

# Estimando el fasor dinámico y la frecuencia con diferenciadores máximamente lisos en oscilaciones de potencia

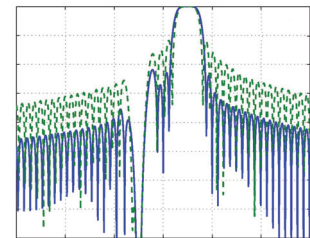
Miguel Ángel Platas Garza, José Antonio de la O Serna

Doctorado en Ingeniería Eléctrica, FIME-UANL

jdela@mail.uanl.mx , jdela@ieee.org

## RESUMEN

Se obtienen estimaciones del fasor dinámico y de sus derivadas mediante la solución de mínimos cuadrados ponderados de una aproximación de Taylor, usando ventanas clásicas como factores de ponderación. Esta solución conduce a diferenciadores con respuestas en frecuencia ideales en la frecuencia fundamental, y con un bajo nivel de lóbulos laterales en la banda de rechazo, lo cual implica baja sensibilidad al ruido. Los diferenciadores son máximamente lisos en el intervalo centrado en la frecuencia fundamental, y tienen una respuesta de fase lineal, por lo que sus estimaciones son inmunes a la distorsión de amplitud y fase, y se obtienen mediante una única transformación lineal. Además no requieren etapas posteriores de procesamiento para mejorar su exactitud como la técnica convencional. Se ilustran ejemplos de estimación del fasor dinámico bajo condiciones transitorias, poniendo especial atención en los estimados de frecuencia.



## PALABRAS CLAVE

Fasor dinámico, estimación fasorial, estimación de frecuencia, diferenciadores digitales, filtros máximamente lisos, diferenciadores máximamente lineales.

## ABSTRACT

Estimates of the dynamic phasor and its derivatives are obtained through the weighted least-squares solution of a Taylor approximation using classical windows as weighting factors. This solution leads to differentiators with ideal frequency response around the fundamental frequency, and very low sidelobe level over the stopband, which implies low noise sensitivity. The differentiators are maximally flat in the interval centered at the fundamental frequency, and have linear phase response. So their estimates are free of amplitude and phase distortion, and obtained at once. No further patch is needed to improve their accuracy. Examples of dynamic phasor estimates are illustrated under transient conditions. Special emphasis is put on frequency measurements.

## KEYWORDS

Dynamic phasor, phasor estimation, frequency estimation, digital differentiators, maximally flat filters, maximally linear differentiator.

## INTRODUCCIÓN

La estimación fasorial bajo condiciones dinámicas es fundamental para controlar y monitorear los sistemas eléctricos de potencia. La regulación de los intercambios de potencia en las redes de área amplia (wide area networks, WAN) y la estabilidad del sistema dependen de la exactitud y retraso de las estimaciones fasoriales. El concepto de fasor dinámico fue propuesto en la referencia<sup>1</sup> como la envolvente compleja de la oscilación, interpretada como una señal paso banda, tal como se usa en sistemas de transmisión digital. Se propusieron también estimadores interesantes y se ilustraron las respuestas en frecuencia de los filtros asociados. Se demostró que los estimados eran generados por filtros digitales con ganancias constantes, lineal y cuadrática en la banda de paso, correspondientes a diferenciadores ideales. Sin embargo, persistió el alto nivel de lóbulos laterales, lo que indica susceptibilidad a la infiltración de armónicas.

En este trabajo se extiende el método de estimación usando ventanas clásicas para ponderar los errores de la solución de mínimos cuadrados y reducir el nivel de lóbulos laterales. Se presentan los filtros obtenidos con las ventanas de Hamming, y se ilustran las posibilidades de diseño que ofrece la ventana de Kaiser, la cual permite controlar el ancho de banda y el nivel de lóbulos laterales. Este método no corresponde al método de diseño clásico de filtros de respuesta impulsional finita usando ventanas,<sup>2</sup> ya que la solución de mínimos cuadrados ponderados modifica los coeficientes de la matriz de Gramm, en vez de modificar solo las respuestas impulsionales multiplicándolas por la ventana. El método propuesto reconfigura los elementos del modelo de señal y proporciona diferenciadores con respuestas en frecuencia ideales alrededor de la frecuencia fundamental, por lo que esta técnica genera estimaciones del fasor y sus derivadas con filtros máximamente lisos,<sup>3</sup> i. e. filtros cuya respuesta en frecuencia es la ideal más un error de Taylor, con derivadas nulas en la frecuencia fundamental.

En la actualidad, la norma de sincrofasores<sup>4</sup> se encuentra en revisión. Esta norma todavía asume una forma de onda sinusoidal en estado estacionario (amplitud, frecuencia y fase constantes) para las mediciones de sincrofasores,<sup>5</sup> a pesar de que esta característica es contradictoria a la naturaleza

dinámica de una oscilación. En un trabajo reciente,<sup>6</sup> los autores proponen el uso del filtro de Fourier de un ciclo para estimar los sincrofasores, y después, a partir de los sincrofasores estimados, estimar otros parámetros dinámicos importantes, tales como la frecuencia usando algoritmos de post-filtrado. Para mitigar los errores dinámicos de la estimación fasorial, recomiendan el método de compensación usado en la referencia.<sup>7</sup> En este trabajo, se emplea el modelo de señal basado en aproximaciones de Taylor usado en la referencia<sup>1</sup> para compensar los errores del filtro de Fourier de un ciclo. La principal desventaja de este método, además de la pobre respuesta en frecuencia del filtro, es que los estimados de frecuencia se obtienen con una ecuación en diferencias finita, la cual es muy sensible al ruido, o con filtros de fase no lineal, que destruyen la sincronía de las estimaciones, la cual es la característica más importante de la aplicación. Por lo que ambas soluciones son paliativas.

El método propuesto en este trabajo de investigación obtiene todos los parámetros dinámicos en una sola etapa a partir de un banco de filtros de fase lineal, en los cuales todos los filtros tienen respuestas en frecuencia ideales en la banda de paso, y bajos lóbulos laterales en la banda de rechazo. Por su naturaleza de fase lineal, los retardos de los estimados son iguales e independientes de las variaciones en frecuencia, tan importantes en una oscilación.

El trabajo se desarrolla de la siguiente manera: Primero, se formula el problema de mínimos cuadrados ponderados para una aproximación de Taylor, usando ventanas clásicas como factores de ponderación. Se muestra el diseño de filtros paso banda con las ventanas rectangular, Hamming y Kaiser. Las respuestas en frecuencia ilustran el efecto de la ventana ensanchando el lóbulo principal, y reduciendo el nivel de lóbulos laterales. Luego se discute el desempeño de los diferenciadores estimando fasores de ejemplos prácticos. Se comparan los errores de amplitud y fase obtenidos con el conjunto de diferenciadores de orden 0 y 3. Se estima también el nivel de error de infiltración armónica. Finalmente, los errores en frecuencia son evaluados comparando los resultados con un método recientemente propuesto el cual usa el tradicional filtro de Fourier con una etapa de post-filtrado para la estimación de frecuencia. En nuestro método la

estimación de frecuencia se realiza sin necesidad de una etapa adicional de post-filtrado.

