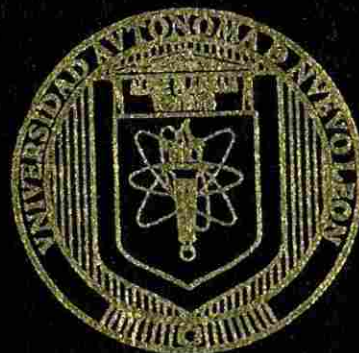


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO MATEMATICAS



TRATAMIENTO INTEGRAL DE FILTRADO Y CONTROL
OPTIMO DE PROCESOS NO LINEALES CON MULTIPLES
RETARDOS VARIANTES EN EL TIEMPO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN INGENIERIA FISICA INDUSTRIAL

PRESENTA

MARIA ARACELIA ALCORTA GARCIA

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. OCTUBRE DE 2003

2003
TD
Z6651
FCFM
2003
.A4

TRATAMIENTO INTEGRAL DE FILTRADO Y CONTROL
OPTIMIZACION DE PROCESOS NO LINEALES CON MULTIPLES
RETRASOS VARIANTES EN EL TIEMPO

M.A.A.G.



1020149244

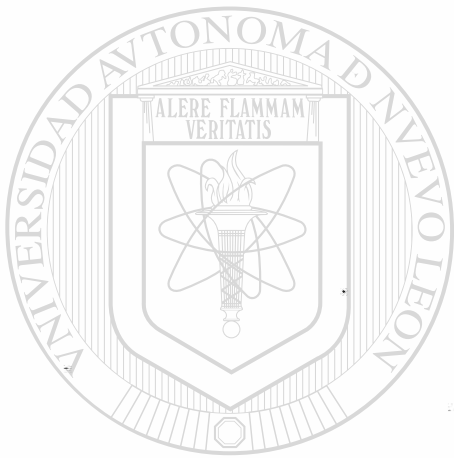


UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

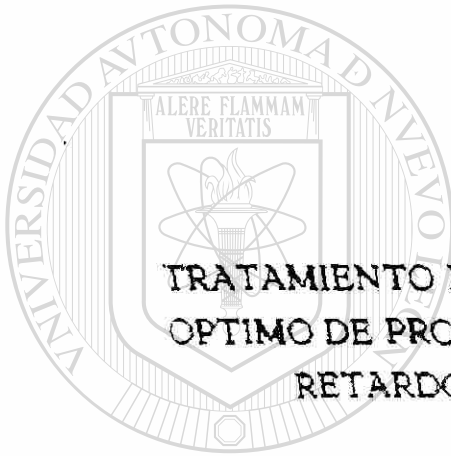
®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

m

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO MATEMATICAS



TRATAMIENTO INTEGRAL DE FILTRADO Y CONTROL
OPTIMO DE PROCESOS NO LINEALES CON MULTIPLES
RETARDOS VARIANTES EN EL TIEMPO

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

TESIS

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN INGENIERIA FISICA INDUSTRIAL

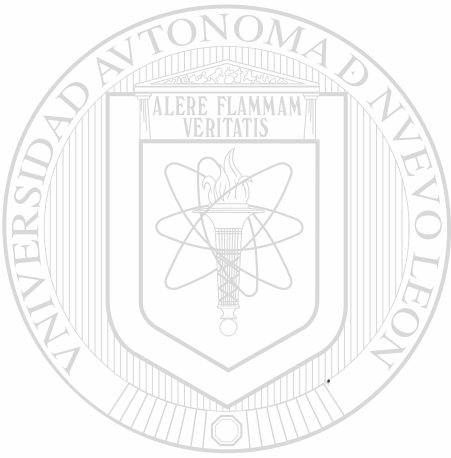
PRESENTA

MARIA ARACELIA ALCORTA GARCIA

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. OCTUBRE DE 2003

974861

TD
Z6651
FCFM
2003
.A4



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



FONDO
TESIS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



**TRATAMIENTO INTEGRAL DE FILTRADO Y CONTROL
ÓPTIMO DE PROCESOS NO LINEALES CON MÚLTIPLES
RETARDOS VARIANTES EN EL TIEMPO**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS
TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

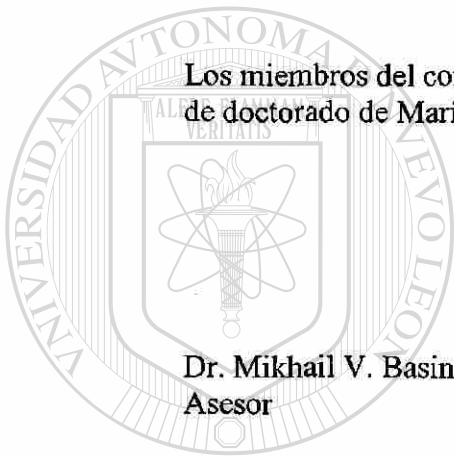
PRESENTA
MARÍA ARACELIA ALCORTA GARCÍA

San Nicolás de los Garza, N. L.

Octubre de 2003

Tratamiento Integral de Filtrado y Control de Procesos no Lineales con Múltiples Retardos en el Tiempo

Los miembros del comité aprueban la tesis
de doctorado de María Aracelia Alcorta García



Dr. Mikhail V. Basin
Asesor

A handwritten signature in black ink, positioned above a horizontal line.

Dr. Héctor Altuve Ferrer

A handwritten signature in black ink, positioned above a horizontal line.

Dr. César Elizondo González

A handwritten signature in black ink, positioned above a horizontal line.

Dr. Roger Z. Ríos Mercado

A handwritten signature in black ink, positioned above a horizontal line.

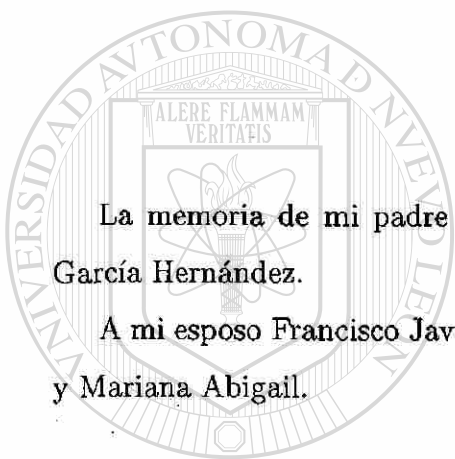
Dr. César Emilio Villarreal Rodríguez

A handwritten signature in black ink, positioned above a horizontal line.

Dedicada a:

La memoria de mi padre Mario René Alcorta Montemayor y a mi madre Aracelia García Hernández.

A mi esposo Francisco Javier Lozano Guerra y a mis hijos José Javier, Judit Aracelia, y Mariana Abigail.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Agradecimientos

Al Dr. Mikhail V. Basin, por su asesoría.

A los miembros del Comité de Tesis: Dr. Mikhail V. Basin, Dr. Héctor Altuve Ferrer, Dr. César Elizondo González, Dr. Roger Ríos Mercado, y Dr. César Emilio Villarreal Rodríguez por sus valiosas recomendaciones para mejorar la calidad de la tesis.

A los miembros del Comité doctoral del DIFI, por su apoyo durante todo el doctorado.

Al Dr. Alexander Pozniak, por su ayuda y comentarios como revisor externo.

A la MA Carmen del Rosario de la Fuente García, quién como directora de la FCFM me brindó su apoyo durante la segunda parte del doctorado.

Al Ing. Oscar Recio Cantú, quién como director de la FCFM me brindó su apoyo durante la primera parte del doctorado.

A mi familia, y en especial a mi madre Aracelia García Hdz., por su incondicional apoyo y ayuda, a mi esposo, Fco. Javier Lozano, por su ayuda y comprensión, y a mi hermano Efraín Alcorta García, por su valioso apoyo y orientaciones a lo largo del doctorado.

Al MC Alfredo Alanís Durán y a la MC Lilia López por su apoyo en la carga académica y orientaciones.

Al SNI por su asignación como candidato.

Al Promep por su apoyo para la escritura de la tesis.

A la UANL por su apoyo económico.

A mis compañeros maestros y amigos por hacerse partícipes de una o de otra forma de mis actividades en el doctorado.

Notación

A	Evento.
$P(A)$	Probabilidad del evento A .
Ω	Espacio muestral.
\emptyset	Evento imposible o conjunto vacío.
Σ	σ -álgebra.
A	Elementos de la σ -álgebra.
\cup	Unión de conjuntos.
\cap	Intersección de conjuntos.
\mathcal{B}	Álgebra de Borel.
X	Vector aleatorio.
x_i	Componentes del vector aleatorio X .
P_X	Distribución de la variable aleatoria X .
\mathbb{R}^n	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ (n veces).
$F(X)$	Función de distribución de X .
$f(x)$	Función de densidad de probabilidad de X .
$E(X), m_X$	Valor esperado de X o esperanza matemática.
$E(X Y)$	Esperanza condicional de X dada Y .
Γ_X	Momento de segundo orden.
K_X	Matriz de covarianza.
m_X^*	Transpuesta de la matriz m_X , tomando el conjugado de los elementos complejos.
λ	Vector de variables reales.
X^T	Trasposición del vector X .
ξ_p	Número complejo.
μ_X	Valor esperado de X .

Continuación de la Notación

$X_r \xrightarrow{m} X$

X_r converge en media cuadrática a X .

$\|X\|$

Norma del vector X .

$\nu(t)$

Intensidad del ruido blanco.

$\delta(t)$

Función delta de Dirac.

X_i^0

$X_i - m_i$.

$W(t)$

Proceso de Wiener.

$\omega(t)$

Realizaciones de $W(t)$.

$K_w(t_1, t_2)$

Covarianza del proceso de Wiener.

V

Ruido blanco.

u

Entrada de control.

u^*

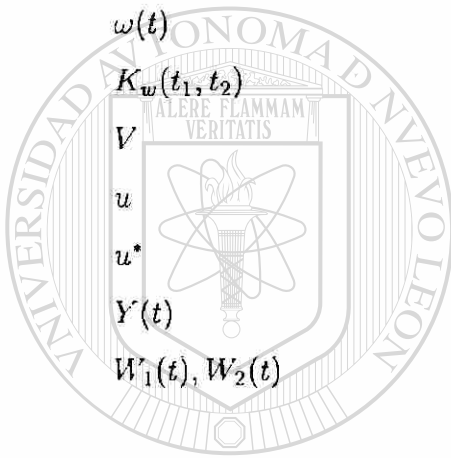
Ley de control óptima.

$Y(t)$

Proceso de salida.

$W_1(t), W_2(t)$

Procesos de Wiener.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Resumen

Tratamiento Integral de Filtrado y Control de Procesos no Lineales
con Múltiples Retardos Variantes en el Tiempo

Publicación No. _____

María Aracelia Alcorta García

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Profesor asesor: Dr. Mikhail V. Basin

Octubre, 2003

En el trabajo desarrollado en la presente tesis fueron obtenidos los algoritmos de filtrado y control óptimos para sistemas de Itô-Volterra, sistemas polinomiales de tercer y cuarto grados, y sistemas bilineales, en todos los casos anteriores, con observaciones continuas en el tiempo, y además con observaciones discontinuas para el caso de los sistemas de Itô-Volterra. También se trabaja con el caso en el cual el proceso es no observable, tanto en los sistemas de Itô-Volterra, así como en los sistemas polinomiales, obteniendo los algoritmos del controlador, mediante la aplicación de los principios de dualidad y de separación. En el caso de los algoritmos de filtrado, control y controlador polinomial obtenidos, se realiza una aplicación a un sistema automotriz, en la cual se compara la eficacia de estos algoritmos con respecto a los algoritmos del filtro lineal de Kalman-Bucy. Por último, se obtienen los algoritmos de filtrado para sistemas bilineales, para los cuales se presenta una aplicación a un reactor de polimerización en la cual se compara la eficacia de los algoritmos de filtrado obtenidos, con los lineales (de Kalman-Bucy). Los algoritmos de filtrado presentados en este trabajo, son obtenidos matemáticamente y su eficacia es mostrada mediante simulación en *MatLab 6, versión 1.2*.

Índice general

1. Introducción	12
1.1. Introducción	12
1.2. Antecedentes	13
1.3. Motivación	16
1.4. Aportaciones	17
1.4.1. Control Óptimo en Sistemas de Itô-Volterra	17
1.4.2. Controlador Óptimo para Sistemas no Observables de Itô-Volterra	18
1.4.3. Filtrado Óptimo en Sistemas Polinomiales	18
1.4.4. Ecuaciones del Filtro para Ecuaciones de Estado Bilineales	19
1.4.5. Control Óptimo en Sistemas Polinomiales	19
1.4.6. Controlador Óptimo en Sistemas Polinomiales	19
1.5. Organización de la Tesis	20
2. Marco Teórico	22
2.1. Probabilidad y Estadística	22
2.1.1. Conceptos Básicos	22
2.1.2. Variables Aleatorias	25

2.1.3.	Convergencia de Variables Aleatorias	30
2.1.4.	Procesos Estocásticos	31
2.2.	Ecuaciones Estocásticas	46
2.2.1.	Ecuaciones Estocásticas para Densidades	47
2.3.	Teoría de Filtrado Óptimo	54
2.3.1.	Filtro de Wiener	54
2.3.2.	Filtro de Kalman (Tiempo Discreto)	57
2.3.3.	Filtro de Kalman-Bucy (Tiempo Continuo)	58
2.3.4.	Ecuación General de Filtrado Óptimo	60
2.4.	Teoría de Control Óptimo	70
2.4.1.	Principio del Máximo de Pontryagin	70
2.4.2.	Programación Dinámica	73
2.4.3.	Regulador Lineal Óptimo	75
2.4.4.	Controlador Lineal Óptimo	83
2.5.	Teoría de Vibrosoluciones	86

3. Control Óptimo en Sistemas de Itô-Volterra 90

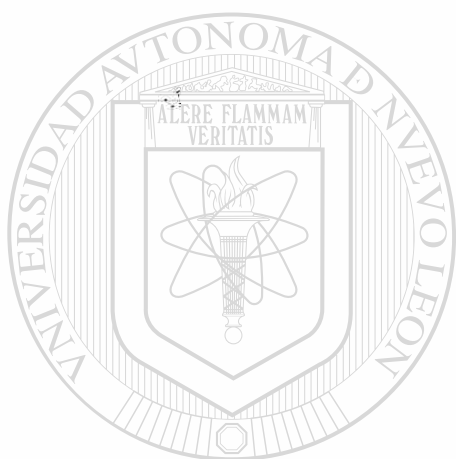
3.1.	Control Óptimo en Sistemas Continuos de Itô-Volterra	90
3.1.1.	Planteamiento del Problema	90
3.1.2.	Principio de Dualidad	91
3.1.3.	Solución al Problema Dual de Filtrado	92
3.1.4.	Solución al Problema de Control Óptimo para Sistemas Continuos de Itô-Volterra	94
3.2.	Control Óptimo en Sistemas Discontinuos de Itô-Volterra	95
3.2.1.	Planteamiento del problema	95
3.2.2.	Solución al Problema de Filtrado	96

3.2.3.	Solución al Problema de Control	98
3.3.	Control Óptimo en la Planta Dinámica	102
3.3.1.	Planteamiento del Problema	102
3.3.2.	Solución	103
3.4.	Ejemplo: Movimiento de un Misil con Motores Jet e Impulsivo	104
3.4.1.	Planteamiento del Problema	104
3.4.2.	Solución	106
4.	Controlador Óptimo para Sistemas no Observables de Itô-Volterra	109
4.1.	Controlador Óptimo para Sistemas Continuos de Itô-Volterra	109
4.1.1.	Planteamiento del Problema	109
4.1.2.	Principio de Separación en Sistemas Integrales	110
4.1.3.	Solución del Problema de Control Óptimo	112
4.2.	Controlador Óptimo en Sistemas no Observables y Discontinuos de Itô-Volterra	113
4.2.1.	Planteamiento del Problema	113
4.2.2.	Principio de Separación en Sistemas Integrales Discontinuos	115
4.2.3.	Solución al Problema de Control para Sistemas Discontinuos	117
4.2.4.	Ecuaciones de los Saltos	118
4.3.	Controlador Óptimo para la Planta Dinámica	124
4.3.1.	Planteamiento del Problema	124
4.3.2.	Solución	125
4.3.3.	Saltos para la Planta Dinámica	127
4.4.	Movimiento de un Misil con Motores Jet e Impulsivo y Velocidad no Observable	128
4.4.1.	Planteamiento del Problema	128

4.4.2. Solución	130
5. Filtrado Óptimo en Sistemas Polinomiales	135
5.1. Filtrado Óptimo para Ecuaciones de Estado y de Observaciones Lineales .	135
5.1.1. Planteamiento del Problema	135
5.1.2. Solución	136
5.2. Ecuación de Kushner para el Estado no Lineal y Observaciones lineales . .	137
5.2.1. Planteamiento del Problema	137
5.2.2. Solución	137
5.3. Filtro Óptimo Polinomial para la Ecuación de Estado de Tercer Grado y Observaciones Lineales	139
5.3.1. Planteamiento del Problema	139
5.3.2. Solución	139
5.4. Filtro Óptimo para Ecuaciones de Estado Polinomial de Cuarto Grado y Observaciones Lineales	144
5.4.1. Planteamiento del Problema	144
5.4.2. Solución	145
5.5. Aplicación del Filtro Óptimo Polinomial a un Sistema Automotriz	146
5.5.1. Planteamiento del Problema	146
5.5.2. Solución	147
6. Ecuaciones del Filtro para Ecuaciones de Estado Bilineales y su Apli- cación a la Estimación de un Proceso de Polimerización	155
6.1. Ecuaciones del Filtro para Ecuaciones de Estado Bilineales	155

6.1.1.	Planteamiento del Problema	155
6.1.2.	Solución	156
6.2.	Aplicación del Filtro Bilineal a la Estimación de un Proceso de Polimerización	157
6.2.1.	Planteamiento del Problema	157
6.2.2.	Solución	160
7.	Control Óptimo en Sistemas Polinomiales	166
7.1.	Control Óptimo para un Estado Polinomial de Tercer Grado con Entrada Lineal de Control	166
7.1.1.	Planteamiento del Problema	166
7.1.2.	Solución	167
7.2.	Aplicación del Regulador Óptimo Polinomial de Tercer Grado a un Sistema Automotriz	169
7.2.1.	Planteamiento del problema	169
7.2.2.	Solución	171
8.	Controlador Óptimo en Sistemas Polinomiales	176
8.1.	Problema del Controlador Óptimo	176
8.1.1.	Planteamiento del Problema	176
8.1.2.	Principio de Separación para Sistemas Polinomiales	177
8.1.3.	Solución al Problema de Control Óptimo	180
8.2.	Aplicación del Controlador Polinomial Óptimo a un Sistema Automotriz	181
8.2.1.	Planteamiento del problema	181
8.2.2.	Solución	183
9.	Conclusiones, Aportaciones y Recomendaciones para Trabajos Futuros	189
9.1.	Conclusiones	189

9.2. Aportaciones	190
9.3. Recomendaciones para Trabajos Futuros	192
Referencias Bibliográficas	194



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción

Dentro de la calidad y la mejora continua va implícita la palabra *filtrado*, como algo que permitirá eliminar lo no deseado y mejorar de esta manera la calidad. Los ruidos, presentes en todos los procesos (químicos, biológicos, mecánicos, etc.) causan disturbios, los cuales afectan al proceso y por lo tanto a los resultados del mismo. En este trabajo se estudia el caso particular de procesos con la presencia de disturbios con la forma de ruidos blancos Gaussianos. El deseo es eliminar o minimizar los disturbios presentes en los procesos. Este aspecto de la calidad es estudiado por la teoría de control para procesos estocásticos y en específico, por la teoría de filtrado. En esta tesis se elaboran algoritmos de filtrado y control óptimo partiendo del método de mínimos cuadrados, el cual ofrece las condiciones mediante las cuales se podrá minimizar el error, para procesos representados por sistemas de ecuaciones polinomiales de grados tres y cuatro, ya que hay algunos procesos técnicos, químicos, que son representados por sistemas de ecuaciones de grados no lineales y no se cuenta con los algoritmos correspondientes.

1.2. Antecedentes

Ya que en este trabajo es presentado el control y el controlador para sistemas de Itô-Volterra, se presentarán primero algunos antecedentes al respecto, y posteriormente se tratarán los referentes al filtrado polinomial. Los problemas de filtrado y control óptimos, para sistemas dinámicos con retardos, los cuales representan un caso particular de los sistemas integrales discontinuos, han sido estudiados desde diferentes puntos de vista (ver, por ejemplo, [34],[35],[1]). La aplicación de los sistemas dinámicos con retardos se puede apreciar en conceptos de economía global [40], modelos de mercado [43], sistemas técnicos [32] y otros. El italiano Vito Volterra (1860-1940), en los años 20, elaboró un modelo matemático de la coexistencia entre dos poblaciones ecológicas para analizar las variaciones cíclicas observadas en las poblaciones de tiburones y los peces que les sirven de alimento en el mar Adriático, el cual concluyó con la ecuación integral (la cual puede o no, ser reducida al caso de una ecuación diferencial). En [57] se puede apreciar el caso particular de la integral de Volterra, en el cual se trabajó para obtener los algoritmos de control y filtrado. Esta ecuación, combinada con la integral estocástica de Itô, dió paso a la integral estocástica de Itô-Volterra, la cual es tratada en esta tesis. En 1979, fueron realizados los primeros trabajos sobre existencia y unicidad de la ecuación de Itô-Volterra, por K. It [45]. En 1980, Balakrishnan [4] realizó las primeras aplicaciones de este modelo a la teoría de control óptimo. En 1985, Kleptsina y A. Yu. Veretennikov [51] establecieron el procedimiento para obtener el filtro óptimo del proceso descrito sobre observaciones continuas de una ecuación reducible a una ecuación diferencial en el caso escalar. Un año más tarde, L. E. Shaiket [74] presentó el resultado para el caso vectorial. Finalmente, en [67],[65], se sentaron las bases necesarias para el análisis de filtrado sobre observaciones discretas-continuas. En este trabajo se presenta el control y el controlador óptimos para sistemas de Itô-Volterra con observaciones continuas y discretas en el tiempo. El principio

de dualidad [56] establece la utilización de la estructura de la matriz de ganancia óptima del problema de filtrado dual como la matriz de ganancia en el problema de control, tal como se hizo para sistemas diferenciales estocásticos en [47], [46]. Como un resultado, la ley de control óptima y la matriz de ganancia son obtenidas primero en el caso general en la ecuación de estado de Itô-Volterra, donde la matriz de ganancia satisface la ecuación de Riccati, la cual depende de dos variables de tiempo, como la función matricial de correlación cruzada en el problema dual (ver [26] [27]). También es presentado el caso de la planta dinámica, gobernado por una ecuación diferencial, en el que la función de correlación cruzada coincide con la varianza como puede verse en [25]. En esta situación, la varianza y la matriz de ganancia satisfacen ecuaciones de Riccati, las cuales dependen solo de una variable, el tiempo, similarmente a la varianza en el problema de filtrado para procesos dinámicos sobre observaciones de Itô-Volterra [25], [22].

Las ecuaciones del controlador para sistemas de Itô-Volterra con estado discontinuo sobre observaciones discontinuas son obtenidas usando el procedimiento del filtrado [26],[27], en las cuales, derivando las ecuaciones de filtrado sobre observaciones discontinuas, se conocen las ecuaciones de filtrado sobre observaciones continuas, como un caso particular, y a partir de ellas, son obtenidas en este trabajo las ecuaciones de los algoritmos de control óptimo como un resultado dual del filtro óptimo, para sistemas de Itô-Volterra en el Capítulo 3, con observaciones lineales continuas y discretas en el tiempo.

El inicio de la teoría de filtrado se remonta al año 1949, cuando N. Wiener [77] estudió los problemas de filtrado de sistemas bajo la presencia de ruidos blancos Gaussianos. Wiener utilizó técnicas de interpolación y extrapolación sobre series estacionarias en el tiempo y a este método se le conoce como Filtrado de Wiener. Rudolf Emil Kalman (1930) elaboró en 1958 una aproximación del modelo basado en el problema de filtrado de Wiener, siendo conocido como el Filtro de Kalman [47] . En 1961, R. E. Kalman y R.

S. Bucy [46] presentaron una nueva aplicación a la teoría de filtrado, la cual se conoce como el Filtro de Kalman-Bucy. Los trabajos en [47] y [46] desarrollaron el concepto de filtrado para sistemas lineales en tiempo discreto y en tiempo continuo respectivamente. Posteriormente, la generalización del caso lineal al no lineal, fue hecha por P. Frost y T. Kailath [41] en 1971, utilizando el mismo esquema del filtrado lineal.

La solución general al problema de filtrado óptimo para el estado no lineal y ecuaciones de observación con presencia de disturbios representados por ruidos blancos Gaussianos fue obtenida por Kushner [53] en 1964. La solución que obtuvo Kushner se basa en la densidad condicional de un estado no observable con respecto a las observaciones. Más tarde se obtuvo el filtro finito dimensional no lineal para otros casos, por ejemplo, cuando el vector de estado puede tomar solo un número finito de estados admisibles [78], o si la ecuación de observación es lineal y el término *drift* en la ecuación de estado satisface la ecuación de Riccati $df/dx + f^2 = x^2$ (ver [29]). La clasificación completa de los casos generales en los cuales existe el algoritmo del filtro óptimo no lineal de dimensión finita es dada en [79].

En 1977 fue planteada la forma abstracta para funciones de densidad de probabilidad condicional que se establece en el Teorema de Correlación de Procesos Gaussianos por R. S. Liptser y A. N. Shiriyayev en [60]. En el artículo [62] de S. K. Mitter (1996) se puede encontrar más información referente a teoría de filtrado.

En 1995, en [67] se elaboraron los algoritmos de filtrado Minimax sobre observaciones continuas y discretas, obteniendo vibraciones de las ecuaciones diferenciales en distribuciones con tiempos discontinuos.

En forma similar fue resuelto el problema de control óptimo o regulador óptimo para el estado de sistemas lineales durante los años 60s. [56], [39]. La función de control óptimo para sistemas no lineales se obtiene usando el principio general de máximo [70] o partiendo de programación dinámica [28] sin embargo, en estos trabajos, no se establece una forma

específica de control óptimo. Hoy en día, tomando en cuenta que el problema de control óptimo en el caso lineal puede ser resuelto mediante la aplicación del principio de dualidad a la solución del problema de filtrado óptimo, en este trabajo se presenta la aplicación de este principio al caso de obtención del control para un sistema polinomial, con entrada de control lineal, usando el filtro óptimo para sistemas polinomiales sobre observaciones lineales. Los resultados obtenidos en virtud del principio de dualidad están basados en los resultados obtenidos por Bellman en 1957 [28], Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, y Mishchenko [70] en 1962, y por Pugachev en 1984 [72] y [71] respectivamente, y pueden ser verificados rigurosamente usando estas referencias. Aplicando el principio de dualidad a un caso polinomial, por medio de la dualidad física se tiene que si el filtro óptimo existe en forma cerrada, el regulador óptimo existe en forma cerrada, y viceversa.

El problema del controlador para una ecuación de estado lineal, no presenta una aplicación muy amplia, ya que, por ejemplo, los procesos químicos son descritos por ecuaciones cuadráticas [64]. El principio de separación para sistemas polinomiales con observaciones lineales y criterio cuadrático es establecido en la misma forma que en el caso lineal [56]. En este trabajo este principio es aplicado a sistemas polinomiales de tercer grado con observaciones lineales y criterio cuadrático a minimizar, para los cuales ya existen el filtro y control óptimos [7].

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

1.3. Motivación

La motivación para la realización de este trabajo radica en la importancia de filtrar señales que contienen ruidos en cualquier proceso y la necesidad de desarrollar algoritmos para la elaboración de filtros y controles óptimos que permitan trabajar con sistemas polinomiales de grados 3 y 4, ya que muchos procesos (principalmente químicos y petroquími-

cos) se representan mediante este tipo de ecuaciones y no se contaba con los algoritmos de filtrado y control correspondientes. Ya que no se contaba con las bases matemáticas necesarias, como son las técnicas de filtrado óptimo para sistemas polinomiales y para sistemas de Itô-Volterra. Además, algunos procesos son representados por medio de las ecuaciones de Itô-Volterra, para las cuales no se contaba con los algoritmos de filtrado y control óptimos y en esta tesis se hace el desarrollo de éstos para el caso de observaciones continuas, y discontinuas (con retardos en el tiempo) y el caso mas simple, las ecuaciones para la planta dinámica.

1.4. Aportaciones

A continuación son presentadas las aportaciones de esta tesis.

1.4.1. Control Óptimo en Sistemas de Itô-Volterra

El contenido de este trabajo es basado en la obtención previa del filtro óptimo para sistemas de Itô-Volterra, presentado en [26], [27], en los cuales es obtenido el filtro óptimo para sistemas de Itô-Volterra, con observaciones continuas y discontinuas. En este trabajo se presenta el control óptimo en sistemas de Itô-Volterra, para observaciones continuas y discontinuas, así como los algoritmos de control óptimo con observaciones continuas y discontinuas, partiendo de las ecuaciones para la planta dinámica (cuando el integrando de la ecuación íntegro-diferencial depende de una sola variable). Los resultados de este capítulo se publicaron en [6], [16].

1.4.2. Controlador Óptimo para Sistemas no Observables de Itô-Volterra

Cuando el proceso es no observable, es necesario considerar los algoritmos del filtro [26], [27] y control [6] óptimos ya obtenidos, para elaborar un controlador [8], aplicando el principio de separación para sistemas integrales, el cual es establecido en la misma forma que en las ecuaciones diferenciales dinámicas [56]. Los algoritmos son obtenidos para observaciones continuas y discretas y además se presentan estos casos para las ecuaciones de la planta dinámica (cuando el integrando de la ecuación íntegro-diferencial depende de una sola variable). Los resultados de este capítulo se publicaron en [8], [15].

1.4.3. Filtrado Óptimo en Sistemas Polinomiales

Considerando que ya han sido elaborados los algoritmos de filtrado cuando las ecuaciones de estado son lineales, con tiempo continuo y observaciones lineales, por Kalman y Bucy [46], y siendo planteado el caso general de los algoritmos de filtrado por Kushner [53], y considerando la existencia de los algoritmos de filtrado para el caso cuadrático y observaciones lineales, obtenidos por Basin [5], en este trabajo son presentados los algoritmos de filtrado para el caso en el cual las ecuaciones de estado son polinomiales de tercer y cuarto grados, y además es realizada una aplicación donde se muestra la eficacia del filtro polinomial respecto al filtro lineal. Los resultados de este capítulo se publicaron en [7], [13],[14], [18], [21].

1.4.4. Ecuaciones del Filtro para Ecuaciones de Estado Bilineales

Múltiples procesos (por ejemplo, los de polimerización) son representados mediante ecuaciones de estado bilineales, con observaciones lineales, donde éste es el caso general, (siendo el caso cuadrático un caso particular de éste) y no se contaba con los algoritmos de filtrado correspondientes. En este trabajo son obtenidos los algoritmos de filtrado para el caso de ecuaciones de estado bilineales, con observaciones lineales y se presenta una aplicación a un reactor de polimerización, mostrándose su eficacia respecto al filtro lineal. Los resultados de este capítulo se publicaron en [11], [17], [19], [20].

1.4.5. Control Óptimo en Sistemas Polinomiales

Una vez obtenidas las ecuaciones de filtrado óptimo para sistemas polinomiales de tercer grado, con observaciones lineales [7], aplicando el principio de dualidad, son obtenidas las ecuaciones del control óptimo para sistemas polinomiales de tercer grado, con observaciones lineales [11], [12]. Se presenta una aplicación a un sistema automotriz [63], representado por un sistema de ecuaciones no lineales y con observaciones lineales, donde se puede apreciar la eficacia del control polinomial óptimo respecto al lineal. Los resultados de este capítulo se publicaron en [7], [11], [12], [18].

1.4.6. Controlador Óptimo en Sistemas Polinomiales

Cuando el proceso es no observable, es necesario considerar las ecuaciones de los algoritmos de filtrado óptimo, previamente obtenidas [7], el principio de separación para sistemas polinomiales, y reformular el problema para obtener un controlador óptimo para sistemas polinomiales con observaciones lineales y tiempo continuo (ver [9], [10]). Además, se

verifica la eficacia de este controlador polinomial, respecto al controlador lineal, mediante una aplicación al mismo sistema automotriz que se utilizó en el filtro y en el control óptimos. Los resultados de este capítulo fueron sometidos para su publicación en [9],[10].

1.5. Organización de la Tesis

En el Capítulo 2 se presenta una síntesis de la teoría de probabilidad, teoría de análisis funcional, procesos estocásticos, ecuaciones de Itô-Volterra, teoría de filtrado, teoría de control, y teoría de vibrosoluciones, necesarias para dar al lector una idea de los conceptos en los que se fundamentan los resultados obtenidos, así como las referencias en las que se sustenta la base teórica de los mismos. En el Capítulo 3 se presenta la obtención de las ecuaciones de control óptimo para sistemas de Itô-Volterra, con observaciones lineales, para el caso de observaciones continuas y discontinuas, y en la planta dinámica, partiendo de las ecuaciones de filtrado óptimo obtenidas previamente y aplicando el principio de dualidad. Además, se presenta una aplicación de estas ecuaciones de control óptimo al movimiento de un misil con motores jet e impulsivos. En el Capítulo 4 se presenta el caso del controlador óptimo para las ecuaciones de Itô-Volterra, con observaciones lineales, con los casos de observaciones continuas, y discontinuas. Finalmente, se presenta el controlador para la planta dinámica, también con observaciones lineales, continuas y discontinuas y una aplicación al movimiento de un misil con motores jet e impulsivo y velocidad no observable. En el Capítulo 5, tomando como base la existencia de los algoritmos de filtrado óptimo para ecuaciones de estado lineales y cuadráticas, son obtenidos los algoritmos de filtrado para ecuaciones de estado polinomiales de tercer y cuarto grados con observaciones lineales y continuas; además, se presenta una aplicación de estos algoritmos de filtrado óptimo a un sistema automotriz, mostrándose su eficacia respecto a los algoritmos de

Capítulo 2

Marco Teórico

El contenido de esta sección fueron tomados de las siguientes referencias bibliográficas: Probabilidad y Estadística [72], [71], Ecuaciones Estocásticas [71], La Teoría de Filtrado Óptimo, [2], [47], [46], [71], Teoría de Control Óptimo [39], [58], [59], [56], y Teoría de Vibrosoluciones [67], [50], [66].

2.1. Probabilidad y Estadística

2.1.1. Conceptos Básicos

Definición La observación de algún fenómeno bajo algunas condiciones y acciones, la cual es realizada en un período de tiempo, repitiendo un experimento dado, es llamada una *prueba*.

Definición Una característica cualitativa de una prueba consiste en registrar si los resultados de un experimento presentan algún efecto o no. Este efecto es llamado *evento*.

Definición Una característica cuantitativa de una prueba consiste en determinar los valores de algunas variables obtenidas como un resultado de una prueba. Cada una de

estas variables supone diferentes valores, los cuales son imposibles de predecir. A estas variables se les llama *variables aleatorias*. Los valores específicos que toma una variable aleatoria son llamados *valores simples o realizaciones* de la *variable aleatoria*.

Definición La proporción del número de apariciones de un evento respecto al número total de pruebas es llamada la *frecuencia del evento*. Así, si un evento aparece m veces en n pruebas, entonces la frecuencia en esta serie de pruebas es igual a m/n .

Definición Dada la estabilidad de la frecuencia de un evento, y suponiendo que a todo evento le es asociado un número, a este número se le llama la *probabilidad* de este evento.

Esto es, el número $P(A)$ al cual tiende la frecuencia de A , cuando el número de experimentos tiende a ∞ es la probabilidad del evento A .

Definición Un *evento elemental* es aquel que no contiene sub-eventos, excepto el evento imposible (\emptyset) y a sí mismo.

Definición El conjunto de todos los posibles resultados de una prueba, es llamado el *espacio muestral* y usualmente es denotado por Ω .

Definición Sea Ω un espacio muestral. Sea Σ un conjunto de subconjuntos de Ω . Σ es llamada una σ -álgebra si:

- Para toda $A_i \in \Sigma$, $A_i^c \in \Sigma$, donde $A_i^c = \{x \in \mathbb{R} | x \notin A_i\}$ es el evento complementario al evento A_i .
- Si $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ es una sucesión contable de elementos de Σ , entonces $\bigcup A_n \in \Sigma$.
- $\emptyset \in \Sigma$.

Definición Sea Ω un espacio muestral y A un evento de Σ , la σ -álgebra definida en Ω . La función $P(A)$ es llamada *probabilidad (o medida de probabilidad de A)* si se cumplen las siguientes condiciones:

- $P(A) \geq 0$;
- $P(\Omega) = 1$;
- Si A_1, A_2, \dots es una sucesión finita o infinita de eventos mutuamente excluyentes $A_i \cap A_j = \phi$ para todas i, j tales que $i \neq j$, entonces: $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$

Definición Un espacio muestral Ω con una álgebra o σ -álgebra dada de conjuntos Σ , y una probabilidad en Σ definida como una medida no negativa $P(A)$, $A \in \Sigma$, es llamado un *espacio de probabilidad* y es denotado por (Ω, Σ, P) . Así, el espacio de probabilidad sirve como un modelo matemático de algún fenómeno aleatorio en la teoría moderna de probabilidad.

Definición Al conjunto de eventos, de los cuales es determinada su probabilidad, es llamado σ -álgebra de eventos y es denotado por Σ .

Definición Un conjunto contable de eventos $\{A_k\}$ es llamado un *conjunto completo de eventos* si hasta el último de ellos aparece como resultado de una prueba. Es decir, los eventos $A_1, \dots, A_n, n < \infty$, forman un conjunto completo si $\bigcup A_k = \Omega$.

Definición Si $P(B) \neq 0$, $B \in \Sigma$ entonces la *probabilidad condicional* de algún evento $A \in \Sigma$ relativo al evento B es determinada por la siguiente fórmula:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

El evento A es *independiente* de B si $P(A|B) = P(A)$, y además:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

2.1.2. Variables Aleatorias

Definición La σ -álgebra de Borel es definida como la menor σ -álgebra que contiene a los abiertos de un espacio topológico.

Definición Una *variable aleatoria* X es una función real cuyo dominio es Ω y el cual es Σ - medible, esto es, para cada número real x , $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\} \in \Sigma$.

Definición Un *vector aleatorio* es una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, para $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $X^{-1}(B) \in \Sigma$;

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

donde

$$\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\} \in \Sigma, x_i \in \mathbb{R}$$

Definición El valor de una variable aleatoria en algún punto dado ω del espacio Ω (i.e. el valor que se supone cuando aparece un resultado de la prueba) es llamado una *realización* de esta variable aleatoria.

Definición La probabilidad P_X es llamada la *medida de probabilidad o la distribución de la variable aleatoria* X , y está dada por:

$$P_X(A) = P(X \in A) = P(X^{-1}(A)), A \in \Sigma$$

Definición El espacio de probabilidad $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$ es llamado *el espacio de probabilidad de la variable aleatoria* X .

Definición Sea P_X la medida de probabilidad de la variable aleatoria X . La función

$F_X(x) = P(X \in (-\infty, x]) = P_X((-\infty, x])$ es llamada una *función de distribución de la variable aleatoria* X .

Propiedades de la Función de Distribución

- Una función de distribución es una función no decreciente, $F : [-\infty, \infty] \mapsto [0, 1]$. (Es considerado el intervalo $[-\infty, \infty]$ ya que hay variables aleatorias que pueden tomar valores infinitos, y de esta manera quedan representadas.

- $F(-\infty) = 0; F(\infty) = 1$

- $F(x)$ es continua por la derecha, es decir $F(x) = F(x+)$.

- La función de distribución de una variable aleatoria discreta con saltos en los puntos x_1, x_2, \dots, x_N igual a p_1, p_2, \dots, p_N respectivamente y es constante en algún intervalo que no contiene alguno de los valores x_1, x_2, \dots, x_N , como la probabilidad del evento $X < x$ no cambia si x varía en cada intervalo. Entonces, la función de distribución de una variable aleatoria discreta, es representada por una función escalón.

-
- La función de distribución de una variable aleatoria continua es continua.

- La función de distribución de una variable aleatoria continuo-discreta tiene puntos de discontinuidad x_1, x_2, \dots, x_N con saltos de longitudes p_1, p_2, \dots, p_N respectivamente, y es continua y diferenciable en todos los otros puntos del eje numérico y su derivada vale cero.

Diferenciando la fórmula anterior con respecto a x en el caso de una variable aleatoria continua escalar y aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, se obtiene

$$f(x) = F'(x),$$

Propiedades de la Función de Distribución

- Una función de distribución es una función no decreciente, $F : [-\infty, \infty] \mapsto [0, 1]$. (Es considerado el intervalo $[-\infty, \infty]$ ya que hay variables aleatorias que pueden tomar valores infinitos, y de esta manera quedan representadas.

- $F(-\infty) = 0; F(\infty) = 1$

- $F(x)$ es continua por la derecha, es decir $F(x) = F(x+)$.

- La función de distribución de una variable aleatoria discreta con saltos en los puntos x_1, x_2, \dots, x_N igual a p_1, p_2, \dots, p_N respectivamente y es constante en algún intervalo que no contiene alguno de los valores x_1, x_2, \dots, x_N , como la probabilidad del evento $X < x$ no cambia si x varía en cada intervalo. Entonces, la función de distribución de una variable aleatoria discreta, es representada por una función escalón.

-
- La función de distribución de una variable aleatoria continua es continua.

- La función de distribución de una variable aleatoria continuo-discreta tiene puntos de discontinuidad x_1, x_2, \dots, x_N con saltos de longitudes p_1, p_2, \dots, p_N respectivamente, y es continua y diferenciable en todos los otros puntos del eje numérico y su derivada vale cero.

Diferenciando la fórmula anterior con respecto a x en el caso de una variable aleatoria continua escalar y aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, se obtiene

$$f(x) = F'(x),$$

siempre y cuando $F(x)$ sea diferenciable en toda X . Así, la densidad de una variable aleatoria es la derivada Radon-Nikodym [71] P_X respecto a la medida de Lebesgue [73] de su función de distribución.

Definición El límite de la proporción de la probabilidad de la ocurrencia de una variable escalar aleatoria X en un intervalo $[x, x + \Delta x)$ con longitud Δx cuando $\Delta x \rightarrow 0$ es llamado *densidad o densidad de probabilidad de la variable aleatoria X* en el punto x .

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x} = F'(x)$$

Propiedades de la Densidad de Probabilidad

- $f(x) \geq 0$.
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
- La densidad de $Y = X + a$ evaluada en Y está dada por:

$$f(y - a) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(y - a < X \leq y - a + \Delta y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(y < X + a \leq y + \Delta y)}{\Delta y}$$

La probabilidad de ocurrencia de una variable aleatoria X en el dominio A es determinada por la fórmula

$$P(X \in A) = \int_A f(x) dx$$

si la densidad $f(x)$ es continua parte por parte y acotada en el dominio A . La función de distribución de la variable aleatoria X está dada por $F(x) = P(X \leq x)$. Utilizando la densidad,

$$F(x) = P(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

cuando X es una variable aleatoria continua escalar.

Teorema [72] El *valor esperado* de una función $\phi(X)$ de la variable aleatoria continua X con densidad $f(x)$ está dado por

$$E(\phi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)f(x)dx$$

Definición La *varianza* de una variable aleatoria escalar es definida como

$$\sigma^2 = E(X - E(X))^2$$

Definición La *esperanza condicional* de una función dada $\varphi(X)$ de una variable o vector aleatorio escalar X , dado el valor de una variable o vector escalar aleatorio Y , está dada por:

$$E[\varphi(X)|Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x|Y)dx,$$

donde $f(|Y)$ es la densidad condicional de la variable aleatoria X , dada la variable aleatoria Y .

Definición Dado un vector aleatorio X , el *momento de segundo orden* está dado por $\Gamma_X = EXX^T$ y la matriz de covarianza es determinada por la fórmula

$$K_X = EX^0X^{0T}$$

donde $X^0 = X - m_X$ y $m_X = EX$. Además

$$\Gamma_X = K_X + m_X m_X^*.$$

Donde el * indica la *tansposición* de una matriz, cambiando sus elementos complejos por sus conjugados correspondientes. Para dos vectores aleatorios X y Y , la matriz del momento de segundo orden Γ_{XY} y la matriz de covarianza cruzada K_{XY} están dadas por las fórmulas

$$\Gamma_{XY} = EXY^T,$$

$$K_{XY} = EX^0Y^{0T}$$

Y además

$$\Gamma_{XY} = K_{XY} + m_X m_Y^*$$

Definición Para los *momentos centrales e iniciales de órdenes superiores*, la fórmula está dada por

$$\mu_r = E(X^0)^r, \alpha_r = EX^r, (r = 1, 2, \dots)$$

$$\alpha_r = \alpha_{r_1, \dots, r_n} = EX_1^{r_1} \dots X_n^{r_n},$$

$$\mu_r = \mu_{r_1, \dots, r_n} = E(X_1^0)^{r_1} \dots (X_n^0)^{r_n},$$

$$(|r| = r_1 + \dots + r_n, |r| \in \{1, 2, \dots\}).$$

Definición La *función característica de una variable aleatoria X* está determinada por el valor esperado de la variable aleatoria $e^{i\lambda^T X}$ y es considerada como una función de la variable real λ . Su fórmula está dada por

$$g(\lambda) = E(e^{i\lambda^T X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^T x} f(x) dx.$$

La dimensión de la variable λ coincide con la dimensión de la variable X .

Propiedades de la Función Característica

- La función característica es continua y $|g(\lambda)| \leq 1, g(0) = 1, g(-\lambda) = \overline{g(\lambda)}$, donde indica el conjugado.
- La función característica es positiva definida, esto es: para algunos valores $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ de una variable λ y algunos números complejos ξ_1, \dots, ξ_N

$$\sum_{p,q=1}^N g(\lambda_p - \lambda_q) \xi_p \bar{\xi}_q \geq 0.$$

- La función característica $g_2(\mu)$ de una variable aleatoria $Y = AX + a$ obtenida como el resultado de una transformación de una variable aleatoria X es expresada en términos de la función característica $g_1(\lambda)$ de la variable aleatoria X por

$$g_2(\mu) = e^{i\mu^T a} g_1(A^T \mu)$$

- La función característica de la proyección de un vector aleatorio en algún subespacio G es igual a la contracción de su función característica en este espacio. Si $a = 0$ y A es la matriz proyección en G , entonces $A^T = A$, $A\lambda = \lambda$ para algún $\lambda \in G$ y $A\lambda = 0$ para algún vector λ ortogonal a G .
- La función característica $g(\lambda)$ de la suma de variables aleatorias independientes X_1, \dots, X_n es igual al producto de sus funciones características $g_k(\lambda)$, ($k = 1, \dots, n$):

$$g(\lambda) = \prod_{k=1}^n g_k(\lambda).$$

- Si X_1, \dots, X_n son variables aleatorias independientes, entonces la función característica correspondiente $g(\lambda)$, $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T$ del vector compuesto aleatorio $X = [X_1^T, \dots, X_n^T]^T$ es igual al producto de las funciones características $g_k(\lambda_k)$, ($k = 1, \dots, n$) de las variables aleatorias X_1, \dots, X_n :

$$g(\lambda) = \prod_{k=1}^n g_k(\lambda_k).$$

El inverso también se cumple.

2.1.3. Convergencia de Variables Aleatorias

Definición La sucesión o red de variables aleatorias $\{X_r\}$, con valores en un espacio topológico, es llamada *convergente casi seguramente* (o con probabilidad 1) a la variable

aleatoria X si la sucesión de las funciones $\{x_r(\omega)\}$ converge a $x(\omega)$ casi donde quiera en Ω relativamente con la medida P .

$$P(X_r \rightarrow X) = P(\omega : x_r(\omega) \rightarrow x(\omega)) = 1. \quad (2.1)$$

Definición La red de variables aleatorias $\{X_r\}$ converge en probabilidad a X si para algún $\epsilon > 0$

$$\lim_{r \rightarrow r_0} P(\|X_r - X\| > \epsilon) = \lim_{r \rightarrow r_0} P(\omega : \|x_r(\omega) - x(\omega)\| > \epsilon) = 0 \quad (2.2)$$

Definición Consideremos una red de variables aleatorias $\{X_r\}$, con valores en el espacio Ω . Se dice que X_r converge en media cuadrada a la variable aleatoria X , $X_r \xrightarrow{m.s.} X$

$$E \|X\|^2, E \|X_r\|^2 < \infty \quad (2.3)$$

y

$$E \|X_r - X\|^2 \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

cuando $r \rightarrow r_0$. La convergencia estocástica es la más débil de las tres anteriores:

$$(2.1) \Rightarrow (2.2) \Leftarrow (2.4).$$

2.1.4. Procesos Estocásticos

Definición Un *proceso estocástico* es una red de variables aleatorias, $\{X_t, t \in T\}$, definidas sobre el mismo espacio de probabilidad, donde T es un conjunto de índices y X_t

es una variable aleatoria para cada t . X_t también se denota por $X(t)$ y los valores que esta variable aleatoria asigna al evento elemental ω se denotarán por $X(t, \omega)$.

Definición Dado el proceso estocástico vectorial $X(t) = [X_1(t_1), \dots, X_n(t_n)]$, se define su *función de densidad multidimensional* $f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ como la densidad conjunta del vector aleatorio $X(t) = [X_1(t), \dots, X_n(t)]$, la cual toma los valores de X_1, \dots, X_n , en los tiempos t_1, \dots, t_n .

Para el proceso estocástico vectorial $X(t)$ con valores independientes, los valores de las variables X_{t_1}, \dots, X_{t_n} son independientes para algún $t_1, \dots, t_n \in T$ y algún número natural n . Para la función aleatoria $X(t)$ con valores independientes para $n = 1, 2, \dots$ es presentada la siguiente relación

$$f_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f_1(x_1, t_1) f_1(x_2, t_2) \dots f_1(x_n, t_n)$$

Así, todas las distribuciones multi-dimensionales de una función aleatoria con los valores independientes es determinada únicamente por sus *distribuciones uni-dimensionales*.

Definición Dado el proceso estocástico $X(t)$, $t \in T_1$, los conjuntos de *funciones características uni-dimensional* $g_1(\lambda; t)$ y *multi-dimensional* $g_n = g_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_n)$, con los parámetros t y $\{t_1, \dots, t_n\}$ son determinados respectivamente por:

$$\begin{aligned} g_1(\lambda, t) &= E(e^{i\lambda^T X(t)}), \\ g_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_n) &= E(e^{i\lambda_1^T X(t_1) + \dots + i\lambda_n^T X(t_n)}) \quad (n = 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

Definición Las *funciones del momento de segundo orden* del proceso estocástico $\{X(t)\}$, $t \in T_1$ (matriz $\Gamma_X(t_1, t_2)$) y la *función de covarianza* (matriz $K_X(t_1, t_2)$) son determinadas por la siguiente fórmula:

$$\Gamma_X(t_1, t_2) = EX(t_1)X(t_2)^* \quad (2.5)$$

$$K_X(t_1, t_2) = EX^0(t_1)X^0(t_2)^*$$

Además

$$\Gamma_X(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) + m_X(t_1)m_Y^*(t_2),$$

donde el * indica la transposición de una matriz, cambiando sus elementos por sus conjugados. El *momento cruzado de segundo orden* (matriz $\Gamma_{XY}(t_1, t_2)$) y la *función de covarianza cruzada* (matriz $K_{XY}(t_1, t_2)$) para dos funciones aleatorias $X(t), Y(t), t \in T_1$ son determinadas por

$$\Gamma_X(t_1, t_2) = EX(t_1)Y(t_2)^*, \quad (2.6)$$

$$K_X(t_1, t_2) = EX^0(t_1)Y^0(t_2)^*,$$

y además:

$$\Gamma_{XY}(t_1, t_2) = K_{XY}(t_1, t_2) + m_X(t_1)m_Y^*(t_2).$$

Análogamente, los *momentos superiores para funciones reales, escalares aleatorias* $X(t), t \in T_1$, son determinados por las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned} \alpha_r(t_1, t_2, \dots, t_r) &= EX(t_1)\dots X(t_r) = \quad (2.7) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \dots x_r f_r(x_1, \dots, x_r; t_1 \dots t_r) dx_1 \dots dx_r \\ \mu_r(t_1, \dots, t_r) &= EX^0(t_1)\dots X^0(t_r) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_x(t_1)] \dots [x_r - m_x(t_r)] f_r(x_1, \dots, x_r; t_1 \dots t_r) dx_1 \dots dx_r \end{aligned}$$

Definición El proceso estocástico $\{X(t)\}$ con esperanza cero y función de covarianza K_{XY} la cual contiene como un múltiplo la función δ de Dirac,

$$m_x(t) = 0, \quad (2.8)$$

$$K(t_1, t_2) = \nu(t_1)\delta(t_1 - t_2)$$

es llamado *ruido blanco*, en sentido amplio.

Tomando en consideración que $\delta(t_1 - t_2) = 0$ en $t_1 \neq t_2$ y $\delta(t_1 - t_2) = 1$ en $t_1 = t_2$, el multiplicador $\nu(t_1)$ puede ser reemplazado por el multiplicador $\nu(t_2)$ o por el multiplicador simétrico $\sqrt{\nu(t_1)\nu(t_2)}$. El multiplicador $\nu(t)$ de la función δ es llamado la intensidad del ruido blanco $\{X(t)\}$. La intensidad de un ruido blanco escalar es positiva. La intensidad del ruido blanco vectorial representa una matriz simétrica definida no negativa.

Si la variable

$$\frac{|K_X(t_1, t_2)|}{K_X(t_1, t_1)}$$

para el proceso aleatorio estocástico escalar $X(t)$ puede suponerse prácticamente igual a cero cuando $|t_1 - t_2| > \tau_k$ y la variable τ_k es suficientemente pequeña, entonces el proceso estocástico $\{X(t)\}$ puede ser considerado como un ruido blanco no estacionario con intensidad igual a

$$\nu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(t, t + \tau) d\tau$$

Condiciones para Procesos Independientes y Proceso de Wiener

Definición Dos procesos estocásticos $\{X_t\}, \{Y_t\}, t \in T$ son *independientes* si para todo conjunto de parámetros $\{t_i\} \in T$, los vectores aleatorios $[x_{t_1}, \dots, x_{t_n}]^T, [y_{t_1}, \dots, y_{t_n}]^T$ son independientes.

Definición Un proceso $\{X_t\}, t \in T$ con parámetros continuos tiene *incrementos independientes* si para todo conjunto finito $\{t_i | t_i < t_{i+1}\} \in T$ los vectores aleatorios $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes.

Definición El proceso $\{X_t\}, t \in T$ tiene *incrementos independientes estacionarios* si $X_{t+h} - X_{\tau+h}$ tiene la misma distribución de $X_t - X_\tau$ para toda $t > \tau \in T$.

Definición El proceso estocástico $\{X_t, t \geq 0\}$ es un *proceso de Wiener* o un *proceso de movimiento Browniano* si se cumple lo siguiente:

- $\{X_t, t \geq 0\}$ tiene incrementos independientes estacionarios.
- $\{X_t, t \geq 0\}$ tiene distribución Normal.
- Para toda $t \geq 0$, $E[X_t] = 0$
- $P(x_0 = 0) = 1$. y sus realizaciones son continuas con probabilidad 1.

Si $\{X_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias normalmente distribuidas, $X_t - X_\tau$ también está normalmente distribuida para todos los valores $t, \tau \geq 0$. Para encontrar la distribución del proceso de Wiener, hay que encontrar la distribución de $X_t - X_\tau$. Dado que $X_t - X_\tau$ es Gaussiana, su distribución es determinada por su media y su varianza. Por lo tanto, tenemos que $E(X_t - X_\tau) = 0$, y ya que el proceso de Wiener tiene incrementos independientes y estacionarios, $var\{(X_t - X_\tau)\} = \sigma^2(t - \tau)$, $t > \tau$, donde σ^2 es la varianza y es constante. La función de correlación para el proceso de Wiener está dada por:

$$\begin{aligned} \gamma(t, \tau) &= E(X_t X_\tau) = E\{([X_t - X_\tau] + X_\tau) X_\tau\} \\ &= E\{(X_t - X_\tau) X_\tau\} + E(X_\tau^2) \\ &= 0 + \sigma^2 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Además

$$\begin{aligned} \gamma(t, \tau) &= \sigma^2 \min(t, \tau) \\ &= (\sigma^2)(t), \quad t \leq \tau \\ &= (\sigma^2)(\tau), \quad \tau < t, \end{aligned} \tag{2.10}$$

para todos valores de $t, \tau > 0$. La función $\min(t, \tau)$ es continua para todos los valores de t y τ , pero $\frac{\partial^2 \min(t, \tau)}{\partial t \partial \tau}$ no existe en (t, t) . Pero acerca de la continuidad es posible afirmar

lo siguiente: el proceso de Wiener $\{X_t\}$ es continuo por media cuadrada, con $t \in T$, si y solo si $\gamma(t, \tau)$ es continua en (t, τ) , $t = \tau$. Entonces el proceso de Wiener es continuo por media cuadrada en $[0, \infty)$.

Definición El proceso estocástico $\{X_t\}$ es *Integrable por Riemann* en sentido media cuadrada sobre $[a, b]$ si y solo si $\gamma(t, \tau)$ es Riemann integrable sobre $[a, b] \times [a, b]$. El proceso estocástico $\{X_t\}$ es Riemann integrable en el sentido de media cuadrada, y es diferenciable en el sentido de media cuadrada, para $t \in T$ si y solo si $\frac{\partial^2 \gamma(t, \tau)}{\partial t \partial \tau}$ existe en (t, t) . Por lo anterior se tiene que el proceso de Wiener no es diferenciable por media cuadrática. Las funciones que cumplen con las condiciones del proceso de Wiener son muy irregulares y diferenciables en ningún punto.

Proceso Gaussiano

Definición Un proceso estocástico $\{X_t\}$, $t \in T$ es un *proceso Gaussiano o normal* si la ley de probabilidad es normal. Las derivadas e integrales por media cuadrática de procesos Gaussianos son procesos Gaussianos.

— El proceso de movimiento Browniano es un proceso normal, ya que dados n tiempos t_1, t_2, \dots, t_n , podemos escribir

$$X_{t_k} = (X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) + (X_{t_{k-1}} - X_{t_{k-2}}) + \dots + X_{t_1},$$

para todo $1 \leq k \leq n$. Ahora los incrementos en el lado derecho, del movimiento Browniano son independientes y Gaussianos. Por lo tanto las X_{t_k} s son combinación lineal de variables aleatorias normales.

El movimiento Browniano o proceso de Wiener es un proceso de Markov, dado que

$$\begin{aligned} p(X_{t_n} | X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_1}) &= p(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} + X_{t_{n-1}} - X_0 | X_{t_{n-1}} - X_0, \dots, X_{t_1} - X_0) \\ &= p(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} + X_{t_{n-1}} - X_0 | X_{t_{n-1}} - X_0) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$= p(X_{t_n}|X_{t_{n-1}})$$

Dado que el proceso de movimiento Browniano es también Gaussiano, es llamado proceso Gauss-Markov. Esto es establecido ya que los incrementos del proceso de Wiener son independientes.

Ruido Blanco

Un buen modelo del ruido es el ruido blanco.

Definición Una sucesión blanca aleatoria $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ es una sucesión de Markov para cada $p(X_k|X_l) = p(X_k), k > l$. Una sucesión blanca es completamente aleatoria. Si las variables aleatorias X_k s son normalmente distribuidos, la sucesión $\{X_n\}$ es llamada sucesión aleatoria blanca Gaussiana. Podemos decir que el ruido blanco está compuesto por la superposición de un gran número de pequeños, independientes, y aleatorios efectos, y tomando en cuenta el teorema del límite central, es siempre Gaussiano.

Si $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ es una sucesión de vectores aleatorios blancos Gaussianos, la ley de probabilidad es especificada mediante su media $E(X_n)$ y su matriz de covarianza

$$E\{(X_n - E(X_n))(X_m - E(X_m))^T\}, m, n > 1.$$

Y que la sucesión es blanca, entonces:

$$E\{(X_n - E(X_n))(X_m - E(X_m))^T\} = Q_m \delta_{mn} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \delta_{mn} &= 1, n = m \\ &= 0, n \neq m. \end{aligned}$$

Donde Q_m es una matriz de covarianza semidefinida positiva y δ es la función delta de Dirac. Para conocer más propiedades acerca del ruido blanco Gaussiano, consideremos la función de densidad de poder espectral, la cual es definida como la transformada de

o

$$\int_a^b f(t) dW(t)$$

no existe en el sentido usual. Sin embargo, es posible dar un significado a ésta integral.

Una forma de hacer esto es definir la integral como

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \left(\frac{W(t+\epsilon) - W(t)}{\epsilon} \right) dt,$$

si el límite existe. Al evaluar explícitamente, observemos que

$$\int_a^b f(t) \left(\frac{W(t+\epsilon) - W(t)}{\epsilon} \right) dt = \int_a^b f(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} W(s) ds \right) dt.$$

Calculando por partes la integral del lado derecho de la ecuación, tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(t) \left(\frac{W(t+\epsilon) - W(t)}{\epsilon} \right) dt \quad (2.16) \\ &= \left[f(t) \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} W(s) ds \right]_a^b - \int_a^b f'(t) \left(\frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} W(s) ds \right) dt. \end{aligned}$$

Dado que el proceso tiene funciones simples continuas, el lado derecho converge a

$$f(t)W(t) \Big|_a^b - \int_a^b f'(t)W(t) dt,$$

cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Así, definimos

$$\int_a^b f(t) dW(t)$$

como el límite del lado derecho de (2.16), cuando $\epsilon \rightarrow 0$, es decir, por la fórmula

$$\int_a^b f(t) dW(t) = f(b)W(b) - f(a)W(a) - \int_a^b f'(t)W(t) dt \quad (2.17)$$

El lado derecho de (2.17) es bien definido y coincide con la fórmula de integración por partes. La derivada del proceso de Wiener es llamada *ruido blanco*. Y no es un proceso estocástico en el sentido usual. Ya que $dW(t) = W'(t)dt$ es un *funcional* que asigna valores

a la integral que aparece en el lado izquierdo de (2.17). El ruido blanco puede ser usado para definir ciertas ecuaciones diferenciales estocásticas, las cuales son usadas en ciencias físicas y especialmente en ciertas áreas de ingeniería. Dado que el proceso de Wiener es Gaussiano, de (2.17) tenemos que

$$\int_a^b f(t)dW(t)$$

se distribuye normalmente. Como es sabido, esta variable aleatoria tiene media cero. Para calcular la varianza, tomemos $a \leq b$ y g como otra función continuamente diferenciable en $[a, b]$,

$$E\left[\int_a^b f(t)dW(t) \int_a^b g(t)dW(t)\right] = \sigma^2 \int_a^b f(t)g(t)d(t) \quad (2.18)$$

Si $f = g$ de (2.18), para $a \leq b$

$$Var\left(\int_a^b f(t)dW(t)\right) = \sigma^2 \int_a^b f^2(t)d(t)$$

Diferenciación de variables aleatorias

Definición La función aleatoria $X(t)$ es llamada *diferenciable en media cuadrada en* T_1 si esta es diferenciable en media cuadrada para toda $t \in T_1$.

Definición La *derivada en media cuadrada de* $X(t)$ esta determinada por

$$\lim_{r \rightarrow 0} E \left\| \frac{X(t+r) - X(t)}{r} - X'(t) \right\|^2 = 0 \quad (2.19)$$

Teorema [71] La función escalar aleatoria $X(t)$ es diferenciable por media cuadrada en T_1 si y solo si existe la derivada finita $\frac{\partial^2 \Gamma_x(t,t')}{\partial t \partial t'}$ para todos los puntos en la diagonal $t' = t \in T_1$.

Definición $L^2(\Omega) = \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} | X \text{ es una variable aleatoria con varianza finita}\}$.

Definición Sea V un espacio vectorial. X es un *funcional lineal estocástico* si para cada $f \in V$, $X(f)$ es una variable aleatoria definida en un espacio muestral Ω , tal que $f \mapsto X(f)(\omega)$ es un funcional lineal para cada $\omega \in \Omega$.

Definición Una red de variables aleatorias $\{X_r\}$ *converge débilmente en media cuadrada a un funcional estocástico X* , si se tiene que $E|X|^2, E|X_r|^2$ son finitos, y además la red $\{E|X_r - X|^2\}$ converge a cero.

Definición Una red de variables aleatorias $\{X_r\}$ *converge débilmente a un funcional lineal X con dominio en $L^2(\Omega)$* si para cada $v f \in L^2(\Omega)$, se tiene que todo $E|f X_r|$ es finito y además la red $\{E(f X_r)\}$ converge a $X(f)$.

Definición Una red de procesos estocásticos $\{X_r(t)_{t \geq 0}\}$ *converge débilmente en media cuadrada a un funcional lineal estocástico X* , si para cada $f \in L^2(\Omega \times [0, +\infty))$ se tiene que $X(f) \in L^2(\Omega)$ y además la red

$$\{E|\int_0^\infty f(t)X_r(t)dm(t) - X(f)|^2\}$$

converge a cero.

Definición Decimos que $\frac{W(t+\epsilon) - W(t)}{\epsilon}$ *converge débilmente en media cuadrada al ruido blanco*. Lo anterior significa que el proceso estocástico $\{(\frac{W(t+\epsilon) - W(t)}{\epsilon})_{t \geq 0}\}_{\epsilon \geq 0}$ converge débilmente en media cuadrada, cuando $\epsilon \rightarrow 0$, al funcional lineal

$$f = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(t) dW(t).$$

Teorema [71] Para la existencia de una derivada en sentido de la convergencia débil en media cuadrada para procesos estocásticos, de la función aleatoria $X(t)$ en T_1 es necesaria y suficiente la existencia de la derivada finita $\frac{\partial^2 \lambda \Gamma_x(t, t') \lambda}{\partial t \partial t'}$ para todos los puntos en la diagonal $t' = t \in T_1$, para toda $\lambda \in \Lambda$ (Λ es un conjunto de funcionales lineales en el espacio lineal). O de otra forma, se necesita la existencia de la derivada en sentido de la convergencia débil en media cuadrada para procesos estocásticos, $m'_x(t) = EX'(t) = m'_x(t)$

y la derivada finita $\frac{\partial^2 \lambda \Gamma_x(t, t') \lambda}{\partial t \partial t'}$ para todos los puntos en la diagonal $t' = t \in T_1$, y para toda $\lambda \in \Lambda$. Todo lo anterior es válido si se sustituyen los momentos iniciales Γ por la correspondiente función de covarianza K .

Procesos con Incrementos no Correlacionados

Definición Un proceso estocástico $\{X(t)\}$ es llamado *proceso con incrementos no correlacionados* si, para todos los intervalos disjuntos $[t_1, t_2), [t_3, t_4), \dots, t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4, \dots$, los incrementos correspondientes $X_{t_2} - X_{t_1}$, y $X_{t_4} - X_{t_3}, \dots$ del proceso $X(t)$ son no correlacionados.

De la definición resulta que los incrementos de cada proceso o algunos intervalos finitos tienen momentos finitos de segundo orden (y consecuentemente de primer orden). En este caso, el proceso $X(t)$ mismo puede no tener media ni momento de segundo orden.

Pero si en algún instante t_0 el valor del proceso con incrementos no correlacionados $X(t)$ es igual a cero con probabilidad 1, entonces el proceso $X(t)$ tiene esperanza finita y momento de segundo orden como el valor X_{t_0} , que en algún instante coincide con su

incremento en el intervalo $[t_0, t)$ con $t > t_0$ y con su incremento en el intervalo $[t, t_0)$, tomado en forma inversa si $t < t_0$. El proceso aleatorio $Y(t) = X(t) - X_{t_0}$ representa

un proceso con incrementos no correlacionados, los cuales tienen la propiedad $Y_{t_0} = 0$.

Además, si $X_{t_0} = 0$ (con probabilidad 1), entonces el valor X_t del proceso $X(t)$ en algún instante t es no correlacionado con sus futuros incrementos en los intervalos en los cuales sigue el instante t_0 y con sus previos incrementos en el intervalo que precede al instante t_0 : $EX_t^0(X_{t_2}^{0*} - X_{t_1}^{0*}) = 0$ con $t \leq t_1 < t_2, t_1 \geq t_0$ o $t_1 < t_2 \leq t, t_2 \leq t_0$, donde $X_t^0 = X_t - m_t$; ($m_t = EX_t$). Consideremos la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} k(t) &= EX_t^0 X_t^{0*}; t > t_0, \\ &= 0; t = t_0, \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$= -EX_t^0 X_t^{0*}; t < t_0.$$

Donde el asterisco indica el vector transpuesto cuyos componentes son los conjugados. La matriz de covarianza del incremento $X_{t_2} - X_{t_1}$ del proceso $X(t)$ en algún intervalo y la función de covarianza del proceso $X(t)$ son determinadas por las siguientes fórmulas:

$$E(X_{t_2}^0 - X_{t_1}^0)(X_{t_2}^{0*} - X_{t_1}^{0*}) = k(t_2) - k(t_1), \quad (2.21)$$

$$K_x(t_1, t_2) = k(\min(t_1, t_2)); t_1, t_2 > t_0,$$

$$= 0; t_1 \leq t_0 \leq t_2, t_2 \leq t_0 \leq t_1,$$

$$= -k(\min(t_1, t_2)); t_1, t_2 < t_0.$$

El proceso aleatorio con incrementos no correlacionados es continuo por el criterio de media cuadrada si y solo si la función $k(t)$ es continua.

Por otro lado, si $k(t)$ es no solo continua, sino además diferenciable; en este caso, la fórmula (2.22) puede ser escrita (con $t_1, t_2 > t_0$) en la forma:

$$k(t) = \int_{t_0}^t \nu(\tau) d\tau, \quad (2.22)$$

donde $\nu(t)$ es una función no negativa, la cual es llamada la *intensidad de un proceso $X(t)$ con incrementos no correlacionados*.

Procesos con Incrementos Independientes

Definición Un proceso estocástico $X(t)$ es un *proceso con incrementos independientes* si para cualquier $N \in \mathbb{N}$, $t_0 < t_1 < \dots < t_N$ las variables aleatorias $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_N} - X_{t_{N-1}}$, son independientes.

Teorema [71] La *función característica del incremento de un proceso con incrementos independientes* está completamente determinada por su función característica en una dimensión, i.e. su distribución uni-dimensional.

Teorema[71] Todo proceso con incrementos independientes y con función de covarianza diferenciable tiene una derivada en sentido de la convergencia débil en media cuadrada para procesos estocásticos, la cual representa un *ruido blanco*.

Definición El ruido blanco obtenido por diferenciación de un proceso con incrementos independientes es llamado un *ruido blanco en el sentido estricto*.

Un escalar o un proceso estocástico real con incrementos independientes $W(t)$, $t > 0$, será un *proceso de Wiener* si satisface las siguientes condiciones:

- Casi seguramente las realizaciones $w(t)$ del proceso $\{W(t)\}$, $t \geq 0$ son continuas y $w(0) = 0$;
- La distribución uni-dimensional de $W(t)$ es normal;
- La esperanza de cada proceso $W(t)$ es cero y su función de covarianza está determinada por la fórmula

$$K_w(t_1, t_2) = \int_0^{\min(t_1, t_2)} \nu(\tau) d\tau,$$

donde $\nu(t)$ es una función no negativa que representa la intensidad del proceso de Wiener $W(t)$. El ruido blanco representando la derivada en sentido de la convergencia débil en media cuadrada para procesos estocásticos, de un proceso de Wiener es llamado *ruido blanco normalmente distribuido*. Un proceso de Wiener como un proceso con incrementos independientes el cual posee media cero y momento de segundo orden finito $k(t)$ para cada instante t , genera una medida estocástica en el eje real con valores independientes en intervalos disjuntos. Esta medida estocástica es determinada por la fórmula $Z((t_1, t_2]) = W(t_2) - W(t_1)$.

