wird die Messung in y -Richtung bei einer Rotordrehfrequenz von 19 Hz ausgewählt, da diese ungefähr in der Mitte des durch die Messungen abgedeckten Bereiches liegt. Es wurde eine zusätzliche Messung mit höheren Erregeramplituden für Anregungsfrequenzen von 65 Hz bis 125 Hz durchgeführt, und die Frequenzbereichsdaten für die Bereiche von 0 Hz bis 65 Hz und von 65 Hz bis 125 Hz zusammengefügt. Abbildung 5.1 zeigt das so identifizierte nominelle Modell achter Ordnung. Zur Berücksichtigung der Verzögerungen in der digitalen Datenverarbeitung ist zusätzlich eine Totzeit von 1,5 Abtastschritten zu berücksichtigen. Dies beinhaltet einen vollen Berechnungs-Abtastschritt sowie einen halben Abtastschritt zur Berücksichtigung des Zero-Order-Hold Gliedes, vgl. z. B. [96], [119]. Zur Integration in das kontinuierliche Modell wird eine Padé-Approximation zweiter Ordnung durchgeführt.

5.3 Unsicherheiten

Indirekte, modale und unstrukturierte Unsicherheiten werden so eingestellt, dass die Messungen gerade abgedeckt sind. Zuerst werden modale Unsicherheiten eingestellt, da diese nur im Bereich der betroffenen Eigenfrequenz wirken und somit selektiver als unstrukturierte Unsicherheiten sind. Für den Eigenwert der ersten Biegemode des nominellen Systems mit einer Eigenfrequenz von 21,8 Hz und einem Dämpfungsgrad von 0,4 % wird eine komplexe Unsicherheit von 5 % eingeführt. Die Unsicherheitsbereiche wurden im Grundlagenteil bereits als Beispiel für modale Unsicherheiten verwendet und sind in Abbildung 2.9 dargestellt. Da der Unsicherheitsbereich zunächst in die rechte, instabile Halbebene überlappt, sind auch instabile Systeme im unsicheren Modell enthalten. Das

System ist im bisher untersuchten Drehzahlbetriebsbereich jedoch vollständig stabil, so dass dieser Bereich vermieden werden sollte. Der nominelle Pol wird daher um ein Offset nach links verschoben. Um die angedeutete, gepunktete vertikale Linie der unsicheren Eigenfrequenz weiterhin abzudecken, muss die Unsicherheit auf 5,4% erhöht werden. Die modale Unsicherheit mit Offset ist weiterhin relativ klein. Dieses Vorgehen ist für modale Unsicherheiten üblich, so dass nicht genauer untersucht wurde, ob die Vorteile des Offsets durch Vermeidung der Überlappung mit der instabilen Halbebene die Nachteile durch Vergrößerung des Unsicherheitsbetrages rechtfertigen.

Weiterhin wird eine komplexe, multiplikative Unsicherheit von konstant 15% eingeführt, um die unterschiedliche Systemverstärkung im Frequenzbereich unterhalb von 60Hz zu berücksichtigen und um Auswirkungen von Nichtlinearitäten und Messfehlern anzunähern. Im Frequenzbereich zwischen 65 Hz und 125 Hz liegt nur die Messung für eine Rotordrehfrequenz vor. Dieser Bereich ist für die Unwuchtschwingungen nicht relevant. Um *Spillover*-Effekte, d. h. eine Anfachung nicht modellierter Moden im Frequenzbereich jenseits der geforderten Performance-Bandbreite zu vermeiden, wird daher eine komplexe Unsicherheit addiert.

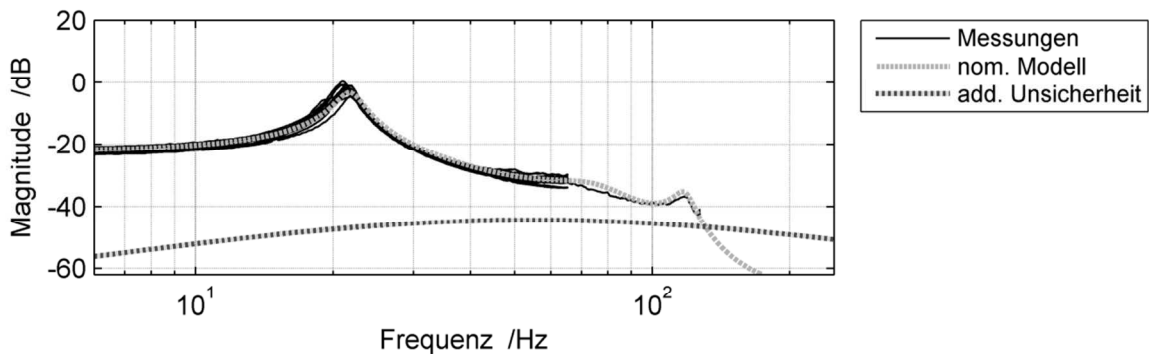


Abbildung 5.2: Additive Unsicherheit (*Oil Whip*-Prüfstand)

Die in Abbildung 5.2 gezeigte Gewichtung wurde so eingestellt, dass die additive Unsicherheit erst im höheren Frequenzbereich wirksam ist, wie von Balas und Doyle [141] empfohlen.

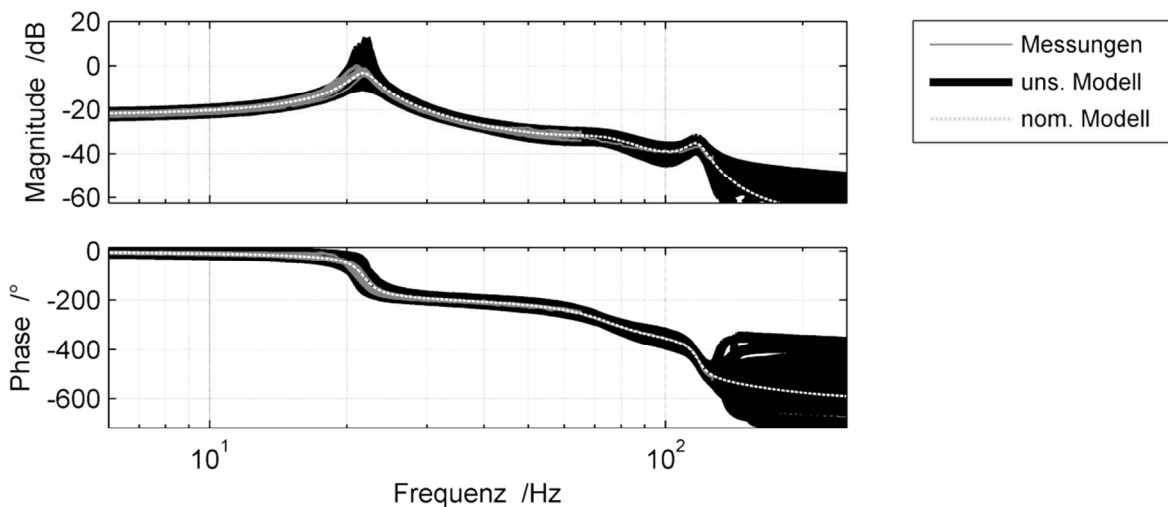


Abbildung 5.3: Unsicheres Modell (*Oil Whip*-Prüfstand)

Die Kombination aus modalen und unstrukturierten Unsicherheiten führt zum unsicheren Modell in Abbildung 5.3, das die Messungen vollständig abdeckt. Ab ca. 150 Hz nimmt der Einfluss der additiven Unsicherheit stark zu, da diese hier größer als der nominelle Übertragungsfaktor ist.

5.4 Performance-Vorgaben

Zur Aufstellung des Synthesystems \mathbf{P} wird das unsichere Modell um Performancekanäle sowie zugehörige Gewichtungen erweitert. Zur Unterdrückung der synchronen Unwuchtschwingungen wird entsprechend Abschnitt 5.1 die Störübertragung GS von Aktorkräften als Störung d zur Regelabweichung e , d. h. zur Scheibenauslenkung, im Entwurf begrenzt. Durch Implementierungen anderer Regler wurde festgestellt, dass zusätzlich auch die Stellgröße zu begrenzen ist. Um die Stellübertragungsfunktion CS zu berücksichtigen, wird die Struktur der Gleichungen (2.9) und (2.10) verwendet, entsprechend dem „Schema 1“ von Schönhoff [96]. Dazu werden als Performance-Eingänge die Führungsgröße und die Störung $\mathbf{w} = [r \ d]'$ sowie als Performance-Ausgänge die Regelabweichung und die Stellgröße $\mathbf{z} = [e \ u]'$ verwendet. Wie Gleichung (2.9) zeigt, sind in der resultierenden Übertragungsmatrix \mathbf{M} auch die Empfindlichkeitsfunktion S und die inverse Eingangsempfindlichkeitsfunktion T_i als Kopplung von r und e bzw. d und u enthalten.

Um das Synthesystem \mathbf{P} zu vervollständigen, werden Gewichtungen für die Performancekanäle eingestellt, vgl. Abbildung 2.8. Dazu werden Begrenzungen für das Übertragungsverhalten definiert und die Gewichte als die Inverse der Begrenzungen berechnet, vgl. Gleichung (2.11). Wie in Abbildung 5.4 dargestellt, wird die Störübertragung GS als primäre Performance-Anforderung besonders stark begrenzt. Da jede Gewichtungsfunktion jeweils zwei Performance-Übertragungsfunktionen beeinflusst, sind nur drei der vier Begrenzungen frei wählbar und die vierte ist damit bereits implizit festgelegt. Analog zum Vorgehen von Schönhoff wird die Wahl erster Begrenzungen an die Übertragungsfunktionen eines PID-Reglers angelehnt. Die von Schönhoff angegebenen Regeln für die Einstellung des PID-Reglers sind jedoch nicht zur Störunterdrückung rotordynamischer Systeme geeignet, so dass hier eine iterative Einstellung zur aktiven Dämpfung der Resonanz vorgenommen wird. Da die Unwuchtkraft entsprechend Gleichung (2.2) in quadratischem Verhältnis zur Rotordrehfrequenz steht, treten für kleine Anregungsfrequenzen nur geringe Erregeramplituden auf. Es wird hier eine PDT_1 -Struktur für den Regler K_{PD} verwendet, da ein I-Anteil hauptsächlich die Ausregelung von Störungen für kleine Frequenzen bewirkt.

Die Begrenzungen für die μ -Synthese werden von den Übertragungsfunktionen des geschlossenen PDT_1 -Regelkreises abgeleitet (Abbildung 5.4). Für die Unterdrückung der *Oil Whip*-Instabilität soll die Dämpfung der Biegemode durch die Regelung erhöht werden, vgl. Abschnitt 5.1. Dies wird durch einen flachen Verlauf der Begrenzungsfunktion für die Störübertragung GS erreicht. Der vorgegebene Verlauf erfordert eine exklusive Reduktion der Resonanzamplituden, was die gewünschte Erhöhung der Dämpfung durch die Synthese erwarten lässt. Für die Stell- und inverse Eingangsempfindlichkeitsübertragungsfunktion CS und T_i sind bereits die sehr „lockeren“ Begrenzungen in Abbildung 5.4 für eine zufriedenstellende Reduktion der Stellgröße ausreichend. Diese Einstellungen wurden iterativ durch Implementierung verschiedener Regler am Prüfstand ermittelt.

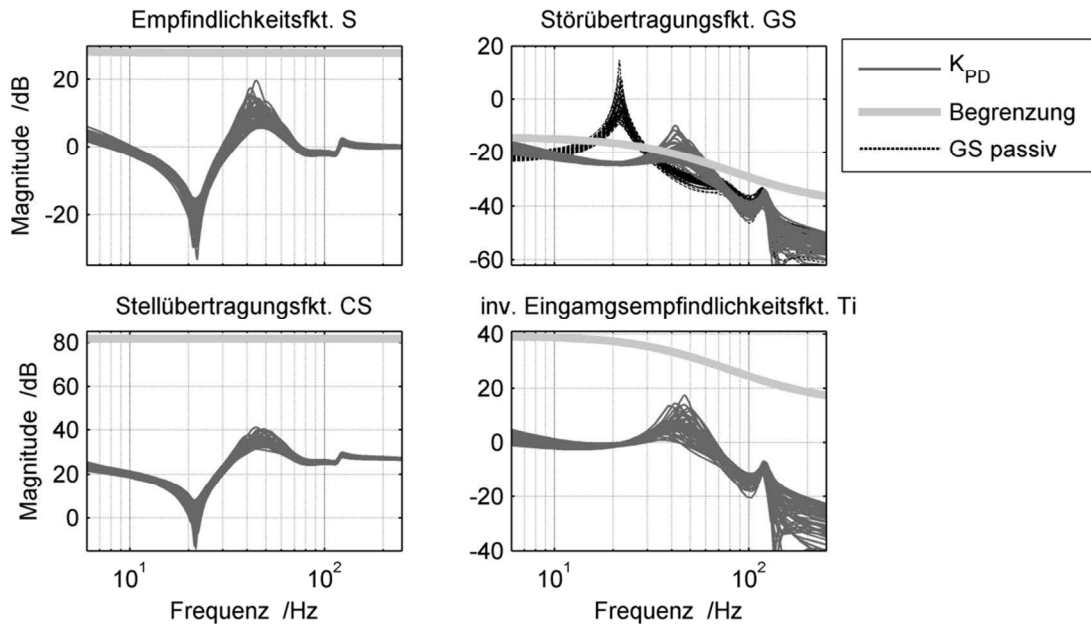


Abbildung 5.4: PDT₁-Regelkreis $[r \ d]'$ \rightarrow $[e \ u]'$ (Oil Whip-Prüfstand)

5.5 Synthese

In der MATLAB Robust Control Toolbox wird aus dem Synthesystem \mathbf{P} , der normierten Unsicherheitsmatrix $\|\Delta_i\|_\infty = 1$ sowie der Unsicherheitsstruktur ein gemeinsames Objekt gebildet, ein sog. unsicheres Zustandsraumsystem (*uss*, engl. *Uncertain State Space*). Dieses wird während der Synthese in die Darstellungsform entsprechend Abschnitt 2.6 zerlegt.

Da für das betrachtete System ausschließlich komplexe Unsicherheiten in \mathbf{P} enthalten sind, kann die μ -Synthese mit der zuverlässigen *DK-Iteration* gelöst werden. Für die Synthese sind dazu weitere Einstellungen vorzunehmen, insbesondere die Auswahl von Frequenzstützstellen für die Berechnung der (punktweisen) \mathbf{D}_ω -Scales und μ_ω -Verläufe sowie Einstellungen für die Fits der Scales \mathbf{D}_{fit} . Dabei haben sich für die Berechnung von \mathbf{D}_ω äquidistant verteilte Frequenzstützstellen als geeignet herausgestellt. Der Frequenzbereich sollte alle kritischen Pole des Systems und der Gewichtungsfunktionen beinhalten. Für das Erreichen eines asymptotischen Verhaltens $\omega \rightarrow \infty$ sind zusätzliche Frequenzstützstellen oberhalb der Regler-Bandbreite hinzuzufügen, so dass der vollständige Verlauf aller Gewichtungsfunktionen berücksichtigt wird. Die Stützstellenanzahl sollte dabei allerdings so gering wie möglich gewählt werden, um den numerischen Aufwand zu begrenzen.

Bei Analysen der μ_ω -Verläufe für mehrere μ -Reglerentwürfe mit wechselnden Syntheseparametern wurden für das vorliegende System Einstellungen für eine gute Konvergenz der *DK-Iteration* gefunden. Es werden 165 äquidistant verteilte Frequenzstützstellen im Bereich zwischen 0,05 Hz und 700 Hz sowie eine maximale Fit-Ordnung für \mathbf{D}_{fit} von fünf für das MATLAB-übliche Fitverfahren [81] verwendet.

5.6 Iterative Optimierung und Syntheseergebnisse

Die μ -Synthese minimiert den größten *SSV*-Wert über alle Frequenzen. Um eine Verbesserung für die kritische Frequenzstützstelle zu erreichen, muss oft eine Verschlechterung der μ -Werte für die umliegenden Frequenzen zugelassen werden. Dies führt bei geeigneten Performance-Begrenzungsfunktionen idealerweise zu einem flachen μ_ω -Verlauf wie in Abbildung 5.5, vgl. [142].

Eine μ -Synthese mit ersten Begrenzungsfunktionen in Anlehnung an die Übertragungsfunktionen des PDT₁-Regelkreises führt in der Regel nicht zu einer optimalen Regelung. Um den gewünschten, flachen μ_ω -Verlauf zu erreichen, sind iterative Anpassungen insbesondere der Performance-Einstellungen vorzunehmen. Erst dann kann ein Entwurf mit robuster Stabilität und Performance unter Ausnutzung aller Reserven erreicht werden. Zur Einstellung der Performance-Begrenzungsfunktionen wird daher eine Strategie zur gezielten, iterativen Optimierung vorgestellt. Kritische Frequenzbereiche werden identifiziert, um gezielt Anpassungen der Performance- und ggf. auch der Unsicherheitseinstellungen vorzunehmen.

Kritische Frequenzbereiche werden im μ_ω -Verlauf von Werten größer 1 angezeigt, da hier die geforderte robuste Stabilität und/oder Performance nicht erreicht werden. Für diese kritischen Frequenzen wird zunächst die robuste Stabilität überprüft, indem der Verlauf des *Stabilitäts-SSV* μ_Δ berechnet wird, vgl. Abschnitt 2.6.3. Dazu werden die Performancekanäle vernachlässigt, so dass μ_Δ allein die robuste Stabilität gegenüber den Unsicherheiten beurteilt. Bei Werten $\mu_\Delta \ll 1$ können Stabilitätsprobleme ausgeschlossen werden und es liegen unüberwindbare Widersprüche von zwei oder mehreren Performance-Begrenzungsfunktionen vor. Ist der *Stabilitäts-SSV* μ_Δ hingegen kritisch, so kann die geforderte robuste Performance nicht für die definierten Unsicherheiten erreicht werden, da Widersprüche zwischen Performance- und Robustheitsanforderungen vorliegen. Die μ_ω -Verläufe für den PDT₁-Regelkreis in Abbildung 5.5 zeigen zwei kritische Frequenzbereiche, einen für Frequenzen unterhalb von ca. 6 Hz, den zweiten zwischen ca. 30 Hz und 70 Hz. Beide sind in Bezug auf die Stabilität unkritisch, da μ_Δ sehr klein ist. Es treten also ausschließlich Verletzungen der Performance-Begrenzungsfunktionen auf.

Um zu überprüfen, welche Performance-Begrenzungsfunktionen kritisch sind, wird das Übertragungsverhalten des geschlossenen Regelkreises auf Überschreitung der Begrenzungsfunktionen im kritischen Frequenzbereich überprüft. Bei Widersprüchen von Performance-Begrenzungsfunktionen überschreiten mehrere (Performance-)Übertragungspfade die Begrenzungsfunktionen für die betrachteten Frequenzen. In diesem Falle ist mindestens eine der konkurrierenden Begrenzungsfunktionen anzuheben.

Wird die Begrenzung nur für einen (Performance-)Übertragungspfad überschritten, weist dies wiederum auf eine Kombination mit großen Unsicherheiten hin, was mit kritischen Werten für den *Stabilitäts-SSV* μ_Δ einhergeht. In diesem Fall wird die Performance-Begrenzungsfunktion der kritischen Übertragungspfade für die untersuchten Frequenzen angehoben.

Der PDT₁-Regler wurde nicht mit der μ -Synthese optimiert, so dass bei hohen μ_ω Werten nicht zwangsweise unüberwindbare Widersprüche vorliegen müssen. In den kritischen Frequenzbereichen wird ausschließlich die Störübertragungsfunktion überschritten, vgl. Abbildung 5.4. Auch robuste Stabilität ist hier unkritisch, wie der *Stabilitäts-SSV* μ_Δ in Abbildung 5.5 zeigt. Durch Optimierung des Reglers ist es also möglich, einen günstigeren μ_ω -Verlauf zu erreichen. Genau das wird von

der *DK-Iteration* geleistet, so dass der angegebene μ -Regler mit den gewünschten Eigenschaften gefunden wird.

Bei geeigneter Einstellung der Performance-Gewichtungen erreicht der μ_ω -Verlauf für den geschlossenen Regelkreis idealerweise einen flachen Verlauf knapp unterhalb von $\mu = 1$. Dann ist das System garantiert robust stabil und die robuste Performance weist keine Konservativitäten auf. Für Verläufe deutlich unter $\mu = 1$ sind große Reserven vorhanden. Da der Unsicherheitsbereich im Entwurf ausreichend groß definiert wird, sollten die Begrenzungen hier herabgesetzt werden, so dass die Reserven allein zur Performance-Verbesserung genutzt werden. Wie Abbildung 5.6 zeigt, wird dies mit dem vorgestellten μ -Reglerentwurf für das untersuchte System erreicht.

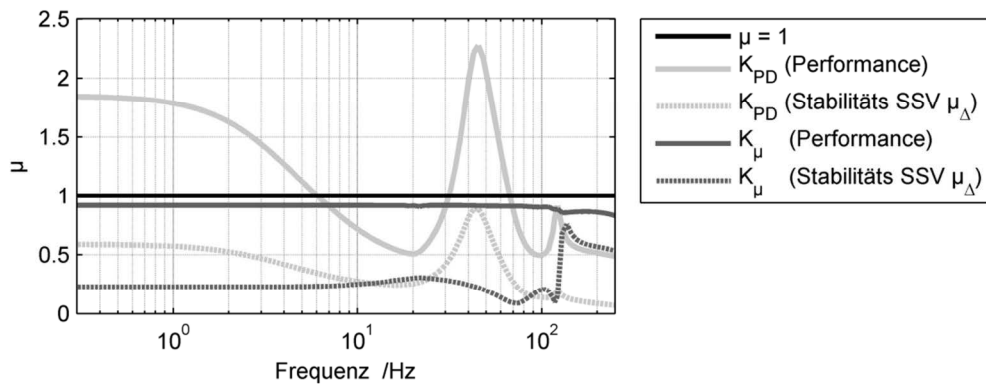


Abbildung 5.5: μ_ω -Verlauf für PDT_1 - und μ -Regelkreis (*Oil Whip*-Prüfstand)

Mit dem optimierten Setup führt die μ -Synthese nach fünf Iterationen zum Regler K_μ mit einer Ordnung von 43 und einem maximalen *SSV* von 0,92. Somit sind robuste Stabilität sowie die Einhaltung der vorgegebenen Begrenzungen durch die Performance-Übertragungsfunktionen garantiert, wie Abbildung 5.6 bestätigt.

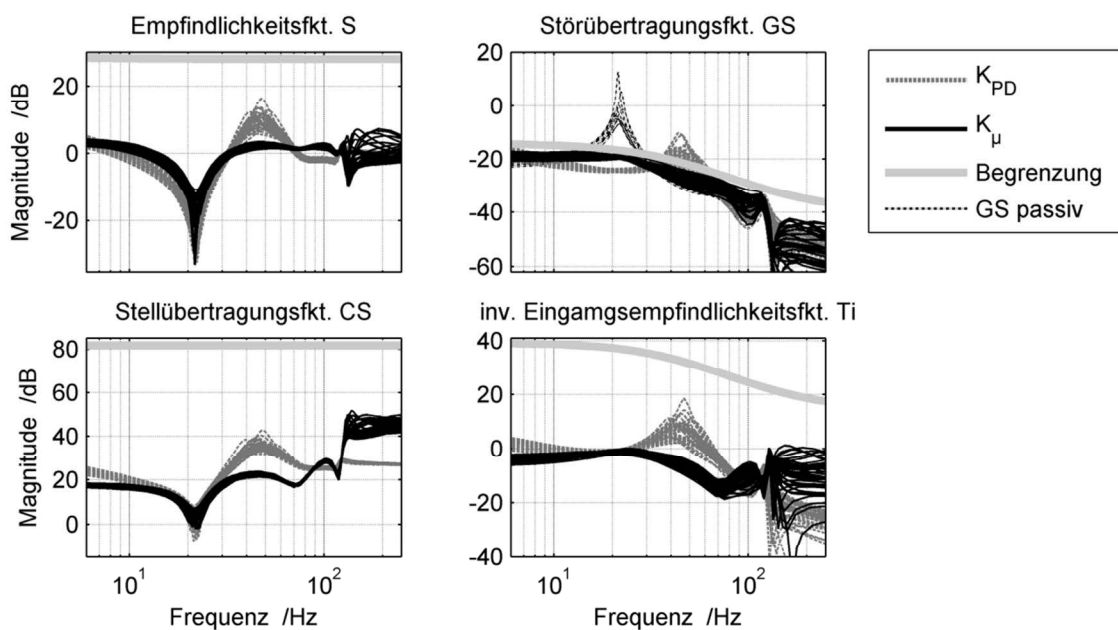


Abbildung 5.6: PDT_1 - und μ -Regelkreis $[r \ d]' \rightarrow [e \ u]'$ (*Oil Whip*-Prüfstand)

Der maximale SSV wird hauptsächlich von der Begrenzung für GS hervorgerufen, die knapp unterhalb der Begrenzung verläuft. Diese Reduktion entspricht der primären Performance-Anforderung zur Reduktion von Unwuchtschwingungen im Betriebsdrehzahlbereich. Höhere Unwucht-Anregungsfrequenzen sind nicht zu erwarten, so dass die Begrenzung von GS für höhere Frequenzen deutlich lockerer eingestellt ist. In diesem Frequenzbereich wird keine Performance gefordert, so dass trotz absinkendem μ_ω -Verlauf keine unerwünschte Konservativität vorliegt.

5.7 Validierung und Implementierung

Zur vollständigen Validierung der robusten Stabilität und Performance ist es notwendig, die Einhaltung der H_∞ -Performance zu überprüfen – theoretisch für den gesamten Unsicherheitsbereich. Da die Unsicherheiten realer Systeme nicht beliebig eingestellt werden können und eine begrenzte Anzahl von Messungen durchgeführt werden soll, ist die Performance zumindest für einige realisierbare Betriebszustände zu testen. Für rotordynamische Systeme kann die Rotordrehfrequenz explizit eingestellt werden, so dass eine einfache Überprüfung der Robustheit gegenüber dem Drehzahleinfluss möglich ist. Die additiven Unsicherheiten (Abbildung 5.2) können hingegen nicht variiert werden. Zur Validierung der robusten Performance werden daher die Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises für Drehzahlen von 10Hz, 20Hz und 30Hz experimentell ermittelt und auf Einhaltung der Performance-Begrenzungsfunktionen überprüft.

Die Ordnung des gezeigten Reglers K_u von 43 ist für eine Ausführung in Echtzeit mit einer gewünschten Abtastrate von 10kHz zu hoch, so dass eine Ordnungsreduktion durchgeführt wird. Es wird dazu die modale Reduktion nach Wortelboer [97] verwendet, die Moden anhand der Hankelschen Singulärwerte [57] für den geschlossenen Regelkreis auswählt. Durch Verwendung des skalierten Systems DPD^{-1} kann die Verschlechterung des maximalen SSV explizit begrenzt werden [143]. So wird für den entworfenen Regler K_u eine Reduktion der Ordnung von 43 auf 6 erreicht, wobei der maximale SSV nur geringfügig von 0,92 auf 0,97 erhöht wird.

Der entworfene SISO-Regler K_u wird sowohl für die x - als auch für die y -Richtung implementiert. Für beide Richtungen werden die Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises für die Drehzahlen 10Hz, 20Hz und 30Hz ermittelt. Abbildung 5.7 zeigt, dass die Performance-Begrenzungsfunktionen vollständig eingehalten werden, so dass der Entwurf als validiert angesehen werden kann. Die Modellierung inklusive der Vernachlässigungen der *Oil-Whirl* Moden sowie der Kopplungen von x - und y -Richtung ist somit bestätigt.

Abbildung 5.8 zeigt die Amplituden der gemessenen Scheibenschwingung für einen Hochlauf des Rotors auf die maximale Motordrehfrequenz von 60Hz in 4,5s und anschließendem Halten der maximalen Drehfrequenz. Der passive Hochlauf muss allerdings vor dem Einsetzen der *Oil Whip*-Instabilität bei ca. 41 Hz abgebrochen werden.

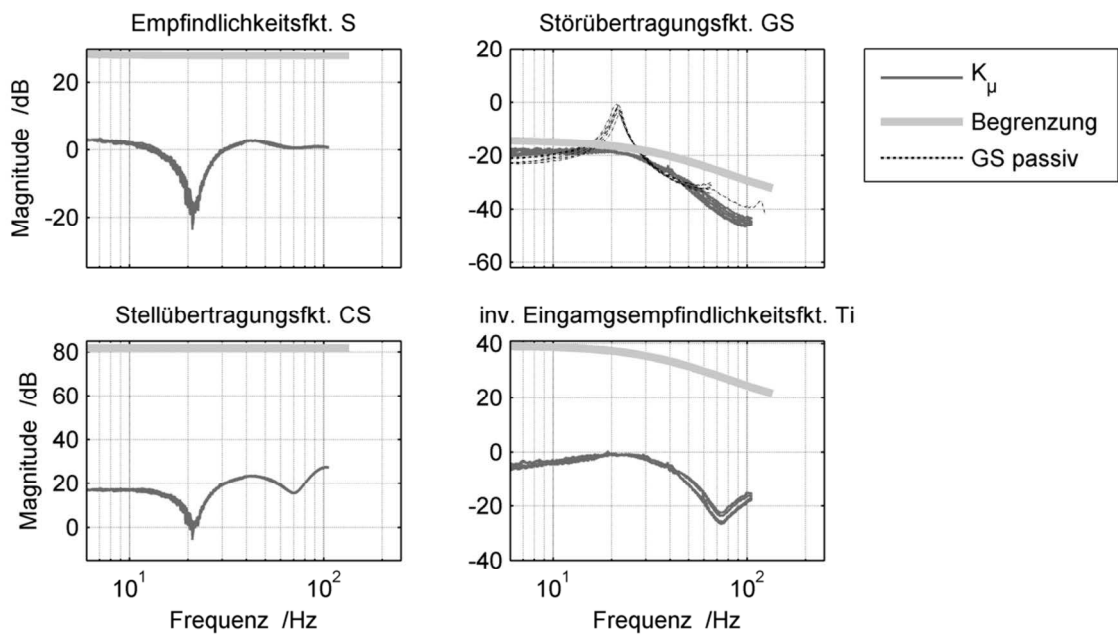


Abbildung 5.7: Validierung μ -Regelung, $\Omega \in [10 \text{ Hz}, 30 \text{ Hz}]$ (*Oil Whip*-Prüfstand)

Für die geregelten Systeme tritt im Betriebsdrehzahlbereich des Motors keine Instabilität auf. Die Möglichkeit zur *Oil Whip*-Stabilisierung durch aktive Dämpfung der ersten Biegemode wird somit bestätigt. Der PDT_1 -Regler K_{PD} verschiebt die Resonanzdrehfrequenz auf ca. 40 Hz und reduziert die Resonanzamplitude deutlich.

