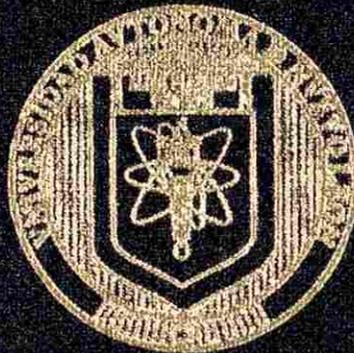


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA



TÉCNICAS DE CONTROL BASADAS EN EL
DOMINIO FÍSICO PARA SISTEMAS LTI MIMO.
APLICACION A LA MAQUINA SINCRONA

TESIS
EN OPCION AL GRADO DE DOCTOR EN
INGENIERIA ELECTRICA

PRESENTA
GILBERTO GONZALEZ AVALOS

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.

JUNIO DE 2004

TECNICAS DE CONTROL BASADAS EN EL
DOMINIO FISICO PARA SISTEMAS LTI WIMO.
APLICACION A LA MAQUINA SINCRONA

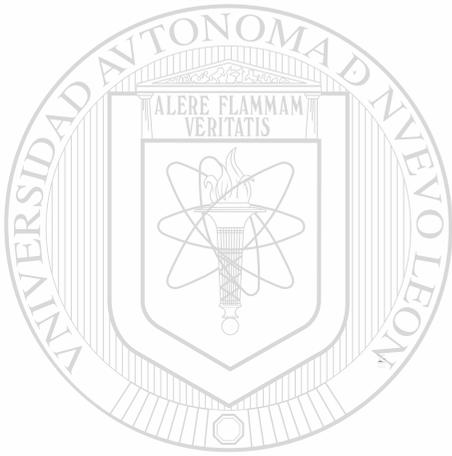
2004

TD
Z5853
.M2
FIME
2004
.G66

2004



1020131315



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA



TECNICAS DE CONTROL BASADAS EN EL
DOMINIO FISICO PARA SISTEMAS LTI MIMO.
APLICACION A LA MAQUINA SINCRONA

UANL

TESIS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEÓN
EN OPCION AL GRADO DE DOCTOR EN
INGENIERIA ELECTRICA



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

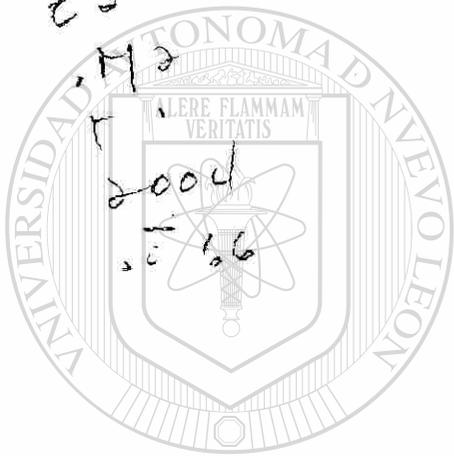
PRESENTA
GILBERTO GONZALEZ AVALOS

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.

JUNIO DE 2004

... 93

TD
25



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



FONDO
TESIS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DEPARTAMENTO DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

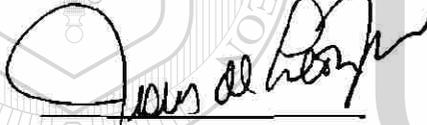
Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis "Técnicas de Control Basadas en el Dominio Físico para Sistemas LTI MIMO. Aplicación a la Máquina Síncrona" realizada por Gilberto González Avalos sea aceptada para su defensa como opción al Grado de Doctor en Ingeniería Eléctrica.

El comité de Tesis



Asesor

Dr. René Galindo Orozco



Secretario

Dr. Jesús de León Morales



Vocal

Dr. Geneviève Dauphin-Tanguy



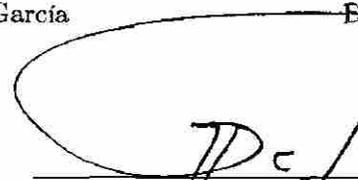
Vocal

Dr. Efraín Alcorta García



Vocal

Dr. Francisco J Ruiz Sánchez



Vo. Bo.

Dr. Guadalupe Alan Castillo Rodríguez
División de Estudios de Postgrado

Resumen

Técnicas de Control Basadas en el Dominio Físico para Sistemas LTI MIMO. Aplicación a la Máquina Síncrona.

Publicación No.

Gilberto González Avalos

Universidad Autónoma de Nuevo León

Asesor: René Galindo Orozco

En este trabajo de tesis se presentan técnicas, procedimientos y estructuras para control basadas en el dominio físico para el análisis de sistemas LTI MIMO. Estas técnicas se aplican a sistemas modelados en Bond Graph.

Se presentan procedimientos para la obtención de las matrices A_p , B_p , C_p , D_p a partir del sistema modelado en el dominio físico. Esta realización de un sistema modelado en Bond Graph se obtiene a partir de un grafo de Coates modificado, que se propone.

La estabilidad de un sistema modelado en Bond Graph es determinada a partir de la obtención gráfica del polinomio característico del sistema. Se propone un grafo de estabilidad de Coates a partir del cual, se encuentran las condiciones de estabilidad del sistema.

Se presenta una estructura y procedimientos para realizar un control por retroalimentación de estado estimado de un sistema modelado en Bond Graph, y se propone la determinación del modelo matemático del sistema y del observador en lazo cerrado. Además, se asignan las ganancias al control y al observador.

El estado estacionario de un sistema modelado en Bond Graph se determina directamente en el dominio físico utilizando el modelo en causalidad derivativa del sistema evitando la obtención de la matriz inversa de A_p del sistema. Así mismo, se presenta una estructura que permite la obtención del error del sistema retroalimentando la salida y aplicando un control proporcional en el dominio físico.

Una clase de sistemas no lineales modelados en Bond Graph son linealizados en el dominio físico con la aplicación de la estructura que se presenta.

Finalmente, se estudia y modifica un modelo de una máquina síncrona dada por Dietrich para la obtención del modelo matemático de Anderson. Se proponen modelos reducidos en Bond Graph y la determinación de las constantes de tiempo. Las técnicas presentadas en el dominio físico son aplicadas al modelo en Bond Graph de la máquina síncrona.

Índice General

Índice de Figuras	ix
-------------------	----

Índice de Tablas	xiv
------------------	-----

1 Introducción	1
-----------------------	---

1.1 Introducción	1
----------------------------	---

1.2 Motivación y Contribución de esta Tesis	2
---	---

1.2.1 Motivación para Desarrollar esta Tesis.	2
---	---

1.2.2 Contribuciones de esta Tesis	2
--	---

1.3 Objetivo de la Tesis	4
------------------------------------	---

1.3.1 Metas	4
-----------------------	---

1.4 Organización de la Tesis	4
--	---

1.5 Planteamiento del Problema	5
--	---

2 Antecedentes	7
-----------------------	---

2.1 Introducción	7
----------------------------	---

2.2 Modelado [18, 19, 31]	7
-------------------------------------	---

2.3 ¿Qué es un Bond Graph?	8
--------------------------------------	---

2.4 Componentes Básicos de un Bond Graph [18, 31, 55]	9
---	---

2.4.1 Puertos-1 Pasivos	10
-----------------------------------	----

2.4.2 Puertos-1 Activos o Fuentes	11
---	----

2.4.3 Los Elementos Ideales de Puerto-2	12
---	----

2.4.4 Los Elementos de Unión, Puertos-3	12
---	----

2.4.5 Causalidad para los Multipuertos Básicos	13
--	----

2.4.6 La Causalidad Derivativa en un Bond Graph.	16
--	----

2.4.7	Bond Activo	17
2.5	Procedimiento para el Modelado de Sistemas [58]	18
2.5.1	Sistemas Eléctricos	19
2.5.2	Sistemas Mecánicos	20
2.5.3	Sistemas Hidráulicos.	22
2.6	Estructuras de Unión en Sistemas Multipuerto [5, 31]	23
2.6.1	Vectores Clave o Vectores Significativos	23
2.6.2	Relaciones de Campo y Ecuación de Estado.	24
2.7	Conclusiones	26
3	Obtención de la Realización LTI MIMO Utilizando un Grafo Lineal a partir de su Bond Graph	27
3.1	Introducción	27
3.2	Antecedentes [69]	28
3.2.1	Conceptos Básicos de Grafos Abstractos	28
3.2.2	Operaciones en Grafos	30
3.2.3	Grafos Dirigidos	31
3.2.4	Propiedades de los Grafos Dirigidos	32
3.3	Obtención de un Grafo Lineal a partir de su Bond Graph	32
3.4	Representación de un Sistema LTI MIMO	36
3.5	Obtención gráfica de las Matrices A_p , B_p , C_p y D_p	37
3.5.1	Obtención de la Matriz A_p a partir de un grafo	37
3.5.2	Obtención de la Matriz B_p a partir de un grafo	39
3.5.3	Obtención de la Matriz C_p a partir de un grafo	41
3.5.4	Obtención de la Matriz D_p a partir de un grafo	42
3.6	Ejemplos	43
3.6.1	Ejemplo de un Sistema Mecánico	43
3.6.2	Ejemplo de un Sistema Eléctrico	47
3.7	Conclusiones	51
4	Condiciones de Estabilidad en el Sentido de Hurwitz para un Sistema LTI MIMO Utilizando Grafos Lineales a partir de su Bond Graph	52
4.1	Introducción	52

4.2	Antecedentes de estabilidad en sistemas lineales	53
4.2.1	Criterio de Hurwitz [4, 12, 26]	53
4.3	Obtención del Polinomio Característico	55
4.3.1	Gráfica de Coates [69]	55
4.4	Obtención de las Condiciones de Estabilidad	56
4.5	Ejemplos	58
4.5.1	Sistema Mecánico en Lazo Abierto	58
4.5.2	Sistema Mecánico en Lazo Cerrado	62
4.6	Conclusiones	65
5	Control Directo en Bond Graph por Retroalimentación de Estado Estimado para Sistemas LTI MIMO	66
5.1	Introducción	66
5.2	Antecedentes de la ley de control	67
5.2.1	Observador Asintótico de Luenberger [12, 14, 47, 68]	67
5.2.2	Control por retroalimentación de estado estimado [51]	69
5.3	Control Directo en Bond Graph	71
5.4	Ejemplos	78
5.4.1	Sistema Electromecánico	78
5.4.2	Sistema Hidráulico	83
5.5	Conclusiones	89
6	Valores de Estado Estacionario para un Sistema Físico LTI MIMO utilizando Bond Graph	90
6.1	Introducción	90
6.2	Antecedentes de estado estacionario	91
6.2.1	Estado Estacionario	92
6.2.2	Sistema en Lazo Cerrado	93
6.3	Estado Estacionario de las Variables de Estado y de la Salida del Sistema en Bond Graph	93
6.3.1	Ejemplo de un Sistema Mecánico	95
6.3.2	Ejemplo de un Sistema Eléctrico	97
6.4	Error en Estado Estacionario del Sistema Retroalimentado con un Control Proporcional en Bond Graph	100

6.4.1	Ejemplo de un Motor de CD	103
6.5	Conclusiones	105
7	Linealización por Bond Graph	106
7.1	Introducción	106
7.2	Antecedentes [70]	107
7.2.1	Linealización Algebraica [70]	107
7.3	Linealización por Bond Graph	109
7.4	Procedimiento para obtener un Bond Graph linealizado	111
7.5	Ejemplo de un Cuerpo Rígido	112
7.6	Conclusiones	115
8	Modelado de la Máquina Síncrona en Bond Graph	116
8.1	Introducción	116
8.2	Descripción Matemática de la Máquina Síncrona [52, 53]	117
8.2.1	Ejes Directo y en Cuadratura	118
8.2.2	Representación Esquemática de los Circuitos de una Máquina Síncrona	118
8.2.3	Transformación de Park [52]	119
8.2.4	Ecuaciones de Enlace de Flujo [53]	120
8.2.5	Ecuaciones de Voltaje	123
8.2.6	Formulación de Ecuaciones en Espacio de Estado	124
8.2.7	Formulación de Corriente	124
8.2.8	La Ecuación de Onda Normalizada	125
8.3	El Modelo de Bond Graph de la Dinámica de la Máquina Síncrona	127
8.4	Modelos Simplificados de la Máquina Síncrona utilizando Bond Graph	130
8.4.1	Sin devanados de amortiguamiento.	130
8.4.2	A Velocidad Constante	132
8.5	Obtención de las Constantes de Tiempo en Bond Graph	133
8.6	Conclusiones	138
9	Aplicación de Herramientas Gráficas al Análisis de la Máquina Síncrona	139
9.1	Introducción	139
9.2	Obtención Directa de una Representación en Espacio de Estado	140

9.3	Obtención de las Condiciones de Estabilidad Utilizando una Gráfica Lineal	144
9.4	Obtención del Estado Estacionario de la Máquina Síncrona utilizando Bond Graph	148
9.5	Control de una Máquina Síncrona por Retroalimentación de Estados Estimados .	149
9.6	Modelo Lineal de la Máquina Síncrona utilizando Bond Graph	152
9.7	Conclusiones	155
10	Conclusiones y Trabajos Futuros	156
10.1	Conclusiones	156
10.2	Trabajos Futuros	157
	Bibliografía	159
A	Análisis de las Propiedades Estructurales del Modelado en Bond Graph	165
A.1	Introducción [29]	165
A.2	Presentación de Herramientas Algebraicas y Gráficas [29]	166
A.2.1	Definición de la Estructura de Σ	166
A.2.2	Controlabilidad/Observabilidad Estructural	166
A.3	Rango Estructural [29]	167
A.4	Diseño de la Arquitectura para Medición y Control [29]	168
A.5	Trayectoria Causal-Lazo Causal [31, 32]	169
B	Estabilidad de Sistemas LTI MIMO	170
B.1	Introducción	170
B.2	Estabilidad Externa (Estabilidad BIBO) [12]	170
B.3	Estabilidad en el Sentido de Lyapunov o Estabilidad Interna o Criterio de Estabilidad de Lyapunov [68]	171
C	Publicaciones	173
C.1	A Direct Graph Procedure from Bond Graph for MIMO LTI Systems	173
C.2	Hurwitz Stability Conditions For a LTI System: A Bond Graph Approach	179
C.3	Direct Control in Bond Graph by State Estimated Feedback for MIMO LTI Systems	185
C.4	Steady-State Values for a Physical System with Bond Graph Approach	191
C.5	Linearization in Bond Graph	197
C.6	Steady-State for a Physical System with Bond Graph Approach	203

Índice de Figuras

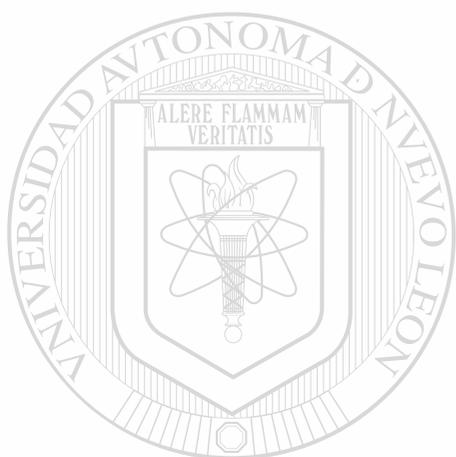
Figura 1.1 Diagrama a bloques de la estructura de la tesis.	3
Figura 2.1 Bond con sus variables de potencia.	9
Figura 2.2 Tetrahedro de estado.	11
Figura 2.3 Puertos-1, activos.	11
Figura 2.4 Bond Graph de un transformador y de un girador.	12
Figura 2.5 Unión-0.	12
Figura 2.6 Unión-1.	13
Figura 2.7 Causalidad para un bond	13
Figura 2.8 Ejemplo de unión-0 sin causalidad.	14
Figura 2.9 Ejemplo de unión-0 con causalidad.	14
Figura 2.10 Elemento- C en causalidad integral.	15
Figura 2.11 Elemento- C en causalidad derivativa.	15
Figura 2.12 Ejemplo de un circuito eléctrico en causalidad derivativa.	16
Figura 2.13 Bond Graph en causalidad derivativa de la figura 2.12.	17
Figura 2.14 Bond activo.	17
Figura 2.15 Bond Graph con un bond activo.	17
Figura 2.16 Ejemplo de un circuito eléctrico.	19
Figura 2.17 Procedimiento para obtener el Bond Graph de un circuito eléctrico.	19
Figura 2.18 Bond Graph del ejemplo de un sistema eléctrico.	20
Figura 2.19 Ejemplo de un Sistema mecánico.	21
Figura 2.20 Procedimiento para encontrar el Bond Graph de un sistema mecánico.	21
Figura 2.21 Bond Graph de un sistema mecánico.	21
Figura 2.22 Ejemplo de un sistema hidráulico.	22

Figura 2.23 Procedimiento para encontrar el Bond Graph de un sistema hidráulico.	22
Figura 2.24 Bond Graph del sistema hidralico.	23
Figura 2.25 Digrama de bloques de la Estructura de Unión de un Bond Graph.	23
Figura 3.1 Grafo del sistema planar.	33
Figura 3.2 Grafo de Coates modificado.	34
Figura 3.3 Representación de un sistema multivariable.	36
Figura 3.4 Sistema multivariable de dos nodos.	36
Figura 3.5 Sistema mecánico y su modelo en Bond Graph.	43
Figura 3.6 Grafo de Coates del sistema mecánico.	44
Figura 3.7 Sistema Eléctrico y su modelo en Bond Graph.	47
Figura 3.8 Grafo de Coates de un sistema eléctrico.	47
Figura 3.9 Grafo de Coates modificado del sistema eléctrico.	48
Figura 4.1 Subgrafo seccional de la matriz de Coates A_{pc}	55
Figura 4.2 Lazo propio de un nodo.	56
Figura 4.3 Ramas a la derecha.	56
Figura 4.4 Ramas a la izquierda.	57
Figura 4.5 Grafo seccional de un nodo.	58
Figura 4.6 Subgrafo seccional de dos nodos.	59
Figura 4.7 Subgrafo seccional de tres nodos.	59
Figura 4.8 Subgrafo seccional de cuatro nodos.	59
Figura 4.9 Grafo de Coates de estabilidad.	59
Figura 4.10 Subgrafo seccional de cuatro nodos.	60
Figura 4.11 Subgrafo seccional de tres nodos.	60
Figura 4.12 Subgrafo seccional de dos nodos.	61
Figura 4.13 Subgrafo seccional de un nodos.	61
Figura 4.14 Grafo lineal del sistema en lazo cerrado.	62
Figura 4.15 Grafo lineal reducido del sistema de lazo cerrado.	62
Figura 4.16 Subgrafo seccional de dos nodos.	63
Figura 4.17 Sugrafo seccional de tres nodos.	63
Figura 4.18 Subgrafo seccional de dos nodos.	63

Figura 5.1 Observador de estado en lazo abierto.	67
Figura 5.2 Observador asintótico de estado.	68
Figura 5.3 Retroalimentación de estado estimado.	70
Figura 5.4 Lazo cerrado con observador en diagrama de bloques.	71
Figura 5.5 Conexión de la entrada al sistema y observador.	77
Figura 5.6 Esquemas de retroalimentación de estado estimado.	77
Figura 5.7 Esquema de un motor de CD y su Bond Graph.	78
Figura 5.8 Bond Graph en causalidad derivativa de un motor de CD.	79
Figura 5.9 Observador y retroalimentación de estados para el motor de CD.	80
Figura 5.10 Gráfica del comportamiento de los enlaces de flujo donde: A) Estado del sistema; B) Estado estimado.	82
Figura 5.11 Gráfica del comportamiento de la salida, donde A) Estado del sistema; B) Estado estimado.	82
Figura 5.12 Sistema hidráulico y su Bond Graph.	83
Figura 5.13 Bond Graph en causalidad derivativa de un motor de CD.	85
Figura 5.14 Observador y retroalimentación de estado para el sistema hidráulico.	85
Figura 5.15 Gráfica del comportamiento de la presión, donde: A) Estado del sistema; B) Estado estimado.	88
Figura 5.16 Gráfica del comportamiento de la salida, donde: A) Salida del sistema; B) Salida estimada.	88
Figura 6.1 Sistema en lazo cerrado.	93
Figura 6.2 Bond Graph en causalidad derivativa de la figura 3.5.	95
Figura 6.3 Variables de estado: (A) $q_2(t)$; (B) $p_6(t)$	96
Figura 6.4 Variables de estado: (A) $q_9(t)$; (B) $p_{12}(t)$	96
Figura 6.5 Ejemplo de un sistema eléctrico.	97
Figura 6.6 Bond Graph en causalidad integral.	97
Figura 6.7 Bond Graph en causalidad derivativa.	98
Figura 6.8 Variables de estado: (A) $q_4(t)$; (B) $p_5(t)$	99
Figura 6.9 Variable de estado $p_{10}(t)$	99
Figura 6.10 Sistema en lazo cerrado con un control proporcional.	100
Figura 6.11 Procedimiento gráfico para la obtención del error en estado estacionario en un enfoque de Bond Graph.	102
Figura 6.12 Bond Graph en lazo cerrado en causalidad integral de un motor de CD.	103

Figura 6.13 Bond Graph en lazo cerrado modificado en causalidad derivativa de un motor de CD.	104
Figura 6.14 Bond Graph en lazo cerrado en combinación con diagramas a bloques.	104
Figura 7.1 Estructura general de un sistema linerizado.	109
Figure 7.2 Bond Graph de un cuerpo rígido.	112
Figura 7.3 Bond Graph linealizado de la variable de estado de I_x	113
Figura 7.4 Bond Graph linealizado de un cuerpo rígido.	113
Figura 8.1 Representación esquemática de una máquina síncrona.	117
Figura 8.2 Diagrama esquemático de una máquina síncrona.	118
Figura 8.3 Pares aplicados al rotor de una máquina síncrona	125
Figura 8.4 Bond Graph de la máquina síncrona.	128
Figure 8.5 Modelo de Bond Graph máquina síncrona despreciando devanados de amortiguamiento.	130
Figura 8.6 Bond Graph a velocidad constante de la máquina síncrona.	132
Figura 8.7 Bond Graph para la constante de tiempo subtransitoria de la máquina síncrona.	134
Figura 8.8 Bond Graph para la constante de tiempo transitorio en el eje d	135
Figure 8.9 Bond Graph de la constante de tiempo subtransitoria en el eje q	136
Figura 9.1 Modelo de la máquina síncrona a velocidad constante y sin devanados de amortiguamiento.	140
Figura 9.2 Grafo lineal de la máquina síncrona de la figura 9.1.	141
Figura 9.3 Gráfica lineal de la máquina síncrona para análisis de estabilidad.	144
Figura 9.4 Factores-1 para a_1	145
Figura 9.5 Factores-1 para a_2	145
Figura 9.6 Factores-1 para a_3	146
Figura 9.7 Gráfica de estabilidad de Coates.	146
Figura 9.8 Determinante de Hurwitz D_3	146
Figura 9.9 Determinante de Hurwitz D_2	147
Figura 9.10 Determinante de Hurwitz D_1	147
Figura 9.11 Bond Graph de la máquina síncrona en causalidad derivativa y a velocidad constante.	148
Figura 9.12 Observador de Estados de una máquina síncrona.	149

Figura 9.13 Bond Graph linealizado de la máquina síncrona. 153



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Índice de Tablas

Tabla 2.1 Variables generalizadas de sistemas eléctricos y de sistemas mecánicos traslacionales.	10
Tabla 2.2 Variables generalizadas de sistemas mecánicos rotacionales y de sistemas hidráulicos.	10
Tabla 2.3 Elemento- <i>R</i>	11
Tabla 2.4 Elemento- <i>C</i>	11
Tabla 2.5 Elemento- <i>I</i>	11
Tabla 2.6 Consideraciones causales para los multipuertos básicos.	14
Tabla 2.7 Formas Causales para puertos 1.	16
Tabla 4.1 Grafos de Estabilidad de Coates.	57

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Notación

- $diag \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ denota una matriz diagonal $p \times p$ cuyos elementos son $a_i, i = 1, \dots, p$.
- $I_{n \times n}$ denota la matriz identidad $n \times n$.
- $0_{m \times n}$ denota una matriz de dimensión $m \times n$ cuyos elementos son todos cero.
- $\lambda_i(A)$ denota los eigenvalores de A .
- $A \triangleq B$ denota A que está definida por B .
- A^T denota la matriz transpuesta de A .
- A^{-1} denota la matriz inversa de A .

Acrónimos

- LTI, Linear Time Invariant, Lineal e Invariante en el Tiempo.
- MIMO, Multi-Input Multi-Output, Multi-Entrada Multi-Salida.
- BIBO, Bounded Input Bouded Output, Entrada Acotada Salida Acotada.

- pu, por unidad.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

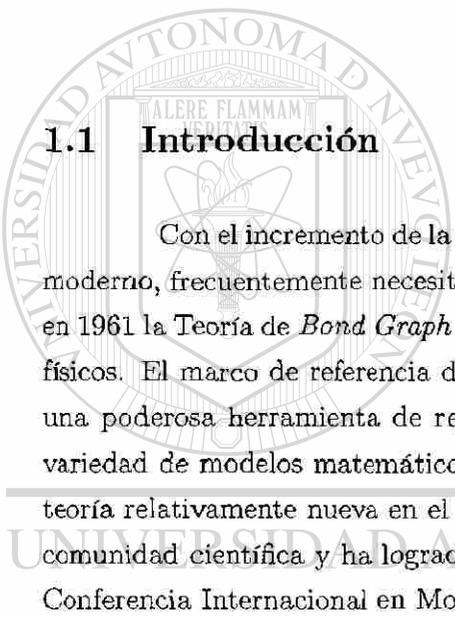
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



Capítulo 1

Introducción

1.1 Introducción

Con el incremento de la complejidad de procesos a ser analizados, el ingeniero de control moderno, frecuentemente necesita un modelo del sistema a ser controlado. Payter [56] presentó en 1961 la Teoría de *Bond Graph* como una metodología abstracta general para modelar sistemas físicos. El marco de referencia de esta teoría se denomina *dominio físico* [57]. Bond Graph es una poderosa herramienta de representación de sistemas en el dominio físico, de la cual una variedad de modelos matemáticos pueden ser derivados [58]. La Teoría de Bond Graph es una teoría relativamente nueva en el modelado de sistemas, la cual ha tenido gran aceptación en la comunidad científica y ha logrado evolucionar de tal manera que cada dos años se presenta la Conferencia Internacional en Modelado y Simulación en Bond Graph (ICBGM). 

Por otro lado, actualmente existe un incremento en el uso de controladores automáticos para mejorar el comportamiento de los sistemas dinámicos de control [19], gracias en parte a la revolución en la electrónica que ha propiciado el uso de controladores numéricos inteligentes aplicados a todo tipo de sistemas de ingeniería [50]. Además, con la aparición del trabajo multidisciplinario el desarrollo de sistemas automáticos recibió un gran ímpetu, dado que los sistemas típicamente son una mezcla de sistemas eléctricos, hidráulicos, neumáticos y mecánicos.

El incremento en el uso de controladores pone de manifiesto la fuerte relación que existe entre el modelado y control de sistemas. La Teoría de Bond Graph se ha aplicado al control de sistemas en el dominio físico [3, 22, 57]. Las principales ventajas de estas propuestas son desarrollar el modelo y el controlador en el dominio físico, garantizar que el controlador sea realizable y encontrar importantes características como causalidad, controlabilidad, observabilidad, pasividad y estabilidad. Esto se logra gracias a que el modelo de Bond Graph y las técnicas de análisis preservan información y características del sistema físico utilizando una cantidad

mínima símbolos [29].

Actualmente se han desarrollado importantes trabajos basados en Bond Graph, por ejemplo, en Análisis de Sistemas Lineales [5, 18, 29], en Perturbaciones Singulares [6, 30], en Diseño de Observadores [7, 8, 22], Reducción de Modelos [73], en Aplicación del Segundo Método de Lyapunov [67] y Desacoplamiento entrada/salida [29].

En la siguiente sección se presenta la motivación para desarrollar este trabajo de tesis y contribuciones de la misma.

1.2 Motivación y Contribución de esta Tesis

La motivación para el desarrollo de este trabajo de tesis se presenta a continuación. Así mismo, se presentan las contribuciones de la tesis.

1.2.1 Motivación para Desarrollar esta Tesis.

La búsqueda de herramientas nuevas y útiles para el modelado y control de sistemas físicos es la principal motivación de este trabajo de investigación.

Así, se presenta este trabajo de tesis, con la finalidad de aportar algunas herramientas de control utilizando la Teoría de Bond Graph y el apoyo de Teoría de Grafos para despertar el interés en esta área de investigación en México.

1.2.2 Contribuciones de esta Tesis

La contribución principal de esta tesis es Presentar Herramientas Gráficas para Análisis de Sistemas Físicos Lineales Invariantes (LTI) Multi-Entrada Multi-Salida (MIMO), basadas en la Teoría de Bond Graph y la Teoría de Grafos [69].

En el diagrama a bloques de la figura 1.1, se muestran los diferentes estudios realizados en esta tesis, partiendo de un sistema físico LTI MIMO. A continuación se dan los principales alcances de este trabajo de investigación basados en la figura 1.1:

- Obtención de una realización en espacio de estado del sistema utilizando la interconexión de los elementos dados en el grafo correspondiente al sistema.
- Determinación de las condiciones de estabilidad a partir de los grafos propuestos.
- Obtención de un control por retroalimentación de estados estimados utilizando Bond Graph.

- Obtención de los valores en estado estacionario.
- Obtención del error en estado estacionario retroalimentando la salida por medio de un control proporcional.
- Para una clase de sistemas no lineales modelado en Bond Graph se presenta un procedimiento de linealización en Bond Graph. Los resultados encontrados en esta tesis pueden aplicarse al sistema linealizado.

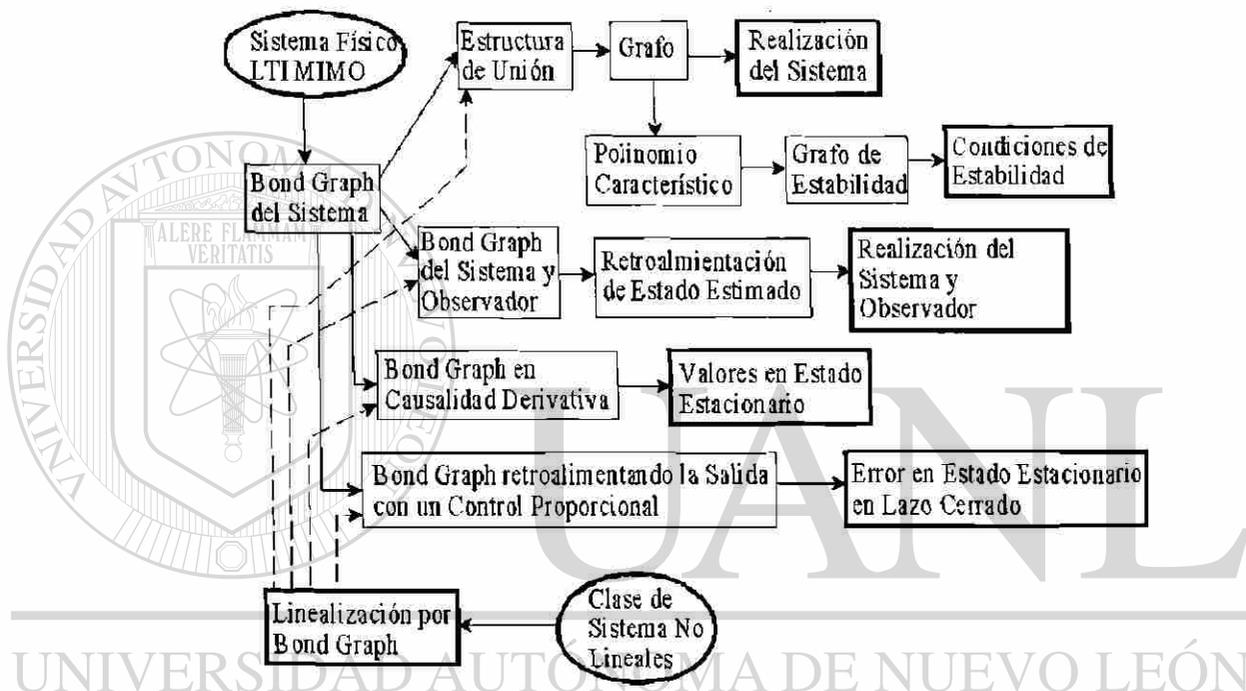


Figura 1.1 Diagrama a bloques de la estructura de la tesis.

Los resultados presentados en esta tesis se obtuvieron con la finalidad de presentar herramientas gráficas para encontrar una realización de estado, condiciones de estabilidad, retroalimentación de estado estimado y valores y error en estado estacionario de un sistema LTI MIMO modelado en Bond Graph.

Las estructuras propuestas y grafos propuestos están basados en la Estructura de Unión [5] de un Bond Graph y del grafo de Coates [69] de la Teoría de Grafos. Los resultados gráficos de la figura 1.1 son directos en el sentido de que no requieren las técnicas algebraicas de sistemas lineales. Así mismo, las ventajas principales de estos resultados son: se trabaja en un sólo marco de referencia (Bond Graph) mediante el cual se puede representar sistemas de diferentes tipos de energía (eléctrico, mecánico, hidráulico, térmico y magnético) [18], la inversión algebraica de la matriz A_p se puede evitar al obtener el Bond Graph en causalidad derivativa del sistema [6, 30]. Las propiedades estructurales de un sistema se preservan en el modelado en Bond Graph [29]. Además, al obtener un control en un modelo representado en Bond Graph garantiza que

sca realizable [57]. Las variables de estado controlables u observables pueden ser determinadas utilizando trayectorias causales en un Bond Graph [29] y estas trayectorias se utilizan para linealizar una clase de sistemas no lineales.

En la siguiente sección, se presenta el objetivo general de la tesis, incluyendo los objetivos específicos.

1.3 Objetivo de la Tesis

Obtener herramientas y metodologías gráficas para el análisis y síntesis, de sistemas LTI MIMO en el dominio físico.

1.3.1 Metas

Las metas del presente trabajo de investigación son:

- Obtención gráfica de una realización en espacio de estado para un sistema LTI MIMO modelado en Bond Graph, utilizando grafos.
 - Determinación de las condiciones de estabilidad mediante grafos para un sistema LTI MIMO modelado en Bond Graph
-
- Diseño de un control por retroalimentación de estado estimado para un sistema LTI MIMO en el dominio físico.
 - Obtención de los valores de estado estacionario de un sistema LTI MIMO modelado en el dominio físico.
 - Obtención de modelos simplificados en el dominio físico de una máquina síncrona.
 - Obtención de las constantes de tiempo de una máquina síncrona modelada en el dominio físico.
 - Linealización de una clase de sistemas no lineales en el dominio físico y su aplicación a la máquina síncrona.

1.4 Organización de la Tesis

El presente trabajo de investigación de tesis consta de 9 capítulos y está organizado de la siguiente manera:

- En el Capítulo 2, se introduce el modelado en el dominio físico, se estudia la representación de cada uno de sus elementos en Bond graph, la causalidad, se da un procedimiento general para el modelado de sistemas físicos y se describe la estructura de unión para determinar el modelado matemático en espacio de estado del sistema.
- El Capítulo 3 presenta una representación de un sistema físico en un grafo lineal a partir de su modelo en Bond Graph; con este grafo lineal se proponen procedimientos para obtener la realización (A_p, B_p, C_p, D_p) del sistema.
- El Capítulo 4 presenta un procedimiento para determinar las condiciones de estabilidad de un sistema modelado en Bond Graph.
- El Capítulo 5 presenta un control por retroalimentación de estado estimado de un sistema físico utilizando Bond Graph.
- El Capítulo 6 presenta la obtención de los valores de estado estacionario utilizando Bond Graph de un sistema en lazo abierto y de un sistema con retroalimentación proporcional de la salida.
- En el Capítulo 7, se presenta un esquema y un procedimiento para linealizar una clase de sistemas no lineales utilizando Bond Graph.
- En el Capítulo 8 se estudia un modelo de una máquina síncrona en Bond Graph, se proponen algunos modelos reducidos y se da un procedimiento para obtener las constantes de tiempo de una máquina síncrona.
- En el Capítulo 9 se aplican los resultados y procedimientos de los capítulos 2 al 7 a la máquina síncrona.
- En el capítulo 10 se presentan las conclusiones generales de la tesis y los trabajos futuros.

En la siguiente sección, se presentan los problemas a resolver en esta tesis y las condiciones que se deben satisfacer para que un sistema LTI MIMO, modelado en Bond Graph pueda ser utilizado en este trabajo.

1.5 Planteamiento del Problema

En esta tesis se presentan un conjunto de herramientas, estructuras y procedimientos para control de sistemas LTI MIMO en el dominio físico, basadas en la Estructura de Unión. Los problemas resueltos son:

- Control por retroalimentación de estado estimado.
- Valor de estado estacionario.
- Linealización de una clase de sistemas no lineales.

Los problemas resueltos con el apoyo de Teoría de Gráfos son:

- Obtención de las matrices A_p , B_p , C_p , D_p de la realización del sistema.
- Estabilidad del sistema en el sentido de Hurwitz.

Para ilustrar su aplicación estas herramientas son usadas al sistema de una máquina síncrona, incluyendo los siguientes resultados de la máquina síncrona modelada en Bond Graph:

- Modelos simplificados: sin devanados de amortiguamiento, a velocidad constante y ambas reducciones.
- Determinación de las Constantes de tiempo.

En el presente trabajo el sistema $\dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p u(t)$; $y(t) = C_p x(t) + D_p u(t)$ modelado en Bond Graph satisface lo siguiente:

- H1.- Las relaciones constitutivas de los elementos que forman los campos de almacenamiento F y disipación L son LTI.
- H2.- Las propiedades P1 y P2 de para la matriz de Estructura de Unión S se cumplen (ver sección 2.6.2) .
- H3.- La asignación de causalidad integral en el Bond Graph es causalmente correcta (ver sección 2.4.5) equivalentemente no existen conflictos de causalidad [5].

Además, para los capítulos 4, 6 y 7 se satisface:

- H4.- En un Bond Graph con una causalidad integral asignada, no existen elementos almacenadores de energía en causalidad derivativa, que implica $E = I$ (ver sección 2.6.2).

En el siguiente capítulo, se dan los elementos básicos de modelado utilizando Bond Graph.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1 Introducción

El primer paso en el análisis de un sistema dinámico, es obtener su modelo. Los modelos pueden tomar muchas formas distintas, según el sistema particular de que se trate y las circunstancias. Los modelos son normalmente construidos para resolver un problema propuesto.

En particular el modelado en Bond Graph representa un enfoque unificado para el modelado y manipulación de sistemas dinámicos de ingeniería [55] que permite obtener sus ecuaciones de estado y conocer sus propiedades de observabilidad, controlabilidad y dependencia lineal de sus elementos [5], basado en una representación gráfica y la generalización de los conceptos de variable de flujo y esfuerzo.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera: En primer lugar se da una breve descripción del modelado en Bond Graph, de sus fundamentos y los componentes que lo forman para construir un modelo en el dominio físico. Después se describe un procedimiento para el modelado de sistemas en Bond Graph el cual se ilustra a ejemplos de un sistema eléctrico, de un sistema mecánico y de un sistema hidráulico. Posteriormente se estudia una metodología para obtener el modelo matemático de un sistema en Bond Graph utilizando su estructura de unión y finalmente se plantean los problemas a resolver en este trabajo de investigación.

2.2 Modelado [18, 19, 31]

Los *Modelos* son simplificaciones de la realidad. Existen varios tipos de modelos y su forma depende de su aplicación, por ejemplo. *Modelos físicos* son frecuentemente usados en ingeniería cuando no es práctico usar sistemas reales. Una idea central que envuelve el estudio

de la dinámica de un sistema real es la de su modelo. Modelos son construcciones simplificadas y abstractas utilizadas para estudiar y determinar el comportamiento de sistemas.

Cuando la representación de la dinámica de un sistema se expresa en términos de operadores y variables se tiene otro tipo de modelo llamado *modelo matemático*. Este tipo de modelo es más abstracto que el modelo físico y tiene fuertes similitudes con el mismo. El modelo matemático representa solamente propiedades esenciales o primordiales de un fenómeno de interés.

A causa de que un modelo es una simplificación de la realidad, hay una gran cantidad de trabajo en la construcción de modelos. Un modelo excesivamente complejo y detallado puede contener parámetros “imposibles” de estimar y/o muy difíciles de analizar. Un modelo excesivamente simplificado no es capaz de exhibir características importantes.

En la siguiente sección, se da la definición de Bond Graph y una breve reseña histórica del modelado en Bond Graph.

2.3 ¿Qué es un Bond Graph?

La herramienta de Bond Graph definida por Paynter (1961) [56], formalizada por Karnopp (1983) [18], Rosenberg (1990) [19], Thoma (1991) [58] y Breedveld (1984) [59], está situada entre el sistema físico y los modelos matemáticos asociados. Debe ser señalado que esta técnica no tiene la pretensión de ser universal. Sin embargo, ha mostrado su eficiencia en gran número de aplicaciones, para el diseño de sistemas, simulación y determinación de las leyes de control, y de esta manera puede ser ubicada entre los métodos necesarios para la construcción de modelos [24].

Un *Bond Graph* es una representación gráfica de un sistema dinámico donde una colección de componentes interactúan unos con otros a través de puertos de energía. Estos componentes colocados en el sistema describe cómo fluye la potencia a través del sistema [55].

Bond Graph es un enfoque general que permite construir modelos de sistemas eléctricos, magnéticos, mecánicos, hidráulicos, neumáticos y térmicos utilizando solamente un pequeño conjunto de elementos ideales. Técnicas estándares expresan los modelos en ecuaciones diferenciales o en esquemas de simulación por computadora.

A continuación, se definen los elementos básicos que componen a un modelo representado en Bond Graph.

2.4 Componentes Básicos de un Bond Graph [18, 31, 55]

El componente fundamental de un Bond Graph es el *bond* de energía utilizado para acoplar los puertos de energía de los componentes del sistema.

El bond es representado por una semiflecha indicando en la dirección de ésta cómo fluye la energía entre los puertos al cual está conectado, como se muestra en la figura 2.1.

Para modelar un sistema, es necesario dividir un sistema en partes más pequeñas que puedan ser modeladas y estudiadas experimentalmente, y después ensamblarlas al modelo del sistema. Así, las partes principales de un sistema son llamadas *subsistemas* y las partes no reducibles son llamadas *componentes* y básicamente, un subsistema es una parte de un sistema que es modelado como un sistema en sí mismo, donde un componente es modelado como una entidad.

Los lugares en los cuales los subsistemas pueden ser interconectados, son lugares en los cuales la energía puede fluir, tales lugares son llamados *puertos*. Los sistemas con un puerto sencillo es denotado *puerto-1*, un sistema con dos puertos es llamado *puerto-2*. Los sistemas multipuertos son denotados por *puertos-n*, donde n es el número de puertos.

Las variables que describen la unión de dos multipuertos que son conectados son llamadas *variables de potencia* a causa de que el producto de las variables consideradas como funciones del tiempo es la potencia instantánea fluyendo entre los dos multipuertos.

Dado que existen interacciones de potencia cuando dos puertos son conectados, es útil clasificar la variedad de variables de potencia en un esquema universal y describir todos los tipos de multipuerto en un lenguaje común. Las variables de potencia son llamadas *esfuerzo* $e(t)$ y *flujo* $f(t)$. Estas variables son llamadas *variables de bond generalizadas* debido a que pueden ser utilizadas en todos los dominios de energía. En la figura 2.1 se muestra la representación de un bond con las variables de potencia asociadas.

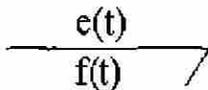


Figura 2.1 Bond con sus variables de potencia.

Ejemplos de estos pares de variables son voltaje y corriente para un sistema eléctrico, y fuerza y velocidad para un sistema mecánico. La relación de ambas variables está dada por:

$$P(t) \triangleq e(t)f(t) \quad (2.1)$$

En sistemas que almacenan energía es necesario definir variables que representen el es-

tado del sistema llamadas *variables de energía* denominadas *momento* $p(t)$ o *esfuerzo acumulado* $e_a(t)$ y *desplazamiento* $q(t)$ o *flujo acumulado* $f_a(t)$, están dadas por:

$$p(t) = e_a(t) \triangleq \int^t e(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

$$q(t) = f_a(t) \triangleq \int^t f(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

La tabla 2.1 muestra las variables generalizadas para sistemas eléctricos y sistemas mecánicos traslacionales y la tabla 2.2 para sistemas mecánicos rotacionales y de sistemas hidráulicos, utilizadas en el modelado mediante Bond Graph.

Variables	General	Eléctrico	Mecánico Traslacional
Esfuerzo	$e(t)$	$v(t)$ Voltaje	$F(t)$ Fuerza
Flujo	$f(t)$	$i(t)$ Corriente	$V(t)$ Velocidad
Momento	$p(t) = \int e(t) dt$	$\lambda(t)$ Enlace de Flujo	$P_R(t)$ Momento Rotacional
Desplazamiento	$q(t) = \int f(t) dt$	$q(t)$ Carga	$x(t)$ Distancia
Potencia	$P(t) = e(t) f(t)$	$v(t)i(t)$	$F(t)V(t)$
Energía	$E(p) = \int f(p) dp$ $E(q) = \int e(q) dq$	$\int i(\lambda) d\lambda$ $\int edq$	$\int V(P_R) dP_R$ $\int F(x) dx$

Tabla 2.1 Variables generalizadas de sistemas eléctricos y sistemas mecánicos traslacionales.

Variables	Mecánico Rotacional	Hidráulico
Esfuerzo	$\tau(t)$ Par	$P_e(t)$ Presión
Flujo	$\omega(t)$ Velocidad angular	$Q(t)$ Caudal
Momento	$H(t)$ Momento angular	$P_p(t)$ Integral de presión
Desplazamiento	$\theta(t)$ Angulo	$V(t)$ Volumen
Potencia	$\tau(t)\omega(t)$	$P_e(t)V(t)$
Energía	$\int \omega(H) dH$ $\int \tau(\theta) d\theta$	$\int Q(P_p) dP_p$ $\int P_e(V) dV$

Tabla 2.2 Variables generalizadas de sistemas mecánicos rotacionales y de sistemas hidráulicos.

2.4.1 Puertos-1 Pasivos

Consideramos elementos ideales, los cuales representan disipación de potencia y dos formas de almacenamiento de energía; llamamos a éstos *elementos pasivos*. Se denominan Puertos-1

Pasivos a aquellos elementos que intercambian potencia en un puerto o elemento sencillo pasivo. Las tablas 2.3, 2.4 y 2.5 muestran los elementos de disipación R , de almacenamiento de flujo C y de almacenamiento de esfuerzo I , para sistemas eléctricos, sistemas mecánicos y sistemas hidráulicos.

Relación	Eléctrico	Mecánico	Hidráulico
Lineal	$v(t) = Ri(t)$	$F(t) = bV(t)$	$\Delta P_r(t) = RQ(t)$
No-Lineal	$v = \varphi(i)$	$F = \varphi(V)$	$\Delta P = \varphi(Q)$

Tabla 2.3 Elemento- R .

Relación	Eléctrico	Mecánico	Hidráulico
Lineal	$v(t) = \frac{1}{C} \int idt$	$F(t) = k \int Vdt$	$P_r(t) = C \int \Delta Q dt$
No-Lineal	$v(t) = \varphi(q)$	$F(t) = \varphi(x)$	$P_r(t) = \varphi(V)$

Tabla 2.4 Elemento- C .

Relación	Eléctrico	Mecánico	Hidráulico
Lineal	$i(t) = \frac{1}{L} \int vdt$	$V(t) = \frac{1}{M} \int Fdt$	$Q(t) = I \int \Delta P_r dt$
No-Lineal	$i(t) = \varphi(\lambda)$	$V(t) = \varphi(P)$	$Q(t) = \varphi(P_p)$

Tabla 2.5 Elemento- I .

En la figura 2.2, se muestra el esquema mnemónico llamado *tetrahedro de estado*, en el cual se observa como se relacionan las variables generalizadas por tres puertos-1 pasivos R , C y I .

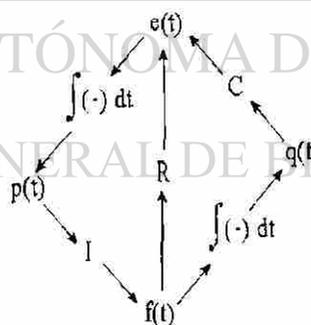


Figura 2.2 Tetrahedro de estado.

2.4.2 Puertos-1 Activos o Fuentes

Los elementos que introducen energía al sistema son llamados *fuentes*. Existen dos tipos de fuentes, *fuentes de esfuerzo* (voltaje, fuerza o presión) y *fuentes de flujo* (corriente, velocidad o caudal) denotadas MS_e y MS_f respectivamente, cuya representación se muestra en la figura 2.3, en donde una fuente es un elemento activo sencillo llamado Puerto-1 Activo.



Figura 2.3 Puertos-1 activos.

2.4.3 Los Elementos Ideales de Puerto-2

Consideramos ahora dos elementos ideales puerto-2, llamados *transformador (TF)* y *girador (GY)*, que son sistemas lineales que cambian la relación entre las variables de flujo y esfuerzo. Caracterizándose por tener dos puertos, y una relación lineal entre esfuerzos y flujos.

Los bonds que representan a un transformador *TF* y a un girador, *GY* se muestran en la figura 2.4, donde n y r son los *módulos* del transformador y del girador, respectivamente

$$\frac{e_1(t)}{f_1(t)} \xrightarrow{TF} \frac{e_2(t)}{f_2(t)} \quad \frac{e_1(t)}{f_1(t)} \xrightarrow{GY} \frac{e_2(t)}{f_2(t)}$$

Figura 2.4 Bond Graph de un transformador y de un girador.

Las relaciones de las variables de bond generalizadas para el transformador, *TF*, están dadas por:

$$e_1(t) = ne_2(t) \quad (2.4)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{n}f_2(t) \quad (2.5)$$

y para el girador, *GY*, son:

$$e_1(t) = rf_2(t) \quad (2.6)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{r}e_2(t) \quad (2.7)$$

Estos elementos juegan un papel muy importante para el modelado de la conversión de potencia de un dominio físico a otro.

2.4.4 Los Elementos de Unión, Puertos-3

Estos *puertos-3* son llamados *uniones* dado que ellos sirven para interconectar tres o más puertos de energía dentro de un subsistema. Estos puertos-3 representan una de las ideas fundamentales del formalismo de Bond Graph, representan en forma de multipuerto los dos tipos de conexiones en serie y en paralelo.

Considerar la *unión de flujo*, *unión-0* o *unión de esfuerzo común* para la conexión en paralelo. En la figura 2.5 se muestra la representación de esta unión.

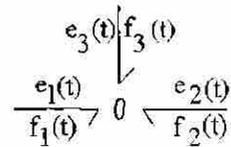


Figura 2.5 Unión-0.

Las relaciones de interconexión que describen una unión de flujo están dadas por:

$$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) \quad (2.8)$$

$$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0 \quad (2.9)$$

Estas ecuaciones especifican que en una unión-0, los esfuerzos en todos los bonds son siempre iguales y la suma algebraica de los flujos es cero.

El otro elemento de puerto-3, es la *unión de esfuerzo*, *unión-1* o de *flujo común* para la conexión en serie, su representación se muestra en la figura 2.6.

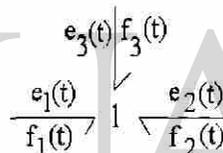


Figura 2.6 Unión-1.

Las relaciones de interconexión para este elemento son:

$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) \quad (2.10)$$

$$e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0 \quad (2.11)$$

Observese a diferencia de la unión de flujo, la unión de esfuerzo tiene un flujo común en los bonds que inciden en la unión y la suma de las variables de esfuerzo en los bonds es cero.

Los puertos de conexión de esfuerzo y flujo pueden extenderse a puertos de 3 o más puertos.

2.4.5 Causalidad para los Multipuertos Básicos

Para organizar las leyes constitutivas de componentes en conjuntos de ecuaciones diferenciales necesitamos definir relaciones de causa y efecto. Las relaciones de causa-efecto para esfuerzos y flujos son representadas en direcciones opuestas. Una marca en un bond, llamada *trazo causal*, indica como $e(t)$ y $f(t)$ simultáneamente son determinados causalmente en un bond. Cuatro ejemplos de causalidad se muestran en la figura 2.7.

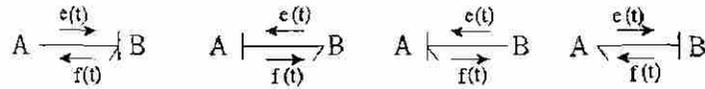


Figura 2.7 Causalidad para un bond.

El trazo causal indica un sentido de entrada-salida para $e(t)$ y $f(t)$ en cada puerto de los dos componentes juntos. El esfuerzo entra en un bond en el mismo sentido del trazo causal.

Las reglas que se presentan en la Tabla 2.6 se deben cumplir.

Causalidad Necesaria	MS_e —	MS_f —
	— TF — — GY —	—TF — —GY —
Causalidad Restrictiva	—0 —	—0 —
	—1 —	—1 —
Causalidad Integral	— I	—C
Causalidad Derivativa	—I	— C
Causalidad Arbitraria	— R	—R

Tabla 2.6 Consideraciones causales para los multipuertos básicos.

Consideremos dos ejemplos para explicar la importancia de la causalidad. Un modelo para la unión-0 sin causalidad se muestra en la figura 2.8.

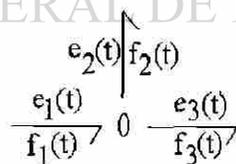


Figura 2.8 Ejemplo de unión-0 sin causalidad.

De la figura 2.8, obtenemos:

$$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) \tag{2.12}$$

$$f_1(t) - f_2(t) - f_3(t) = 0 \tag{2.13}$$

Ahora, con el trazo causal, como se muestra en la figura 2.9, significa que $e_1(t)$, entra en la unión y $e_2(t)$ y $e_3(t)$ son salidas de la unión, efectos de $e_1(t)$, así $f_1(t)$ está en el sentido opuesto y va fuera de la unión, es una salida, y $f_2(t)$ y $f_3(t)$ son entradas a la unión.

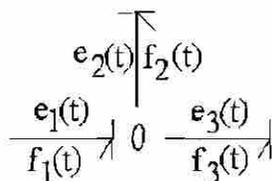


Figura 2.9 Ejemplo de unión-0 con causalidad.

Esto se representa con las ecuaciones de interconexión:

$$e_2(t) = e_1(t) \quad (2.14)$$

$$e_3(t) = e_1(t) \quad (2.15)$$

$$f_1(t) = f_2(t) + f_3(t) \quad (2.16)$$

en una forma bien adaptada para el cálculo numérico.

Considere ahora al *elemento-C*. La relación constitutiva es de $f(t)$ a $e(t)$ y almacena flujo, es decir, relaciona $e(t)$ a una variable de flujo acumulada $q(t) = \int f(t) dt$. Esto es, si $f(t)$ es la entrada a un elemento- C como se muestra en la figura 2.10, se integra primero para encontrar $q(t)$ y entonces $e(t)$ es una salida relacionada a $q(t)$, a esta causalidad en un elemento de almacenamiento se le llama *causalidad integral*, debido a que la integral de la entrada $f(t)$ se relaciona con la salida $e(t)$, esto es,

$$e(t) \triangleq \frac{1}{C} \int f(t) dt \quad (2.17)$$

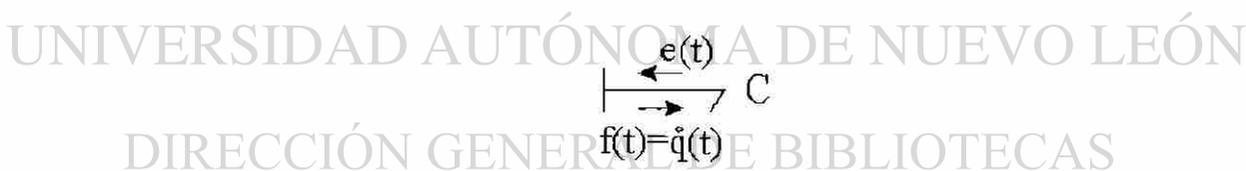


Figura 2.10 Elemento- C en causalidad integral.

Invirtiendo la causalidad, mostrada en la figura 2.10, se obtiene la misma relación (2.17) pero escrita con derivadas:

$$f(t) \triangleq C \frac{de(t)}{dt} \quad (2.18)$$

a esta causalidad se le llama *causalidad derivativa* de un elemento de almacenamiento.

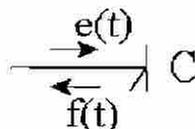


Figura 2.11 Elemento- C en causalidad derivativa.

En la tabla 2.7 se muestran los Puertos 1 con la causalidad correspondiente a cada elemento considerado.

Elemento	Forma Causal	Relación Causal
Fuente de Esfuerzo	$MS_e \longrightarrow$	$e(t) = E(t)$
Fuente de Flujo	$MS_f \longleftarrow$	$f(t) = F(t)$
Resistencia	$\longleftarrow R$	$e(t) = \Phi_R[f(t)]$
	$\longrightarrow R$	$f(t) = \Phi_R^{-1}[e(t)]$
Capacitancia	$\longleftarrow C$	$e(t) = \Phi_C^{-1}[\int f(\tau) d\tau]$
	$\longrightarrow C$	$f(t) = \frac{d}{dt}[\Phi_C e(t)]$
Inductancia	$\longrightarrow l$	$f(t) = \Phi_l^{-1}[\int e(\tau) d\tau]$
	$\longleftarrow l$	$e(t) = \frac{d}{dt}[\Phi_l f(t)]$

Tabla 2.7 Formas Causales para Puertos 1.

Para poder obtener las ecuaciones diferenciales cumpliendo con las reglas de causalidad de la Tabla 2.6, el siguiente procedimiento debe ser seguido en orden estricto.

Procedimiento 2.1 Asignación de Causalidad en un multipuerto

1. Considerar cualquier MS_e o MS_f y asignar su causalidad requerida e inmediatamente extender las implicaciones causales, usando las restricciones de 0, 1, TF , y GY . (Ver Tabla 2.6)
2. Asignar causalidad integral a los elementos C e I respetando las restricciones de la Tabla 2.6.
3. Escoger cualquier R que no este asignado y dar una causalidad arbitraria a R . Extender las implicaciones usando 0, 1, TF y GY . (Ver Tabla 2.6)

Se dice que un Bond Graph es *Causalmente Correcto*, cuando no existe conflicto de causalidad entre los elementos y las uniones.

En particular debe observarse que la causalidad derivativa de un elemento almacenador de energía proporciona propiedades importantes que se explican en la siguiente sección.

2.4.6 La Causalidad Derivativa en un Bond Graph.

La causalidad derivativa se presenta cuando un sistema contiene elementos de almacenamiento de energía que no son dinámicamente independientes, en un asignación de causalidad integral predefinida. Esto se presenta por ejemplo, cuando en un sistema eléctrico, se encuentran dos capacitores en paralelo como se ilustra en la figura 2.12.

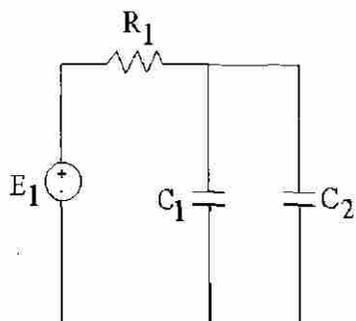


Figura 2.12 Ejemplo de un circuito eléctrico en causalidad derivativa.

Se tienen dos posibles esquemas de Bond Graph dependiendo si C_1 se le asigna una causalidad integral entonces C_2 tendrá una causalidad derivativa o viceversa, ambos esquemas se muestran en la figura 2.13.

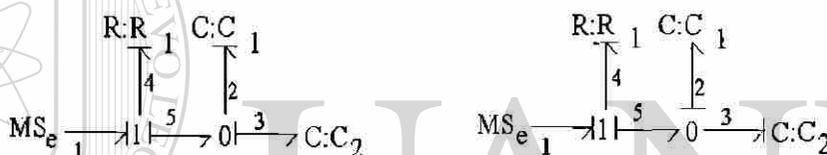


Figura 2.13 Bond Graph en causalidad derivativa de la figura 2.12.

El número de elementos que almacenan energía en causalidad integral es el número de ecuaciones diferenciales linealmente independientes y el número de elementos almacenadores en causalidad derivativa es el número de ecuaciones diferenciales linealmente dependientes [29].

2.4.7 Bond Activo

Un bond normal tiene dos señales, esfuerzo $e(t)$ y flujo $f(t)$. A diferencia, un *bond activo* comunica una de las dos señales posibles en una sola dirección [19].

Un *bond activo* se representa por una flecha completa, como se muestra en la figura 2.14, indicando un flujo de señal de potencia cero [18].



Figura 2.14 Bond activo.

Un bond activo se utiliza como una señal en un diagrama a bloques, la cual conecta un bloque a otro sin consumir energía [19] como se ilustra en la figura 2.15.

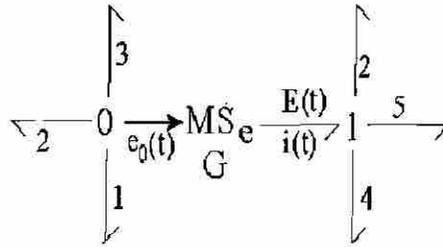


Figura 2.15 Bond Graph con un bond activo.

El bond activo que entra a MS_e indica que $E(t)$ es modulada por $e_0(t)$, así, $E(t) = Ge_0(t)$, donde G es la ganancia de voltaje.

El bond activo viene de una unión-0, el voltaje $e_0(t)$ es el mismo que e_1 , e_2 y e_3 . Además, el bond activo tiene potencia cero debido a que se considera que la corriente correspondiente a $e_0(t)$ es despreciable. La suma de corrientes en la unión-0, se debe únicamente a i_1 , i_2 e i_3 .

Los componentes básicos para el modelado de sistemas físicos han sido estudiados en esta sección, así, a continuación se proporciona un procedimiento para modelar sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos, el cual se puede extender a otro tipo de sistemas físicos.

2.5 Procedimiento para el Modelado de Sistemas [58]

En esta sección, se explica como representar sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos en Bond Graph utilizando un procedimiento de modelado simple y directo.

Procedimiento 2.2 [58]

1. Dibujar una unión-0 para cada punto en el esquema donde las trayectorias paralelas coincidan.
2. Dibujar una unión-1 para cada componente en una trayectoria serie y conectar el componente apropiado de Bond Graph por un bond en esa unión. La dirección de la semiflecha en cada bond indica la dirección asumida del flujo de potencia, es decir, a partir de fuentes y hacia elementos almacenadores y elementos disipadores.
3. Dibujar bonds entre uniones adyacentes, nuevamente indicando la dirección de flujo de potencia.
4. Remover la unión-0 que representa el punto de referencia y remover todos los bonds conectados a esta unión.
5. Simplificar la gráfica de acuerdo a las siguientes reglas:



A continuación, el Procedimiento 2.2 se aplica al modelado de sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos.

2.5.1 Sistemas Eléctricos

El Procedimiento 2.2, es un procedimiento general para obtener el Bond Graph de un sistema. En el caso de sistemas eléctricos, se realizan las siguientes observaciones:

- En el paso 1, a cada voltaje distinto en el circuito le corresponde una unión-0.
- En el paso 4, el punto de referencia es el nodo de tierra, el cual tiene un voltaje de cero.

A continuación, se ilustra el procedimiento anterior con un ejemplo de un circuito eléctrico, mostrado en la figura 2.16.

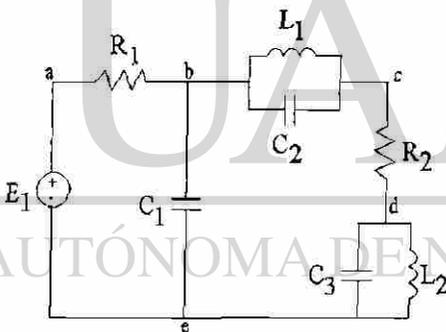


Figura 2.16 Ejemplo de un circuito eléctrico.

Los pasos 1, 2, 3 y 4 del Procedimiento 2.2 se ilustran en la figura 2.17.

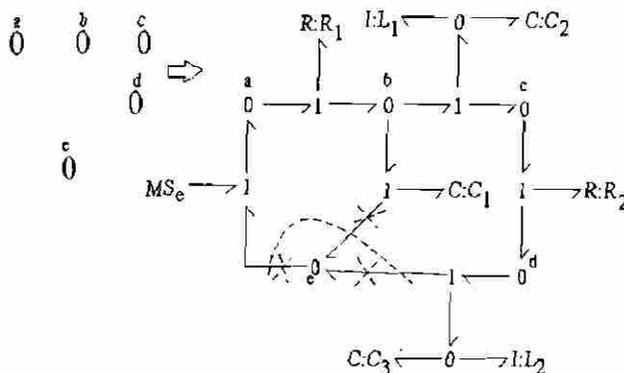


Figura 2.17 Procedimiento para obtener el Bond Graph de un circuito eléctrico.

Finalmente, reduciendo, es decir, utilizando el paso 5 del Procedimiento 2.2 y aplicando la asignación de causalidad del Procedimiento 2.1 se obtiene el Bond Graph mostrado en la figura 2.18.

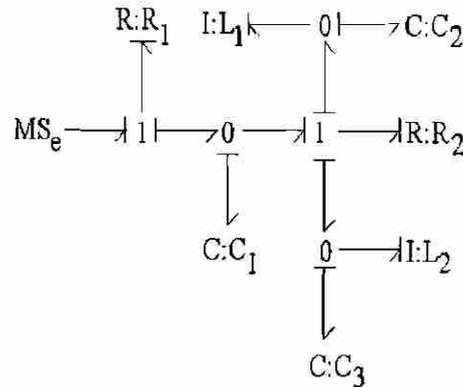


Figura 2.18 Bond Graph del ejemplo de un sistema eléctrico.

2.5.2 Sistemas Mecánicos

El procedimiento de modelado para traslación mecánica es similar al método de construcción para redes eléctricas en muchos aspectos. Por lo tanto, el método de construcción está basado por el Procedimiento 2.2 realizándose los siguientes cambios:

- En el paso 1, para cada velocidad distinta establecer una unión-1.
- En el paso 2, insertar los elementos de generación de fuerza de puerto-1 entre el par apropiado de uniones-1 usando uniones-0. También, añadir inercias a sus respectivas uniones-1.
- En el paso 4, el nodo particular de tierra es cualquier velocidad cero.