La Integral de Itô

Sea $W(t)$ un proceso escalar con incrementos independientes con esperanza cero y momento de segundo orden $k(t)$; sea $X(t)$ un proceso aleatorio continuo por media cuadrada (*m.s.*), escalar con momento de segundo orden finito cuyo valor en todo t es independiente de los incrementos futuros del proceso $W(t)$, $W(t_2) - W(t_1)$, $t \leq t_1 < t_2$; sea P_n una sucesión de particiones del intervalo $(a, b]$,

$$P_n : (a, b] = \bigcup_{k=1}^{N_n} (t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}], t_0^{(n)} = a, t_{N_n}^{(n)} = b, \quad (2.23)$$

tal que $\max_k (t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Definición El límite por media cuadrática de la sucesión de sumas integrales $\{\bar{Y}_n\}$,

$$\bar{Y}_n = \sum_{k=1}^{N_n} X(t_{k-1}^{(n)}) [W(t_k^{(n)}) - W(t_{k-1}^{(n)})],$$

si el límite de la sucesión existe, es llamado la *integral estocástica de Itô* de la función aleatoria X con respecto al proceso con incrementos independientes $\{W(t)\}_t$ sobre el intervalo $(a, b]$:

$$Y = \int_a^b X(t) dW(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Y}_n$$

Teorema [71] La integral estocástica de Itô existe si y solo si la integral

$$\int_a^b E|X(t)|^2 \nu(t) dt = E|Y|^2 = DY$$

existe, en cuyo caso esta es igual a la varianza DY de la integral de Itô Y . Siendo un caso particular de la integral de Itô cuando $\theta = 0$. La integral Y_1 es el límite por media cuadrática de las sumas integrales

$$Y_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N_n} X(t_k^{(n)}) [W(t_k^{(n)}) - W(t_{k-1}^{(n)})],$$

cuando n tiende a infinito.

Definiendo una θ -integral estocástica para algún $\theta \in [0, 1]$ por la siguiente fórmula:

$$Y_\theta = \int_a^b X(\tau) d_\theta W(\tau) = (1 - \theta)Y + \theta Y_1$$

Cuando $\theta = 1/2$, la integral estocástica anterior representa la integral estocástica de Stratonovich.

2.2. Ecuaciones Estocásticas

Definición La ecuación diferencial

$$\dot{X} = a(X, t) + b(X, t)V \quad (2.24)$$

es llamada *ecuación diferencial estocástica* si la función aleatoria (generalizada) V representa un ruido blanco en el sentido estricto. Sea X_0 un vector aleatorio de la misma dimensión que $X(t)$. La ecuación (2.24) con la condición inicial $X(t_0) = X_0$ determina el proceso estocástico $X(t)$. La ecuación anterior es la representación simbólica de:

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t a(X(\tau), \tau) d\tau + \int_{t_0}^t b(X(\tau), \tau) V(\tau) d\tau \quad (2.25)$$

donde la primera integral existe por el criterio de media cuadrática. Introduciendo el proceso con incrementos independientes $W(t)$ cuyas derivadas son un ruido blanco $V(t)$, la ecuación anterior se puede reescribir como

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t a(X(\tau), \tau) d\tau + \int_{t_0}^t b(X(\tau), \tau) dW(\tau) \quad (2.26)$$

La ecuación (2.26) tiene un sentido exacto. La ecuación (2.24) con la condición inicial $X(t_0) = X_0$ es una representación simbólica de la ecuación (2.26). La ecuación (2.26) en la cual la segunda integral es una integral estocástica de Itô, es llamada la *ecuación*

Integral estocástica de Itô, y la ecuación (2.24) y la que se forma sustituyendo dW por V en (2.24), son llamadas ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô. Un proceso aleatorio $X(t)$ el cual satisface la ecuación (2.26), en el cual las integrales representan límites por el criterio de media cuadrática de la correspondiente suma de integrales, es llamado solución de la ecuación integral estocástica (2.26) y de la ecuación diferencial estocástica correspondiente (2.24), con la condición inicial $X(t_0) = X_0$.

2.2.1. Ecuaciones Estocásticas para Densidades

Momentos

Consideremos el sistema lineal

$$\dot{Y} = aY + a_0 + bV, \quad (2.27)$$

donde $a = a(t)$, $a_0 = a_0(t)$, $b = b(t)$ pueden ser funciones en el tiempo t , y V es un ruido blanco cuya intensidad ν puede ser una función de tiempo t . Resolviendo la ecuación (2.27) es obtenido el vector Y , el cual está dado por la fórmula

$$Y(t) = u(t, t_0)Y_0 + \int_{t_0}^t u(t, \tau)b(\tau)V(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t u(t, \tau)a_0(\tau)d\tau, \quad (2.28)$$

donde $u(t, \tau)$ es la matriz determinada como una función de t por la ecuación diferencial homogénea $\frac{du}{dt} = a(t)u$ y la condición inicial $u(\tau, \tau) = I$.

Momentos de Segundo Orden

Tomando en cuenta que la esperanza de un ruido blanco es igual a cero, en virtud de (2.28), es encontrada la siguiente fórmula para la esperanza del vector estado del sistema $Y(t)$

$$m(t) = u(t, t_0)m_0 + \int_{t_0}^t u(t, \tau)a_0(\tau)d\tau \quad (2.29)$$

donde m_0 es la esperanza del valor inicial Y_0 del vector de estado Y . La función de covarianza del vector de estado Y es determinada por la fórmula

$$K(t_1, t_2) = u(t_1, t_0)K_0u(t_2, t_0) + \int_{t_0}^{\min(t_1, t_2)} u(t_1, \tau)b(\tau)\nu(\tau)b(\tau)^T u(t_2, \tau)^* d\tau \quad (2.30)$$

donde K_0 es la matriz de covarianza del valor inicial Y_0 del vector de estado Y . Dadas las funciones de valores reales $m(t)$ y $K(t_1, t_2)$, se sigue la fórmula para el momento de segundo orden.

$$\Gamma(t_1, t_2) = K(t_1, t_2) + m(t_1)m(t_2)^T \quad (2.31)$$

La ecuación diferencial para la esperanza del vector Y es obtenida diferenciando (2.29):

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= u_t(t, t_0)m_0 + \int_{t_0}^t u_t(t, \tau)a_0(\tau)d\tau + a_0(t) \\ &= a(t)[u(t, t_0)m_0 + \int_{t_0}^t u_t(t, \tau)a_0(\tau)d\tau] + a_0(t) \end{aligned} \quad (2.32)$$

pero la expresión entre corchetes es igual a $m(t)$ por (2.29). Por tanto, la ecuación (2.32) se puede escribir en la forma

$$\dot{m} = am + a_0. \quad (2.33)$$

Integrando la ecuación (2.33) con la condición inicial $m(t_0) = m_0$ se puede calcular la esperanza del vector aleatorio Y en el sistema lineal estocástico (2.27).

La ecuación para la matriz de la varianza $K(t)$ del vector Y en (2.30) $t_1 = t_2 = t$:

$$K(t) = K(t, t) = u(t, t_0)K_0u^*(t, t_0) + \int_{t_0}^t u(t, \tau)b(\tau)\nu(\tau)b(\tau)^T u^*(t, \tau)d\tau \quad (2.34)$$

Derivando esta fórmula respecto a t y sustituyendo $u_t(t, \tau) = a(t)u(t, \tau)$, $u_t(t, \tau)^* = u^*(t, \tau)a(t)^T$, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) = & a(t)[u(t, t_0)K_0u^*(t, t_0) + \\ & \int_{t_0}^t u(t, \tau)b(\tau)\nu(\tau)b(\tau)^T u^*(t, \tau)d\tau] + [u(t, t_0)K_0u^*(t, t_0) \\ & \int_{t_0}^t u(t, \tau)b(\tau)\nu(\tau)b(\tau)^T u^*(t, \tau)d\tau]a(t)^T + b(t)\nu(t)b(t)^T. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Dado que la expresión en corchetes es igual a $K = K(t)$, entonces

$$\dot{K} = aK + Ka^T + b\nu b^T. \quad (2.36)$$

Integrando la ecuación (2.36) con la condición inicial $K(t_0) = K_0$ se puede calcular la matriz de la varianza del vector aleatorio Y para el sistema lineal estocástico (2.27). La ecuación diferencial para el momento de segundo orden $\Gamma(t)$ del vector Y con $t_1 = t_2 = t$ se puede obtener en base a la fórmula

$$\Gamma(t) = K(t) + m(t)m(t)^T, \quad (2.37)$$

diferenciando la fórmula anterior se obtiene

$$\dot{\Gamma} = \dot{K} + \dot{m}m^T + m\dot{m}^T. \quad (2.38) \text{ (R)}$$

Sustituyendo aquí las expresiones para \dot{m} y \dot{K} para las ecuaciones (2.33) y (2.36), y usando la fórmula (2.37) se llega a

$$\dot{\Gamma} = a\Gamma + \Gamma a^T + b\nu b^T + a_0 m^T + m a_0^T. \quad (2.39)$$

Integrando la ecuación (2.39) y después la ecuación (2.33), la cual determina la esperanza m con la condición inicial $\Gamma(t_0) = \Gamma_0 = K_0 + m_0 m_0^T$, se puede calcular el momento inicial de segundo orden del vector aleatorio Y en el sistema lineal estocástico (2.27). La

ecuación para la función de covarianza $K(t_1, t_2)$ del proceso aleatorio Y considerada como una función de t_1 y algún t_1 fijo, con el caso $t_1 < t_2$:

$$K(t_1, t_2) = u(t_1, t_0)K_0u(t_2, t_0)^* + \int_{t_0}^{t_1} u(t_1, \tau)b(\tau)\nu(\tau)b(\tau)^T u(t_2, \tau)^* d\tau \quad (2.40)$$

Diferenciando la fórmula anterior respecto a t_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_2} &= u(t_1, t_0)K_0u_{t_2}(t_2, t_0)^* + \quad (2.41) \\ \int_{t_0}^{t_1} u(t_1, \tau)b(\tau)\nu(\tau)b(\tau)^T u(t_2, \tau)^* d\tau &= u(t_1, t_0)K_0u(t_2, t_0)^* a^T(t_2) + \\ &\int_{t_0}^{t_1} u(t_1, \tau)b(\tau)\nu(\tau)b(\tau)^T u(t_2, \tau)^* a^T(t_2) d\tau, \\ &= K(t_1, t_2)a(t_2)^T, t_1 < t_2. \end{aligned}$$

con la condición inicial $K(t_1, t_1) = K(t_1)$.

Integrando la ecuación (2.41) con varios valores de t_1 , se obtiene el número de secciones de la matriz de covarianza $K(t_1, t_2)$ con $t_1 < t_2$. Al obtener $K(t_1, t_2)$ con $t_2 < t_1$ se usa

$$K(t_1, t_2) = K(t_2, t_1)^T$$

Función Característica Uni-dimensional

Sea considerado el sistema cuyo vector de estado es descrito por la ecuación estocástica diferencial de Itô

$$\dot{Y} = a(Y, t) + b(Y, t)V, \quad (2.42)$$

donde V es un ruido blanco en el sentido estricto. El problema es encontrar la distribución multidimensional del estado del sistema $Y(t)$, suponiendo que la distribución unidimensional del proceso con incrementos independientes

$$W(t) = W(t_0) + \int_{t_0}^t V(\tau) d\tau \quad (2.43)$$

es conocida. La ecuación de la función característica uni-dimensional está dada por

$$\frac{\partial g_1(\lambda, t)}{\partial t} = E\{i\lambda^T a(Y, t) + \chi(b(Y, t)^T \lambda; t)\} e^{i\lambda^T Y} \quad (2.44)$$

La ecuación multidimensional de la función característica de un vector estado Y de un sistema está dada por

$$g_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_n) = E[\exp\{i \sum_{k=1}^n \lambda_k^T Y(t_k)\}] \quad (2.45)$$

Supongamos que la densidad uni-dimensional $f_1(y, t)$ para el vector estado del sistema existe. Entonces la ecuación (2.44) puede escribirse como

$$\frac{\partial g_1(\lambda, t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} [i\lambda^T a(y, t) + \chi(b(y, t)^T \lambda; t)] e^{i\lambda^T y} f_1(y, t) dy \quad (2.46)$$

Por la Transformada de Fourier

$$f_1(y; t) = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu^T y} g_1(\mu, t) d\mu \quad (2.47)$$

donde p es la dimensión del vector de estado Y , y la integral con respecto a todos los componentes del vector p -dimensional μ es asumida como el valor principal de la integral en el sentido de Cauchy si $g_1(\mu, t)$ es no integrable absolutamente. Sustituyendo la ecuación (2.47) en la ecuación (2.46) es obtenida la ecuación íntegro-diferencial lineal

$$\frac{\partial g_1(\lambda, t)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [i\lambda^T a(y, t) + \chi(b(y, t)^T \lambda; t)] \times e^{i(\lambda^T - \mu^T)y} g_1(\mu; t) d\mu dy \quad (2.48)$$

Análogamente, suponiendo que la densidad multidimensional del proceso $Y(t)$ existe, se obtiene la ecuación íntegro-diferencial relativa a $g_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_n)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t_n} g_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_n) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{np}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [i\lambda^T a(y_n, t_n) + \chi(b(y_n, t_n)^T \lambda_n; t_n)] \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} & \times \exp\left\{i \sum_{k=1}^n (\lambda_k^T - \mu_k^T) y_k\right\} g_n(\mu_1, \dots, \mu_n; t_1, \dots, t_n) \\ & \times d\mu_1 d\mu_n dy_1 dy_n \end{aligned}$$

Ecuaciones Uni-Dimensionales para las Densidades

Reemplazando en la ecuación (2.46) la variable de integración y por η , multiplicando esta ecuación por $(2\pi)^{-p} e^{-i\lambda^T y}$, e integrando esto con respecto a λ , se obtiene la ecuación integro-diferencial para la densidad de una dimensión $f_1(y, t)$

$$\frac{\partial f_1(y, t)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [i\lambda^T a(\eta, t) + \chi(b(\eta, t)^T \lambda; t)] e^{i\lambda^T (\eta - y)} f_1(\eta; t) d\eta d\lambda \quad (2.50)$$

Fórmula para la Función $\chi(\mu, t)$ para el Proceso de Wiener

Una forma específica para la función $\chi = \chi(\mu; t)$ en las ecuaciones obtenidas para las funciones características es determinada por el carácter del proceso con incrementos independientes $\{W(t)\}$, $t \geq 0$. Aquí es obtenida cuando $\{W(t)\}$ es un proceso de Wiener, pero se puede calcular para cualquier proceso, aunque este cálculo puede ser más complicado.

Si $\{W(t)\}$ es el proceso de Wiener, entonces su función característica uni-dimensional $h_1(\mu, t)$ se determina por la fórmula

$$h_1(\mu, t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\mu^T \int_0^t \nu(\tau) d\tau \mu\right\}, \quad (2.51)$$

ya que la función $\chi(\mu; t)$ representa la derivada logarítmica de la función característica $h_1(\mu; t)$ con respecto a t : $\chi(\mu; t) = \frac{\partial}{\partial t} [\ln h_1(\mu; t)]$. Sustituyendo aquí la expresión de la función $h_1(\mu; t)$, se obtiene

$$\chi(\mu; t) = -\mu^T \nu(t) \mu / 2 \quad (2.52)$$

Ecuaciones para las Densidades en el Caso Multi-Dimensional del Proceso de Wiener

En el caso de un proceso de Wiener $W(t)$, de acuerdo con (2.46) se obtiene la siguiente ecuación

$$\chi(b(\eta, t)^T \lambda; t) = -\frac{1}{2} \lambda^T b(\eta, t) \nu(t) b(\eta, t)^T \lambda. \quad (2.53)$$

La ecuación (2.52) toma la forma

$$\frac{\partial f_1(y, t)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [i\lambda^T a(\eta, t) - \frac{1}{2} \lambda^T b(\eta, t) \nu(t) b(\eta, t)^T] \times e^{i\lambda^T(\eta-y)} f_1(\eta; t) d\eta d\lambda. \quad (2.54)$$

Tomando en cuenta que $u^T A u = \text{tr}(u u^T A)$ para un n -vector u y una matriz $A_{n \times n}$, es obtenida la siguiente fórmula

$$\frac{\partial f_1(y, t)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [i\lambda^T a(\eta, t) - \frac{1}{2} \text{tr}[\lambda \lambda^T b(\eta, t) \nu(t) b(\eta, t)^T]] \times e^{i\lambda^T(\eta-y)} f_1(\eta; t) d\eta d\lambda. \quad (2.55)$$

Utilizando la fórmula integral de la función delta

$$\frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^T(\eta-y)} d\lambda = \delta(\eta - y) \quad (2.56)$$

Diferenciando (2.56) con respecto a η son obtenidas las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda e^{i\lambda^T(\eta-y)} d\lambda &= \frac{\partial}{\partial \eta} \delta(\eta - y) = \delta'(\eta - y), \\ -\frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \lambda^T e^{i\lambda^T(\eta-y)} d\lambda &= \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^T}{\partial \eta} \delta(\eta - y) = \delta''(\eta - y). \end{aligned} \quad (2.57)$$

En base a las últimas tres fórmulas anteriores, es posible escribir

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda^T a(\eta, t) e^{i\lambda^T(\eta-y)} f_1(\eta; t) d\eta d\lambda = \quad (2.58) \\
 & \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(\eta - y)^T a(\eta, t) f_1(\eta; t) d\eta = -\frac{\partial^T}{\partial y} [a(y, t) f_1(y, t)], \\
 & -\frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \lambda^T b(\eta; t) \nu(t) b(\eta; t)^T e^{i\lambda^T(\eta-y)} f_1(\eta; t) d\eta d\lambda = \\
 & \int_{-\infty}^{\infty} \delta''(\eta - y) b(\eta; t) \nu(t) b(\eta; t)^T f_1(\eta; t) d\eta = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^T}{\partial y} [b(y; t) \nu(t) b(y; t)^T f_1(y; t)]
 \end{aligned}$$

Usando las fórmulas (2.58), es posible representar la ecuación (2.55) en la forma

$$\frac{\partial f_1(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^T}{\partial y} [a(y, t) f_1(y, t)] + \frac{1}{2} tr \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^T}{\partial y} [b(y, t) \nu(t) b(y, t)^T f_1(y, t)] \quad (2.59)$$

Esta ecuación (2.59) fue obtenida en el inicio del siglo XX por Fokker, Einstein y Smoluchovsky, los cuales estudiaban el movimiento Browniano y la difusión [37], para el caso de Y escalar y luego para un vector Y , y es llamada la *ecuación de Fokker-Planck-Kolgomorov* [52], y se obtiene solo para el proceso de Wiener. La ecuación (2.59) también es válida para la densidad multi-dimensional $f_n(y_1, \dots, y_n; t_1, \dots, t_n)$ si la diferenciación con respecto a t y a y es considerada como la diferenciación respecto a t_n y y_n .

2.3. Teoría de Filtrado Óptimo

2.3.1. Filtro de Wiener

Planteamiento del Problema

El filtrado de Wiener [77] probablemente representa la primera presentación de terminología en el cual dos importantes ideas han sido rescatadas: sistemas dinámicos y estimación óptima en presencia de ruido. Se considera una señal $y(\cdot)$, la cual contiene un

ruido $v(\cdot)$ y una medida $z(\cdot)$. $y(\cdot)$, $v(\cdot)$, y $z(\cdot)$ pueden originar un problema del tipo continuo o discreto en el tiempo, dependiendo de la naturaleza de las mismas. Las señales de tiempo son consideradas como escalares continuos definidos en el intervalo $(-\infty, \infty)$ solamente. Se supone que $y(\cdot)$, y $v(\cdot)$, son funciones simples de procesos aleatorios estacionarios. Normalmente ellos son independientes y tienen media cero. Posteriormente ellos son considerados para la obtención de $\phi_{yy}(j\omega)$ y $\phi_{vv}(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$. La tarea del filtro de Wiener es utilizar las mediciones $z(\cdot)$ para estimar $y(\cdot)$. Más precisamente, se requiere que la estimación sea causal, en línea y óptima. *Causal* significa que $y(t)$ va a ser estimada usando $z(s)$ para algún $s < t$; en línea significa que al tiempo t el estimado de $y(t)$ debería desempeñarse óptimamente. *Óptima* significa que $\hat{y}(t)$, debería presentar un error cuadrado mínimo, i.e. $E[y(t) - \hat{y}(t)]^2$, el cual debe ser minimizado. Si $y(\cdot)$, y $v(\cdot)$ son Gaussianos, esto significa que $\hat{y}(t)$ es el estimado condicional, $E[y(t)|z(s), s \leq t]$.

Solución

La solución a este problema está dada en la siguiente explicación: El *filtro de Wiener* es un sistema lineal, invariante en el tiempo, causal, estable, cuya relación entrada-salida está dada por una función de respuesta al impulso $h(\cdot)$:

$$\hat{y}(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s)z(s)ds \quad (2.60)$$

La señal $y(\cdot)$ y el ruido $v(\cdot)$ son representados como la salida de un sistema lineal excitado por ruido blanco. Si $\varepsilon_y(\cdot)$, $\varepsilon_v(\cdot)$ son ruidos blancos con media cero y la intensidad de la varianza es 1, entonces

$$E[\varepsilon_y(t)\varepsilon_y(s)] = E[\varepsilon_v(t)\varepsilon_v(s)] = \delta(t-s), \quad (2.61)$$

y, por tanto,

$$\phi_{yy}(j\omega) = |W_y(j\omega)|^2, \phi_{vv}(j\omega) = |W_v(j\omega)|^2 \quad (2.62)$$

La clave del problema es la obtención de $\phi_{yy}(j\omega)$, $\phi_{vv}(j\omega)$ para la función de respuesta al impulso $h(t)$ o su función de transferencia $H(j\omega)$. El paso crucial es la técnica de factorización espectral. El espectro de $z(\cdot)$ cuando $y(\cdot)$ y $v(\cdot)$ son independientes está dado por

$$\phi_{zz}(j\omega) = \phi_{yy}(j\omega) + \phi_{vv}(j\omega) \quad (2.63)$$

La factorización espectral requiere la determinación de una función de transferencia $W_z(j\omega)$ tal, que $W_z(s)$ y $W_z^{-1}(s)$ son analíticas en $\mathbb{R}, s \geq 0$, y tal que

$$\phi_{zz}(j\omega) = |W_z(j\omega)|^2, \quad (2.64)$$

En [48] esta operación de factorización espectral es presentada como un paso crucial en la obtención de $H(\cdot)$, la cual en [47] es la clave para la determinación del filtro óptimo. A continuación se procede de la siguiente manera: Se define una señal $\varepsilon_z(\cdot)$ como la salida de un sistema lineal de una función de transferencia $W_z^{-1}(j\omega)$ conducida por $z(\cdot)$. Si existe $W_z^{-1}(\cdot)$, entonces $\varepsilon_z(\cdot)$ es equivalente a $z(\cdot)$, es decir, la estimación de $y(t)$ usando $\varepsilon_z(s)$ para $s < t$ debería dar el mismo resultado como estimación de $y(t)$ usando $z(s)$ para $s < t$, y además $\varepsilon_z(\cdot)$ es un ruido blanco. Esta simplificación es muy importante y es utilizada para la obtención del filtro óptimo en [59].

Además, es notable que la construcción de $W_z(\cdot)$ satisface las condiciones de estabilidad y (2.64) y es un paso importante para la construcción de $H(\cdot)$. La pregunta es ¿Cómo puede hacerse esto? Si $\phi_{zz}(\cdot)$ es racional, la clave es la factorización polinomial. En otro caso, utilizar:

$$W_z(j\omega_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \phi_{zz}(j\omega)}{-j(\omega - \omega_0) - \varepsilon} d\omega \right\} \quad (2.65)$$

Otra forma de resolver el problema de filtrado, en el dominio del tiempo, es utilizando la función de respuesta al impulso $h(t)$, la cual corresponde a la transformada inversa de

Laplace de la función $H(jw)$, mediante la ecuación

$$h(t) + \int_0^t h(\tau)K(\tau - s)ds = K(t), t \geq 0, \quad (2.66)$$

donde $K(\tau)$ es la función de covarianza de $z(t)$. Esta ecuación es conocida como la ecuación de Wiener-Hopf.

2.3.2. Filtro de Kalman (Tiempo Discreto)

Prácticamente, todo lo establecido para el *filtro de Kalman* en el tiempo continuo, se traslada al caso del filtro con tiempo discreto. La teoría en el caso continuo es más transparente que en el caso discreto, ya que presenta aplicabilidad a más problemas.

Planteamiento del problema

El modelo está dado por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F_k x_k + G_k w_k \\ z_k &= H^T_k x_k + v_k \end{aligned} \quad (2.67)$$

con

$$E \begin{bmatrix} w_k \\ v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_l^T & v_l^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix} \delta_{kl}$$

y $\{w_k\}, \{v_k\}$ son sucesiones con media cero. Por convencionalismo, se considera el tiempo inicial $k = 0$. Agregando que la media \bar{x}_0 y la varianza P_0 de x_0 , son independientes de $\{w_k\}, \{v_k\}$. Todas las variables son Gaussianas. La idea principal es distinguir el efecto de dinámicas y las mediciones en el filtro. Más precisamente, sea $\hat{x}_{k/k}$ el estimado óptimo, una media estimada de x_k dada $z_l, l \leq k$, y sea \hat{x}_{k+1} dado por $E[x_{k+1}/z_l, l \leq k]$, el primer paso en la predicción del estimado.

Solución

Dado que w_k es independiente de z_l para $l \leq k$, se tiene

$$\hat{x}_{k+1} = F_k \hat{x}_k \quad (2.68)$$

Esto demuestra la forma de actualizar un estimado como resultado de sistemas dinámicos, cuando no aparecen mediciones extras. (2.68) se apoya en

$$V_{k+1} = F_k V_{k/k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T \quad (2.69)$$

Aquí $V_{k/k}$ y V_{k+1} son las covarianzas del error asociadas con \hat{x}_k y \hat{x}_{k+1} . Actualizar las ecuaciones de los estimados equivale a pasar de \hat{x}_k y $V_{k/k}$ a \hat{x}_{k+1} y V_{k+1} . Esto se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= \hat{x}_k + \sqrt{V_{k+1}} H_{k+1}^T [H_{k+1}^T \sqrt{V_{k+1}} H_{k+1} + R_{k+1}]^{-1} \\ &\quad \times [z_{k+1} - H_{k+1}^T \hat{x}_k] \\ V_{k+1} &= V_{k/k} - \sqrt{V_{k+1}} H_{k+1}^T [H_{k+1}^T \sqrt{V_{k+1}} H_{k+1} + R_{k+1}]^{-1} H_{k+1} \sqrt{V_{k/k}} \end{aligned} \quad (2.70)$$

2.3.3. Filtro de Kalman-Bucy (Tiempo Continuo)

Planteamiento del Problema

La representación del modelo está dada por:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t)x(t) + G(t)w(t) \quad (2.71)$$

$$z(t) = H^T(t)x(t) + v(t) \quad (2.72)$$

en el cual F, G, H son matrices $n \times n, n \times m$, y $n \times p$ respectivamente. Los procesos $w(t)$ y $v(t)$ son ruidos blancos Gaussianos con media cero, tales que:

$$E \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T(s) & v^T(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q(t) & S(t) \\ S^T(t) & R(t) \end{bmatrix} \delta(t-s)$$

con $R(t) = R'(t) > 0$ para toda t . Muy frecuentemente, $S(t) \equiv 0$, i.e. $w(\cdot)$ y $v(\cdot)$ son independientes. Entonces $Q(t) = Q^T(t) \geq 0$. Se supone un tiempo inicial finito t_0 . Por otro lado, $x(t_0)$ será considerada como variable aleatoria Gaussiana con media x_0 y varianza p_0 . La tarea de la estimación es usar mediciones de $z(s)$ para $s < t$ para estimar $x(t)$; este estimado es llamado $\hat{x}(t)$, el cual minimiza $E[\|x(t) - \hat{x}(t)\|^2]$. Esto significa que $\hat{x}(t)$ es necesariamente una estimación de la media condicional, con respecto a las observaciones.

Solución

La solución se obtiene de la siguiente manera: Definamos $P(t) = P^T(t) \geq 0$ como la solución de

$$\dot{P} = PF^T + FP - PHR^{-1}H^TP + GQG^T, P(t_0) = P_0 \quad (2.73)$$

Y $\hat{x}(t)$ es la solución de

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = F(t)\hat{x}(t) + P(t)H(t)R^{-1}(t)[z(t) - H^T(t)\hat{x}(t)] \quad (2.74)$$

Donde $P(t)H(t)R^{-1}(t)$ denota la ganancia de Kalman. $E[x(t) - \hat{x}(t)][x(t) - \hat{x}(t)]^T = P(t)$. La efectividad del estimador óptimo es medida por la covarianza del error, la cual es dada por la solución de la ecuación (2.73), y la existencia de la solución a esta ecuación en (t_0, ∞) está garantizada.

Algunas diferencias del filtro de Kalman con respecto al de Wiener son dadas en la siguiente tabla:

Filtro de Wiener	Filtro de Kalman
$t_0 = -\infty$	$t_0 \geq -\infty$
Estacionario	Acepta no estacionario.
Infinito dimensional	Finito dimensional
Ruido no necesariamente blanco	Ruido blanco
Factorización espectral	Solución de la ecuación de Riccati
Estimación de la señal	Estimación del estado

El problema de predicción es resuelto por la teoría de filtrado. Esto consiste en calcular $x(t + \Delta)$ para algún Δ positivo, dado $z(s)$ para $s < t$. Esto es:

$$\hat{x}(t + \Delta) = \Phi(t + \Delta)\hat{x}(t) \quad (2.75)$$

2.3.4. Ecuación General de Filtrado Óptimo

Consideremos el proceso continuo estocástico descrito por la ecuación

$$\dot{X} = \varphi(X, t) + \psi(X, t)V \quad (2.76)$$

donde X es el vector de estado n -dimensional del sistema, V es un vector r -dimensional que representa el ruido blanco Gaussiano, y $\varphi(X, t)$, $\psi(X, t)$ son funciones conocidas del estado del sistema y del tiempo. Los valores de la función $\varphi(X, t)$ son vectores n -dimensionales y los valores de la función $\psi(X, t)$ son matrices $n \times r$. Si el vector de estado del sistema X es medido continuamente, entonces el proceso aleatorio n -dimensional $Y(t) = X(t) + U(t)$ sería el resultado de las mediciones, donde $U(t)$ es el error de la medición, el cual representa usualmente una función aleatoria del tiempo. Por otro lado, si esto no se cumple con el vector de estado, pero si algunas funciones del vector de estado son medidas por algunos de los componentes del vector de observación. el resultado de

las mediciones es determinado en forma general por la fórmula

$$Y = Y(t) = \varphi_0(X, U, t), \quad (2.77)$$

donde Y es un vector n_1 -dimensional, U es el error de la medición, representando una función vectorial aleatoria de tiempo de dimension $r \geq n_1$, y $\varphi_0(x, u, t)$ es una función conocida del estado del sistema, el error de la medición y del tiempo. El modelo general de las mediciones que se llevan a cabo en un sistema, puede ser descrito por la ecuación diferencial

$$\dot{Y} = \varphi_1(Y, X, U, t). \quad (2.78)$$

El resultado de las mediciones representa el proceso aleatorio Y . El problema de filtrado es planteado para el vector de estado del sistema X en cada instante $t > t_0$, usando los resultados de mediciones continuas del proceso Y determinado por la ecuación (2.78) en el intervalo de tiempo $[t_0, t]$.

Sea un vector aleatorio de un proceso $[Y^T X^T]^T$ determinado por las ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô

$$dY = \varphi_1(Y, X, t)dt + \psi_1(Y, X, t)dW, \quad (2.79)$$

$$dX = \varphi(Y, X, t)dt + \psi(Y, X, t)dW,$$

donde Y es un proceso aleatorio n_1 -dimensional, X es un proceso n -dimensional, W es un proceso r -dimensional, $\varphi_1(y, x, t)$ y $\varphi(y, x, t)$ son funciones vectoriales que mapean el espacio $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ en los espacios \mathbb{R}^{n_1} y \mathbb{R}^n respectivamente, y $\psi_1(y, x, t)$ y $\psi(y, x, t)$ son matrices de funciones conocidas que mapean $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^{n_1 r}$ y \mathbb{R}^{nr} respectivamente. Esto constituye el planteamiento del problema de filtrado para el vector estado del sistema en algún instante $t > t_0$ usando los resultados de mediciones continuas del proceso Y en el intervalo de tiempo $[t_0, t]$.

La solución general al problema de filtrado óptimo se obtiene de la siguiente propiedad para los momentos de segundo orden: el menor de todos los momentos de segundo orden de una variable aleatoria escalar es su varianza. De aquí resulta que la mejor aproximación de una variable aleatoria por una variable no aleatoria mediante el criterio de media cuadrada es dada por su esperanza condicional con respecto a las observaciones. Sea $Y_{t_0}^t$ el conjunto de valores del proceso medido en el intervalo de tiempo $[t_0, t]$, $Y_{t_0}^t = \{Y(\tau) : \tau \in [t_0, t]\}$. Entonces, el estimado óptimo del vector $X_u = X(u)$, el cual da la solución del problema para $u = t$, es determinado por la fórmula

$$\hat{X}_u = E[X_u/Y_{t_0}^t] \quad (2.80)$$

Esta fórmula determina el estimado óptimo del valor X_u para alguna función aleatoria $X(u)$ usando los resultados de las mediciones de otra función aleatoria $Y(t)$ en el intervalo $[t_0, t]$. También es válida para el caso de un vector con argumento t y la medición de la función $Y(t)$ en algún conjunto T de valores de t . La aplicación de la fórmula (2.80) es necesaria para encontrar la distribución condicional de X_u . Este es un problema que en ocasiones no tiene solución. En el caso particular en el que $Y(t)$ y $X(t)$ son determinados por las ecuaciones (2.79), el problema puede ser resuelto bajo algunas restricciones adicionales. La fórmula general para el diferencial estocástico del estimado óptimo de una función del vector de estado dado es la base de la teoría de filtrado óptimo. Sea $f(X_t, t)$ alguna función escalar del vector de estado n -dimensional de un sistema y de tiempo. Su estimado óptimo usando los resultados de observación $Y_{t_0}^t$ de acuerdo con (2.80) es determinado por la fórmula

$$\hat{f}(t) = E[f(X_t, t)|Y_{t_0}^t]. \quad (2.81)$$

Este estimado representa un funcional del proceso aleatorio $Y(t)$ en el intervalo de tiempo $[t_0, t]$, y consecuentemente es por sí mismo una función de t . Un problema matemático

que sirve de ayuda es encontrar la diferencial estocástica de Itô de este proceso aleatorio. Este problema puede ser resuelto bajo la condición de que $W(t)$ en las ecuaciones (2.79) representa el proceso de Wiener cuya dimensión r es no menor que n_1 , que es la dimensión del proceso de medición $Y(t)$, y que la función φ_1 en las ecuaciones (2.79) no depende de X . Las ecuaciones (2.79) toman la forma

$$\begin{aligned} dY &= \varphi_1(Y, X, t)dt + \psi_1(Y, t)dW, \\ dX &= \varphi(Y, X, t)dt + \psi(Y, X, t)dW, \end{aligned} \quad (2.82)$$

Diferencial de Itô para una Función del Estimado Óptimo

La ecuación diferencial estocástica del estimado óptimo de la variable aleatoria $f(X_t, t)$ para las ecuaciones (2.79) es dada por la fórmula

$$\begin{aligned} d\hat{f} &= E[f_t(X, t) + f_x(X, t)^T \varphi(Y, X, t) \\ &+ \frac{1}{2} \text{tr} \{ f_{xx}(X, t) (\psi \nu \psi^T)(Y, X, t) \} | Y_{t_0}^t] dt + E[f(X, t) \{ \varphi_1(Y, X, t)^T - \hat{\varphi}_1^T \} \\ &+ f_x(X, t)^T (\psi \nu \psi_1^T)(Y, X, t) | Y_{t_0}^t] (\psi_1 \nu \psi_1^T)^{-1}(Y, t) (dY - \hat{\varphi}_1 dt), \end{aligned} \quad (2.83)$$

donde

$$\begin{aligned} (\psi \nu \psi^T)(x, y, t) &= \psi(y, x, t) \nu(t) \psi(y, x, t)^T, \\ (\psi \nu \psi_1^T)(y, x, t) &= \psi(y, x, t) \nu(t) \psi_1(y, t)^T, \\ (\psi_1 \nu \psi_1^T)^{-1}(y, t) &= [\psi_1(y, t) \nu(t) \psi_1(y, t)^T]^{-1}, \\ \hat{\varphi}_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1 p_t(x) dx = E[\varphi_1(X_t, Y_t, t) | Y_{t_0}^t], \end{aligned} \quad (2.84)$$

$p_t(x)$ es la densidad condicional de X_t relativa a $Y_{t_0}^t$; las derivadas f_t, f_x, f_{xx} y todas las esperanzas condicionales del lado derecho existen.

Ecuación para la Función Característica

Sustituyendo $f(x, t) = e^{i\lambda^T X_t}$ en la ecuación (2.83), se obtendrá la ecuación estocástica para la función condicional característica del vector aleatorio X_t :

$$g_t(\lambda) = E[e^{i\lambda^T X_t} | Y_{t_0}^t]. \quad (2.85)$$

Haciendo las sustituciones

$$f_t = 0, f_x = i\lambda e^{i\lambda^T x}, f_{xx} = -\lambda\lambda^T e^{i\lambda^T x}, \quad (2.86)$$

$$\text{tr}\{\lambda\lambda^T(\psi\nu\psi^T)(y, x, t)\} = \lambda^T(\psi\nu\psi^T)(y, x, t)\lambda,$$

de la ecuación (2.83) se obtiene

$$\begin{aligned} dg_t(\lambda) = & E\left\{i\lambda^T \varphi(Y, X, t) - \frac{1}{2}(\psi\nu\psi^T)(Y, X, t)\lambda\right\} e^{i\lambda^T X} | Y_{t_0}^t dt \\ & + E\left\{\varphi_1(Y, X, t)^T - \widehat{\varphi}_1^T + i\lambda^T(\psi\nu\psi_1^T)(Y, X, t)\right\} \\ & \times e^{i\lambda^T X} | Y_{t_0}^t (\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}(Y, t)(dY - \widehat{\varphi}_1 dt). \end{aligned} \quad (2.87)$$

El lado derecho representa una función de λ . La distribución condicional del vector aleatorio X es completa y únicamente determinada por su función característica. Resolviendo la ecuación (2.87) es posible evaluar el estimado óptimo \widehat{X}_t del vector de estado X_t determinado por la fórmula (2.80). Mediante estas fórmulas es posible obtener la expresión para la esperanza en términos de la función característica.

$$\widehat{X}_t = E[X_t | Y_{t_0}^t] = \left[\frac{\partial g_t(\lambda)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} \quad (2.88)$$

Ecuación para la Densidad Condicional

La ecuación estocástica para la densidad condicional $p_t(x)$ del vector aleatorio X_t es derivada a continuación:

$$dp_t(x) = -\frac{\partial^T}{\partial x} [\varphi(Y, x, t)p_t(x)] dt \quad (2.89)$$

$$+\frac{1}{2}tr\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^T}{\partial x}[(\psi\nu\psi^T)(Y, X, t)p_t(x)]\right\}(\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}(Y, t)(dY - \widehat{\varphi}_1 dt)$$

0

$$dp_t(x) = L^*p_t(x)dt + \{[\psi_1(Y, x, t)^T - \varphi_1^T]p_t(x) - \frac{\partial^T}{\partial x}[(\psi\nu\psi^T)(Y, x, t)p_t(x)]\}(\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}(Y, t)(dY - \widehat{\varphi}_1 dt), \quad (2.90)$$

donde L^* es el operador adjunto del operador

$$L = \varphi(Y, x, t)^T \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}tr[(\psi\nu\psi^T)(Y, x, t) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^T}{\partial x}]. \quad (2.91)$$

Observando la última ecuación de (2.84), se concluye que la ecuación (2.89) representa una ecuación íntegro-diferencial relativa a la densidad condicional $p_t(x)$. Como el momento inicial t_0 , la función $p_{t_0}(x)$ sirve como la condición inicial para la ecuación (2.89). Después de resolver la ecuación (2.89), se puede encontrar de acuerdo con la fórmula (2.80) el estimado óptimo \widehat{X}_t del vector de estado X_t del sistema

$$\widehat{X}_t = E[X_t/Y_{t_0}^t] = \int_{-\infty}^{\infty} xp_t(x)dx. \quad (2.92)$$

Como la fórmula (2.79) determina la diferencial estocástica de Itô del proceso aleatorio $\widehat{f}(t)$, las ecuaciones (2.87) y (2.89) son ecuaciones estocásticas de Itô. La ecuación (2.89) fue originalmente obtenida en otra forma y bajo restricciones más rígidas en [76], y denominada ecuación estocástica de Stratonovich. Al mismo tiempo, la ecuación para p_t en la forma de Itô fue obtenida en [55], también bajo restricciones más rígidas. Por lo tanto, es usualmente llamada ecuación de Stratonovich-Kushner.

Diferencial Estocástica de la Esperanza Matemática

La fórmula (2.80) determinó el estimado óptimo como la esperanza condicional de \widehat{X} de la variable aleatoria correspondiente X . El estimado óptimo obtenido como resultado

de mediciones es caracterizado por la matriz de covarianza condicional R . Estas fórmulas se pueden obtener de la fórmula general (2.83). Como la fórmula (2.83) determina la diferencial estocástica de una función escalar del estado del sistema, es necesario aplicarla para cada elemento de las matrices \hat{X} y R por separado. Sustituyendo en (2.83) $f(X, t) = X_l, f_t = 0, f_x = [0, \dots, 1, \dots]^T, f_{xx} = 0$, y la fórmula (2.83) toma la forma

$$d\hat{X}_l = \hat{\varphi}_l dt + E[X_l(\varphi_l^T - \hat{\varphi}_l^T)] + (\psi \nu \psi_l^T)_l | Y_{t_0}^t (\psi_l \nu \psi_l^T)^{-1} (dY - \hat{\varphi}_l dt) \quad (l = 1, \dots, n) \quad (2.93)$$

donde de acuerdo con la última ecuación de (2.83) $\hat{\varphi}_l = E[\varphi_l(Y, X, t) / Y_{t_0}^t], (\psi \nu \psi_l^T)_l$, siendo la l -ésima columna de la matriz $\psi \nu \psi_l^T$ y los argumentos de las funciones $\varphi_l, \psi \nu \psi_l^T$ y $(\psi_l \nu \psi_l^T)^{-1}$ son omitidos por brevedad. Entonces, la matriz para el diferencial estocástico del estimado óptimo \hat{X} del vector de estado del sistema X está dada por

$$d\hat{X} = \hat{\varphi} dt + E[X\{(\varphi_l(Y, X, t))^T - \hat{\varphi}_l^T\}] + (\psi \nu \psi_l^T)(Y, X, t) | Y_{t_0}^t (\psi_l \nu \psi_l^T)^{-1}(Y, t) (dY - \hat{\varphi}_l dt) \quad (2.94)$$

Diferencial Estocástica del Momento Condicional de Segundo Orden

Sustituyendo en (2.83) $f(X, t) = X_k X_l$ con $k < l, f_t = 0, f_x = [0, \dots, X_l, \dots, X_k, \dots, 0]^T,$

$$f_{xx} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Siendo que las dos columnas y renglones centrales contienen unos, los correspondientes a k , y l respectivamente, de la fórmula (2.83) se tiene

$$\begin{aligned} d\Gamma_{kl} = & E[X_k\varphi_l + X_l\varphi_k + (\psi\nu\psi^T)_{kl}|Y_{t_0}^t]dt \\ & + E[X_kX_l(\varphi_l^T - \hat{\varphi}_l^T) + X_k(\psi\nu\psi_l^T)_l \\ & + X_l(\psi\nu\psi_l^T)_k|Y_{t_0}^t](\psi_l\nu\psi_l^T)^{-1}(dY - \hat{\varphi}_1 dt)(k, l = 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (2.95)$$

donde $d\Gamma_{kl} = E[X_kX_l\varphi_k/Y_{t_0}^t]$, y $(\psi\nu\psi^T)_{kl}$ es el elemento correspondiente de la matriz $(\psi\nu\psi^T)$. Re-escribiendo la fórmula (2.95) como

$$\begin{aligned} d\Gamma_{kl} = & E[X_k\varphi_l + X_l\varphi_k + (\psi\nu\psi^T)_{kl}|Y_{t_0}^t]dt \\ & + \sum_{\rho=1}^r E[X_kX_l a_{\rho} + X_k b_{lk} + X_l b_{k\rho}|Y_{t_0}^t](dY_{\rho} - \hat{\varphi}_{1\rho} dt), \end{aligned} \quad (2.96)$$

donde a_{ρ} es el ρ -ésimo elemento de la matriz $(\varphi_1^T - \hat{\varphi}_1^T)(\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}$ y $b_{k\rho}$ es el elemento del k -ésimo renglón y de la ρ -ésima columna de la matriz $\psi\nu\psi_1^T(\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}$. Denotando por b_{ρ} la ρ -ésima columna de la matriz $\psi\nu\psi_1^T(\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}$, $b_{\rho} = [b_{1\rho}, \dots, b_{n\rho}]^T$ ($\rho = 1, \dots, r$), se obtiene la siguiente fórmula diferencial estocástica del momento condicional de segundo orden Γ del vector estado del sistema:

$$\begin{aligned} d\Gamma = & E[X\varphi(Y, X, t)^T + \varphi(Y, X, t)X^T \\ & + (\psi\nu\psi^T)(Y, X, t)|Y_{t_0}^t]dt + \sum_{\rho=1}^r E[XX^T a_{\rho}(Y, X, t) \\ & + Xb_{\rho}(Y, X, t)^T + b_{\rho}X^T|Y_{t_0}^t](dY_{\rho} - \hat{\varphi}_{1\rho} dt), \end{aligned} \quad (2.97)$$

Diferencial Estocástica de la Matriz de Covarianza

Para encontrar la diferencial estocástica de la matriz de covarianza condicional R del vector estado del sistema se usará la fórmula conocida que relaciona la esperanza. el

momento de segundo orden, y la matriz de covarianza del vector aleatorio $R = \Gamma - \widehat{X}\widehat{X}^T$, o en la forma escalar $R_{kl} = \Gamma_{kl} - \widehat{X}_k\widehat{X}_l$. Derivando en ambos lados de la última fórmula, se obtiene la expresión $dR_{kl} = d\Gamma_{kl} - d(\widehat{X}_k\widehat{X}_l)$. Para encontrar $d(\widehat{X}_k\widehat{X}_l)$ se utiliza la fórmula

$$d(Z_1Z_2) = Z_1dZ_2 + Z_2dZ_1 + Y_1\nu Y_2^T dt, \quad (2.98)$$

$Z(t) = [Z_1, Z_2]$ es un proceso de Itô, el cual está dado por

$$dZ(t) = X(t)dt + Y(t)dW(t). \quad (2.99)$$

Aquí $t_0 > 0$, $W(t)$ es un proceso de Wiener, donde Y_1 y Y_2 representan la primera y segunda columnas de la matriz $Y = [Y_1, Y_2]$ respectivamente. $X(t) = [X_1(t), X_2(t)]$, $Y_1(t), Y_2(t)$ son funciones aleatorias que satisfacen sus condiciones de existencia, y Z_1, Z_2 son los componentes del vector aleatorio $Z(t)$. De acuerdo con (2.94)

$$\begin{aligned} E[X_k(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) + (\psi\nu\psi_1^T)_k|Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}\psi_1, \\ E[X_l(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) + (\psi\nu\psi_1^T)_l|Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}\psi_1, \end{aligned} \quad (2.100)$$

juegan el rol de los renglones Y_1, Y_2 de la matriz; en este caso se llega a:

$$d(\widehat{X}_k\widehat{X}_l) = \widehat{X}_k d\widehat{X}_l + \widehat{X}_l d\widehat{X}_k \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} & E[X_k(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) + (\psi\nu\psi_1^T)_k|Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}\psi_1\nu\psi_1^T(\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1} \\ & \times E[X_l(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) + (\psi_1\nu\psi^T)_l|Y_{t_0}^t]dt. \end{aligned}$$

Sustituyendo aquí las expresiones para $d\widehat{X}_k$ y $d\widehat{X}_l$ de la ecuación (2.93), se tiene

$$\begin{aligned} d(\widehat{X}_k\widehat{X}_l) &= \{\widehat{X}_k\widehat{\varphi}_l + \widehat{X}_l\widehat{\varphi}_k \\ &+ E[X_k(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) + (\psi\nu\psi_1^T)_k|Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1} E[X_l(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) + (\psi\nu\psi_1^T)_l^T|Y_{t_0}^t]\}dt \\ &+ E[(\widehat{X}_kX_l + \widehat{X}_lX_k)(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) + \widehat{X}_k(\psi\nu\psi_1^T)_l \\ &+ \widehat{X}_l(\psi\nu\psi_1^T)_k|Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}(dY - \widehat{\varphi}_1 dt). \end{aligned} \quad (2.102)$$

Substrayendo esta fórmula de (2.96) y adicionando el término

$$E[(\hat{X}_k \hat{X}_l)(\varphi_1^T - \hat{\varphi}_1^T)|Y_{t_0}^t] = \hat{X}_k \hat{X}_l(\hat{\varphi}_1^T - \hat{\varphi}_1^T) = 0, \quad (2.103)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} dR_{kl} = & \{E[(X_k - \hat{X}_k)\varphi_l + (X_l - \hat{X}_l)\varphi_k + (\psi\nu\psi_1^T)_{kl}|Y_{t_0}^t] \\ & - E[X_k(\varphi_1^T - \hat{\varphi}_1^T) + (\psi\nu\psi_1^T)_k|Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}E[X_l(\varphi_1 - \hat{\varphi}_1) \\ & + (\psi\nu\psi_1^T)_l^T|Y_{t_0}^t]\}dt + E[(X_k - \hat{X}_k)(X_l - \hat{X}_l)(\varphi_1^T - \hat{\varphi}_1^T) \\ & + (X_k - \hat{X}_k)(\psi\nu\psi_1^T)_l + (X_l - \hat{X}_l)(\psi\nu\psi_1^T)_k|Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1} \\ & \times (dY - \hat{\varphi}_1 dt)(k, l = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.104)$$

Haciendo algunas transformaciones en la fórmula anterior(2.104), obtenemos la fórmula de la matriz diferencial estocástica para la matriz de covarianza como la solución de

$$\begin{aligned} dR = & \{E[(X - \hat{X})\varphi(Y, X, t)^T + \varphi(Y, X, t)(X^T - \hat{X}^T) - E\{X\{(\varphi_1(Y, X, t)^T - \hat{\varphi}_1^T)\} + \\ & (\psi\nu\psi_1^T)(Y, X, t)|Y_{t_0}^t\}(\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}(Y, t)E\{(\varphi_1(Y, X, t) - \hat{\varphi}_1)\}X^T \\ & + (\psi_1\nu\psi_1^T)(Y, X, t)|Y_{t_0}^t]\}dt \\ & + \sum_{\rho=1}^r E\{[(X - \hat{X})(X^T - \hat{X}^T)a_\rho(Y, X, t) + (X - \hat{X})b_\rho(Y, X, t)^T \\ & + (X - \hat{X})^T\}|Y_{t_0}^t\}(dY_\rho - \hat{\varphi}_{1\rho} dt). \end{aligned} \quad (2.105)$$

Hasta aquí se ha establecido el planteamiento del problema y su solución para el caso de la obtención de los algoritmos de filtrado para un proceso representado por ecuaciones de estado lineales, y de observaciones lineales, con la presencia de disturbios, los cuales se comportan como ruidos blancos Gaussianos, lo cual fue desarrollado por Kalman-Bucy. En esta tesis se presenta el planteamiento del problema del filtro y control para ecuaciones de estado íntegro-diferenciales (del tipo Itô-Volterra) y ecuaciones polinomiales (de grados

3 y 4) con observaciones lineales y con la presencia de ruidos blancos Gaussianos y la obtención de los algoritmos del filtro, regulador y controlador correspondientes.

2.4. Teoría de Control Óptimo

2.4.1. Principio del Máximo de Pontryagin

Planteamiento del Problema

Sea \mathcal{U} un conjunto de funciones continuas parte por parte $u(t)$, con valores en U donde U es un subconjunto cerrado de \mathbb{R}^m ; cada función $u(t)$ es definida en algún intervalo $[t_0, t_1]$; $f(t, x, u)$ es una función vectorial, la cual es continua y tiene primeras derivadas parciales continuas con respecto a las coordenadas de x ; ϕ es una función vectorial de clase C^1 . Una función $u(t)$ en \mathcal{U} será llamada control. Para un control $u(t)$ definido en $[t_0, t_1]$, la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \quad (2.106)$$

en el intervalo $[t_0, t_1]$ con condición inicial $x(t_0) = x_0$ será llamada la trayectoria correspondiente al control $u(t)$ y la condición inicial x_0 . El valor de $x(t)$ en el tiempo t es llamado el estado del sistema en el tiempo t . La ecuación (2.106) es llamada ecuación de movimiento del sistema. Los términos involucrados más frecuentemente son controles y trayectorias. La función vectorial $\phi(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1))$ será denominada el índice de efectividad del sistema. La efectividad, depende del estado inicial $x_0 = x(t_0)$ y el control $u(t)$ y está dada por

$$J(x_0, u) = \phi_1(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)). \quad (2.107)$$

Los siguientes $k - 1$ componentes de ϕ se definen a través de las ecuaciones

$$\phi_j(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) = 0, j = 2, \dots, k \quad (2.108)$$

y las condiciones para las trayectorias del sistema. Un par (x_0, u) , se considera realizable, si la solución $x(t)$ de (2.106) en $[t_0, t_1]$ con la condición inicial $x(t_0) = x_0$ y las condiciones (2.108) son satisfechas por $x(t)$. Denotemos por \mathcal{F} la clase de pares realizables (x_0, u) . El problema de control óptimo consiste en encontrar en la clase \mathcal{F} un elemento (x_0, u) tal, que el índice de efectividad sea minimizado. Algunos ejemplos pueden ser vistos en [3]. Un par (x_0, u) de \mathcal{F} que alcanza el mínimo, se denomina condición inicial óptima y control óptimo. Algunos métodos computacionales han sido ideados y ampliamente utilizados para la solución de este problema de optimización; algunos de ellos son presentados en [49], [31], [61]. La teoría y el uso de estos métodos numéricos se puede apreciar en [38], [36], [68].

Solución

La expresión $H(t, x, u) = P(t)^T f(t, x, u)$ es generalmente llamada el Hamiltoniano, en analogía con una expresión correspondiente de mecánica clásica, ver Goldstein [42]. Las condiciones necesarias para la optimalidad del problema de control óptimo están contenidas en el Principio de Pontryagin. Las condiciones del Principio de Pontryagin reducen el cálculo del control óptimo a la solución de dos problemas de frontera para un conjunto de ecuaciones diferenciales con una condición de minimización.

Teorema [39] (Principio de Máximo de Pontryagin)

Las condiciones necesarias, tales que $(x_0^*, u^*(t))$ sea una condición inicial y un control óptimo para el problema de control óptimo, es la existencia de un vector no cero, k -dimensional δ con $\delta \leq 0$ y una función vectorial n -dimensional $P(t)$, tal que para $t \in [t_0, t_1]$:

$$\dot{P}(t)^T = -P(t)^T f_x(t, x^*(t), u^*(t)), \quad (2.109)$$

$$t \in [t_0, t_1], u \in U.$$

Esta ecuación es llamada ecuación de co-estado (impulso):

$$P(t)^T [f(t, x^*(t), u) - f(t, x^*(t), u^*(t))] \leq 0. \quad (2.110)$$

Esta ecuación es llamada condición de control óptimo; y las siguientes son llamadas condiciones de transversalidad [69]:

$$P(t_1)^T = \delta^T \phi_{x_1}(t_0, t_1, x^*(t_0), x^*(t_1)); \quad (2.111)$$

$$P(t_0)^T = \delta^T \phi_{x_0}(t_0, t_1, x^*(t_0), x^*(t_1)); \quad (2.112)$$

$$P(t_1)^T f(t_1, x^*(t_1), u^*(t_1)) = -\delta^T \phi_{t_1}(t_0, t_1, x^*(t_0), x^*(t_1)); \quad (2.113)$$

$$P(t_0)^T f(t_0, x^*(t_0), u^*(t_0)) = \delta^T \phi_{t_0}(t_0, t_1, x^*(t_0), x^*(t_1)); \quad (2.114)$$

donde ϕ_{x_1} significa la derivada parcial de ϕ con respecto a x_1 y así respectivamente $\phi_{t_1}, \phi_{x_1}, \phi_{t_0}$. Si $f(t, x, u)$ tiene una derivada parcial continua $f_t(t, x, u)$, entonces la condición

$$P(t)^T f_x(t, x^*(t), u^*(t)) = \delta^T \phi_{t_0}(t_0, t_1, x^*(t_0), x^*(t_1)) + \int_{t_0}^t P(s)^T f_t(s, x^*(s), u^*(s)) ds \quad (2.115)$$

se cumple para cada $t \in [t_0, t_1]$, y esta expresión es la condición de constancia del Hamiltoniano en los puntos óptimos (x^*, u^*, t) . La condición (2.110) puede ser expresada como

$$\max_{u \in U} H(t, x^*(t), u) = H(t, x^*(t), u^*(t))$$

y es llamado Principio del Máximo de Pontryagin. Un control se denomina extremo si las condiciones del Principio de Pontryagin son satisfechas y la trayectoria correspondiente satisface

$$\dot{o}_j(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) = 0; j = 2, \dots, k. \quad (2.116)$$

Las condiciones (2.111)-(2.114) son generalizaciones de condiciones encontradas en problemas de cálculo de variaciones y de control óptimo [30] ,[70]. Dadas las condiciones del Principio de Pontryagin, las condiciones necesarias de optimalidad pueden ser un control extremo; dado que las condiciones no necesitan ser suficientes, para la optimalidad, puede darse un control extremo que no sea óptimo.

2.4.2. Programación Dinámica

El método de Programación Dinámica fue desarrollado por R. E. Bellman a finales de los 1950 s [28]. En este método es considerada una familia de puntos iniciales fijos en los problemas de control. El valor mínimo de la eficacia del criterio es considerado como una función valor de este punto inicial. Si la función valor es diferenciable, esta satisface la ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden llamada ecuación diferencial de programación dinámica. Una condición suficiente para la optimalidad puede ser expresada en términos de la solución continuamente diferenciable de la ecuación diferencial de programación dinámica para el problema del regulador lineal.

Planteamiento del problema

Consideremos un problema de optimización dado por (2.106), (2.107), con las condiciones iniciales establecidas en 2.4.1. Dado el sistema

$$\dot{x} = f(x, u, t),$$

con condición inicial $x(t_0)$, conocida y la ecuación (2.107). Nuestro problema consiste en encontrar el control óptimo $u^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, el cual minimice

$$V(x(t_0), u(\cdot), t_0) = \int_{t_0}^T l(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + m(x(T)), \quad (2.117)$$

siendo definido externamente el número de veces que debe de ser diferenciable $f(x, u, t)$, $l(x(\tau))$, $u(\tau)$ y $m(x(T))$. $f(x, u, t)$ puede ser arbitraria, pero $l(x(\tau))$ y $u(\tau)$ deben ser no negativas y pueden suponerse como cantidades físicas que serán minimizadas. El índice de efectividad o criterio depende del estado inicial $x(t_0)$, y del tiempo t_0 , y del control $u(t)$ para toda $t \in [t_0, T]$, y se define como

$$V^*(x(t), t) = \min_{u[t, T]} V(x(t), u(\cdot), t),$$

donde $V^*(x(t), t)$ se denomina la función de Bellman. Si la salida del sistema en el tiempo t es $x(t)$, el valor mínimo de efectividad en (2.117) es $V^*(x(t), t)$. Se puede notar que $V^*(x(t), t)$ es independiente de $u(t)$, por que el conocimiento del estado inicial y el tiempo inicial, determina el control particular por el requerimiento de que el control minimice $V(x(t), u(\cdot), t)$.

El método de Programación Dinámica pone un interés especial a la función valor, razón por la cual se establecen las siguientes propiedades:

- La función valor evaluada a lo largo de alguna trayectoria correspondiente a un control realizable para las condiciones iniciales de su estado, es una función no decreciente en el tiempo.
- La función valor evaluada a lo largo de una trayectoria óptima es constante.

Solución

La Ecuación Diferencial de Programación Dinámica

Teorema [59] Sea (s, y) algún punto interior del conjunto extendido Q_0 , en el cual la función $V(s, y)$ es diferenciable. Entonces $V(s, y)$ satisface la desigualdad diferencial

$$V_s + V_y f(s, y, v) \geq 0,$$

para toda $v \in U$. Si u^* es el control óptimo en $F_{s,y}$, entonces la ecuación diferencial

$$\frac{dV^*}{dt} = \min_{v \in U} V_s + V_y f(s, y, v) = 0 \quad (2.118)$$

se satisface. El mínimo en (2.118) es alcanzado por el límite derecho de $u^*(s)^+$ tanto del control óptimo como de s . La ecuación diferencial parcial (2.118) es llamada ecuación diferencial parcial de programación dinámica. Para problemas donde el control óptimo existe, el teorema anterior establece que la función valor debe de satisfacer la ecuación diferencial parcial de programación dinámica en cada punto interior de el conjunto alcanzable en el cual esta es diferenciable.

2.4.3. Regulador Lineal Óptimo

Control en Lazo Abierto

Planteamiento del Problema

Dado el sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.119)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y entrada de control $u \in \mathbb{R}^m$ y un criterio cuadrático asociado

$$J(t_0) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T R u dt. \quad (2.120)$$

La matriz de peso, simétrica, de control R es elegida de acuerdo con los objetivos de control. Pero R se supone positiva definida; esto es, R tiene valores propios positivos, tales que $u^T R u > 0$ para todo $u(t) \neq 0$. En este caso, J es acotado por debajo por el cero, de tal manera que se obtiene una sensible minimización de los resultados del problema. Dado que hay cuadrados de las entradas de control en (2.120), existe una tendencia a

minimizar la energía general de control, De esta forma, se determinará el control $u(t)$ que minimice $J(t_0)$ y conduzca el sistema de un estado inicial $x(t_0) = x_0$ a un valor de referencia final de r_T especificado por un valor fijo del tiempo final T . Es decir, se requiere que

$$x(T) = r_T, \quad (2.121)$$

para un valor dado de T . Dado que el sistema (2.119) es lineal y el criterio (2.120) es cuadrático, este problema es llamado problema lineal-cuadrático del estado final fijo.

Solución

La solución a nuestro problema lineal-cuadrático de control es obtenida en la siguiente forma. El Hamiltoniano es

$$H(t) = \frac{1}{2}u^T R u + \lambda^T (A x + B u), \quad (2.122)$$

donde $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$ es un multiplicador no determinado. Las ecuaciones de estado y co-estado son

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} = A x + B u, x(t_0) = x_0 \\ -\dot{\lambda} &= \frac{\partial H}{\partial x} = A^T \lambda, \lambda(T) = \lambda, \end{aligned} \quad (2.123) \quad \textcircled{R}$$

y la condición estacionaria

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = R u + B^T \lambda. \quad (2.124)$$

Resolviendo la ecuación anterior, es obtenido el control óptimo en términos del co-estado.

$$u(t) = -R^{-1} B^T \lambda(t), \quad (2.125)$$

y sustituyendo (2.125) en (2.123) se obtiene

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T\lambda. \quad (2.126)$$

Resolviendo el sistema del Hamiltoniano (2.123) y ((2.126), y tomando en cuenta las condiciones de frontera, es posible obtener el control óptimo. Integrando la segunda ecuación de (2.123) se obtiene

$$\lambda(t) = e^{A^T(T-t)}\lambda(T), \quad (2.127)$$

donde $\lambda(T)$ es aún desconocida. Sustituyendo en (2.126) se obtiene

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T e^{A^T(T-t)}\lambda(T), \quad (2.128)$$

cuya solución es

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 - \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}BR^{-1}B^T e^{A^T(T-\tau)}\lambda(T)d\tau. \quad (2.129)$$

Para encontrar $\lambda(T)$, y evaluar (2.129) se obtiene

$$x(T) = e^{A(T-t_0)}x_0 - G(t_0, T)\lambda(T), \quad (2.130)$$

donde el Gramiano $G(t_0, t)$ es la matriz simétrica

$$G(t_0, t) \equiv \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}BR^{-1}B^T e^{A^T(T-\tau)}d\tau. \quad (2.131)$$

De acuerdo con la condición (2.121), es posible resolver y obtener

$$\lambda(T) = -G^{-1}(t_0, T)[r_T - e^{A(T-t_0)}x_0]. \quad (2.132)$$

Entonces $\lambda(T)$ es expresada en términos del estado inicial, teniendo como requisito el estado final. Finalmente, el control óptimo es encontrado, usando este resultado y sustituyendo (2.127) en (2.125) para obtener

$$u(t) = -R^{-1}B^T e^{A^T(T-t)}G^{-1}(t_0, T)[r_T - e^{A(T-t_0)}x_0]. \quad (2.133)$$

Esta es la mínima energía de control que maneja el estado para un x_0 dado, a un valor requerido de r_T en un tiempo final especificado T . Una manera más eficiente de obtener el Gramiano es usando la regla de Leibnitz. Para ello, consideraremos la solución de la ecuación

$$\dot{P} = AP + PA^T + BR^{-1}B^T, \quad (2.134)$$

la cual está dada por

$$P(t) = e^{A(t-t_0)}P(t_0)e^{A^T(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{A(T-\tau)}BR^{-1}B^Te^{A^T(T-\tau)}d\tau. \quad (2.135)$$

De esta forma, si (2.135) es resuelta usando $P(t_0) = 0$, entonces $G(t_0, T) = P(T)$. La ecuación (2.134) es llamada ecuación de Lyapunov, y es lineal en P . La trayectoria del estado óptimo puede ser determinada sustituyendo (2.132) en (2.129). Esto podría ser utilizado para conocer también el valor óptimo de la función de costo cuadrática, utilizando el control propuesto. Definiendo la diferencia entre los estados final e inicial como

$$d(t_0, T) = r_T - e^{A(T-t_0)}x_0, \quad (2.136)$$

se puede sustituir (2.119) en (2.120) y escribir el criterio cuadrático óptimo como

$$J(t_0) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T d^T(t_0, T)G^{-1}e^{A(T-t)}BR^{-1}B^Te^{A^T(T-t)}G^{-1}d(t_0, T)dt. \quad (2.137)$$

Usando la definición del Gramiano resulta que la función de costo óptimo está dada por

$$\begin{aligned} J(t_0) &= \frac{1}{2}d^T(t_0, T)G^{-1}(t_0, T)d(t_0, T) \\ &= \frac{1}{2}d^T(t_0, T)P^{-1}(T)d(t_0, T). \end{aligned} \quad (2.138)$$

En la siguiente tabla se presenta un resumen de las características principales del regulador lineal cuadrático de lazo abierto.

Modelo del sistema	$\dot{x} = Ax + Bu, t \geq t_0, x(t_0) = x_0$ dado
Condición final del estado	$x(T) = r_T, r_T$ dado.
Función de costo	$J(t_0) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T R u dt, R > 0$
Control de lazo abierto	
Ecuación de Lyapunov	$\dot{P} = AP + PA^T + BR^{-1}B^T, P(t_0) = 0$
Control de lazo abierto	$u(t) = R^{-1}B^T e^{A^T(T-t)} P^{-1}(T) d(t_0, T)$ donde $d(t_0, T) = r_T - e^{A(T-t_0)} x_0$
Costo óptimo	$J(t_0) = \frac{1}{2} d^T(t_0, T) P^{-1}(T) d(t_0, T)$

Regulador de Lazo Cerrado

Planteamiento del problema

Considere el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.139)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y entrada de control $u \in \mathbb{R}^m$. En vez de demandar un estado final fijo, solo se requiere que el estado final $x(T)$ no sea cero en un tiempo específico T . Así, el estado final es libre y el interés es encontrar el control que minimice la función cuadrática

$$J(t_0) = \frac{1}{2} x^T(T) S(T) x(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (x^T Q x + u^T R u) dt. \quad (2.140)$$

El peso del control R , el peso del estado Q , y el peso del estado final $S(T)$, son matrices simétricas elegidas de acuerdo a los objetivos de control. Se supone que Q y $S(t)$ tienen valores propios no negativos, tales que $x^T Q x$ y $x^T(T) S(T) x(T)$ son no negativos para toda $x(t)$. De la misma forma, R también es positiva definida, es decir R tiene valores propios positivos, tales que $u^T R u > 0$ para toda $U(t) \neq 0$. En este caso J es siempre acotado por

debajo por el cero, de lo cual resulta un problema sensible de minimización. Dados los cuadrados de los estados y las entradas de control en (2.140), se pretende minimizar una energía generalizada (se puede considerar el caso en el cual los componentes del estado son velocidades o corrientes y voltajes). Este problema es llamado problema del regulador lineal cuadrático libre del estado final.

Solución

La solución al problema de control óptimo libre del estado final se obtiene en la siguiente forma. El Hamiltoniano está dado por

$$H(t) = \frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u) + \lambda^T (A x + B u), \quad (2.141)$$

donde $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$ es un multiplicador no determinado. Las ecuaciones de estado y co-estado son

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} = A x + B u \\ -\dot{\lambda} &= \frac{\partial H}{\partial x} = Q x + A^T \lambda, \end{aligned} \quad (2.142)$$

y la condición estacionaria

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = R u + B^T \lambda. \quad (2.143)$$

Resolviendo la ecuación anterior, es obtenido el control óptimo

$$u(t) = -R^{-1} B^T \lambda(t). \quad (2.144)$$

Sustituyendo (2.144) en la primera ecuación de (2.143), se obtiene

$$\dot{x} = A x - B R^{-1} B^T \lambda, \quad (2.145)$$

la cual puede ser combinada con la ecuación de co-estado en el sistema homogéneo Hamiltoniano

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

La matriz de coeficientes es llamada matriz Hamiltoniana. La condición inicial es el valor conocido x_0 de $x(t_0)$. El tiempo final es fijo. Dado que el estado final $x(T)$ es libre, $dx(T)$ no es igual a cero, entonces la condición final está dada por

$$\lambda(T) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{T= S(T)x(T)}. \quad (2.146)$$

Para encontrar el control óptimo, se resolverá este problema de frontera. El método de solución utilizado supone que $x(t)$ y $\lambda(t)$ satisfacen la relación lineal (2.146) para todo tiempo en el intervalo $[t_0, T]$ y son tales que

$$\lambda(t) = S(t)x(t) \quad (2.147)$$

para alguna función matricial $S(t)$ desconocida. Para obtener la función auxiliar $S(t)$, se deriva la función de co-estado para obtener

$$\dot{\lambda} = \dot{S}x + S\dot{x} = \dot{S}x + S(Ax - BR^{-1}B^T Sx) \quad (2.148) \quad \text{®}$$

donde se ha utilizado la ecuación de estado. Por otro lado, con la ecuación de co-estado se verifica que, para todo t :

$$-\dot{S}x = (A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q)x. \quad (2.149)$$

En base a la ecuación anterior, para alguna condición inicial x_0 , y, por lo tanto, para todas las trayectorias del estado, se podría tener

$$-\dot{S}x = A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q, t \leq T. \quad (2.150)$$

Esta es la ecuación matricial de Riccati, la cual es bilineal en S . En términos de la solución de Riccati $S(t)$, la ley de control óptima está dada por

$$u(t) = -R^{-1}B^T S(t)x(t). \quad (2.151)$$

Definiendo la ganancia de Kalman por

$$K(t) = R^{-1}B^T S(t), \quad (2.152)$$

se puede escribir la ley de control de la retroalimentación del estado como

$$u(t) = -K(t)x(t). \quad (2.153)$$

Al determinar el costo óptimo, usando este controlador, es posible notar que

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} (x^T S x) dt = \frac{1}{2} x^T(T) S(T) x(T) - \frac{1}{2} x^T(t_0) S(t_0) x_0. \quad (2.154)$$

Usando (2.140) y (2.154), se obtiene

$$J(t_0) = \frac{1}{2} x_0^T S(t_0) x_0 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (x^T Q x + u^T R u) \quad (2.155)$$

La función de costo, tomando en cuenta la ecuación de estado, puede escribirse como

$$J(t_0) = \frac{1}{2} x_0^T S(t_0) x_0 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [(x^T (\dot{S} + Q + A^T S + S A) x + x^T S B u + u^T B^T S x + u^T R u)] dt. \quad (2.156)$$

Si $S(t)$ satisface la ecuación de Riccati, entonces

$$J(t_0) = \frac{1}{2} x_0^T S(t_0) x_0 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \| R^{-1} B^T S x + u \|^2_R dt. \quad (2.157)$$

Es importante notar que la ecuación de Riccati permite que el integrando se puede escribir como un cuadrado perfecto. Seleccionando el control dado por la fórmula de (2.144), entonces $J(t_0)$ es minimizado, y su valor óptimo está dado por

$$J(t_0) = \frac{1}{2} x_0^T S(t_0) x_0.$$

La siguiente tabla presenta un resumen de las características principales del regulador lineal cuadrático de lazo cerrado.