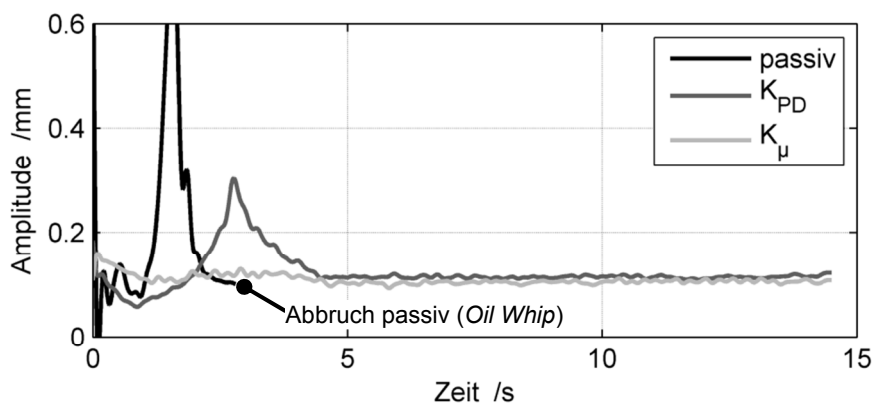


Abbildung 5.8: Gemessene Hochlauf-Schwingungsamplituden, y -Richtung (*Oil Whip*-Prüfstand)

Der μ -Regler K_μ beseitigt sämtliche Schwingungsüberhöhungen, so dass keine Resonanz mehr erkennbar ist. Dies bestätigt, dass die gewählten Performance-Begrenzungsfunktionen für die Reduktion von Unwuchtschwingungen geeignet sind.

5.8 Diskussion der Ergebnisse

Zusammenfassend ist festzustellen, dass der Entwurf durch Vernachlässigung der *Oil Whirl*-Moden und der Kopplungen zwischen x - und y -Richtung deutlich vereinfacht werden kann. Die vorgestellte Methodik leitet ein *Black Box*-Modell direkt aus gemessenen Übertragungsfunktionen von Aktoranregung zu Sensorsignalen ab und es kann auf eine theoretische Modellierung der hydrodynamischen Gleitlager verzichtet werden. Die Unterdrückung der *Oil Whip*-Instabilität wird implizit durch eine Erhöhung des Dämpfungsgrads der ersten Biegemode erreicht. Da kein Modell des instabilen Systems im Reglerentwurf berücksichtigt wurde, kann so formal keine robuste Stabilität für Drehfrequenzen oberhalb von 40Hz garantiert werden. Hochlaufversuche am realen System bestätigen jedoch, dass die *Oil Whip*-Instabilität mindestens bis zur maximalen Motordrehzahl von 60Hz vollständig unterdrückt wird.

Mit der vorgestellten Methodik wird ein Regler gefunden, der die Stabilisierung des *Oil Whips* und die Unterdrückung von *Oil Whirl*-Schwingungen bei geringem Modellierungs- und Syntheseaufwand erreicht. Die zugrundeliegenden Vereinfachungen können für elastische Rotoren mit ausreichendem Abstand der Aktoren und Sensoren zu den Lagern getroffen werden. Zur iterativen Optimierung der Performance- und Syntheseinstellungen wird eine übersichtliche, einfach anwendbare Analyse von μ_ω -Verläufen und Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises eingesetzt. Diese ist allgemein für die μ -Synthese anwendbar und wird auch in den folgenden Entwürfen verwendet.

6 Entwurf zur Oil Whirl-Unterdrückung

In diesem Kapitel wird ein methodisches Vorgehen für den Reglerentwurf zur Unterdrückung von subharmonischen *Oil Whirl*-Schwingungen anhand des in Abschnitt 4.2 vorgestellten *Oil Whirl*-Prüfstands entwickelt.

6.1 Systemanalyse und Vorgehensweise

Besonderen Stellenwert für den Entwurf hat die Beschreibung der unsicheren *Oil Whirl*-Moden, deren Eigenfrequenz sich signifikant mit der Rotordrehfrequenz ändert. Wie Untersuchungen in [133] zeigen, kann das stationäre Systemverhalten durch lineare Modelle abgebildet werden. Zur Beschreibung der Eigenfrequenzveränderung eignen sich indirekte, modale Unsicherheiten für die *Oil Whirl*-Mode, da sich deren Eigenform im untersuchten Drehzahlbereich nur geringfügig ändert. Eine direkte Beschreibung durch insgesamt 16 unabhängige Unsicherheiten für die Lagerparameter ist nicht zur Synthese mit bekannten Verfahren geeignet, vgl. Abschnitt 3.1.1.

In bekannten Anwendungen werden üblicherweise modale Unsicherheiten bis ca. 10% Abweichung in der Eigenfrequenz verwendet. Diese werden meist als vereinfachte, komplexe modale Unsicherheit mit Offset beschrieben, vgl. Abbildung 2.9. Die Eigenfrequenzen der *Oil Whirl*-Mode des untersuchten Systems variieren jedoch um ca. $\pm 55\%$. Um die Überlappung dieses sehr großen Unsicherheitsbereiches mit der instabilen Halbebene zu vermeiden, müsste ein großes Offset eingeführt werden. Dies erfordert eine extreme Vergrößerung des Unsicherheitsbetrages, wenn der ursprünglich geforderte Eigenfrequenzbereich beibehalten werden soll. Da bisher keine Veröffentlichungen zur Berücksichtigung von derart großen modalen Unsicherheiten vorliegen, werden hier verschiedene Möglichkeiten zur Unsicherheitsbeschreibung verglichen. Dies ist ein Schwerpunkt der folgenden Untersuchungen. Die Beschreibungen unterscheiden sich bezüglich vereinfachter bzw. exakter Darstellung, reellen bzw. komplexen Unsicherheitsbereichen sowie durch die Verwendung eines Offsets. Reelle modale Unsicherheiten ermöglichen dabei eine geringe Konservativität, jedoch muss die numerisch anfällige μ -Synthese für gemischt komplex-reelle Unsicherheiten zur Lösung verwendet werden.

Beim Einsatz von indirekten Unsicherheiten ist ein Ein-/Ausgangsmodell ausreichend, die physikalischen Systemparameter müssen nicht explizit im Modell enthalten sein. Für die Modellbildung kann daher die *Black Box*-Identifikation verwendet werden, so dass weiterhin auf die theoretische Modellierung des Lagerverhaltens verzichtet werden kann. Es ist jedoch zu überprüfen, ob die Performance-Vorgaben zur Unterdrückung der *Oil Whirl*-Mode mit den identifizierbaren Übertragungsfunktionen von Aktorkräften zu Sensorausgängen formuliert werden können. Die Eigenformen der *Oil Whirl*-Moden sind Mischungen aus Starrkörper- und Biegeeigenform, so dass keine Schwingungsknoten an Lager-, Aktor- und Scheibenpositionen auftreten [133]. Da Steuer- und Beobacht-

barkeit der *Oil Whirl*-Moden somit sichergestellt sind, ist die Reduktion der *Oil Whirl*-Schwingungen mit einer Begrenzung der Übertragungsfunktionen von Aktoren zu Sensoren möglich. Steuer- und Beobachtbarkeit relevanter Moden durch die verwendeten Aktoren und Sensoren sind allgemein essentielle Forderungen an jede Regelstrecke, so dass dies keine Einschränkung der Übertragbarkeit auf ähnliche Problemstellungen darstellt.

Anders als in Kapitel 5 sind die Kopplungen zwischen horizontaler (x -) und vertikaler (y -) Bewegungsrichtung hier nicht vernachlässigbar. Daher sind MIMO-Systemidentifikation und Reglerentwürfe durchzuführen.

6.2 Modellbildung

Als Grundlage für die Identifikation eines nominellen Modells und die Einstellung der Unsicherheiten werden Frequenzgänge für unterschiedliche, stationäre Rotordrehfrequenzen experimentell ermittelt. Für jede stationäre Drehfrequenz werden getrennte Messungen bei Erregung in x - und y -Richtung durchgeführt und mittels Leistungsdichtespektren in den Frequenzbereich überführt. Diese werden dann zu MIMO-Frequenzgängen zusammengefügt und um Störeinflüsse von Unwuchtschwingungen sowie den Frequenzbereich jenseits des Erregerspektrums bereinigt. Aus diesen MIMO-Frequenzgängen wird eine Messung ausgewählt, die ungefähr in der Mitte des Unsicherheitsbereiches liegt. Für diese Messung wird mit dem Identifikationsverfahren *PEM* das nominelle Modell ermittelt, vgl. Abschnitt 5.2. Das für die Rotordrehfrequenz von 50 Hz identifizierte, nominelle Modell für das untersuchte System ist in Abbildung 6.1 zusammen mit allen experimentell ermittelten Amplitudengängen dargestellt.

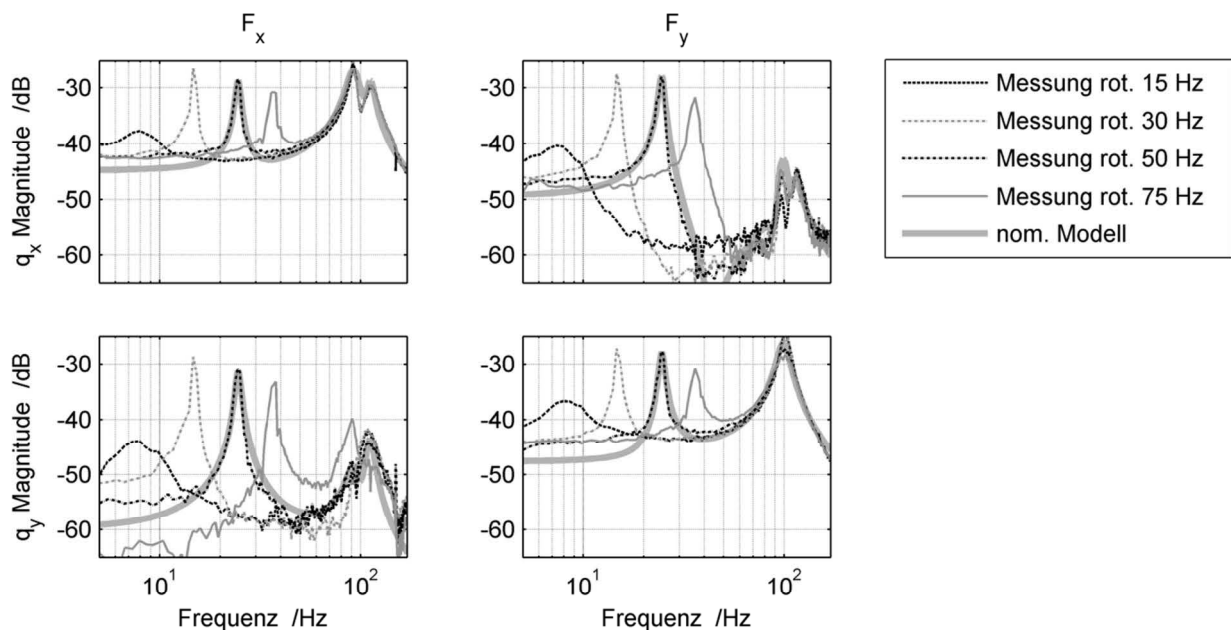


Abbildung 6.1: Experimentelle Amplitudengänge & Modell (*Oil Whirl*-Prüfstand)

Abbildung 6.2 zeigt zusätzlich den Phasengang exemplarisch für die Übertragung von Kraft zu Auslenkung, jeweils in y -Richtung. Der Phasenverlauf zeigt im Bereich der *Oil Whirl*-Moden einen Phasenverlust von nur ca. 90° , während übliche elastische Moden 180° Phasenverzug hervorrufen. Dies ist auf eine Systemnullstelle in Nähe dieser Pole zurückzuführen.

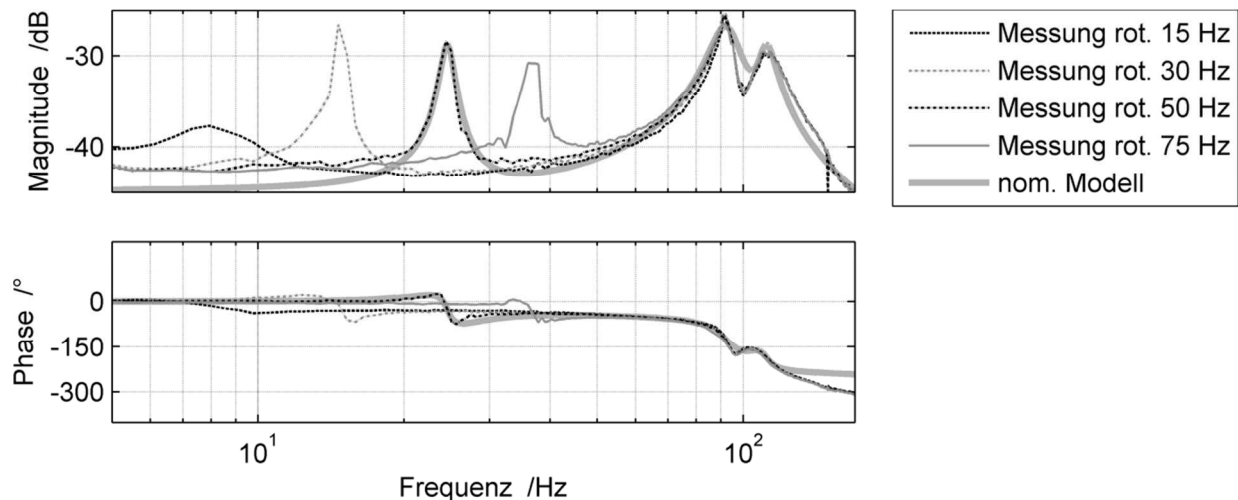


Abbildung 6.2: Experimentelle Frequenzgänge & Modell, $U_{\text{Aktor},y} \rightarrow q_y$ (*Oil Whirl*-Prüfstand)

Bei der Identifikation muss die Modellordnung begrenzt werden, so dass insbesondere die *Oil Whirl*-Mode in allen Übertragungspfaden des MIMO-Systems durch denselben Eigenwert repräsentiert wird. Die Ordnung des gezeigten, nominellen Modells beträgt acht. Modelle höherer Ordnungen erlauben geringere Abweichungen von Modell und Messung, jedoch werden für die *Oil Whirl*-Mode mehrere Eigenwerte für die einzelnen Übertragungspfade eingeführt. Für die Einführung modaler Unsicherheiten muss dies vermieden werden, da ansonsten Unsicherheiten für jeden dieser Eigenwerte definiert werden müssten. Dies erhöht die Ordnung der Unsicherheitsmatrix Δ . Es müsste zudem eine Struktur als wiederholte Unsicherheit eingestellt werden, vgl. Abschnitt 2.5.1. Ansonsten würden unterschiedliche Eigenfrequenzen und somit Eigenmoden in den einzelnen Übertragungspfaden des MIMO-Modells zugelassen.

Ab ca. 75 Hz Rotordrehfrequenz erreichen die Schwingungen der ersten Biegemode ein kritisches Level. Die Limitierungen der Aktorkraft verhindern eine effektive Schwingungsreduktion für diese Frequenzen, so dass der Betriebsbereich sowohl für das passive als auch für das aktive System auf 0 Hz bis 75 Hz beschränkt wird. Entsprechend ist der Frequenzbereich oberhalb von 75 Hz für die Performance nicht relevant, solange die Stabilität gewährleistet ist. Sollten die Biegemoden durch die Regelung destabilisiert werden, können oberhalb von 75 Hz zusätzliche Unsicherheiten eingeführt werden. Der für die Performance relevante Frequenzbereich wird dadurch kaum beeinflusst.

Die experimentell ermittelten Amplitudengänge zeigen für die x -Richtung eine Aufspaltung der Biegeeigenfrequenzen bei ca. 100 Hz, die durch eine theoretische Modellbildung in [133] nicht nachvollzogen werden konnte. Aufgrund der Richtungsabhängigkeit wird die Ursache den Lagerböcken bzw. dem Fundament zugeordnet.

Für das identifizierte Modell in Abbildung 6.1 fallen im Frequenzbereich unterhalb von ca. 8 Hz Abweichungen zur Messung auf. Diese können auch mit höherer Modellordnung nicht durch ein

lineares System abgebildet werden, so dass diese vermutlich auf Nichtlinearitäten im Kraft-Weg-Zusammenhang zurückzuführen sind. Um garantierte Robustheit für das Verhalten des Prüfstands zu erreichen, müssen die experimentell ermittelten Frequenzgänge vollständig im unsicheren Modell enthalten sein. Der Unsicherheitsbereich müsste mittels unstrukturierter Unsicherheiten im unteren Frequenzbereich erweitert werden, bis die Messungen abgedeckt sind.

Zur Berücksichtigung von Verzögerungen der digitalen Regelung wird dem Modell eine Totzeit mittels Padé-Approximation zweiter Ordnung hinzugefügt, vgl. Abschnitt 5.2. Sonstige Verzögerungsglieder wie Aktor-, Verstärker-, Sensor- oder Filterdynamiken sind durch die Identifikation bereits erfasst.

6.3 Unsicherheiten

Das Frequenzspektrum unwuchterregter Rotorschwingungen in Abbildung 4.7 zeigt das Auftreten von *Oil Whirl*-Schwingungen im (Rotor-)Drehfrequenzbereich ab ca. 50 Hz. In anderen Systemen treten *Oil Whirl*-Schwingungen jedoch bereits bei kleineren Drehzahlen auf. Um eine Übertragbarkeit auf Systeme mit *Oil Whirl*-Schwingungen im passiven Betrieb, d. h. ohne Wechselwirkung mit dem Aktor-Regelkreis, zu ermöglichen, soll die *Oil Whirl*-Mode daher für Rotordrehfrequenzen zwischen 25 Hz und 75 Hz unterdrückt werden. Der Unsicherheitsbereich für die *Oil Whirl*-Eigenfrequenz, die ca. der halben Rotordrehfrequenz entspricht, ist entsprechend von 12,5 Hz bis 37,5 Hz einzustellen. Der Eigenwert der *Oil Whirl*-Mode zeigt für das nominelle System eine Eigenfrequenz von 24,6 Hz und einen für mechanische Strukturen hohen Dämpfungsgrad von 0,031, vgl. z. B. Abbildung 6.2. Mit einer Unsicherheit von $\pm 55\%$ wird der *Oil Whirl*-Eigenfrequenz ein Bereich zwischen 11 Hz und 38 Hz zugewiesen, was Rotordrehfrequenzen von ca. 22 Hz bis 76 Hz entspricht.

Abbildung 6.3 zeigt die zugehörigen Unsicherheitsbereiche für das System bei Verwendung von verschiedenen modalen Unsicherheitsbeschreibungen. Die Ordinate des Diagramms ist um den Faktor 2π skaliert, so dass die (gedämpfte) Eigenfrequenz in Hz direkt abgelesen werden kann. Wie der rechte Teil der Abbildung zeigt, führen reelle Unsicherheiten zu linienförmigen Unsicherheitsbereichen, die den gewünschten Eigenfrequenzbereich bei konstantem Dämpfungsgrad ohne Konservativität abbilden. Die Vereinfachung („Linearisierung“) der Unsicherheitsbeschreibung durch Vernachlässigung des Terms $-\omega_i^2 \delta_i^2$ entsprechend Gleichung (2.15) führt zu deutlichen Abweichungen vom gewünschten Unsicherheitsbereich. Die Vereinfachung führt insbesondere zu einer unerwünschten Erweiterung des Unsicherheitsbereiches unterhalb von 10 Hz.

Komplexe Unsicherheiten erweitern den Unsicherheitsbereich zu einer Scheibe, die weit in die rechte, instabile Halbebene überlappt. Üblicherweise wird das Überlappen verhindert, indem der nominelle Pol um ein Offset nach links verschoben wird, Abschnitt 2.6.3. Um den geforderten Unsicherheitsbereich beizubehalten muss der Unsicherheitsbetrag dabei vergrößert werden, für den Pol des *Oil Whip*-Prüfstands z. B. von 5% auf 5,4%. Für die hier untersuchten, deutlich größeren Eigenfrequenzabweichungen müsste der Unsicherheitsbetrag um ca. das Zehnfache vergrößert werden, so dass enorme Konservativität entsteht. In Abbildung 6.3 ist daher nur ein kleiner Ausschnitt des Bereiches enthalten.

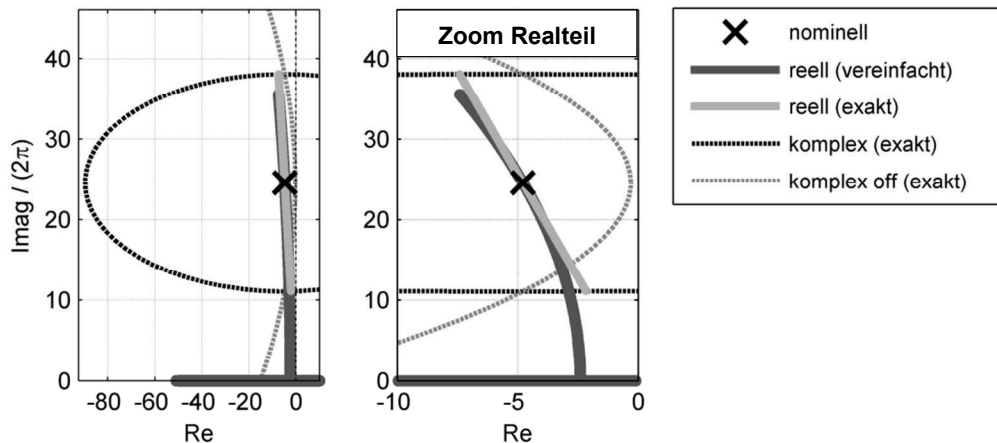


Abbildung 6.3: Modale Unsicherheitsbereiche (*Oil Whirl*-Prüfstand)

Die modalen Unsicherheitsbeschreibungen führen entsprechend zu unterschiedlichen Übertragungsverhalten für das unsichere Modell. Da die Unsicherheitsbereiche sehr groß sind, werden die Bereiche im Folgenden mit Linien für die maximale und minimale Amplitude gekennzeichnet. In Abbildung 6.4 werden vereinfachte und exakte Beschreibungen von reellen modalen Unsicherheiten verglichen. Die exakte, reelle Beschreibung stellt den nicht-konservativen Fall dar. Die Vereinfachung der Unsicherheit vergrößert den Unsicherheitsbereich unterhalb von ca. 10 Hz deutlich, was die Betrachtung der Pollagen in Abbildung 6.3 (rechts) bestätigt. Der so vergrößerte Unsicherheitsbereich ist kritisch für den späteren Reglerentwurf.

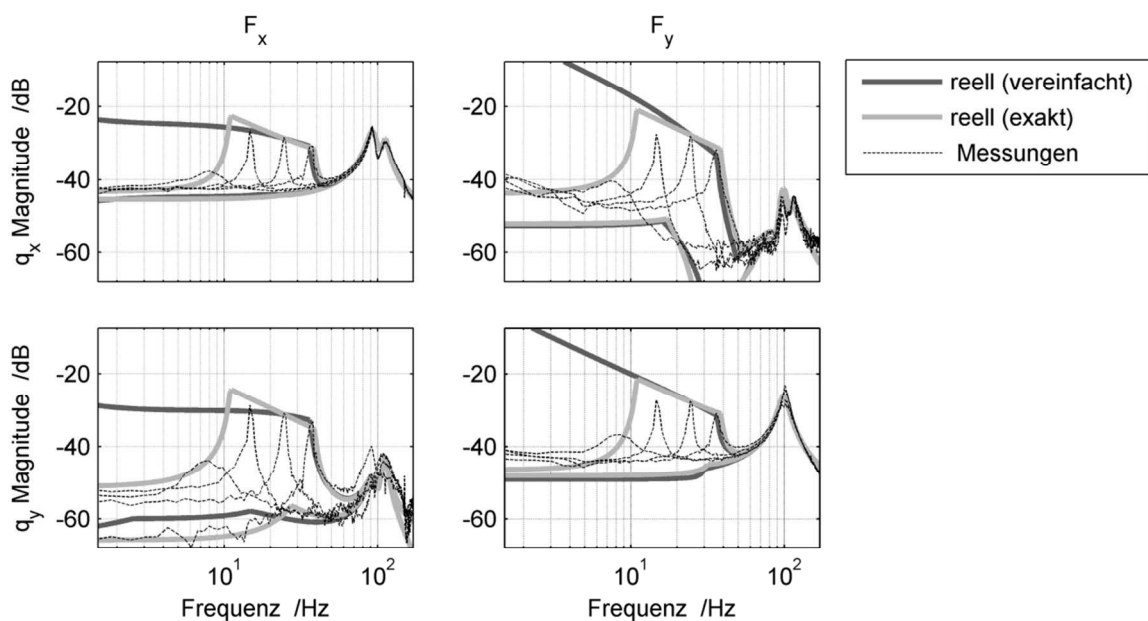


Abbildung 6.4: Amplitudengänge für vereinfachte & exakte Unsicherheiten (*Oil Whirl*-Prüfstand)

In Abbildung 6.5 werden die unsicheren Übertragungsfunktionen für komplexe, offset-freie und für reelle Beschreibungen von exakten modalen Unsicherheiten verglichen. Außerhalb des Unsicherheitsbereiches zwischen 12,5 Hz und 37,5 Hz sind die Amplitudengänge annähernd identisch. Im Bereich der *Oil Whirl*-Moden liegen jedoch deutliche Unterschiede vor. Bei reeller Unsicherheitsdefinition ist der Dämpfungsgrad konstant, da die Eigenwerte auf einer Ursprungsgrade in der kom-

plexen Ebene liegen, vgl. Abbildung 6.3. Die komplexe Beschreibung erweitert den Unsicherheitsbereich um komplexe Werte, so dass die Dämpfung stark variiert und auch negativ werden kann. Demzufolge ist die Resonanzamplitude für die komplexen modalen Unsicherheiten ohne Offset nicht beschränkt.

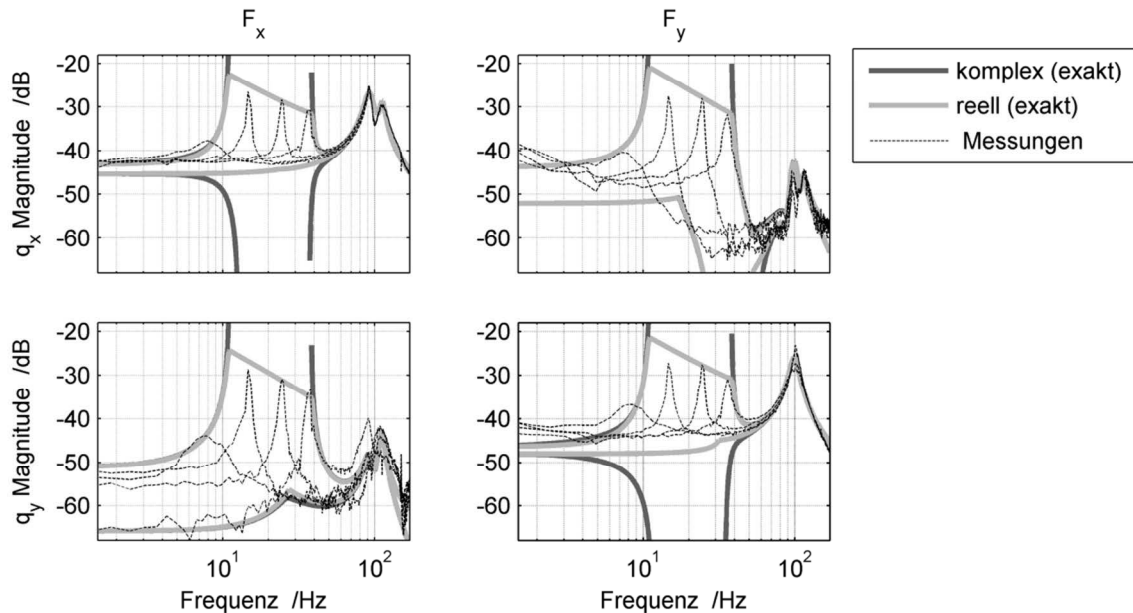


Abbildung 6.5: Amplitudengänge für komplexe & reelle Unsicherheiten (*Oil Whirl*-Prüfstand)

Für komplexe modale Unsicherheiten mit Offset sind die Unsicherheitsbereiche derart groß, dass die unsicheren Übertragungsfunktionen nicht dargestellt werden. Untersuchungen zeigen, dass für die großen Unsicherheitsbereiche bei der komplexen Beschreibung mit Offset sowie bei vereinfachter Beschreibung (Abbildung 6.4) eine Synthese unmöglich ist.

Für die exakten, komplexen Unsicherheiten ohne Offset wird der Unsicherheitsbereich ebenfalls erweitert, vgl. Abbildung 6.5. Jedoch zeigen Untersuchungen, dass die Synthese für dieses System gute Ergebnisse erreicht. Offensichtlich ist die Erweiterung um veränderliche Dämpfungsgrade hier unerheblich. Im Folgenden werden daher ausschließlich die erfolgreichen Synthesen mit exakten, reellen sowie exakten, komplexen Beschreibungen ohne Offset untersucht. Die exakte, reelle Beschreibung ermöglicht eine Synthese ohne Konservativität, erfordert jedoch eine Lösung mit der aufwendigen (D,G)K- bzw. μK -Iteration. Die exakte, komplexe Beschreibung (ohne Offset) vergrößert den Unsicherheitsbereich, ermöglicht jedoch die Synthese mit der bewährten DK -Iteration.

Zur Vermeidung von *Spillover*-Effekten werden additive, unstrukturierte Unsicherheiten eingefügt. Der Einfluss auf das Übertragungsverhalten ist erst ab ca. 200 Hz signifikant und daher nicht in der gezeigten Abbildung erkennbar. Die Auswirkungen stimmen qualitativ mit denen der in Kapitel 5 verwendeten additiven Unsicherheit überein, vgl. Abbildung 5.3. Auf die Einführung von zusätzlichen unstrukturierten Unsicherheiten für die Frequenzbereiche unterhalb von 8 Hz sowie oberhalb von 75 Hz wird verzichtet, auch wenn so nicht alle Messungen durch das unsichere Modell abgedeckt werden. So werden der modalen Unsicherheit für die *Oil Whirl*-Mode im relevanten Frequenzbereich keine Einflüsse von zusätzlichen Unsicherheiten überlagert und die Ergebnisse der folgenden Reglerentwürfe ermöglichen einen unverfälschten Vergleich der unterschiedlichen modalen Unsicherheitsbeschreibungen. Wie die Validierung in Abschnitt 6.7 zeigt, sind diese Frequenzbereiche für den Entwurf unkritisch.

6.4 Performance-Vorgaben

Die primäre Performance-Anforderung ist eine Reduktion von *Oil Whirl*-Schwingungen für Rotordrehfrequenzen zwischen ca. 25 Hz und 75 Hz. Um dies zu erreichen, wird die Störübertragung im relevanten Frequenzbereich zwischen 12,5 Hz und 37,5 Hz stark begrenzt. In realen Anwendungen sollte zudem eine Reduktion synchroner Unwuchtschwingungen vorgenommen werden. Dazu ist die Störübertragung zusätzlich im Frequenzbereich zwischen 37,5 Hz und 75 Hz zu begrenzen. Am untersuchten Prüfstand ist dies unmöglich, da die erreichbare Aktorkraft zu gering ist und auf eine Reduktion der Biegeresonanz verzichtet werden muss. Für größer dimensionierte Aktoren kann die Methodik leicht angepasst werden, indem die Begrenzung der Störübertragung auch die Amplituden der Biegemode reduziert. Diese Mode verändert sich mit der Drehzahl nur geringfügig, so dass die Reduktion bei ausreichender Aktorkraft entsprechend dem in Kapitel 5 gezeigten Entwurf keine neue Herausforderung darstellt.