Es importante señalar que gracias a la simetría entre las variables de flujo y de esfuerzo se tienen dos formas de asignar las variables generalizadas, a variables de un sistema mecánico las cuales son [55]:

- Analogía Clásica $\left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad } V(t) \text{ o } \omega(t), \text{ es análoga al flujo } f(t) \\ \text{Fuerza } F(t) \text{ o } \tau(t), \text{ es análoga al esfuerzo } e(t) \end{array} \right.$
- Analogía de Movilidad $\left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad } V(t) \text{ o } \omega(t), \text{ es análoga al esfuerzo } e(t) \\ \text{Fuerza } F(t) \text{ o } \tau(t), \text{ es análoga al flujo } f(t) \end{array} \right.$

Históricamente, la analogía clásica precede a la analogía de movilidad y es la que se ha adoptado en esta tesis, por ser gráficamente semejante a sus equivalentes eléctricos y por ser la más utilizada en la bibliografía de Bond Graph [18, 24, 29, 27, 55, 58].

A continuación, se aplica el Procedimiento 2.2 con los cambios descritos, para encontrar el Bond Graph mostrado en la figura 2.19 [55].

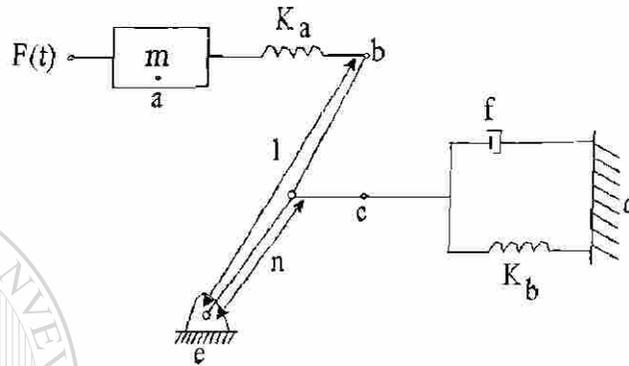


Figura 2.19 Ejemplo de un Sistema mecánico.

Aplicando los pasos 1, 2, 3, 4 del Procedimiento 2.2, obtenemos la figura 2.20.

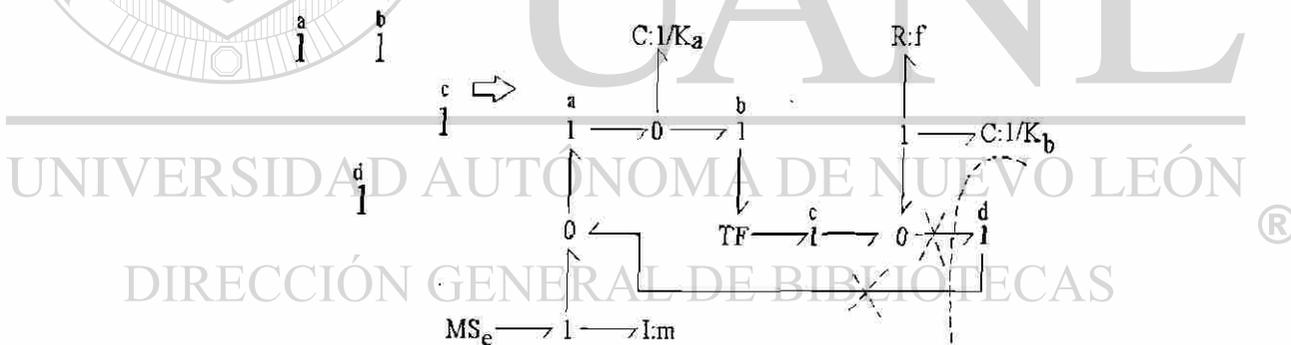


Figura 2.20 Procedimiento para encontrar el Bond Graph de un sistema mecánico.

Reduciendo la gráfica de la figura 2.20, obtenemos el Bond Graph mostrado en la figura 2.21, con la causalidad aplicada.

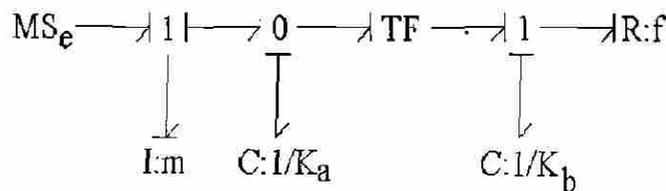


Figura 2.21 Bond Graph de un sistema mecánico.

2.5.3 Sistemas Hidráulicos.

Sistemas hidráulicos están caracterizados por alta presión, baja velocidad de fluido y los modelos se basan en la hipótesis de que toda la potencia del fluido de interés es el producto de la presión por el del fluido [55].

Cuando el flujo de volumen es conservativo y el fluido es cercanamente incomprensible, los sistemas hidráulicos pueden ser tratados como circuitos, por lo que para obtener el Bond Graph correspondiente se tiene el Procedimiento 2.2 con los siguientes cambios:

- En el paso 1, para cada presión distinta establecer una unión-0.
- En el paso 2, insertar cada elemento entre el pares de uniones-0 apropiadas usando uniones-1, añadir fuentes de presión y de flujo.
- En el paso 4, definir todas las presiones relativas a una presión de referencia (usualmente la atmosférica), eliminar la unión-0 de referencia y sus bonds.

En la figura 2.22 se muestra un sistema hidráulico, del cual se obtendrá su Bond Graph correspondiente aplicando el Procedimiento 2.2.

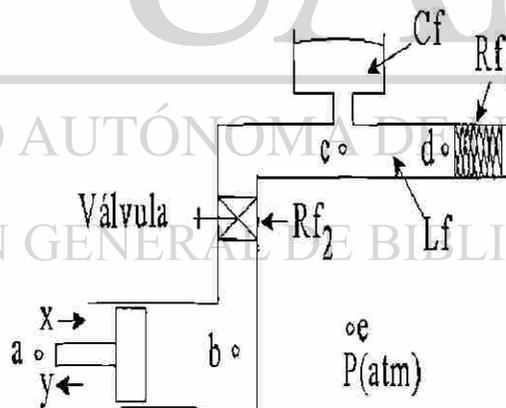


Figura 2.22 Ejemplo de un sistema hidráulico.

Aplicando los pasos 1, 2, 3 y 4 del Procedimiento 2.2, obtenemos la figura 2.23.

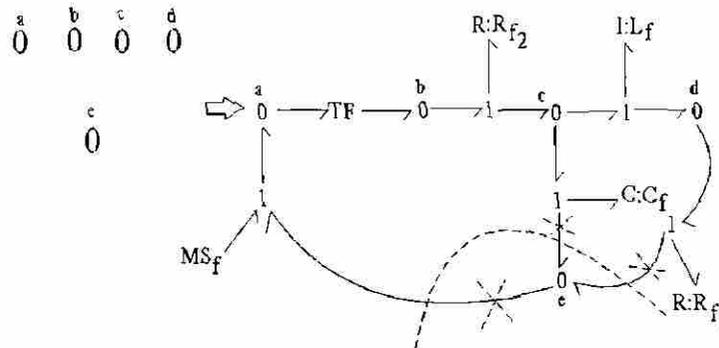


Figura 2.23 Procedimiento para encontrar el Bond Graph de un sistema hidráulico.

Reduciendo el Bond Graph de la figura 2.23 y aplicando el análisis de causalidad del Procedimiento 2.1, se obtiene el Bond Graph que se muestra en la figura 2.24.

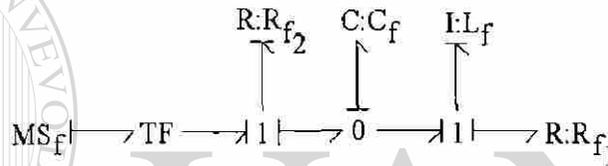


Figura 2.24 Bond Graph de un sistema hidráulico.

A partir del modelado de Bond Graph de un sistema físico, se pueden conocer las relaciones entre los diferentes elementos que forman el sistema, para obtener de una manera sistemática el modelo matemático del mismo, lo cual se describe en la siguiente sección.

2.6 Estructuras de Unión en Sistemas Multipuerto [5, 31]

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Considerar algunos tipos de sistemas grandes como campos interconectados, nos da una estructura dinámica y entonces la generación, manipulación y reducción de muchas ecuaciones es hecha sistemáticamente para una implementación exitosa [18].

2.6.1 Vectores Clave o Vectores Significativos

En un Bond Graph en forma convencional, todos los bonds pueden ser clasificados en *bonds externos*, que conectan a los elementos o puertos R , C , I , MS_e y MS_f , y en *bonds internos* que conectan a 0 , 1 , TF y GY . Así mismo, los bonds externos pueden ser clasificados de acuerdo a su forma de manifestación de energía. En la figura 2.25 se muestra el diagrama a bloques de la Estructura de Unión de un Bond Graph.

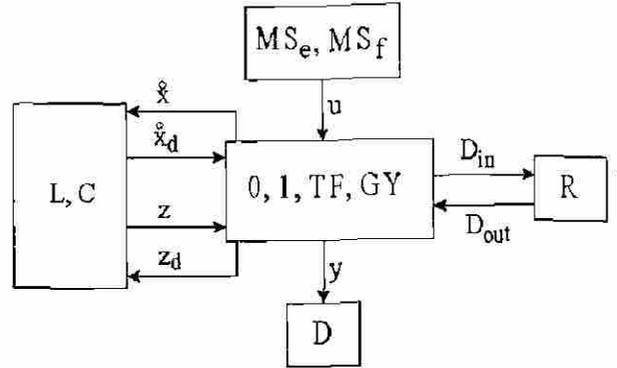


Figura 2.25 Digrama a bloques de la Estructura de Unión de un Bond Graph.

En la figura 2.25, las variables (MS_e, MS_f) , (L, C) y (R) denotan los *campos de fuente*, de *almacenamiento* y de *dissipación* respectivamente, (D) el detector y $(0, 1, TF, GY)$ la estructura de unión con transformadores, TF , giradores, GY , uniones-0 y uniones-1.

Los vectores que representan al sistema llamados *vectores clave* están representados en la figura 2.25, donde $u(t) \in \mathbb{R}^p$ contiene las variables de potencia o los esfuerzos y flujos impuestos por los elementos de las fuentes en la Estructura de Unión. Los estados $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $x_d(t) \in \mathbb{R}^m$ están compuestos de variables de energía, momento generalizado $p(t)$ en elementos I y desplazamiento generalizado $q(t)$ en elementos C en causalidad integral y derivativa respectivamente; $z(t) \in \mathbb{R}^n$ y $z_d(t) \in \mathbb{R}^m$ son variables de co-energía en causalidad integral y derivativa, respectivamente $D_{in}(t) \in \mathbb{R}^r$ y $D_{out}(t) \in \mathbb{R}^r$ son una mezcla de esfuerzos y flujos que muestran los intercambios energéticos entre el campo de dissipación y la Estructura de Unión.

2.6.2 Relaciones de Campo y Ecuación de Estado.

Las relaciones de campo no lineales de la figura 2.25 de almacenamiento y de dissipación son:

$$z(t) = \Phi_F(x) \quad (2.19)$$

$$z_d(t) = \Phi_{Fd}(x_d) \quad (2.20)$$

$$D_{out}(t) = \Phi_L(D_{in}) \quad (2.21)$$

donde:

Φ_F denota una función que relaciona cada z_i con x_i para $i = 1, \dots, n$.

Φ_{Fd} denota una función que relaciona cada z_{di} con x_{di} para $i = 1, \dots, m$.

Φ_L denota una función que relaciona cada D_{outi} con D_{ini} para $i = 1, \dots, \mathcal{M}$ 24

El comportamiento de un elemento específico está descrito por una ley física la cual es

llamada como su *relación constitutiva*. Si las relaciones constitutivas son lineales tenemos:

$$z(t) = Fx(t) \quad (2.22)$$

$$z_d(t) = F_d x_d(t) \quad (2.23)$$

$$D_{out}(t) = LD_{in}(t) \quad (2.24)$$

donde L , F y F_d son matrices reales de dimensión $r \times r$, $n \times n$ y $m \times m$, respectivamente.

Las relaciones de la estructura de unión están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$z_d(t) = -S_{14}^T z(t) \quad (2.26)$$

donde la estructura de unión está formada por:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Los elementos de S toman valores dentro del conjunto $\{0, \pm 1, \pm n, \pm r\}$ donde n y r son los módulos del transformador y girador. La matriz S está particionada de acuerdo a la dimensión de sus vectores clave. Las submatrices S_{ij} tienen las siguientes propiedades:

- P1.- S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas antisimétricas.
- P2.- S_{12} es la matriz transpuesta negativa de S_{21} y viceversa.

Las propiedades P1 y P2 están basadas en el principio de conservación de energía [19].

Un sistema LIT MEMS está representado en variables de estado por:

$$\dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p u(t) \quad (2.28)$$

$$y(t) = C_p x(t) + D_p u(t)$$

Relacionando (2.25) y (2.26) con (2.28) obtenemos:

$$A_p = E^{-1} (S_{11} + S_{12} M S_{21}) F \quad (2.29)$$

$$B_p = E^{-1} (S_{13} + S_{12} M S_{23}) \quad (2.30)$$

$$C_p = (S_{31} + S_{32} M S_{21}) F \quad (2.31)$$

$$D_p = S_{33} + S_{32} M S_{23} \quad (2.32)$$

siendo,

$$E = I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^T F \quad (2.33)$$

$$M = (I - LS_{22})^{-1} L \quad (2.34)$$

Las expresiones (2.28) a (2.34) permiten la obtención directa del modelo de un sistema físico en variables de estado, utilizando la representación de Bond Graph.

Es importante notar que un sistema representado en Bond Graph contiene relaciones causales que determinan propiedades estructurales, como controlabilidad u observabilidad, las cuales se dan en el Apéndice A.

En el siguiente capítulo, se presenta la representación de un sistema físico en una gráfica lineal a partir de su Bond Graph, así mismo, se proponen procedimientos para obtener la representación en variables de estado del sistema basándose en su gráfica lineal y en propiedades de Teoría de Gráfos.

2.7 Conclusiones

En el presente capítulo, se estudiaron los elementos básicos para modelar un sistema físico en Bond Graph.

Los procedimientos dados permiten obtener el Bond Graph para un sistema eléctrico, un sistema hidráulico o un sistema mecánico traslacional o rotacional.

Así mismo, se estudiaron las diferentes variables, componentes y aplicación correcta de la causalidad a los elementos que forman el sistema para tener la Estructura de Unión en Bond Graph y obtener la representación en espacio de estado.

Capítulo 3

Obtención de la Realización LTI MIMO Utilizando un Grafo Lineal a partir de su Bond Graph

3.1 Introducción

El análisis de un sistema lineal se reduce a la solución de un sistema de ecuaciones lineales simultáneas. Como una alternativa a los métodos convencionales algebraicos de solución, es posible obtener una solución considerando las propiedades de ciertos grafos dirigidos asociados con el sistema, donde, las variables de las ecuaciones corresponden a los nodos del grafo, mientras que las relaciones entre ellas aparecen en la forma de conexión de las ramas dirigidas [69]. Especialmente problemas lineales, dado que en muchos casos los grafos dirigidos asociados pueden ser obtenidos directamente por inspección del sistema físico sin la necesidad de formular las ecuaciones asociadas [69]. Los grafos dirigidos ofrecen una estructura visual que permite obtener y compara las relaciones causales entre algunas variables [69].

La idea básica de asociar un grafo dirigido con un sistema de ecuaciones lineales fue introducida por Mason en 1953, y el grafo es llamado grafo de *señal-flujo* [69]. Una representación alternativa de las ecuaciones como un grafo dirigido, llamado un *grafo de flujo*, ha sido descrito por Coates en 1959 [69].

Un sistema físico LTI MIMO formado por una diferentes tipos de energía, puede ser modelado gráficamente en Bond Graph. Alternativamente, en este capítulo se presenta un procedimiento para obtener un grafo lineal del sistema físico. Así mismo, se presentan procedimientos basados en la Teoría de gráficos para la obtención de las matrices A_p , B_p , C_p , y D_p de

una representación en variables de estado del sistema modelado en Bond Graph. En el Apéndice C, sección C.1, se da un artículo publicado con los resultados presentados en éste capítulo [35].

La Teoría de gráficos lineales ha sido utilizada para encontrar la matriz Coates, su determinante y polinomio característico [69]. La aplicación más importante de Teoría de gráficos en la ciencia física, es su uso en la formulación y solución del problema de redes eléctricas planteado por Kirchoff en 1847 [69].

El presente capítulo está dividido principalmente en cuatro partes: inicialmente, se estudian un conjunto de definiciones y propiedades de los grafos lineales; después se presenta la representación en un grafo lineal de un sistema físico modelado en Bond Graph. La tercera parte de éste capítulo, consiste en proponer procedimientos para obtener la realización en espacio de estado a partir un grafo lineal del sistema; y posteriormente se aplican en dos ejemplos los resultados presentados.

3.2 Antecedentes [69]

A continuación se da una lista de definiciones de los grafos lineales útiles para entender el contenido de este trabajo.

3.2.1 Conceptos Básicos de Grafos Abstractos

Un *Grafo Abstracto* $G(V, E)$, o simplemente un grafo G , consiste de un conjunto V de elementos llamados *nodos* junto con un conjunto E de pares no ordenados de la forma (i, j) o (j, i) , $i \in V$ y $j \in V$, llamados *Ramas* de G . Los nodos i y j son llamados los *Puntos Finales* de (i, j) .

Se dice que la rama (i, j) está conectada entre los nodos i y j , y que (i, j) es incidente con los nodos i y j . Usualmente, un grafo es representado equivalentemente por un diagrama, en el cual, los nodos son indicados por pequeños círculos o puntos. La rama (i, j) es una curva continua o una línea directa, si (i, j) está en E .

Se extiende el concepto de grafo permitiendo la conexión de un par de nodos por un conjunto de ramas distintas, indicadas por los símbolos $(i, j)_1, (i, j)_2, \dots, (i, j)_k$; llamadas *Ramas Paralelas* de G si $k \geq 2$.

Se admiten ramas para las cuales sus puntos finales son idénticos, tal rama (i, i) es llamada *Lazo-Propio*. Si hay dos o más lazos-propios en un nodo de G , ellos también son designados como ramas paralelas de G .

Un grafo $G(V, E)$ se dice ser finito si ambos V y E son finitos.

Un *Subgrafo* de un grafo $G(V, E)$ es un grafo $G_s(V_s, E_s)$ en el cual V_s y E_s son subconjuntos de V y E , respectivamente. Si V_s y E_s es un subconjunto propio, el subgrafo es llamado un *Subgrafo Propio* de G . Si $V_s = V$, el subgrafo es denominado *Subgrafo Completo* de G . Si V_s ó E_s es vacío, el subgrafo es llamado *Grafo Nulo*.

Un nodo no incidente con cualquier rama es llamado un *Nodo Aislado*.

Dos subgrafos son llamadas de *Ramas Disjuntas* si no tienen ramas en común y de *Nodos Disjuntos* si no tienen nodos en común.

Un grafo es *Etiquetado* si sus nodos son etiquetados o sus ramas son etiquetadas. Un *Grafo Pesado* es un grafo en la cual a todas sus ramas les ha sido asignado un peso.

Una *Secuencia de Ramas* de Longitud $k - 1$ en un grafo G es una secuencia finita de ramas en G de la forma:

$$(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k) \quad (3.1)$$

$$k \geq 2.$$

La secuencia de ramas se dice ser *Cerrada* si $i_1 = i_k$, y *Abierta* en cualquier otro caso. En una secuencia de ramas abierta, el nodo i_1 es llamada el *Nodo Inicial* y el nodo i_k el *Nodo Terminal*.

La secuencia de ramas (3.1) es conectada entre sus nodos inicial y terminal o entre los nodos i_1 e i_k , si para $k > 2$, (i_{x-1}, i_x) y (i_x, i_{x+1}) , $1 < x < k$, son ramas sucesivas en la secuencia de rama.

Si todas las ramas que aparecen en una secuencia de ramas son distintas, la secuencia de ramas es llamada *Tren de Rama*. Un tren de rama abierta, como el mostrado en la ecuación (3.1), en el cual todos los nodos i_1, i_2, \dots, i_k son distintos es llamado una *Ruta o Trayectoria* de longitud $k - 1$. Un nodo aislado es considerado una trayectoria de longitud cero.

Un tren de ramas cerrado, como el mostrado en la ecuación (3.1), en el cual todos los nodos i_1, i_2, \dots, i_{k-1} son distintos e $i_1 = i_k$, es llamado un *Circuito* de longitud $k - 1$. Así, un lazo cerrado con un nodo es un circuito de longitud 1.

Un grafo se dice ser un *Grafo Conectado* si cada par de sus nodos es conectado por una trayectoria.

El *Grado* de un nodo i de un grafo, denotado por $d(i)$ es el número de ramas incidentes es el nodo i . Así, un nodo aislado es un nodo de grado cero.

Un grafo es *Grafo Regular* de grado k si $d(i) = k$ para cada nodo i .

Un grafo regular de grado 0 es un grafo que consiste de un conjunto de nodos aislados.

En la siguiente sección, se introducen algunas de las operaciones válidas en la teoría de grafos.

3.2.2 Operaciones en Grafos

Operaciones definidas en grafos son útiles para expresar la estructura de un grafo en términos de un conjunto de grafos más pequeños o más simples.

La *Remoción de un Nodo i* a partir de un grafo G es la operación que resulta en una subgrafo, que consiste de todos los nodos de G excepto i y todas las ramas que no inciden en i . Similarmente, la *Remoción de una Rama (i, j)* de G produce el subgrafo que contiene todos los nodos y ramas de G excepto la rama (i, j) .

Si $G_1(V_1, E_1)$ y $G_2(V_2, E_2)$ son dos subgrafos de un grafo $G(V, E)$, entonces $G_1 \cup G_2$ representa el subgrafo de G , llamado *Grafo de Suma*, consistente de un conjunto de nodo $V_1 \cup V_2$ y un conjunto de rama $E_1 \cup E_2$.

El *Grafo Intersección* $G_1 \cap G_2$ de los subgrafos G_1 y G_2 es el subgrafo de G con el conjunto de nodo $V_1 \cap V_2$ y el conjunto de rama $E_1 \cap E_2$.

Sea V_s un subconjunto de un conjunto de nodo V de una subgrafo G . El *Subgrafo Seccional* definida por V_s y denotado por $G[V_s]$ de G , es el subgrafo cuyo conjunto de nodo es V_s y cuyo conjunto de rama consiste de todas las ramas de G conectando dos nodos de V_s .

En otras palabras, $G[V_s]$ es el subgrafo obtenido de G por la remoción de todos los nodos que no están en V_s .

Un *Grafo Planar* es aquella cuyo diagrama puede ser dibujado en un plano tal que dos ramas no tienen otra intersección que no sea un nodo.

Si existe un subgrafo no nulo propio G_s , en un grafo conectado G , tal que G_s y su complemento tienen solamente un nodo i en común, entonces el nodo i es llamado *Punto de Corte* de G .

Un *Grafo No-Separable* es un grafo no-nulo que no contiene puntos de corte. Todos los otros grafos no nulos son considerados como separables.

Para un grafo conectado G , la *Distancia* entre dos nodos i y j de G , denotada por $d(i, j)$, está definida como la longitud de la trayectoria más corta que los conecta.

Hasta el momento, se han considerado grafos formados por ramas que no tienen dirección. En la siguiente sección se dan las definiciones de grafos dirigidos, que son más cercanas a

la relación de un Bond Graph y un grafo lineal.

3.2.3 Grafos Dirigidos

En muchas aplicaciones, es necesario asociar con cada rama de un grafo una orientación o dirección. En algunas situaciones, la orientación de las ramas es una orientación “verdadera” en el sentido de que el sistema representado por el grafo exhibe algunas propiedades unilaterales. En otras situaciones, la orientación utilizada es una “pseudo”-orientación utilizada en lugar de un sistema de referencia elaborado. Por ejemplo, en la Teoría de redes eléctricas las ramas de un grafo son asignadas a orientaciones arbitrarias para representar las referencias de las corrientes de ramas y voltajes.

Una *Grafo Dirigido Abstracto* $G_d(V, E)$ o simplemente una *Grafo Dirigido* G_d , consiste de un conjunto V de elementos llamados nodos junto con un conjunto E de pares ordenados de la forma (i, j) , llamados las *ramas dirigidas* de G_d ; i es llamado *Nodo Inicial* y j el *Nodo Terminal*.

En un grafo dirigido se permite tener varias ramas distintas con los mismos nodos iniciales y terminales. Ellas son llamadas *Ramas Paralelas* de G_d . Las ramas paralelas dirigidas del nodo i al nodo j son denotadas por los símbolos $(i, j)_1, (i, j)_2, \dots, (i, j)_k$, $k \geq 2$. También, se admiten ramas con los mismos puntos finales; los cuales son llamados *Lazos Propios* de G_d .

Los términos subgrafo, grafo seccional, rango, nulidad, el complemento de una subgrafo y otras operaciones gráficas pueden ser definidos para los grafos dirigidos de manera similar que para los grafos no dirigidos. Esto es posible debido a que para todo grafo dirigido G_d , existe un *Grafo no Dirigido Asociado* G_u cuyos conjuntos de nodo y de rama son los mismos que en G_d , excepto que las direcciones de las ramas de G_d son removidas.

Para un grafo dirigido G_d , una *Secuencia de Rama-Dirigida* de longitud $k - 1$ en G_d es una secuencia de rama en la cual las ramas a lo largo de la secuencia de rama son de la forma:

$$(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k), \quad k \geq 2 \quad (3.2)$$

La secuencia de rama dirigida se dice ser *cerrada* si $i_1 = i_k$, y *abierta* en cualquier otro caso. En una secuencia de rama-dirigida abierta, i_1 , es llamado su nodo inicial e i_k el nodo terminal.

Un tren de rama-dirigida, dado por la ecuación (3.2) en el cual todos los nodos i_1, i_2, \dots, i_k son distintos es llamado una *Trayectoria o Ruta Dirigida* de longitud $k - 1$.

Un tren de rama dirigido cerrado como el dado en (3.2) en el cual todos los nodos i_1, i_2, \dots, i_{k-1} son distintos e $i_1 = i_k$, es llamado un *Circuito Dirigido* de longitud $k - 1$.

Para un grafo dirigido G_d el número $d^+(i)$ de ramas de G_d teniendo como nodo inicial

a i es llamado el *Grado de Salida* del nodo i en G_d , y el número $d^-(i)$ de ramas de G_d teniendo como nodo terminal a i es llamado *Grado de Llegada* del nodo i en G_d .

Si $d(i)$ denota el número de ramas de G_d que inciden en el nodo i , entonces

$$d(i) \triangleq d^+(i) + d^-(i) \quad (3.3)$$

Un grafo dirigido es una *Grafo Regular dirigido* de grado k si $d^+(i) = d^-(i) = k$ para cada nodo i .

Un grafo dirigido es *Fuertemente Conectado* si, para todo par de nodos distintos i y j , existe una trayectoria dirigida de i a j así como de j a i .

3.2.4 Propiedades de los Grafos Dirigidos

Un *Grafo Dirigido Pesado* G es un grafo dirigido en el cual a cada rama le ha sido asignado un peso. Denotamos por $f(i, j)$ al peso asociado con la rama (i, j) de G . Si G_s es un subgrafo de G , por $f(G_s)$ entendemos que:

$$f(G_s) \triangleq \prod_{k=1}^n f(i, j) \quad (3.4)$$

donde n es el número de ramas de G_s .

Para una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ de orden n , el *Grafo de Coates* asociado, denotado por el símbolo $G_c(A)$ o simplemente G_c , es un grafo dirigido, etiquetado y pesado de n -nodos. Los nodos son etiquetados por enteros de 1 a n tal que si $a_{ij} \neq 0$ existe una rama dirigida del nodo j al nodo i con un peso asociado a_{ij} para $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, n$.

Las propiedades establecidas en esta sección, son utilizadas en la siguiente sección para proponer un grafo lineal de un sistema representado en Bond Graph con sus vectores clave.

3.3 Obtención de un Grafo Lineal a partir de su Bond Graph

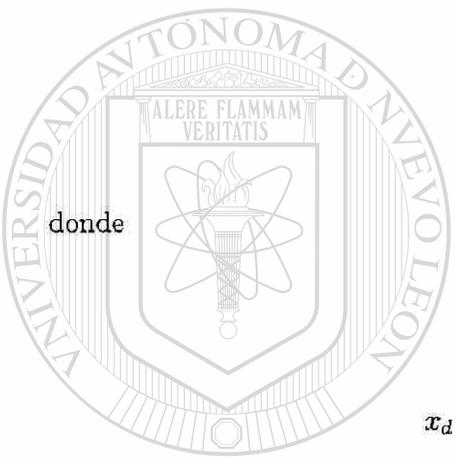
Un *Grafo Lineal* es un conjunto de líneas conectadas, que representan simbólicamente los elementos del sistema [55]. Así, la base en la construcción de un grafo lineal de un sistema, está basado en la selección de una convención con la cual elementos de un puerto y dos puertos pueden ser dibujados como segmentos de líneas simples.

Por otra parte, sabemos que un Bond Graph es un modelo gráfico de un sistema dinámico donde una colección de componentes interactúan unos con otros a través de puertos de energía [24]. Esto es, un Bond Graph consiste de subsistemas enlazados por líneas que muestran

las conexiones energéticas, permitiendo a través de sus vectores clave obtener información para su representación en una grafo lineal [29].

A continuación, se presenta un procedimiento para obtener una representación de un grafo lineal obtenida a partir de su Bond Graph. Para lograr un grafo lineal que conserva las propiedades energéticas y que permite utilizar herramientas de Teoría de Gráfos.

Considerando un sistema LTI MIMO que satisface las hipótesis H1, H2 y H3, del (Capítulo 1, sección 1.5), y las ecuaciones (2.22) a (2.27), se obtiene la siguiente estructura de la unión, en la cual las relaciones constitutivas y la interconexión de los elementos están definidos por S' :



$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S' \begin{bmatrix} x(t) \\ D_{in}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$S' = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} & S'_{14} \\ S'_{21} & S'_{22} & S'_{23} & 0 \\ S'_{31} & S'_{32} & S'_{33} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

$$x_d(t) = -(S'_{14}) x(t) \tag{3.7}$$

con

$$\begin{aligned} S'_{11} &\triangleq S_{11}F; & S'_{21} &\triangleq S_{21}F; & S'_{31} &\triangleq S_{31}F; & S'_{12} &\triangleq S_{12}L; \\ S'_{22} &\triangleq S_{22}L; & S'_{32} &\triangleq S_{32}L; & S'_{14} &\triangleq F_d^{-1}S_{14}^T F \end{aligned} \tag{3.8}$$

Para un sistema lineal e invariante en el tiempo, suponemos que S' en (3.6) es una matriz de Coates, la cual se muestra en la figura 3.1.

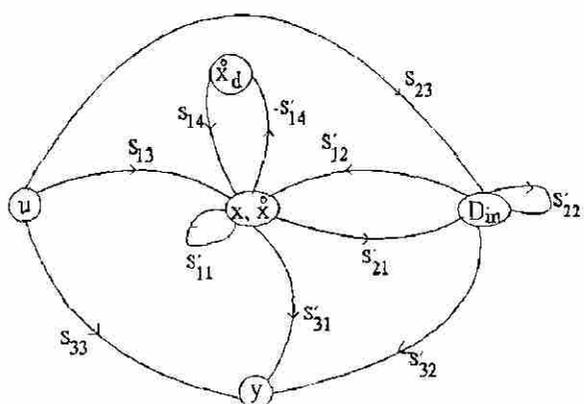


Figura 3.1 Grafo del sistema planar.

El grafo lineal de la figura 3.1, representa un grafo dirigido pesado, en la cual se observa lo siguiente:

- S_{14} y S'_{14} son las relaciones entre los elementos almacenadores de energía linealmente dependientes $\dot{x}_d(t)$ con los elementos linealmente independientes $x(t)$, $\dot{x}(t)$.
- La relación entre $x(t)$ y $\dot{x}(t)$, elementos del campo de almacenamiento está dada por S'_{11} y entre $D_{in}(t)$, elementos del campo de disipación por S'_{22} y la relación entre los éstos dos campos por S'_{12} y S'_{21} .
- Se conoce la influencia de la entrada $u(t)$ en el campo de almacenamiento mediante S_{13} y/o de disipación mediante S_{23} o en la salida $y(t)$ de una manera directa.
- Se determina que campos y por lo tanto que elementos intervienen en la salida del sistema.

En resumen, se tiene un grafo lineal con importantes propiedades de conectividad de sus elementos.

También, de (2.33) y (3.8) obtenemos

$$E^{-1} = (I + S_{14}S'_{14})^{-1} \quad (3.9)$$

Ahora, reduciendo el grafo de la figura 3.1 y utilizando (3.9), obtenemos el grafo que se muestra en la figura 3.2, donde

$$\bar{S}_{11} \triangleq E^{-1}S'_{11}; \quad \bar{S}_{12} \triangleq E^{-1}S'_{12}; \quad \bar{S}_{13} \triangleq E^{-1}S'_{13} \quad (3.10)$$

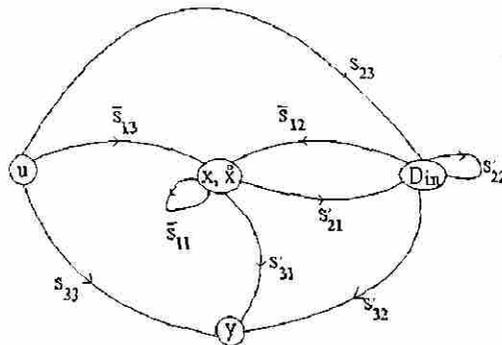


Figura 3.2 Grafo de Coates modificado.

Notar que en el grafo de la figura 3.2, \bar{S}_{11} , \bar{S}_{12} y \bar{S}_{13} incluyen la interconexión y relaciones constitutivas de los elementos $z(t)$ y $D_{out}(t)$ y la influencia de $x_d(t)$ en $\dot{x}(t)$ y $x(t)$ a través de E^{-1} .

La matriz de Coates del grafo de la figura 3.2, está dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{S_{11}} & \overline{S_{12}} & \overline{S_{13}} \\ S'_{21} & S'_{22} & S_{23} \\ S'_{31} & S'_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ D_{in}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

La representación (3.11) es una estructura más compacta del sistema físico, en la cual, el término $\dot{x}(t) \triangleq \frac{dx(t)}{dt}$, para sistemas LTI no afecta la interconexión de los elementos. Podemos reescribir la ecuación (3.11) de la forma,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \widehat{S} \begin{bmatrix} x(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

La matriz \widehat{S} representa una matriz de Coates modificada, donde la submatriz formada por $\dot{x}(t)$ y $x(t)$ es diferente a la submatriz de $\dot{x}(t)$ y $\dot{x}(t)$ por un factor $\frac{1}{s}$, donde s es el operador de Laplace, el cual omitimos con el objetivo de obtener directamente las matrices A_p y C_p de (2.28) en la siguiente sección.

Algunas características importantes del grafo de la figura 3.2 son:

- Es un grafo lineal dirigido que representa la ecuación matricial (3.11).
- Es un grafo dirigido, etiquetado y pesado.
- Los nodos matriciales $x(t)$, $\dot{x}(t)$ y $D_{in}(t)$ tienen como lazos propios $\overline{S_{11}}$ y $\overline{S_{22}}$ respectivamente.
- El nodo u del grafo dirigido, debe tener un grado de llegada cero, $d^-(u(t)) = 0$.
- El nodo y del grafo dirigido debe tener un grado de salida cero, $d^+(y(t)) = 0$.

Las definiciones de trayectoria dirigida, circuito dirigido, grafo regular dirigido dadas en la sección 3.2.3 y secuencia de rama dirigida se aplican en las secciones posteriores para los procedimientos de obtención de las matrices A_p , B_p , C_p y D_p , que son una realización de un sistema físico LTI.

En la siguiente sección, se presenta un esquema de la representación de un sistema físico LTI MIMO en sus vectores clave, que permite la obtención simplificada de un grafo lineal compuesto de dos nodos y de todas las posibles combinaciones de sus campos.

3.4 Representación de un Sistema LTI MIMO

En esta sección, se presenta un análisis de la representación gráfica de un sistema LTI MIMO. En la figura 3.2, se tiene una representación de un sistema físico en un grafo lineal a partir de su Bond Graph y de su matriz de la estructura de unión. A continuación, se introduce una forma general de la representación de un sistema físico en Bond Graph para estudiar las propiedades de interconexión, como se muestra en la figura 3.3.

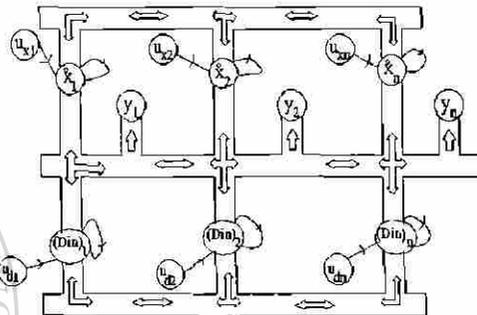


Figura 3.3 Representación de un sistema multivariable.

Considere el esquema de la figura 3.2 y note que el nodo $\hat{x}(t)$ es un vector de estados en la figura 3.2, lo mismo es cierto para $u(t)$, $y(t)$ y $D_{in}(t)$, lo cual se resalta en la figura 3.3. Así, el esquema de la figura 3.3 es una representación individual de los nodos del grafo lineal de la figura 3.2.

La interconexión de los nodos en la figura 3.3 es representada por \Leftrightarrow indicando un conjunto de ramas que pueden tener doble sentido.

La figura 3.4 representa, la interconexión de dos nodos i y j de la figura 3.3 con todas las posibles combinaciones, donde:

$$P \triangleq (I - S'_{22})^{-1} \quad (3.13)$$

La submatriz P tiene dos casos: $S'_{22} = 0$ o $S'_{22} \neq 0$, dependiendo del orden en que se encuentran los elementos de almacenamiento y disipación con respecto a la entrada, es decir, si a partir de la entrada los elementos de almacenamiento están antes de los elementos de disipación entonces $S'_{22} = 0$, en caso contrario $S'_{22} \neq 0$.

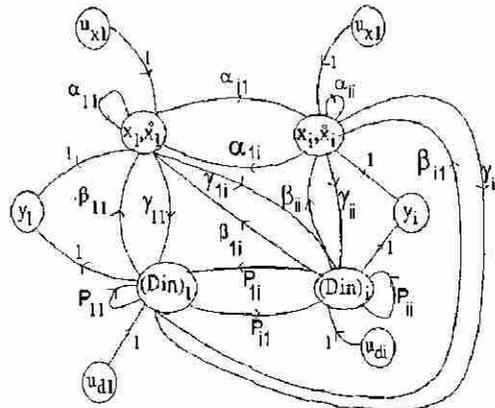


Figura 3.4 Sistema multivariable de dos nodos.

Sean $j \triangleq 1, i$ y $k \triangleq 1, i$, entonces en el grafo de la figura 3.4, se tienen las siguientes transmitancias:

- α_{11} que es la relación entre los elementos de las variables de estado x_1, \dot{x}_1 .
- γ_{11} que es la relación del campo de disipación $(D_{in})_1$ al campo de almacenamiento x_1, \dot{x}_1 .
- β_{jk} que es la relación del campo de almacenamiento x_1, \dot{x}_1 al campo de disipación $(D_{in})_1$.
- P_{jk} que es la relación entre los elementos del campo disipativo $(D_{in})_1$.

Las interconexiones de los nodos que se muestran en la figura 3.4, son la información necesaria para proponer, en la siguiente sección, los procedimientos para la obtención de una realización de un sistema físico.

3.5 Obtención gráfica de las Matrices A_p , B_p , C_p y D_p

Recuerde al sistema mostrado en la figura 3.2 corresponde a un sistema físico de n estados, r elementos disipativos, con p entradas y q salidas. A continuación, se presenta un procedimiento para el cálculo directo de las matrices A_p , B_p , C_p y D_p , que son la realización de un sistema LTI MIMO.

Este método es obtenido a partir del grafo reducido de la figura 3.4, cuya generalización es el esquema de la figura 3.3 y su representación matricial la figura 3.2.

3.5.1 Obtención de la Matriz A_p a partir de un grafo

Se encuentra la matriz A_p considerando solamente las ramas de salida y llegada a los nodos $x(t)$, $\dot{x}(t)$, haciendo circuitos dirigidos para los elementos de la diagonal y trayectorias

dirigidas para los elementos fuera de la diagonal. El procedimiento para encontrar la matriz A_p es el siguiente:

Procedimiento 3.1

1. Descomponer A_p en la suma de dos componentes:

$$A_p = A_{px} + A_{pd} \quad (3.14)$$

- La primer componente, A_{px} está formada por las transmitancias de las ramas de los nodos $x(t)$, $\dot{x}(t)$ dando sus elementos fuera de la diagonal y las transmitancias de los lazos propios de estos nodos, formando sus elementos de la diagonal. Por ejemplo, para la figura 3.4 tenemos:

$$A_{px} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1i} \\ \alpha_{i1} & \alpha_{ii} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

- La segunda componente, A_{pd} está formada por las transmitancias de las ramas entre nodos de $x(t)$, $\dot{x}(t)$ y nodos de $D_{in}(t)$ y está dada por:

$$A_{pd} = \begin{bmatrix} (A_{pd})_{11} & (A_{pd})_{1i} \\ (A_{pd})_{i1} & (A_{pd})_{ii} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

donde $(A_{pd})_{11}$, $(A_{pd})_{1i}$, $(A_{pd})_{i1}$ y $(A_{pd})_{ii}$.

2. Encontrar los elementos de la diagonal a través de:

- Empezar en los nodos $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ y $(D_{in}(t))_1$. Fijar la rama que llega a $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ de $(D_{in}(t))_1$. Construir todas las posibles combinaciones de circuitos dirigidos a través de la rama fijada, empezando y terminando en $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$, y satisfaciendo que:

Un circuito debe tener solamente una rama de $D_{in}(t)$. Si el circuito está formado por una rama de entrada y de salida del mismo nodo de $D_{in}(t)$, tendrá el lazo propio de $D_{in}(t)$.

Continuar con la siguiente rama que llega al nodo $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ respecto a $D_{in}(t)$ y así sucesivamente, hasta considerar la última rama que llega a $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$, respecto a $D_{in}(t)$.

- Utilizar el procedimiento previo para los próximos nodos de $\dot{x}(t)$ pero las ramas de entrada y salida debe ser del nodo actual.
- Cada término de cada elemento de A_{pd} está dado por:

$$\begin{aligned} \text{Término del elemento } (A_{pd})_{hk} &= (\delta_1)(\delta_2)(\delta_3) \\ h &= 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde:

- δ_1 = Transmitancia de la rama h , la cual llega a $x_h(t)$, $\dot{x}_h(t)$.
- δ_2 = Transmitancia del lazo propio de $(D_{in}(t))_k$ o transmitancia de la rama $(D_{in}(t))_k$, la cual conecta $(D_{in}(t))_k$ con $(D_{in}(t))_{k+1}$.
- δ_3 = Transmitancia de la rama k la cual sale de $x_k(t)$, $\dot{x}_k(t)$.

Para la figura 3.4, tenemos

$$\begin{aligned} (A_{pd})_{11} &= \beta_{11}P_{11}\gamma_{11} + \beta_{11}P_{1i}\gamma_{1i} + \beta_{1i}P_{ii}\gamma_{1i} + \beta_{1i}P_{i1}\gamma_{11} \\ (A_{pd})_{ii} &= \beta_{i1}P_{11}\gamma_{i1} + \beta_{i1}P_{1i}\gamma_{ii} + \beta_{ii}P_{i1}\gamma_{i1} + \beta_{ii}P_{ii}\gamma_{ii} \end{aligned} \quad (3.18)$$

3. Encontrar los elementos fuera de la diagonal de la matriz A_{pd} , utilizando el procedimiento dado en el paso 2, considerando que los términos de los elementos $(A_{pd})_{hk}$ ($h \neq k$), deben estar formados por trayectorias dirigidas del nodo $x_h(t)$, $\dot{x}_h(t)$ al nodo $x_k(t)$, $\dot{x}_k(t)$.

Para la figura 3.4,

$$\begin{aligned} (A_{pd})_{1i} &= \beta_{11}P_{11}\gamma_{i1} + \beta_{11}P_{1i}\gamma_{ii} + \beta_{1i}P_{i1}\gamma_{i1} + \beta_{1i}P_{ii}\gamma_{ii} \\ (A_{pd})_{i1} &= \beta_{i1}P_{11}\gamma_{11} + \beta_{i1}P_{1i}\gamma_{1i} + \beta_{ii}P_{i1}\gamma_{11} + \beta_{ii}P_{ii}\gamma_{1i} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Notar que si la submatriz $S'_{22} = 0$, entonces de (3.13) $P = I$.

3.5.2 Obtención de la Matriz B_p a partir de un grafo

Las transmitancias de las ramas de los nodos de $u(t)$ son consideradas en B_p . El Procedimiento para encontrar B_p es:

Procedimiento 3.2

1. Descomponer B_p en dos componentes,

$$B_p = \begin{bmatrix} B_{px} & B_{pd} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

- La primer componente, B_{px} está formada por la transmitancia de la rama, la cual conecta un nodo $u(t)$ con un nodo de $x(t)$, $\dot{x}(t)$ directamente. Por ejemplo, tenemos para la figura 3.4,

$$B_{px} = I_{2 \times 2} \quad (3.21)$$

- La segunda componente, B_{pd} está formada por las transmitancias de las ramas las cuales conectan un nodo de u con un nodo de $x(t)$, $\dot{x}(t)$ a través del nodo $D_{in}(t)$. Para la figura 3.4 tenemos,

$$B_{pd} = \begin{bmatrix} (B_{pd})_{11} & (B_{pd})_{1i} \\ (B_{pd})_{i1} & (B_{pd})_{ii} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

donde $(B_{pd})_{11}$, $(B_{pd})_{1i}$, $(B_{pd})_{i1}$ y $(B_{pd})_{ii}$.

2. Obtener los términos de los elementos de la diagonal de B_{pd} , haciendo lo siguiente:

- Empezando en el nodo, $(u_d(t))_1$. Se construyen todas las trayectorias dirigidas de las posibles combinaciones de las ramas que conectan $u_{d1}(t)$ con $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$, a través de $(D_{in}(t))_1$. Una trayectoria debe tener solamente una rama de $D_{in}(t)$ y si se tiene sólo una rama entre $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ y $(D_{in}(t))_1$, se aplica el lazo propio de $(D_{in}(t))_1$, así cada término queda determinado por:

$$\text{Término del elemento } (B_{pd})_{hk} = (\eta_1)(\eta_2)(\eta_3) \quad (3.23)$$

$$h = 1, 2, \dots, r; \quad k = 1, 2, \dots, p$$

donde:

- η_1 = Transmitancia de la rama h , la cual llega a $\dot{x}_h(t)$.
- η_2 = Transmitancia del lazo propio de $(D_{in}(t))_k$ o transmitancia de la rama $(D_{in}(t))_k$, la cual conecta $(D_{in}(t))_k$ con $(D_{in}(t))_{k+1}$.
- η_3 = Transmitancia de la rama k la cual sale de $u_{D_k}(t)$.

Por ejemplo, de la figura 3.4, tenemos:

$$(B_{pd})_{11} = \beta_{11}P_{11} + \beta_{1i}P_{i1}; \quad (B_{pd})_{ii} = \beta_{i1}P_{1i} + \beta_{ii}P_{ii} \quad (3.24)$$

3. Obtener los términos de los elementos que están fuera de la diagonal de B_{pd} , en una forma similar a sus elementos de la diagonal, considerando que para los términos del elemento $(B_{pd})_{hk}$, tomar el nodo de llegada $x_k(t)$, $\dot{x}_k(t)$ y el nodo de salida $(u_d(t))_k$ y para el término del elemento $(B_{pd})_{kh}$ es lo contrario, lo anterior es resumido utilizando (3.23) para $h \neq k$.

Por ejemplo, en la figura 3.4,

$$(B_{pd})_{1i} = \beta_{11}P_{1i} + \beta_{1i}P_{ii}; \quad (B_{pd})_{i1} = \beta_{i1}P_{11} + \beta_{ii}P_{i1} \quad (3.25)$$

3.5.3 Obtención de la Matriz C_p a partir de un grafo

Para encontrar C_p , se consideran las transmitancias de las ramas que llegan a nodos de $y(t)$ y salen de nodos de $x(t)$, $\dot{x}(t)$.

Procedimiento 3.3

1. Descomponer C_p en dos componentes:

$$C_p = C_{px} + C_{pd} \quad (3.26)$$

- La primer componente, C_{px} está formada por las transmitancias de las ramas las cuales conectan un nodo de $y(t)$ con un nodo de $\dot{x}(t)$ directamente. Por ejemplo, en la figura 3.4,

$$C_{px} = I_{2 \times 2} \quad (3.27)$$

- La segunda componente, C_{pd} está formada por las transmitancias de las ramas que conectan un nodo de $y(t)$ con un nodo de $x(t)$, $\dot{x}(t)$ a través del nodo de $D_{in}(t)$: Para la figura 3.4, tenemos:

$$C_{pd} = \begin{bmatrix} (C_{pd})_{11} & (C_{pd})_{1i} \\ (C_{pd})_{i1} & (C_{pd})_{ii} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

donde $(C_{pd})_{11}$, $(C_{pd})_{1i}$, $(C_{pd})_{i1}$ y $(C_{pd})_{ii}$.

2. Obtener los términos de los elementos de la diagonal de C_{pd} :

- Empezar por el nodo $y_1(t)$. Construir todas las trayectorias dirigidas de todas las posibles combinaciones de las transmitancias de ramas que conectan $y_1(t)$ con $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ a través $(D_{in}(t))_1$, satisfaciendo que una trayectoria debe tener solamente una rama de $D_{in}(t)$. Si sólo existe una rama entre $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ y $(D_{in}(t))_1$, se toma el lazo propio de $(D_{in}(t))_1$. Así, cada término está dado por:

$$\begin{aligned} \text{Término del elemento } (C_{pd})_{hk} &= (\rho_1)(\rho_2)(\rho_3) \\ h &= 1, 2, \dots, q; \quad k = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde:

- ρ_1 = Transmitancia de la rama h , la cual llega a $y_h(t)$.
- ρ_2 = Transmitancia del lazo propio de $(D_{in}(t))_k$ o transmitancia de la rama $(D_{in}(t))_k$, la cual conecta $(D_{in}(t))_k$ con $(D_{in}(t))_{k+1}$
- ρ_3 = Transmitancia de la rama k la cual sale de $x_h(t)$, $\dot{x}_h(t)$

Por ejemplo de la figura 3.4

$$(C_{pd})_{11} = P_{11}\gamma_{11} + P_{1i}\gamma_{1i}; \quad (C_{pd})_{ii} = P_{ii}\gamma_{ii} + P_{i1}\gamma_{i1} \quad (3.30)$$

3. Los términos de los elementos fuera de la diagonal de C_{pd} son obtenidos en el paso 2, tomando la transmitancia de la rama que sale del nodo $x_h(t)$, $\dot{x}_h(t)$ y que llega del nodo $y_k(t)$ y los términos del elemento $(C_{pd})_{hk}$, para $h \neq k$. Así, cada término está dado por (3.29). Por ejemplo, de la figura 3.4,

$$(C_{pd})_{1i} = P_{1i}\gamma_{ii} + P_{11}\gamma_{i1}; \quad (C_{pd})_{i1} = P_{ii}\gamma_{1i} + P_{i1}\gamma_{11} \quad (3.31)$$

3.5.4 Obtención de la Matriz D_p a partir de un grafo

Las transmitancias de ramas que llegan a nodos de $y(t)$ y salen de nodos de $u(t)$ son consideradas en D_p . El procedimiento para encontrar D_p es:

Procedimiento 3.4

1. La matriz D_p está formada por dos componentes

$$D_p = \begin{bmatrix} D_{px} & D_{pd} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

- La primer componente, D_{px} consiste de la transmitancia de rama que conecta un nodo de $y(t)$ con un nodo de $u(t)$ directamente. Por ejemplo, en la figura 3.4, $D_{px} = 0$.
- La segunda componente, D_{pd} son las transmitancias de ramas que conectan un nodo de salida con un nodo de entrada a través de un nodo de $D_{in}(t)$. Para la figura 3.4, tenemos:

$$D_{pd} = \begin{bmatrix} (D_{pd})_{11} & (D_{pd})_{1i} \\ (D_{pd})_{i1} & (D_{pd})_{ii} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

donde $(D_{pd})_{11}$, $(D_{pd})_{1i}$, $(D_{pd})_{i1}$ y $(D_{pd})_{ii}$ se obtienen en el paso 2.

2. Para los términos de los elementos de la diagonal de D_{pd} :

Empezar por el nodo de salida $y_1(t)$. Construir todas las trayectorias dirigidas de todas las posibles combinaciones de la transmitancia de ramas entre $y_1(t)$ con $(u_d(t))_1$ a través de $(D_{in}(t))_1$ considerando el lazo propio de $(D_{in}(t))_1$, para el resto de las salidas utilizar el mismo procedimiento. Así, cada término está dado por:

$$\begin{aligned} \text{Término del elemento } (D_{pd})_{hk} &= (\tau_1)(\tau_2)(\tau_3) \\ h &= 1, 2, \dots, p; \quad k = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde:

- $\tau_1 =$ Transmitancia de la rama h , la cual llega a $u_h(t)$
- $\tau_2 =$ Transmitancia del lazo propio de $(D_{in}(t))_k$ o transmitancia de la rama $(D_{in}(t))_k$, la cual conecta $(D_{in}(t))_k$ con $(D_{in}(t))_{k+1}$
- $\tau_3 =$ Transmitancia de la rama k la cual sale de $y_k(t)$

Por ejemplo, en la figura 3.4,

$$(D_{pd})_{11} = P_{11}; \quad (D_{pd})_{ii} = P_{ii}$$

3. Obtener los términos de los elementos fuera de la diagonal de D_{pd} , como se mostró en el paso 2, considerando que los términos del elemento $(D_{pd})_{hk}$, para $h \neq k$, es el producto de las transmitancias de $u_k(t)$ a $y_h(t)$, de esta forma, cada término está dado por (3.34).

Por ejemplo, en la figura 3.4,

$$(D_{pd})_{1i} = P_{1i}; \quad (D_{pd})_{i1} = P_{i1}$$

Es importante notar que con un poco de experiencia y habilidad las matrices A_p , B_p , C_p y D_p son obtenidas directamente, de una manera simple y rápida a partir del grafo de Coates del sistema físico.

En la siguiente sección se aplican los procedimientos propuestos en dos ejemplos, a fin de obtener una realización del sistema físico.

3.6 Ejemplos

A continuación, se proporcionan dos ejemplos de aplicación de los procedimientos presentados en este capítulo.

3.6.1 Ejemplo de un Sistema Mecánico

Considere el sistema mecánico y su modelo en Bond Graph mostrados en la figura 3.5.

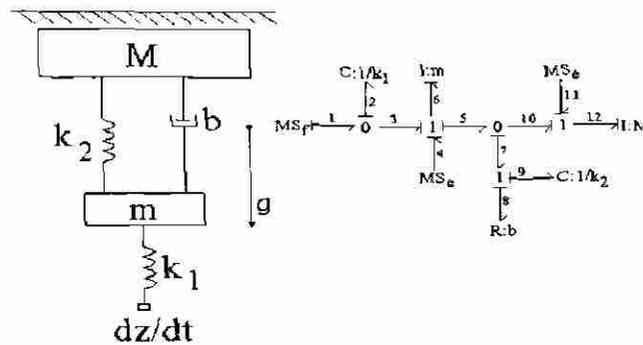


Figura 3.5 Sistema mecánico y su modelo en Bond Graph.

Los vectores clave son:

$$x(t) = \begin{bmatrix} q_2(t) \\ p_6(t) \\ q_9(t) \\ p_{12}(t) \end{bmatrix}; \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) \\ e_6(t) \\ f_9(t) \\ e_{12}(t) \end{bmatrix}; \quad z(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) \\ f_6(t) \\ e_9(t) \\ f_{12}(t) \end{bmatrix}; \quad u(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ e_4(t) \\ e_{11}(t) \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} y(t) = f_8(t) \\ D_{in}(t) = f_8(t) \\ D_{out}(t) = e_8(t) \end{matrix}$$

donde $f(t)$ denota la velocidad y $e(t)$ la fuerza en cada elemento del sistema mecánico; $q_2(t)$ y $q_9(t)$ los desplazamientos traslacionales en k_1 y k_2 , respectivamente; $p_6(t)$ y $p_{12}(t)$ los momentos traslacionales en m y M , respectivamente; $f_1(t)$ la velocidad de entrada, y $e_4(t)$ y $e_{11}(t)$ la fuerzas de gravedad de m y M , respectivamente.

Las relaciones constitutivas para los elementos son:

$$\begin{aligned} F &= \text{diag} \left\{ k_1, \frac{1}{m}, k_2, \frac{1}{M} \right\} \\ L &= b \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$F_d = 0$$

La representación del sistema está dada por (3.11) donde:

$$\begin{aligned} \overline{S}_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{m} & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & \frac{-1}{M} \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \overline{S}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \\ b \end{bmatrix}; \quad \overline{S}_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \overline{S}'_{21} &= \overline{S}'_{31} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & \frac{-1}{M} \end{bmatrix}; \quad \overline{S}'_{22} = \overline{S}'_{23} = \overline{S}'_{32} = \overline{S}'_{33} = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

El grafo correspondiente a la ecuación (3.36) se muestra en la figura 3.6.

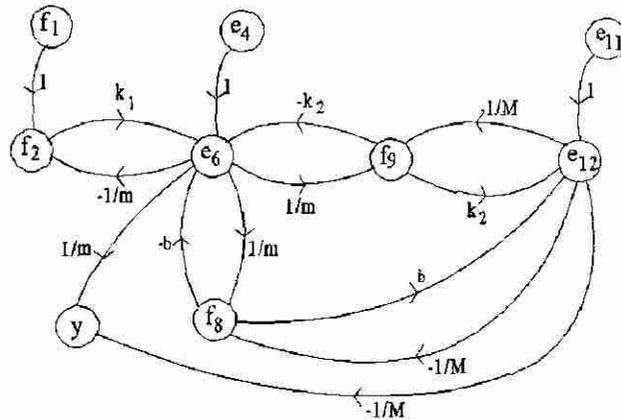


Figura 3.6 Grafo de Coates del sistema mecánico.

Para obtener el modelo dinámico en variables de estado dado por (2.28), utilizamos la sección 3.5, notando que de (3.36), $S'_{22} = 0$, dando $P = I$ de (3.13). Ahora, de (3.15), tenemos:

$$A_{px} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{m} & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & \frac{-1}{M} \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

De (3.16) tenemos:

$$A_{pd} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (A_d)_{22} & 0 & (A_d)_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (A_d)_{42} & 0 & (A_d)_{44} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Para calcular $(A_{pd})_{22}$ y $(A_{pd})_{44}$ de (3.17) obtenemos:

$$(\delta_1)_{11} = -b \quad (\delta_2)_{11} = 1 \quad (\delta_3)_{11} = \frac{1}{m} \quad (3.39)$$

sustituyendo (3.39) en (3.17) se obtiene:

$$(A_{pd})_{22} = -\frac{b}{m} \quad (3.40)$$

Análogamente,

$$(\delta_1)_{44} = b \quad (\delta_2)_{44} = 1 \quad (\delta_3)_{44} = -\frac{1}{M} \quad (3.41)$$

sustituyendo (3.41) en (3.17) da:

$$(A_{pd})_{44} = -\frac{b}{M} \quad (3.42)$$

Ahora bien, para $(A_d)_{24}$ de (3.17) tenemos:

$$(\delta_1)_{24} = -b \quad (\delta_2)_{24} = 1 \quad (\delta_3)_{24} = -\frac{1}{M} \quad (3.43)$$

sustituyendo (3.43) en (3.17) se obtiene:

$$(A_{pd})_{24} = \frac{b}{M} \quad (3.44)$$

Para $(A_{pd})_{42}$ de (3.17) tenemos:

$$(\delta_1)_{42} = b \quad (\delta_2)_{42} = 1 \quad (\delta_3)_{42} = \frac{1}{m} \quad (3.45)$$

sustituyendo (3.45) en (3.17) se tiene:

$$(A_{pd})_{42} = \frac{b}{m} \quad (3.46)$$

Finalmente, sustituyendo las ecs. (3.40), (3.42), (3.44) y (3.46) en la ecuación (3.38), y las ecs. (3.37) y (3.38) en la ec. (3.14), la matriz A_p queda determinada por:

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ k_1 & \frac{m}{b} & -k_2 & \frac{b}{M} \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & \frac{M}{-b} \\ 0 & \frac{m}{b} & k_2 & \frac{M}{-b} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

La matriz B_p es obtenida de (3.20), notando que $B_{pd} = 0$ y $B_p = B_{px}$, la cual está dada por:

$$B_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

La matriz C_p está dada por (3.26), notando que $C_{pd} = 0$, es decir,

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & -\frac{1}{M} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Finalmente,

$$D_p = 0 \quad (3.50)$$

Notar que en este sistema prácticamente la mayoría de los elementos de las matrices son obtenidos directamente del grafo de Coates.

3.6.2 Ejemplo de un Sistema Eléctrico

Considere el sistema eléctrico y su modelo en Bond Graph mostrados en la figura 3.7.

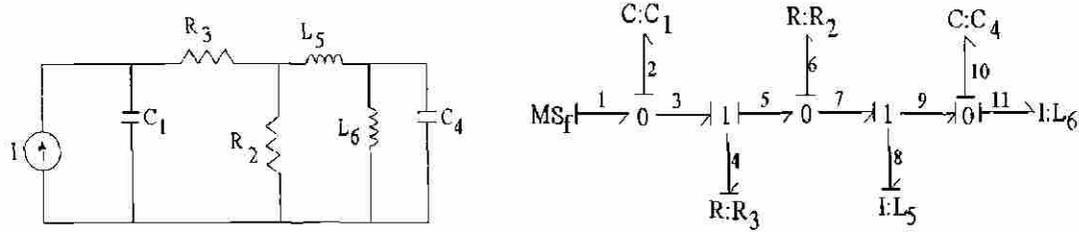


Figura 3.7 Sistema Eléctrico y su modelo en Bond Graph.

Los vectores clave son:

$$x(t) = \begin{bmatrix} q_2(t) \\ p_8(t) \\ q_{10}(t) \\ p_{11}(t) \end{bmatrix}; \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) \\ e_8(t) \\ f_{10}(t) \\ e_{11}(t) \end{bmatrix}; \quad z(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) \\ f_8(t) \\ e_{10}(t) \\ f_{11}(t) \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} D_{in}(t) = \begin{bmatrix} e_4(t) \\ f_6(t) \end{bmatrix} \\ D_{out}(t) = \begin{bmatrix} f_4(t) \\ e_6(t) \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad \begin{matrix} y(t) = e_4(t) \\ u(t) = f_1(t) \end{matrix}$$

donde $f(t)$ denota la corriente y $e(t)$ el voltaje en cada elemento, $q_2(t)$ y $q_{10}(t)$ las cargas eléctricas en C_1 y C_4 , respectivamente; $p_8(t)$ y $p_{11}(t)$ los enlaces de flujo en L_5 y L_6 , respectivamente; $f_1(t)$ la fuente de corriente y $y(t)$ la salida de voltaje en R_3 .

Las relaciones constitutivas para los elementos son

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{C_1}, \frac{1}{L_5}, \frac{1}{C_4}, \frac{1}{L_6} \right\} \quad (3.51)$$

$$L = \text{diag} \left\{ \frac{1}{R_3}, R_2 \right\} \quad (3.52)$$

La estructura de unión del sistema está dada por (3.11), donde:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{C_4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_5} & 0 & \frac{-1}{L_6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_4} & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{S}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_3} & 0 \\ 0 & R_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{S}_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ S'_{21} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{L_5} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S'_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -R_2 \\ \frac{1}{R_3} & 0 \end{bmatrix}; \quad S'_{31} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ S'_{32} &= \begin{bmatrix} 0 & -R_2 \end{bmatrix}; \quad S_{23} = S_{33} = 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

El grafo respectivo al sistema eléctrico se muestra en la figura 3.8.

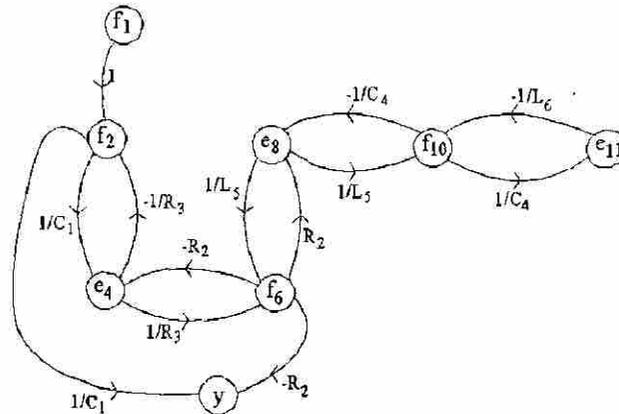


Figura 3.8 Grafo de Coates de un sistema eléctrico.

Para este caso $S'_{22} \neq 0$, aplicando el Procedimiento dado en la sección 3.5 se obtiene el grafo que se muestra en la figura 3.9.

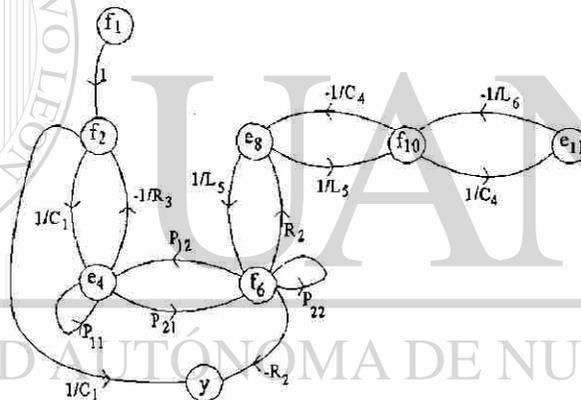


Figura 3.9 Grafo de Coates modificado de un sistema eléctrico.