**SOLUCIÓN DE MÍNIMOS CUADRADOS PONDERADOS**

El concepto de fasor dinámico fue propuesto en<sup>1</sup> como la envolvente compleja de una señal paso banda  $s(t)$ , la cual modela adecuadamente una oscilación de potencia:

$$s(t) = \text{Re}\{p(t)e^{j2\pi f_1 t}\} \tag{1}$$

en la cual  $f_1$  es la frecuencia fundamental,  $p(t) = a(t)e^{j\varphi(t)}$  es el fasor dinámico, del cual  $a(t)$  y  $\varphi(t)$  representan las modulaciones en amplitud y fase, respectivamente. Se asume que  $s(t)$  es una señal de banda estrecha, i. e. el ancho de banda de  $\text{Re}\{p(t)\}$  es mucho más pequeño que  $f_1$ .<sup>8</sup> Es posible entonces aproximar el fasor dinámico por un polinomio de Taylor de  $\kappa$ -ésimo orden para

$$p_\kappa(t) = p(0) + p'(0)t + \frac{p''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{p^{(\kappa)}(0)}{\kappa!}t^\kappa, \tag{2}$$

para  $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$

sobre un intervalo de observación lo suficientemente corto como para mantener el error bajo una cota específica. Por ejemplo: si el ancho de banda es más pequeño que la frecuencia fundamental ( $f_1$ ) por un factor de diez, entonces el fasor dinámico es lo suficientemente suave dentro de intervalos inferiores a cinco ciclos de la fundamental. Esto implica que es posible estimar el fasor y sus derivadas en el centro del intervalo al aplicar el criterio de mínimos cuadrados ponderados. Si la  $\kappa$ -ésima aproximación a la señal paso banda en cualquier intervalo es de la forma:

$$s_\kappa(t) = \text{Re}\{p_\kappa(t)e^{j2\pi f_1 t}\}, \tag{3}$$

entonces, el intervalo centrado en la  $\ell$ -ésima muestra se da por:

$$s_{\kappa,\ell} = B_\kappa p_{\kappa,\ell} \tag{4}$$

la cual es mostrada en (5) para  $\ell = 0$ . Asumiendo

que la señal es muestreada con  $N_1$  muestras por ciclo  $T_1 = 1/f_1$ ,  $N$  muestras corresponden al intervalo de Taylor de tamaño  $T$ , con  $N = \lceil (T/T_1)N_1 \rceil$ , donde el operador  $\lceil \cdot \rceil$  selecciona el número impar más cercano a  $(T/T_1)N_1$ , entonces  $N = 2N_h + 1$ , note que se elige un número impar de muestras por intervalo para incluir una muestra al centro del mismo. También note que las columnas de  $B_\kappa$  son de la forma  $e^{jn\omega_1}, ne^{jn\omega_1}, \dots, n^{\kappa-1}e^{jn\omega_1}, n^\kappa e^{jn\omega_1}$ , y sus complejos conjugados,  $n \in [-N_h, \dots, 0, \dots, N_h]$ , donde  $\omega_1 = 2\pi/N_1$  es la frecuencia angular fundamental. Note también que los coeficientes  $p_k$  se relacionan con las derivadas del fasor dinámico  $p_k = p^{(k)}(0)/(k!(N_1^k f_1^k)$ , para  $k = 0, 1, \dots, \kappa$ . Para la  $\kappa$ -ésima aproximación, el error es dado por:

$$e_\kappa = s - B_\kappa p_\kappa \tag{6}$$

y los mejores estimados de  $p_\kappa$  en el sentido de mínimos cuadrados son:

$$\hat{p}_\kappa = (B_\kappa^H B_\kappa)^{-1} B_\kappa^H s \tag{7}$$

donde  $^H$  representa al operador hermitiano.

Para un orden de aproximación dado  $\kappa$ , el error de Taylor es expansivo, i. e. aumenta hacia ambos extremos del intervalo de tiempo. Entonces, una manera efectiva de reducir el error en los extremos del intervalo es ponderarlo con una ventana. Entonces (6) se convierte en

$$We = Ws - WB_\kappa p_\kappa \tag{8}$$

donde

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & w_n \end{pmatrix}, \tag{9}$$

La solución de mínimos cuadrados de (8) es:<sup>9</sup>

$$\hat{p}_{\kappa,WLS} = (B_\kappa^H W^H W B_\kappa)^{-1} B_\kappa^H W^H W s. \tag{10}$$

La matriz de Gramm en (10) se puede convertir en singular si se elige un número muy pequeño de muestras, o un polinomio de alto orden.<sup>10</sup> Note en (10) que la solución de mínimos cuadrados ponderados

$$\begin{pmatrix} s_\kappa(-N_h) \\ \vdots \\ s_\kappa(-n) \\ \vdots \\ s_\kappa(0) \\ \vdots \\ s_\kappa(n) \\ \vdots \\ s_\kappa(N_h) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-N_h)^\kappa e^{-jN_h\omega_1} & (-N_h)^{\kappa-1} e^{-jN_h\omega_1} & \dots & e^{jN_h\omega_1} & e^{-jN_h\omega_1} & \dots & (-N_h)^{\kappa-1} e^{-jN_h\omega_1} & (-N_h)^\kappa e^{-jN_h\omega_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-n)^{\kappa-1} e^{-jn\omega_1} & (-n)^{\kappa-1} e^{-jn\omega_1} & \dots & e^{jn\omega_1} & e^{-jn\omega_1} & \dots & (-n)^{\kappa-1} e^{-jn\omega_1} & (-n)^{\kappa-1} e^{-jn\omega_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^\kappa e^{-jn\omega_1} & n^{\kappa-1} e^{-jn\omega_1} & \dots & e^{-jn\omega_1} & e^{jn\omega_1} & \dots & n^{\kappa-1} e^{-jn\omega_1} & n^\kappa e^{jn\omega_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_h^\kappa e^{-jN_h\omega_1} & N_h^{\kappa-1} e^{-jN_h\omega_1} & \dots & e^{-jN_h\omega_1} & e^{jN_h\omega_1} & \dots & N_h^{\kappa-1} e^{-jN_h\omega_1} & N_h^\kappa e^{jN_h\omega_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p}_\kappa \\ \vdots \\ \bar{p}_{\kappa-1} \\ \vdots \\ \bar{p}_0 \\ \vdots \\ p_0 \\ \vdots \\ p_{\kappa-1} \\ \vdots \\ p_\kappa \end{pmatrix} \tag{5}$$

consiste en modificar tanto los vectores de la base  $B_\kappa$  como la señal  $s$  con los pesos en  $W$ . Esta solución minimiza el siguiente criterio de error:

$$J_W = e_\kappa^H W^H W e_\kappa \quad (11)$$

si y sólo si (vea apéndice A)

$$B_\kappa^H W^H W B_\kappa > 0, \quad (12)$$

pero como  $W^H W$  es positiva definida, la condición anterior se relaja a

$$B_\kappa^H B_\kappa > 0 \quad (13)$$

Como sabemos por la referencia<sup>11</sup> si una señal analítica es aproximada por un polinomio de Taylor de  $\kappa$ -ésimo orden, la aproximación es buena dentro de un vecindario alrededor del punto en el cual la señal fue aproximada, en el cual los términos de bajo orden de la serie son dominantes. Entonces, al dar más peso a los errores cercanos al centro del intervalo, se esperaría una mejora de los coeficientes de bajo orden de la serie, porque ellos son dominantes en cierto vecindario alrededor del centro del intervalo.