Für die geforderte Begrenzung der Störübertragungsfunktionen \mathbf{GS} werden die Störungen \mathbf{d} und die Regelabweichungen \mathbf{e} als Performancekanäle eingeführt. Da die Aktorstellgröße für das untersuchte System begrenzt ist, werden analog zum Vorgehen in Abschnitt 5.4 zusätzlich die Führungsgrößen \mathbf{r} und die Stellgrößen \mathbf{u} hinzugefügt. Die Performance-Eingänge sind somit $\mathbf{w} = [\mathbf{r} \ \mathbf{d}]'$ und die Performance-Ausgänge $\mathbf{z} = [\mathbf{e} \ \mathbf{u}]'$. Da hier ein MIMO-System behandelt wird, ergeben sich für die beteiligten Übertragungsfunktionen \mathbf{GS} , \mathbf{CS} , \mathbf{S} und \mathbf{T}_i jeweils 2×2 Systeme.

Schwingungen in x - und y -Richtung sind gleichermaßen zu reduzieren, so dass identische Begrenzungen für alle Übertragungspfade der Störübertragungen \mathbf{GS} verwendet werden. Als Referenz für die Wahl der Begrenzungsfunktionen werden in Kapitel 5 die Übertragungsfunktionen bei Verwendung eines PID-Reglers ermittelt. Dies ist hier nicht möglich, da kein PID-Regler mit einem Mindestmaß an Performance und Robustheit für den Prüfstand gefunden werden konnte. Daher wird die Einstellung der Begrenzungsfunktionen für die Störübertragungen direkt aus detaillierten Beschreibungen der Performance-Anforderungen für verschiedene Frequenzbereiche abgeleitet:

- (1) Unterhalb von 10 Hz ist keine Performance-Anforderung zu erfüllen, die Begrenzungen werden oberhalb der gemessenen Übertragungsfunktionen eingestellt
- (2) Starke Reduktion der *Oil Whirl*-Amplituden zwischen 12,5 Hz und 37,5 Hz, um die *Oil Whirl*-Moden zu unterdrücken
- (3) Zwischen 37,5 Hz und 75 Hz sollen üblicherweise synchrone Schwingungen reduziert werden, was hier aufgrund starker Stellgrößenbeschränkungen nicht möglich ist; daher wird eine Begrenzung entlang der gemessenen Übertragungen gewählt, um zumindest keine Verschlechterung zuzulassen.
- (4) Oberhalb von 75 Hz ist keine Reduktion der Störübertragungen notwendig, da keine Erregung erwartet wird

So werden erste Einstellungen für die Begrenzung der Störübertragungen \mathbf{GS} gefunden. Um einen Referenz-Regler zur Ableitung der übrigen Begrenzungen zu erhalten, wird zunächst eine Synthese ohne die Begrenzung der Stellübertragungen \mathbf{CS} und der inversen Eingangsempfindlichkeitsfunktionen \mathbf{T}_i durchgeführt, d. h. die Performancekanäle \mathbf{u} und \mathbf{r} werden entfernt. Anschließend werden diese wieder hinzugefügt und mit dem Referenz-Regler ein Regelkreis geschlossen, dessen Übertragungsfunktionen als Anhaltspunkt für die Wahl der übrigen Begrenzungen verwendet werden können. Die Begrenzungen für die Stellübertragungen \mathbf{CS} und die inversen Eingangs-

empfindlichkeitsfunktionen T_i werden nun iterativ eingestellt, bis eine Implementierung am Prüfstand möglich ist. Dann wird eine iterative Optimierung der Performance-Einstellungen entsprechend der Vorgehensweise aus Abschnitt 5.6 durchgeführt. Die finalen Einstellungen der Begrenzung von **GS** sind in Abbildung 6.6 dargestellt.

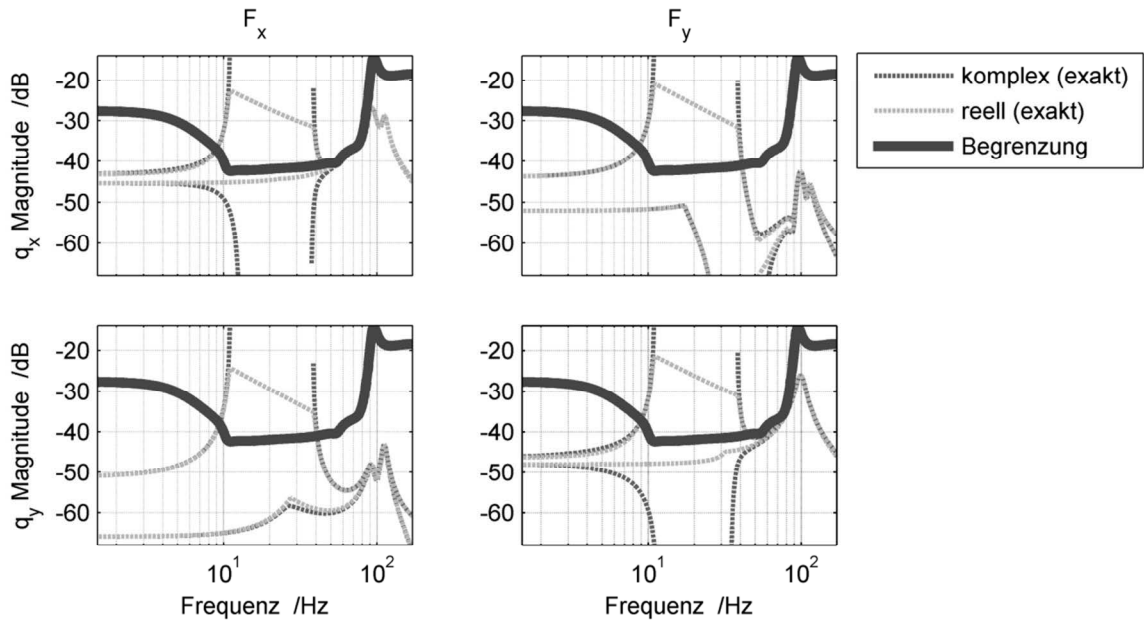


Abbildung 6.6: Begrenzung der Störübertragungen **GS** (*Oil Whirl*-Prüfstand)

Aus den Begrenzungen werden die Gewichtungen der Performancekanäle entsprechend Gleichung (2.11) berechnet, um das Synthesystem **P** zu vervollständigen (Abbildung 2.8).

6.5 Synthese

Das Synthesystem **P** wird für komplexe Unsicherheiten mittels *DK-Iteration* bzw. für gemischt komplex-reelle Unsicherheiten mittels μK -Iteration gelöst. Die Einstellungen für die *DK-Iteration* werden analog zum Vorgehen in Abschnitt 5.5 ermittelt. Für das vorliegende System wurden 10000 Frequenzstützstellen zwischen 0 Hz und 600 Hz und eine maximale Ordnung für die Fits der Scales D_{fit} von 14 verwendet. Die relative hohe Fitordnung ist notwendig, da die punktwweisen Verläufe D_ω sich über der Frequenz stark verändern. Die Synthese für reelle modale Unsicherheiten wird mit einer optimierten Version der μK -Iteration durchgeführt, die auf der Implementierung von Sehr [104] basiert. Für eine Synthese mittels der $(D,G)K$ -Iteration aus der MATLAB Robust Control Toolbox liegen keine Ergebnisse vor, da diese aufgrund von Problemen beim Fitten der G_{fit} -Scales fehlschlägt.

Trotz geringerer Konservativität durch die reelle Unsicherheitsbeschreibung erzielt die μK -Iteration für das untersuchte System keine besseren Ergebnisse als die deutlich einfachere *DK-Iteration* für komplexe, offset-freie modale Unsicherheiten. Für dieses System empfiehlt sich somit die Anwendung der *DK-Iteration*, da diese weniger anfällig für numerische Probleme ist, weniger Berechnungsaufwand erfordert und zudem kommerziell verfügbar ist. Für den Reglerentwurf für Rotoren

mit starkem gyroskopischem Effekt in Kapitel 7 liefert die Synthese mit reellen Unsicherheiten unter Verwendung der μK -Iteration deutlich bessere Ergebnisse als die komplexe Synthese. Dort wird die Implementierung des Algorithmus sowie der vorgenommenen Optimierungen detailliert beschrieben, s. Abschnitt 7.4. Es sei angemerkt, dass die in Kapitel 7 erwähnten Ungenauigkeiten in der Berechnung der μ_ω -Verläufe für gemischt komplex-reelle Unsicherheiten hier nicht auftreten. Dies ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass die reellen modalen Unsicherheiten und der komplexe Performance-Block im selben Frequenzbereich wirken. Wie von Young et al. [102] beschrieben, ist die Berechnungsgenauigkeit für μ_ω in solchen Fällen sehr hoch.

Zur Bewertung der Ergebnisse ist die Ursache für die Ähnlichkeit der Ergebnisse für komplexe und reelle modale Unsicherheiten zu untersuchen. Die DK -Iteration hat in zahlreichen Anwendungen sehr gute Konvergenzeigenschaften gezeigt. Es wird daher angenommen, dass die komplexe Synthese das globale Optimum für komplexe Unsicherheiten findet. Die μK -Iteration ist numerisch anfälliger und wurde bisher kaum erfolgreich verwendet. Daher ist zu prüfen, ob die Synthese mit reellen Unsicherheiten tatsächlich das Optimum für reelle Unsicherheiten findet. Konvergenz- und Genauigkeitsprobleme der μK -Iteration durch mangelhafte Fits der Filter $\gamma_{\mu, \text{fit}}$ oder ungenaue μ_ω -Berechnungen sind unwahrscheinlich, da die punktwisen Verläufe $\gamma_{\mu, \omega}$ glatt sind und kaum Abweichungen zu $\gamma_{\mu, \text{fit}}$ aufweisen. Ein Hängenbleiben der μK -Iteration in einem lokalen Optimum erscheint ebenfalls unwahrscheinlich, da umfangreiche Variationen der Syntheseparameter und Startregler stets zu ähnlichen Ergebnissen führen. Es wird daher angenommen, dass beide Iterationen das Optimum für die jeweiligen Unsicherheiten zumindest annähernd finden. Dies bedeutet, dass die Optima für reelle und komplexe modale Unsicherheiten hier sehr ähnlich sind. Ein Vergleich von komplexen und reellen SSV -Werten weist auf die Gültigkeit dieser Annahme hin. Dazu werden die maximalen SSV -Werte für den geschlossenen Regelkreis aus DK -Regler und dem Synthesystem \mathbf{P} mit reellen modalen Unsicherheiten berechnet. Es zeigt sich, dass dieser reelle SSV und der komplexe SSV annähernd gleich sind (1,20 und 1,25). Dies bestätigt, dass die Erweiterung des Unsicherheitsbereiches um komplexe Werte in diesem Fall nicht zu Konservativität führt. Es ist daher wahrscheinlich, dass dies auch für ähnliche Systeme zutrifft und die DK -Iteration im Allgemeinen gut für die Beschreibung von großen modalen Unsicherheiten von *Oil Whirl*-Moden geeignet ist. Die Gültigkeit dieser Hypothese sollte in zukünftigen Untersuchungen überprüft werden.

6.6 Iterative Optimierung und Syntheseergebnisse

Ausgangspunkt für die iterative Optimierung der Performance-Einstellungen ist eine erste Synthese, in der ausschließlich die Störübertragungsfunktionen \mathbf{GS} begrenzt werden, vgl. Abschnitt 6.4. Die Einstellungen für die Begrenzungsfunktionen wurden dazu direkt aus den Performance-Anforderungen abgeleitet. Zur Berücksichtigung der limitierten Aktorkraft werden anschließend zusätzlich die inversen Eingangsempfindlichkeitsübertragungen \mathbf{T}_i für Frequenzen im Bereich der maximalen Rotordrehfrequenz stark begrenzt. Zudem werden für die Stellübertragungsfunktionen \mathbf{CS} relativ „lockere“ Begrenzungen eingestellt. Zur Analyse dieser Entwürfe mit reellen bzw. komplexen Unsicherheiten werden die μ_ω -Verläufe sowie die Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises betrachtet.

Um einen Vergleich von DK - und μK -Regler zu ermöglichen, wird für den DK -Regler nachträglich der μ_ω -Verlauf für das Synthesystem \mathbf{P} mit reellen Unsicherheiten berechnet. Der angestrebte, flache μ_ω -Verlauf wie in Abbildung 5.5 kann hier nicht erreicht werden. Die μ_ω -Verläufe für DK - und μK -Regler in Abbildung 6.7 erreichen nach der iterativen Optimierung der Performance- und Syntheseinstellungen den angestrebten Verlauf nur annähernd. Dies ist vermutlich auf die sehr großen, modalen Unsicherheiten von $\pm 55\%$ zurückzuführen.

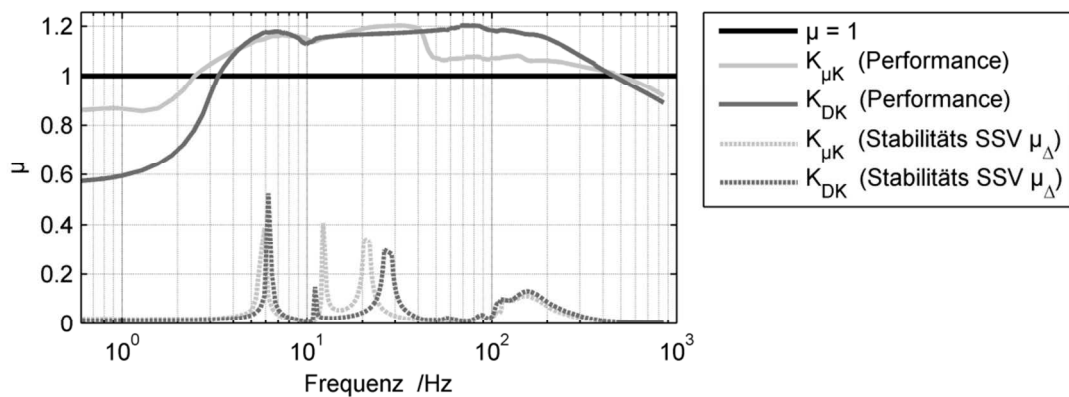


Abbildung 6.7: μ_ω -Verläufe für DK - und μK -Regelkreis (*Oil Whirl*-Prüfstand)

Um den annähernd glatten μ_ω -Verlauf im Frequenzbereich zwischen 10 Hz und 50 Hz zu erreichen, ist eine präzise Einstellung der Begrenzungen für die Störübertragungen \mathbf{GS} erforderlich. Die Begrenzungsfunktion wurde dazu durch Fitten von manuell definierten Frequenzstützstellen ermittelt, wie in Abbildung 6.8 dargestellt.

Im Ziel-Frequenzbereich für die *Oil Whirl*-Unterdrückung zwischen 12,5 Hz und 75 Hz wird die Begrenzung durch viele Frequenzstützstellen filigran eingestellt. In den übrigen Bereichen werden nur wenige Punkte vorgegeben, um einen lockeren Verlauf bei minimaler Ordnung zu erreichen. Diese Einstellung der Begrenzung durch das Festlegen von Amplitudenwerten für bestimmte Frequenzpunkte fügt sich direkt in die iterative Optimierungsstrategie ein. Frequenzbereiche, die kritisch in Bezug auf die Begrenzung der Störübertragungen \mathbf{GS} sind, können direkt durch Anpassung bzw. Hinzufügen neuer Frequenzstützstellen beeinflusst werden.

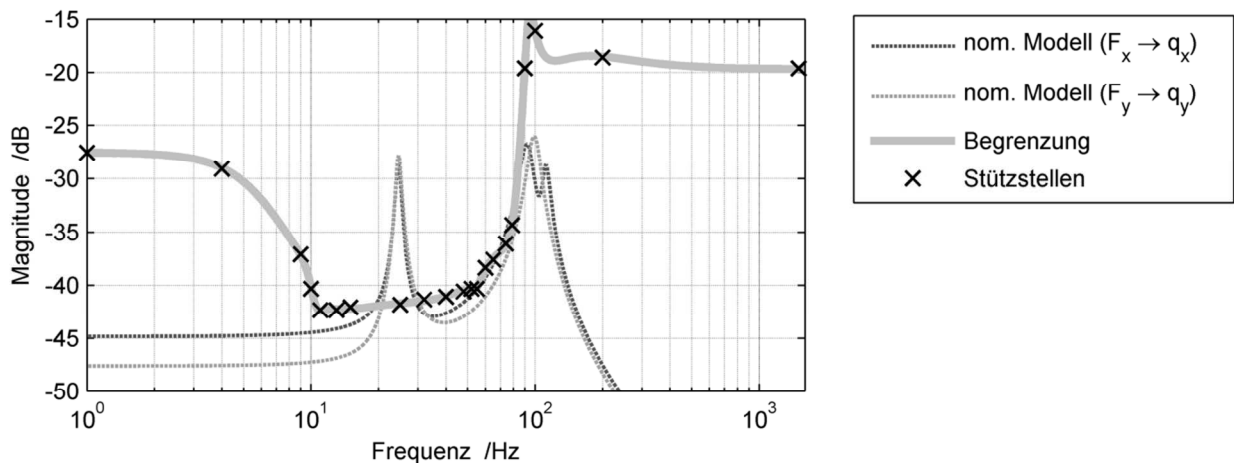


Abbildung 6.8: Fitten der Begrenzung für die Störübertragungen \mathbf{GS} (*Oil Whirl*-Prüfstand)

Die μ_ω -Verläufe für die finalen DK - und μK -Regler überschreiten beide den kritischen SSV -Wert von 1 (s. Abbildung 6.7). Der *Stabilitäts-SSV* $\mu_{\Delta,\omega}$ liegt für beide Regler deutlich unter 0,6, so dass dies auf die Verletzung der robusten Performance zurückzuführen ist. Die Analyse des geschlossenen Regelkreises zeigt, dass im Frequenzbereich der *Oil Whirl*-Moden die Begrenzung der Störübertragungen **GS** am kritischsten ist, vgl. Abbildung 6.9. Für den Frequenzbereich zwischen ca. 70Hz bis ca. 400Hz sind hingegen die inversen Eingangsempfindlichkeitsfunktionen T_i kritisch, vgl. Abbildung 6.10. Die nicht dargestellten Stellübertragungsfunktionen **CS** sind im gesamten betrachteten Frequenzbereich unkritisch. Da die Begrenzung von T_i unverzichtbar zur Einhaltung der maximalen Aktorkraft ist, wird zur interativen Optimierung der Entwurfseinstellungen exklusiv die Begrenzung der Störübertragungen **GS** angepasst. Die Definition dieser Funktion durch Fitten (Abbildung 6.8) ermöglicht dies in komfortabler Weise.

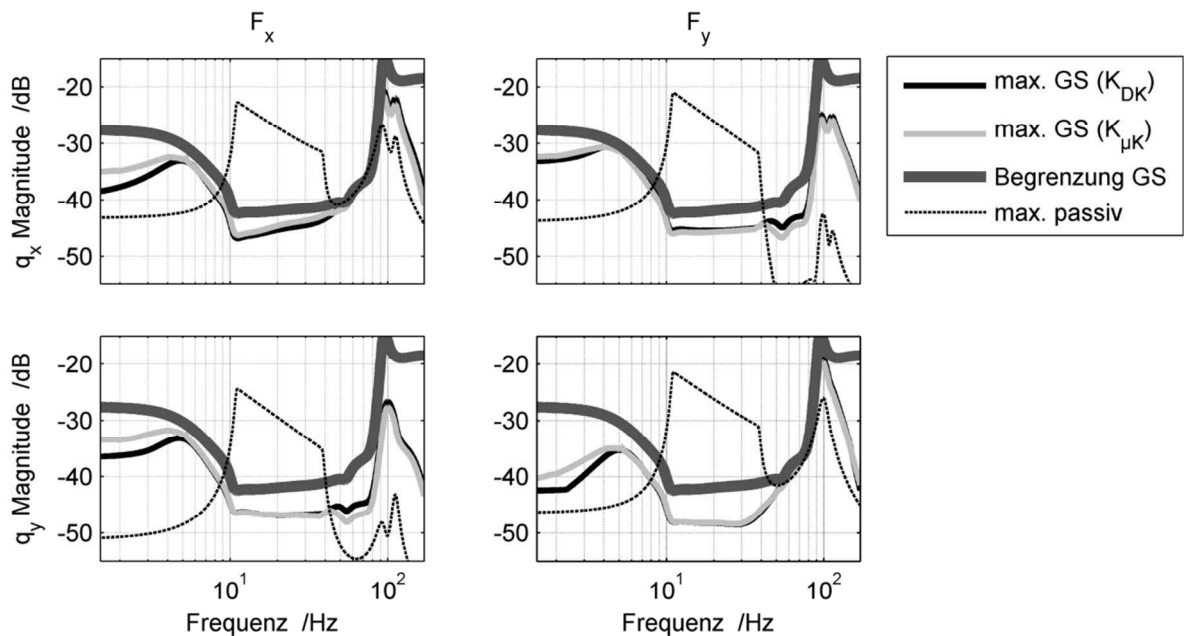


Abbildung 6.9: Maximale unsichere Störübertragungen **GS** (*Oil Whirl*-Prüfstand)

Beide μ_ω -Verläufe in Abbildung 6.7 weisen niedrige Werte bis ca. 3Hz auf, was mit den lockeren Begrenzungsfunktionen in diesem Bereich korrespondiert. Im Hauptzielbereich zwischen 12,5Hz und 37,5Hz liegen die μ_ω -Verläufe für beide Entwürfe zwischen 1,1 und 1,2. Um einen maximalen SSV -Wert kleiner 1 zu erhalten, müssten die Begrenzungen der Störübertragungen **GS** in diesem Bereich entsprechend angehoben werden. Wie Abbildung 6.9 zeigt, werden die Begrenzungen tatsächlich jedoch nicht überschritten. Daher sind die SSV -Werte auf die Kopplungen des unstrukturierten Performance-Blocks in Δ zurückzuführen, deren Konservativität die Beziehungen in Gleichung (2.11) zu Performance-Ungleichungen macht. Der Entwurf kann somit trotz der SSV -Werte von ca. 1,2 als erfolgreich angesehen werden, da robuste Stabilität sowie die Einhaltung der Performance-Begrenzungsfunktionen vollständig erfüllt sind.

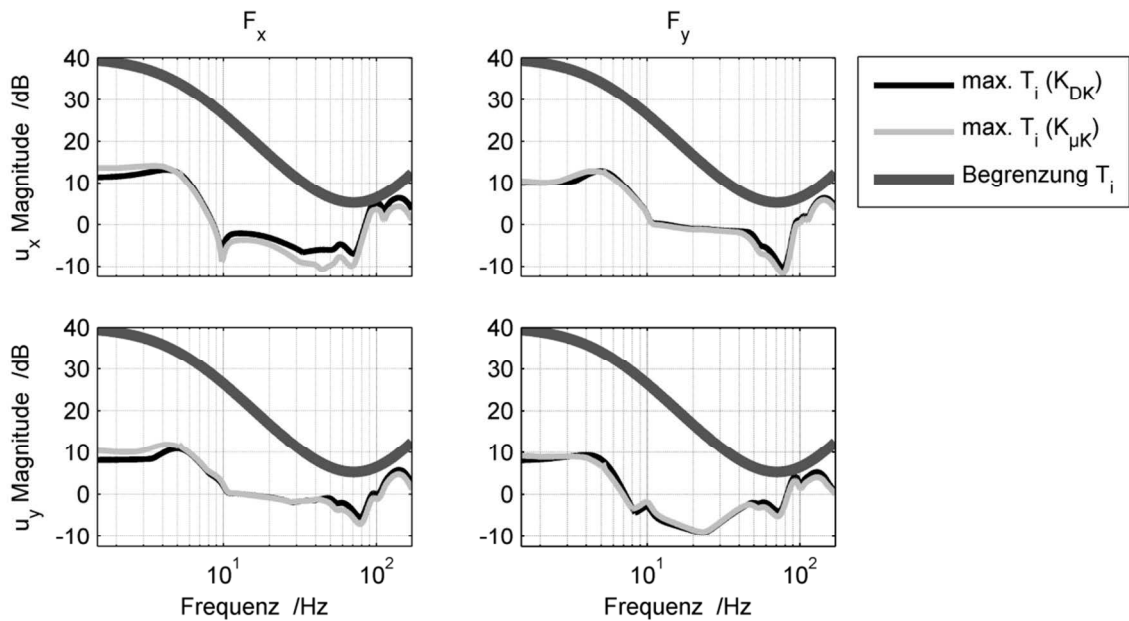


Abbildung 6.10: Maximale unsichere inv. Eingangsempfindlichkeiten \mathbf{T}_i (*Oil Whirl*-Prüfstand)

6.7 Validierung und Implementierung

Für den präsentierten Entwurf konnte aufgrund mangelnder Verfügbarkeit des Prüfstands keine Validierung durchgeführt werden. Es liegt jedoch eine experimentelle Überprüfung eines vorangegangenen Entwurfs mit kleineren modalen Unsicherheiten vor, der auf denselben Modellen basiert. Dieser zeigt die Gültigkeit des Modells und die Wirksamkeit der Reduktion der *Oil Whirl*-Mode zur Unterdrückung der zugehörigen Schwingungen.

Der validierte Entwurf ist ein *DK*-Regler für vereinfachte komplexe Eigenwert-Unsicherheiten mit Offset. Der Unsicherheitsbetrag für den Eigenwert beträgt $\pm 21\%$ der nominellen Eigenfrequenz, was zu einem Unsicherheitsbereich von 20 Hz bis 28 Hz für die *Oil Whirl*-Eigenfrequenz führt. Wird ein $SSV < 1$ erreicht, liegt somit robuste Stabilität und Performance für Rotordrehfrequenzen zwischen ca. 40 Hz bis 56 Hz vor. Durch die im Vergleich zum präsentierten Entwurf geringere modale Unsicherheit ist es gerade noch möglich, den Bereich des Pols in der komplexen Ebene vollständig in die linke Halbebene zu verschieben, ohne den Radius zu stark zu erhöhen. Der Entwurf führt somit trotz der Verwendung eines Offsets zu zufriedenstellenden Ergebnissen.

Wie Abbildung 6.11 zeigt, sind die Begrenzungen der Störübertragungen \mathbf{GS} ähnlich zum finalen Entwurf, vgl. Abbildung 6.9. Die Begrenzung der inversen Eingangsempfindlichkeitsfunktionen \mathbf{T}_i ist etwas flacher als zuvor in Abbildung 6.10, wobei die Amplitude für den kritischen Bereich zwischen 75 Hz und 100 Hz auf ähnlichem Niveau liegt.

Für das resultierende Synthesystem wurde ein Regler der Ordnung 26 mit der *DK-Iteration* berechnet. Eine Ordnungsreduktion ist für die eingestellte Abtastrate von 2,5 kHz nicht notwendig.

Abbildung 6.11 zeigt die experimentelle Validierung der Begrenzung der Störübertragungsfunktionen \mathbf{GS} . Die Validierung ist erfüllt, da die Amplitudengänge für den definierten Unsicherheitsbereich die Begrenzung einhalten. Diese schwarz dargestellten Verläufe sind für Rotordrehfrequenzen von 40 Hz und 50 Hz ermittelt worden und mit „ Ω robust“ gekennzeichnet. Der mit

„ Ω nicht robust“ bezeichnete, graue Verlauf wurde für eine Rotordrehfrequenz von 75 Hz aufgenommen und überschreitet die Begrenzungsfunktion. Die zugehörigen *Oil Whirl*-Moden haben eine Eigenfrequenz von ca. 37,5 Hz und sind somit nicht im eingestellten Unsicherheitsbereich enthalten. Diese Messungen bestätigen daher die Gültigkeit der unsicheren Modelle zur Beurteilung der robusten Stabilität und Performance.

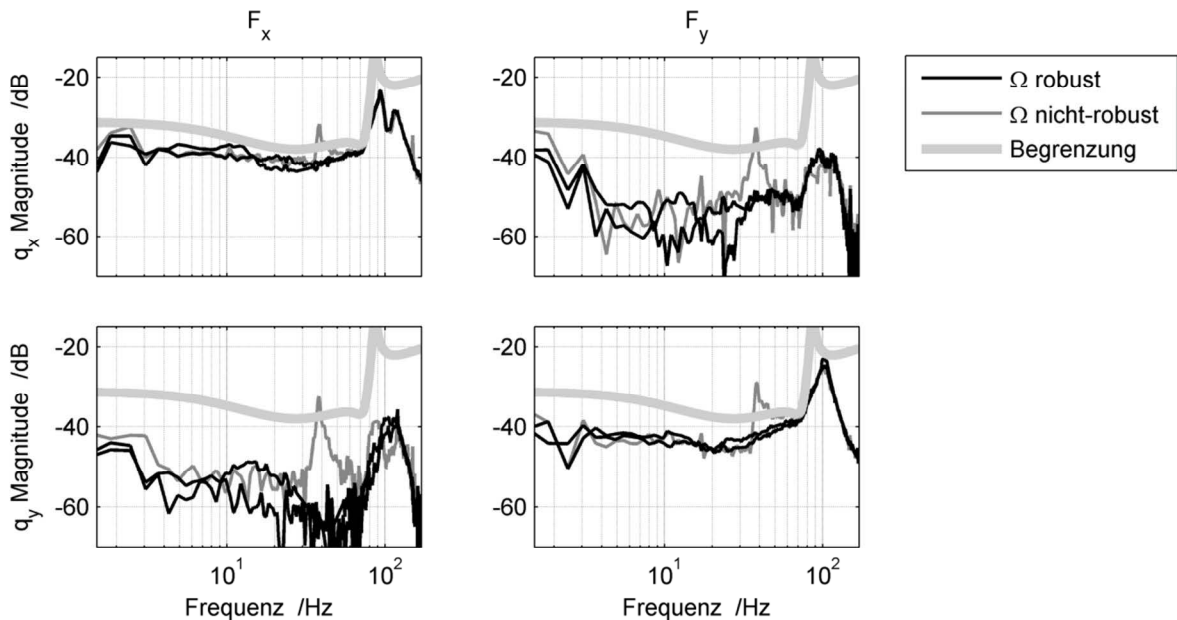


Abbildung 6.11: Validierung **GS** (*Oil Whirl*-Prüfstand)

Trotz des geringen Unsicherheitsbereiches erreicht der Regler robuste Stabilität für einen Rotordrehfrequenzbereich von 20 Hz bis 80 Hz. Daher wird ein Hochlauf für das geregelte System durchgeführt, um die Unterdrückung der *Oil Whirl*-Schwingungen zu überprüfen. Das Frequenzspektrum des geregelten Systems in Abbildung 6.12 zeigt, dass die subharmonischen *Oil Whirl*-Schwingungen des unregulierten Systems (Abbildung 4.7) durch die Regelung vollständig unterdrückt werden. Die Resonanzamplitude der synchronen Biegeschwingungen ist dabei höher als für das passive System. Für deren Reduktion müssen im Entwurf die Amplituden der Biegemode zusätzlich begrenzt werden, was für das vorliegende System aufgrund der beschränkten Aktorkraft unmöglich ist.