Modelo del sistema	$\dot{x} = Ax + Bu, t \geq t_0, x(t_0) = x_0$ dado
Función de costo	$J(t_0) = \frac{1}{2} x^T(T) S(T) x(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (x^T Q x + u^T R u) dt.$ con $S(T) \geq 0, Q \geq 0, R > 0$
Ecuación de de Riccati	$-\dot{S} = A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q,$ $t \leq T, S(T)$ dado
Ganancia de Kalman	$K = R^{-1}B^T S$
Retroalimentación variante en el tiempo:	$u = -K(t)x$
Costo óptimo	$J(t_0) = \frac{1}{2} x_0^T S(t_0) x_0.$

2.4.4. Controlador Lineal Óptimo

Planteamiento del problema

Dado un proceso que no es posible observar, representado por las ecuaciones diferenciales lineales de estado y de observaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(t)x(t) + G(t)u(t) + Kw(t) \\ y(t) &= H^T(t)x(t) + Lv(t), \end{aligned} \quad (2.158)$$

donde F, G, H son matrices $n \times n, n \times m, y n \times p$ respectivamente. Los procesos $w(\cdot)$ y $v(\cdot)$ son ruidos blancos Gaussianos. El problema consiste en encontrar el control óptimo $u^*(t)$ que minimice la función cuadrática de costo dada por

$$J(t_0) = E\left\{\frac{1}{2}z_0^T \Phi z_0 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (x^T Q_1 x + u^T R u) dt\right\} \quad (2.159)$$

a lo largo de la trayectoria $x^*(t)$, generada al sustituir $u^*(t)$ en la ecuación de estado (2.158). Φ, Q_1 son matrices no negativas definidas y R es una matriz positiva definida.

Principio de Separación

El principio de separación [56], el cual es válido en sistemas de ecuaciones diferenciales lineales estocásticas, establece lo siguiente: puesto que no hay observaciones directas, es posible reemplazar la ecuación del estado del sistema no observable $x(t)$ por la ecuación de su estimado óptimo $m(t)$

$$\frac{dm}{dt} = F(t)m(t) + G(t)u(t) + P(t)H(t)L^{-1}(t)[y(t) - H^T(t)m(t)], \quad (2.160)$$

con la condición inicial $m(t_0) = m_0$, donde $P(t)H(t)L^{-1}(t)$ denota la ganancia de Kalman.

$P(t) = E[x(t) - m(t)][x(t) - m(t)]^T$. Además, $P(t)$ es la solución de

$$\dot{P} = PF^T + FP - PHL^{-1}H^T P + KK^T, P(t_0) = P_0. \quad (2.161)$$

Entonces, es posible verificar que el problema de control óptimo (2.158) y la función de costo (2.159) son equivalentes al problema de control óptimo para el estimado (2.160) y la función de costo representada por

$$J = E\left\{\frac{1}{2}[m(T) - z_0]^T \Phi [m(T) - z_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(s)R(s)u(s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T m^T(s)Q_1(s)m(s)ds\right\} \quad (2.162)$$

$$+\frac{1}{2} \int_{t_0}^T \text{tr}[P(s)Q_1(s)]ds + \text{tr}[P(T)\Phi],$$

donde $\text{tr}[A]$ denota la traza de la matriz A .

Dado que la última parte de J es independiente del control $u(t)$ y del estado $x(t)$, la función de costo reducida a ser minimizada M toma la forma

$$M = E\left\{\frac{1}{2} [m(T) - z_0]^T \Phi [m(T) - z_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(s)R(s)u(s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T m^T(s)Q_1(s)m(s)ds\right\}. \quad (2.163)$$

En conclusión, el principio de separación para sistemas lineales establece que la solución del problema original de control óptimo especificada para (2.158),(2.159) puede encontrarse resolviendo el problema de control óptimo dado por (2.160),(2.163). Además, el valor mínimo del criterio J debe ser determinado usando (2.162).

Solución

Tomando como base la solución al problema de control óptimo del estado de un sistema lineal observable, los siguientes resultados son válidos para el problema de control óptimo (2.160), (2.163), donde el estado del sistema (el estimado $m(t)$) es completamente disponible y observable. La ley de control óptimo está dada por

$$u^* = R^{-1}(t)G^T(t)Q(t)m(t), \quad (2.164)$$

donde $Q(t)$ es la solución de la siguiente ecuación dual de la varianza

$$\dot{Q} = -F^T Q - QF - QGR^{-1}G^T Q + Q_1, t \leq T. \quad (2.165)$$

con la condición terminal $Q(T) = \Phi$. Sustituyendo la ley de control óptimo (2.164) en la ecuación (2.160) para el estado reconstruido del sistema $m(t)$, se obtiene la ecuación para

el estimado del estado óptimamente controlado:

$$\frac{dm}{dt} = F(t)m(t)G(t)R^{-1}(t)G^T(t)Q(t)m(t) + P(t)H(t)R^{-1}(t)[y(t) - H^T(t)m(t)], \quad (2.166)$$

con la condición inicial $m(t_0) = m_0$. En esta forma queda completa la solución al controlador para sistemas lineales, la cual está dada por la ecuación del estado óptimamente controlado (2.166), la ecuación de la matriz de ganancia (2.165), la ley de control óptimo (2.164), y la ecuación para la varianza (2.161).

2.5. Teoría de Vibrosoluciones

Antes de enunciar la teoría referente a vibrosoluciones es necesaria la presentación de algunos conceptos importantes.

Definición Una función f definida sobre algún intervalo $[a, b]$, se dice de variación acotada, si existe una constante $C > 0$ tal que:

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq C, \quad (2.167)$$

para toda partición $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ del intervalo $[a, b]$.

Definición Sea f una función de variación acotada. Entonces la *variación total* de f sobre $[a, b]$ está dada por

$$V_a^b(f) = \sup \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \quad (2.168)$$

donde la mínima cota superior es tomada sobre todas las posibles particiones (finitas) del intervalo $[a, b]$.

Condición de Lipschitz

La condición de Lipschitz puede enunciarse en la siguiente forma: $f(t, x)$ satisface la

desigualdad

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \leq L \| x - y \| \quad (2.169)$$

para toda (t, x) y (t, y) en alguna vecindad de (t_0, x_0) .

Planteamiento del Problema

Sea considerada la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) + b(x, u, t)\dot{u}(t), x(t_0) = x_0, \quad (2.170)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $f(x, u, t)$, $b(x, u, t)$ son funciones absolutamente continuas, y $u(t)$ es una función escalar de variación acotada. Dada la estructura de la ecuación anterior, en la cual se presenta la multiplicación de $\dot{u}(t)$ por una función discontinua en t , $b(x, u, t)$, (2.170) no puede tener una solución convencional. Para la obtención de la solución es necesaria la presentación de algunos conceptos importantes.

Definición La función continua por la izquierda $x(t)$ es una vibrosolución de (2.170) si la convergencia *-débil

$$* - \lim u^k(t) = u(t), k \rightarrow \infty, \quad (2.171)$$

de una sucesión arbitraria de funciones continuas $u^k(t)$, $k = 1, 2, \dots$ en el espacio de las funciones de variación acotada implica la convergencia análoga

$$* - \lim x^k(t) = x(t), k \rightarrow \infty, \quad (2.172)$$

de las soluciones correspondientes $x^k(t)$ de la ecuación

$$\dot{x}^k(t) = f(x^k, u^k, t) + b(x^k, u^k, t)\dot{u}^k(t), x^k(t_0) = x_0, \quad (2.173)$$

independiente de la elección de una sucesión aproximada $\{u^k(t)\}$.

Teorema de Helley [67] La convergencia *-débil en el espacio de funciones de variación

acotada

$$* - \lim u^k(t) = u(t), k \rightarrow \infty, t \geq t_0, \quad (2.174)$$

toma lugar si y solo si las siguientes condiciones se cumplen

- $\lim u^k(t_0) = u(t_0), k \rightarrow \infty, t \geq t_0,$
- $\lim u^k(t) = u(t), k \rightarrow \infty, t \geq t_0,$ en todos los puntos de continuidad de la función $u(t)$, y
- $\sup_k \text{Var}_{t_0}^t u^k(t) < \infty$ para toda $t \geq t_0.$

Solución

Las condiciones de existencia y unicidad para una vibrosolución están dadas por las siguientes proposiciones.

Proposición 1 Si las funciones $f(x, u, t), b(x, u, t), \partial b(x, u, t)/\partial x, \partial b(x, u, t)/\partial t$, son continuas en x, u, t y satisfacen la condición de Lipschitz en x , entonces existe una única vibrosolución de (2.170).

De esta manera, una vibrosolución de (2.170) coincide con una solución convencional de la ecuación (2.170) si y solo si $u(t)$ es una función absolutamente continua. Generalmente una vibrosolución $x(t)$ es definida como un límite de las soluciones convencionales bajo una aproximación especial de una función $u(t)$ por funciones absolutamente continuas, y es discontinua como una función de variación acotada, en los puntos de discontinuidad de la función $u(t)$. Dado que (2.170) no determina los saltos de la vibrosolución en los puntos de discontinuidad de $u(t)$ en una forma explícita; la siguiente proposición proporciona una manera de obtener los saltos de la vibrosolución directamente.

Proposición 2 Sean las funciones $f(x, u, t), b(x, u, t), \partial b(x, u, t)/\partial x, \partial b(x, u, t)/\partial t$, tales

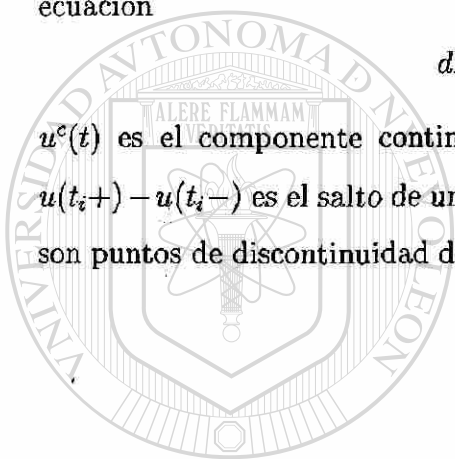
que satisfacen las condiciones de la proposición 1. Entonces una vibrosolución de (2.170) es también una solución de la ecuación con una medida

$$dx(t) = f(x, u, t)dt + b(x, u, t)du^c(t) + \sum_{t_i} G(x(t_i-), u(t_i-), \Delta u(t_i), t_i)d\chi(t - t_i), x(t_0) = x_0, \quad (2.175)$$

donde $G(z, v, u, s) = K(z, v, v + u, s) - z$; una función $K(z, v, u, s)$ es una solución de la ecuación

$$dK/du = b(K, u, s), K(v) = z,$$

$u^c(t)$ es el componente continuo de una función de variación acotada $u(t)$, $\Delta u(t_i) = u(t_i+) - u(t_i-)$ es el salto de una función $u(t)$ con discontinuidades en $t = t_i, i = 1, 2, \dots, t_i$ son puntos de discontinuidad de una función $u(t)$, y $\chi(t - t_i)$ es una función de Heaviside.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Capítulo 3

Control Óptimo en Sistemas de Itô-Volterra

3.1. Control Óptimo en Sistemas Continuos de Itô-Volterra

3.1.1. Planteamiento del Problema

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio completo de probabilidad con una familia creciente y continua por la derecha de σ -álgebras $F_t, t \geq 0$, y sea $(W_1(t), F_t, t \geq 0)$ un F_t -adaptado proceso de Wiener. Consideremos el proceso F_t -medible $x(t)$ gobernado por la ecuación de Itô-Volterra

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + a(t, s)x(s) + b(t, s)u(t, s))ds + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s). \quad (3.1)$$

Aquí $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u(t, s) \in \mathbb{R}^p$ es la variable de control, el proceso de Wiener $W_1(t)$ representa disturbios aleatorios independientes e idénticamente

distribuidos, y el vector inicial Gaussiano $x(t_0)$ es independiente de $W_1(t)$. La función de costo cuadrática a ser minimizada J es definida como sigue:

$$J = E\left[\frac{1}{2}[x(T) - x_0]^T \Psi [x(T) - x_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t, s)R(s)u(t, s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T x^T(s)Q(s)x(s)ds\right], \quad (3.2)$$

donde x_0 es un vector dado, R es una matriz simétrica definida positiva, Ψ , y Q son matrices simétricas no negativas, $T > t_0$ es un cierto momento en el tiempo, $E[f(x)]$ expresa la esperanza matemática (media) de una función f de una variable aleatoria x , y a^T denota la transpuesta de un vector (matriz) a . El problema de control óptimo consiste en encontrar $u^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, que minimice el criterio J a lo largo de la trayectoria $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, generada al sustituir $u^*(t)$ en la ecuación de estado (3.1).

3.1.2. Principio de Dualidad

Para sistemas dinámicos gobernados por ecuaciones diferenciales, la solución del problema de control óptimo puede ser obtenida usando la solución del problema de filtrado y el principio de dualidad [33, 58]. El principio de dualidad para sistemas integrales es introducido a continuación. Consideremos el sistema integral de Volterra:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a(t, s)x(s) + b(t, s)u(t, s))ds, \quad (3.3)$$

$$y(t) = \int_{t_0}^t c(t, s)x(s)ds + \int_{t_0}^t d(t, s)u(t, s)ds;$$

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t -a^T(t, s)z(s)ds + \int_{t_0}^t c^T(t, s)v(t, s)ds, \quad (3.4)$$

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^t b^T(t, s)z(s)ds + \int_{t_0}^t d^T(t, s)v(t, s)ds.$$

El principio de dualidad establece que (3.3) es controlable (observable) en t_0 , si y solo si el sistema (3.4) es observable (controlable) en t_0 .

La demostración del principio de dualidad para sistemas integrales [23] es basada en el hecho de que existe la matriz de transición $\Phi(t, t_0)$; $t, t_0 \in (-\infty, \infty)$, tal que

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)b(t, \tau)u(t, \tau)d\tau.$$

3.1.3. Solución al Problema Dual de Filtrado

La solución al problema de control óptimo para sistemas integrales estocásticos es basada en la aplicación del principio de dualidad a la solución del problema de filtrado óptimo obtenido en [26], [27]. De este modo, consideremos el problema de filtrado, dual al problema de control dado por (3.1),(3.2), para la ecuación de estado

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0^T(t, s) - a^T(t, s)z(s))ds + \int_{t_0}^t Q^{1/2}(s)dW_3(s) \quad (3.5)$$

y la ecuación de observación

$$y(t) = \int_{t_0}^t (b^T(t, s)x(s))ds + \int_{t_0}^t R^{1/2}(s)dW_4(s), \quad (3.6)$$

donde $W_3(s)$ y $W_4(s)$ son procesos de Wiener independientes uno del otro y del vector inicial Gaussiano $z(t_0)$. El problema de filtrado es encontrar el mejor estimado del proceso de Itô-Volterra $x(t)$ al tiempo t , basado en el proceso de observación $Y(t) = \{y(s), t_0 \leq s \leq t\}$, que está dado por la esperanza matemática $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$. Denotemos la función de correlación del mejor estimado como $P(t) = E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)$.

Como fue demostrado en [26], [27] y en artículos previos [51, 74], es imposible obtener un sistema cerrado de ecuaciones para las variables $m(t)$ y $P(t)$, dada la naturaleza de las ecuaciones de Volterra (3.5) y (3.6). Asignar un sistema cerrado de ecuaciones requiere

la introducción adicional de una función de correlación cruzada $f(t, s)$, caracterizando la desviación del mejor estimado $m(t)$ para el estado real $x(t)$:

$$f(t, s) = E\{(z_s^t - m_s^t)(z(s) - m(s))^T \mid F_{t,s}^Y\},$$

donde

$$z_s^t = z(t_0) + \int_{t_0}^s (a_0^T(t, r) - a^T(t, r)z(r))dr + \int_{t_0}^s Q^{1/2}(r)dW_3(r),$$

$F_{t,s}^Y$ es la σ -algebra generada por el proceso estocástico y_s^t

$$y_s^t = \int_{t_0}^s b^T(t, s)z(s)ds + \int_{t_0}^s R^{1/2}(s)dW_4(s),$$

$$\text{y } m_s^t = E(z_s^t \mid F_{t,s}^Y).$$

El filtro óptimo para el vector de estado (3.5) sobre el proceso de observaciones continuas (3.6) es dado en [26] por las siguientes ecuaciones para el estimado óptimo $m(t)$, su función de correlación $P(t)$, y la función de correlación cruzada $f(t, s)$:

$$m(t) = m(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) - a^T(t, s)m(s))ds + \quad (3.7)$$

$$\int_{t_0}^t f(t, s)b(t, s)(R(s))^{-1}[dy(s) - b^T(t, s)m(s)ds],$$

$$P(t) = P(t_0) + \int_{t_0}^t [-a^T(t, s)f^T(t, s) - f(t, s)a(t, s) + Q(s)]ds - \quad (3.8)$$

$$\int_{t_0}^t f(t, s)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s)ds,$$

$$f(t, s) = P(t_0) + \int_{t_0}^s [-a^T(s, r)f^T(t, r) -$$

$$f(s, r)a(t, r) + Q(r)]dr - \int_{t_0}^s [f(t, r)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r) + (3.9)$$

$$f(s, r)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r) -$$

$$(1/2)f(t, r)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r) -$$

$$(1/2)f(s, r)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r)]dr,$$

donde $m(t_0) = E(z(t_0) | F_{t_0}^Y) = x_0$ y $P(t_0) = E((z(t_0) - m(t_0))(z(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$ son las condiciones iniciales.

Por tanto, la solución al problema de control definido por (3.1), (3.2) ahora puede ser obtenida usando la expresión para la matriz de ganancia del filtro óptimo en (3.7) y la ecuación de correlación cruzada (3.9).

3.1.4. Solución al Problema de Control Óptimo para Sistemas Continuos de Itô-Volterra

Dado que la matriz de ganancia del filtro en (3.7) es igual a

$$M_f(t, s) = f(t, s)b(t, s)(R(s))^{-1},$$

la matriz de ganancia dual en el problema de control óptimo toma su forma transpuesta.

$$M_c(t, s) = R^{-1}(s)b^T(t, s)f^T(t, s).$$

Aquí, la ley de control óptima del problema (3.1),(3.2) es dada por

$$u^*(t, s) = R^{-1}(s)b^T(t, s)f^T(t, s)x(s), \quad (3.10)$$

donde $f(t, s)$ es la solución de la ecuación integral de Riccati

$$\begin{aligned} f(t, s) = & P(t_0) + \int_{t_0}^s [-a^T(s, r)f^T(t, r) - f(s, r)a(t, r) + Q(r)]dr - \\ & \int_{t_0}^s [f(t, r)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r) + \\ & f(s, r)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r) - \\ & (1/2)f(t, r)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r) - \\ & (1/2)f(s, r)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r)]dr. \end{aligned} \quad (3.11)$$

con la condición terminal $f(T, T) = P(T) = \Psi$. Finalmente, sustituyendo la ley de control óptima (3.10) en la ecuación de estado (3.1), es obtenida la ecuación del estado óptimamente controlado

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + a(t, s)x(s) + b(t, s)R^{-1}(s)b^T(t, s)f^T(t, s)x(s))ds + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s). \quad (3.12)$$

3.2. Control Óptimo en Sistemas Discontinuos de Itô-Volterra

3.2.1. Planteamiento del problema

Sea (Ω, F, P) un espacio completo de probabilidad con una familia de σ -álgebras $F_t, t \geq 0$, y sea $(W_1(t), F_t, t \geq 0)$ un proceso de Wiener. Consideremos el proceso aleatorio F_t -medible $x(t)$ gobernado por la ecuación de Itô-Volterra

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + a(t, s)x(s))ds + \int_{t_0}^t b(t, s)u(t, s)dv(s) + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s). \quad (3.13)$$

En la cual $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u(t, s) \in \mathbb{R}^m$ es la variable de control, el proceso de Wiener $W_1(t)$ representa disturbios aleatorios, los cuales son independientes entre sí y de la condición inicial o vector Gaussiano $x(t_0)$, y además son idénticamente distribuidos. La función de costo cuadrático a minimizar J es definida como sigue

$$J = E\left[\frac{1}{2}[x(T) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(T) - x_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t, s)R(s)u(t, s)dv(s)\right] \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^T x^T(s)Q(s)x(s)ds,$$

donde x_0 es un vector dado, Ψ , R , Q son matrices simétricas, R es una matriz positiva y Ψ , Q son no negativas, $T > t_0$ es un momento en el tiempo, $E[f(x)]$ es la esperanza matemática de la función f de una variable aleatoria x , y a^T denota la transpuesta de un vector (matriz) a .

El problema de control óptimo consiste en encontrar el control $u^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, que minimice el criterio J a lo largo de la trayectoria $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, generada al sustituir $u^*(t)$ en la ecuación de estado (3.13).

3.2.2. Solución al Problema de Filtrado

La solución al problema de control discontinuo para sistemas integrales estocásticos es basada en la aplicación del principio de dualidad a la solución del problema de filtrado óptimo discontinuo obtenido en [26], [27]. Aplicando el principio de dualidad a los sistemas discontinuos, es obtenida la siguiente solución al problema discontinuo de filtrado, correspondiente a la solución dual del problema de control (3.13), (3.14), para el estado no observable:

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0^T(t, s) - a^T(t, s)z(s))ds + \int_{t_0}^t Q^{1/2}(s)dW_3(s), \quad (3.15)$$

y el proceso de observaciones discontinuas

$$y(t) = \int_{t_0}^t (b^T(t, s)x(s))dv(s) + \int_{t_0}^t R^{1/2}(s)dW_4(v(s)), \quad (3.16)$$

donde $W_3(s)$ y $W_4(s)$ son procesos de Wiener independientes entre sí y del vector Gaussiano inicial $z(t_0)$.

El problema de filtrado consiste en encontrar el mejor estimado para el proceso de ItôVolterra $x(t)$ en el tiempo t , basado en el proceso de observaciones $Y(t) = \{y(s), t_0 \leq$

$s \leq t$ }, esto es, la esperanza matemática condicional $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$. Denotamos la función de correlación del mejor estimado como $P(t) = E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)$. En esta situación, similarmente al caso de observaciones continuas, es imposible construir un sistema cerrado de ecuaciones de filtrado para las variables $m(t)$ y $P(t)$, debido a la naturaleza de las ecuaciones de Itô-Volterra (3.15) y (3.16). Para la obtención del filtro en forma cerrada, requerimos introducir una función de correlación cruzada $f(t, s) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la cual caracteriza la desviación del mejor estimado $m(t)$ del estado real $x(t)$:

$$f(t, s) = E((z_s^t - m_s^t)(z(s) - m(s))^T | F_{t,s}^Y),$$

donde

$$z_s^t = z(t_0) + \int_{t_0}^s (a_0^T(t, r) - a^T(t, r)z(r))dr + \int_{t_0}^s Q^{1/2}(r)dW_3(r),$$

$F_{t,s}^Y$ es la familia de σ -álgebras generada por el proceso estocástico y_s^t

$$y_s^t = \int_{t_0}^s b^T(t, s)z(s)dv(s) + \int_{t_0}^s R^{1/2}(s)dW_4(v(s)),$$

$$\text{and } m_s^t = E(z_s^t | F_{t,s}^Y).$$

Como resultado tenemos las ecuaciones para el filtro: $m(t)$, $P(t)$ y $f(t, s)$

$$m(t) = m(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) - a^T(t, s)m(s))ds + \int_{t_0}^t f(t, s)b(t, s)(R(s))^{-1}[dy(s) - b^T(t, s)m(s)dv(s)], \quad (3.17)$$

$$P(t) = P(t_0) + \int_{t_0}^t [-a^T(t, s)f^T(t, s) - f(t, s)a(t, s) + Q(s)]ds - \int_{t_0}^t f(t, s)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s)dv(s), \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
f(t, s) = & P(t_0) + \int_{t_0}^s [-a^T(s, r)f^T(t, r) - f(s, r)a(t, r) + Q(r)]dr \quad (3.19) \\
& - \int_{t_0}^s [f(t, r)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r) + \\
& f(s, r)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r) - \\
& (1/2)f(t, r)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r) - \\
& (1/2)f(s, r)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r)]dv(r),
\end{aligned}$$

donde $m(t_0) = E(z(t_0) | F_{t_0}^Y)$ y $P(t_0) = E((z(t_0) - m(t_0))(z(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$, $f(t_0, t_0) = E((z(t_0) - m(t_0))(z(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$ son las condiciones iniciales. Las funciones $m(t)$ y $P(t)$ tienen saltos en los puntos de discontinuidad de la función $v(t)$, y la función $f(t, s)$ es continua en t y tiene saltos en s en los mismos puntos de discontinuidad de $v(t)$. La solución al problema de control óptimo definido por (3.13),(3.14) puede ser obtenido usando la expresión para la matriz de ganancia del filtro óptimo contenida en la ecuación (3.17) y la función de correlación cruzada (3.19).

3.2.3. Solución al Problema de Control

Basado en el principio de dualidad el problema de control obtiene su matriz de ganancia a partir de las ecuaciones de filtrado. Así, la ley de control óptima está dada por

$$u^*(t, s) = R^{-1}(s)b^T(t, s)f^T(t, s)x(s), \quad (3.20)$$

y $f(t, s)$ es la solución de la ecuación de Riccati

$$\begin{aligned}
f(t, s) = & P(t_0) + \int_{t_0}^s [-a^T(s, r)f^T(t, r) - f(s, r)a(t, r) + Q(r)]dr \quad (3.21) \\
& - \int_{t_0}^s [f(t, r)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r) + \\
& f(s, r)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r) -
\end{aligned}$$

$$(1/2)f(t, r)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r) - \\ (1/2)f(s, r)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r)\}dv(r),$$

con la condición terminal $f(T, T) = P(T) = \Psi^{-1}$.

Sustituyendo la ley de control (3.20) en la ecuación de estado (3.13), la ecuación de estado para el controlador óptimo está dada por

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + a(t, s)x(s))ds + \quad (3.22) \\ \int_{t_0}^t b(t, s)R^{-1}(s)b^T(t, s)f^T(t, s)x(s)dv(s) + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s).$$

Las ecuaciones obtenidas (3.19)-(3.21) son integrales, con integración con respecto a una medida discontinua generada por una función de variación acotada $v(t)$, para la cual las discontinuidades de la función $v(t)$ corresponden a las discontinuidades en el estado $x(t)$. Por otro lado, los saltos pueden ser encontrados resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, donde $x(t-)$ y $f(t, s-)$ son valores a la izquierda de $x(t)$ y de su correlación cruzada $f(t, s)$ en sus puntos de discontinuidad t y (t, s) , respectivamente:

$$\frac{dx}{dv} = b(t, t)R^{-1}(t)b^T(t, t)f^T(t, v)x(v), \quad (3.23)$$

$$x(0) = x(t-), \quad v \in [0, \Delta v(t)],$$

$$\frac{df(t, v)}{dv} = -[f(t, v)b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, v) + \quad (3.24) \\ f(s, v)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, v) -$$

$$(1/2)f(t, v)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, v) -$$

$$(1/2)f(s, v)b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, v)],$$

$$f(t, 0) = f(t, s-), \quad v \in [0, \Delta v(s)].$$

Las expresiones para los saltos están dadas por

$$\Delta x(t) = b(t, t)R^{-1}(t)b^T(t, t)f^T(t, t-)x(t-)\Delta v(t),$$

$$\begin{aligned}
\Delta f(t, s) = & -[f(t, s-)[I + (b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, s-)) + & (3.25) \\
& b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s-) - (1/2)b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s) \times \\
& f^T(t, s-) - (1/2)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s) \times \\
& f(s, s-)]\Delta v(s)]^{-1}b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, s-) + \\
& f(s, s-)[I + (b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, s-) + \\
& b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s-) - \\
& (1/2)b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s-) - \\
& (1/2)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, s-)]\Delta v(s)]^{-1} \times \\
& b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s-) - \\
& (1/2)f(s, s-)[I + (b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, s-) + \\
& b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s-) - \\
& (1/2)b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s-) - \\
& (1/2)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, s-)]\Delta v(s)]^{-1} \times \\
& b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s-) - \\
& (1/2)f(t, s-)[I + (b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, s-) + \\
& b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s-) - \\
& (1/2)b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s-) - \\
& (1/2)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, s-)]\Delta v(s)]^{-1} \times \\
& b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, s-)]\Delta v(s),
\end{aligned}$$

donde I es la matriz identidad de dimensión $n \times n$. Las fórmulas para los saltos pueden ser incorporadas en las ecuaciones (3.19)-(3.21), usando la forma equivalente de las ecuaciones

con medida:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + \quad (3.26)$$

$$a(t, s)x(s))ds + \int_{t_0}^t b(t, s)R^{-1}(s)b^T(t, s) \times$$

$$f^T(t, s-)x(s-)dv(s) + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s).$$

$$f(t, s) = \int_{t_0}^s [-a^T(s, r)f^T(t, r) - f(s, r)a(t, r) + Q(r)]dr -$$

$$\int_{t_0}^s [f(t, r-)[I + (b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r) \times$$

$$f^T(s, r-) + b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r) \times$$

$$f^T(t, r-) - (1/2)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r) \times$$

$$f^T(t, r-) - (1/2)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f(s, r-)]\Delta v(r)]^{-1} \times$$

$$b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r-) +$$

$$f(s, r-)[I + (b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r-) +$$

$$b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r-) -$$

$$(1/2)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r-) -$$

$$(1/2)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r-)]\Delta v(r)]^{-1} \times$$

$$b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r-) +$$

$$(1/2)f(s, r-)[I + (b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r-) +$$

$$b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r-) -$$

$$(1/2)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r-) -$$

$$(1/2)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r-)]\Delta v(r)]^{-1} \times$$

$$b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r-) -$$

$$(1/2)f(t, r-)[I + (b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r-) +$$

$$\begin{aligned}
& b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r-) - \\
& (1/2)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r-) - \\
& (1/2)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r-)]\Delta v(r)]^{-1} \times \\
& b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r-)]dv(r),
\end{aligned}$$

con la condición terminal $f(T, T) = P(T) = \Psi^{-1}$. Aquí $\Delta v(t)$ es el salto de la función de variación acotada $v(t)$ en su punto de discontinuidad t , y $x(t-)$ y $f(t, s-)$ son los valores para el lado izquierdo del estado $x(t)$ y para formar la matriz de ganancia $f(t, s)$ con sus puntos de discontinuidad t y (t, s) , respectivamente.

3.3. Control Óptimo en la Planta Dinámica

3.3.1. Planteamiento del Problema

Puede ser significativamente más simple trabajar en el caso de las ecuaciones para la planta dinámica, si la ecuación de estado (3.13) tiene una parte interna diferencial de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(s) + \\
a(s)x(s))ds + \int_{t_0}^t b(t, s)u(t, s)dv(s) + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s),
\end{aligned} \tag{3.27}$$

y la función de costo cuadrático J es la misma que en la sección 3.2.1. Entonces, el problema dual de filtrado para el estado no observado, podría ser formulado como sigue:

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0^T(s) - a^T(s)z(s))ds + \int_{t_0}^t Q^{1/2}(s)dW_3(s) \tag{3.28}$$

y el proceso de observaciones discontinuas

$$y(t) = \int_{t_0}^t (b^T(t, s)x(s))dv(s) + \int_{t_0}^t R^{1/2}(s)dW_4(v(s)). \tag{3.29}$$

3.3.2. Solución

Como fue probado en [22], [25] en el caso de ecuaciones dinámicas (3.28), es posible obtener un sistema cerrado de ecuaciones de filtrado con respecto a $m(t)$ y a $P(t)$, sin introducir a $f(t, s)$. Estas ecuaciones de filtrado toman la forma:

$$m(t) = m(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(s) - a^T(s)m(s))ds + \quad (3.30)$$

$$\int_{t_0}^t P(s)b(t, s)(R(s))^{-1}[dy(s) - b^T(t, s)m(s)dv(s)],$$

$$P(t) = P(t_0) + \int_{t_0}^t [-a^T(s)P(s) - P(s)a(s) + Q(s)]ds - \quad (3.31)$$

$$\int_{t_0}^t P(s)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)P(s)dv(s),$$

donde $m(t_0) = E(z(t_0) | F_{t_0}^Y)$ y $P(t_0) = E((z(t_0) - m(t_0))(z(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$ son las condiciones iniciales. Tomando como base el principio de dualidad para las matrices de ganancia del filtro y el control, es posible obtener la ley de control óptimo, la cual está dada por

$$u^*(t, s) = R^{-1}(s)b^T(t, s)P(s)x(s), \quad (3.32)$$

y $P(s)$ es la solución de la ecuación de Riccati

$$P(t) = P(t_0) + \int_{t_0}^t [-a^T(s)P(s) - P(s)a(s) + Q(s)]ds - \quad (3.33)$$

$$\int_{t_0}^t [P(s)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)P(s)]dv(s),$$

con la condición terminal $P(T) = \Psi^{-1}$. Sustituyendo la ley de control óptima u^* en la ecuación de estado (18), la ecuación para el estado óptimo $x(t)$ está dada por:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(s) + a(s)x(s) + \quad (3.34)$$

$$b(t, s)R^{-1}(s)b^T(t, s)P(s)x(s))dv(s) + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s).$$

Los saltos del estado controlado $x(t)$ y la ecuación de la matriz de ganancia $P(t)$ con los puntos de discontinuidad de $v(t)$ toman la forma más simple:

$$\begin{aligned}\Delta x(t) &= b(t, t)R^{-1}(t)b^T(t, t)P(t-)x(t-)\Delta v(t), \\ \Delta P(t) &= -[P(t-)[I + (b(t, t)(R(t))^{-1} \times \\ &\quad b^T(t, t)P(t-)\Delta v(t)]^{-1}b(t, t)(R(t))^{-1}b^T(t, t)P(t)]\Delta v(t),\end{aligned}\tag{3.35}$$

los cuales pueden ser incorporados a las siguientes ecuaciones con medida

$$\begin{aligned}x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(s) + a(s)x(s))ds + \int_{t_0}^t b(t, s)R^{-1}(s) \times \\ &\quad b^T(t, s)P(s-)x(s-))dv(s) + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s). \\ P(t) &= \int_{t_0}^t [-a^T(s)P(s) - P(s)a(s) + Q(s)]ds - \int_{t_0}^t [P(s-)[I + \\ &\quad (b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)P(s-)\Delta v(s)]^{-1}b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)P(s-)]dv(s),\end{aligned}\tag{3.36}$$

con la condición terminal $P(T) = \Psi^{-1}$.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

3.4. Ejemplo: Movimiento de un Misil con Motores Jet e Impulsivo

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

3.4.1. Planteamiento del Problema

Consideremos el problema de control para el movimiento de un misil con dos motores, impulsivo y jet (continuo), cuya tarea es alcanzar la máxima posible altitud en un cierto momento en el tiempo $T > 0$ con el mínimo consumo de combustible. El movimiento del

misil es gobernado por las siguientes ecuaciones [32]:

$$\begin{aligned} h(t) &= h_0 + \int_0^t v(s) ds, \\ m(t) &= m_0 + \int_0^t \frac{P_p(s)}{C(t, s)} ds, \\ v(t) &= \int_0^t \frac{P_p(s) - Q(h, v)}{m(s)} dw(s) - \int_0^t g ds + \int_0^t r(s) dW(s), \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde $t_0 = 0$, $v(t)$ es la velocidad del misil, $v_0 = v(0) = 0$; $h_0 = h(0) > 0$ es la altura inicial ajustada correspondiente a la posición del misil sobre la superficie de la tierra, y $h(t)$ es la altitud ajustada; $m(s)$ es la masa del misil y del combustible, $m_0 = m_0$, $m_0 \gg 0$; $P_p(t)$ es la fuerza de propulsión; $C(t, s) < 0$ es el factor de diferencia entre la velocidad ideal del misil en el tiempo t y la velocidad del salida del flujo de combustible en el tiempo s , la cual es variante con el cambio de altitud y, consecuentemente, con la temperatura, presión, aceleración de la gravedad, etc.; g es la aceleración de la gravedad, considerada constante; $r(s)dW(s)$ es el disturbio estocástico representado por un proceso de Wiener y se presenta como el efecto resultante de disturbios independientes y con distribución desconocida, afectando la dinámica de la velocidad; y $w(s)$ es una función de variación acotada, la cual representa el funcionamiento de dos motores del misil: el motor jet expulsa combustible gradualmente y el impulsivo hace esto instantáneamente en un momento t_1 , $0 \leq t_1 \leq T$. Además, el funcionamiento de los motores es descrito usando la descomposición de $w(t)$ en su componente continuo $w^c(t)$ (jet continuo) y la función de Heaviside $\chi(t - t_1)$ con salto en el momento t_1 (motor impulsivo), i.e., $w(t) = w^c(t) + \chi(t - t_1)$.

Se supone que no hay resistencia del aire : $Q(h, v) = 0$.

Seleccionando la función de la masa $u(s) = \frac{\dot{m}(s)}{m(s)} = \frac{d}{ds} [\ln(m(s))]$ como control, el problema de control es completamente establecido por el estado del sistema $x(t) = [h(t), v(t)]$,

gobernado por la ecuación

$$x(t) = x_0 + \int_0^t Ax(s)ds + \int_0^t B(t, s)u(s)dw(s) + \int_0^t Gds + \int_0^t R(s)dW(s), \quad (3.39)$$

donde

$$x(t) = \begin{bmatrix} h(s) \\ v(s) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B(t, s) = \begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}, R(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ r(s) \end{bmatrix}, u(s) = \frac{\dot{m}(s)}{m(s)} = \frac{d}{ds} [\ln(m(s))],$$

$$x_0 = [h_0, 0],$$

y la función de costo a ser minimizada

$$J = \frac{1}{2} \left[x(T) - \begin{bmatrix} h^* \\ 0 \end{bmatrix} \right]^T \psi \left[x(T) - \begin{bmatrix} h^* \\ 0 \end{bmatrix} \right] + \frac{1}{2} \int_0^t u^2(s)dw(s) \rightarrow \min_{u(\cdot)}$$

donde $\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $h^* \gg h_0$, y $T > 0$ es un cierto momento en el tiempo.

3.4.2. Solución

De acuerdo con (3.32), la ley de control óptimo está dada por

$$u^*(t, s) = \begin{bmatrix} 0 & C(t, s) \end{bmatrix} P(s) \begin{bmatrix} h(s) \\ v(s) \end{bmatrix}.$$

Note que la altitud inicial ajustada $h_0 > 0$ es determinada por las condiciones $v(0) = 0$ y $\dot{v}(0) = 0$ (aquí el misil está equilibrado sobre la superficie de la tierra en el momento

inicial); sustituyendo la ley de control óptima $u^*(t, s)$ en la ecuación de la velocidad, obtenemos $0 = C(t_0, t_0)u^*(t_0, t_0) - g = C(0, 0)u^*(0, 0) - g$. Así, la altitud inicial ajustada $h_0 > 0$ es determinada por la ecuación

$$g = C(0, 0) \begin{bmatrix} 0 & C(0, 0) \end{bmatrix} P(0) \begin{bmatrix} h_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tomando en cuenta las ecuaciones (3.36)–(3.37), las ecuaciones para la trayectoria óptima $x(t)$ y la matriz $P(t)$ toman la forma

$$P(t) = P(0) - \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P(s) ds$$

$$- \int_0^t P(s) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ds - \int_0^t P(s-) \times \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right.$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t, s) \end{bmatrix} P(s-) \Delta w(s) \Big\}^{-1}$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t, s) \end{bmatrix} P(s-) dw(s),$$

con la condición terminal $P(T) = \psi$, y

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(s) + G \right\} ds + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & C(t, s) \end{bmatrix} P(s-) x(s-) dw(s) + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ r(s) \end{bmatrix} dW(s),$$

con la condición inicial $x(0) = \begin{bmatrix} h_0 \\ 0 \end{bmatrix}$, y sus saltos en el punto t_1 , donde el motor impulsivo es activado, son iguales a $\Delta P(t_1)$ donde

$$\begin{aligned} \Delta P(t_1) &= P(t_1^-) \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \times \left. \begin{bmatrix} 0 & C(t_1, t_1) \end{bmatrix} P(t_1^-) \Delta w(t_1) \right\}^{-1} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} 0 \\ C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t_1, t_1) \end{bmatrix} P(t_1^-) \Delta w(t_1), \\ \Delta x(t_1) &= \begin{bmatrix} 0 \\ C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t_1, t_1) \end{bmatrix} P(t_1^-) x(t_1) \Delta w(t_1). \end{aligned}$$

De esta manera, el algoritmo completo para resolver este problema de control óptimo es descrito a continuación:

- Resolver la ecuación para la matriz $P(t)$ con la condición terminal $P(T) = \psi$ y el salto $\Delta P(t_1)$ en el punto t_1 ;
- Determinar la condición inicial $P(0)$;
- Calcular la altitud inicial ajustada h_0 ;
- Sustituir $u^*(t, s)$ en las ecuaciones de estado y resolver estas con las condiciones iniciales $h(0) = h_0$ y $v(0) = 0$, obteniendo la trayectoria óptima $[h(t), v(t)] = x(t)$, donde la velocidad $v(t)$ tiene un salto en el punto t_1 , y la altitud ajustada $h(t)$ es continua;
- La máxima altitud deseada es determinada como $h(T) - h_0$.

Capítulo 4

Controlador Óptimo para Sistemas no Observables de Itô-Volterra

4.1. Controlador Óptimo para Sistemas Continuos de Itô-Volterra

4.1.1. Planteamiento del Problema

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad con una familia creciente de σ -álgebras $\mathcal{F}_t, t \geq 0$, y sean $(W_1(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ y $(W_2(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ procesos de Wiener \mathcal{F}_t adaptados. Consideremos el proceso aleatorio no observable \mathcal{F}_t -medible $x(t)$ gobernado por la ecuación de Itô-Volterra

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + a(t, s)x(s) + b(t, s)u(t, s))ds + \int_{t_0}^t g(t, s)dW_1(s) \quad (4.1)$$

y la salida (proceso de observación)

$$y(t) = \int_0^t (A_0(t, s) + A(t, s)x(s))ds + \int_0^t B(t, s)dW_2(s). \quad (4.2)$$

Aquí, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado no observable, $u(t, s) \in \mathbb{R}^p$ es la variable de control, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ es el proceso de observación, y los procesos de Wiener independientes $W_1(t)$ y $W_2(t)$ representan disturbios aleatorios en la ecuación de estado y en la ecuación de observaciones, los cuales son independientes del vector inicial Gaussiano $x(t_0)$. Sean $A(t, s)$ matrices no cero y sea $B(t, s)B^T(t, s)$ una matriz definida positiva. El criterio de costo cuadrático a ser minimizado J es definido como sigue:

$$J = E\left[\frac{1}{2}[x(T) - z_0]^T \Phi [x(T) - z_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t, s)K(s)u(t, s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T x^T(s)L(s)x(s)ds\right], \quad (4.3)$$

donde z_0 es un vector dado, Φ , K , L son matrices simétricas, K es positiva, y Φ y L son matrices no negativas, $T > t_0$ es un cierto momento en el tiempo, $E[f(x)]$ representa el valor esperado o esperanza matemática de una función f de una variable aleatoria x , y a^T denota el transpuesto del vector (matriz) a .

El problema de control óptimo consiste en encontrar el control óptimo $u^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, el cual minimice el criterio J a lo largo de la trayectoria $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, generada al sustituir $u^*(t)$ en la ecuación de estado (4.1).

4.1.2. Principio de Separación en Sistemas Integrales

Así como el principio de separación es válido en sistemas lineales estocásticos gobernados por ecuaciones diferenciales, también es válido en sistemas integrales lineales estocásticos, gobernados por ecuaciones de Itô-Volterra. Reemplazando el estado del sistema no observable $x(t)$ por su estimado óptimo $m(t)$ dado por la ecuación (ver [26], [27])

$$m(t) = m(t_0) + \int_0^t (a_0(t, s) + a(t, s)m(s) + b(t, s)u(t, s))ds + \int_0^t f(t, s)A^T(t, s)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1}[dy(s) - (A_0(t, s) + A(t, s)m(s))ds], \quad (4.4)$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$, donde la ecuación para $f(t, s)$ toma la forma (ver [26], [27])

$$\begin{aligned}
 f(t, s) = & f(t_0, t_0) + \int_{t_0}^s [a(s, r)f^T(t, r) + f(s, r)a^T(t, r) + \\
 & (1/2)(g(t, r)g^T(s, r) + g(s, r)g^T(t, r))]dr - \\
 & \int_0^s [f(t, r)A^T(s, r)(B(s, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f^T(s, r) + \\
 & f(s, r)A^T(t, r)(B(t, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f^T(t, r) - \\
 & (1/2)f(t, r)A^T(t, r)(B(t, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f^T(s, r) - \\
 & (1/2)f(s, r)A^T(s, r)(B(s, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f^T(t, r)]dr,
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

con la condición inicial $f(t_0, t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$. Note que, dada $S(t) = f(t, t)$, la ecuación para la varianza $S(t)$ resulta directamente de (4.5):

$$\begin{aligned}
 S(t) = & S(t_0) + \int_{t_0}^t [a(t, s)f^T(t, s) + f(t, s)a^T(t, s) + \\
 & g(t, s)g^T(t, s)]ds - \int_0^t f(t, s)A^T(t, s)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1}A(t, s)f^T(t, s)ds,
 \end{aligned}$$

donde $S(t_0) = f(t_0, t_0)$. De este modo, el problema de control óptimo para el estado del sistema (4.1) y la función de costo o criterio (4.3) son equivalentes al problema de control para el estimado óptimo (4.4) y la función de costo cuadrático J , representada como:

$$\begin{aligned}
 J = & E\left\{\frac{1}{2}[m(T) - z_0]^T \Phi [m(T) - z_0] \right. \\
 & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t, s)K(s)u(t, s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T m^T(s)L(s)m(s)ds \\
 & \left. + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \text{tr}[S(s)L(s)]ds + \text{tr}[S(T)\Phi]\right\},
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde $\text{tr}[A]$ denota la traza de la matriz A . Φ, K, L son matrices simétricas, K es una matriz positiva definida y Φ y L son matrices no negativas. Dado que la última parte de J

es independiente del control $u(t)$ y $x(t)$, la función reducida de costo M a ser minimizada toma la forma

$$M = E\left\{\frac{1}{2}[m(T) - z_0]^T \Phi [m(T) - z_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t, s) K(s) u(t, s) ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T m^T(s) L(s) m(s) ds\right\}. \quad (4.7)$$

Tomando en cuenta el principio de separación, podemos concluir que para los sistemas integrales de Itô-Volterra, la solución para el problema de control planteado por (4.1)-(4.3) puede ser encontrada resolviendo el problema de control óptimo dado por (4.4),(4.7). Ahora, el valor mínimo del criterio J debe de ser determinado usando (4.6).

4.1.3. Solución del Problema de Control Óptimo

Tomando en cuenta los resultados obtenidos en el capítulo previo, en el caso del estado observable del sistema, los siguientes resultados son válidos para el problema de control dado por (4.4),(4.7), donde el estimado $m(t)$ del estado del sistema es completamente disponible y observable.

La ley de control óptima está dada por

$$u^*(t, s) = K^{-1}(s) b^T(t, s) q^T(t, s) m(s), \quad (4.8) \quad \text{®}$$

donde $q(t, s)$ es la solución de la ecuación integral de Riccati

$$q(t, s) = q(t_0, t_0) + \int_{t_0}^s [-a^T(s, r) q^T(t, r) - q(s, r) a(t, r) + L(r)] dr - \int_{t_0}^s [q(t, r) b(s, r) (K(r))^{-1} b^T(s, r) q^T(s, r) + q(s, r) b(t, r) (K(r))^{-1} b^T(t, r) q^T(t, r) - (1/2) q(t, r) b(t, r) (K(r))^{-1} b^T(s, r) q^T(s, r) - (1/2) q(s, r) b(s, r) (K(r))^{-1} b^T(t, r) q^T(t, r)] dr. \quad (4.9)$$

con la condición terminal $q(T, T) = \Phi$.

Sustituyendo la ley de control óptima (4.8) en la ecuación (4.4) para el estado reconstruido $m(t)$, obtenemos el siguiente estimado del estado óptimamente controlado

$$m(t) = m(t_0) + \int_{t_0}^t A(t, s)m(s)ds + \int_{t_0}^t b(t, s)K^{-1}(s)b^T(t, s)q(t, s)m(s)ds \quad (4.10)$$

$$+ \int_0^t f(t, s)A^T(t, s)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1}[dy(s) - (A_0(t, s) + A(t, s)m(s))ds].$$

Así, la ecuación del estado óptimamente controlado (4.10), la ecuación de la matriz de ganancia (4.9), la ley de control óptima (4.8), y la función de correlación cruzada (4.5), conforman la solución completa del problema del controlador para estados no observables de sistemas integrales continuos gobernados por ecuaciones de Itô-Volterra.

4.2. Controlador Óptimo en Sistemas no Observables y Discontinuos de Itô-Volterra

4.2.1. Planteamiento del Problema

Consideremos el proceso aleatorio F_t -medible $x(t)$ gobernado por la ecuación de Itô-Volterra

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + a(t, s)x(s))ds + \int_{t_0}^t b(t, s)u(t, s)dv(s) + \int_{t_0}^t g(t, s)dW_1(s) \quad (4.11)$$

y el proceso de salida (observaciones) está dado por:

$$y(t) = \int_0^t (A_0(t, s) + A(t, s)x(s))dw(s) + \int_0^t B(t, s)dW_2(w(s)), \quad (4.12)$$

Donde tanto la ecuación de estado como la de las observaciones son integrales del tipo Volterra con integración por medida discontinua. Las medidas discontinuas en las ecuaciones de estado y de observación son generadas por funciones de variación acotada $v(t)$ y $w(t)$, las cuales pueden coincidir en sus puntos de discontinuidad (saltos). Aquí, la función de observación $y(t)$ puede ser discontinua debido a la discontinuidad de la integral con medida discontinua $dw(t)$ en la ecuación (4.12). Esta ecuación de observaciones contempla dos tipos de observaciones: continuas, correspondientes a la parte continua de la función de variación acotada $w(t)$, y discretas, correspondientes a su función de saltos.

La función de costo cuadrática a minimizar J es definida en la siguiente forma:

$$J = E\left[\frac{1}{2} [x(T) - z_0]^T \Phi [x(T) - z_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t, s) K(s) u(t, s) dv(s) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T x^T(s) L(s) x(s) ds\right], \quad (4.13)$$

donde z_0 es un vector dado, Φ , K , L son matrices simétricas, K es una matriz positiva, y Φ , y L son no-negativas, $T > t_0$ es un cierto momento en el tiempo. El problema de control para el estado del sistema no observable $x(t)$ consiste en encontrar el control $u^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, que minimice el criterio J a lo largo de la trayectoria $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, generada al sustituir $u^*(t)$ en la ecuación de estado (4.11). La trayectoria del estado $x(t)$ podría ser discontinua, por las discontinuidades en la integral donde se encuentra la función $v(t)$ en el lado derecho de (4.11). Este modelo de sistema considera dos tipos de movimiento (trayectorias), es decir. cambios en el sistema de posición (saltos), y movimientos graduales continuos. El modelado de estados de sistemas de Itô-Volterra a lo largo de observaciones discontinuas del tipo de Volterra en los cuales se consideran sistemas lineales continuos, discretos y con retardos en la forma dada por (4.11),(4.12), fue hecho en [22], [25].

4.2.2. Principio de Separación en Sistemas Integrales Discontinuos

El principio de separación para sistemas discontinuos con observaciones discontinuas es basado en el caso continuo. Se efectuarán las siguientes acciones (planteadas en [67]):

- Suponiendo que las funciones $v(t)$ y $w(t)$ en las ecuaciones de estado y de observación (4.11) y (4.12) sean absolutamente continuas, se aplicaría el principio de separación obtenido en la subsección 4.1.2, en el cual el problema de control óptimo es modificado por la ecuación de estado (4.4), el criterio (4.7), la función de correlación cruzada (4.5), y el valor del criterio óptimo (4.6);
- En las ecuaciones obtenidas de este modo, suponemos que las funciones $v(t)$ y $w(t)$ son de variación acotada, para las cuales sus derivadas $\dot{v}(t)$ y $\dot{w}(t)$ pueden ser funciones generalizadas de singularidad de orden cero (por ejemplo, δ -función), generando integración con medidas discontinuas $dv(t)$ y $dw(t)$.

Como un resultado de la realización de dichas acciones, el estado no observable $x(t)$ del sistema (4.11) es reemplazado por su estimado óptimo $m(t)$, dado por la ecuación

$$\begin{aligned}
 m(t) = & m(t_0) + \int_0^t (a_0(t, s) + a(t, s)m(s))ds + \\
 & \int_0^t b(t, s)u(t, s)dv(s) + \\
 & \int_0^t f(t, s)A^T(t, s)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1} \times \\
 & [dy(s) - (A_0(t, s) + A(t, s)m(s))dw(s)],
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$, donde la función de correlación cruzada $f(t, s)$ satisface la ecuación de Riccati:

$$f(t, s) = \int_0^s [a(s, r)f^T(t, r) + f(s, r)a^T(t, r) + \dots] \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
& (1/2)(g(t, r)g^T(s, r) + g(s, r)g^T(t, r))]dr - \\
& \int_0^s [f(t, r)A^T(s, r)(B(s, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f^T(s, r) + \\
& (s, r)A^T(t, r)(B(t, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f^T(t, r) - \\
& (1/2)(f(t, r)A^T(t, r)(B(t, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f^T(s, r) - \\
& f(s, r)A^T(s, r)(B(s, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f^T(t, r))]dw(r).
\end{aligned}$$

con la condición inicial $f(t_0, t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$. Por otro lado, el problema de control para el sistema (4.11) y la función de costo cuadrático (4.13) son equivalentes al problema de control para el estimado óptimo (4.14) y la función de costo J , representada como:

$$\begin{aligned}
J = E\{ & \frac{1}{2} [m(T) - z_0]^T \Phi [m(T) - z_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t, s)K(s)u(t, s)dv(s) \quad (4.16) \\
& + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T m^T(s)L(s)m(s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \text{tr}[S(s)L(s)]ds + \text{tr}[S(T)\Phi]\},
\end{aligned}$$

la cual puede ser reducida a la función de costo M

$$\begin{aligned}
M = E\{ & \frac{1}{2} [m(T) - z_0]^T \Phi [m(T) - z_0] \quad (4.17) \\
& + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t, s)K(s)u(t, s)dv(s) \\
& + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T m^T(s)L(s)m(s)ds\}.
\end{aligned}$$

Así, la solución al problema de control óptimo especificado en (4.11),(4.13) puede ser encontrada resolviendo el problema de control óptimo dado por (4.14),(4.17) y usando (4.16) para el mínimo valor del criterio J .

4.2.3. Solución al Problema de Control para Sistemas Discontinuos

En base a la solución al problema de control óptimo obtenido en el capítulo previo, en el caso de un estado del sistema observable discontinuo, los siguientes resultados son válidos para el problema de control (4.14), (4.17), donde el estado del sistema (el estimado óptimo $m(t)$) es completamente disponible y observable. La ley de control óptimo está dada por

$$u^*(t, s) = K^{-1}(s)b^T(t, s)q^T(t, s)m(s), \quad (4.18)$$

donde $q(t, s)$ es la solución de la ecuación integral de Riccati

$$\begin{aligned} q(t, s) = & q(t_0, t_0) + \\ & \int_{t_0}^s [-a^T(s, r)q^T(t, r) - q(s, r)a(t, r) + L(r)]dr \\ & - \int_{t_0}^s [q(t, r)b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r) + \\ & q(s, r)b(t, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r) - \\ & (1/2)q(t, r)b(t, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r) - \\ & (1/2)q(s, r)b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r)]dv(r), \end{aligned}$$

con la condición terminal $q(T, T) = \Phi$.

Sustituyendo la ley de control óptimo (4.18) en la ecuación (4.14) para el estado reconstruido $m(t)$, se obtiene la siguiente ecuación para el estimado óptimamente controlado

$$\begin{aligned} m(t) = & m(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + a(t, s)m(s))ds + \\ & \int_{t_0}^t b(t, s)K^{-1}(s)b^T(t, s)q^T(t, s)m(s)dv(s) + \\ & \int_0^t f(t, s)A^T(t, s)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1} \times \\ & (dy(s) - (A_0(t, s) + A(t, s)m(s))dw(s)), \end{aligned} \quad (4.19)$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$. Las ecuaciones obtenidas (4.19), (4.19), así como la ecuación (4.15) para la función de correlación cruzada $f(t, s)$, son ecuaciones integrales con integración por medidas discontinuas generadas por funciones de variación acotada $v(t)$ y $w(t)$, las cuales no nos indican la forma de encontrar los saltos de las variables del controlador (el estimado $m(t)$, su función de correlación cruzada $f(t, s)$, y la matriz de ganancia $q(t, s)$). Los puntos de discontinuidad de las funciones $v(t)$ y $w(t)$, corresponden a discontinuidades en el estado del sistema $x(t)$ y el proceso de observación $y(t)$. El método directo para encontrar los saltos fue dado por el Teorema 3 en [26], [27] por medio del cual se establece que los saltos pueden ser encontrados resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, donde $x(t-)$ y $f(t, s-)$ son valores a la izquierda del estado del sistema $x(t)$ y su función de correlación cruzada $f(t, s)$ y sus puntos de discontinuidad t y (t, s) respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dv} &= b(t, t)R^{-1}(t)b^T(t, t)f(t, v)x(v), & (4.20) \\ x(0) &= x(t-), \quad v \in [0, \Delta v(t)], \\ \frac{df(t, v)}{dv} &= -[f(t, v)b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, v) + \\ & f(s, v)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, v) - \\ & (1/2)f(t, v)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, v) - \\ & (1/2)f(s, v)b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, v)], \\ f(t, 0) &= f(t, s-), \quad v \in [0, \Delta v(s)]. \end{aligned}$$

4.2.4. Ecuaciones de los Saltos

Resolviendo el sistema anterior, las expresiones para los saltos están dadas por:

$$\Delta x(t) = b(t, t)R^{-1}(t)b^T(t, t)f(t, t-)x(t-)\Delta v(t). \quad (4.21)$$

$$A^T(t, s)(B(t, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, s)f^T(s, s-)\Delta w(s)]^{-1} \times \\ A^T(t, s)(B(t, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, s)f^T(s, s-)]\Delta w(s),$$

donde I es la matriz identidad $n \times n$ -dimensional, y

$$\begin{aligned} \Delta q(t, s) = & -[q(t, s-)[I + (b(s, s)(K(s))^{-1}b^T(s, s) \times \\ & q^T(s, s-) + b(t, s)(K(s))^{-1}b^T(t, s)q^T(t, s-) - \\ & (1/2)b(s, s)(K(s))^{-1}b^T(t, s)q^T(t, s-) - \\ & (1/2)b(t, s)(K(s))^{-1}b^T(s, s)q^T(s, s-)]\Delta v(s)]^{-1} \times \\ & b(s, s)(K(s))^{-1}b^T(s, s)q^T(s, s-) + \\ & q(s, s-)[I + (b(s, s)(K(s))^{-1}b^T(s, s)q^T(s, s-) + \\ & b(t, s)(K(s))^{-1}b^T(t, s)q^T(t, s-) - \\ & (1/2)b(s, s)(K(s))^{-1}b^T(t, s)q^T(t, s-) - \\ & (1/2)b(t, s)(K(s))^{-1}b^T(s, s)q^T(s, s-)]\Delta v(s)]^{-1} \times \\ & b(t, s)(K(s))^{-1}b^T(t, s)q^T(t, s-) - \\ & (1/2)q(s, s-)[I + (b(s, s)(K(s))^{-1}b^T(s, s)q^T(s, s-) + \\ & b(t, s)(K(s))^{-1}b^T(t, s)q^T(t, s-) - \\ & (1/2)b(s, s)(K(s))^{-1}b^T(t, s)q^T(t, s-) - \\ & (1/2)b(t, s)(K(s))^{-1}b^T(s, s)q^T(s, s-)]\Delta v(s)]^{-1} \times \\ & b(s, s)(K(s))^{-1}b^T(t, s)q^T(t, s-) - \\ & (1/2)q(t, s-)[I + (b(s, s)(K(s))^{-1}b^T(s, s)q^T(s, s-) + \\ & b(t, s)(K(s))^{-1}b^T(t, s)q^T(t, s-) - \\ & (1/2)b(s, s)(K(s))^{-1}b^T(t, s)q^T(t, s-) - \\ & (1/2)b(t, s)(K(s))^{-1}b^T(s, s)q^T(s, s-)]\Delta v(s)]^{-1} \times \end{aligned}$$

$$b(t, s)(K(s))^{-1}b^T(s, s)q^T(s, s-)]\Delta v(s).$$

Siguiendo [25], las expresiones para los saltos pueden ser incorporadas en las ecuaciones del filtrado y el controlador (4.19), (4.21), (4.15) usando la forma equivalente de ecuaciones integrales con integración en medida discontinua

$$\begin{aligned} m(t) = & m_0 + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + a(t, s)m(s))ds + \int_{t_0}^t b(t, s)u(t, s)ds \\ & + \int_{t_0}^t b(t, s)K^{-1}(s)b^T(t, s)\{I + A^T(t, s)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1}A(t, s) \\ & \times f(t, s-)\Delta w(s)\}^{-1}q(t, s-)m(s-)dv(s) \\ & + \int_{t_0}^t f(t, s-)\{I + A^T(t, s)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1}A(t, s)f(t, s-)\Delta w(s)\}^{-1} \\ & \times A^T(t, s)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1}[dy(s) - A(t, s)m(s-)dw(s)], \end{aligned} \quad (4.22)$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$,

$$\begin{aligned} f(t, s) = & f(t_0, t_0) + \int_{t_0}^s [a(s, r)f^T(t, r) + f(s, r)a^T(t, r) + \\ & (1/2)(g(t, r)g^T(s, r) + g(s, r)g^T(t, r))]dr - \\ & \int_{t_0}^s [f(t, r-)[I + (A^T(s, r)(B(s, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f(s, r-) + \\ & A^T(t, r)(B(t, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f(t, r-) - \\ & (1/2)A^T(s, r)(B(s, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f(t, r-) - \\ & (1/2)A^T(t, r)(B(t, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f(s, r-)]\Delta w(r)]^{-1} \times \\ & A^T(s, r)(B(s, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f^T(s, r-) + \\ & f(s, r-)[I + (A^T(s, r)(B(s, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f(s, r-) + \\ & A^T(t, r)(B(t, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f(t, r-) - \\ & (1/2)A^T(s, r)(B(s, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f(t, r-) - \\ & (1/2)A^T(t, r)(B(t, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f(s, r-)]\Delta w(r)]^{-1} \times \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}
& A^T(t,r)(B(t,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,r)f^T(t,r-) - \\
& (1/2)f(s,r-)[I + (A^T(s,r)(B(s,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,r)f(s,r-) + \\
& A^T(t,r)(B(t,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,r)f(t,r-) - \\
& (1/2)A^T(s,r)(B(s,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,r)f(t,r-) - \\
& (1/2)A^T(t,r)(B(t,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,r)f(s,r-)]\Delta w(r)]^{-1} \times \\
& A^T(s,r)(B(s,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,r)f^T(t,r-) - \\
& (1/2)f(t,r-)[I + (A^T(s,r)(B(s,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,r)f(s,r-) + \\
& A^T(t,r)(B(t,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,r)f(t,r-) - \\
& (1/2)A^T(s,r)(B(s,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,r)f(t,r-) - \\
& (1/2)A^T(t,r)(B(t,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,r)f(s,r-)]\Delta w(r)]^{-1} \times \\
& A^T(t,r)(B(t,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,r)f^T(s,r-)]dw(r),
\end{aligned}$$

con la condición inicial $f(t_0, t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$, la función $f(t, s)$ es continua en t, y

$$q(t, s) = q(t_0, t_0) + \int_{t_0}^s [-a^T(s, r)q^T(t, r) - q(s, r)a(t, r) + L(r)]dr - \quad (4.24)$$

$$\int_{t_0}^s [q(t, r-)[I + (b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r-) +$$

$$b(t, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r-)] -$$

$$(1/2)b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r-) -$$

$$(1/2)b(t, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r-)]\Delta v(r)]^{-1} \times$$

$$b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r-) +$$

$$q(s, r-)[I + (b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r-) +$$

$$b(t, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r-) -$$

$$(1/2)b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r-)] -$$

$$\begin{aligned}
& (1/2)b(t,r)(K(r))^{-1}b^T(s,r)q^T(s,r-)\Delta v(r)]^{-1} \times \\
& b(t,r)(K(r))^{-1}b^T(t,r)q^T(t,r-) - \\
& (1/2)q(s,r-)[I + (b(s,r)(K(r))^{-1}b^T(s,r)q^T(s,r-) + \\
& b(t,r)(K(r))^{-1}b^T(t,r)q^T(t,r-) - \\
& (1/2)b(s,r)(K(r))^{-1}b^T(t,r)q^T(t,r-) - \\
& (1/2)b(t,r)(K(r))^{-1}b^T(s,r)q^T(s,r-)]\Delta v(r)]^{-1} \times \\
& b(s,r)(K(r))^{-1}b^T(t,r)q^T(t,r-) - \\
& (1/2)q(t,r-)[I + (b(s,r)(K(r))^{-1}b^T(s,r)q^T(s,r-) + \\
& b(t,r)(K(r))^{-1}b^T(t,r)q^T(t,r-) - \\
& (1/2)b(s,r)(K(r))^{-1}b^T(t,r)q^T(t,r-) - \\
& (1/2)b(t,r)(K(r))^{-1}b^T(s,r)q^T(s,r-)]\Delta v(r)]^{-1} \times \\
& b(t,r)(K(r))^{-1}b^T(s,r)q^T(s,r-)]\Delta v(r),
\end{aligned}$$

con la condición terminal $q(T, T) = \Phi$, la función $q(t, s)$ es continua en t . Aquí $\Delta w(t)$, $\Delta v(t)$, y $\Delta y(t)$ son los saltos de las funciones de variación acotada $w(t)$, $v(t)$, y el proceso de observaciones $y(t)$ en el punto t , respectivamente, y $m(t-)$, $f(t, s-)$, y $q(t, s-)$ son los valores del controlador discontinuo y los parámetros de filtrado (el estimado $m(t)$, su función de correlación cruzada $f(t, s)$, y la matriz de ganancia $q(t, s)$) en los puntos t y (t, s) por la izquierda. La ecuación del estado controlado óptimamente (4.22), la ecuación de la matriz de ganancia (4.24), la ecuación de correlación cruzada (4.23), y la ley de control óptima (4.18) dan la solución completa al problema del controlador óptimo para estados de sistemas integrales no observables, discontinuos, gobernados por ecuaciones de Itô-Volterra, incluyendo expresiones analíticas para los saltos de las variables del filtro y del controlador en los puntos de discontinuidad del estado real del sistema $x(t)$ y el

proceso de observación $y(t)$.

4.3. Controlador Óptimo para la Planta Dinámica

4.3.1. Planteamiento del Problema

Como ya se vio en la sección anterior, puede ser significativamente más simple trabajar en el caso de las ecuaciones para la planta dinámica si la ecuación de estado (4.11) tiene una parte diferencial interna de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 x(t) = & x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(s) + a(s)x(s))ds \\
 & + \int_{t_0}^t b(t, s)u(t, s)dv(s) + \\
 & \int_{t_0}^t g(t, s)dW_1(s),
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

y el proceso de observaciones $y(t)$ (4.12) y la función de costo cuadrático J (4.13) son los mismos. Como fue probado en [22], [25], en el caso de la ecuación de la planta dinámica (4.25) es posible obtener un sistema cerrado de ecuaciones de filtrado con respecto solo a dos variables, el estimado óptimo $m(t)$ y su varianza $S(t)$, sin introducir la función de correlación cruzada $f(t, s)$. Estas ecuaciones de filtrado toman la forma [22], [25]:

$$\begin{aligned}
 m(t) = & m(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(s) + a(s)m(s))ds + \\
 & \int_0^t b(t, s)u(t, s)dv(s) + \int_0^t S(s)A^T(t, s) \times \\
 & (B(t, s)B^T(t, s))^{-1}[dy(s) - \\
 & (A_0(t, s) + A(t, s)m(s))dw(s)],
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$, donde la función para la varianza $S(t)$ satisface la ecuación de Riccati (usando como $S(t) = f(t, t)$)

$$S(t) = S(t_0) + \int_{t_0}^t [a(s)S(s) + S(s)a^T(s) + g(t, s)g^T(t, s)] ds - \int_{t_0}^t [S(s)A^T(t, s)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1} \times A(t, s)S(s)] dw(s), \quad (4.27)$$

con la condición inicial $S(t_0) = f(t_0, t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$. Además, el problema de control óptimo para el estado del sistema (4.25) y función de costo (4.13) es equivalente al problema de control óptimo para el estado óptimo (4.26) y la función de costo (4.16), la cual puede ser reducida a la función de costo efectiva (4.17). Así, la solución para el problema de control óptimo especificado por (4.25), (4.13) puede ser encontrado resolviendo el problema de control óptimo dado por (4.26), (4.17) y usando (4.16) para el valor mínimo del criterio.

La ley de control óptimo se obtiene tomando como base los resultados obtenidos en el capítulo previo para el problema de control óptimo en sistemas de Itô-Volterra con parte interna dinámica.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

4.3.2. Solución

La ley de control óptima es dada por

$$u^*(t, s) = K^{-1}(s)b^T(t, s)P(s)m(s), \quad (4.28)$$

donde $P(t)$ es la solución de la ecuación integral de Riccati

$$P(t) = P(t_0) + \quad (4.29)$$

$$\int_{t_0}^t [-a^T(s)P(s) - P(s)a(s) + L(s)]ds$$

$$\int_{t_0}^t [P(s)b(t,s)(K(s))^{-1}b^T(t,s)P(s)]dv(s),$$

con la condición terminal $P(T) = q(T, T) = \Phi$.

Sustituyendo el control óptimo (4.27) en la ecuación (4.26) para el sistema reconstruido $m(t)$, es obtenida la siguiente ecuación para el estimado óptimamente controlado (siguiendo la ecuación (4.22) y usando $S(t) = f(t, t)$ y $P(t) = q(t, t)$)

$$m(t) = m_0 + \int_{t_0}^t (a_0(s) + a(s)m(s))ds + \tag{4.30}$$

$$\int_{t_0}^t b(t,s)u(t,s)ds +$$

$$\int_{t_0}^t b(t,s)K^{-1}(s)b^T(t,s)P(s)m(s)dv(s)$$

$$+ \int_{t_0}^t S(s)A^T(t,s)(B(t,s)B^T(t,s))^{-1} [dy(s) -$$

$$A(t,s)m(s-)dw(s)]$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$.

Así, en el caso de un sistema de Itô-Volterra con planta dinámica interna, la solución al problema del controlador es dada completamente por la ecuación del controlador óptimo (4.30), la ecuación de la varianza (4.27), la ecuación que constituye la matriz de ganancia (4.29), y la ley de control óptimo (4.28). Obviamente, el caso de ecuaciones de estado y de observaciones continuas en un sistema de Itô-Volterra con planta dinámica interna es resuelto asumiendo $v(t) = t$ y $w(t) = t$ en (4.25)-(4.30).

4.3.3. Saltos para la Planta Dinámica

Las ecuaciones de los saltos para controlador óptimo toman la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 \Delta m(t) = & S(t-)[I + A^T(t,t)(B(t,t)B^T(t,t))^{-1}A(t,t) \times \\
 & S(t-)\Delta w(t)]^{-1}A^T(t,t)(B(t,t)B^T(t,t))^{-1} \times \\
 & [\Delta y(t) - (A_0(t,t) + A(t,t)m(t-))\Delta w(t)] + \\
 & b(t,t)K^{-1}(t)b^T(t,t)[I + A^T(t,t)(B(t,t)B^T(t,t))^{-1} \times \\
 & A(t,t)S(t-)\Delta w(t)]^{-1}P(t-)m(t-)\Delta v(t), \\
 \Delta S(t) = & -[S(t-)[I + (A^T(t,t)(B(t,t)B^T(t,t))^{-1} \times \\
 & A(t,t)S(t-))\Delta w(t)]^{-1}A^T(t,t) \times \\
 & (B(t,t)B^T(t,t))^{-1}A(t,t)S(t-)]\Delta w(t), \\
 \Delta P(t) = & -[P(t-)[I + (b(t,t)(K(t))^{-1}b^T(t,t)P(t-)) \times \\
 & \Delta v(t)]^{-1}b(t,t)(K(t))^{-1}b^T(t,t)P(t-)]\Delta v(s).
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Notemos finalmente que los resultados de la asignación del controlador óptimo para un sistema con planta dinámica interna se pueden aplicar a la solución del problema del controlador óptimo del lanzamiento de un misil con motores continuos y jet impulsivos y velocidad no observable, logrando la máxima posible altitud con el mínimo consumo de combustible (ver [32] para su planteamiento inicial continuo), como ha sido hecho en el capítulo previo por el correspondiente problema del regulador óptimo. Esta aplicación se presenta en la siguiente sección.