En lo que sigue los pesos al cuadrado  $w_n^2$  en  $W^H W$  serán definidos por ventanas clásicas usadas ampliamente en procesamiento de señales, es importante enfatizar que la solución en (10) no es la misma que el tradicional método de diseño de filtros FIR usando ventanas.<sup>2</sup> Si la matriz pseudoinversa

$$B^+ = (B_\kappa^H B_\kappa)^{-1} B_\kappa^H \quad (14)$$

contiene las respuestas impulsionales invertidas de los filtros tradicionales, los filtros enventaneados en<sup>2</sup> se dan por  $B_\kappa + W^H W$ , los cuales no corresponden a los presentados en (10), porque la matriz de Gramm es modificada también por los factores de ponderación ( $B_\kappa^H W^H W B_\kappa$ ).

### Respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia de los filtros en (10) es útil para evaluar el comportamiento del estimador en términos del contenido frecuencial de la señal, en particular el rechazo al ruido. Ésta se encuentra al estimar los parámetros de señales exponenciales  $\{s(n) = e^{-jon}\}_{n=-N_h, \dots, N_h}$  con  $\pi < \omega < \pi$ .

La figura 1 muestra la respuesta en frecuencia de  $\hat{p}_0^{4th}$  obtenida con los algoritmos WLS y LS. Una ventana de Hamming de 4 ciclos fundamentales de longitud fue aplicada para ponderar el error. Es aparente que el efecto de dicha ponderación

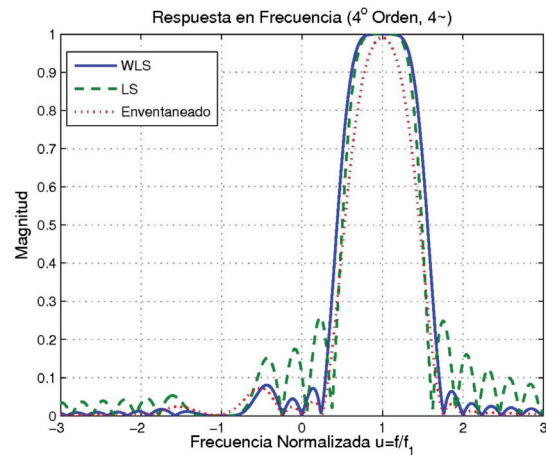


Fig. 1. Respuesta en frecuencia del estimador fasorial de 4 ciclos, Hamming WLS (línea continua), LS (línea discontinua), y el tradicional diseño de filtros FIR mediante ventanas (línea punteada).

preserva las ganancias planas alrededor de la frecuencia fundamental, aumenta el ancho de banda y reduce el nivel de lóbulos laterales. Note también que al ponderar el error se mejora el rechazo del componente de frecuencia fundamental negativa, al mejorar el alisamiento de la ganancia nula localizada alrededor de la frecuencia fundamental negativa  $f = -f_1$ . Esto es debido a la inclusión del complejo conjugado de los vectores en la base. Finalmente, note que el diseño tradicional de filtros FIR usando ventanas (línea punteada) no preserva las ganancias planas en  $u = \pm f_1$ .

La figura 2 muestra la respuesta en frecuencia de los diferenciadores de primer y segundo orden.

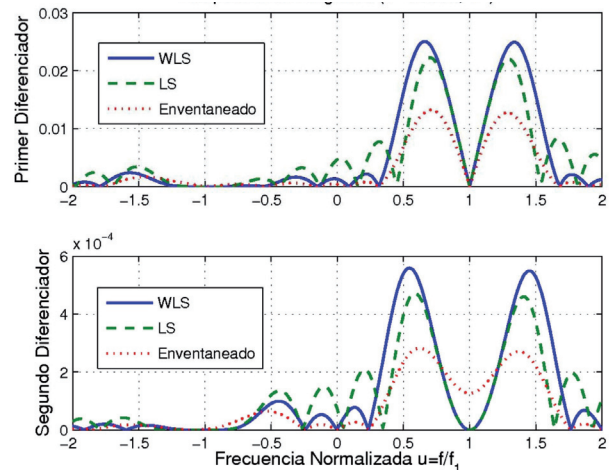


Fig. 2. Respuesta en frecuencia del primer y segundo derivador con longitud de 4 ciclos, (línea continua) WLS Hamming, (línea discontinua) LS, y (línea punteada) el tradicional diseño de filtros FIR mediante ventanas.

Note que, nuevamente, el efecto de la ventana es aumentar el ancho del lóbulo principal y reducir el nivel de lóbulos laterales. Alrededor de la frecuencia fundamental se tiene que los diferenciadores de primer y segundo orden presentan ganancias lineales y cuadráticas respectivamente. Note que la descomposición de Taylor del fasor dinámico, se hace al pasar la señal paso banda  $s(t)$  a través de un banco de filtros con ganancias igualadas a potencias sucesivas  $(u - 1)^n$  para  $n = 0, 1, 2, \dots, \kappa$  alrededor de la frecuencia fundamental: constante, lineal, cuadrática, etc. Si la señal es limitada en banda, los estimados se encontrarán libres de error (mediciones) cuando la máxima frecuencia de la señal se encuentre dentro de las ganancias ideales. Finalmente, note que la solución pura de ventanas no trabaja apropiadamente para el segundo diferenciador.

La ventana de Hamming no permite controlar el ancho del lóbulo principal y la reducción de los lóbulos laterales como la ventana de Kaiser. En lo que sigue, se usará la ventana de Kaiser. Dicha ventana depende de un parámetro real no negativo  $\alpha$ . Cuando  $\alpha = 0$  la ventana de Kaiser es idéntica a la ventana rectangular, y conforme  $\alpha$  aumenta la ventana se torna más selectiva alrededor del centro del intervalo. En nuestra aplicación,  $\alpha$  no debe de ser muy grande, ya que en este caso, las muestras en los extremos pueden alcanzar el valor de cero y entonces la matriz gramiana  $(B_{\kappa}^H W^H W B_{\kappa})$  no podrá ser invertida. En la figura 3 se muestra la reducción de lóbulos laterales en la respuesta en frecuencia de

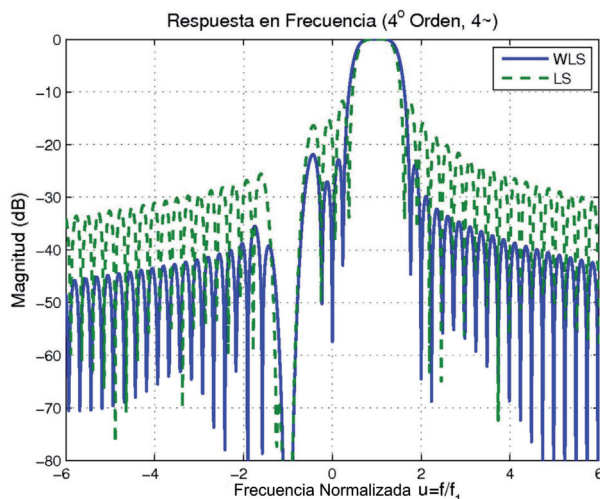


Fig. 3. Respuesta en frecuencia del estimador fasorial obtenido con LS y WLS con la ventana de Kaiser ( $\alpha = 4$ , and 8).

los estimados WLS del fasor dinámico  $\hat{P}_0^{3th}$  cuando el error es ponderado por diferentes ventanas de Kaiser  $\alpha = 0, 4, 8$ . Este conjunto de estimadores será usado en la siguiente sección. Como puede verse, la reducción de lóbulos laterales puede ser grande. Una característica interesante de la respuesta en frecuencia del diferenciador Taylor-Fourier es la ganancia obtenida alrededor de  $u = -1$ . Esta ganancia (en dB) exhibe la típica respuesta logarítmica del residuo de Lagrange alrededor de  $u = -1$ . La ganancia nula en  $u = -1$  es obtenida en todos los diferenciadores como puede verse en las figuras: 1, 2, y 4 que muestra la respuesta a la frecuencia de los primeros tres diferenciadores.