De la ecuación, (3.13) obtenemos:

$$P_{11} = \frac{R_3}{R_2 + R_3}; P_{12} = \frac{-R_2 R_3}{R_2 + R_3}; P_{21} = \frac{1}{R_2 + R_3}; P_{22} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \quad (3.54)$$

Ahora bien, de la ec. (3.15) tenemos:

$$A_{px} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{C_4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_5} & 0 & \frac{-1}{L_6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_4} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

También, de (3.16) tenemos:

$$A_{pd} = \begin{bmatrix} (A_d)_{11} & (A_d)_{12} & 0 & 0 \\ (A_d)_{21} & (A_d)_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Para calcular A_{pd} de (3.17), tenemos:

$$(\delta_1)_{11} = \frac{-1}{R_3}, \quad (\delta_2)_{11} = P_{11}, \quad (\delta_3)_{11} = \frac{1}{C_2}. \quad (3.57)$$

Sustituyendo la ec. (3.57) en (3.17),

$$(A_{pd})_{11} = \frac{-1}{C_2(R_2 + R_3)} \quad (3.58)$$

Para el elemento $(A_{pd})_{12}$ tenemos:

$$(\delta_1)_{12} = \frac{-1}{R_3}, \quad (\delta_2)_{12} = P_{12}, \quad (\delta_3)_{12} = \frac{1}{L_5}. \quad (3.59)$$

Sustituyendo (3.59) en (3.17) se obtiene:

$$(A_{pd})_{12} = \frac{-R_2}{L_5(R_2 + R_3)} \quad (3.60)$$

Para el elemento $(A_d)_{21}$ tenemos:

$$(\delta_1)_{21} = R_2, \quad (\delta_2)_{21} = P_{21}, \quad (\delta_3)_{21} = \frac{1}{C_1}. \quad (3.61)$$

Remplazando (3.61) en (3.17) da:

$$(A_{pd})_{21} = \frac{R_2}{C_1(R_2 + R_3)} \quad (3.62)$$

De una manera similar para el elemento $(A_{pd})_{22}$ tenemos:

$$(\delta_1)_{22} = R_2, \quad (\delta_2)_{22} = P_{22}, \quad (\delta_3)_{22} = \frac{1}{L_5}. \quad (3.63)$$

y sustituyendo (3.63) en (3.17) da:

$$(A_{pd})_{22} = \frac{R_2 R_3}{L_5(R_2 + R_3)}. \quad (3.64)$$

Finalmente, sustituyendo las ecs. (3.58), (3.60), (3.62) y (3.64) en (3.56), y (3.56) en (3.14), la matriz A_p está dada por:

$$A_p = \begin{bmatrix} \frac{-1}{C_2(R_2 + R_3)} & \frac{-R_2}{L_5(R_2 + R_3)} & 0 & 0 \\ \frac{R_2}{C_2(R_2 + R_3)} & \frac{-R_2 R_3}{L_5(R_2 + R_3)} & \frac{-1}{C_4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_5} & 0 & \frac{-1}{L_6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_4} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

La matriz B_p se obtiene de (3.20), notando que $B_{pd} = 0$ y $B_p = B_{px}$, es decir:

$$B_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

La matriz C_p está dada por (3.26), donde C_{px} es

$$C_{px} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0_{1 \times 3} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

La matriz C_{pd} está dada por:

$$C_{pd} = \begin{bmatrix} (C_d)_{11} & (C_d)_{12} & (C_d)_{13} & (C_d)_{14} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Los elementos de la matriz C_{pd} se calculan de (3.29), donde:

$$(\rho_1)_{11} = -R_2, \quad (\rho_2)_{11} = P_{21}, \quad (\rho_3)_{11} = \frac{1}{C_1}. \quad (3.69)$$

Sustituyendo la ec. (3.69) en la ec. (3.29) se obtiene:

$$(C_{pd})_{11} = \frac{-R_2}{C_1(R_2 + R_3)} \quad (3.70)$$

Para el elemento $(C_{pd})_{12}$ obtenemos:

$$(\rho_1)_{12} = -R_2, \quad (\rho_2)_{12} = P_{22}, \quad (\rho_3)_{11} = \frac{1}{L_5}. \quad (3.71)$$

sustituyendo la ec. (3.71) en (3.29) da:

$$(C_{pd})_{12} = \frac{-R_2 R_3}{L_5(R_2 + R_3)} \quad (3.72)$$

Así mismo, tenemos que,

$$(C_{pd})_{13} = 0, \quad (C_{pd})_{14} = 0 \quad (3.73) \text{®}$$

sustituyendo (3.70), (3.72) y (3.73) en (3.68), y (3.67) y (3.68) en (3.26), obtenemos:

$$C_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} - \frac{R_2}{C_1(R_2 + R_3)} & \frac{-R_2 R_3}{L_5(R_2 + R_3)} & 0_{1 \times 2} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Finalmente

$$D_p = 0 \quad (3.75)$$

Es importante notar que a través del grafo de Coates modificado se puede determinar el intercambio energético entre los elementos que forman el sistema físico. Así, se conoce visualmente como influyen las entradas en el sistema y que elementos intervienen en la salida. Por lo tanto, se tiene un grafo con una gran cantidad de información sobre los intercambios energéticos.

En el próximo capítulo, se presenta una forma diferente para determinar la estabilidad de un sistema LTI MIMO basado en el grafo de Coates. Su ventaja es la de no requerir el modelo matemático del sistema en espacio de estado o en función de transferencia.

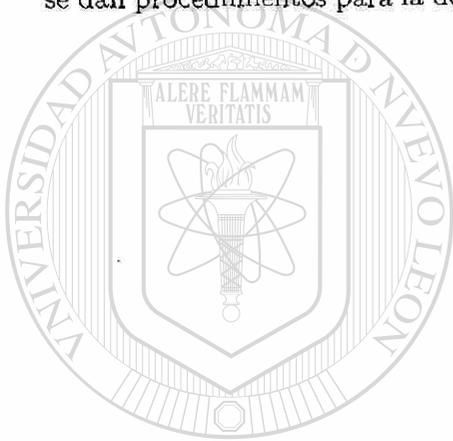
3.7 Conclusiones

Se presentó un grafo de Coates modificado que representa un Bond Graph y por lo tanto un sistema físico LTI MIMO.

Es importante señalar que a través de esta representación gráfica es posible determinar otras propiedades del sistema físico, como observabilidad, controlabilidad y determinante.

Se presentó un procedimiento gráfico para obtener la representación de un modelo dinámico LTI MIMO.

Así, en éste capítulo se logró una conexión directa de Bond Graph con grafos lineales y se dan procedimientos para la determinación de las matrices A_p , B_p , C_p y D_p del sistema físico.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Capítulo 4

Condiciones de Estabilidad en el Sentido de Hurwitz para un Sistema LTI MIMO Utilizando Grafos Lineales a partir de su Bond Graph

4.1 Introducción

Uno de las propiedades de cualquier sistema de control es la *estabilidad*. Un sistema LTI MIMO es *estable* si todos los polos de su función de transferencia se localizan en el semiplano izquierdo del plano complejo [4] y gracias a las herramientas desarrolladas en el capítulo anterior dado un modelo en Bond Graph de un sistema, se pueden encontrar los coeficientes del polinomio característico usando trayectorias causales o una matriz de Coates [69].

Gracias a la representación matricial es posible obtener el polinomio característico y en este caso podemos aplicar el *Criterio de Hurwitz* para conocer la estabilidad del sistema [4]. Este criterio es un método algebraico tal que para sistemas grandes con muchos parámetros representa mucho trabajo. También, para objetivos de control es deseable una metodología próxima al sistema físico, es decir, control en el dominio físico.

Considerando los resultados del capítulo 3, en el cual se tiene representado el sistema físico en forma gráfica la determinación del polinomio característico se puede realizar desde el Bond Graph o desde el grafo lineal correspondiente.

En este capítulo, se presenta un procedimiento gráfico y sencillo para obtener las condiciones de estabilidad del sistema físico utilizando la Teoría de Gráfos. Esta metodología no

requiere conocer la función de transferencia del sistema o su realización (A_p, B_p, C_p, D_p) . En el Apéndice C, sección C.2, se da un artículo publicado con los resultados presentados en este capítulo [36].

El presente capítulo está organizado en cuatro partes: en la primera, se estudia el criterio de Hurwitz. Después se estudia la obtención del polinomio característico utilizando metodologías gráficas. En la tercera parte, se presenta una nueva forma para determinar las condiciones de estabilidad utilizando grafos lineales; y finalmente se aplican los procedimientos propuestos de estabilidad a un sistema físico en lazo abierto y en lazo cerrado.

4.2 Antecedentes de estabilidad en sistemas lineales

El concepto de *estabilidad* es extremadamente importante debido a que por lo general un sistema es diseñado para ser estable a pesar de incertidumbres y perturbaciones.

Los conceptos de *Estabilidad Externa* o *Estabilidad Entrada Acotada/Salida Acotada* (BIBO) y de *Estabilidad Interna* o *Estabilidad en el Sentido de Lyapunov* de sistemas LTI MIMO, se dan en el Apéndice B. A continuación, se introduce el *Criterio de Hurwitz*.

4.2.1 Criterio de Hurwitz [4, 12, 26]

Si la función de transferencia de un sistema es una función racional de s , donde s es el operador de Laplace, entonces, la estabilidad (BIBO) de un sistema está completamente determinada por los polos de $G(s)$.

Si $G(s)$ es *irreducible*, se llama *realización mínima*, esto es, si no existe un factor común entre su denominador y su numerador, entonces, los polos de $G(s)$ son iguales a las raíces del polinomio del denominador de $G(s)$, también llamado *Polinomio Característico* [68]. La estabilidad BIBO de este sistema está determinada por las raíces del Polinomio Característico [68].

Un polinomio es llamado un *Polinomio Hurwitz* si todas sus raíces tienen parte real negativa. Entonces, un sistema es estable BIBO si y sólo si su Polinomio Característico es un Polinomio Hurwitz [26].

Sin embargo, si el grado del polinomio característico es 3 o mayor, el cálculo de las raíces no es sencillo, para polinomios característicos dados en forma *simbólica*. Además, el conocimiento de la ubicación exacta de sus raíces no es necesario para determinar su estabilidad.

Un método para determinar la estabilidad BIBO sin obtener las raíces es el *Criterio*

de Hurwitz es un método para determinar el plano de la ubicación de los polos de un polinomio con coeficientes constantes.

Considere el polinomio característico,

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n, \quad a_0 > 0 \quad (4.1)$$

donde los $a_i \in \mathfrak{R}$, $i = 0, \dots, n$.

Las condiciones necesarias para que el polinomio de la ec. (4.1) no tenga raíces con parte real positiva, son:

1. Todos los coeficientes del polinomio tienen el mismo signo.
2. Todos los coeficientes existen.

Criterio de Hurwitz

La condición necesaria y suficiente para que todas las raíces de la ecuación (4.1) estén en el semiplano izquierdo del plano s es que los *Determinantes de Hurwitz*, D_k , $k = 1, 2, \dots, n$ sean todos positivos.

Los *Determinantes de Hurwitz* de (4.1) están definidos por:

$$D_1 = a_1; \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \quad (4.2)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \quad D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2n-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & a_{2n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

donde los coeficientes con índices mayores que n o con índices negativos son reemplazados con ceros

En un primer vistazo, la aplicación de los determinantes de Hurwitz parece ser un trabajo formidable para polinomios de alto orden, dado que se requiere una gran cantidad de trabajo en la evaluación de los determinantes. Afortunadamente, el proceso simplificado de Routh introduciendo un método tabular en lugar de s determinantes de Hurwitz, permite encontrar la solución de una manera más rápida.

En la siguiente sección, se da una forma de determinar el polinomio característico utilizando la Teoría de gráficos.

4.3 Obtención del Polinomio Característico

La estabilidad de un sistema puede ser determinada conociendo el polinomio característico. Este polinomio puede ser encontrado analíticamente o gráficamente utilizando Bond Graph o Grafo de Coates, dado en el Capítulo 3, sección 3.3.

Para continuar el análisis en grafos solamente en este capítulo, en el Apéndice A, sección A.5, se explica como obtener el polinomio característico basado en las trayectorias causales de un sistema modelado en Bond Graph.

4.3.1 Gráfica de Coates [69]

Para el análisis de estabilidad sin pérdida de generalidad, se obtiene una subgrafo seccional del grafo lineal de la figura 3.4 despreciando las entradas y salidas, la cual se muestra en la figura 4.1.

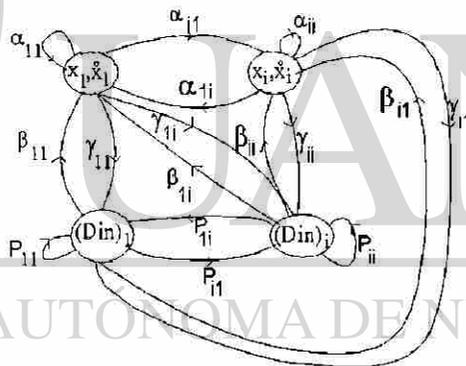


Figura 4.1 Subgrafo seccional de la matriz de Coates A_{pc} .

De este grafo lineal se obtiene la matriz del grafo de Coates A_{pc} y su determinante de valores propios está dado por:

$$\det(\lambda I - A_{pc}) = \lambda^n + \sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} \left[\sum_{A_{pc}[V_k]} \sum_u (-1)^{L_h} f(h_{uk}) \right] \quad (4.3)$$

donde h_{uk} son los u^{th} factores-1 en $A_{pc}[V_k]$, $A_{pc}[V_k]$ es un grafo seccional de k -nodos de A_{pc} y L_h es el número de circuitos dirigidos en h_{uk} .

En la próxima sección, se presentan procedimientos para la obtención de las condiciones de estabilidad utilizando grafos lineales en un sentido de Hurwitz; los cuales se publicaron en un artículo que se da en el Apéndice C, sección C2.

4.4 Obtención de las Condiciones de Estabilidad

Considerando un sistema LTI MIMO que satisface H1, H2 y H3, del Capítulo 1, sección 1.5, se presenta un procedimiento para obtener un grafo lineal, que representa el polinomio característico. Se utiliza para determinar las condiciones de estabilidad usando la matriz de Hurwitz, dada en la sección 4.2.1, en una forma gráfica.

El siguiente Procedimiento propone la construcción de una grafo lineal, denominado *Grafo de Estabilidad de Coates*, $G_c(D)$, que representa a la matriz de Hurwitz y al polinomio característico.

Procedimiento 4.1

1. Sea el polinomio característico,

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n\lambda^0 = 0 \quad (4.4)$$

con $a_0 = 1$.

2. El número de nodos del sistema correspondiente es igual al orden del polinomio. Cada nodo tiene un lazo propio como se muestra en la figura 4.2.

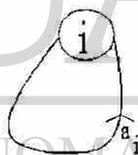


Figura 4.2 Lazo propio de un nodo.

3. Considerese ramas entre nodos diferentes utilizando las figuras 4.3 y 4.4.

Ramas a la derecha. Inicialmente $j = 1$, $h = 0$.

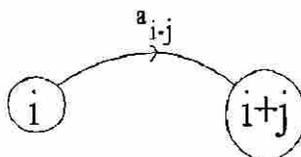


Figura 4.3 Ramas a la derecha.

Para $i = j, \dots, k$; donde $k = n - 2j + h + 1 \forall i \leq k$.

Si $i = k$ entonces $j \leftarrow j + 1$ y $h \leftarrow h + 1$ e incrementamos j mientras $j < k$, donde $x \leftarrow y$ denota que el valor de y es asignado a x .

Ramas a la izquierda. Inicialmente $j = 1, h = 0$.

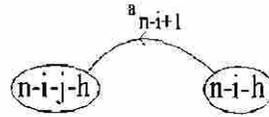


Figura 4.4 Ramas a la izquierda.

Para $i = 1, \dots, k$; donde $k = n - j - 1 - h, \forall i \leq k$.

Si $i = k$ entonces $j \leftarrow j + 1$ y $h \leftarrow h + 1$ e incrementamos j mientras $j < k$.

En la Tabla 4.1, se muestran algunos grafos de estabilidad de Coates, lo cual resume el procedimiento 2.1 para algunos casos, comprobando que se genera un grafo lineal con una estructura sencilla, como se ilustra a través de algunos ejemplos en la siguiente sección. Note que se puede extender gráficamente a más de cuatro nodos.

Polinomio Característico	Grafo de Estabilidad de Coates
$a_0 \lambda + a_1 = 0$	
$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$	
$a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$	
$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0$	

Tabla 4.1 Grafos de Estabilidad de Coates.

El grafo $G_c(D)$ representa un grafo de Coates de la matriz de Hurwitz. Así, se pueden dar las condiciones de estabilidad, usando el criterio de Hurwitz de la sección 4.2.1.

Así, de la Teoría de gráfos, el determinante de Hurwitz D_n está dado por:

$$\det D = D_n = (-1)^n \sum_h (-1)^{L_h} f(h) \tag{4.5}$$

donde h es un factor-1 en $G_c(D)$ y L_h denota el número de circuitos dirigidos en h y $f(h)$ representa el producto de los pesos asociados con las ramas de h .

Para encontrar los n determinantes del criterio de Hurwitz, se propone el siguiente procedimiento:

Procedimiento 4.2

1. Calcular D_n de (4.5).
2. El determinante D_{n-1} es obtenido removiendo el nodo n del grafo $G_c(D)$, y usando (4.5) para este subgrafo de $G_c(D)$, que tiene $n - 1$ nodos.
3. Remover el nodo $n - 1$ del subgrafo de $G_c(D)$ del paso 2, y usando (4.5) calculamos D_{n-2} ; y así sucesivamente hasta obtener D_1 .

Los procedimientos presentados se aplican a continuación en dos ejemplos, mostrando lo sencillo y directo de los mismos.

4.5 Ejemplos

Se presentan ejemplos de aplicación para la obtención de las condiciones de estabilidad de un sistema mecánico en lazo abierto y posteriormente en lazo cerrado.

4.5.1 Sistema Mecánico en Lazo Abierto

Considerar el sistema mecánico y su Bond Graph de la figura 3.5, cuya grafo lineal se muestra en la figura 3.6.

De (4.3) el polinomio característico de la matriz A_{pc} está dado por:

$$\det(\lambda I - A_{pc}) = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 \quad (4.6)$$

A continuación de (4.3) se obtienen los coeficientes de (4.6), utilizando el grafo lineal de la figura 3.7.

Para a_1 , los factores-1 se muestran en la figura 4.5.

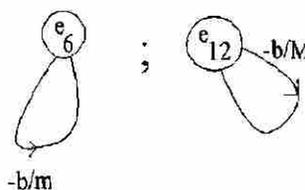


Figura 4.5 Grafo seccional de un nodo.

El coeficiente a_1 es:

$$a_1 = \frac{b}{m} + \frac{b}{M} \quad (4.7)$$

Para a_2 , se utiliza la figura 4.6.

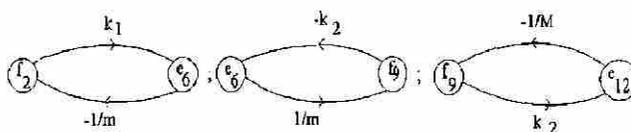


Figura 4.6 Subgrafo seccional de dos nodos.

El coeficiente a_2 es:

$$a_2 = \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} + \frac{k_2}{M} \quad (4.8)$$

Para a_3 , de la figura 4.7.

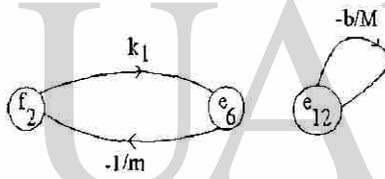


Figura 4.7 Subgrafo seccional de tres nodos.

El coeficiente a_3 es

$$a_3 = \frac{k_1 b}{m M} \quad (4.9)$$

Finalmente, para a_4 se utiliza la figura 4.8.

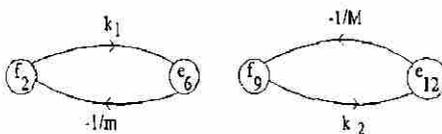


Figura 4.8 Subgrafo seccional de cuatro nodos.

El coeficiente a_4 es

$$a_4 = \frac{k_1 k_2}{m M} \quad (4.10)$$

Utilizando el Procedimiento 4.1 de la sección 4.3 se tiene el grafo de Coates de estabilidad, para este ejemplo, en la figura 4.9.

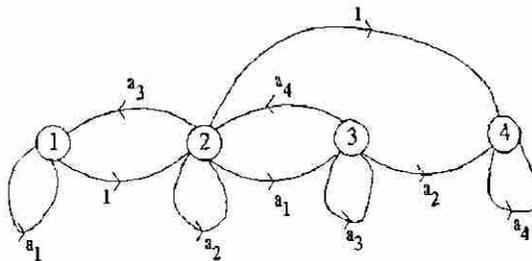


Figura 4.9 Grafo de Coates de estabilidad.

Encontrando los determinantes de Hurwitz por medio del Procedimiento 4.2 de la sección 4.3.

Considere la figura 4.10, D_4 está dado por

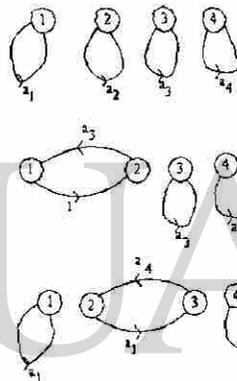


Figura 4.10 Subgrafo seccional de cuatro nodos.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$D_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 - a_3^2 a_4 - a_1^2 a_4^2 \quad (4.11)$$

De la figura 4.11, D_3 es

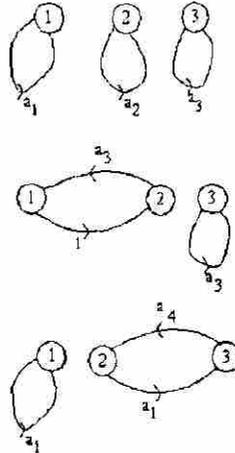


Figura 4.11 Subgrafo seccional de tres nodos.

$$D_3 = a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 \quad (4.12)$$

La figura 4.12, produce D_2 .

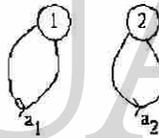


Figura 4.12 Subgrafo seccional de dos nodos.

$$D_2 = a_1 a_2 - a_3 \quad (4.13)$$

Finalmente, D_1 se obtiene de la figura 4.13.



Figura 4.13 Subgrafo seccional de un nodo.

$$D_1 = a_1 \quad (4.14)$$

Sustituyendo de (4.7) a (4.10) en (4.11) a (4.14), obtenemos las condiciones de estabilidad para el sistema físico

$$D_4 = \frac{b^2 k_1^3 k_2}{m^4 M^2} > 0 \quad (4.15)$$

$$D_3 = \frac{b^2 k_1^2}{m^3 M} > 0 \quad (4.16)$$

$$D_2 = \frac{b(k_1 + k_2)}{m^2} + \frac{2bk_2}{mM} + \frac{bk_2}{M^2} > 0 \quad (4.17)$$

$$D_1 = \frac{b}{m} + \frac{b}{M} > 0 \quad (4.18)$$

Este procedimiento gráfico, nos permite conocer el comportamiento del sistema en una forma sencilla a través del conocimiento de las condiciones de estabilidad y de los parámetros del sistema. Más aún, este procedimiento muestra como los parámetros del sistema son reflejados en el sistema físico.

4.5.2 Sistema Mecánico en Lazo Cerrado

Considere el sistema del ejemplo 4.5.1 con una retroalimentación de salida, donde k_c es la ganancia de retroalimentación. El grafo lineal de lazo cerrado se muestra en la figura 4.14.

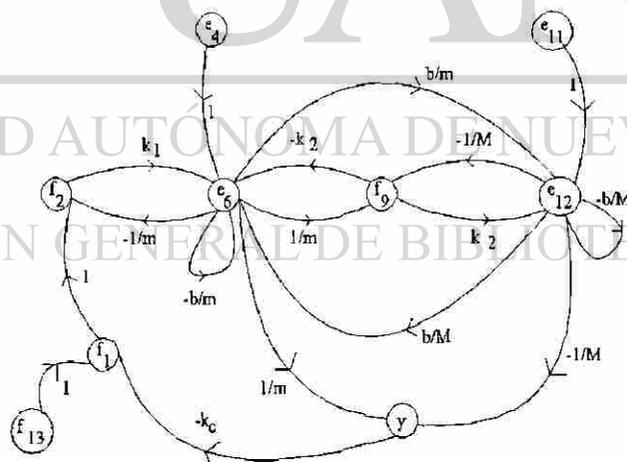


Figura 4.14 Grafo lineal del sistema en lazo cerrado.

Sin pérdida de generalidad, para el análisis de estabilidad mediante el procedimiento gráfico de este capítulo, se suprimen las entradas e_4 , e_{11} y f_3 ; y la retroalimentación de la salida se reduce formando trayectorias dirigidas de e_6 a f_2 y de e_{12} a f_2 ; la gráfica simplificada para la obtención del polinomio característico se muestra en la figura 4.15.

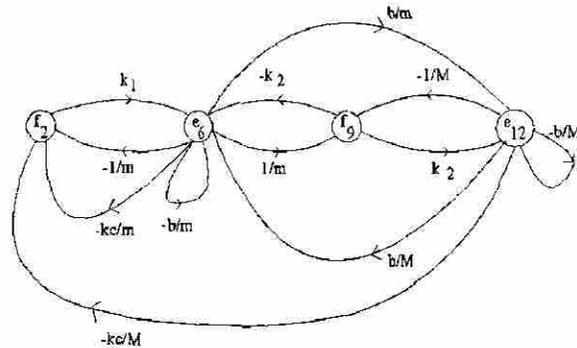


Figura 4.15 Grafo lineal reducido del sistema de lazo cerrado.

Considerando la figura 4.15, el polinomio característico, está dado por la expresión (4.18), el coeficiente a_1 está determinado por la figura 4.4 y por la ecuación (4.19). Sin embargo, el coeficiente a_2 se obtiene de la figura 4.16 :

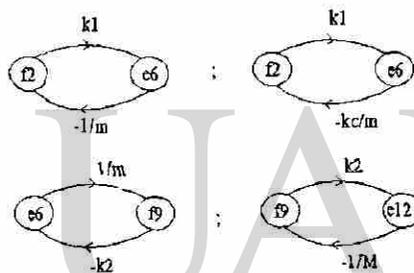


Figura 4.16 Subgrafo seccional de dos nodos.

Así, a_2 es:

$$a_2 = \frac{k_1 + k_2 + k_1 k_c}{m} + \frac{k_2}{M} \tag{4.19}$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Utilizando la figura 4.17,

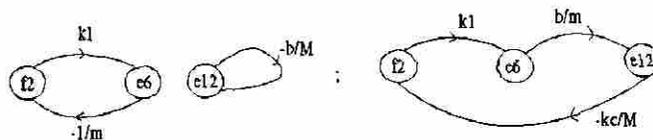


Figura 4.17 Sugrafo seccional de tres nodos.

el coeficiente a_3 está dado por:

$$a_3 = \frac{k_1 b + 2k_1 k_c b}{mM} \tag{4.20}$$

Utilizamos la figura 4.18,

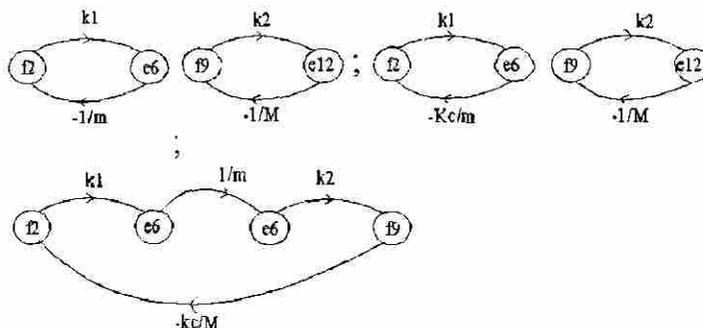


Figura 4.18 Subgrafo seccional de dos nodos.

se obtienen a_4 ,

$$a_4 = \frac{k_1 k_2 (1 + 2k_c)}{mM} \quad (4.21)$$

El grafo de Coates de estabilidad es la misma que para el ejemplo anterior, como es mostrada en la figura 4.9, por lo tanto las condiciones de estabilidad están dadas por las siguientes expresiones:

$$D_1 = b \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) > 0 \quad (4.22)$$

$$D_2 = b \left(\frac{k_1 (1 + k_c) + k_2}{m^2} + \frac{k_2}{M^2} + \frac{k_2 - k_1 k_c}{mM} \right) > 0 \quad (4.23)$$

$$D_3 = \frac{k_1^2 b^2}{m^2 M} \left(\frac{2k_c^2 + 3k_c + 1}{m} - \frac{2k_c^2 + k_c}{M} \right) > 0 \quad (4.24)$$

$$D_4 = \frac{b^2 k_1^3 k_2}{m^3 M^2} \left(\frac{4k_c^3 + 6k_c^2 + 7k_c + 1}{m} - \frac{6k_c^2 + 4k_c^3 + k_c}{M} \right) > 0 \quad (4.25)$$

Este ejemplo muestra que el procedimiento gráfico propuesto nos permite obtener condiciones para la ganancia del control, que garanticen la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Al observar que una retroalimentación de salida puede ser aplicada en un sistema en un grafo lineal, se descubre que existe un potencial de la Teoría de Bond Graph para sistemas retroalimentados, teniendo un significado físico.

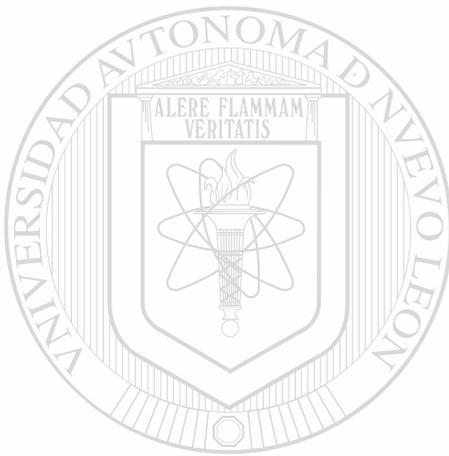
Por lo que, en el próximo capítulo, se presenta un control directo por retroalimentación de estado estimado para sistemas LTI MIMO con un enfoque de Bond Graph, encontrando estructuras para el controlador y observador en el dominio físico.

4.6 Conclusiones

En este capítulo se propuso una gráfica que representa la matriz de Hurwitz de un sistema LTI MIMO.

Se presentó un procedimiento gráfico para determinar las condiciones de estabilidad en un sistema físico LTI MIMO. Esta metodología no requiere conocer la función de transferencia o su realización (A_p, B_p, C_p, D_p) .

Los resultados pueden ser aplicados a sistemas físicos en lazo abierto o lazo cerrado.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



Capítulo 5

Control Directo en Bond Graph por Retroalimentación de Estado Estimado para Sistemas LTI MIMO

5.1 Introducción

En la Teoría de control moderna, algunos diseños están basados en la hipótesis de que el vector de estado del sistema a ser controlado está disponible para su medición en el caso de retroalimentación de estados[14]. En muchas situaciones prácticas sólo algunas variables de estado son medibles, en estos casos, el vector de estado de un sistema LTI MIMO puede ser reconstruido a partir de las mediciones de las entradas y salidas del sistema, por medio de un *observador de estados*, si el sistema es observable [16].

El objetivo de control del presente trabajo es obtener un controlador realizable y considerando las características físicas del sistema bajo control. En este capítulo, se presenta un control por retroalimentación de estados estimados, así, la extensión de Bond Graph para técnicas de control, no sólo para modelado, permite diseñar el controlador a partir del modelo físico, asegurando un controlador realizable [57]. En el Apéndice C, sección C.3, se da un artículo publicado con los resultados presentados en este capítulo [34].

Nuestra propuesta presenta un control directo por retroalimentación de estado estimado para sistemas LTI MIMO en el dominio físico, lo cual implica el diseño de un observador de estados en Bond Graph. Entendemos aquí, un *Control Directo* como la aplicación de una ley de control en el dominio físico sin requerir el modelo matemático del sistema en lazo abierto.

En [20] se muestra un resultado de un observador de estados y una retroalimentación

de estado estimado en Bond Graph. Sin embargo, no se tiene en un enfoque de la matriz de Estructura de Unión y no se realiza ningún estudio del problema de asignación de polos del controlador y del observador.

El presente capítulo, está organizado en cuatro partes fundamentales: en la primera, se estudia el observador de Luenberger en lazo abierto y cerrado; después, se presenta un esquema de control por retroalimentación de estados estimados en el dominio físico; en la tercer parte, se proponen procedimientos y lemas para obtener las estructuras del sistema y del observador en lazo cerrado. Finalmente, se aplica la metodología propuesta de control a dos ejemplos de sistemas físicos.

5.2 Antecedentes de la ley de control

Frecuentemente, en el diseño de sistemas de control es necesario construir observadores de las variables de estado. Si un sistema es lineal, su vector de estado puede ser reconstruido por las entradas y salidas disponibles del sistema original [14], mediante un *observador*. Si el sistema es observable, un observador produce un estimado del vector de estado o de una combinación lineal del vector de estado.

Una vez que un *observador* ha sido construido para un sistema lineal, es importante considerar el efecto inducido de usar este observador del estado en lugar del llamado valor verdadero del estado para una ley de control [14, 57].

En la siguiente sección, se explica la teoría general del *observador de Luenberger*, indicando las propiedades del observador de estado en lazo abierto y del asintótico de estado. ®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

5.2.1 Observador Asintótico de Luenberger [12, 14, 47, 68]

El dispositivo que construye una aproximación del vector de estado a partir de la salida es llamado un *observador de estado*.

Considere el sistema LTI MIMO dado en (2.28), suponemos que las variables de estado no son medibles y A_p , B_p , C_p y D_p son completamente conocidas. Entonces, el problema es estimar o generar $x(t)$ a partir del conocimiento de la entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$.

Si el sistema es observable y conocemos las matrices A_p y B_p , podemos duplicar el sistema original y obtenemos el llamado *observador en lazo abierto* mostrado en la figura 5.1.

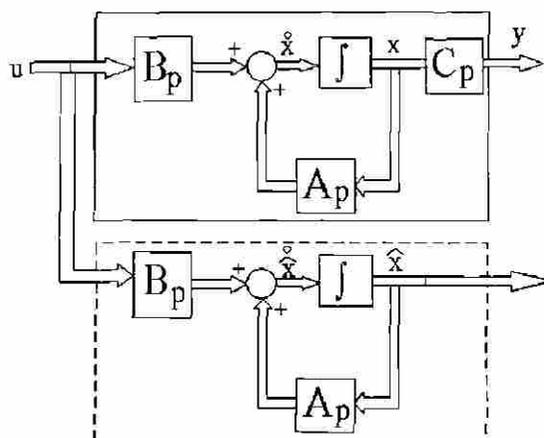


Figura 5.1 Observador de estado en lazo abierto.

Ahora bien, si el sistema original de la ecuación (2.28) y el observador tienen el mismo estado inicial y la misma entrada, la salida $\hat{x}(t)$ del estimador será igual a $x(t)$ para todo t .

Así, la pregunta restante es cómo encontrar el estado inicial x_0 del sistema y usarlo en el observador. Este problema es resuelto, si el sistema de la figura 5.1 es *observable*, es decir, si el sistema (2.28) es observable en t_0 . Un sistema es observable en t_0 , si existe un tiempo finito $t_1 > t_0$, tal que para cualquier estado x_0 en el tiempo t_0 , el conocimiento de la entrada $u|_{[t_0, t_1]}$ y la salida $y|_{[t_0, t_1]}$ sobre el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ es suficiente para determinar el estado x_0 [12].

Consecuentemente, si el sistema (2.28) es observable, un *observador en lazo abierto* puede ser utilizado para generar el $x(t)$.

Si se utiliza un observador en lazo abierto el estado inicial debe ser calculado cada vez que se use el observador. Así, un estimador en lazo abierto es, en general, no satisfactorio.

Es importante notar que a pesar de que $u(t)$ y $y(t)$ del sistema (2.28) están disponibles, utilizamos solamente $u(t)$ en el observador en lazo abierto, de tal manera que si ambas $u(t)$ y $y(t)$ son utilizadas, el comportamiento del observador puede ser mejorado, tal como se muestra el llamado *observador asintótico de estado* de la figura 5.2.

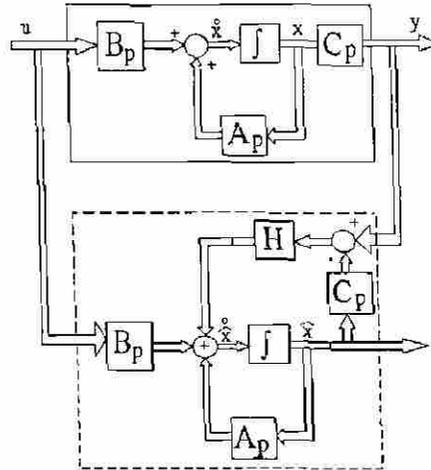


Figura 5.2 Observador asintótico de estado.

La salida del sistema $y(t) = C_p x(t) - D_p u(t)$ es comparada con $\hat{y}(t) = C_p \hat{x}(t) - D_p u(t)$ y su diferencia multiplicada por la *ganancia del observador*, $H \in \mathbb{R}^{n \times q}$, lo cual es un término de corrección.

El observador de estado asintótico está dado por:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A_p - HC_p) \hat{x}(t) + Hy(t) + B_p u(t) \quad (5.1)$$

De (2.28) y (5.1) obtenemos,

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A_p - HC_p) \tilde{x}(t) \quad (5.2)$$

donde

$$\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t) \quad (5.3)$$

dado que los eigenvalores de $(A_p - HC_p)$ pueden ser seleccionados para tener la convergencia del estado estimado al estado real, entonces se controla la dinámica de $\tilde{x}(t)$.

En la siguiente sección, se muestra que si una ley de control LTI es realizada con un observador, entonces los polos resultantes del sistema no son modificados por el observador.

5.2.2 Control por retroalimentación de estado estimado [51]

La construcción de un observador permite que un estado observado $\hat{x}(t)$ pueda ser retroalimentado a la entrada. Evidentemente, la retroalimentación de $\hat{x}(t)$, no es igual a la retroalimentación del estado verdadero $x(t)$. Así, es importante considerar si la interacción del observador con la retroalimentación, producen los resultados esperados.

Considerese el sistema LTI MIMO (2.28) . La retroalimentación de $x(t)$ estados

$$u(t) = w(t) - Kx(t) \quad (5.4)$$

donde $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$ puede ubicar los eigenvalores de $(A_p + B_p K)$ en una posición deseada si $\{A_p, B_p\}$ es *controlable* [68].

Así mismo, un observador de estados con eigenvalores arbitrarios puede ser construido, utilizando $u(t)$ y $y(t)$ como entradas si $\{A_p, C_p\}$ es *observable* [68].

Si el estado actual $x(t)$ no está disponible para retroalimentación, una posible solución es natural aplicar la ganancia de retroalimentación K a $\hat{x}(t)$, ésto es,

$$u(t) = w(t) - K\hat{x}(t) \quad (5.5)$$

lo cual se muestra en la figura 5.3.

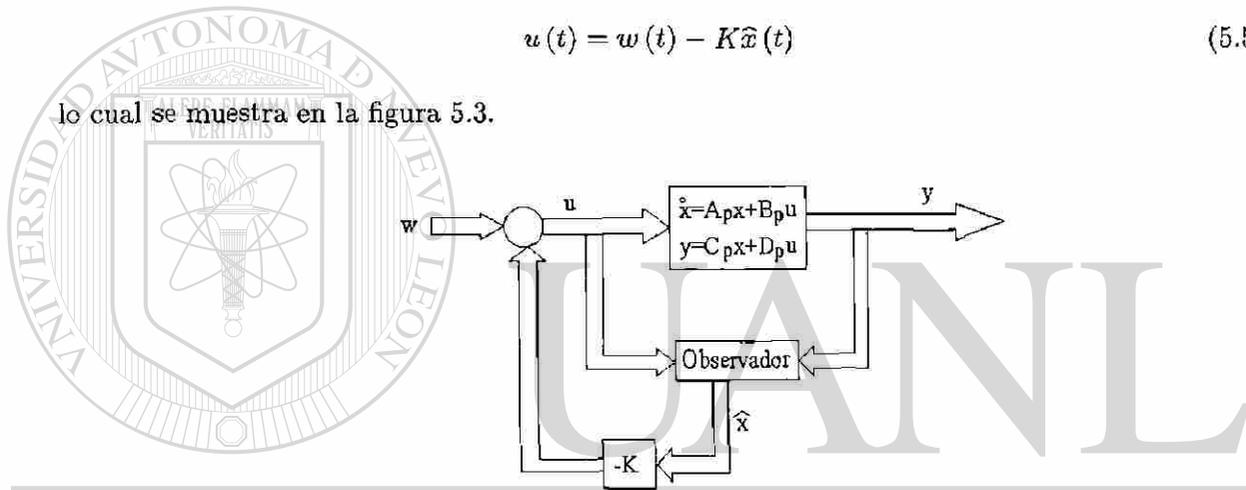


Figura 5.3 Retroalimentación de estado estimado.

Sustituyendo (5.5) en (2.28), tenemos el sistema en lazo cerrado,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_p \hat{x}(t) - \widetilde{A}_p \hat{x}(t) + B_p w(t) \\ y(t) &= C_p \hat{x}(t) - \widetilde{C}_p \hat{x}(t) + D_p w(t) \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde:

$$\widetilde{A}_p \triangleq B_p K \quad (5.7)$$

$$\widetilde{C}_p \triangleq D_p K \quad (5.8)$$

De (5.1) y (5.5), el *observador asintótico de Luenberger* es [14, 68]:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \widehat{A}_p \hat{x}(t) + \widehat{B}_p w(t) + \overline{A}_p x(t) \\ \hat{y}(t) &= \widehat{C}_p \hat{x}(t) + \widehat{D}_p w(t) \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde:

$$\widehat{A}_p \triangleq A_p - B_p K - H C_p \quad (5.10)$$

$$\overline{A}_p \triangleq H C_p \quad (5.11)$$

$$\widehat{C}_p \triangleq C_p - \widetilde{C}_p \quad (5.12)$$

$$\widehat{B}_p \triangleq B_p; \quad \widehat{D}_p \triangleq D_p \quad (5.13)$$

Si el sistema es observable y controlable, los dos sistemas (5.6) y (5.9) pueden ser escritos en la siguiente forma de espacio de estado aumentada:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & -B_p K \\ H C_p & A_p - H C_p - B_p K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p \\ B_p \end{bmatrix} w(t) \quad (5.14)$$

para determinar la ubicación de los eigenvalores de este sistema compuesto, debemos determinar las raíces del polinomio característico, el cual, como se muestra en [47], puede ser expresado como:

$$\det[\lambda I_{n \times n} - A_p + H C_p] \cdot \det[\lambda I_{n \times n} - A_p + B_p K] = 0 \quad (5.15)$$

La ecuación (5.15) indica que los eigenvalores del sistema compuesto son la unión de los eigenvalores de un sistema con una matriz $A_p - H C_p$ y de otro sistema con una matriz $A_p - B_p K$. Como consecuencia, el observador y el controlador no necesitan ser diseñados simultáneamente; la ganancia del controlador K puede ser calculada independientemente de la ganancia del observador, este resultado es conocido como el *Principio de Separación* [47].

En la próxima sección, se presenta un análisis de la retroalimentación de estado estimado $\hat{x}(t)$, de un sistema físico, utilizando el observador de Luenberger en un enfoque de Bond Graph. En el Apéndice C, sección C.3, se da un artículo publicado con los resultados presentados en este capítulo.

5.3 Control Directo en Bond Graph

Considerando un sistema LTI MIMO que satisface H1, H2 y H3, del Capítulo 1, sección 1.5. Además, el sistema es *estructuralmente controlable y observable* de acuerdo a la propiedad A.3 del Apéndice A, sección A.4, se presenta una técnica gráfica directa para un modelo en lazo abierto representado en Bond Graph. Se obtiene el modelo del observador y el modelo en lazo cerrado en Bond Graph directamente, a partir del *modelo en lazo abierto*. Suponemos, que todos los elementos tienen relaciones constitutivas lineales.

La figura 5.4 muestra la estructura general propuesta del control por retroalimentación de estado estimado en Bond Graph.

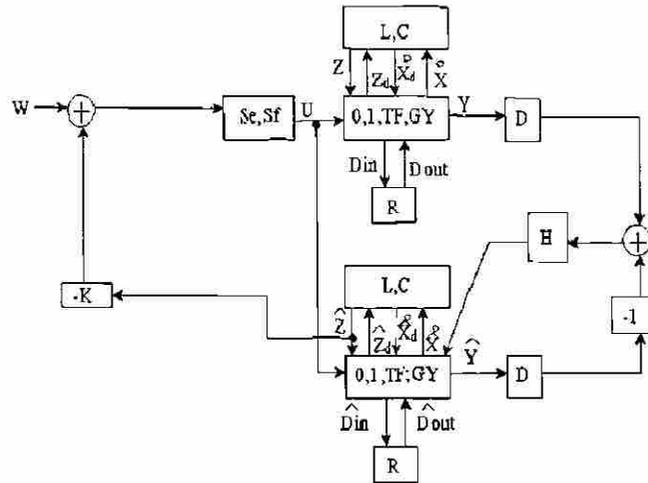


Figura 5.4 Lazo cerrado con observador en diagrama a bloques.

El objetivo de representar el modelo y el observador en diagramas a bloques es obtener el modelo del sistema retroalimentado en términos de la matriz de Estructura de Unión S dada por (2.27). Esto nos permite conocer, el cambio de la matriz S debido al observador y a la retroalimentación de estado, con el propósito de asignar la ubicación de los polos en el dominio físico del sistema de acuerdo a la ganancia del control.

Los próximos Lemas 5.1 y 5.2 muestran que \widetilde{A}_p , \widetilde{C}_p , \widehat{A}_p , \overline{A}_p y \widehat{C}_p del sistema de lazo cerrado puede ser obtenidas a partir de las ecuaciones (2.29) a (2.32) utilizando S .

Se tienen dos casos posibles debido a la ubicación de los elementos en el Bond Graph. El primer caso cuando el campo de disipación (R) está localizado antes que el campo de almacenamiento (L, C), y el segundo, en caso contrario.

Lema 5.1

Considere el esquema de control de la figura 5.4 y que satisface H1, H2 y H3, del Capítulo 1, sección 1.5. Sea la estructura del sistema en lazo cerrado dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ w(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} - \widehat{S} \begin{bmatrix} \widehat{z}(t) \\ \widehat{D}_{out}(t) \\ w(t) \\ \widehat{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

donde la estructura de unión del observador reflejada al sistema es:

$$\widehat{S} = \begin{bmatrix} \widehat{S}_{11} \\ \widehat{S}_{21} \\ \widehat{S}_{31} \end{bmatrix} 0_{3(n+r+q) \times 3(n+r+p+m)} \quad (5.17)$$

Entonces,

1) Si el campo de disipación (R) está localizado antes que el campo de almacenamiento (L, C), es decir, si $\widehat{S}_{21} = 0$, $\widehat{S}_{11} \neq 0$ y/o $\widehat{S}_{31} \neq 0$, tenemos,

$$\widetilde{A}_p = E^{-1} \widehat{S}_{11} F \quad (5.18)$$

$$\widetilde{C}_p = \widehat{S}_{31} F \quad (5.19)$$

2) En caso contrario, si $\widehat{S}_{11} = \widehat{S}_{31} = 0$ y $\widehat{S}_{21} \neq 0$, tenemos:

$$\widetilde{A}_p = E^{-1} S_{12} M \widehat{S}_{21} F \quad (5.20)$$

$$\widetilde{C}_p = S_{32} M \widehat{S}_{21} F \quad (5.21)$$

siendo,

$$E = I + S_{14} F_d^{-1} S_{14}^T F \quad (5.22)$$

$$M = L(I - S_{22} L)^{-1} \quad (5.23)$$

Prueba. Para sistemas LTI, sustituyendo (2.22), (2.23) y (2.26) en la primer línea de (5.16), tenemos:

$$\dot{x}(t) = E^{-1} \left(S_{11} z(t) + S_{12} D_{out}(t) + S_{13} w(t) - \widehat{S}_{11} \widehat{z}(t) \right) \quad (5.24)$$

de (2.24) y la segunda línea de (5.16) se obtiene:

$$D_{in}(t) = (I - S_{22} L)^{-1} \left(S_{21} z(t) + S_{23} w(t) - \widehat{S}_{21} \widehat{z}(t) \right) \quad (5.25)$$

Tomando (2.22), (2.24), (2.34) y (5.25) en (5.24),

$$\dot{x}(t) = E^{-1} \left[(S_{11} + S_{12} M S_{21}) F x(t) + (S_{13} + S_{12} M S_{23}) w(t) - E^{-1} \left(\widehat{S}_{11} + S_{12} M \widehat{S}_{21} \right) F \widehat{x}(t) \right] \quad (5.26)$$

Comparando (5.6) con (5.26),

$$\widetilde{A}_p = E^{-1} \left(\widehat{S}_{11} + S_{12} M \widehat{S}_{21} \right) F \quad (5.27)$$

La ecuación (5.27) prueba ambos casos (5.18) y (5.20). Para obtener (5.19) y (5.21), tomando (2.22), (2.24), (5.22) y (5.25) reemplazando en la tercer línea de (5.16) tenemos:

$$y(t) = (S_{31} + S_{32} M S_{21}) F x(t) + (S_{33} + S_{32} M S_{23}) w(t) - \left(\widehat{S}_{31} + S_{32} M \widehat{S}_{21} \right) F \widehat{x}(t) \quad (5.28)$$

comparando (5.6) con (5.28),

$$\widetilde{C}_p = \left(\widehat{S}_{31} + S_{32} M \widehat{S}_{21} \right) F \quad (5.29)$$

la ecuación (5.29) prueba ambos casos (5.19) y (5.21). ■

Note que (5.26) y (5.28) muestran que \widehat{A}_p de (5.27) y \widehat{C}_p de (5.29) son las matrices que mapean el observador en el sistema.

Lema 5.2

Considerar el esquema de control de la figura 5.4 y que satisface H1, H2 y H3, del Capítulo 1, sección 1.5. Sea la estructura del observador en lazo cerrado dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\widehat{x}}(t) \\ \widehat{D}_{in}(t) \\ \widehat{y}(t) \end{bmatrix} = \widehat{S}' \begin{bmatrix} \widehat{z}(t) \\ \widehat{D}_{out}(t) \\ w(t) \\ \dot{\widehat{x}}_d(t) \end{bmatrix} + S' \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ w(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

donde la estructura de unión del sistema reflejada al observador es:

$$S' = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & 0_{1 \times 2} \\ 0_{2(r+q) \times 4(n+r+p+m)} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Entonces, el modelo del observador en lazo cerrado es:

$$\widehat{A}_p = \widehat{E}^{-1} \left(\widehat{S}_{11}' + \widehat{S}_{12}' M' \widehat{S}_{21}' - S'_{21} M \widehat{S}_{21} \right) F \quad (5.32)$$

$$\widehat{B}_p = \widehat{E}^{-1} \left(\widehat{S}_{13}' + \widehat{S}_{12}' M' \widehat{S}_{23}' - S'_{21} M \widehat{S}_{23} \right) \quad (5.33)$$

$$\overline{A}_p = \widehat{E}^{-1} (S'_{11} + S'_{12} M S_{21}) F \quad (5.34)$$

$$\widehat{C}_p = \left(\widehat{S}_{31}' + \widehat{S}_{32}' M' \widehat{S}_{21}' \right) F \quad (5.35)$$

$$\widehat{D}_p = \widehat{S}_{33}' + \widehat{S}_{32}' M' \widehat{S}_{22}' \quad (5.36)$$

donde:

$$\widehat{E} = I + \widehat{S}_{14}' F_d^{-1} \left(\widehat{S}_{14}' \right)^T F \quad (5.37)$$

$$M' = L \left(I - \widehat{S}_{22}' L \right)^{-1} \quad (5.38)$$

Prueba. Sustituyendo (2.22), (2.23) y (2.26) en la primer línea de (5.30) da

$$\dot{\widehat{x}}(t) = \widehat{E}^{-1} \left[\widehat{S}_{11}' \widehat{z}(t) + \widehat{S}_{12}' \widehat{D}_{out}(t) + S'_{11} z(t) + S'_{12} D_{out}(t) + \left(\widehat{S}_{13}' w(t) + S'_{13} \right) w(t) \right] \quad (5.39)$$

tomando el estimado de (2.24) en (5.30), tenemos:

$$\widehat{D}_{in}(t) = \left(I - \widehat{S}_{22}' L \right)^{-1} \left(\widehat{S}_{21}' F \widehat{x}(t) + \widehat{S}_{23}' w(t) \right) \quad (5.40)$$

sustituyendo el estimado de (2.22), (2.24), (5.24) y (5.40) en (5.39),

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{x}}(t) &= \widehat{E}^{-1} \left(\widehat{S}_{11}' + \widehat{S}_{12}' M' \widehat{S}_{21}' - S'_{12} M \widehat{S}_{21} \right) F \widehat{x}(t) + \\ &\quad \widehat{E}^{-1} \left(\widehat{S}_{13}' + \widehat{S}_{12}' M' \widehat{S}_{23}' + S'_{12} M S_{23} \right) w(t) + \widehat{E}^{-1} (S'_{11} + S'_{12} M' S_{21}) F x(t) \end{aligned} \quad (5.41)$$

comparando (5.9) y (5.41) tenemos (5.32), (5.33) y (5.34).

Para obtener (5.35) y (5.36), sustituyendo (2.22), (2.24) y (5.40) en la tercer línea de (5.30), obtenemos:

$$\widehat{y}(t) = \left(\widehat{S}_{31}' + \widehat{S}_{32}' M' \widehat{S}_{21}' \right) F \widehat{x}(t) + \left(\widehat{S}_{33}' + \widehat{S}_{32}' M' \widehat{S}_{23}' \right) w(t) \quad (5.42)$$

comparando (5.11) y (5.42) tenemos (5.35) y (5.36). ■

Notar que las matrices \widehat{B}_p y \widehat{D}_p pueden calcularse directamente de (5.12), si se conoce B_p y D_p .

A continuación, se presentan expresiones para las ganancias del controlador y del observador.

Teorema 5.1

Sea un sistema LIT MEMS que satisface H1, H2 y H3, del Capítulo 1, sección 1.5 y el esquema de la figura 5.4.

1) Si el campo de disipación (R) está localizado antes que el campo de almacenamiento (L, C), es decir, si $\widehat{S}_{21} = 0$, $\widehat{S}_{11} \neq 0$ y/o $\widehat{S}_{31} \neq 0$, entonces, la ganancia gráfica directa para el controlador en el Bond Graph es:

$$\widehat{S}_{11} = EB_p K F^{-1} \quad (5.43)$$

2) En caso contrario, si $\widehat{S}_{11} = \widehat{S}_{31} = 0$ y $\widehat{S}_{21} \neq 0$, entonces, la ganancia gráfica directa para el controlador \widehat{S}_{21} es obtenida igualando los elementos de:

$$S_{12} M \widehat{S}_{21} = EB_p K F^{-1} \quad (5.44)$$

siendo $E = I + S_{14} F_d^{-1} S_{14}'$.

Más aún, la ganancia gráfica directa para el observador \widehat{S}_{11} y/o \widehat{S}_{31} es:

$$\widehat{E}^{-1} (S_{11}' + S_{12}' M S_{21}) F = HC \quad (5.45)$$

siendo $\widehat{E} = I + \widehat{S}_{14}' F_d^{-1} (\widehat{S}_{14}')^T F$ y $M = L(I - S_{22}L)^{-1}$.

Prueba. Las ganancias del control y del observador K y H respectivamente puede ser determinadas utilizando el Principio de Separación [47]. La ecuación característica del controlador está dada por:

$$\det(sI - A_p - B_p K) = 0 \quad (5.46)$$

Para el primer caso, de (5.7), (5.18) del Lema 5.1 y (5.46) obtenemos

$$\det(sI - A_p - E^{-1} \widehat{S}_{11}' F) = 0 \quad (5.47)$$

comparando (5.46) y (5.47) se prueba (5.43). Para el segundo caso, de (5.7), (5.20) del Lema 5.1 y de la ec. (5.46), tenemos

$$\det \left(sI - A_p - E^{-1} S_{12} M \widehat{S}_{21} F \right) = 0 \quad (5.48)$$

Comparando (5.46) y (5.48) se prueba (5.44). Por otro lado la ecuación característica del observador está dado por:

$$\det (sI - A_p + HC) = 0 \quad (5.49)$$

de (5.11), (5.37) del Lema 5.2 y (5.49)

$$\det \left[sI - A_p + \widehat{E}^{-1} (S'_{11} + S'_{12} M S_{21}) F \right] = 0 \quad (5.50)$$

comparando (5.49) y (5.50) se prueba (5.45). ■

A continuación, se presentan dos procedimientos para encontrar en un enfoque gráfico el observador y la retroalimentación de estados estimados, a partir del modelo en Bond Graph del sistema físico en lazo abierto.

Procedimiento 5.1

A través de este procedimiento se encuentra el observador de estados, considerando que se tiene el Bond graph del sistema en lazo abierto.

1. Se obtiene el observador de estados en Bond Graph, que es una copia del sistema en lazo abierto en Bond Graph.
2. Identificar la(s) salida(s) del sistema y del observador:
 - Si la salida es de esfuerzo, agregar un bond activo de esta salida a un detector de esfuerzo, que se conecta a una fuente modulada de esfuerzo mediante otro bond activo.
 - Si la salida es de flujo, agregar un bond activo de esta salida a un detector de flujo, que se conecta a una fuente modulada de flujo mediante otro bond activo.
3. La salida del observador debe ser negativa, así, la salida de la fuente del paso 2, llega a una unión-1 para una fuente de flujo y 0 para el caso contrario y después se conecta un bond que entra también a esa unión.
4. La fuente modulada de la salida del sistema del paso 2 y el bond adicional de la salida del observador del paso 3 se unen a través de bonds en una unión-0 para fuentes de flujo y en una unión-1 para fuentes de esfuerzo.

5. El número de bonds de salida de la unión del paso 4 es igual al número de variables de estado, las cuales son los elementos que almacenan energía en causalidad integral.
6. Conectar un transformador y/o girador entre el bond de salida del paso 5 y la variable de estado respectiva del observador.
7. Se utiliza un transformador para el paso 7 si la salida del sistema y observador es del mismo tipo (esfuerzo o flujo) a la de la variable de estado, y en caso contrario se utiliza un girador.
8. Asignar la causalidad a cada uno de los bonds, de acuerdo al Procedimiento de la sección 2.4.5, capítulo 2, debiéndose lograr una causalidad correcta en las uniones y no cambiando la causalidad en el resto de los elementos que ya tienen asignada una causalidad.
9. La ganancia gráfica directa del observador está dada por el o los módulos del transformador y/o girador y son calculadas por el Teorema 5.1.

A continuación, se presenta el Procedimiento 5.2 para la obtención de la retroalimentación de estado estimado en un enfoque gráfico.

Procedimiento 5.2

Este procedimiento da la retroalimentación de estado estimado en el dominio físico, dado el modelo del sistema físico en lazo abierto y de su observador en lazo abierto por el Procedimiento 5.1.

1. Si la entrada al sistema y observador está determinada por la señal de salida de un sistema previo, la conexión de ambos sistemas se debe realizar de acuerdo a la figura 5.5, en caso contrario, se tiene únicamente el bloque de línea punteada de la figura 5.5.

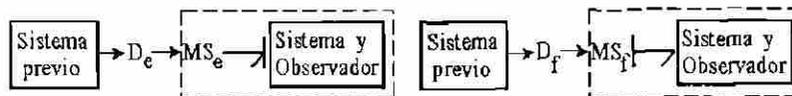


Figura 5.5 Conexión de la entrada al sistema y observador.

2. La fuente de entrada al sistema físico y al observador es uno de los dos esquemas de la figura 5.6, dependiendo del tipo de fuente de entrada a través de la cual se realiza la retroalimentación.

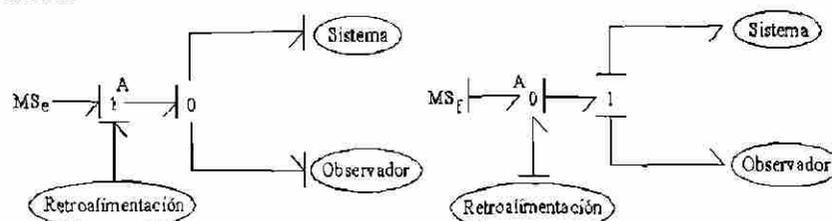


Figura 5.6 Esquemas de retroalimentación de estado estimado.

3. La retroalimentación se realiza con transformadore(s) y/o giradore(s), en lo(s) cual(es) su(s) módulo(s) es(son) la(s) ganancia(s) gráfica(s) directa(s) calculada(s) por el Teorema 5.1.
4. Las entradas de los transformadores y/o giradores del paso 2, están conectadas con un bond a la unión A de la figura 5.6 y cada salida a una fuente modulada de flujo para una variable de estado, q de un elemento de almacenamiento I , o de esfuerzo para una variable de estado, p de un elemento C .
5. La fuente del paso 4 se modula utilizando un bond activo que conecta al detector, la fuente y el detector debe ser del mismo tipo y este detector se conecta al elemento de almacenamiento de energía en causalidad integral del observador de estados.

En la siguiente sección, se aplican los resultados obtenidos en las secciones previas a dos ejemplos, mostrando que el observador y controlador se diseñan directamente en el dominio físico.

5.4 Ejemplos

A continuación se aplican los Lemas y Teoremas presentados, en dos ejemplos, así como la obtención del observador de estados y de la retroalimentación de estados estimados para cada uno de ellos.

5.4.1 Sistema Electromecánico

Considerar el esquema de motor de CD y su Bond Graph de la figura 5.7.

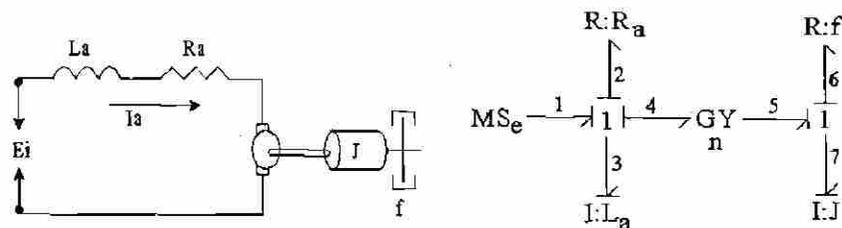


Figura 5.7 Esquema de un motor de CD y su Bond Graph.

Los vectores clave son:

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_3(t) \\ p_7(t) \end{bmatrix}; \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e_3(t) \\ e_7(t) \end{bmatrix}; z(t) = \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_7(t) \end{bmatrix};$$

$$D_{in}(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_6(t) \end{bmatrix}; D_{out}(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_6(t) \end{bmatrix}; y(t) = f_6(t)$$

$$u(t) = e_1(t)$$

donde $e_2(t)$ y $e_3(t)$ denotan voltajes; $f_2(t)$ y $f_3(t)$ corrientes en R_a y L_a , respectivamente; $e_6(t)$ y $e_7(t)$ torques; $f_6(t)$ y $f_7(t)$ velocidades en f y J , respectivamente; $p_3(t)$ enlace de flujo en L_a ; y $p_7(t)$ momento rotacional en J .

Las relaciones constitutivas para los elementos son:

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_a}, \frac{1}{J} \right\} \quad (5.51)$$

$$L = \text{diag} \{ R_a, f \} \quad (5.52)$$

$$F_d = 0 \quad (5.53)$$

La relación entrada-salida para el girador es:

$$\begin{bmatrix} e_4(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_5(t) \\ f_5(t) \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

Aplicando la propiedad A.3 del Apéndice A, sección A.4, del Bond Graph de la figura 5.7 las trayectorias causales:

- Para que los estados sean estructuralmente controlables son:

$$I : L_a \rightarrow \{1-3\}$$

$$I : J \rightarrow \{1-3-3-4-5-7\}$$

- Para que los estados sean estructuralmente observables son:

$$I : L_a \rightarrow \{6-7-7-5-4-3\}$$

$$I : J \rightarrow \{6-7\}$$

El Bond Graph en causalidad derivativa para el motor de CD se muestra en la figura 5.8.

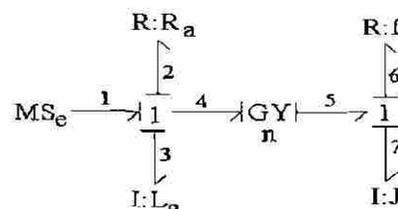


Figura 5.8 Bond Graph en causalidad derivativa de un motor de CD.

Como los elementos $I:L_a$ e $I:J$ admiten una causalidad derivativa y el Bond Graph de la figura 5.8 es causalmente correcto. Se concluye, que los estados $I:L_a$ e $I:J$ son estructuralmente controlables y observables.

Aplicando los Procedimientos 5.1 y 5.2 obtenemos el observador y la retroalimentación de estado estimado mostrados en la figura 5.9 para el motor C.D.

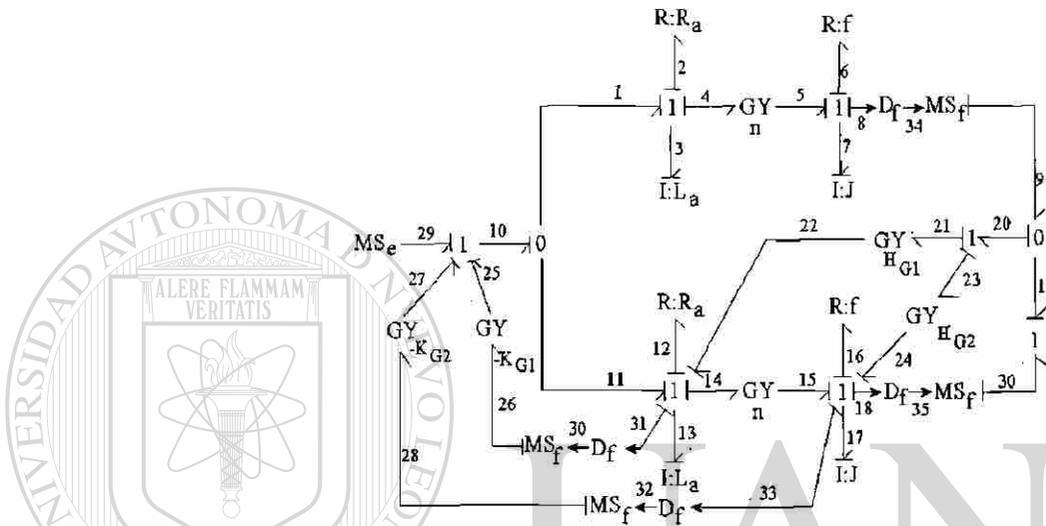


Figura 5.9 Observador y retroalimentación de estados para el motor de CD.

En la figura 5.9, H_{G1} y H_{G2} son las ganancias gráficas para el observador y K_{G1} y K_{G2} son las ganancias gráficas para el controlador.