4.4. Movimiento de un Misil con Motores Jet e Impulsivo y Velocidad no Observable

4.4.1. Planteamiento del Problema

Consideremos el problema de control óptimo para el movimiento de un misil con dos motores, impulsivo y jet (continuo), cuya tarea es alcanzar la máxima altitud posible en un cierto momento en el tiempo $T > 0$ con el mínimo consumo de combustible. El movimiento del misil es gobernado por las ecuaciones de estado siguientes ([32])

$$h(t) = h_0 + \int_0^t v(s)ds, \quad m(t) = m_0 + \int_0^t \frac{P_p(s)}{C(t, s)} ds,$$

$$v(t) = \int_0^t \frac{P_p(s) - Q(h, v)}{m(s)} dw(s) - \int_0^t g ds + \int_0^t r(s) dW_1(s),$$

donde $t_0 = 0$, $v(t)$ es la velocidad del misil, $v_0 = v(0) = 0$; la información de la velocidad del misil, es reunida usando la ecuación de medida de la velocidad (observación)

$$y(t) = \int_0^t H(t, s)v(s)dw(s) + \int_0^t F(t, s)dW_2(w(s)).$$

Aquí, $h_0 = h(0) > 0$ es la altitud inicial ajustada correspondiente a la posición del misil sobre la superficie de la tierra, y $h(t)$ es la altitud ajustada; $m(s)$ es la masa del misil, $m_0 = m(0)$, $m_0 \gg 0$; $P_p(t)$ es la fuerza de propulsión; $C(t, s) < 0$ es el factor de diferencia entre la velocidad real del misil al tiempo t y el flujo de salida al tiempo s , el cual es variante con el cambio de altitud y consecuentemente, con la temperatura, la presión, la aceleración de la gravedad etc.; g es la aceleración de la gravedad, la cual es considerada constante; $r(t, s)dW_1(s)$ es una familia de disturbios estocásticos simulados usando un proceso estándar de Wiener $W_1(s)$ y se presenta como el efecto resultante de disturbios independientes y con distribución desconocida, afectando la dinámica de la

velocidad en el tiempo t ; $w(s)$ es una función de variación acotada, la cual representa el funcionamiento de los motores del misil, impulsivo y jet (continuo): el motor jet expulsa combustible gradualmente y el impulsivo lo hace en un cierto momento instantáneo t_1 , $0 \leq t_1 \leq T$. El funcionamiento de los motores es descrito usando la descomposición de $w(t)$ en su componente continuo $w^c(t)$ (jet continuo), y la función de Heaviside $\chi(t - t_1)$ con salto en el momento t_1 (motor impulsivo), i.e., $w(t) = w^c(t) + \chi(t - t_1)$.

Dada la inexactitud del artefacto de medición y por razones naturales (tales como el efecto Doppler), la medición de la velocidad proporciona información en los valores de velocidad, no solo en el tiempo transcurrido t , sino como una suma de valores en algunos instantes previos de tiempo, presentando un caso clásico de fusión de datos. Este efecto es modelado por el término $\int_0^t H(t, s)v(s)dw(s)$ en la ecuación de observación, donde, como el último término $\int_0^t F(t, s)dW_2(w(s))$ toma en cuenta la influencia de una familia de disturbios estocásticos $F(t, s)dW_2(w(s))$, se afecta las mediciones de las velocidades $v(s)$, $0 \leq s \leq t$ en el momento de observación t . Los disturbios de las observaciones son simulados también usando un proceso estándar de Wiener $W_2(s)$, suponiendo que son independientes e idénticamente distribuidos. El término de medida discontinua $dw(t)$ en la integración contenida en la ecuación de observaciones permite incorporar correctamente el salto en el estado del sistema (velocidad del misil) en el modelo de observaciones, así como también tomar en cuenta que el componente de observación discreta es afectado por disturbios independientemente de las observaciones continuas.

Se supone que la fuerza de resistencia de la atmósfera es ausente: $Q(h, v) = 0$.

Seleccionando la función del flujo de salida de masa $u(s) = \frac{\dot{m}(s)}{m(s)} = \frac{d}{ds} [\ln(m(s))]$ como control, el problema de control óptimo es completamente establecido por el estado del sistema $x(t) = [h(t), v(t)]$, gobernado por la ecuación

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A x(s) ds + \int_0^t B(t, s) u(s) dw(s) + \int_0^t G ds + \int_0^t D r(t, s) dW_1(s). \quad (4.32)$$

donde

$$x(t) = \begin{bmatrix} h(s) \\ v(s) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B(t, s) = \begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}, u(s) = \frac{\dot{m}(s)}{m(s)} = \frac{d}{ds} [\ln(m(s))],$$

$x_0 = [h_0, 0]$, y la función de costo a ser minimizada

$$J = \frac{1}{2} \left[x(T) - \begin{bmatrix} h^* \\ 0 \end{bmatrix} \right]^T \psi \left[x(T) - \begin{bmatrix} h^* \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^T u(s)u(s)dw(s) \rightarrow \min_{u(\cdot)}$$

donde

$$\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad h^* \gg h_0, \text{ y } T > 0 \text{ es un cierto momento en el tiempo.}$$

La ecuación de observación toma la forma

$$y(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & H(t, s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(s) \\ v(s) \end{bmatrix} dw(s) + \int_0^t F(t, s) dW_2(s).$$

4.4.2. Solución

Se puede observar que la ecuación de estado (4.32) satisface la definición de una ecuación de Itô-Volterra con parte interna diferencial (la matriz A es constante), y podemos usar los resultados simplificados de la sección 4.3. De acuerdo con la sección 4.3.2, la ley de control óptimo está dada por

$$u^*(t, s) = \begin{bmatrix} 0 & C(t, s) \end{bmatrix} P(s) \begin{bmatrix} h(s) \\ v(s) \end{bmatrix}.$$

La altitud inicial ajustada $h_0 > 0$ es determinada por las condiciones $v(0) = 0$ y $\dot{v}(0) = 0$ (este es el equilibrio del misil en la superficie de la tierra en el tiempo inicial); sustituyendo el control óptimo $u^*(t, s)$ en la ecuación de la velocidad, se obtiene: $0 = C(t_0, t_0)u^*(t_0, t_0) - g = C(0, 0)u^*(0, 0) - g$. La altitud inicial ajustada se obtiene haciendo $h_0 > 0$ en la ecuación

$$g = C(0, 0) \begin{bmatrix} 0 & C(0, 0) \end{bmatrix} P(0) \begin{bmatrix} h_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De acuerdo con (4.30), (4.27), (4.29), las ecuaciones para el estimado de la trayectoria óptimamente controlada $\hat{x}(t)$, su varianza $S(t)$, y la matriz de ganancia $P(t)$ toman la forma

$$S(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S(s) ds + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} ds + \int_0^t S(s) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ds$$

$$- \int_0^t S(s-) \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H(t, s) \end{bmatrix} (F(t, s)F^T(t, s))^{-1} \begin{bmatrix} 0 & H(t, s) \end{bmatrix} S(s-) \Delta w(s) \right\}^{-1}$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 \\ H(t, s) \end{bmatrix} (F(t, s)F^T(t, s))^{-1} \begin{bmatrix} 0 & H(t, s) \end{bmatrix} S(s-) dw(s),$$

con la condición inicial $S(0) = 0$,

$$P(t) = P(0) - \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P(s) ds - \int_0^t P(s) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ds$$

$$- \int_0^t P(s-) \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t, s) \end{bmatrix} P(s-) \Delta w(s) \right\}^{-1}$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t, s) \end{bmatrix} P(s-) dw(s),$$

con la condición terminal $P(T) = \psi$, y

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) = & x_0 + \int_0^t \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(s) + G \right\} ds + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ C(t,s) \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} 0 \\ C(t,s) \end{array} \right] \\ & \times \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H(t,s) \end{bmatrix} (F(t,s)F^T(t,s))^{-1} \begin{bmatrix} 0 & H(t,s) \end{bmatrix} S(s-)\Delta w(s) \right\}^{-1} \\ & \times P(s-)\hat{x}(s-)dw(s) + \int_0^t S(s-)\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} 0 \\ H(t,s) \end{bmatrix} (F(t,s)F^T(t,s))^{-1} \begin{bmatrix} 0 & H(t,s) \end{bmatrix} S(s-)\Delta w(s) \right\}^{-1} \\ & \times \begin{bmatrix} 0 \\ H(t,s) \end{bmatrix} (F(t,s)F^T(t,s))^{-1} \left[dy(s) - \begin{bmatrix} 0 & H(t,s) \end{bmatrix} \hat{x}(s-)dw(s) \right], \end{aligned}$$

con la condición inicial $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} h_0 \\ 0 \end{bmatrix}$, y sus saltos en el tiempo t_1 , donde el motor impulsivo es utilizado, son iguales a

$$\begin{aligned} \Delta S(t_1) = & S(t_1-)\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H(t_1,t_1) \end{bmatrix} (F(t_1,t_1)F^T(t_1,t_1))^{-1} \begin{bmatrix} 0 & H(t_1,t_1) \end{bmatrix} \right. \\ & \left. \times S(t_1-)\Delta w(t_1) \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ H(t_1,t_1) \end{bmatrix} (F(t_1,t_1)F^T(t_1,t_1))^{-1} \begin{bmatrix} 0 & H(t_1,t_1) \end{bmatrix} S(t_1-)\Delta w(t_1), \\ \Delta P(t_1) = & P(t_1-)\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C(t_1,t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t_1,t_1) \end{bmatrix} P(t_1-)\Delta w(t_1) \right\}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{bmatrix} 0 \\ C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t_1, t_1) \end{bmatrix} P(t_1^-) \Delta w(t_1), \\
\Delta \hat{x}(t_1) = & \begin{bmatrix} 0 \\ C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right. \\
+ & \begin{bmatrix} 0 \\ H(t_1, t_1) \end{bmatrix} \left. (F(t_1, t_1) F^T(t_1, t_1))^{-1} \begin{bmatrix} 0 & H(t_1, t_1) \end{bmatrix} S(t_1^-) \Delta w(t_1) \right\}^{-1} P(t_1^-) \hat{x}(t_1^-) \Delta w(t_1) \\
+ S(t_1^-) & \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H(t_1, t_1) \end{bmatrix} \right. \left. (F(t_1, t_1) F^T(t_1, t_1))^{-1} \begin{bmatrix} 0 & H(t_1, t_1) \end{bmatrix} S(t_1^-) \Delta w(t_1) \right\}^{-1} \\
& \times \begin{bmatrix} 0 \\ H(t_1, t_1) \end{bmatrix} (F(t_1, t_1) F^T(t_1, t_1))^{-1} \left[\Delta y(t_1) - \begin{bmatrix} 0 & H(t_1, t_1) \end{bmatrix} \hat{x}(t_1^-) \Delta w(t_1) \right].
\end{aligned}$$

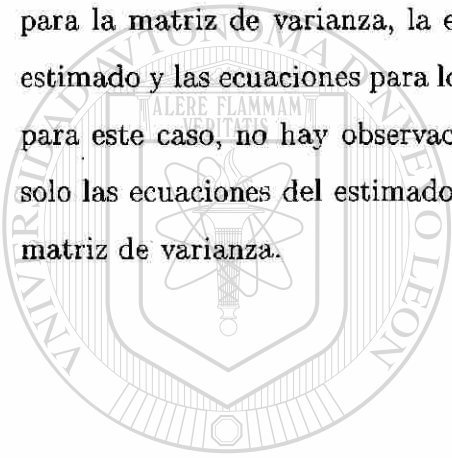
El algoritmo completo para resolver este problema de control óptimo es descrito a continuación:

- Resolver la ecuación para la matriz de varianza $S(t)$ con la condición inicial $S(0) = 0$ y el salto $\Delta S(t_1)$ en el punto t_1 ;
- Resolver la ecuación para la matriz de ganancia $P(t)$ con la condición terminal $P(T) = \psi$ y el salto $\Delta P(t_1)$ en el punto t_1 ;
- Determinar la condición inicial $P(0)$;
- Calcular la altitud inicial ajustada h_0 ;
- Sustituyendo $u^*(t, s)$ en las ecuaciones del estimado óptimo y resolviendo estas con las condiciones iniciales $\hat{h}(0) = h_0$ y $\hat{v}(0) = 0$, se obtiene la ecuación de la trayectoria

óptimamente controlada $[\hat{h}(t), \hat{v}(t)] = \hat{x}(t)$, donde el estimado óptimamente controlado de la velocidad $\hat{v}(t)$ tiene un salto en el punto t_1 , y el estimado óptimamente controlado de la altitud ajustada $\hat{h}(t)$ es continuo;

- El estimado óptimamente controlado de la altitud máxima deseada es determinado como $\hat{h}(T) - h_0$.

Como se puede verificar, los algoritmos obtenidos para el controlador contienen la ecuación para la matriz de varianza, la ecuación para la matriz de ganancia, la ecuación para el estimado y las ecuaciones para los saltos de las matrices de ganancia y de varianza. Ya que para este caso, no hay observaciones. Mientras que los algoritmos del control contienen solo las ecuaciones del estimado óptimo, de la matriz de ganancia y de los saltos para la matriz de varianza.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Capítulo 5

Filtrado Óptimo en Sistemas Polinomiales

5.1. Filtrado Óptimo para Ecuaciones de Estado y de Observaciones Lineales

5.1.1. Planteamiento del Problema

Previo al caso polinomial, esta sección trata del caso lineal, correspondiente al filtro de Kalman-Bucy [46]. es decir, con ecuaciones de estado y de observación lineales. Sea un proceso aleatorio no observable $x(t)$ que satisface la ecuación lineal

$$dx(t) = (a_0(t) + a(t)x(t))dt + b(t)dW_1(t), x(t_0) = x_0, \quad (5.1)$$

y las observaciones lineales son dadas por :

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t))dt + B(t)dW_2(t). \quad (5.2)$$

donde $W_1(t)$ y $W_2(t)$ son procesos de Wiener, para los cuales su derivada en sentido de la convergencia débil en media cuadrada para procesos estocásticos, es un ruido blanco Gaussiano, que son independientes uno del otro y del valor inicial Gaussiano x_0 . El problema de filtrado consiste en encontrar las ecuaciones dinámicas para el mejor estimado del proceso real $x(t)$ al tiempo t , basado en las observaciones $Y(t) = \{y(s)|0 \leq s \leq t\}$, el cual es la esperanza condicional $m(t) = E[x(t)|Y(t)]$ del proceso real $x(t)$ con respecto a las observaciones $Y(t)$. Sea $P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T|Y(t)]$ la varianza del error (función de correlación).

5.1.2. Solución

La solución a este problema es dada por el siguiente sistema de ecuaciones, el cual es cerrado con respecto a las variables $m(t)$ y $P(t)$:

$$dm(t) = (a_0(t) + a(t)m(t))dt + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} \times \quad (5.3)$$

$$[dy(A_0(t) + A(t)m(t))]dt,$$

$$m(t_0) = E[x(t_0)|y(t_0)],$$

$$dP(t) = (a(t)P(t) + P(t)a^T(t) + b(t)b^T(t))dt - P(t) \times$$

$$A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t)dt,$$

$$P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T|y(t_0)].$$

5.2. Ecuación de Kushner para el Estado no Lineal y Observaciones lineales

5.2.1. Planteamiento del Problema

En el caso de la ecuación de estado no lineal, el problema es más complicado. Sea un proceso aleatorio no observable $x(t)$ que satisface la ecuación

$$dx(t) = (f(x(t)))dt + b(t)dW_1(t), x(t_0) = x_0, \quad (5.4)$$

y las observaciones lineales son dadas por

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t))dt + B(t)dW_2(t), \quad (5.5)$$

donde $W_1(t)$ y $W_2(t)$ son procesos de Wiener independientes uno del otro y del valor inicial Gaussiano x_0 . Todos los coeficientes en (5.4) y en (5.5) se consideran funciones determinísticas dependientes solo del tiempo t . El mejor estimado es la esperanza condicional $m(t) = E[x(t)|Y(t)]$ del proceso real $x(t)$ con respecto de las observaciones $Y(t)$, y $P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T|Y(t)]$ es la varianza condicional del error (función de correlación).

5.2.2. Solución

Dado que la ecuación de observaciones es lineal, el proceso de innovación está dado por

$$\begin{aligned} \nu(t) &= y(t) - (A_0(t) + A(t)m(t)) \\ &= (A_0(t) + A(t)x(t))dt + B(t)dW_2(t) - (A_0(t) + A(t)m(t)) \\ &= A(t)(x(t) - m(t)) + B(t)dW_2(t) \end{aligned}$$

es un proceso de Wiener en el caso de disturbios Gaussianos (ver [62]), y $B(t)dW_2(t)$ es también un proceso de Wiener, entonces la variable aleatoria $A(t)(x(t) - m(t))$ es condicionalmente Gaussiana con respecto a las observaciones para cada tiempo t [72]. Si la matriz A^{-1} existe, entonces la variable aleatoria $(x(t) - m(t))$ es también condicionalmente Gaussiana [72]. En este caso, la ecuación de Kushner para el estimado óptimo $m(t) = E[x(t)|Y(t)]$ toma la forma que se obtiene de la ecuación general de Kushner (ver [62]) y la ecuación de observación (5.5):

$$\begin{aligned} dm(t) &= E[f(x(t))|y(t)] + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} \times \\ &\quad [dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt], \\ m(t_0) &= E[x(t_0)|y(t_0)]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ahora, si la función $f(x(t)) = a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t) + \dots$ es polinomial, debe ser posible encontrar un filtro finito-dimensional en forma cerrada para las variables $m(t)$ y $P(t)$, usando el hecho de que la variable $(x(t) - m(t))$ es condicionalmente Gaussiana. Esto implica que todos los momentos centrales impares de esta variable Gaussiana $m_1 = E[(x(t) - m(t))|Y(t)]$, $m_3 = E[(x(t) - m(t))^3|Y(t)]$, $m_5 = E[(x(t) - m(t))^5|Y(t)]$, ... son iguales a 0, y todos los momentos centrales pares $m_2 = E[(x(t) - m(t))^2|Y(t)]$, $m_4 = E[(x(t) - m(t))^4|Y(t)]$, ... pueden ser representados a partir de la varianza $P(t)$. Por ejemplo: $m_2 = P$, $m_4 = 3P^2$, $m_6 = 15P^3$, ... etc. Además, todos los momentos superiores de $x(t) - m(t)$ con respecto a $Y(t)$ pueden ser expresados usando $P(t)$, y esto indica que debe existir la posibilidad de obtener el filtro óptimo para el caso polinomial.

5.3. Filtro Óptimo Polinomial para la Ecuación de Estado de Tercer Grado y Observaciones Lineales

5.3.1. Planteamiento del Problema

En esta sección se aplica el procedimiento anterior, para obtener el filtro óptimo para el caso en que la ecuación de estado es polinomial de tercer orden: $f(x) = a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t)$:

$$\begin{aligned} dx(t) &= (a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t))dt + b(t)dW_1(t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

y las observaciones lineales están dadas por

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t))dt + B(t)dW_2(t), \quad (5.8)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $x = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$, $x^2(t) = [x_1^2(t) \ x_2^2(t) \ x_3^2(t) \ \dots \ x_n^2(t)]^T$,

$x^3(t) = [x_1^3(t) \ x_2^3(t) \ x_3^3(t) \ \dots \ x_n^3(t)]^T$.

5.3.2. Solución

Dado que todos los momentos centrales impares $(x(t) - m(t))$ son iguales a 0 y todos los momentos centrales pares pueden ser representados como funciones de $P(t)$, los mayores momentos iniciales del estado $x(t)$ con respecto a las observaciones $Y(t)$ pueden ser expresados también como funciones de $m(t)$ y $P(t)$, como se hará a continuación. Sea

$m(t) \in \mathbb{R}^n$ el vector del estimado óptimo $m(t) = [m_1(t) \ m_2(t) \ \dots \ m_n(t)]^T$; $P(t) \in \mathbb{R}^n$ es la matriz del error; $p(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector cuyos componentes son las varianzas de los componentes de $x(t)$, i.e., los elementos de la diagonal de la matriz $P(t)$; $m^2(t)$ es definido como el vector cuyos componentes son los cuadrados de los componentes del vector $m(t)$: $m^2(t) = [m_1^2(t) \ m_2^2(t) \ \dots \ m_n^2(t)]^T$; $P(t)m(t)$ es el producto convencional de una matriz $P(t)$ por un vector $m(t)$; y $p(t) * m(t)$ es el producto de dos vectores por sus componentes: $p(t) * m(t) = [p_1(t)m_1(t) \ p_2(t)m_2(t) \ \dots \ p_n(t)m_n(t)]^T$. Usando la notación anterior, la expresión para el segundo momento inicial está dada por

$$E[x^2(t)|Y(t)] = p(t) + m^2(t). \quad (5.9)$$

Dado que $E[(x(t) - m(t))^3|Y(t)] = 0$, entonces $E[(x(t) - m(t))^3|Y(t)] = E[x^3(t)|Y(t)] - 3m(t) * E[x^2(t)|Y(t)] + 3m^2(t) * E[x(t)|Y(t)] - m^3(t) = 0$. Sustituyendo (5.9) en la ecuación anterior, se obtiene la expresión para el tercer momento

$$E[x^3(t)|Y(t)] = 3p(t) * m(t) + m^3(t). \quad (5.10)$$

Tomando en cuenta que $E[(x(t) - m(t))^4|Y(t)] = 3p^2(t)$, la siguiente igualdad es válida:

$$E[(x(t) - m(t))^4|Y(t)] = E[x^4(t)|Y(t)] - 4m(t) * E[x^3(t)|Y(t)] + \quad (5.11)$$

$$6m^2(t) * E[x^2(t)|Y(t)] - 4m^3(t) * E[x(t)|Y(t)] + m^4(t) = 3p^2(t),$$

donde $m^3(t) = [m_1^3(t) \ m_2^3(t) \ \dots \ m_n^3(t)]^T$ y $m^4(t) = [m_1^4(t) \ m_2^4(t) \ \dots \ m_n^4(t)]^T$.

Sustituyendo (5.9) y (5.10) y haciendo las operaciones algebraicas correspondientes, se obtiene la expresión para el cuarto momento inicial

$$E[x^4(t)|Y(t)] = 3p^2(t) + 6p(t) * m^2(t) + m^4(t). \quad (5.12)$$

La representación del quinto momento inicial puede ser obtenida análogamente usando la igualdad $E[x^5(t)|Y(t)] = 0$ y sustituyendo en las expresiones obtenidas previamente

(5.9)-(5.12):

$$E[x^5(t)|Y(t)] = 15m(t) * p^2(t) + 10p(t) * m^3(t) + m^5(t), \quad (5.13)$$

donde $m^5(t) = [m_1^5(t) \ m_2^5(t) \ \dots \ m_n^5(t)]^T$. Además, en el caso de la ecuación de estado de tercer grado, $f(x(t)) = a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t)$, la ecuación de Kushner (5.6) para el estimado óptimo $m(t) = E[x(t)|Y(t)]$ puede ser reducida a

$$\begin{aligned} dm(t) = & E[f(x(t))|Y(t)]dt + P^T(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} \times \\ & (dy - (A_0(t) + A(t)m(t))dt) \\ = & (E[a_0(t)|Y(t)] + E[a_1(t)x(t)|Y(t)] + E[a_2(t)x^2(t)|Y(t)] + \\ & E[a_3(t)x^3(t)|Y(t)])dt + \\ & P^T(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}(dy - (A_0(t) + A(t)m(t))dt). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Usando las representaciones (5.9) y (5.10) para el segundo y tercer momento, la ecuación del estimado óptimo toma la forma

$$\begin{aligned} dm(t) = & (a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)p(t) + a_2(t)m^2(t) + \\ & a_3(t)(3p(t) * m(t) + m^3(t))dt + P^T(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} \times \\ & (dy - (A_0(t) + A(t)m(t))dt), \\ m(t_0) = & E[x(t_0)|y(t_0)]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

El siguiente paso es obtener la matriz de covarianza $P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T|Y(t)]$. Diferenciando la igualdad anterior respecto a t :

$$\begin{aligned} P(t) &= E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T|Y(t)] \\ dP(t) &= dE[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T|Y(t)] \\ &= E[d[x(t)(x(t) - m(t))^T - m(t)(x(t) - m(t))^T]|Y(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E[(dx(t))(x(t) - m(t))^T + x(t)d(x(t) - m(t))^T] | Y(t) \\
&= E[(dx(t))(x(t) - m(t))^T + x(t)(dx(t) - dm(t))^T | Y(t)] \\
&= E[(dx(t))(x(t) - m(t))^T | Y(t)] + E[x(t) \times \\
&\quad (dx(t) - dm(t))^T | Y(t)]
\end{aligned}$$

y sustituyendo las expresiones para $dx(t)$ y $dm(t)$ dadas por (5.4) y (5.15), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
dP(t) = & E[(a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t) + b(t) \times \\
& dW_1(t))(x(t) - m(t))^T dt + x(t)(a_0(t) + a_1(t)x(t) + \\
& a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t) + b(t)dW_1(t) - a_0(t) - a_1(t)m(t) - \\
& a_2(t)p(t) - a_2(t)m^2(t) + 3a_3(t)p(t) * m(t) - \\
& a_3(t)m^3(t))dt - Kd\nu)^T | Y(t)], \tag{5.16}
\end{aligned}$$

donde $K(t) = P^T(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}$ y $\nu(t)$ es el proceso de innovación, $d\nu(t) = dy(t) - (A_0(t) + A_1(t)m(t))dt$. Entonces la ecuación anterior es transformada en

$$\begin{aligned}
dP(t) = & (a_0(t)E[(x(t) - m(t))^T | Y(t)] + a_1(t)E[(x(t)(x(t)m(t))^T | \\
& Y(t)] + a_2(t)E[x^2(t)(x(t)m(t))^T | Y(t)] + a_3(t)E[(x^3(t) \times \\
& (x(t)m(t))^T | Y(t)] + E[x(t)(a_1(t)x(t))^T | Y(t)] + \\
& E[x(t)(a_2(t)x^2(t))^T | Y(t)] + E[x(t)a_3(t)x^3(t))^T | Y(t)] - \\
& E[x(t)(a_1(t)m(t))^T | Y(t)] - E[x(t)(a_2(t)p(t))^T | Y(t)] - \\
& E[x(t)(a_2(t)m^2(t))^T | Y(t)] - E[x(t)(a_3(t)p(t) * m(t))^T | Y(t)] - \\
& E(x(t)(a_3(t)m^3(t))^T | Y(t)) + \tag{5.17} \\
& b(t)b^T(t) - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t)dt.
\end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo (5.9)-(5.12) y haciendo las operaciones algebraicas correspondientes, la ecuación para la varianza toma la forma

$$\begin{aligned}
 dP(t) = & (a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2a_2(t)m(t) * P(t) + & (5.18) \\
 & 2(P(t) * m^T(t))a_2^T(t) + 3a_3(t)(p(t) * P(t)) + \\
 & 3(p(t) * P(t))^T a_3^T(t) + 3a_3(t)(m^2(t) * P(t)) + \\
 & 3(P(t) * (m^2(t))^T) a_3^T(t) + (b(t)b^T(t)) - \\
 & P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t)dt,
 \end{aligned}$$

con: $P(t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | y(t_0))$.

Definición El producto $m(t) * P(t)$ entre un vector $m(t)$ y una matriz $P(t)$ es definido como el vector cuyos renglones son iguales a los renglones de $P(t)$, multiplicados por el correspondiente elemento del vector $m(t)$:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m_1(t) & P_{11}(t) & P_{12}(t) & \cdots & P_{1n}(t) \\ m_2(t) & P_{21}(t) & P_{22}(t) & \cdots & P_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n(t) & P_{n1}(t) & P_{n2}(t) & \cdots & P_{nn}(t) \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} m_1(t)P_{11}(t) & m_1(t)P_{12}(t) & \cdots & m_1(t)P_{1n}(t) \\ m_2(t)P_{21}(t) & m_2(t)P_{22}(t) & \cdots & m_2(t)P_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n(t)P_{n1}(t) & m_n(t)P_{n2}(t) & \cdots & m_n(t)P_{nn}(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Definición La matriz transpuesta $P(t) * m^T(t) = (m(t) * P(t))^T$ es definida como la matriz cuyas columnas son iguales a las columnas de la matriz $P(t)$, multiplicadas por el elemento correspondiente de $m(t)$:

$$\begin{bmatrix} m_1(t) & m_2(t) & \cdots & m_n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) & \cdots & P_{1n}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) & \cdots & P_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}(t) & P_{n2}(t) & \cdots & P_{nn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1(t)P_{11}(t) & m_2(t)P_{12}(t) & \cdots & m_n(t)P_{1n}(t) \\ m_1(t)P_{21}(t) & m_2(t)P_{22}(t) & \cdots & m_n(t)P_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1(t)P_{n1}(t) & m_2(t)P_{n2}(t) & \cdots & m_n(t)P_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

Así, la ecuación (5.15) para el estimado óptimo $m(t)$ y la ecuación (5.18) para la matriz de covarianza $P(t)$ forman un sistema cerrado de ecuaciones de filtro óptimo en el caso de una ecuación de estado polinomial de tercer grado y observaciones lineales, dadas por las ecuaciones (5.7) y (5.8), respectivamente.

5.4. Filtro Óptimo para Ecuaciones de Estado Polinomial de Cuarto Grado y Observaciones Lineales

5.4.1. Planteamiento del Problema

Generalizando el resultado de la sección anterior, el procedimiento es aplicado para obtener el filtro óptimo para el caso en el cual la ecuación de estado es polinomial de cuarto grado, obtenido de (5.4) si $f(x) = a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t) + a_4(t)x^4(t)$:

$$dx(t) = (a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t) + a_4(t)x^4(t))dt + b(t)dW_1(t), \quad (5.19)$$

$$x(t_0) = x_0,$$

y las observaciones lineales (5.8), donde $x \in \mathbb{R}^n$, $x^4(t) = [x_1^4(t) \ x_2^4(t) \ x_3^4(t) \ \dots \ x_n^4(t)]^T$.

5.4.2. Solución

Siguiendo el esquema previo y sustituyendo las expresiones (5.9)-(5.12) para el momento inicial condicional de $x(t)$ en la ecuación de Kushner (5.6), se obtiene la siguiente ecuación para el estimado óptimo:

$$dm(t) = (a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)p(t) + a_2(t)m^2(t) + 3a_3(t) \times \\ p(t) * m(t) + a_3(t)m^3(t) + 3a_4(t)p^2(t) + \quad (5.20)$$

$$3a_4(t)p(t) * m^2(t) + a_4(t)m^4(t))dt + P^T(t)A^T(t)(B(t) \times$$

$$B^T(t))^{-1}(dy - (A_0(t) + A(t)m(t))dt),$$

$$m(t_0) = E[x(t_0)|y(t_0)]$$

En la misma forma, la ecuación de la varianza toma la forma:

$$dP(t) = (a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2a_2(t)(m(t) * P(t)) + 2(P(t) * \quad (5.21)$$

$$m^T(t))a_2^T(t) + 3a_3(t)(p(t) * P(t)) +$$

$$3(p(t) * P(t))^T a_3^T(t) + 3a_3(t)(m^2(t) * P(t)) + 3(P(t) *$$

$$(m^2(t))^T) a_3^T(t) + 12a_4(t)((m(t) * p(t)) * P(t)) +$$

$$12(P(t) * (m(t) * p(t))^T)(a_4(t))^T + 4a_4(t)(m^3(t) * \quad (5.21)$$

$$P(t)) + 4(P(t) * (m^3(t))^T)(a_4(t))^T + (b(t)b^T(t)) -$$

$$P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t)dt,$$

$$P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | y(t_0)].$$

Nota. Si continuamos obteniendo filtros para ecuaciones de estados polinomiales de quinto, sexto grados, etc., las ecuaciones correspondientes al estimado $m(t)$ y la varianza $P(t)$ contendrán los términos de las ecuaciones de los grados anteriores, además de los nuevos términos correspondientes a ese grado. En otras palabras, las ecuaciones de filtrado para el estado cuadrático contienen todos los términos de las ecuaciones del filtrado lineal, más los términos cuadráticos; las ecuaciones de filtrado para el estado cúbico contienen todos los términos del filtro lineal y cuadrático, más los nuevos términos cúbicos, y así sucesivamente.

5.5. Aplicación del Filtro Óptimo Polinomial a un Sistema Automotriz

5.5.1. Planteamiento del Problema

Esta sección presenta la aplicación del filtro obtenido para ecuaciones de estado polinomiales de tercer grado sobre observaciones lineales para estimar las variables de estado, de orientación y de velocidad angular, en un modelo cinemático no lineal de un carro en movimiento [63], donde las ecuaciones de estado son:

$$\begin{aligned}
 dx(t) &= v \cos \phi(t) dt \\
 dy(t) &= v \sin \phi(t) dt \\
 d\phi(t) &= (v/l) \tan \delta(t) dt \\
 d\delta(t) &= u(t) dt
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Aquí, $x(t)$ y $y(t)$ son las coordenadas cartesianas del centro de masa del carro, $\phi(t)$ es el ángulo de orientación. v es la velocidad, l es la longitud entre los dos ejes del carro, $\delta(t)$

es el ángulo del volante, y $u(t)$ es la variable de control (velocidad angular del volante). Todas las variables tienen condición inicial cero. El problema es encontrar los estimados óptimos de las variables $\phi(t)$ y $\delta(t)$, usando las observaciones directas, las cuales contienen disturbios modelados como ruidos blancos Gaussianos, que se asumen independientes e idénticamente distribuidos

$$dz_\phi(t) = \phi(t)dt + f_1(t)dt \quad (5.23)$$

$$dz_\delta(t) = \delta(t)dt + f_2(t)dt$$

donde $z_\phi(t)$ es la variable de observación para $\phi(t)$, $z_\delta(t)$ es la variable de observación para $\delta(t)$, y $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son ruidos blancos Gaussianos independientes uno del otro.

Aplicando los algoritmos de filtrado al sistema no lineal (5.22) y observaciones lineales (5.23), se obtendrá la expansión en series de Taylor (con $t = 0$) para las últimas dos ecuaciones (5.22), para formar un polinomio de tercer grado (el cuarto grado no aparece en la expansión de Taylor para la tangente)

$$d\phi(t) = \left(\left(\frac{v}{l} \right) \delta(t) + \left(\frac{v}{l} \right) \left(\frac{\delta^3(t)}{3} \right) \right) dt \quad (5.24)$$

$$d\delta(t) = u(t)dt$$

5.5.2. Solución

Las ecuaciones de filtrado (5.15) y (5.21) para el estado polinomial de tercer grado (5.24) sobre observaciones lineales (5.23) toman la forma

$$\begin{aligned} dm_\phi &= \left(\frac{v}{l} \right) m_\delta + \left(\frac{v}{3l} \right) (3p_\delta + m_\delta^3) + p_{\phi\phi}(z_\phi - m_\phi) + p_{\phi\delta}(z_\delta - m_\delta) \\ dm_\delta &= u(t) + p_{\delta\phi}(z_\phi - m_\phi) + p_{\delta\delta}(z_\delta - m_\delta) \\ dp_{\phi\phi} &= (2v/l)p_{\delta\phi}p_{\delta\delta} + \frac{2v}{l}p_{\delta\phi} + \frac{2v}{l}m_\phi^2p_{\delta\phi} - p_{\phi\phi}^2 - p_{\phi\delta}^2 \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned}
 dp_{\phi\delta} &= \frac{v}{l} p_{\delta\delta} + \frac{v}{l} m_{\delta}^2 p_{\delta\delta} - p_{\phi\phi} p_{\phi\delta} - p_{\phi\delta} p_{\delta\delta} \\
 dp_{\delta\delta} &= -p_{\delta\phi}^2 - p_{\delta\delta}^2
 \end{aligned}$$

donde m_{ϕ} y m_{δ} son los estimados para las variables ϕ y δ , y $p_{\phi\phi}, p_{\phi\delta}, p_{\delta\delta}$ son elementos de la matriz simétrica de covarianza P .

Los estimados obtenidos resolviendo las ecuaciones (5.25) son comparados con los estimados convencionales de Kalman-Bucy que satisfacen las ecuaciones de filtrado de Kalman-Bucy para un estado del sistema linealizado (solo el término lineal está presente de la expansión de Taylor para la tangente) sobre observaciones lineales (5.23)

$$\begin{aligned}
 dm_{\phi} &= \frac{v}{l} m_{\delta} + p_{\phi\phi}(z_{\phi} - m_{\phi}) + p_{\phi\delta}(z_{\delta} - m_{\delta}) \\
 dm_{\delta} &= u(t) + p_{\delta\phi}(z_{\phi} - m_{\phi}) + p_{\delta\delta}(z_{\delta} - m_{\delta}) \\
 dp_{\phi\phi} &= \frac{2v}{l} p_{\delta\phi} - p_{\phi\phi}^2 - p_{\phi\delta}^2 \\
 dp_{\phi\delta} &= \frac{v}{l} p_{\delta\delta} - p_{\phi\phi} p_{\phi\delta} - p_{\phi\delta} p_{\delta\delta} \\
 dp_{\delta\delta} &= -p_{\delta\phi}^2 - p_{\delta\delta}^2
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Resolviendo los sistemas de ecuaciones de filtrado (5.25) y (5.26), por medio de simulación numérica son obtenidos los resultados. Los valores obtenidos de los estimados m_{ϕ} y m_{δ} son comparados, en ambos casos, con el valor real de las variables m_{ϕ} y m_{δ} en el sistema original (5.22) y su aproximación polinomial (5.24). Entonces, obtenemos dos conjuntos de gráficas.

- Gráficas de las variables ϕ y δ para la aproximación polinomial del sistema (5.24); gráficas de los estimados del filtro de Kalman-Bucy m_{ϕ} y m_{δ} que satisfacen las ecuaciones (5.26); y gráficas de los estimados del filtro polinomial de tercer grado m_{ϕ} y m_{δ} que satisfacen las ecuaciones (5.25) (Figuras 5.1 y 5.2).

- Gráficas de las variables ϕ y δ para el sistema original (5.22); gráficas de los estimados del filtro de Kalman-Bucy m_ϕ y m_δ que satisfacen las ecuaciones (5.26); y gráficas de los estimados del filtro polinomial de tercer grado m_ϕ y m_δ que satisfacen las ecuaciones (5.25) (Figuras 5.3 y 5.4).

Para cada uno de los cuatro filtros y los dos sistemas de referencias involucrados en la simulación, fueron asignados los siguientes valores iniciales:

$$u = 1, l = 1m, u(t) = 0.05, m_\phi(0) = 10, m_\delta(0) = 0.1, \phi(0) = \delta(0) = 0,$$

$$P_{\phi\phi}(0) = 100, P_{\phi\delta}(0) = 10, P_{\delta\delta}(0) = 1.$$

Para la realización de los disturbios Gaussianos $f_1(t)$ y $f_2(t)$ en (5.23) y todas las simulaciones en adelante, es utilizado el block correspondiente al ruido blanco que aparece en el *MatLab 6, versión 1.2*. Cabe mencionar que el bloque que aparece como ruido blanco en el *MatLab 6, versión 1.2*, corresponde a una aproximación del ruido blanco, ya que por su naturaleza, es físicamente no representable. Se puede decir que este bloque, que representa al ruido blanco, está formado por una secuencia de impulsos en tiempos discretos, donde la amplitud de los impulsos es proporcional al tiempo de discretización Δt [75].

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

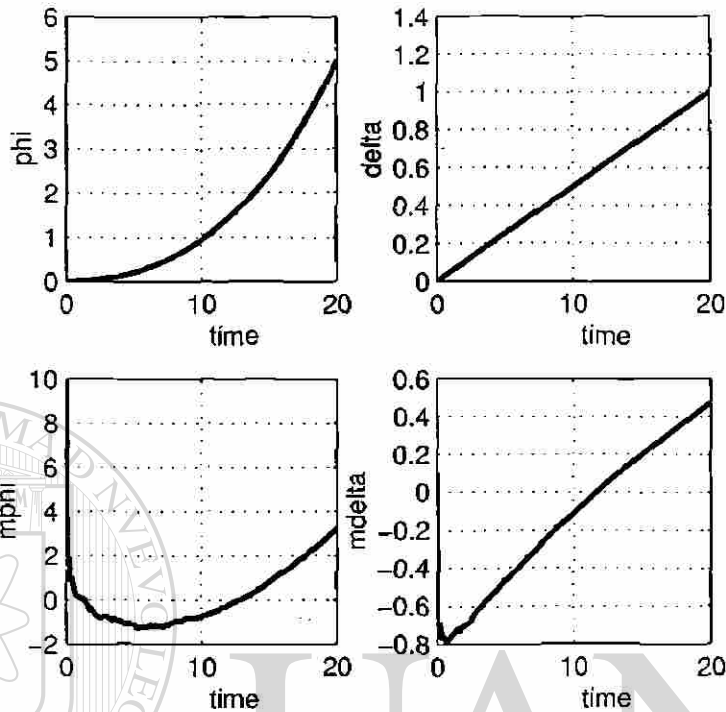


Figura 5.1: Gráficas de las variables ϕ y δ para la aproximación polinomial del sistema (5.24); Gráficas del filtro de Kalman-Bucy; los estimados m_ϕ y m_δ satisfacen las ecuaciones (5.23). $\phi = \text{phi}$ y $\delta = \text{delta}$, $m_\phi = \text{mphi}$ y $m_\delta = \text{mdelta}$.

Los valores obtenidos de las variables de referencia ϕ y δ (aproximación polinomial (5.24)) son comparados con el filtro de Kalman-Bucy y los estimados para el filtro polinomial de tercer grado m_ϕ y m_δ , en el tiempo terminal $T = 20\text{min}$, y son presentados en la siguiente tabla (correspondiente a las Figuras 5.1 y 5.2):

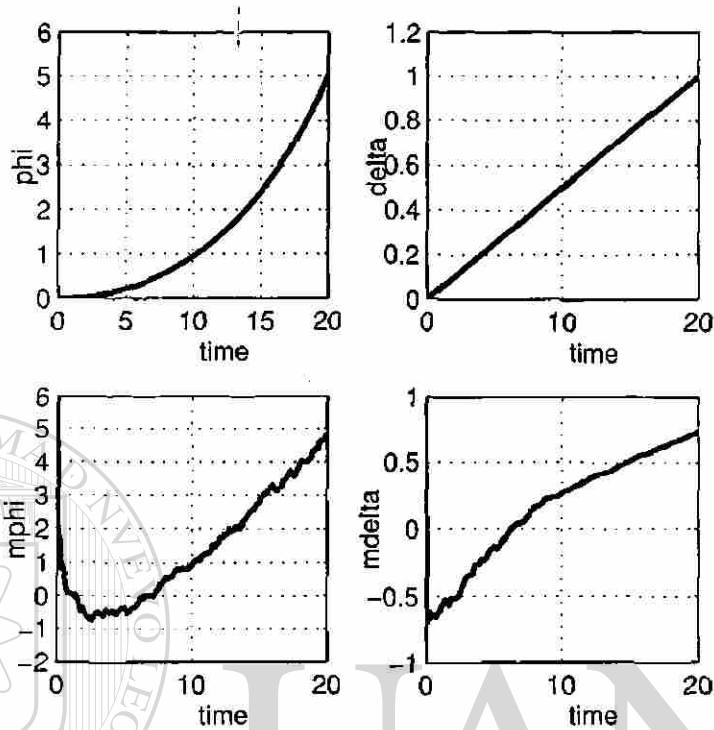


Figura 5.2: Gráficas de las variables ϕ y δ para la aproximación polinomial del sistema (5.24); Gráficas del filtro polinomial de tercer grado; los estimados m_ϕ y m_δ satisfacen las ecuaciones (5.25). $\phi = \text{phi}$ y $\delta = \text{delta}$, $m_\phi = \text{mphi}$ y $m_\delta = \text{mdelta}$.

Filtro de Kalman-Bucy Filtro polinomial de grado 3

$\phi(20) = 5rad$	$\phi(20) = 5rad$
$\delta(20) = 1rad$	$\delta(20) = 1rad$
$m_\phi(20) = 3.25$	$m_\phi(20) = 4.84$
$m_\delta(20) = 0.475$	$m_\delta(20) = 0.73$

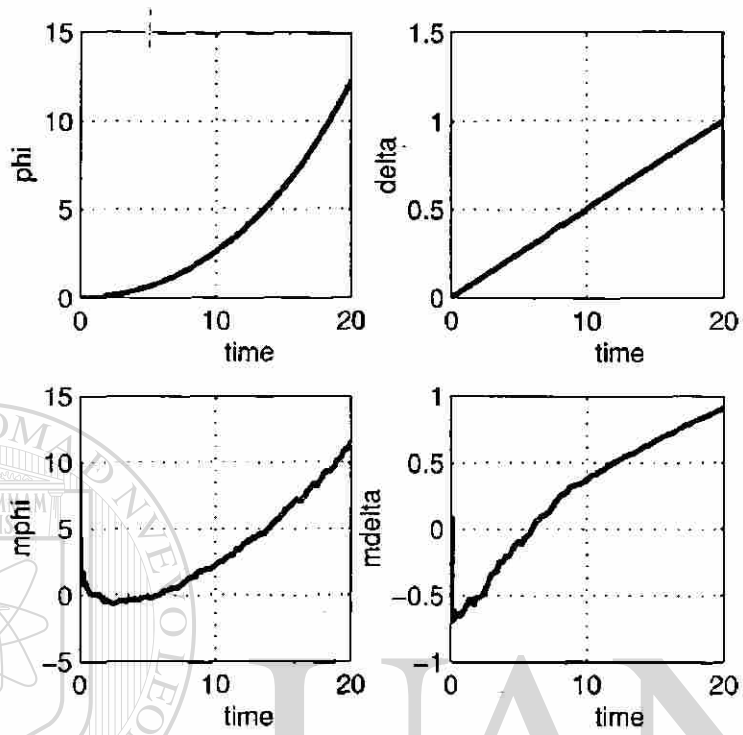


Figura 5.3: Gráficas de las variables ϕ y δ para el sistema original (5.22); Gráficas de los estimados m_ϕ y m_δ del filtro de Kalman-Bucy, los cuales satisfacen las ecuaciones (5.26).

$\phi = \text{phi}$ y $\delta = \text{delta}$, $m_\phi = \text{mphi}$ y $m_\delta = \text{mdelta}$.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

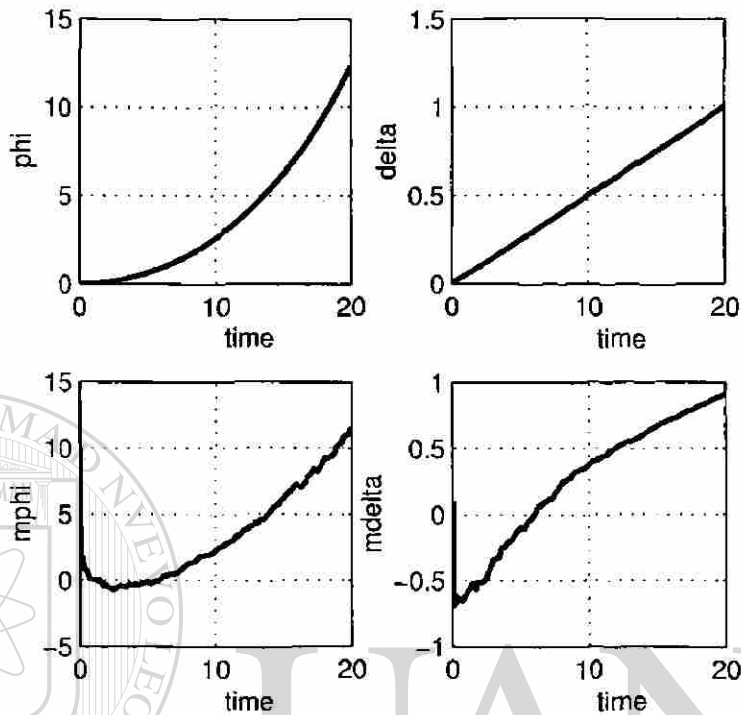


Figura 5.4: Gráficas de las variables ϕ y δ para el sistema original (5.22); Gráficas del filtro polinomial de tercer grado; los estimados m_ϕ y m_δ satisfacen las ecuaciones (5.25). $\phi = \text{phi}$ y $\delta = \text{delta}$, $m_\phi = \text{mphi}$ y $m_\delta = \text{mdelta}$.

Los valores de las variables ϕ y δ obtenidos que satisfacen el sistema original (5.22), son comparados con los estimados del filtro de Kalman-Bucy y con los estimados del filtro polinomial óptimo de tercer grado m_ϕ y m_δ en el tiempo terminal $T = 20\text{min}$, en la siguiente tabla (correspondiente a las Figuras 5.3 y 5.4):

Filtro de Kalman-Bucy	Filtro polinomial de tercer grado
-----------------------	-----------------------------------

$$\phi(20) = 12.3rad$$

$$\phi(20) = 12.5rad$$

$$\delta(20) = 1rad$$

$$\delta(20) = 1rad$$

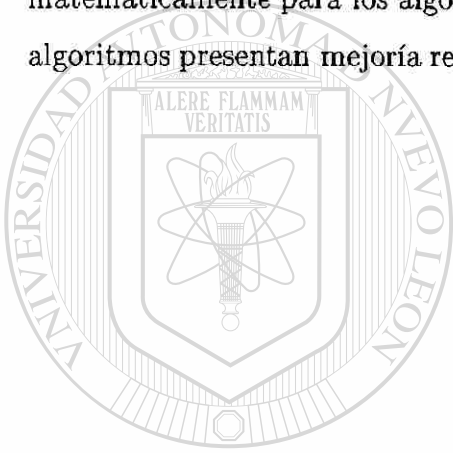
$$m_{\phi}(20) = 7.08$$

$$m_{\phi}(20) = 11.5$$

$$m_{\delta}(20) = 0.608$$

$$m_{\delta}(20) = 0.91$$

Los resultados obtenidos mediante simulación ilustran los resultados obtenidos matemáticamente para los algoritmos de filtrado polinomial. Mostrando que estos algoritmos presentan mejoría respecto a los algoritmos de filtrado lineal de Kalman-Bucy.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Capítulo 6

Ecuaciones del Filtro para Ecuaciones de Estado Bilineales y su Aplicación a la Estimación de un Proceso de Polimerización

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

6.1. Ecuaciones del Filtro para Ecuaciones de Estado [®] Bilineales

6.1.1. Planteamiento del Problema

Dada la función $f(x)$ de la forma:

$$f(x) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)xx^T \quad (6.1)$$

donde x es un vector n -dimensional, a_1 es una matriz $n \times n$, y a_2 es un tensor de 3 dimensiones $n \times n \times n$.

6.1.2. Solución

Bajo las hipótesis para el caso polinomial, y repitiendo los procedimientos anteriores, las ecuaciones del filtro para el caso bilineal toman la forma:

$$dm(t) = (a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)m(t)m^T(t) + a_2(t)P(t))dt + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}[dy(t) - A(t)m(t)dt], \quad (6.2)$$

$$m(t_0) = E(x(t_0) | Y(t_0)),$$

$$dP(t) = (a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2(a_2(t)m(t))P(t) + 2P(t)(a_2(t)m(t))^T + b(t)b^T(t))dt - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t)dt, \quad (6.3)$$

$$P(t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | Y(t_0)),$$

dado que el tercer momento central μ_3 es igual a 0, y el tercer momento inicial de $x(t)$ puede ser expresado usando el segundo y primer momentos, i.e., $P(t)$ y $m(t)$. En este caso lineal-bilineal, la ecuación de la varianza es también independiente de las observaciones $y(t)$, pero contiene términos bilineales $m(t)P(t)$ en su lado derecho y depende de $m(t)$; haciendo una conexión entre ambas ecuaciones, la ecuación del estimado es bilineal con respecto a m , como se esperaba.

6.2. Aplicación del Filtro Bilineal a la Estimación de un Proceso de Polimerización

6.2.1. Planteamiento del Problema

A continuación se desea aplicar el algoritmo de filtrado bilineal a un sistema mayor de dos ecuaciones. Después de revisar algunos trabajos, se encontró un modelo matemático de un proceso de polimerización, el cual es dado por Ogunnaike [64], y son consideradas para trabajar solo diez ecuaciones; a través de las cuales se pretende mostrar la eficacia de los algoritmos de filtrado obtenidos en esta tesis comparándolos con los algoritmos del filtro de Kalman-Bucy, haciendo la aclaración de que no se pretende resolver el problema físico-químico del reactor de Ogunnaike, solo mostrar la eficacia de los algoritmos de filtrado bilineal. Cabe mencionar que queda como trabajo a futuro, que en el área de Química, primero se determinara el grupo mínimo de ecuaciones que representan el proceso, para así aplicar el algoritmo en forma computacionalmente sensata (para una computadora de escritorio), o de otra manera, se requiere contar con una estación de trabajo para aplicar el algoritmo a el total de las 29 ecuaciones. Debe de notarse que la sola reducción del modelo pudiera ser el desarrollo de una tesis doctoral, que queda fuera de los objetivos de la presente investigación. Un proceso de polimerización consiste en la unión de varias moléculas idénticas para formar otra mayor. Un reactor es el recipiente en el cual se efectúa una reacción química, en este caso, la polimerización, en presencia de un catalizador. Un catalizador es una sustancia que provoca y fija una reacción. Las variables consideradas son: las concentraciones de los reactivos de entrada, los momentos de orden cero de la distribución del peso molecular (MWD), y sus primeros momentos de masa. Estas ecuaciones son intrínsecamente no lineales (bilineales), y su linealización produce grandes desviaciones de la dinámica del sistema real, como podrá verse en los resultados de

la simulación. Por supuesto, la hipótesis de que los momentos MWD pueden ser medidos en tiempo real es ficticia, dado que esto puede hacerse solo con grandes retardos de tiempo; por otro lado, nuestro objetivo es verificar el desempeño de los algoritmos de filtrado no lineal para un sistema no lineal y comparar éste con los algoritmos de filtrado lineal correspondientes al modelo linealizado. Las diez ecuaciones seleccionadas del modelo del proceso de polimerización de Ogunnaike [64] son las siguientes:

$$dC_{m1}/dt = [(1/V)d\Delta_{m1}/dt - ((1/\theta) + K_{L1}C^* + K_{11}\mu_P^o + K_{21}\mu_Q^o + K_{31}\mu_R^o)C_{m1}] \quad (6.4)$$

$$dC_{m2}/dt = (1/V)d\Delta_{m2}/dt - ((1/\theta) + K_{L2}C^* + K_{12}\mu_P^o + K_{22}\mu_Q^o)C_{m2};$$

$$dC_{m3}/dt = (1/V)d\Delta_{m3}/dt - ((1/\theta) + K_{13}\mu_P^o)C_{m3};$$

$$dC_{m4}/dt = (1/V)d\Delta_{m4}/dt - ((1/\theta) + K_d + K_{L1}C_{m1} + K_{L2}C_{m2})C^*;$$

$$d\mu_P^o/dt = (-1/\theta - K_{t1})\mu_P^o + K_{L1}C_{m1}C^* - (K_{12}C_{m2} + K_{13}C_{m3})\mu_P^o + K_{21}C_{m1}\mu_Q^o + K_{31}C_{m1}\mu_R^o;$$

$$d\mu_Q^o/dt = (-1/\theta)\mu_Q^o + K_{L2}C_{m2}C^* - (K_{21}C_{m1} + K_{t2})\mu_Q^o + K_{12}C_{m2}\mu_P^o;$$

$$d\mu_R^o/dt = (-1/\theta)\mu_R^o - (K_{31}C_{m1} + K_{t3})\mu_R^o + K_{13}C_{m3}\mu_P^o;$$

$$d\lambda_1^{100}/dt = (-1/\theta)\lambda_1^{100} + K_{L1}C_{m1}C^* + K_{L2}C_{m2}C^* + K_{11}C_{m1}\mu_P^o + K_{21}C_{m1}\mu_Q^o + K_{31}C_{m1}\mu_R^o;$$

$$d\lambda_1^{010}/dt = (-1/\theta)\lambda_1^{010} + K_{L1}C_{m1}C^* + K_{L2}C_{m2}C^* + K_{12}C_{m2}\mu_P^o + K_{22}C_{m2}\mu_Q^o;$$

$$d\lambda_1^{001}/dt = (-1/\theta)\lambda_1^{001} + (K_{L1}C_{m1} + K_{L2}C_{m2})C^* + K_{13}C_{m3}\mu_P^o;$$

Aquí, las variables de estado: C_{m1} , C_{m2} , y C_{m3} corresponden a las concentraciones del reactivo (monómero, o sea el compuesto constituido por moléculas simples); C^* es la concentración del catalizador activo; μ_P^o , μ_Q^o , y μ_R^o son los momentos de orden cero del peso molecular del producto (MWD); y λ_1^{100} , λ_1^{010} , y λ_1^{001} son los primeros momentos de

masa. El volumen del reactor V y el tiempo de residencia θ , y todos los coeficientes K s, son parámetros conocidos, y $\Delta_{m1}, \Delta_{m2}, \Delta_{m3}, \Delta_{m^*}$ corresponden a las velocidades de flujo de los reactivos y del catalizador activo en el reactor.

El problema de filtrado consiste en encontrar el estimado óptimo del estado no observable (6.4), suponiendo que las observaciones Y_i son directas y contienen ruidos blancos Gaussianos $\psi_{2i}, i = 1, \dots, 10$:

$$y_i = x_i + \psi_{2i}.$$

De este modo, x_1 denota C_{m1} , x_2 denota C_{m2} , y así sucesivamente, hasta x_{10} .

Re-escribiendo las ecuaciones de estado bilineales (6.1) y las ecuaciones de observación lineales (5.8), utilizando la notación de sumatorias y subíndices, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} dx_k(t)/dt &= a_{0k}(t) + \sum_i a_{1ki}(t)x_i(t) + \\ &\quad \sum_{ij} a_{2kij}(t)x_i(t)x_j(t) + \sum_i b_{ki}(t)\psi_{1i}(t), \quad k = 1, n, \\ y_k(t) &= A_{0k} + \sum_i A_{ki}(t)x_i(t) + \sum_i B_{ki}(t)\psi_{2k}(t), \end{aligned} \quad (6.5)$$

donde $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ son ruidos blancos Gaussianos. Entonces, las ecuaciones de filtrado (6.2),(6.3) pueden ser re-escritas como sigue:

$$\begin{aligned} dm_k(t)/dt &= a_{0k}(t) + \sum_i a_{1ki}(t)m_i(t) + \sum_{ij} a_{2kij}(t)m_i(t)m_j(t) + \\ &\quad \sum_{ij} a_{2kij}(t)P_{ij}(t)dt + \sum_{ij|ps} P_{kj}(t)A_{ji}^T(t)(B_{ip}(t)B_{ps}(t))^{-1}[dy_s - \\ &\quad A_{0s} - \sum_r A_{sr}(t)m_r(t)dt] \\ m_k(t_0) &= E[x_k(t_0)|Y(t_0)], \\ dP_{ij}(t) &= \sum_k a_{1ik}(t)P_{kj}(t) + \sum_j P_{kj}(t)a_{1jk}(t) + \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{kl} a_{2ikl}(t)m_l(t)P_{kj} + 2 \sum_{kl} a_{2jkl}(t)m_l(t)P_{ki}(t) + \\
& \sum_k b_{ik}(t)b_{kj}(t) - \sum_{klpsr} P_{ik}(t)A_{kl}^T(t)(B_{lp}(t)B_{ps}(t))^{-1}A_{sr}(t)P_{rj}(t), \\
P_{ij}(t_0) &= E[(x_i(t_0) - m_i(t_0))(x_j(t_0) - m_j(t_0))^T | Y(t_0)].
\end{aligned}$$

6.2.2. Solución

En esta situación, las ecuaciones bilineales de filtrado (6.6) para el vector de estimados óptimos $m(t)$ toman la forma:

$$dm_1(t)/dt = (1/V)d\Delta_{m1}/dt - ((1/\theta) + K_{L1}m_4(t) + K_{11}m_5(t) + \quad (6.7)$$

$$K_{21}m_6(t) + K_{31}m_7(t))m_1(t) - K_{L1}P_{14}(t) - K_{11}P_{15}(t) -$$

$$K_{21}P_{16}(t) - K_{31}P_{17}(t) + \sum_j P_{1j}[dy_j/dt - m_j];$$

$$dm_2(t)/dt = (1/V)d\Delta_{m2}/dt - ((1/\theta) + K_{L2}m_4(t) + K_{12}m_5(t) +$$

$$K_{22}m_6(t))m_2(t) - K_{L2}P_{24}(t) - K_{12}P_{25}(t) - K_{22}P_{26}(t) +$$

$$\sum_j P_{2j}[dy_j/dt - m_j];$$

$$dm_3(t)/dt = (1/V)d\Delta_{m3}/dt - ((1/\theta) + K_{13}m_5(t))m_3(t) -$$

$$K_{13}P_{35}(t) + \sum_j P_{3j}[dy_j/dt - m_j];$$

$$dm_4(t)/dt = (1/V)d\Delta_{m4}/dt - ((1/\theta) + K_d + K_{L1}m_1(t) +$$

$$K_{12}m_2(t))m_4(t) - K_{L1}P_{14}(t) - K_{12}P_{24}(t) +$$

$$\sum_j P_{4j}[dy_j/dt - m_j];$$

$$dm_5(t)/dt = (-1/\theta - K_{t1})m_5(t) + K_{L1}m_4(t)m_1(t) -$$

$$K_{12}m_2(t)m_5(t) + K_{21}m_6(t)m_1(t) +$$

$$K_{31}m_7(t)m_1(t) - K_{13}m_5(t)m_3(t) +$$

$$\begin{aligned}
& K_{L1}P_{14}(t) + K_{21}P_{16}(t) + K_{31}P_{17}(t) - K_{12}P_{25}(t) - \\
& K_{13}P_{35}(t) + \sum_j P_{5j}[dy_j/dt - m_j]; \\
dm_6(t)/dt &= (-1/\theta - K_{t2} - K_{21}m_1(t))m_6(t) + \\
& K_{L2}m_4(t)m_2(t) + K_{12}m_5(t)m_2(t) \\
& - K_{21}P_{16}(t) + K_{L2}P_{24}(t) + K_{12}P_{25}(t) + \\
& \sum_j P_{6j}[dy_j/dt - m_j]; \\
dm_7(t)/dt &= (-1/\theta - K_{t3} - K_{31}m_1(t))m_7(t) + K_{13}m_5(t)m_3(t) - \\
& K_{31}P_{17}(t) + K_{13}P_{35}(t) + \sum_j P_{7j}[dy_j/dt - m_j]; \\
dm_8(t)/dt &= (-1/\theta)m_8(t) + (K_{L1}m_4(t) + K_{11}m_5(t) + \\
& K_{21}m_6(t) + K_{31}m_7(t))m_1(t) + K_{L2}m_4(t)m_2(t) + \\
& K_{L1}P_{14}(t) + K_{11}P_{15}(t) + K_{21}P_{16}(t) + K_{31}P_{17}(t) + \\
& K_{L2}P_{24}(t) + \sum_j P_{8j}[dy_j/dt - m_j]; \\
dm_9(t)/dt &= (-1/\theta)m_9(t) + K_{L1}m_4(t)m_1(t) + K_{L2}m_4(t)m_2(t) + \\
& K_{12}m_5(t)m_2(t) + K_{22}m_6(t)m_2(t) + K_{L1}P_{14}(t) + \\
& K_{L2}P_{24}(t)K_{12}P_{25}(t) + K_{22}P_{26}(t) + \sum_j P_{9j}[dy_j/dt - m_j]; \\
dm_{10}(t)/dt &= (-1/\theta)m_{10}(t) + K_{L1}m_4(t)m_1(t) + K_{L2}m_4(t) \times \\
& m_2(t) + K_{13}m_5(t)m_3(t) + K_{L1}P_{14}(t) + K_{L2}P_{24}(t) + \\
& K_{13}P_{35}(t) + \sum_j P_{10j}[dy_j/dt - m_j].
\end{aligned}$$

Aquí, $m_1(t)$ es el estimado óptimo para C_{m1} , $m_2(t)$ para C_{m2} , y así sucesivamente, hasta $m_{10}(t)$. Las 55 componentes de las ecuaciones de la varianza son similarmente generadas por las ecuaciones (6.7). A continuación se presentan las diez ecuaciones de los elementos

de la diagonal de la matriz de varianza, que son:

$$P_{11}(t) = ((-2/\theta) - 4(K_{L1}m_4(t) + K_{11}m_5(t) + K_{21}m_6(t) + K_{31}m_7(t)))P_{11} - \quad (6.8)$$

$$P_{11}^2 - P_{12}^2 - P_{13}^2 - P_{14}^2 - P_{15}^2 - P_{16}^2 - P_{17}^2 - P_{18}^2 - P_{19}^2 - P_{110}^2;$$

$$P_{22}(t) = ((-2/\theta) + 4(-K_{L2}m_4(t)) - K_{12}m_5(t) - K_{22}m_6(t))P_{22}$$

$$- P_{21}^2 - P_{22}^2 - P_{23}^2 - P_{24}^2 - P_{25}^2 - P_{26}^2 - P_{27}^2 - P_{28}^2 - P_{29}^2 - P_{210}^2;$$

$$P_{33}(t) = (-2/\theta - 4(K_{13}m_5(t)))P_{33} - P_{31}^2 - P_{32}^2 - P_{33}^2 - P_{34}^2 - P_{35}^2 -$$

$$P_{36}^2 - P_{37}^2 - P_{38}^2 - P_{39}^2 - P_{310}^2;$$

$$P_{44}(t) = (-2(1/\theta + K_d))P_{44} - 4(K_{L1}m_4(t)P_{41} + K_{12}m_4(t))P_{42} -$$

$$P_{42}^2 - P_{43}^2 - P_{44}^2 - P_{45}^2 - P_{46}^2 - P_{47}^2 - P_{48}^2 - P_{49}^2 - P_{410}^2;$$

$$P_{55}(t) = 2(-1/\theta + K_{t1})P_{55} + 4(K_{L1}m_4(t))P_{51} + K_{21}m_6(t)P_{51} +$$

$$K_{31}m_7(t)P_{51} - K_{12}m_5(t)P_{52} - K_{13}m_5(t)P_{54} - P_{51}^2 - P_{52}^2 -$$

$$P_{53}^2 - P_{54}^2 - P_{55}^2 - P_{56}^2 - P_{57}^2 - P_{58}^2 - P_{59}^2 - P_{510}^2;$$

$$P_{66}(t) = 2(-1/\theta + K_{t2})P_{66} + 4(-K_{21}m_6(t)P_{61} + K_{L2}m_4(t)P_{62} +$$

$$K_{12}m_5(t)P_{62}) - P_{61}^2 - P_{62}^2 - P_{63}^2 - P_{64}^2 - P_{65}^2 - P_{66}^2 -$$

$$P_{67}^2 - P_{68}^2 - P_{69}^2 - P_{610}^2;$$

$$P_{77}(t) = 2(-1/\theta + K_{t3})P_{77} + 4(-K_{31}m_7(t)P_{71} + K_{13}m_5(t)P_{73}) - P_{71}^2 -$$

$$P_{72}^2 - P_{73}^2 - P_{74}^2 - P_{75}^2 - P_{76}^2 - P_{77}^2 - P_{78}^2 - P_{79}^2 - P_{710}^2;$$

$$P_{88}(t) = 2(-1/\theta)P_{88} + 4(K_{L1}m_4(t)P_{81} + K_{11}m_5(t)P_{81} + K_{21}m_6(t)P_{81} +$$

$$K_{31}m_7(t)P_{81} + K_{L2}m_4(t)P_{82}) - P_{81}^2 - P_{82}^2 - P_{83}^2 - P_{84}^2 -$$

$$P_{85}^2 - P_{86}^2 - P_{87}^2 - P_{88}^2 - P_{89}^2 - P_{810}^2;$$

$$P_{99}(t) = 2(-1/\theta)P_{99} + 4(K_{L1}m_4(t)P_{91} + K_{L2}m_4(t)P_{92} +$$

$$K_{12}m_5(t)P_{29} + K_{22}m_6(t)P_{29}) - P_{91}^2 - P_{92}^2 - P_{93}^2 - P_{94}^2 -$$

$$\begin{aligned}
& P_{95}^2 - P_{96}^2 - P_{97}^2 - P_{98}^2 - P_{99}^2 - P_{910}^2; \\
P_{10-10}(t) = & 2(-1/\theta)P_{10-10} + 4(K_{L1}m_4(t)P_{10-1} + K_{L2}m_4(t)P_{10-2} + \\
& K_{L3}m_5(t)P_{10-3}) - P_{10-1}^2 - P_{10-2}^2 - P_{10-3}^2 - P_{10-4}^2 - P_{10-5}^2 - P_{10-6}^2 - \\
& P_{10-7}^2 - P_{10-8}^2 - P_{10-9}^2 - P_{10-10}^2].
\end{aligned}$$

En el proceso de simulación, las condiciones iniciales en $t = 0$ son iguales a cero para las variables de estado $C_{m1}, \dots, \lambda_1^{001}$, son 0.5 para los estimados $m_1(t), \dots, m_{10}(t)$, toman el valor de 1 para los componentes diagonales de la matriz de varianza, y cero para sus otros componentes. Los parámetros del sistema son asignados con el valor de 1: $V = 1; d\Delta_{m1}/dt = 1; K_{L1} = 1; K_{11} = 1; K_{21} = 1; K_{31} = 1; K_{32} = 1; d\Delta_{m2}/dt = 1; d\Delta_{m3}/dt = 1; d\Delta_{m4}/dt = 1; K_{L2} = 1; K_{L3} = 1; K_{12} = 1; K_{13} = 1; K_{22} = 1; K_d = 1; K_{t1} = 1; K_{t2} = 1; K_{t3} = 1; \theta = 1$. Los ruidos blancos Gaussianos en las ecuaciones (6.7) son tomados de la función de *MatLab 6, versión 1.2*.

En la Figura 6.1, los valores obtenidos de las variables de estado $C_{m1}, \dots, \lambda_1^{001}$ están representados por una línea continua delgada, y los valores de los estimados del filtro óptimo bilineal $m_1(t), \dots, m_{10}(t)$ son mostrados por la línea delgada empalmada con la línea punteada gruesa (que corresponde al filtro polinomial mixto).

El desempeño del filtro bilineal óptimo dado por las ecuaciones (6.6), (6.7) es comparado con el desempeño del filtro lineal óptimo de Kalman-Bucy, el cual es obtenido de la linealización del sistema. Este filtro lineal contiene sólo los términos lineales y el proceso de inovación de las ecuaciones (6.6) ó (6.7) para los estimados óptimos, y los términos correspondientes a las ecuaciones de Riccati para componentes de las ecuaciones de la matriz de varianza (6.7):

$$dm_k(t)/dt = (a_{0k}(t) + \sum_i a_{1ki}(t)m_i(t) + \quad (6.9)$$

$$\sum_{jlp s} P_{kj}(t) A_{jl}^T(t) (B_{lp} B_{ps})^{-1}(t) [dy_s - \sum_r A_{sr}(t) m_r(t) dt],$$

$$m_k(t_0) = E[x_k(t_0) | Y(t_0)];$$

$$dP_{ij}(t)/dt = \sum_k a_{1ik}(t) P_{kj}(t) + \sum_k P_{ki}(t) a_{1jk}(t) + \sum_k b_{ik}(t) b_{kj}(t) - \sum_{klpsr} P_{ik}(t) A_{kl}^T(t) (B_{lp} B_{ps})^{-1} A_{sr} P_{rj}(t), \quad (6.10)$$

$$P_{ij}(t_0) = E[(x_i(t_0) - m_i(t_0))(x_j(t_0) - m_j(t_0))^T | Y(t_0)].$$

Las gráficas de los estimados obtenidos usando el filtro lineal de Kalman-Bucy son mostradas por una línea segmentada en la Figura 6.1.