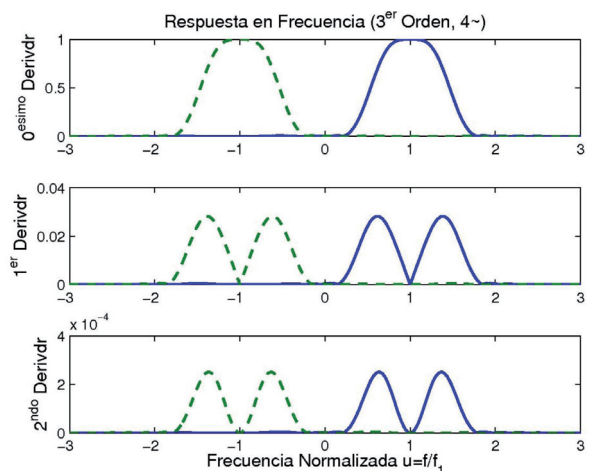


Fig. 4. Respuesta en frecuencia del estimador Taylor-Fourier de 4 ciclos, usando WLS con ventana de Kaiser ( $\kappa = 3$ ,  $\alpha = 8$ ) (línea continua), y sus complejos conjugados (línea discontinua).

### Diferenciadores máximamente lisos

Los resultados anteriores merecen una explicación. ¿Por qué la aproximación de mínimos cuadrados de un polinomio de Taylor a una señal paso banda alcanza una estructura espectral tan interesante como las mostradas en la sección anterior? El espectro del fasor dinámico es acotado en banda y se localiza alrededor de la frecuencia fundamental, entonces se puede representar por una señal paso banda, para la cual un polinomio de Taylor es adecuado ya que es analítica.

Es conocido que una aproximación de mínimos cuadrados a una función en el dominio del tiempo corresponde a una aproximación a su espectro (Producto punto en el tiempo es producto punto en

la frecuencia (con un factor de escala) a través del teorema de Parseval).<sup>12</sup> Entonces, en ambos centros el error es muy pequeño cuando el modelo de señal de Taylor es aproximado a la señal. En<sup>13</sup> se prueba que la respuesta en frecuencia de los diferenciadores es máximamente lisa en la frecuencia fundamental, lo cual significa que la ganancia de cada estimador alrededor de la banda central es muy cercana a la ganancia ideal, más una desviación dada por un residuo de Taylor con sus primeras  $\kappa$  derivadas nulas en  $\omega = f_1$ . Entonces se obtiene una bella estructura espectral de la pareja Taylor-Fourier, y todo a la vez.

### RESULTADOS EXPERIMENTALES

El estimador propuesto, desarrollado en las secciones previas y referido como filtro Taylor-Fourier (*Taylor-Fourier Filter*, TFF), es evaluado con la norma para medición de sincrofasores,<sup>4</sup> y sus resultados son comparados con los obtenidos de un filtro de Fourier (*Fourier Filter*, FF). Ambos estimadores poseen una longitud de cuatro ciclos con respecto a la fundamental. Se elige un orden de Taylor  $\kappa = 3$  y una ventana de Kaiser con  $\alpha = 8$  para el TFF. La figura 4 muestra la respuesta en frecuencia de los primeros tres diferenciadores. Note que dichos diferenciadores poseen ganancias máximamente lisas en la banda de paso y un nivel de lóbulos laterales bajo en la banda de rechazo.

#### Estimados fasoriales

El desempeño de cada estimador es comparado introduciendo señales moduladas en amplitud y fase, para las cuales el fasor dinámico instantáneo  $p(n)$  es conocido. Así es posible evaluar para ambos filtros el error normalizado de mínimos cuadrados (Normalized Root Mean Square Error, NRMSE) de la aproximación fasorial. El NRMSE se define como:

$$\text{NRMSE} = \sqrt{\frac{\sum_n |p(n) - \hat{p}(n)|^2}{\sum_n |p(n)|^2}} \quad n \in P \quad (15)$$

El conjunto  $P$  donde se calcula el NRMSE corresponde a los ciclos de oscilación para los cuales ambos estimadores se encuentran llenos de muestras en cada simulación. En todos los casos, la simulación se realiza sobre 40 ciclos de la fundamental  $1/f_1$  a 64

muestras por ciclo. La ventana de observación es desplazada muestra por muestra en todos los casos presentados (estimados fasoriales instantáneos).

El siguiente modelo de señal es usado como entrada a los estimadores:

$$s_\kappa(t) = a_\kappa(t) \cos(2\pi k f_1 t + \varphi_\kappa(t)) \quad (16)$$

con  $f_1 = 60$  Hz, y los siguientes conjuntos representando las variaciones en amplitud y fase

$$a_\kappa(t) = c_{\kappa,1} + c_{\kappa,2} \sin(2\pi f_a t)$$

$$\varphi_\kappa(t) = c_{\kappa,3} + c_{\kappa,4} \sin(2\pi f_\phi t)$$

con  $f_a = 0, 1, 2, 5$  Hz y  $f_\phi = 0, 1, 2, 5$  Hz, y constantes reales  $c_{\kappa,i}$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ . En la figura 5 se muestra un ejemplo del conjunto  $\{s_1(t)\}$  con oscilaciones de 1 Hz en amplitud y fase. Note que el fasor dinámico  $p_1(t) = a_1(t)e^{j\varphi_1(t)}$  modula la amplitud y fase de la señal. En la práctica, es frecuente encontrar el conjunto de señales dadas por la ecuación<sup>16</sup> en sistemas de potencia bajo oscilación.