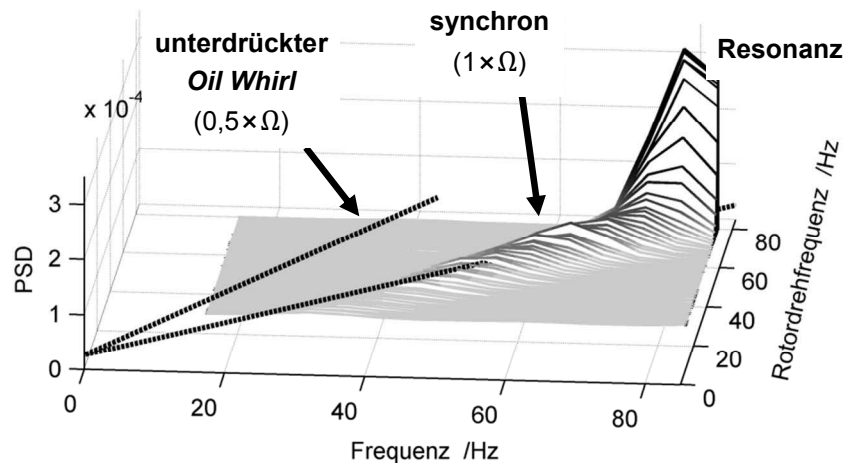


Abbildung 6.12: Gemessene Hochlauf-PSD, Scheibenschwingungen, vertikal mit μ -Regelung (*Oil Whirl*-Prüfstand)

Anhand des Hochlaufs wird somit die Möglichkeit zur Unterdrückung der *Oil Whirl*-Schwingungen durch Begrenzung der zugehörigen *Oil Whirl*-Mode bestätigt.

6.8 Diskussion der Ergebnisse

Oil Whirl-Schwingungen hydrodynamisch gelagerter Rotoren werden durch Eigenmoden verursacht, deren Eigenfrequenzen stets bei ca. der halben Rotordrehzahl liegen. Die *Oil Whirl*-Schwingungen können durch eine Regelung zur Unterdrückung der Resonanzamplituden für die zugehörigen Mode unterdrückt werden.

Beim robusten Reglerentwurf stellt die Veränderung der *Oil Whirl*-Eigenfrequenz eine besondere Robustheitsanforderung dar. Dies kann durch modale Unsicherheiten beschrieben werden, da sich die zugehörige Eigenform der veränderlichen Mode nur geringfügig ändert. Die für geringere Unsicherheitsbeträge verwendeten, vereinfachten modalen Unsicherheiten sind hier ungeeignet und es muss die exakte Beschreibung verwendet werden. Weiterhin sollte der üblicherweise verwendete Offset zur Vermeidung einer Überlappung des Unsicherheitsbereiches mit der instabilen komplexen Halbebene vermieden werden. Dann werden Ergebnisse erreicht, die mit denen einer aufwendigen, konservativitätsfreien Synthese mit reellen modalen Unsicherheiten annähernd übereinstimmen. Es wird daher angenommen, dass dieser Regler sehr nahe am theoretischen Optimum liegt.

Es ist anzumerken, dass der *Oil Whirl* am untersuchten Prüfstand an der Sensorposition erst durch Wechselwirkung mit dem Kraftregelkreis des Aktors in Erscheinung tritt. Simulationen für den untersuchten Prüfstand in [133] zeigen jedoch, dass bei sehr kleinen Unwuchtbeträgen die hier vorliegende Ausprägung des *Oil Whirl* auftritt. Da die Übertragungsfunktionen dann dieselbe Pol-Nullstellencharakteristik wie das identifizierte Modell aufweisen, wird auf eine Übertragbarkeit für ähnliche Systeme geschlossen. Dies ist in zukünftigen Untersuchungen zu verifizieren.

7 Entwurf mit gyroskopischem Effekt

Dieses Kapitel zeigt eine Methodik zum robusten Reglerentwurf für einen elastischen Rotor mit starkem gyroskopischem Effekt unter Verwendung von direkten, reellen Unsicherheiten. Dieser Entwurf überwindet erstmals die Konservativität üblicher Synthesen mit komplexen Unsicherheiten, die die erreichbare Robustheit üblicherweise so stark eingeschränkt, dass meist kein Regler für den gesamten Drehfrequenzbereich gefunden werden kann.

In den zugehörigen Veröffentlichungen wurden bereits erste Ergebnisse der Synthese beschrieben [116], [117]. Hier werden insbesondere die Modellierung und Reduktion des nominellen Systems und der Unsicherheitsstruktur sowie eine modale Skalierung der Performance-Ausgänge genauer dargestellt. Weiterhin wurden die Syntheseinstellungen verbessert, so dass hier ein *SSV*-Wert unter der kritischen Grenze von 1 erreicht wird.

7.1 Systemanalyse und Vorgehensweise

Im Allgemeinen hat der gyroskopische Effekt Auswirkungen auf alle Eigenmoden eines Rotorsystems, wie Abbildung 4.13 für die ersten vier Moden des untersuchten Prüfstands zeigt. Diese sehr spezifische Systemveränderung, die alle Frequenzbereiche in unterschiedlicher Weise beeinflusst, kann nicht durch indirekte Unsicherheitsbeschreibungen geeignet abgebildet werden. Es müssten modale Unsicherheiten für alle relevanten Eigenmoden als wiederholte Unsicherheiten definiert werden. Darin müsste eingestellt werden, dass die Eigenfrequenzen von Gleichlaufmoden mit der Drehzahl ansteigen und die Eigenfrequenzen von Gegenlaufmoden sinken. Zudem bewirkt die Gyroskopie Veränderungen der Eigenformen, was nicht mit modalen Unsicherheiten abgebildet werden kann. Daher wird der gyroskopische Term $\Omega \mathbf{G}_\Omega \dot{\mathbf{q}}$ als direkte Unsicherheit eingeführt, so dass die Systemveränderungen exakt beschrieben werden. In der verfügbaren Literatur werden für den physikalisch rein reellwertigen gyroskopischen Term üblicherweise komplexe Unsicherheiten verwendet, vgl. Abschnitt 3.1. Allein zwei der relevanten Veröffentlichungen berichten von Versuchen des Einsatzes reeller Unsicherheiten [37], [129]. Diese Synthesen scheitern jedoch aufgrund von unüberwindbaren Problemen im Lösungsalgorithmus, so dass letztendlich auch dort komplexe Unsicherheiten eingesetzt werden mussten. Die Konservativität durch Erweiterung des Unsicherheitsbereiches um komplexe Werte schränkt die erreichbare Robustheit stark ein und es müssen meist mehrere Regler für Teile des Betriebsdrehzahlbereiches verwendet werden. Darin unterscheidet sich die gyroskopische Unsicherheit von der in Kapitel 6 betrachteten modalen Unsicherheit. Dort führen die Synthesen mit komplexen und reellen modalen Unsicherheiten zu annähernd identischen Ergebnissen. Für die gyroskopischen Unsicherheiten treten hingegen große Unterschiede auf.

Zur Verwendung von direkten Unsicherheiten ist eine theoretische Modellbildung erforderlich. Die Verwendung der FE-Methode führt dabei zu hohen Ordnungen des nominellen Modells und der

Unsicherheitsstruktur. Um das nominelle Modell zu reduzieren wird ein modales Reduktionsverfahren verwendet, wobei ein drehzahlabhängiger Abschneidefehler zu beachten ist. Zur Reduktion der Unsicherheitsstruktur wird der gyroskopische Term analytisch modelliert und mit dem reduzierten nominellen Modell verknüpft.

Zur Unterdrückung unwuchterregter Schwingungen ist eine Begrenzung der Gleichlaufresonanzamplituden ausreichend. Übliche Ansätze reduzieren zusätzlich auch die Gegenlaufamplituden, was zu Konservativität führt. Um dies zu vermeiden, wird eine modale Skalierung zur Unterdrückung der Gegenlauf-Einflüsse in den Performance-Ausgängen verwendet. Zur Lösung des resultierenden Synthesystems wird eine optimierte Implementierung der μK -Iteration vorgestellt.

Die wichtigsten Schritte für den Entwurf sind:

- Modellierung und Reduktion des nominellen Systems
- Reduktion der Unsicherheitsstruktur für die Gyroskopie
- Modale Skalierung der Gegenläufe in den Performancekanälen
- Einstellung geeigneter Performance-Begrenzungsfunktionen
- Implementierung und Optimierung der μK -Iteration zur Lösung der Synthese
- Einstellung der Syntheseparameter
- Iterative Optimierung der Performance- und Syntheseinstellungen
- Validierung

7.2 Modellbildung und Unsicherheiten

Um die gyroskopische Unsicherheit $\Omega \mathbf{G}_\Omega$ mit dem Modell zu verknüpfen, werden als Unsicherheits-Ausgänge die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ sowie als Unsicherheits-Eingänge die gyroskopischen Momente \mathbf{M}_G verwendet. Die gyroskopischen Unsicherheiten ergeben sich somit direkt aus der Modellierung des Systems durch die Gyroskopiematrix \mathbf{G}_Ω . Ein validiertes, drehzahlabhängiges Modell führt so direkt zu einer präzisen Unsicherheitsbeschreibung. Abbildung 7.1 zeigt den Aufbau des gewichteten, unsicheren Synthesystems \mathbf{P} . Der gyroskopische Term $\Omega \mathbf{G}_\Omega \dot{\mathbf{q}}$ wird durch die *upper LFT* der Unsicherheit $-\Omega \mathbf{G}_\Omega$ symbolisiert, die aus dem unsicheren Parameter für die Rotordreh(kreis)-Frequenz Ω und der Gyroskopiematrix \mathbf{G}_Ω für 1 rad/s besteht. Die gyroskopischen Momente \mathbf{M}_G werden dabei ausschließlich von den Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}_\varphi$ der Modell-Elemente verursacht, vgl. Abschnitt 2.1.1. In FE-Modellen werden diese Freiheitsgrade üblicherweise für alle Elemente explizit eingeführt, so dass die translatorischen Geschwindigkeiten in der *LFT* des gyroskopischen Terms vernachlässigt werden können.

Zur Vermeidung von *Spillover*-Effekten durch Destabilisierung oder Verstärkung nicht modellierter Moden oberhalb der Systembandbreite werden zusätzlich unstrukturierte, additive Unsicherheiten Δ_a eingeführt.

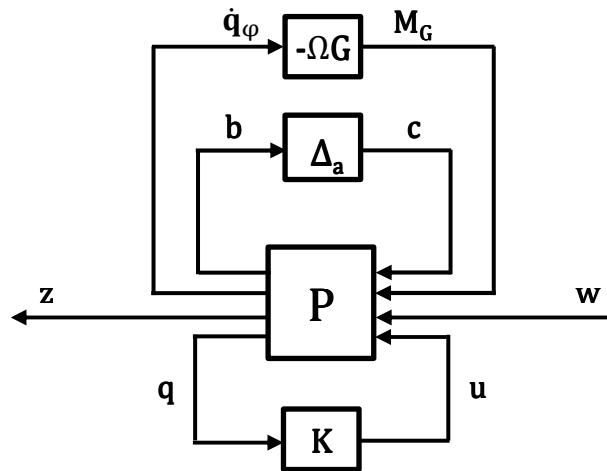


Abbildung 7.1: Aufbau Synthesystem (Gyroskopie-Prüfstand)

Ein mittels ROTORBUILD, einer FE-Toolbox zur Rotormodellierung in MATLAB [144], erstelltes Rotormodell weist zunächst 140 Freiheitsgrade auf (Abbildung 7.2, links). Die gestrichelten Linien zeigen die Eigenformen der ersten und zweiten Gleich-/Gegenläufe im Stillstand. Für die aktive Lagerung (Abbildung 7.2, rechts) wird ein Modell der Piezoaktoren in *Dehnungs-Ladung-Form* [145] verwendet.

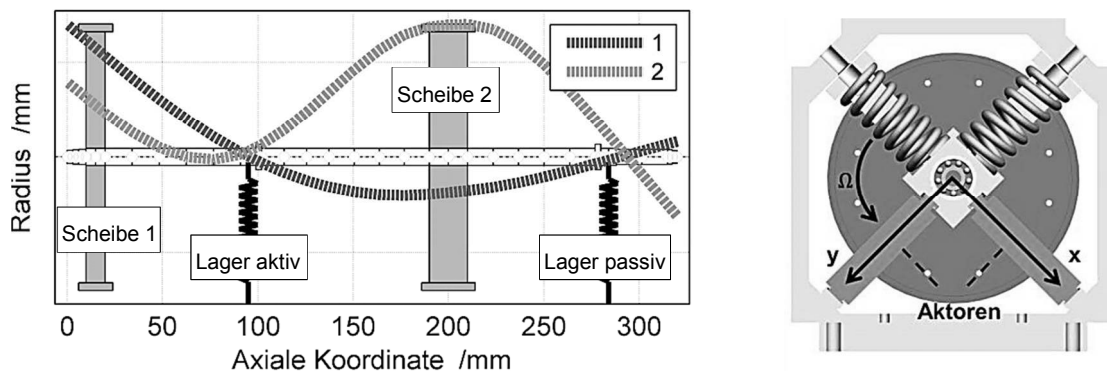


Abbildung 7.2: Rotor FE-Modell (links), Skizze des aktiven Lagers (rechts) (Gyroskopie-Prüfstand)

Es werden modale Dämpfungen für die Biegemoden so eingestellt, dass die Resonanzamplituden des Modells mit experimentell ermittelten Übertragungsfunktionen übereinstimmen. Die nicht genau bekannten Steifigkeiten der Kugellager wurden von Becker [146] mit einem *Grey Box*-Verfahren identifiziert, so dass die Übertragungsfunktionen des Modells mit den experimentell ermittelten Frequenzgängen übereinstimmen. Abbildung 7.3 zeigt einen Vergleich von Modell und Messung anhand der Übertragungsfunktionen von den Aktorspannungen $\mathbf{U}_{\text{Aktor},x/y}$ zu den Wegsensoren $\mathbf{q}_{1,x/y}$ an Scheibe 1 (S1) für Rotordrehfrequenzen von 42Hz (2500rpm) und 133Hz (8000rpm). Die Übertragungsfunktionen zu Scheibe 2 (S2) sowie die zugehörigen Phasenverläufe zeigen ähnlich gute Übereinstimmungen [146].

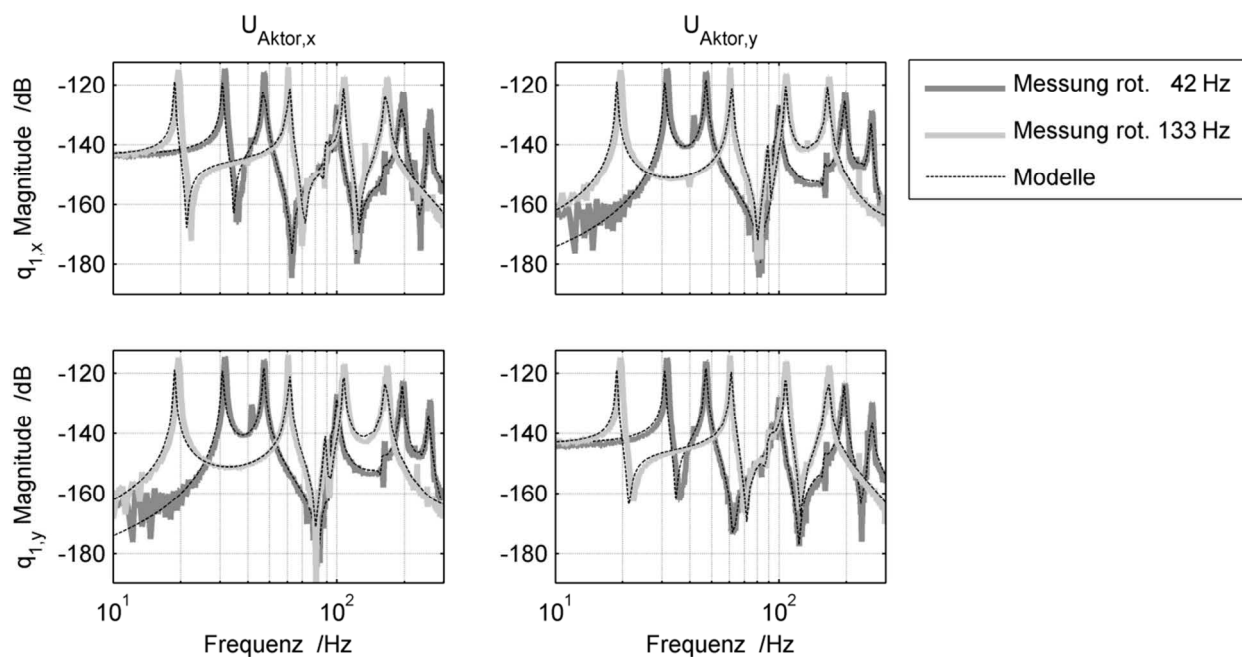


Abbildung 7.3: Experimentelle Amplitudengänge & Modell, $U_{Aktor} \rightarrow q_{S1}$ (Gyroskopie-Prüfstand)

Diese experimentell ermittelten Amplitudengänge wurden bei Gleitsinuserregung mit Spannungsamplituden von 100V ermittelt. Eine Steigerung der Amplitude bewirkt einen Übergang vom Klein- zum Großsignalverhalten der piezoelektrischen Aktoren. Die maximal zulässige Aktorspannung von 500V wird durch die hier entworfenen Regelungen jedoch nicht voll ausgenutzt. Im Bereich der auftretenden Stellgrößen bis ca. 250V ergeben sich nur geringfügige Veränderungen des Übertragungsverhaltens, so dass dieses Modell im Folgenden verwendet wird.

Im Regelkreis sind weiterhin Verzögerungen der Piezoverstärker (PT_2 -Verhalten, $f_{Eck,Amp.} = 1,1\text{kHz}$), analogen Anti-Aliasing Filtern (PT_1 -Verhalten, $f_{Eck,AA} = 1\text{kHz}$) und der Abtastung des verwendeten dSPACE DS-1104 Echtzeitsystems mit 2,5kHz zu berücksichtigen. Die Verzögerung wirkt auf alle Übertragungspfade der zwei Aktoren zu den vier Sensoren gleichermaßen, so dass alle Verzögerungen zusammengefasst werden können. Um eine minimale Modellordnung zu erreichen, werden die zusammengefassten Verzögerungen an den zwei Aktor-Ausgängen eingefügt. Werden diese stattdessen an den vier Sensoreingängen hinzugefügt, führt dies zu einer Verdoppelung der Ordnung des Peripheriemodells. Die Phasenverläufe der zusammengefassten Verzögerungsglieder können für den relevanten Frequenzbereich durch ein Modell vierter Ordnung approximiert werden, so dass sich die Systemordnung insgesamt um acht erhöht.

Da das FE-Modell 140 Freiheitsgrade aufweist, beträgt die Systemordnung nach einer Überführung in den Zustandsraum 280. Die Ordnung der Gyroskopiematrix entspricht zunächst der Freiheitsgradanzahl 140. Bei Vernachlässigung der translatorischen Geschwindigkeiten verbleibt eine Ordnung von 70, so dass die Ordnung der Unsicherheitsstruktur ebenfalls 70 beträgt.

Sowohl die Ordnung des nominellen Systems als auch die Ordnung der Unsicherheitsstruktur sind für die μ -Synthese deutlich zu hoch. Im Verlauf der μK -Iteration wird das Modell mit dynamischen Scales D_{fit} und Filtern $\gamma_{\mu,fit}$ für jeden Unsicherheits- und Performance-Ausgang skaliert, was die Systemordnung weiter erhöht. Für dieses skalierte System sind in jedem Iterationsdurchlauf H_∞ -Regler, μ_ω -Verläufe, Scales D_{fit} und Filter $\gamma_{\mu,fit}$ zu berechnen. Der numerische Aufwand dazu ist unverhält-

nismäßig hoch und zudem sind numerische Fehler und Probleme bei den μ_ω -Berechnungen zu erwarten. Selbst wenn diese Berechnung gelingt, weisen die berechneten Regler sehr hohe Ordnungen auf und eine Implementierung auf aktuellen Echtzeitsystemen ist unmöglich. Daher werden nun Methoden zur Ordnungsreduktion des nominellen Systems und der Unsicherheitsstruktur vorgestellt.

7.2.1 Reduktion des nominellen Systems

Die Systemordnung des nominellen Modells kann mit üblichen modalen Reduktionsverfahren verringert werden. Nach einer Überführung des nominellen Systems in eine modale Zustandsraumdarstellung liegen entkoppelte, modale Zustände vor, vgl. Gleichung (2.15). Nun können diejenigen modalen Zustände „abgeschnitten“ werden, deren Eigenfrequenzen oberhalb des interessierenden Frequenzbereichs liegen [11], [98]. Aufgrund der Entkopplung der modalen Zustände wird der relevante Frequenzbereich durch die abgeschnittenen Moden nicht beeinflusst. Für das vorliegende System kann dieses Vorgehen jedoch nicht ohne weiteres durchgeführt werden, da die Entkopplung nur für eine feste Drehfrequenz durchgeführt werden kann. Die gyroskopischen Unsicherheitsterme in Abbildung 7.1 heben diese auf, so dass die abgeschnittenen modalen Zustände wieder Einfluss auf den relevanten Frequenzbereich haben und ein drehzahlabhängiger Abschneidefehler entsteht.

Werden die modalen Zustände $\hat{\mathbf{x}}$ nach aufsteigender Eigenfrequenz sortiert, kann die modale Systemmatrix $\hat{\mathbf{A}}$ in Blöcke der relevanten Zustände $\hat{\mathbf{A}}_{\text{red}}$ und der zu eliminierenden Zustände $\hat{\mathbf{A}}_{\text{elim}}$ aufgeteilt werden. Aufgrund der Entkopplung sind diese Blöcke (block-)diagonal besetzt und die Koppelterme $\hat{\mathbf{A}}_{\text{koppel}} = \mathbf{0}$.

$$\hat{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{\text{red}} \\ \hat{\mathbf{x}}_{\text{elim}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{\text{red}} & \hat{\mathbf{A}}_{\text{koppel}} \\ \hat{\mathbf{A}}_{\text{koppel}} & \hat{\mathbf{A}}_{\text{elim}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{\text{red}} \\ \hat{\mathbf{x}}_{\text{elim}} \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

Der unsichere Gyroskopieterm in Abbildung 7.1 bewirkt jedoch eine Kopplung der modalen Zustände innerhalb der Blöcke $\hat{\mathbf{A}}_{\text{red}}$ und $\hat{\mathbf{A}}_{\text{elim}}$ sowie über $\hat{\mathbf{A}}_{\text{koppel}}$. Während die Kopplung innerhalb von $\hat{\mathbf{A}}_{\text{red}}$ und $\hat{\mathbf{A}}_{\text{elim}}$ für die Reduktion unerheblich ist, entstehen beim Eliminieren von $\hat{\mathbf{x}}_{\text{elim}}$ Abschneidefehler durch Vernachlässigen von $\hat{\mathbf{A}}_{\text{koppel}}$. Als Erweiterung der üblichen Verfahren muss beim modalen Abschneiden mit gyroskopischen Unsicherheiten der Einfluss von $\hat{\mathbf{A}}_{\text{koppel}}$ betrachtet werden. Zusätzlich zu den modalen Zuständen mit Eigenfrequenzen im relevanten Frequenzbereich sind nun weitere Moden beizubehalten. Dies sind diejenigen Moden, die große Kopplungen zu den modalen Zuständen des relevanten Frequenzbereichs aufweisen.

Für das vorliegende System werden die modalen Zustände der ersten vier Gleich- und Gegenläufe entsprechend Abbildung 4.11 beibehalten, auch wenn die Eigenfrequenz der vierten Gegenlaufmode oberhalb des eigentlichen Zielfrequenzbereichs liegt. Das nominelle Gesamtsystem weist somit 16 Zustände für die acht elastischen Moden des Rotors auf, was in Kombination mit acht Zuständen für die Verzögerungen der Peripherie zu einer Gesamtordnung von 24 führt.

Als Rotordrehfrequenz für das nominelle System muss die Hälfte der Maximaldrehfrequenz, d. h. 67 Hz, eingestellt werden. In der μ -Synthese wird dann eine Unsicherheit von ebenfalls 67 Hz eingestellt, so dass sich der geforderte Unsicherheitsbereich zwischen 0 und 133 Hz (8000 rpm) ergibt.

7.2.2 Reduktion der gyroskopischen Unsicherheit

In diesem Abschnitt wird ein einfaches Verfahren vorgestellt, das eine starke Reduktion der gyroskopischen Unsicherheitsstruktur bei geringem Aufwand erlaubt. Ein alternativer Ansatz von Lanzon et al. [16] ist deutlich aufwendiger und erzielt teils geringere Reduktionen.

Um eine minimale Struktur der Gyroskopie zu erhalten, wird eine analytisch berechnete Gyroskopiematrix verwendet. Die analytische Berechnung der gyroskopischen Momente der Elemente $\mathbf{M}_{G,Element}$ erfolgt über den bekannten Zusammenhang [6]:

$$\mathbf{M}_{G,Element} = \begin{bmatrix} M_{G,x,Element} \\ M_{G,y,Element} \end{bmatrix} = \Omega \mathbf{G}_{\Omega,Element} \dot{\mathbf{q}}_{\varphi,Element} = \Omega \begin{bmatrix} 0 & \Theta \\ -\Theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{\varphi,x,Element} \\ \dot{q}_{\varphi,y,Element} \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

Dabei ist Θ das polare Flächenträgheitsmoment des kreisrunden Elements bezüglich der Rotationsachse. Übliche FE-Programme berechnen dies für jedes Element des Systems, so dass die Ordnung der Gyroskopiematrix der Freiheitsgradanzahl entspricht. Da das polare Flächenträgheitsmoment proportional zum Quadrat des Elementdurchmessers ist, können Elemente mit kleinen Durchmessern vernachlässigt werden. Bei einer analytischen Modellierung werden entsprechend nur Scheibenelemente berücksichtigt. Der vorliegende Rotor weist zwei Scheiben mit den polaren Trägheitsmomenten Θ_{S1} und Θ_{S2} auf, deren gyroskopische Momente entsprechend über die folgende Gleichung der Ordnung vier berechnet werden können:

$$\mathbf{M}_{G,Scheiben} = \begin{bmatrix} M_{G,\varphi x,S1} \\ M_{G,\varphi y,S1} \\ M_{G,\varphi x,S2} \\ M_{G,\varphi y,S2} \end{bmatrix} = \Omega \mathbf{G}_{\Omega,red} \dot{\mathbf{q}}_{\varphi,Scheiben} = \Omega \begin{bmatrix} 0 & \Theta_{S1} & 0 & 0 \\ -\Theta_{S1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Theta_{S2} \\ 0 & 0 & -\Theta_{S2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{\varphi x,S1} \\ \dot{q}_{\varphi y,S1} \\ \dot{q}_{\varphi x,S2} \\ \dot{q}_{\varphi y,S2} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Die Ordnung der gyroskopischen Unsicherheitsstruktur kann so auf vier, im Allgemeinen auf das Zweifache der Scheibenanzahl, reduziert werden. Dazu werden als Unsicherheits-Ausgänge von \mathbf{P} die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}_{\varphi}$ der Scheibenelemente (S1: Scheibe 1, S2: Scheibe 2) um die x - und y -Achse sowie als Unsicherheits-Eingänge die entsprechenden gyroskopischen Momente \mathbf{M}_G verwendet. Somit kann die Ordnung der gyroskopischen Unsicherheitsstruktur im vorliegenden Fall von 140 auf 4 reduziert werden. Für den Vergleich mit den Messungen in Abbildung 7.3 wurde bereits das reduzierte Modell verwendet, was die Zulässigkeit der Reduktionen des nominellen Systems sowie der Unsicherheitsstruktur bestätigt.

7.2.3 Gesamtmodell

Für das reduzierte nominelle Modell mit einer Drehfrequenz von 67Hz kann nun die reduzierte gyroskopische Unsicherheit als *LFT* entsprechend Abbildung 7.1 eingefügt werden. Diese besteht aus der reduzierten Gyroskopiematrix nach Gleichung (7.3) sowie einem unsicheren Parameter für die Rotordrehfrequenz $\Omega \in [-67,67] * 2\pi$ rad/s. Da die Unsicherheit direkt auf der mathematischen Gyroskopie-Modellierung basiert, sind die Übertragungsfunktionen aus Abbildung 7.3 direkt im unsicheren Modell enthalten und es ist kein weiterer Vergleich des unsicheren Modells mit den Messungen erforderlich. Zusätzlich werden additive Unsicherheiten Δ_a eingeführt, um abgeschnittene Moden im höheren Frequenzbereich zu berücksichtigen.

Die Auswahl geeigneter Performancekanäle soll eine Unterdrückung der Unwuchtschwingungen im Entwurf ermöglichen. Typischerweise sind die Unwuchten eines rotordynamischen Systems an den Scheiben konzentriert, da hier bereits eine geringe Exzentrizität ε eine hohe Unwucht U bewirkt, vgl. Abschnitt 2.1. Für die betrachteten ersten beiden Gleichlaufmoden treten die maximalen Schwingungsamplituden ebenfalls an den Scheiben auf, vgl. Abbildung 7.2. Als Performancekanäle werden daher Kräfteingänge und Auslenkungsausgänge an den Scheiben verwendet. Das gesamte, unsichere System weist also die folgenden Ein- und Ausgänge auf:

- Gyroskopieunsicherheiten (vierfach wiederholte, reelle Drehfrequenzunsicherheit):
 - o Eingänge: 4 Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}_{\varphi, \text{Scheiben}}$
 - o Ausgänge: 4 Gyroskopiemomente $\mathbf{M}_{G, \text{Scheiben}}$
 - o Additive Unsicherheit: unstrukturiert
- Performancekanäle (4x4):
 - o Eingänge: 4 Scheibenkräfte $\mathbf{F}_{\text{Scheiben}}$
 - o Ausgänge: 4 Scheibenauslenkungen $\mathbf{q}_{x/y, \text{Scheiben}}$
- Reglerkanäle:
 - o Ausgänge: 4 Sensorausgänge $\mathbf{q}_{x/y, \text{Scheiben}}$
 - o Eingänge: 2 Stellgrößeneingänge $\mathbf{U}_{x/y, \text{Aktor}}$

Abbildung 7.4 zeigt exemplarisch einige Übertragungspfade des unsicheren Modells. Als Eingänge werden die Kräfte an beiden Scheiben sowie die Aktorspannung in x -Richtung und als Ausgänge Schwingungen an Scheibe 1 in x -Richtung und Scheibe 2 in y -Richtung betrachtet. Durch die gyroroskopische Unsicherheit spalten sich die Eigenfrequenzen in Gleich- und Gegenlaufmoden auf. Zudem ist der Einfluss der additiven Unsicherheiten im Frequenzbereich ab ca. 300Hz deutlich zu erkennen.