Finalmente, el desempeño del filtro bilineal óptimo (6.6),(6.7) es comparado con el desempeño del filtro mixto, el cual es compuesto por la siguiente estructura: Las ecuaciones del estimado óptimo en este filtro coinciden con las ecuaciones (6.6) o (6.7) para el filtro bilineal óptimo, y las ecuaciones de la varianza coinciden con las ecuaciones (6.10) para el filtro lineal de Kalman-Bucy. Las gráficas de los estimados obtenidos usando el filtro mixto son mostradas en la Figura 6.1 por una línea punteada gruesa (empalmada con una delgada, la cual corresponde a los estimados del filtro bilineal óptimo). Las condiciones iniciales y los ruidos blancos Gaussianos son realizados en la misma forma que en los filtros estudiados en el capítulo anterior. En la gráfica siguiente se muestran los resultados de la simulación, basados en los algoritmos obtenidos matemáticamente. Se puede ver que los resultados obtenidos para el filtro bilineal óptimo proporcionan el mejor estimado. Además se puede decir que el filtro mixto presenta valores muy cercanos al bilineal, y en algunas variables, es mejor, lo cual se debe a que el filtro mixto tiene mayor realizabilidad.

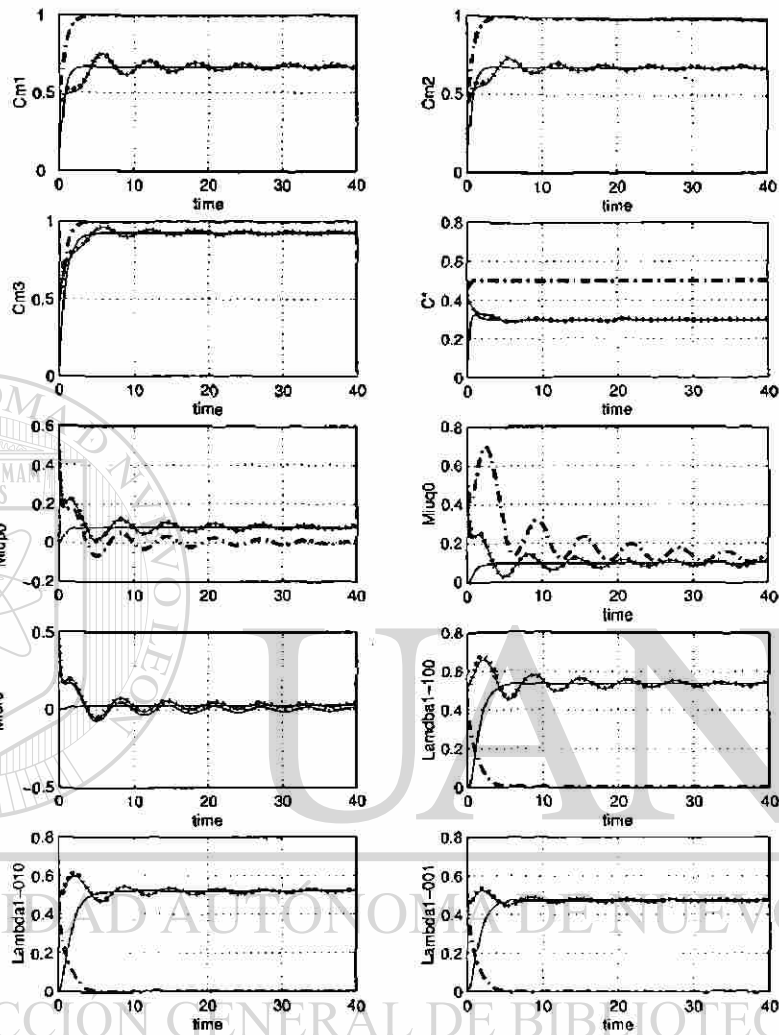


Figura 6.1: Gráficas de las diez variables de estado (6.4) (línea continua a la cual convergen las demás), los estimados obtenidos mediante el filtro bilineal (6.6),(6.7) (línea delgada empalmada con la línea punteada gruesa), los estimados obtenidos mediante el filtro lineal de Kalman-Bucy (6.9),(6.10) (línea segmentada), y los estimados obtenidos mediante el filtro mixto (6.6),(6.10) (línea punteada gruesa).

Capítulo 7

Control Óptimo en Sistemas Polinomiales

7.1. Control Óptimo para un Estado Polinomial de Tercer Grado con Entrada Lineal de Control

7.1.1. Planteamiento del Problema

Consideremos el siguiente sistema polinomial:

$$\begin{aligned} dx(t) &= (a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t))dt + & (7.1) \\ & B(t)u(t)dt \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$, $x^2(t) = [x_1^2(t) \ x_2^2(t) \ \dots \ x_n^2(t)]^T$, $x^3(t) = [x_1^3(t) \ x_2^3(t) \ \dots \ x_n^3(t)]^T$, y $u(t)$ es la variable de control. La

función de costo cuadrático a ser minimizada está dada por:

$$J = \frac{1}{2}(x(T) - x_1)^T \Psi^{-1}(x(T) - x_1) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(s) R(s) u(s) ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T x^T(s) L(s) x(s) ds, \quad (7.2)$$

donde x_1 es un vector dado, Φ , K , L son matrices simétricas, K es una matriz positiva, y Φ y L son no-negativas, $T > t_0$ es un cierto momento en el tiempo. El problema de control óptimo consiste en encontrar el control $u^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, que minimice el criterio J a lo largo de la trayectoria $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, generada al sustituir $u^*(t)$ en la ecuación de estado (7.1).

7.1.2. Solución

Para encontrar la solución al problema de control óptimo, es necesaria la aplicación del principio de dualidad [56], el cual establece que si el control óptimo existe para sistemas lineales, con función de costo cuadrático J , el filtro óptimo existe para el sistema lineal dual con disturbios Gaussianos, y puede ser encontrado partiendo de la solución al problema de control óptimo, usando simples transformaciones algebraicas (dualidad entre las matrices de ganancia y de varianza), y viceversa. Tomando en cuenta la dualidad física existente entre los problemas de filtrado y control, las conjeturas anteriores deberían ser válidas para todos los casos donde el control óptimo existe en forma cerrada y finito-dimensional. Se llevará a cabo la aplicación de este principio a un sistema polinomial de tercer orden, para el cual el filtro óptimo ya ha sido obtenido en el Capítulo 5, para posteriormente retornar al problema de control óptimo para el estado polinomial (7.1) con entrada de control lineal y función de costo cuadrático (7.2). Partiendo del filtro, y tomando en cuenta que el filtro óptimo polinomial de tercer grado existe en forma cerrada, tenemos que la

matriz de ganancia en el filtro polinomial (5.15) es igual a

$$K_f = P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1},$$

la matriz de ganancia en el problema de control óptimo toma la forma de su transpuesta dual

$$K_c = (R(t))^{-1}B(t)Q(t),$$

y la ley de control óptima está dada por

$$u^*(t) = K_c x = (R(t))^{-1}B(t)Q(t)x(t), \quad (7.3)$$

donde la matriz $Q(t)$ es la solución de la siguiente ecuación dual (5.18) de la ecuación de varianza:

$$\begin{aligned} dQ(t) = & (-a_1^T(t)Q(t) - Q(t)a_1^T(t) - 2a_2^T(t)Q(t) * x^T(t) - \\ & 2x(t) * Q(t)a_2(t) - 3a_3^T(t)Q(t) * q^T(t) - \\ & 3q(t) * Q(t)a_3(t) - 3a_3^T(t)Q(t) * ((x^2)^T(t)) - 3(x^2(t) * \\ & Q(t))a_3(t) + L(t) - Q(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t))dt, \end{aligned} \quad (7.4)$$

con la condición terminal $Q(T) = \psi$. La operación binaria $*$ ha sido introducida en la Sección 5.3, y $q(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ \dots \ q_n(t)]^T$ denota el vector formado por los elementos de la diagonal de la matriz $Q(t)$.

Sustituyendo el control óptimo (7.3) en la ecuación de estado (7.1), se obtiene la ecuación del estado óptimamente controlado:

$$\begin{aligned} dx(t) = & (a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t))dt + \\ & B(t)(R(t))^{-1}B^T(t)Q(t)x(t)dt, \\ x(t_0) = & x_0, \end{aligned} \quad (7.5)$$

Note que si el vector del estado real $x(t)$ es desconocido (no-observable), el controlador óptimo es obtenido agrupando las ecuaciones del filtro óptimo y del regulador. Esta agrupación es posible, gracias al principio de separación [56] para sistemas polinomiales, el cual establece que esto es posible si las soluciones al problema del filtro y el control existen en forma cerrada y finito-dimensional.

Los resultados obtenidos en esta sección por virtud del principio de dualidad pueden ser rigurosamente verificados usando el Principio del Máximo de Pontryagin [70] o la programación dinámica de Bellman [28].

7.2. Aplicación del Regulador Óptimo Polinomial de Tercer Grado a un Sistema Automotriz

7.2.1. Planteamiento del problema

Esta sección presenta la aplicación del regulador óptimo para un sistema polinomial de tercer grado con entrada de control lineal y criterio cuadrático para controlar las variables de estado, y los ángulos de orientación del automóvil y de dirección del volante, en el modelo cinemático de un carro en movimiento [63], dadas las ecuaciones (7.7) para el caso no lineal. El problema de control consiste en maximizar el ángulo de orientación usando la mínima energía de control u . El criterio cuadrático a ser minimizado J toma la forma

$$J = 1/2[\phi(t) - \phi^*(T)]^2 + 1/2 \int_0^T u^2(t)dt, \quad (7.6)$$

Donde $T = 0.1min$, y $\phi^* = 1rad$ es un valor grande de $\phi(t)$ (inalcanzable en el tiempo T). Las ecuaciones de estado ya han sido presentadas en la sección de la aplicación del

filtro óptimo polinomial, pero se presentarán de nuevo para hacer más fácil la lectura y comprensión del texto. Estas toman la forma

$$\begin{aligned}
 dx(t) &= v \cos \phi(t) dt, \\
 dy(t) &= v \sin \phi(t) dt, \\
 d\phi(t) &= (v/l) \tan \delta(t) dt, \\
 d\delta(t) &= u(t) dt.
 \end{aligned}
 \tag{7.7}$$

Aquí, $x(t)$ y $y(t)$ son las coordenadas cartesianas del centro de masa del carro, $\phi(t)$ es el ángulo de orientación, v es la velocidad, l es la longitud entre los dos ejes del carro, $\delta(t)$ es el ángulo del volante, y $u(t)$ es la variable de control (velocidad angular del volante). Usando la expansión en series de Taylor de las ecuaciones originales para $\phi(t)$ y $\delta(t)$ (7.7), obtenemos un sistema polinomial de ecuaciones de tercer grado (el cuarto grado no aparece en la expansión de Taylor para la tangente), el cual toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 d\phi(t) &= (v/l)(\delta(t) + \delta^3(t)/3) dt, \\
 d\delta(t) &= u(t) dt.
 \end{aligned}
 \tag{7.8}$$

Las observaciones son directas, y contienen disturbios modelados como ruidos blancos Gaussianos, que son independientes e idénticamente distribuidos. Las ecuaciones de las observaciones están dadas por:

$$\begin{aligned}
 dz_\phi(t) &= \phi(t) dt + f_1(t) dt \\
 dz_\delta(t) &= \delta(t) dt + f_2(t) dt
 \end{aligned}
 \tag{7.9}$$

donde $z_\phi(t)$ es la variable de observación para $\phi(t)$, $z_\delta(t)$ es la variable de observación para $\delta(t)$, y $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son ruidos blancos Gaussianos independientes uno del otro. Se asignó $v = 17m/min$ y $l = 2m$ y el tiempo final es $T = 0.1min$, lo cual corresponde

al movimiento angular de un carro de tamaño mediano en un intervalo de tiempo de 6 segundos. En otras palabras, el problema es hacer el giro máximo de las ruedas de su posición inicial, usando el mínimo de energía en el volante. Las condiciones iniciales para los ángulos son $\phi(0) = 0.1rad$ y $\delta(0) = 0.1rad$.

7.2.2. Solución

Sustituyendo las ecuaciones de estado (7.7) en las ecuaciones generales para el control óptimo (7.3)-(7.5) son obtenidas las ecuaciones para el control óptimo en esta aplicación. Considerando los valores para $R = 1$ y para $G^T = [0, 1]$, el control óptimo $u^*(t) = (R(t))^{-1}G^T(t)Q(t)x(t)$ toma la forma $u^*(t) = q_{21}(t)\phi(t) + q_{22}(t)\delta(t)$, donde los elementos $q_{11}(t), q_{21}(t), q_{22}(t)$ de la matriz simétrica $Q(t)$ satisfacen la ecuación

$$\begin{aligned} dq_{11}(t) &= -q_{21}^2(t) \\ dq_{12}(t) &= -\frac{v}{l}q_{11}^2(t) - q_{12}(t)q_{22}(t) - \frac{v}{l}q_{11}(t) - \frac{v}{l}\phi^2(t)q_{11}(t) \\ dq_{22}(t) &= -\frac{2v}{l}q_{12}(t) - \frac{2v}{l}q_{12}(t)q_{22}(t) - \frac{2v}{l}\delta^2(t)q_{12}(t) - q_{22}^2(t). \end{aligned} \quad (7.10)$$

con condiciones terminales $q_{11}(T) = 1, q_{12}(T) = 0, q_{22}(T) = 0$. El sistema compuesto por los sistemas de ecuaciones anteriores (7.7) y (7.10) debe ser resuelto con condiciones iniciales $\phi(0) = 0.1rad, \delta(0) = 0.1rad$ y con las condiciones terminales anteriores. Este problema de frontera es resuelto numéricamente usando el método iterativo mediante el cual se pasa de las ecuaciones en tiempo directo a las ecuaciones en tiempo inverso, como se describe a continuación. Las primeras condiciones iniciales para q 's son evaluadas y el sistema es resuelto en tiempo directo con las condiciones iniciales en $t = 0$; así son obtenidos los valores de ϕ y de δ en el punto terminal $T = 0.1min$. Después el sistema es resuelto en tiempo inverso (sustituyendo $-t$ en lugar de t) tomando los valores obtenidos de ϕ y δ del sistema en tiempo directo como valores iniciales en tiempo inverso; así ob-

tendremos valores para las q 's en el punto inicial $t = 0$, los cuales son tomados como valores iniciales en las ecuaciones en tiempo directo, y así sucesivamente. Las condiciones iniciales dadas $\phi(0) = 0.1rad$ y $\delta(0) = 0.1rad$ son mantenidas fijas en el sistema en tiempo directo y las condiciones terminales $q_{11}(T) = 1, q_{12}(T) = 0, q_{22}(T) = 0$ son mantenidas fijas en el sistema en tiempo inverso. El algoritmo se detiene cuando el sistema alcanza los valores $q_{11}(T) = 1, q_{12}(T) = 0, q_{22}(T) = 0$ en el sistema en tiempo directo y los valores $\phi(0) = 0.1rad, \delta(0) = 0.1rad$ en el sistema en tiempo inverso.

Las condiciones iniciales para las q 's en la iteración final en tiempo directo son $q_{11}(0) = 1.32, q_{12}(0) = 16, q_{22}(0) = 1640$. Los valores obtenidos para ϕ y el criterio J mediante la simulación se presentan en la Figura 7.3. Estos resultados para el regulador polinomial de tercer grado son comparados con los resultados obtenidos usando el regulador lineal para el cual los elementos de la matriz $Q(t)$ satisfacen las ecuaciones de Riccati:

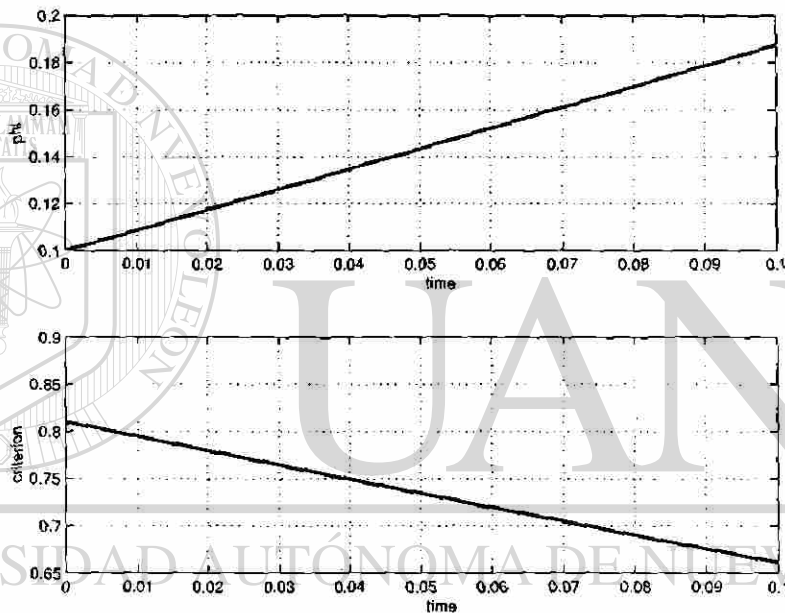
$$\begin{aligned} dq_{11}(t) &= -q_{12}^2(t) \\ dq_{12}(t) &= -q_{12}q_{22} - \frac{v}{l}q_{11} \\ dq_{22}(t) &= -\frac{2v}{l}q_{12} - q_{22}^2, \end{aligned} \tag{7.11}$$

con condiciones terminales $q_{11}(T) = 1, q_{12}(T) = 0, q_{22}(T) = 0$. Note que en el caso lineal es necesaria solo una iteración con la ecuación en tiempo inverso ($-t$) para q 's, porque el sistema (7.11) no depende de ϕ ni de δ , y los valores iniciales para q 's en $t = 0$ son obtenidos después de una iteración con la ecuación en tiempo inverso. Las condiciones iniciales para las q 's en la iteración en tiempo directo son $q_{11}(0) = 1.025, q_{12}(0) = 0.87, q_{22}(0) = 0.74$. Las gráficas de la simulación para el caso lineal se muestran en la Figura 7.1. Así, son obtenidas dos conjuntos de gráficas.

1. Gráfica de la variable ϕ que satisface el sistema original (7.7) controlado por el regulador lineal óptimo definido por (7.11); gráfica de los valores correspondientes del

criterio J (7.6); gráfica del control lineal $u^*(t)$ correspondiente a las ecuaciones (7.11) (Figuras 7.1 y 7.2).

2. Gráfica de la variable ϕ que satisface el sistema original (7.7) controlado por el regulador polinomial de tercer grado definido por (7.10); gráfica de los valores correspondientes de J (7.6); gráfica del control polinomial $u^*(t)$ correspondiente a las ecuaciones (7.10) (Figs. 7.3 y 7.4).



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS
 Figura 7.1: Gráficas del regulador lineal correspondiente a las ecuaciones (7.11). $\phi = \phi$, $\text{criterion} = J$.

Los valores obtenidos de la variable controlada ϕ y el criterio J son comparados en el tiempo terminal $T = 0.1 \text{ min}$ en la siguiente tabla (correspondiente a las Figuras 7.1 y 7.3).

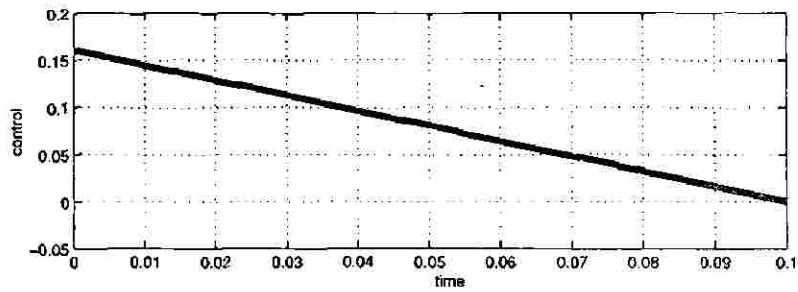


Figura 7.2: Gráfica del control lineal $u^*(t)$ correspondiente a las ecuaciones (7.11) y (7.12)

$= u^*$

Control lineal

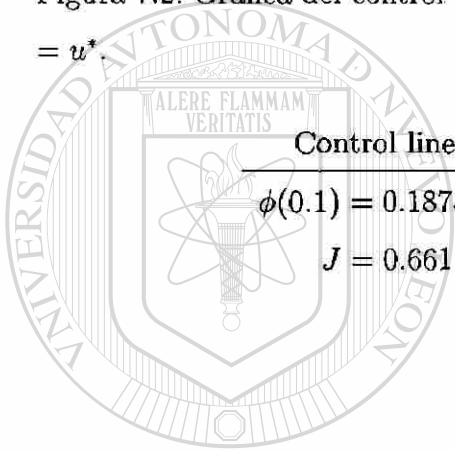
Control polinomial de tercer grado

$$\phi(0.1) = 0.1875rad$$

$$\phi(0.1) = 0.989rad$$

$$J = 0.661$$

$$J = 0.065$$



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

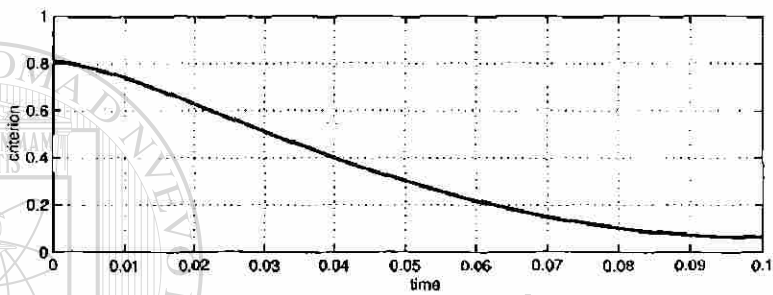
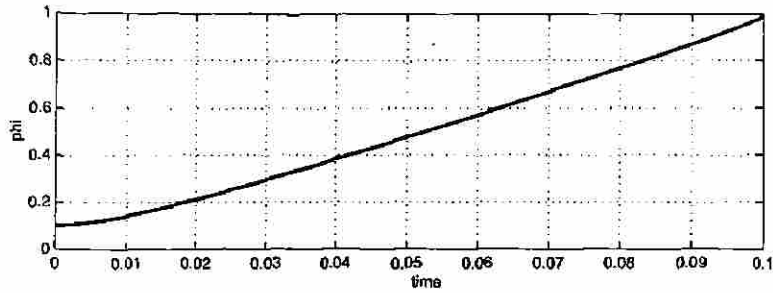


Figura 7.3: Gráficas del regulador polinomial de tercer grado correspondiente a las ecuaciones (7.10). $\text{phi} = \phi$, $\text{criterion} = J$.

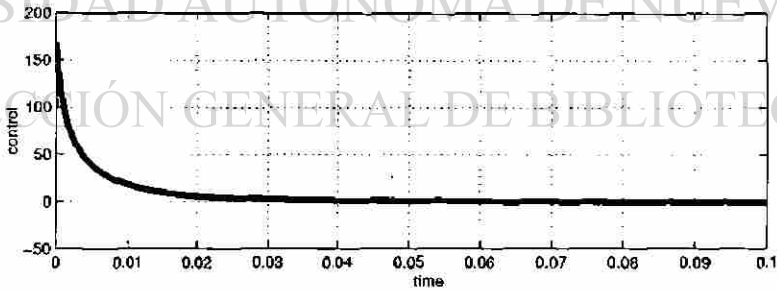


Figura 7.4: Gráfica del control polinomial $u^*(t)$ correspondiente a las ecuaciones (7.10). $\text{control} = u^*$.

Capítulo 8

Controlador Óptimo en Sistemas Polinomiales

8.1. Problema del Controlador Óptimo

8.1.1. Planteamiento del Problema

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad completo con una familia creciente y continua por la derecha de σ -álgebras $\mathcal{F}_t, t \geq 0$, y sean $(W_1(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ y $(W_2(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ procesos de Wiener \mathcal{F}_t -adaptados. Considere el proceso aleatorio no observable \mathcal{F}_t -medible $x(t)$ gobernado por la ecuación polinomial de tercer grado

$$\begin{aligned} dx(t) &= (a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t))dt + G(t)u(t)dt + \\ & b(t)dW_1(t), x(t_0) = x_0, \end{aligned} \quad (8.1)$$

y el proceso de salida (observación)

$$dy(\tau) = (A_0(t) + A(t)x(t))dt + B(t)dW_2(t). \quad (8.2)$$

Aquí, $x(t) \in R^n$ es el vector de estado no observable, para el cual los componentes del segundo y tercer grados están dados en la siguiente forma: $x^2(t) = [x_1^2(t) \ x_2^2(t) \ x_3^2(t) \ \dots \ x_n^2(t)]^T$, $x^3(t) = [x_1^3(t) \ x_2^3(t) \ x_3^3(t) \ \dots \ x_n^3(t)]^T$, $u(t) \in R^p$ es la variable de control, $y(t) \in R^m$ es el proceso de observaciones, y los procesos de Wiener independientes $W_1(t)$ y $W_2(t)$ representan disturbios aleatorios en las ecuaciones de estado y de observaciones, los cuales son independientes del vector inicial Gaussiano x_0 . $A(t)$ es una matriz no cero y $B(t)B^T(t)$ es una matriz positiva definida. Además, la función de costo cuadrático a ser minimizada J , está dada por

$$J = E\left[\frac{1}{2}[x(T) - z_0]^T \Phi [x(T) - z_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(s)K(s)u(s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T x^T(s)L(s)x(s)ds\right], \quad (8.3)$$

donde z_0 es un vector dado, K es una matriz positiva definida y Φ , L son matrices simétricas definidas no-negativas, $T > t_0$ es un cierto instante de tiempo, el símbolo $E[f(x)]$ denota la esperanza (media) de una función f de una variable aleatoria x , y a^T denota la transpuesta de un vector (matriz) a .

El problema de control óptimo consiste en encontrar el control $u^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, que minimice el criterio J a lo largo de la trayectoria $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, generada al sustituir $u^*(t)$ en la ecuación de estado (8.1).

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

8.1.2. Principio de Separación para Sistemas Polinomiales

Así como para los sistemas estocásticos lineales, el principio de separación también es válido para un sistema estocástico dado por una ecuación polinomial de tercer grado, con observaciones lineales, y criterio cuadrático. El principio de separación ya ha sido enunciado en secciones anteriores, pero se hará mención del mismo para facilitar la lectura y comprensión del texto. Reemplazando el estado del sistema no observable $x(t)$ por su

estimado óptimo $m(t)$ dado por la ecuación (5.15)

$$\begin{aligned} dm(t) = & (a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)p(t) + a_2(t)m^2(t) + \\ & a_3(t)(3p(t) * m(t) + m^3(t))dt + G(t)u(t) + \\ & P^T(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}(dy - (A_0(t) + A(t)m(t))dt), \end{aligned} \quad (8.4)$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$. Aquí, $m(t)$ es el mejor estimado del proceso no-observable $x(t)$ en el tiempo t basado en el proceso de observación $Y(t) = \{y(s), t_0 \leq s \leq t\}$, el cual está dado por la esperanza condicional $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$, $m(t) = [m_1(t) \ m_2(t) \ \dots \ m_n(t)]$; $P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | Y(t)] \in \mathbb{R}^n$ es la matriz de covarianza del error; $p(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector cuyos componentes son las varianzas de los componentes de $x(t) - m(t)$, i.e., los elementos de la diagonal de $P(t)$; $m^2(t)$ y $m^3(t)$ son definidos como vectores de los cuadrados y cubos de los componentes de $m(t)$: $m^2(t) = [m_1^2(t) \ m_2^2(t) \ \dots \ m_n^2(t)]^T$, $m^3(t) = [m_1^3(t) \ m_2^3(t) \ \dots \ m_n^3(t)]^T$; $P(t)m(t)$ es el producto convencional de la matriz $P(t)$ por un vector $m(t)$; y $p(t) * m(t)$ es el producto de dos vectores dado como el producto entre sus componentes: $p(t) * m(t) = [p_1(t)m_1(t) \ p_2(t)m_2(t) \ \dots \ p_n(t)m_n(t)]^T$. El mejor estimado $m(t)$ minimiza el criterio

$$H = E[(x(t) - m(t))^T (x(t) - m(t))], \quad (8.5) \quad \textcircled{R}$$

con respecto a la elección del estimado m como una función de las observaciones $y(t)$, en todo momento de tiempo t ([62]).

La ecuación complementaria para la matriz de varianza $P(t)$ toma la forma (5.18)

$$\begin{aligned} dP(t) = & (a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2a_2(t)m(t) * P(t) + \\ & 2(P(t) * m^T(t))a_2^T(t) + 3a_3(t)(p(t) * P(t)) + \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$\begin{aligned}
& 3(p(t) * P(t))^T a_3^T(t) + 3a_3(t)(m^2(t) * P(t)) + \\
& 3(P(t) * (m^2(t))^T) a_3^T(t) + (b(t)b^T(t)) - \\
& P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t)dt,
\end{aligned}$$

con la condición inicial $P(t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | y(t_0))$, donde el producto $m(t) * P(t)$ entre un vector $m(t)$ y una matriz $P(t)$ es definido como en la Sección 5.3.

Es posible verificar (como en [56]) que el problema de control óptimo (8.1) y la función de costo (8.3) es equivalente al problema de control óptimo para el estimado (8.4) y la función de costo J , representada como:

$$\begin{aligned}
J = & E\left\{\frac{1}{2}[m(T) - z_0]^T \Phi [m(T) - z_0] + \right. \\
& \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(s)K(s)u(s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T m^T(s)L(s)m(s)ds \\
& \left. + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \text{tr}[P(s)L(s)]ds + \text{tr}[P(T)\Phi]\right\},
\end{aligned} \tag{8.7}$$

donde $\text{tr}[A]$ denota la traza de la matriz A . Φ, K, L son matrices simétricas, K es una matriz positiva definida y Φ y L son matrices no negativas.

Dado que la última parte de J es independiente del control $u(t)$ y del estado $x(t)$, la función de costo reducida M a ser minimizada toma la forma:

$$\begin{aligned}
M = & E\left\{\frac{1}{2}[m(T) - z_0]^T \Phi [m(T) - z_0] + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(s)K(s)u(s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T m^T(s)L(s)m(s)ds\right\}.
\end{aligned} \tag{8.8}$$

En conclusión, el principio de separación para sistemas polinomiales de tercer grado establece que la solución del problema original de control óptimo especificada para (8.1), (8.3) puede encontrarse resolviendo el problema de control óptimo dado por (8.4), (8.8). Además, el valor mínimo del criterio J debe ser determinado usando (8.7).

8.1.3. Solución al Problema de Control Óptimo

Teniendo como base la solución al problema de control obtenido en el capítulo previo en el caso de un estado del sistema observable, gobernado por una ecuación polinomial de tercer grado, los siguientes resultados son válidos para el problema de control óptimo (8.4),(8.8), donde el estado del sistema (el estimado $m(t)$) es completamente disponible, y observable. La ley de control óptima está dada por:

$$u^*(t) = K^{-1}(t)G^T(t)Q(t)m(t), \quad (8.9)$$

donde la matriz $Q(t)$ es la solución de la siguiente ecuación (7.4), dual a la ecuación de la varianza

$$\begin{aligned} dQ(t) = & (-a_1^T(t)Q(t) - Q(t)a_1^T(t) - 2a_2^T(t)Q(t) * m^T(t) - \\ & 2m(t) * Q(t)a_2(t) - 3a_3^T(t)Q(t) * q^T(t) - \\ & 3q(t) * Q(t)a_3(t) - 3a_3^T(t)Q(t) * ((m^2)^T(t)) - \\ & 3(m^2(t) * Q(t))a_3(t) + L(t) - Q(t)G(t)K^{-1}(t)G^T(t)Q(t))dt, \end{aligned} \quad (8.10)$$

con la condición terminal $Q(T) = \Phi$. La operación binaria $*$ ha sido introducida en la Sección 5.3, y $q(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ \dots \ q_n(t)]^T$ denota el vector formado por los elementos de la diagonal de la matriz $Q(t)$. En el proceso de obtención de la ecuación (8.10), ha sido tomado en cuenta que el último término en la ecuación (8.4),

$$P^T(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}(dy - (A_0(t) + A(t)m(t))dt),$$

es un ruido blanco Gaussiano.

Sustituyendo la ley de control óptimo (8.9) en la ecuación (8.4) para el estado reconstruido del sistema $m(t)$, se obtiene la siguiente ecuación para el estimado del estado óptimamente

controlado:

$$\begin{aligned}
 dm(t) = & (a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)p(t) + a_2(t)m^2(t) + \\
 & a_3(t)(3p(t) * m(t) + m^3(t))dt + G(t)(K(t))^{-1}G^T(t)Q(t)m(t)dt + \\
 & P^T(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}(dy - (A_0(t) + A(t)m(t))dt), \\
 m(t_0) = & E(x(t_0)|F_{t_0}^Y).
 \end{aligned} \tag{8.11}$$

Así, la ecuación del estimado del estado óptimamente controlado (8.11), la ecuación de la matriz de ganancia (8.10), la ley de control óptima (8.9), y la ecuación de la varianza (8.6), forman la solución completa del problema del controlador para estados no observables de sistemas polinomiales de tercer grado.

8.2. Aplicación del Controlador Polinomial Óptimo a un Sistema Automotriz

8.2.1. Planteamiento del problema

Esta sección presenta la aplicación del controlador para un estado polinomial de tercer grado con observaciones lineales y función de costo cuadrática para controlar las variables de estado no observables, y ángulos de orientación y de giro del volante, en un modelo cinemático no lineal de un carro en movimiento [63], el cual ya ha sido presentado en secciones anteriores, pero se repetirá el planteamiento para facilitar la lectura y comprensión del texto. Las ecuaciones de estado para este sistema están representadas por:

$$\begin{aligned}
 dx(t) &= v \cos \phi(t)dt, \\
 dy(t) &= v \sin \phi(t)dt,
 \end{aligned} \tag{8.12}$$

$$d\phi(t) = (v/l) \tan \delta(t) dt,$$

$$d\delta(t) = u(t) dt.$$

Aquí, $x(t)$ y $y(t)$ son las coordenadas cartesianas del centro de masa del carro, $\phi(t)$ es el ángulo de orientación, v es la velocidad, l es la longitud entre los dos ejes del carro, $\delta(t)$ es el ángulo del volante, y $u(t)$ es la variable de control (velocidad angular del volante). Se suponen condiciones iniciales cero para todas las variables.

El proceso de observación para las variables no observables $\phi(t)$ y $\delta(t)$ es dado por las observaciones lineales directas, las cuales contienen disturbios independientes e idénticamente distribuidos, modelados como ruidos blancos Gaussianos. Las ecuaciones correspondientes a las observaciones son

$$dz_\phi(t) = \phi(t) dt + w_1(t) dt, \quad (8.13)$$

$$dz_\delta(t) = \delta(t) dt + w_2(t) dt,$$

donde $z_\phi(t)$ es la variable de observación para $\phi(t)$, $z_\delta(t)$ es la variable de observación para $\delta(t)$, y $w_1(t)$ y $w_2(t)$ son ruidos blancos Gaussianos independientes uno del otro.

Los valores asignados para la velocidad y la longitud entre los ejes son $v = 17m/min$, $l = 2m$, los cuales corresponden a un modelo de carro de tamaño estándar. En otras palabras, el problema es lograr el giro máximo de las ruedas de su posición inicial, usando la mínima energía para dirigir el volante. Por razones de economizar combustible y reducir la contaminación del aire, el peso del término de control en el criterio, se considera diez veces mayor que el peso del término del estado terminal. El criterio correspondiente J a ser minimizado toma la forma

$$J = [\phi(T) - \phi^*]^2 + 10 \int_0^T u^2(t) dt, \quad (8.14)$$

donde $T = 0.3min$, y $\phi^* = 10rad$ es un valor grande de $\phi(t)$ inalcanzable en el tiempo T .

La aplicación de los algoritmos del controlador obtenido se hace para el sistema no lineal (8.12), observaciones lineales (8.13), y criterio cuadrático (8.14), usando la expansión de Taylor para las últimas dos ecuaciones en (8.12) en el origen, hasta el tercer grado (el cuarto grado no aparece en la serie de Taylor para la tangente)

$$\begin{aligned}d\phi(t) &= \left(\frac{v}{l}\right)\delta(t) + \left(\frac{v}{l}\right)\left(\frac{\delta^3(t)}{3}\right)dt, \\d\delta(t) &= u(t)dt.\end{aligned}\tag{8.15}$$

8.2.2. Solución

La solución para el problema del controlador óptimo establecido, es dada como sigue.

Dada $K = 1$ y $G^T = [0, 1]$ en (8.14) y (8.15), la ley de control óptimo

$u^*(t) = (K(t))^{-1}G^T(t)Q(t)m(t)$ toma la forma

$$u^*(t) = q_{21}(t)m_\phi(t) + q_{22}(t)m_\delta(t),\tag{8.16}$$

y las siguientes ecuaciones para el controlador óptimo (8.9)–(8.11) y (8.6) para el estado polinomial de tercer grado (8.15) sobre observaciones lineales (8.13) y criterio cuadrático (8.14) son:

$$\begin{aligned}dm_\phi &= \left(\frac{v}{l}\right)m_\delta + \left(\frac{v}{3l}\right)(3p_\delta + m_\delta^3) + p_{\phi\phi}(z_\phi - m_\phi) + p_{\phi\delta}(z_\delta - m_\delta)dt, \\dm_\delta &= (u^*(t) + p_{\delta\phi}(z_\phi - m_\phi) + p_{\delta\delta}(z_\delta - m_\delta))dt, \\dp_{\phi\phi} &= \left((2v/l)p_{\delta\phi}p_{\delta\delta} + \frac{2v}{l}p_{\delta\phi} + \frac{2v}{l}m_\delta^2p_{\delta\phi} - p_{\phi\phi}^2 - p_{\phi\delta}^2\right)dt, \\dp_{\phi\delta} &= \left(\frac{v}{l}p_{\delta\delta} + \frac{v}{l}m_\delta^2p_{\delta\delta} - p_{\phi\phi}p_{\phi\delta} - p_{\phi\delta}p_{\delta\delta}\right)dt, \\dp_{\delta\delta} &= (-p_{\delta\phi}^2 - p_{\delta\delta}^2)dt, \\dq_{11}(t) &= (-q_{21}^2(t))dt, \\dq_{12}(t) &= \left(-\frac{v}{l}q_{11}^2 - q_{12}q_{22} - \frac{v}{l}q_{11} - \frac{v}{l}m_\delta^2q_{11}\right)dt, \\dq_{22}(t) &= \left(-\frac{2v}{l}q_{12} - \frac{2v}{l}q_{12}q_{22} - \frac{2v}{l}m_\delta^2q_{12} - q_{22}^2\right)dt.\end{aligned}\tag{8.17}$$

Aquí, m_ϕ y m_δ son los estimados de las variables ϕ y δ ; $p_{\phi\phi}$, $p_{\phi\delta}$, $p_{\delta\delta}$ son elementos de la matriz simétrica de covarianza P ; y $q_{11}(t)$, $q_{21}(t)$, $q_{22}(t)$ son elementos de la matriz simétrica de ganancia $Q(t)$ formando el control óptimo (8.16). Los siguientes valores iniciales para las variables de entrada son asignados: $m_\phi(0) = 1$, $m_\delta(0) = 0.1$, $\phi(0) = \delta(0) = 0$, $P_{\phi\phi}(0) = 10$, $P_{\phi\delta}(0) = 1$, $P_{\delta\delta}(0) = 1$. Son disturbios Gaussianos $w_1(t)$ y $w_2(t)$ en (8.13) son realizados como ruidos blancos, tomando el block correspondiente en el *MatLab 6, versión 1.2*. Las condiciones terminales para los elementos de la matriz de ganancia Q están dadas por: $q_{11}(T) = 0.1$, $q_{12}(T) = 0$, $q_{22}(T) = 0$, en el tiempo final $T = 0.3min$.

Así, el sistema compuesto por las dos últimas ecuaciones de (8.12) y las ecuaciones (8.17) debe ser resuelto con las condiciones iniciales $m_\phi(0) = 1$, $m_\delta(0) = 0.1$, $\phi(0) = \delta(0) = 0$, $P_{\phi\phi}(0) = 10$, $P_{\phi\delta}(0) = 1$, $P_{\delta\delta}(0) = 1$, y las condiciones terminales $q_{11}(T) = 0.1$, $q_{12}(T) = 0$, $q_{22}(T) = 0$. Este problema de frontera es resuelto numéricamente usando un método iterativo, pasando del sistema en tiempo directo al sistema en tiempo inverso, como fue realizado en la sección de la aplicación del control óptimo a un sistema automotriz (Sección 8.2). Las gráficas de la simulación para el caso polinomial de tercer grado son mostradas en la Figura 8.1. La ley de control óptimo en el caso lineal es la misma que en (8.16), pero las ecuaciones del controlador lineal óptimo están dadas por:

$$\begin{aligned}
 dm_\phi &= \left(\frac{v}{l} m_\delta + p_{\phi\phi}(z_\phi - m_\phi) + p_{\phi\delta}(z_\delta - m_\delta) \right) dt, \\
 dm_\delta &= \left(u^*(t) + p_{\delta\phi}(z_\phi - m_\phi) + p_{\delta\delta}(z_\delta - m_\delta) \right) dt, \\
 dp_{\phi\phi} &= \left(\frac{2v}{l} p_{\phi\phi} - p_{\phi\phi}^2 - p_{\phi\delta}^2 \right) dt, \\
 dp_{\phi\delta} &= \left(\frac{v}{l} p_{\phi\delta} - p_{\phi\phi} p_{\phi\delta} - p_{\phi\delta} p_{\delta\delta} \right) dt, \\
 dp_{\delta\delta} &= \left(-p_{\delta\phi}^2 - p_{\delta\delta}^2 \right) dt. \\
 dq_{11}(t) &= \left(-q_{21}^2(t) \right) dt, \\
 dq_{12}(t) &= \left(-q_{12} q_{22} - \frac{v}{l} q_{11} \right) dt,
 \end{aligned} \tag{8.18}$$

$$dq_{22}(t) = \left(-\frac{2v}{l}q_{12} - q_{22}^2\right)dt.$$

Se puede observar que en el caso lineal solo se requiere un paso en el sistema inverso para q 's, porque las ecuaciones para q 's en (8.18) no dependen de ϕ , δ , m_ϕ , ni m_δ , y los valores iniciales para q 's en $t = 0$ pueden ser obtenidos después de un pase por el sistema inverso (con el tiempo $(-t)$). Las gráficas de la simulación para el caso lineal se muestran en la Figura 8.2. Así, dos conjuntos de gráficas son obtenidos: 1. Gráficas de las variables ϕ y δ que satisfacen las ecuaciones del sistema polinomial (8.15) y el controlador usando el regulador lineal óptimo definido por (8.16), (8.18); gráficas de los estimados m_ϕ y m_δ que satisfacen el sistema (8.18) y el controlador usando el regulador óptimo lineal definido por (8.16), (8.18); gráficas de los valores correspondientes del criterio J ; gráficas de los valores correspondientes del control óptimo u^* (Figura 8.1).

2. Gráficas de las variables ϕ y δ que satisfacen el sistema polinomial (8.15) y el controlador usando el regulador óptimo polinomial de tercer grado definido por (8.16), (8.17); gráficas de los estimados m_ϕ y m_δ que satisfacen el sistema (8.17) y el controlador usando el regulador óptimo polinomial de tercer grado definido por (8.16), (8.17); gráficas de los valores correspondientes del criterio J ; gráficas de los valores correspondientes del control óptimo u^* (Figura 8.2).

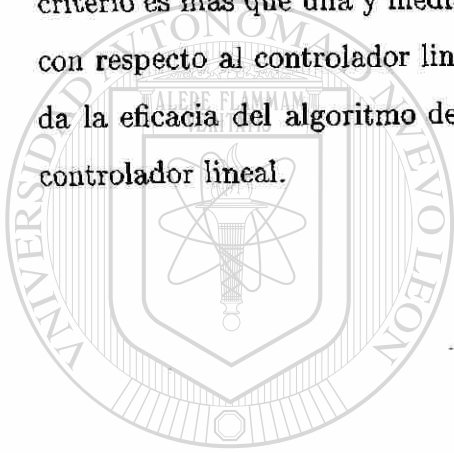
Los valores obtenidos de la variable controlada ϕ y del criterio J son comparados para el controlador óptimo polinomial de tercer grado y el controlador óptimo lineal en el tiempo terminal $T = 0.3min$ en la siguiente tabla (correspondiente a las Figuras 8.1 y 8.2).

<u>Controlador Lineal</u>	<u>Controlador Polinomial de Tercer Orden</u>
---------------------------	-----------------------------------------------

$\phi(0.3) = 0.054rad$	$\phi(0.3) = 0.084rad$
------------------------	------------------------

$J = 98.971$	$J = 98.45$
--------------	-------------

Los resultados de la simulación demuestran que el valor de la variable controlada ϕ en el punto terminal $T = 0.3min$ es mayor por una y media veces en el controlador polinomial con respecto al controlador lineal, y la diferencia entre los valores iniciales y finales del criterio es más que una y media veces mayor en el controlador polinomial de tercer orden con respecto al controlador lineal. Por tanto, mediante esta simulación queda demostrada la eficacia del algoritmo del controlador polinomial de tercer grado, con respecto al controlador lineal.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

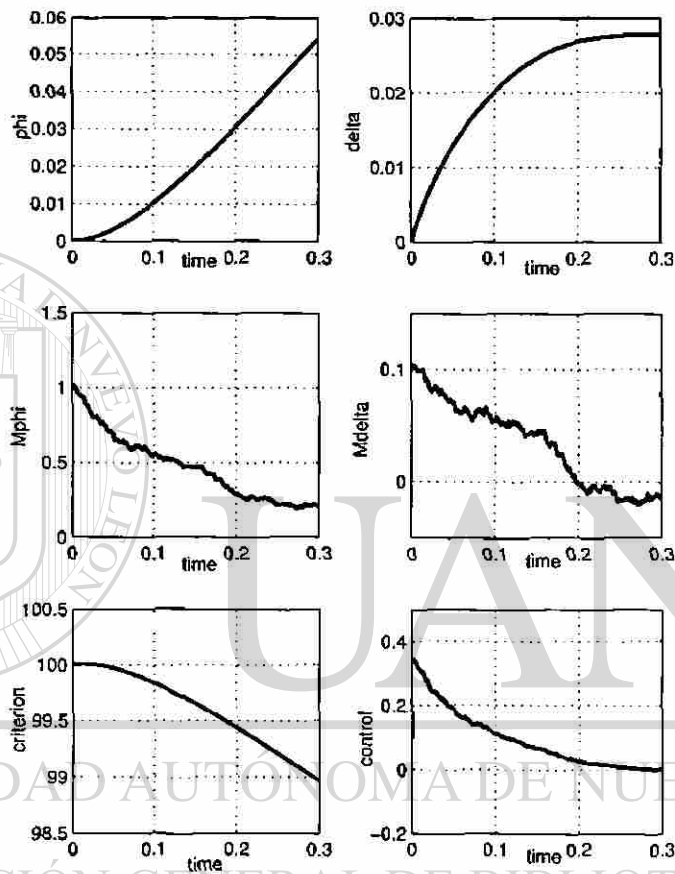


Figura 8.1: Gráficas del controlador lineal formado por las ecuaciones (8.18),(8.16). $\phi = \phi$, $\delta = \delta$, $M\phi = m_\phi$, $M\delta = m_\delta$, $criterion = J$, $control = u^*$.

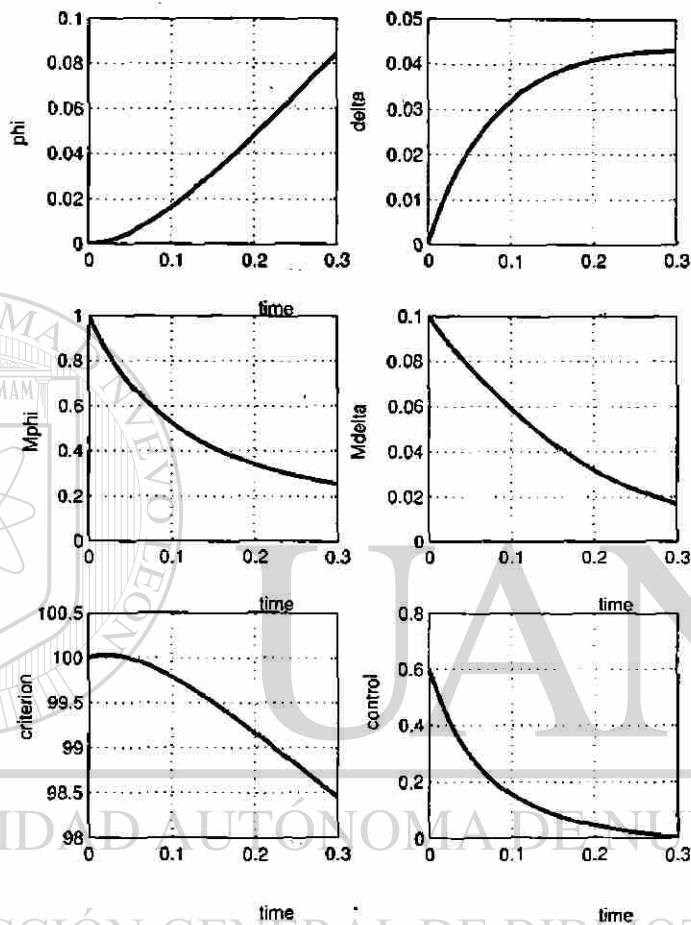


Figura 8.2: Gráficas del controlador óptimo polinomial de tercer grado, correspondiente a las ecuaciones (8.17) y (8.16). $phi = \phi$, $delta = \delta$, $Mphi = m_\phi$, $Mdelta = m_\delta$, $criterion = J$, $control = u^*$.

Capítulo 9

Conclusiones, Aportaciones y Recomendaciones para Trabajos Futuros

9.1. Conclusiones

Se han obtenido matemáticamente los algoritmos del regulador óptimo para sistemas de Itô-Volterra con entradas de control continuas o discontinuas, partiendo del principio de dualidad para el caso de las ecuaciones de Itô-Volterra con observaciones lineales. Utilizando el principio de separación, y los algoritmos de filtrado obtenidos previamente, se obtuvo matemáticamente el controlador óptimo para los sistemas de Itô-Volterra.

Se obtuvieron los algoritmos de filtrado y control óptimos para ecuaciones de estado polinomiales de tercer y cuarto grado, con observaciones lineales. Se ha mostrado la eficiencia de los algoritmos de filtrado y control, obtenidos matemáticamente, para sistemas polinomiales de tercero y cuarto grados, con observaciones continuas, comparándolos con

los algoritmos de filtrado de Kalman-Bucy ya existentes, mediante una simulación en *MatLab 6, versión 1.2.*, aclarando que en esta simulación, el ruido blanco es considerado como una señal de banda ancha finita, por lo cual es una aproximación. En forma similar al caso de Itô-Volterra, se obtuvieron mediante procedimientos matemáticos, los algoritmos del controlador óptimo para ecuaciones de estado polinomiales de tercer grado. Aplicándolos, a un fenómeno físico, mediante simulación en *MatLab 6, versión 1.2.*, se compararon los algoritmos del controlador polinomial obtenido en este trabajo, con los algoritmos del controlador lineal, obteniendo mejores resultados con el controlador polinomial. Como un caso general, se trabajó con los algoritmos de filtrado óptimo para el caso bilineal, y teniendo el deseo de verificarlos en un número mayor a dos ecuaciones, se llevó a cabo su aplicación a un modelo matemático de un reactor de polimerización, con el propósito de mostrar su eficacia respecto a los algoritmos lineales ya existentes. Lo anterior se consiguió mediante la simulación en *MatLab 6, versión 1.2.* Queda como trabajo a futuro la verificación de la eficacia de los algoritmos obtenidos mediante su aplicación a diversos fenómenos físicos que se presentan en la naturaleza.

9.2. Aportaciones

Las aportaciones se pueden enlistar en la siguiente forma:

a) Diseño de algoritmos de filtrado óptimo para:

- Sistemas de Itô-Volterra y observaciones lineales continuas.
- Sistemas de Itô-Volterra y observaciones lineales discontinuas.
- Ecuaciones de estado polinomiales de tercer y cuarto grados y observaciones lineales continuas.

- Ecuaciones de estado bilineales y observaciones lineales continuas.

b) Diseño de algoritmos de control óptimo para:

- Sistemas de Itô-Volterra y entradas de control lineales continuas.
- Sistemas de Itô-Volterra y entradas de control lineales discontinuas.
- Ecuaciones de estado polinomiales de tercer grado y entradas de control lineales continuas.

c) Diseño del controlador para sistemas que representan procesos no observables para:

- Sistemas de Itô-Volterra con observaciones y entradas de control lineales continuas.
- Sistemas de Itô-Volterra con observaciones y entradas de control lineales discontinuas.
- Ecuaciones de estado polinomiales de tercer grado con observaciones y entradas de control lineales continuas.

d) Los problemas técnicos resueltos en este trabajo son los siguientes:

- Obtención del control óptimo del movimiento de un misil con motores jet e impulsivos.
- Obtención de controlador óptimo del movimiento de un misil con motores jet e impulsivos y velocidad *no observable*.
- Obtención de las ecuaciones de filtrado óptimo referentes al movimiento angular de un automóvil.

- Obtención de las ecuaciones de control óptimo referentes al movimiento angular de un automóvil.
- Obtención de las ecuaciones del controlador óptimo referentes al movimiento angular de un automóvil.
- Obtención de las ecuaciones de filtrado óptimo para la estimación de un proceso de polimerización.

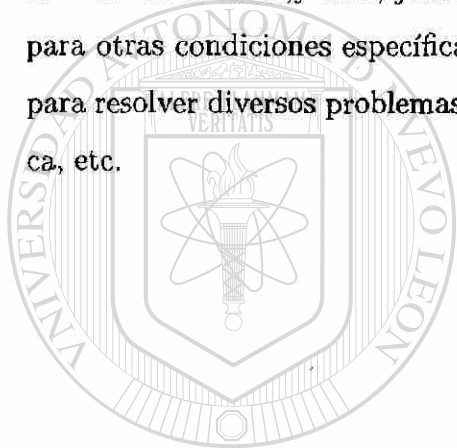
9.3. Recomendaciones para Trabajos Futuros

Existen múltiples casos a desarrollar en las áreas de filtrado y control, dada la diversidad de los procesos de la naturaleza. Algunos de ellos pueden ser:

- Corroboración de los algoritmos de filtrado y control obtenidos, mediante su aplicación en diversos fenómenos físicos.
- Desarrollo de filtro y control óptimo para sistemas de otros grados polinomiales superiores, con observaciones continuas.
- Desarrollo de filtro y control óptimo para sistemas de otros grados polinomiales superiores, con observaciones discontinuas.
- Desarrollo de filtro y control óptimo para ecuaciones de estado con términos no lineales y no polinomiales, con funciones de tipos exponencial, logarítmico, trigonométrico, etc., con observaciones continuas y discontinuas.
- Aplicación de los algoritmos obtenidos a problemas técnicos de diversas áreas de Ingeniería.

- Verificación de los algoritmos de filtrado bilineales, interdisciplinariamente, esto es con un especialista en las dos ingenierías, de control y química, para el proceso de polimerización presentado por Ogunnaike [64], utilizando métodos químicos para elegir las ecuaciones afines, y los valores de los parámetros, y los algoritmos obtenidos en este trabajo.

La verificación y corroboración de los algoritmos de filtrado obtenidos permitirá la consolidación de los mismos, y esto, junto con el desarrollo de los algoritmos de filtrado y control para otras condiciones específicas que presenta la naturaleza, proveedrá de herramientas para resolver diversos problemas técnicos de las Ingenierías Química, Automotriz, Eléctrica, etc.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Bibliografía

- [1] R. L. Alford, E. B. Lee, Sampled Data Hereditary Systems: Linear Quadratic Theory, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-31**, (1986) 60-65.
- [2] A. C. Antoulas (Ed.), *Mathematical System Theory. The Influence of R. E. Kalman*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, (1991).
- [3] M. Athans, Special Issue on the Linear-Quadratic-Gaussian Estimation and Control Problem, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-16**, (1971) 527-847.
- [4] A. V. Balakrishnan, *On Stochastic Bang-Bang Control*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, **25**, Springer, New York, (1980) 221-238.
- [5] M. V. Basin, On an Approach to Filtering and Control Design for Polynomial /Delayed Processes, *Proc. 6th European Control Conference 2001*, Porto, Portugal, Septiembre (2001) 2392-2397.
- [6] M. V. Basin, M. A. Alcorta García, Optimal Control in Itô-Volterra Systems, *Dynamics of Continuous, Discrete, and Impulsive Systems. Series B*, **8(3)** (2001), 299-315.

- [7] M. V. Basin, M.A. Alcorta García, Optimal Filtering and Control for Third Degree Polynomial Systems, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, **10(5)**, (2003) 663-680.
- [8] M. V. Basin, M. A. Alcorta García, Optimal Control in Unobservable Itô-Volterra Systems, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series B*, **9**, (2002) 85-100.
- [9] M. V. Basin, María A. Alcorta García, Optimal Controller for Third Degree Polynomial System, Aceptado para su presentación en la 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii, EUA, Diciembre (2003).
- [10] M. V. Basin, M. A. Alcorta García, Optimal Controller for Third Degree Polynomial System, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, **10(6)**, (2003) en impresión.
- [11] M. V. Basin, M. A. Alcorta G., Optimal Control for Third Degree Polynomial Systems, *Applied Mathematics E-Notes*, **2**, (2002) 36-44.
- [12] M. V. Basin, M. A. Alcorta G., Optimal Control for Third Degree Polynomial Systems and its Automotive Application, *Proc. CDC02*, Las Vegas, EUA (2002), 1745-1750.
- [13] M. V. Basin, Ma. A. Alcorta G., Filtro Optimo Polinomial de Grados 3 y 4 y su Aplicación a un Sistema Automotriz, *Memorias del 2do. Taller Nacional de Observación y Estimación de Sistemas no Lineales y sus Aplicaciones*, Instituto de Ingeniería de la U.N.A.M., México, D.F., (2001) 29-44.

- [14] M. V. Basin, Ma. A. Alcorta G., Optimal Polynomial Filter of Degrees 3 and 4 and its Application to an Automotive System, *Proc. of American Control Conference /ISIC 2001*, México, D. F., (2001) 872-878.
- [15] M. V. Basin, Ma. A. Alcorta G., Optimal Control in Itô-Volterra Systems, *Proc. American Control Conference*, Anchorage, Alaska, EUA, (2002) 2921-2927.
- [16] M. V. Basin, Ma. A. Alcorta G., An Optimal Control Problems for Itô-Volterra States, *Proc. 5th. IFAC Symposium "Nonlinear Control Systems", NOLCOS 2001* St. Petersburg, Rusia, (2001) 1179-1184.
- [17] M. V. Basin, M. A. Alcorta G., Optimal Regulator for Third Degree Polynomial Systems, *Proc. of the 2002 IEEE International Conference on Control Applications*, Glasgow, Escocia, (2002) 617-623.
- [18] M. V. Basin, M. A. Alcorta G., Optimal Polynomial Filter and Regulator for Third Degree Polynomial Systems, *Proc. of the International Conference on System Identification and Control Problems*, Moscú, Rusia (2003) 2090-2105.
-
- [19] M. V. Basin, Ma. A. Alcorta G., Optimal Filtering for Bilinear Systems and its Application to Terpolymerization Process State Identification, *Proc. IFAC 13th. Symposium System Identification-SYSID-2003*, Rotterdam, Holanda, Septiembre (2003) 467-472.
- [20] M. V. Basin, Ma. Aracelia Alcorta García, Optimal Filtering for Bilinear Systems States and its Application to Polymerization Process Identification, *Proc. American Control Conference 2003*, Denver, EUA, (2003) 1982-1987.
- [21] M. V. Basin, D. A. Díaz R., Ma. A. Alcorta G., Sobre Algunos Problemas de Filtrado Óptimo No Lineal, *Ciencia U.A.N.L.*, 4(3), (2001) 161-166.

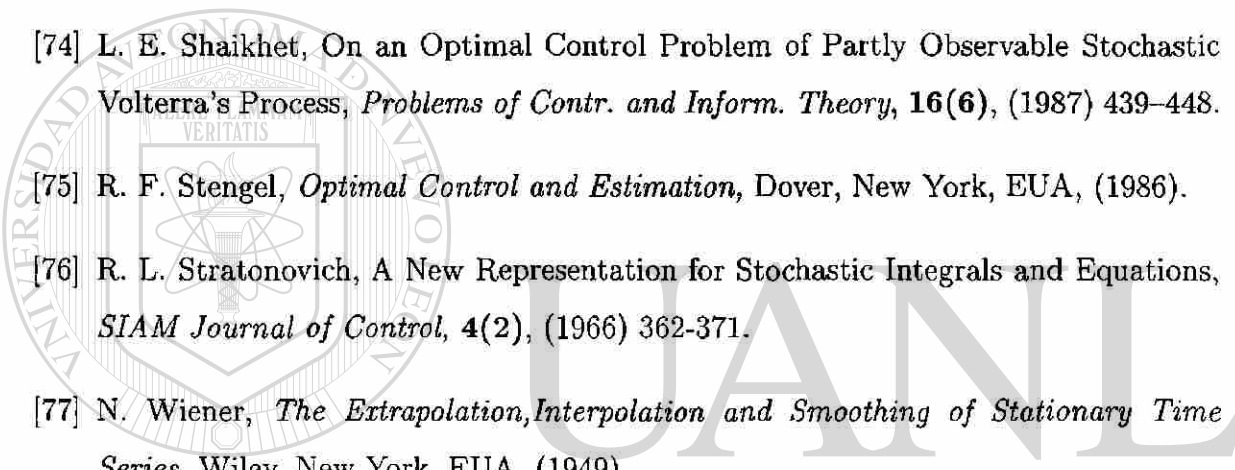
- [22] M. V. Basin, M. A. Villanueva L., I. R. Valadez G., On Filtering Problems over Observations with Delays, *Proc. 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix, EUA, (1999) 4572–4577.
- [23] M. V. Basin, I. R. Valadez G., Minmax Filtering in Volterra Systems, *Proc. American Control Conference 2000*, Chicago, EUA, (2000) 1380–1385.
- [24] M. V. Basin, I. R. Valadez G., Optimal Minmax Filtering and Control in Discontinuous Volterra Systems, *Proc. American Control Conference 2000*, Chicago, EUA, (2000) 904–909.
- [25] M. V. Basin, M. A. Villanueva L., I. R. Valadez G., Itô-Volterra Approach to Filtering Problems over Observations with Delays, *Dynamics of Continuous, Discrete, and Impulsive Systems*, 7(3), (2000) 429–440.
- [26] M. V. Basin, M. A. Villanueva L., On Filtering Problems over Itô-Volterra Observations, *Proc. American Control Conference 1999*, San Diego, EUA, (1999) 3407–3412.
-
- [27] M. V. Basin, M. A. V. Llanes, Filtering Problems over Itô-Volterra Observations, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems* 7(1), (2000) 51–64.
- [28] R. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, EUA, (1957).
- [29] V. E. Benes, Exact Finite-Dimensional Filters for Certain Diffusions with Nonlinear Drift, *Stochastics*, 5, (1981) 65–92.
- [30] G. A. Bliss, *Lectures on the Calculus of Variations*, University of Chicago Press, EUA, (1946).

- [31] A. E Bryson, W. F. Denham, A Steepest-Ascent Method for Solving Optimum Programming Problems, *Journal of Applied Mechanics Series E*, **29**, (1962) 247-257.
- [32] A. E. Bryson, Y. C. Ho, *Applied Optimal Control*, Hemisphere Publishing Company, New York, EUA, (1979).
- [33] C.T. Chen, *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart, and Winston, New York, EUA, (1984).
- [34] D. Chyung, E. B. Lee, Linear Optimal Systems with Time Delays, *SIAM J. Contr.*, **3**, (1966) 548-575.
- [35] M. C. Delfour, The Linear-Quadratic Optimal Control Problem with Delays in State and Control Variables: A State Space Approach, *SIAM J. Contr.*, **24**, (1986) 835-883.
- [36] P. Dyer, S. R. McReynolds, *The Computation and Theory of Optimal Control*, Academic Press. (1970).
-
- [37] A. Einstein, *Investigations on the Theory of the Brownian Motion*, Dover, New York, EUA, (1956)
- [38] P. L. Falb, J. L. DeJong, *Some Successive Aproximation Methods in Control and Oscillation Theory*. Academic Press, New York, EUA, (1969).
- [39] W. H. Fleming, R. W. Rishel, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer, New York, EUA, (1975).
- [40] G. L. Fonseca. *Keynesian Business Cycle Theory*, Departamento of Economía, Baltimore University. EUA, (1998).

- [41] P. Frost, T. Kailath, An Innovations Approach to Least Squares Estimation-Part III: Nonlinear Estimation in White Gaussian Noise, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-16**, (1971) 217-226.
- [42] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison Wesley, (1959).
- [43] R. F. Hartl, Optimal Dynamic Advertising Policies for Hereditary Processes, *J. Optim. Theory Appl.*, **43**, (1984) 51-72.
- [44] P.G. Hoel, S.C. Port, Ch. J. Stone, *Introduction to Stochastic Processes*, Waveland Press, Houghton Mifflin Company, Boston, EUA, (1972).
- [45] K. Itô, On the Existence and Uniqueness of Solutions of n Stochastic Integral Equations of the Volterra Type, *Kodai Math. Journal*, **2**, (1979) 158-170.
- [46] R.E. Kalman, R.S. Bucy, New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, *ASME Trans., Part D (J. of Basic Engineering)*, **83**, (1961) 95-108.
- [47] R. E. Kalman, A New Approach to linear Filtering and Prediction Problems, *ASME Trans., Part D (J. of Basic Engineering)*, **82**, (1960) 35-45.
- [48] R. E. Kalman, The Theory of Optimal Control and the Calculus of Variations, en R. Bellman (Ed.), *Mathematical Optimizacion Techniques*, Calif. Univ. Press, EUA, (1963) 309-331.
- [49] H. J. Kelley, Method of Gradients, en G. Leitman (Ed.) *Optimización Techniques*, Academic Press, (1962).
- [50] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, (1996).

- [51] M. L. Kleptsina, A. Yu. Veretennikov, On Filtering and Properties of Conditional Laws of Itô-Volterra Processes, *Statistics and Control of Stochastic Processes. Steklov Seminar. 1984*, Optimization Software Inc., Publication Division, New York, (1985) 179–196.
- [52] A. N. Kolmogorov, Über die Analytische Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Math. Ann.*, **104**, (1931) 415-458.
- [53] H. J. Kushner, On Differential Equations Satisfied by Conditional Probability Densities of Markov Processes, *SIAM J. Control*, **2**, (1964) 106-119.
- [54] H. J. Kushner, P. Dupuis, *Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time*, Springer, (2001).
- [55] H. J. Kushner, *Stochastic Stability and Control*, Academic Press, New York, EUA, (1967).
- [56] H. Kwakernaak, R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*, Wiley, New York, EUA, (1972).
- [57] E. B. Lee, Y. C. You, Optimal Control of Bivariate Linear Volterra Integral Type Systems, *Proc. 26th IEEE Conference on Decision and Control*, (1987) 721–726.
- [58] F. L. Lewis, *Optimal Control*, Wiley, New York, EUA, (1986).
- [59] F. L. Lewis, *Applied Optimal Control and Estimation*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, EUA, (1992).
- [60] R. S. Liptser, A. N. Shiriyayev *Statistics of Random Processes I: General Theory*, Springer-Verlag. New York, EUA, (1977).

- [61] R. Mc Gill, Optimal Control, Inequality State Constraints and the Generalized Newton-Raphson Algorithm, *SIAM Journal in Control*, **3**, (1965) 291-298.
- [62] S. K. Mitter, Filtering and Stochastic Control: A Historical Perspective, *Control Systems*, **16(3)**, (1996) 67-76.
- [63] R. Murray, S. Sastry, Nonholonomic Motion Planning: Steering Using Sinusoids, *IEEE Trans. Automat. Control*, **38(5)**, (1993) 700-716.
- [64] B. A. Ogunnaike, On-line Modeling and Predictive Control of an Industrial Terpolymerization Reactor, *Int. J. Control*, **59(3)**, (1994) 711-729.
- [65] Yu. Orlov, Vibrocorrect Differential Equations with Measures, *Math. Notes*, **38(1)**, (1985) 110-119.
- [66] Yu. Orlov, *Theory of Optimal Systems with Generalized Controls*, Nauka, Moscú, Rusia, (1998). En ruso.
- [67] Yu. V. Orlov, M. V. Basin, On Minimax Filtering over Discrete-Continuous Observations, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-40**, (1995) 1623-1626.
- [68] E. Polak, An Historical Survey of Computational Methods in Optimal Control, *SIAM Review*, **15**, (1973) 553-584.
- [69] L. S. Pontryagin, Optimal Regulation Processes. *American Mathematical Society Transactions. Series 2*, **18**, (1961) 321-339.
- [70] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Fizmatlit, Moscu, Rusia, 1961. Traducido por K. N. Trirogoff. editado por L. W. Neustadt, Wiley, New York, EUA, (1962).

- [71] V. S. Pugachev, I.N. Sinitsyn, *Stochastic Systems, Theory and Applications*, World Scientific, Singapore, (2001).
- [72] V. S. Pugachev, *Probability Theory and Mathematical Statistics for Engineers*, Instituto de Ciencias y Control, Academia de Ciencias de Rusia, Moscú, Pergamon, Rusia, (1984).
- [73] W. Rudin, *Análisis Real y Complejo*, Tercera Edición, McGraw-Hill, México (1988).
- [74] L. E. Shaikhet, On an Optimal Control Problem of Partly Observable Stochastic Volterra's Process, *Problems of Contr. and Inform. Theory*, **16(6)**, (1987) 439-448.
- [75] R. F. Stengel, *Optimal Control and Estimation*, Dover, New York, EUA, (1986).
- [76] R. L. Stratonovich, A New Representation for Stochastic Integrals and Equations, *SIAM Journal of Control*, **4(2)**, (1966) 362-371.
- [77] N. Wiener, *The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*, Wiley, New York, EUA, (1949).
-
- [78] W. M. Wonham, Some Applications of Stochastic Differential Equations to Nonlinear Filtering, *SIAM J. Control*, **2**, (1965) 347-369. 
- [79] S. S.-T. Yau, Finite-Dimensional Filters with Nonlinear Drift I: A Class of Filters Including Both Kalman-Bucy and Benes Filters, *J. Math. Systems, Estimation, and Control*, **4**, (1994) 181-203.

OPTIMAL CONTROL IN ITO-VOLTERRA SYSTEMS

Michael V. Basin and Maria A. Alcorta Garcia

Department of Physical and Mathematical Sciences
Autonomous University of Nuevo Leon
Apdo postal 144-F, C.P. 66450, San Nicolas de los Garza
Nuevo Leon, Mexico

Abstract. This paper presents solutions of the optimal linear-quadratic control problems for stochastic integral Ito-Volterra systems with continuous/discontinuous states. The obtained solutions are based on applying the duality principle for Volterra systems to the known solutions of the dual filtering problems for Ito-Volterra states over continuous/discontinuous observations. The optimal control laws and the gain matrix equations are first derived in the general case an Ito-Volterra state equation and then simplified in the case of a dynamic plant governed by a differential state equation. The technical example illustrating application of the obtained results is finally given.

AMS subject classification: 49K22, 93E20

1 Introduction

The optimal control and filtering problems for dynamic systems with delays, which represent a particular case of discontinuous integral systems, have been studied in a number of publications from various viewpoints (see, for example, [9], [10], [1] for dynamic systems and [17] for a particular case of integral Volterra ones). This attention is directly related to common use of dynamic systems with delays in global economy concepts [12], marketing models [13], technical systems [7], and others. Since the class of integral Volterra systems includes the class of retarded dynamic ones, the study of integral systems becomes a significant part of the control theory. Nevertheless, the integral Volterra systems have been of independent interest in the deterministic environment, as well as in the stochastic one (see [2]).

This paper presents solutions of the optimal linear-quadratic control problems for stochastic integral Ito-Volterra systems with continuous and then discontinuous states. There are a number of papers investigating the control problems for continuous system states given by stochastic differential equations (see [11, 19] and bibliography therein) or bivariate Volterra ones [17], or deterministic continuous and discontinuous system states governed by Volterra equations [3, 4]. However, the problems have not been treated yet in the case of integral stochastic systems governed by Ito-Volterra equations. The solution presented in the paper is based on applying the duality principle for Volterra systems (substantiated in [3]) to the known solutions of

the dual filtering problems for Ito-Volterra states over continuous and then discontinuous observations. The duality principle enables one to use the optimal gain matrix structure in the dual filtering problem for the optimal gain matrix in the control one, as it was done for differential stochastic systems [14, 15]. As a result, the optimal control law and the gain matrix formula are first derived in the general case an Ito-Volterra state equation, where the gain matrix constituent satisfying a Riccati equation depends on two time variables, as the cross-correlation matrix in the dual filtering problem does (see [5]). The gain matrix formula is then simplified in the case of a dynamic plant (the internal part of a system) governed by a differential state equation, where the gain matrix constituent satisfying a Riccati equation depends on only one time variable, similarly to the variance in the dual filtering problem (see [6]). The obtained results for discontinuous system states, where the optimal control problem is dual to the optimal filtering problem over discontinuous observations ([5, 6]), consist of the discontinuous control law and the corresponding Riccati equation with integration with a discontinuous measure, which allows discontinuous solutions. In particular, the obtained results enable one to compute jumps of the optimal control parameters (the gain matrix, optimal control law, and optimally controlled state) that can appear due to discontinuities in system behavior.