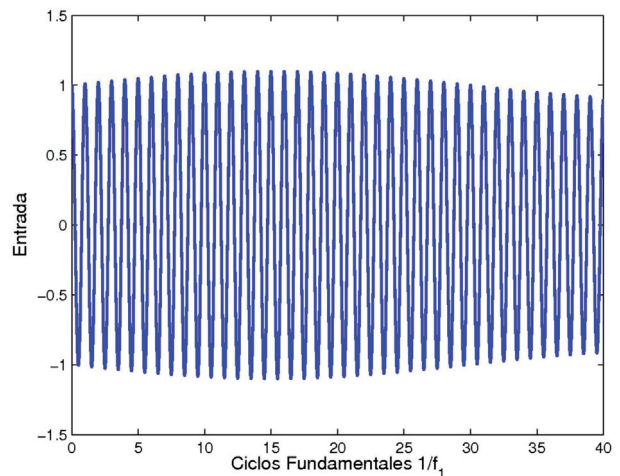


Fig. 5. Señal de entrada a los estimadores, con modulaciones en amplitud ( $a(t) = 1 + .1 \sin(2\pi t)$ ) y en fase ( $\varphi(t) = .1 \sin(2\pi t)$ )

Los resultados para el conjunto  $\{s_1(t)\}$  son presentados en la tabla I, en la cual las reducciones en la función de costo (15) para el FF y el TFF son mostradas, al igual que el factor de reducción del error  $\beta$  dado por el cociente de los dos errores definido por:  $\text{NRMSE}_{\text{TFF}}$  y  $\text{NRMSE}_{\text{FF}}$

$$\beta = \frac{\text{NRMSE}_{\text{TFF}}}{\text{NRMSE}_{\text{FF}}} \quad (17)$$

Note que el error fasorial sufre un incremento al aumentar la frecuencia de las señales modulantes

Tabla I. NRMSE para un fasor dinámico con  $c_{1,1} = 1$ ,  $c_{1,2} = .1$ ,  $c_{1,3} = 0$  Y  $c_{1,4} = .1$ , para los casos TFF Y FF respectivamente, y su relación  $\beta = \frac{NRMSE_{TFF}}{NRMSE_{FF}}$ .

Parámetros de la señal	NRMSE <sub>FF</sub>	NRMSE <sub>TFF</sub>	$\beta$
$f_a = 0$ Hz, $f_\varphi = 0$ Hz	$7.06 \times 10^{-15}$	$7.08 \times 10^{-15}$	1.0019
$f_a = 0$ Hz, $f_\varphi = 1$ Hz	$7.84 \times 10^{-4}$	$1.42 \times 10^{-7}$	$1.81 \times 10^{-4}$
$f_a = 0$ Hz, $f_\varphi = 2$ Hz	$2.26 \times 10^{-3}$	$2.16 \times 10^{-6}$	$9.59 \times 10^{-4}$
$f_a = 0$ Hz, $f_\varphi = 5$ Hz	$1.25 \times 10^{-2}$	$8.77 \times 10^{-5}$	$6.97 \times 10^{-3}$
$f_a = 1$ Hz, $f_\varphi = 0$ Hz	$7.48 \times 10^{-4}$	$1.24 \times 10^{-7}$	$1.66 \times 10^{-4}$
$f_a = 1$ Hz, $f_\varphi = 1$ Hz	$1.08 \times 10^{-3}$	$2.32 \times 10^{-7}$	$2.15 \times 10^{-4}$
$f_a = 1$ Hz, $f_\varphi = 2$ Hz	$2.42 \times 10^{-3}$	$2.38 \times 10^{-6}$	$9.82 \times 10^{-4}$
$f_a = 1$ Hz, $f_\varphi = 5$ Hz	$1.26 \times 10^{-2}$	$8.85 \times 10^{-5}$	$7.01 \times 10^{-3}$
$f_a = 2$ Hz, $f_\varphi = 0$ Hz	$2.31 \times 10^{-3}$	$2.02 \times 10^{-6}$	$8.77 \times 10^{-4}$
$f_a = 2$ Hz, $f_\varphi = 1$ Hz	$2.43 \times 10^{-3}$	$2.09 \times 10^{-6}$	$8.61 \times 10^{-4}$
$f_a = 2$ Hz, $f_\varphi = 2$ Hz	$3.24 \times 10^{-3}$	$3.31 \times 10^{-6}$	$1.02 \times 10^{-3}$
$f_a = 2$ Hz, $f_\varphi = 5$ Hz	$1.28 \times 10^{-2}$	$8.79 \times 10^{-5}$	$6.85 \times 10^{-3}$
$f_a = 5$ Hz, $f_\varphi = 0$ Hz	$1.25 \times 10^{-2}$	$8.22 \times 10^{-5}$	$6.56 \times 10^{-3}$
$f_a = 5$ Hz, $f_\varphi = 1$ Hz	$1.25 \times 10^{-2}$	$8.24 \times 10^{-5}$	$6.56 \times 10^{-3}$
$f_a = 5$ Hz, $f_\varphi = 2$ Hz	$1.28 \times 10^{-2}$	$8.40 \times 10^{-5}$	$6.54 \times 10^{-3}$
$f_a = 5$ Hz, $f_\varphi = 5$ Hz	$1.78 \times 10^{-2}$	$1.34 \times 10^{-4}$	$7.54 \times 10^{-3}$

(fondo de la tabla). TFF produce errores en el rango de mil a diez mil veces más pequeños que los errores del FF. Esto se debe a que el TFF posee una base más completa, la cual permite cambios dinámicos en el fasor, mientras que dichos cambios no son tomados en cuenta en el modelo del FF.<sup>5</sup> De hecho, los primeros términos de Taylor presentes en la señal de entrada y predominantes en el intervalo de tiempo, pero no tomados en cuenta en el FF, se infiltran en sus estimados de magnitud y fase, generando errores más grandes que en TFF, el cual los filtra por canales separados para componentes de velocidad y aceleración. Note que ambos estimadores poseen un error muy pequeño en la primera columna, esto es porque los fasores estáticos pertenecen al subespacio generado por las bases de ambos estimadores. De hecho, los errores en la primera fila corresponden a redondeos computacionales.

Finalmente, en la figura 6 se ilustra la evolución de los estimados para el peor caso ( $f_a = f_\varphi = 5$  Hz) durante dos ciclos. Figura 6.a y figura 6.b muestran los estimados instantáneos de amplitud y fase. Note que en ambas figuras los estimados poseen

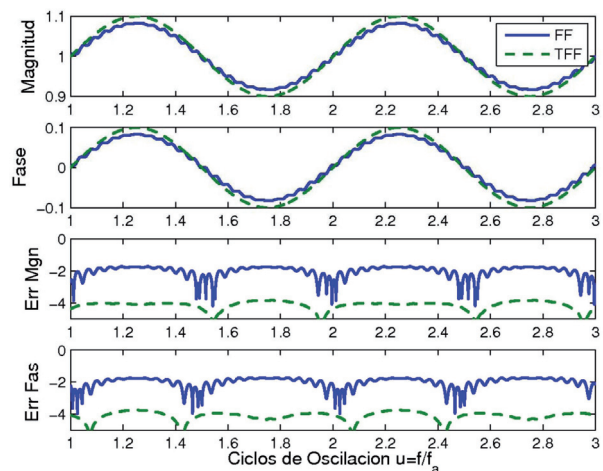


Fig. 6. Estimados de (a) amplitud y (b) fase con TFF y FF, para un fasor dinámico con  $f_a = f_\varphi = 5$ , y errores absolutos en escala logarítmica base 10 para (c) amplitud y (d) fase (parámetros verdaderos - parámetros estimados).

un comportamiento similar. De todas formas, los estimados del FF presentan una visible atenuación debido a la distorsión en amplitud generada por la banda de paso curva del FF. Esta atenuación no se presenta en el caso del TFF. En la figura 6.c y la figura 6.d se muestran los errores absolutos en escala logarítmica. Ambos errores son periódicos y los errores del TFF son menores a los del FF.