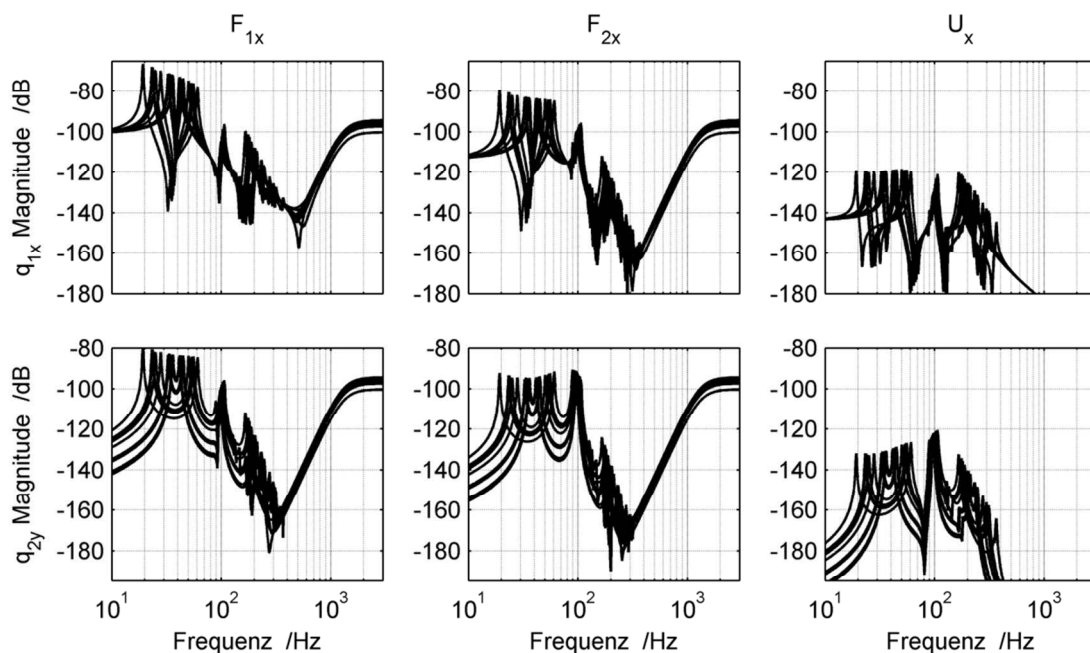


Abbildung 7.4: Ausgewählte Übertragungsfunktionen des unsicheren Modells (Gyroskopie-Prüfstand)

7.3 Performance-Vorgaben

Zur Reduktion von Unwuchtschwingungen werden die Amplituden der Gleichlaufresonanzen in den Störübertragungsfunktionen \mathbf{GS} von den Krafteingängen an den Scheiben zu den Scheibenauslenkungen begrenzt. Es ist zu beachten, dass die Performance-Übertragungen in Abbildung 7.4 für die individuellen Krafteingänge an den Scheiben in x - und y -Richtung auch hohe Amplituden für die Gegenlaufmoden beinhalten. In der relevanten Literatur werden üblicherweise flache Begrenzungsfunktionen verwendet, die Gleich- und Gegenlaufresonanzamplituden gleichermaßen begrenzen [35], [37], [128], [129]. Die Unwuchterregung regt die Gegenlaufeigenformen jedoch nicht an, vgl. Abschnitt 2.1. Eine Reduktion der Gegenlaufamplituden ist daher nicht notwendig und führt zu Konservativität.

Um die Gleichlaufamplituden ohne Beeinflussung der Gegenlaufmoden zu begrenzen, müssten sehr steile Begrenzungsfunktionen verwendet werden. Da Gleich- und Gegenlaufmoden im Stillstand übereinstimmen, ist so jedoch keine vollständige Vermeidung von Gegenlaufbegrenzungen erreichbar. Um dies dennoch zu erreichen, wird hier eine geeignete Manipulation der Performance-Ausgänge verwendet, mit der die Einflüsse der Gegenläufe auf die Performance-Ausgänge erheblich reduziert werden können. Diese Manipulation der Performance-Ausgangsmatrix basiert auf einer modalen Skalierung der Performancekanäle nach Gawronski und Lim [147].

Das nominelle System wird erneut in modaler Form entsprechend Gleichung (7.1) betrachtet. In der Ausgangsmatrix $\hat{\mathbf{C}}_{\text{red}}$ des Systems in reduzierter, modaler Zustandsraumdarstellung ist nun spaltenweise der Einfluss der modalen Zustände auf die einzelnen Ausgänge ersichtlich. Um die Gegenlaufmoden aus den Performance-Ausgängen zu eliminieren, werden in Gleichung (7.4) die Einflussfaktoren der ersten beiden Gegenlaufmoden (Index GG) in den Zeilen der Performanceausgänge manipuliert. Entsprechend der zugehörigen Veröffentlichungen wird dies als Gegenlaufeliminierung (engl. *Backward Whirl Elimination*) bezeichnet und mit dem Index BWE gekennzeichnet [116], [117].

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \text{Unsicherheitsausgänge} \\ \vdots \\ q_{S1,x,BWE} \\ q_{S1,y,BWE} \\ q_{S2,x,BWE} \\ q_{S2,y,BWE} \\ \vdots \\ \text{Reglerausgänge} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \boxed{C_{S1,x,GG1}} & C_{S1,x,GL1} & \boxed{C_{S1,x,GG2}} & C_{S1,x,GL2} & \cdots \\ \boxed{C_{S1,y,GG1}} & C_{S1,y,GL1} & \boxed{C_{S1,y,GG2}} & C_{S1,y,GL2} & \cdots \\ \boxed{C_{S2,x,GG1}} & C_{S2,x,GL1} & \boxed{C_{S2,x,GG2}} & C_{S2,x,GL2} & \cdots \\ \boxed{C_{S2,y,GG1}} & C_{S2,y,GL1} & \boxed{C_{S2,y,GG2}} & C_{S2,y,GL2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{\text{mod},GG1} \\ q_{\text{mod},GL1} \\ q_{\text{mod},GG2} \\ q_{\text{mod},GL2} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

Um eine Anfachung der Gegenlaufresonanzen zu vermeiden, werden die Einflussfaktoren der Gegenläufe nicht mit Null-Einträgen ersetzt, sondern auf 5% des ursprünglichen Wertes herunterskaliert.

Wie schon bei der Reduktion des nominellen Systems in Abschnitt 7.2.1 entsteht auch hier ein Fehler durch Kopplung über die gyroskopische Unsicherheit. Die modalen Zustände werden über den unsicheren Gyroskopieterm gekoppelt, so dass die Eliminierung der Gegenlauf-Zustände sich auch auf die Gleichlaufmoden auswirkt. Für das untersuchte System sind diese Kopplungen im

gesamten Unsicherheitsbereich gering und können vernachlässigt werden. Es ist dabei anzumerken, dass die Skalierung exklusiv auf die Performance-Ausgänge angewendet wird. Da die Regler- und Unsicherheitskanäle also nicht manipuliert werden, wird die robuste Stabilität auch bei Abweichungen nicht beeinträchtigt. In den Performancekanälen sind geringfügige Abweichungen zulässig, solange diese weiterhin zu der geforderten Unterdrückung der Unwuchtschwingungen beitragen. Die Performancekanäle beeinflussen den SSV zudem hauptsächlich an den kritischen Frequenzbereichen nahe der Gleichlaufresonanzfrequenzen, wo die modale Skalierung kaum Abweichungen erzeugt [147]. Außerhalb der zu unterdrückenden Eigenfrequenzen sind die Begrenzungen „locker“, so dass kaum Einfluss auf den SSV zu erwarten ist und der „Skalierungsfehler“ die Synthese kaum beeinflusst. In Abbildung 7.5 ist die Auswirkung der BWE auf den Amplitudengang des Performancekanals von Kraft zu Auslenkung an Scheibe 2 in x -Richtung dargestellt. Die dreidimensionale Darstellung mit der zusätzlichen Achse für die Rotordrehfrequenz zeigt die Aufspaltung der Eigenfrequenzen analog zum Campbell-Diagramm. Die gepunktet dargestellte Ebene zeigt den Verlauf drehsynchroner Frequenzen ähnlich dem Fahrstrahl.

Die schwarze Fläche zeigt die Wirkung einer Begrenzungsfunktion, die im robusten Reglerentwurf mittels μ -Synthese für den gesamten Unsicherheitsbereich, d. h. alle Rotordrehzahlen, wirksam ist. Die zur finalen Synthese eingestellten Begrenzungen liegen für die meisten Frequenzen deutlich höher und würden die Frequenzgänge überdecken, vgl. Abbildung 7.6. Daher sind hier zur Veranschaulichung deutlich tiefere Begrenzungen abgebildet.

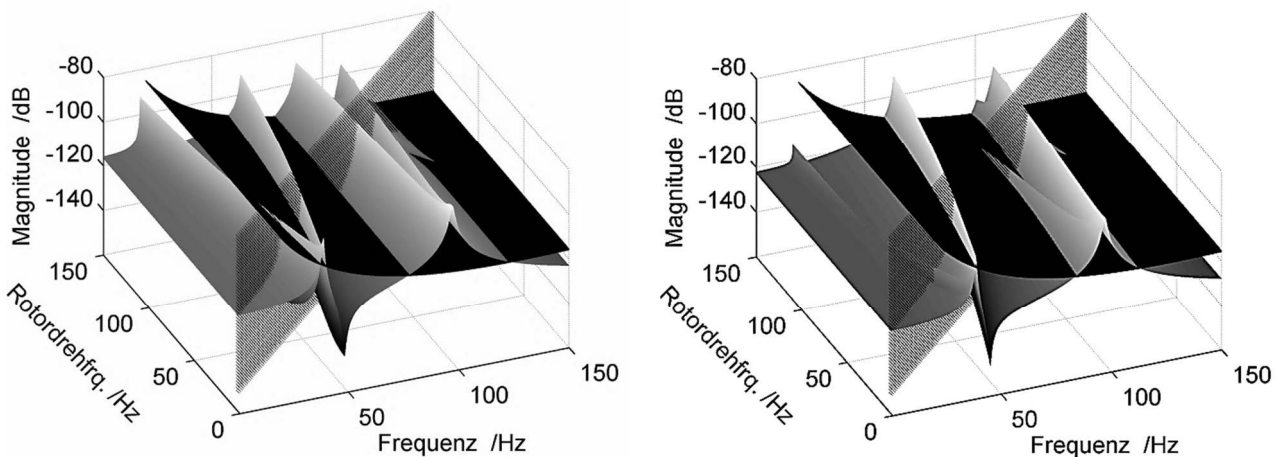


Abbildung 7.5: Drehzahlabhängige Amplitudengänge $F_{S2x} \rightarrow q_{2x}$ ohne & mit BWE (Gyroskopie-Prüfstand)

Ohne BWE (Abbildung 7.5, links) schneidet die Begrenzungsfunktion trotz des steilen Abfalls für Rotordrehfrequenzen bis ca. 60 Hz auch die erste Gegenlaufmode. Die modale Skalierung mit der BWE reduziert die Amplituden der Gegenlaufmode deutlich (Abbildung 7.5, rechts), so dass diese unterhalb der Begrenzung liegt. Im Bereich der zweiten Gleich- und Gegenlaufmoden ist die Begrenzung sehr tief eingestellt, um die Systemdynamik nicht zu überdecken. Im Entwurf werden hier deutlich höhere Begrenzungen verwendet.

Diese Darstellung offenbart zudem die Konservativität im robusten Reglerentwurf durch feste Begrenzungsfunktionen. Die eingestellte Performance wird für alle Unsicherheiten (Drehzahlen) gleichermaßen verwendet. Zur Reduktion synchroner Unwuchtschwingungen wäre jedoch eine Re-

duktion der Amplituden entlang der gepunkteten Ebene ausreichend. Dies kann nur durch adaptive Vorgaben der Performance erreicht werden, z. B. im Rahmen einer *LPV*-Regelung mit drehzahladaptiven Begrenzungsfunktionen.

Mit Hilfe der BWE kann hier zumindest die selektive Begrenzung der zu reduzierenden ersten beiden Gleichläufe entsprechend Abbildung 7.6 eingestellt werden. Es hat sich gezeigt, dass die Begrenzung der Performance-Ausgänge an Scheibe 1 im Bereich der ersten Gleichlaufmoden und an Scheibe 2 im Bereich der zweiten Gleichlaufmode ausreichen. Dies kann durch die in Abbildung 7.2 dargestellten Eigenformen erklärt werden, da die erste Mode die größten Amplituden an Scheibe 1 und die zweite Mode an Scheibe 2 aufweist. Für die *y*-Richtung werden identische Begrenzungen verwendet, da das System symmetrisch ist.

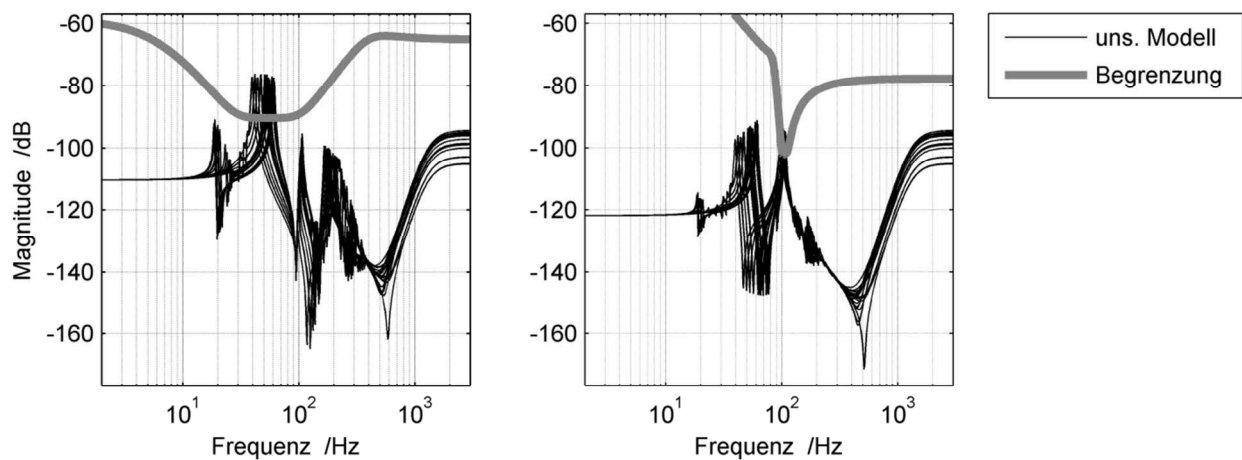


Abbildung 7.6: Begrenzungen der Störübertragungen $\mathbf{G_S}$, $F_{S1x} \rightarrow q_{1x}$ und $F_{S2x} \rightarrow q_{2x}$ (Gyroskopie-Prüfstand)

Bei Implementierung der im Folgenden entworfenen Regler am Prüfstand treten die in Abschnitt 2.1 beschriebenen unerwünschten Effekte auf. Vermutlich durch nicht modellierte Einflüsse des Lagerspiels und weitere Nichtlinearitäten werden Schwingungen im Frequenzbereich ab ca. 400 Hz durch die Regelung angeregt. Um dies zu vermeiden, muss die Reglerverstärkung für Frequenzen ab ca. 350 Hz begrenzt werden. Für den Reglerentwurf ergibt dies zusätzliche Performance-Anforderungen an die Stellübertragungsfunktionen. Diese Erweiterung wird hier nicht durchgeführt, da die Synthese bereits für die oben verwendeten Performancekanäle hohen Berechnungsaufwand und umfangreiche Iterationen zur Optimierung der SyntheseEinstellung erfordert. Für das verwendete, unsichere Modell ist es stattdessen möglich, die Reglerverstärkung durch einen zusätzlichen, digitalen Tiefpassfilter mit einer Eckfrequenz von 350 Hz ausreichend zu reduzieren. Dies ist aufgrund der additiven Unsicherheiten ohne Einschränkung der Robustheit möglich, was im Rahmen der Implementierung in Abschnitt 7.7 genauer beschrieben wird. Für weiterführende Untersuchungen ist die Berücksichtigung im Entwurf durch eine Begrenzung der Stellübertragung wünschenswert. Da numerische Probleme der Synthese mit steigender Anzahl an Performancekanälen kritischer werden, sollte zuvor die Konvergenz der μK -Iteration weiter verbessert werden. Dies kann z. B. durch Steigerung der Berechnungsgenauigkeit der $\mu\omega$ -Verläufe mit gemischt komplex-reellen Unsicherheiten erreicht werden.

7.4 Implementierung und Optimierung der μ K-Iteration

Die μ K-Iteration nach Toffner-Clausen [80] berücksichtigt reelle Unsicherheiten indirekt durch Filterung von Unsicherheits- und Performancekanälen des Synthesystems \mathbf{P} mit γ_μ . Diese Filter bilden das frequenzabhängige Verhältnis von komplexem μ_{komplex} und gemischt komplex-reellem μ_{gemischt} ab. Der frequenzabhängige Verlauf des Filters γ_μ muss in jedem Durchlauf des Algorithmus neu berechnet und zu $\gamma_{\mu,\text{fit}}$ gefittet werden. Wenn die Filterung zu einem ungünstigen Synthesystem führt, wird ein gewichteter Mittelwert aus dem aktuellen und dem vorigen $\gamma_{\mu,\omega}$ -Verlauf gebildet und die Gewichtung sukzessive zum $\gamma_{\mu,\omega}$ der vorigen Iteration verschoben, bis ein geeigneter neuer Regler gefunden werden kann. Der Algorithmus besteht aus insgesamt 11 Schritten, die in Abschnitt 2.6.6 beschrieben sind. Die Schritte mit besonderer Relevanz für das untersuchte System sind:

- Schritte 1-3: Vorgabe eines stabilisierenden Startreglers, üblicherweise mittels H_∞ -Synthese berechnet. Initialisieren ... (s. Abschnitt 2.6.6)
- Schritt 4: Fitten von \mathbf{D} -Scales an den punktwisen Verlauf \mathbf{D}_ω der vorigen Iteration
- Schritte 5-6: Berechnung (punktweise): $\gamma_{\mu,\omega}$ aus $\mu_{\text{komplex},\omega}$ und $\mu_{\text{gemischt},\omega}$
Gewichtete Mittelwertbildung aus dem aktuellen $\gamma_{\mu,\omega}$ und dem der vorigen Iteration
Fitten der Filter $\gamma_{\mu,\text{fit}}$ an den $\gamma_{\mu,\omega}$ -Verlauf
Bilden des skalierten Systems $\mathbf{P}_{\Gamma\mathbf{D}} = \Gamma_{\mu,\text{fit}}\mathbf{D}\mathbf{P}\mathbf{D}^{-1}$ (vgl. Abbildung 2.12)
- Schritt 7: H_∞ -Synthese für $\mathbf{P}_{\Gamma\mathbf{D}}$
- Schritt 8: Berechnung (punktweise): \mathbf{D}_ω
Berechnung (punktweise): $\mu_{\text{komplex},\omega}$ und $\mu_{\text{gemischt},\omega}$ (für komplexe bzw. reelle Unsicherheiten)
- Schritte 9-11: Prüfen des Abbruchkriteriums

Die verwendete Implementierung von Sehr [104] beinhaltet bereits eine wichtige Optimierung des Algorithmus durch den Einsatz von LMI-Verfahren nach Young et al. [102] zur Berechnung der gemischt komplex-reellen $\mu_{\text{gemischt},\omega}$ -Verläufe. Die Vorteile der LMI-Berechnung sind in Abbildung 7.7 durch einen Vergleich der punktwisen μ_ω -Verläufe des geschlossenen Regelkreises eines μ K-Reglers für das untersuchte Rotormodell mit gemischten Unsicherheiten dargestellt.

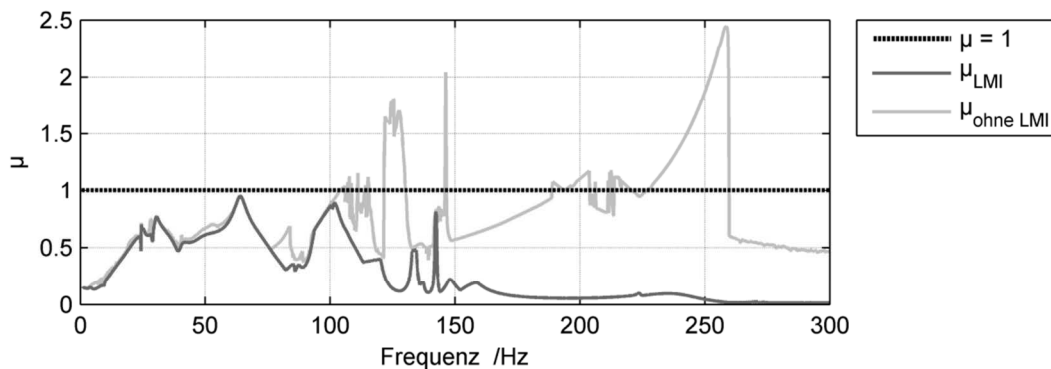


Abbildung 7.7: μ_ω -Verläufe für μ K-Regelkreis mit & ohne LMI-Berechnung (Gyroskopie-Prüfstand)

Die LMI-Berechnung zeigt, dass der μ_ω -Verlauf vollständig unter dem kritischen Wert von 1 bleibt, während die herkömmliche Berechnung ohne LMIs einen sprunghaften Verlauf mit deutlich höhe-

ren μ_ω -Werten ergibt. Dieser Verlauf beeinflusst auch das Verhältnis von komplexem zu gemischtem μ_ω , so dass die Filter in der Synthese falsch eingestellt würden. Zudem führt der sprunghafte Verlauf zu Problemen beim Fitten von $\gamma_{\mu,\text{fit}}$. Schönhoff [96] nennt als Ursache für das Scheitern einer μK -Iteration für ein Rotorsystem sehr sprunghafte Verläufe für $\gamma_{\mu,\omega}$, die eine Fitordnung von über 200 erfordern. Es ist denkbar, dass dies auf Probleme der μ_ω -Berechnung ohne LMI-Verfahren zurückzuführen ist.

Bei der Berechnung des *Stabilitäts-SSV* μ_Δ in [104] wurde festgestellt, dass auch die LMI-Berechnung ungenau sein kann. Der komplexe Performance-Block in Δ wird für die Berechnung des *Stabilitäts-SSV* μ_Δ entfernt. Das übrige System beinhaltet die reelle, gyroskopische Unsicherheit sowie die additive Unsicherheit. Wie von Young et al. [148] gezeigt, ist die Berechnung von μ_ω ungenau, wenn reelle Unsicherheiten nicht mit relevanten komplexen Unsicherheiten kombiniert werden. Für den Frequenzbereich unterhalb von ca. 300 Hz tritt dies bei Vernachlässigung des komplexen Performance-Blocks in Δ auf, da dann ausschließlich die gyroskopische Unsicherheit wirkt. Ab ca. 300 Hz wirkt zusätzlich die komplexe additive Unsicherheit, vgl. Abbildung 7.4. Dies zeigt, dass auch die LMI-Berechnung für gemischt komplex-reelle Unsicherheiten in einigen Fällen ungenau ist und eine Steigerung der Berechnungsgenauigkeit große Potenziale für zukünftige Verbesserungen der μK -Iteration aufweist.

Im Rahmen dieser Arbeit wird eine zusätzliche Optimierung der μK -Iteration eingeführt, die das Fitten der Scales $\gamma_{\mu,\text{fit}}$ an den punktweisen Verlauf $\gamma_{\mu,\omega}$ verbessert. Für diesen Fit in Iterationsschritt 6 verwendet Sehr ein in MATLAB verfügbares Verfahren. Dieses ermittelt zunächst einen stabilen Phasenverlauf mit einer Cepstrum Analyse [139]. Anschließend wird eine Identifikation durchgeführt, die eine Minimierung der Abweichungen des gefitteten Systems $\gamma_{\mu,\text{fit}}$ zum punktweisen Verlauf $\gamma_{\mu,\omega}$ durchführt. Dazu werden dieselben Frequenzstützstellen verwendet, die für Schritt 8 zur Berechnung der punktweisen Scales \mathbf{D}_ω und der μ_ω -Verläufe eingestellt wurden. Untersuchungen im Rahmen der vorliegenden Arbeit zeigen, dass eine separate Einstellung der Frequenzstützstellen zur Berechnung von $\gamma_{\mu,\omega}$ zu deutlichen Verbesserungen führt.

Eine weitere Verbesserung wird durch den Einsatz von *DK*-Startreglern erreicht. Dies ist notwendig, da die üblicherweise verwendeten H_∞ -Startregler hier zu sprunghaften $\gamma_{\mu,\omega}$ -Verläufen führen. Ein zufriedenstellender Fit von $\gamma_{\mu,\text{fit}}$ ist dann unmöglich, so dass die Iteration bereits nach dem ersten Durchlauf des Algorithmus abbricht. Vorgehensweisen zur Synthese eines *DK*-Startreglers sowie zur Auswahl geeigneter Stützstellen für die $\gamma_{\mu,\omega}$ -Berechnung werden im folgenden Abschnitt anhand des untersuchten Entwurfs vorgestellt.

7.5 Synthese

Aus dem reduzierten, unsicheren Modell und den Performance-Begrenzungsfunktionen wird das gewichtete Synthesensystem \mathbf{P} entsprechend Abbildung 7.1 gebildet. Um das Syntheseproblem mit der optimierten μK -Iteration zu lösen, sind die Syntheseparameter der Iteration geeignet einzustellen. Der Algorithmus reagiert für das untersuchte Modell sehr empfindlich auf die Einstellung einiger dieser Parameter. Es mussten daher viele Iterationen zur Ermittlung geeigneter Parameter durchgeführt werden. Eine systematische Ermittlung geeigneter Einstellungen für die Syntheseparameter wird in diesem Abschnitt beschrieben.

Um ein Abbrechen der Iteration im ersten Schritt zu verhindern, muss ein geeigneter Startregler vorgegeben werden. Üblicherweise werden dazu H_∞ -Regler für das Synthesystem \mathbf{P} berechnet, d. h. es werden die Struktur vernachlässigt und die reellen Unsicherheiten durch komplexe ersetzt. Für das untersuchte Modell konnte so jedoch kein akzeptabler Startregler gefunden werden. Berechnungen des SSV -Wertes für den geschlossenen Regelkreis aus dem Synthesystem \mathbf{P} mit reellen gyroskopischen Unsicherheiten ergeben teilweise Werte zwischen drei und fünf, was als Startwert für die Iteration prinzipiell geeignet ist. Allerdings führen diese Regler zu sprunghaften μ_ω -Verläufen, die zum Fitten der Filter $\gamma_{\mu, \text{fit}}$ ungeeignet sind. Eine von Schönhoff [96] empfohlene, sog. ν -Skalierung der Eingangs- und Ausgangsmatrix von \mathbf{P} führt zu Verbesserungen des SSV -Wertes für die H_∞ -Regler teilweise unter 2. Jedoch werden die μ_ω -Verläufe nicht glatter und die μK -Iteration konvergiert weiterhin nicht. Im Rahmen dieser Untersuchungen wurde eine geeignete Alternative in der Verwendung von DK -Startreglern gefunden. Die reelle gyroskopische Unsicherheit wird dazu in eine komplexe Unsicherheit umgewandelt, so dass eine DK -Iteration durchgeführt werden kann. Dazu sind passende Frequenzstützstellen und Fitordnungen für die Scales \mathbf{D}_{fit} zu ermitteln, vgl. Abschnitt 5.5. Zur Einstellung der DK -Iteration wurde festgestellt, dass die Reduktion des SSV für komplexe gyroskopische Unsicherheiten nicht zwingend auch den SSV für reelle gyroskopische Unsicherheiten minimiert. So führt eine hohe Fitordnung für die Scales \mathbf{D}_{fit} zu relativ kleinen komplexen SSV -Werten. Eine nachträgliche Berechnung des SSV mit reellen gyroskopischen Unsicherheiten zeigt jedoch, dass der reelle SSV dabei oftmals verschlechtert wird. Die Fitordnung für \mathbf{D}_{fit} wird daher auf fünf begrenzt, was zu einem SSV -Wert bei komplexer Gyroskopieunsicherheit von 21,7 führt. Der nachträglich berechnete, relevante SSV -Wert für die reelle Gyroskopieunsicherheit beträgt 1,5 und der zugehörige μ_ω -Verlauf ist ausreichend glatt. Der Regler kann jedoch nicht am Prüfstand verwendet werden, da dieser nicht für alle Drehzahlen stabil ist. Die dabei verwendeten Einstellungen sind auch für die Fits der Scales \mathbf{D}_{fit} in der μK -Iteration geeignet. Für das untersuchte System wurden 3000 äquidistant verteilte Frequenzstützstellen zwischen 0Hz und 500Hz und weitere 500 Stützstellen äquidistant zwischen 500Hz und 3000Hz verwendet.

Mit diesem DK -Startregler wird die μK -Iteration initialisiert, um die Einstellung für das Fitten der Scales $\gamma_{\mu, \text{fit}}$ zu ermitteln. Zunächst werden die Frequenzstützstellen für die DK -Iteration auch für die Berechnung von $\gamma_{\mu, \omega}$ verwendet und eine maximale Ordnung für die Fits von $\gamma_{\mu, \text{fit}}$ von z. B. 15 vorgegeben. Mit diesen Einstellungen wird eine Iteration des μK -Algorithmus durchgeführt. Anhand der $\gamma_{\mu, \omega}$ -Verläufe und der Abweichungen der Fits $\gamma_{\mu, \text{fit}}$ kann die Einstellung dann geeignet angepasst werden. Die Frequenzauflösung muss in kritischen Bereichen erhöht werden, in denen sich $\gamma_{\mu, \omega}$ sprunghaft ändert. Zudem ist die Fitordnung hoch genug einzustellen, um dem punktwisen Verlauf folgen zu können. Für das untersuchte System wird eine feine Auflösung von 3350 äquidistant verteilten Frequenzstützstellen im Bereich zwischen 120Hz und 460Hz eingestellt. Dort verursachen die dritten und vierten Gleich- und Gegenläufe einen sprunghaften μ_ω -Verlauf, da keine zusätzlichen komplexen Unsicherheiten wirksam sind, vgl. Abbildung 7.7. Der $\gamma_{\mu, \omega}$ -Verlauf in Abbildung 7.8 zeigt dazu passend kleine Werte im Bereich zwischen 120Hz und 460Hz, was den starken Einfluss der reellen Unsicherheit verdeutlicht. Für die Bereiche zwischen 0Hz und 120Hz sowie zwischen 460Hz und 3000Hz werden hingegen nur wenige hundert Stützstellen eingestellt, da diese vom komplexen Performance-Block bzw. der komplexen additiven Unsicherheit beeinflusst werden, so dass sich vergleichsweise glatte μ_ω -Verläufe ergeben. Der dargestellte Fit mit Ordnung

23 für die Scales $\gamma_{\mu,fit}$ zeigt gute Übereinstimmungen mit dem punktwisen Verlauf. Da das Modell neun Unsicherheits- und Performance-Ausgänge aufweist, erhöhen diese Filter die Systemordnung um 207.

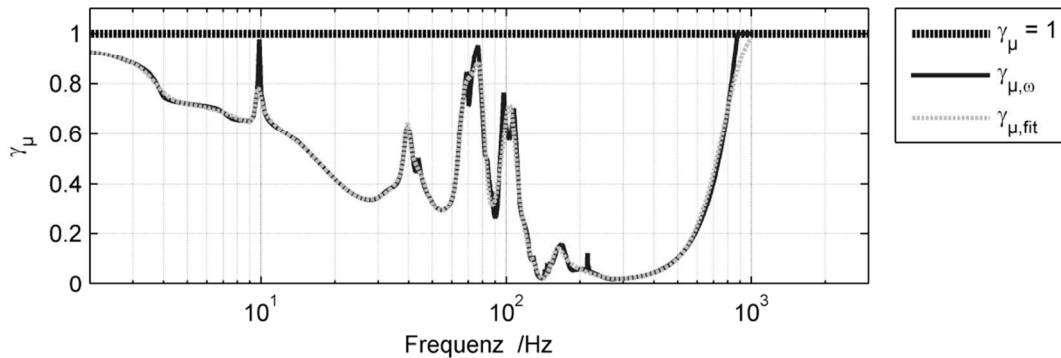


Abbildung 7.8: $\gamma_{\mu,\omega}$ -Verläufe & Fits der Scales $\gamma_{\mu,fit}$ (Gyroskopie-Prüfstand)

Synthesen in [104] und [117] für das identische Rotormodell unter Vernachlässigung der Verzögerungen durch die Peripherie sind deutlich weniger empfindlich und zeigen bessere Konvergenz. Dies ist auf deutlich glattere $\mu\omega$ -Verläufe, insbesondere im Bereich zwischen 120Hz und 460Hz zurückzuführen. Vermutlich ist die robuste Stabilität gegenüber der gyroskopischen Unsicherheit ohne die Verzögerung unkritischer. Dies legt nahe, dass eine Steigerung der Abtastrate die Konvergenz der μK -Iteration verbessern kann. Für das Modell ohne Verzögerungsglieder konnten in [104] auch einige Synthesen mit der $(D,G)K$ -Iteration durchgeführt werden. Die erreichten SSV-Werte des geschlossenen Regelkreises sind für diese jedoch deutlich höher als für entsprechende μK -Regeler.