The secondary goal of this paper is to reveal more functional capabilities of the duality principle as a means for solving the optimal control (or, vice versa, filtering) problems. Indeed, the duality principle applicability to linear dynamic systems is well known (see [8, 18]) and its applicability to linear integral Volterra (Ito-Volterra) systems is investigated in [3, 4] and this paper. However, it seems that the more advanced conjecture is valid: the duality principle should be valid in all cases of linear and nonlinear systems, where the optimal solution to control or filtering problem exists. Taking this working hypothesis into account makes the duality principle a quite powerful tool for designing the optimal control and filtering algorithms.

The paper is organized as follows. The Section 2 presents the optimal control statement and its solution (the optimal control law and gain matrix equation) for a continuous Ito-Volterra system, based on applying the duality principle to the solution of the dual filtering problem. The optimal control problem for a discontinuous Ito-Volterra system is stated and solved in Section 3. The obtained results are then simplified in the case of a dynamic plant (the internal part of a system) governed by a differential equation. In particular, the relations enabling one to compute jumps of the optimal control parameters are obtained. Finally, Section 4 presents the technical example illustrating application of the obtained results to solution of the optimal control problem of launching a missile with continuous and impulsive jet motors to the maximal possible altitude with the minimal fuel consumption, if the velocity dynamics is affected by equally distributed and independent stochastic disturbances.

2 Optimal Control in Continuous Ito-Volterra Systems

2.1 Problem statement

Let (Ω, F, P) be a complete probability space with an increasing right-continuous family of σ -algebras $F_t, t \geq 0$, and let $(W_1(t), F_t, t \geq 0)$ be an F_t -adapted Wiener process. Let us consider the F_t -measurable random process $x(t)$ governed by the Ito-Volterra equation

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + a(t, s)x(s) + b(t, s)u(t, s))ds + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s). \quad (1)$$

Here $x(t) \in R^n$ is the state vector, $u(t, s) \in R^p$ is the control variable, the Wiener process $W_1(t)$ represents a random disturbance, and the initial Gaussian vector $x(t_0)$ is independent of $W_1(t)$. The quadratic cost function J to be minimized is defined as follows

$$J = E\left\{\frac{1}{2} [x(T) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(T) - x_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t, s)R(s)u(t, s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T x^T(s)Q(s)x(s)ds\right\}, \quad (2)$$

where x_0 is a given vector, Ψ, R, Q are positive (nonnegative) definite symmetric matrices, $T > t_0$ is a certain time moment, the symbol $E\{f(x)\}$ means the expectation (mean) of a function f of a random variable x , and a^T denotes transpose to a vector (matrix) a .

The optimal control problem is to find the control $u^*(t), t \in [t_0, T]$, that minimizes the criterion J along with the trajectory $x^*(t), t \in [t_0, T]$, generated upon substituting $u^*(t)$ into the state equation (1).

2.2 Duality principle

For dynamic systems governed by differential equations, solution of the optimal control problem can be obtained using the solution of the optimal filtering problem and the duality principle [8, 18]. Thus, it would be helpful to introduce the duality principle for integral stochastic systems, as done below.

Consider the integral Volterra systems:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a(t, s)x(s) + b(t, s)u(t, s))ds, \quad (3)$$

$$y(t) = \int_{t_0}^t c(t, s)x(s)ds + \int_{t_0}^t d(t, s)u(t, s)ds$$

and

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t -a^T(t, s)z(s)ds + \int_{t_0}^t c^T(t, s)v(t, s)ds, \quad (4)$$

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^t b^T(t, s)z(s)ds + \int_{t_0}^t d^T(t, s)v(t, s)ds.$$

The duality principle claims that the system (3) is controllable (observable) at t_0 , if and only if the system (4) is observable (controllable) at t_0 .

The proof of the duality principle for integral systems [3] is based on the fact that there exists the transition matrix $\Phi(t, t_0)$; $t, t_0 \in (-\infty, \infty)$, such that

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)b(t, \tau)u(t, \tau)d\tau.$$

2.3 Dual filtering problem solution

The suggested solution to the optimal control problem for integral stochastic systems is based on applying the duality principle to the optimal filtering problem solution obtained in [5]. Indeed, let us consider the filtering problem, dual to the optimal control one given by (1),(2), for the state equation

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0^T(t, s) - a^T(t, s)z(s))ds + \int_{t_0}^t Q^{1/2}(s)dW_3(s) \quad (5)$$

and the observation equation

$$y(t) = \int_{t_0}^t (b^T(t, s)x(s))ds + \int_{t_0}^t R^{1/2}(s)dW_4(s), \quad (6)$$

where $W_3(s)$ and $W_4(s)$ are independent Wiener processes which are in turn independent of an initial Gaussian vector $z(t_0)$.

The filtering problem is to find the best estimate for the Ito-Volterra process $x(t)$ at time t based on the observation process $Y(t) = \{y(s), t_0 \leq s \leq t\}$, that is the conditional expectation $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$. Denote the correlation function of the best estimate as $P(t) = E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)$.

As shown in [5] and the previous papers [16, 21], it is impossible to obtain a closed system of filtering equations for variables $m(t)$ and $P(t)$ due to the Volterra nature of the equations (5) and (6). Designing a closed filter requires introducing the additional cross-correlation function $f(t, s)$ characterizing a deviation of the best estimate $m(t)$ from the real state $x(t)$:

$$f(t, s) = E((z_s^t - m_s^t)(z(s) - m(s))^T | F_{t,s}^Y),$$

where

$$z_s^t = z(t_0) + \int_{t_0}^s (a_0^T(t, r) - a^T(t, r)z(r))dr + \int_{t_0}^s Q^{1/2}(r)dW_3(r),$$

$F_{t,s}^Y$ is the σ -algebra generated by the stochastic process y_s^t

$$y_s^t = \int_{t_0}^s b^T(t,s)z(s)ds + \int_{t_0}^s R^{1/2}(s)dW_4(s),$$

$$\text{and } m_s^t = E(z_s^t | F_{t,s}^Y).$$

The optimal filter for the state vector (5) over the continuous observation process (6) is given [5] by the following equations for the optimal estimate $m(t)$, its correlation function $P(t)$, and the cross-correlation function $f(t,s)$

$$m(t) = m(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0^T(t,s) - a^T(t,s)m(s))ds - \quad (7)$$

$$\int_{t_0}^t f(t,s)b(t,s)(R(s))^{-1}[dy(s) - b^T(t,s)m(s)ds].$$

$$P(t) = P(t_0) + \int_{t_0}^t [-a^T(t,s)f^T(t,s) - f(t,s)a(t,s) + Q(s)]ds - \quad (8)$$

$$\int_{t_0}^t f(t,s)b(t,s)(R(s))^{-1}b^T(t,s)f^T(t,s)ds,$$

$$f(t,s) = P(t_0) + \int_{t_0}^s [-a^T(s,r)f^T(t,r) - f(s,r)a(t,r) + Q(r)]dr - \quad (9)$$

$$\int_{t_0}^s [f(t,r)b(s,r)(R(r))^{-1}b^T(s,r)f^T(s,r) +$$

$$f(s,r)b(t,r)(R(r))^{-1}b^T(t,r)f^T(t,r) -$$

$$(1/2)f(t,r)b(t,r)(R(r))^{-1}b^T(s,r)f^T(s,r) -$$

$$(1/2)f(s,r)b(s,r)(R(r))^{-1}b^T(t,r)f^T(t,r)]dr,$$

where $m(t_0) = E(z(t_0) | F_{t_0}^Y) = x_0$ and $P(t_0) = E((z(t_0) - m(t_0))(z(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$ are the initial conditions.

Thus, the solution to the optimal control problem defined by (1),(2) can be now obtained using the expression for the optimal filter gain matrix in (7) and the cross-correlation equation (9).

2.4 Optimal control problem solution

Since the filter gain matrix in (7) is equal to

$$M_f(t,s) = f(t,s)b(t,s)(R(s))^{-1},$$

the dual gain matrix in the optimal control problem takes the form of its transpose

$$M_c(t,s) = R^{-1}(s)b^T(t,s)f^T(t,s).$$

Hence, the optimal control law in the problem (1), (2) is given by

$$u^*(t, s) = R^{-1}(s)b^T(t, s)f^T(t, s)x(s), \quad (10)$$

where $f(t, s)$ is the solution of the integral Riccati equation

$$f(t, s) = P(t_0) + \int_{t_0}^s [-a^T(s, r)f^T(t, r) - f(s, r)a(t, r) + Q(r)]dr - \quad (11)$$

$$\int_{t_0}^s [f(t, r)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r) +$$

$$f(s, r)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r) -$$

$$(1/2)f(t, r)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r) -$$

$$(1/2)f(s, r)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r)]dr,$$

with the terminal condition $f(T, T) = P(T) = \Psi^{-1}$.

Finally, upon substituting the optimal control (10) into the state equation (1), the optimally controlled state equation is obtained

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + a(t, s)x(s) + \quad (12)$$

$$b(t, s)R^{-1}(s)b^T(t, s)f^T(t, s)x(s))ds + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s).$$

3 Optimal Control in Discontinuous Ito-Volterra Systems

3.1 Problem statement

Let (Ω, \mathcal{F}, P) be a complete probability space with an increasing right-continuous family of σ -algebras $F_t, t \geq 0$, and let $(W_1(t), F_t, t \geq 0)$ be an F_t -adapted Wiener process. Let us consider the F_t -measurable random process $x(t)$ governed by the Ito-Volterra equation

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + a(t, s)x(s) + \quad (13)$$

$$\int_{t_0}^t b(t, s)u(t, s)dv(s) + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s).$$

Here $x(t) \in R^n$ is the state vector, $u(t, s) \in R^p$ is the control variable, $v(s)$ is a scalar bounded variation function, the Wiener process $W_1(t)$ represents a

random disturbance, and the initial Gaussian vector $x(t_0)$ is independent of $W_1(t)$. The quadratic cost function J to be minimized is defined as follows

$$J = E\left[\frac{1}{2} [x(T) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(T) - x_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t, s) R(s) u(t, s) dv(s) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T x^T(s) Q(s) x(s) ds\right], \quad (14)$$

where x_0 is a given vector, Ψ , R , Q are positive (nonnegative) definite symmetric matrices, $T > t_0$ is a certain time moment.

The optimal control problem is to find the control $u^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, that minimizes the criterion J along with the trajectory $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, generated upon substituting $u^*(t)$ into the state equation (13). The state trajectory $x(t)$ may be discontinuous due to discontinuity of the integral with discontinuous function $w(t)$ in the right-hand side of (24). This model of system states enables one to consider sharp changes (jumps) in system position, as well as its gradual continuous movement.

3.2 Dual filtering problem solution

Using the same technique as in Section 2, the suggested solution to the optimal discontinuous control problem for integral stochastic systems is based again on applying the duality principle to the optimal discontinuous filtering problem solution obtained in [5]. In this case, the filtering problem over discontinuous observations, dual to the optimal discontinuous control problem (13), (14), is formulated for the unobserved state

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0^T(t, s) - a^T(t, s)z(s)) ds + \int_{t_0}^t Q^{1/2}(s) dW_3(s) \quad (15)$$

and the discontinuous observation process

$$y(t) = \int_{t_0}^t (b^T(t, s)x(s)) dv(s) + \int_{t_0}^t R^{1/2}(s) dW_4(v(s)), \quad (16)$$

where $W_3(s)$ and $W_4(s)$ are independent Wiener processes which are in turn independent of an initial Gaussian vector $z(t_0)$. The filtering objective is the same as in Subsection 2.3.

As a result, the following filtering equations for the optimal estimate $m(t)$, its correlation function $P(t)$, and the cross-correlation function $f(t, s)$ (all notation is the same in Subsection 2.3) have been obtained in [5], applying the filtering procedure [20] for deriving the filtering equations over discontinuous observations from the known filtering equations over continuous ones to the equations (8)–(10):

$$m(t) = m(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0^T(t, s) - a^T(t, s)m(s)) ds + \quad (17)$$

$$\int_{t_0}^t f(t, s)b(t, s)(R(s))^{-1}[dy(s) - b^T(t, s)m(s)dv(s)],$$

$$P(t) = P(t_0) + \int_{t_0}^t [-a^T(t, s)f^T(t, s) - f(t, s)a(t, s) + Q(s)]ds - \quad (18)$$

$$\int_{t_0}^t f(t, s)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s)dv(s),$$

$$f(t, s) = P(t_0) + \int_{t_0}^s [-a^T(s, r)f^T(t, r) - f(s, r)a(t, r) + Q(r)]dr - \quad (19)$$

$$\int_{t_0}^s [f(t, r)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r) +$$

$$f(s, r)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r) -$$

$$(1/2)f(t, r)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r) -$$

$$(1/2)f(s, r)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r)]dv(r),$$

where $m(t_0) = E(z(t_0) | F_{t_0}^Y) = x_0$ and $P(t_0) = E((z(t_0) - m(t_0))(z(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$ are the initial conditions. The functions $m(t)$ and $P(t)$ have jumps at the discontinuity points of the function $v(t)$, and the function $f(t, s)$ is continuous in t and has jumps in the second time argument s at the same discontinuity points of $v(t)$.

3.3 Optimal control problem solution

Based on the duality of the filtering and control gain matrices, we conclude that the optimal control law is given by the same expression

$$u^*(t, s) = R^{-1}(s)b^T(t, s)f^T(t, s)x(s), \quad (20)$$

and $f(t, s)$ is the solution of the integral Riccati equation

$$f(t, s) = P(t_0) + \int_{t_0}^s [-a^T(s, r)f^T(t, r) - f(s, r)a(t, r) + Q(r)]dr - \quad (21)$$

$$\int_{t_0}^s [f(t, r)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r) +$$

$$f(s, r)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r) -$$

$$(1/2)f(t, r)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r) -$$

$$(1/2)f(s, r)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r)]dv(r),$$

with the terminal condition $f(T, T) = P(T) = \Psi^{-1}$.

Upon substituting the optimal control (20) into the state equation (1), the optimally controlled state equation is obtained

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + a(t, s)x(s) +$$
 (22)

$$b(t, s)R^{-1}(s)b^T(t, s)f^T(t, s)x(s))dv(s) + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s).$$

The obtained equations (21)-(22) are integral equations with integration w.r.t. a discontinuous measure generated by a bounded variation function $v(t)$, which do not tell us how to compute jumps of the optimally controlled state $x(t)$ and the gain-forming matrix $f(t, s)$ at the discontinuity points of the function $v(t)$ corresponding to discontinuities in the state $x(t)$. Nevertheless, in accordance with Theorem 3 in [5], the jumps can be computed solving the following system of differential equations, where $x(t-)$ and $f(t, s-)$ are values from the left of the system state $x(t)$ and its cross-correlation $f(t, s)$ at their discontinuity points t and (t, s) , respectively:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dv} &= b(t, t)R^{-1}(t)b^T(t, t)f(t, v)x(v), \\ x(0) &= x(t-), \quad v \in [0, \Delta v(t)], \\ \frac{df(t, v)}{dv} &= -[f(t, v)b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, v) + \\ & f(s, v)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, v) - \\ & (1/2)f(t, v)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, v) - \\ & (1/2)f(s, v)b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, v)], \\ f(t, 0) &= f(t, s-), \quad v \in [0, \Delta v(s)]. \end{aligned}$$

Subsequent solution yields the following jump expressions

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= b(t, t)R^{-1}(t)b^T(t, t)f(t, t-)\Delta v(t), \\ \Delta f(t, s) &= -[f(t, s-)[I + (b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, s-)+ \\ & b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s-)- \\ & (1/2)b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s-)- \\ & (1/2)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, s-)]\Delta v(s)]^{-1} \times \\ & b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, s-)+ \\ & f(s, s-)[I + (b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, s-)+ \\ & b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s-)- \\ & (1/2)b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s-)- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1/2)b(t,s)(R(s))^{-1}b^T(s,s)f^T(s,s-)\Delta v(s)]^{-1} \times \\
& \quad b(t,s)(R(s))^{-1}b^T(t,s)f^T(t,s-)- \\
(1/2)f(s,s-)[I + (b(s,s)(R(s))^{-1}b^T(s,s)f^T(s,s-)+ \\
& \quad b(t,s)(R(s))^{-1}b^T(t,s)f^T(t,s-)- \\
& \quad (1/2)b(s,s)(R(s))^{-1}b^T(t,s)f^T(t,s-)- \\
& \quad (1/2)b(t,s)(R(s))^{-1}b^T(s,s)f^T(s,s-)\Delta v(s)]^{-1} \times \\
& \quad b(s,s)(R(s))^{-1}b^T(t,s)f^T(t,s-)- \\
(1/2)f(t,s-)[I + (b(s,s)(R(s))^{-1}b^T(s,s)f^T(s,s-)+ \\
& \quad b(t,s)(R(s))^{-1}b^T(t,s)f^T(t,s-)- \\
& \quad (1/2)b(s,s)(R(s))^{-1}b^T(t,s)f^T(t,s-)- \\
& \quad (1/2)b(t,s)(R(s))^{-1}b^T(s,s)f^T(s,s-)\Delta v(s)]^{-1} \times \\
& \quad b(t,s)(R(s))^{-1}b^T(s,s)f^T(s,s-)\Delta v(s),
\end{aligned}$$

where I is the $n \times n$ -dimensional identity matrix.

Following [5], the obtained jump expressions can be incorporated into the regulator equations (21)–(22), using the form of the equivalent equations with a measure

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t,s) + a(t,s)x(s) + \quad (23)$$

$$b(t,s)R^{-1}(s)b^T(t,s)f^T(t,s-)x(s)dv(s) + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s).$$

$$f(t,s) = \int_{t_0}^s [-a^T(s,r)f^T(t,r) - f(s,r)a(t,r) + Q(r)]dr - \quad (24)$$

$$\int_{t_0}^s [f(t,r-)[I + (b(s,r)(R(r))^{-1}b^T(s,r)f^T(s,r-)+$$

$$b(t,r)(R(r))^{-1}b^T(t,r)f^T(t,r-)-$$

$$(1/2)b(s,r)(R(r))^{-1}b^T(t,r)f^T(t,r-)-$$

$$(1/2)b(t,r)(R(r))^{-1}b^T(s,r)f^T(s,r-)\Delta v(r)]^{-1} \times$$

$$b(s,r)(R(r))^{-1}b^T(s,r)f^T(s,r-)+$$

$$f(s,r-)[I + (b(s,r)(R(r))^{-1}b^T(s,r)f^T(s,r-)+$$

$$b(t,r)(R(r))^{-1}b^T(t,r)f^T(t,r-)-$$

$$(1/2)b(s,r)(R(r))^{-1}b^T(t,r)f^T(t,r-)-$$

$$(1/2)b(t,r)(R(r))^{-1}b^T(s,r)f^T(s,r-)\Delta v(r)]^{-1} \times$$

$$\begin{aligned}
& b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r-) - \\
& (1/2)f(s, r-)[I + (b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r-) + \\
& \quad b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r-) - \\
& \quad (1/2)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r-) - \\
& \quad (1/2)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r-)]\Delta v(r)]^{-1} \times \\
& \quad b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r-) - \\
& (1/2)f(t, r-)[I + (b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r-) + \\
& \quad b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r-) - \\
& \quad (1/2)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r-) - \\
& \quad (1/2)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r-)]\Delta v(r)]^{-1} \times \\
& \quad b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r-)]dv(r),
\end{aligned}$$

with the terminal condition $f(T, T) = P(T) = \Psi^{-1}$. Here $\Delta v(t)$ is the jump of the bounded variation function $v(t)$ at its discontinuity point t , and $x(t-)$ and $f(t, s-)$ are values from the left of the system state $x(t)$ and the gain-forming matrix $f(t, s)$ at their discontinuity points t and (t, s) , respectively.

3.4 Optimal control for dynamic plant

As shown in this section, the huge equations of Subsection 3.3 can be significantly simplified in the case of a dynamic system, if the state equation (13) has an internal differential part, i.e., is given by

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(s) + a(s)x(s))ds + \quad (25)$$

$$\int_{t_0}^t (b(t, s)u(t, s))dv(s) + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s),$$

and the quadratic cost function J is the same as in (14). Then, the dual filtering problem should be formulated for the unobserved state

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0^T(s) - a^T(s)z(s))ds + \int_{t_0}^t Q^{1/2}(s)dW_3(s) \quad (27)$$

and the discontinuous observation process

$$y(t) = \int_{t_0}^t (b^T(t, s)x(s))dv(s) + \int_{t_0}^t R^{1/2}(s)dW_4(v(s)). \quad (28)$$

As was proved in [6], in the case of a dynamic equation (27), it is possible to obtain a closed system of the optimal filtering equations with respect to only two variables, the optimal estimate $m(t)$ and its variance $P(t)$, without

introducing the cross-correlation $f(t, s)$. Those filtering equations take the form [6]

$$m(t) = m(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0^T(s) - a^T(s)m(s))ds + \quad (29)$$

$$\int_{t_0}^t P(s)b(t, s)(R(s))^{-1}[dy(s) - b^T(t, s)m(s)dv(s)].$$

$$P(t) = P(t_0) + \int_{t_0}^t [-a^T(s)P(s) - P(s)a(s) + Q(s)]ds - \quad (30)$$

$$\int_{t_0}^t P(s)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)P(s)dv(s),$$

where $m(t_0) = E(z(t_0) | F_{t_0}^Y) = x_0$ and $P(t_0) = E((z(t_0) - m(t_0))(z(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y) = \Psi$ are the initial conditions.

Based again on the duality of the filtering and control gain matrices, we conclude that the optimal control law is given by the expression

$$u^*(t, s) = R^{-1}(s)b^T(t, s)P(s)x(s), \quad (31)$$

and $P(s)$ is the solution of the integral Riccati equation

$$P(t) = P(t_0) + \int_{t_0}^t [-a^T(s)P(s) - P(s)a(s) + Q(s)]ds - \quad (32)$$

$$\int_{t_0}^t [P(s)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)P(s)]dv(s),$$

with the terminal condition $P(T) = \Psi^{-1}$.

Upon substituting the optimal control (31) into the state equation (25), the optimally controlled state equation is obtained

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(s) + a(s)x(s) + \quad (33)$$

$$b(t, s)R^{-1}(s)b^T(t, s)P(s)x(s))dv(s) + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s).$$

Correspondingly, the jumps of the optimally controlled state $x(t)$ and the gain-forming matrix $P(t)$ at the discontinuity points of $v(t)$ take the more simplified form

$$\Delta x(t) = b(t, t)R^{-1}(t)b^T(t, t)P(t-)\Delta v(t),$$

$$\Delta P(t) = -[P(t-)[I + (b(t, t)(R(t))^{-1}b^T(t, t)P(t-)\Delta v(t))^{-1} \times \\ b(t, t)(R(t))^{-1}b^T(t, t)P(t)]\Delta v(t),$$

which can be incorporated into the following equations with a measure

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(s) + a(s)x(s) +$$
 (34)

$$b(t, s)R^{-1}(s)b^T(t, s)P(s-)x(s))dv(s) + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s).$$

$$P(t) = \int_{t_0}^t [-a^T(s)P(s) - P(s)a(s) + Q(s)]ds -$$
 (35)

$$\int_{t_0}^t [P(s-)[I + (b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)P(s-)\Delta v(s))^{-1} \times$$

$$b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)P(s-)]dv(s),$$

with the terminal condition $P(T) = \Psi^{-1}$.

4 Movement of Missile with Impulsive and Jet Motors

Let us consider the optimal control problem for movement of a missile with two motors, impulsive and jet (continuous), whose task is to reach the maximal possible altitude at a certain time moment $T > 0$ with the minimal possible fuel consumption. The missile movement is considered governed by the following equations (cf. [7])

$$h(t) = h_0 + \int_0^t v(s)ds,$$

$$m(t) = m_0 + \int_0^t \frac{P_p(s)}{C(t, s)} ds,$$

$$v(t) = \int_0^t \frac{P_p(s) - Q(h, v)}{m(s)} dw(s) - \int_0^t g ds + \int_0^t r(s)dW(s),$$

where $t_0 = 0$, $v(t)$ is the missile velocity, $v_0 = v(0) = 0$;

$h_0 = h(0) > 0$ is the initial adjusted altitude corresponding the missile position on the earth surface, $h(t)$ is the current adjusted altitude;

$m(s)$ is the missile and fuel mass, $m_0 \gg 0$;

$P_p(t)$ is the propulsion force;

$C(t, s) < 0$ is the difference factor of the ideal velocities of the missile at time t and the outflowed fuel at time s , which is varying with change of altitude and, consequently, temperature, pressure, gravity acceleration, etc.;

g is the gravity acceleration;

$r(s)dW(s)$ is the stochastic disturbance represented by a Wiener process and arising due to the resulting effect of unknown equally distributed and independent disturbances affecting velocity dynamics; and

$w(s)$ is a bounded variation function which represents functioning of two missile motors, impulsive and jet (continuous): the jet motor expels fuel gradually and the impulsive one does this instantaneously at a certain time moment t_1 , $0 \leq t_1 \leq T$. Thus, the motors functioning is described using decomposition of $w(t)$ into its continuous component $w^c(t)$ (continuous jet) and the Heaviside function $\chi(t - t_1)$ with jump at the moment t_1 (impulsive motor), i.e., $w(t) = w^c(t) + \chi(t - t_1)$.

It is assumed that the atmosphere resistance force is absent: $Q(h, v) = 0$.

Upon selecting the mass outflow function $u(s) = \frac{\dot{m}(s)}{m(s)} = \frac{d}{ds} [\ln(m(s))]$ as control, the optimal control problem is completely stated for the system state $x(t) = [h(t), v(t)]$ governed by the equation

$$x(t) = x_0 + \int_0^t Ax(s)ds + \int_0^t B(t, s)u(s)dw(s) + \int_0^t Gds + \int_0^t R(s)dW(s),$$

where

$$x(t) = \begin{bmatrix} h(s) \\ v(s) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B(t, s) = \begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}, R(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ r(s) \end{bmatrix}, u(s) = \frac{\dot{m}(s)}{m(s)} = \frac{d}{ds} [\ln(m(s))],$$

$x_0 = [h_0, 0]$, and the cost function to be minimized

$$J = \frac{1}{2} \left[x(T) - \begin{bmatrix} h^* \\ 0 \end{bmatrix} \right]^T \psi \left[x(T) - \begin{bmatrix} h^* \\ 0 \end{bmatrix} \right] + \frac{1}{2} \int_0^T u^2(s)dw(s) \rightarrow \min_{u(\cdot)}$$

where

$$\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad h^* \gg h_0, \text{ and } T > 0 \text{ is a certain time moment.}$$

In accordance with (31), the optimal control is given by

$$u^*(t, s) = [0 \quad C(t, s)] P(s) \begin{bmatrix} h(s) \\ v(s) \end{bmatrix}.$$

Note that the initial adjusted altitude $h_0 > 0$ is determined from the conditions $v(0) = 0$ and $\dot{v}(0) = 0$ (there is equilibrium of the missile on the earth surface at the initial time moment), which, upon substituting the optimal control $u^*(t, s)$ into the velocity equation, yield $0 = C(t_0, t_0)u^*(t_0, t_0) - g = C(0, 0)u^*(0, 0) - g$. Thus, the initial adjusted altitude $h_0 > 0$ is determined from the equation

$$g = C(0, 0) [0 \quad C(0, 0)] P(0) \begin{bmatrix} h_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

In accordance with (34)-(35), the equations for an optimal trajectory $x(t)$ and the matrix $P(t)$ take the forms

$$\begin{aligned} P(t) = & P(0) - \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P(s) ds \\ & - \int_0^t P(s) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ds - \int_0^t P(s-) \times \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right. \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ C(t,s) \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 0 & C(t,s) \end{bmatrix} P(s-) \Delta w(s) \right]^{-1} \\ & \left. \times \begin{bmatrix} 0 \\ C(t,s) \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 0 & C(t,s) \end{bmatrix} P(s-) dw(s), \right. \right. \end{aligned}$$

with the terminal condition $P(T) = \psi$, and

$$\begin{aligned} x(t) = & x_0 + \int_0^t \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(s) + G \right\} ds + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ C(t,s) \end{bmatrix} \\ & \times \left[\begin{bmatrix} 0 & C(t,s) \end{bmatrix} P(s-) x(s) dw(s) + \int_0^s \begin{bmatrix} 0 \\ r(s) \end{bmatrix} dW(s), \right. \end{aligned}$$

with the initial condition $x(0) = \begin{bmatrix} h_0 \\ 0 \end{bmatrix}$, and their jumps at the point t_1 , where the impulsive motor is applied, are equal to

$$\Delta P(t_1) = P(t_1-) \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \right.$$

$$\begin{aligned} & \left. \times \begin{bmatrix} 0 \\ C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 0 & C(t_1, t_1) \end{bmatrix} P(t_1-) \Delta w(t_1) \right]^{-1} \right. \\ & \left. \times \begin{bmatrix} 0 \\ C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 0 & C(t_1, t_1) \end{bmatrix} P(t_1-) \Delta w(t_1), \right. \right. \\ \Delta x(t_1) = & \left. \begin{bmatrix} 0 \\ C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 0 & C(t_1, t_1) \end{bmatrix} P(t_1-) x(t_1) \Delta w(t_1). \right. \right. \end{aligned}$$

Thus, the complete algorithm for solving this optimal control problem is described as follows:

- the equation for the matrix $P(t)$ with the terminal condition $P(T) = \psi$ and the jump $\Delta P(t_1)$ at the point t_1 is solved;
- the initial condition $P(0)$ is thus determined;
- the initial adjusted altitude h_0 is calculated;
- substituting $u^*(t, s)$ into the state equations and solving them with initial conditions $h(0) = h_0$ and $v(0) = 0$ yields the optimal trajectories $[h(t), v(t)] = x(t)$, where the velocity $v(t)$ has a jump at the point t_1 , and the adjusted altitude $h(t)$ is continuous;
- the desirable maximal altitude is determined as $h(T) - h_0$.

References

- [1] R. L. Alford and E. B. Lee, Sampled data hereditary systems: linear quadratic theory, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-31**, (1986) 60-65.
- [2] A. V. Balakrishnan, On stochastic bang-bang control, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, **25**, Springer, New York, (1980) 221-238.
- [3] M. V. Basin and I. R. Valadez G., Minmax filtering in Volterra systems, *Proc. American Control Conference 2000 (Chicago, IL)*, (2000) 1380-1385.
- [4] M. V. Basin and I. R. Valadez G., Optimal minmax filtering and control in discontinuous Volterra systems, *Proc. American Control Conference 2000 (Chicago, IL)*, (2000) 904-909.
- [5] M. V. Basin and M. A. Villanueva L., On filtering problems over Ito-Volterra observations, *Proc. American Control Conference 1999 (San Diego, CA)*, (1999) 3407-3412.
- [6] M. V. Basin, M. A. Villanueva L., and I. R. Valadez G., On filtering problems over observations with delays, *Proc. 38th IEEE Conference on Decision and Control (Phoenix, AZ)*, (1999) 4572-4577.
- [7] A. E. Bryson and Y. C. Ho, Applied Optimal Control, Hemisphere Publishing Company, New York, 1979.
- [8] C.T. Chen, Linear System Theory and Design, Holt, Rinehart, and Winston, New York, 1984.
- [9] D. Chyung and E. B. Lee, Linear optimal systems with time delays. *SIAM J. Contr.*, **3**, (1966) 548-575.
- [10] M. C. Delfour, The linear-quadratic optimal control problem with delays in state and control variables: a state space approach, *SIAM J. Contr.*, **24**, (1986) 835-883.
- [11] W. H. Fleming and R. W. Rishel, Deterministic and Stochastic Optimal Control, Springer, New York, 1975.
- [12] G. L. Fonseca, Keynesian Business Cycle Theory, Department of Economics, Baltimore University, 1998.
- [13] R. F. Hartl, Optimal dynamic advertising policies for hereditary processes, *J. Optim. Theory Appl.*, **43**, (1984) 51-72.
- [14] R. E. Kalman, A new approach to linear filtering and prediction problems, *ASME Trans., Part D (J. of Basic Engineering)*, **82**, (1960) 35-45.
- [15] R.E. Kalman and R.S. Bucy, New results in linear filtering and prediction theory, *ASME Trans., Part D (J. of Basic Engineering)*, **83**, (1961) 95-108.
- [16] M. L. Kleptsina and A. Yu. Veretennikov, On filtering and properties of conditional laws of Ito-Volterra processes, *Statistics and Control of Stochastic Processes. Steklov Seminar. 1984*, Optimization Software Inc., Publication Division, New York, (1985) 179-196.
- [17] E. B. Lee and Y. C. You, Optimal control of bivariate linear Volterra integral type systems, *Proc. 26th IEEE Conference on Decision and Control*, (1987) 721-726.
- [18] F. L. Lewis, Optimal Control, Wiley, New York, 1986.
- [19] S. K. Mitter, Filtering and stochastic control: A historical perspective, *Control Systems*, **16(3)**, (1996) 67-76.
- [20] Yu. V. Orlov and M. V. Basin, On minmax filtering over discrete-continuous observations, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-40**, (1995) 1623-1626.
- [21] L. E. Shaikhet, On an optimal control problem of partly observable stochastic Volterra's process, *Problems of Contr. and Inform. Theory*, **16(6)**, (1987) 439-448.

Received August 2000; revised May 2001.

<http://monotone.uwaterloo.ca/~journal>

OPTIMAL CONTROL IN UNOBSERVABLE ITO-VOLTERRA SYSTEMS

Michael V. Basin and Maria A. Alcorta Garcia

Department of Physical and Mathematical Sciences
Autonomous University of Nuevo Leon
Apdo postal 144-F, C.P. 66450, San Nicolas de los Garza
Nuevo Leon, Mexico

Abstract. This paper presents solution of the optimal linear-quadratic controller problem for unobservable Ito-Volterra systems with continuous/discontinuous states over continuous/discontinuous observations. As a result, the system of the optimal controller equations is obtained, including a linear integral equation for the optimally controlled estimate and two integral Riccati equations for its cross-correlation function and a constituent of the optimal regulator gain matrix. Those equations are then simplified in the case of a dynamic plant (the internal part of a state equation) governed by a differential equation.

Keywords. Ito-Volterra system, optimal controller, filtering.

AMS (MOS) subject classification: 49K22, 93E20.

1 Introduction

This paper presents solution to the optimal linear-quadratic controller problem for unobservable Ito-Volterra systems with continuous/discontinuous states over continuous/discontinuous observations. Due to the separation principle for integral systems, which is stated analogously to that for dynamic differential ones [5], the initial continuous problem is split into the optimal minmax filtering problem for Ito-Volterra systems over continuous observations (see [1]) and the optimal linear-quadratic control (regulator) problem for observable Ito-Volterra systems with continuous states (see [2]). (Both papers [1, 2] contain the bibliography related to control and filtering problems for Ito-Volterra processes.) Based on the results obtained in [1, 2], the system of the optimal controller equations is first derived in the general case of Ito-Volterra state and observation equations, including a linear integral equation for the optimally controlled estimate and two integral Riccati equations for the estimate cross-correlation function and a constituent of the optimal regulator gain matrix. Those equations are then simplified in the case of a dynamic plant (the internal part of a state equation) governed by a differential equation, where the estimate cross-correlation function coincides with its variance (see [1]). In this situation, the estimate variance and the gain matrix constituent satisfying the Riccati equations depend on only one

time variable, similarly to the variance in the filtering problem for a dynamic process over Ito-Volterra observations ([1]).

The optimal controller equations for Ito-Volterra systems with discontinuous states over discontinuous observations are obtained using the filtering procedure [6, 1] for deriving the filtering equations over discontinuous observations proceeding from the known filtering equations over continuous ones, which have already been obtained in the paper, and the dual results in the optimal control problem for Ito-Volterra systems [2]. In view of discontinuity of states and observations, the obtained optimal control law is discontinuous, and the optimal controller equations allow discontinuous solutions. Nevertheless, the obtained results enable one to compute jumps of the optimal filtering and control parameters (the optimally controlled state, the cross-correlation or variance, the gain matrix constituent, and the optimal control function) that can appear in points of discontinuity of states or observations.

Design of the optimal controller for Ito-Volterra state and observation equations and its simplification in the case of a dynamic plant (the internal part of a system) can serve as a background for subsequent design of the optimal controller for systems with delayed states and observations. The first obtained results (see [1]) have been based on the fact that a differential equation including even multiple time-varying delays presents a particular case of an integral (Ito)-Volterra equation. Further possible applications to controlling industrial processes, whose state and observation equations are subject to delays, are expected.

The paper is organized as follows. In Section 2, the optimal controller problem is stated and solved for unobservable continuous Ito-Volterra systems, using the separation principle for integral systems. Section 3 generalizes those results to discontinuous unobservable Ito-Volterra systems. The optimal controller equations are first obtained for Ito-Volterra state and observation equations and then simplified in the case of a dynamic plant (the internal part of a state equation).

2 Optimal Controller for Unobservable Continuous Ito-Volterra Systems

2.1 Problem statement

Let (Ω, F, P) be a complete probability space with an increasing right-continuous family of σ -algebras $F_t, t \geq 0$, and let $(W_1(t), F_t, t \geq 0)$ and $(W_2(t), F_t, t \geq 0)$ be F_t -adapted Wiener processes. Let us consider the unobservable F_t -measurable random process $x(t)$ governed by the Ito-Volterra equation

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + a(t, s)x(s) + b(t, s)u(t, s))ds + \int_{t_0}^t g(t, s)dW_1(s) \quad (1)$$

and the output (observation) process

$$y(t) = \int_0^t (A_0(t, s) + A(t, s)x(s))ds + \int_0^t B(t, s)dW_2(s). \quad (2)$$

Here, $x(t) \in R^n$ is the unobservable state vector, $u(t, s) \in R^p$ is the control variable, $y(t) \in R^m$ is the observation process, and the independent Wiener processes $W_1(t)$ and $W_2(t)$ represent random disturbances in state and observation equations, which are in turn independent of an initial Gaussian vector $x(t_0)$. Let $A(t, s)$ be a nonzero matrix and $B(t, s)B^T(t, s)$ be a positive definite matrix. In addition, the quadratic cost function J to be minimized is defined as follows

$$J = E\left[\frac{1}{2} [x(T) - z_0]^T \Phi [x(T) - z_0] \right] \quad (3)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t, s)K(s)u(t, s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T x^T(s)L(s)x(s)ds,$$

where z_0 is a given vector, Φ , K , L are positive (nonnegative) definite symmetric matrices. $T > t_0$ is a certain time moment, the symbol $E[f(x)]$ means the expectation (mean) of a function f of a random variable x , and a^T denotes transpose to a vector (matrix) a .

The optimal control problem is to find the control $u^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, that minimizes the criterion J along with the trajectory $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, generated upon substituting $u^*(t)$ into the state equation (1).

2.2 Separation principle in integral systems

As well as in linear stochastic systems governed by differential equations, the separation principle remains valid in linear integral stochastic systems governed by Ito-Volterra equations. Indeed, let us replace the unobservable system state $x(t)$ by its optimal estimate $m(t)$ given by the equation (see [1] for statement and derivation)

$$m(t) = m(t_0) + \int_0^t (a_0(t, s) + a(t, s)m(s) + b(t, s)u(t, s))ds + \quad (4)$$

$$\int_0^t f(t, s)A^T(t, s)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1}[dy(s) - (A_0(t, s) + A(t, s)m(s))ds],$$

with the initial condition $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$. Here, $m(t)$ is the best estimate for the Ito-Volterra process $x(t)$ at time t based on the observation process $Y(t) = \{y(s), t_0 \leq s \leq t\}$, that is the conditional expectation $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$. As shown in [1] and the previous papers [4, 7], it is impossible to obtain a closed system of filtering equations only for the optimal estimate $m(t)$ and its correlation function (variance) $S(t) =$

$E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)$, due to the Volterra nature of the equations (5) and (6). Designing a closed filter requires introducing the additional cross-correlation function $f(t, s)$ characterizing a deviation of the best estimate $m(t)$ from the real state $x(t)$:

$$f(t, s) = E((x_s^t - m_s^t)(x(s) - m(s))^T | F_{t,s}^Y), \quad (5)$$

where

$$x_s^t = \int_{t_0}^s (a_0(t, r) + a(t, r)x(r) + b(t, s)u(t, s))dr + \int_{t_0}^s g(t, r)dW_1(r),$$

$F_{t,s}^Y$ is the σ -algebra generated by the stochastic process y_s^t

$$y_s^t = \int_{t_0}^s (A_0(t, s) + A(t, s)x(s))ds + \int_{t_0}^s B(t, s)dW_2(s)$$

$$\text{and } m_s^t = E(x_s^t | F_{t,s}^Y).$$

The equation for $f(t, s)$ takes the form (see [1] for derivation)

$$\begin{aligned} f(t, s) = & f(t_0, t_0) + \int_{t_0}^s [a(s, r)f^T(t, r) + f(s, r)a^T(t, r) + \\ & (1/2)(g(t, r)g^T(s, r) + g(s, r)g^T(t, r))]dr - \\ & \int_0^s [f(t, r)A^T(s, r)(B(s, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f^T(s, r) + \\ & f(s, r)A^T(t, r)(B(t, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f^T(t, r) - \\ & (1/2)f(t, r)A^T(t, r)(B(t, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f^T(s, r) - \\ & (1/2)f(s, r)A^T(s, r)(B(s, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f^T(t, r)]dr, \end{aligned} \quad (6)$$

with the initial condition $f(t_0, t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$. Note that since $S(t) = f(t, t)$, the variance equation for $S(t)$ directly follows from (6):

$$\begin{aligned} S(t) = & S(t_0) + \int_{t_0}^t [a(t, s)f^T(t, s) + f(t, s)a^T(t, s) + \\ & g(t, s)g^T(t, s)]ds - \int_0^t f(t, s)A^T(t, s)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1}A(t, s)f^T(t, s)ds, \end{aligned}$$

where $S(t_0) = f(t_0, t_0)$. It is readily verified that the optimal control problem for the system state (1) and cost function (3) is equivalent to the optimal control problem for the optimal minmax estimate (4) and the cost function J represented as

$$J = E\left\{\frac{1}{2} [m(T) - z_0]^T \Phi [m(T) - z_0]\right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t, s) K(s) u(t, s) ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T m^T(s) L(s) m(s) ds \\
& + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \text{tr}[S(s) L(s)] ds + \text{tr}[S(T) \Phi], \quad (7)
\end{aligned}$$

where $\text{tr}[A]$ denotes trace of a matrix A . Since the latter part of J is independent of control $u(t)$ or state $x(t)$, the reduced effective cost function M to be minimized takes the form

$$\begin{aligned}
M & = E \left\{ \frac{1}{2} [m(T) - z_0]^T \Phi [m(T) - z_0] \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t, s) K(s) u(t, s) ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T m^T(s) L(s) m(s) ds \right\}. \quad (8)
\end{aligned}$$

Thus, the solution for the optimal control problem specified by (1),(3) can be found solving the optimal control problem given by (4),(8). However, the minimal value of the criterion J should be determined using (7). This conclusion presents the separation principle in integral Ito-Volterra systems.

2.3 Optimal control problem solution

Based on the solution of the optimal control problem obtained in [2] in the case of an observable system state, the following results are valid for the optimal control problem (4),(8), where the system state (the minmax estimate $m(t)$) is completely available and, therefore, observable.

The optimal control law is given by

$$u^*(t, s) = K^{-1}(s) b^T(t, s) q^T(t, s) m(s), \quad (9)$$

where $q(t, s)$ is the solution of the integral Riccati equation

$$\begin{aligned}
q(t, s) & = q(t_0, t_0) + \int_{t_0}^s [-a^T(s, r) q^T(t, r) - q(s, r) a(t, r) + L(r)] dr - \quad (10) \\
& \int_{t_0}^s [q(t, r) b(s, r) (K(r))^{-1} b^T(s, r) q^T(s, r) + \\
& q(s, r) b(t, r) (K(r))^{-1} b^T(t, r) q^T(t, r) - \\
& (1/2) q(t, r) b(t, r) (K(r))^{-1} b^T(s, r) q^T(s, r) - \\
& (1/2) q(s, r) b(s, r) (K(r))^{-1} b^T(t, r) q^T(t, r)] dr,
\end{aligned}$$

with the terminal condition $q(T, T) = \Phi$.

Upon substituting the optimal control (9) into the equation (4) for the reconstructed system state $m(t)$, the following optimally controlled state estimate equation is obtained

$$m(t) = m(t_0) + \int_{t_0}^t A(t, s) m(s) ds + \int_{t_0}^t b(t, s) K^{-1}(s) b^T(t, s) q(t, s) m(s) ds$$

$$+ \int_0^t f(t, s) A^T(t, s) (B(t, s) B^T(t, s))^{-1} [dy(s) - (A_0(t, s) + A(t, s) m(s)) ds]. \quad (11)$$

Thus, the optimally controlled state estimate equation (11), the gain matrix constituent equation (10), the optimal control law (9), and the cross-correlation equation (6) give the complete solution to the optimal controller problem for unobservable states of continuous integral systems governed by Ito-Volterra equations.

3 Optimal Controller for Unobservable Discontinuous Ito-Volterra Systems

3.1 Problem statement

Let (Ω, F, P) be a complete probability space with an increasing right-continuous family of σ -algebras $F_t, t \geq 0$, and let $(W_1(t), F_t, t \geq 0)$ and $(W_2(t), F_t, t \geq 0)$ be F_t -adapted Wiener processes. Let us consider the unobservable F_t -measurable random process $x(t)$ governed by the Ito-Volterra equation

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + a(t, s)x(s)) ds + \int_{t_0}^t b(t, s)u(t, s)dv(s) + \int_{t_0}^t g(t, s)dW_1(s) \quad (12)$$

and the output (observation) process

$$y(t) = \int_0^t (A_0(t, s) + A(t, s)x(s))dw(s) + \int_0^t B(t, s)dW_2(w(s)), \quad (13)$$

where both state and observation equations are integral equations of the Volterra type with integration w.r.t. discontinuous measures, and the rest of the notation is the same as in Subsection 2.1.

The discontinuous measures in the state and observation equations are generated by scalar bounded variation functions $v(t)$ and $w(t)$, which can of course coincide or have discontinuities (jumps) at the same points. Therefore, the observation function $y(t)$ may be discontinuous due to discontinuity of the integral with discontinuous measure $dw(t)$ in the right-hand side of (13). This model of observations enables one to consider continuous and discrete observations in the common form: continuous observations correspond to the continuous component of a bounded variation function $w(t)$, and discrete observations correspond to its function of jumps.

The quadratic cost function J to be minimized is defined as follows

$$J = E \left[\frac{1}{2} [x(T) - z_0]^T \Phi [x(T) - z_0] \right] \quad (14)$$

$$+\frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t, s)K(s)u(t, s)dv(s) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T x^T(s)L(s)x(s)ds,$$

where x_0 is a given vector, Φ , K , L are positive (nonnegative) definite symmetric matrices, $T > t_0$ is a certain time moment.

The optimal control problem for the unobservable system state $x(t)$ is to find the control $u^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, that minimizes the criterion J along with the trajectory $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, generated upon substituting $u^*(t)$ into the state equation (12). The state trajectory $x(t)$ may also be discontinuous due to discontinuity of the integral with discontinuous function $v(t)$ in the right-hand side of (12). This model of system states enables one to consider sharp changes (jumps) in system position, as well as its gradual continuous movement. Modeling discontinuous unobservable system states of an Ito-Volterra system along with discontinuous observations of the Volterra type enables one to consider linear continuous, discrete, and delayed systems in the common form given by (12),(13), as it was done in [1].

3.2 Separation principle in discontinuous integral systems

The separation principle for discontinuous system states (12) and discontinuous observations (13) is based on the separation principle for continuous states and observations (5),(6). Actually, the corresponding filtering procedure was suggested [6] to obtain filtering equations over discontinuous observations proceeding from the known filtering equations over continuous ones. In the examined case, the following actions substantiated in [6] should be performed:

- assuming functions $v(t)$ and $w(t)$ in state and observation equations (12) and (13) to be absolutely continuous, write out the separation principle for continuous systems, obtained in Subsection 2.2, which yields the modified optimal control problem given by the state equation (4), effective criterion (8), cross-correlation function equation (6), and optimal value criterion (7);

- in thus obtained optimal control problem, assume the functions $v(t)$ and $w(t)$ to be arbitrary bounded variation ones again, keeping in mind that their derivative $\dot{v}(t)$ and $\dot{w}(t)$ can be generalized functions of zero singularity order (for example, δ -functions), generating integration with the discontinuous measures $dv(t)$ and $dw(t)$.

As a result, the unobservable system state $x(t)$ of the system (12) is replaced by its optimal minmax estimate $\hat{x}(t)$ given by the equation (see [1] for statement and derivation)

$$m(t) = m(t_0) + \int_0^t (a_0(t, s) + a(t, s)m(s))ds + \int_0^t b(t, s)u(t, s)dv(s) + \int_0^t f(t, s)A^T(t, s)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1}[dy(s) - (A_0(t, s) + A(t, s)m(s))dw(s)], \quad (15)$$

with the initial condition $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$, where the cross-correlation function $f(t, s)$ satisfies the Riccati equation

$$f(t, s) = \int_0^s [a(s, r)f^T(t, r) + f(s, r)a^T(t, r) + \quad (16)$$

$$(1/2)(g(t, r)g^T(s, r) + g(s, r)g^T(t, r))]dr -$$

$$\int_0^s [f(t, r)A^T(s, r)(B(s, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f^T(s, r) +$$

$$f(s, r)A^T(t, r)(B(t, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f^T(t, r) -$$

$$(1/2)f(t, r)A^T(t, r)(B(t, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f^T(s, r) -$$

$$(1/2)f(s, r)A^T(s, r)(B(s, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f^T(t, r)]dw(r).$$

with the initial condition $f(t_0, t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$.

Furthermore, the optimal control problem for the system state (12) and cost function (14) is equivalent to the optimal control problem for the optimal estimate (15) and the cost function J represented as

$$J = E\left\{\frac{1}{2}[m(T) - z_0]^T \Phi [m(T) - z_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t, s)K(s)u(t, s)dv(s) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T m^T(s)L(s)m(s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \text{tr}[S(s)L(s)]ds + \text{tr}[S(T)\Phi]\right\}, \quad (17)$$

which can be reduced to the effective cost function M

$$M = E\left\{\frac{1}{2}[m(T) - z_0]^T \Phi [m(T) - z_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t, s)K(s)u(t, s)dv(s) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T m^T(s)L(s)m(s)ds\right\}. \quad (18)$$

Thus, the solution for the optimal control problem specified by (12),(14) can be found solving the optimal control problem given by (15),(18) and using (17) for the minimal value of the criterion J .

3.3 Optimal control problem solution for discontinuous systems

Based on the solution of the optimal control problem obtained in [2] in the case of an observable discontinuous system state, the following results are valid for the optimal control problem (15),(18), where the system state (the optimal estimate $m(t)$) is completely available and, therefore, observable.

The optimal control law is given by

$$u^*(t, s) = K^{-1}(s)b^T(t, s)q^T(t, s)m(s), \quad (19)$$

where $q(t, s)$ is the solution of the integral Riccati equation

$$q(t, s) = q(t_0, t_0) + \int_{t_0}^s [-a^T(s, r)q^T(t, r) - q(s, r)a(t, r) + L(r)]dr - \quad (20)$$

$$\int_{t_0}^s [q(t, r)b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r) +$$

$$- q(s, r)b(t, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r) -$$

$$(1/2)q(t, r)b(t, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r) -$$

$$(1/2)q(s, r)b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r)]dv(r).$$

with the terminal condition $q(T, T) = \Phi$.

Upon substituting the optimal control (19) into the equation (15) for the reconstructed system state $m(t)$, the following optimally controlled state estimate equation is obtained

$$m(t) = m(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + a(t, s)m(s))ds$$

$$+ \int_{t_0}^t b(t, s)K^{-1}(s)b^T(t, s)q(t, s)m(s)dv(s)$$

$$+ \int_0^t f(t, s)A^T(t, s)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1}[dy(s) - (A_0(t, s) + A(t, s)m(s))dw(s)], \quad (21)$$

with the initial condition $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$.

The obtained equations (20)–(21), as well as the equation (16) for the cross-correlation function $f(t, s)$, are integral equations with integration w.r.t. discontinuous measures generated by bounded variation functions $v(t)$ and $w(t)$, which do not tell us how to compute jumps of the controller variables (the estimate $m(t)$, its cross-correlation function $f(t, s)$, and the gain matrix constituent $q(t, s)$) at the discontinuity points of the functions $v(t)$ and $w(t)$, corresponding to discontinuities in the system states $x(t)$ and the observation process $y(t)$. Nevertheless, the direct method for computing the jumps was given by Theorem 3 in [1], which yields the following jump expressions

$$\Delta m(t) = f(t, t-)[I + A^T(t, t)(B(t, t)B^T(t, t))^{-1}A(t, t)f^T(t, t-)\Delta w(t)]^{-1} \times$$

$$A^T(t, t)(B(t, t)B^T(t, t))^{-1}[\Delta y(t) - (A_0(t, t) + A(t, t)m(t-))\Delta w(t)] +$$

$$b(t, t)K^{-1}(t)b^T(t, t)[I + A^T(t, t)(B(t, t)B^T(t, t))^{-1}A(t, t) \times$$

$$f^T(t, t-)\Delta w(t)]^{-1}q(t, t-)m(t-)\Delta v(t),$$

$$\Delta f(t, s) = -[f(t, s-)[I + (A^T(s, s)(B(s, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, s)f^T(s, s-)+$$

$$A^T(t, s)(B(t, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, s)f^T(t, s-)-$$

$$\begin{aligned}
& (1/2)A^T(s,s)(B(s,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,s)f^T(t,s-)- \\
& (1/2)A^T(t,s)(B(t,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,s)f(s,s-)\Delta u(s)]^{-1}\times \\
& A^T(s,s)(B(s,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,s)f^T(s,s-)+ \\
& f(s,s-)[I+(A^T(s,s)(B(s,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,s)f^T(s,s-)+ \\
& A^T(t,s)(B(t,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,s)f^T(t,s-)- \\
& (1/2)A^T(s,s)(B(s,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,s)f^T(t,s-)- \\
& (1/2)A^T(t,s)(B(t,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,s)f^T(s,s-))\Delta u(s)]^{-1}\times \\
& A^T(t,s)(B(t,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,s)f^T(t,s-)- \\
& (1/2)f(s,s-)[I+(A^T(s,s)(B(s,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,s)f^T(s,s-)+ \\
& A^T(t,s)(B(t,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,s)f^T(t,s-)- \\
& (1/2)A^T(s,s)(B(s,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,s)f^T(t,s-)- \\
& (1/2)A^T(t,s)(B(t,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,s)f^T(s,s-))\Delta u(s)]^{-1}\times \\
& A^T(s,s)(B(s,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,s)f^T(t,s-)- \\
& (1/2)f(t,s-)[I+(A^T(s,s)(B(s,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,s)f^T(s,s-)+ \\
& A^T(t,s)(B(t,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,s)f^T(t,s-)- \\
& (1/2)A^T(s,s)(B(s,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,s)f^T(t,s-)- \\
& (1/2)A^T(t,s)(B(t,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,s)f^T(s,s-))\Delta u(s)]^{-1}\times \\
& A^T(t,s)(B(t,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,s)f^T(s,s-)\Delta w(s),
\end{aligned}$$

where I is the $n \times n$ -dimensional identity matrix, and

$$\begin{aligned}
\Delta q(t,s) = & -[q(t,s-)[I+(b(s,s)(K(s))^{-1}b^T(s,s)q^T(s,s-)+ \\
& b(t,s)(K(s))^{-1}b^T(t,s)q^T(t,s-)- \\
& (1/2)b(s,s)(K(s))^{-1}b^T(t,s)q^T(t,s-)- \\
& (1/2)b(t,s)(K(s))^{-1}b^T(s,s)q(s,s-))\Delta v(s)]^{-1}\times \\
& b(s,s)(K(s))^{-1}b^T(s,s)q^T(s,s-)+ \\
& q(s,s-)[I+(b(s,s)(K(s))^{-1}b^T(s,s)q^T(s,s-)+ \\
& b(t,s)(K(s))^{-1}b^T(t,s)q^T(t,s-)- \\
& (1/2)b(s,s)(K(s))^{-1}b^T(t,s)q^T(t,s-)- \\
& (1/2)b(t,s)(K(s))^{-1}b^T(s,s)q^T(s,s-))\Delta v(s)]^{-1}\times \\
& b(t,s)(K(s))^{-1}b^T(t,s)q^T(t,s-)+ \\
& (1/2)q(s,s-)[I+(b(s,s)(K(s))^{-1}b^T(s,s)q^T(s,s-)+ \\
& b(t,s)(K(s))^{-1}b^T(t,s)q^T(t,s-)-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1/2)b(s,s)(K(s))^{-1}b^T(t,s)q^T(t,s-)- \\
& (1/2)b(t,s)(K(s))^{-1}b^T(s,s)q^T(s,s-)\Delta v(s)]^{-1}\times \\
& b(s,s)(K(s))^{-1}b^T(t,s)q^T(t,s-)- \\
& (1/2)q(t,s-)[I+(b(s,s)(K(s))^{-1}b^T(s,s)q^T(s,s-)+ \\
& b(t,s)(K(s))^{-1}b^T(t,s)q^T(t,s-)- \\
& (1/2)b(s,s)(K(s))^{-1}b^T(t,s)q^T(t,s-)- \\
& (1/2)b(t,s)(K(s))^{-1}b^T(s,s)q^T(s,s-)\Delta v(s)]^{-1}\times \\
& b(t,s)(K(s))^{-1}b^T(s,s)q^T(s,s-)\Delta v(s).
\end{aligned}$$

Following [1], the obtained jump expressions can be incorporated into the controller and filtering equations (20), (21), (16) using the equivalent form of integral equations with integration w.r.t. a discontinuous measure

$$\begin{aligned}
m(t) &= m_0 + \int_{t_0}^t (a_0(t,s) + a(t,s)m(s))ds + \int_{t_0}^t b(t,s)u(t,s)ds \\
&+ \int_{t_0}^t b(t,s)K^{-1}(s)b^T(t,s)\{I + A^T(t,s)(B(t,s)B^T(t,s))^{-1}A(t,s) \\
&\quad \times f(t,s-)\Delta w(s)\}^{-1}q(t,s-)m(s-)dv(s) \\
&+ \int_{t_0}^t f(t,s-)\{I + A^T(t,s)(B(t,s)B^T(t,s))^{-1}A(t,s)f(t,s-)\Delta w(s)\}^{-1} \\
&\quad \times A^T(t,s)(B(t,s)B^T(t,s))^{-1}[dy(s) - A(t,s)m(s-)dw(s)], \quad (22)
\end{aligned}$$

with the initial condition $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^y)$,

$$\begin{aligned}
f(t,s) &= f(t_0,t_0) + \int_{t_0}^s [a(s,r)f^T(t,r) + f(s,r)a^T(t,r) + \\
& (1/2)(g(t,r)g^T(s,r) + g(s,r)g^T(t,r))]dr - \\
& \int_{t_0}^s [f(t,r-)[I + (A^T(s,r)(B(s,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,r)f(s,r-)+ \\
& A^T(t,r)(B(t,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,r)f(t,r-)- \\
& (1/2)A^T(s,r)(B(s,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,r)f(t,r-)- \\
& (1/2)A^T(t,r)(B(t,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,r)f(s,r-)]\Delta w(r)]^{-1}\times \\
& A^T(s,r)(B(s,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,r)f^T(s,r-)+ \\
& f(s,r-)[I + (A^T(s,r)(B(s,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,r)f(s,r-)+ \\
& A^T(t,r)(B(t,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,r)f(t,r-)- \\
& (1/2)A^T(s,r)(B(s,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,r)f(t,r-)-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1/2)A^T(t,r)(B(t,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,r)f(s,r-)\Delta w(r)]^{-1} \times \\
& \quad A^T(t,r)(B(t,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,r)f^T(t,r-)- \\
& (1/2)f(s,r-)[I+(A^T(s,r)(B(s,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,r)f(s,r-)+ \\
& \quad A^T(t,r)(B(t,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,r)f(t,r-)- \\
& (1/2)A^T(s,r)(B(s,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,r)f(t,r-)- \\
& (1/2)A^T(t,r)(B(t,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,r)f(s,r-)\Delta w(r)]^{-1} \times \\
& \quad A^T(s,r)(B(s,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,r)f^T(t,r-)- \\
& (1/2)f(t,r-)[I+(A^T(s,r)(B(s,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,r)f(s,r-)+ \\
& \quad A^T(t,r)(B(t,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,r)f(t,r-)- \\
& (1/2)A^T(s,r)(B(s,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,r)f(t,r-)- \\
& (1/2)A^T(t,r)(B(t,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,r)f(s,r-)\Delta w(r)]^{-1} \times \\
& \quad A^T(t,r)(B(t,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,r)f^T(s,r-)]dw(r).
\end{aligned}$$

with the initial condition $f(t_0, t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^X)$, the function $f(t, s)$ is continuous in t , and

$$q(t, s) = q(t_0, t_0) + \int_{t_0}^s [-a^T(s, r)q^T(t, r) - q(s, r)a(t, r) + L(r)]dr \quad (24)$$

$$\int_{t_0}^s [q(t, r-)[I + (b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r-)+$$

$$\begin{aligned}
& b(t, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r-)- \\
& (1/2)b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r-)- \\
& (1/2)b(t, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r-)]\Delta v(r)]^{-1} \times \\
& \quad b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r-)+ \\
& q(s, r-)[I + (b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r-)+ \\
& \quad b(t, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r-)- \\
& (1/2)b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r-)- \\
& (1/2)b(t, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r-)]\Delta v(r)]^{-1} \times \\
& \quad b(t, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r-)- \\
& (1/2)q(s, r-)[I + (b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r-)+ \\
& \quad b(t, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r-)- \\
& (1/2)b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r-)- \\
& (1/2)b(t, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r-)]\Delta v(r)]^{-1} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r-) - \\
& (1/2)q(t, r-)[I + (b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r-) + \\
& \quad b(t, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r-) - \\
& \quad (1/2)b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r-) - \\
& \quad (1/2)b(t, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r-)]\Delta v(r)]^{-1} \times \\
& \quad b(t, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r-)]\Delta v(r).
\end{aligned}$$

with the terminal condition $q(T, T) = \Phi$, the function $q(t, s)$ is continuous in t . Here $\Delta w(t)$, $\Delta v(t)$, and $\Delta y(t)$ are the jumps of the bounded variation functions $w(t)$, $v(t)$, and the observation process $y(t)$ at a point t , respectively; and $m(t-)$, $f(t, s-)$, and $q(t, s-)$ are the values of the discontinuous controller and filtering parameters (the estimate $m(t)$, its cross-correlation function $f(t, s)$, and the gain matrix constituent $q(t, s)$) at points t and (t, s) from the left.

The optimally controlled state estimate equation (22), the gain matrix constituent equation (24), the cross-correlation equation (23), and the optimal control law (19) give the complete solution to the optimal controller problem for unobservable states of discontinuous integral systems governed by Ito-Volterra equations, including analytic expressions for jumps of the controller and filtering variables at the discontinuity points of the real system state $x(t)$ and the observation process $y(t)$.

3.4 Optimal controller for dynamic plant

As shown in this section, the equations of Subsection 3.3 can be significantly simplified in the case of a dynamic system, if the state equation (12) has an internal differential part, i.e., is given by

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(s) + a(s)x(s))ds + \quad (25)$$

$$\int_{t_0}^t b(t, s)u(t, s)dv(s) + \int_{t_0}^t g(t, s)dW_1(s),$$

and the observation process $y(t)$ (13) and the quadratic cost function J (14) are the same.

As was proved in [1], in the case of a dynamic plant equation (25), it is possible to obtain a closed system of the optimal filtering equations with respect to only two variables, the optimal estimate $m(t)$ and its variance $S(t)$, without introducing the cross-correlation $f(t, s)$. Those filtering equations take the form [1]

$$m(t) = m(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(s) + a(s)m(s))ds + \int_0^t b(t, s)u(t, s)dv(s) + \quad (26)$$

$$\int_0^t S(s)A^T(t,s)(B(t,s)B^T(t,s))^{-1}[dy(s) - (A_0(t,s) + A(t,s)m(s))dw(s)],$$

with the initial condition $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$, where the variance function $S(t)$ satisfies the Riccati equation (which is given in the equivalent form and follows from (23) using $S(t) = f(t, t)$)

$$S(t) = S(t_0) + \int_{t_0}^t [a(s)S(s) + S(s)a^T(s) + g(t,s)g^T(t,s)]ds - \quad (27)$$

$$\int_{t_0}^t \{S(s-)\{I + A^T(t,s)(B(t,s)B^T(t,s))^{-1}A(t,s)S(s-)\Delta w(s)\}^{-1} \times \\ A^T(t,s)(B(t,s)B^T(t,s))^{-1}A(t,s)S(s-)\}dw(s).$$

with the initial condition $S(t_0) = f(t_0, t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$.

Furthermore, the optimal control problem for the system state (25) and cost function (14) is equivalent to the optimal control problem for the optimal estimate (26) and the cost function (17), which can be reduced to the effective cost function (18). Thus, the solution for the optimal control problem specified by (25),(14) can be found solving the optimal control problem given by (26),(18) and using (17) for the criterion minimal value.

Based on the results obtained in [2] for the optimal control problem in an Ito-Volterra system with a dynamic internal part, the optimal control law is given by

$$u^*(t, s) = K^{-1}(s)b^T(t, s)P(s)m(s), \quad (28)$$

where $P(t)$ is the solution of the integral Riccati equation (which is given in the equivalent form and follows from (24) using $P(t) = q(t, t)$)

$$P(t) = P(t_0) + \int_{t_0}^t [-a^T(s)P(s) - P(s)a(s) + L(s)]ds - \quad (29)$$

$$\int_{t_0}^t \{P(s-)\{I + A^T(t,s)(B(t,s)B^T(t,s))^{-1}A(t,s)P(s-)\Delta w(s)\}^{-1} \times \\ b(t,s)(K(s))^{-1}b^T(t,s)P(s-)\}dw(s),$$

with the terminal condition $P(T) = q(T, T) = \Phi$.

Upon substituting the optimal control (27) into the equation (26) for the reconstructed system state $m(t)$, the following optimally controlled state estimate equation is obtained (which is given in the equivalent form and follows from (22) using $S(t) = f(t, t)$ and $P(t) = q(t, t)$)

$$m(t) = m_0 + \int_{t_0}^t (a_0(s) + a(s)m(s))ds + \int_{t_0}^t b(t,s)u(t,s)ds$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_0}^t b(t,s)K^{-1}(s)b^T(t,s)\{I + A^T(t,s)(B(t,s)B^T(t,s))^{-1}A(t,s) \\
& \quad \times S(s-)\Delta w(s)\}^{-1}P(s-)m(s-)dv(s) \\
& + \int_{t_0}^t S(s-)\{I + A^T(t,s)(B(t,s)B^T(t,s))^{-1}A(t,s)S(s-)\Delta w(s)\}^{-1} \\
& \quad \times A^T(t,s)(B(t,s)B^T(t,s))^{-1}[dy(s) - A(t,s)m(s-)du(s)], \quad (30)
\end{aligned}$$

with the initial condition $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$.

Thus, in the case of an Ito-Volterra system with a dynamic internal plant, the optimal controller problem solution is completely given by the optimal controller equation (30), the variance equation (27), the gain matrix constituent equation (29), and the optimal control law (28). Obviously, the case of continuous state and observation equations in Ito-Volterra system with a dynamic internal part (considered in Section 2) is recovered assuming $v(t) = t$ and $w(t) = t$ in (25)–(30).

The jumps of all the optimal controller variables in the discontinuous case also take the simplified form

$$\begin{aligned}
\Delta m(t) = & S(t-)[I + A^T(t,t)(B(t,t)B^T(t,t))^{-1}A(t,t)S(t-)\Delta w(t)]^{-1} \times \\
& A^T(t,t)(B(t,t)B^T(t,t))^{-1}[\Delta y(t) - (A_0(t,t) + A(t,t)m(t-))\Delta w(t)] + \\
& b(t,t)K^{-1}(t)b^T(t,t)[I + A^T(t,t)(B(t,t)B^T(t,t))^{-1}A(t,t) \times
\end{aligned}$$

$$S(t-)\Delta w(t)]^{-1}P(t-)m(t-)\Delta v(t),$$

$$\Delta S(t) = -[S(t-)[I + (A^T(t,t)(B(t,t)B^T(t,t))^{-1}A(t,t)S(t-))\Delta w(t)]^{-1} \times$$

$$A^T(t,t)(B(t,t)B^T(t,t))^{-1}A(t,t)S(t-)]\Delta u(t).$$

and

$$\Delta P(t) = -[P(t-)[I + (b(t,t)(K(t))^{-1}b^T(t,t)P(t-))\Delta v(t)]^{-1} \times$$

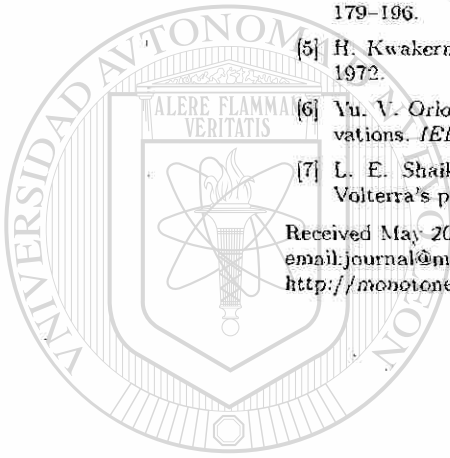
$$b(t,t)(K(t))^{-1}b^T(t,t)P(t-)]\Delta v(s).$$

Let us finally note that the results in design of the optimal controller for a system with an internal dynamic part can readily be applied to solution of the optimal controller problem of launching a missile with continuous and impulsive jet motors and unobservable velocity to the maximal possible altitude with the minimal fuel consumption (see [3] for its initial continuous statement), as it has been done for the corresponding optimal regulator problem in [2].

References

- [1] M. V. Basin, M. A. Villameva L., and I. R. Valadez G., Ito-Volterra approach to filtering problems over observations with delays, *Dynamics of Continuous, Discrete, and Impulsive Systems*, **7(3)**, (2000) 429-440.
- [2] M. V. Basin and M. A. Alcorta G., Optimal control in Ito-Volterra systems, *Dynamics of Continuous, Discrete, and Impulsive Systems. Series B*, **8(3)**, (2001) 299-315.
- [3] A. E. Bryson and Y. C. Ho, *Applied Optimal Control*, Hemisphere Publishing Company, New York, 1979.
- [4] M. L. Kleptsina and A. Yu. Veretennikov, On filtering and properties of conditional laws of Ito-Volterra processes. *Statistics and Control of Stochastic Processes. Steklov Seminar. 1984*, Optimization Software Inc., Publication Division, New York, (1985) 179-196.
- [5] H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*, Wiley, New York, 1972.
- [6] Yu. V. Orlov and M. V. Basin, On minmax filtering over discrete-continuous observations. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-40**, (1995) 1623-1626.
- [7] L. E. Shaikhet, On an optimal control problem of partly observable stochastic Volterra's process. *Problems of Contr. and Inform. Theory*, **16(6)**, (1987) 439-448.