### Infiltración armónica

El desempeño de ambos estimadores ante infiltración armónica es comparado cuando los conjuntos  $\{s_3(t)\}$  o  $\{s_5(t)\}$  se encuentran presentes en la señal de entrada. Dichos conjuntos corresponden a armónicas dinámicas, i. e. armónicas oscilantes para las cuales su espectro no se concentra en una línea, sino que es denso alrededor de la frecuencia central  $f = kf_1$ . La tabla II muestra la función de costo para una tercera armónica dinámica con los siguientes parámetros:  $c_{3,1} = .2$ ,  $c_{3,2} = .1$ ,  $c_{3,3} = 0$  y  $c_{3,4} = .1$ . Note que nuevamente, el error tiende a incrementar al fondo de la tabla, y que la infiltración armónica de los estimados fasoriales del TFF es menor que la del FF por un factor de diez. Los resultados para la quinta armónica con los mismos parámetros son de diez veces menores para ambos estimadores y no son tabulados.

Tabla II. NRMSE para la infiltración de la tercera armónica dinámica en la estimación fasorial, con  $c_{3,1} = .2$ ,  $c_{3,2} = .1$ ,  $c_{3,3} = 0$  Y  $c_{3,4} = .1$ , para los casos TFF Y FF respectivamente,

y su relación 
$$\beta = \frac{\text{NRMSE}_{\text{TFF}}}{\text{NRMSE}_{\text{FF}}}$$

3th DH parámetros	NRMSE <sub>FF</sub>	NRMSE <sub>TFF</sub>	$\beta$
$f_{a,3} = 0 \text{ Hz}, f_{\varphi,3} = 0 \text{ Hz}$	$5.48 \times 10^{-3}$	$9.11 \times 10^{-4}$	$1.66 \times 10^{-1}$
$f_{a,3} = 0 \text{ Hz}, f_{\varphi,3} = 1 \text{ Hz}$	$4.96 \times 10^{-3}$	$9.17 \times 10^{-4}$	$1.84 \times 10^{-1}$
$f_{a,3} = 0 \text{ Hz}, f_{\varphi,3} = 2 \text{ Hz}$	$5.76 \times 10^{-3}$	$9.09 \times 10^{-4}$	$1.57 \times 10^{-1}$
$f_{a,3} = 0 \text{ Hz}, f_{\varphi,3} = 5 \text{ Hz}$	$6.09 \times 10^{-3}$	$9.10 \times 10^{-4}$	$1.49 \times 10^{-1}$
$f_{a,3} = 1 \text{ Hz}, f_{\varphi,3} = 0 \text{ Hz}$	$6.06 \times 10^{-3}$	$9.07 \times 10^{-4}$	$1.49 \times 10^{-1}$
$f_{a,3} = 1 \text{ Hz}, f_{\varphi,3} = 1 \text{ Hz}$	$5.71 \times 10^{-3}$	$9.12 \times 10^{-4}$	$1.59 \times 10^{-1}$
$f_{a,3} = 1 \text{ Hz}, f_{\varphi,3} = 2 \text{ Hz}$	$5.94 \times 10^{-3}$	$9.11 \times 10^{-4}$	$1.53 \times 10^{-1}$
$f_{a,3} = 1 \text{ Hz}, f_{\varphi,3} = 5 \text{ Hz}$	$6.59 \times 10^{-3}$	$9.07 \times 10^{-4}$	$1.37 \times 10^{-1}$
$f_{a,3} = 2 \text{ Hz}, f_{\varphi,3} = 0 \text{ Hz}$	$9.06 \times 10^{-3}$	$9.17 \times 10^{-4}$	$1.01 \times 10^{-1}$
$f_{a,3} = 2 \text{ Hz}, f_{\varphi,3} = 1 \text{ Hz}$	$8.77 \times 10^{-3}$	$9.24 \times 10^{-4}$	$1.05 \times 10^{-1}$
$f_{a,3} = 2 \text{ Hz}, f_{\varphi,3} = 2 \text{ Hz}$	$9.31 \times 10^{-3}$	$9.14 \times 10^{-4}$	$9.81 \times 10^{-2}$
$f_{a,3} = 2 \text{ Hz}, f_{\varphi,3} = 5 \text{ Hz}$	$9.58 \times 10^{-3}$	$9.13 \times 10^{-4}$	$9.53 \times 10^{-2}$
$f_{a,3} = 5 \text{ Hz}, f_{\varphi,3} = 0 \text{ Hz}$	$1.37 \times 10^{-2}$	$8.87 \times 10^{-4}$	$6.46 \times 10^{-2}$
$f_{a,3} = 5 \text{ Hz}, f_{\varphi,3} = 1 \text{ Hz}$	$1.35 \times 10^{-2}$	$8.92 \times 10^{-4}$	$6.56 \times 10^{-2}$
$f_{a,3} = 5 \text{ Hz}, f_{\varphi,3} = 2 \text{ Hz}$	$1.38 \times 10^{-2}$	$8.86 \times 10^{-4}$	$6.42 \times 10^{-2}$
$f_{a,3} = 5 \text{ Hz}, f_{\varphi,3} = 5 \text{ Hz}$	$1.39 \times 10^{-2}$	$8.86 \times 10^{-4}$	$6.36 \times 10^{-2}$

**Estimados frecuenciales en señales moduladas en amplitud y fase**

Las derivadas del fasor son parámetros muy importantes, ya que indican el comportamiento dinámico del sistema de potencia. Algunas de esas derivadas poseen un gran interés, por ejemplo la frecuencia instantánea del sistema está relacionada con la primera derivada de la fase con respecto al tiempo, dicha variable es crucial en un sistema de potencia y debe de monitorearse tan adecuadamente como sea posible. La segunda derivada de la fase corresponde a la razón de cambio de la frecuencia, un indicador del flujo de potencia en una WAN. En equipos comerciales, los estimados frecuenciales son obtenidos de los estimados fasoriales. La mayoría de ellos usa ecuaciones en diferencias finitas, las cuales son muy sensibles a ruido debido a su alta ganancia en altas frecuencias. Entonces una etapa de prefiltrado o postfiltrado mediante un filtro pasa bajo es usado para atenuar los componentes de alta frecuencia o el error de fase de los estimados fasoriales, pero esta etapa requiere un cálculo extra e introduce distorsiones de

amplitud y fase (retardo variable) en los estimados, generando errores que pueden provocar problemas de regulación o estabilidad en la red.

Un diferenciador reciente, usado para calcular la frecuencia del sistema fue propuesto en.<sup>6</sup> El cual ajusta la fase estimada con el lado derecho de un polinomio de Taylor de segundo orden usando el algoritmo de mínimos cuadrados. Es conocido<sup>1</sup> que dicho procedimiento corresponde a un banco de filtros paso bajo: el obtenido con el método de Shanks. En la referencia<sup>14</sup> se demostró que el método de Shanks no preserva las ganancias máximamente lisas del conjunto en la referencia.<sup>1</sup> La figura 7 muestra las respuestas en magnitud y fase de los diferenciadores de orden cero y uno propuestos en la referencia.<sup>6</sup> Es aparente que la banda de frecuencia de la ganancia plana y lineal es muy estrecha en ambos diferenciadores. Note también que dichos filtros poseen un alto nivel de lóbulos laterales. Además, el primer diferenciador tiene una respuesta en fase no lineal en la banda frecuencial de interés, lo cual indica que los estimados frecuenciales tendrán un retardo variable en el tiempo, el cual a su vez depende de la frecuencia de la oscilación, que es precisamente el parámetro a estimar. Dicha variación en el retardo de la estimación constituye una seria fuente de error, y peor aún, una pérdida de sincronía, la característica más preciada de un sincrofasor.