La estructura de unión para el sistema está dada por (5.16), donde:

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & -n \\ n & 0 \end{bmatrix}; S_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \widehat{S}_{11} = \begin{bmatrix} K_{G1} & K_{G2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 S_{31} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 S_{12} &= -I_{2 \times 2}; S_{22} = S_{23} = S_{32} = S_{33} = \widehat{S}_{21} = \widehat{S}_{31} = 0
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

La estructura de unión propuesta para el observador está dada por (5.30), donde:

$$\begin{aligned}
 \widehat{S}_{11}' &= \begin{bmatrix} -K_{G1} & -K_{G2} - H_{G1} - n \\ n & -H_{G2} \end{bmatrix}; S_{11}' = \begin{bmatrix} 0 & H_{G1} \\ 0 & H_{G2} \end{bmatrix} \\
 \widehat{S}_{12}' &= -I_{2 \times 2}; \widehat{S}_{31}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}; \widehat{S}_{22}' = \widehat{S}_{23}' = \widehat{S}_{32}' = \widehat{S}_{33}' = S_{12}' = 0
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

De (5.53) $E = \widehat{E} = I_{2 \times 2}$.

Utilizando el primer caso del Lema 5.1, (5.18), (5.51) y (5.55)

$$\widetilde{A}_p = \begin{bmatrix} \frac{K_{G1}}{L_a} & \frac{K_{G2}}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

tambi3n, dado que $\widehat{S}_{31} = 0$ a partir de (5.19) tenemos:

$$\widetilde{C}_p = 0 \quad (5.58)$$

Sustituyendo (5.51), (5.52) y (5.54) en (2.29) hasta (2.32), obtenemos la siguiente realizaci3n del sistema f3sico en lazo cerrado:

$$A_p = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{n}{J} \\ \frac{n}{L_a} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix}; \quad B_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix}; \quad D_p = 0 \quad (5.60)$$

De (5.57) a (5.60), se obtiene el sistema completo en lazo cerrado,

$$\begin{bmatrix} e_3(t) \\ e_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{n}{J} \\ \frac{n}{L_a} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3(t) \\ p_7(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e_{29}(t) - \begin{bmatrix} \frac{K_{G1}}{L_a} & \frac{K_{G2}}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{p}_3(t) \\ \widehat{p}_7(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3(t) \\ p_7(t) \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

De (5.51), (5.59) y (5.43) la ganancia gr3fica directa es:

$$\widehat{S}_{11} = \begin{bmatrix} K_{G1} & K_{G2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 L_a & K_2 J \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

Utilizando el Lema 5.2, de (5.32), (5.51) y (5.56), obtenemos:

$$\widehat{A}_p = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} - \frac{K_{G1}}{L_a} & -\frac{n}{J} - \frac{K_{G2}}{J} - \frac{H_{G1}}{J} \\ \frac{n}{L_a} & -\frac{f}{J} - \frac{H_{G2}}{J} \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

De (5.34), (5.55) y (5.56) tenemos:

$$\overline{A}_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{H_{G1}}{J} \\ 0 & \frac{H_{G2}}{J} \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

Tomando (5.60) y (5.63) en (5.12) da

$$\widehat{C}_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

de (5.9), (5.63), (5.64) y (5.65) obtenemos el modelo del observador

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \widehat{e}_3(t) \\ \widehat{e}_7(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{-R_a}{L_a} - \frac{K_{G1}}{L_a} & \frac{-n}{J} - \frac{K_{G2}}{J} - \frac{H_{G1}}{J} \\ \frac{n}{L_a} & \frac{-f}{J} - \frac{H_{G2}}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{p}_3(t) \\ \widehat{p}_7(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{H_{G1}}{J} \\ 0 & \frac{H_{G2}}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3(t) \\ p_7(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e_{29}(t) \\ \widehat{y}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{p}_3(t) \\ \widehat{p}_7(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.66)$$

De las ecs. (5.45), (5.52), (5.56) y (5.60) la ganancia gráfica directa para el observador es:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{H_{G1}}{J} \\ 0 & \frac{H_{G2}}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{H_1}{J} \\ 0 & \frac{H_2}{J} \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

Notar que utilizando la metodología propuesta en los Lemas 5.1 y 5.2 obtenemos el modelo en lazo cerrado directamente a partir del Bond Graph de lazo abierto incluyendo control y observador.

Las siguientes simulaciones fueron hechas en SIMNON. Los parámetros del modelo son $L_a = 0.1$, $f = 0.1$, $R_a = 0.5$, $J = 1.5$, $n = 3$ y $e_1 = 10$. Las ganancias del control para tener un coeficiente de amortiguamiento de 0.5 son $K_1 = 5.94$ y $K_2 = 2$.

Sustituyendo los valores numéricos en (5.62), la ganancia gráfica directa para el controlador es:

$$\widehat{S}_{11} = \begin{bmatrix} 0.594 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

Los polos de lazo cerrado debido al observador son colocados en $p_{1,2} = -9.1683 \pm j5.2549$, de (5.53) tenemos $H_1 = 13.33$ y $H_2 = 13.33$. Sustituyendo los valores numéricos en (5.67), la ganancia gráfica directa para el observador es:

$$S'_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 13.33 \\ 0 & 13.33 \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

Las figuras 5.10 y 5.11 muestran la simulación para este ejemplo.

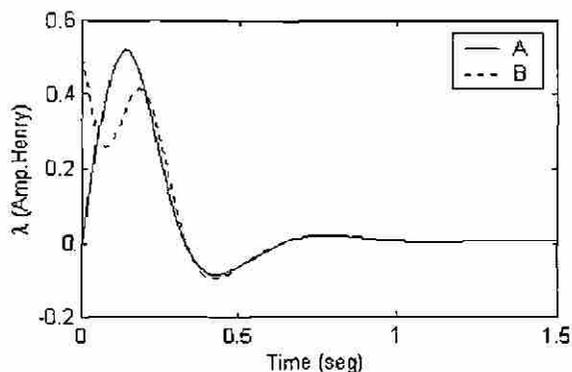


Figura 5.10 Gráfica del comportamiento de los enlaces de flujo donde: A) Estado del sistema; B) Estado estimado.

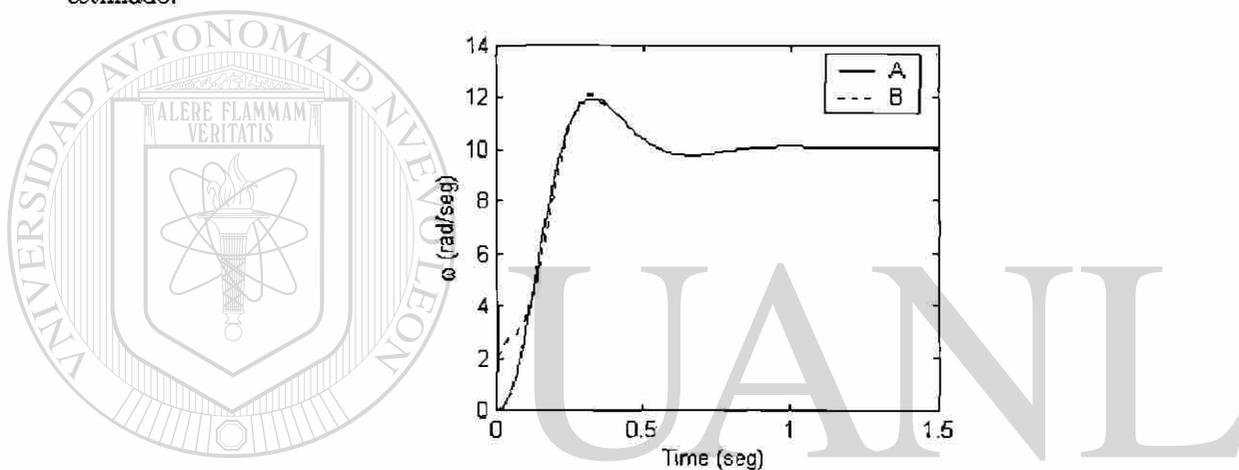


Figura 5.11 Gráfica del comportamiento de la salida, donde A) Estado del sistema; B) Estado estimado.

Podemos observar en ambas figuras 5.10 y 5.11 que se satisfacen las condiciones previas de diseño para el controlador y observador.

En el siguiente ejemplo, se considera un sistema hidráulico en el cual, su Bond Graph en lazo abierto presenta un elemento almacenador de energía en causalidad derivativa, así mismo, su estructura en lazo cerrado requiere la utilización del segundo caso del Lema 5.1 y Teorema 5.1.

5.4.2 Sistema Hidráulico

El siguiente sistema hidráulico es mostrado en la figura 5.12, el cual considera el segundo caso de los Lemas.

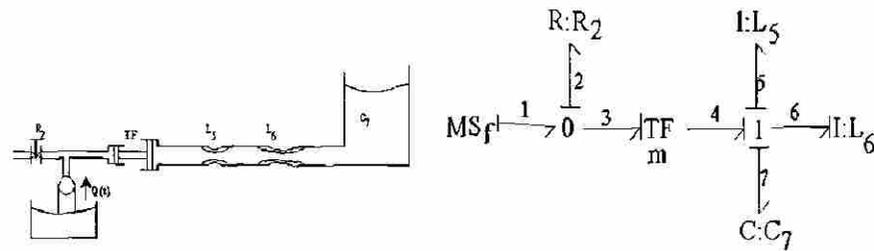


Figura 5.12 Sistema hidráulico y su Bond Graph.

Los vectores clave son

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_6(t) \\ q_7(t) \end{bmatrix}; \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e_6(t) \\ f_7(t) \end{bmatrix}; \quad z(t) = \begin{bmatrix} f_6(t) \\ e_7(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} D_{out}(t) = e_2(t) & ; & y(t) = e_1(t) & ; & x_d(t) = p_5(t) \\ D_{in}(t) = f_2(t) & ; & u(t) = f_1(t) & ; & \dot{x}_d(t) = e_5(t) \\ & & & & z_d(t) = f_5(t) \end{aligned}$$

donde $e_k(t)$, $f_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, 7$ son presiones y flujos respectivamente; $e_{a5}(t)$ y $e_{a6}(t)$ son momentos de presiones en L_5 y L_6 respectivamente y $f_{a7}(t)$ es el flujo de volumen en C_7 .

Las relaciones constitutivas de los elementos son

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_6}, \frac{1}{C_7} \right\} \quad (5.70)$$

$$L = R_2 \quad (5.71)$$

$$F_d = \frac{1}{L_5} \quad (5.72)$$

La relación entrada-salida del girador es

$$\begin{bmatrix} e_3(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

Aplicando la propiedad A.3 del Apéndice A, sección A.4, del Bond Graph de la figura 5.12 las trayectorias causales:

- Para que los estados sean estructuralmente controlables son:

$$I : L_a \rightarrow \{1-2-2-3-4-6\}$$

$$I : J \rightarrow \{1-2-3-4-6-6-7\}$$

- Para que los estados sean estructuralmente observables son:

$$I : L_a \rightarrow \{1-2-2-3-4-6\}$$

$$I : J \rightarrow \{1-2-2-3-4-6-6-7\}$$

El Bond Graph en causalidad derivativa del Bond Graph de la figura 5.12 se muestra en la figura 5.13.

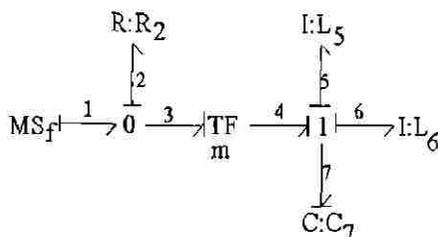


Figura 5.13 Bond Graph en causalidad derivativa de la figura 5.11.

Como los elementos $I:L_6$ e $C:C_7$ admiten una causalidad derivativa y el Bond Graph de la figura 5.13 es causalmente correcto. Se concluye, que los estados $I:L_6$ e $C:C_7$ son estructuralmente controlables y observables.

Aplicando los Procedimientos 5.1 y 5.2 al Bond Graph del sistema de la figura 5.12 se obtiene el Bond Graph con retroalimentación de estado estimado de la figura 5.14.

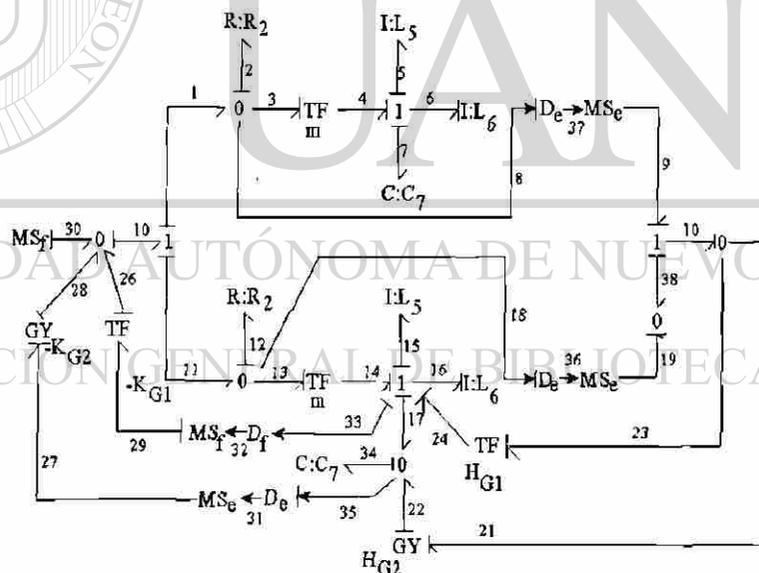


Figura 5.14 Observador y retroalimentación de estado para el sistema hidráulico.

La estructura de unión para el sistema está dado por (5.19), donde

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad S_{21} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m} & 0 \\ K_{G1} & K_{G2} \end{bmatrix}; \quad S_{14} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

$$S_{13} = S_{22} = S_{31} = S_{33} = \widehat{S}_{11} = \widehat{S}_{31} = 0; \quad S_{23} = S_{32} = 1$$

La estructura de unión para el observador está dada por (5.30), donde

$$\begin{aligned} \widehat{S}_{11}' &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \widehat{S}_{12}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} - H_{G1} \\ -H_{G2} \end{bmatrix}; \widehat{S}_{14}' = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}; S'_{21} \approx \begin{bmatrix} H_{G1} \\ H_{G2} \end{bmatrix} \\ \widehat{S}_{21}' &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{m} - K_{G1} & -K_{G2} \end{bmatrix}; \widehat{S}_{13}' = \widehat{S}_{22}' = \widehat{S}_{31}' = \widehat{S}_{33}' = S'_{11} \approx 0; \widehat{S}_{23}' = \widehat{S}_{32}' = 1 \end{aligned} \quad (5.75)$$

De (2.33) tenemos

$$E = \widehat{E} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

donde

$$\Delta \triangleq \frac{L_5 + L_6}{L_6}$$

Utilizando el segundo caso del Lema 5.1, de (5.68) a (5.76) y (5.20), \widetilde{A} está dada por

$$\widetilde{A}_p = \begin{bmatrix} \frac{R_2 K_{G1}}{m \Delta L_6} & \frac{R_2 K_{G2}}{m \Delta C_7} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

sabemos que $\widehat{S}_{31} = 0$, así, a partir de (5.21) tenemos

$$\widetilde{C}_p = \begin{bmatrix} -\frac{R_2 K_{G1}}{L_6} & \frac{R_2 K_{G2}}{C_7} \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

Sustituyendo (5.70) a (5.76) en (2.29) a (2.32) obtenemos

$$A_p = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{m^2 \Delta L_6} & -\frac{1}{\Delta C_7} \\ \frac{1}{L_6} & 0 \end{bmatrix}; B_p = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{m \Delta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

$$C_p = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{m L_6} & 0 \end{bmatrix}; D_p = R_2 \quad (5.80)$$

Tomando (5.77) a (5.80) en (5.6), obtenemos el sistema físico de control por retroalimentación de estado estimado

$$\begin{bmatrix} e_6(t) \\ f_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{m^2 \Delta L_6} & -\frac{1}{\Delta C_7} \\ \frac{1}{L_6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_6(t) \\ q_7(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{m \Delta} \\ 0 \end{bmatrix} f_{30}(t) \quad (5.81)$$

$$- \begin{bmatrix} \frac{R_2 K_{G1}}{m \Delta L_6} & \frac{R_2 K_{G2}}{m \Delta C_7} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{p}_6(t) \\ \widehat{q}_7(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{m L_6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_6(t) \\ q_7(t) \end{bmatrix} + R_2 f_{30}(t) - \begin{bmatrix} \frac{R_2 K_{G1}}{L_6} & \frac{R_2 K_{G2}}{C_7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{p}_6(t) \\ \widehat{q}_7(t) \end{bmatrix}$$

De (5.44), (5.70), (5.71), (5.74), (5.76) y (5.79) la ganancia gráfica directa para el controlador es:

$$\begin{bmatrix} \frac{K_{G1}R_2}{m} & \frac{K_{G2}R_2}{m} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_1R_2L_6}{m} & \frac{K_2R_2C_7}{m} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

Utilizando el segundo caso del Lema 5.2, desde (5.70) hasta (5.76) y (5.32) da

$$\widehat{A}_p = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{m^2\Delta L_6} - \frac{R_2K_{G1}}{m\Delta L_6} + \frac{R_2H_{G1}}{mL_6} & -\frac{1}{\Delta C_7} - \frac{R_2K_{G2}}{m\Delta C_7} \\ \frac{1}{L_6} + \frac{R_2H_{G2}}{mL_6} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

A partir de (5.34), desde (5.70) hasta (5.73) y (5.75) tenemos

$$\overline{A}_p = \begin{bmatrix} -\frac{R_2H_{G1}}{mL_6} & 0 \\ -\frac{R_2H_{G2}}{L_6} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

De la ec. (5.35), desde (5.70) hasta (5.73) y (5.75)

$$\widehat{C}_p = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{mL_6} - \frac{R_2K_{G1}}{L_6} & \frac{R_2K_{G2}}{C_7} \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

Sustituyendo (5.83), (5.84) y (5.85) en (5.9), obtenemos el modelo del observador

$$\begin{bmatrix} \widehat{e}_6(t) \\ \widehat{f}_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{m\Delta L_6} - \frac{R_2K_{G1}}{m\Delta L_6} - \frac{R_2H_{G1}}{mL_6} & -\frac{1}{\Delta C_7} - \frac{R_2K_{G2}}{m\Delta C_7} \\ \frac{1}{L_6} + \frac{R_2H_{G2}}{mL_6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{p}_6(t) \\ \widehat{q}_7(t) \end{bmatrix} + (5.86)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{R_2H_{G1}}{mL_6} & 0 \\ \frac{R_2H_{G2}}{mL_6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_6(t) \\ q_7(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{m\Delta} \\ 0 \end{bmatrix} f_{30}(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{mL_6} - \frac{R_2K_1}{L_6} & -\frac{R_2K_2}{C_7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{p}_6(t) \\ \widehat{q}_7(t) \end{bmatrix} + R_2f_{30}(t)$$

De (5.45), (5.70), (5.74), (5.75), (5.76) y (5.80), la ganancia gráfica directa para el observador es

$$H_{G1} = \Delta H_1 \quad (5.87)$$

$$H_{G2} = H_2$$

Los parámetros del modelo son $R_2 = 5$, $C_7 = 0.5$, $L_6 = 0.1$, $L_6 = 0.01$, $m = 2$ y $f_1 = 10$. Para tener un coeficiente de amortiguamiento de 0.5, $K_1 = 1.89$ y $K_2 = 10$, la ganancia gráfica para el controlador se obtiene de (5.82),

$$\widehat{S}_{21} = \begin{bmatrix} K_{G1} & K_{G2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.189 & 5 \end{bmatrix} \quad (5.88)$$

Los polos de lazo cerrado debido al observador son colocados en $p_{1,2} = -4.4318 \pm j1.7565$ de (5.52) tenemos $H_1 = 0.1$ y $H_2 = 0.1$. Sustituyendo los valores numéricos en (5.87), la ganancia grafica directa para el observador es:

$$S'_{12} = \begin{bmatrix} 0.011 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad (5.89)$$

Note que, podemos obtener el modelo de lazo cerrado, sin calcular las matrices A_p , B_p , C_p y D_p de lazo abierto. Las figuras 5.15 y 5.16 muestran los resultados de la simulación numérica para este ejemplo.

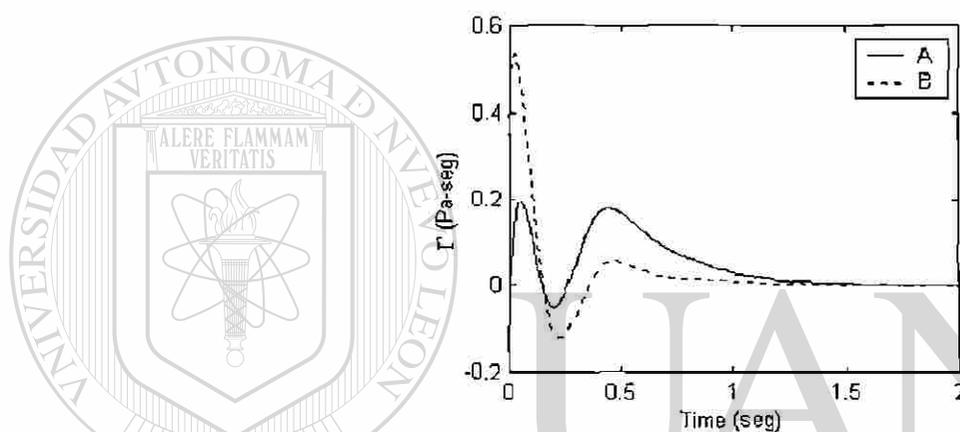


Figura 5.15 Gráfica del comportamiento de la presión, donde: A) Estado del sistema; B) Estado estimado.

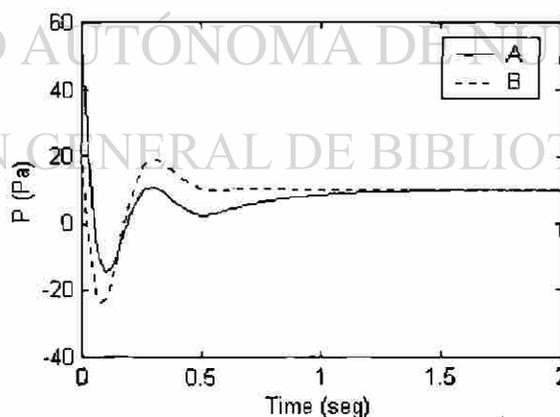


Figura 5.16 Gráfica del comportamiento de la salida, donde: A) Salida del sistema; B) Salida estimada.

Podemos observar que en ambas figuras 5.15 y 5.16 las condiciones de diseño dadas anteriormente para el controlador y el observador son satisfechas.

Continuando con el estudio de las propiedades de un sistema físico, se observa que no sólo es útil conocer el comportamiento dinámico sino también su caracterización de estado estacionario.

Así, se presenta en el siguiente capítulo los valores de estado estacionario para un sistema físico en un enfoque de Bond Graph y la determinación gráfica directa del error de estado estacionario utilizando retroalimentación de la salida y un control proporcional.

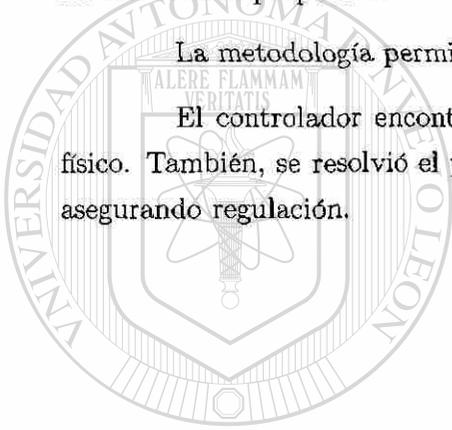
5.5 Conclusiones

Se presentó una retroalimentación de estado estimado para sistemas LIT MEMS.

Se propuso una metodología para obtener el sistema completo en lazo cerrado incluyendo observador y retroalimentación, directamente a partir del Bond Graph en lazo abierto y de las estructuras propuestas.

La metodología permite considerar diferentes tipos de energía.

El controlador encontrado es realizable debido al hecho de que se utiliza el dominio físico. También, se resolvió el problema de la asignación de dinámica garantizando estabilidad y asegurando regulación.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Capítulo 6

Valores de Estado Estacionario para un Sistema Físico LTI MIMO utilizando Bond Graph

6.1 Introducción

Cualquier sistema de control lineal físico sufre inherentemente un *error estacionario* en respuesta a ciertos tipos de entradas [50]. Un sistema puede no tener error estacionario a una entrada escalón, pero el mismo sistema puede presentar error estacionario no nulo a una entrada rampa (el único modo en que se puede eliminar éste error es modificando la estructura del sistema) [51]. Si un sistema dado ha de presentar o no error estacionario ante determinado tipo de entrada, depende del tipo de función del sistema [51].

Garantizando *estabilidad absoluta*, comportamientos importantes del sistema a los cuales hay que dar cuidadosa consideración es la *estabilidad relativa* y el error estacionario [4].

Dado que un sistema físico de control involucra almacenamiento de energía, la salida del sistema relacionada con una entrada, no puede seguir a ésta inmediatamente sino que presenta una respuesta transitoria antes de poder alcanzar un estado estacionario [51]. La respuesta transitoria de un sistema de control frecuentemente presenta oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar un estado de equilibrio [47]. Si la salida de un sistema en *estado estacionario* no coincide exactamente con la entrada de referencia, se dice que el sistema tiene un *error estacionario* [4]. Este error indica la exactitud del sistema. Al analizar un sistema de control, es importante examinar el comportamiento de la respuesta transitoria, tal como el tiempo requerido para

alcanzar un nuevo estado estacionario y el valor del error al seguir una señal de entrada, así como el comportamiento estacionario [33].

En este capítulo, se presenta un procedimiento gráfico sencillo y directo para obtener el valor de estado estacionario de un sistema físico representado en Bond Graph. Para conseguir este objetivo, se requiere calcular e invertir la matriz A_p , de una representación en espacio de estado, la cual es invertible para un sistema físico, si satisface las hipótesis H1, H2 y H3, del Capítulo 1, sección 1.5. Se muestra que utilizando la estructura de unión del Bond Graph en causalidad derivativa, no es necesario calcular e invertir la matriz A_p . Así mismo, la matriz inversa de A_p se puede obtener directamente a partir del *Bond Graph Recíproco* del sistema [6].

En la referencia [59] se tiene la determinación de un conjunto de equilibrio (estado estacionario), donde se propone reemplazar los elementos I 's por fuentes de esfuerzo nulo y los elementos C 's por fuentes de flujo nulo (lo cual es equivalente a colocarlos en causalidad derivativa).

En el Apéndice C, sección C.4, se da un artículo publicado con los resultados de Valor de Estado Estacionario, siendo la contribución la determinación simbólica del equilibrio (estado estacionario) a partir de la Estructura de Unión que se presentan en este capítulo [37]. Además, en la sección C.6 se da un artículo aceptado sobre error de estado estacionario para un sistema físico con un enfoque de Bond Graph que se propone en este mismo capítulo [39].

El capítulo, está formado por cuatro secciones principalmente: en la primera, se estudia el estado estacionario en variables de estado y en función de transferencia. Después, se propone un procedimiento para encontrar los valores de estado estacionario de las variables de estado y de la salida en un enfoque de Bond Graph y su aplicación a dos ejemplos. La tercera sección, presenta un Lema y un procedimiento para determinar en un Bond Graph la diferencia de la salida respecto a la entrada de referencia en estado estacionario aplicándolo a un ejemplo y finalmente, se propone un procedimiento en el dominio físico para calcular el error en estado estacionario de un sistema físico con retroalimentación de salida y con un control proporcional, con su respectivo ejemplo.

En la siguiente sección, se resume el estudio de estado estacionario en función de transferencia y en variables de estado.

6.2 Antecedentes de estado estacionario

El comportamiento de estado estacionario es una importante característica de un sistema cuando su respuesta transitorio dinámico ha terminado [4]. Actualmente, algunos equipos como, máquinas eléctricas en sistemas eléctricos de potencia requieren conocer los valores de

estado estacionario para calibración y ajuste de protecciones, etc.

A continuación, se estudia la determinación de los valores de estado estacionario del modelo, así como el error de estado estacionario para un sistema retroalimentado.

6.2.1 Estado Estacionario

La respuesta de estado estacionario es útil para conocer el valor que alcanza cada variable de estado de un sistema físico en una representación en espacio de estado cuando el periodo dinámico ha terminado. Aplicando el Teorema de Valor Final [51] podemos determinar el valor de estado de estacionario de la respuesta de un sistema. Así, el error en estado estacionario queda determinado,

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [e(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot e(s)] \quad (6.1)$$

Aplicando (6.1) a (2.28) tenemos:

$$x_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t)] = -A_p^{-1} B_p u_{ss} \quad (6.2)$$

$$y_{ss} = (D_p - C_p A_p^{-1} B_p) u_{ss} \quad (6.3)$$

donde:

$$u_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot u(s)] \quad (6.4)$$

De esta manera, utilizando (6.2) y (6.3) podemos calcular el estado estacionario, pero necesitaríamos calcular A_p^{-1} , lo cual es laborioso para sistemas de alto orden.

Si el sistema está representado en función de transferencia, tenemos:

$$Y(s) = G(s) U(s) \quad (6.5)$$

Utilizando el Teorema de Valor Final, obtenemos el valor de estado estacionario de la salida dada por:

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} [sG(s) u(s)] \quad (6.6)$$

En la siguiente sección se estudia el error de estado estacionario de un sistema de lazo cerrado.

6.2.2 Sistema en Lazo Cerrado

En un sistema de control, la señal de error, la cual es la diferencia entre la señal de entrada y la señal retroalimentada. En esta sección, se introduce al controlador de modo que reduzca esta señal de error y lleve la salida del sistema a un valor deseado.

Considerando el esquema en lazo cerrado de la figura 6.1.

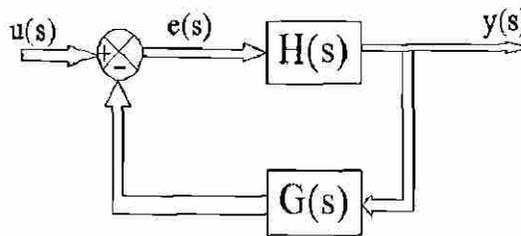


Figura 6.1 Sistema en lazo cerrado.

La relación entre la salida $Y(s)$ y la entrada $U(s)$ está dada por

$$Y(s) = H(s) [I + G(s)H(s)]^{-1} U(s) \quad (6.7)$$

la relación entre el error $E(s)$ y la entrada es:

$$E(s) = [I + G(s)H(s)]^{-1} U(s) \quad (6.8)$$

El uso de (6.8) requiere el modelo del sistema $G(s)$ y de la retroalimentación $H(s)$.

En la siguiente sección se presenta un enfoque gráfico para determinar el estado estacionario de un sistema físico, modelado en Bond Graph.

6.3 Estado Estacionario de las Variables de Estado y de la Salida del Sistema en Bond Graph

Se puede resolver directamente el problema de obtener A_p^{-1} de (6.2) utilizando el modelo en Bond Graph en causalidad derivativa del sistema físico.

Una vez que se tiene el modelo de un sistema físico en Bond Graph en causalidad integral, se cambia la causalidad de los elementos almacenadores de energía, a causalidad derivativa y se ajusta la causalidad de los elementos que disipan energía para que las uniones cumplan con las reglas de causalidad dadas en el capítulo 1, a éste procedimiento se le llama *asignación de causalidad derivativa predefinida* o simplemente *Bond Graph en causalidad derivativa* [29].

Suponer que A_p es invertible y se tiene un asignación de causalidad derivativa en el modelo de Bond Graph. A partir de (2.25) la estructura de unión está dada por [29, 30]:

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ D_{ind}(t) \\ y_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{outd}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$D_{outd}(t) = L_d D_{ind}(t) \quad (6.10)$$

de las ecs. (2.28) a (2.34) (6.9) y (6.10) obtenemos:

$$z(t) = A_p^* \dot{x}(t) + B_p^* u(t) \quad (6.11)$$

$$y_d(t) = C_p^* \dot{x}(t) + D_p^* u(t) \quad (6.12)$$

donde:

$$A_p^* = J_{11} + J_{12} N J_{21} \quad (6.13)$$

$$B_p^* = J_{13} + J_{12} N J_{23} \quad (6.14)$$

$$C_p^* = J_{31} + J_{32} N J_{21} \quad (6.15)$$

$$D_p^* = J_{33} + J_{32} N J_{23} \quad (6.16)$$

$$N = (I - L_d J_{22})^{-1} L_d \quad (6.17)$$

Las ecuaciones de estado de este sistema en causalidad integral están dadas por (2.28). Entonces, de (2.22), (2.28) (6.11) y (6.12) tenemos:

$$A_p^* = F A_p^{-1} \quad (6.18)$$

$$B_p^* = -F A_p^{-1} B_p \quad (6.19)$$

$$C_p^* = C_p A_p^{-1} \quad (6.20)$$

$$D_p^* = D_p - C_p A_p^{-1} B_p \quad (6.21)$$

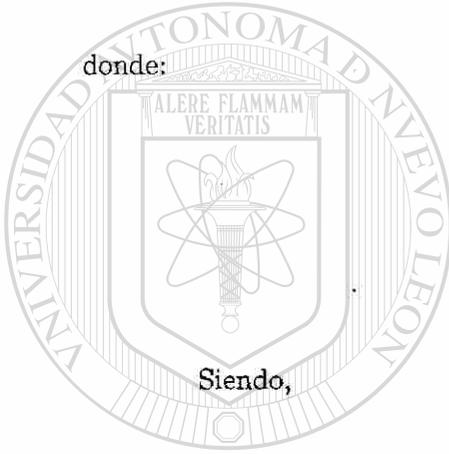
las expresiones previas nos indican la relación existente entre las variables de estado del sistema representado en Bond Graph en causalidad integral y en causalidad derivativa.

A partir de (6.2), (6.3), (6.19) y (6.21) obtenemos el estado estacionario dado por:

$$x_{ss} = F^{-1} B_p^* u_{ss} \quad (6.22)$$

$$y_{ss} = D_p^* u_{ss} \quad (6.23)$$

A continuación, se aplican estos resultados de estado estacionario en el dominio físico a dos ejemplos.



6.3.1 Ejemplo de un Sistema Mecánico

Considerar el sistema mecánico de la figura 3.5, cuyo Bond Graph en causalidad integral se muestra en la figura 3.6, así como los vectores clave y relaciones constitutivas se dan en la sección 3.6.1.

El Bond Graph en causalidad derivativa se muestra en la figura 6.2.

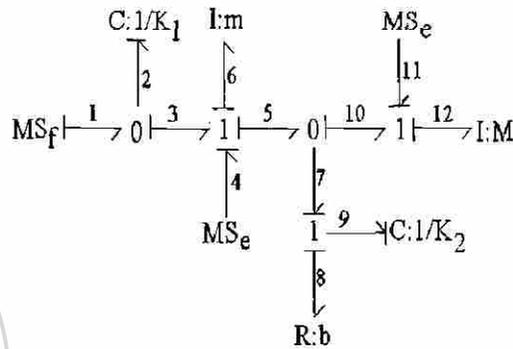


Figura 6.2 Bond graph en causalidad derivativa de la figura 3.5

A partir de (6.8) la Estructura de Unión para el Bond Graph de la figura 6.2 está dada por:

$$J_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; J_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; J_{13} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

$$J_{21} = -J_{12}^T; J_{22} = J_{23} = J_{32} = J_{33} = 0$$

para este ejemplo $D_{ind}(t) = D_{in}(t)$ y $D_{outd}(t) = D_{out}(t)$. Así, de (6.19), B_p^* está dada por:

$$B_p^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

Finalmente, los valores de estado estacionario de las variables de estado se obtienen de (6.22)

$$x_{ss} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{k_1} & \frac{1}{k_1} \\ m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_2} \\ M & 0 & 0 \end{bmatrix} u_{ss} \quad (6.26)$$

Podemos observar que, éste es el procedimiento anterior es un procedimiento sencillo y directo y no es necesario calcular A_p , A_p^{-1} y B_p .

A continuación, se encuentra el modelo dinámico del sistema del ejemplo anterior, con el objetivo de verificar en simulación el valor de estado estacionario de (6.26).

El modelo dinámico de este ejemplo se obtiene de (2.27), donde:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; S_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; S_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

$$S_{21} = -S_{12}^T; S_{22} = S_{23} = S_{32} = S_{33} = 0$$

así, el modelo está dado por (2.28)

$$\begin{bmatrix} f_2(t) \\ e_8(t) \\ f_9(t) \\ e_{12}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{m} & 0 & 0 \\ k_1 & \frac{-1}{m} & -k_2 & \frac{b}{m} \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & \frac{M}{m} \\ 0 & \frac{1}{m} & k_2 & \frac{M}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2(t) \\ p_6(t) \\ q_9(t) \\ p_{12}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ e_4(t) \\ e_{11}(t) \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

Las siguientes simulaciones fueron hechas en SIMNON. Los parámetros del sistema son $k_1 = 5$, $k_2 = 10$, $m = 3$, $M = 6$ y $b = 10$. Las entradas de referencia son $f_1 = 1$, $e_4 = 1$ y $e_{11} = 1$. Las figuras 6.3 y 6.4, muestran la respuesta estacionaria de las variables de estado del sistema.

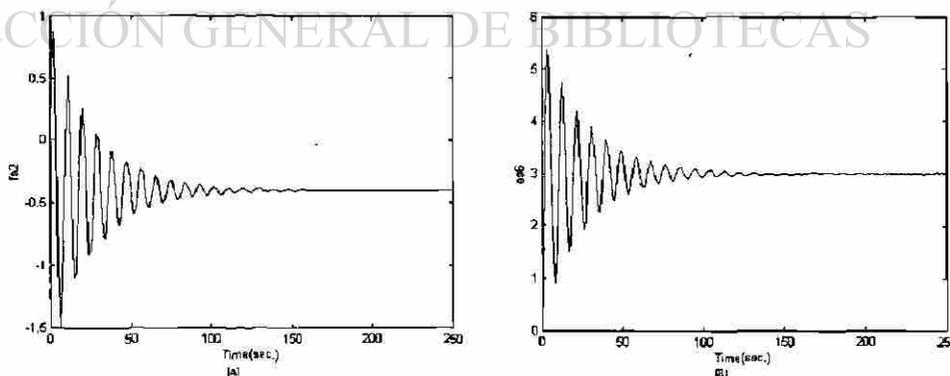


Figura 6.3 Variables de estado: (A) $q_2(t)$; (B) $p_6(t)$.

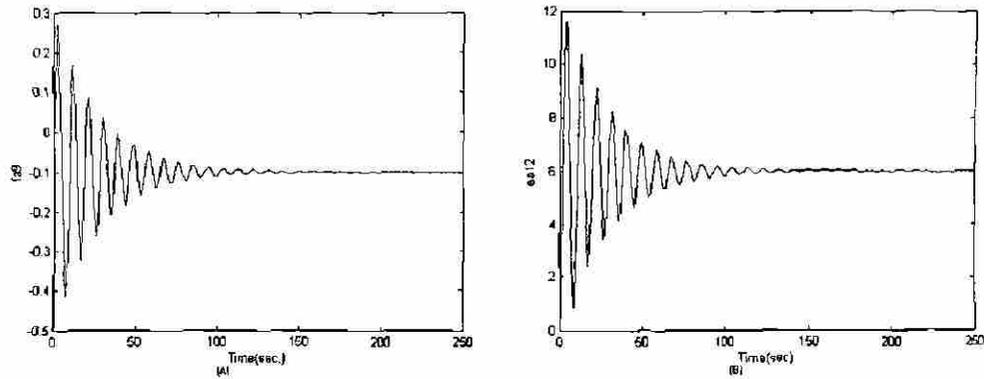


Figura 6.4 Variables de estado: (A) $q_9(t)$; (B) $p_{12}(t)$.

Como se esperaba, los valores de estado estacionario son: $(q_2)_{ss} \approx -0.4$, $(p_6)_{ss} = 3$, $(q_9)_{ss} = -0.1$ y $(p_{12})_{ss} = 6$.

Notar que este procedimiento para obtener el estado estacionario de las variables de estado es una herramienta sencilla para análisis.

6.3.2 Ejemplo de un Sistema Eléctrico

Considere el sistema eléctrico de la figura 6.5.

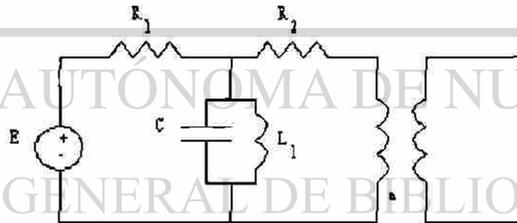


Figura 6.5 Ejemplo de un sistema eléctrico.

El Bond Graph en causalidad integral se muestra en la figura 6.6.

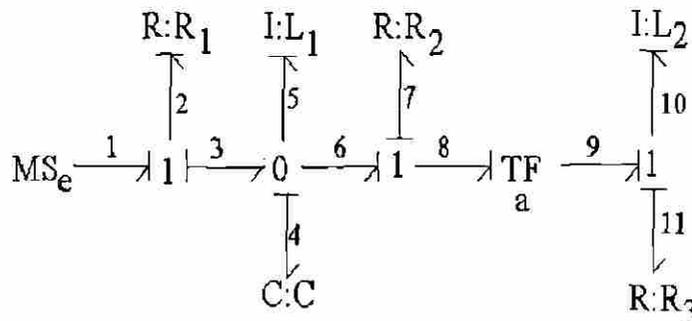


Figura 6.6 Bond Graph en causalidad integral.

Los vectores clave son:

$$x(t) = \begin{bmatrix} q_4(t) \\ p_5(t) \\ p_{10}(t) \end{bmatrix}; \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} f_4(t) \\ e_5(t) \\ e_{10}(t) \end{bmatrix}; z(t) = \begin{bmatrix} e_4(t) \\ f_5(t) \\ f_{10}(t) \end{bmatrix};$$

$$D_{in}(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) \\ f_7(t) \\ f_{11}(t) \end{bmatrix}; D_{out}(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) \\ e_7(t) \\ e_{11}(t) \end{bmatrix}; \begin{matrix} u(t) = e_1(t) \\ y(t) = f_{11}(t) \end{matrix}$$

donde $e(t)$ es voltaje, $f(t)$ es la corriente en cada elemento del sistema eléctrico; $f_{a4}(t)$ es la carga del capacitor en C , y $e_{a5}(t)$ y $e_{a10}(t)$ son los enlaces de flujo en L_1 y L_2 , respectivamente.

Las relaciones constitutivas para los elementos son:

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{C}, \frac{1}{L_1}, \frac{1}{L_2} \right\}$$

$$L = \text{diag} \left\{ \frac{1}{R_1}, R_2, R_3 \right\}$$

$$\begin{bmatrix} e_8(t) \\ f_8(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_9(t) \\ f_9(t) \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

El Bond Graph en causalidad derivativa se muestra en la figura 6.7.

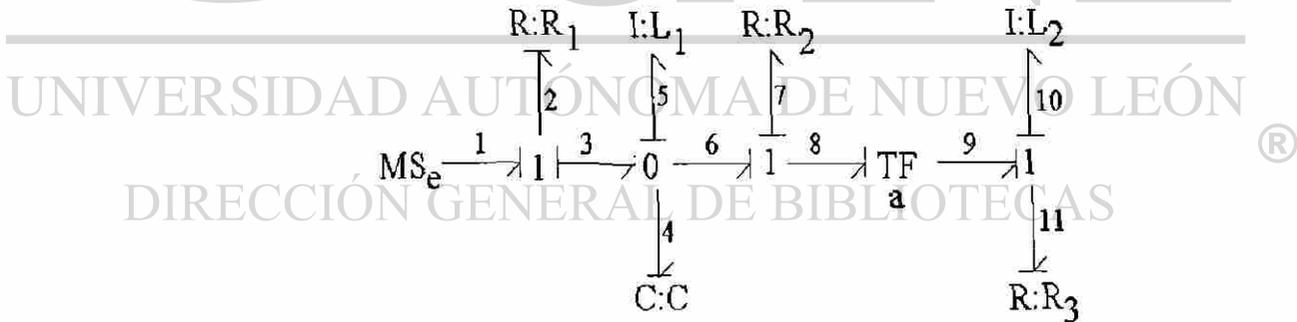


Figure 6.7 Bond Graph en causalidad derivativa.

Los vectores clave D_{ind} y D_{outd} en causalidad derivativa son:

$$D_{ind}(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) & f_7(t) & e_{11}(t) \end{bmatrix}^T; D_{outd}(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) & e_7(t) & f_{11}(t) \end{bmatrix}^T$$

de tal manera que,

$$L_d = \text{diag} \left\{ \frac{1}{R_1}, R_2, \frac{1}{R_3} \right\} \quad (6.30)$$

La estructura de unión de la figura 6.6 es,

$$\begin{aligned}
 J_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad J_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{-1}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 J_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & \frac{-1}{a} & 0 \end{bmatrix}; \quad J_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad J_{31} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \\
 J_{21} &= -J_{12}^T; \quad J_{13} = 0; \quad J_{33} = 1
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

El vector B_p^* está dado por:

$$B_p^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_1} & 0 \end{bmatrix}^T \tag{6.32}$$

de (6.21), el valor de estado estacionario de la variable de estado es:

$$x_{ss} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{L_1}{R_1} & 0 \end{bmatrix}^T (e_1)_{ss} \tag{6.33}$$

A continuación, se encuentra el modelo dinámico del sistema del ejemplo anterior, con el objetivo de verificar en simulación el valor de estado estacionario de (6.33).

De (2.27) la estructura de unión en causalidad integral es utilizada para obtener el siguiente modelo dinámico:

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{-1}{a} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad S_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 S_{31} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad S_{13} = S_{22} = S_{32} = S_{33} = 0
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

El modelo dinámico está dado por:

$$\begin{bmatrix} f_4(t) \\ e_5(t) \\ e_{10}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 C} & \frac{-1}{L_1} & \frac{-1}{a L_2} \\ \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a C} & 0 & \frac{-R_2}{a^2 L_2} - \frac{R_3}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4(t) \\ p_5(t) \\ p_{10}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_1(t) \tag{6.35}$$

Los parámetros del sistema son $R_1 = 10$, $R_2 = 5$, $R_3 = 2$, $L_1 = 0.1$, $L_2 = 0.2$, $C = 0.01$ y $a = 10$. El parámetro de control es $e_1 = 1$. Las figuras 6.8 y 6.9 muestran la respuesta de las variables de estado del sistema.

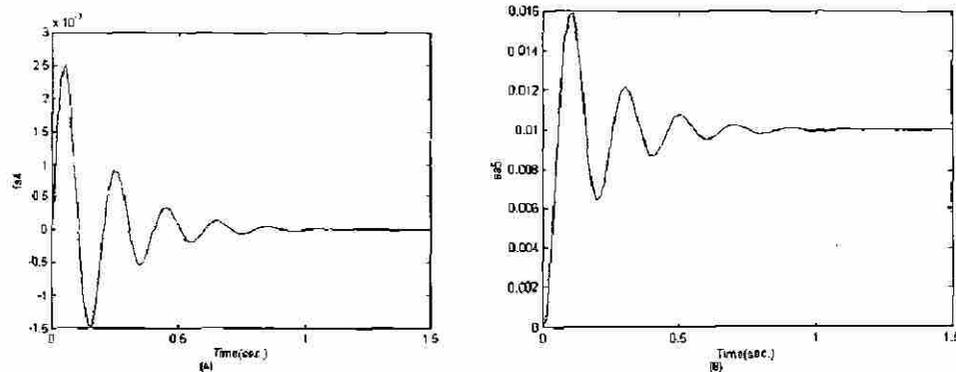


Figura 6.8 Variables de estado: (A) $q_4(t)$; (B) $p_5(t)$.

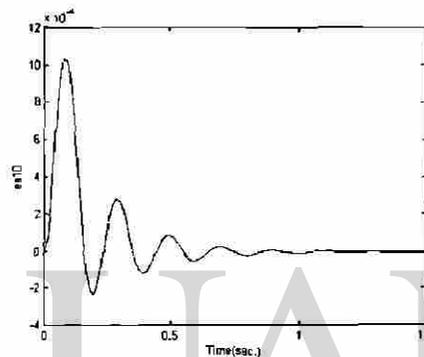
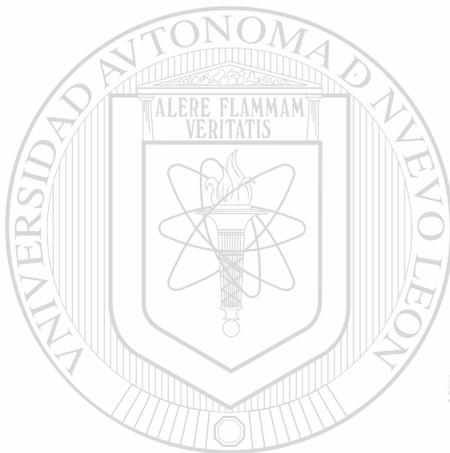


Figura 6.9 Variable de estado $q_{10}(t)$.

Como se esperaba, los valores de estado estacionario son: $(q_4)_{ss} = 0$, $(p_5)_{ss} = 0.01$ y $(p_{10})_{ss} = 0$.

El procedimiento gráfico de la sección anterior, se puede extender para la determinación del error de estado estacionario en un esquema control en lazo cerrado, lo cual se propone en la siguiente sección. En el Apéndice C, sección C.6, se da un artículo sometido con estos resultados.

6.4 Error en Estado Estacionario del Sistema Retroalimentado con un Control Proporcional en Bond Graph

La respuesta de estado estacionario es la parte de la respuesta total que permanece después que el transitorio ha terminado. La respuesta de estado estacionario puede variar en forma regular, tal como una onda senoidal o una función rampa que se incrementa con el tiempo. También, la respuesta en estado estacionario puede cambiar si la configuración del sistema se ha modificado, por ejemplo de lazo abierto a lazo cerrado. En la figura 6.10 se muestra un sistema en lazo cerrado utilizando un control proporcional.

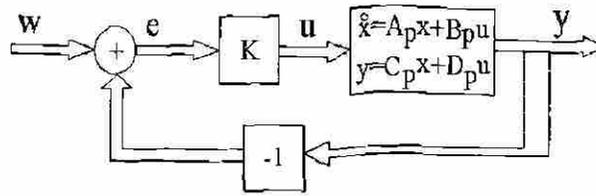


Figura 6.10 Sistema en lazo cerrado con un control proporcional.

De acuerdo a la figura 6.10 y utilizando (6.2) y (6.43) el error en estado estacionario en un sistema en lazo cerrado es:

$$e_{ss} = (I - D_{pc} + C_{pc}A_{pc}^{-1}B_{pc})w_{ss} \quad (6.47)$$

donde A_{pc} , B_{pc} , C_{pc} y D_{pc} denotan las matrices A_p , B_p , C_p y D_p en lazo cerrado de la figura 6.10, siendo:

$$A_{pc} = A_p - B_p K (I + D_p K)^{-1} C_p \quad (6.48)$$

$$B_{pc} = B_p K \left[I - (I + D_p K)^{-1} D_p K \right] \quad (6.49)$$

$$C_{pc} = (I + D_p K)^{-1} C_p \quad (6.50)$$

$$D_{pc} = (I + D_p K)^{-1} D_p K \quad (6.51)$$

Por otro lado, obteniendo la Estructura de Unión (6.9) del Bond Graph en causalidad derivativa que representa el sistema en lazo cerrado de la figura 6.10, tenemos:

$$\begin{bmatrix} z_c(t) \\ D_{indc}(t) \\ y_{dc}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^c & J_{12}^c & J_{13}^c \\ J_{21}^c & J_{22}^c & J_{23}^c \\ J_{31}^c & J_{32}^c & J_{33}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ D_{outdc}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

$$D_{outdc}(t) = L_d D_{indc}(t) \quad (6.53)$$

Seleccionando como salida al error:

$$y_{dc}(t) = e(t) \quad (6.54)$$

De (6.12), (6.16), (6.17), (6.52), (6.53) y (6.54) tenemos:

$$e(t) = C_{pc}^* \dot{x}_c(t) + D_{pc}^* w(t) \quad (6.55)$$

donde:

$$C_{pc}^* = J_{31}^c + J_{32}^c N^c J_{21}^c \quad (6.56)$$

$$D_{pc}^* = J_{33}^c + J_{32}^c N^c J_{23}^c \quad (6.57)$$

siendo

$$N^c = (I - L_d J_{22}^c) L_d \quad (6.58)$$

Aplicando el Teorema del Valor Final [51], el error en estado estacionario es:

$$e_{ss} = D_{pc}^* w_{ss} \quad (6.59)$$

Se presenta a continuación un procedimiento para obtener el error de estado estacionario de la salida con un control proporcional conectado en cascada con la planta. Este procedimiento gráfico se muestra en un diagrama a bloques en la figura 6.11.

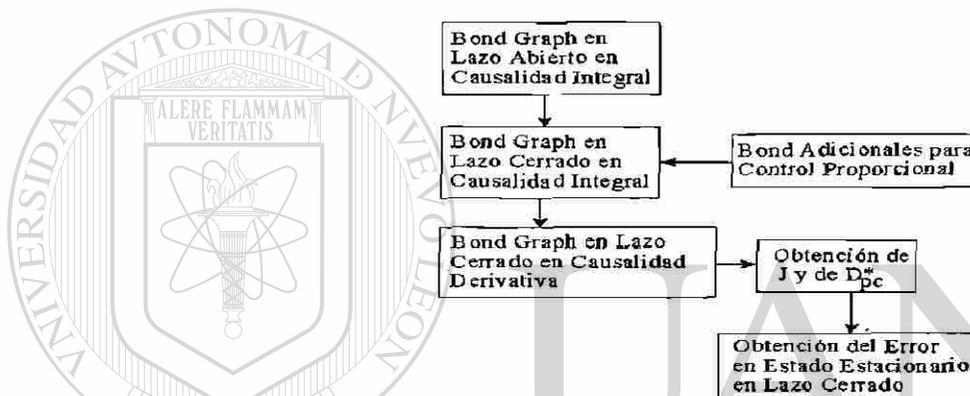


Figura 6.11 Procedimiento gráfico para la obtención del error en estado estacionario en un enfoque de Bond Graph.

A continuación se describe el procedimiento de la figura 6.11.

Procedimiento 6.1

1. Obtener el Bond Graph en lazo abierto del sistema físico en causalidad integral.
2. Añadir la retroalimentación de salida, utilizando un bond activo que conecta la unión correspondiente a la salida y un detector de esfuerzo para una salida de esfuerzo, en caso contrario es un detector de flujo.
3. El detector de la salida del paso 2 modula a una fuente del mismo tipo de la entrada del sistema a través de un bond activo.
4. La fuente modulada se conecta a través de un bond a una unión-1, si es una fuente de flujo, en caso contrario a una unión-0.
5. Las variables de entrada del sistema y de la unión del paso 4 fuente modulada del paso 3 se unen en una unión-1 si son de esfuerzo o en una unión-0 si son de flujo. La dirección del bond correspondiente a la unión del paso 4 debe salir de esta nueva unión.

6. Del paso 5 se tiene un bond de salida de la unión que entra a un transformador, TF , su módulo es la ganancia de la retroalimentación de salida.
7. El bond de salida del TF llega a una unión-0 para variables de esfuerzo del paso 5, en caso contrario es una unión-1. A partir de esta unión, mediante un bond activo se conecta a un detector que es del mismo tipo a la entrada del sistema, este detector modula a la entrada del sistema a través de un bond activo.
8. Se aplican las reglas de causalidad dadas en la sección 2.4.5 a los bonds adicionales, no debiendo cambiar la causalidad del Bond Graph del paso 1, el Bond Graph completo debe ser causalmente correcto. Si existen conflictos de causalidad, esto se resuelve cambiando el transformador, TF , por un girador, GY , en el paso 6.
9. Obtener el Bond Graph en causalidad derivativa en lazo cerrado del sistema.
10. Encontrar la Estructura de Unión (6.52) para el Bond Graph del paso 9.
11. El error en estado estacionario del sistema en lazo cerrado está dado por (6.59).

Es importante señalar que a partir del Bond Graph del sistema en lazo abierto se puede obtener la realización (A_p, B_p, C_p, D_p) del sistema. A partir de este Bond Graph y del Procedimiento 6.1 se obtiene un Bond Graph en causalidad integral en lazo cerrado que determina directamente la realización $(A_{pc}, B_{pc}, C_{pc}, D_{pc})$. Alternativamente, se puede calcular algebraicamente la realización $(A_{pc}, B_{pc}, C_{pc}, D_{pc})$ utilizando (6.48) a (6.51), a partir de la realización en lazo abierto. Nótese que el segundo procedimiento involucra más operaciones algebraicas que el primero y la inversa del término $(I + D_p K)$ no se calcula algebraicamente. Así mismo, obteniendo el Bond Graph en causalidad derivativa en lazo cerrado, se determinan las condiciones de estado estacionario en lazo cerrado del sistema. Este procedimiento no requiere la inversión algebraica de A_p . Por lo tanto, se demuestra el amplio potencial de la técnica de Bond Graph en sistemas para control.

En la siguiente sección, se aplica el Procedimiento 6.2 a un ejemplo para encontrar el error en estado estacionario de un sistema en lazo cerrado.

6.4.1 Ejemplo de un Motor de CD

Considere el Bond Graph en causalidad integral en lazo abierto de un motor de C.D., el cual se muestra en la figura 5.6. Los vectores clave se dan en la sección 5.4.1.

Aplicando el Procedimiento 6.2 para una retroalimentación de salida con un control proporcional, el cual se muestra en la figura 6.12.

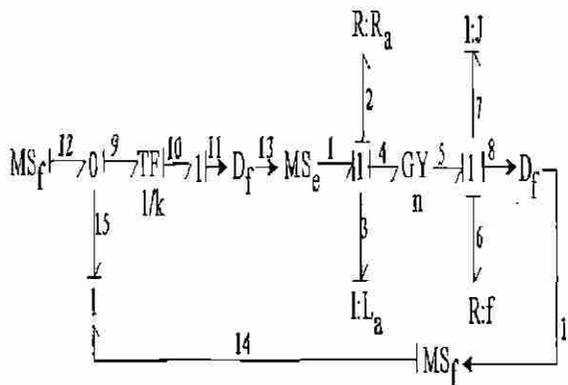


Figura 6.12 Bond Graph en lazo cerrado en causalidad integral un motor de CD.

Obteniendo el Bond Graph correspondiente en causalidad derivativa, se muestra la figura 6.13.

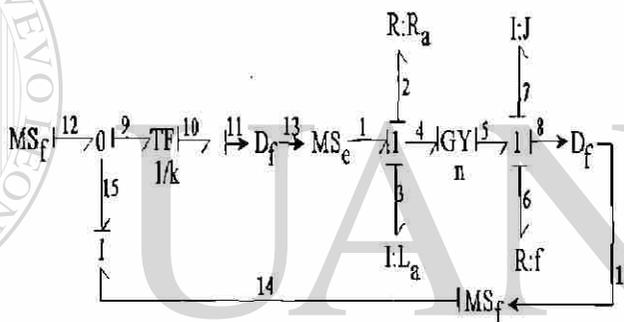


Figura 6.13 Bond Graph en lazo cerrado modificado en causalidad derivativa de un motor de CD.

Otra opción del Bond Graph en lazo cerrado en causalidad derivativa dado en la figura 6.13 para el motor de CD de la figura 6.12, se muestra en figura 6.14, en la cual, la retroalimentación, comparación entrada y salida retroalimentada, y la ganancia del controlador se realizan por medio de diagramas de bloques en combinación con el modelado del motor de CD en Bond Graph.

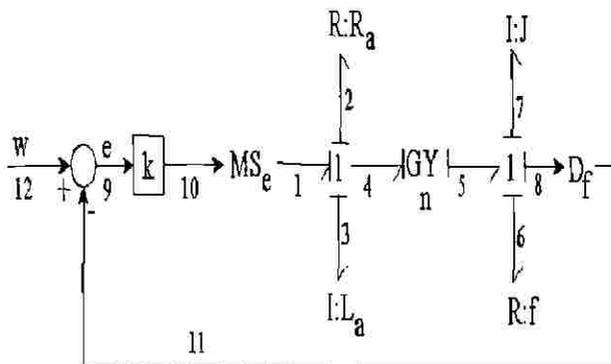


Figura 6.14 Bond Graph en lazo cerrado en combinación con diagramas a bloques.

La figura 6.13 tiene la característica de representar todos los elementos en el dominio físico a diferencia de la figura 6.14, en donde algunos elementos están representados en diagrama a bloques y otros en Bond Graph.

Los vectores clave para el Bond Graph de la figura 6.13 están dados en la sección 5.4.1 y la matriz de Estructura de Unión con salida (6.54) es:

$$J_{11}^c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n} \\ \frac{-1}{n+k} & 0 \end{bmatrix}; J_{13}^c = \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ n+k \end{bmatrix}; J_{31}^c = \begin{bmatrix} 1 \\ n+k \\ 0 \end{bmatrix}^T \quad (6.60)$$

$$J_{12}^c = J_{21}^c = J_{22}^c = J_{11}^c; J_{23}^c = J_{13}^c; J_{32}^c = J_{31}^c; J_{33}^c = -\frac{k}{n+k}$$

de (6.57) y (6.58) tenemos que,

$$D_{pc}^* = \frac{n^2 + R_a f}{n^2 + nk + R_a f} \quad (6.61)$$

por lo que el error en estado estacionario de (6.59) es:

$$e_{ss} = \frac{n^2 + R_a f}{n^2 + nk + R_a f} w_{ss} \quad (6.62)$$

Se puede observar que en (6.62) se conoce la influencia de los parámetros, así como de la ganancia del control en el error en estado estacionario del sistema físico.

Por lo tanto, se presenta un procedimiento gráfico a través de la Teoría de Bond Graph, para la obtención del error en estado estacionario de la salida, en el cual no se requiere conocer el modelo del sistema en variables de estado o en función de transferencia. Así mismo, se puede observar que es posible determinar la influencia de los parámetros del sistema en el error. ®

En el siguiente capítulo, se presenta un esquema de linealización para una clase de sistemas no lineales modelados en Bond Graph.

6.5 Conclusiones

Se presentó un procedimiento gráfico directo para obtener los valores de estado estacionario de un sistema físico, con una retroalimentación de salida en Bond Graph.

Se mostró que a partir del Bond Graph en causalidad derivativa se puede obtener A_p^{-1} de manera gráfica.

Para la obtención de los valores y del error de estado estacionario se mostró que no se requiere conocer la función de transferencia o la realización (A_p, B_p, C_p, D_p) .

Capítulo 7

Linealización por Bond Graph

7.1 Introducción

Un sistema linealizado es útil para conocer el comportamiento del sistema cuando es perturbado, tal que el nuevo y viejo puntos de equilibrio son cercanamente iguales [47]. Las ecuaciones del sistema están linealizadas alrededor de puntos de operación [52]. Las nuevas ecuaciones lineales así obtenidas son supuestas a ser válidas en una región cercana al punto de equilibrio [53].

Una propiedad importante de la Teoría de Bond Graph es la trayectoria causal [32], así, podemos determinar propiedades como observabilidad, controlabilidad o relaciones entre las variables de estado [29]. La trayectoria causal es utilizada en este capítulo para determinar las relaciones no lineales entre las variables de estado, con el fin de linealizar una clase de sistemas no lineales llamada aquí sistema no lineal de productos de estados. Esta clase de sistemas no lineales puede ser representada en Bond Graph [29]. En el Apéndice C, sección C.5, se da un artículo sometido con los resultados que se presentan en este capítulo [38].

Este capítulo está organizado de la siguiente manera: primeramente, se estudia la linealización alebráica de sistemas no lineales; despues se presenta un esquema linealizado en Bond Graph que utiliza la estructura de unión; posteriormente, se propone un procedimiento para obtener la linealización a partir del Bond Graph dado y los resultados se aplican a un ejemplo.

7.2 Antecedentes [70]

Los fenómenos que ocurren son en general de naturaleza no lineal, sin embargo, para perturbaciones sobre el estado nominal o estado de equilibrio, algunos de los sistemas no lineales pueden ser considerados a ser lineales en un rango de operación [27].

En esta sección, se estudia la linealización convencional de un sistema no lineal al que puede ser aplicado la expansión en series de Taylor.

7.2.1 Linealización Algebraica [70]

Una ecuación de estado lineal es útil como una aproximación de una ecuación de estado no lineal, en el siguiente sentido. Considere las funciones,

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)); \quad x(t_0) = x_0 \quad (7.1)$$

Donde los estados $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y la entrada $u(t) \in \mathbb{R}^p$.

Sea (7.1) resuelta para una señal de entrada particular llamada entrada nominal $\tilde{u}(t)$ y un estado inicial particular llamado estado inicial nominal \tilde{x}_0 . Esta solución única nominal es llamada frecuentemente trayectoria nominal $\tilde{x}(t)$.

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)), \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \quad (7.2)$$

Considere señales alrededor de los valores nominales

$$u(t) = \tilde{u}(t) + u_\delta(t); \quad x_0 = \tilde{x}_0 + x_{0\delta} \quad (7.3)$$

donde $\|x_{0\delta}(t)\|$ y $\|u_\delta(t)\|$ son apropiadamente pequeños para $t \geq t_0$.

Suponemos que la solución correspondiente permanece próxima a $\tilde{x}(t)$, en cada t , y está dada por:

$$x(t) = \tilde{x}(t) + x_\delta(t) \quad (7.4)$$

Sustituyendo ecs. (7.3) y (7.4) en (7.1) tenemos:

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) + \frac{d}{dt}x_\delta(t) = f(\tilde{x}(t) + x_\delta(t), \tilde{u}(t) + u_\delta(t)), \quad \tilde{x}(t_0) + x_\delta(t_0) = \tilde{x}_0 + x_{0\delta} \quad (7.5)$$

Suponiendo que las derivadas de $f(x(t), u(t))$ existen, podemos expandir el lado derecho de (7.5) utilizando series de Taylor alrededor de $\tilde{x}(t)$ y $\tilde{u}(t)$, y mantener solamente los

términos de orden 1. Esta es una aproximación razonable dado que $\|u_\delta(t)\|$ y $\|x_\delta(t)\|$ son supuestas pequeñas para toda t .

En forma vectorial se tiene:

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) + \frac{d}{dt}x_\delta(t) \cong f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))x_\delta(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))u_\delta(t) \quad (7.7)$$

donde $\frac{\partial f}{\partial x}$ denota el Jacobiano, con valores, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, n$.