Received May 2001; revised November 2001.
 email: journal@monotone.uwaterloo.ca
 http://monotone.uwaterloo.ca/~journal/



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

OPTIMAL POLYNOMIAL FILTER AND REGULATOR FOR THIRD DEGREE POLYNOMIAL SYSTEMS

M.V. Basin

*Department of Physical and Mathematical Sciences
Autonomous University of Nuevo Leon
Apdo postal 144-F, C.P. 66450, Cd. Universitaria
San Nicolas de los Garza, Nuevo Leon, Mexico
E-mail: mbasin@fcfm.uanl.mx*

M.A. Alcorta Garcia

*Department of Physical and Mathematical Sciences
Autonomous University of Nuevo Leon
Apdo postal 144-F, C.P. 66450, Cd. Universitaria
San Nicolas de los Garza, Nuevo Leon, Mexico
E-mail: aracelia_alcorta@hotmail.com*

Key words: nonlinear polynomial system, linear observations, linear control input, filtering, optimal control, automotive application

This paper presents the optimal nonlinear filter for a stochastic system state given by a polynomial equation of degree 3 or 4 and linear observations confused with white Gaussian noises. The obtained filtering equations are applied to solution of the state estimation problem for a nonlinear automotive system. Simulation results are compared for the optimal polynomial filter given in this paper and the linear Kalman-Bucy filter applied to the linearized system. Using the duality principle, the optimal regulator is then designed for a polynomial system of degree 3 with linear control input and quadratic cost criterion, applied to the nonlinear automotive system, and compared to the optimal linear regulator dual to the Kalman-Bucy filter.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

1. Introduction

Although the general optimal solution of the filtering problem for nonlinear state and observation equations confused with white Gaussian noises is given by the Kushner equation for the conditional density of an unobservable state with respect to observations [6], there are a very few known examples of nonlinear systems where the Kushner equation can be reduced to a finite-dimensional closed system of filtering equations for a certain number of lower conditional moments. The most famous result, the Kalman-Bucy filter [5], is related to the case of linear state and observation equations, where only two moments, the estimate itself and its variance, form a closed system of filtering equations. However, the optimal nonlinear finite-dimensional filter can be obtained in some other cases, if, for example, the state vector can take only a finite number of admissible states [13] or if the observation equation is linear and the drift term in the state equation satisfies the Riccati equation $df/dx + f^2 = x^2$ (see [3]). The complete classification of the "general situation" cases (this means that there are

no special assumptions on the structure of state and observation equations), where the optimal nonlinear finite-dimensional filter exists, is given in [14].

This paper presents the optimal nonlinear filter for a stochastic system state given by a polynomial equation of degree 3 or 4 and linear observations confused with white Gaussian noises. This relatively simple case seems to be important for practical applications, since a nonlinear state equation can usually be well approximated by a polynomial of degree 3 or 4 and the observations are frequently direct, that is linear. Moreover, the filtering problem for a polynomial state equation of lower degree is significant itself, because many, for example, chemical processes are described by quadratic equations (see [10]). As shown in the paper, the polynomial filter of lower degree represents a particular case of the polynomial filter of any superior degree, so the quadratic filter is a particular case of the polynomial filter of degree 3, 3 of 4, etc.

The obtained optimal filter for a polynomial state equation of degree 3 is applied to solution of the state estimation problem for a nonlinear automotive system [9] whose state equation for car orientation angle is nonlinear (contains tangent). Along with the original state equation, its expansion to Taylor polynomial up to degree 3 is also considered. For both state equations and linear observations, the optimal filtering equations for a polynomial state of third degree are written and then compared to the linear Kalman-Bucy filter applied to the linearized system. Simulations are conducted for both original and approximate systems and also compared to the linear Kalman-Bucy filter applied to the linearized system. The simulation results given in the paper show significant advantage of the optimal polynomial filter in comparison to the Kalman-Bucy one, especially for the original nonlinear state equation.

Although the optimal control (regulator) problem for linear system states was solved, as well as the filtering one, in 1960s [7, 4], the optimal control function for nonlinear systems has to be determined using the general principles of maximum [11] or dynamic programming [2] which do not provide an explicit form for the optimal control in most cases. However, taking into account that the optimal control problem can be solved in the linear case applying the duality principle to the solution of the optimal filtering problem, this paper exploits the same idea for designing the optimal control in a polynomial system with linear control input, using the optimal filter for polynomial system states over linear observations. Based on the obtained polynomial filter of the third degree, the optimal regulator for a polynomial system of degree 3 with linear control input and quadratic cost criterion is obtained in a closed form, finding the optimal regulator gain matrix as dual transpose to the optimal filter gain one and constructing the optimal regulator gain equation as dual to the variance equation in the optimal filter. The results obtained by virtue of the duality principle could be rigorously verified through the general equations of [11] or [2] applied to a specific polynomial case, although the physical duality seems obvious: if the optimal filter exists in a closed form, the optimal closed-form regulator should also exist, and vice versa. Finally, the obtained optimal control for a polynomial system of the third degree is applied for regulation of the same automotive system [9], with the objective of increasing values of the state variables and consuming the minimum control energy.

The paper is organized as follows. The Kalman-Bucy filter for linear state and observation equations is reminded in Section 2. Section 3 presents an intermediate result: the Kushner equation in the case of polynomial state and linear observation equations. The optimal nonlinear filter for a polynomial state equation of degree 3 and linear observations is derived in Section 4. This result is generalized to a polynomial state equation of degree 4 in Section 5. The optimal control problem for a polynomial system is stated, the duality principle is briefly reminded, and the optimal control

problem for a polynomial system state of degree 3 is solved in Section 6. In Section 7, the obtained results are applied to the filtering problem for a nonlinear automotive system with two state variables, orientation and steering angles, over direct linear observations confused with white Gaussian noises. Graphic simulation results are also obtained and compared with those for the linear Kalman-Bucy filter applied to the linearized system. Section 8 presents application of the optimal polynomial regulator to the same automotive system, with the objective to increase values of the state variables and consume the minimum control energy. Graphic simulation results are conducted for polynomial control of degree 3 and compared with those for lineal control.

2. Optimal filtering for linear state and observation equations

For reference purposes, this section briefly describes the Kalman-Bucy filter [5] for linear state and observation equations. Let an unobservable random process $x(t)$ satisfy a linear equation

$$dx(t) = (a_0(t) + a(t)x(t))dt + b(t)dW_1(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

and linear observations are given by:

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t))dt + B(t)dW_2(t),$$

where $W_1(t)$ y $W_2(t)$ are Wiener processes, whose weak derivatives are Gaussian white noises and which are assumed independent of each other and of the Gaussian initial value x_0 .

The filtering problem is to find dynamical equations for the best estimate for the real process $x(t)$ at time t , based in the observations $Y(t) = \{y(s) / t_0 \leq s \leq t\}$, that is the conditional expectation $m(t) = E[x(t) / Y(t)]$ of the real process $x(t)$ with respect to the observations $Y(t)$. Let $P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T / Y(t)]$ be the estimate variance (correlation function).

The solution to this problem is given by the following system of filtering equations, which is closed with respect to the introduced variables, $m(t)$ and $P(t)$:

$$\begin{aligned} dm(t) &= (a_0(t) + a(t)m(t))dt + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}[dy - (A_0(t) + A(t)m(t))dt], \\ m(t_0) &= E[x(t_0) / y(t_0)], \\ dP(t) &= (a(t)P(t) + P(t)a^T(t) + b(t)b^T(t))dt - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t)dt, \\ P(t_0) &= E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T / y(t_0)]. \end{aligned}$$

3. Kushner equation for nonlinear state and linear observations

In the case of a nonlinear state equation, the problem is more complicated. Let an unobservable random process $x(t)$ satisfy a nonlinear equation

$$(1) \quad dx(t) = (f(x(t)))dt + b(t)dW_1(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

and linear observations are given by

$$(2) \quad dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t))dt + B(t)dW_2(t),$$

where $W_1(t)$ and $W_2(t)$ are Wiener processes independent of each other and of the Gaussian initial value x_0 . The desirable best estimate is the conditional expectation $m(t) = E[x(t) / Y(t)]$ of the real process $x(t)$ with respect to the observations $Y(t)$, and $P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T / Y(t)]$ is its variance (correlation function).

Since the observation equation is linear, the innovations process $v(t) = y(t) -$

$\int_{t_0}^t (A_0(t) + A(t)m(t)) dt = \int_{t_0}^t (A_0(t) + A(t)x(t)) dt + B(t)dW_2(t) - (A_0(t) + A(t)m(t)) dt = \int_{t_0}^t (A(t)(x(t) - m(t))) dt + B(t)dW_2(t)$ is a Wiener process in the case of Gaussian disturbances (see [8]), and $\int_{t_0}^t B(t)dW_2(t)$ is also a Wiener process, then the random variable $A(t)(x(t) - m(t))$ is Gaussian with respect to observations for each fixed t [12]. If the matrix A^{-1} exists, then the random vector $(x(t) - m(t))$ is also Gaussian [12].

Moreover, in this case, the Kushner equation for the optimal estimate $m(t) = E[x(t) / Y(t)]$ takes the form which readily follows from the general form of the Kushner equation (see [8]) and the observation equation (2)):

$$(3) \quad \begin{aligned} dm(t) &= E[f(x(t)) / Y(t)] dt + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}[dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt], \\ m(t_0) &= E[x(t_0) / y(t_0)]. \end{aligned}$$

Let us note [1] that if the function $f(x(t)) = a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t) + \dots$ is a polynomial, it should be possible to compute a finite-dimensional filter in a closed form for variables $m(t)$ and $P(t)$, using the fact that the random variable $(x(t) - m(t))$ is Gaussian. This implies that all conditional odd central moments of this Gaussian variable $\mu_1 = E[(x(t) - m(t)) / Y(t)]$, $\mu_3 = E[(x(t) - m(t))^3 / Y(t)]$, $\mu_5 = E[(x(t) - m(t))^5 / Y(t)]$, ... are equal to 0, and all even central moments $\mu_2 = E[(x(t) - m(t))^2 / Y(t)]$, $\mu_4 = E[(x(t) - m(t))^4 / Y(t)]$, ... can be represented as functions of the variance $P(t)$. For example: $\mu_2 = P$, $\mu_4 = 3P^2$, $\mu_6 = 15P^3$, ... etc. Thus, all higher moments of $x(t)$ with respect to $Y(t)$ can be expressed using $P(t)$, and this yields additional relations for representing each higher initial moment of $x(t)$ with respect to $Y(t)$ and, finally, the possibility to obtain the optimal filter in a closed form, i.e., the optimal finite-dimensional filter should exist in the polynomial-linear case.

4. Optimal filter for polynomial state equation of degree 3 and linear observations

In this section, the outlined procedure is applied to deriving the optimal filter for the case of a polynomial state equation of degree 3, obtained from (1) if $f(x) = a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t)$:

$$(4) \quad \begin{aligned} dx(t) &= (a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t))dt + b(t)dW_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ \text{and the linear observations (2), where } x \in R^n, x^2(t) &= (x_1^2(t), x_2^2(t), x_3^2(t), \dots, x_n^2(t)), \\ x^3(t) &= (x_1^3(t), x_2^3(t), x_3^3(t), \dots, x_n^3(t)). \end{aligned}$$

Since all odd central moments for $(x(t) - m(t))$ are equal to 0 and all even central moments can be represented as functions of $P(t)$, the higher initial moments of the state $x(t)$ with respect to the observations $Y(t)$ can also be expressed as functions of $m(t)$ and $P(t)$, as it is done below.

Let $m(t) \in R^n$ be the best estimate vector, $m(t) = (m_1(t), m_2(t), \dots, m_n(t))$; $P(t) \in R^{n \times n}$ be the covariance matrix; $p(t) \in R^n$ be the vector whose components are the variances of the components of $x(t)$, i.e., the diagonal elements of $P(t)$; $m^2(t)$ be defined as the vector of squares of the components of $m(t)$: $m^2(t) = (m_1^2(t), m_2^2(t), \dots, m_n^2(t))$; $P(t)m(t)$ be the conventional product of a matrix $P(t)$ by a vector $m(t)$; and $p(t)*m(t)$ be the product of two vectors by components: $p(t)*m(t) = [p_1(t)m_1(t), p_2(t)m_2(t), \dots, p_n(t)m_n(t)]$.

Using the introduced notation, the expression for the second initial moment is given by

$$(5) \quad E[x^2(t)/Y(t)] = p(t) + m^2(t).$$

Since $E[(x(t) - m(t))^3 / Y(t)] = 0$, then $E[(x(t) - m(t))^3 / Y(t)] = E[x^3(t) / Y(t)] -$

$$3m(t) * E[x^2(t) / Y(t)] + 3m^2(t) * E[x(t) / Y(t)] - m^3(t) = 0.$$

Substituting (5) into the last equation, the third initial moment expression is obtained

$$(6) \quad E[x^3(t) / Y(t)] = 3p(t)*m(t) + m^3(t).$$

Taking into account $E[(x(t) - m(t))^4 / Y(t)] = 3p^2(t)$, the following equality is valid: $E[(x(t) - m(t))^4 / Y(t)] = E[x^4(t) / Y(t)] - 4m(t)*E[x^3(t) / Y(t)] + 6m^2(t)*E[x^2(t) / Y(t)] - 4m^3(t)*E[x(t) / Y(t)] + m^4(t) = 3p^2(t)$, where $m^3(t) = (m_1^3(t), m_2^3(t), \dots, m_n^3(t))$ and $m^4(t) = (m_1^4(t), m_2^4(t), \dots, m_n^4(t))$. Substituting (5) and (6) and making the corresponding algebraic transformations, the fourth initial moment expression follows

$$(7) \quad E[x^4(t) / Y(t)] = 3p^2(t) + 6p(t)*m^2(t) + m^4(t).$$

The fifth initial moment representation can be obtained analogously using the equality $E[x^5(t) / Y(t)] = 0$ and substituting the previously obtained expressions (5)-(7):

$$(8) \quad E[x^5(t) / Y(t)] = 15m(t)*p^2(t) + 10p(t)*m^3(t) + m^5(t),$$

where $m^5(t) = (m_1^5(t), m_2^5(t), \dots, m_n^5(t))$. Thus, in the case of a polynomial state equation of degree 3, $f(x(t)) = a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t)$, the Kushner equation (3) for the optimal estimate $m(t) = E[x(t) / Y(t)]$ can be reduced to

$$dm(t) = (E[a_0(t) / Y(t)] + E[a_1(t)x(t) / Y(t)] + E[a_2(t)x^2(t) / Y(t)] + E[a_3(t)x^3(t) / Y(t)])dt + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}(dy - (A_0(t) + A(t)m(t))dt).$$

Using the representations (5) and (6) for the second and third moments, the optimal estimate equation takes the form

$$(9) \quad dm(t) = (a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)p(t) + a_2(t)m^2(t) + a_3(t)(3p(t)*m(t) + m^3(t)))dt + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}(dy - (A_0(t) + A(t)m(t))dt), m(t_0) = E[x(t_0) / y(t_0)].$$

The next step is to obtain the equation for the covariance matrix

$$P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T / Y(t)].$$

Upon differentiating the last equality in t

$$\begin{aligned} dP(t) &= dE[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T / Y(t)] = \\ &E[d\{(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T + x(t)(x(t) - m(t))^T\} / Y(t)] = \\ &E[\{(dx(t))(x(t) - m(t))^T + x(t)(dx(t) - dm(t))^T\} / Y(t)] = \\ &E[\{(dx(t))(x(t) - m(t))^T + x(t)(dx(t) - dm(t))^T\} / Y(t)] = \\ &E[(dx(t))(x(t) - m(t))^T / Y(t)] + E[x(t)(dx(t) - dm(t))^T / Y(t)] \end{aligned}$$

and substituting the expressions for $dx(t)$ and $dm(t)$ given by (4) and (9), the following equation follows

$$\begin{aligned} dP(t) &= E[\{(a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t)) dt + \\ &b(t)dW_1(t)(x(t) - m(t))^T + x(t)((a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + \\ &a_3(t)x^3(t))dt + b(t)dW_1(t) + (-a_0(t) - a_1(t)m(t) - a_2(t)p(t) - a_2(t)m^2(t) + \\ &3a_3(t)p(t)*m(t) - a_3(t)m^3(t))dt + Kdv\}^T / Y(t)], \end{aligned}$$

where

$$K(t) = P^T(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}$$

and $v(t)$ is the innovations process,

$$dv(t) = dy(t) - (A_0(t) + A_1(t)m(t))dt.$$

The latter equation can be transformed into

$$\begin{aligned} dP(t) &= (a_0(t)E[(x(t) - m(t))^T / Y(t)] + a_1(t)E[(x(t))(x(t) - m(t))^T / Y(t)] + \\ &a_2(t)E[x^2(t)(x(t) - m(t))^T / Y(t)] + a_3(t)E[(x^3(t))(x(t) - m(t))^T / Y(t)] + \\ &E[x(t)(a_1(t)x(t))^T / Y(t)] + E[x(t)(a_2(t)x^2(t))^T / Y(t)] + \\ &E[x(t)a_3(t)x^3(t))^T / Y(t)] - E[x(t)(a_1(t)m(t))^T / Y(t)] - \\ &E[x(t)(a_2(t)p(t))^T / Y(t)] - E[x(t)(a_2(t)m^2(t))^T / Y(t)] - \\ &E[x(t)(a_3(t)p(t)*m(t))^T / Y(t)] - E[x(t)(a_3(t)m^3(t))^T / Y(t)] + \\ &b(t)b^T(t) - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t)dt. \end{aligned}$$

Finally, upon substituting (5)-(7) and making the corresponding algebraic transformations, the variance equation takes the form

$$(10) \quad dP(t) = (a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2a_2(t)m(t)*P(t) + 2(P(t)*m^T(t))a_2^T(t) + 3a_3(t)(p(t)*P(t)) + 3(p(t)*P(t))^T a_3^T(t) + 3a_3(t)(m^2(t)*P(t)) + 3(P(t)*(m^2(t))^T)a_3^T(t) + b(t)b^T(t) - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t))dt, \\ P(t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T / y(t_0)),$$

where the product $m(t)*P(t)$ between a vector $m(t)$ and a matrix $P(t)$ is defined as the matrix whose rows are equal to rows of $P(t)$ multiplied by the same corresponding element of $m(t)$:

$$\begin{array}{ccc} m_1(t) & P_{11}(t) & P_{12}(t) \dots P_{1n}(t) & m_1(t)P_{11}(t) & m_1(t)P_{12}(t) \dots m_1(t)P_{1n}(t) \\ m_2(t) & P_{21}(t) & P_{22}(t) \dots P_{2n}(t) & m_2(t)P_{21}(t) & m_2(t)P_{22}(t) \dots m_2(t)P_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_n(t) & P_{n1}(t) & P_{n2}(t) \dots P_{nn}(t) & m_n(t)P_{n1}(t) & m_n(t)P_{n2}(t) \dots m_n(t)P_{nn}(t) \end{array}$$

The transposed matrix $P(t)*m^T(t) = (m(t)*P(t))^T$ is defined as the matrix whose columns are equal to columns of $P(t)$ multiplied by the same corresponding element of $m(t)$:

$$\begin{array}{ccc} [m_1(t) & m_2(t) & \dots & m_n(t)] \\ P_{11}(t) & P_{12}(t) & \dots & P_{1n}(t) & m_1(t)P_{11}(t) & m_2(t)P_{12}(t) \dots m_n(t)P_{1n}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) & \dots & P_{2n}(t) & m_1(t)P_{21}(t) & m_2(t)P_{22}(t) \dots m_n(t)P_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n1}(t) & P_{n2}(t) & \dots & P_{nn}(t) & m_1(t)P_{n1}(t) & m_2(t)P_{n2}(t) \dots m_n(t)P_{nn}(t) \end{array}$$

Thus, the equation (9) for the optimal estimate $m(t)$ and the equation (10) for its covariance matrix $P(t)$ form a closed system of filtering equations in the case of a polynomial state equation of degree 3 and linear observations given by the equations (4) and (2), respectively.

5. Optimal filter for polynomial state equation of degree 4 and linear observations

Generalizing the result of the previous section, the outlined procedure is now applied to deriving the optimal filter for the case of a polynomial state equation of degree 4, obtained from (1) if $f(x) = a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t) + a_4(t)x^4(t)$:

$$(11) \quad dx(t) = (a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t) + a_4(t)x^4(t))dt + b(t)dW_1(t), \\ x(t_0) = x_0,$$

and the linear observations (2), where $x \in R^n$, $x^4(t) = (x_1^4(t), x_2^4(t), x_3^4(t), \dots, x_n^4(t))$.

Following the scheme of the previous section and substituting the expressions (5)-(8) for the conditional initial moments of $x(t)$ in the Kushner equation (3), the following equation is obtained for the optimal estimate in the case of a polynomial state equation of degree 4 and linear observations

$$(12) \quad dm(t) = (a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)p(t) + a_2(t)m^2(t) + 3a_3(t)p(t)*m(t) + a_3(t)m^3(t) + 3a_4(t)p^2(t) + 6a_4(t)p(t)*m^2(t) + a_4(t)m^4(t))dt + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}(dy - (A_0(t) + A(t)m(t))dt), \\ m(t_0) = E[x(t_0) / y(t_0)].$$

Correspondingly, the variance equation takes the form

$$(13) \quad dP(t) = (a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2a_2(t)(m(t)*P(t)) + 2(P(t)*m^T(t))a_2^T(t) + 3a_3(t)(p(t)*P(t)) + 3(p(t)*P(t))^T a_3^T(t) + 3a_3(t)(m^2(t)*P(t)) +$$

$$\begin{aligned}
& 3(P(t) * (m^2(t))^T) a_3^T(t) + 12a_4(t) ((m(t) * p(t)) * P(t)) + \\
& 12(P(t) * (m(t) * p(t))^T) (a_4(t))^T + 4a_4(t) (m^3(t) * P(t)) + \\
& 4(P(t) * (m^3(t))^T) (a_4(t))^T + b(t) b^T(t) - P(t) A^T(t) (B(t) B^T(t))^{-1} A(t) P(t) dt, \\
& P(t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T / y(t_0)).
\end{aligned}$$

Remark. If we continue obtaining the filters for polynomial state equations of degrees 5, 6, etc., the corresponding equations for the estimate $m(t)$ and the variance $P(t)$ would contain the terms of the preceding lower degrees, complemented with new terms. In other words, the filtering equations for the quadratic state contain all terms of the linear filtering equations, plus new quadratic terms, the filtering equations for the cubic state contain all terms of the linear and quadratic filtering equations, plus new cubic terms, and so on.

6. Optimal control for polynomial state degree 3 with linear control input

Consider the polynomial system

$$(14) \quad dx(t) = (a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t))dt + G(t)u(t)dt, \quad x(t_0) = x_0,$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the system state, $x^2(t) = (x_1^2(t), x_2^2(t), x_3^2(t), \dots, x_n^2(t))$,

$x^3(t) = (x_1^3(t), x_2^3(t), x_3^3(t), \dots, x_n^3(t))$, and $u(t)$ is the control variable. The quadratic cost function to be minimized is defined as follows:

$$(15) \quad J = \frac{1}{2} [x(T) - x_1]^T \Psi [x(T) - x_1] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(s) R(s) u(s) ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T x^T(s) L(s) x(s) ds,$$

where x_1 is a given vector, Ψ , R , L are positive (nonnegative) definite symmetric matrices, and $T > t_0$ is a certain time moment.

The optimal control problem is to find the control $u^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, that minimizes the criterion J along with the trajectory $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, generated upon substituting $u^*(t)$ into the state equation (14). To find the solution to this optimal control problem, the duality principle [7] could be used. For linear systems, if the optimal control exists in the optimal control problem for a linear system with the quadratic cost function J , the optimal filter exists for the dual linear system with Gaussian disturbances and can be found from the optimal control problem solution, using simple algebraic transformations (duality between the gain matrices and the matrix and variance equations), and vice versa. Taking into account the physical duality of the filtering and control problems, the last conjecture should be valid for all cases where the optimal control (or, vice versa, the optimal filter) exists in a closed finite-dimensional form. This proposition is now applied to a third order polynomial system, for which the optimal filter has already been obtained (see Section 4).

Let us return to the optimal control problem for the polynomial state (14) with linear control input and the cost function (15). This problem is dual to the filtering problem for the polynomial state (4) of degree 3 and the linear observations (2). Since the optimal polynomial filter gain matrix in (9) is equal to

$$K_f = P(t) A^T(t) (B(t) B^T(t))^{-1},$$

the gain matrix in the optimal control problem takes the form of its dual transpose

$$K_c = (R(t))^{-1} G^T(t) Q(t),$$

and the optimal control law is given by

$$(16) \quad u^*(t) = K_c x = (R(t))^{-1} G^T(t) Q(t) x(t),$$

where the matrix function is the solution of the following equation dual to the variance equation (10)

$$(17) \quad \begin{aligned} dQ(t) = & (-a_1^T(t)Q(t) - Q(t)a_1(t) - 2a_2^T(t)Q(t)*x^T(t) - 2x(t)*Q(t)a_2(t) - \\ & 3a_3^T(t)Q(t)*q^T(t) - 3q(t)*Q(t)a_3(t) - 3a_3^T(t)Q(t)*((x^2)^T(t)) - 3((x^2)^T(t)*Q(t))a_3(t) \\ & + L(t) - Q(t)G(t)R^{-1}(t)G^T(t)Q(t))dt, \end{aligned}$$

with the terminal condition $Q(T) = \Psi$. The binary operation $*$ has been introduced in Section 4, and $q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$ denotes the vector consisting of the diagonal elements of $Q(t)$.

Upon substituting the optimal control (16) into the state equation (14), the optimally controlled state equation is obtained

$$\begin{aligned} dx(t) = & (a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t))dt + \\ & G(t)(R(t))^{-1}G^T(t)Q(t)x(t)dt, \quad x(t_0) = x_0, \end{aligned}$$

Note that if the real state vector $x(t)$ is unknown (unobservable), the optimal controller uniting the obtained optimal filter and regulator equations, can be constructed using the separation principle [7] for polynomial systems, which should also be valid if solutions of the optimal filtering and control problems exist in a closed finite-dimensional form.

The results obtained in this section by virtue of the duality principle could be rigorously verified through the general equations of the Pontryagin maximum principle [11] or Bellman dynamic programming [2].

7. Application of optimal polynomial filter to automotive system

This section presents application of the obtained filter for a polynomial state of degree 3 over linear observations to estimation of the state variables, orientation and steering angles, in a nonlinear kinematical model of car movement [9] satisfying the following equations:

$$(18) \quad \begin{aligned} dx(t) &= v \cos\varphi(t) dt, \\ dy(t) &= v \sin\varphi(t) dt, \\ d\varphi(t) &= (v/l) \tan\delta(t) dt, \\ d\delta(t) &= u(t) dt. \end{aligned}$$

Here, $x(t)$ and $y(t)$ are Cartesian coordinates of the mass center of the car, $\varphi(t)$ is the orientation angle, v is the velocity, l is the longitude between the two axes of the car, $\delta(t)$ is the steering wheel angle, and $u(t)$ is the control variable (steering angular velocity). The zero initial conditions for all variables are assumed.

The problem is to find the optimal estimates for the variables $\varphi(t)$ and $\delta(t)$, using direct linear observations confused with independent and identically distributed disturbances modeled as white Gaussian noises. The corresponding observation equations are

$$(19) \quad \begin{aligned} dz_\varphi(t) &= \varphi(t)dt + \phi_1(t)dt, \\ dz_\delta(t) &= \delta(t)dt + \phi_2(t)dt, \end{aligned}$$

where $z_\varphi(t)$ is the observation variable for $\varphi(t)$, $z_\delta(t)$ is the observation variable for $\delta(t)$, and $\phi_1(t)$ and $\phi_2(t)$ are white Gaussian noises independent of each other.

To apply the obtained filtering algorithms to the nonlinear system (18) and linear observations (19), let us make the Taylor expansion of the two last equations in (18) at the origin up to degree 3 (the fourth degree does not appear in the Taylor series for tangent)

$$(20) \quad \begin{aligned} d\varphi(t) &= ((v/l)\delta(t) + (v/l)(\delta^3(t))/3)dt \\ d\delta(t) &= u(t)dt \end{aligned}$$

The filtering equations (9) and (10) for the third degree polynomial state (20) over linear observations (19) take the form

$$(21) \quad \begin{aligned} dm_\varphi &= ((\nu/l)m_\delta + (\nu/3l)(3p_\delta + m_\delta^3) + p_{\varphi\varphi}(z_\varphi - m_\varphi) + p_{\varphi\delta}(z_\delta - m_\delta))dt, \\ dm_\delta &= (u(t) + p_{\delta\varphi}(z_\varphi - m_\varphi) + p_{\delta\delta}(z_\delta - m_\delta))dt, \\ dp_{\varphi\varphi} &= ((2\nu/l)p_{\delta\varphi}p_{\delta\delta} + (2\nu/l)p_{\delta\varphi} + (2\nu/l)m_\delta^2 p_{\delta\varphi} - p_{\varphi\varphi}^2 - p_{\varphi\delta}^2)dt, \\ dp_{\varphi\delta} &= ((\nu/l)p_{\delta\delta} + (\nu/l)m_\delta^2 p_{\delta\delta} - p_{\varphi\varphi}p_{\varphi\delta} - p_{\varphi\delta}p_{\delta\delta})dt, \\ dp_{\delta\delta} &= (-p_{\delta\varphi}^2 - p_{\delta\delta}^2)dt, \end{aligned}$$

where m_φ and m_δ are the estimates for variables φ and δ , and $p_{\varphi\varphi}$, $p_{\varphi\delta}$, $p_{\delta\delta}$ are elements of the symmetric covariance matrix P.

The estimates obtained upon solving the equations (21) are compared to the conventional Kalman-Bucy estimates satisfying the following Kalman-Bucy filtering equations for a state of the linearized system (18) (only the linear term is present in the Taylor expansion for tangent) over linear observations (19)

$$(22) \quad \begin{aligned} dm_\varphi &= ((\nu/l)m_\delta + p_{\varphi\varphi}(z_\varphi - m_\varphi) + p_{\varphi\delta}(z_\delta - m_\delta))dt, \\ dm_\delta &= (u(t) + p_{\delta\varphi}(z_\varphi - m_\varphi) + p_{\delta\delta}(z_\delta - m_\delta))dt, \\ dp_{\varphi\varphi} &= ((2\nu/l)p_{\delta\varphi} - p_{\varphi\varphi}^2 - p_{\varphi\delta}^2)dt, \\ dp_{\varphi\delta} &= ((\nu/l)p_{\delta\delta} - p_{\varphi\varphi}p_{\varphi\delta} - p_{\varphi\delta}p_{\delta\delta})dt, \\ dp_{\delta\delta} &= (-p_{\delta\varphi}^2 - p_{\delta\delta}^2)dt. \end{aligned}$$

Numerical simulation results are obtained solving the systems of filtering equations (21) and (22). The obtained values of the estimates m_φ and m_δ are compared, in both cases, to the real values of the variables φ and δ in the original system (18) and its polynomial approximation (20).

Thus, two sets of graphs are obtained.

- 1) Graphs of variables φ and δ for the polynomial approximation system (20); graphs of the Kalman-Bucy filter estimates m_φ and m_δ satisfying the equations (22); and graphs of the optimal third degree polynomial filter estimates m_φ and m_δ satisfying the equations (21) (Figs. 1 and 2).
- 2) Graphs of variables φ and δ for the original system (18); graphs of the Kalman-Bucy filter estimates m_φ and m_δ satisfying the equations (22); and graphs of the optimal third degree polynomial filter estimates m_φ and m_δ satisfying the equations (21) (Figs. 3 and 4).

For each of the four filters and two reference systems involved in simulation, the following values of the input variables and initial values are assigned: $\nu = 1$, $l = 1$, $u(t) = 0.05$, $m_\varphi(0) = 10$, $m_\delta(0) = 0.1$, $\varphi(0) = \delta(0) = 0$, $P_{\varphi\varphi}(0) = 100$, $P_{\varphi\delta}(0) = 10$, $P_{\delta\delta}(0) = 1$. Gaussian disturbances $\phi_1(t)$ and $\phi_2(t)$ in (21) are realized as sinusoidal signals: $\phi_1(t) = \phi_2(t) = \sin t$.

The obtained values of the reference variables φ and δ satisfying the polynomial approximation system (20) are compared to the Kalman-Bucy filter and optimal third degree polynomial filter estimates m_φ and m_δ at the terminal time $T=20$ in the following table (corresponding to Figs. 1 and 2).

Kalman-Bucy filter	Third degree polynomial filter
$\varphi(20) = 5$	$\varphi(20) = 5$
$\delta(20) = 1$	$\delta(20) = 1$
$m_\varphi(20) = 3.35$	$m_\varphi(20) = 5.2$
$m_\delta(20) = 0.48$	$m_\delta(20) = 0.73$

The obtained values of the reference variables φ and δ satisfying the original system (18) are compared to the Kalman-Bucy filter and optimal third degree polynomial filter estimates m_φ and m_δ at the terminal time $T=20$ in the following table (corresponding to Figs. 3 and 4)

Kalman-Bucy filter	Third degree polynomial filter
$\varphi(20) = 12.3$	$\varphi(20) = 12.3$
$\delta(20) = 1$	$\delta(20) = 1$
$m_\varphi(20) = 7.35$	$m_\varphi(20) = 11.83$
$m_\delta(20) = 0.61$	$m_\delta(20) = 0.905$

The simulation results show that the estimates obtained by using the optimal third degree polynomial filter are closer to the real values of the reference variables than those obtained by using the conventional Kalman-Bucy linear filter, especially for the original nonlinear system (18). Although this conclusion follows from the developed theory, the numerical comparison serves as a convincing illustration.

8. Application of optimal polynomial regulator to automotive system

This section presents application of the obtained optimal regulator for a polynomial system of degree 3 with linear control input and quadratic criterion to controlling the state variables, orientation and steering angles, in the nonlinear kinematical model of car movement [9] given by the nonlinear equations (18). The optimal control problem is to maximize the orientation angle φ using the minimum energy of control u .

The corresponding criterion J to be minimized takes the form

$$J = \frac{1}{2} [\varphi(T) - \varphi^*]^2 + \frac{1}{2} \int_0^T u^2(s) ds,$$

where $T = 0.3$, and $\varphi^* = 1$ is a large value of $\varphi(t)$ unreachable for time T . Since $R = 1$ and $G^T = [0 \ 1]$, the optimal control law (16) $u^*(t) = (R(t))^{-1} G^T(t) Q(t) x(t)$ takes the form $u^*(t) = q_{21}(t)\varphi(t) + q_{22}(t)\delta(t)$, where the elements $q_{11}(t)$, $q_{21}(t)$, $q_{22}(t)$ of the symmetric matrix $Q(t)$ satisfy the equations

$$(23) \quad \begin{aligned} dq_{11}(t) &= -(q_{21}(t))^2 dt, \\ dq_{12}(t) &= (-3(v/l) (q_{11}(t))^2 - q_{11}(t)q_{12}(t) - (v/l)q_{11}(t) - 3(v/l)\varphi^2(t)q_{11}(t))dt, \\ dq_{22}(t) &= (-2(v/l)q_{12}(t) - 2(v/l) q_{12}(t)q_{22}(t) - 2(v/l)\delta^2(t)q_{12}(t) - (q_{22}(t))^2)dt. \end{aligned}$$

The system composed of the two last equations of (18) and the equations (20) should be solved with initial conditions $\varphi(0) = 0.1$, $\delta(0) = 0.1$ and terminal conditions $q_{11}(T) = 1$, $q_{12}(T) = 0$, $q_{22}(T) = 0$. This boundary problem is solved numerically using the iterative method of direct and reverse passing as follows. The first initial conditions for q 's are guessed, and the system is solved in direct time with the initial conditions at $t = 0$, thus obtaining certain values for φ and δ at the terminal point $T = 0.3$. Then, the system is solved in reverse time, taking the obtained terminal values for φ and δ in direct time as the initial values in reverse time, thus obtaining certain values for q 's at the initial point $t = 0$, which are taken as the initial values for the passing in direct time, and so on. The given initial conditions $\varphi(0) = 0.1$, $\delta(0) = 0.1$ are kept fixed for any direct passing, and the given terminal conditions $q_{11}(T) = 1$, $q_{12}(T) = 0$, $q_{22}(T) = 0$ are used as the fixed initial conditions for any reverse passing. The algorithm stops

when the system arrives at values $q_{11}(T) = 1$, $q_{12}(T) = 0$, $q_{22}(T) = 0$ after direct passing and at values $\varphi(0) = 0.1$, $\delta(0) = 0.1$ after reverse passing. The obtained simulation graphs for φ , δ , and the criterion J are given in Fig. 5. These results for polynomial regulator of degree 3 are then compared to the results obtained using the optimal linear regulator, whose matrix $Q(t)$ elements satisfy the Riccati equations

$$(24) \quad \begin{aligned} dq_{11}(t) &= -(q_{21}(t))^2 dt \\ dq_{12}(t) &= (-q_{11}(t)q_{12}(t) - (v/l)q_{11}(t)) dt, \\ dq_{22}(t) &= (-2(v/l)q_{12}(t) - (q_{22}(t))^2) dt, \end{aligned}$$

with terminal conditions $q_{11}(T) = 1$, $q_{12}(T) = 0$, $q_{22}(T) = 0$. Note that in the linear case the only reverse passing for q 's is necessary, because the system (24) does not depend on φ and δ , and the initial values for q 's at $t = 0$ are obtained after single reverse passing. The simulation graphs for the linear case are given in Fig. 6.

Thus, two sets of graphs are obtained.

- 1) Graphs of variables φ and δ satisfying the original system (18) and controlled using the optimal linear regulator defined by (24); graphs of the corresponding values of the criterion J (Fig. 5).
- 2) Graphs of variables φ and δ satisfying the original system (18) and controlled using the optimal third order polynomial regulator defined by (23); graphs of the corresponding values of the criterion J (Fig. 6).

The obtained values of the controlled variables φ and δ and the criterion J are compared for the optimal third order polynomial and linear regulators at the terminal time $T = 0.3$ in the following table (corresponding to Figs. 5 and 6).

Linear regulator	Third degree polynomial regulator
$\varphi(0.3) = 0.132$	$\varphi(0.3) = 0.138$
$\delta(0.3) = 0.1045$	$\delta(0.3) = 0.1278$
$J(0.3) = 0.759$	$J(0.3) = 0.75$

The simulation results show that the values of the controlled variables φ and δ at the terminal point $T = 0.3$ are greater for the third order regulator than for the linear one (although only the variable φ is maximized) and the criterion value at the terminal point is less for the third order regulator also. Thus, the third order polynomial regulator controls the system variables better than the linear one from both points of view, thus illustrating, as well as for the filtering problem, the theoretical conclusion.

9. Conclusions

The optimal nonlinear filter for a stochastic system state given by a polynomial equation of degree 3 or 4 and linear observations confused with white Gaussian noises has been obtained. The optimal polynomial filter of degree 3 has been then applied to solution of the estimation problem for state variables, orientation and steering angles, of a nonlinear automotive system describing kinematics of car movement. The estimates obtained by using the optimal third degree polynomial filter have been compared to the conventional Kalman-Bucy linear filter estimates. The numerical simulation results have demonstrated that the values of the polynomial filter estimates are closer to the real values of reference variables than the Kalman-Bucy ones, showing that the polynomial filter yields better estimation results for nonlinear systems. Using the duality principle, the optimal regulator has been designed for a polynomial system

of degree 3 with linear control input and quadratic cost criterion. Application of the obtained regulator to the nonlinear automotive system have yielded lesser values of the criterion and greater values of the controlled variables in comparison to the optimal linear regulator. In both cases, the numerical simulation results confirm the theoretical conclusions.

References

1. Basin M.V. On an approach to filtering and control design for polynomial/delayed processes // Proc. 6th European Control Conference 2001 (Porto, Portugal, September 4-7, 2001), P. 2392-2397.
2. Bellman R. Dynamic Programming, Princeton Univ. Press, Princeton, 1957.
3. Benes V.E. Exact finite-dimensional filters for certain diffusions with nonlinear drift // Stochastics 1981. Vol. 5. P. 65-92.
4. Fleming W.H., Rishel R.W. Deterministic and Stochastic Optimal Control. Springer, New York, 1975.
5. Kalman R.E., Bucy R.S. New results in linear filtering and prediction theory // ASME Trans., Part D (J. of Basic Engineering) 1961. Vol. 83. P. 95-108.
6. Kushner H.J. On differential equations satisfied by conditional probability densities of Markov processes // SIAM J. Control 1964, Vol. 12. P. 106-119.
7. Kwakernaak H., Sivan R. Linear Optimal Control Systems, Wiley-Interscience, New York, 1972.
8. Mitter S.K. Filtering and stochastic control: a historical perspective // Control Systems 1996, Vol. 16, No. 3. P. 67-76.
9. Murray R., Sastry S. Nonholonomic motion planning: steering using sinusoids // IEEE Trans. Automat. Control. 1993. Vol. 38, No. 5. P. 700-716.
10. Ogunnaiké B.A. On-line modeling and predictive control of an industrial terpolymerization reactor // Int. J. Control. 1994. Vol. 59, No. 3, P. 711-729.
11. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F., The Mathematical Theory of Optimal Processes, Moscow, 1961; New York: Interscience, 1962.
12. Pugachev V.S. Probability Theory and Mathematical Statistics for Engineers, Pergamon, London, 1984.
13. Wonham W.M. Some applications of stochastic differential equations to nonlinear filtering // SIAM J. Control 1965. Vol. 2. P. 347-369.
14. Yau S. S.-T. Finite-dimensional filters with nonlinear drift I: a class of filters including both Kalman-Bucy and Benes filters // J. Math. Systems, Estimation, and Control 1994. Vol. 4. P. 181-203.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

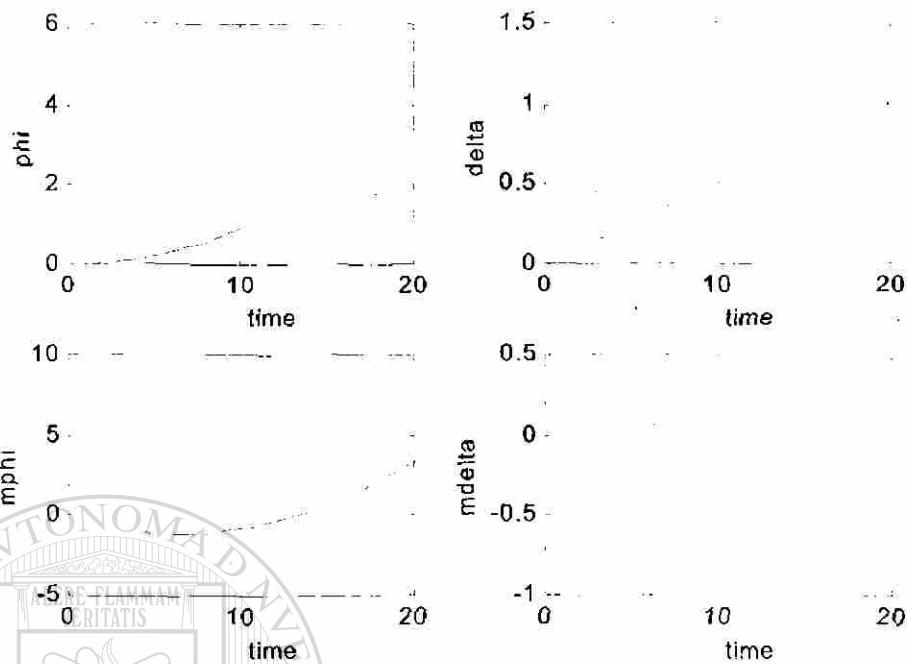


Fig. 1. Graphs of variables φ and δ for the polynomial approximation system (20); Graphs of the Kalman-Bucy filter estimates m_φ and m_δ satisfying the equations (22).

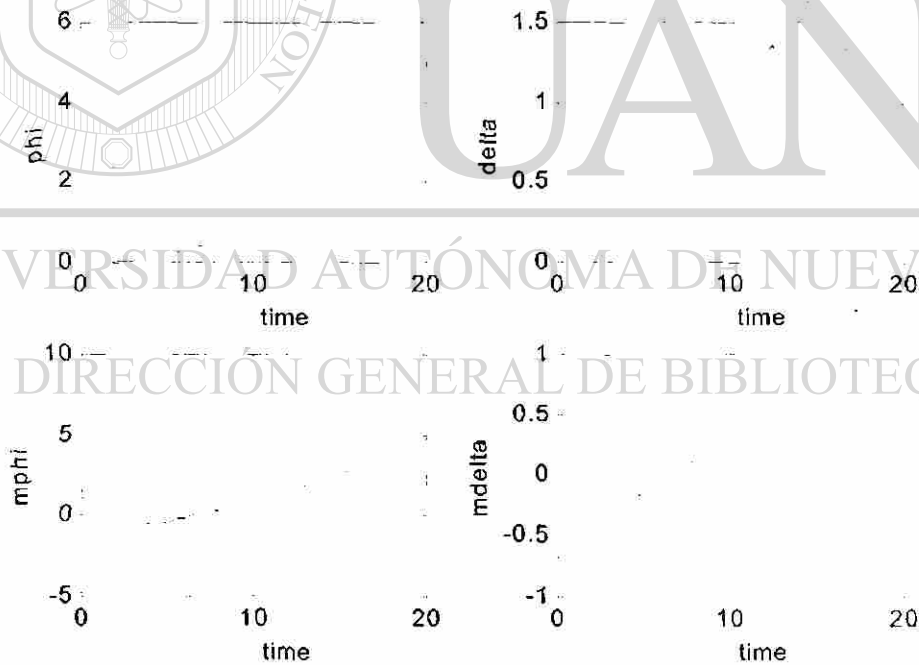


Fig. 2. Graphs of variables φ and δ for the polynomial approximation system (20); Graphs of the optimal third degree polynomial filter estimates m_φ and m_δ satisfying the equations (21).

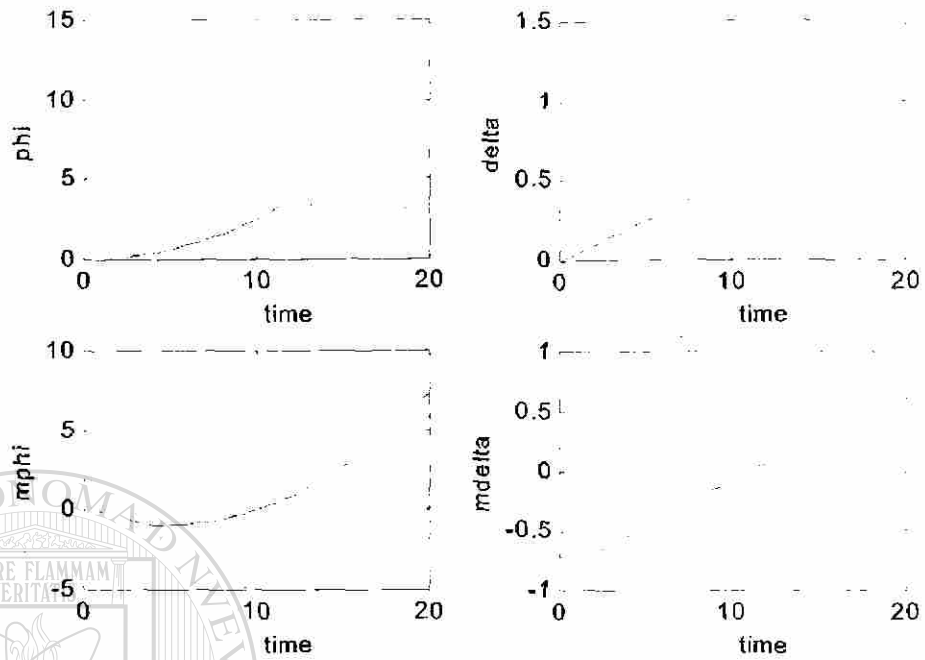


Fig. 3. Graphs of variables φ and δ for the original system (18); Graphs of the Kalman-Bucy filter estimates m_φ and m_δ satisfying the equations (22).

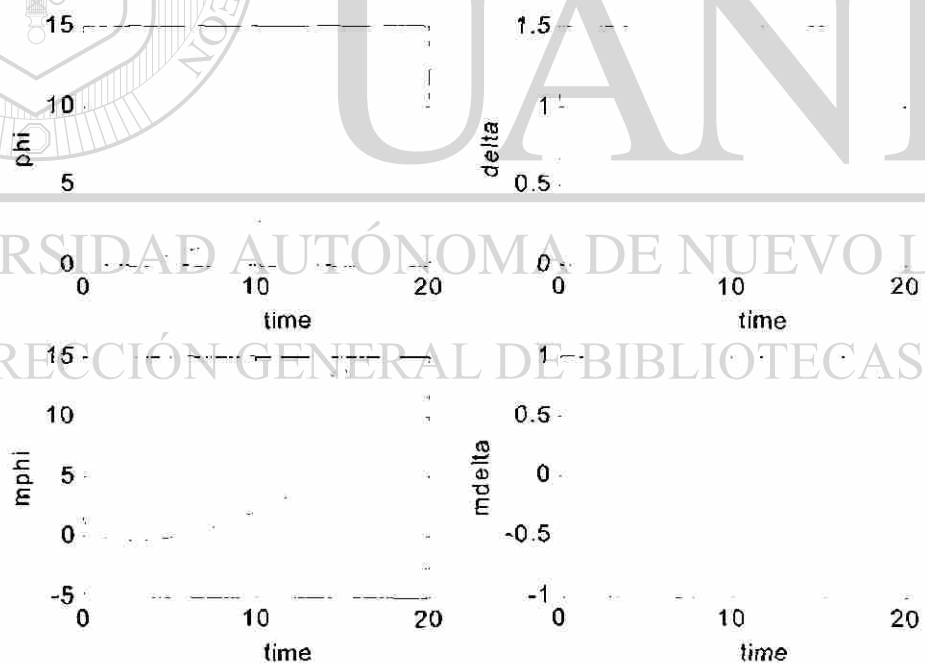


Fig. 4. Graphs of variables φ and δ for the original system (18); Graphs of the optimal third degree polynomial filter estimates m_φ and m_δ satisfying the equations (21).

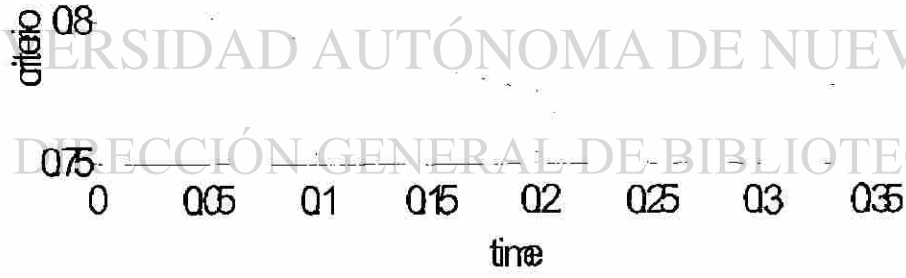
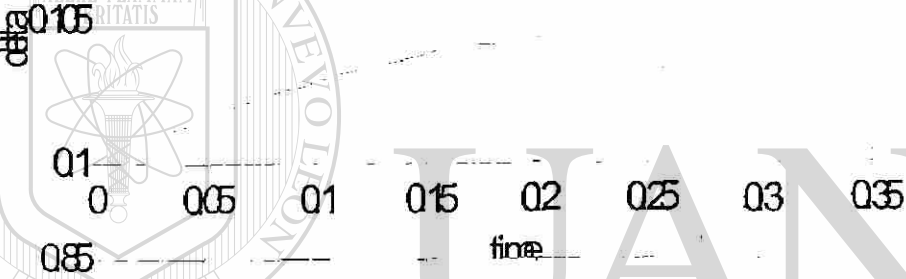
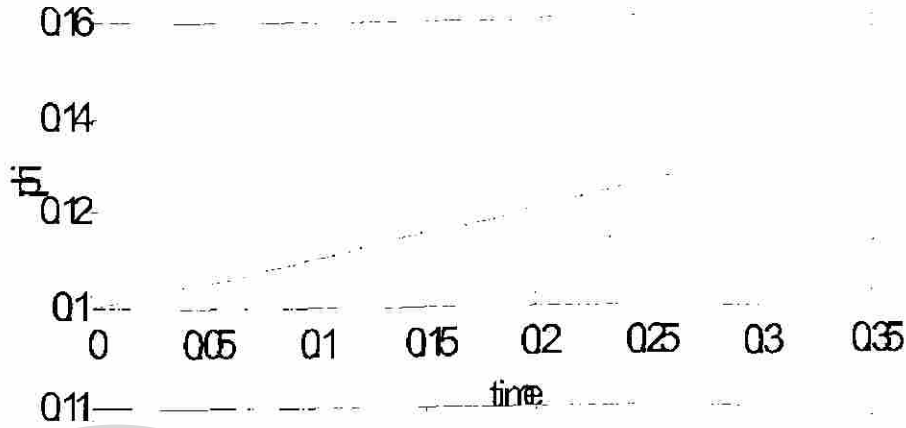
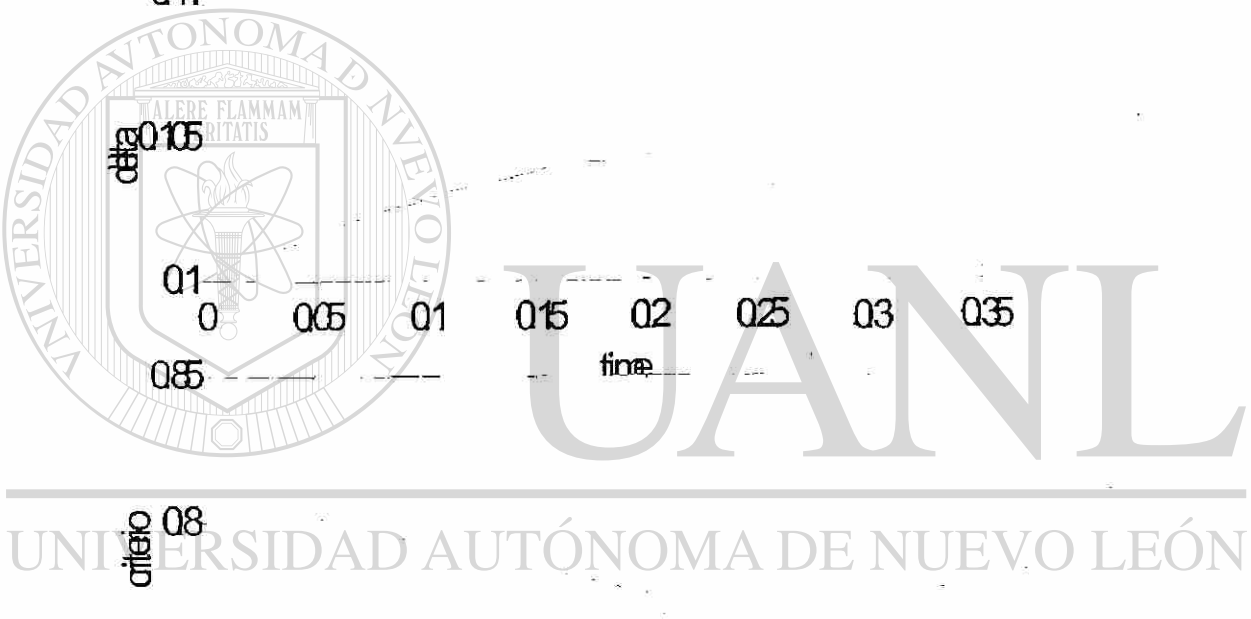


Fig. 5. Graphs of variables φ and δ satisfying the original system (18) and controlled using the optimal linear regulator defined by (24); graphs of the corresponding values of the criterion J.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

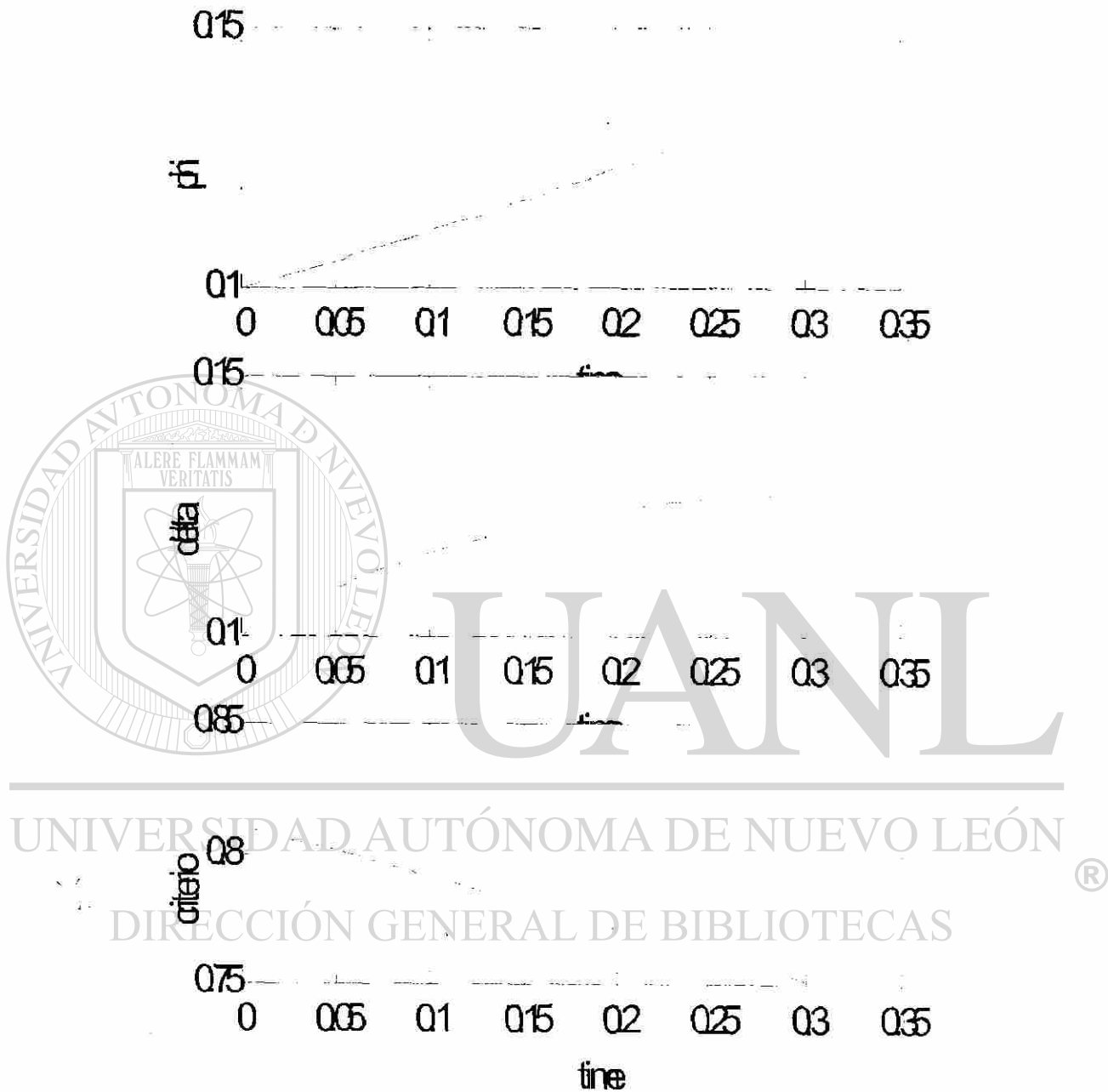


Fig. 6. Graphs of variables φ and δ satisfying the original system (18) and controlled using the optimal third order polynomial regulator defined by (23); graphs of the corresponding values of the criterion J.

ACC03-IEEE0439

Optimal Filtering for Bilinear System States and Its Application to Polymerization Process Identification

MICHAEL BASIN ARACELIA ALCORTA-GARCIA

Autonomous University of Nuevo Leon, Mexico

E-mail: mbasin@cfm.uanl.mx aracelia_alcorta@hotmail.com

Abstract. The paper presents the optimal nonlinear filter for bilinear state and linear observation equations confused with white Gaussian disturbances. The general scheme for obtaining the optimal filter in case of polynomial state and linear observation equations is announced. The obtained bilinear filter is applied to solution of the identification problem for the bilinear terpolymerization process and compared to the optimal linear filter available for the linearized model and to the mixed filter designed as a combination of those filters.

1 Introduction

It is virtually the common opinion that the optimal nonlinear finite-dimensional filter exists and can be obtained in a closed form only in the case of linear state and observation equations. This famous construction is called the linear Kalman-Bucy filter [1], referring to the scientists who derived it in 1960s. However, it is much less known that the optimal nonlinear finite-dimensional filter can be obtained in many other cases, if, for example, the state vector can take only a finite number of admissible states [2] or if the observation equation is linear and the drift term in the state equation satisfies the Riccati equation $\frac{df}{dx} + f^2 = x^2$ (see [3]). Moreover, the complete classification of the "general situation" cases (this means that there are no special assumptions on the structure of state and observation equations) when the optimal nonlinear finite-dimensional filter exists is given in [4].

This paper would like to attract attention to relatively simple (but important in practical applications, see [5]) cases when the optimal nonlinear finite-dimensional filter can be obtained in a closed form. Indeed, if the observation equation is linear and the observation matrix is invertible, then, as shown below in the paper, it is possible to obtain the optimal finite-dimensional filter for a polynomial state equation, provided that the system coefficients depend on time only. In the case of a bilinear state equation, the corresponding filtering equations are derived in the paper directly. The possibility to derive similar results for an arbitrary polynomial state equation is underlined.

The paper is organized as follows. Section 2 briefly reminds the linear Kalman-Bucy filter for reference purposes, considers the case of nonlinear state and linear observation equations, establishes the procedure to obtain a closed system of the filtering equations for polynomial state and linear

observation equations, and gives the optimal filter for bilinear system states and linear observations in the explicit form. In Section 3, the obtained bilinear filter is applied to solution of the identification problem for the bilinear terpolymerization process and compared to the optimal linear filter available for the linearized model and to the mixed filter designed as a combination of those filters. The simulation results show an advantage of the optimal bilinear filter in comparison to the other filters.

2 Optimal filtering for polynomial state equation

2.1 Linear Kalman-Bucy filter

It is well known that the linear optimal filter [1] can be designed in a closed form, if the state and observation equations of a dynamic system are linear. Let an unobservable random process $x(t)$ satisfy a linear equation

$$dx(t) = (a_0(t) + a(t)x(t))dt + b(t)dW_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

and linear observations are given by

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t))dt + B(t)dW_2(t). \quad (2)$$

Here, $W_1(t)$ and $dW_2(t)$ are Wiener processes, whose weak derivatives are Gaussian noises and which are assumed independent of each other and of the initial value x_0 . The last equation can also be written in the algebraic form:

$$\dot{y}(t) = A_0(t) + A(t)x(t) + B(t)\psi(t). \quad (3)$$

where $\psi(t)$ is a white Gaussian noise (a weak derivative of $W_2(t)$).

The estimation problem is to find the best estimate for the real process $x(t)$ at time t based on the observations $Y(t) = \{y(s), t_0 \leq s \leq t\}$, that is the conditional expectation $m(t) = E(x(t) | Y(t))$ of the real process $x(t)$ with respect to the observations $Y(t)$. Let $P(t) = E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | Y(t))$ be the estimate variance (correlation function).

The solution to this problem is given by the following system of filtering equations, which is closed with respect to the introduced variables, $m(t)$ and $P(t)$:

$$dm(t) = (a_0(t) + a(t)m(t))dt + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} \times [dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt], \quad (4)$$

$$m(t_0) = E(x(t_0) | Y(t_0))$$

$$dP(t) = (a(t)P(t) + P(t)a^T(t) + b(t)b^T(t))dt - \quad (5)$$

$$P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t)dt,$$

$$P(t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | Y(t_0)).$$

The advantages of the Kalman-Bucy filter are very well known: the equations are simple, the variance equation is independent of the observations $y(t)$ and can be solved off-line, the estimate equation is linear and the variance one is quadratic of the Riccati type.

2.2 Nonlinear filtering equation

In the case of nonlinear state and observation equations, the problem is more complicated. Let an unobservable random process $x(t)$ satisfy a nonlinear equation

$$dx(t) = f(x(t))dt + b(t)dW_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (6)$$

and nonlinear observations are given by

$$dy(t) = h(x(t))dt + B(t)dW_2(t). \quad (7)$$

There exist two principal results related to this case [6]. First, as in the previous linear case, the innovations process $\vartheta(t) = y(t) - \int_{t_0}^t E(h(x(s)) | Y(s))ds$ is a Wiener process and, second, contains the same new information as the observation process $y(t)$ itself. The first result means that for every fixed t , the random variable $\vartheta(t)$ is Gaussian and the second one implies that for every function $\varphi(x)$ depending on the real unobservable vector $x(t)$, the expectations with respect to the observation and innovations processes are the same: $E(\varphi(x(t)) | Y(t)) = E(\varphi(x(t)) | \{\vartheta(s), t_0 \leq s \leq t\})$, in particular, if $\varphi(x) = x$, then $m(t) = E(x(t) | Y(t)) = E(x(t) | \{\vartheta(s), t_0 \leq s \leq t\})$.

Using these basic properties, it is possible to obtain the equation for the optimal estimate $m(t) = E(x(t) | Y(t))$, the so-called nonlinear filtering equation, first derived by Kushner [7], in the form

$$\begin{aligned} dm(t) &= E(f(x(t)) | Y(t))dt + \\ & [E(h(x(t))x^T(t) | Y(t)) - E(h(x(t)) | Y(t))m^T(t)]^T \times \\ & (B(t)B^T(t))^{-1}[dy(t) - E(h(x(s)) | Y(t))dt], \\ m(t_0) &= E(x(t_0) | Y(t_0)). \end{aligned} \quad (8)$$

However, the computation of $m(t)$ requires computing the functions in the right-hand side of this equation, which, in turn, requires computing the quantities: $E(f(x(t)) | Y(t))$, $E(h(x(t))x(t) | Y(t))$, and $E(h(x(t)) | Y(t))$. Each of them is a nonlinear function of x and, as a consequence, a non-Gaussian random variable. Thus, one has to solve a nonlinear stochastic differential equation for each of these variables, which involves higher moments of these variables in its right-hand side. Hence, an infinite-dimensional system of nonlinear stochastic equations should be obtained as the optimal filter. In other words, the optimal filter cannot be obtained in a closed form, i.e., with respect to a finite number of filtering variables (there are two, $m(t)$ and $P(t)$, in the linear Kalman-Bucy filter), or one can say that the optimal finite-dimensional filter does not exist. Actually, there are only a few number of examples where the optimal finite-dimensional filter exists for a nonlinear model of state and observation processes [2–4] in the "general situation."

2.3 Polynomial state and linear observation equations

Nonetheless, it should be possible to obtain the optimal finite-dimensional filter in a closed form in the following case. Let an unobserved random process $x(t)$ satisfy a nonlinear equation

$$dx(t) = f(x(t))dt + b(t)dW_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (9)$$

and linear observations are given by

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t))dt + B(t)dW_2(t), \quad (10)$$

where the function $f(x(t)) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + \dots$ is a polynomial and the observation matrix $A(t)$ is invertible, i.e., the inverse matrix $A^{-1}(t)$ exists.

Since the observation equation is linear, the first result of nonlinear filtering implies that the innovations process $\vartheta(t) = y(t) - \int_{t_0}^t (A_0(s) + A(s)m(s))ds = \int_{t_0}^t (A_0(s) + A(s)x(s))ds + \int_{t_0}^t B(s)dW_2(s) - \int_{t_0}^t (A_0(s) + A(s)m(s))ds = \int_{t_0}^t A(s)(x(s) - m(s))ds + \int_{t_0}^t B(s)dW_2(s)$ is a Wiener process, and, since $\int_{t_0}^t B(s)dW_2(s)$ is also a Wiener process, the random variable $A(t)(x(t) - m(t))$ is Gaussian for every fixed t . If the inverse matrix $A^{-1}(t)$ exists, then the random vector $(x(t) - m(t))$ is also Gaussian [8].

Moreover, in this case, the second term in the nonlinear filtering equation is equal to

$$\begin{aligned} & [E(h(x(t))x^T(t) | Y(t)) - E(h(x(t)) | Y(t))m^T(t)]^T \times \\ & (B(t)B^T(t))^{-1}[dy(t) - A(t)m(t)dt] = \\ & [E(x(t)x^T(t)A^T | Y(t)) - m(t)E(x^T(t)A^T(t) | Y(t))] \times \\ & (B(t)B^T(t))^{-1}[dy(t) - A(t)m(t)dt] = \\ & [E(x(t)x^T(t) | Y(t))A^T(t) - m(t)E(x^T(t) | Y(t))A^T(t)] \times \\ & (B(t)B^T(t))^{-1}[dy(t) - A(t)m(t)dt] = \\ & [E(x(t)x^T(t) | Y(t)) - m(t)m^T(t)]A^T(t) \times \\ & (B(t)B^T(t))^{-1}[dy(t) - A(t)m(t)dt] = \end{aligned}$$

$$P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}[dy(t) - A(t)m(t)dt].$$

Hence, the nonlinear filtering equation for the optimal estimate $m(t)$ takes the form:

$$\begin{aligned} dm(t) &= E(f(x(t)) | Y(t))dt + \\ & P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}[dy(t) - A(t)m(t)dt], \\ m(t_0) &= E(x(t_0) | Y(t_0)). \end{aligned} \quad (11)$$

Let us note now that if the function $f(x(t)) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + \dots$ is a polynomial, it should be possible to compute a finite-dimensional filter in a closed form for variables $m(t)$ and $P(t)$, using the fact that the random variable $(x(t) - m(t))$ is Gaussian. Since all the system coefficients in (9), (10) do not depend on state $x(t)$ and observations $y(t)$, the conditional moments of $(x(t) - m(t))$ with respect to observations $y(t)$ coincide with the unconditional ones. This implies that all odd central conditional moments of this Gaussian variable $\mu_1 = E((x(t) - m(t)) | Y(t))$, $\mu_3 = E((x(t) - m(t))^3 | Y(t))$, $\mu_5 = E((x(t) - m(t))^5 | Y(t))$, ... are equal to 0, and all even central conditional moments $\mu_2 = E((x(t) - m(t))^2 | Y(t))$, $\mu_4 = E((x(t) - m(t))^4 | Y(t))$, $\mu_6 = E((x(t) - m(t))^6 | Y(t))$, ... can be represented as functions of the variance $P(t)$. For example, $\mu_2 = P$, $\mu_4 = 3P^2$, $\mu_6 = 15P^3$, Thus, all higher moments of $(x(t) - m(t))$ can be expressed using $P(t)$, and this yields additional relations for representing every higher initial moment of $x(t)$ and, finally, the possibility to obtain the optimal

filter in a closed form, i.e., the optimal finite-dimensional filter should exist in the polynomial-linear case.

For example, if the function

$$f(x) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)xx^T \quad (12)$$

is a bilinear polynomial, where x is now an n -dimensional vector, a_1 is an $n \times n$ - matrix, and a_2 is a 3D tensor of dimension $n \times n \times n$, the system of filtering equations is as follows

$$\begin{aligned} dm(t) &= (a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)m(t)m^T(t) + a_2(t)P(t))dt + \\ &P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}[dy(t) - A(t)m(t)dt], \\ m(t_0) &= E(x(t_0) | Y(t_0)), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} dP(t) &= (a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + \\ &2a_2(t)m(t)P(t) + 2P(t)m^T(t)a_2^T(t) + \\ &b(t)b^T(t))dt - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t)dt, \\ P(t_0) &= E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | Y(t_0)), \end{aligned} \quad (14)$$

since the third central moment μ_3 is equal to 0, and the third initial moment of $x(t)$ can be expressed using its second and first moments, i.e., $P(t)$ and $m(t)$. In this bilinear-linear case, the variance equation is also independent of the observations $y(t)$, but has the bilinear terms $m(t)P(t)$ in its right-hand side and depends on $m(t)$, thus making both the equations interconnected. The estimate equation is bilinear with respect to m , as expected.

3 Application

The obtained optimal filter for bilinear system states and linear observations is applied to solution of the terpolymerization process identification problem in the presence of direct linear observations. The mathematical model of terpolymerization process given by Ogunnaike [5] is reduced to ten equations for the concentrations of input reagents, the zeroth live moments of the product molecular weight distribution (MWD), and its first bulk moments. These equations are intrinsically nonlinear (bilinear), so their linearization leads to large deviations from the real system dynamics, as it could be seen from the simulation results. Of course, the assumption that the MWD moments can be measured in the real time is artificial, since this can be done only with large time delays, however, at this step, the objective is to verify the performance the obtained nonlinear filtering algorithm for a nonlinear system and compare it with other filtering algorithms based on the linearized model. Taking into account delays in some of the observation components would be the subject of subsequent papers.