Por otro lado, en el caso del TFF, todas las derivadas son estimadas al mismo tiempo a partir de la señal de entrada y no de los estimados fasoriales,

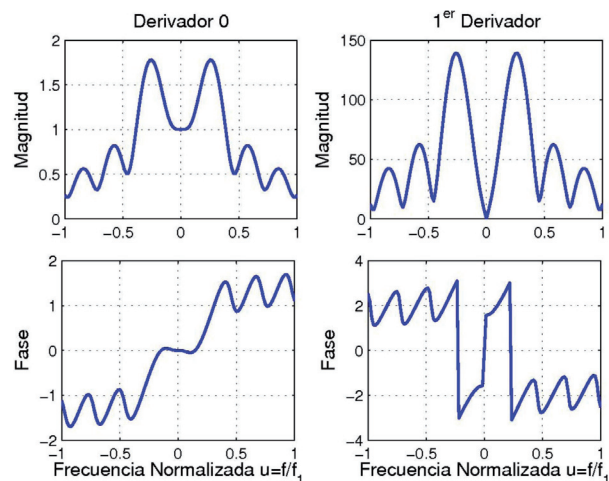


Fig. 7. Respuesta en frecuencia del estimador LS de cuatro ciclos, para los diferenciadores de orden 0,1.



las estimaciones son realizadas con filtros con ganancias máximamente lisas en la banda de paso y lóbulos laterales bajos en la banda de rechazo, y todos de fase lineal, lo cual significa que, con la excepción de un retardo de tiempo constante, no existe distorsión en amplitud ni en fase.

La figura 8 muestra los errores frecuenciales obtenidos con el FF seguido de mínimos cuadrados, y el TFF para  $s_1(t)$  con  $f_a = f_\varphi = 5$  Hz y  $c_{1,4} = 0.1$  ( $\varphi'(t) = \pi \sin(2\pi f_\varphi t)$ ). El error del método FF-LS fue calculado sincronizando los estimados frecuenciales con la frecuencia ideal, de otra manera éste sería más grande por un factor de diez. Note que el error del método TFF se encuentra siempre acotado por  $\pm 0.3\%$  del error ( $\pm 10^{-2}/\pi$ ). En base a los resultados, es posible concluir que el uso de la ventana como ponderación en el caso del TFF juega un papel crucial en la obtención de mejores estimados. Estos resultados ciertamente contribuyen a la revisión actual del estándar.<sup>4</sup>

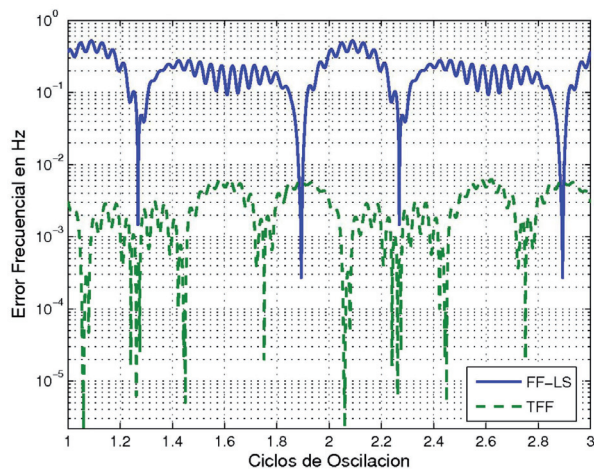


Fig. 8. Errores en la estimación de frecuencia obtenidos con FF-LS y TFF, estimados a partir de fador dinámico con:  $f_a = f_\varphi = 5$  Hz

### Infiltración de ruido blanco

El estimado del vector de estados fasoriales propuesto es un estimado LS en el caso sobredeterminado<sup>15</sup> para el modelo aditivo de señal-ruido:

$$s = Bp + e \tag{18}$$

asumiendo que B es conocido, p es determinístico y e es un ruido distribuido por  $N[0, \sigma^2 I]$ . Entonces la señal se origina a partir del subespacio generado por el modelo, más un ruido aditivo. En este caso  $\hat{p}$  es una estimación insesgada de p, y s es distribuido como  $N[Bp, \sigma^2 I]$ .

El error absoluto debido a la presencia del ruido es:

$$\hat{p} - p = B^+ e \tag{19}$$

donde  $B^+$  es la matriz pseudoinversa. Para el caso LS se tiene que  $B^+ = (B^H B)^{-1} B^H$ , y para el de WLS  $B^+ = (B^H W^H W B)^{-1} B^H W^H W$ .

El comportamiento del error de mínimos cuadrados debido a la presencia de un ruido blanco gaussiano aditivo (Additive White Gaussian Noise, AWGN) en la señal de entrada es ilustrado aquí. El error medio cuadrático debido a la infiltración del ruido a través de los filtros de LS y WLS, ambos de 4 ciclos, es ilustrado en la figura 9, junto con el error producido por el FF.

La figura 9 muestra el error medio cuadrático normalizado de los primeros estimados  $p_j$ , para los casos de WLS y LS. Note que el error en los estimados de fador (varianza) WLS es mayor (1.3 veces para el estimado de orden cero) que el de los estimados LS. Esto significa que el efecto de la ventana sobre el lóbulo principal predomina sobre la disminución de lóbulos laterales. Pero recuerde que estos resultados son para ruido blanco. En una aplicación en un sistema de potencia, los componentes armónicos tienen una importancia mayor que el ruido blanco, y en este caso, la reducción en los lóbulos laterales juega un rol fundamental para una buena estimación. Por otro lado, la infiltración del FF es también menor a la del TFF, pero en este caso, no sólo las cargas armónicas son importantes, sino también la distorsión en oscilación generada por la infiltración de los términos de Taylor no considerados en el modelo de orden cero (vea tablas I, y II).

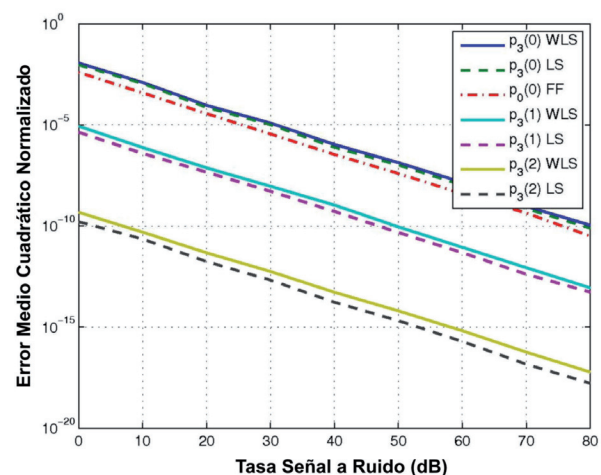


Fig. 9. Infiltración de ruido en los estimados fasoriales, con filtros LS y WLS de cuatro ciclos

### Respuesta al escalón

Finalmente, la respuesta al escalón del estimador TFF para  $\kappa = 0,3,5,7$  es mostrada en la figura 10, siguiendo la referencia en transitorios de amplitud del actual estándar.<sup>4</sup> Note que a pesar de que todos los filtros son de 4 ciclos de longitud, mejores aproximaciones a la discontinuidad pueden ser alcanzadas con altos órdenes.