Considerando (7.2), la relación entre x_δ y u_δ es descrita aproximadamente por una ecuación de estado LIT de la forma:

$$\dot{x}_\delta(t) = A_{p\delta}(t)x_\delta(t) + B_{p\delta}(t)u_\delta(t) \quad (7.8)$$

donde $A_\delta(t)$ y $B_\delta(t)$ son las matrices de derivadas parciales evaluadas en la trayectoria nominal las cuales son:

$$A_{p\delta}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \quad (7.9)$$

$$B_{p\delta}(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \quad (7.10)$$

Para la ecuación de salida no lineal, a la forma

$$y(t) = h(x(t), u(t)) \quad (7.11)$$

La función $h(x(t), u(t))$ puede ser expandida en series de Taylor sobre la trayectoria nominal, donde la descripción aproximada es de la forma:

$$y_\delta(t) = C_{p\delta}(t)x_\delta(t) + D_{p\delta}(t)u_\delta(t) \quad (7.12)$$

Aquí la desviación de la salida está dada por:

$$y_\delta(t) = y(t) - \tilde{y}(t); \quad \tilde{y}(t) = h(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \quad (7.13)$$

donde:

$$C_{p\delta}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \quad (7.14)$$

$$D_{p\delta}(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \quad (7.15)$$

En la siguiente sección, se presenta un esquema para realizar la linealización de una clase de sistemas no lineales en el dominio físico. En el Apéndice C, sección C.5, se da un artículo sometido con los resultados que se presentan en este capítulo.

7.3 Linealización por Bond Graph

La información gráfica del Bond Graph puede ser utilizada para identificar las secciones no lineales de un sistema físico. Así, se presenta una técnica gráfica directa para obtener el Bond Graph linealizado.

Consideramos la linealización de (7.1), por Bond Graph de un sistema no lineal de productos de estados, donde la parte no lineal está formada por:

$$x_i(t)x_j(t), x_i(t)u_k(t); i \neq j; i, j = 1, \dots, n \text{ y } k = 1, \dots, p \quad (7.16)$$

Primero se considera la estructura general de un sistema linealizado mostrada en la figura 7.1, y posteriormente se da un procedimiento para obtener la linealización de (7.1) restringido a (7.16), utilizando Bond Graph.

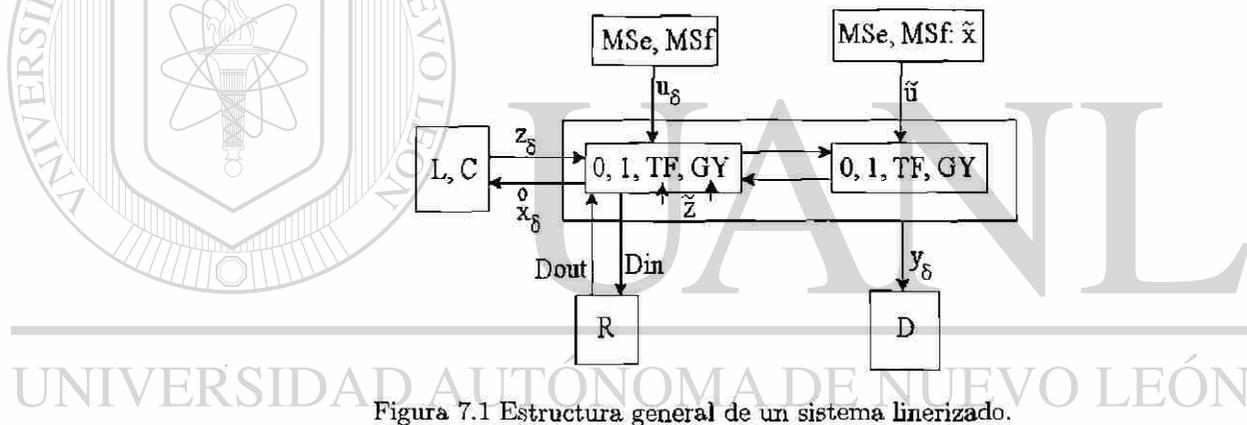


Figura 7.1 Estructura general de un sistema linealizado.

El objetivo de representar un sistema linealizado de acuerdo a la figura 7.1 es obtener relaciones simples para la estructura de unión modificada, denotada por \tilde{S} . Esto nos permite conocer, el cambio de S debido a la linealización. En el Lema siguiente se muestra como encontrar las matrices $(A_{p\delta}, B_{p\delta}, C_{p\delta}, D_{p\delta})$ del sistema linealizado a partir de \tilde{S} .

Lema 7.1

Considere el esquema linealizado de la figura 7.1. La estructura del sistema está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\delta(t) \\ D_{in}(t) \\ y_\delta(t) \end{bmatrix} = \tilde{S} \begin{bmatrix} z_\delta(t) \\ D_{out}(t) \\ u_\delta(t) \\ \tilde{u}(t) \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

donde

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} S_{11}^x + S_{11}^0 & S_{12} & S_{13}^x & S_{13}^0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31}^x + S_{31}^0 & S_{32} & S_{33}^x & S_{33}^0 \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

Los valores de $S_{11}^x, S_{13}^x, S_{31}^x$ y S_{33}^x son la interconexión de los elementos que no participan en la trayectoria nominal del sistema, y los valores de $S_{11}^0, S_{13}^0, S_{31}^0$ y S_{33}^0 son la trayectoria nominal; $u_\delta(t)$ es la entrada del sistema y $\tilde{u}(t)$ es la entrada nominal.

La representación del sistema en variables de estado está dada por:

$$A_{p\delta} = (S_{11}^x + S_{11}^0 + S_{12}MS_{21})F + S_{13}^1 \quad (7.19)$$

$$B_{p\delta} = S_{13}^x + S_{12}MS_{23} \quad (7.20)$$

$$C_{p\delta} = (S_{31}^x + S_{31}^0 + S_{32}MS_{21})F + S_{33}^1 \quad (7.21)$$

$$D_{p\delta} = S_{33}^x + S_{32}MS_{23} \quad (7.22)$$

donde

$$M = (I - LS_{22})^{-1}L \quad (7.23)$$

y, S_{13}^1 y S_{33}^1 son tales que se satisface:

$$S_{13}^0\tilde{u}(t) = S_{13}^1x_\delta(t) \quad (7.24)$$

$$S_{33}^0\tilde{u}(t) = S_{33}^1x_\delta(t) \quad (7.25)$$

Prueba. Para el sistema linealizado de la figura 7.1, sustituyendo (2.22) en la primer línea de (7.17), tenemos:

$$\dot{x}_\delta(t) = (S_{11}^x + S_{11}^0)Fx_\delta(t) + S_{12}D_{out}(t) + S_{13}^x u_\delta(t) + S_{13}^0\tilde{u}(t) \quad (7.26)$$

De (2.22) y (2.24) la segunda línea de (7.17) se obtiene

$$D_{in}(t) = (I - S_{22}L)^{-1}[S_{21}Fx_\delta(t) + S_{23}u_\delta(t)] \quad (7.27)$$

Tomando (2.24), (2.34), (7.24) y (7.27) en (7.26):

$$\dot{x}_\delta(t) = [(S_{11}^x + S_{11}^0 + S_{12}MS_{21})F + S_{13}^1]x_\delta(t) + (S_{13}^x + S_{12}MS_{23})u_\delta(t) \quad (7.28)$$

Comparando (7.8) con (7.28) se verifica (7.19) y (7.20).

Por otra parte, tomando (2.22), (2.24), (7.25) y (7.27) en la tercer línea de (7.17) tenemos:

$$y_\delta(t) = [(S_{31}^x + S_{31}^0 + S_{32}MS_{21} + S_{33}^1)F + S_{33}^1]x_\delta(t) + (S_{33}^x + S_{32}MS_{23})u_\delta(t) \quad (7.29)$$

Comparando (7.12) con (7.29), probamos (7.21) y (7.22). ■

En la siguiente sección, se propone un procedimiento para linealizar un sistema no lineal de productos de estados modelado en Bond Graph.

7.4 Procedimiento para obtener un Bond Graph linealizado

El siguiente procedimiento gráfico que sirve para construir el Bond Graph linealizado de la figura 7.1 a partir de un sistema físico no lineal de productos de estados (7.16).

Procedimiento 7.1

1.5. Considere que el sistema satisface las hipótesis H1, H2, H3 y H4 del Capítulo 1, sección

1. Obtener el Bond Graph no lineal del sistema físico.
2. Identificar el producto de dos variables de estado, mediante una trayectoria causal (ver Apéndice A, sección A5) que contenga un transformador TF o un girador GY , cuyo módulo es una variable de estado de energía o coenergía.
3. La trayectoria causal empieza a partir de una variable de estado pasando a través del TF o GY del paso 2 y termina en otra variable de estado, esta trayectoria causal debe de pasar sólo una vez por cada bond.
4. Dado que la linealización es alrededor de la trayectoria nominal $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$, el módulo de cada TF y/o GY del Bond Graph original del paso 1, se cambia por el valor de la trayectoria nominal de la variable de estado de coenergía respectiva.
5. Por cada trayectoria causal, se añaden bonds con los elementos que forman parte de la misma trayectoria. Los bonds añadidos forman otra trayectoria causal empieza con un elemento de puerto-1, el cual representa a la variable de estado del paso 2, se sustituye este elemento por una fuente de esfuerzo si el elemento de la variable de estado es C o por una fuente de flujo si el elemento es I . A continuación, se añaden bonds de la trayectoria causal respectiva, hasta llegar a la unión que conecta a la otra variable de estado de la trayectoria causal considerada. Así mismo, tomar en cuenta lo siguiente:
 - Si existen más de una trayectoria causal para cada variable de estado se unen el inicio de estas trayectorias y la fuente del paso 5 a una unión-1 si la fuente es de flujo, en caso contrario es una unión-0.

- El valor de la fuente del paso 5 es el de la trayectoria nominal de la variable de estado respectiva.
 - El módulo de los TF o GY de la trayectoria causal del paso 5 es el módulo de la trayectoria causal del paso 2 del Bond Graph original de la variable de estado de coenergía.
6. El modelo matemático que representa el Bond Graph linealizado, se obtiene utilizando el Lema 7.1.

7.5 Ejemplo de un Cuerpo Rígido

Considere el modelo en Bond Graph de un cuerpo rígido de tres dimensiones que se muestra en la figura 7.2. [58]

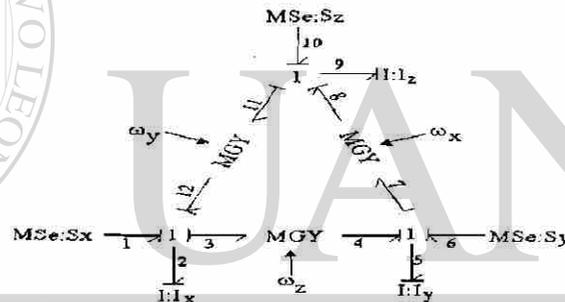


Figure 7.2 Bond Graph de un cuerpo rígido.

Los vectores clave son:

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_2(t) \\ p_5(t) \\ p_9(t) \end{bmatrix}; \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_5(t) \\ e_9(t) \end{bmatrix}; z(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_5(t) \\ f_9(t) \end{bmatrix}; u(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_6(t) \\ e_{10}(t) \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

donde $f_2(t)$, $f_5(t)$ y $f_9(t)$, $e_2(t)$, $e_5(t)$ y $e_9(t)$ son las velocidades angulares y los pares en un sistema de coordenadas xyz a lo largo de los ejes principales de un cuerpo rígido [58], respectivamente; $p_2(t)$, $p_5(t)$ y $p_9(t)$ son los momentos rotacionales y $e_1(t)$, $e_6(t)$ y $e_{10}(t)$ son los pares aplicados.

Utilizando el Procedimiento 7.1 tenemos:

- El Bond Graph de la figura 7.2 satisface las condiciones del Procedimiento 7.1.
- Los términos no lineales se identifican por las trayectorias causales que pasan a través de los MGY con variables de estado de coenergía $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$ y $\omega_z(t)$ como módulos.

- Las trayectorias causales son:

$$\text{Para } I_x \begin{cases} 2 - 3 - 4 - 5 \\ 2 - 12 - 11 - 9 \end{cases}$$

$$\text{Para } I_y \begin{cases} 5 - 4 - 3 - 2 \\ 5 - 7 - 8 - 9 \end{cases}$$

$$\text{Para } I_z \begin{cases} 9 - 11 - 12 - 2 \\ 9 - 8 - 7 - 5 \end{cases}$$

- Linealizando alrededor de $(\omega_{x0}, \omega_{y0}, \omega_{z0})$ y considerando únicamente la variable de estado de I_x , se aplican los pasos 4, 5, 6, 7 y 8 del Procedimiento 7.1. El Bond Graph resultante se muestra en la figura 7.3.

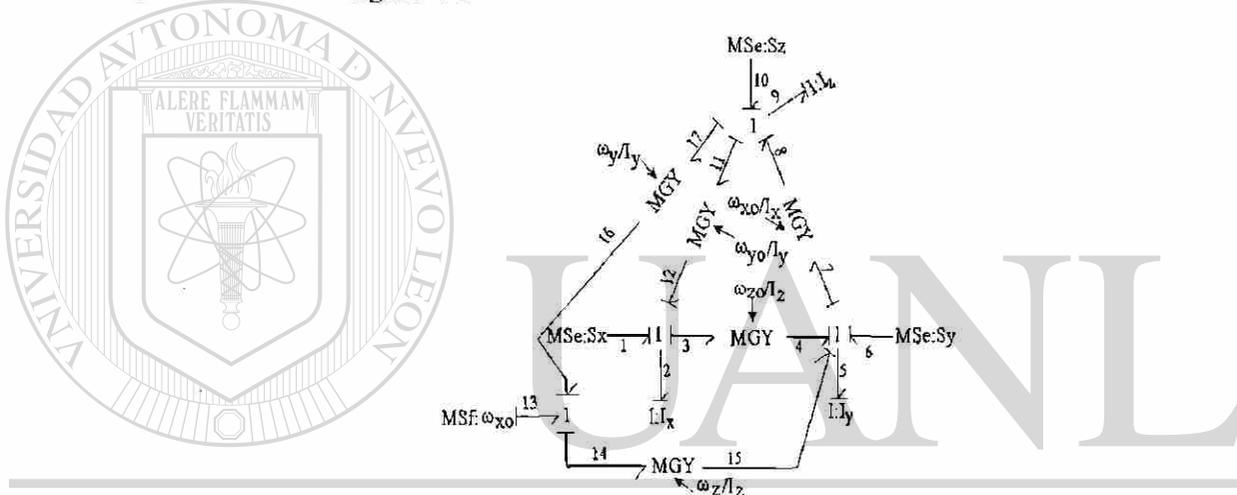


Figura 7.3 Bond Graph linealizado de la variable de estado de I_x .

Aplicando el Procedimiento 7.1, para las variables de estado de I_y e I_z , se obtiene el Bond Graph linealizado del sistema que se muestra en la figura 7.4.

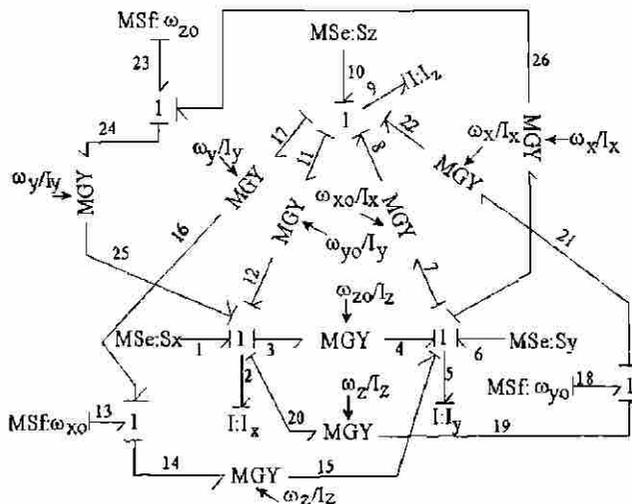


Figura 7.4 Bond Graph linealizado de un cuerpo rígido.

La relación constitutiva es

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{I_x}, \frac{1}{I_y}, \frac{1}{I_z} \right\} \quad (7.31)$$

Aplicando el Lema 7.1, la estructura de unión para el sistema está dada por:

$$S_{11}^0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\omega_{z_0}}{I_z} & \frac{\omega_{y_0}}{I_y} \\ \frac{\omega_{z_0}}{I_z} & 0 & \frac{-\omega_{x_0}}{I_x} \\ \frac{-\omega_{y_0}}{I_y} & \frac{\omega_{x_0}}{I_x} & 0 \end{bmatrix}; S_{13}^0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\omega_z}{I_z} & \frac{\omega_y}{I_y} \\ \frac{\omega_z}{I_z} & 0 & \frac{-\omega_x}{I_x} \\ \frac{-\omega_y}{I_y} & \frac{\omega_x}{I_x} & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{11}^{\text{ex}} = S_{12} = S_{22} = S_{23} = S_{21} = 0 \quad (7.32)$$

De (7.24),

$$S_{13}^1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\omega_{z_0}}{I_y} & \frac{-\omega_{y_0}}{I_z} \\ \frac{-\omega_{z_0}}{I_x} & 0 & \frac{\omega_{x_0}}{I_z} \\ \frac{\omega_{y_0}}{I_x} & \frac{-\omega_{x_0}}{I_y} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.33)$$

Obteniendo la representación del sistema en la forma (7.8), de (7.19) tenemos:

$$A_{p\delta} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{z_0} \left(\frac{1}{I_y} - \frac{1}{I_z} \right) & \omega_{y_0} \left(\frac{1}{I_y} - \frac{1}{I_z} \right) \\ \omega_{z_0} \left(\frac{1}{I_y} - \frac{1}{I_z} \right) & 0 & \omega_{x_0} \left(\frac{1}{I_z} - \frac{1}{I_x} \right) \\ \omega_{y_0} \left(\frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_y} \right) & \omega_{x_0} \left(\frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_y} \right) & 0 \end{bmatrix} F \quad (7.34)$$

y de (7.20),

$$B_{p\delta} = I_{3 \times 3} \quad (7.35)$$

Observar que, el Procedimiento 7.1 permite linealizar directamente en forma gráfica un sistema no lineal de productos de estados modelado en Bond Graph.

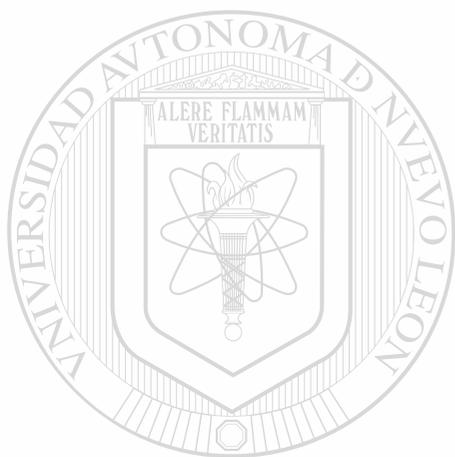
En el siguiente capítulo, se realiza un estudio detallado del modelado de la máquina síncrona presentada en [52, 53], se utiliza el modelo de la máquina en Bond Graph dado por [23], se modifica y obtener modelos simplificados y directos de la máquina en Bond Graph. Así mismo, se presenta un procedimiento basado en Bond Graph para determinar las constantes de tiempo de la máquina síncrona. Se seleccionó, este sistema físico, como una aplicación de cada uno de los resultados presentados en los capítulos previos de este trabajo de investigación.

7.6 Conclusiones

Se presentó un procedimiento gráfico utilizando Bond Graph para la linealización de sistemas no lineales de productos de estados.

El sistema y linealización son determinados en el dominio físico.

Esta metodología no requiere conocer las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Capítulo 8

Modelado de la Máquina Síncrona en Bond Graph

8.1 Introducción

Los *Generadores síncronos* forman la principal fuente de energía eléctrica en sistemas de potencia. Grandes cargas eléctricas son manejadas por *motores síncronos*. Algunas veces *Condensadores síncronos* son utilizados como un medio de proveer compensación de potencia reactiva y control de voltaje. Estos dispositivos operan bajo el mismo principio y son colectivamente llamados *máquinas síncronas* [52].

El modelado y análisis de la máquina síncrona ha sido siempre un desafío. El problema ha sido tratado extensivamente desde 1920 y 1930 [53] y ha sido sujeto de algunas de las más recientes investigaciones [52]. En este capítulo se desarrolla un enfoque estructurado del modelado de una máquina síncrona utilizando Bond Graph y se incorpora un análisis para la obtención de algunos modelos reducidos de la máquina.

Se propone un procedimiento para obtener las constantes de tiempo de una máquina síncrona utilizando modelos simplificados de la máquina en el dominio físico.

El presente capítulo está organizado de la manera siguiente: se estudia la descripción matemática de la máquina síncrona. Después, se analiza y modifica el modelo de la máquina síncrona en Bond Graph dado por [23], con el objetivo de obtener el modelo matemático propuesto por [53]. La siguiente sección consiste en obtener modelos simplificados de la máquina en Bond Graph y, finalmente, se presenta un procedimiento para encontrar las constantes de tiempo de la máquina síncrona en Bond Graph.

8.2 Descripción Matemática de la Máquina Síncrona [52, 53]

En el desarrollo de las ecuaciones de una máquina síncrona se deben satisfacer las siguientes suposiciones:

- S1.- Los devanados del estator están sinusoidalmente distribuidos.
- S2.- Las ranuras del estator no causan variación apreciable de las inductancias del rotor con la posición del rotor.
- S3.- La máquina es de *polos salientes* en el rotor.
- S4.- Se analiza una máquina de dos polos.
- S5.- La *histéresis magnética* es despreciable.
- S6.- Los efectos de la *saturación magnética* son despreciables.

La figura 8.1 muestra una representación esquemática de una máquina síncrona.

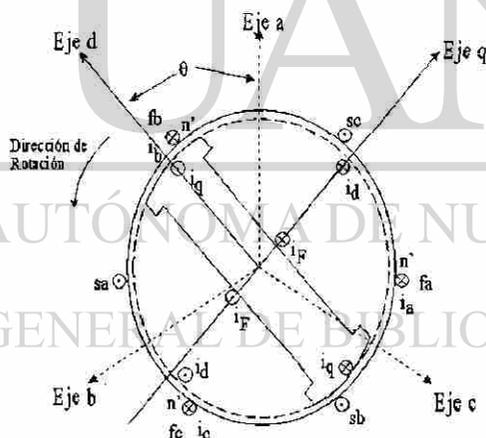


Figura 8.1 Representación esquemática de una máquina síncrona.

En la figura 8.1, los circuitos del estator consisten de un *devanado de armadura* trifásico $sa - fa$, $sb - fb$ y $sc - fc$ que conducen corrientes alternantes i_a , i_b e i_c . Los circuitos del rotor comprenden devanados de campo $F - F'$, y de amortiguamiento $D - D'$ y $Q - Q'$. El devanado de campo se conecta a una fuente de corriente directa. Para propósitos de análisis, las corrientes en el amortiguamiento se suponen fluyendo en dos conjuntos de circuitos cortocircuitados: un conjunto cuyo flujo esta en línea con el *eje-d* y otro conjunto cuyo flujo esta a lo largo del *eje-q*.

8.2.1 Ejes Directo y en Cuadratura

Con el propósito de identificar características de una máquina síncrona, se definen los dos ejes mostrados en la figura 8.1 :

- El *eje directo*, d , alineado al eje del polo norte magnético.
- El *eje de cuadratura*, q , se encuentra a 90 grados eléctricos del eje- d .

8.2.2 Representación Esquemática de los Circuitos de una Máquina Síncrona

En la figura 8.2 se muestran los circuitos del estator y rotor de una máquina síncrona.

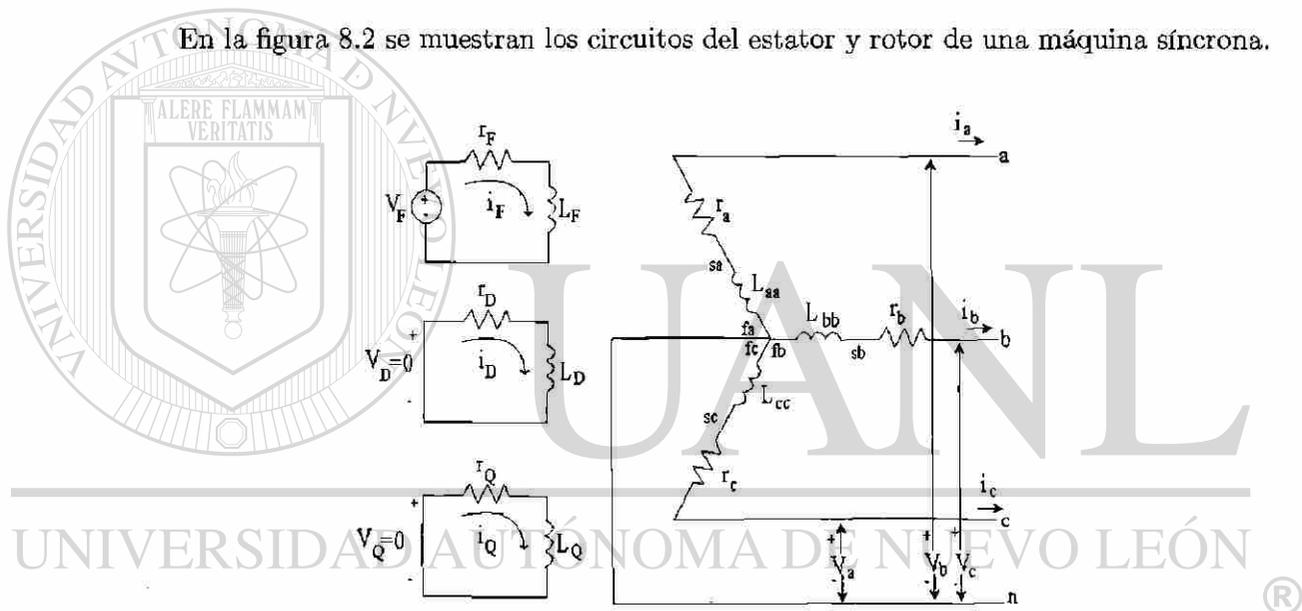


Figura 8.2 Diagrama esquemático de una máquina síncrona.

La notación de subíndices que se utiliza en las figuras 8.1 y 8.2 es:

- a, b, c denotan devanados de fase de estator. Así, $i_a(t), i_b(t), i_c(t)$ denotan corrientes de fase del estator, $v_a(t), v_b(t), v_c(t)$ voltajes de fase del estator, r_a, r_b, r_c resistencias de fase del estator, y L_{aa}, L_{bb}, L_{cc} inductancias propias de fase del estator.
- F denota el devanado de campo. Así, $i_F(t)$ denota corriente en F , $v_F(t)$: voltaje en F , r_F resistencia de F y L_F inductancia propia de F .
- D denota el circuito de amortiguamiento en el eje- d . Así, $i_D(t)$ denota corriente en D , $v_D(t)$ voltaje en D , r_D resistencia de D y L_D inductancia propia de D .
- Q denota el circuito de amortiguamiento en el eje- q . Así, $i_Q(t)$ denota la corriente en Q , $v_Q(t)$ voltaje en Q , r_Q resistencia de Q y L_Q inductancia propia de Q .

- $\theta(t)$ denota el ángulo para el cual el eje- d adelanta al eje magnético del devanado de la fase a .
- $\omega_r(t)$ denota la velocidad angular del rotor en rad/seg.
- $\omega(t)$ denota la velocidad angular del campo magnético en rotación en rad/seg.

La máquina síncrona de la figura 8.2 está formada por 6 devanados magnéticamente acoplados. El acoplamiento magnético entre los devanados es una función de la posición del rotor $\theta(t)$. El voltaje instantáneo en terminales $v(t)$ de cualquier devanado está dado por:

$$v(t) = \pm \sum r i(t) \pm \sum \frac{d\lambda(t)}{dt} \quad (8.1)$$

donde $\lambda(t)$ es el enlace de flujo, r es la resistencia en los devanados e $i(t)$ es la corriente en los devanados, con direcciones positivas de las corrientes del estator fluyendo hacia afuera de las terminales si opera como generador síncrono.

8.2.3 Transformación de Park [52]

Usualmente, una gran simplificación en la descripción matemática de la máquina síncrona se obtiene mediante la transformación de variables, llamada *transformación de Park* [52, 11, 53]. Esta transformación expresa las variables del estator tales como corrientes, voltajes o enlaces de flujo en términos de un nuevo conjunto de variables. Las nuevas cantidades son obtenidas a partir de la proyección de las variables actuales en los tres ejes; una a lo largo del eje- d , una segunda a lo largo del eje- q , y una tercera en un eje estacionario.

El efecto de la transformación de Park es simplemente transformar todas las cantidades del estator a partir de las fases a , b y c en otras variables de referencia, las cuales se mueven con el rotor. Si tenemos tres variables $i_a(t)$, $i_b(t)$ y $i_c(t)$, necesitamos tres nuevas variables de la transformación de Park, dos para los ejes d y q , las cuales son proporcionales a la corriente de secuencia cero. Un multiplicador es utilizado para simplificar los cálculos numéricos. Así, por definición

$$i_{0dq}(t) \triangleq P i_{abc}(t) \quad (8.2)$$

donde,

$$i_{0dq}(t) = \begin{bmatrix} i_0(t) \\ i_d(t) \\ i_q(t) \end{bmatrix} \quad i_{abc}(t) = \begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \\ i_c(t) \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

y donde la transformación de Park P , está definida por:

$$P = \sqrt{2/3} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \cos \theta(t) & \cos [\theta(t) - 2\pi/3] & \cos [\theta(t) + 2\pi/3] \\ \sin \theta(t) & \sin [\theta(t) - 2\pi/3] & \sin [\theta(t) + 2\pi/3] \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

En $t = 0$, el eje q está localizado en un ángulo $\delta(t)$, y el eje d está localizado en $\theta(t) = \delta(t) + \pi/2$. En $t > 0$, el eje de referencia está localizado en un ángulo $\omega_r(t)t$ con respecto al eje de la fase a . El eje d del rotor está por lo tanto localizado en:

$$\theta(t) = \omega_r(t)t + \delta(t) + \pi/2 \quad (8.5)$$

donde $\delta(t)$ es el ángulo de par síncrono en radianes eléctricos.

Dado que la transformación (8.4) es única, una transformación inversa también existe dada por:

$$i_{abc}(t) = P^{-1}i_{0dq}(t) \quad (8.6)$$

donde:

$$P^{-1} = \sqrt{2/3} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & \cos \theta(t) & \sin \theta(t) \\ 1/\sqrt{2} & \cos [\theta(t) - 2\pi/3] & \sin [\theta(t) - 2\pi/3] \\ 1/\sqrt{2} & \cos [\theta(t) + 2\pi/3] & \sin [\theta(t) + 2\pi/3] \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

Notamos que $P^{-1} = P^T$ lo cual significa que la transformación P es ortogonal. Teniendo P ortogonal también significa que la transformación P es de potencia invariante, y entonces se tiene la misma expresión de potencia en términos de $a - b - c$ ó $o - d - q$, es decir, se tiene

$$p(t) = v_{abc}^T(t) i_{abc}(t) = v_{0dq}^T(t) i_{0dq}(t) \quad (8.8)$$

El modelo en Bond Graph de la matriz de transformación de Park se da en [23], el cual se le denomina *transformador modulado de desplazamiento*.

8.2.4 Ecuaciones de Enlace de Flujo [53]

Considerar la figura 8.1 la cual es una red que consiste de seis bobinas acopladas mutuamente. La ecuación de enlace de flujo para estos 6 circuitos es

$$\begin{bmatrix} \lambda_a(t) \\ \lambda_b(t) \\ \lambda_c(t) \\ \lambda_F(t) \\ \lambda_D(t) \\ \lambda_Q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{aF} & L_{aD} & L_{aQ} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bF} & L_{bD} & L_{bQ} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & L_{cF} & L_{cD} & L_{cQ} \\ L_{Fa} & L_{Fb} & L_{Fc} & L_{FF} & L_{FD} & L_{FQ} \\ L_{Da} & L_{Db} & L_{Dc} & L_{DF} & L_{DD} & L_{DQ} \\ L_{Qa} & L_{Qb} & L_{Qc} & L_{QF} & L_{QD} & L_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \\ i_c(t) \\ i_F(t) \\ i_D(t) \\ i_Q(t) \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

Anderson [53], muestra que la mayoría de las inductancias en (8.9) son funciones de la posición angular del rotor $\theta(t)$. La descripción física de estas inductancias se da continuación:

1. Inductancias Propias del Estator

Las inductancias propias de cada devanado están dadas por:

$$L_{aa} = L_s + L_m \cos 2\theta(t) \quad (8.10)$$

$$L_{bb} = L_s + L_m \cos 2[\theta(t) - 2\pi/3]$$

$$L_{cc} = L_s + L_m \cos 2[\theta(t) + 2\pi/3]$$

donde $L_s > L_m$ y ambos L_s y L_m son constantes.

2. Inductancias Propias del Rotor

Desde que la saturación y el efecto de ranura son despreciados, todas las inductancias propias del rotor son constantes, las cuales son:

$$L_{FF} = L_F \quad L_{DD} = L_D \quad L_{QQ} = L_Q \quad (8.11)$$

donde L_F , L_D y L_Q son constantes.

3. Inductancias Mutuas del Estator

Las inductancias mutuas entre fases son funciones de $\theta(t)$ y son simétricas,

$$L_{ab} = L_{ba} = -M_s - L_m \cos 2[\theta(t) + \pi/6] \quad (8.12)$$

$$L_{bc} = L_{cb} = -M_s - L_m \cos 2[\theta(t) - \pi/6]$$

$$L_{ca} = L_{ac} = -M_s - L_m \cos 2[\theta(t) + 5\pi/6]$$

donde $|M_s| > L_m$.

4. Inductancias Mutuas del Rotor

La inductancia mutua entre devanados F y D es constante y todos los pares de devanados con desplazamiento de 90° tienen inductancia mutua igual a cero

$$L_{FD} = L_{DF} = M_R \quad L_{FQ} = L_{QF} = 0 \quad L_{DQ} = L_{QD} = 0 \quad (8.13)$$

5. Inductancias Mutuas entre Estator y Rotor

Las inductancias mutuas entre estator y rotor, son funciones del ángulo del rotor $\theta(t)$. Del devanado de fase al devanado de campo se tiene:

$$L_{aF} = L_{Fa} = M_f \cos \theta(t) \quad (8.14)$$

$$L_{bF} = L_{Fb} = M_f \cos [\theta(t) - 2\pi/3]$$

$$L_{cF} = L_{Fc} = M_f \cos [\theta(t) + 2\pi/3]$$

similarmente, del devanado de fase al devanado de amortiguamiento D ,

$$L_{aD} = L_{Da} = M_D \cos \theta(t) \quad (8.15)$$

$$L_{bD} = L_{Db} = M_D \cos[\theta(t) - 2\pi/3]$$

$$L_{cD} = L_{cb} = M_D \cos[\theta(t) + 2\pi/3]$$

y finalmente, de los devanados de fase al devanado de amortiguamiento Q ,

$$L_{aQ} = L_{Qa} = M_Q \sin \theta(t) \quad (8.16)$$

$$L_{bQ} = L_{Qb} = M_Q \sin[\theta(t) - 2\pi/3]$$

$$L_{cQ} = L_{Qc} = M_Q \sin[\theta(t) + 2\pi/3]$$

6. Modelo de Inductancias Compacto

Utilizando una notación simplificada, (7.9) puede describirse en el modelo compacto

$$\begin{bmatrix} \lambda_{abc}(t) \\ \lambda_{FDQ}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{aR} \\ L_{Ra} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abc}(t) \\ i_{FDQ}(t) \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

donde: L_{aa} denota una matriz cuyos elementos son las inductancias estator-estator, L_{aR} , L_{Ra} las inductancias estator-rotor y L_{RR} las inductancias rotor-rotor.

7. Transformación de Inductancias

Se observa que (8.9) con inductancias variantes en el tiempo puede ser simplificada refiriendo todas las cantidades al marco de referencia del rotor a través de la transformación de Park (8.4) aplicada a la partición $a - b - c$.

Premultiplicando (8.9) por $\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$ donde P es la transformación de Park, tenemos

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{abc}(t) \\ \lambda_{FDQ}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{aR} \\ L_{Ra} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abc}(t) \\ i_{FDQ}(t) \end{bmatrix} \quad (8.18)$$

Efectuando la operación indicada en (8.18), obtenemos

$$\begin{bmatrix} \lambda_0(t) \\ \lambda_d(t) \\ \lambda_q(t) \\ \lambda_F(t) \\ \lambda_D(t) \\ \lambda_Q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & M_{dF} & M_{dD} & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & M_{qQ} \\ 0 & M_{dF} & 0 & L_F & M_{DF} & 0 \\ 0 & M_{dD} & 0 & M_{DF} & L_D & 0 \\ 0 & 0 & M_{qQ} & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0(t) \\ i_d(t) \\ i_q(t) \\ i_F(t) \\ i_D(t) \\ i_Q(t) \end{bmatrix} \quad (8.19)$$

donde

$$\begin{aligned} L_d &= L_s + M_s + (3/2) L_m; & M_{dF} &= \sqrt{3/2} M_F; & M_{DF} &= \sqrt{3/2} M_D \\ L_q &= L_s + M_s - (3/2) L_m; & L_0 &= L_s - 2M_s; & M_{qQ} &= \sqrt{3/2} M_Q \end{aligned}$$

En (8.19), $\lambda_d(t)$ es el enlace de flujo en un circuito moviéndose con el rotor y centrado en el eje. Similarmente, $\lambda_q(t)$ es centrado en el eje q y $\lambda_0(t)$ es completamente un circuito que permite conocer si el sistema está desbalanceado.

También es importante observar que la matriz de inductancia (8.19) es una matriz de constantes. Así, la transformación de Park de potencia remueve los coeficientes variantes en el tiempo de la ecuación (8.9). También notamos que la matriz transformada (8.19) es simétrica y por lo tanto es físicamente realizable por un circuito equivalente.

8.2.5 Ecuaciones de Voltaje

Considerando los circuitos de una máquina síncrona que se muestra en la figura 8.2, para las condiciones indicadas por la figura 8.2, la ecuación matricial particionada está dada por:

$$\begin{bmatrix} v_{abc}(t) \\ v_{FDQ}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{abc} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & R_{FDQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abc}(t) \\ i_{FDQ}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{abc}(t) \\ \dot{\lambda}_{FDQ}(t) \end{bmatrix} \quad (8.20)$$

donde,

$$v_{FDQ}(t) = \begin{bmatrix} V_F(t) \\ 0_{2 \times 1} \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} R_{abc} &= \text{diag} \{r_a, r_b, r_c\} \\ R_{FDQ} &= \text{diag} \{r_F, r_D, r_Q\} \end{aligned} \quad (8.21)$$

Aplicando la transformación de Park a (8.20) tenemos:

$$\begin{bmatrix} V_{0dq}(t) \\ V_{FDQ}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{abc} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & R_{FDQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{0dq}(t) \\ i_{FDQ}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{0dq}(t) \\ \dot{\lambda}_{FDQ}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{P}P^{-1}\lambda_{0dq}(t) \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (8.22)$$

donde

$$\dot{P}P^{-1}\lambda_{0dq}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega(t)\lambda_q(t) & \omega(t)\lambda_d(t) \end{bmatrix}^T \quad (8.23)$$

Analizando para condiciones balanceadas, siendo la componente de secuencia cero igual a cero, (8.22) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} V_{dq}(t) \\ V_{FDQ}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{dq} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & R_{FDQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{dq}(t) \\ i_{FDQ}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{dq}(t) \\ \dot{\lambda}_{FDQ}(t) \end{bmatrix} \quad (8.24)$$

donde,

$$R_{dq} = \text{diag} \{r_d, r_q\}; \quad S(t) = \begin{bmatrix} -\omega(t)\lambda_q(t) & \omega(t)\lambda_d(t) \end{bmatrix}^T$$

8.2.6 Formulación de Ecuaciones en Espacio de Estado

Recordar que nuestro objetivo es derivar un conjunto de ecuaciones que describan la máquina síncrona en la forma

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \quad (8.25)$$

donde $x(t) \in \mathcal{R}^n$ denota un vector de variables de estado, $u(t) \in \mathcal{R}^p$ las funciones de entrada del sistema y $f[x(t), u(t), t]$ un conjunto de funciones no lineales, representadas por el producto de algunas variables de estado.

Si las ecuaciones que describen la máquina síncrona son lineales, se reduce a un sistema de la forma (2.28).

Sin embargo, (8.25) contiene enlaces de flujo y corriente como variables. Entonces, podemos obtener dos modelos:

- Un conjunto basado en corrientes como variables de estado;

$$x(t)^T = \begin{bmatrix} i_d(t) & i_D(t) & i_F(t) & i_Q(t) & i_q(t) \end{bmatrix}$$

- Un conjunto basado en enlaces de flujo como variables de estado

$$x(t)^T = \begin{bmatrix} \lambda_d(t) & \lambda_D(t) & \lambda_F(t) & \lambda_Q(t) & \lambda_q(t) \end{bmatrix}$$

8.2.7 Formulación de Corriente

Un modelo basado en corrientes como variables de estado tiene la ventaja de ofrecer relaciones simples entre los voltajes y las variables de estado. Podemos reemplazar los términos en $\lambda(t)$ y $\dot{\lambda}(t)$ por términos en $i(t)$ y $\frac{di(t)}{dt}$ utilizando las siguientes ecuaciones:

$$\lambda_{dDF}(t) = (M_{dDF}) [i_{dDF}(t)] \quad (8.26)$$

$$\lambda_{Qq}(t) = (M_{Qq}) [i_{Qq}(t)] \quad (8.27)$$

donde:

$$M_{dDF} \triangleq \begin{bmatrix} L_d & M_{dD} & M_{dF} \\ M_{dD} & L_D & M_{DF} \\ M_{dF} & M_{DF} & L_F \end{bmatrix} \quad (8.28)$$

$$M_{Qq} \triangleq \begin{bmatrix} L_Q & M_{qQ} \\ M_{qQ} & L_q \end{bmatrix} \quad (8.29)$$

Rescribiendo (8.24), para sustituir (8.26) y (8.27) en (8.24), seleccionando las cantidades base para voltaje, corriente y tiempo en el sistema por unidad (pu) e incorporando todas las ecuaciones normalizadas en una expresión matricial y conservando la misma notación para las variables en pu que para las variables en la base original, dado que todos los valores son en pu , escribimos:

$$\begin{bmatrix} v_d(t) \\ v_D = 0 \\ v_F(t) \\ v_Q = 0 \\ v_q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{rDF} & T_2 \\ 0_{1 \times 3} & 0_{2 \times 2} \\ T_1 & R_{Qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_D(t) \\ i_F(t) \\ i_Q(t) \\ i_q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{dDF} & 0_{3 \times 2} \\ 0_{2 \times 3} & M_{Qq} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_D(t) \\ i_F(t) \\ i_Q(t) \\ i_q(t) \end{bmatrix} \quad \text{en } pu \quad (8.30)$$

donde

$$R_{dDF} = \text{diag} \{r_d, r_D, r_F\}$$

$$R_{Qq} = \text{diag} \{r_Q, r_q\}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} -\omega(t) L_d & -\omega(t) M_{dF} & -\omega(t) M_{dD} \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} \omega(t) M_{qQ} & \omega(t) L_q \end{bmatrix}$$

8.2.8 La Ecuación de Onda Normalizada

Hay muchas formas de escribir la ecuación de onda en la dinámica de un sistema de potencia, mientras que el par está casi siempre dado en pu , frecuentemente no es claro para $\omega(t)$ y t .

Empezamos con $\omega(t)$ en $rad/seg.$, t en $seg.$ y T_a en pu tenemos:

$$\frac{2H}{\omega_B(t)} \frac{d\omega(t)}{dt} = 2H \frac{d\omega(t)}{dt_u} = T_a(t) \quad (8.31)$$

donde: H denota la constante de inercia en pu , $\omega_B(t)$ la velocidad angular base y T_a el par acelerante en pu . Siendo $t_u = \omega_B(t) t$;

Si t y $\omega(t)$ están en pu , entonces,

$$T_j \frac{d\omega(t)}{dt} = T_a(t) \quad (8.32)$$

donde

$$T_j = 2H\omega_B \quad (8.33)$$

Los pares aplicados a un rotor de una máquina síncrona se muestran en la figura 8.3.

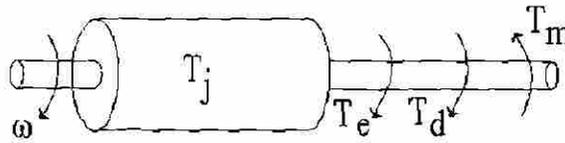


Figura 8.3 Pares aplicados al rotor de una máquina síncrona.

donde $T_e(t)$ denota es el par electromagnético, $T_d(t)$ es el par de amortiguamiento y $T_m(t)$ es el par mecánico de la máquina síncrona.

De la figura 8.3, se tiene en *pu*:

$$T_a(t) = T_m(t) - T_e(t) - T_d(t) \quad (8.34)$$

donde:

$$T_e(t) = i_d(t) \lambda_d(t) - i_d(t) \lambda_q(t) \quad (8.35)$$

$$T_d(t) = D\omega(t) \quad (8.36)$$

siendo D la constante de amortiguamiento.

Sustituyendo (8.26), (8.27), (8.34) a (8.36) en (8.32), tenemos:

$$T_j \dot{\omega}(t) = T_m(t) + \begin{bmatrix} -L_d i_q(t) & -M_{Dd} i_q(t) & -M_{dF} i_q(t) & M_{qQ} i_d(t) & L_q i_d(t) & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_D(t) \\ i_F(t) \\ i_Q(t) \\ i_q(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \quad (8.37)$$

Finalmente, podemos obtener la formulación completa de corriente de la máquina síncrona incluyendo la ecuación angular de potencia la cual es

$$\dot{\delta}(t) = \omega(t) \quad (8.38)$$

Tomando (8.37), (8.38) y (8.30) el modelo completo está dado por:

$$\begin{bmatrix} v_d(t) \\ v_D = 0 \\ v_F(t) \\ v_Q = 0 \\ v_q(t) \\ T_m(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{dDF} & T_2 & & & & & \\ 0_{1 \times 3} & 0_{2 \times 2} & 0_{5 \times 1} & & & & \\ T_1 & R_{Qq} & D & 0_{7 \times 1} & & & \\ T_3 & T_4 & 1 & & & & \\ & 0_{1 \times 5} & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_D(t) \\ i_F(t) \\ i_Q(t) \\ i_q(t) \\ \omega(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{dDF} & 0_{3 \times 2} & & & & & \\ 0_{2 \times 3} & M_{Qq} & & 0_{5 \times 2} & & & \\ & & & T_j & 0 & & \\ & 0_{2 \times 5} & & 0 & 1 & & \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_D(t) \\ i_F(t) \\ i_Q(t) \\ i_q(t) \\ \omega(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix} \quad pu \quad (8.39)$$

donde

$$T_3 = \begin{bmatrix} L_d i_q & M_{Dd} i_q & M_{dF} i_q \end{bmatrix} \\
 T_4 = \begin{bmatrix} -M_{qQ} i_d & -L_q i_d \end{bmatrix}$$

Esta ecuación matricial está en la forma (8.25), es claro que el sistema es no lineal, donde la no linealidad se debe al producto de variables de estado.

En la siguiente sección, se introduce el modelado de la máquina síncrona representado en Bond Graph.

8.3 El Modelo de Bond Graph de la Dinámica de la Máquina Síncrona

En la presente sección, se analiza el Bond Graph de la máquina síncrona dado por [23], modificado para obtener el modelo (8.39).

Se considera el modelo d - q de la máquina síncrona que se muestra en la figura 8.2 que satisface S1 a S6.

El Bond Graph de la figura 8.4, difiere respecto al presentado en [23] en la dirección de los bonds 14, 15, 17 y 19, y en el uso de una fuente de voltaje (esfuerzo) en el devanado de excitación.

Las principales características del modelo de la máquina síncrona en Bond Graph son:

- Se tiene en variables de energía todos los elementos que intervienen en la máquina.
- Los subsistemas eléctrico, magnético y mecánico se representan en un sólo Bond Graph.
- Modelos simplificados se obtienen a partir de la eliminación directa de bonds en el Bond Graph.
- La formulación de corriente o de enlace de flujo se obtiene a partir del mismo Bond Graph.

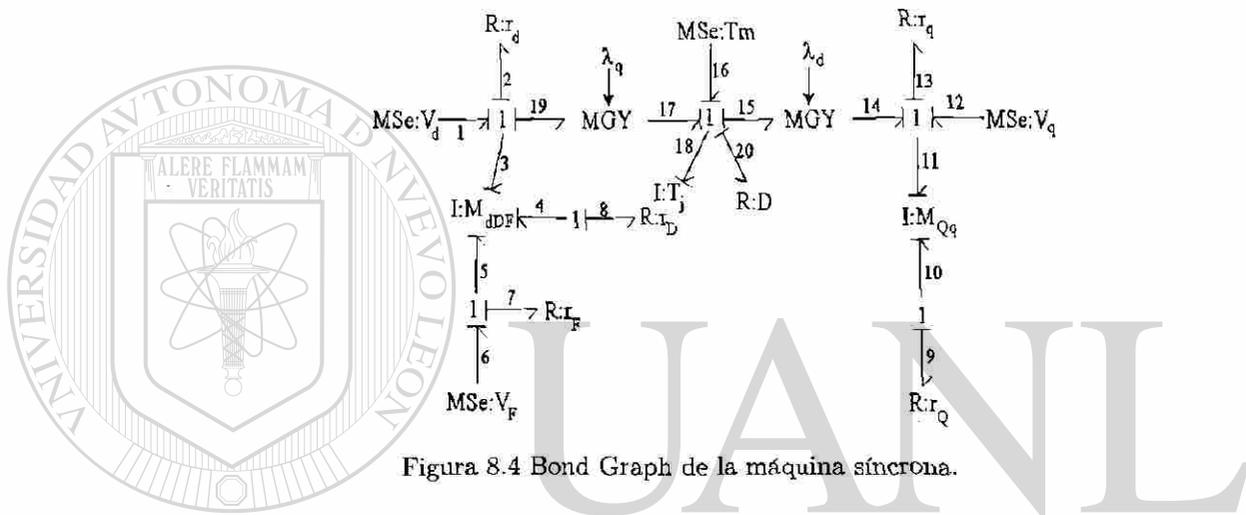


Figura 8.4 Bond Graph de la máquina síncrona.

En la figura 8.4, T_m es el par mecánico de entrada, T_j es la inercia definida en (8.33), D es el coeficiente de amortiguamiento dado por (8.36); $I : M_{dDFk}$ representa los acoplamientos propios y mutuos de los devanados en el eje d definidos en (8.28); y $I : M_{Qq}$ son los acoplamientos magnéticos propios y mutuos de los devanados en el eje q definidos en (8.29). El devanado de amortiguamiento está representado por D en el eje d y por Q en el eje q , respectivamente; el devanado de excitación es F ; y d y q representan los devanados de conmutación en los ejes d y q , respectivamente.

Los vectores clave del Bond Graph de la figura 8.4 son:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \begin{bmatrix} p_3(t) \\ p_4(t) \\ p_5(t) \\ p_{10}(t) \\ p_{11}(t) \\ p_{18}(t) \end{bmatrix}; \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} e_3(t) \\ e_4(t) \\ e_5(t) \\ e_{10}(t) \\ e_{11}(t) \\ e_{18}(t) \end{bmatrix}; \quad z(t) = \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_4(t) \\ f_5(t) \\ f_{10}(t) \\ f_{11}(t) \\ f_{18}(t) \end{bmatrix}; \quad D_{in}(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_7(t) \\ f_8(t) \\ f_9(t) \\ f_{13}(t) \\ f_{20}(t) \end{bmatrix} \\
 D_{out}(t) &= \begin{bmatrix} e_2(t) & e_7(t) & e_8(t) & e_9(t) & e_{13}(t) & e_{20}(t) \end{bmatrix}^T \\
 u(t) &= \begin{bmatrix} e_1(t) & e_6(t) & e_{12}(t) & e_{16}(t) \end{bmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{8.40}$$

Las relaciones constitutivas están dadas por:

$$L = \text{diag}\{r_d, r_F, r_D, r_Q, r_q, D\} \quad (8.41)$$

$$F^{-1} = \text{diag}\{M_{dDF}, L_{Qq}, T_j\} \quad (8.42)$$

La matriz de estructura de unión está dada por de (2.25) donde:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \begin{bmatrix} 0_{5 \times 5} & G(\lambda) \\ -G^T(\lambda) & 0 \end{bmatrix}; S_{12} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & -I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\ S_{13} &= \begin{bmatrix} Q_2 & 0_{3 \times 2} \\ 0_{3 \times 2} & Q_3 \end{bmatrix}; S_{22} = S_{23} = 0 \end{aligned} \quad (8.43)$$

donde

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda_q(t) \\ 0_{3 \times 1} \\ \lambda_d(t) \end{bmatrix}; Q_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El modelo lineal de enlace de flujo está dado por (2.28) a (2.32). A continuación se da la formulación de corriente. Obteniendo la derivada de (2.22) y sustituyendo (2.22) en (2.28) se tiene el siguiente modelo no lineal en términos de co-energía dado por:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= f(z(t)) + \check{B}_p u(t) \\ y(t) &= \check{C}_p z(t) + D_p u(t) \end{aligned} \quad (8.44)$$

donde:

$$f(z(t)) = F[S_{11}(\lambda) + S_{12}MS_{21}]; \check{B}_p = F(S_{13} + S_{12}MS_{23}); \check{C}_p = S_{31} + S_{32}MS_{21} \quad (8.45)$$

Para el caso lineal, tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \check{A}_p z(t) + \check{B}_p u(t) \\ y(t) &= \check{C}_p z(t) + D_p u(t) \end{aligned} \quad (8.46)$$

donde

$$\check{A}_p = F[S_{11} + S_{12}MS_{21}] \quad (8.47)$$

Multiplicando (8.44) por F^{-1} y utilizando (8.40) a (8.43), (8.45) y (2.34), obtenemos:

$$\begin{bmatrix} e_1(t) \\ 0 \\ e_6(t) \\ 0 \\ e_{12}(t) \\ e_{16}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{MS} & G(\lambda) \\ -G^T(\lambda) & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_4(t) \\ f_5(t) \\ f_{10}(t) \\ f_{11}(t) \\ f_{18}(t) \end{bmatrix} + M_{MS} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_4(t) \\ f_5(t) \\ f_{10}(t) \\ f_{11}(t) \\ f_{18}(t) \end{bmatrix} \quad (8.48)$$

donde

$$R_{MS} = \text{diag} \{R_{dDF}, R_{Qq}\}$$

$$M_{MS} = \text{diag} \{M_{dDF}, M_{Qq}, T_j, 1\}$$

Si se sustituyen las relaciones constitutivas de $\lambda_d(t)$ y $\lambda_q(t)$ dadas en (8.19), la ecuación (8.48) es igual a (8.39), excepto por la ecuación del ángulo $\delta(t)$ que no se escribe.

Es importante notar que se tiene una representación gráfica de la máquina síncrona, incluyendo inductancias propias y mutuas, y resistencias en cada uno de los devanados. Así mismo, la parte mecánica es considerada en el mismo Bond Graph, conociéndose el intercambio energético entre sus elementos y determinando el modelo matemático de acuerdo a la estructura de unión definida en el capítulo 2. Por otra parte, las herramientas presentadas en los capítulos 3 al 7 puede ser aplicadas al modelo encontrado de la máquina síncrona en el dominio físico.

En la siguiente sección, se presenta la obtención directa de modelos simplificados de la máquina síncrona en Bond Graph.

8.4 Modelos Simplificados de la Máquina Síncrona utilizando Bond Graph

Los modelos matemático y gráfico de la máquina síncrona se obtuvieron considerando los circuitos de estator, rotor y devanado de amortiguamiento en los ejes d y q . El modelo incluye las condiciones de la carga y el par mecánico. Las descripciones completas matemáticas de cada elemento de un sistema de potencia son excesivamente complejas y frecuentemente son utilizadas descripciones simplificadas en el modelado de sistemas.

En esta sección, se presentan algunos modelos reducidos de la máquina síncrona en Bond Graph y finalmente se obtiene el modelo matemático del sistema.

8.4.1 Sin devanados de amortiguamiento.

Los devanados de amortiguamiento de una máquina síncrona pueden ser despreciados si, su efecto en el transitorio bajo estudio es lo suficiente pequeño con respecto a la dinámica del sistema para ser despreciados. Esto es particularmente cierto en estudios donde el amortiguamiento entre máquinas acopladas no es de interés. El modelo de Bond Graph en el cual los devanados de amortiguamiento son despreciados, se logra eliminando los bonds 4 y 8 para D , y 9 y 10 para Q de la figura 8.3, el Bond Graph resultante se muestra en la figura 8.5.

El siguiente modelo de la máquina síncrona a velocidad constante se obtiene de sustituir (8.55) a (8.57) en (8.45) a (8.47) con (2.34):

$$\begin{bmatrix} e_1(t) \\ 0 \\ e_6(t) \\ 0 \\ e_{12}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & R_{dDF} & -M_{qQ}\omega_0 & -L_q\omega_0 \\ & & 0_{2 \times 2} & \\ & 0_{1 \times 3} & & \\ -L_d\omega_0 & -M_{dD}\omega_0 & -M_{dF}\omega_0 & \\ & & & R_{Qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_4(t) \\ f_5(t) \\ f_{10}(t) \\ f_{11}(t) \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} M_{dDF} & 0_{3 \times 2} \\ 0_{2 \times 3} & M_{Qq} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_4(t) \\ f_5(t) \\ f_{10}(t) \\ f_{11}(t) \end{bmatrix} \quad (8.58)$$

Es importante notar que el modelo de la máquina síncrona a velocidad constante es una manera sencilla de conocer el desempeño aproximado de la máquina, en un modelo que se caracteriza por ser lineal.

En la siguiente sección, se da un procedimiento para encontrar las constantes de tiempo de una máquina síncrona en el dominio físico.

8.5 Obtención de las Constantes de Tiempo en Bond Graph

Las características de la máquina síncrona de interés son las inductancias efectivas (o reactancias) vistas desde las terminales de la máquina y asociadas con las corrientes de frecuencia fundamental durante las condiciones de transitorio, subtransitorio y estado estacionario. Además, a estas inductancias, les corresponden constantes de tiempo las cuales determinan la relación de decaimiento de corrientes y voltajes a partir de los parámetros estándares de resistencias e inductancias utilizados en especificar las características eléctricas de la máquina síncrona [11].

Las constantes $T_{d_0}^I$ que denota la *constante de tiempo transitoria de circuito abierto en el eje d*, $T_{d_0}^{II}$ es la *constante de tiempo subtransitoria de circuito abierto en el eje d*, T_d^I es la *constante de tiempo transitoria de corto circuito en el eje d* y T_d^{II} es la *constante de tiempo subtransitoria de corto circuito en el eje d*, son las cuatro principales *constantes de tiempo en el eje d*, y $T_{q_0}^{II}$ denota la *constante de tiempo subtransitoria de circuito abierto en el eje q* y T_q^{II} es la *constante de tiempo subtransitoria de corto circuito en el eje q de la máquina* [52].

Se puede determinar las expresiones algebraicas exactas para las constantes de tiempo. Sin embargo, tales expresiones son muy complejas. Expresiones más simples pueden ser

desarrolladas haciendo algunas aproximaciones razonables.

Ahora, se presenta un procedimiento en el dominio físico para obtener las constantes de tiempo en el eje d y q basado en el procedimiento dado en [53].

Procedimiento 8.1

1. Empezamos con el circuito de estator en circuito abierto $i_d(t) = 0$ [53].

Reduciendo el Bond Graph de la máquina síncrona de la figura 8.6 para considerar $i_d(t) = 0$ [53], esto se realiza eliminando el bond 3, quedando el Bond Graph en el eje d de la figura 8.7. En donde el campo $I : M_{dDF}$ se reduce al campo $I : M_{DF}$.

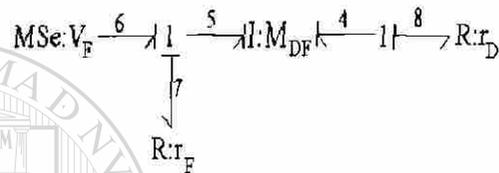


Figura 8.7 Bond Graph para la constante de tiempo subtransitoria de la máquina síncrona.

A partir del Bond Graph de la figura 8.7, obtenemos el modelo dinámico de éste sistema reducido.

Los vectores clave para el Bond Graph de la figura 8.7 son:

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_4(t) \\ p_5(t) \end{bmatrix}; \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e_4(t) \\ e_5(t) \end{bmatrix}; z(t) = \begin{bmatrix} f_4(t) \\ f_5(t) \end{bmatrix}$$

$$D_{in}(t) = \begin{bmatrix} f_7(t) \\ f_8(t) \end{bmatrix}; D_{out}(t) = \begin{bmatrix} e_7(t) \\ e_8(t) \end{bmatrix}; u(t) = e_6(t)$$

Las relaciones constitutivas son:

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} L_D & M_{DF} \\ M_{DF} & L_F \end{bmatrix} \quad (8.59)$$

$$L = \text{diag}\{r_D, r_F\} \quad (8.60)$$

y la estructura de unión es:

$$S_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; S_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; S_{11} = S_{22} = S_{23} = 0 \quad (8.61)$$

de (8.59) a (8.61) y de (8.45) a (8.47) con (2.34), tenemos:

$$\begin{bmatrix} L_D & M_{DF} \\ M_{DF} & L_F \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} f_4(t) \\ f_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_D & 0 \\ 0 & -r_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_4(t) \\ f_5(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e_6(t) \quad (8.62)$$

utilizando variables físicas se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_D(t) \\ i_F(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left\{ \begin{bmatrix} -r_D L_F & r_F M_{DF} \\ r_D M_{DF} & -r_F L_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_D(t) \\ i_F(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M_{DF} \\ L_D \end{bmatrix} V_F(t) \right\} \quad (8.63)$$

donde

$$\Delta = L_D L_F - M_{DF}^2$$

2. Necesitamos cambiar la estructura de (8.63), considerando que en $t^+ = 0$ [53],

$$p_A(t) = \lambda_D(t) = 0 \quad (8.64)$$

Así, de (2.22), (8.59) y (8.64) tenemos:

$$\begin{bmatrix} i_D(t) \\ i_F(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -M_{DF} \\ L_D \end{bmatrix} \lambda_F(t) \quad (8.65)$$

por lo tanto

$$i_F(t) = \frac{-L_D}{M_{DF}} i_D(t) \quad (8.66)$$

3. Finalmente, sustituyendo (8.66) en (8.63) y reduciendo, obtenemos:

$$\frac{d}{dt} i_D(t) + i_D(t) \left(\frac{r_D L_F + r_F L_D}{\Delta} \right) = \frac{-M_{DF} V_F(t)}{\Delta} \quad (8.67)$$

si $r_D \gg r_F$ y $L_D \approx L_F$ [53]

$$\frac{d}{dt} i_D(t) + i_D(t) \left(\frac{r_D}{L_D - \frac{M_{DF}^2}{L_F}} \right) = \frac{-\frac{M_{DF} V_F(t)}{L_F}}{L_D - \frac{M_{DF}^2}{L_F}} \quad (8.68)$$

La ecuación (8.68) muestra que $i_D(t)$ decae con una constante de tiempo

$$T''_{d_0} = \frac{L_D - \frac{M_{DF}^2}{L_F}}{r_D} \quad (8.69)$$

ésta es la *constante de tiempo subtransitoria de circuito abierto en el eje d* [53].

4. Cuando un devanado de amortiguamiento no es considerado o después de decaer la corriente subtransitoria. Se puede mostrar que la corriente de campo es afectada sólomente por los parámetros del circuito de campo [53], tal como se muestra en la figura 8.8, el cuál se obtiene de la figura 8.7 eliminando los bonds 4 y 8, donde el campo $I : M_{DF}$ se reduce a $I : L_F$.

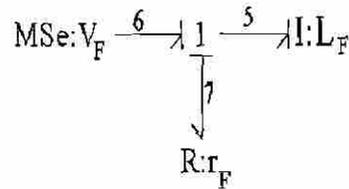


Figura 8.8 Bond Graph para la constante de tiempo transitorio en el eje d .

Los vectores clave para el Bond Graph de la figura 8.8 son:

$$\begin{aligned} x(t) &= p_5(t); \quad \dot{x}(t) = e_5(t); \quad z(t) = f_5(t) \\ D_{in}(t) &= f_7(t); \quad D_{out}(t) = e_7(t); \quad u(t) = e_6(t) \end{aligned} \quad (8.70)$$

Las relaciones constitutivas para este Bond Graph son:

$$L = r_F; \quad F = \frac{1}{L_F} \quad (8.71)$$

y la matriz de estructura de unión es

$$S_{12} = -S_{13} = -1; \quad S_{11} = S_{22} = S_{23} = 0 \quad (8.72)$$

de (8.70) a (8.72) y sustituyendo en (8.45) y (8.47) con (2.34), el modelo dinámico es:

$$\frac{d}{dt} f_5(t) = \left(-\frac{r_F}{L_F} \right) f_5(t) + \left(\frac{1}{L_F} \right) e_6(t) \quad (8.73)$$

La constante de tiempo de este transitorio es la *constante de tiempo transitoria de circuito abierto en el eje d* , τ'_{d_0} [53] de (8.73):

$$\tau'_{d_0} = \frac{L_F}{r_F} \quad (8.74)$$

5. Se realiza un análisis similar del transitorio en el circuito del eje q de una máquina de polos salientes. Así, del Bond Graph de la figura 8.6, haciendo $i_q(t) = 0$, se elimina el bond 11 y considerando la parte restante en el eje q , obtenemos el modelo representado en la figura 8.9, en donde el campo $I : M_{Qq}$ se reduce a $I : L_q$.

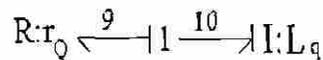


Figure 8.9 Bond Graph de la constante de tiempo subtransitoria en el eje q .

Los vectores clave del Bond Graph de la figura 8.9 son:

$$x = p_{10}; \quad \dot{x} = e_{10}; \quad z = f_{10}; \quad D_{in} = f_9; \quad D_{out} = e_9 \quad (8.75)$$

Las relaciones constitutivas son:

$$L = r_Q; \quad F = \frac{1}{L_q} \quad (8.76)$$

siendo la matriz de estructura de unión dada por

$$S_{12} = -1; S_{11} = S_{13} = S_{22} = S_{32} = 0 \quad (8.77)$$

De (8.75) a (8.77) y sustituyendo en (8.45) a (8.47) con (2.34) el modelo dinámico es:

$$\frac{d}{dt} f_{10}(t) = \frac{-r_Q}{L_q} f_{10}(t) \quad (8.78)$$

Así, la *constante de tiempo de circuito abierto en el eje q* está dada por [53]:

$$\tau_{q0}'' = \frac{L_q}{r_Q} \quad (8.79)$$

A continuación, se dan expresiones para determinar las constantes de tiempo transitorias de corto circuito en el eje d y q .