Let us rewrite the bilinear state equations (9),(12) and the linear observation equations (10) in the component form using index summations

$$\begin{aligned} dx_k(t)/dt &= a_{0k}(t) + \sum_i a_{1ki}(t)x_i(t) + \\ &\sum_{ij} a_{2kij}(t)x_i(t)x_j(t) + \sum_i b_{ki}(t)\psi_{1i}(t), \quad k = 1, n, \end{aligned} \quad (15)$$

$$y_k(t) = \sum_i A_{ki}(t)x_i(t) + \sum_i B_{ki}(t)\psi_{2k}(t),$$

where $\psi_1(t)$ and $\psi_2(t)$ are white Gaussian noises. Then, the filtering equations (13),(14) can be rewritten in the component form as follows:

$$\begin{aligned} dm_k(t)/dt = & (a_{0k}(t) + \\ & \sum_i a_{1ki}(t)m_i(t) + \sum_{ij} a_{2kij}(t)m_i(t)m_j(t) + \\ & \sum_{ij} a_{2kij}(t)P_{ij}(t))dt + \sum_{ijtps} P_{kj}(t)A_{ji}^T(t)(B_{ip}(t)B_{ps}(t))^{-1}\{dy_s - \sum_r A_{sr}(t)m_r(t)dt\} \end{aligned} \quad (16)$$

with

$$m_k(t_0) = E[x_k(t_0) | Y(t_0)],$$

$$\begin{aligned} dP_{ij}(t) = & \sum_k a_{1ik}(t)P_{kj}(t) + \sum_j P_{kj}(t)a_{1jk}(t) + \\ & 2 \sum_{kl} a_{2ikl}(t)m_l(t)P_{kj} + 2 \sum_{kl} a_{2jkl}(t)m_l(t)P_{ki}(t) + \\ & \sum_k b_{ik}(t)b_{kj}(t) - \sum_{klpsr} P_{ik}(t)A_{kl}^T(t)(B_{ip}(t)B_{ps}(t))^{-1}A_{sr}(t)P_{rj}(t), \end{aligned} \quad (17)$$

with

$$P_{ij}(t_0) = E[(x_i(t_0) - m_i(t_0))(x_j(t_0) - m_j(t_0))^T | Y(t_0)].$$

The terpolymerization process model reduced to 10 bilinear equations selected from [5] is given by

$$dC_{m1}/dt = [(1/V)d\Delta_{m1}/dt - ((1/\theta) + K_{L1}C^* + K_{11}\mu_P^o + K_{21}\mu_Q^o + K_{31}\mu_R^o)C_{m1}; \quad (18)$$

$$dC_{m2}/dt = (1/V)d\Delta_{m2}/dt - ((1/\theta) + K_{L2}C^* + K_{12}\mu_P^o + K_{22}\mu_Q^o)C_{m2};$$

$$dC_{m3}/dt = (1/V)d\Delta_{m3}/dt - ((1/\theta) + K_{13}\mu_P^o)C_{m3};$$

$$dC_{m4}/dt = (1/V)d\Delta_{m4}/dt - ((1/\theta) + K_d + K_{L1}C_{m1} + K_{L2}C_{m2})C^*;$$

$$d\mu_P^o/dt = (-1/\theta - K_{t1})\mu_P^o + K_{L1}C_{m1}C^* - (K_{12}C_{m2} + K_{13}C_{m3})\mu_P^o +$$

$$K_{21}C_{m1}\mu_Q^o + K_{31}C_{m1}\mu_R^o;$$

$$d\mu_Q^o/dt = (-1/\theta)\mu_Q^o + K_{L2}C_{m2}C^* - (K_{21}C_{m1} + K_{t2})\mu_Q^o + K_{12}C_{m2}\mu_P^o;$$

$$d\mu_R^o/dt = (-1/\theta)\mu_R^o - (K_{31}C_{m1} + K_{t3})\mu_R^o + K_{13}C_{m3}\mu_P^o;$$

$$d\lambda_1^{100}/dt = (-1/\theta)\lambda_1^{100} + K_{L1}C_{m1}C^* + K_{L2}C_{m2}C^* + K_{11}C_{m1}\mu_P^o +$$

$$K_{21}C_{m1}\mu_Q^o + K_{31}C_{m1}\mu_R^o;$$

$$d\lambda_1^{010}/dt = (-1/\theta)\lambda_1^{010} + K_{L1}C_{m1}C^* + K_{L2}C_{m2}C^* +$$

$$K_{12}C_{m2}\mu_P^o + K_{22}C_{m2}\mu_Q^o;$$

$$d\lambda_1^{001}/dt = (-1/\theta)\lambda_1^{001} + (K_{L1}C_{m1} + K_{L2}C_{m2})C^* + K_{13}C_{m3}\mu_P^o;$$

Here, the state variables are: C_{m1} , C_{m2} , and C_{m3} are the reagent (monomer) concentrations, C^* is the active catalyst concentration; μ_P^0 , μ_Q^0 , and μ_R^0 are the zeroth live moments of the product MWD, and λ_1^{100} , λ_1^{010} , and λ_1^{001} are its first bulk moments. The reactor volume V and residence time θ , as well as all coefficients K 's, are known parameters, and Δ_{m1} , Δ_{m2} , Δ_{m3} , Δ_{m^*} stand for net molar flows of the reagents and active catalyst into the reactor.

The identification (filtering) problem is to find the optimal estimate for the unobservable states (18) assuming that the direct observations Y_i mixed with Gaussian noises ψ_2 's are provided for each of the ten state components x_i

$$y_i = x_i + \psi_{2i}.$$

Here, x_1 denotes C_{m1} , x_2 denotes C_{m2} , and so on up x_{10} . In this situation, the bilinear filtering equations (16) for the vector of the optimal estimates $m(t)$ take the form

$$dm_1(t)/dt = (1/V)d\Delta_{m1}/dt - ((1/\theta) + K_{L1}m_4(t) + K_{11}m_5(t) + \quad (19)$$

$$K_{21}m_6(t) + K_{31}m_7(t))m_1(t) - K_{L1}P_{14}(t) - K_{11}P_{15}(t) - \\ K_{21}P_{16}(t) - K_{31}P_{17}(t) + \sum_j P_{1j}[dy_j/dt - m_j]$$

$$dm_2(t)/dt = (1/V)d\Delta_{m2}/dt - ((1/\theta) + K_{L2}m_4(t) + K_{12}m_5(t) + \\ K_{22}m_6(t))m_2(t) - K_{L2}P_{24}(t) - K_{12}P_{25}(t) - K_{22}P_{26}(t) + \\ \sum_j P_{2j}[dy_j/dt - m_j]$$

$$dm_3(t)/dt = (1/V)d\Delta_{m3}/dt - ((1/\theta) + K_{13}m_5(t))m_3(t) - \\ K_{13}P_{35}(t) + \sum_j P_{3j}[dy_j/dt - m_j]$$

$$dm_4(t)/dt = (1/V)d\Delta_{m^*}/dt - ((1/\theta) + K_d + K_{L1}m_1(t) + \\ K_{12}m_2(t))m_4(t) - K_{L1}P_{14}(t) - K_{12}P_{24}(t) + \\ \sum_j P_{4j}[dy_j/dt - m_j]$$

$$dm_5(t)/dt = (-1/\theta - K_{t1})m_5(t) + K_{L1}m_4(t)m_1(t) - \\ K_{12}m_2(t)m_5(t) + K_{21}m_6(t)m_1(t) + \\ K_{31}m_7(t)m_1(t) - K_{13}m_5(t)m_3(t) + \\ K_{L1}P_{14}(t) + K_{21}P_{16}(t) + K_{31}P_{17}(t) - K_{12}P_{25}(t) - \\ K_{13}P_{35}(t) + \sum_j P_{5j}[dy_j/dt - m_j]$$

$$dm_6(t)/dt = (-1/\theta - K_{t2} - K_{21}m_1(t))m_6(t) + \\ K_{L2}m_4(t)m_2(t) + K_{12}m_5(t)m_2(t) \\ - K_{21}P_{16}(t) + K_{L2}P_{24}(t) + K_{12}P_{25}(t) + \\ \sum_j P_{6j}[dy_j/dt - m_j]$$

$$dm_7(t)/dt = (-1/\theta - K_{t3} - K_{31}m_1(t))m_7(t) + K_{13}m_5(t)m_3(t) - K_{31}P_{17}(t) + K_{13}P_{35}(t) + \sum_j P_{7j}[dy_j/dt - m_j]$$

$$dm_8(t)/dt = (-1/\theta)m_8(t) + (K_{L1}m_4(t) + K_{11}m_5(t) + K_{21}m_6(t) + K_{31}m_7(t))m_1(t) + K_{L2}m_4(t)m_2(t) + K_{L1}P_{14}(t) + K_{11}P_{15}(t) + K_{21}P_{16}(t) + K_{31}P_{17}(t) + K_{L2}P_{24}(t) + \sum_j P_{8j}[dy_j/dt - m_j]$$

$$dm_9(t)/dt = (-1/\theta)m_9(t) + K_{L1}m_4(t)m_1(t) + K_{L2}m_4(t)m_2(t) + K_{12}m_5(t)m_2(t) + K_{22}m_6(t)m_2(t) + K_{L1}P_{14}(t) + K_{L2}P_{24}(t)K_{12}P_{25}(t) + K_{22}P_{26}(t) + \sum_j P_{9j}[dy_j/dt - m_j];$$

$$dm_{10}(t)/dt = (-1/\theta)m_{10}(t) + K_{L1}m_4(t)m_1(t) + K_{L2}m_4(t)m_2(t) + K_{13}m_5(t)m_3(t) + K_{L1}P_{14}(t) + K_{L2}P_{24}(t) + K_{13}P_{35}(t) + \sum_j P_{10j}[dy_j/dt - m_j].$$

Here, $m_1(t)$ is the optimal estimate for C_{m1} , $m_2(t)$ for C_{m2} , and so on up to $m_{10}(t)$. The fifty-five variance component equations are similarly generated by the equations (17), however are not given here due to place shortage.

In the simulation process, the initial conditions at $t = 0$ are equal to zero for the state variables $C_{m1}, \dots, \lambda_1^{001}$, to 0.5 for the estimates $m_1(t), \dots, m_{10}(t)$, to 1 for the diagonal entries of the variance matrix, and to zero for its other entries. The system parameter values are all set to 1: $V = 1; d\Delta_{m1}/dt = 1; K_{L1} = 1; K_{11} = 1; K_{21} = 1; K_{31} = 1; K_{32} = 1; d\Delta_{m2}/dt = 1; d\Delta_{m3}/dt = 1; d\Delta_{m4}/dt = 1; K_{L2} = 1; K_{L3} = 1; K_{12} = 1; K_{13} = 1; K_{22} = 1; K_d = 1; K_{t1} = 1; K_{t2} = 1; K_{t3} = 1; \theta = 1$. The white Gaussian noises in the equations (19) are realized as sinusoidal signals: $\psi_i = \sin t$ for $i = 1, 10$.

In Figure 1, the obtained values of the state variables $C_{m1}, \dots, \lambda_1^{001}$ are given in the blue, and the values of the bilinear optimal filter estimates $m_1(t), \dots, m_{10}(t)$ are depicted in the red.

The performance of the optimal bilinear filter (16),(17) is compared to the performance of the optimal linear Kalman-Bucy filter available for the linearized system. This linear filter consists of only the linear terms and innovations processes in the equations (16) (or (19)) for the optimal estimates and the Riccati equations for the variance matrix components corresponding to the equations (17):

$$dm_k(t)/dt = (a_{0k}(t) + \sum_i a_{1ki}(t)m_i(t) + \sum_{j|ps} P_{kj}(t)A_{ji}^T(t)(B_{lp}B_{ps}))^{-1}(t)[dy_s - \sum_r A_{sr}(t)m_r(t)dt] \quad (20)$$

with

$$m_k(t_0) = E[x_k(t_0) | Y(t_0)];$$

$$dP_{ij}(t)/dt = \sum_k a_{1ik}(t)P_{kj}(t) + \sum_k P_{ki}(t)a_{1jk}(t) + \quad (21)$$

$$\sum_k b_{ik}(t)b_{kj}(t) - \sum_{klpsr} P_{ik}(t)A_{ki}^T(t)(B_{lp}B_{ps})^{-1}A_{sr}P_{rj}(t).$$

with

$$P_{ij}(t_0) = E[(x_i(t_0) - m_i(t_0))(x_j(t_0) - m_j(t_0))^T | Y(t_0)].$$

The graphs of the estimates obtained using this linear Kalman-Bucy filter are shown in Figure 1 in the green.

Finally, the performance of the optimal bilinear filter (16),(17) is compared to the performance of the mixed filter designed as follows. The estimate equations in this filter coincide with the equations (16) (or (19)) from the optimal bilinear filter, and the variance equations coincide with the equations (21) from the linear Kalman-Bucy filter. The graphs of the estimates obtained using this mixed filter are shown in Figure 1 in the black. The initial conditions and white Gaussian noise realizations remain the same for all the filters involved in the simulation.

Upon comparing all simulation results given in Figure 1, it can be concluded that the optimal bilinear filter gives the best estimate in comparison to two other filters. Although this conclusion follows from the developed theory, the numerical simulation serves as a convincing illustration.

4 References

- [1] Kalman, R.E., and Bucy, R.S., 1961, "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory," ASME Trans., Part D (J. of Basic Engineering), **83**, pp. 95-108.
- [2] Wonham, W.M., 1965, "Some Applications of Stochastic Differential Equations to Nonlinear Filtering," SIAM J. Control, **2**, pp. 347-369.
- [3] Benes, V.E., 1981, "Exact Finite-Dimensional Filters for Certain Diffusions with Nonlinear Drift," Stochastics, **5**, pp. 65-92.
- [4] Yau, S.S.-T., 1994, "Finite-Dimensional Filters with Nonlinear Drift I: A Class of Filters Including Both Kalman-Bucy and Benes Filters," J. Math. Systems, Estimation, and Control, **4**, pp. 181-203.
- [5] Ogunnaike, B.A., 1994, "On-line Modeling and Predictive Control of an Industrial Terpolymerization Reactor," Int. J. Control, **59(3)**, pp. 711-729.
- [6] Mitter, S.K., 1996, "Filtering and Stochastic Control: A Historical Perspective," IEEE Control Systems Magazine, **16(3)**, pp. 67-76.
- [7] Kushner, H.J., 1964, "On Differential Equations Satisfied by Conditional Probability Densities of Markov Processes," SIAM J. Control, **2**, pp. 106-119.
- [8] Pugachev, V.S., 1984, *Probability Theory and Mathematical Statistics for Engineers*, Pergamon, London.

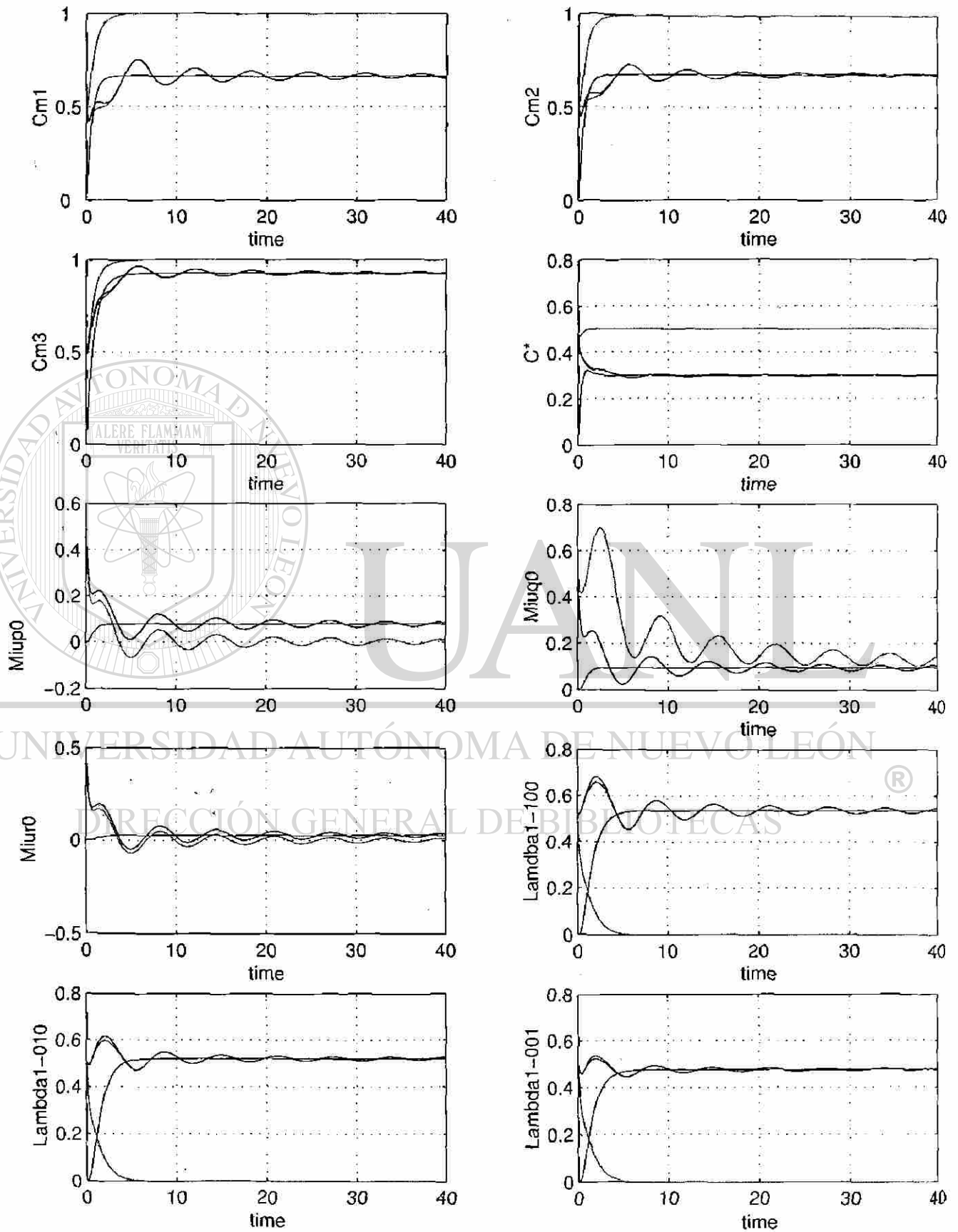


Figure 1: Graphs of the ten state variables (18) (blue), the estimates given by the optimal bilinear filter (16),(17) (red), the estimate given by the linear Kalman-Bucy filter (20),(21) (green), the estimates

Optimal Control for Third Degree Polynomial Systems *

Michael V. Basin and Ma. Aracelia Alcorta García[†]

Received 15 November 2001

Abstract

This paper presents the optimal regulator for a nonlinear system state given by a polynomial equation of degree 3 with linear control input and quadratic cost criterion. The optimal regulator equations are obtained using the duality principle, which is applied to the optimal filter for a polynomial system state of degree 3 over linear observations. The obtained results are applied to solution of the optimal control problem for a nonlinear automotive system. Simulation results are compared for the optimal polynomial regulator given in this paper and the linear optimal regulator.

1 Introduction

Although the optimal control (regulator) problem as well as the filtering one were solved in the 1960s [4, 3], the optimal control function for nonlinear systems has to be determined by using the general principles of maximum [7] or dynamic programming [2] which do not provide an explicit form for the optimal control in most cases. However, taking into account that the optimal control problem can be solved in the linear case by applying the duality principle to the solution of the optimal filtering problem, this paper exploits the same idea for designing the optimal control in a polynomial system with linear control input, using the optimal filter for polynomial system states over linear observations. Based on the obtained polynomial filter of the third degree [1], the optimal regulator for a polynomial system of degree 3 with linear control input and quadratic cost criterion is obtained in a closed form, finding the optimal regulator gain matrix as dual transpose to the optimal filter gain one and constructing the optimal regulator gain equation as dual to the variance equation in the optimal filter. The results obtained by virtue of the duality principle could be rigorously verified through the general equations of [7] or [2] applied to a specific polynomial case, although the physical duality seems obvious: if the optimal filter exists in a closed form, the optimal closed-form regulator should also exist, and vice versa. Finally, the obtained optimal control for a polynomial system of the third degree is applied to regulation

*Mathematics Subject Classifications: 49K15, 93E11.

[†]Department of Physical and Mathematical Sciences, Autonomous University of Nuevo Leon, Mexico

of a nonlinear automotive system [5] whose state equation for car orientation angle is nonlinear (contains tangent). To apply the polynomial regulator, the nonlinear equation is expanded into its Taylor polynomial up to degree 3. The optimal regulator equations for a polynomial state of third degree are written and then compared to the optimal linear regulator for the linearized system. Simulations are conducted for both polynomial and linear regulators applied to the original nonlinear system. The simulation results show significant advantage of the polynomial regulator in comparison to the linear one, five times in the values of the controlled variable and ten times in the criterion performance.

This relatively simple case treated in the paper seems to be important for practical applications, since a nonlinear state equation can usually be well approximated by a polynomial of degree 3 and the control input is, as a rule, linear. Moreover, the optimal control problem for a polynomial state equation of lower degree is significant itself, because many, for example, chemical processes are described by quadratic equations (see [6]). The quadratic state equation is, of course, a particular case of the third degree one, as well the cubic state equation is a particular case of that of fourth degree, etc.

The paper is organized as follows. Section 2 states the optimal control problem for a polynomial system of degree 3 and the duality principle for a closed-form situation. For reference purposes, the optimal filtering equations for a polynomial state equation of degree 3 and linear observations are briefly recalled in Section 3. The optimal control problem for a polynomial system state of degree 3 is solved in Section 4. Section 5 presents application of the optimal polynomial regulator to a nonlinear automotive system with two state variables, orientation and steering angles, with the objective to increase the value of the orientation angle and consume the minimum control energy. Graphic simulation results are conducted for polynomial control of degree 3 and compared with those for linear control.

2 Optimal Control Problem

Consider the polynomial system

$$\dot{x}(t) = (a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t))dt + G(t)u(t)dt, \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

where $x(t) \in R^n$ is the system state, $x^2(t) = (x_1^2(t), \dots, x_n^2(t))$, $x^3(t) = (x_1^3(t), \dots, x_n^3(t))$, and $u(t)$ is the control variable. The quadratic cost function to be minimized is defined as follows:

$$J = \frac{1}{2}[x(T) - x_1]^T \psi [x(T) - x_1] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (u^T(s)R(s)u(s) + x^T(s)L(s)x(s)) ds, \quad (2)$$

where x_1 is a given vector, ψ , R , L are positive (nonnegative) definite symmetric matrices, and $T > t_0$ is a certain time moment. We remark that the transpose of a vector x is also denoted by x^T , which, however, should not cause any confusion.

The optimal control problem is to find the control $u(t)$, $t \in [t_0, T]$, that minimizes the criterion J along with the trajectory $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, generated upon substituting $u^*(t)$ into the state equation (1). To find the solution to this optimal control problem,

the duality principle [4] could be used. For linear systems, if the optimal control exists in the optimal control problem for a linear system with the quadratic cost function J , the optimal filter exists for the dual linear system with Gaussian disturbances and can be found from the optimal control problem solution, using simple algebraic transformations (duality between the gain matrices and between the gain matrix and variance equations), and vice versa. Taking into account the physical duality of the filtering and control problems, the last conjecture should be valid for all cases where the optimal control (or, vice versa, the optimal filter) exists in a closed finite-dimensional form. This proposition is now applied to a third order polynomial system, for which the optimal filter has already been obtained (see [1]).

3 Optimal Filter

In this section, the optimal filtering equations for a polynomial state equation of degree 3 over linear observations (obtained in [1]) are briefly recalled for reference purposes. Let an unobservable random process $x(t)$ satisfy a polynomial equation of third degree

$$dx(t) = (a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t))dt + b(t)dW_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (3)$$

and linear observations are given by:

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t))dt + B(t)dW_2(t),$$

where $x \in R^n$, $x^2(t) = (x_1^2(t), \dots, x_n^2(t))$, $x^3(t) = (x_1^3(t), \dots, x_n^3(t))$. $W_1(t)$ and $W_2(t)$ are Wiener processes, whose weak derivatives are Gaussian white noises and which are assumed independent of each other and of the Gaussian initial value x_0 .

The filtering problem is to find dynamical equations for the best estimate for the real process $x(t)$ at time t , based on the observations $Y(t) = [y(s) \mid t_0 \leq s \leq t]$, that is the conditional expectation $m(t) = E[x(t) \mid Y(t)]$ of the real process $x(t)$ with respect to the observations $Y(t)$. Let $P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T \mid Y(t)]$ be the estimate covariance (correlation function).

The following notations are used. Let $m(t) = (m_1(t), \dots, m_n(t)) \in R^n$ be the best estimate vector; $P(t) \in R^{n \times n}$ be the covariance matrix; $p(t) \in R^n$ be the vector whose components are the variances of the components of $x(t)$, i.e., the diagonal elements of $P(t)$; $m^2(t) = (m_1^2(t), \dots, m_n^2(t))$; $m^3(t) = (m_1^3(t), \dots, m_n^3(t))$; $P(t)m(t)$ be the conventional product of a matrix $P(t)$ by a vector $m(t)$; and $p(t) * m(t)$ be the product of two vectors defined componentwise: $p(t) * m(t) = [p_1(t)m_1(t), \dots, p_n(t)m_n(t)]$.

The solution to the stated problem is given by the following system of filtering equations, which is closed with respect to the introduced variables, $m(t)$ and $P(t)$:

$$\begin{aligned} dm(t) &= (a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)p(t) + a_2(t)m^2(t) + a_3(t)(3p(t) * m(t) + m^3(t)))dt \\ &\quad + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}(dy - (A_0(t) + A(t)m(t))dt), \end{aligned} \quad (4)$$

$$m(t_0) = E[x(t_0)/y(t_0)].$$

$$\begin{aligned}
dF(t) = & (a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2a_2(t)m(t) * P(t) \\
& + 2(P(t) * m^T(t))a_2^T(t) + 3a_3(t)(p(t) * P(t)) + 3(p(t) * P(t))^T a_3^T(t) \\
& + 3a_3(t)(m^2(t) * P(t)) + 3(P(t) * (m^2(t))^T) a_3^T(t) + b(t)b^T(t) \\
& - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t))dt, \tag{5}
\end{aligned}$$

$$P(t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T / y(t_0)),$$

where the product $m(t) * P(t)$ between a vector $m(t)$ and a matrix $P(t)$ is defined as the matrix whose rows are equal to rows of $P(t)$ multiplied by the same corresponding element of $m(t)$:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} m_1(t) & P_{11}(t) & P_{12}(t) & \cdots & P_{1n}(t) \\ m_2(t) & P_{21}(t) & P_{22}(t) & \cdots & P_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n(t) & P_{n1}(t) & P_{n2}(t) & \cdots & P_{nn}(t) \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} m_1(t)P_{11}(t) & m_1(t)P_{12}(t) & \cdots & m_1(t)P_{1n}(t) \\ m_2(t)P_{21}(t) & m_2(t)P_{22}(t) & \cdots & m_2(t)P_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n(t)P_{n1}(t) & m_n(t)P_{n2}(t) & \cdots & m_n(t)P_{nn}(t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

The transposed matrix $P(t) * m^T(t) = (m(t) * P(t))^T$ is defined as the matrix whose columns are equal to columns of $P(t)$ multiplied by the same corresponding element of $m(t)$:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} m_1(t) & m_2(t) & \cdots & m_n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) & \cdots & P_{1n}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) & \cdots & P_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}(t) & P_{n2}(t) & \cdots & P_{nn}(t) \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} m_1(t)P_{11}(t) & m_2(t)P_{12}(t) & \cdots & m_n(t)P_{1n}(t) \\ m_1(t)P_{21}(t) & m_2(t)P_{22}(t) & \cdots & m_n(t)P_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1(t)P_{n1}(t) & m_2(t)P_{n2}(t) & \cdots & m_n(t)P_{nn}(t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Thus, the equation (4) for the optimal estimate $m(t)$ and the equation (5) for its covariance matrix $P(t)$ form a closed system of filtering equations in the case of a polynomial state equation of degree 3 and linear observations.

4 Optimal Solution

Let us return to the optimal control problem for the polynomial state (1) with linear control input and the cost function (2). This problem is dual to the filtering problem for the polynomial state (3) of degree 3 and linear observations. Since the optimal polynomial filter gain matrix in (4) is equal to

$$K_f = P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1},$$

the gain matrix in the optimal control problem takes the form of its dual transpose

$$K_c = (R(t))^{-1}G^T(t)Q(t),$$

and the optimal control law is given by

$$u^*(t) = K_c x = (R(t))^{-1}G^T(t)Q(t)x(t), \quad (6)$$

where the matrix function $Q(t)$ is the solution of the following equation dual to the variance equation (5)

$$\begin{aligned} dQ(t) = & (-a_1^T(t)Q(t) - Q(t)a_1(t) - 2a_2^T(t)Q(t) * x^T(t) - 2x(t) * Q(t)a_2(t) \\ & - 3a_3^T(t)Q(t) * q^T(t) - 3q(t) * Q(t)a_3(t) - 3a_3^T(t)Q(t) * ((x^2(t))^T) \\ & - 3(x^2(t) * Q(t))a_3(t) + L(t) - Q(t)G(t)R^{-1}(t)G^T(t)Q(t))dt, \end{aligned} \quad (7)$$

with the terminal condition $Q(T) = \psi$. The binary operation $*$ has been introduced in Section 3, and $q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$ denotes the vector consisting of the diagonal elements of $Q(t)$.

Upon substituting the optimal control (6) into the state equation (1), the optimally controlled state equation is obtained

$$\begin{aligned} dx(t) &= (a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t))dt \\ &\quad + G(t)(R(t))^{-1}G^T(t)Q(t)x(t)dt, \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

Note that if the real state vector $x(t)$ is unknown (unobservable), the optimal controller uniting the obtained optimal filter and regulator equations, can be constructed using the separation principle [4] for polynomial systems, which should also be valid if solutions of the optimal filtering and control problems exist in a closed finite-dimensional form.

The results obtained in this section by virtue of the duality principle could be rigorously verified through the general equations of the Pontryagin maximum principle [7] or Bellman dynamic programming [2].

5 Application to Automotive System

This section presents application of the obtained optimal regulator for a polynomial system of degree 3 with linear control input and quadratic criterion to controlling the state variables, orientation and steering angles, in the nonlinear kinematical model of car movement [5] given by the following nonlinear equations

$$\begin{aligned} dx(t) &= v \cos(\phi(t))dt \\ dy(t) &= v \sin(\phi(t))dt \\ d\phi(t) &= (v/l) \tan(\delta(t))dt \\ d\delta(t) &= u(t)dt \end{aligned} \quad (8)$$

Here, $x(t)$ and $y(t)$ are Cartesian coordinates of the mass center of the car, $\phi(t)$ is the orientation angle, v is the velocity, l is the longitude between the two axes of the car, $\delta(t)$ is the steering wheel angle, and $u(t)$ is the control variable (steering angular velocity).

The optimal control problem is to maximize the orientation angle ϕ using the minimum energy of control u . The examined values of the velocity and longitude are $v = 17$, $l = 2$, and the motion time is $T = 0.1$, which correspond to the idle engine mode of a full-size car in the time interval of 6 seconds. The initial conditions for the angles are $\phi(0) = 0.1$ and $\delta(0) = 0.1$. In other words, the problem is to make the maximum turn of the running wheels from their initial position, using the minimum steering energy.

The corresponding criterion J to be minimized takes the form

$$J = \frac{1}{2}[\phi(T) - \phi^*]^2 + \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t) dt \quad (9)$$

where $T = 0.1$, and $\phi^* = 1$ is a large value of $\phi(t)$ a priori unreachable for time T . To apply the obtained optimal control algorithms to the nonlinear system (8), let us make the Taylor expansion of the two last equations in (8) at the origin up to degree 3 (the fourth degree does not appear in the Taylor series for tangent)

$$\begin{aligned} d\phi(t) &= \left(\frac{v}{l}\right) \delta(t) dt + \left(\frac{v}{l}\right) \left(\frac{\delta^3(t)}{3}\right) dt \\ d\delta(t) &= u(t) dt \end{aligned} \quad (10)$$

Now, since $R = 1$ and $G^T = [0, 1]$ in (9), the optimal control law (6) takes the form $u^*(t) = q_{21}(t)\phi(t) + q_{22}(t)\delta(t)$, where the elements $q_{11}(t)$, $q_{21}(t)$, $q_{22}(t)$ of the symmetric matrix $Q(t)$ satisfy the equations

$$\begin{aligned} dq_{11}(t) &= -q_{21}^2(t) \\ dq_{12}(t) &= -\frac{3v}{l} q_{11}^2(t) - q_{12}(t)q_{22}(t) - \frac{v}{l} q_{11}(t) - \frac{3v}{l} \phi^2 q_{11}(t) \\ dq_{22}(t) &= -\frac{2v}{l} q_{12}(t) - \frac{6v}{l} q_{12}(t)q_{22}(t) - \frac{6v}{l} \delta^2 q_{12}(t) - q_{22}^2(t) \end{aligned} \quad (11)$$

The system composed of the two last equations of (8) and the equations (10) should be solved with initial conditions $\phi(0) = 0.1$, $\delta(0) = 0.1$ and terminal conditions $q_{11}(T) = 1$, $q_{12}(T) = 0$, $q_{22}(T) = 0$. This boundary problem is solved numerically using the iterative method of direct and reverse passing as follows. The first initial conditions for q 's are guessed, and the system is solved in direct time with the initial conditions at $t = 0$, thus obtaining certain values for ϕ and δ at the terminal point $T = 0.1$. Then, the system is solved in reverse time, taking the obtained terminal values for ϕ and δ in direct time as the initial values in reverse time, thus obtaining certain values for q 's at the initial point $t = 0$, which are taken as the initial values for the passing in direct time, and so on. The given initial conditions $\phi(0) = 0.1$, $\delta(0) = 0.1$ are kept fixed for any direct passing, and the given terminal conditions $q_{11}(T) = 1$, $q_{12}(T) = 0$, $q_{22}(T) = 0$ are used as the fixed initial conditions for any reverse passing. The algorithm stops when the system arrives at values $q_{11}(T) = 1$, $q_{12}(T) = 0$, $q_{22}(T) = 0$ after direct passing and at values $\phi(0) = 0.1$, $\delta(0) = 0.1$ after reverse passing. The initial conditions for q 's in the final direct iteration are $q_{11}(0) = 1.32$, $q_{12}(0) = 16$, $q_{22}(0) = 1640$. The obtained simulation graphs for ϕ and

the criterion J are given in Fig. 2. These results for polynomial regulator of degree 3 are then compared to the results obtained using the optimal linear regulator, whose matrix $Q(t)$ elements satisfy the Riccati equations

$$\begin{aligned} dq_{11}(t) &= -q_{12}^2(t) \\ dq_{12}(t) &= -q_{12}q_{22} - \frac{u}{l}q_{11} \\ dq_{22}(t) &= -\frac{2u}{l}q_{12} - q_{22}^2 \end{aligned} \quad (12)$$

with terminal conditions $q_{11}(T) = 1, q_{12}(T) = 0, q_{22}(T) = 0$. Note that in the linear case the only reverse passing for q 's is necessary, because the system (12) does not depend on ϕ and δ , and the initial values for q 's at $t = 0$ are obtained after single reverse passing. The initial conditions for q 's in the direct iteration are $q_{11}(0) = 1.025, q_{12}(0) = 0.87, q_{22}(0) = 0.74$. The simulation graphs for the linear case are given in Figure 1, which consists of the graph of the variable ϕ satisfying the original system (8) and controlled using the optimal linear regulator defined by (12) and the graph of the corresponding values of the criterion J .

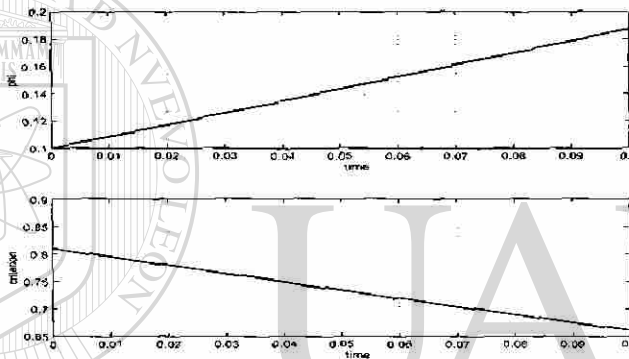


Figure 1.

In Figure 2, we show the graph of the variable ϕ satisfying the original system (8) and controlled using the optimal third order polynomial regulator defined by (11) and the graph of the corresponding values of the criterion J .

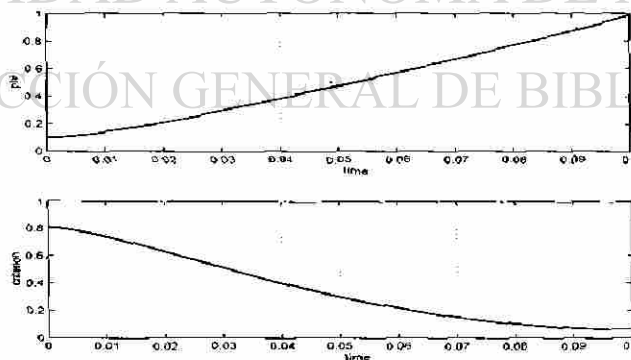


Figure 2.

The obtained values of the controlled variable ϕ and the criterion J are compared for the optimal third order polynomial and linear regulators at the terminal time $T = 0.1$ in the following table (corresponding to Figs. 1 and 2).

Linear regulator	Third degree polynomial regulator
$\phi(0.1) = 0.1875$	$\phi(0.1) = 0.989$
$J = 0.661$	$J = 0.065$

Graphs of control functions $u^*(t)$ corresponding to the optimal linear regulator and the optimal third order polynomial regulator are given in Figs. 3 and 4, respectively.

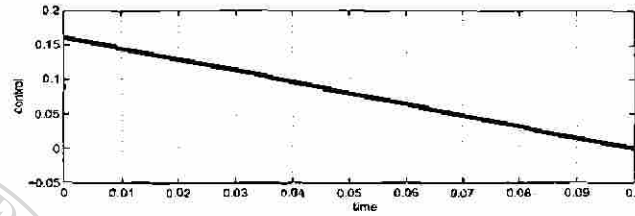


Figure 3.

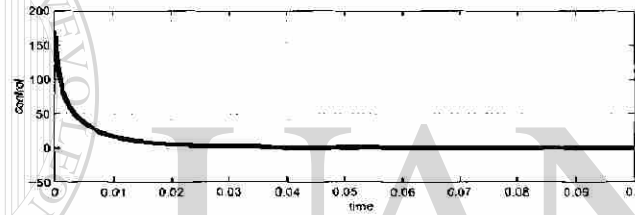


Figure 4.

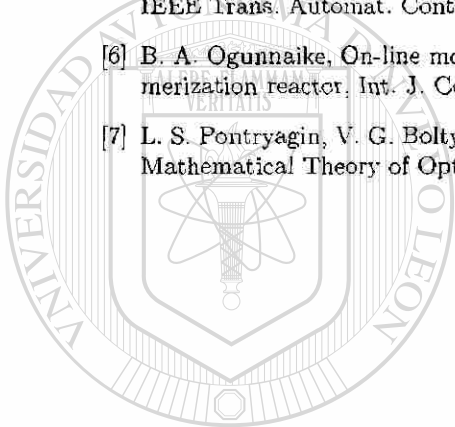
6 Conclusions

The simulation results show that the values of the controlled variable ϕ at the terminal point $T = 0.1$ are five times greater for the third order regulator than for the linear one and the criterion value at the terminal point is ten times less for the third order regulator. Thus, the third order polynomial regulator controls the system variables significantly better than the linear one from both points of view. The obtained results show that the best gain matrix based on the linearized model could still be too far from achieving the optimal performance. The considered example validates design and implementation of the regulators based on polynomial approximations of nonlinear systems.

Finally note that the better performance of the cost function and controlled variable has been achieved without changing the system dynamics (in both simulation cases, the designed control algorithms are applied to the original nonlinear system (8)), but by assigning a better regulator gain matrix ($Q(t)$ satisfies (11) instead of (12)). Thus, the principal result in the considered application consists in designing a better regulator and not in using more accurate system dynamics, as it could seem after the first glance.

References

- [1] M. V. Basin and M. A. Alcorta Garcia, Optimal polynomial filter of degrees 3 and 4 and its application to an automotive system, in Proc. 2001 IEEE International Conference on Control Applications (Mexico City, September 5-7, 2001), (2001), 872-877.
- [2] R. Bellman, Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, 1957.
- [3] W. H. Fleming and R.W. Rishel, Deterministic and Stochastic Optimal Control, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [4] H. Kwakernaak and R. Sivan, Linear Optimal Control Systems, Wiley-Interscience, New York, 1972.
- [5] R. Murray and S. Sastry, Nonholonomic motion planning: steering using sinusoids, IEEE Trans. Automat. Control, 38 (1993) (5), 700-716.
- [6] B. A. Ogunnaike, On-line modeling and predictive control of an industrial terpolymerization reactor, Int. J. Control, 59 (1994) (3), 711-729.
- [7] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze and E. F. Mishchenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes, Interscience, New York, 1962.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



CDC03-

OPTIMAL CONTROLLER FOR THIRD DEGREE POLYNOMIAL SYSTEM

MICHAEL BASIN ARACELIA ALCORTA-GARCIA

Autonomous University of Nuevo Leon, Mexico
mbasin@cfm.uanl.mx aracelia_alcorta@hotmail.com

Abstract. This paper presents the solution to the optimal controller problem for a stochastic system given by a polynomial equation of third degree, linear observations confused with white Gaussian noises, and a quadratic cost function. The obtained controller equations are applied to solution of the state controlling problem for a nonlinear automotive system. Simulation results are compared for the optimal polynomial controller given in this paper and the best linear controller available for the linearized system.

1 Introduction

Although the optimal controller problem for linear system states was solved in 1960s, based on the solutions to the optimal filtering [3] and regulator [4, 2] problems, solution to the optimal controller problem for nonlinear (in particular, polynomial) systems has been impossible due to the absence of the solution to the corresponding filtering and control problems for nonlinear systems. This paper presents solution to the optimal controller problem for unobservable third degree polynomial system states over linear observations and quadratic criterion. Due to the separation principle for polynomial systems with linear observations and quadratic criterion, which is stated and substantiated in the paper analogously to that for linear ones (see [4]), the original controller problem is split into the optimal filtering problem for third degree polynomial system states over linear observations and the optimal control (regulator) problem for observable third degree polynomial system states with quadratic criterion. (The statements and solutions of both those problems can be found in [1]).

The relatively simple case of third degree polynomial systems considered in this paper seems to be important for practical applications, since a nonlinear state equation can usually be well approximated by a polynomial of degree 3, the observations are frequently direct, that is linear, and the cost function in the controlling problems, where the desired value of the controlled variable should be maintained or maximized using the minimum control energy, is intrinsically quadratic. Moreover, the controlling problem

for a polynomial state equation of lower degree is significant itself, because many, for example, chemical processes are described by quadratic equations (see [7]).

The obtained optimal controller for a polynomial state equation of degree 3 is applied to solution of the state controlling problem for a nonlinear automotive system [6] whose state equation for car orientation angle is nonlinear (contains tangent), with the objective of increasing values of the state variables and consuming the minimum control energy. To apply the developed polynomial technique, the original state equation is expanded as a Taylor polynomial, up to degree 3. The optimal controller equations for a polynomial state of third degree are written and then compared to the best linear controller available for the linearized system. Numerical simulations are conducted for the optimal polynomial controller and also compared to those for the linear one applied to the linearized system. The simulation results given in the paper show a significant, more than one and half times, advantage of the optimal polynomial controller performance in comparison to the linear one.

The paper is organized as follows. In Section 2, the optimal controller problem is stated and solved for unobservable third degree polynomial system states, using the separation principle for polynomial systems with linear observations and quadratic criterion. Section 3 presents application of the obtained results to the controlling problem for a nonlinear automotive system with two state variables, orientation and steering angles, over direct linear observations confused with white Gaussian noises, with the objective of increasing values of the state variables and consuming the minimum control energy. Graphic simulation results are obtained and compared to those for the best linear controller available for the linearized system.

2 Optimal Controller Problem

2.1 Problem statement

Let (Ω, F, P) be a complete probability space with an increasing right-continuous family of σ -algebras $F_t, t \geq 0$, and let $(W_1(t), F_t, t \geq 0)$ and $(W_2(t), F_t, t \geq 0)$ be F_t -adapted Wiener processes. Let us consider the unobservable F_t -measurable random process $x(t)$ governed by the third degree polynomial state equation

$$\begin{aligned} dx(t) &= (a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t))dt + G(t)u(t)dt + b(t)dW_1(t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \quad (1)$$

and the linear output (observation) process

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t))dt + B(t)dW_2(t). \quad (2)$$

Here, $x(t) \in R^n$ is the unobservable state vector, whose second and third degrees are defined in the componentwise sense $x^2(t) = (x_1^2(t), x_2^2(t), x_3^2(t), \dots, x_n^2(t))$, $x^3(t) = (x_1^3(t), x_2^3(t), x_3^3(t), \dots, x_n^3(t))$, $u(t) \in R^p$ is the control variable, $y(t) \in R^m$ is the observation process, and the independent Wiener processes $W_1(t)$ and $W_2(t)$ represent random disturbances in state and observation equations, which are also independent of an initial Gaussian vector x_0 . Let $A(t)$ be a nonzero matrix and $B(t)B^T(t)$ be a positive definite matrix. In addition, the quadratic cost function J to be minimized is defined as follows

$$J = E\left[\frac{1}{2} [x(T) - z_0]^T \Phi [x(T) - z_0] + \right. \quad (3)$$

$$\left. \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(s)K(s)u(s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T x^T(s)L(s)x(s)ds\right],$$

where z_0 is a given vector, K is positive definite and Φ, L are nonnegative definite symmetric matrices, $T > t_0$ is a certain time moment, the symbol $E[f(x)]$ means the expectation (mean) of a function f of a random variable x , and a^T denotes transpose to a vector (matrix) a .

The optimal control problem is to find the control $u^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, that minimizes the criterion J along with the trajectory $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, generated upon substituting $u^*(t)$ into the state equation (1).

2.2 Separation principle for polynomial systems

As well as for a linear stochastic system, the separation principle remains valid for a stochastic system given by a third order polynomial equation, linear observations, and a quadratic criterion. Indeed, let us replace the unobservable system state $x(t)$ by its optimal estimate $m(t)$ given by the equation (see [1] for statement and derivation)

$$dm(t) = (a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)p(t) + a_2(t)m^2(t) + \quad (4)$$

$$a_3(t)(3p(t) * m(t) + m^3(t))dt + G(t)u(t) +$$

$$P^T(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}(dy - (A_0(t) + A(t)m(t))dt),$$

with the initial condition $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$. Here, $m(t)$ is the best estimate for the unobservable process $x(t)$ at time t based on the observation process $Y(t) = \{y(s), t_0 \leq s \leq t\}$, that is the conditional expectation $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$, $m(t) = (m_1(t), m_2(t), \dots, m_n(t))$; $P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | Y(t)] \in \mathbb{R}^n$ is the error covariance matrix; $p(t) \in \mathbb{R}^n$ is the vector whose components are the variances of the components of $x(t) - m(t)$, i.e., the diagonal elements of $P(t)$; $m^2(t)$ and $m^3(t)$ are defined as the vectors of squares and cubes of the components of $m(t)$: $m^2(t) = (m_1^2(t), m_2^2(t), \dots, m_n^2(t))$, $m^3(t) = (m_1^3(t), m_2^3(t), \dots, m_n^3(t))$; $P(t)m(t)$ is the

conventional product of a matrix $P(t)$ by a vector $m(t)$; and $p(t) * m(t)$ is the product of two vectors by components: $p(t) * m(t) = [p_1(t)m_1(t), p_2(t)m_2(t), \dots, p_n(t)m_n(t)]$. The best estimate $m(t)$ minimizes the criterion

$$H = E[(x(t) - m(t))^T (x(t) - m(t))], \quad (5)$$

with respect to selection of the estimate m as a function of observations $y(t)$, at every time moment t ([5]).

The complementary equation for the covariance matrix $P(t)$ takes the form (see [1] for derivation)

$$\begin{aligned} dP(t) = & (a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2a_2(t)m(t) * P(t) + \\ & 2(P(t) * m^T(t))a_2^T(t) + 3a_3(t)(p(t) * P(t)) + \\ & 3(p(t) * P(t))^T a_3^T(t) + 3a_3(t)(m^2(t) * P(t)) + \\ & 3(P(t) * (m^2(t))^T) a_3^T(t) + (b(t)b^T(t)) - \\ & P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t)dt, \end{aligned} \quad (6)$$

with the initial condition $P(t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | y(t_0))$, where the product $m(t) * P(t)$ between a vector $m(t)$ and a matrix $P(t)$ is defined as the matrix whose rows are equal to rows of $P(t)$ multiplied by the same corresponding element of $m(t)$:

$$\begin{bmatrix} m_1(t) & P_{11}(t) & P_{12}(t) & \dots & P_{1n}(t) \\ m_2(t) & P_{21}(t) & P_{22}(t) & \dots & P_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n(t) & P_{n1}(t) & P_{n2}(t) & \dots & P_{nn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1(t)P_{11}(t) & m_1(t)P_{12}(t) & \dots & m_1(t)P_{1n}(t) \\ m_2(t)P_{21}(t) & m_2(t)P_{22}(t) & \dots & m_2(t)P_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n(t)P_{n1}(t) & m_n(t)P_{n2}(t) & \dots & m_n(t)P_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

It is readily verified (see [4]) that the optimal control problem for the system state (1) and cost function (3) is equivalent to the optimal control problem for the estimate (4) and the cost function J represented as

$$\begin{aligned} J = & E\left\{\frac{1}{2}[m(T) - z_0]^T \Phi [m(T) - z_0] + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(s)K(s)u(s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T m^T(s)L(s)m(s)ds \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \text{tr}[P(s)L(s)]ds + \text{tr}[P(T)\Phi]\right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

where $\text{tr}[A]$ denotes trace of a matrix A . Since the latter part of J is independent of control $u(t)$ or state $x(t)$, the reduced effective cost function M to be minimized takes the form

$$M = E\left\{\frac{1}{2}[m(T) - z_0]^T \Phi [m(T) - z_0] + \right. \quad (8)$$

$$\left. \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(s)K(s)u(s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T m^T(s)L(s)m(s)ds\right\}.$$

Thus, the solution for the optimal control problem specified by (1),(3) can be found solving the optimal control problem given by (4),(8). However, the minimal value of the criterion J should be determined using (7). This conclusion presents the separation principle in third order polynomial systems.

2.3 Optimal control problem solution

Based on the solution of the optimal control problem obtained in [1] in the case of an observable system state governed by a third order polynomial equation, the following results are valid for the optimal control problem (4),(8), where the system state (the estimate $m(t)$) is completely available and, therefore, observable.

The optimal control law is given by

$$u^*(t) = K^{-1}(t)G^T(t)Q(t)m(t), \quad (9)$$

where the matrix function is the solution of the following equation dual to the variance equation

$$dQ(t) = (-a_1^T(t)Q(t) - Q(t)a_1^T(t) - 2a_2^T(t)Q(t) * m^T(t) - \quad (10)$$

$$2m(t) * Q(t)a_2(t) - 3a_3^T(t)Q(t) * q^T(t) -$$

$$3q(t) * Q(t)a_3(t) - 3a_3^T(t)Q(t) * ((m^2)^T(t)) -$$

$$3(m^2(t) * Q(t)a_3(t) + L(t) - Q(t)G(t)K^{-1}(t)G^T(t)Q(t))dt,$$

with the terminal condition $Q(T) = \Phi$. The binary operation $*$ has been introduced in Subsection 2.2, and $q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$ denotes the vector consisting of the diagonal elements of $Q(t)$. In the process of derivation of the equation (10), it has been taken into account that the last term in the equation (4), $P^T(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}(dy - (A_0(t) + A(t)m(t))dt)$, is a Gaussian white noise.

Upon substituting the optimal control (9) into the equation (4) for the reconstructed system state $m(t)$, the following optimally controlled state estimate equation is obtained

$$dm(t) = (a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)p(t) + a_2(t)m^2(t) + \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & a_3(t)(3p(t) * m(t) + m^3(t))dt + G(t)(K(t))^{-1}G^T(t)Q(t)m(t)dt + \\ & P^T(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}(dy - (A_0(t) + A(t)m(t))dt), \\ & m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^y). \end{aligned}$$

Thus, the optimally controlled state estimate equation (11), the gain matrix constituent equation (10), the optimal control law (9), and the variance equation (6) give the complete solution to the optimal controller problem for unobservable states of third degree polynomial systems.

3 Application of optimal polynomial controller to automotive system

This section presents application of the obtained controller for a polynomial state of degree 3 over linear observations and a quadratic cost function to controlling the unobservable state variables, orientation and steering angles, in a nonlinear kinematical model of car movement [6] satisfying the following equations:

$$dx(t) = v \cos \phi(t) dt, \quad (12)$$

$$dy(t) = v \sin \phi(t) dt.$$

$$d\phi(t) = (v/l) \tan \delta(t) dt,$$

$$d\delta(t) = u(t) dt.$$

Here, $x(t)$ and $y(t)$ are Cartesian coordinates of the mass center of the car, $\phi(t)$ is the orientation angle, v is the velocity, l is the longitude between the two axes of the car, $\delta(t)$ is the steering wheel angle, and $u(t)$ is the control variable (steering angular velocity). The zero initial conditions for all variables are assumed.

The observation process for the unobservable variables $\phi(t)$ and $\delta(t)$ is given by direct linear observations confused with independent and identically distributed disturbances modelled as white Gaussian noises. The corresponding observations equations are

$$dz_\phi(t) = \phi(t) dt + w_1(t) dt, \quad (13)$$

$$dz_\delta(t) = \delta(t) dt + w_2(t) dt,$$

where $z_\phi(t)$ is the observation variable for $\phi(t)$, $z_\delta(t)$ is the observation variable for $\delta(t)$, and $w_1(t)$ and $w_2(t)$ are white Gaussian noises independent of each other.

The examined values of the velocity and longitude are $v = 17$, $l = 2$, which correspond to the idle engine mode of a full-size car. In other words, the problem is to make the maximum turn of the running wheels from their initial position, using the minimum steering energy. For the reasons of economizing

the fuel and reducing air pollution, the weight of the control term in the criterion is assigned ten times more than the weight of the state terminal term. The corresponding criterion J to be minimized takes the form

$$J = [\phi(t) - \phi^*]^2 + 10 \int_0^T u^2(t) dt, \quad (14)$$

where $T = 0.3$, and $\phi^* = 10$ is a large value of $\phi(t)$ unreachable for time T .

To apply the obtained optimal controller algorithms to the nonlinear system (12), linear observations (13), and the quadratic criterion (14), let us make the Taylor expansion of the two last equations in (12) at the origin up to degree 3 (the fourth degree does not appear in the Taylor series for tangent)

$$\begin{aligned} d\phi(t) &= \left(\frac{v}{l}\right)\delta(t) + \left(\frac{v}{l}\right)\left(\frac{\delta^3(t)}{3}\right)dt, \\ d\delta(t) &= u(t)dt. \end{aligned} \quad (15)$$

The solution to the stated optimal controller problem is given as follows. Since $K = 1$ and $G^T = [0, 1]$ in (14) and (15), the optimal control $u^*(t) = (K(t))^{-1}G^T(t)Q(t)m(t)$ takes the form

$$u^*(t) = q_{21}(t)m_\phi(t) + q_{22}(t)m_\delta(t), \quad (16)$$

and the following optimal controller equations (9)-(11) and (6) for the third degree polynomial state (15) over the linear observations (13) and the quadratic criterion (14) are obtained

$$dm_\phi = \left(\left(\frac{v}{l}\right)m_\delta + \left(\frac{v}{3l}\right)(3p_\delta + m_\delta^3) + p_{\phi\phi}(z_\phi - m_\phi) + p_{\phi\delta}(z_\delta - m_\delta)\right)dt, \quad (17)$$

$$dm_\delta = (u^*(t) + p_{\delta\phi}(z_\phi - m_\phi) + p_{\delta\delta}(z_\delta - m_\delta))dt,$$

$$dp_{\phi\phi} = \left((2v/l)p_{\phi\phi}p_{\delta\delta} + \frac{2v}{l}p_{\delta\phi} + \frac{2v}{l}m_\delta^2p_{\delta\phi} - p_{\phi\phi}^2 - p_{\phi\delta}^2\right)dt,$$

$$dp_{\phi\delta} = \left(\frac{v}{l}p_{\phi\delta} + \frac{v}{l}m_\delta^2p_{\delta\delta} - p_{\phi\phi}p_{\phi\delta} - p_{\phi\delta}p_{\delta\delta}\right)dt,$$

$$dp_{\delta\delta} = (-p_{\delta\phi}^2 - p_{\delta\delta}^2)dt,$$

$$dq_{11}(t) = (-q_{21}^2(t))dt,$$

$$dq_{12}(t) = \left(-\frac{v}{l}q_{11}^2 - q_{12}q_{22} - \frac{v}{l}q_{11} - \frac{v}{l}m_\delta^2q_{11}\right)dt,$$

$$dq_{22}(t) = \left(-\frac{2v}{l}q_{12} - \frac{2v}{l}q_{12}q_{22} - \frac{2v}{l}m_\delta^2q_{12} - q_{22}^2\right)dt.$$

Here, m_ϕ and m_δ are the estimates for variables ϕ and δ ; $p_{\phi\phi}$, $p_{\phi\delta}$, $p_{\delta\delta}$ are elements of the symmetric covariance matrix P ; and $q_{11}(t)$, $q_{21}(t)$, $q_{22}(t)$ are elements of the symmetric matrix $Q(t)$ forming the optimal control (16).

The following values of the input variables and initial values are assigned: $v = 17, l = 2, m_\phi(0) = 1, m_\delta(0) = 0.1, \phi(0) = \delta(0) = 0, P_{\phi\phi}(0) = 10, P_{\phi\delta}(0) = 1, P_{\delta\delta}(0) = 1$. Gaussian disturbances $w_1(t)$ and $w_2(t)$ in (13) are realized as sinusoidal signals: $w_1(t) = w_2(t) = \sin t$. The terminal conditions for the matrix Q elements are: $q_{11}(T) = 0.1, q_{12}(T) = 0, q_{22}(T) = 0$, where the final time $T = 0.3$.

Thus, the system composed of the two last equations of (12) and the equations (17) should be solved with initial conditions $m_\phi(0) = 1, m_\delta(0) = 0.1, \phi(0) = \delta(0) = 0, P_{\phi\phi}(0) = 10, P_{\phi\delta}(0) = 1, P_{\delta\delta}(0) = 1$ and terminal conditions $q_{11}(T) = 0.1, q_{12}(T) = 0, q_{22}(T) = 0$. This boundary problem is solved numerically using the iterative method of direct and reverse passing as follows. The first initial conditions for q 's are guessed, and the system is solved in direct time with the initial conditions at $t = 0$, thus obtaining certain values for the other listed variables at the terminal point $T = 0.3$. Then, the system is solved in reverse time, taking the obtained terminal values for the other variables in direct time as their initial values in reverse time, thus obtaining certain values for q 's at the initial point $t = 0$, which are taken as their initial values for the passing in direct time, and so on. The given initial conditions $m_\phi(0) = 1, m_\delta(0) = 0.1, \phi(0) = \delta(0) = 0, P_{\phi\phi}(0) = 10, P_{\phi\delta}(0) = 1, P_{\delta\delta}(0) = 1$ are kept fixed for any direct passing, and the given terminal conditions $q_{11}(T) = 0.1, q_{12}(T) = 0, q_{22}(T) = 0$ are used as the fixed initial conditions for any reverse passing. The algorithm stops when the system arrives at values $q_{11}(T) = 0.1, q_{12}(T) = 0, q_{22}(T) = 0$ after direct passing and at values $m_\phi(0) = 1, m_\delta(0) = 0.1, \phi(0) = \delta(0) = 0, P_{\phi\phi}(0) = 10, P_{\phi\delta}(0) = 1, P_{\delta\delta}(0) = 1$ after reverse passing. The obtained simulation graphs for $\phi, \delta, m_\phi, m_\delta$, the criterion J , and the optimal control $u^*(t)$ are given in Fig. 1. These results for the polynomial controller of degree 3 are then compared to the results obtained using the best linear controller available for the linearized model (only the linear term is present in the Taylor expansion for tangent). The optimal control law in this linear controller is the same as in (16) and the optimal linear controller equations are given by

$$\dot{m}_\phi = \left(\frac{v}{l} m_\delta + p_{\phi\phi}(z_\phi - m_\phi) + p_{\phi\delta}(z_\delta - m_\delta) \right) dt. \quad (18)$$

$$\dot{m}_\delta = \left(u^*(t) + p_{\delta\phi}(z_\phi - m_\phi) + p_{\delta\delta}(z_\delta - m_\delta) \right) dt,$$

$$dp_{\phi\phi} = \left(\frac{2v}{l} p_{\phi\phi} - p_{\phi\phi}^2 - p_{\phi\delta}^2 \right) dt,$$

$$dp_{\phi\delta} = \left(\frac{v}{l} p_{\phi\delta} - p_{\phi\phi} p_{\phi\delta} - p_{\phi\delta} p_{\delta\delta} \right) dt,$$

$$dp_{\delta\delta} = \left(-p_{\phi\phi}^2 - p_{\delta\delta}^2 \right) dt,$$

$$dq_{11}(t) = \left(-q_{21}^2(t) \right) dt,$$

$$dq_{12}(t) = \left(-q_{12}q_{22} - \frac{v}{l} q_{11} \right) dt,$$

$$dq_{22}(t) = \left(-\frac{2v}{l}q_{12} - q_{22}^2\right)dt.$$

Note that in the linear case the only reverse passing for q 's is necessary, because the the equations for q 's in (18) do not depend of ϕ , δ , m_ϕ , or m_δ , and the initial values for q 's at $t = 0$ can be obtained after single reverse passing. The simulation graphs for the linear case are given in Fig. 2.

Thus, two sets of graphs are obtained.

1. Graphs of the variables ϕ and δ satisfying the polynomial system (15) and controlled using the optimal linear regulator defined by (16), (18); graphs of the estimates m_ϕ and m_δ satisfying the system (18) and controlled using the optimal linear regulator defined by (16), (18); graphs of the corresponding values of the criterion J ; graphs of the corresponding values of the optimal control u^* (Fig. 1).

2. Graphs of the variables ϕ and δ satisfying the polynomial system (15) and controlled using the optimal third order polynomial controller defined by (16), (17); graphs of the estimates m_ϕ and m_δ satisfying the system (17) and controlled using the optimal third order polynomial controller defined by (16), (17); graphs of the corresponding values of the criterion J ; graphs of the corresponding values of the optimal control u^* (Fig. 2).

The obtained values of the controlled variable ϕ and the criterion J are compared for the optimal third order polynomial and linear controllers at the terminal time $T = 0.3$ in the following table (corresponding to Figs. 1 and 2).

Lineal controller	Third degree polynomial controller
$\phi(0.3) = 0.0545$	$\phi(0.3) = 0.0876$
$J = 98.9625$	$J = 98.3884$

The simulation results show that the value of the controlled variable ϕ at the terminal point $T = 0.3$ is more than one and half times greater for the third order polynomial controller than for the linear one, and the difference between the initial and final criterion values is more than one and half times greater for the third order polynomial controller as well. Thus, the third order polynomial controller regulates the system variables better than the linear one from both points of view, thus illustrating the theoretical conclusion.

4 Conclusions

The optimal nonlinear controller for a stochastic system state given by a polynomial equation of degree 3, linear observations confused with white Gaussian noises, and a quadratic criterion has been obtained. The optimal polynomial controller of degree 3 has been then applied to solution of the controlling problem for state variables, orientation and steering angles, of a nonlinear automotive system describing kinematics of car movement. Application of

the obtained controller to the nonlinear automotive system has yielded more than one and half times better values of the criterion and greater values of the controlled variable in comparison to the best linear controller available for the linearized model. Although this conclusion follows from the developed theory, the numerical simulation serves as a convincing illustration.

References

- [1] M. V. Basin and M. A. Alcorta Garcia, Optimal control for third degree polynomial systems and its automotive application, in Proc. 41st Conf. on Decision and Control (Las Vegas, NV, December 10–13, 2002), pp. 1745–1750.
- [2] W. H. Fleming and R.W. Rishel, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [3] R. E. Kalman and R.S. Bucy, New results in linear filtering and prediction theory, *ASME Trans., Part D (J. of Basic Engineering)*, **83**, (1961), 95-108.
- [4] H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*, Wiley-Interscience, New York, 1972.
- [5] S. K. Mitter, Filtering and stochastic control: a historical perspective, *Control Systems*, **16**(3), (1996), 67-76.
- [6] R. Murray and S. Sastry, Nonholonomic motion planning: steering using sinusoids. *IEEE Trans. Automat. Control*, **38**(5), (1993), 700-716.
- [7] B. A. Ogunnaike, On-line modeling and predictive control of an industrial terpolymerization reactor, *Int. J. Control*, **59**(3), (1994), 711-729.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

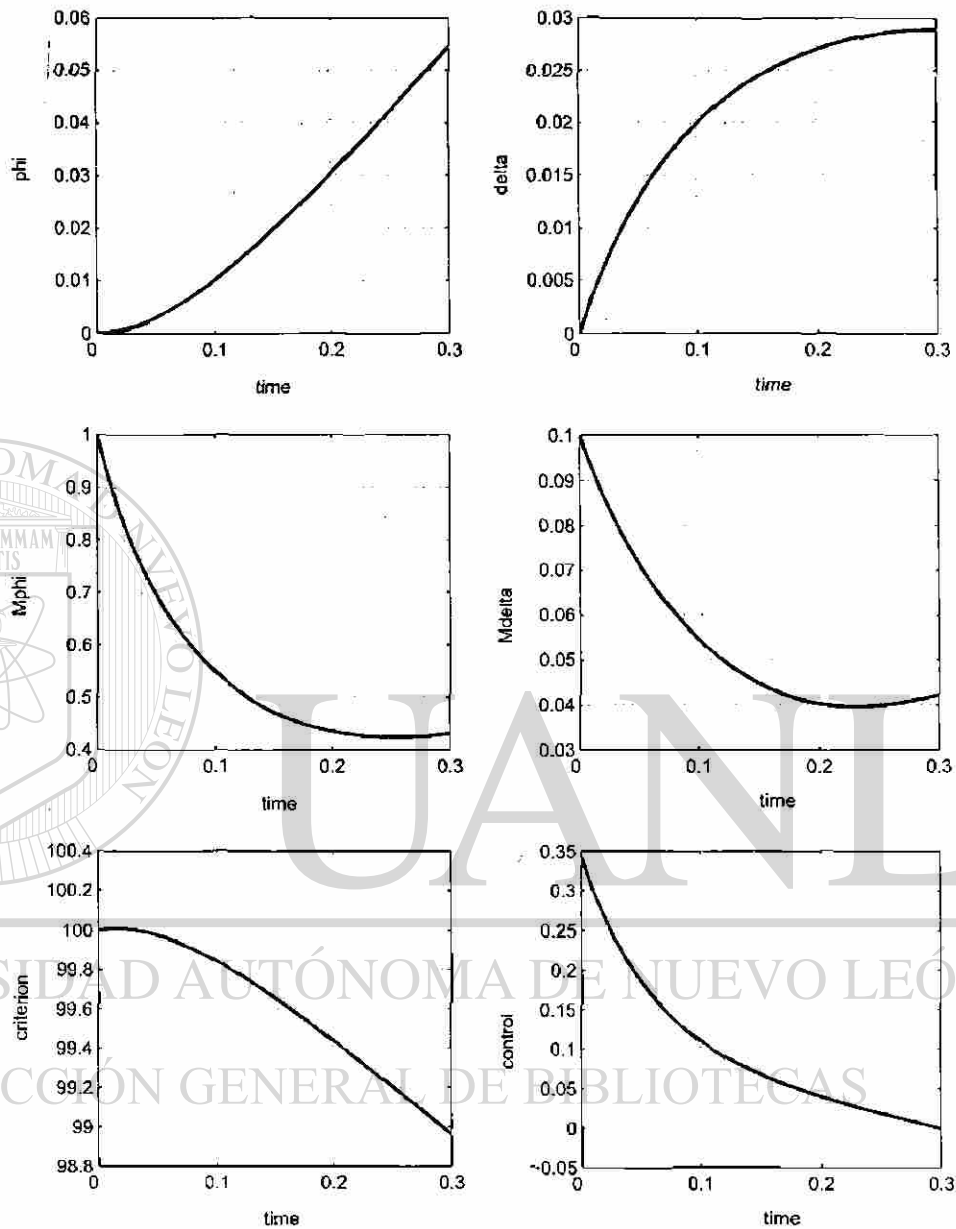


Figure 1: Graphs of the variables ϕ and δ satisfying the polynomial system (15) and controlled using the optimal linear regulator defined by (16), (18); graphs of the estimates m_ϕ and m_δ satisfying the system (18) and controlled using the optimal linear regulator defined by (16), (18); graphs of the corresponding values of the criterion J ; graphs of the corresponding values of the optimal control u^* .

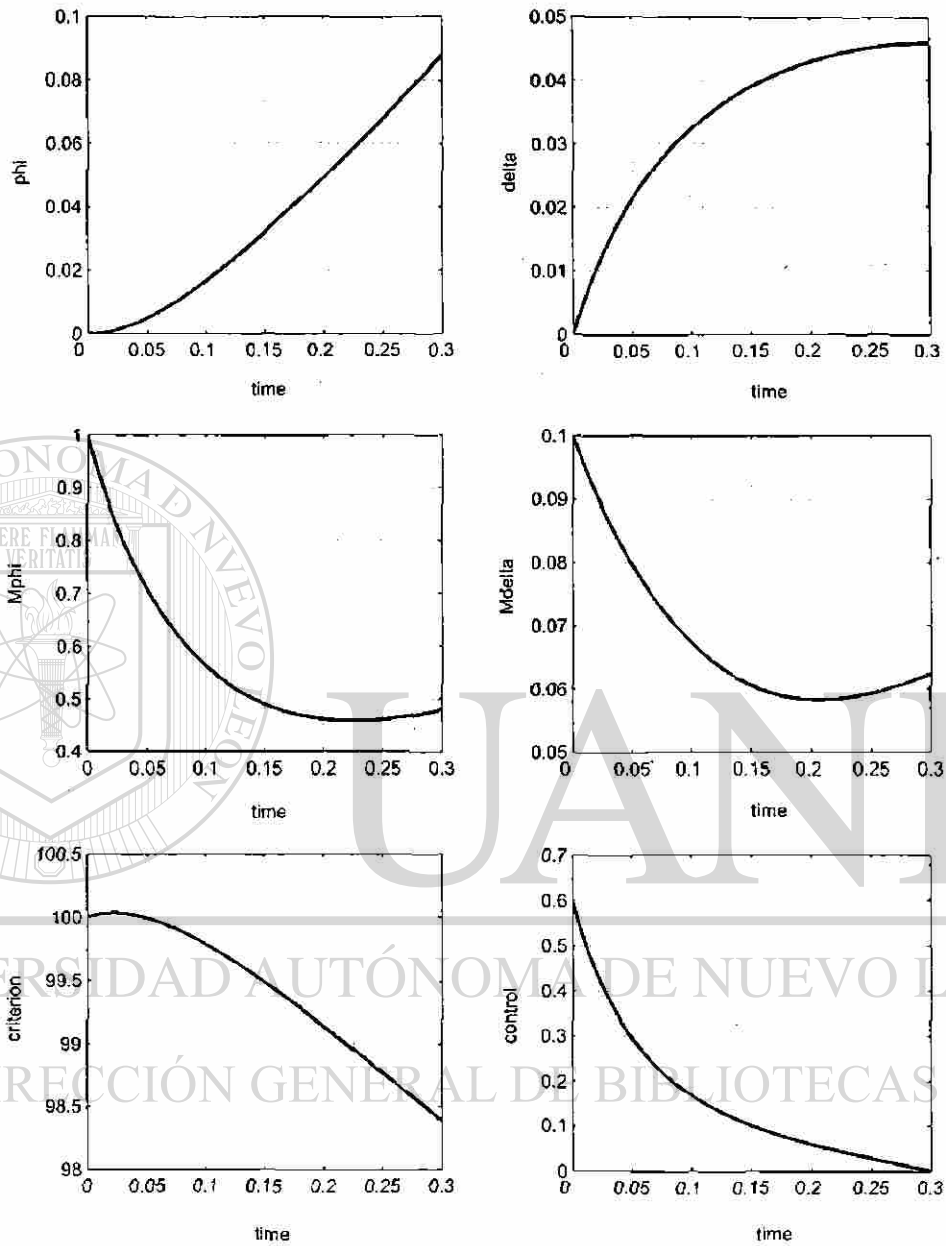


Figure 2: Graphs of the variables ϕ and δ satisfying the polynomial system (15) and controlled using the optimal third order polynomial controller defined by (16), (17); graphs of the estimates m_ϕ and m_δ satisfying the system (17) and controlled using the optimal third order polynomial controller defined by (16), (17); graphs of the corresponding values of the criterion J ; graphs of the corresponding values of the optimal control u^* .