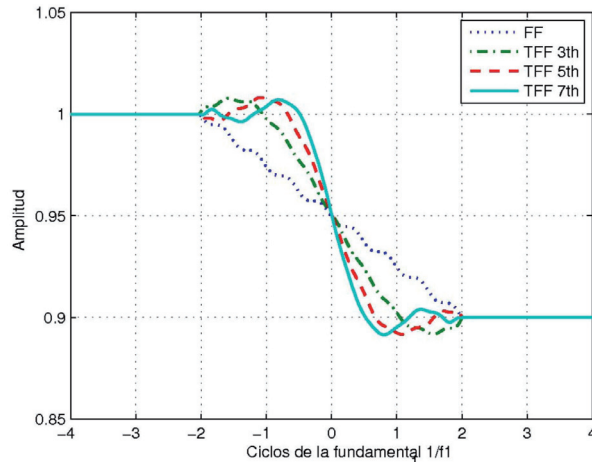


Fig. 10. Respuestas al escalón en amplitud con el TFF estimador de cuatro ciclos  $\kappa = 0,3,5,7$ . Donde  $\kappa = 0$  corresponde al FF.

### CONCLUSIONES

Un método general para estimación del fasor dinámico mediante diferenciadores máximamente lisos fue presentado. El método se basa en la aproximación por mínimos cuadrados ponderados de un polinomio de Taylor al fasor dinámico. Las estimaciones del fasor dinámico y sus derivadas son buenas (mediciones) cuando el contenido frecuencial del mismo se encuentra dentro de la banda de paso de los diferenciadores. El uso de ventanas como factores de ponderación aumenta el ancho de banda y disminuye el nivel de lóbulos laterales, reduciendo la infiltración armónica y de ruido fuera de banda.

El método propuesto posee varias ventajas: una base más completa produce mejores resultados porque reserva lugar para los cambios dinámicos; provee la obtención de un número arbitrario  $\kappa$  de derivadas a la vez; y finalmente, es más flexible, ya que su respuesta en frecuencia depende de tres parámetros de diseño, en lugar de sólo uno. Entonces, el método propuesto no sólo es más adecuado a la aplicación, sino también más efectivo.

### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo de la Universidad Autónoma de Nuevo León para la realización de este trabajo de investigación bajo el proyecto PAICYT CA-1615-07: “Filtros digitales ultraplano para medición fasorial”.

### APÉNDICE A

Prueba corta para las ecuaciones (11)-(13) tomada de.<sup>16</sup> El criterio de error dado en:(11) es una función escalar de  $p_k, k = 0,1,\dots,\kappa$ . Se interesa obtener los coeficientes óptimos de  $k$  que dan como resultado un valor mínimo de (11).

Se escribe la serie de Taylor para un incremento en J como:

$$dJ = \frac{\partial J}{\partial p} dp + \frac{1}{2} dp^T \frac{\partial^2 J}{\partial p^2} dp + O^{(3)} \quad (20)$$

donde  $O^{(3)}$  representa los términos de orden 3,  $\frac{\partial J}{\partial p}$  es conocido como el gradiente, y  $\frac{\partial^2 J}{\partial p^2}$  como la matriz Hessiana.

Un punto estacionario es alcanzado cuando el incremento en (20) es cero para todos los incrementos en  $dp$ , entonces, para un punto estacionario se requiere que:

$$\frac{\partial J}{\partial p} = 0 \quad (21)$$

lo cual, en el caso de mínimos cuadrados, corresponde a las ecuaciones normales.

Suponga un punto estacionario, entonces se cumple (21), y (20) se convierte en:

$$dJ = \frac{1}{2} dp^T \frac{\partial^2 J}{\partial p^2} dp + O^{(3)} \quad (22)$$

y para el mínimo local, (22) debe de ser positiva definida para todos los incrementos  $dp$ , lo cual es garantizado si la matriz Hessiana es positiva definida,

$$\frac{\partial^2 J}{\partial p^2} > 0 \quad (23)$$

como en (12).

### APÉNDICE B

#### Glosario de Términos:

- **Envolvente compleja:** Es la función temporal compleja que multiplica a la exponencial compleja para formar una modulación (variación temporal) en amplitud y fase.

- Ventana clásica: Las ventanas clásicas en procesamiento de señales son la de Hanning, Hamming, Kaiser, etc. reconocidas en la mayoría de los libros de texto. Sirven para ponderar la señal en la parte central del intervalo.
- Lóbulos laterales: En los espectros de las ventanas son las pequeñas variaciones obtenidas a los lados del lóbulo central. En los filtros son ganancias pequeñas, cercanas a cero en la banda de paro.
- Sincrofasor: Es la medición fasorial estampada con instantes de tiempo. La sincronización se obtiene mediante pulsos temporales finos transmitidos por una red satelital.

## REFERENCIAS

1. J. A. de la O, "Dynamic phasor estimates for power system oscillations," IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 56, no. 5, pp. 1648–1657, Oct 2007.
2. J. G. Proakis and D. G. Manolakis, Digital Signal Processing, 4th ed. New Jersey: Prentice Hall, 2007.
3. S. Samadi, H. Iwakura, and A. Nishihara, "Multiplierless and hierarchical structures for maximally flat half-band filters," IEEE Trans. Circuits Syst. II, vol. 46, no. 9, pp. 1225–1230, Sept. 1999, p. 1226.
4. IEEE Standard for Synchrophasors for Power Systems. IEEE Std. C37.118-2005, 2006.
5. K. Martin, D. Hamai, M. Adamiak, S. Anderson, et al, "Exploring the IEEE standard C37.118-2005 synchrophasors for power systems," IEEE Trans. Power Del., vol. 23, no. 4, pp. 1805–1811, Oct. 2008.
6. A. Phadke and B. Kaszteny, "Synchronized phasor and frequency measurement under transient conditions," IEEE Trans. Power Del., vol. 4, pp. 89–95, Jan. 2009.
7. W. Premerlani, B. Kaszteny, and M. Adamiak, "Development and implementation of a synchrophasor estimator capable of measurements under dynamic conditions," IEEE Trans. Power Del., vol. 23, no. 1, pp. 109 – 123, Jan. 2008.
8. J. G. Proakis, Digital Communications, 4th ed. New York: McGraw-Hill, 2001, p. 148.
9. D. C. Lay, Linear Algebra and its Applications. New York: Adison Wesley, 2006, ch. 6.8.
10. S. A. Dyer and X. He, "Least-squares fitting of data by polynomials," IEEE Instrum. Meas. Mag., vol. 4, p. 48, Dic. 2001.
11. H. K. Khalil, Nonlinear Systems, 2nd ed. Prentice Hall, 1996.
12. M. Vetterli and J. Kovacevic, Wavelets and subband coding, 4th ed. New Jersey: Prentice Hall, 1995, p. 40.
13. M. Platas and J. A. de la O, "Dynamic phasor estimates through maximally flat differentiators," PES General Meeting, Pittsburg, Jun. 2008.
14. A. Torres and J. A. de la O, "Shanks' method for phasor estimation," IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 57, no. 4, pp. 813–819, Apr. 2008.
15. A. J. Thorpe and L. L. Scharf, "Data adaptive rank-shaping methods for solving least squares problems," IEEE Trans. Signal Process., vol. 43, no. 7, pp. 1591–1601, Jul. 1995.
16. F. L. Lewis and V. L. Syrmos, Optimal Control, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1995, p. 1.