7.6 Iterative Optimierung und Synthesergebnisse

Die in Abschnitt 5.6 eingeführte iterative Optimierung der Performance- und Syntheseinstellungen muss zur Anwendung mit der μK -Iteration erweitert werden, um zusätzlich den Fit der Scales $\gamma_{\mu,fit}$ zu optimieren. Die Fiteinstellungen sind besonders kritisch und müssen auch während der Optimierung der Performance-Einstellungen überprüft werden. Die μK -Iteration wird zunächst mit den in Abschnitt 7.5 gefundenen Einstellungen vollständig durchgeführt. Dabei ist zunächst ausschließlich der Fit von $\gamma_{\mu,fit}$ zu überprüfen und ggf. durch eine Anpassung der Frequenzstützstellen und Fitordnung zu optimieren. Wurde ein ausreichend glatter Verlauf $\gamma_{\mu,\omega}$ mit passendem Fit erreicht, kann die Optimierung der Performance-Einstellungen entsprechend Abschnitt 5.6 durchgeführt werden.

Es ist anzumerken, dass auch bei diesem methodischen Vorgehen in einigen Fällen zunächst keine Konvergenz der μK -Iteration erreicht werden kann. In diesem Fall sind freie Parameter wie die Begrenzungsfunktionen geringfügig zu variieren. Bereits geringe Änderungen der $\gamma_{\mu,\omega}$ -Verläufe infolge von minimalen Variationen der Performance-Einstellungen können das Fitten von $\gamma_{\mu,fit}$ positiv beeinflussen und somit die Konvergenz der Synthese ermöglichen.

Die μK -Iteration mit optimierten Einstellungen erreicht nach fünf Iterationen einen gemischten SSV-Wert von 0,95 bei einer Ordnung von 381. Mit dem in Abschnitt 5.7 eingesetzten Reduktionsverfahren von Wortelboer [97] kann die Reglerordnung auf 130 reduziert werden, ohne den SSV-Wert nennenswert zu verschlechtern. Zusätzlich wird eine Modaltransformation auf eine (block-)diagonal besetzte Systemmatrix durchgeführt. Dadurch sind deutlich weniger Multiplikationen bei der Berechnung der Stellgröße erforderlich, so dass eine Implementierung auf dem am Prüfstand vorhandenen dSPACE Echtzeitsystem möglich ist.

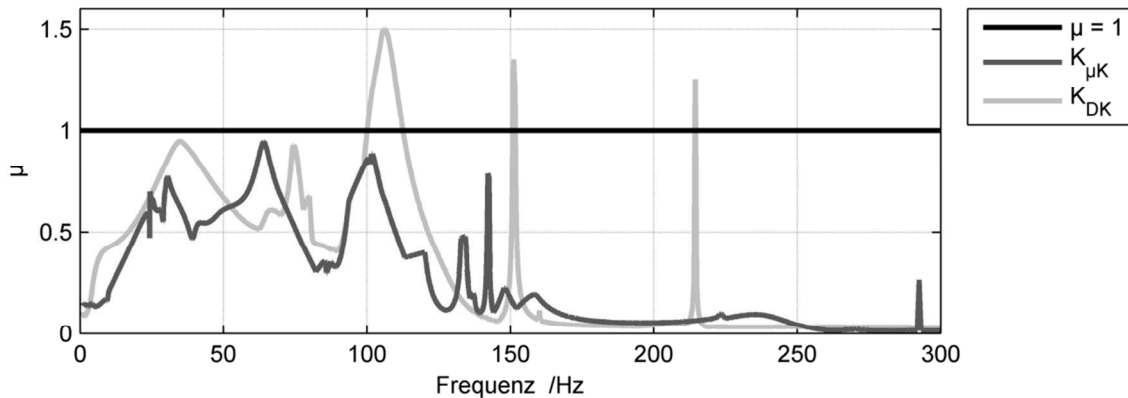


Abbildung 7.9: $\mu\omega$ -Verläufe für μK - und DK -Regelkreis mit reellen Unsicherheiten (Gyroskopie-Prüfstand)

Die $\mu\omega$ -Verläufe des DK -Startreglers und des μK -Reglers in Abbildung 7.9 erreichen nicht den gewünschten, glatten Verlauf, vgl. Abbildung 5.5. Insbesondere zwischen ca. 130 Hz und 170 Hz stellt sich ein relativ sprunghafter Verlauf ein. Ein reelles Stabilitäts-SSV μ_{Δ} wird nicht angegeben, da die Berechnung Werte größer 2 ergibt. Dies ist nicht plausibel, da der SSV inklusive Performance bereits für den DK -Regelkreis deutlich kleiner ist. Wie in Abschnitt 7.4 erklärt, ist die $\mu\omega$ -Berechnung hier besonders problematisch, da reelle nicht mit signifikanten komplexen Unsicherheiten kombiniert werden.

Entsprechend der SSV-Werte unter dem kritischen Wert von 1 ist der μK -Regelkreis für alle Drehzahlen im Betriebsbereich stabil und die zu minimierenden unsicheren Störübertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises liegen unterhalb der Begrenzungen, s. Abbildung 7.10.

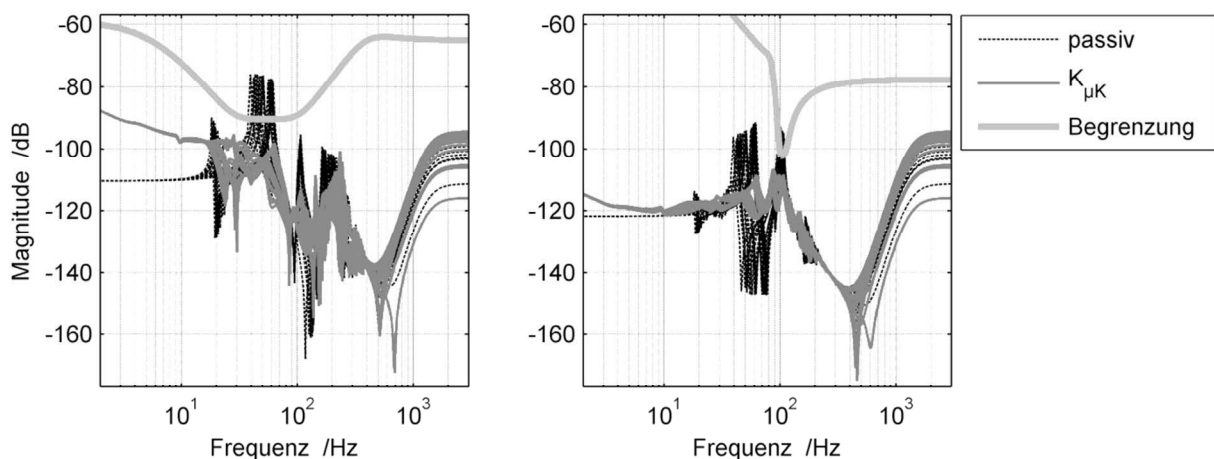


Abbildung 7.10: μK -Regelkreis, $F_{S1x} \rightarrow q_{1x}$ und $F_{S2x} \rightarrow q_{2x}$ (Gyroskopie-Prüfstand)

So kann trotz Schwierigkeiten beim Berechnen der gemischten μ_ω -Verläufe ein Regler gefunden werden, der garantierte Stabilität und Performance für den gesamten Unsicherheitsbereich erreicht. Mit der *DK-Iteration* für komplexe gyroskopische Unsicherheiten ist dies nicht möglich.

7.7 Validierung und Implementierung

Für den gezeigten Reglerentwurf wurden ausschließlich die Störübertragungsfunktionen **GS** begrenzt, vgl. Abbildung 7.6. Dazu werden modal skalierte Performance-Ausgänge mit Gegenlaufeliminierung verwendet, die nicht den Sensorausgängen entsprechen. Somit ist eine explizite Validierung für den gezeigten Entwurf nicht möglich. Zudem sind die Begrenzungen der Störübertragungen sehr steil eingestellt, so dass ausschließlich im Bereich der Gleichlaufresonanzen eine Reduktion erfolgt, vgl. Abbildung 7.10. Eine Betrachtung des gesamten Frequenzbereichs ist daher nicht notwendig.

Um die robuste Stabilität und Performance zu demonstrieren, wird daher ein quasistationärer Hochlaufversuch durchgeführt und mit Simulationen anhand der Scheibenschwingungen verglichen. Die definierte Unsicherheit entspricht direkt dem drehzahlabhängigen, gyroskopischen Term. Wird anhand des Hochlaufversuches also die Gültigkeit des drehzahlabhängigen Modells bestätigt, so kann auf die Gültigkeit des Modells mit reellen, gyroskopischen Unsicherheiten geschlossen werden.

Eine Validierung des vorgestellten Entwurfs war nicht möglich, da der Prüfstand bei Abschluss der Untersuchungen für andere Aufgaben umgebaut wurde. Es liegt jedoch eine Validierung für eine frühere Version des Reglerentwurfs vor, die in [117] vorgestellt wurde. Im Vergleich zum hier vorgestellten Regler erreicht dieser Entwurf eine etwas geringere Reduktion der zweiten Gleichlaufmode und einen *SSV* von 1,2. Dieser formal zu hohe *SSV*-Wert größer 1 wird durch die Überschreitung der Performance-Begrenzungsfunktionen im Bereich der zweiten Gleichlaufmode um 20% verursacht. Es liegt jedoch robuste Stabilität vor, so dass der Regler im gesamten relevanten Drehzahlbereich verwendet werden kann. Zur Unterscheidung wird der in dieser Arbeit vorgestellte Regler im Folgenden mit $\mathbf{K}_{\mu K, \text{best}}$ und der in [117] vorgestellte, validierte Regler mit $\mathbf{K}_{\mu K, \text{valid}}$ bezeichnet. Die Verbesserungen des hier gezeigten Entwurfs von $\mathbf{K}_{\mu K, \text{best}}$ im Vergleich zum Entwurf von $\mathbf{K}_{\mu K, \text{valid}}$ wurden durch optimierte Einstellungen für das Fitten der Filter $\gamma_{\mu, \text{fit}}$ erreicht. Da beide Regler mit demselben Modell entworfen wurden, wird aus der erfolgreichen Validierung für $\mathbf{K}_{\mu K, \text{valid}}$ auch auf Robustheit für $\mathbf{K}_{\mu K, \text{best}}$ am Prüfstand geschlossen.

Bei der Implementierung des Reglers $\mathbf{K}_{\mu K, \text{valid}}$ am Prüfstand treten zunächst Probleme mit den in Abschnitt 2.1 erwähnten, unerwünschten Effekten auf. Es treten dabei Schwingungen mit Frequenzen ab ca. 400 Hz auf, die durch die Regelung angefacht werden. Um dies zu vermeiden, ist eine Begrenzung der Reglerverstärkung ab 350 Hz notwendig. Eine Berücksichtigung im Entwurf war hier nicht möglich, da dies den Berechnungsaufwand und die Reglerordnung stark erhöht, vgl. Abschnitt 0. Stattdessen wurde die Regelung um einen digitalen Tiefpassfilter zweiter Ordnung mit der Eckfrequenz von 350 Hz erweitert. Eine Destabilisierung des Systems durch den zusätzlichen Phasenverzug ist dabei nicht zu erwarten, da das System robust gegenüber diesem Phasenverzug ist. Die additiven Unsicherheiten, vgl. Abbildung 7.10, bewirkten ab ca. 300 Hz starke Unsicherheiten für die Phase des Synthesystems, ähnlich wie in Abbildung 5.3. Aus Sicht der Regelung kann der zu-

sätzliche Tiefpassfilter der Regelstrecke zugeordnet werden, und die neue, gefilterte Strecke ist weiterhin im Unsicherheitsbereich des Modells enthalten. Zudem musste der Regler mit einem Faktor von 0,95 skaliert werden, da ansonsten weitere unerwünschte Phänomene eine Instabilität bei ca. 68 Hz Rotordrehfrequenz (4000 rpm) bewirken. Dies kann z. B. auf Modellierungsungenauigkeiten oder nichtlineare Effekte zurückzuführen sein. In zukünftigen Untersuchungen sollte dies durch eine zusätzliche unstrukturierte Unsicherheit vermieden werden.

Mit diesen Einstellungen kann der Regler $K_{\mu K, \text{valid}}$ am Prüfstand implementiert werden, um Hochlaufversuche zur Validierung durchzuführen. Abbildung 7.11 zeigt einen Vergleich der Schwingungsamplituden an Scheibe 1 in x -Richtung infolge von Unwuchterregung während eines quasi-stationären Hochlaufs des Rotors in Simulation (links) und Messung (rechts). Die Messdaten sind mit dem Wattmeter-Verfahren [136] gefiltert, um exklusiv die synchronen Schwingungsanteile vergleichen zu können. Simulation und Messung zeigen gute Übereinstimmungen, so dass die Gültigkeit des drehzahlabhängigen Modells unterstellt werden kann. Im linken Teil der Abbildung ist zudem der simulierte Hochlauf für den hier neu vorgestellten Regler $K_{\mu K, \text{best}}$ angegeben.

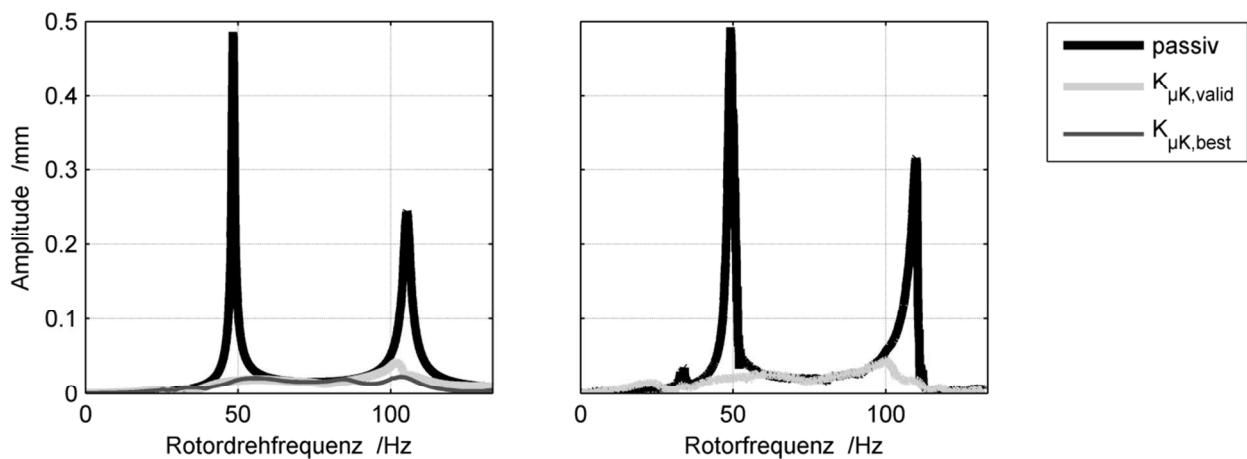


Abbildung 7.11: Hochlauf-Schwingungsamplituden – Simulation (links), Messung (rechts) (Gyroskopie-Prüfstand)

7.8 Diskussion der Ergebnisse

Zu Beginn des Entwurfsprozesses wird eine theoretische Modellierung des Rotorsystems durchgeführt, die eine Definition von reellen gyroskopischen Unsicherheiten ermöglicht. Die Ordnungen des nominellen Systems und der Unsicherheitsstruktur werden anschließend reduziert, um eine Synthese mit akzeptablem Aufwand und ausreichender Berechnungsgenauigkeit zu ermöglichen. Diese Modellierung ist allgemein auf elastische Rotoren übertragbar, deren gyroskopischer Effekt durch Scheibenelemente verursacht wird. Somit ist auch eine Anwendung in Verbindung mit der komplexen μ -Synthese mittels DK -Iteration, der $(D,G)K$ -Iteration und der nicht-glatten μ -Synthese von Apkarian [84] möglich.

Zur Lösung des Synthesystems mit reellen Unsicherheiten wird eine optimierte Version der μK -Iteration vorgestellt. Trotz numerischer Hürden in der Synthese wurde damit ein robuster Regler

gefunden, der den gesamten Drehzahlbetriebsbereich mit garantierter Stabilität und Performance regeln kann.

Die gezeigten Ergebnisse belegen, dass eine μ -Synthese für aktive Rotoren mit reellen gyroskopischen Unsicherheiten möglich ist. Diese erreicht Robustheit für wesentlich größere Drehzahlbereiche als die übliche komplexe μ -Synthese. Die Lösung für gemischt komplex-reelle Unsicherheiten über die μK -Iteration beinhaltet allerdings kritische Berechnungen von gemischten μ_ω -Verläufen, die deutliche Verbesserungspotenziale für zukünftige Weiterentwicklungen aufweisen. Wenn dies gelingt, können weiterhin eine Begrenzung der Stellübertragungsfunktionen vorgenommen sowie multiplikative Unsicherheiten zur Berücksichtigung von Modellierungsungenauigkeiten eingeführt werden. Die bisher nicht verwendete nicht-glatte μ -Synthese von Apkarian erreicht für einfache Beispielprobleme gute Ergebnisse [84]. Daher sollte in zukünftigen Untersuchungen der Einsatz zum Reglerentwurf mit dem hier entwickelten System geprüft werden.

Im Vergleich zu den Reglerentwürfen mit indirekten Unsicherheitsbeschreibungen in den Kapiteln 5 und 6 ist die Synthese mit direkten, reellen Unsicherheiten deutlich aufwendiger. Um die Unsicherheit mit dem Modell zu verbinden, muss eine aufwendige theoretische Modellbildung durchgeführt werden. Bei der Verwendung von reellen Unsicherheiten treten zudem Konvergenzprobleme des Lösungsalgorithmus auf.

Es ist anzumerken, dass auch mit einfacheren Synthesen ein Regler mit ähnlich guter Performance für den gesamten Drehzahlbereich des untersuchten Rotorsystems entworfen werden kann. Ein H_∞ -Regler von Schittenhelm et al. [15] erreicht dies jedoch ohne direkte Berücksichtigung von Unsicherheiten, so dass zahlreiche Iteration manuell durchgeführt werden müssen. Die Robustheit wird nachträglich überprüft und der Anwender muss frei entscheiden, wie diese verbessert werden kann. Entsprechend ist die Synthese nicht intuitiv und der Erfolg hängt stark von Fachkenntnis und Erfahrungen des Anwenders ab. Ähnliches gilt für einen iterativ optimierten LQG-Regler von Schittenhelm et al. [113]. Die Robustheit wird hier nach jedem Entwurf mit einem speziellen Gütefunktional geprüft und eine stochastische Optimierung des Entwurfs vorgenommen. Die in diesem Kapitel entwickelte Entwurfsmethodik berücksichtigt die Systemveränderung hingegen direkt in der Reglersynthese.

8 Diskussion der Entwurfsmethodiken

Es wurden Methodiken zum robusten Reglerentwurf mittels μ -Synthese für drei unterschiedliche Rotorsysteme vorgestellt. Die Entwürfe unterscheiden sich insbesondere durch die verwendeten Unsicherheitsbeschreibungen.

Ein Reglerentwurf zur Unterdrückung der *Oil Whip*-Instabilität von hydrodynamisch gelagerten Rotoren wurde für einen sehr elastischen Rotor ohne Gyroskopieeinfluss in der ersten Biegemode untersucht, vgl. Kapitel 5. Bei Sensor- und Aktorplatzierung außerhalb der Lagerung können der Einfluss der *Oil Whirl*-Mode sowie Kopplungen der Bewegungsrichtungen im Entwurf vernachlässigt werden. Dies ermöglicht die Verwendung von SISO-*Black Box*-Modellen, so dass auf eine theoretische Modellbildung des MIMO-Systems inklusive der Schmierfilmeigenschaften in den Gleitlagern verzichtet werden kann. Da eine indirekte Stabilisierung des *Oil Whips* durchgeführt wird, muss das instabile Systemverhalten darin nicht enthalten sein. Allerdings ist die Erweiterung des stabilen Drehzahlbereiches so nicht garantiert und muss im Anschluss geprüft werden. Dies ermöglicht einen relativ einfachen SISO-Entwurf mittels *DK-Iteration*. Zur Optimierung der Performance- und Syntheseinstellungen wird eine iterative Vorgehensweise mittels Analysen von μ_ω -Verläufen und den Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises vorgestellt. Die wichtigsten Schritte der Entwurfsmethodik sind:

- Konzeptionierung:
 - o Überprüfen, ob der Einfluss der *Oil Whirl*-Mode vernachlässigt werden kann:
Ja → fortfahren; Nein → Berücksichtigung der *Oil Whirl*-Mode, vgl. Kapitel 6
 - o Indirekte Unterdrückung der *Oil Whip*-Instabilität durch aktive Dämpfung der ersten Biegemode
 - o Vernachlässigung der Kopplungen zwischen horizontaler und vertikaler Bewegungsrichtung in den Gleitlagern für den Frequenzbereich der ersten Biegemode
→ Entwurf von dezentralen SISO-Reglern
- Modellbildung:
 - o Experimentelle Bestimmung der SISO-Frequenzgänge: Frequenzgänge von Aktor zu Sensor (exklusive Kopplung der Bewegungsrichtungen) für verschiedene Drehzahlen
 - o Auswahl eines SISO-Frequenzgangs in der Mitte des Unsicherheitsbereichs
 - o SISO-*Black Box*-Identifikation
- Unsicherheitseinstellung:
 - o Einstellen der indirekten, modalen und unstrukturierten Unsicherheiten, so dass alle experimentell ermittelten Frequenzgänge im unsicheren Modell enthalten sind
- Performance-Einstellung:
 - o Einstellung eines PDT₁-Reglers als Referenz für die Begrenzungen
 - o Begrenzung der Störübertragungen zur aktiven Dämpfung der ersten Biegemode
 - o Ggf. Begrenzung von Stellübertragung *CS* und inversen Eingangsempfindlichkeit T_i

-
- Synthese:
 - o Ermittlung geeigneter Syntheseparameter für die *DK-Iteration* (Frequenzstützstellen, Fitordnung)
 - Iterative Optimierung:
 - o Analyse von $\mu\omega$ -Verläufen und Performance-Übertragungsfunktionen des Regelkreises
→ Optimierung der Performance- und SyntheseEinstellungen
 - Experimentelle Validierung:
 - o Prüfen, ob die Begrenzungen bei Variationen der Rotordrehfrequenz eingehalten werden:
Ja → Entwurf validiert; Nein → Modellierung verbessern, Entwurf neu durchführen
 - o Prüfen des neuen, stabilen Drehzahlbereiches

Der erfolgreiche Einsatz dieser Methodik für den untersuchten Prüfstand bestätigt die Zulässigkeit der getroffenen Vereinfachungen sowie die Wirksamkeit der aktiven Dämpfung der ersten Biegemode zur Stabilisierung des *Oil Whips*. Die vorgestellte Strategie zur iterativen Optimierung der Performance-Einstellungen erlaubt eine anschauliche Analyse zur Anpassung der Begrenzungsfunktionen und kann allgemein auf den Reglerentwurf mittels μ -Synthese angewendet werden.

Verursacht die *Oil Whirl*-Mode eines elastischen Rotors in hydrodynamischen Lagern signifikante subharmonische Schwingungen, muss dies im Entwurf berücksichtigt werden. Die Eigenfrequenz der *Oil Whirl*-Mode liegt stets bei ca. der Hälfte der Rotordrehfrequenz, so dass eine starke Unsicherheit für diese Eigenfrequenzveränderung einzustellen ist. Da sich die zugehörige Eigenform nur geringfügig ändert, kann die Eigenfrequenzveränderung geeignet durch modale Unsicherheiten abgebildet werden. Der Unsicherheitsbereich ist hier deutlich größer als in bekannten Veröffentlichungen zu unsicheren Eigenwerten. Durchgeführte Untersuchungen zeigen, dass dazu komplexe modale Unsicherheiten gut geeignet sind. Im Gegensatz zu bekannten Anwendungen sind diese jedoch exakt und ohne Offset einzuführen. Für den untersuchten Prüfstand sind die Ergebnisse annähernd identisch mit Ergebnissen einer Synthese für reelle modale Unsicherheiten. Dies stellt eine direkte Erweiterung der zuvor untersuchten Methodik um die Berücksichtigung der *Oil Whirl*-Mode dar. So werden nun MIMO-Modellbildung und -Reglerentwurf durchgeführt sowie wesentlich größere modale Unsicherheitsbereiche verwendet. Die wichtigsten Schritte der Entwurfsmethodik sind:

- Konzeptionierung:
 - o Überprüfen, ob der Einfluss der *Oil Whirl*-Mode berücksichtigt werden muss:
Ja → fortfahren; Nein → Vereinfachungen entsprechend Kapitel 5
 - o Berücksichtigung der Kopplung von horizontaler und vertikaler Bewegungsrichtung
- Modellbildung:
 - o Experimentelle Bestimmung der SISO-Frequenzgänge: Frequenzgänge von Aktor zu Sensor (inkl. Kopplung der Bewegungsrichtungen) für verschiedene Drehzahlen
 - o Zusammensetzen zu MIMO-Frequenzgängen
 - o Auswahl eines MIMO-Frequenzgangs in der Mitte des Unsicherheitsbereiches
 - o MIMO-*Black Box*-Identifikation

- Unsicherheitseinstellung:
 - o Unsicherheitsbeschreibung:
 - Exakte, komplexe modale Unsicherheiten ohne Offset (empfohlen);
 - alternativ exakte, reelle modale Unsicherheiten
 - o Erweiterung um unstrukturierte Unsicherheiten zur Abdeckung des gesamten Dynamikbereiches sowie zur Berücksichtigung von Modellierungsungenauigkeiten
- Performance-Einstellung:
 - o Abschätzung der Begrenzung der Störübertragungen im Bereich der *Oil Whirl*-Mode zur *Oil Whirl*-Unterdrückung sowie ggf. der Biegemode zur Unterdrückung synchroner Schwingungen
- Synthese:
 - o Ermittlung geeigneter Syntheseparameter für die *DK-Iteration* (Frequenzstützstellen, Fitordnung) bzw. die μK -Iteration (zusätzlich Fiteinstellungen für $\gamma_{\mu, \text{fit}}$)
- Iterative Optimierung:
 - o (Für exakte, reelle Unsicherheiten: Fits der Scales $\gamma_{\mu, \text{fit}}$ überprüfen)
 - o Analyse von $\mu\omega$ -Verläufen und Performance-Übertragungsfunktionen des Regelkreises → Optimierung der Performance- und Synthese-einstellungen
 - o Ggf. Begrenzung von Stellübertragungen **CS** und inversen Eingangsempfindlichkeiten **T_i**
- Experimentelle Validierung:
 - o Prüfen, ob die Begrenzungen bei Variationen der Rotordrehfrequenz eingehalten werden:
 - Ja → Entwurf validiert; Nein → Modellierung verbessern, Entwurf neu durchführen

Es wurde gezeigt, dass für den vorliegenden Fall von sehr großen modalen Unsicherheiten exakte, komplexe modale Unsicherheiten ohne Offset geeignet sind. Die Synthese mit reellen modalen Unsicherheiten ist deutlich aufwendiger, ohne die Ergebnisse entscheidend zu verbessern.

Deutliche Unterschiede zeigen sich bei der Berücksichtigung des gyroskopischen Effektes elastischer Rotoren. Durch die Gyroskopie werden im Allgemeinen die Eigenfrequenzen und Eigenformen aller Biegemoden in unterschiedlichen Weisen drehzahlabhängig. Die aktive, robuste Schwingungsreduktion für diese Systeme in Kapitel 7 erfordert daher eine Unsicherheitsbeschreibung direkt über die mathematische Beschreibung des gyroskopischen Terms $\Omega \mathbf{G}_\Omega \dot{\mathbf{q}}$. Dies erfordert entsprechende Unsicherheits-Ein- und -Ausgänge, so dass eine theoretische *White*- oder *Grey Box*-Identifikation durchgeführt werden muss. Da der gyroskopische Term physikalisch stets rein reell ist, sollte eine Synthese mit gemischt komplex-reellen Unsicherheiten durchgeführt werden. In anderen Veröffentlichungen war ein solcher Entwurf aufgrund von Problemen mit den verfügbaren Lösungsverfahren für reelle Gyroskopie-Unsicherheiten bisher nicht möglich. In dieser Arbeit wurde eine Methodik vorgestellt, mit der diese Synthese zum ersten Mal erfolgreich durchgeführt werden konnte. Zunächst werden das nominelle Modell und die Unsicherheitsstruktur reduziert, so dass numerische Probleme der Synthese stark verringert werden können. Zudem wird eine modale Skalierung der Gegenlaufmoden für die Performance-Ausgänge durchgeführt, um eine unnötige Reduktion von Gegenlaufschwingungen zu vermeiden. Um das resultierende Synthesystem lösen zu können, wird eine optimierte Version der μK -Iteration verwendet. Die wichtigsten Schritte der Entwurfsmethodik sind:

- Konzeptionierung:
 - o Implementierung der μK -Iteration (nicht kommerziell verfügbar)
- Modellbildung:
 - o FE-Modellierung und *Grey Box*-Identifikation unbekannter Modellparameter
 - o Modale Reduktion des nominellen Modells unter Beachtung veränderlicher Kopplungen durch den gyroskopischen Term
 - o Einfügen geeigneter Performance-Ein- und -Ausgänge
 - o Modellierung der Peripherie zur Abbildung von relevanten Phasenverlusten bei minimaler Systemordnung
- Unsicherheitseinstellung:
 - o Reduktion der Unsicherheitsstruktur: Die gyroskopische Unsicherheit wird nur für Scheibenelemente berücksichtigt
 - o Einfügen von reellen parametrischen Unsicherheiten für die Drehkreisfrequenz Ω entsprechend des Betriebsdrehzahlbereiches
 - o Erweiterung um unstrukturierte Unsicherheiten zur Berücksichtigung von Modellierungsungenauigkeiten
- Performance-Einstellung:
 - o Modale Gegenlaufskalierung für die Performancekanäle
 - o Einführen von Begrenzungsfunktionen für die Störübertragungsfunktion zur Reduktion der Gleichlauf-Resonanzamplituden ohne Beeinflussung der Gegenläufe
- Synthese:
 - o *DK*-Startregler: Ermittlung geeigneter Syntheseparameter für die *DK*-Iteration (Frequenzstützstellen, Fitordnung)
 - o Einstellen der Fits der Scales $\gamma_{\mu, \text{fit}}$
 - o Einen Iterationsschritt der μK -Iteration ausführen
- Iterative Optimierung und Durchführung der μK -Iteration:
 - o Fits der Scales $\gamma_{\mu, \text{fit}}$ überprüfen
 - o Variation von einflussreichen Syntheseparametern wie den Begrenzungen, um glatte Verläufe für $\gamma_{\mu, \omega}$ und somit eine gute Konvergenz zu erreichen
 - o Durchführung der vollständigen μK -Iteration
 - o Analyse von μ_{ω} -Verläufen und Performance-Übertragungsfunktionen des Regelkreises → Optimierung der Performance- und Syntheseinstellungen
 - o Ggf. Begrenzung von Stellübertragungen **CS** und inversen Eingangsempfindlichkeiten **T_i** (in dieser Arbeit nicht durchgeführt, für weiterführende Untersuchungen empfohlen)
- Experimentelle Validierung:
 - o Prüfen, ob die Begrenzungen bei Variationen der Rotordrehfrequenz eingehalten werden: Ja → Entwurf validiert; Nein → Modellierung verbessern, Entwurf neu durchführen

Die Modellierung des nominellen Systems und der Unsicherheiten sowie die modale Skalierung der Gegenläufe in den Performance-Ausgängen können unabhängig vom verwendeten Lösungsverfahren eingesetzt werden. Dies gilt sowohl für die bisher üblichen, konservativen Lösungen mittels *DK*-Iteration, als auch für die nicht-glatte μ -Synthese von Apkarian [84]. Die Konvergenz der Iteration ist weiterhin kritisch, was vermutlich auf Ungenauigkeiten in der Berechnung von μ_{ω} -Verläufen für

gemischt komplex-reelle Unsicherheiten zurückzuführen ist. Da der vorgestellte Entwurf große Potenziale einer solchen Synthese zeigt, wird für folgende Untersuchungen eine Weiterentwicklung der Berechnung reeller μ_ω -Verläufe empfohlen, um die Konvergenz der μK -Iteration weiter zu verbessern.