En [53] muestran que cuando el estator está en corto circuito, la constante de tiempo correspondiente en el eje d está dada por

$$\tau_d'' = \tau_{d0}'' \frac{L_d''}{L_d'} \quad (8.80)$$

$$\tau_d' = \tau_{d0}' \frac{L_d'}{L_d} \quad (8.81)$$

donde L_d'' y L_d' son las *inductancias subtransitorias y transitorias en el eje d* respectivamente dadas por:

$$L_d'' = L_d - \frac{M_{dF}^2 L_D + M_{dD}^2 L_F - 2M_{dF} M_{dD} M_{DF}}{\Delta} \quad (8.82)$$

$$L_d' = L_d - \frac{M_{dF}^2}{L_F} \quad (8.83)$$

para el eje q , tenemos:

$$\tau_q'' = \tau_{q0}'' \frac{L_q''}{L_q} \quad (8.84)$$

donde L_q'' es la *inductancia subtransitoria en el eje q*, la cual está dada por:

$$L_q'' = L_q - \frac{M_{qQ}^2}{L_Q} \quad (8.85)$$

El procedimiento anterior muestra la utilidad del modelo de la máquina síncrona representado en Bond Graph, en donde la determinación de las constantes de tiempo se reduce a la obtención de modelos simplificados.

En el siguiente capítulo, se aplican al modelo lineal de la máquina síncrona, las herramientas gráficas presentadas en los capítulos del 3 al 7.

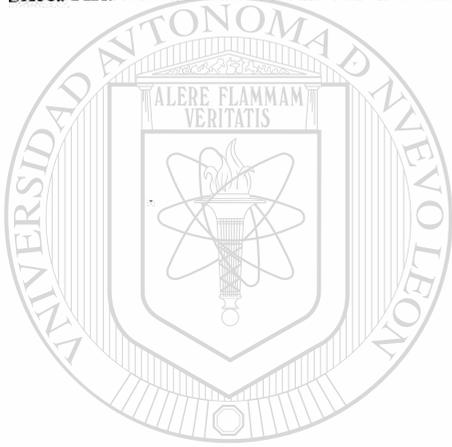
8.6 Conclusiones

El modelo en Bond Graph de la máquina síncrona dado por [23] se analiza y modifica para obtener el modelo matemático de [53].

El modelo de la máquina síncrona en Bond Graph se muestra en un sólo marco de referencia, es decir, en el dominio físico.

Se obtienen de una manera sistemática y directa los modelos simplificados de la máquina síncrona en Bond Graph,

Se propone un procedimiento para obtener las constantes de tiempo de la máquina síncrona utilizando modelos simplificados de la máquina en el dominio físico.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



Capítulo 9

Aplicación de Herramientas Gráficas al Análisis de la Máquina Síncrona

9.1 Introducción

La máquina síncrona opera como un generador de corriente alterna impulsado por una turbina y convierte la energía mecánica en eléctrica. Esta máquina es la principal fuente de generación de potencia eléctrica en el mundo y representa el elemento básico en el comportamiento dinámico de un sistema eléctrico. Por lo anterior, es muy importante conocer el comportamiento de la máquina síncrona en el análisis de estado estacionario, estado transitorio y de estabilidad [53].

En el presente capítulo, se aplican las herramientas presentadas del capítulo 3 al 7 son aplicadas a un sistema físico, indicándose las ventajas de trabajar en el dominio físico. Primeramente, se obtiene una grafo lineal de la máquina síncrona, a partir del modelo representado en Bond Graph en el capítulo 8. Después, se obtiene la representación en espacio de estado aplicando los procedimientos presentados en el capítulo 3. Posteriormente, se determinan las condiciones de estabilidad de este modelo de la máquina, utilizando los resultados del capítulo 4. Los valores de estado estacionario de la máquina se obtienen aplicando los resultados del capítulo 6. También, se realiza un control por retroalimentación de estados estimados en el dominio físico utilizando los resultados presentados en el capítulo 5 y finalmente se aplican los resultados del capítulo 7 para encontrar el modelo linealizado de la máquina síncrona.

Considerando $f_{16} = \omega_0$ como una constante que multiplica a los estados correspondientes y no como una entrada, el vector nuevo de entrada ahora es: $u_n(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) & e_6(t) & e_{12}(t) \end{bmatrix}^T$. Así mismo, sustituyendo $\lambda_d(t) = L_d i_d(t) + M_{dF} i_F(t)$ y $\lambda_q(t) = L_q i_q(t)$ en T , tenemos:

$$S_{11}^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -L_q \omega_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ L_d \omega_0 & M_{dF} \omega_0 & 0 \end{bmatrix}; S_{13}^m = I_{3 \times 3} \quad (9.4)$$

En sistemas eléctricos de potencia y en especial en máquinas eléctricas es común y más práctico utilizar la representación de espacio de estado en términos de co-energía [53]. Así, de (3.9) $E^{-1} = I$ dado que $S_{14} = 0$. Entonces de (2.22), (2.24) y (2.25), se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{S}_{11} & \check{S}_{12} & \check{S}_{13} \\ S_{21} & S'_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S'_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{in}(t) \\ u_n(t) \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

donde

$$\check{S}_{11} \triangleq F S_{11}^m; \quad \check{S}_{12} \triangleq F S_{12} L; \quad \check{S}_{13} \triangleq F S_{13}^m \quad (9.6)$$

Para el Bond Graph de la figura 9.1, se tiene:

$$\check{S}_{11} = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & \begin{bmatrix} -L_q \omega_0 L'_d \\ -L_q \omega_0 M'_{dF} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} L_d \omega_0 L_q^{-1} & M_{dF} \omega_0 L_q^{-1} \\ -r_d L'_d & -r_F M'_{dF} \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\check{S}_{12} = \begin{bmatrix} -r_d L'_d & -r_F M'_{dF} & 0_{2 \times 1} \\ -r_d M'_{dF} & -r_F L'_F & 0_{1 \times 2} \end{bmatrix}; \quad \check{S}_{13} = F \quad (9.7)$$

$$\check{S}_{22} = \check{S}_{32} = 0$$

donde

$$F = \text{diag} \{ L'_{dF}, L_q^{-1} \} \quad (9.4)$$

$$\text{siendo } L'_{dF} = L_{dF}^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} L'_d & M'_{dF} \\ M'_{dF} & L'_F \end{bmatrix}.$$

Obteniendo la grafo lineal de la figura 9.1, en términos de co-energía, de acuerdo a (8.46) se tiene la figura 9.2.

Para $(\check{A}_{pd})_{22}$,

$$\delta_1 = -r_F L_F^{-1}; \quad \delta_3 = 1 \quad (9.13)$$

Sustituyendo (9.13) en (3.17)

$$(\check{A}_{pd})_{22} = -r_F L_F' \quad (9.14)$$

Para $(\check{A}_{pd})_{33}$,

$$\delta_1 = -r_q L_q^{-1} \quad \delta_3 = 1 \quad (9.15)$$

Sustituyendo (9.15) en (3.17) se tiene:

$$(\check{A}_{pd})_{33} = -r_q L_q^{-1} \quad (9.16)$$

y para $(\check{A}_{pd})_{12}$,

$$\delta_1 = -r_F M_{dF}' \quad \delta_3 = 1 \quad (9.17)$$

sustituyendo (9.17) en (3.17)

$$(\check{A}_{pd})_{12} = -r_F M_{dF}' \quad (9.18)$$

y para $(\check{A}_{pd})_{21}$,

$$\delta_1 = -r_d M_{dF}' \quad \delta_3 = 1 \quad (9.19)$$

sustituyendo (9.19) en (3.17) da:

$$(\check{A}_{pd})_{21} = -r_d M_{dF}' \quad (9.20)$$

Sustituyendo (9.12), (9.14), (9.16), (9.18) y (9.20) en (9.10) y (9.9) y (9.10) en (3.14), la matriz \check{A}_p queda determinada por:

$$\check{A}_p = F \begin{bmatrix} -r_d & 0 & -L_q \omega_0 \\ 0 & -r_F & 0 \\ L_d \omega_0 & M_{dF} \omega_0 & -r_q \end{bmatrix} \quad (9.21)$$

De una manera similar, tenemos para \check{B}_p , en este caso, de (3.22) $\check{B}_{pd} = 0$ y de (3.20) $\check{B}_p = \check{B}_{px}$, la cual está dada por:

$$\check{B}_p = F I_{3 \times 3} \quad (9.22)$$

La salida del sistema se obtiene de (3.28), considerando la máquina síncrona como generador, $\tilde{C}_{pd} = 0$, por lo tanto, de (3.26)

$$\tilde{C}_p = \tilde{C}_{pz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.23)$$

y de (3.32) $\tilde{D}_p = 0$.

El modelo dinámico de la máquina síncrona a velocidad constante y despreciando los devanados de amortiguamiento, se obtiene de (9.21) y (9.22), el cuál está dado por:

$$\begin{bmatrix} r_d & 0 & L_q\omega_0 \\ 0 & r_F & 0 \\ -L_d\omega_0 & -M_{dF}\omega_0 & r_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_5(t) \\ f_{11}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & M_{DF} & 0 \\ M_{DF} & L_F & 0 \\ 0 & 0 & L_g \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_5(t) \\ f_{11}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_6(t) \\ e_{12}(t) \end{bmatrix} \quad (9.24)$$

En la siguiente sección, se determinan las condiciones de estabilidad para la máquina síncrona considerada en ésta sección, aplicando los resultados del capítulo 4.

9.3 Obtención de las Condiciones de Estabilidad Utilizando una Gráfica Lineal

Se considera la máquina síncrona operando a velocidad constante y sin considerar los devanados de amortiguamiento, tal como se muestra en la figura 9.1.

La determinación de las condiciones de estabilidad de la máquina síncrona, se realiza aplicando los resultados obtenidos del capítulo 4, de ésta manera se obtiene la gráfica lineal para análisis de estabilidad a partir de la gráfica lineal de la figura 9.2 sin considerar los nodos de entrada y de salida, ni las ramas asociadas a ellos. La gráfica resultante se muestra en la figura 9.3.

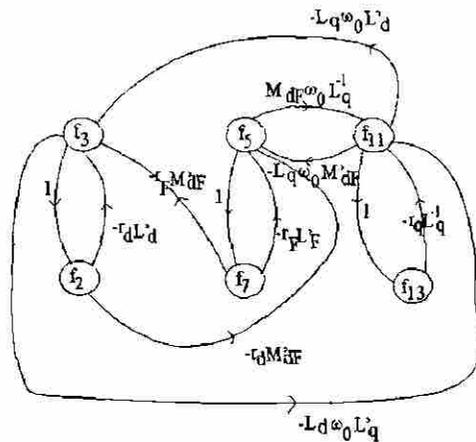


Figura 9.3 Gráfica lineal de la máquina síncrona para análisis de estabilidad.

De (4.3) el polinomio característico de la gráfica lineal de la figura 9.3 está dado por:

$$\det(\lambda I - A_c) = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 \tag{9.25}$$

A continuación, se obtienen de (4.3) los coeficientes de (9.25), utilizando la gráfica lineal de la figura 9.3.

La figura 9.4 muestra los factores-1 para a_1 .

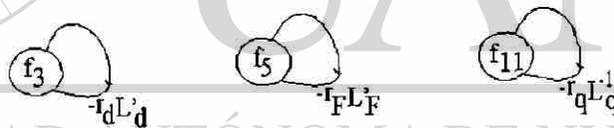


Figura 9.4 Factores-1 para a_1 .

$$a_1 = \frac{T_d + T_F}{\Lambda} + T_q \tag{9.26}$$

donde

$$T_d \triangleq \frac{r_d}{L_d} \tag{9.27}$$

$$T_F \triangleq \frac{r_F}{L_F} \tag{9.28}$$

$$T_q \triangleq \frac{r_q}{L_q} \tag{9.29}$$

$$\Lambda \triangleq 1 - \frac{M_{dF}^2}{L_d L_F} \tag{9.30}$$

El coeficiente a_2 , se obtiene de la figura 9.5,

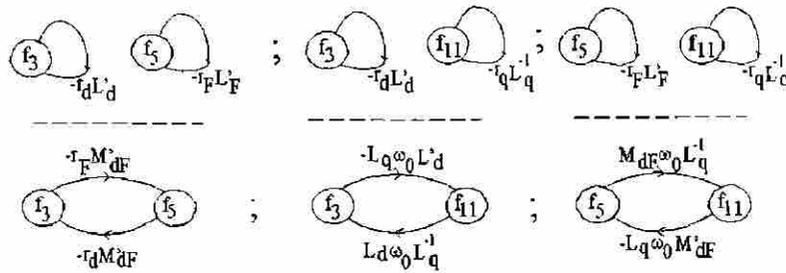


Figura 9.5 Factores-1 para a_2 .

$$a_2 = \frac{1}{\Lambda} [T_d T_F + \omega_0^2 + T_q (T_F + T_d)] + M_{dF} \left(\frac{\omega_0 M_{dF}}{L_d L_F} \right)^2 \tag{9.31}$$

Finalmente, a_3 , se obtiene de la figura 9.6,

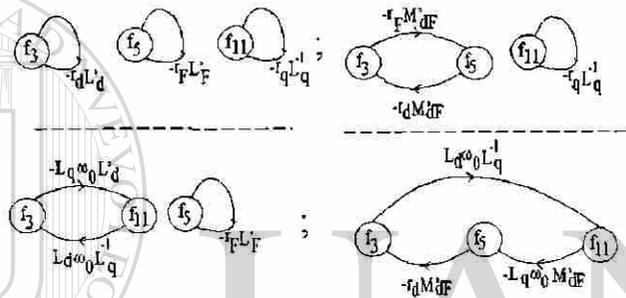


Figura 9.6 Factores-1 para a_3 .

$$a_3 = \frac{T_d T_F T_q}{\Lambda} + \frac{T_F}{L_q^2} \Gamma \tag{9.32}$$

Utilizando el Procedimiento 4.1, se obtiene la gráfica de Coates de estabilidad, que se ilustra en la figura 9.7.

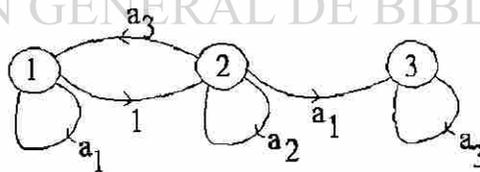


Figura 9.7 Gráfica de estabilidad de Coates.

Los determinantes de Hurwitz se encuentran por medio del Procedimiento 4.2, así, utilizando la figura 9.8, se encuentra D_3 ,

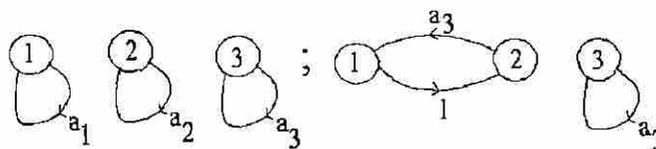


Figura 9.8 Determinante de Hurwitz D_3 .

$$D_3 = a_3^2 - a_1 a_2 a_3 \quad (9.33)$$

así mismo, para D_2 , de la figura 9.9 se tiene:

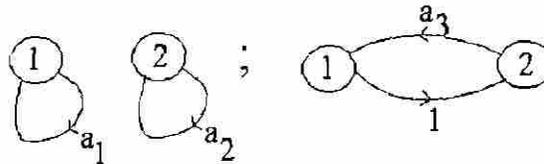


Figura 9.9 Determinante de Hurwitz D_2 .

$$D_2 = a_1 a_2 - a_3 \quad (9.34)$$

Finalmente, para D_1 de la figura 9.10 se obtiene:

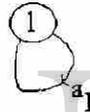


Figura 9.10 Determinante de Hurwitz D_1 .

$$D_1 = a_1 \quad (9.35)$$

Las condiciones de estabilidad de la máquina síncrona considerada son:

$$\frac{T_d + T_F}{\Lambda} + T_q > 0 \quad (9.36)$$

$$\frac{(T_d + T_F)}{\Lambda} \left[T_d T_F + \omega_0^2 + T_q (T_d + T_F) + M_{dF} \left(\frac{\omega_0 M_{dF}}{L_d L_F} \right) \right] > T_F \left[T_d T_q \left(L_d L_F + \frac{M_{dF}^2}{\Lambda} \right) + \omega_0^2 \right] \quad (9.37)$$

$$T_F \left[T_d T_q \left(L_d L_F + \frac{M_{dF}^2}{\Lambda} \right) + \omega_0^2 \right]^2 > \left[T_d T_q \left(L_d L_F + \frac{M_{dF}^2}{\Lambda} \right) + \omega_0^2 \right] \left(\frac{T_d + T_F}{\Lambda} + T_q \right) \quad (9.38)$$

$$+ \left[T_d T_F + \omega_0^2 + T_q (T_d + T_F) + M_{dF} \left(\frac{\omega_0 M_{dF}}{L_d L_F} \right)^2 \right]$$

En la siguiente sección se obtienen los valores de estado estacionario de las variables de estado de co-energía de la máquina síncrona aplicando los resultados del capítulo 6.

9.4 Obtención del Estado Estacionario de la Máquina Síncrona utilizando Bond Graph

Como se estudió en el capítulo 6, un modelo representado en Bond Graph permite la obtención de la respuesta de estado estacionario de las variables de estado de un sistema utilizando el Bond Graph en causalidad derivativa.

El Bond Graph en causalidad derivativa de la máquina síncrona a velocidad constante se obtiene de la figura 8.4, y se muestra en la figura 9.11.

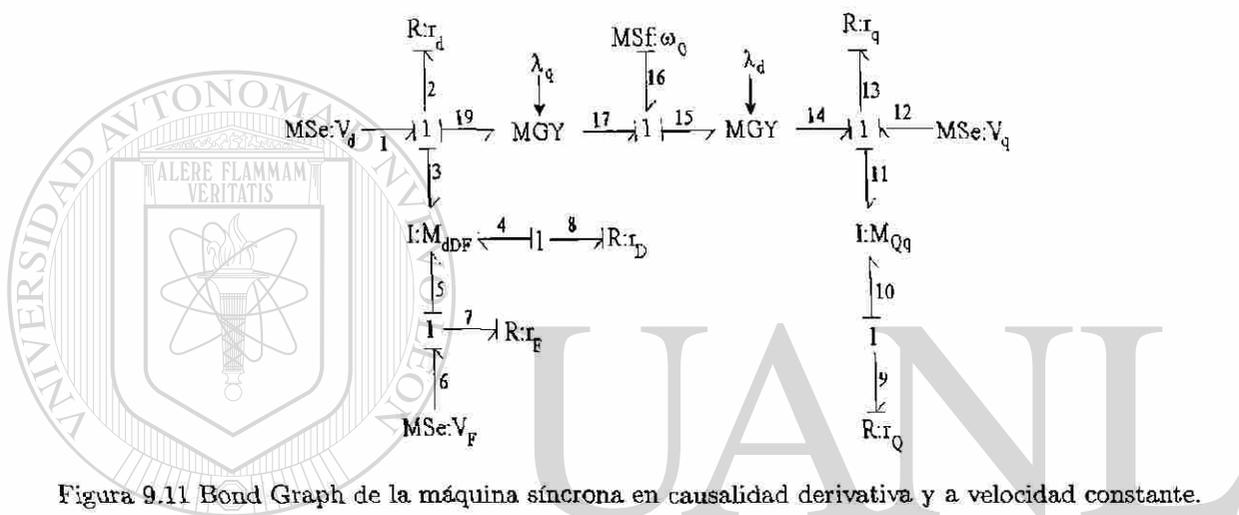


Figura 9.11 Bond Graph de la máquina síncrona en causalidad derivativa y a velocidad constante.

Los vectores clave que cambian, respecto a (8.40), dicionales para el Bond Graph en causalidad derivativa de la figura 9.11 son:

$$D_{ind}(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) & e_7(t) & e_8(t) & e_9(t) & e_{13}(t) \end{bmatrix}^T \quad (9.39)$$

$$D_{outd}(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) & f_7(t) & f_8(t) & f_9(t) & f_{13}(t) \end{bmatrix}^T \quad (9.40)$$

$$L_d = \text{diag} \left\{ \frac{1}{r_d}, \frac{1}{r_F}, \frac{1}{r_D}, \frac{1}{r_Q}, \frac{1}{r_q} \right\} \quad (9.41)$$

La matriz de estructura de unión es:

$$J_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; J_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda_q(t) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda_d(t) \end{bmatrix}$$

$$J_{11} = 0; J_{13} = 0; J_{22} = 0 \quad (9.42)$$

Sustituyendo las ecuaciones de (9.39) a (9.42) en (6.14), (6.17) y (6.22) obtenemos los valores de estado-estacionario de la variables de estado de co-energía:

$$\begin{bmatrix} f_{3ss} \\ f_{4ss} \\ f_{5ss} \\ f_{10ss} \\ f_{11ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_d} e_{1ss} + \frac{1}{r_d} \lambda_{qss} \omega_0 \\ 0 \\ \frac{1}{r_F} e_{6ss} \\ 0 \\ \frac{1}{r_q} e_{12ss} - \frac{1}{r_q} \lambda_{dss} \omega_0 \end{bmatrix} \quad (9.43)$$

Resolviendo el sistema anterior (9.43) de ecuaciones algebraicas para f_{3ss} y f_{11ss} , con las relaciones constitutivas para $\lambda_{dss} = L_d f_{3ss} + M_{dF} f_{5ss}$ y $\lambda_{qss} = L_q f_{11ss}$ de (8.26) a (8.29) se tiene el estado estacionario:

$$z_{ss} = \begin{bmatrix} \frac{e_{1ss} r_F + L_q \omega_0 [e_{12ss} - \omega_0 M_{dF} f_{5ss}]}{r_d r_q + L_d L_q \omega_0^2} \\ 0 \\ \frac{1}{r_F} e_{6ss} \\ 0 \\ \frac{e_{12ss}}{r_q} - \frac{\omega_0 L_d}{r_q} f_{3ss} - \frac{\omega_0 M_{dF}}{r_q} f_{5ss} \end{bmatrix} \quad (9.44)$$

En la siguiente sección, se obtiene un control por retroalimentación de estados estimados aplicando los resultados del capítulo 5.

9.5 Control de una Máquina Síncrona por Retroalimentación de Estados Estimados

El observador de estados y la retroalimentación de estados estimados de una máquina síncrona, despreciando los devanados de amortiguamiento a velocidad constante, se obtienen aplicando los Procedimientos 5.1 y 5.2, respectivamente, a partir del Bond Graph de la figura 9.1, resultando el Bond Graph de la figura 9.12.

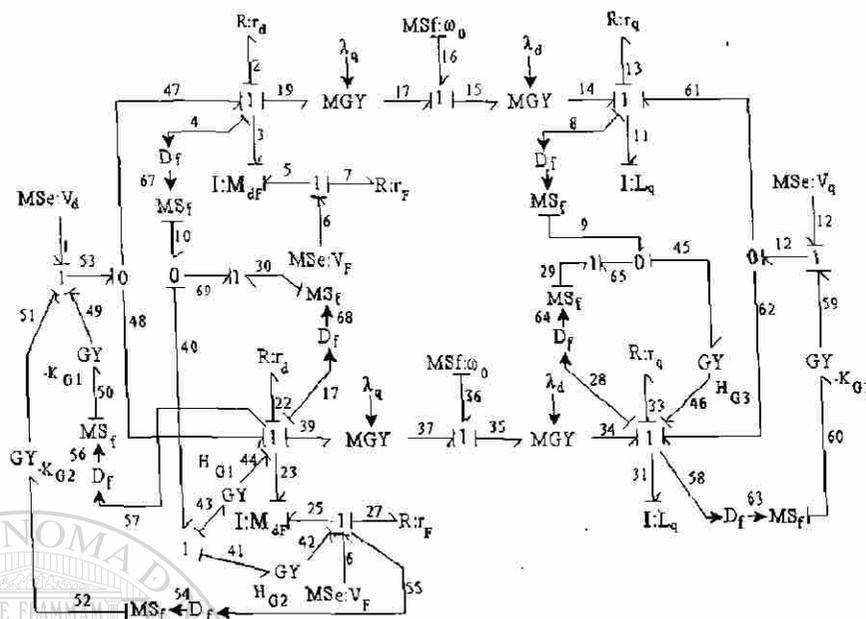


Figura 9.12 Observador de Estados de una Máquina Síncrona.

La estructura de unión para el sistema en lazo cerrado se obtiene de acuerdo al Lema 5.1 y está dada por:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -L_q\omega_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ L_d\omega_0 & M_{dF}\omega_0 & 0 \end{bmatrix}; S_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{12} = -I_{3 \times 3} = -S_{13}; S_{22} = S_{23} = S_{32} = S_{33} = 0 \quad (9.45)$$

La estructura de unión del observador reflejada al sistema es:

$$\widehat{S}_{11} = \begin{bmatrix} K_{G1} & K_{G2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{G3} \end{bmatrix}; \widehat{S}_{21} = \widehat{S}_{31} = 0 \quad (9.46)$$

Obteniendo una representación en espacio de estado más conveniente para máquinas eléctricas, en términos de co-energía, se tiene de (2.22) y (5.6):

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \widetilde{A}_p z(t) - \widetilde{A}_{pz} \widehat{z}(t) + \widetilde{B}_p w(t) \\ y(t) &= \widetilde{C}_p z(t) - \widetilde{C}_{pz} \widehat{z}(t) + D_p w(t) \end{aligned} \quad (9.47)$$

donde

$$\dot{\tilde{A}}_p = F A_p F^{-1} \quad (9.48)$$

$$\dot{\tilde{B}}_p = F B_p \quad (9.49)$$

$$\widetilde{A}_{pz} = F \widetilde{A}_p F^{-1} \quad (9.50)$$

$$\tilde{C}_p = C_p F^{-1} \quad (9.51)$$

$$\widetilde{C}_{pz} = \tilde{C}_p F^{-1} \quad (9.52)$$

una representación alterna y muy utilizada en sistemas eléctricos de potencia se obtiene a partir de (9.47), se tiene:

$$F^{-1} \dot{z}(t) = F^{-1} \dot{\tilde{A}}_p z(t) - F^{-1} \widetilde{A}_{pz} \hat{z}(t) + F^{-1} \tilde{B}_p w(t) \quad (9.53)$$

El término $F^{-1} \widetilde{A}_{pz}$ se obtiene del caso 1 del Lema 5.1, donde $E = I$, entonces de (5.18) $\tilde{A}_p = \widehat{S}_{11} F$ y (9.50) se obtiene:

$$\widetilde{A}_{pz} = F \widehat{S}_{11} \quad (9.54)$$

así mismo, $\dot{\tilde{A}}_p$ y \tilde{B}_p están dadas en (9.21) y (9.22) respectivamente, por otro lado del caso 1 del Lema 5.1 $\widetilde{C}_{pz} = 0$, ya que $\widehat{S}_{31} = 0$, y de (9.23) se tiene \tilde{C}_p , con $D_p = 0$. Por lo tanto el modelo de la máquina síncrona en lazo cerrado está dado por:

$$\begin{bmatrix} L_d & M_{dF} & 0 \\ M_{dF} & L_F & 0 \\ 0 & 0 & L_q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_5(t) \\ f_{11}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_d & 0 & -L_q \omega_0 \\ 0 & -r_F & 0 \\ L_d \omega_0 & M_{dF} \omega_0 & -r_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_5(t) \\ f_{11}(t) \end{bmatrix} - \quad (9.55)$$

$$+ \begin{bmatrix} K_{G1} & K_{G2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{G3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}_3(t) \\ \hat{f}_5(t) \\ \hat{f}_{11}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_6(t) \\ e_{12}(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_5(t) \\ f_{11}(t) \end{bmatrix}$$

La estructura de unión en lazo cerrado del observador se obtiene del Lema 5.2 y está dada por:

$$\widehat{S}'_{11} = \begin{bmatrix} -K_{G1} - H_{G1} & -K_{G2} & -L_q \omega_0 \\ -H_{G2} & 0 & 0 \\ L_d \omega_0 & M_{dF} \omega_0 & -K_{G3} - H_{G3} \end{bmatrix}; S'_{11} = \begin{bmatrix} H_{G1} & 0 & 0 \\ H_{G2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{G3} \end{bmatrix}$$

$$\widehat{S}'_{12} = -\widehat{S}'_{13} = -I_{3 \times 3}; \widehat{S}'_{22} = \widehat{S}'_{23} = \widehat{S}'_{32} = \widehat{S}'_{33} = S'_{12} = 0; \widehat{S}'_{31} = S_{31} \quad (9.56)$$

Obteniendo la representación de espacio de estado en términos de co-energía, de (2.22) y (5.9) se tiene:

$$\dot{\widehat{z}}(t) = \widehat{A}_{pz}\widehat{z}(t) + \widehat{B}_{pz}w(t) + \overline{A}_{pz}z(t) \quad (9.57)$$

$$\widehat{y}(t) = \widehat{C}_{pz}\widehat{z}(t) + \widehat{D}_p w(t)$$

donde

$$\widehat{A}_{pz} = F\widehat{A}_pF^{-1} \quad (9.58)$$

$$\widehat{B}_{pz} = F\widehat{B}_p \quad (9.59)$$

$$\overline{A}_{pz} = F\overline{A}_pF^{-1} \quad (9.60)$$

$$\widehat{C}_{pz} = \widehat{C}_pF^{-1} \quad (9.61)$$

Utilizando el Lema 5.2, de (9.45), (9.46) y (9.56) a (9.61), se obtiene el modelo del observador en lazo cerrado de la máquina síncrona:

$$\begin{bmatrix} L_d & M_{dF} & 0 \\ M_{dF} & L_F & 0 \\ 0 & 0 & L_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{f}_3(t) \\ \widehat{f}_5(t) \\ \widehat{f}_{11}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_d - K_{G1} - H_{G1} & -K_{G2} & -L_q\omega_0 \\ -H_{G2} & -r_F & 0 \\ L_d\omega_0 & M_{dF}\omega_0 & -r_q - K_{G3} - H_{G3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{f}_3(t) \\ \widehat{f}_5(t) \\ \widehat{f}_{11}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{G1} & & \\ H_{G2} & 0_{2 \times 2} & \\ 0 & 0 & H_{G3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_5(t) \\ f_{11}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_6(t) \\ e_{12}(t) \end{bmatrix}$$

$$\widehat{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{f}_3(t) \\ \widehat{f}_5(t) \\ \widehat{f}_{11}(t) \end{bmatrix} \quad (9.62)$$

En la próxima sección, se aplican los resultados del capítulo 7 para encontrar el modelo linealizado de la máquina síncrona en el dominio físico.

9.6 Modelo Lineal de la Máquina Síncrona utilizando Bond Graph

Cuando un sistema de potencia está sujeto a un “pequeño” cambio de pequeña carga, tiende a adquirir un nuevo estado de operación. Durante la transición entre el estado inicial y el nuevo estado, el comportamiento del sistema es oscilatorio. Si los dos estados son tales que todas las variables de estado cambian suavemente, el sistema está operando cerca del estado inicial. El estado inicial puede ser considerado como una condición de operación *cuasi-estacionaria* para el sistema [53].

$$S_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{13}^0 = \begin{bmatrix} -\lambda_q(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda_d(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_q(t) & -\lambda_d(t) \end{bmatrix} \quad (9.65)$$

Es muy común en sistemas eléctricos de potencia usar la corriente eléctrica como variable de estado y de manera especial para máquinas eléctricas la representación siguiente

$$B_{p\delta} u_\delta(t) = -A_{p\delta} F^{-1} z_\delta(t) + F^{-1} \dot{z}_\delta(t) \quad (9.66)$$

De (7.24) y (9.65) se tiene,

$$S_{13}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i_{q0} & 0 & 0 & 0 & i_{d0} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.67)$$

De (7.19), (8.42), (9.63), (9.64), (9.65) y (9.67) tenemos:

$$A_{p\delta} F^{-1} = \begin{bmatrix} -R_{rDF} & \omega_0 N_{12} & N_{13} \\ -\omega_0 N_{21} & -R_{Qq} & -N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.68)$$

donde

$$N_{12} = \begin{bmatrix} H_2 \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}; N_{21} = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 3} \\ H_1 \end{bmatrix}; N_{13} = \begin{bmatrix} \lambda_{q0} \\ 0_{2 \times 1} \end{bmatrix}; N_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_{d0} \end{bmatrix} \quad (9.69) \quad \textcircled{R}$$

$$R_{dDF} = \text{diag}\{r_d, r_D, r_F\}; R_{Qq} = \text{diag}\{r_Q, r_q\} \quad (9.70)$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} L_d & M_{dD} & M_{dF} \end{bmatrix}; H_2 = \begin{bmatrix} M_{qQ} & L_q \end{bmatrix} \quad (9.71)$$

$$N_{31} = i_{q0} H_1 - N_{13}^T; N_{32} = N_{23}^T - i_{d0} H_2$$

y finalmente, de (7.20), (9.63) a (9.65) se obtiene:

$$B_{p\delta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.72)$$

Notar que, de (9.68) y (9.72) el modelo lineal de la máquina síncrona obtenido por Bond Graph es el mismo que en [57], siendo una metodología sencilla para este tipo de sistemas.

En el siguiente capítulo se dan las conclusiones generales de este trabajo de investigación.

9.7 Conclusiones

En este capítulo se aplicaron las herramientas gráficas presentadas en los capítulos 3 al 7 se aplican al modelo de una máquina síncrona en el dominio físico.

Se obtiene una realización en espacio de estado de una máquina síncrona modelada en Bond Graph a partir de su gráfica lineal.

Se presentan condiciones de estabilidad de una máquina síncrona en términos de los parámetros de la máquina.

Se obtienen las condiciones de estado estacionario de una máquina síncrona en el dominio físico.

Se presenta un control por retroalimentación de estado estimado de una máquina síncrona en Bond Graph.

Se propone un modelo linealizado de una máquina síncrona en Bond Graph.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



Capítulo 10

Conclusiones y Trabajos Futuros

10.1 Conclusiones

Las conclusiones generales de este trabajo de investigación son las siguientes:

- Todos los resultados de la presente tesis permiten considerar diferentes tipos de energía, no requieren conocer la función de transferencia o su realización (A_p, B_p, C_p, D_p) y las expresiones obtenidas son simbólicas, no numéricas.
- Se presenta un grafo de Coates modificado que representa un Bond Graph, lo cual permite la aplicación de herramientas de Teoría de Grafos, tales como cálculo de determinante, polinomio característico, inversa de matrices y reducción de grafos. Basado en este grafo se presenta un procedimiento gráfico para la determinación de las matrices (A_p, B_p, C_p, D_p) de un sistema LTI MIMO. Además, se propone la representación del Criterio de Hurwitz mediante un grafo. Basado en este grafo se propone un procedimiento gráfico para determinar las condiciones de estabilidad de un sistema físico LTI MIMO modelado en Bond Graph. Estos resultados pueden ser aplicados a sistemas físicos en lazo abierto o lazo cerrado. La realización (A_p, B_p, C_p, D_p) mediante un grafo del sistema físico, permite conocer la influencia de cada elemento del sistema en la realización obtenida y/o utilizar esta información para el diseño del sistema. Finalmente, las condiciones de estabilidad mediante el procedimiento gráfico utiliza el mínimo número de términos para su cálculo.
- Se presenta un control por retroalimentación de estado estimado para sistemas LTI MIMO, es decir, se propone una metodología para obtener el sistema completo en lazo cerrado incluyendo el observador y retroalimentación directamente a partir del Bond Graph en lazo abierto y de estructuras propuestas, garantizando que el control y el observador sean físicamente realizables.

- Se presenta un procedimiento gráfico directo para obtener los valores de estado estacionario de las señales del error, del estado y de la salida de un sistema físico LTI MIMO, en lazo abierto o con retroalimentación de salida en Bond Graph.
- Se presenta un procedimiento gráfico utilizando Bond Graph para la linealización de sistemas no lineales de producto de estados. El sistema y linealización son determinados en el dominio físico. Esta metodología no requiere conocer las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.
- Un modelo en Bond Graph de la máquina síncrona dado por [23] se analiza y modifica para obtener el mismo modelo matemático dado por [53]. Así, se obtienen de una manera sistemática y directa los modelos simplificados de la máquina síncrona en Bond Graph, lográndose presentar la determinación de las constantes de tiempo de la máquina por medio de modelos simplificados en Bond Graph.
- Las herramientas gráficas anteriores se aplican al modelo de la máquina síncrona en el dominio físico, es decir, se obtiene una realización en espacio de estado de una máquina síncrona modelada en Bond Graph a partir de su gráfica lineal. Se presentan condiciones de estabilidad de una máquina síncrona en términos de los parámetros de la máquina. Se obtienen las condiciones de estado estacionario de una máquina síncrona en el dominio físico. Se presenta un control por retroalimentación de estado estimado de una máquina síncrona en Bond Graph y se propone un modelo linealizado de una máquina síncrona en Bond Graph.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

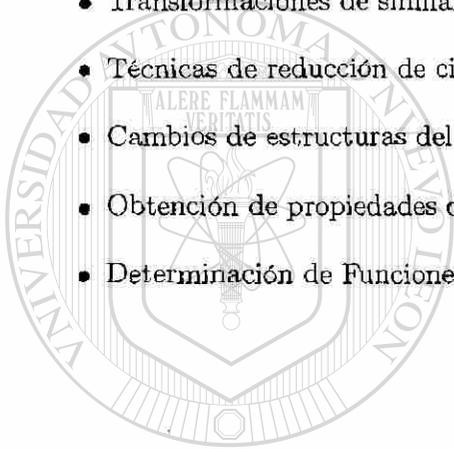
10.2 Trabajos Futuros

La herramienta de Bond Graph en el modelado de sistemas físicos tiene un amplio potencial en el desarrollo del entorno científico de modelado y control. Así, se considera que la metodología de Bond Graph puede aplicarse al modelado y control de: Equipo Eléctrico de Generadores, Líneas de Transmisión, Interruptores y Cargas Eléctricas, Modelado de Elementos de Electrónica de Potencia, Sistemas Eléctricos de Potencia, Sistemas Singularmente Perturbados, Sistemas No lineales, Sistemas con Incertidumbres, Robots y Sistemas Subactuados.

Los problemas inmediatos a resolver son:

- Determinación de los Valores de Estado Estacionario de las Variables de Estado mediante Trayectorias Causales en un Bond Graph.
- Componentes Simétricas en Bond Graph.

- Modelado de Fallas en un Sistema Eléctrico de Potencia utilizando Bond Graph.
- Determinación de los Valores de Estado Estacionario con Elementos Almacenadores de Energía en Causalidad Derivativa en un Bond Graph.
- Determinación de Propiedades de Energía de la Estructura de Unión de un Bond Graph con Bonds Activos.
- Determinación del Error de Estado Estacionario para sistemas con un Control PID, en Cascada o por Retroalimentación de Estados en Bond Graph.
- Flujos de Carga de un sistema eléctrico de potencia en gráficos y/o Bond Graph.
- Transformaciones de similaridad en un Bond Graph.
- Técnicas de reducción de circuitos utilizando Bond Graph.
- Cambios de estructuras del modelo de un sistema físico en Bond Graph.
- Obtención de propiedades de sistemas lineales variantes en el tiempo en el dominio físico.
- Determinación de Funciones de Sensibilidad.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Bibliografía

- [1] A. Fakri, F. Rocaries y A. Carriere, "A Simple Method for the Conversion of Bond Graphs Models in Representation by Block Diagrams", *Proceedings of ICBGM'97*, 3rd International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, pp. 15-19, 1997.
- [2] Ahmed A. Omara y Ronald C. Rosenberg, "Analysis of a Class of Two-Time-Scale Bond Graph Models", *Proceedings of ICBGM'01*, 5th International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, pp. 55-61, 2001.
- [3] Andre Sharon, Neville Hogan and David E. Hardt, "Controller Design in the Physical Domain", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 328, No. 5/6, pp. 697-721, 1991.
- [4] Benjamin C. Kuo, "Automatic Control Systems", *Prentice-Hall*, 1991.
- [5] C. Sueur y G. Dauphin-Tanguy, "Bond-graph Approach for Structural Analysis of MIMO Linear Systems", *Journal of the Franklin Institute*, Vol.328, No. 1, pp. 55-70, 1991.
- [6] C. Sueur y G. Dauphin- Tanguy, "Bond Graph Approach to Multi- Time Scale Systems Analysis", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 328, No. 5/6, pp. 1005-1026, 1991.
- [7] C. Pichardo, A. Rahmani, G. Dauphin-Tanguy, M. Delgado, "Bond Graph approaches to build order observers in linear time invariant systems", *4th Mathmod International Conference*, Vienne, Austriche, Febrero 2003.
- [8] C. Pichardo-Almarza, A. Rahmani, G. Dauphin- Tanguy, M. Delgado, "Luenberger Observers for Linear Time Invariant Systems Modelled by Bond Graph", para aparecer en *Journal of Mathematical and Computer Modelling of Dynamical System*, 2004.
- [9] Carlos Vera , José Manuel Mera, "Frequency Domain Analysis with Bond Graph", *Proceedings of ICBGM'99*, 4th International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, pp. 65-70, 1999.
- [10] Charles E. Rohrs, James L. Melsa y Donal G. Shultz, "Linear Control Systems", *Mc.Graw Hill*, 1993.

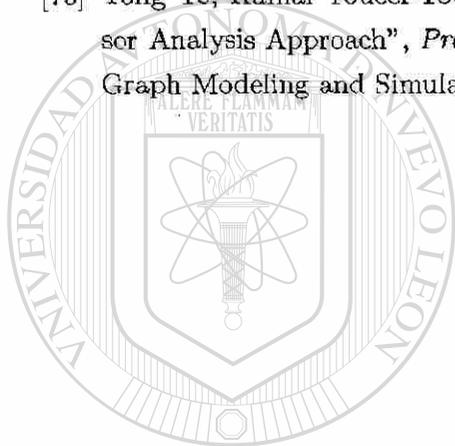
- [11] Chee-Mun Ong, "Dynamic Simulation of Electric Machinery", *Prentice-Hall*, 1998.
- [12] Chi-Tsong Cheng, "Linear System Theory and Design", *Hdt, Rinehart and Winston, Inc.*, 1970.
- [13] Daniel Gaude, Hervé Morel, Bruno Allard, Hamed Yahoui y Jean-Pierre Masson, "Bond Graph Model of the Induction Motor", *Proceedings of ICBGM'99*, 4th International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, pp. 317-322, 1999.
- [14] David G. Luenberger, "An Introduction to Observers", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-16, No. 6, pp. 596-602, Diciembre 1971.
- [15] David G. Luenberger, "Observers for Multivariable Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-11, No. 2, pp. 190-197, Abril 1996.
- [16] David G. Luenberger, "Observing the State of a Linear System", *IEEE Transactions on Military Electronics*, Vol. 8, pp. 74-80, Abril 1963.
- [17] Dean Karnopp, "State Functions and Bond Graph Dynamic Models for Rotary Multi-Winding Electrical Machines", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 328, No. 1, pp.45-54, 1991.
- [18] Dean C. Karnopp, Ronald C. Rosenberg, "System Dynamics: A Unified Approach", *Wiley John and Sons*, Abril 1975.
- [19] Dean C. Karnopp, Ronald C. Rosenberg, "Introduction to Physical Systems Dynamics", *Mc.Graw Hill*, 1983.
- [20] Dean Karnopp, "Bond Graphs in Control: Physical State Variables and Observers", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 308, no. 3, pp. 219-234, 1979.
- [21] Karnopp D., "Power and Energy in Linearized Physical Systems", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 303, No.1, pp.85-97, 1977.
- [22] Dean Karnopp, "State Functions and Bond Graph Dynamic Model for Rotary, Multi-winding Electrical Machines", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 328, No. 1, pp. 45-54, 1991.
- [23] Dietrich Sahn, "A Two-Axis, Bond Graph Model of the Dynamics of Synchronous Electrical Machine", *Journal of the Franklin Institute*, Vol.308, No. 3, Septiembre 1979.
- [24] Dragan Antic, Biljana Vidojkovic y Miljana Mladenovic, "An Introduction to Bond Graph Modelling of Dynamic Systems", *4th international Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services*, Vol.2, Octubre 1999.

- [25] F. Lorenz y J. Wolper, "Assigning Causality in the Case of Algebraic Loops", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 319, No. 1/2, pp.237-241, Enero/Febrero 1985.
- [26] F. R. Gantmacher, "The Theory of Matrices", *Chelsea Publishing Company*, 1974.
- [27] Forbes T. Brown, "Engineering System Dynamics", *Marcel Dekker Inc.*, 2001.
- [28] Francisco J. Rodriguez Ramírez, "Dinámica de Sistemas", *Editorial Trillas*, 1994.
- [29] G. Dauphin- Tanguy, A. Rahmani, C. Sueur, "Bond graph aided design of controlled systems", *Simulation Parctice and Theory, International Journal of the Federation of European Simulation Societies*, Vol. 7, pp. 493-513, 1999.
- [30] G. Duaphin- Tanguy y P. Borne, "Order Reduction of Multi-time Scale Systems Using Bond Graphs, the Reciprocal System and Sigular Perturbation Method", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 319, No. 1/2, pp. 157-171. Enero/Febrero 1985.
- [31] G. Dauphin-Tanguy, "Modelling of Physical Dynamical Systems by Bond Graph", *Linear Systems*, Editions Masson, París, Vol. 1, Capítulo 2, pp. 35-112.
- [32] G. Dauphin-Tanguy, Pierre Borne, Jean-Pierre Richard, Frédéric Rotella "Modélisation des Systèmes Physiques par bond Graph", *Editions Tecnip*, París, Vol.2, Capítulo 5, pp. 25-80.
- [33] Gene F. Franklin, J. David Powell y Abbas Emani-Naeini, "Feedback Control of Dynamic Systems", *Addison Wesley Publishing Company*, 1987.
- [34] González-A. Gilberto, R. Galindo, "Direct Control in Bond Graph by State Estimated Feedback for MIMO LTI Systems", *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Control Applications*, September 18-20, 2002, Glasgow, Scotland, U.K.
- [35] González-A. Gilberto, R. Galindo, J. de Leon, "A Direct Graph Procedure from Bond Graph for MIMO I/TI Systems", *Seventh International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV'02)*, Dec. 2002, Singapore.
- [36] González-A. Gilberto, R. Galindo, J. de Leon, "Hurwitz Stability Conditions for a LTI System: A Bond Graph Approach", *9th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR 2003)*, 25-28 August, Miedzydroje, Poland.
- [37] González-A. Gilberto, R. Galindo, "Steady-State Values for a Physical System with Bond Graph Approach", *9th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR 2003)*, 25-28 August, Miedzydroje, Poland.
- [38] González-A. Gilberto, J. de Leon, "Linearization in Bond Graph", *Sometido a 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC04)*, December 14-17, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, 2004.

- [39] González-A. Gilberto, R. Galindo, J. de Leon, "Steady-State Error for a Physical System with Bond Graph Approach", *Sometido a Complex Systems, Intelligence and Modern Technology Applications (CSIMTA)*, September 19-22, Cherbourg, France, 2004.
- [40] H. Morel, Ph. Lautier, B. Allard, J. P. Masson y H. Fraisse, "A Bond Graph Model of the Synchronous Motor", *Proceedings of ICBGM'97*, 3rd International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, pp. 227-232, 1997.
- [41] Hervé Morel, Bruno Allard, Anis Ammous y S. Ghedira, "Formal Causality Analysis", *Proceedings of ICBGM'99*, 4th International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, pp. 65-70, 1999.
- [42] J. D. Lamb, D. R. Woodall y G. M. Asher, "Bond Graphs I: Acausal equivalence", *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 72, No. 3, pp. 261-293, Febrero 1997.
- [43] J. D. Lamb, D. R. Woodall y G. M. Asher, "Bond Graphs II: Causality and Singularity", *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 73, No. 2, pp. 143-173, Marzo 1997.
- [44] J. D. Lamb, D. R. Woodall y G. M. Asher, "Bond Graphs III: Bond graphs and electrical networks", *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 73, No. 3, pp. 211-250, Marzo 1997.
- [45] J. E. Colgate and N. Hogan, "Robust Control of Dynamically interacting Systems", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 1 No.48, pp. 65-88, 1988.
- [46] Jannette Garcá-Gómez, Stéphane Rimaux y Marisol Delgado, "Design of an Adaptive Passivity-Based Controller for a Three Phase Induction Motor using Bond Graphs", *Proceedings of ICBGM'99*, 4th International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, pp. 311-316, 1999.
- [47] John S. Bay, "Fundamentals of Linear State Space Systems", *Mc.Graw Hill*, 1999.
- [48] John J. Grainger y William D. Stevenson Jr, "Análisis de Sistemas de Potencia", *Mc Graw-Hill*, 1988.
- [49] K. Sirivadha, E. F. Richards, M. D. Anderson, "The Application of Bond Graphs to Electrical Machinery and Power Engineering", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-102, No. 5, Mayo 1985.
- [50] Katsuhiko Ogata, "Dinámica de Sistemas", *Prentice-Hall*, 1987.
- [51] Katsuhiko Ogata, "Ingeniería de Control Moderna", *Prentice-Hall*, 1980.
- [52] P. Kundur, "Power System Stability and Control", *McGraw-Hill*, 1994.

- [53] P. M. Anderson, "Power System Control and Stability", *The IOWA State University Press*, 1977.
- [54] P. Kubiak, A. Azmani, G. Dauphin-Tanguy, "Determination of State Equation for Bond Graph Model with A Multiport Element", *Proceedings of ICBGM'99*, 4th International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, pp. 111-115, 1999.
- [55] P. E. Wellstead, "Physical System Modelling", *Academic Press*, London, 1986.
- [56] Paynter, H. M., "Analysis and Design of engineering systems", MIT Press, Cambridge, Mass, 1961.
- [57] Peter J, Gawthrop, "Physical Model-based Control: A Bond Graph Approach", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 332B, No. 3, pp. 285-305, 1995.
- [58] Peter Gawthrop, Lorcan Smith, "Metamodelling", *Prentice-Hall*, 1996.
- [59] Peter C. Breedveld, "Physical Systems Theory in Terms of Bond Graph", *Ph. D. Dissertation*, Twente University, Enschede, Holanda.
- [60] Riccardo Marino y Patrizio Tomei, "Nonlinear Control Design", *Prentice-Hall*, 1995.
- [61] S. H. Birkett y P. H. Roe, "The Mathematical Foundations of Bond Graphs- I. Algebraic Theory", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 326, No. 3, pp. 329-350, 1989.
- [62] S. H. Birkett y P. H. Roe, "The Mathematical Foundations of Bond Graphs- II. Duality", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 326, No. 5, pp. 691-708, 1989.
- [63] S. H. Birkett y P. H. Roe, "The Mathematical Foundations of Bond Graphs- III. Matroid Theory", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 327, No. 1, pp. 87-108, 1990.
- [64] S. H. Birkett, "On the special properties of graphic and co-graphic bond graphs", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 330, No. 4, pp. 735-761, 1993.
- [65] S. Rimaux, C. Suer, G. Dauphin-Tanguy, "Linearization of nonlinear systems modelled by bond graph", Second World Automation Congress WAC 96, Montpellier, France, pp 611-616, Mayo 1996.
- [66] Sergio Junco, "Real and Complex-Power Bond Graph Modelling of the Induction Motor", *Proceedings of ICBGM'99*, 4th International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, pp. 323-328, 1999.
- [67] Sergio Junco, "Lyapunov Second Method and Feedback Stabilization Directly on Bond Graphs", *Proceedings of ICBGM'01*, 5th International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, pp. 137-142, 2001.

- [68] Thomas Kailath, "Linear Systems", *Prentice-Hall*, 1980.
- [69] Wai-Kai Chen, "Applied Graph Theory", *North-Holland Publishing Company*, 1976.
- [70] Wilson J. Rugh, "Linear System Theory", *Prentice-Hall*, 1996.
- [71] X. Xia y S. Scavarda, "Adjoint System by Using the Representation of Bond Graph", *Proceedings of ICBGM'01*, 5th International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, pp. 15-20, 2001.
- [72] Y. K. Wong y A. B. Rad, "Bond Graph Simulations of Electrical Systems", *International Conference on Energy Management and Power Delivery*, Vol. 1, Marzo 1998.
- [73] Yong Ye, Kamal Youcef-Toumi, "Model Reduction with Physical Interpretation: A Phasor Analysis Approach", *Proceedings of ICBGM'99*, 4th International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, pp. 143-148, 1999.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



Apéndice A

Análisis de las Propiedades Estructurales del Modelado en Bond Graph

A.1 Introducción [29]

Uno de los pasos más difíciles del modelado es la identificación de los parámetros. Las propiedades estructurales son algunas propiedades que solamente dependen de la arquitectura del modelo y del tipo de fenómeno físico, tan importante en la fase del modelado, y no en los valores numéricos de los parámetros involucrados en sus leyes características. Por un ejemplo, el polinomio $p(s) = s^2[s + (a_1 - a_0)]$ tiene dos zeros nulos estructuralmente y un zero no-nulo estructuralmente (excepto para el valor numérico $a_1 = a_0$).

La Estructura de Unión de un Bond Graph contiene información energética en los tipos de elementos, que constituyen al sistema, y en como ellos están interconectados, para cualquier valor numérico de los parámetros.

A.2 Presentación de Herramientas Algebraicas y Gráficas [29]

A.2.1 Definición de la Estructura de Σ

Considerar el sistema continuo Lineal Invariante en el Tiempo (LIT) de dimensión finita Σ :

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

donde: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$; $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$; $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$; $E \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Definición A.1. Dos sistemas $\Sigma_0 = (A_0, B_0, C_0, D_0)$ y $\Sigma_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1)$ son *estructuralmente equivalentes* o tienen la misma estructura si:

1. Las matrices (A, B, C, D) de ambos sistemas tienen la misma dimensión.
2. Existe una matriz P con $A_2 = PA_1P^T$, $B_2 = PB_1$, $C_2 = C_1P^T$ y $D_2 = D_1$, tal que todos los valores cero de A_2, B_2, C_2 y D_2 son mapeados en los valores cero de A_0, B_0, C_0 y D_0 y viceversa.

La estructura de Σ está definida por la clase de equivalencia $[\Sigma]$ de sistemas estructuralmente equivalentes. Resultados estructurales son obviamente siempre verdaderos para los sistemas que pertenecen a la clase de equivalencia $[\Sigma]$, i.e., que tienen la misma estructura.

A.2.2 Controlabilidad/Observabilidad Estructural

Un sistema LTI es *completamente controlable en el estado* si y sólo si

$$\text{Rango } P = \text{Rango } [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n \quad (\text{A.2})$$

Definición A.2. El sistema $[A, B]$ es llamado *estructuralmente controlable en el estado* si existe un sistema completamente controlable en el estado de la misma estructura.

Definición A.3. El sistema $[A, C]$ es llamado *estructuralmente observable en el estado* si existe un sistema completamente observable en el estado de la misma estructura.

Las definiciones dadas anteriormente están en un sentido clásico de sistemas lineales [69], sin embargo, a continuación se describen propiedades fundamentales de éste tipo de sistemas en un enfoque de Bond Graph.

A.3 Rango Estructural [29]

Una definición de rango precisa y su determinación directa a partir de un Bond Graph es la siguiente:

Propiedad A.1

El orden n de un modelo es igual al número de elementos I y C en causalidad integral cuando una causalidad integral predefinida es asignada al modelo de Bond Graph.

Propiedad A.2

- El rango-Bond Graph (Rango-BG) q de la matriz A de espacio de estado deducida a partir del Bond Graph es igual al número de elementos I y C en causalidad derivativa cuando una causalidad derivativa predefinida es asignada al modelo de Bond Graph.
- El número $k = n - q$ de modos nulos estructuralmente es igual al número de elementos I y C los cuales permanecen en causalidad integral cuando una causalidad derivativa predefinida es asignada al modelo de Bond Graph.
- El rango-Bond Graph de la matriz A es igual al rango de la matriz $[S_{11}, S_{12}]$ definida en (2.25).

La primer parte de la Propiedad A.2 significa que, el modelo matemático asociado con el Bond Graph está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A^{-1}\dot{x} - A^{-1}Bu - A^{-1}Ed \\ y &= CA^{-1}\dot{x} - CA^{-1}Bu - CA^{-1}Ed + Du \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Si alguno de los elementos I y C no aceptan una asignación de causalidad derivativa sin crear un conflicto de causalidad en las uniones, significa que la matriz A no es invertible, i.e., no es de rango pleno.

El rango q es llamado Rango-BG debido a que es un rango estructural en el sentido de Teoría de Grafos [29], sin embargo, corresponde al rango numérico a causa de que toma en cuenta la dependencia del parámetro a a través de la causalidad.

La segunda parte de la Propiedad A.2 se obtiene del polinomio característico de la matriz A :

$$P(s) = \det(sI_n - A) = s^k (s^q + a_{q-1}s^{q-1} + \dots + a_1s + a_0) \quad (\text{A.4})$$

El punto de vista es estructural debido a que nosotros detectamos k estructuralmente modos nulos pero no en los casos donde a_0 sea nulo.

A.4 Diseño de la Arquitectura para Medición y Control [29]

La determinación del número, el tipo y la localización de sensores y actuadores en un modelo de Bond Graph está directamente relacionado al análisis de las propiedades de controlabilidad y observabilidad.

El camino clásico numérico consiste en calcular el rango numérico de la matriz de controlabilidad $C_o = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ y la matriz de observabilidad $O_b = [C^T \ (CA)^T \ \dots \ (CA^{n-1})^T]^T$, donde la matriz C reagrupa la parte de la matriz asociada con lo medible para ser variables controladas y la matriz asociada a salidas de interés no medibles. El rango de estas matrices no depende de los valores numéricos de los parámetros y es consecuentemente robusto.

Propiedad A.3

Para que un modelo de Bond Graph sea *estructuralmente controlable* (o *observable*) dos condiciones tienen que ser satisfechas:

1. Existe al menos una trayectoria causal enlazando cada elemento I y C en causalidad integral con una fuente de control MS_e o MS_f (con un sensor D_e o D_f) en el Bond Graph en causalidad integral predefinida.
2. Todos los elementos I y C en causalidad integral en el Bond Graph en causalidad integral predefinida aceptan una causalidad derivativa cuando una causalidad derivativa predefinida es asignada en el modelo de Bond Graph. Si no es satisfecha directamente, una dualización de algunas fuentes MS_e o MS_f (de algunos sensores D_e o D_f) tiene que hacerse para transformar las causalidades integrales remanentes.

La Propiedad A.3, parte 1, es la condición de posibilidad de realización de la Teoría de Grafos [29].

La Propiedad A.3, parte 2 corresponde a la determinación del rango estructural de la matriz $[AB]$ compuesta de la matriz A concatenada con la matriz B .

Si el rango-BG $[A] = n$, entonces el rango-BG $[AB] = n$ para cualquier B . Significa que el modelo es controlable con un actuador sencillo, la selección y localización depende solamente de la posibilidad de realización y consideraciones tecnológicas.

Si el rango-BG $[A] = n - k$, entonces el rango-BG $[AB] = n$ si B es seleccionada de tal forma que sus columnas sean linealmente independientes de las columnas de A . Significa que para el modelo a ser controlado, k actuadores son necesarios y ellos tienen que estar bien localizados, lo cual es probado por dualización.

A.5 Trayectoria Causal-Lazo Causal [31, 32]

Un Bond Graph no solamente muestra la estructura topológica de un sistema sino también su organización causal, pues indica las relaciones de causa y efecto, esta estructura causal da la noción de *Trayectoria Causal*, *Lazo Causal* y *Lazo Mason* que a continuación se explican:

- Una *Trayectoria Causal* de una estructura de unión es una secuencia alternante de bonds y nodos tal que:
 1. Para una gráfica acausal, es decir, una gráfica que no tiene la causalidad aplicada a sus elementos o bonds, la secuencia forma una cadena sencilla.
 2. Todos los nodos en la secuencia tienen una completa y correcta causalidad, es decir, se cumplen las condiciones del Procedimiento 2.1.
 3. Dos nodos de una trayectoria causal tienen en el mismo nodo orientaciones causales opuestas.
- Un *Lazo Causal* es una trayectoria causal sencilla cerrada.
- Un *Lazo Mason* es un lazo causal de la salida de un puerto a la entrada del mismo puerto sin trazar el mismo bond en la misma dirección más de una vez.

El polinomio característico está dado por:

$$D(s) = 1 - \sum_j L_{1j}(s) + \sum_k L_{2k}(s) - \sum_l L_{3l}(s) + \dots \quad (4.14)$$

donde $L_{rk}(s)$ es el producto de las ganancias de lazo del k^{th} conjunto del r^{th} lazo de Mason, los cuales no se tocan unos con otros.

La $L_{ij}(s)$ ganancia del j^{th} lazo de Mason está definida por:

$$L_{ij}(s) \triangleq (-1)^{n_0+n_1} \prod_{j,k} \left(m_j \circ \frac{1}{m_j} \right)^2 \left(r_k \circ \frac{1}{r_k} \right)^2 \prod_h G_h \quad (4.15)$$

donde n_0 y n_1 representan el número total de cambios de orientación de los bonds, respectivamente en las uniones-0, al seguir a la variable de flujo; y en las uniones-1 al seguir a la variable de esfuerzo; $\prod_{j,k}$ denota el producto de m_j ó $\frac{1}{m_j}$ y r_k ó $\frac{1}{r_k}$ que son los módulos de los elementos de TF y de GY , los cuales son incluidos en la trayectoria causal, dependiendo de sus causalidades y \prod_h designa el producto de ganancias de los elementos que componen el lazo.

Apéndice B

Estabilidad de Sistemas LTI MIMO

B.1 Introducción

Si la respuesta impulsional de un sistema es absolutamente integrable, entonces el sistema es estable BIBO. La condición de estabilidad en términos de funciones de transferencia es también dada en esta sección. Se estudian los conceptos de *equilibrio de estado*, *estabilidad en el sentido de Lyapunov* y *estabilidad asintótica* [68, 12].

B.2 Estabilidad Externa (Estabilidad BIBO) [12]

Considerar un sistema LTI MIMO con la siguiente descripción entrada/salida:

$$y(t) = \int_0^t G(t-\tau)u(\tau) d\tau = \int_0^t G(\tau)u(t-\tau) d\tau \quad (\text{B.1})$$

donde $g(t)$ es la respuesta impulsional del sistema. En una descripción de la forma (B.1), el par entrada/salida del sistema satisface linealidad, causalidad y propiedades de invariancia en el tiempo. Además, se asume que el sistema está relajado en $t = 0$.

Teorema B.1 [12]

Un sistema LTI MIMO relajado en $t = 0$ y descrito por:

$$y(t) = \int_0^t G(t-\tau)u(\tau) d\tau \quad (\text{B.2})$$

es estable Entrada Acotada/Salida Acotada (BIBO) si y sólo si,

$$\int_0^\infty |G(t)| dt \leq k < \infty \quad (\text{B.3})$$

para cualquier k .

La prueba de este Teorema se da en [12].

Teorema B.2 [12]

Considerar un LTI MIMO, relajado en $t = 0$ cuya entrada $u(t)$, y salida $y(t)$ están relacionadas por:

$$y(t) = \int_0^t G(t-\tau)u(\tau) d\tau$$

si $\int_0^t \|G(t)\| dt \leq k < \infty$ para cualquier constante k , entonces se tiene lo siguiente

1. Si $u(t)$ es una función periódica con periodo T , entonces $y(t)$ tiende a una función periódica con el mismo periodo.
2. Si $u(t)$ es acotada y tiende a una constante, entonces $y(t)$ tiende a una constante.
3. Si $u(t)$ es de energía finita, entonces $y(t)$ también es de energía finita.

La prueba de este Teorema se da en [12].

B.3 Estabilidad en el Sentido de Lyapunov o Estabilidad Interna o Criterio de Estabilidad de Lyapunov [68]

Estabilidad interna se refiere a la estabilidad de una realización de un sistema. La realización del sistema,

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad y(t) = Cx(t) \quad (\text{B.4})$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ y $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$, es internamente estable o estable en el sentido de Lyapunov si la solución de

$$\dot{x} = Ax(t) \quad x(t_0) = x_0 \quad t \geq t_0 \quad (\text{B.5})$$

tiende hacia cero cuando $t \rightarrow \infty$ para cualquier x_0 .

Examinando la solución en el dominio de la transformada de Laplace,

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x_0 \quad (\text{B.6})$$

y notando que

$$t^k e^{-at} \leftrightarrow (s+a)^{-k} \quad (\text{B.7})$$

donde \longleftrightarrow denota la *Transformada de Laplace* y su inversa; podemos ver que la realización es estable si y sólo si,

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0 \quad (\text{B.8})$$

donde $\{\lambda_i(A)\}$ son los eigenvalores de A .

Las ecuaciones (B.6) y (B.8) indican que una realización estable internamente siempre tiene una respuesta impulsional que satisface la condición (4.3); en otras palabras, también es externamente estable. Sin embargo, lo contrario no es cierto.

Teorema B.3 (Lyapunov) [68]

Una matriz A es una matriz de estabilidad, es decir, $\operatorname{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0$ para todos los eigenvalores de A , si y sólo si para cualquier matriz (simétrica) definida positiva Q existe una matriz P definida positiva (simétrica) que satisface

$$A'P + PA = -Q \quad (\text{B.9})$$

La prueba de este Teorema se da en [68].

Este teorema es raramente utilizado para verificación numérica directa de estabilidad. En lugar de esto, se tienen los siguientes corolarios.

Corolario 4.1 (Kalman) [68]

En el Teorema anterior, podemos tomar Q semidefinida positiva, teniendo en cuenta que $x'(t)Qx(t)$ no es idénticamente cero a lo largo de cualquier solución de $\dot{x}(t) = Ax(t)$.

Las bases físicas de estos resultados son las siguientes. La cantidad:

$$V[x(t)] = x'(t)Px(t) \quad (\text{B.10}) \quad \textcircled{R}$$

puede ser considerada como energía generalizada asociada con la realización. En un sistema estable la energía debe decaer con el tiempo, esto es, de (B.5), (B.9) y (B.10),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V[x(t)] &= \dot{x}'(t)Px(t) + x'(t)P\dot{x}(t) \\ &= x'(t)[A'P + PA]x(t) \\ &= -x'(t)Qx(t) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

concluimos que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 4.2 [68]

Si A es una matriz de estabilidad, entonces la ecuación de Lyapunov

$$A'P + PA + Q = 0$$

tiene una solución P única para toda Q .

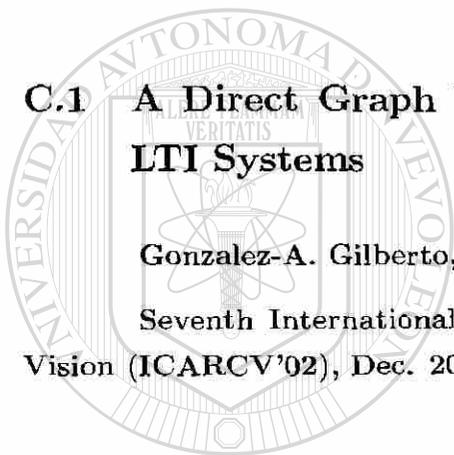
Apéndice C

Publicaciones

C.1 A Direct Graph Procedure from Bond Graph for MIMO LTI Systems

Gonzalez-A. Gilberto, R. Galindo, J. de Leon

Seventh International Conference on Control, Automation, Robotics and
Vision (ICARCV'02), Dec. 2002, Singapore.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



A Direct Graph Procedure from Bond Graph for MIMO LTI Systems

Gonzalez-A. Gilberto^{1,2}, R. Galindo¹, J. de Leon¹

¹University of Nuevo Leon, Department of Electrical Engineering
66451 San Nicolas de los Garza, N.L. Mexico (+52)8183294020 Ext.5773

²University of Michoacan, Faculty of Electrical Engineering
58030, Morelia, Michoacan, Mexico (+52)4433265776

Abstract

A physical Multi-Input-Multi-Output (MIMO) Linear Time Invariant (LTI) system formed by a variety of energy types and modelled graphically in Bond Graph is considered. A single direct graphical form to represent this physical system is presented. This modified Coates graph is based on its Bond Graph. It allows to propose a direct graphical procedure getting a state space model. Also, the characteristic polynomial is obtained from the proposed Coates Graph. An electro-mechanical example is given.

Keywords. -Bond Graph, Coates Graph, Physical Control, Modelling Tools

1 Introduction

A Bond Graph is a model of a dynamic system where a collection of components interact with each other through energy ports. A Bond Graph consists of subsystems linked by lines to show the energetic connections. It can represent a variety of energy types and can describe how the power flows through the system [2, 7]. Bond graph was established by [1]. The idea was developed how a powerful tool of modelling [2, 3].

On the other hand, a linear graph is a set of connected lines. The lines represent symbolically the elements of the system. The line segments are conventionally called edges and the end of a set of edges is termed a node. The Graph Theory [7] has been used to find the Coates Matrix, its determinant, characteristic polynomial, etc.

Our main motivation, is to apply some of the Graph Theory technics in a physical MIMO LTI system modelled on Bond Graph, with the objective to reach a linear graph representation. Also, a graph methodology from its Bond Graph toward this linear graph to obtain a representation in state variables is presented. In [8] a work to obtain a linear graph from its Bond Graph has developed, but it is not represented on its key vectors [4] and therefore it does not allow to apply it to solve other problems like the tackled on this paper.

Section 2 gives the modelling by Bond Graph of a physical system. A procedure to obtain a graph from its Bond Graph which represents a modified Coates

matrix is presented in section 3. In section 4 a graphical representation of a MIMO system is found. Section 5 presents a graph procedure to find the A , B , C and D matrices, to get a state space model. Section 6 applies a result of [7] to get a characteristic polynomial of the system found in section 5. An example is given in section 7. Finally, section 8 gives our conclusions.

2 Bond Graph Model [3, 4]

Consider a multiport LTI system which has the key vectors of figure 1.

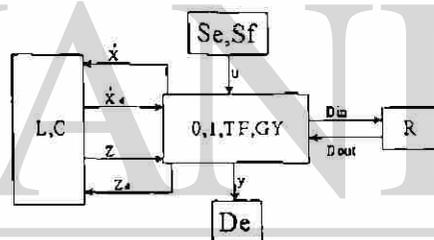


Fig. 1. Key vectors of a Bond Graph

Here, (Se, Sf), (L, C) and (R) denote the source, the storage and the dissipation fields, (De) the detector and ($0, I, TF, GY$) the junction structure with transformers, TF , and gyrators, GY . The state $x \in R^n$ is composed of energy variables of effort, e , and flow, f , with integral causality, $x_d \in R^m$ denotes the vector for elements with derivative causality, $u \in R^p$ the plant input, $y \in R^q$ the plant output, $z \in R^n$ the co-energy, $z_d \in R^m$ the derivative co-energy and $D_{in} \in R^r$ and $D_{out} \in R^r$ are a mixture of e and f showing the energy exchanges between the dissipation field and the junction structure. The relations of the storage and dissipation fields are:

$$z = Fx \quad (1)$$

$$D_{out} = LD_{in} \quad (2)$$

$$z_d = F_d x_d \quad (3)$$

where L is a diagonal matrix composed of R and $1/R$ coefficients, and F and F_d are composed of $1/L$ and $1/C$ coefficients. The relations of the junction struc-

ture are:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$z_d = -S_{14}^T z \quad (5)$$

where the junction structure of the system is given by:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

The entries of S take the values inside the set $\{0, \pm 1, \pm m, \pm n\}$ where m and n are transformer and gyrator modules; S_{11} and S_{22} are square skew-symmetric submatrices and S_{12} and S_{21} are submatrices each other negative transpose. The state equation is [5]:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (7)$$

$$y = Cx + Du$$

where

$$A = E^{-1}(S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad (8)$$

$$B = E^{-1}(S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (9)$$

$$C = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad (10)$$

$$D = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (11)$$

being

$$E = I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^TF \quad (12)$$

$$M = (I - LS_{22})^{-1}L \quad (13)$$

Next section presents a linear graph for the system of figure 1.

3 Getting a Graph from a Bond Graph

A procedure to obtain a graphical representation of a Bond Graph, which represents a physical system is presented.

For a LTI system, from (1)-(6), a junction structure equation is obtained:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = S' \begin{bmatrix} x \\ D_{in} \\ u \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$S' = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S'_{22} & S_{23} & 0 \\ S'_{31} & S'_{32} & S_{33} & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$x_d = -S'_{14}x \quad (16)$$

where

$$S'_{11} = S_{11}F; S'_{21} = S_{21}F; S'_{31} = S_{31}F; \quad (17)$$

$$S'_{12} = S_{12}L; S'_{22} = S_{22}L;$$

$$S'_{32} = S_{32}L; S'_{14} = F_d^{-1}S_{14}^TF$$

Let suppose that (15) is a Coates Matrix. Then, it is shown in figure 2. Also, from (12) and (17) we obtain:

$$E^{-1} = (I + S_{14}S'_{14})^{-1} \quad (18)$$

Now, replacing (18) on the graph of figure 2, we get to the graph shown in figure 3.

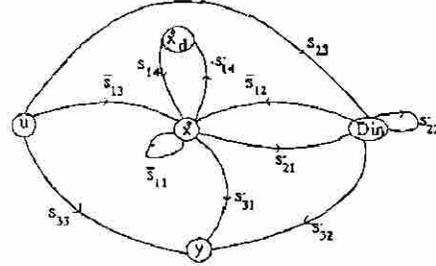


Fig. 2. Linear Planar System Graph

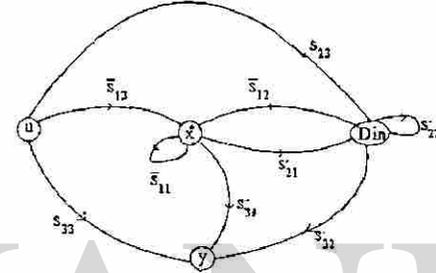


Figura 3. Modified Coates Graph.

The representation of the graph of the figure 3 is given by:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} \\ S'_{21} & S'_{22} & S_{23} \\ S'_{31} & S'_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ D_{in} \\ u \end{bmatrix} \quad (19)$$

where

$$\bar{S}_{11} = E^{-1}S'_{11}; \bar{S}_{12} = E^{-1}S'_{12}; \bar{S}_{13} = E^{-1}S'_{13} \quad (20)$$

The representation (19)-(20) includes the effect of the elements with derivative causality in the elements with integral causality, having a structure more compact of the physical system.

We can rewrite (19) giving:

$$[\dot{x}^T \ D_{in}^T \ u^T \ y^T]^T = \hat{S} [x^T \ D_{in}^T \ u^T \ y^T]^T \quad (21)$$

where \hat{S} represents a modified Coates Matrix [7].

If \dot{x} is used instead of x in (19) or (21), the elements of the first column are the different by a factor $\frac{1}{s}$ where s is the Laplace operator. In what follows, we omit this factor because for LTI systems does not affect the elements interconnection and for getting directly A and C of (7) as shown in the following section.

4 Representation of a MIMO System

An analysis of the graphical representation of a multivariable system is presented. In figure 3, we have a

representation of a physical system on a graph, from its bond graph and junction structure matrix. Next, we introduce a general form of the physical system representation in Bond Graph to study the interconnection properties as shown in figure 4.

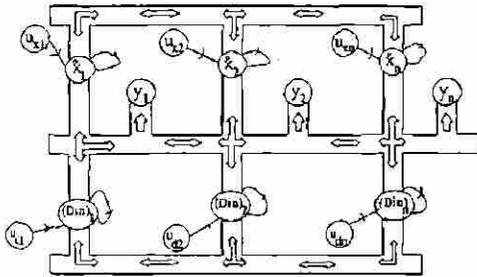


Fig. 4. Representation of a MIMO system.

Consider the scheme of figure 3, note that the node \dot{x} is a set of nodes $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dots, \dot{x}_n$; the same is true for u, y and D_{in} as shown the matrix representation of figure 4. The interconnection of the nodes in figure 4, is represented by \Leftrightarrow indicating a set of edges that can have double sense.

Figure 5, represents the interconnection between two nodes 1 and i of figure 4 with all possible combinations. In figure 5, $\alpha_{11}, \alpha_{1i}, \alpha_{i1}, \alpha_{ii}, \beta_{11}, \beta_{1i}, \beta_{i1}, \beta_{ii}, \gamma_{11}, \gamma_{1i}, \gamma_{i1}, \gamma_{ii}, P_{11}, P_{1i}, P_{i1}$ and P_{ii} denote the edges transmittances. From (13), figure 3 and 5, we have:

$$P = (I - S_{22}^{-1})^{-1} := x^{-1} \quad (22)$$

The submatrix P has two cases: $S_{22} = 0$ or $S_{22} \neq 0$

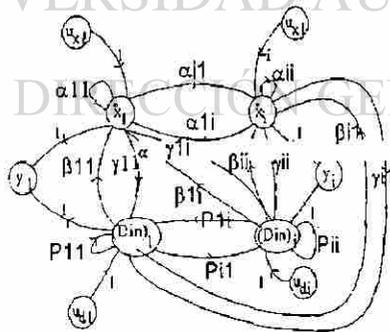


Fig. 5 MIMO System of two nodes.

5 Getting the Matrices A, B, C and D

Consider that figure 3 corresponds to a physical system of n states, r dissipative elements, with p inputs and q outputs. In the following, a procedure for the direct calculation of the matrices A, B, C and D that represents a MIMO LTI system of (7) is presented.

This method is obtained from the reduced graph of figure 5, whose generalization is the scheme of figure 4 and the matrix representation of figure 3.

5.1 Getting a Graph of the Matrix A

To find A the arriving and leaving edges from the nodes of \dot{x} and their directed closed paths (directed circuits) are considered, as shown in,

Procedure 1

1. Decompose A in the sum of two components:

$$A = A_x + A_d \quad (23)$$

where the first component A_x is formed by the edges transmittances between nodes of the different states derivatives giving their elements out of the diagonal and transmittances of the self-loops of these nodes, forming their diagonal elements of this matrix, i.e., for figure 5

$$A_x = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1i} \\ \alpha_{i1} & \alpha_{ii} \end{bmatrix} \quad (24)$$

The second component A_d is formed by the edges transmittances between nodes of \dot{x} and nodes of D_{in}

$$A_d = \begin{bmatrix} (A_d)_{11} & (A_d)_{1i} \\ (A_d)_{i1} & (A_d)_{ii} \end{bmatrix} \quad (25)$$

2. Find the diagonal elements of A_d , by means of:

- Begin in the nodes \dot{x}_1 and $(D_{in})_1$. Fix the edge that arrives to \dot{x}_1 respective to $(D_{in})_1$. Construct all possible combinations of directed circuits through by the hinge edge, beginning and finishing in \dot{x}_1 and satisfying:

- A circuit must have only one edge of D_{in} . If the circuit is formed by an output and input edge of the same node of D_{in} , it will have the self-loop of D_{in} .

- Continue with the following edge that arrives to node \dot{x}_1 respective to D_{in} , and so on, until consider the last edge that arrives to \dot{x}_1 respective to D_{in} .

- Use the previous procedure for the next nodes of \dot{x} but the input and output edges must be the actual node.

- Each term of each element of A_d , is given by:

$$\begin{aligned} \text{Term of the} &= (\delta_1)(\delta_2)(\delta_3) & (26) \\ \text{element } (A_d)_{hk} & & \\ h &= 1, 2, \dots, n; & k = 1, 2, \dots, r \end{aligned}$$

δ_1 = Transmittance of the edge h which arrives to \dot{x}_h

δ_2 = Transmittance of the self-loop of $(D_{in})_k$ or transmittance of the edge $(D_{in})_k$ which connects $(D_{in})_k$ with $(D_{in})_{k+1}$

δ_3 = Transmittance of the edge k which leaves of \dot{x}_k

1. For figure 5, we have: $(A_d)_{11} = \beta_{11}P_{11}\gamma_{11} + \beta_{11}P_{11}\gamma_{11} + \beta_{11}P_{11}\gamma_{11} + \beta_{11}P_{11}\gamma_{11}$; $(A_d)_{ii} = \beta_{11}P_{11}\gamma_{11} + \beta_{11}P_{11}\gamma_{11} + \beta_{11}P_{11}\gamma_{11} + \beta_{11}P_{11}\gamma_{11}$
3. Find the elements out of the diagonal of the matrix A_d , using the procedure giving in step 2, but the terms of the elements $(A_d)_{hk}$ ($h \neq k$), must be formed by directed paths from node h to node k .

For the figure 5, $(A_d)_{1i} = \beta_{11}P_{11}\gamma_{11} + \beta_{11}P_{11}\gamma_{11} + \beta_{11}P_{11}\gamma_{11} + \beta_{11}P_{11}\gamma_{11}$; $(A_d)_{i1} = \beta_{11}P_{11}\gamma_{11} + \beta_{11}P_{11}\gamma_{11} + \beta_{11}P_{11}\gamma_{11} + \beta_{11}P_{11}\gamma_{11}$

Note that if the submatrix $S'_{22} = 0$, then $P = I$ and thus $\delta_2 = 1$

5.2 Getting a Graph of the Matrix B

The edges transmittances of the nodes of the u are considered in B . The procedure to find B is:

Procedure 2

1. Decompose B in two components:

$$B = \begin{bmatrix} B_x & B_d \end{bmatrix} \quad (27)$$

The first component B_x is formed by the edge transmittance which connects an input node with the state derivative node directly. For the example, in figure 5: $B_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

The second component B_d is formed by the edges transmittances which connect an input node with a node of \dot{x} through the node of the D_{in} . For figure 5, we have:

$$B_d = \begin{bmatrix} (B_d)_{11} & (B_d)_{1i} \\ (B_d)_{i1} & (B_d)_{ii} \end{bmatrix} \quad (28)$$

2. Get the terms of the diagonal elements of B_d , by:

- Begin in the node, u_{d1} . Construct all directed path of the possible combinations of the edges transmittances that connect u_{d1} with \dot{x}_1 , through by $(D_{in})_1$, satisfying:

A path must have only one edge of D_{in} and if only has an edge between \dot{x}_1 and $(D_{in})_1$, it has the self-loop of $(D_{in})_1$, so each term is given by

$$\begin{aligned} \text{Term of the} \\ \text{element } (B_d)_{hk} &= (\eta_1)(\eta_2)(\eta_3) \quad (29) \\ h &= 1, 2, \dots, r; k = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

η_1 = Transmittance of the edge h which arrives to \dot{x}_h

η_2 = Transmittance of the self-loop of $(D_{in})_k$ or transmittance of the edge which connects $(D_{in})_k$ to $(D_{in})_{k+1}$

η_3 = Transmittance of the edge k that goes out of u_{Dk}

1. For example in figure 5, we have $(B_d)_{11} = \beta_{11}P_{11} + \beta_{11}P_{11}$; $(B_d)_{ii} = \beta_{11}P_{11} + \beta_{11}P_{11}$

2. Obtain the terms of the elements that are out of the diagonal of B_d , in a similar way that for their diagonal elements, but for the terms of element $(B_d)_{hk}$, take the arrival node \dot{x}_k and the output node u_{dk} and for the term of element $(B_d)_{kh}$ is the opposite, the previous is resumed using (29) for $h \neq k$.

For example in figure 5: $(B_d)_{1i} = \beta_{11}P_{11} + \beta_{11}P_{11}$; $(B_d)_{i1} = \beta_{11}P_{11} + \beta_{11}P_{11}$

5.3 Getting a Graph of the Matrix C

To find C , edges transmittances which arrives to nodes of y and goes out of nodes of \dot{x} are considered, as shown in,

Procedure 3

1. Decompose C in two components:

$$C = C_x + C_d \quad (30)$$

The first component C_x , is formed by the edges transmittances which connects an output node with node of \dot{x} directly. For example in figure

$$5: C_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

The second component, C_d , is formed by the edges transmittances which connect an output node with a node of \dot{x} through the node of D_{in} .

2. Get terms of the diagonal elements of C_d :

- Begin by the first output node y_1 . Construct all directed paths of the possible combinations of the edges transmittances that connects y_1 with \dot{x}_1 through $(D_{in})_1$, satisfying:

A path must have only one edge of D_{in} and if only exists a edge between \dot{x}_1 and $(D_{in})_1$, it take the self-loop of $(D_{in})_1$ and so on, with the rest of outputs. Thus, each term is given by:

$$\begin{aligned} \text{Term of the} \\ \text{element } (C_d)_{hk} &= (\rho_1)(\rho_2)(\rho_3) \quad (31) \\ h &= 1, 2, \dots, q; k = 1, 2, \dots, r \end{aligned}$$

ρ_1 = Transmittance of the edge h which arrives to y_h

ρ_2 = Transmittance of the self-loop of $(D_{in})_k$ or transmittance which connects edge $(D_{in})_k$ to edge $(D_{in})_{k+1}$

ρ_3 = Transmittance of the edge k that leaves of \dot{x}_k

1. For example in figure 5: $(C_d)_{11} = P_{11}\gamma_{11} + P_{11}\gamma_{11}$; $(C_d)_{ii} = P_{ii}\gamma_{ii} + P_{ii}\gamma_{ii}$

The system representation is obtained from (19):

$$\begin{aligned} \bar{S}_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & -\frac{1}{M} \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} & \bar{S}_{12} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \\ S'_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & -\frac{1}{M} \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & -\frac{1}{M} \end{bmatrix} & S'_{22} &= 0 \\ S'_{31} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & -\frac{1}{M} \end{bmatrix} & S'_{32} &= 0 \end{aligned} \quad (37)$$

The graph respective to the equation (37) is shown in figure 8.

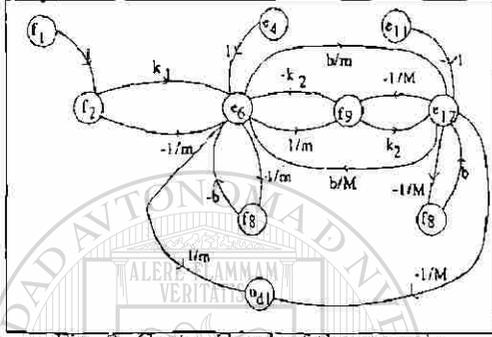


Fig. 8. Coates Graph of the example.

The dynamic model in state variables is given by (7), we use section V, noting that from (37), $S'_{22} = 0$, giving $P = I$. Now, from (24), we have:

$$A_x = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 & \frac{b}{M} \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & -\frac{1}{M} \\ 0 & \frac{b}{m} & k_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

From (25) we have:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (A_d)_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (A_d)_{44} \end{bmatrix} \quad (39)$$

To get $(A_d)_{22}$ and $(A_d)_{44}$ from (26) we obtain:

$$(\delta_1)_{22} = -b; (\delta_2)_{22} = 1; (\delta_3)_{22} = \frac{1}{m} \quad (40)$$

substituting (40) into (26) gives:

$$(A_d)_{22} = -\frac{b}{m} \quad (41)$$

Analogously:

$$(\delta_1)_{44} = b; (\delta_2)_{44} = 1; (\delta_3)_{44} = -\frac{1}{M} \quad (42)$$

substituting (42) in (26) gives:

$$(A_d)_{44} = -\frac{b}{M} \quad (43)$$

So, from (23), (38), (39), (41), and (43), A is given by:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ k_1 & -\frac{b}{m} & -k_2 & \frac{b}{M} \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & -\frac{1}{M} \\ 0 & \frac{b}{m} & k_2 & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \quad (44)$$

From (27) B is obtained, noting that $B_d = 0$ and $B = B_x$:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Noting that $C_d = 0$, from (30) C is given by:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & -\frac{1}{M} \end{bmatrix} \quad (46)$$

Finally,

$$D = 0 \quad (47)$$

Note that with a little of experience and skill A , B , C , and D are obtained directly, easy and quickly from the Coates Graph, as shown in the previous example. The same is true in general if $E = I$ and $S_{22} = 0$.

8 Conclusions

A graph from Bond Graph that represents a physical system on key vectors, is obtained. A graphical procedure to obtain the state space representation of a dynamic MIMO LTI model is presented.

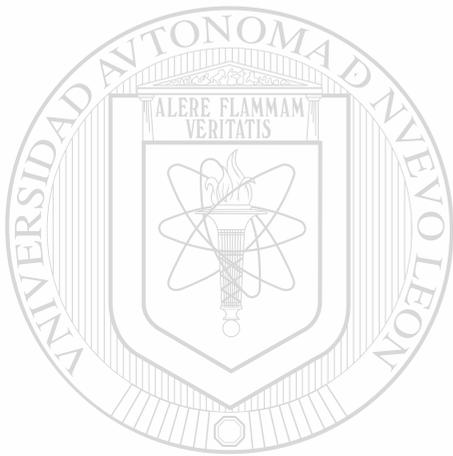
References

- [1] H.M. Paynter, *Analysis and design of engineering systems*, MIT press, Cambridge, Mass, 1961.
- [2] Dean C. Karnopp and Ronald C. Rosenberg, *System Dynamics: A Unified Approach*, Wiley, John & Sons, 1975.
- [3] P.E. Wellstead, *Physical System Modelling*, Academic Press, London, 1979.
- [4] C. Suer and G. Dauphin-Tanguy, "Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems", *J. Franklin Inst.*, vol. 328, No.1 pp. 55-70, 1991.
- [5] Y.K. Wong and A.B. Rad, "Bond Graph Simulations of Electrical Systems", *IEEE Catalogue No.* 98E137, (1998).
- [6] Wai-Kai Chen, *Applied Graph Theory: Graphs and Electrical Networks*, 1976, North-Holland Publishing Company.
- [7] S.H. Birkett and P.H. Roe, "The Mathematical Foundations of Bond Graphs -I. Algebraic Theory", *J. of the Franklin Institute*, vol. 326, no. 3, pp. 329-350, 1989.

C.2 Hurwitz Stability Conditions For a LTI System: A Bond Graph Approach

Gonzalez-A. Gilberto, R. Galindo, J. de Leon

9th IEEE International Conference On Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR 2003), 25-28 August 2003, Miedzyzdroje, Poland.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



HURWITZ STABILITY CONDITIONS FOR A LTI SYSTEM: A BOND GRAPH APPROACH

GONZALEZ-A. GILBERTO^{1,2}, R. GALINDO¹, J. DE LEON¹

¹University of Nuevo Leon, Department of Electrical Engineering 66451 San Nicolas de los Garza, N.L. Mexico (+52)8183294020 Ext.5773

²University of Michoacan, Faculty of Electrical Engineering 58030, Morelia, Michoacan, Mexico (+52)4433265776

Abstract. A direct graphical procedure to know the stability conditions for a physical Linear Time Invariant (LTI) system is presented. It is based on the Bond Graph model of the physical system and on a linear graph of the characteristic polynomial of the system. The proposed linear graph represents a Coates matrix and a Hurwitz matrix. It is shown, that using the Hurwitz criterion the stability conditions can be obtained directly from this linear graph. This methodology is applied for open and closed loop systems through the examples given.

Key Words. Bond Graph, Coates Graph, Hurwitz Matrix, Physical Control, Modelling Tools, Stability.

1 Introduction

One of the most basic requirements of any control system is stability. A LTI system is stable if all the poles of its transfer function or its realization (A, B, C, D) lie in the left half plane[1]. For these requirement the system model is needed. Thus, Bond Graph methodology is applied to find the model.

Bond Graph deals with a graphical approach to system modelling, the essential feature of the Bond Graph approach is the representation of energetic interactions between systems and/or system components by a single line. It can represent many energy types and describes how the power flows through the system[2, 3].

Moreover, given a Bond Graph model of a system, we can find the coefficients of the characteristic polynomial using causal paths [5] or a Coates matrix[11].

If we have the characteristic polynomial of the system we can apply the Routh-Hurwitz criterion to know the system stability, but this criterion is an algebraic method that for large systems with many parameters become an abstract and difficult task. Also, for control objectives it is desirable a methodology closer to the physical system, i.e., for control in the physical domain.

So, we present an easy and direct graphical procedure to get the stability conditions of the physical system using graph theory. This methodology does not need to know the transfer function or its realization (A, B, C, D) .

Section II resumes the Bond Graph modelling of a physical system. A procedure to obtain a graph from its Bond Graph which represents a modified Coates matrix is given in section III. The methodology to obtain the characteristic polynomial using causal paths or a Coates graph is described in section IV. In section V we present a graphical procedure to get a linear graph of the characteristic polynomial. The linear graph represents a Coates matrix of the Hurwitz matrix. Stability conditions for a physical system are presented. Examples are given in section VI. Finally, section VII gives our conclusions.

2 Bond Graph Model [3, 5, 6]

Consider a multiport LTI system which has the key vectors of figure 1.

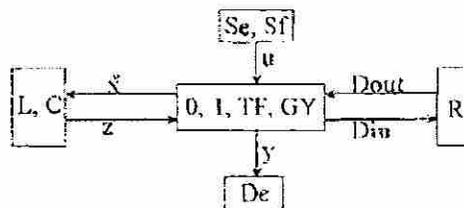


Figure 1. Key vectors of a Bond Graph

Here, (Se, Sf) , (L,C) and (R) denote the source, the storage and the dissipation fields, (De) the detector and $(0, 1, TF, GY)$ the junction structure with transformers, TF, and gyrators, GY.

The state $x \in R^n$ is composed of energy variables of effort, e , and flow, f , with integral causality, $u \in R^p$ the plant input, $y \in R^q$ the plant output, $z \in R^n$ the co-energy and $D_{in} \in R^r$ and $D_{out} \in R^r$ are a mixture of e and f showing the energy exchanges between the dissipation field and the junction structure.

The relations of the storage and dissipation fields are:

$$\begin{aligned} z &= Fx & (1) \\ D_{out} &= LD_{in} & (2) \end{aligned}$$

where L is a diagonal matrix composed of R and $1/R$ coefficients, and F is composed of $1/L$ and $1/C$ coefficients.

The relation of the junction structure is:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (3)$$

where the junction structure of the system is given by:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

The entries of S take the values inside the set $\{0, \pm 1, \pm m, \pm r\}$ where m and r are transformer and gyrator modules; S_{11} and S_{22} are square skew-symmetric submatrices and S_{12} and S_{21} are submatrices each other negative transpose.

The linear graph and the Coates Matrix of [11] for the system of figure 1 is summarized in the next section.

3 Getting the Graph from Bond Graph [10]

Consider the scheme of figure 1. The procedure to obtain the graphical representation of a Bond Graph, is summarized for integral causality.

From (1)-(4):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = S' \begin{bmatrix} x \\ D_{in} \\ u \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$S' = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S_{13} \\ S'_{21} & S'_{22} & S_{23} \\ S'_{31} & S'_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (6)$$

where

$$\begin{aligned} S'_{11} &= S_{11}F; S'_{21} = S_{21}F; S'_{31} = S_{31}F & (7) \\ S'_{12} &= S_{12}L; S'_{22} = S_{22}L; S'_{32} = S_{32}L \end{aligned}$$

Let suppose that S' is a Coates matrix. The graphical representation of (5) is shown in figure 2.

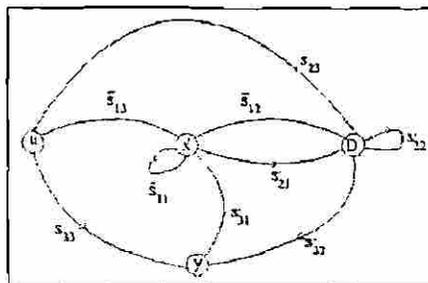


Figure 2. Linear Planar System Graph.

We can rewrite (5) as:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ u \\ y \end{bmatrix} = \hat{S} \begin{bmatrix} x \\ D_{in} \\ u \\ y \end{bmatrix} \quad (8)$$

The matrix \hat{S} represents a modified Coates matrix [11]. If \dot{x} is used instead of x in (8) the elements of the first column are different by a factor $\frac{1}{s}$, where s is the Laplace operator. We omit this factor because for LTI systems does not affect the elements interconnection.

Next, we show how to get the characteristic polynomial using a linear graph or a Bond Graph of a physical system.

4 Getting the Characteristic Polynomial

The stability of a system can be determined knowing the characteristic polynomial. This polynomial can be found analytically or graphically using Bond Graphs or Coates Graphs.

4.1 Coates Graph [11]

Without loss generality, we obtain a sectional subgraph with Coates matrix A_c of the linear graph of figure 2 neglecting the inputs and outputs. So, we obtain the linear graph and the Coates matrix A_c and the determinant is given by [8]:

$$\det(\lambda I - A_c) = \lambda^n + \sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} \left[\sum_{A_c[V_k]} \sum_{u} (-1)^{L_h} f(h_{uk}) \right] \quad (9)$$

where h_{uk} are the 1-factors u^{th} in $A_c[V_k]$, $A_c[V_k]$ is a sectional subgraph of k -nodes of A_c and L_h is the number of directed circuits in h_{uk} .

4.2 Causal Path-Causal Loop [5]

A Bond Graph shows not only the topological structure of a system but also its causal organization, by pointing out the cause and effect relations, this causal structure gives the notion of causal path. A junction structure causal path is an alternating sequence

of bonds and nodes such that: a) for the acausal graph, the sequence forms a single chain, b) all nodes in the sequence have complete and correct causality, c) two nodes from a causal path have at the same node opposite causal orientations. A causal loop is a closed single path. A Mason loop is a causal loop from the output of a port back to the input of the same port, without tracing the same bond in the same direction more than once.

The characteristic polynomial is given by:

$$D(s) = 1 - \sum_j L_{1j}(s) + \sum_k L_{2k}(s) - \sum_l L_{3l}(s) + \dots \quad (10)$$

where $L_{rk}(s)$ is the product of the loop gains of k^{th} set of r Mason loops which does not touch one to another. The $L_{1j}(s)$ loop gain of the j^{th} Mason loop is defined by:

$$L_{1j}(s) = (-1)^{n_0+n_1} \prod_{j,k} \left(m_j \delta \frac{1}{m_j} \right)^2 \left(r_k \delta \frac{1}{r_k} \right)^2 \prod_{g} \quad (11)$$

where n_0 and n_1 represent the total number of changes of orientations for the bonds, respectively at the 0-junctions while following the flow variable, and at the 1-junctions while following the effort variable; $\prod_{j,k}$ denotes the product of m_j , $\frac{1}{m_j}$ and r_k , $\frac{1}{r_k}$ that are the modules of the TF and GY elements which are included in the causal path, depending on their causalities and \prod_g designs the product of gains of elements composing the loop.

Next section presents a graphical procedure to get the stability conditions of a system.

5 Getting the Stability Conditions

A procedure to get a linear graph which represents the characteristic polynomial is presented. It is used to get the stability conditions using the Hurwitz matrix in a graphical way.

To construct the stability Coates graph $G_c(D)$, we present the following:

Procedure A.

1.- Consider that the characteristic polynomial is given by:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n \lambda^0 = 0 \quad (12)$$

where $a_0 = 1$

2.- The number of nodes is equal to the polynomial order. Construction each node a self-loop as shown in figure 3:

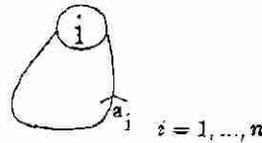


Figure 3. Self loop of a node.

3.- Construct edges between different nodes using the following figures 4 and 5.

A) Edges to the right. Initially $j = 1$ $h = 0$

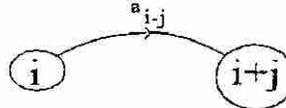


Figure 4. Edges to the right.

For $i = j, \dots, k$; where $k = n - 2j + h + 1 \forall i \leq k$
If $i = k$ then $j \leftarrow j + 1$ and $h \leftarrow h + 1$ and we increase i until $j < k$, where $x \leftarrow y$ denotes that the y value is assigned to x .

B) Edges to the left. Initially $j = 1$, $h = 0$.

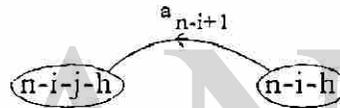


Figure 5. Edges to the left.

For $i = 1, \dots, k$; where $k = n - j - 1 - h \forall i \leq k$
If $i = k$ then $j \leftarrow j + 1$ and $h \leftarrow h + 1$ and we increase i until $j < k$. ■

As shown by the following examples the previous procedure generates a linear graph which has a single structure.

The graph $G_c(D)$ represents a Coates graph of the Hurwitz matrix. Therefore, we can give the stability conditions, using Hurwitz Criterion [1] The necessary and sufficient condition that all roots of (12) lie in the left half plane is that the Hurwitz determinants D_k , $k = 1, 2, \dots, n$, must all be positive.

So, from graph theory[11] the Hurwitz determinant D_n is given by:

$$\det D = D_n = (-1)^n \sum_h (-1)^{L_h} f(h) \quad (13)$$

where h is a 1-factor in $G_c(D)$ and L_h denotes the number of directed circuits in h and $f(h)$ represents the product of the weights associated with the edges of h .

In according to Hurwitz criterion, we have to get n determinants, so, we propose the following procedure:

Procedure B.

1.- Calculate D_n from (13).

2.- The determinant D_{n-1} is obtained from the graph $G_c(D)$, removing the n -node and using (13) with $n-1$, then from the graph $G_c(D)$.

3.- Removing the n and $n-1$ nodes, and using (13) we calculate D_{n-2} and so on, to reach D_1 . ■

6 Examples

Example 1.

Consider the mechanical system of figure 6.

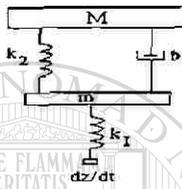


Figure 6. Mechanical system of example 1

In figure 7, we show the Bond Graph of this system.

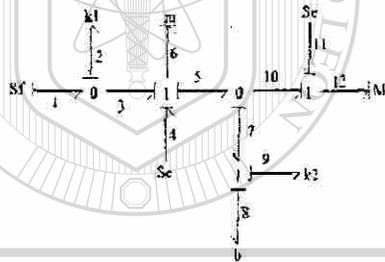


Figure 7. Bond graph of the example 1.

The key vectors are:

$$x = \begin{bmatrix} f_{a_2} \\ e_{a_8} \\ f_{a_9} \\ e_{a_{12}} \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \\ f_9 \\ e_{12} \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \\ e_9 \\ f_{12} \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} f_1 \\ e_4 \\ e_{12} \end{bmatrix}; y = f_8; D_{in} = f_8; D_{out} = e_8$$

where f is the velocity and e is the force in each element of the mechanical system; f_{a_2} and f_{a_9} are the translational displacements in k_1 and k_2 respectively; e_{a_8} and $e_{a_{12}}$ are the translational momentums m and M respectively; f_1 is the input velocity and e_4 and e_{12} are the gravity force under m and M respectively.

The constitutive relations for the elements are:

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \\ e_9 \\ f_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{a_2} \\ e_{a_8} \\ f_{a_9} \\ e_{a_{12}} \end{bmatrix}$$

$$e_8 = bf_8 \quad (14)$$

The junction structure of the system is given by (4), where

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{12} = -S_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; S_{22} = S_{23} = S_{32} =$$

$$S_{33} = 0$$

$$S_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; S_{31} = S_{21}$$

The linear graph of the system is shown in figure 8

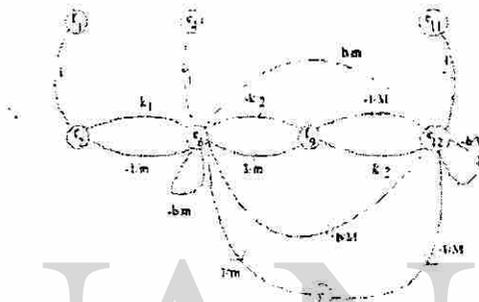


Figure 8. Linear Graph of the example 1.

From (9) the characteristic polynomial is:

$$\det(\lambda I - A_c) = \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 \quad (15)$$

The following coefficients are obtained from (9) using figure 8. For a_1 the 1-factors are shown in figure 9.

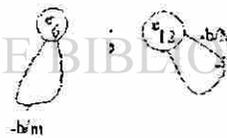


Figure 9. Sectional Subgraph of 1-node.

$$a_1 = \frac{b}{m} + \frac{b}{M} \quad (16)$$

For a_2 use figure 10



Figure 10. Sectional Subgraph of 2-nodes.

$$a_2 = \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} + \frac{k_2}{M} \quad (17)$$

For a_3 use figure 11

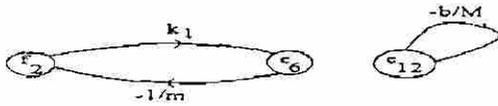


Figure 11. Sectional Subgraph of 3-nodes.

$$a_3 = \frac{k_1 b}{mM} \quad (18)$$

Finally a_4 use figure 12

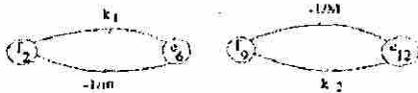


Figure 12. Sectional Subgraph of 4 nodes.

$$a_4 = \frac{k_1 k_2}{mM} \quad (19)$$

Using the procedure A given on section V, we have the stability Coates graph of figure 13.

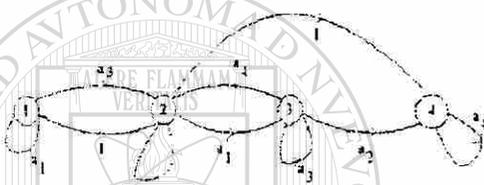


Figure 13. Stability Coates graph.

We can find the Hurwitz Determinants from Procedure B.

Consider figure 14, D_4 is given by



Figure 14 Sectional Subgraph of 4-nodes.

$$D_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 - a_3^2 a_4 - a_1^2 a_4^2 \quad (20)$$

From figure 15, D_3 is:



Figure 15. Sectional Subgraph of 3-nodes.

$$D_3 = a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 \quad (21)$$

Figure 16, yields D_2

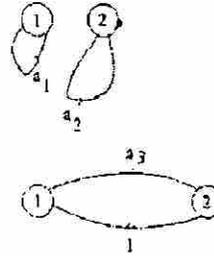


Figure 16. Sectional Subgraph of 2-nodes.

$$D_2 = a_1 a_2 - a_3 \quad (22)$$

Finally, D_1 is obtained from figure 17.



Figure 17. Sectional Subgraph of 1-node.

$$D_1 = a_1 \quad (23)$$

Substituting (16) to (19) in (20) to (23) we have the stability conditions for the physical system:

$$D_4 = \frac{b^2 k_1^3 k_2}{m^4 M^2} > 0 \quad (24)$$

$$D_3 = \frac{b^2 k_1^2}{m^3 M} > 0 \quad (25)$$

$$D_2 = \frac{b(k_1 + k_2)}{m^2} + \frac{2bk_2}{mM} + \frac{bk_2}{M^2} > 0 \quad (26)$$

$$D_1 = \frac{b}{m} + \frac{b}{M} > 0 \quad (27)$$

This graphical procedure, allow us to know the performance of the system in a single form through the acknowledge of the stability conditions and system parameters. Moreover, this procedure show how the system parameters are reflected in the physical system.

Example 2.

Consider an output feedback where k_c is the feedback gain, for the system of example 1. The linear graph of the closed loop is shown in Figure 18.

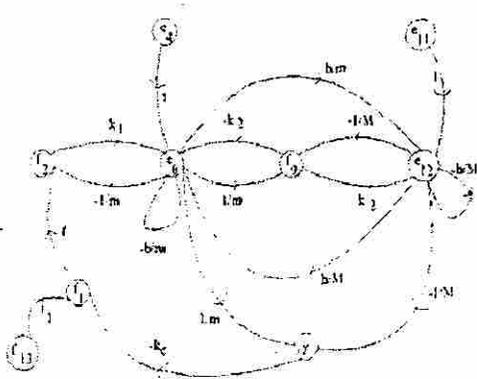


Figure 18. Linear graph of the closed loop system.

Reducing the graph of figure 18, we have figure 19.

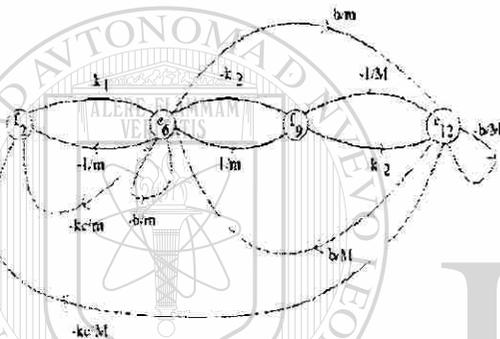


Figure 19. Linear graph reduced of the closed loop system.

The characteristic polynomial for this example is given by (15), and its coefficients are obtained in the same way as for example 1. So, the coefficients are obtained using section IV:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{b}{m} + \frac{b}{M} \\ a_2 &= \frac{k_1 + k_2 + k_1 k_c}{m} + \frac{k_2}{M} \\ a_3 &= \frac{k_1 b + 2k_1 k_c b}{mM} \\ a_4 &= \frac{k_1 + k_2 + 2k_1 k_2 k_c}{mM} \end{aligned}$$

The stability Coates graph is shown in figure 13 and from (20) to (23) we have the stability conditions:

$$\begin{aligned} D_1 &= b \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) > 0 \\ D_2 &= b \left(\frac{k_1 + k_2 + k_1 k_c}{m^2} + \frac{k_2}{M^2} + \frac{k_2 - k_1 k_c}{mM} \right) > 0 \\ D_3 &= \frac{k_1^2 b^2}{m^2 M} \left(\frac{1 + 3k_c + 2k_c^2}{m} - \frac{k_c + 2k_c^2}{M} \right) > 0 \\ D_4 &= \frac{b^2 k_1^3 k_2}{m^3 M^2} \left(\frac{1 + 7k_c + 4k_c^3 + 6k_c^2}{m} - \frac{k_c + 4k_c^3 + 6k_c^2}{M} \right) > 0 \end{aligned}$$

This example shows that, the proposed graphical procedure lets to get the conditions for the controller gain, guaranteeing stability in the closed loop system.

7 Conclusions

A graph that represents the Hurwitz matrix of a LTI system is proposed. A graphical procedure to determine the stability conditions in a physical LTI system is presented. This methodology does not require to know the transfer function or its realization (A, B, C, D). The results can be applied to open or closed loop systems.

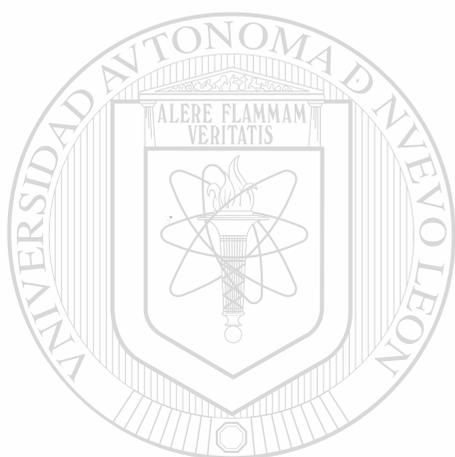
References

- [1] B. C. Kuo "Automatic Control Systems", 6th ed. Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, (1991).
- [2] Dean C. Karnopp, Ronald C. Rosenberg, "System Dynamics: A Unified Approach", Wiley, John & Sons, April (1975).
- [3] P.E. Wellstead, "Physical System Modelling", Academic Press, London, (1979).
- [4] D.C. Karnopp, "Bond graphs in control: Physical state variables and observers", J. Franklin Institute, 308(3) pp. 221-234, (1979).
- [5] G. Dauphin-Tanguy, Serge Scavarda "Modelisation des Systemes physiques par bond graphs", Systemes Lineaires Ouvrage Collectif. Editions Masson, Paris, Vol 1, Chap 2, pp 35-112, (1993).
- [6] C. Suer, G. Dauphin-Tanguy, "Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems", J. Franklin Inst., vol. 328, No.1 pp. 55-70, (1991).
- [7] Chi-Tsong Chen "Linear System Theory and Design", Third ed., Oxford University Press, (1999).
- [8] Gene F. Franklin, J. David Powell, Abbas Emami-Naeini, "Feedback Control of Dynamic Systems" Addison Wesley Publishing Company, (1988).
- [9] P.J. Gawthrop, "Physical Model-Based Control: A Bond Graph Approach", J. of the Franklin Institute, 332B(3), pp. 285-305, (1995).
- [10] Gonzalez-A. Gilberto, R. Galindo, J. de Leon, "A Direct Graph Procedure from Bond Graph for MIMO LTI Systems", ICARCV'02, pp.880-885. Singapore, Dec. (2002).
- [11] Wai-Kai Chen, "Applied Graph Theory: Graphs and Electrical Networks", (1976), North-Holland Publishing Company.

C.3 Direct Control in Bond Graph by State Estimated Feedback for MIMO LTI Systems

Gonzalez-A. Gilberto, R. Galindo

IEEE International Conference on Control Applications, September 18-20, Glasgow, Scotland, U.K., 2002.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



Direct Control in Bond Graph by State Estimated Feedback for MIMO LTI Systems

González-A. Gilberto^{1,2*}, R. Galindo^{1 †}

¹University of Nuevo Leon, Department of Electrical Engineering
 66451 San Nicolás de los Garza, N.L., Mexico. (+52)83294020 Ext. 5773 Fax (+52)83764514

² University of Michoacan, Faculty of Electrical Engineering
 58030, Morelia, Michoacan, Mexico (+52)3265776

Abstract. A state estimated feedback based on Bond Graphs for Multivariable Linear Time Invariant (LTI) Systems is proposed. A direct graphical technique (Bond Graph) to obtain the closed loop system in state variables using the open loop graph is presented. Structures for the controller and the observer directly in closed loop are presented. Therefore, the control in the physical or in the Bond Graph domains is realized. The dynamic assignment problem is solved and examples are given.

Keywords. Bond Graph, State Feedback, Observer, Dynamic Assignment, Direct graph Control

I. INTRODUCTION

A Bond Graph is a model of a dynamic system where a collection of components interact with each other through energy ports. These components are placed in the system which exchanges energy. A Bond Graph consists of subsystems linked by lines to show the energetic connections. A Bond Graph can represent a variety of energy types and describes how the power flows through the system [10, 11, 12].

Bond Graph was established by [1]. The idea was developed by [2] and [3] how a powerful tool of modelling. Control applications in Bond Graph specially another approach for state feedback with observer can be found in [4, 5]. Also, in [11] a non based join junction structure approach can be found.

The control objective is to get a realizable controller and to consider the physical characteristics of the system under control. So, the extension of Bond Graph for control techniques, not only for modelling, allows to design the control from the physical model, assuring a realizable controller.

The main key points of the Bond Graph methodology are: a model containing the energetic junction structure, i.e., the system architecture; different energy domains are covered and the coupling of subsystems are

allowed; the cause to effect relations of each element are obtained graphically; and the state variables have a physical meaning.

Section II gives the Bond Graph model of a physical system using the junction structure. The state estimated feedback control is described in section III [8]. The closed loop state space and observer models are obtained in Section IV, using the information of the open loop junction structure. These models are obtained directly from open loop Bond Graph model. Also, an equivalence to the traditional state estimated feedback is given which allows to solve the dynamic assignment problem. Section V proposes the direct gains design in the Bond Graph for the controller and the observer. The obtained results are applied in section VI, for an electrical system. Finally, conclusions are given in section VII.

II. BOND GRAPH MODEL [3, 6, 7]

Consider the multiport LTI system scheme which has the key vectors of figure 1.

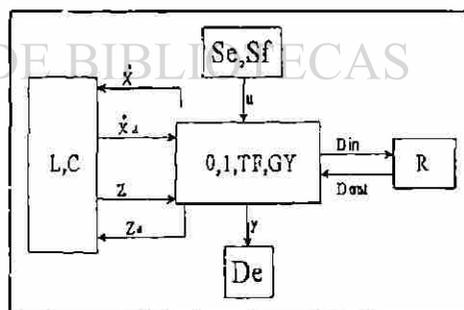


Figure 1. Key vectors of a Bond Graph

In figure 1, (Se, Sf), (L,C) and (R) denote the source the storage and the dissipation fields, (De) the detector and (0, 1, TF, GY) the junction structure with transformers, TF, and gyrators, GY.

The state $x \in \mathbb{R}^n$ and $x_d \in \mathbb{R}^m$ are composed of energy variables for effort, e , and flow, f , with integral and

*gilmichga@yahoo.com.mx

†rgalindo@gama.fime.usnl.mx

derivative causality respectively, $u \in \mathbb{R}^p$ denotes the plant input, $y \in \mathbb{R}^q$ the plant output, $z \in \mathbb{R}^n$ the co-energy, $z_d \in \mathbb{R}^m$ the derivative co-energy and $D_{in} \in \mathbb{R}^r$ and $D_{out} \in \mathbb{R}^r$ are a mixture of e and f showing the energy exchanges between the dissipation field and the junction structure.

The relations of the storage and dissipation fields are:

$$z = Fx \quad (1)$$

$$D_{out} = LD_{in} \quad (2)$$

$$z_d = F_d x_d \quad (3)$$

The relations of the junction structure are:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$z_d = -S_{14}^T z \quad (5)$$

where the junction structure of the system is given by:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

The entries of S take values inside the set $\{0, \pm 1, \pm m, \pm n\}$ where m and n are transformer and gyrator modules; S_{11} and S_{22} are square skew-symmetric matrices and S_{12} and S_{21} are matrices each other negative transpose. The state equation is [8, 9]:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (7)$$

$$y = Cx + Du$$

where

$$A = E^{-1}(S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad (8)$$

$$B = E^{-1}(S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (9)$$

$$C = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad (10)$$

$$D = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (11)$$

being

$$E = I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^TF \quad (12)$$

$$M = (I - LS_{22})^{-1}L \quad (13)$$

Next section gives the control by state estimated feedback [8]. This scheme is used in section IV for the Bond Graph approach.

III. CONTROL BY STATE ESTIMATED FEEDBACK

Once the model in state variables is had, the control law by state feedback can be applied. However, often x is not easy to know or to measure. So, a solution is to use an observer as shown in figure 2

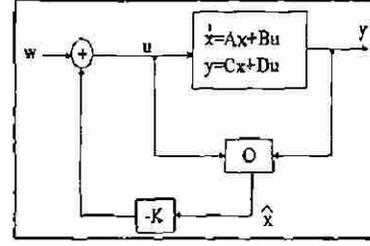


Figure 2. Closed loop estimator

The control law by state estimated feedback is:

$$u = -K\hat{x} + w \quad (14)$$

where $w \in \mathbb{R}^p$ denotes the input reference, K the feedback gain and $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ the estimated state.

From (14) and (7), the closed loop system is:

$$\dot{x} = Ax - \tilde{A}\hat{x} + Bw \quad (15)$$

$$y = Cx - \tilde{C}\hat{x} + Dw$$

where

$$\tilde{A} = BK \quad (16)$$

$$\tilde{C} = DK \quad (17)$$

The asymptotic observer of Luenber is [8]:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(y - \hat{y}) \quad (18)$$

$$\hat{y} = C\hat{x} + Du$$

where H is the observer gain.

Substituting (14) into (18) yields:

$$\dot{\hat{x}} = \tilde{A}\hat{x} + \tilde{B}w + \tilde{A}x \quad (19)$$

$$\hat{y} = \tilde{C}\hat{x} + \tilde{D}w$$

where

$$\tilde{A} = A - BK - HC \quad (20)$$

$$\tilde{B} = HC \quad (21)$$

$$\tilde{C} = C - \tilde{C}; \tilde{B} = B; \tilde{D} = D \quad (22)$$

In section IV, we get (15) and (19) directly open loop Bond Graph model.

IV. CONTROL BY BOND GRAPH

A direct graphical technique for an open loop model represented by Bond Graph is presented. The closed loop and the observer Bond Graph models are obtained directly from the open loop model. We assume that all the elements have linear constitutive relations.

The control general structure for state estimated feedback in Bond Graph is shown in figure 3.

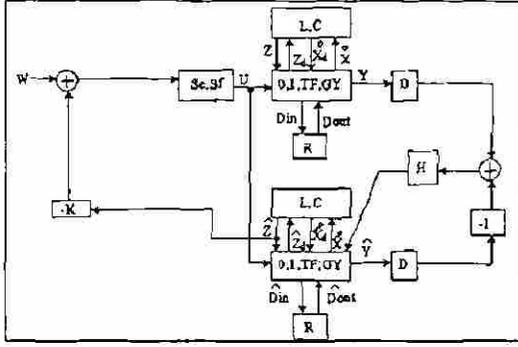


Figure 3. Closed loop with observer in Bond Graph

The objective to represent the model and the observer in block diagrams is to obtain the feedback system model from S in (4). This let us to know, the change of S due to the observer and the state feedback, with the purpose to assign the pole placements of the system in according to the control gain. Next Lemmas 1 and 2 show that \tilde{A} , \tilde{C} , \tilde{A} , \tilde{A} and \tilde{C} of the closed loop system can be obtained from equations (8) to (11) using S . There are two cases due to the elements place in the Bond Graph. The first case when the dissipation field (R) is located before the storage field (L, C), otherwise is the second case.

Lemma 1

Consider the control scheme of figure 3. The structure of the closed loop system is given by:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ w \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} - \hat{S} \begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{D}_{out} \\ w \\ \hat{x}_d \end{bmatrix} \quad (23)$$

where the junction structure of the observer reflected to the system is:

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{S}_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{S}_{31} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

1) If $\hat{S}_{21} = 0$, $\hat{S}_{11} \neq 0$ and/or $\hat{S}_{31} \neq 0$, then,

$$\tilde{A} = E^{-1} \hat{S}_{11} F \quad (25)$$

$$\tilde{C} = \hat{S}_{31} F \quad (26)$$

2) If $\hat{S}_{11} = \hat{S}_{31} = 0$ and $\hat{S}_{21} \neq 0$, then,

$$\tilde{A} = E^{-1} S_{12} M \hat{S}_{21} F \quad (27)$$

$$\tilde{C} = S_{32} M \hat{S}_{21} F \quad (28)$$

being

$$E = I + S_{14} F_d^{-1} S_{14}^T F \quad (29)$$

$$M = L(I - S_{22} L)^{-1} \quad (29)$$

Proof. For LTI systems, substituting (1), (3), (5) into the first line of (23), we have:

$$\dot{\hat{x}} = E^{-1} (S_{11} z + S_{12} D_{out} + S_{13} w - \hat{S}_{11} \hat{z}) \quad (30)$$

from (2) and the second line of (23), and from (2) gives:

$$D_{in} = (I - S_{22} L)^{-1} (S_{21} z + S_{23} w - \hat{S}_{21} \hat{z}) \quad (31)$$

taking (1), (2), (13) and (31) into (30):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= E^{-1} [(S_{11} + S_{12} M S_{21}) F x + (S_{13} + S_{12} M S_{23}) w \\ &\quad - E^{-1} (\hat{S}_{11} + S_{12} M \hat{S}_{21}) F \hat{x}] \end{aligned} \quad (32)$$

Comparing with (15) with (32)

$$\tilde{A} = E^{-1} (\hat{S}_{11} + S_{12} M \hat{S}_{21}) F \quad (33)$$

Equation (33) proves both cases (25) and (27).

To get (26) and (28), taking (1), (2), (29) and (31) into the third line of (23) we have:

$$\begin{aligned} y &= (S_{31} + S_{32} M S_{21}) F x + (S_{33} + S_{32} M S_{23}) w \\ &\quad - (\hat{S}_{31} + S_{32} M \hat{S}_{21}) F \hat{x} \end{aligned} \quad (34)$$

Comparing (15) with (34):

$$\tilde{C} = (\hat{S}_{31} + S_{32} M \hat{S}_{21}) F \quad (35)$$

Equation (35) proves both cases (26) and (28). ■

Note that (32) and (34) show that \tilde{A} of (33) and \tilde{C} of (35) are the matrices which maps the observer into the system

Lemma 2

Consider the control scheme of figure 3. The structure of the observer is given by:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{z}} \\ \hat{D}_{in} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \hat{S}' \begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{D}_{out} \\ w \\ \hat{x}_d \end{bmatrix} + S' \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ w \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} \quad (36)$$

where the junction structure of the system reflected to the observer is:

$$S' = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

The observer model is:

$$\hat{A} = \hat{E}^{-1} (\hat{S}'_{11} + \hat{S}'_{12} M' \hat{S}'_{21} - S'_{12} M \hat{S}_{21}) F \quad (38)$$

$$\hat{B} = \hat{E}^{-1} (\hat{S}'_{13} + \hat{S}'_{12} M' \hat{S}'_{23} + S'_{12} M S_{23}) \quad (39)$$

$$\hat{\bar{A}} = \hat{E}^{-1} (S'_{11} + S'_{12} M S_{21}) F \quad (40)$$

$$\hat{\bar{C}} = (\hat{S}'_{13} + \hat{S}'_{12} M' \hat{S}'_{21}) F \quad (41)$$

$$\hat{D} = \hat{S}'_{33} + \hat{S}'_{32} M' \hat{S}'_{23} \quad (42)$$

where

$$\hat{E} = I + \hat{S}'_{14} F_d^{-1} (\hat{S}'_{14})^T F \quad (43)$$

$$M' = L (I - \hat{S}'_{22} L)^{-1} \quad (44)$$

Proof. Substituting (1), (3) and (5) into the first line of (36), gives:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \hat{E}^{-1} (\hat{S}'_{11} \dot{z} + \hat{S}'_{12} \hat{D}_{out} + \hat{S}'_{13} w) + \\ &\hat{E}^{-1} (\hat{S}'_{11} z + \hat{S}'_{12} D_{out} + \hat{S}'_{13} w) \end{aligned} \quad (45)$$

taking the estimated of (2) into (36), we have:

$$\hat{D}_{in} = (I - \hat{S}'_{22} L)^{-1} (\hat{S}'_{21} F \hat{x} + \hat{S}'_{23} w) \quad (46)$$

substituting the estimated of (1), (2), (30) and (45) into (44):

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \hat{E} \left(-\hat{S}'_{11} + \hat{S}'_{12} M' \hat{S}'_{21} - \hat{S}'_{12} M \hat{S}_{21} \right) F \hat{x} + \\ &\hat{E}^{-1} \left(\hat{S}'_{13} + \hat{S}'_{12} M' \hat{S}'_{23} + \hat{S}'_{12} M \hat{S}_{23} \right) w + \\ &\hat{E}^{-1} \left(\hat{S}'_{11} + \hat{S}'_{12} M' \hat{S}_{21} \right) F x \end{aligned} \quad (47)$$

comparing (19) and (47) we have (38), (39) and (40). To get (41) and (42), substituting (1), (2) and (46) into the third line of (36), we get:

$$\hat{y} = \left(\hat{S}'_{31} + \hat{S}'_{32} M' \hat{S}'_{21} \right) F \hat{x} + \left(\hat{S}'_{32} M' \hat{S}'_{23} + \hat{S}'_{33} \right) w \quad (48)$$

comparing (19) and (48), we get (41) and (42). Note that the matrices \hat{B} and \hat{D} can calculate directly from (22).

V. GAINS DESIGN

Next, expressions for the controller and observer gains are presented.

Theorem 1

Let a Multivariable LTI system with linear constitutives relations in the control scheme of the figure 3.

1) If $\hat{S}_{21} = 0$, $\hat{S}_{11} \neq 0$ and/or $\hat{S}_{31} \neq 0$, then, the direct-graph gain for the controller in the Bond graph is given by:

$$\hat{S}_{11} = EBKF^{-1} \quad (49)$$

2) If $\hat{S}_{11} = \hat{S}_{31} = 0$ and $\hat{S}_{21} \neq 0$, then, the direct-graph gain for the controller \hat{S}_{21} is obtained equating the elements of:

$$S_{12} M \hat{S}_{21} = EBKF^{-1} \quad (50)$$

Moreover, the direct-graph gain for the observer S'_{11} and/or S'_{12} and/or S'_{13} is given by:

$$\hat{E}^{-1} (S'_{11} + S'_{12} M \hat{S}_{21}) F = HC \quad (51)$$

being $E = I + S_{14} F_d^{-1} S_{14}^T F$, $\hat{E} = I + \hat{S}'_{14} F_d^{-1} (\hat{S}'_{14})^T F$ and $M = L (I - S_{22} L)^{-1}$

Proof. The control and the observer K and H gains can be determined using the separation principle [8, 9], i.e., the state feedback and the state estimator designs can be carried out independently. The characteristic equation [8, 9] of (16) is given by:

$$\det (sI - A - BK) = 0 \quad (52)$$

For the first case, from (25) of Lemma 1 and (52) we get:

$$\det (sI - A - E^{-1} \hat{S}_{11} F) = 0 \quad (53)$$

Comparing (52) and (53) proves (49). For the second case, from (27) of Lemma 1 and (52), we have:

$$\det (sI - A - E^{-1} S_{12} M \hat{S}_{21} F) = 0 \quad (54)$$

Comparing (52) and (54) using (49) proves (50). On the other hand, for the observer of (18) we obtain:

$$\det (sI - A + HC) = 0 \quad (55)$$

Therefore, from (21), (40) of Lemma 2 and (55):

$$\det [sI - A + \hat{E}^{-1} (S'_{11} + S'_{12} M \hat{S}_{21}) F] = 0 \quad (56)$$

Comparing (55) and (56) proves (51). We can determine the control and observer gains selecting Hurwitz polynomials for (53), (54) and (56) respectively.

VI. EXAMPLE

Consider the DC motor scheme, and its Bond Graph which are shown in figure 4.

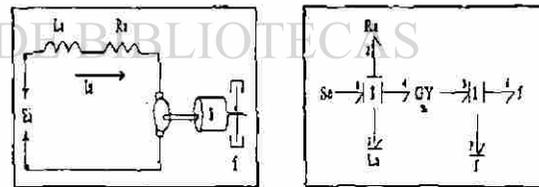


Figure 4. DC motor scheme and its Bond graph.

The key vectors are:

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} e_{a3} \\ e_{a7} \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_7 \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \end{bmatrix}; y = f_6 \\ u &= e_1; D_{in} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix}; D_{out} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

where e_2 and e_3 denote voltages; f_2 and f_3 currents in L_a and R_a respectively; e_6 and e_7 torques; f_6 and f_7 speeds in J and F respectively; e_{a3} flux linkage in L_a ; and e_{a7} rotational momentum in J .

The constitutive relations for the elements are:

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{a3} \\ e_{a7} \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$F_d = 0 \quad (59)$$

The input-output relation for the gyrator is:

$$\begin{bmatrix} e_4 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_5 \\ f_5 \end{bmatrix} \quad (60)$$

Consider the system Bond Graph with estimated state feedback of figure 3 which is shown in figure 5 for the DC motor.

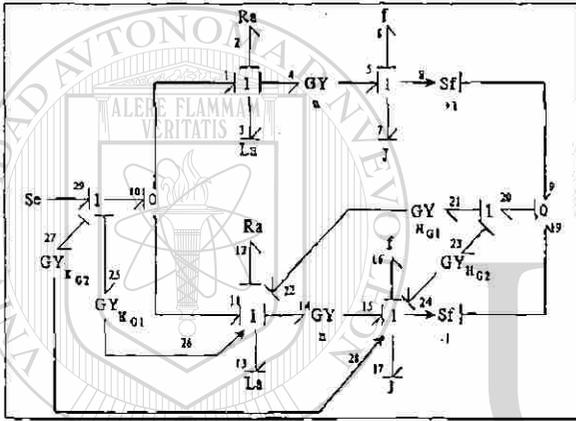


Figure 5. Observer and state feedback for the DC motor

The junction structure for the system is given by (23), where:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & -n \\ n & 0 \end{bmatrix}; S_{12} = -S_{21}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ S_{13} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; S_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \hat{S}_{11} &= \begin{bmatrix} K_{G1} & K_{G2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (61)$$

being K_{G1} and K_{G2} the direct graph control gains and $S_{22} = S_{23} = S_{32} = S_{33} = \hat{S}_{12} = \hat{S}_{13} = \hat{S}_{21} = \hat{S}_{22} = \hat{S}_{23} = \hat{S}_{31} = \hat{S}_{32} = \hat{S}_{33} = 0$.

The junction structure for the observer is given by (36), where:

$$\begin{aligned} \hat{S}'_{11} &= \begin{bmatrix} -K_{G1} & -K_{G2} - H_{G1} - n \\ n & -H_{G2} \end{bmatrix}; \hat{S}'_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \hat{S}'_{13} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \hat{S}'_{12} = -\hat{S}'_{21}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \hat{S}'_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & H_{G1} \\ 0 & H_{G2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (62)$$

being H_{G1} and H_{G2} the direct graph observer gains and $\hat{S}'_{22} = \hat{S}'_{23} = \hat{S}'_{32} = \hat{S}'_{33} = \hat{S}'_{12} = \hat{S}'_{13} = \hat{S}'_{21} = \hat{S}'_{22} = \hat{S}'_{23} = \hat{S}'_{31} = \hat{S}'_{32} = \hat{S}'_{33} = 0$.