Die Entwurfsmethodiken zur Unterdrückung von *Oil Whip*-Instabilität und *Oil Whirl*-Schwingungen weisen Ähnlichkeiten in der indirekten Unsicherheitsdefinition und experimentellen Modellbildung sowie in der Möglichkeit zur komplexen Synthese mittels *DK-Iteration* auf. Der Entwurf zur Unterdrückung der *Oil Whip*-Instabilität ermöglicht dabei einige Vereinfachungen, die den Entwurfsaufwand deutlich reduzieren.

Für die Berücksichtigung von gyroskopischen Unsicherheiten für elastische Rotoren ergeben sich deutliche Unterschiede. Da diese die Dynamik aller elastischen Biegemoden besonders stark beeinflussen, sind direkte Unsicherheiten und eine theoretische Modellbildung einzusetzen. Die Verwendung von komplexen Unsicherheiten führt hier zu großer Konservativität, so dass die üblicherweise verwendete *DK-Iteration* nur geringe Robustheit erreicht. Um dies zu überwinden wird hier der Einsatz von reellen Unsicherheiten untersucht. Das resultierende System mit gemischt reell-komplexen Unsicherheiten erfordert eine aufwendige Synthese mittels (optimierter) μK -Iteration, die hier erstmalig erfolgreich durchgeführt wurde. Die Methodik zum Aufstellen und Lösen des Synthesystems unterscheidet sich daher stark von den vorigen Entwürfen.

9 Zusammenfassung und Ausblick

In extremen Anwendungsfällen schnelldrehender Rotoren wie in Flugtriebwerken stoßen passive Maßnahmen zur Reduktion von Biegeschwingungen an technische oder wirtschaftliche Grenzen, so dass die aktive Schwingungsminderung eine vielversprechende Alternative darstellt. Die Dynamik der Biegeschwingungen dieser Systeme verändert sich vielfach deutlich mit der Rotordrehfrequenz, was hauptsächlich auf drehzahlabhängige Eigenschaften hydrodynamischer Schmierfilme in Gleitlagern oder auf den gyroskopischen Effekt zurückzuführen ist. In dieser Arbeit wurden Reglerentwürfe untersucht, die Robustheit gegenüber diesen veränderlichen Systemdynamiken erreichen. Eine Analyse verfügbarer robuster Regelverfahren zeigt die Eignung der μ -Synthese zur Regelung elastischer Strukturen. Zur Berücksichtigung unterschiedlicher Unsicherheiten sind dabei verschiedene Lösungsverfahren und Entwurfsmethodiken geeignet.

Für hydrodynamisch gelagerte Rotoren werden üblicherweise PID- und Zustandsregler zur Unterdrückung der *Oil Whip*-Instabilität verwendet. Eine zufriedenstellende Reduktion von synchronen Unwuchtschwingungen wird mit diesen Reglern meist nicht erreicht. Daher werden oft zusätzliche, separat entworfene Regler für die Schwingungsreduktion verwendet. Veröffentlichungen zum Reglerentwurf für die Unterdrückung von starken *Oil Whirl*-Schwingungen sind bisher nicht verfügbar. Für elastische Rotoren mit starkem gyroskopischem Effekt sind neben einfachen Regelungen auch robuste Entwürfe mittels μ -Synthese verfügbar, insbesondere im Zusammenhang mit aktiven Magnetlagern. Die erreichbare Robustheit ist hier aufgrund von konservativen komplexen Unsicherheitsbeschreibungen jedoch gering. Zudem werden keine eindeutigen Methodiken zum Reglerentwurf mit passender Modellbildung angegeben. Für diese drei rotordynamischen Systeme wurden die auftretenden Unsicherheiten analysiert. Zum robusten Reglerentwurf mittels μ -Synthese werden übertragbare Methodiken für die Modellbildung, Performance- und SyntheseEinstellung anhand von repräsentativen Prüfständen vorgestellt.

Die veränderliche Dynamik von sehr elastischen, horizontalen Rotoren in kreisrunden hydrodynamischen Gleitlagern wirkt sich unterhalb der *Oil Whip*-Instabilitätsgrenzdrehzahl in vielen Fällen fast ausschließlich an den Lagerpositionen aus. Ab der *Oil Whip*-Instabilitätsgrenzdrehzahl ist die Dämpfung der ersten Biegemode negativ und die Biegeschwingungen klingen auf. Für den Reglerentwurf zur Stabilisierung derartiger Systeme mit gleichzeitiger Reduktion von Biegeschwingungen können stark vereinfachende Annahmen getroffen werden, sofern die Aktoren und Sensoren außerhalb der Lager positioniert werden. Die Vereinfachungen bestehen in Vernachlässigungen der Kopplungen von horizontaler und vertikaler Bewegungsrichtung sowie der *Oil Whirl*-Moden. Die Dynamik des vereinfachten Systems verändert sich nur noch geringfügig mit der Rotordrehzahl. Zudem können dezentrale SISO-Regler für die Bewegungsrichtungen entworfen werden. Weiterhin wird die Stabilisierung des *Oil Whips* indirekt durch aktive Erhöhung des Dämpfungsgrades für die erste Biegemode des Rotors erreicht. Dies ermöglicht die Beschreibung der Systemveränderung mittels relativ kleinen indirekten Unsicherheiten für experimentell ermittelte *Black Box*-Modelle. So kann insbesondere auf eine aufwendige theoretische Modellbildung und Linearisierung für die hydrodynamischen Gleitlagereigenschaften verzichtet werden. Zudem kann das Syntheseproblem mit

relativ geringen modalen Unsicherheiten mit der bewährten *DK-Iteration* gelöst werden. Zur iterativen Optimierung der Performance- und Syntheseeinstellungen wurde eine anschauliche Strategie entwickelt. Anhand der μ_ω -Verläufe und der Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises werden kritische Frequenzbereiche identifiziert und auf geeignete Maßnahmen zur Verbesserung der Robustheit geschlossen. Die Ergebnisse für den untersuchten Prüfstand zeigen, dass dieser methodische Entwurf hohe Performance und eine deutliche Vergrößerung des Stabilitätsbereiches erreichen kann. Da die Stabilisierung indirekt erfolgt, wird für zukünftige Untersuchungen eine genaue Analyse des Stabilitätsbereiches empfohlen, da am untersuchten Prüfstand bis zur maximalen Motordrehzahl keine Instabilität mehr erreicht wird. Weiteres Potenzial besteht in der Berücksichtigung des instabilen Verhaltens im Reglerentwurf, so dass die Stabilisierung direkt durch die Synthese mit geeigneten Unsicherheiten garantiert werden kann. Dies erfordert jedoch erhöhten Aufwand für die experimentelle Identifikation des Systemverhaltens im instabilen Bereich.

Hydrodynamisch gelagerte Rotoren mit starken *Oil Whirl*-Schwingungen erfordern eine Erweiterung der vorigen Methodik zur Berücksichtigung der Kopplungen horizontaler und vertikaler Bewegungsrichtungen und der *Oil Whirl*-Mode. Die Eigenfrequenz dieser Mode liegt stets bei halber Rotorfrequenz und verändert sich im Drehzahlbetriebsbereich somit stark. Da sich die Eigenformen der *Oil Whirl*-Moden dabei nur geringfügig ändern, kann die Systemveränderung durch modale Unsicherheiten beschrieben werden. Diese Unsicherheit für die *Oil Whirl*-Eigenfrequenzen ist hier um ein Vielfaches größer als in bekannten Veröffentlichungen zum Einsatz modaler Unsicherheiten. Die üblicherweise verwendeten vereinfachten, komplexen modalen Unsicherheiten mit Offset des nominalen Pols können hier nicht verwendet werden. Es wurde gezeigt, dass stattdessen exakte modale Unsicherheiten zu verwenden sind, die komplex ohne Offset zu beschreiben sind. Für den untersuchten Prüfstand stimmen die Ergebnisse dieser Synthese annähernd mit den Ergebnissen einer Synthese mit konservativitätsfreien reellen Unsicherheiten überein. Auf die deutlich aufwendigere und numerisch anfällige Synthese mittels μK -Iteration für gemischt komplex-reelle Unsicherheiten kann daher verzichtet werden. Eine Analyse der geschlossenen Regelkreise lässt darauf schließen, dass die Erweiterung des Unsicherheitsbereiches für derartige Systeme im Allgemeinen unkritisch ist. Dann kann auch für ähnliche Systeme erwartet werden, dass die *DK-Iteration* die optimale Robustheit erreicht. Die Konservativität durch Erweiterung des Unsicherheitsbereichs um komplexe Werte, die auch Pollagen in der instabilen rechten Halbebene erlaubt, ist hier also vernachlässigbar gering. Das vorgestellte Entwurfskonzept mit indirekten Unsicherheiten erlaubt weiterhin die Verwendung von experimentell ermittelten *Black Box*-Modellen, so dass auch hier auf eine Modellbildung für die hydrodynamischen Lager verzichtet werden kann. Die zuvor eingeführte Optimierungsstrategie zur iterativen Einstellung der Performance- und Syntheseeinstellungen kann direkt übernommen werden, und wird durch eine filigrane Performance-Einstellung durch frequenzpunktweise Festlegung und anschließendes Fitten der Begrenzungsfunktion erweitert. Die durchgeführte Validierung des vorgestellten Entwurfs ist unvollständig, da der verwendete Prüfstand extreme Limitierungen der Stellgröße aufweist. Dadurch kann keine gleichzeitige Reduktion von synchronen Biegeschwingungen durchgeführt werden. Zudem entstehen die untersuchten *Oil Whirl*-Schwingungen am verwendeten Prüfstand erst durch Wechselwirkungen mit einem Kraftregelkreis zur Vormagnetisierung des verwendeten elektromagnetischen Aktors. Zur vollständigen Validierung sollte daher in zukünftigen Untersuchungen ein System mit relevanten *Oil Whirl*-Schwingungen im passiven Betrieb in Verbindung mit einem Aktor für höhere Stellkräfte behandelt werden. Weitere

Potenziale bestehen in der Untersuchung von theoretischen Modellierungen inklusive des Lagerverhaltens, um eine simulationsgestützte Vorauslegung dieser mechatronischen Systeme zu ermöglichen.

Starke gyroskopische Effekte beeinflussen im Allgemeinen sowohl die Eigenfrequenzen als auch die Eigenformen aller Eigenmoden eines rotordynamischen Systems, so dass eine direkte Unsicherheitsdefinition der gyroskopischen Terme erforderlich ist. Die übliche Verwendung von komplexen Unsicherheiten für den physikalisch rein reellwertigen Gyroskopieterm erreichte dabei bisher nur relativ geringe Robustheit. Zwei Veröffentlichungen erwähnen einen Versuch der Synthese mit reellen Unsicherheiten, die jedoch aufgrund von Problemen der Synthesgorithmen $(D,G)K$ - und μK -Iteration scheitern. In dieser Arbeit wurde eine Methodik vorgestellt, mit der ein solcher Entwurf erstmals erfolgreich durchgeführt werden kann, wie anhand eines Prüfstands für einen elastischen Rotor mit aktivem Piezolager gezeigt wurde. Die Verwendung von direkten Unsicherheiten erfordert eine aufwendige theoretische Modellbildung mittels *Grey Box*-Identifikation, um die benötigten Ein- und Ausgänge der gyroskopischen Unsicherheiten bereitstellen zu können. Derartige Modelle weisen relativ hohe Ordnungen des nominellen Systems und der Unsicherheitsstruktur auf, die eine Synthese zunächst unmöglich machen. Es wurden Vorgehensweisen zur Reduktion des nominellen Systems und der Struktur gyroskopischer Unsicherheiten entwickelt. Um eine Synthese für das reduzierte Modell mit reellen Unsicherheiten zu ermöglichen, wird eine Optimierung der μK -Iteration von Sehr [104] verwendet, worin eine genauere LMI-Berechnungen der μ_ω -Verläufe für gemischt komplex-reelle Unsicherheiten eingesetzt wird. Zusätzlich wurden hier Verbesserungen durch den Einsatz von DK -Startreglern und erweiterte Einstellungen für das Fitten der Filterfunktionen $\gamma_{\mu,fit}$ während der Iteration vorgestellt. So kann die Synthese für reelle gyroskopische Unsicherheiten erfolgreich durchgeführt werden, wie der Entwurf für den untersuchten Prüfstand zeigt. Obwohl Unwuchten die Gegenlaufmoden des Rotorsystems üblicherweise nicht anregen, werden die Gegenlaufresonanzamplituden in bekannten Ansätzen reduziert, so dass zusätzliche Konservativität entsteht. Daher wird hier eine modale Skalierung verwendet, um die unerwünschten Einflüsse der Gegenlaufmoden auf die Performance-Ausgänge zu verringern. So kann mit geeigneten Begrenzungsfunktionen eine selektive Reduktion der Gleichlaufmoden im Drehzahlbereich des Rotors erreicht werden. Diese Modellierung des unsicheren Systems inklusive modaler Gegenlaufskalierung ist allgemein für elastische Rotoren mit gyroskopischem Effekt anwendbar und kann daher unabhängig vom verwendeten Lösungsalgorithmus eingesetzt werden. Hier wurde die optimierte μK -Iteration für das skalierte, reduzierte Modell verwendet, was erstmals eine erfolgreiche Synthese mit reellen gyroskopischen Unsicherheiten ermöglicht. Die Konvergenz des Algorithmus ist jedoch weiterhin kritisch. Da dies auf die weiterhin nicht exakte Berechnung des μ_ω -Verlaufs für gemischt komplex-reelle Unsicherheiten zurückgeführt wird, sollte die μ_ω -Berechnung zukünftig weiter verbessert werden. Dazu könnten z. B. sog. YALMIP LMI-Solver wie von Löfberg [149] oder die kürzlich vorgestellte „probabilistic“ Berechnung von Mánfay et al. [150] eingesetzt werden. Ein ausführlicher Überblick aktueller Berechnungsmöglichkeiten des strukturierten Singulärwertes wurde kürzlich von Kim und Braatz [151] angegeben. Als Alternative zur μK -Iteration sollte zudem die nicht-glatte μ -Synthese von Apkarian [84] für die hier vorgestellte Modellierung des unsicheren Systems untersucht werden. Wenn somit eine zuverlässige Konvergenz erreicht wird, kann die Stellgrößenbeschränkung direkt als Performance-Anforderung

im Entwurf berücksichtigt werden. Dies war hier unmöglich, so dass ein zusätzlicher Tiefpassfilter eingefügt werden musste.

Es zeigt sich, dass die Drehzahlabhängigkeiten von Rotorsystemen infolge von hydrodynamischen Gleitlagern und gyroskopischen Effekten sehr unterschiedlich ausfallen. Dies führt zu unterschiedlichen Unsicherheitsdefinitionen im robusten Reglerentwurf zur Schwingungsreduktion und ggf. zur Stabilisierung. Die vorgestellten Methodiken zur Berücksichtigung der verschiedenen Unsicherheiten zeigen dementsprechend ebenfalls deutliche Unterschiede.

Auf allgemeinerer, regelungstechnischer Ebene zeigt der vorgestellte Entwurf zur Berücksichtigung gyroskopischer Unsicherheiten eine erfolgreiche robuste Reglersynthese für eine elastische Struktur mit großen, reellen Unsicherheiten. Solche Entwürfe sind in der Literatur kaum zu finden, so dass die vorgestellte, optimierte μK -Iteration einen Beitrag zu diesem Forschungsthema leistet. Reelle Beschreibungen sind insbesondere für parametrische Unsicherheiten vorteilhaft. Bei theoretischer Modellbildung können diese Unsicherheiten sehr intuitiv definiert werden, da sie einen direkten Bezug zu physikalischen Parametern aufweisen. Dies betrifft z. B. Kontaktsteifigkeiten zwischen Bauteilen, die stark von Fertigungstoleranzen beeinflusst werden.

Literaturverzeichnis

- [1] R. M. Murray, K. J. Astrom, S. P. Boyd, R. W. Brockett, und G. Stein, „Control in an Information Rich World: Report of the Panel on Future Directions in Control, Dynamics, and Systems“, CalTech / Air Force Office of Scientific Research, Juni 2002.
- [2] O. Lindenborn, „Robuste Spaltregelung der Hochdruckturbine im Flugtriebwerk“, Dissertation, TU Darmstadt, Darmstadt (Deutschland), 2010.
- [3] R. Gasch, R. Nordmann, und H. Pfützner, *Rotordynamik*, 2. Aufl. Berlin (Deutschland): Springer, 2001.
- [4] H. Schneider, *Auswuchttechnik*, 7. Aufl. Berlin (Deutschland): Springer, 2007.
- [5] J. M. Vance, *Rotordynamics of Turbomachinery*. New York, NJ (USA): John Wiley & Sons, 1988.
- [6] R. Markert, *Rotordynamik - Skript zur Vorlesung*, 1. Aufl. Darmstadt (Deutschland): TU Darmstadt - Fachgebiet Strukturodynamik, 2003.
- [7] E. Hering und K.-H. Modler, *Grundwissen des Ingenieurs*, 14. Aufl. München (Deutschland): Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, 2007.
- [8] R. Nordmann, *Mechatronische Systeme im Maschinenbau I*, 2. Aufl. Aachen (Deutschland): Shaker Verlag, 2001.
- [9] R. Isermann und M. Münchhof, *Identification of Dynamic Systems: An Introduction with Applications*. Berlin (Deutschland): Springer, 2010.
- [10] T. Bohlin, *Practical Grey-Box Process Identification: Theory and Applications*. London (UK): Springer, 2006.
- [11] W. Gawronski, *Balanced Control of Flexible Structures*. Berlin (Deutschland): Springer, 1995.
- [12] P. Koutsovasilis, „Model Order Reduction in Structural Mechanics“, Dissertation, TU Dresden, Dresden (Deutschland), 2009.
- [13] F. C. Nelson, „Rotor Dynamics without Equations“, *International Journal of Comadem*, Bd. 10, Nr. 3, S. 2–10, Juli 2007.
- [14] R. Nordmann, „Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenformen von Turborotoren mit Gleitlagern Spalterregung, äußerer und innerer Dämpfung“, Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, Darmstadt (Deutschland), 1974.
- [15] R. S. Schittenhelm, B. Riemann, und S. Rinderknecht, „Modal H_∞ -Control in the Context of a Rotor Being Subject to Unbalance Excitation and Gyroscopic Effect“, gehalten auf der ASME Turbo Expo 2013, San Antonio, TX (USA), 2013.
- [16] A. Lanzon und P. Tsiotras, „A Combined Application of H_∞ Loop Shaping and μ -Synthesis to Control High-Speed Flywheels“, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Bd. 13, Nr. 5, S. 766–777, Sep. 2005.
- [17] B. Schlecht, *Maschinenelemente 2: Getriebe, Verzahnungen und Lagerungen*, 2. Aufl. Addison-Wesley Verlag, 2009.
- [18] Y. Hori, *Hydrodynamic Lubrication*, 1. Aufl. Tokyo (Japan): Springer, 2006.
- [19] „Hydrodynamisches Gleitlager – Wikipedia“. [Online]. Verfügbar unter: http://de.wikipedia.org/wiki/Hydrodynamisches_Gleitlager. [Zugriffen: 05-Juni-2013].

-
- [20] H. J. Merker, *Zusammenhang zwischen Zapfenkraft und Zapfenbewegung beim Kreislager und Kippsegmentlager*, Bd. 11 (33). Düsseldorf (Deutschland): Fortschritt-Berichte der VDI Zeitschriften, 1980.
- [21] B. L. Newkirk und H. D. Taylor, „Shaft Whipping due to Oil Action in Journal Bearings“, *General Electric Review*, Bd. 28, Nr. 8, 1925.
- [22] A. Sommerfeld, „Zur Hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung“, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Bd. 50, S. 97–155, 1904.
- [23] G. Vogelpohl, „Reibung und Geometrische Form“, *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft*, Bd. 21, S. 327–344, 1969.
- [24] A. Stodola, „Kritische Wellenstörung infolge der Nachgiebigkeit des Ölpolsters im Lager“, *Schweizerische Bauzeitung*, Bd. 85, Nr. 21, S. 265–266, 1925.
- [25] O. Reynolds, „On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower’s Experiments, Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil“, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Bd. 177, S. 157–234, 1886.
- [26] A. Z. Szeri, *Fluid Film Lubrication*, 2. Aufl. Cambridge (UK): Cambridge University Press, 2010.
- [27] G. B. DuBois und F. W. Ocvirk, „Analytical Derivation and Experimental Evaluation of Short-Bearing Approximation for Full Journal Bearings“, US Gov. Print. Off., Washington, DC (USA), 1157, 1953.
- [28] D. Childs, *Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling, and Analysis*, 1. Aufl. New York, NJ (USA): Wiley-Interscience, 1993.
- [29] J. Rübel, „Vibrations in Nonlinear Rotordynamics: Modelling, Simulation, and Analysis“, Dissertation, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, Heidelberg (Deutschland), 2009.
- [30] C. R. Burrows, M. N. Sahinkaya, und O. S. Turkay, „An Adaptive Squeeze-Film Bearing“, *Journal of Tribology*, Bd. 106, 1984.
- [31] H. P. Wölfel, *Umdruck zur Vorlesung Maschinendynamik*. Darmstadt (Deutschland): TU Darmstadt - Fachgebiet Maschinendynamik, 2003.
- [32] C. Kaletsch, „Vergleich einer piezoelektrischen Lagerabstützung mit Quetschdämpfern zur Schwingungsreduktion eines elastischen Rotors“, Dissertation, TU Darmstadt, Darmstadt (Deutschland), 2011.
- [33] F. Fomi Wamba, „Automatische Auswuchtstrategie für einen magnetgelagerten elastischen Rotor mit Auswuchtaktoren“, Dissertation, TU Darmstadt, Darmstadt (Deutschland), 2009.
- [34] K. Tammi, G. Buckner, und J. Kortelainen, „Magneto-Rheological Squeeze-Film Damper for Semi-Active Control of Rotor Vibrations“, gehalten auf der The 9th International Conference on Motion and Vibration Control, München (Deutschland), 2008.
- [35] H.-G. Horst, „Aktive Schwingungsminderung an elastischen Rotoren mittels piezokeramischer Aktoren“, Dissertation, TU Darmstadt, Darmstadt (Deutschland), 2004.
- [36] H. Ulbrich, „A Comparison of Different Actuator Concepts for Applications in Rotating Machinery“, *International Journal of Rotating Machinery*, Bd. 1, Nr. 1, S. 61–71, 1994.
- [37] G. Li, Z. Lin, P. E. Allaire, B. Huang, W. Jiang, E. S. Zorzi, und R. O. Bartlett, „Stabilization of a High Speed Rotor with Active Magnetic Bearings by a Piecewise μ -Synthesis Controller“, in *Proceedings of the 6th International Symposium on Magnetic Suspension Technology*, Turin (Italien), 2001, S. 416–421.

- [38] S. Kern, C. Ehmman, R. Nordmann, M. Roth, A. Schiffler, und E. Abele, „Active Damping of Chatter Vibrations with an Active Magnetic Bearing in a Motor Spindle Using μ -Synthesis and an Adaptive Filter“, gehalten auf der The 8th International Conference on Motion and Vibration Control, Daejeon (Korea), 2006.
- [39] B. Riemann, E. A. Perini, K. Lucchesi Cavalca, H. Fiori Castro, und S. Rinderknecht, „Oil Whip Instability Control Using μ -Synthesis Technique on a Magnetic Actuator“, *Journal of Sound and Vibration*, Bd. 332, Nr. 4, S. 654–673, Feb. 2013.
- [40] R. Wimmel, „Strukturkonformes aktives Interface - Einsatz erfahrung, Weiterentwicklung und Transfer in rotierende Systeme“, in *Tagungsband zum 8. Adaptronic-Congress*, Göttingen (Deutschland), 2004.
- [41] A. B. Palazzolo, R. R. Lin, R. M. Alexander, A. F. Kascak, und G. Montague, „Test and Theory for Piezoelectric Actuator-Active Vibration Control of Rotating Machinery“, *Journal of Vibration and Acoustics*, Bd. 113, Nr. 2, S. 167–175, 1991.
- [42] M. S. Senousy, N. Rajapakse, D. Mumford, und M. S. Gadala, „Self-Heat Generation in Piezoelectric Stack Actuators Used in Fuel Injectors“, *Smart Materials and Structures*, Bd. 18, Nr. 4, Apr. 2009.
- [43] J. Lunze, *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf Einschleifiger Regelungen*, 9. Aufl. Berlin (Deutschland): Springer, 2012.
- [44] J. Lunze, *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*, 7. Aufl. Berlin (Deutschland): Springer, 2012.
- [45] K. Zhou, J. C. Doyle, und K. Glover, *Robust and Optimal Control*. Upper Saddle River, NJ (USA): Prentice Hall, 1996.
- [46] H. Unbehauen, *Regelungstechnik I: Klassische Verfahren zur Analyse und Synthese linearer kontinuierlicher Regelsysteme, Fuzzy-Regelsysteme*. Wiesbaden (Deutschland): Vieweg + Teubner, 2008.
- [47] K. Müller, *Entwurf Robuster Regelungen*. Stuttgart (Deutschland): Teubner, 1996.
- [48] J. Raisch, *Mehrgrößenregelung im Frequenzbereich*. München (Deutschland): Oldenbourg, 1994.
- [49] V. Balakrishnan, „Linear Matrix Inequalities in Robust Control: A Brief Survey“, in *Proceedings of 15th International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems*, South Bend, IN (USA), 2002.
- [50] H. Unbehauen, *Regelungstechnik II: Zustandsregelungen, digitale und nichtlineare Regelsysteme*. Wiesbaden (Deutschland): Vieweg, 2007.
- [51] H. Unbehauen, *Regelungstechnik III: Identifikation, Adaption, Optimierung*. Wiesbaden (Deutschland): Vieweg + Teubner, 2011.
- [52] K. J. Astrom und B. Wittenmark, *Adaptive Control*. Mineola, NY (USA): Dover Publications, 2008.
- [53] O. Föllinger, *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. Berlin (Deutschland): VDE Verlag, 2013.
- [54] O. Föllinger und G. Roppenecker, *Optimale Regelung und Steuerung*. München (Deutschland): Oldenbourg, 1994.
- [55] R. E. Kalman, „A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems“, *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering (Series D)*, Bd. 82, Nr. 1, S. 35–45, März 1960.

- [56] U. Konigorski, *Mehrgrößenreglerentwurf im Zustandsraum*. Darmstadt (Deutschland): TU-Darmstadt - Institut für Automatisierungstechnik, Fachgebiet Regelungstechnik und Mechatronik, 2008.
- [57] S. Skogestad und I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, 2. Aufl. Chichester (UK): John Wiley & Sons, 2005.
- [58] S. Toffner-Clausen, *System Identification and Robust Control*, 1. Aufl. Berlin (Deutschland): Springer, 1996.
- [59] G. Stein, „Respect the Unstable“, *IEEE Control Systems Magazine*, Bd. 23, Nr. 4, S. 12–25, Aug. 2003.
- [60] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub, und M. Chilali, „The LMI Control Toolbox“, in *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, Walt Disney World Resort Lake Buena Vista, FL (USA), 1994, Bd. 3, S. 2038–2041.
- [61] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, und M. Chilali, *LMI Control Toolbox, User's Guide*. Natick, MA (USA): The Mathworks, Inc., 1995.
- [62] C. Scherer, P. Gahinet, und M. Chilali, „Multi-Objective Output-Feedback Control via LMI Optimization“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Bd. 42, S. 896–911, Juli 1997.
- [63] U. Konigorski, „Entwurf robuster, strukturbeschränkter Zustandsregelungen durch Polgebietsvorgabe mittels Straffunktionen“, *Automatisierungstechnik at*, Bd. 35, S. 250–254, 1987.
- [64] E. Lantto, V. Hölttä, K. Zenger, und V. Tommila, „Smooth Frequency Domain Parametric Optimization in Loop-Shaping Control“, in *Proceedings of the 12th European Control Conference*, Zürich (Schweiz), 2013.
- [65] A. Tesi und A. Vicino, „Robustness Analysis for Uncertain Dynamical Systems with Structured Perturbations“, in *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*, Austin, TX (USA), 1988, Bd. 1, S. 519–525.
- [66] K. Gu und N. K. Loh, „Direct Computation of Stability Bound for Systems with Polytopic Uncertainties“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Bd. 38, Nr. 2, S. 363–366, März 1993.
- [67] P. M. Young, „Structured Singular Value Approach for Systems with Parametric Uncertainty“, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Bd. 11, Nr. 7, S. 653–680, Juni 2001.
- [68] H. Kwakernaak, „Optimal Low-Sensitivity Linear Feedback Systems“, *Automatica*, Bd. 5, Nr. 3, S. 279–285, Mai 1969.
- [69] J. C. Doyle und G. Stein, „Robustness With Observers“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Bd. 24, Nr. 4, S. 607–611, Aug. 1979.
- [70] L. Ravanbod, D. Noll, und P. Apkarian, „An Extension of the Linear Quadratic Gaussian-Loop Transfer Recovery Procedure“, *IET Control Theory Applications*, Bd. 6, Nr. 14, S. 2269–2278, Apr. 2012.
- [71] S. P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, und V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Bd. 15. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- [72] I. R. Petersen, „Minimax LQG Control“, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, Bd. 16, Nr. 3, S. 309–323, Jan. 2006.
- [73] I. R. Petersen, V. A. Ugrinovskii, und A. V. Savkin, *Robust Control Design Using H_∞ Methods*. London (UK): Springer, 2000.
- [74] H. R. Pota, S. Pulthasthan, und I. R. Petersen, „Acoustic Noise Reduction in Sound-Structure Interaction System“, in *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, Paradise Island (Bahamas), 2004, Bd. 5, S. 5071–5076.

- [75] G. X. Athanasius und J. G. Zhu, „Design of Robust Controller for Wind Turbines“, gehalten auf der 2nd International Conference on Emerging Trends in Engineering and Technology, Nagpur (Indien), 2009, S. 7–12.
- [76] J. M. Maciejowski, *Multivariable Feedback Design*. Wokingham (UK): Addison-Wesley, 1989.
- [77] J. C. Doyle, „Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties“, *Control Theory and Applications, IEE Proceedings D*, Bd. 129, Nr. 6, S. 242–250, 1982.
- [78] J. C. Doyle, „Synthesis of Robust Controllers and Filters“, in *Proceedings of the 22nd IEEE Conference on Decision and Control*, San Antonio, TX (USA), 1983, Bd. 22 (1), S. 109–114.
- [79] P. M. Young, „Controller Design with Mixed Uncertainties“, in *Proceedings of the 1994 American Control Conference*, Baltimore, MD (USA), 1994, Bd. 2, S. 2333–2337.
- [80] S. Toffner-Clausen, P. Andersen, J. Stoustrup, und H. H. Niemann, „A New Approach to μ -Synthesis for Mixed Perturbation Sets“, in *Proceedings of the 3rd European Control Conference*, Rom (Italien), 1995, S. 147–152.
- [81] „Robust Control Toolbox - MATLAB“, *Robust Control Toolbox - MATLAB*, Aug-2013. [Online]. Verfügbar unter: <http://www.mathworks.com/products/robust/>. [Zugegriffen: 23-Aug-2013].
- [82] D. Banjerdpongchai und J. P. How, „LMI Synthesis of Parametric Robust H_∞ Controllers“, in *Proceedings of the 1997 American Control Conference*, Albuquerque, NM (USA), 1997, Bd. 1, S. 493–498.
- [83] A. Tchernychev und A. Sideris, „A Multiplier Approach for the Robust Design of Discrete Time Control Systems with Mixed Real/Complex Uncertainties“, in *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, Kobe (Japan), 1996, Bd. 3, S. 3484–3489.
- [84] P. Apkarian, „Nonsmooth μ -Synthesis“, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Bd. 21, Nr. 13, S. 1493–1508, Sep. 2011.
- [85] A. Packard, „Gain Scheduling via Linear Fractional Transformations“, *Systems & Control Letters*, Bd. 22, Nr. 2, S. 79–92, Feb. 1994.
- [86] P. Apkarian und R. J. Adams, „Advanced Gain-Scheduling Techniques for Uncertain Systems“, *IEEE Transactions on Control System Technology*, Bd. 6, Nr. 1, S. 21–32, Jan. 1997.
- [87] J. Witte, H. M. N. K. Balini, und C. W. Scherer, „Robust and LPV Control of an AMB System“, in *Proceedings of the 2010 American Control Conference*, Baltimore, MD (USA), 2010, S. 2194–2199.
- [88] S. Mason, P. Tsiotras, und P. E. Allaire, „Linear Parameter Varying Controllers for Flexible Rotors Supported on Magnetic Bearings“, in *Proceedings of Sixth International Conference on Magnetic Bearings*, Boston, MA (USA), 1998, S. 341–351.
- [89] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 3rd Aufl. London (UK): Springer, 1995.
- [90] S. Ober-Blöbaum und A. Seifried, „A Multiobjective Optimization Approach for Optimal Control Problems of Mechanical Systems with Uncertainties“, in *Proceedings of the 12th European Control Conference*, Zürich (Schweiz), 2013.
- [91] H. H. Niemann, J. Stoustrup, S. Toffner-Clausen, und P. Andersen, „ μ -Synthesis for the Coupled Mass Benchmark Problem“, in *Proceedings of the 1997 American Control Conference*, Albuquerque, NM (USA), 1997, S. 2611–2615.
- [92] P. Gaspar, I. Szaszi, und J. Bokor, „Robust Servo Control Design for Mechanical Systems Using Mixed Uncertainty Modelling“, in *The 7th European Control Conference*, Cambridge (UK), 2003.

- [93] H.-J. Ahn und D.-C. Han, „System Modeling and Robust Control of an AMB Spindle: Part II A Robust Controller Design and its Implementation“, *KSME International Journal*, Bd. 17, Nr. 12, S. 1855–1866, 2003.
- [94] R. L. Fittro und C. R. Knospe, „ μ Control of a High Speed Spindle Thrust Magnetic Bearing“, in *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Control Applications*, Kohala Coast-Island of Hawaii, HI (USA), 1999, Bd. 1, S. 570–575.
- [95] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, und B. A. Francis, „State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems“, in *Proceedings of the 1988 American Control Conference*, Atlanta, GO (USA), 1988, S. 1691–1696.
- [96] U. Schönhoff, „Practical Robust Control of Mechatronic Systems with Structural Flexibilities“, Dissertation, TU Darmstadt, Darmstadt (Deutschland), 2003.
- [97] P. M. R. Wortelboer, M. Steinbuch, und O. H. Bosgra, „Closed-Loop Balanced Reduction with Application to a Compact Disc Mechanism“, *Delft University Press - Selected Topics in Identification, Modelling and Control*, Bd. 9, S. 47–58, Dez. 1996.
- [98] R. Gasch, K. Knothe, und R. Liebich, *Strukturdynamik: Diskrete Systeme und Kontinua*, 1. Aufl. Berlin (Deutschland): Springer, 2012.
- [99] R. S. Smith, C.-C. Chu, und J. L. Fanson, „The Design of H_∞ Controllers for an Experimental Non-Collocated Flexible Structure Problem“, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Bd. 2, Nr. 2, S. 101–109, Juni 1994.
- [100] M. K. H. Fan, A. L. Tits, und J. C. Doyle, „Robustness in the Presence of Mixed Parametric Uncertainty and Unmodeled Dynamics“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Bd. 36, Nr. 1, S. 25–38, 1991.
- [101] P. M. Young, „Controller Design with Real Parametric Uncertainty“, *International Journal of Control*, Bd. 65, Nr. 3, S. 469–509, 1996.
- [102] P. M. Young, M. P. Newlin, und J. C. Doyle, „Practical Computation of the Mixed μ Problem“, in *Proceedings of the 1992 American Control Conference*, Chicago, IL (USA), 1992, S. 2190–2194.
- [103] U. Schönhoff, A. Klein, und R. Nordmann, „Attitude Control of the Airborne Telescope SOFIA: μ -Synthesis for a Large Scaled Flexible Structure“, in *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney (Australien), 2000, Bd. 4, S. 3576–3581.
- [104] M. A. Sehr, „Synthesis of Robust Controllers for Mixed Uncertainties via μ -K Iteration“, Master-Thesis, TU Darmstadt, Darmstadt (Deutschland), 2012.
- [105] A. S. Dimitri und A. El-Shafei, „Instability Control and Unbalance Compensation of Flexible Rotors Supported on Journal Bearings Using Magnetic Bearings“, in *Proceedings of the 8th IFToMM International Conference on Rotor Dynamics*, Seoul (Korea), 2010, S. 657–664.
- [106] M. N. Sahinkaya und C. R. Burrows, „Control of Stability and the Synchronous Vibration of a Flexible Rotor Supported on Oil-Film Bearings“, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Bd. 107, Nr. 2, S. 139–144, Juni 1985.
- [107] M. N. Sahinkaya und C. R. Burrows, „Stabilisation of High-Speed Flexible Rotors Supported by Oil-Film Bearings“, gehalten auf der IFToMM Sixth International Conference on Rotor Dynamics, Sydney (Australien), 2002, S. 412–419.
- [108] J. Tuma, J. Simek, J. Skuta, J. Los, und J. Zavadil, „Active Vibration Control of Journal Bearings with the Use of Piezoactuators“, gehalten auf der The 9th International Conference on Vibrations in Rotating Machines, Darmstadt (Deutschland), 2011.

- [109] S. Fürst und H. Ulbrich, „An Active Support System For Rotors with Oil-Film Bearings“, in *Proceedings of the 4th International Conference on Vibrations in Rotating Machinery of the Institution of Mechanical Engineers*, Edingburgh (Schottland), 1988, S. 61–68.
- [110] M. M. Elmadany und Z. S. Abduljabbar, „Controller Design for High-Performance Thrbomachines“, *Journal of Vibration and Control*, Bd. 6, Nr. 8, S. 1205–1223, Jan. 2000.
- [111] A. Almeida Goncalves Siqueira, R. Nicoletti, N. Norrick, K. Lucchesi Cavalca, H. Fiori de Castro, J. Bauer, und F. Dohnal, „Linear Parameter Varying Control Design for Rotating Systems Supported by Journal Bearings“, *Journal of Sound and Vibration*, Bd. 331, Nr. 10, S. 2220–2232, Mai 2012.
- [112] M. Borsdorf, R. S. Schittenhelm, Z. Wang, J. Bos, und S. Rinderknecht, „Active Damping of Aircraft Engine Shafts Using Integral Force Feedback and Piezoelectric Stack Actuators“, in *Proceedings of The 2013 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, 2013, S. 1731–1736.
- [113] R. S. Schittenhelm, M. Borsdorf, B. Riemann, und S. Rinderknecht, „Linear Quadratic Regulation of a Rotating Shaft Being Subject to Gyroscopic Effect“, in *Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science*, San Francisco, CA (USA), 2012.
- [114] W. Li, „Active Damping and Compensation of Rotor Bending-Vibration via Active Piezo-Stack-Actuator-Bearings“, Dissertation, TU Chemnitz, Chemnitz (Deutschland), 2005.
- [115] C. Ehmann, A. Alizadeh, und R. Nordmann, „Damping of Vibration for Actively Supported Rotors via Robust Control“, gehalten auf der The 6th International Conference on Vibrations in Rotating Machines, Darmstadt (Deutschland), 2003.
- [116] B. Riemann, M. Sehr, R. S. Schittenhelm, und S. Rinderknecht, „Robust Control of Flexible High-Speed Rotors via Mixed Uncertainties“, in *Proceedings of the 12th European Control Conference*, Zürich (Schweiz), 2013.
- [117] B. Riemann, M. A. Sehr, R. S. Schittenhelm, und S. Rinderknecht, „Real Gyroscopic Uncertainties in Robust Control of Flexible Rotors“, in *Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control (erscheint in Kürze)*, Florenz (Italien), 2013.
- [118] A.-C. Lee und S.-T. Chen, „Optimal Vibration Control for a Flexible Rotor with Gyroscopic Effects“, *International Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series III*, Bd. 35, Nr. 3, S. 446–455, Sep. 1992.
- [119] M. Ahrens und L. Kucera, „Cross Feedback Control of a Magnetic Bearing System“, in *Proceedings of the Third International Symposium on Magnetic Suspension Technology*, Tallahassee, FL (USA), 1995.
- [120] S. Sivrioglu und K. Nonami, „LMI Approach to Gain Scheduled H_∞ Control Beyond PID Control for Gyroscopic Rotor-Magnetic Bearing System“, in *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, Kobe (Japan), 1996, Bd. 4, S. 3694–3699.
- [121] H. Zhang, Z. Lin, P. E. Allaire, und B. Huang, „Robust LPV Control of a Flexible Rotor Supported on Magnetic Bearings“, gehalten auf der 6th International Symposium on Magnetic Suspension Technology, Turin (Italien), 2001.
- [122] H. M. N. K. Balini, J. Witte, und C. Scherer, „Synthesis and Implementation of Gain-Scheduling and LPV Controllers for an AMB System“, *Automatica*, Bd. 48, Nr. 3, S. 521–527, 2012.
- [123] M. Schlotter und P. S. Keogh, „The Vibration Control of Speed-Dependent Flexible Rotor/Magnetic Bearing Systems Using Linear Matrix Inequality Gain-Scheduled H_∞ Design“, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, Bd. 222, Nr. 2, S. 97–107, Feb. 2008.

- [124] S. Kern, A. Schwung, und R. Nordmann, „Gain-Scheduling Approaches for Active Damping of a Milling Spindle with Speed-Dependent Dynamics“, in *Proceedings of the 9th International Conference on Motion and Vibration Control*, München (Deutschland), 2008.
- [125] M. Fujita, K. Hatake, und F. Matsumura, „Loop Shaping Based Robust Control of a Magnetic Bearing“, *IEEE Control Systems*, Bd. 13, Nr. 4, S. 57–65, Aug. 1993.
- [126] K. Nonami und T. Ito, „ μ Synthesis of Flexible Rotor-Magnetic Bearing Systems“, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Bd. 4, Nr. 5, S. 503–512, Sep. 1996.
- [127] R. L. Fittro und C. R. Knospe, „The μ Approach to Control of Active Magnetic Bearings“, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Bd. 124, Nr. 3, S. 566–570, Juli 2002.
- [128] T. Namerikawa und M. Fujita, „Uncertain Model and μ -Synthesis of a Magnetic Bearing“, in *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Control Applications*, Kohala Coast-Island of Hawaii, HI (USA), 1999, Bd. 1, S. 558–563.
- [129] U. Schönhoff, J. Luo, G. Li, E. Hilton, R. Nordmann, und P. E. Allaire, „Implementation Results of μ -Synthesis Control for an Energy Storage Flywheel Test Rig“, gehalten auf der The 7th International Symposium on Magnetic Bearings, Zürich (Schweiz), 2000, S. 317–322.
- [130] D. C. McFarlane und K. Glover, „A Loop-Shaping Design Procedure Using H_∞ Synthesis“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Bd. 37, Nr. 6, S. 759–769, Juni 1992.
- [131] S. Font, G. Duc, und F. Carrere, „ H_∞ Control of a Magnetic Bearing“, in *Proceedings of the 3rd IEEE Conference on Control Applications*, Glasgow (UK), 1994, S. 581–585.
- [132] E. H. Maslen, *Magnetic Bearings*. Charlottesville, VA (USA): University of Virginia, 2000.
- [133] T. Sporbeck, „Modellierung eines Prüfstands für aktive, hydrodynamisch gelagerte Rotoren“, Master-Thesis, TU Darmstadt, Darmstadt (Deutschland), 2012.
- [134] B. Riemann, H. Fiori de Castro, K. Lucchesi Cavalca, R. Nordmann, und S. Rinderknecht, „Development of an Efficient Simulation Model for Rotors in Hydrodynamic Bearings Including Fluid Induced Stability and Gyroscopic Effects“, gehalten auf der The 8th IFToMM International Conference on Rotor Dynamics, Seoul (Korea), 2010.
- [135] C. Eckardt, S. Lu, P. Stegmann, und J. Vrbata, „Konstruktion eines aktiven Rotorprüfstands“, Advanced Design Project (ADP), TU Darmstadt, Darmstadt (Deutschland), 2011.
- [136] A. Argeseanu, E. Ritchie, und K. Leban, „New Balancing Equipment for Mass Production of Small and Medium-sized Electrical Machines“, in *Proceedings of the 12th International Conference on Optimization of Electrical and Electronic Equipment*, Brasov (Rumänien), 2010, S. 506–511.
- [137] „System Identification Toolbox - MATLAB“, *System Identification Toolbox - MATLAB*, Aug-2013. [Online]. Verfügbar unter: <http://www.mathworks.com/products/sysid/>. [Zugegriffen: 23-Aug-2013].
- [138] L. Ljung, *System Identification: Theory for the User*. Upper Saddle River, NJ (USA): Prentice-Hall, 2009.
- [139] R. Markert, *Schwingungsmeßtechnik - Skript zur Vorlesung*, 1. Aufl. Darmstadt (Deutschland): TU Darmstadt - Fachgebiet Strukturtechnik, 2005.
- [140] W. Li, „Modellidentifikation zur Synthese Modellbasierter Regler unter MATLAB“, Studienarbeit, TU Darmstadt, Darmstadt (Deutschland), 2011.
- [141] G. J. Balas und J. C. Doyle, „Identification of Flexible Structures for Robust Control“, *IEEE Control Systems Magazine*, Bd. 10, Nr. 4, S. 51–58, Juni 1990.
- [142] J.-L. Lin, I. Postlethwaite, und D.-W. Gu, „ μ -K iteration: A New Algorithm for μ -Synthesis“, *Automatica*, Bd. 29, Nr. 1, S. 219–224, Jan. 1993.

-
- [143] S. Kern, „Erhöhung der Prozessstabilität durch aktive Dämpfung von Frässpindeln mittels elektromagnetischer Aktoren“, Dissertation, TU Darmstadt, Darmstadt (Deutschland), 2009.
- [144] E. Larible, „Konstruktion eines Werkzeugs zur Beurteilung des dynamischen Verhaltens von Rotoren“, Studienarbeit, TU Darmstadt, Darmstadt (Deutschland), 2001.
- [145] T. Ikeda, *Fundamentals of Piezoelectricity*. Oxford (UK): Oxford University Press, 1997.
- [146] F. B. Becker, „Modellierung rotordynamischer Systeme: Modellerweiterung und Parameteridentifikation“, Master-Thesis, TU Darmstadt, Darmstadt (Deutschland), 2012.
- [147] W. Gawronski und K. B. Lim, „On Frequency Weighting for the H_∞ and H_2 Control Design of Flexible Structures“, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Bd. 21, Nr. 4, S. 664–665, Juli 1998.
- [148] P. M. Young, M. P. Newlin, und J. C. Doyle, „ μ Analysis with Real Parametric Uncertainty“, in *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, Brighton (UK), 1991, Bd. 2, S. 1251–1256.
- [149] J. Löfberg, „YALMIP: A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB“, in *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, Taipei (China), 2004, S. 284–289.
- [150] M. Manfay, G. J. Balas, J. Bokor, und L. Gerencsér, „Probabilistic μ for Rank-One and Perturbed Rank-One Matrices“, in *Proceedings of the 12th European Control Conference*, Zürich (Schweiz), 2013.
- [151] K.-K. K. Kim und R. D. Braatz, „Computational Complexity of Robust Control: A Review of Theoretical and Algorithmic Developments“, in *Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control (erscheint in Kürze)*, Florenz (Italien), 2013.

Anhang: Beispiel zur Singulärwertberechnung

In diesem Kapitel wird ein einfaches Beispiel zur Veranschaulichung des größten Singulärwertes vorgestellt. Das Beispielsystem besteht aus einer Masse m , die horizontal und vertikal über Federn fixiert ist, s. Abbildung A.1. Weiterhin wird steifigkeitsproportionale Dämpfung für alle Federelemente eingeführt. Als Systemeingänge werden die Kräfte F_x und F_y sowie als Ausgänge die Auslenkungen der Masse q_x und q_y eingeführt. Dadurch ist der Eingangsvektor $[F_x \ F_y]^T$ ein Kraftvektor, so dass der Betrag des Eingangsvektors eine anschauliche Bedeutung als Betrag der resultierenden Gesamtkraft aufweist. Analog ist der Betrag des Ausgangsvektors $[q_x \ q_y]^T$ die resultierende Gesamtauslenkung der Masse.

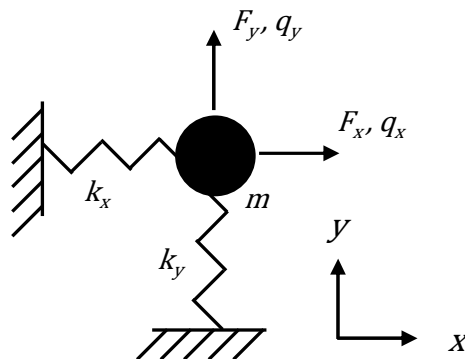


Abbildung A.1: Skizze Beispielsystem Singulärwertberechnung

Für dieses System wird die Interpretation des größten Singulärwertes als worst-case Verstärkung dargestellt. Dazu werden zwei unterschiedliche Systemkonfigurationen untersucht. In Setup (A) sind x - und y -Richtung vollständig entkoppelt. Anschließend wird in Setup (B) eine Koppelsteifigkeit k_{xy} hinzugefügt, so dass die Bewegungsrichtungen gekoppelt sind. Weiterhin werden Vorteile durch die Berücksichtigung der Struktur im SSV erläutert.

A.1 Entkoppeltes System

Zunächst wird Setup (A) mit den Parametern entsprechend Tabelle A.1 betrachtet. Für dieses System tritt keine Kopplung der horizontalen und vertikalen Bewegungsrichtungen auf.

In einem ersten Schritt wird gezeigt, wie der größte Singulärwert für den statischen Fall ermittelt werden kann. Der größte Singulärwert gibt das maximale Verhältnis der Beträge von Eingangs- und Ausgangsvektor an, vgl. Abschnitt 2.4.3. Für das Beispielsystem ergibt sich der größte Singulärwert so als maximales Verhältnis aus Gesamtauslenkung zu Gesamtkraft. Um das maximale Verhältnis zu ermitteln, wird der Betrag des Kraftvektors auf 1 gesetzt und die Krafrichtung zwischen 0° und 360° variiert, d. h. der Kraftzeiger wird einmal im Kreis gedreht. Diejenige Richtung, in der die maximale Auslenkung vorliegt, führt somit zum größten Singulärwert. Da der Betrag des Eingangsvektors auf 1 festgelegt ist, entspricht der maximale Auslenkungsbetrag direkt dem größten Singulärwert.

Tabelle A.1: Daten Beispielsystem Singulärwertberechnung, Setup (A)

Steifigkeit k_x	4000,0 N/m	Masse m	2,0 kg
Steifigkeit k_y	5000,0 N/m		
Kopplungs-Steifigkeiten k_{yx} und k_{xy}	0 N/m	Faktor steifigkeitsproportionale Dämpfung	0,00125 s

In Abbildung A.2 sind die Verläufe der Auslenkungen in x - und y -Richtung sowie der Betrag der Gesamtauslenkung über dem Richtungswinkel α dargestellt.

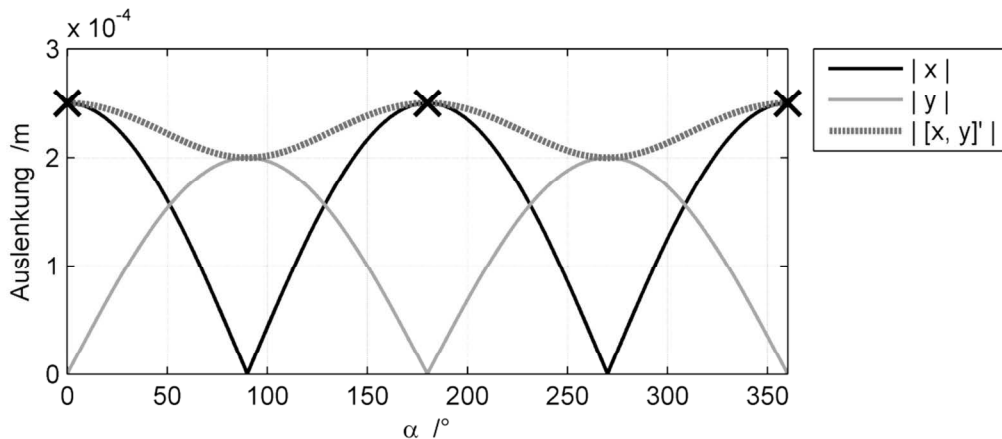


Abbildung A.2: Suche nach dem größten Singulärwert im statischen Fall, entkoppeltes System (A)

Die markierten Stellen zeigen die höchsten Auslenkungen. Da die Bewegungsrichtungen entkoppelt sind, zeigt der Kraftzeiger im statischen Fall dabei in die nachgiebigere x -Richtung.

In einem zweiten Schritt wird der (frequenzabhängige) größte Singulärwert für den dynamischen Fall betrachtet. Abbildung A.3 zeigt einen Vergleich der Übertragungsfunktionen in x - und y -Richtung mit dem größten Singulärwert (SV). Der größte Singulärwert stimmt für jede Frequenz mit dem Betrag der jeweils größeren Übertragungsfunktion $F_x \rightarrow q_x$ oder $F_y \rightarrow q_y$ überein. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Richtungen entkoppelt sind. Der Wert für $\omega \rightarrow 0$ von ca. -72 dB entspricht exakt dem Maximum des statischen Falls von $2,5e-4$ m/N aus Abbildung A.2.

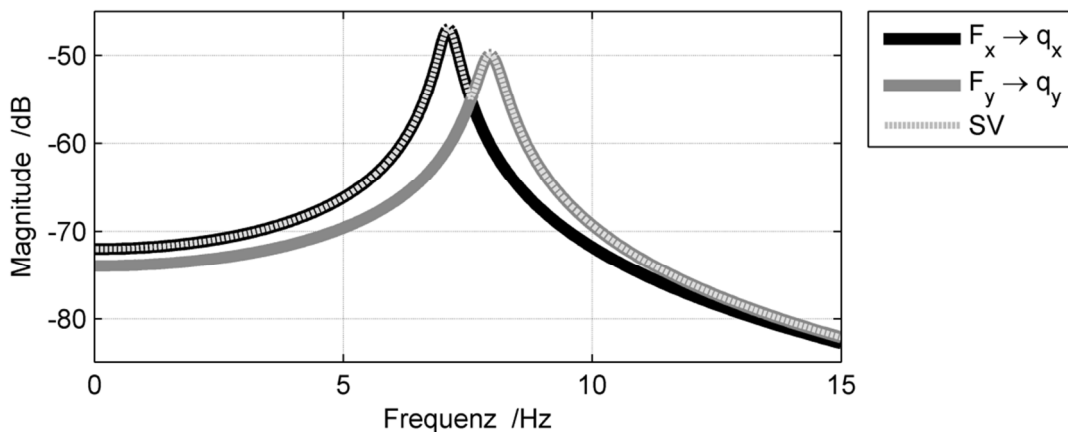


Abbildung A.3: Übertragungsverhalten und größter Singulärwert (SV), entkoppeltes System (A)

A.2 System mit Kopplung

Um die Auswirkungen von Kopplungen im System zu demonstrieren, wird in Setup (B) eine Kopplungsteifigkeit k_{yx} hinzugefügt. Wie Tabelle A.2 zeigt, bleiben die übrigen Systemparameter unverändert.

Tabelle A.2: Daten Beispielsystem Singulärwertberechnung, Setup (B)

Steifigkeit k_x	4000,0 N/m	Masse m	2,0 kg
Steifigkeit k_y	5000,0 N/m		
Kopplungs-Steifigkeiten k_{yx} und k_{xy}	2000,0 N/m	Faktor steifigkeitsproportionale Dämpfung	0,00125 s

Für dieses System zeigt Abbildung A.4 die Betrachtung des statischen Falls bei Rotation eines Kraftzeigers des Betrags 1 um 360° . Der größte Singulärwert ist nun größer als die individuellen Maxima in x - und y -Richtung.

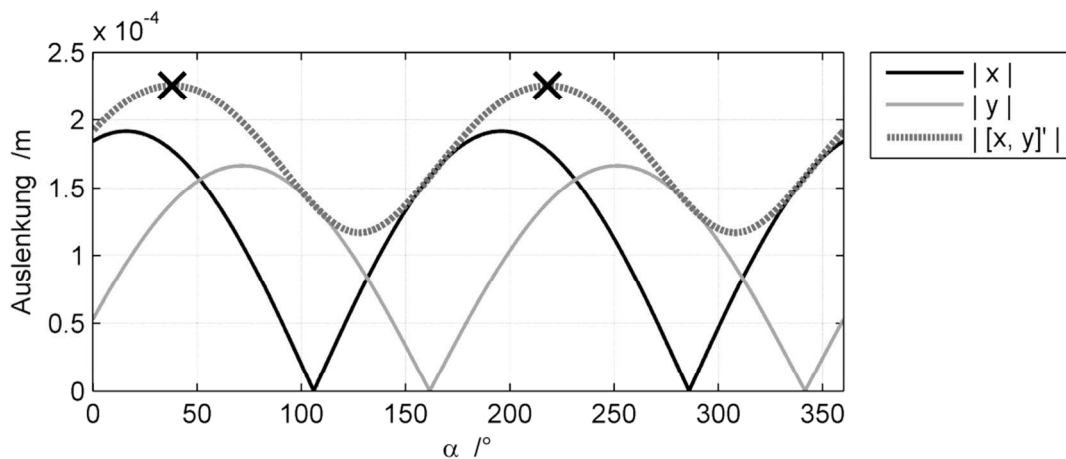


Abbildung A.4: Suche nach dem größten Singulärwert im statischen Fall, gekoppeltes System (B)

Der Winkel des maximalen Kraftvektors von ca. 45° (bzw. 225°) zeigt, dass der größte Singulärwert nun durch eine Kombination aus $F_y \rightarrow q_y$ und $F_x \rightarrow q_y$ bzw. $F_x \rightarrow q_x$ und $F_y \rightarrow q_x$ hervorgerufen wird.

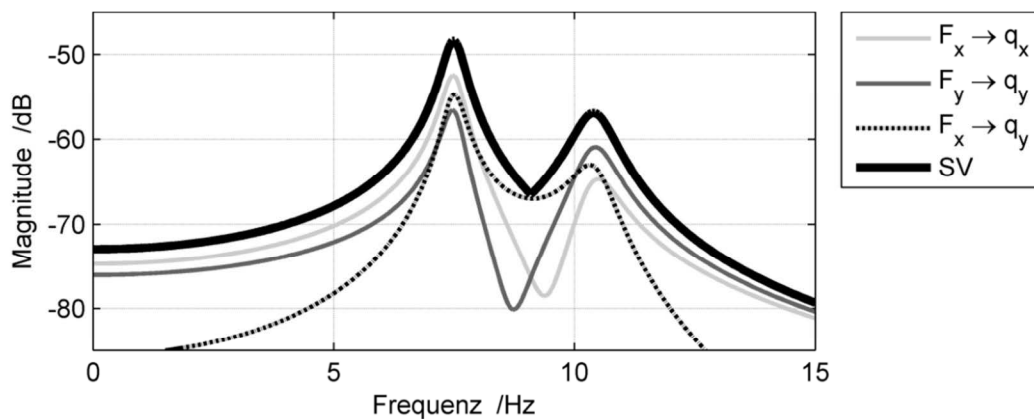


Abbildung A.5: Übertragungsverhalten und größter Singulärwert (SV), gekoppeltes System (B)

Dies gilt für den gesamten Verlauf des größten Singulärwertes über der Frequenz, s. Abbildung A.5. Durch die Kopplung ist der größte Singulärwert (SV) stets größer als die Beträge der einzelnen Übertragungsfunktionen in x - und y -Richtung. Der statische Übertragungsfaktor des Singulärwertes von ca. -73 dB entspricht der maximalen (Gesamt-)Auslenkung in Abbildung A.4 von $2,25e-4$ m.

Das Beispiel zeigt, dass der Singulärwert für gekoppelte Systeme über der größten Verstärkung aller individuellen Übertragungspfade liegt. Der Betrag des Singulärwertes hat für die hier betrachteten Kraft- und Auslenkungsvektoren durchaus eine Bedeutung, da der ungünstigste Anregungsfall betrachtet wird. Wird eine H_∞ -Synthese mit den hier gezeigten Ein- und Ausgängen als Performancekanälen durchgeführt, reduziert die Regelung also die maximale Schwingungsamplitude für den ungünstigsten Anregungsfall. Die H_∞ -Synthese minimiert also die worst-case Verstärkung des Systems.

Werden zusätzliche Ein- und Ausgänge zum Synthesystem hinzugefügt, kann die Berücksichtigung der Kopplungen jedoch auch unerwünscht sein. So werden in der robusten H_∞ -Synthese Robustheitseingänge und Performance-Eingänge gleichzeitig verwendet, vgl. Abbildung 2.8. Der Singulärwert bei Kopplungen von Performance- und Unsicherheitskanälen hat keine relevante Bedeutung für den Reglerentwurf. Die Verwendung des Singulärwertes ist konservativ, da die Berücksichtigung der Kopplung unerwünscht ist.

Die μ -Synthese ermöglicht die Vorgabe einer Struktur der Kanäle, vgl. Abschnitte 2.6.3 bis 2.6.6. Alle Kopplungen außerhalb dieser Struktur werden nicht für die Berechnung des *Strukturierten Singulärwertes* (SSV) μ berücksichtigt. Werden nun die Performance- und Unsicherheitskanäle als getrennte Strukturen definiert, kann die Konservativität in der Synthese überwunden werden.