Using the first case of Lemma 1, from (25), (26), (57), and (61)

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \frac{K_{G1}}{L_a} & \frac{K_{G2}}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (63)$$

Also, since $\hat{S}_{31} = 0$ from (26) we have:

$$\hat{C} = 0 \quad (64)$$

Substituting (57), (58) and (61) in (8) to (13) we obtain:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{n}{J} \\ \frac{n}{L_a} & -\frac{1}{J} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix}; D = 0 \quad (66)$$

From (63) to (66) and (15), the closed loop control physical system is obtained:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e_3 \\ e_7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{n}{J} \\ \frac{n}{L_a} & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{a3} \\ e_{a7} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e_{29} \\ &\quad - \begin{bmatrix} \frac{K_{G1}}{L_a} & \frac{K_{G2}}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_{a3} \\ \hat{e}_{a7} \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{a3} \\ e_{a7} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (67)$$

Using the first case of Lemma 2, from (38), (40), (41) (57), (62) and (65) we get:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} - \frac{K_{G1}}{L_a} & -\frac{n}{J} - \frac{K_{G2}}{J} - \frac{H_{G1}}{J} \\ \frac{n}{L_a} & -\frac{1}{J} - \frac{H_{G2}}{J} \end{bmatrix} \quad (68)$$

Substituting \hat{S}_{11} from (57) and (62) into (40) obtains:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{H_{G1}}{J} \\ 0 & \frac{H_{G2}}{J} \end{bmatrix} \quad (69)$$

Taking (64) and (66) into (22) gives:

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \quad (70)$$

From (65), (66), (68), (69) and (18) we obtain the observer model:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{e}_3 \\ \hat{e}_7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} - \frac{K_{G1}}{L_a} & -\frac{n}{J} - \frac{K_{G2}}{J} - \frac{H_{G1}}{J} \\ \frac{n}{L_a} & -\frac{1}{J} - \frac{H_{G2}}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_{a3} \\ \hat{e}_{a7} \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & \frac{H_{G1}}{J} \\ 0 & \frac{H_{G2}}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{a3} \\ e_{a7} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e_{29} \\ \hat{y} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_{a3} \\ \hat{e}_{a7} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (71)$$

Note that using the methodology proposed in Lemmas 1 and 2, we obtain the closed loop model directly from

the open loop bond graph including control and observer.

The model parameters are $L_a = 0.1$, $f = 0.1$, $R_a = 0.5$, $J = 1.5$, $n = 3$ and $e_1 = 10$. The control gains to have a damping coefficient of 0.5 are $K_1 = 5.94$ and $K_2 = 2$. From Theorem 1 the direct gain for the controller is:

$$S'_{11} = \begin{bmatrix} 0.594 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (72)$$

The closed loop poles due to the observer are placed in $p_{1,2} = -9.1683 \pm j5.2549$, from (55) we have $H_1 = 13.33$ and $H_2 = 13.33$. From Theorem the direct gain for the observer is:

$$S'_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 13.33 \\ 0 & 13.33 \end{bmatrix} \quad (73)$$

Figures 6 and 7 show the simulation for this example.

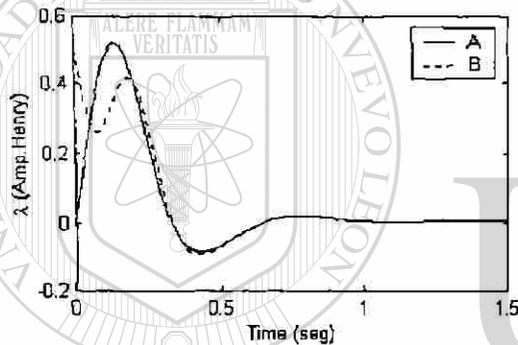


Figure 6. Graph of the flux linkage behavior where A) system state; B) estimated state.

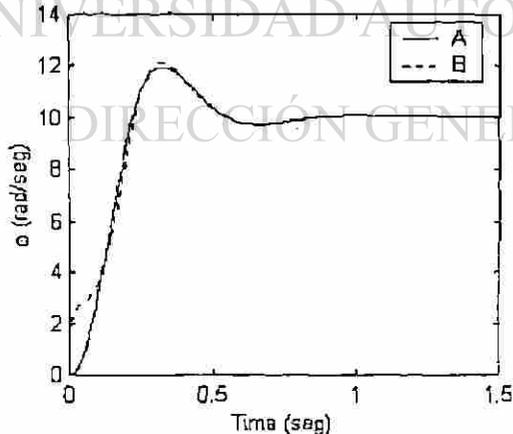


Figure 7. Graph of the output behavior where A) system output; B) estimated output.

We can observe in both figures 6 and 7 that the previous design conditions for the controller and the observer are satisfied.

VII. CONCLUSIONS

A state estimated feedback is presented for LTI MIMO systems. The closed loop model of the control and the observer are obtained directly from the open loop Bond graph and the proposed structures. The methodology let consider different kinds of energies. The controller is realizable due to the fact that the physical domain is considered. Also, the dynamic assignment problem is solved guaranteeing stability and assuring regulation.

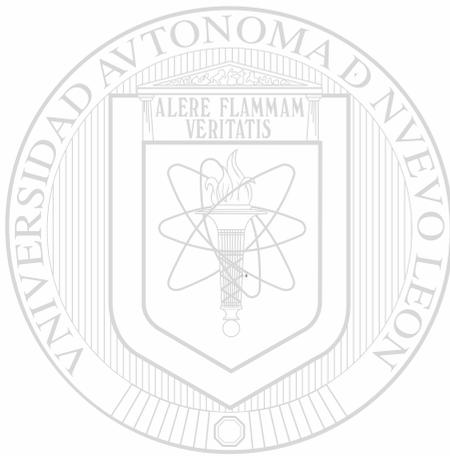
REFERENCES

- [1] Paynter, H.M. "Analysis and design of engineering systems", MIT press, Cambridge, Mass (1961).
- [2] Dean C. Karnopp, Ronald C. Rosenberg, "System Dynamics: A Unified Approach", Wiley, John & Sons, April (1975).
- [3] P.E. Wellstead, "Physical System Modelling", Academic Press, London, (1979).
- [4] P.J. Gawthrop, "Bond graph based control", Systems, Man and Cybernetics, 1995, Intelligent System for the 21st Century., IEEE International Conference on Published: 1995, Vol. 4, pp. 3011-1016 (1995).
- [5] D.C. Karnopp, "Bond graphs in control: Physical state variables and observers", J. Franklin Institute, 308(3) pp. 221-234, (1979).
- [6] G. Dauphin-Tanguy "Modelling of physical Dynamical Systems by Bond Graphs".
- [7] C. Suer, G. Dauphin-Tanguy, "Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems", J. Franklin Inst., vol. 328, No.1 pp. 55-70, (1991).
- [8] Chi-Tsong Chen "Linear System Theory and Design", Third ed., Oxford University Press..
- [9] Gene F. Franklin, J. David Powell, Abbas Emami-Naeini, "Feedback Control of Dynamic Systems" Addison Wesley.
- [10] Y.K. Wong and A.B. Rad "Bond Graph Simulations of Electrical Systems", IEEE Catalogue No. 98E137, (1998).
- [11] P.J. Gawthrop, "Physical Model-Based Control: A Bond Graph Approach", J. of the Franklin Institute, 332B(3), pp. 285-305.
- [12] Antic, D.Vidojkovic, B. Mladenovic, M. "An Introduction to Bond Graph Modelling of Dynamic Systems", Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services, 1999, 4th Int. Conf. on Published: 1999, vol. 2, pp. 661-664.

C.4 Steady-State Values for a Physical System with Bond Graph Approach

Gonzalez-A. Gilberto, R. Galindo

9th IEEE International Conference On Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR 2003), 25-28 August 2003, Miedzyzdroje, Poland.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

STEADY-STATE VALUES FOR A PHYSICAL SYSTEM WITH BOND GRAPH APPROACH

GONZALEZ-A. GILBERTO^{1,2}, R. GALINDO¹

¹University of Nuevo Leon, Department of Electrical Engineering 66451 San Nicolas de los Garza, N.L. Mexico (+52)8183294020 Ext.5773

²University of Michoacan, Faculty of Electrical Engineering 58030, Morelia, Michoacan, Mexico (+52)4433265776

Abstract. A single and direct graphical procedure to get the steady state value of a physical system represented in Bond Graph is presented. To get this objective an inverse matrix is required. However, we show that using the junction structure of the Bond Graph in derivative causality of the system, this inverse matrix is not required.

Key Words. Bond Graph, Coates Graph, Physical Control, Modelling Tools, Steady State.

1 Introduction

The Bond Graph technique is an energy based modelling approach, unifying symbology for phenomena from different physical domains. Bond Graph is a directed graph whose nodes represent subsystems and its arrows, the transfer of energy between the subsystems. Bond Graph was established by [1]. The idea was developed by [2] and [3] how a powerful tool of modelling.

The use of Bond Graph provides structured approach to system dynamics modelling. The Bond Graph language is used to abstract physical systems into basic elements that represent localized dynamic properties of a small part of the system.

The steady-state performance is an important characteristic of a system when its dynamic period has finished. Actually, some equipments in electrical machines or in power electrical systems requires to know the steady state values for calibration.

Nevertheless, the steady state value of the state variables require to calculate and to invert the matrix A , which is almost allways invertible for a physical system. As shown it is not necessary, if we obtain the Bond Graph in derivative causality of the system. So, we can get the response in steady state directly.

This graph methodology from Bond Graph for a MIMO-LTI physical system can be incorporated to analyze or design control strategies in the physical domain, guaranteeing to get a realizabile controller.

Section II gives the modelling by Bond Graph of a physical system; section III presents a procedure to

obtain the steady state value of the system. Two examples are given in section IV. Finally, section V gives our conclusions.

2 Bond Graph Model [3, 6, 7]

Consider a multiport linear system which has the key vectors of figure 1.

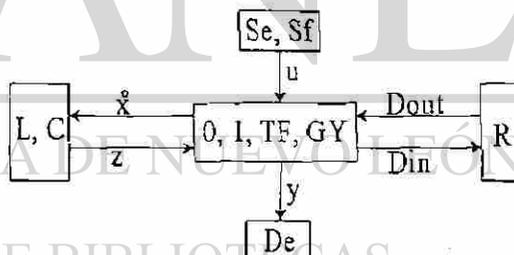


Figure 1. Key vectors of a Bond Graph

Here, (Se, Sf) , (L,C) and (R) mean the source, the storage and the dissipation fields, (De) the detector and $(0, I, TF, GY)$ the junction structure with transformers, TF, and gyrators, GY.

The state $x \in R^n$ is composed of energy variables for effort, e , and flow, f , with integral causality, $u \in R^p$ the plant input, $y \in R^q$ the plant output, $z \in R^n$ the co-energy, and $D_{in} \in R^r$ and $D_{out} \in R^r$ are a mixture of e and f showing the energy exchanges between the dissipation field and the junction structure.

The relations of the storage and dissipation fields are:

$$z = Fx \quad (1)$$

$$D_{out} = LD_{in} \quad (2)$$

where L is a diagonal matrix composed of R and $1/R$ coefficients, and F is composed of $1/L$ and $1/C$ coefficients.

The relation of the junction structure is:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (3)$$

where the junction structure of the system is given by:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

The entries of S take the values inside the set $\{0, \pm 1, \pm m, \pm r\}$ where m and r are transformer and gyrator modules, S_{11} and S_{22} are square skew-symmetric submatrices and S_{12} and S_{21} are submatrices each other negative transpose. The state equation is [7]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (5)$$

where

$$A = (S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad (6)$$

$$B = (S_{13} + S_{12}MS_{23})F \quad (7)$$

$$C = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad (8)$$

$$D = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (9)$$

being

$$M = (I - LS_{22})^{-1}L \quad (10)$$

Next, we introduce a new approach to get the steady state of the state variables of the system.

3 Steady-State

The response of the steady state is useful to know the value that reaches each state variable of the physical system when the dynamic period has finished. So, (5) doing $\dot{x} = 0$, we have

$$\begin{aligned} x_{ss} &= -A^{-1}Bu \\ y_{ss} &= (D - CA^{-1}B)u \end{aligned} \quad (11)$$

So, using (11) we can calculate the steady state, but we need A^{-1} and it is not easy to get for some high order systems.

We can use the Bond Graph in derivative causality to solve directly the problem of get A^{-1} .

Suppose that (A^{-1} is invertible) and a derivative causality assignment is performed on the Bond Graph

model [13]. From (3) the junction structure is given by:

$$\begin{bmatrix} z \\ D_{ind} \\ y_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$D_{out} = L_d D_{ind}$$

where the entries of J have the same properties that S . The storage elements in (12) have a derivative causality. So, D_{ind} and D_{out} are defined of the same manner that D_{in} and D_{out} , but they depend on the causality assignment for the storage elements and that junctions must have a correct causality assignment.

From (5) to (10) and (12) we obtain

$$\begin{aligned} z &= A^* \dot{x} + B^* u \\ y_d &= C^* \dot{x} + D^* u \end{aligned} \quad (13)$$

where

$$A^* = J_{11} + J_{12}N J_{21} \quad (14)$$

$$B^* = J_{13} + J_{12}N J_{23} \quad (15)$$

$$C^* = J_{31} + J_{32}N J_{21} \quad (16)$$

$$D^* = J_{33} + J_{32}N J_{23} \quad (17)$$

being

$$N = (I - L_d J_{22})^{-1} L_d \quad (18)$$

The state output equations of this system in integral causality are given by (5). It follows, from (1), (5) and (13) that:

$$A^* = FA^{-1} \quad (19)$$

$$B^* = -FA^{-1}B \quad (20)$$

$$C^* = CA^{-1} \quad (21)$$

$$D^* = D - CA^{-1}B \quad (22)$$

From (20), (22) and (11), we obtain the steady state

$$\begin{aligned} x_{ss} &= F^{-1}B^*u \\ y_{ss} &= D^*u \end{aligned} \quad (23)$$

4 Examples

Example 1.

Consider the mechanical system of the figure 2.

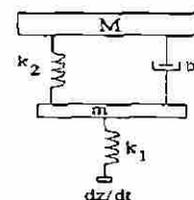


Figure 2. Mechanical system of example 1

In Figure 3, we have the Bond Graph in integral causality.

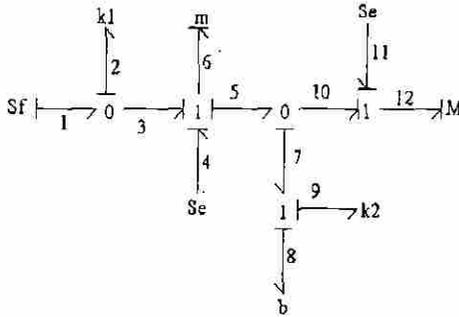


Figure 3. Bond Graph in integral causality.

The key vectors are:

$$x = \begin{bmatrix} f_{a_2} \\ e_{a_6} \\ f_{a_9} \\ e_{a_{12}} \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \\ f_9 \\ e_{12} \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_8 \\ e_9 \\ f_{12} \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} f_1 \\ e_4 \\ e_{11} \end{bmatrix}; y = f_8; D_{in} = f_8; D_{out} = e_8$$

where f is velocity and e is force in each element of the mechanical system; f_{a_2} and f_{a_9} are translational displacement in k_1 and k_2 respectively; e_{a_6} and $e_{a_{12}}$ are translational momentums m and M respectively; f_1 is the input velocity and e_4 and e_{11} are the gravity forces under m and M respectively.

The constitutives relations (1), (2) for the elements are:

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \\ e_9 \\ f_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{a_2} \\ e_{a_6} \\ f_{a_9} \\ e_{a_{12}} \end{bmatrix}$$

$$e_8 = b f_8 \quad (24)$$

The Bond Graph in derivative causality is shown in Figure 4.

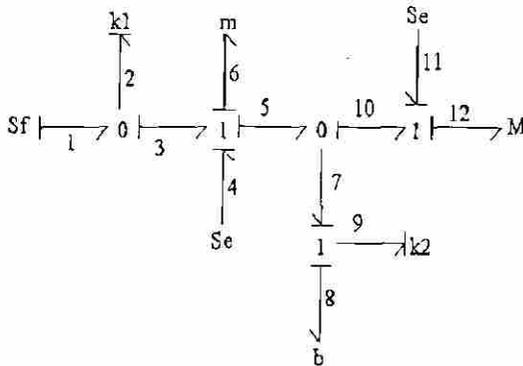


Figure 4. Bond graph in derivative causality.

From (12) the junction structure for the Bond Graph of figure 4 is given by:

$$J_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{12} = -J_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{13} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; J_{22} = J_{23} = 0$$

For this example $D_{ind} = D_{in}$ and $D_{out} = D_{out}$. So, from (20) B^* is given by:

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Finally, the steady state value of the state variables is getting from (23)

$$x_{ss} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{k_1} & -\frac{1}{k_1} \\ m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{k_2} \\ M & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ e_4 \\ e_{11} \end{bmatrix} \quad (26)$$

We can observe that, this is a single and direct procedure and it is not necessary to calculate A , A^{-1} and B .

The dynamic model of this example can be obtained from (4)

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; S_{31} = S_{21}$$

$$S_{12} = -S_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; S_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{22} = S_{23} = S_{32} = S_{33} = 0$$

So, the model is given by (5):

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \\ f_9 \\ e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{k_1} & 0 & 0 \\ k_1 & -\frac{1}{m} & -k_2 & \frac{b}{M} \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & -\frac{1}{M} \\ 0 & \frac{1}{m} & k_2 & -\frac{1}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{a_2} \\ e_{a_6} \\ f_{a_9} \\ e_{a_{12}} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ e_4 \\ e_{11} \end{bmatrix} \quad (27)$$

With the system parameters $k_1 = 5$, $k_2 = 10$, $m = 3$, $M = 6$, $b = 10$, $f_1 = 1$, $e_4 = 1$ and $e_{11} = 1$ the response of the state variables of the system are given by figures 5 to 8.

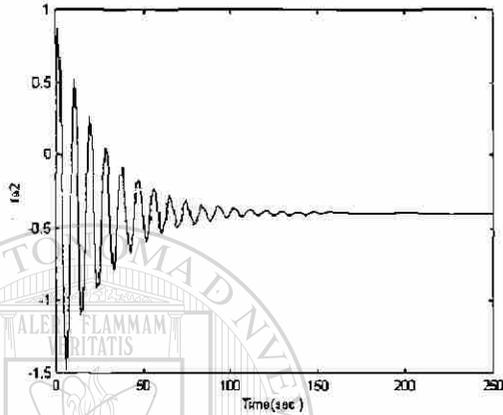


Figure 5. State variable f_{a2} .

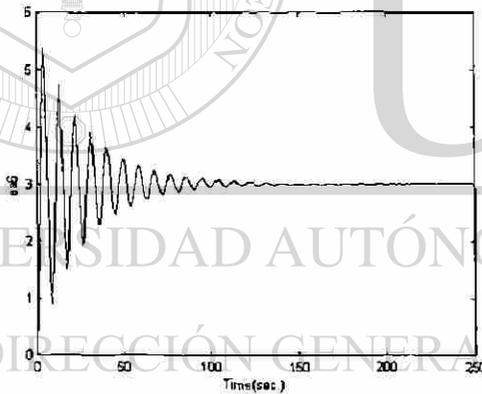


Figure 6. State variable e_{a6} .

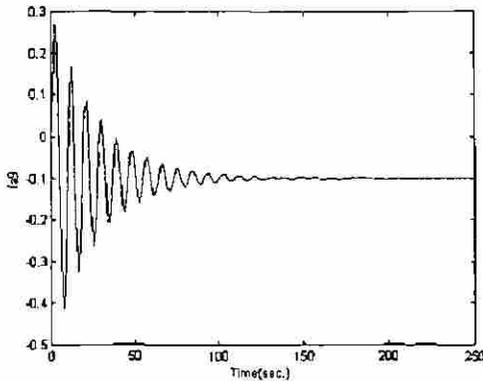


Figure 7. State variable f_{a9} .

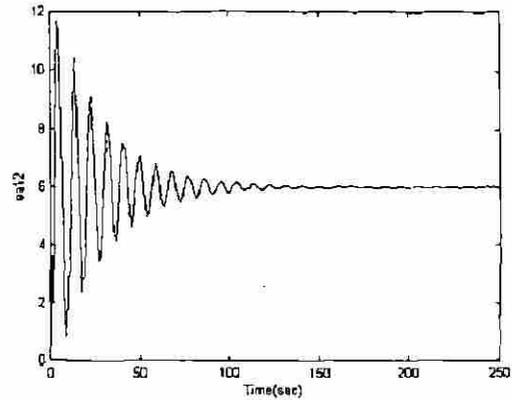


Figure 8. State variable e_{a12} .

Note that the steady state values are: $f_{a2} = -0.5$, $e_{a6} = 3$, $f_{a9} = -0.1$ and $e_{a12} = 6$, as expected.

We can observe that, this procedure to get the steady state of the state variables is an easy tool for system analysis.

Example 2.

Consider the electrical system of figure 9.

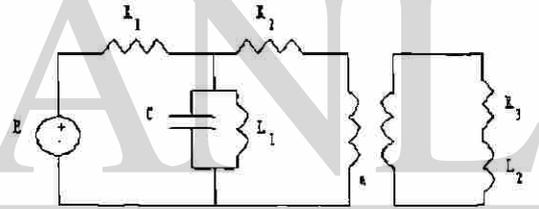


Figure 9. Electrical system of the example 2.

The Bond Graph in integral causality is shown in Figure 10.

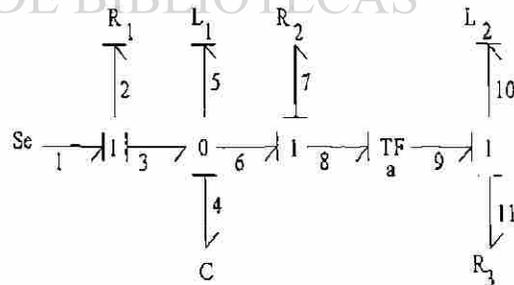


Figure 10. Bond Graph in integral causality.

The key vectors are:

$$x = \begin{bmatrix} f_{a4} \\ e_{a6} \\ e_{a10} \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} f_4 \\ e_5 \\ e_{10} \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} e_4 \\ f_5 \\ f_{10} \end{bmatrix}$$

$$u = e_1; y = f_{11}$$

$$D_{in} = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_7 \\ f_{11} \end{bmatrix}; D_{out} = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_7 \\ e_{11} \end{bmatrix}$$

where e is voltage and f is current in each element of the electrical system; f_{a_4} is the capacitor charge in C and e_{a_8} and $e_{a_{10}}$ are the flux linkages in L_1 and L_2 , respectively.

The constitutive relations for the elements are:

$$\begin{bmatrix} e_4 \\ f_5 \\ f_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{a_4} \\ e_{a_8} \\ e_{a_{10}} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ e_5 \\ e_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_7 \\ f_{11} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_8 \\ f_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_9 \\ f_9 \end{bmatrix}$$

The Bond Graph in derivative causality is shown in figure 11.

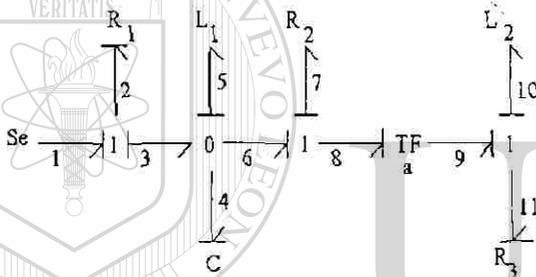


Figure 11. Bond Graph in derivative causality.

The key vectors D_{ind} and D_{outd} in derivative causality are:

$$D_{ind} = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_7 \\ e_{11} \end{bmatrix}; D_{outd} = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_7 \\ f_{11} \end{bmatrix}$$

The junction structure of figure 11 is:

$$J_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; J_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{12} = -J_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; J_{13} = 0$$

$$J_{22} = \begin{bmatrix} 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}$$

The vector B^* is given by:

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

From (23), the steady state value of the state variables is

$$x_{ss} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{L_1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} e_1 \quad (30)$$

From (4) the junction structure in integral causality of this example is obtained. It is used to get the dynamic model:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{a} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{13} = S_{32} = S_{33} = S_{22} = 0$$

$$S_{12} = -S_{21}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} & -1 \end{bmatrix}; S_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

The dynamic model is given by:

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_4 \\ \dot{e}_5 \\ \dot{e}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{L_1} & -\frac{1}{a L_2} \\ \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a C} & 0 & -\frac{R_2}{a^2 L_2} - \frac{R_3}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{a_4} \\ e_{a_8} \\ e_{a_{10}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_1 \quad (31)$$

The system parameters are $R_1 = 10$, $R_2 = 5$, $R_3 = 2$, $L_1 = 0.1$, $L_2 = 0.2$, $C = 0.01$, $a = 10$ and $e_1 = 1$, the response of the state variables of the system are shown in figure 12, 13 and 14.

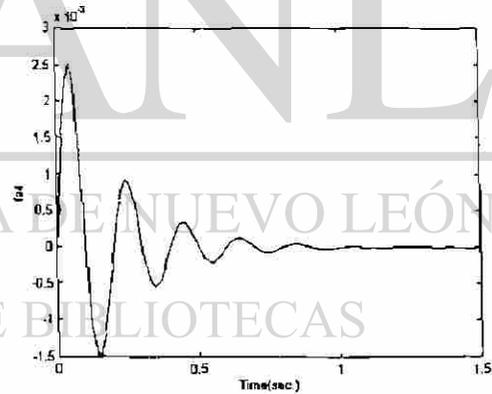


Figure 12. State variable f_{a_4} .

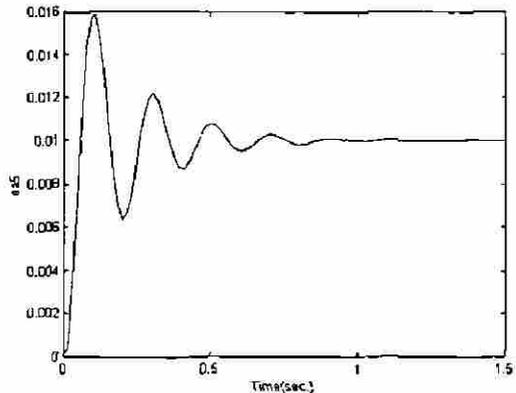


Figure 13. State variable e_{a_8} .

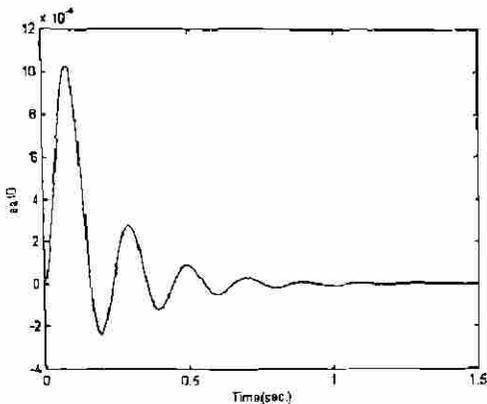


Figure 14. State variable e_{010} .

We can use this procedure to get the steady state of other variables, for instance, output and steady state error to analyse the performance in an open or closed loop control scheme.

5 Conclusions

A direct graphical procedure to obtain the steady state values of a physical system is presented. This methodology lets to consider different kinds of energies.

References

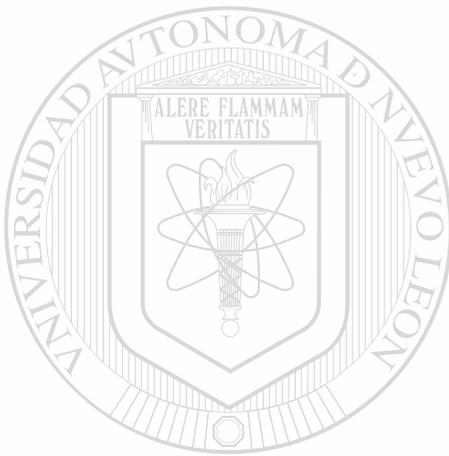
- [1] Paynter, H.M. "Analysis and design of engineering systems", MIT press, Cambridge, Mass (1961).
- [2] Dean C. Karnopp, Ronald C. Rosenberg, "System Dynamics: A Unified Approach", Wiley, John & Sons, April (1975).
- [3] P.E. Wellstead, "Physical System Modelling", Academic Press, London, (1979).
- [4] P.J. Gawthrop, "Bond graph based control", Systems, Man and Cybernetics, 1995, Intelligent System for the 21st Century., IEEE International Conference on Published: 1995, Vol. 4, pp. 3011-1016 (1995).
- [5] D.C. Karnopp, "Bond graphs in control: Physical state variables and observers", J. Franklin Institute, 308(3) pp. 221-234, (1979).
- [6] C. Sueur, G. Dauphin-Tanguy "Bond-graph Approach for Structural Analysis of MIMO Linear Systems", J. Franklin Institute, 328(1) pp. 55-70, (1991).
- [7] C. Sueur, G. Dauphin-Tanguy, "Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems", J. Franklin Inst., vol. 328, No.1 pp. 55-70, (1991).
- [8] Chi-Tsong Chen "Linear System Theory and Design", Third ed., Oxford University Press,(1999).
- [9] Gene F. Franklin, J. David Powell, Abbas Emami-Naeini, "Feedback Control of Dynamic Systems" Addison Wesley Publishing Company, (1988)
- [10] Y.K. Wong and A.B. Rad "Bond Graph Simulations of Electrical Systems", IEEE Catalogue No. 98E137, (1998).
- [11] P.J. Gawthrop, "Physical Model-Based Control: A Bond Graph Approach", J. of the Franklin Institute, 332B(3), pp. 285-305, (1995).
- [12] Antic, D. Vidojkovic, B. Mladenovic, M. "An Introduction to Bond Graph Modelling of Dynamic Systems", Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services, 1999, 4th Int. Conf. on Published: 1999, vol. 2, pp. 661-664.
- [13] Wai-Kai Chen, "Applied Graph Theory: Graphs and Electrical Networks", 1976, North-Holland Publishing Company.
- [14] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy, "Bond Graph Approach to Multi-time Scale Systems Analysis", J. of the Franklin Institute, 0016-0032/91.
- [15] John J. Gainger, William D. Stevenson Jr. "Análisis de Sistemas Eléctricos de Potencia", Mc. Graw Hill, 1998.

C.5 Linearization in Bond Graph

Linearization in Bond Graph

Gonzalez-A. Gilberto, J. de Leon

Sometido a la 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC04),
December 14-17, 2004, Atlantis, Paradise Island, Bahamas.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Linearization in Bond Graph

González-A. Gilberto^{1,2*}, J. De Leon^{1†}

¹University of Nuevo Leon, Department of Electrical Engineering
66451 San Nicolás de los Garza, N.L., Mexico.

² University of Michoacan, Faculty of Electrical Engineering
58030, Morelia, Michoacan, Mexico

Abstract. A graphical procedure to obtain the linearization of a class of nonlinear physical system, designed here like nonlinear system of states product, using Bond Graph is proposed. A direct structure for the linearized Bond Graph is presented. Therefore, the system and linearization are determined in the physical domain. Examples of a synchronous machine and a rigid body are given.

Keywords.—Bond Graph, Nonlinear systems, Linearization, Synchronous Machine.

I. INTRODUCTION

The Bond Graph is an useful and important tool for physical system modelling. This is based on power representation, it enables the description of the system through energy storage and dissipative elements.

A Bond Graph can represent a variety of energy types, whose junction structure can give a valuable information of the properties of the physical system. [1, 3]

An important property of the Bond Graph theory is the causal path, so, we can determine observability, controlability or the relation between state variables to linearize a class of nonlinear system designed here nonlinear system of states product, that can be represented in Bond Graph.

A linearized system is useful to know the behavior of the system when it is perturbed such that the new and old equilibrium points are nearly equal, the system equations are linearized around the operating points. The new linear equations so derived are assumed to be valid in a region near the equilibrium point. [4]

There are several applications of linearized systems for example small-signal stability [4] that is the

ability of the power system to maintain synchronism when subjected to small disturbances. In this context, a disturbance is considered to be small if the equations that describe the response of the system can be linearized for the purpose of analysis [6].

We propose a scheme and procedure to obtain a linearization through Bond Graph for a nonlinear system of states product. It is based on a new Bond Graph which represents the linearization of the system in a physical domain.

Section II gives the Bond Graph model of a physical system. Section III summarizes the algebraic linearization of nonlinear systems. A scheme of linearized Bond Graph using the junction structure is presented in section IV. A procedure to get the linearization from the a given Bond Graph is proposed in section V. Examples of a synchronous machine and a rigid body illustrate the procedure in section VI. Finally, section VII gives our conclusions.

II. BOND GRAPH MODEL [3, 7]

Consider the scheme of a multiport LTI system which has the key vectors of figure 1.

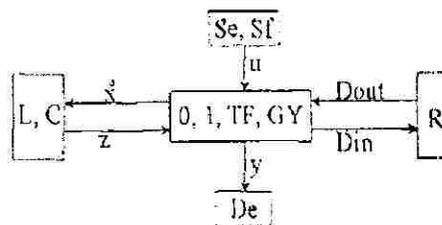


Figure 1. Key vectors of a Bond Graph

In figure 1, (Se, Sf) , (L, C) and (R) denote the source the storage and the dissipation fields, (De) the detector and $(0, 1, TF, GY)$ the junction structure with transformers, TF , and gyrators, GY .

*gilnichga@yahoo.com.mx
†drjleon@hotmail.com.mx

The state $x \in \mathbb{R}^n$ is composed of energy variables for effort, e , and flow, f , with integral causality, $u \in \mathbb{R}^p$ denotes the plant input, $y \in \mathbb{R}^q$ the plant output, $z \in \mathbb{R}^r$ the co-energy, and $D_{in} \in \mathbb{R}^r$ and $D_{out} \in \mathbb{R}^r$ are a mixture of e and f showing the energy exchanges between the dissipation field and the junction structure.

The relations of the storage and dissipation fields are:

$$z = Fx \quad (1)$$

$$D_{out} = LD_{in} \quad (2)$$

The relations of the junction structure are:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (3)$$

where the junction structure of the system is given by:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

The entries of S take values inside the set $\{0, \pm 1, \pm m, \pm n\}$ where m and n are transformer and gyrator modules; S_{11} and S_{22} are square skew-symmetric matrices and S_{12} and S_{21} are matrices each other negative transpose. The state equation is [8, 9]:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5)$$

$$y = Cx + Du$$

where

$$A = (S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad (6)$$

$$B = (S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (7)$$

$$C = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad (8)$$

$$D = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (9)$$

being

$$M = (I - LS_{22})^{-1}L \quad (10)$$

Next section summarizes the algebraic linearization technique [2]. This analysis is used in section IV for the Bond Graph approach.

III. LINEARIZATION [2]

A linear state equation is useful as an approximation of a nonlinear state equation in the following sense. Consider

$$\dot{x} = f(x, u) \quad x(t_0) = x_0 \quad (11)$$

where the state $x \in \mathbb{R}^n$ and the input $u \in \mathbb{R}^p$.

Let (11) be solved for a particular input signal called the nominal input \tilde{u} and a particular initial state called the nominal initial state \tilde{x}_0 to obtain a unique nominal solution, often called a nominal trajectory \tilde{x} . Consider

$$u = \tilde{u} + u_\delta \quad (12)$$

$$x_0 = \tilde{x}_0 + x_{0\delta} \quad (13)$$

where $\|x_{0\delta}\|$ and $\|u_\delta\|$ are appropriately small for $t \geq t_0$.

We assume that the corresponding solution remains close to \tilde{x} , at each t , and is given by

$$x = \tilde{x} + x_\delta \quad (14)$$

substituting (12) and (14) in (11) we have

$$\frac{d}{dt}\tilde{x} + \frac{d}{dt}x_\delta = f(\tilde{x} + x_\delta, \tilde{u} + u_\delta), \quad \tilde{x}(t_0) + x_\delta(t_0) = \tilde{x}_0 + x_{0\delta} \quad (15)$$

Assuming that the derivatives of (11) exist, we can expand the right side using Taylor series around \tilde{x} and \tilde{u} , and then retain only the terms through of 1. This is a reasonable approximation since u_δ and x_δ are assumed to be small for all t .

For the i^{th} component retaining the first order terms, and momentarily dropping t -arguments for simplicity, we can write

$$f_i(\tilde{x} + x_\delta, \tilde{u} + u_\delta) \cong f_i(\tilde{x}, \tilde{u}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\tilde{x}, \tilde{u})x_{\delta 1} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\tilde{x}, \tilde{u})x_{\delta n} + \frac{\partial f_i}{\partial u_1}(\tilde{x}, \tilde{u})u_{\delta 1} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial u_m}(\tilde{x}, \tilde{u})u_{\delta m} \quad (16)$$

performing in vector matrix form gives

$$\frac{d}{dt}\tilde{x} + \frac{d}{dt}x_\delta \cong f(\tilde{x}, \tilde{u}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{u})x_\delta + \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{x}, \tilde{u})u_\delta \quad (17)$$

where the notation $\frac{\partial f}{\partial x}$ denotes the Jacobian, a matrix with i, j -entry $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Since

$$\frac{d}{dt}\tilde{x} = f(\tilde{x}, \tilde{u}), \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \quad (18)$$

the relation between x_δ and u_δ is approximately described by a linear time invariant state equation of the form

$$\dot{x}_\delta = A_\delta x_\delta + B_\delta u_\delta \quad (19)$$

where A_δ and B_δ are the matrices or partial derivatives evaluated on the nominal trajectory, which are

$$A_\delta = \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{u}) \quad (20)$$

$$B_\delta = \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{x}, \tilde{u}) \quad (21)$$

If there is a nonlinear output equation, we have

$$y(t) = h(x, u) \quad (22)$$

the function $h(x, u)$ can be expanded around the nominal trajectory, where the approximate description is

$$y_\delta = C_\delta x_\delta + D_\delta u_\delta \quad (23)$$

here the deviation output is given by

$$y_\delta = y - \bar{y} \quad \tilde{y} = h(\hat{x}, \hat{u}) \quad (24)$$

where

$$C_\delta = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, \hat{u}) \quad (25)$$

$$D_\delta = \frac{\partial f}{\partial u}(\hat{x}, \hat{u}) \quad (26)$$

In this development a nominal solution is assumed to exist for all $t \geq t_0$, so that the linearization makes sense as an approximation.

IV. LINEARIZATION BY BOND GRAPH

Bond Graph represents a physical structure denoting power exchange in the physical system. Therefore, it is possible to code on the graph its mathematical structure, so, we can get a structure showing the causal relationships among the signals on the system.

The graphical information of the Bond Graph can be used to identify the nonlinear sections of a physical system. So, a direct graphical technique to obtain the linearized Bond Graph is presented. We consider the linearization by Bond Graph of a nonlinear system of states product (11), where the nonlinear part is formed by

$$x_i x_j, x_i u_k; \quad i \neq j; \quad i, j = 1, \dots, n \text{ and } k = 1, \dots, p \quad (27)$$

The general structure for linearization of (11) using Bond Graph, with the previous condition, is shown in figure 2.

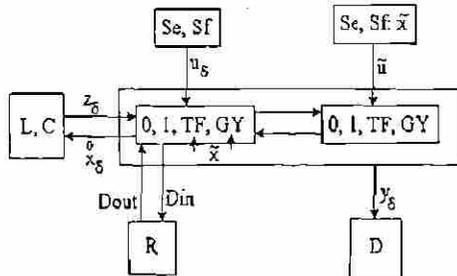


Figure 2. General structure of a system linearized.

The objective to represent the linearization of the physical non-linear system in according of figure 2 is to get single relations on the modified junction structure matrix, \tilde{S} . This let us to know, the change of S due to the linearization. Next Lemma shows how to find the matrices of the linearized system from \tilde{S} .

Lemma

Consider the linearized scheme of figure 2. The structure of the system is given by

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ D_{in} \\ y_\delta \end{bmatrix} = \tilde{S} \begin{bmatrix} z_\delta \\ D_{out} \\ u_\delta \\ \tilde{u} \end{bmatrix} \quad (28)$$

where

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} S_{11}^x + S_{11}^0 & S_{12} & S_{13}^x & S_{13}^0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31}^x + S_{31}^0 & S_{32} & S_{33}^x & S_{33}^0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

The entries of S_{11}^x , S_{13}^x , S_{31}^x and S_{33}^x are the interconnection of the elements that does not participate on the nominal trajectory of the system. The entries of S_{11}^0 , S_{13}^0 , S_{31}^0 and S_{33}^0 are on the nominal trajectory, u_δ is the input system and \tilde{u} is the nominal input.

The representation of the system in state variables is given by

$$A_\delta = (S_{11}^x + S_{11}^0 + S_{12}MS_{21} + S_{13}^1)F \quad (30)$$

$$B_\delta = S_{13}^x + S_{12}MS_{23} \quad (31)$$

$$C_\delta = (S_{31}^x + S_{31}^0 + S_{32}MS_{21} + S_{33}^1)F \quad (32)$$

$$D_\delta = S_{33}^x + S_{32}MS_{23} \quad (33)$$

such that

$$S_{13}^0 \tilde{u} = S_{13}^1 x_\delta \quad (34)$$

$$S_{33}^0 \tilde{u} = S_{33}^1 x_\delta \quad (35)$$

where we select the entries of the matrices S_{13}^1 and S_{33}^1 to satisfy (34) and (35) respectively, being

$$M = (I - LS_{22})^{-1}L \quad (36)$$

Proof. For linearized system of the figure 2, substituting (1) into the first line of (28), we have

$$\dot{x}_\delta = (S_{11}^x + S_{11}^0)Fx_\delta + S_{12}D_{out} + S_{13}^x u_\delta + S_{13}^0 u_0 \quad (37)$$

from (1) and (2) the second line of (28) gives

$$D_{in} = (I - S_{22}L)^{-1}(S_{21}Fx_\delta + S_{23}u_\delta) \quad (38)$$

taking (10), (34) and (38) into (37):

$$\begin{aligned} \dot{x}_\delta = & (S_{11}^x + S_{11}^0 + S_{12}MS_{21} + S_{13}^1)Fx_\delta \\ & + (S_{13}^x + S_{12}MS_{23})u_\delta \end{aligned} \quad (39)$$

Comparing (19) with (39) we prove (30) and (31) using (34) and (36).

Otherwise, taking (1), (35) and (38) into the third line of (28) we have

$$y_\delta = (S_{31}^\pi + S_{31}^0 + S_{32}MS_{21} + S_{33}^1)Fx_\delta + (S_{33}^\pi + S_{32}MS_{23})u_\delta \quad (40)$$

Comparing (23) with (40), we prove (32) and (33). ■

V. PROCEDURE TO OBTAIN THE LINEARIZED BOND GRAPH

We present a graphical procedure to construct the linearized Bond Graph from a non-linear Bond graph of a physical system, considering that the system satisfies the conditions of the previous Lemma.

Procedure A

1.- Obtain the non-linear Bond Graph of the physical system.
2.- Identify the non-linear sections. They are in Transformers, TF and/or Gytrators, GY with states variables modules.

3.- Recognize the influence area of the TF and/or GY of step 2, following causal paths, from each state variable through TF and/or GY respectively, which is given by (27).

4.- The linearization is around of the nominal trajectory.

5.- The TF and/or GY modules of step 2 will be the nominal trajectory for the states variables respectively.

6.- Include bonds in according of step 3 where each causal path begins from the element of port-1 of the states variables of step 2 and this element is changed by an effort source if the element is C or by a flow source if the element is I .

7.- The value of the source of step 6 is the nominal trajectory of state variable.

8.- The TF or GY module additional of the causal path of step 6 is the original of the Bond Graph of step 2.

VI. EXAMPLE

Example 1.

Consider the d - q model of the synchronous machine. The model machine has salient poles, the exciting winding is placed on the direct axis. An amortisseur winding is represented by two short circuit winding, one on the d -axis and the other on the q -axis.

The assumptions of the model are: (1) the machine has a two pole character; (2) the armature

windings a , b , c are sinusoidally distributed around the circumference of the rotor.

The Bond Graph model of the synchronous machine is shown in figure 3. This model is similar to [5], the difference is the exciting winding and the direction of some bonds.

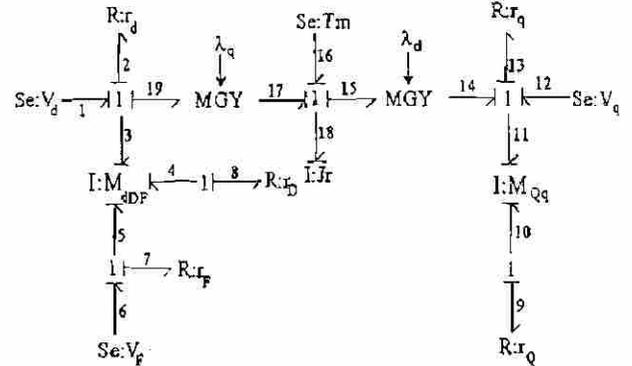


Figure 3. Bond Graph model of the synchronous machine.

The key vectors are

$$x^T = [e_{a_3} \quad e_{a_4} \quad e_{a_5} \quad e_{a_{10}} \quad e_{a_{11}} \quad e_{a_{18}}]$$

$$\dot{x}^T = [e_3 \quad e_4 \quad e_5 \quad e_{10} \quad e_{11} \quad e_{18}]$$

$$z^T = [f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_{10} \quad f_{11} \quad f_{18}]$$

$$D_{in}^T = [f_2 \quad f_7 \quad f_8 \quad f_9 \quad f_{13}]$$

$$D_{out}^T = [e_2 \quad e_7 \quad e_8 \quad e_9 \quad e_{13}]$$

$$u^T = [e_1 \quad e_6 \quad e_{12} \quad e_{16}]$$

where e_k , f_k , $k = 1, \dots, 13$ denote voltages and currents respectively; e_{16} and e_{18} torques; f_{16} and f_{18} speeds in T_m and J_r respectively; e_{a_3} , e_{a_4} and e_{a_5} are the fluxes linkage in $I : M_{dDF}$ formed by mutuals and self inductances on d , D and F , respectively; $e_{a_{10}}$ and $e_{a_{11}}$ are the fluxes linkage in $I : M_{Qq}$ formed by mutuals and self inductances on Q and q , respectively; and $e_{a_{18}}$ is the rotational momentum in J_r . The damper winding is represented by D and Q on the d and q axis, respectively; the exciting winding is represented by F ; and finally, d and q represent the commutator winding on the d and q axis, respectively.

In according with the procedure of section V, we can get the linearized Bond Graph represented in the figure 4.

The key vectors are

$$\begin{aligned} x &= [e_{a_2} \ e_{a_5} \ e_{a_9}] \\ \dot{x} &= [e_2 \ e_5 \ e_9] \\ z &= [f_2 \ f_5 \ f_9] \\ u &= [e_1 \ e_6 \ e_{10}] \end{aligned}$$

where f_2 , f_5 and f_9 , e_2 , e_5 and e_9 are the angular velocities and torques in a body-fixed coordinate system along the principal axes, respectively; e_{a_2} , e_{a_5} and e_{a_9} are rotational momentums and e_1 , e_6 and e_{10} are the applied torques.

Using the procedure of section V, we get the linearized Bond Graph represented in figure 6.

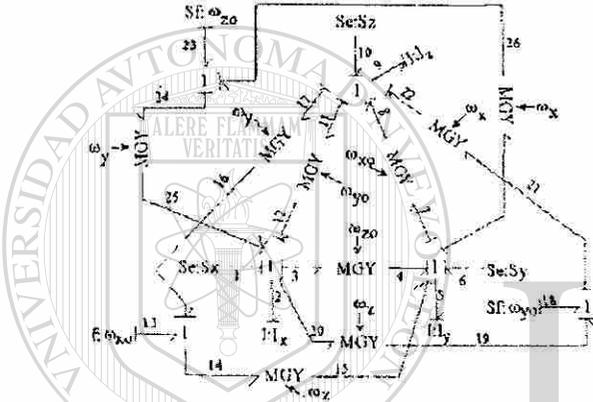


Figure 6. Bond Graph Linearized of three-dimensional rigid body.

The constitutive relation is

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{I_x}, \frac{1}{I_y}, \frac{1}{I_z} \right\} \quad (54)$$

The junction structure for the system is given by (28) and (29) where

$$S_{11}^x = S_{12} = S_{22} = S_{23} = S_{21} = 0 \quad (55)$$

$$S_{11}^0 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\omega_{y0}}{I_x} & \frac{\omega_{z0}}{I_y} \\ \frac{\omega_{x0}}{I_x} & 0 & -\frac{\omega_{z0}}{I_x} \\ -\frac{\omega_{y0}}{I_y} & \frac{\omega_{x0}}{I_x} & 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$S_{13}^0 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\omega_x}{I_x} & \frac{\omega_y}{I_y} \\ \frac{\omega_x}{I_x} & 0 & -\frac{\omega_z}{I_x} \\ -\frac{\omega_y}{I_y} & \frac{\omega_x}{I_x} & 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

From (34),

$$S_{13}^1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\omega_{x0}}{I_y} & -\frac{\omega_{y0}}{I_x} \\ -\frac{\omega_{x0}}{I_x} & 0 & \frac{\omega_{z0}}{I_x} \\ \frac{\omega_{y0}}{I_x} & -\frac{\omega_{x0}}{I_y} & 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

Obtaining the representation of the system of the form (50), from (30), we have

$$A_6 F^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{z0} \left(\frac{1}{I_y} - \frac{1}{I_x} \right) & \omega_{y0} \left(\frac{1}{I_y} - \frac{1}{I_x} \right) \\ \omega_{x0} \left(\frac{1}{I_y} - \frac{1}{I_x} \right) & 0 & -\omega_{x0} \left(\frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_y} \right) \\ \omega_{y0} \left(\frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_y} \right) & \omega_{x0} \left(\frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_y} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (59)$$

and from (30),

$$B_6 = [e_1 \ e_6 \ e_{10}]^T \quad (60)$$

We observe that, a nonlinear system of states product represented in a Bond Graph model is linearized in a form graphical directly.

VII. CONCLUSIONS

A direct graphical procedure using Bond Graph for linearization of a nonlinear physical system of states product is presented. The system and linearization are determined in the physical domain. This methodology does not require to know nonlinear ordinary differential equations.

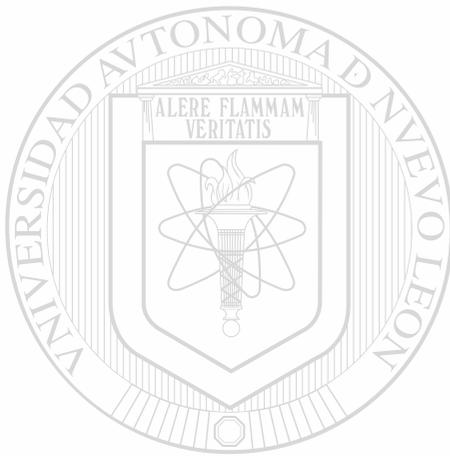
REFERENCES

- [1] Dean C. Karnopp, Ronald C. Rosenberg, "System Dynamics: A Unified Approach", Wiley, John & Sons, April (1975).
- [2] Wilson J. Rugh, "Linear System Theory", Prentice-Hall, (1996).
- [3] P.E. Wellstead, "Physical System Modelling", Academic Press, London, (1979).
- [4] Anderson and Fouad, "Power System Control and Stability", Science Press, (1986).
- [5] Dietrich Sahn, "A two-axis, Bond Graph Model of the Dynamics of Synchronous Electrical Machine", J. Franklin Institute, Vol. 308, No.3 pp. 205-218, (1979).
- [6] P. Kundur, "Power System Stability and Control", McGraw-Hill, (1994).
- [7] C. Suer, G. Dauphin-Tanguy, "Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems", J. Franklin Inst., vol. 328, No.1 pp. 55-70, (1991).
- [8] Peter Gawthrop, Lorcan Smith, "Metamodelling", Prentice-Hall, (1996).

C.6 Steady-State for a Physical System with Bond Graph Approach

Gonzalez-A. Gilberto, J. de Leon, R. Galindo

Sometido a Complex Systems, Intelligence and Modern Technology Applications (CSIMTA), September 19-22, Cherbourg, 2004.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Steady-State Error for a Physical System with Bond Graph Approach

González-A. Gilberto^{1,2*}, J. De Leon^{1†}, R. Galindo^{1‡}

¹University of Nuevo Leon, Department of Electrical Engineering
66451 San Nicolás de los Garza, N.L., Mexico.

² University of Michoacan, Faculty of Electrical Engineering
58030, Morelia, Michoacan, Mexico

Abstract. A graphical procedure to obtain the steady-state error in a closed loop system using a proportional control law in the physical domain is proposed. To get this objective a lemma and a procedure to calculate the difference in steady-state of a physical system using the Bond Graph in derivative causality is presented. Then, the proportional control law is applied in Bond Graph, therefore, a control in the physical domain is realized. We show that it is not necessary to find the inverse matrix A when the derivative causality is used.

Keywords. Bond Graph, Steady-State, Proportional Control, Physical Control.

I. INTRODUCTION

The Bond Graph technique is an energy based modelling approach, unifying symbology for phenomena from different physical domains. Bond Graph is a directed graph whose nodes represent subsystems and its arrows, the transfer of energy between the subsystems. Bond Graph was established by [1]. The idea was developed by [2] and [3] how a powerful tool of modelling.

The dynamic of a physical system considers the elements that storage energy, when the dynamic period has finished, we have conditions of steady-state of the system. In a control system, it is common that the output can not reach the reference input of the system and it is very important to know this difference called steady-state error.

Nevertheless, the steady-state error require to calculate and to invert the matrix A , when the system is represented in a realization (A, B, C, D) . As shown it is no necessary, if we obtain the Bond

Graph in derivative causality of the system. So, we can get the response in steady-state directly [9, 10, 11].

Therefore, a graphical procedure to obtain the steady-state error of a system in the physical domain with a proportional control is presented.

In [11], we find some results about steady-state values using Bond Graph in derivative causality in a open loop system. Also, in [12], a control in Bond Graph using state estimated feedback is given.

Section II gives the Bond Graph model of a physical system. Section III resumes the steady-state in the physical domain. A lemma and a procedure to obtain the input-output difference of a open loop system is proposed in section IV. The steady-state error in a closed loop system using a proportional control in Bond Graph is presented in section V. The obtained results are applied in section VI. Finally, section VIII gives our conclusions.

II. BOND GRAPH MODEL [3, 5]

Consider the following scheme of a multiport LTI system which has the key vectors of figure 1.

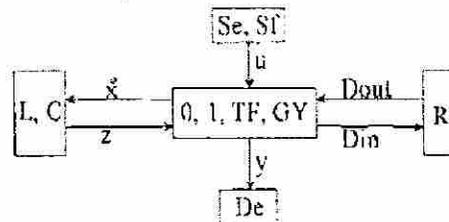


Figure 1. Key vectors of a Bond Graph

In figure 1, (Se, Sf) , (L, C) and (R) denote the source, the storage and the dissipation fields, (De) the detector and $(0, 1, TF, GY)$ the junction structure with transformers, TF , and gyrators, GY .

*gilmichga@yahoo.com.mx

†drjeon@hotmail.com.mx

‡rgalindo@gama.fime.uanl.mx

The state $x \in \mathbb{R}^n$ is composed of energy variables for effort, e , and flow, f , with integral causality, $u \in \mathbb{R}^p$ denotes the plant input, $y \in \mathbb{R}^q$ the plant output, $z \in \mathbb{R}^n$ the co-energy, and $D_{in} \in \mathbb{R}^r$ and $D_{out} \in \mathbb{R}^r$ are a mixture of e and f showing the energy exchanges between the dissipation field and the junction structure.

The relations of the storage and the dissipation fields are:

$$z = Fx \quad (1)$$

$$D_{out} = LD_{in} \quad (2)$$

and the relations of the junction structure are given by:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (3)$$

where the junction structure of the system of the form:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

The entries of S take values inside the set $\{0, \pm 1, \pm m, \pm n\}$ where m and n are transformer and gyrator modules; S_{11} and S_{22} are square skew-symmetric matrices and S_{12} and S_{21} are matrices each other negative transpose. The state equation of the system is [8, 9]:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5)$$

$$y = Cx + Du$$

where

$$A = (S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad (6)$$

$$B = (S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (7)$$

$$C = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad (8)$$

$$D = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (9)$$

being

$$M = (I - LS_{22})^{-1}L \quad (10)$$

Next section an analyses of the steady-state of the system using a Bond Graph in derivative causality will be given.

III. STEADY-STATE [11]

The input-output difference in steady state can be calculated using (5), taking $\dot{x} = 0$, we have:

$$x_{ss} = -A^{-1}Bu_{ss} \quad (11)$$

$$y_{ss} = (D - CA^{-1}B)u_{ss} \quad (12)$$

from (11) and (12) we get

$$u_{ss} - y_{ss} = (I - D + CA^{-1}B)u_{ss} \quad (13)$$

The equation (13) gives the input-output in steady-state for an open loop system represented in space state, but we need A^{-1} and it is not easy to get for some high order systems.

We can use the Bond Graph in derivative causality to solve directly the problem to obtain A^{-1} .

Suppose that A is invertible and a derivative causality assignment is performed on the Bond Graph model [9, 10]. From (3) the junction structure is given by:

$$\begin{bmatrix} z \\ D_{ind} \\ y_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$D_{outd} = L_d D_{ind}$$

where the entries of J have the same properties as S . The storage elements in (14) have a derivative causality. So, D_{ind} and D_{outd} are defined of the same manner as D_{in} and D_{out} , they differs in which they depend on the causality assignment for the storage elements and that their junctions must have a correct causality assignment.

From (5) to (10) and (14), we obtain:

$$z = A^* \dot{x} + B^* u \quad (15)$$

$$y_d = C^* \dot{x} + D^* u$$

where:

$$A^* = J_{11} + J_{12}N J_{21} \quad (16)$$

$$B^* = J_{13} + J_{12}N J_{23} \quad (17)$$

$$C^* = J_{31} + J_{32}N J_{21} \quad (18)$$

$$D^* = J_{33} + J_{32}N J_{23} \quad (19)$$

being,

$$N = (I - L_d J_{22})^{-1} L_d \quad (20)$$

The output state equations of this system in integral causality are given by (5). It follows, from (1), (5) and (15) that:

$$A^* = FA^{-1} \quad (21)$$

$$B^* = -FA^{-1}B \quad (22)$$

$$C^* = CA^{-1} \quad (23)$$

$$D^* = D - CA^{-1}B \quad (24)$$

From (19), (21), (11) and (12), we obtain the steady state:

$$x_{ss} = F^{-1}B^*u_{ss} \quad (25)$$

$$y_{ss} = D^*u_{ss}$$

Next section, we propose a Lemma to get the input-output difference in steady-state of a system.

IV. INPUT-OUTPUT DIFFERENCE IN STEADY-STATE

To get input-output difference in steady state of a system, we propose the following Lemma.

Lemma 1

Consider a LTI system represented in a Bond Graph in according of figure 1. Let a junction structure in derivative causality for steady-state conditions of the following form:

$$\begin{bmatrix} z \\ D_{ind} \\ \bar{y}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} - I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{outd} \\ u \end{bmatrix} \quad (26)$$

Then, the input-output difference in steady-state is

$$u_{ss} - y_{ss} = -\bar{D}^* u_{ss} \quad (27)$$

where

$$\bar{D}^* = D^* - I \quad (28)$$

Proof. Taking the second line of (28) and using (14), we have:

$$D_{ind} = (I - J_{22} \bar{L}_d)^{-1} (J_{21} \dot{x} + J_{23} u) \quad (29)$$

from the third line of (25), (14) and (19),

$$\bar{y}_d = (J_{31} + J_{32} N J_{21}) \dot{x} + (J_{33} - I + J_{32} N J_{23}) u \quad (30)$$

so,

$$\bar{y}_d = C^* \dot{x} + \bar{D}^* u \quad (31)$$

where $C^* = J_{31} + J_{32} N J_{21}$ and $\bar{D}^* = J_{33} + J_{32} N J_{23}$ being $D^* = J_{33} + J_{32} N J_{23}$.

The input-output difference in steady state is:

$$u_{ss} - y_{ss} = (I - D + CA^{-1}B) u_{ss} \quad (32)$$

using (24) in (32), we have:

$$u_{ss} - y_{ss} = -(D^* - I) u_{ss} \quad (33)$$

from (28) and (33) we prove (27).

Therefore, we present a simple and direct procedure to obtain the steady-state error from the Bond graph in derivative causality of the physical system, which is shown in figure 2.

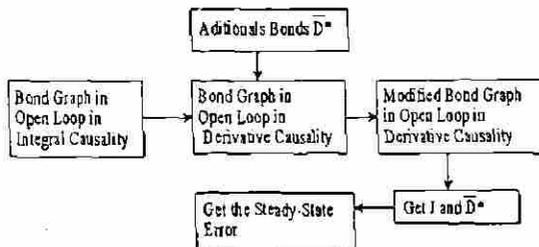


Figure 2 Scheme of procedure to get the steady state error.

Procedure 1

1.- Get the Bond Graph in open loop physical system in integral causality.

2.- Get the Bond Graph in derivative causality from the Bond Graph of step 1.

3.- Include the matrix J_{33} , the negative unit matrix, $-I$, of the following manner:

a) The negative unit matrix is a diagonal matrix, so, each output is connected with the respective input. If the input is an effort source, we use a 0-junction between the input and output, in other case, we use a 1-junction.

b) Is obtained an effort output using an active bond of the effort source, in other case a flow source is obtained a flow output.

c) The bond of the source from b) a connects to 1-junction if it is effort source, in other case, use a 0-junction.

d) From a) and c), the junctions are connected through a \mathcal{TF} , if the input and output are the same kind of variable, in other case, use a GY . In both cases the module is -1 .

e) The detector output signal is taken from the junction of a).

f) Using the modified Bond Graph, from (27) with (19), (20), (26) and (28), we obtain the input-output difference in steady-state.

Next, we introduce a procedure to obtain the steady-state error in a closed-loop system with a proportional control law in the physical domain.

V. STEADY-STATE ERROR IN A CLOSED LOOP SYSTEM USING A PROPORTIONAL CONTROL

Consider the closed-loop system of figure 3.

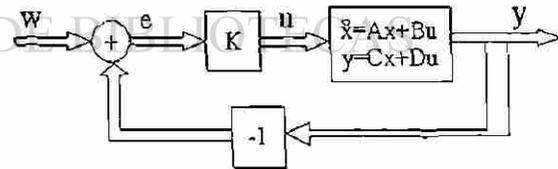


Figure 3 The closed-loop system.

In according with figure 3 and using (11) and (13), the steady-state error in closed-loop system, is given by:

$$e_{ss} = (I - D_c + C_c A_c^{-1} B_c) w_{ss} \quad (34)$$

where A_c , B_c , C_c and D_c denote the matrices A , B , C and D in closed loop of figure 3.

Using the previous procedure

$$e_{ss} = -\bar{D}^* w_{ss} \quad (35)$$

where:

$$\bar{D}_c^* = D_c^* - I \quad (36)$$

being,

$$D_c^* = D_c - C_c A_c^{-1} B_c \quad (37)$$

Using (26), (27) and (28) for the Bond Graph in closed loop system, (35) to (37) can be obtained directly.

So, we present a procedure to obtain directly the steady-state error in closed loop system using the Bond Graph model in derivative causality of the physical system, which is given on the scheme of the figure 4.

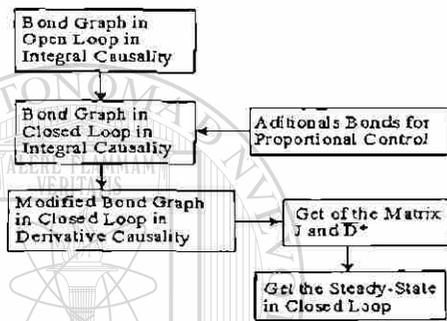


Figure 4 Scheme the steady-state error in closed loop using Bond Graph.

Procedure 2

- 1.- Get the Bond Graph of the open loop physical system in integral causality.
- 2.- Include the output feedback using an active bond between the flow output and a 1-junction, if the output of the system is effort uses a 0-junction.
- 3.- If the output and input are different kinds of variables the output after the junction of step 2 connects a GY with module of 1.
- 4.- The input of the system connects with the output of step 3 using a 1-junction, if the variables are flows in other case use a 0-junction.
- 5.- From steps 3 and 4, if the variable is the same kind to input of the system, connects the output of step 4 to TF, in other case use a GY; the module of TF or GY is the gain of the output feedback.
- 6.- The output of TF or GY from step 5, connects to input of the Bond Graph of step 1.
- 7.- The following steps consist to apply the procedure 1, to obtain first the Bond Graph in closed loop in derivative causality, to include bonds to have (36), then getting the matrix J, and finally, from (35) to calculate the steady-state error in closed loop system in the physical domain.

On the next section, an example is solved applying the procedures presented in this section.

VI. EXAMPLE

Consider a CD motor and its Bond Graph shown in figure 5.

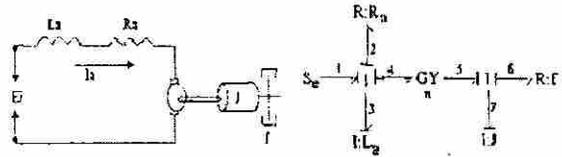


Figure 5. CD motor and its Bond Graph.

The key vectors are:

$$x = \begin{bmatrix} e_{a3} \\ e_{a7} \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_7 \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \end{bmatrix}$$

$$D_{in} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix}; D_{out} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \end{bmatrix}; y = f_6; u = e_1$$

where e_2 and e_3 denote voltages; f_2 and f_3 currents in L_a and R_a respectively, e_6 and e_7 torques; f_6 and f_7 speeds in J and F respectively; e_{a3} flux linkage in L_a ; and e_{a7} rotational momentum in J .

The constitutive relations for the elements are:

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{a3} \\ e_{a7} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (39)$$

The input-output for the gyrator is:

$$\begin{bmatrix} e_4 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_5 \\ f_5 \end{bmatrix} \quad (40)$$

The Bond Graph in derivative causality is shown in figure 6.

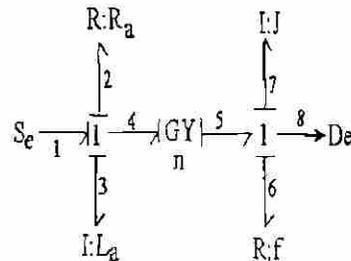


Figure 6. Bond Graph in derivative causality for the CD motor.

Applying the procedure given in the scheme of figure 2, we obtain the modified Bond Graph in derivative causality which is shown in figure 7.

REFERENCES

- [1] Paynter, H. M., "Analysis and design of engineering", MIT press, Cambridge, Mass (1961).
- [2] Dean C. Karnopp, Ronald C. Rosenberg, "System Dynamics: A Unified Approach", Wiley, John & Sons, April (1975).
- [3] P.E. Wellstead, "Physical System Modelling", Academic Press, London, (1979).
- [4] D. C. Karnopp, "Bond Graph in Control: Physical state variable and observers", J. Franklin Institute 308(3) pp. 221-234, (1979).
- [5] C. Suer, G. Dauphin-Tanguy, "Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems", J. Franklin Inst., vol. 328, No.1 pp. 55-70, (1991).
- [6] Chi-Tsong Chen, "Linear System Theory and Design", Oxford University Press, (1999).
- [7] P. J. Gawthrop, "Physical Model-Based Control: A Bond Graph Approach", J. Franklin Institute, 332B(3), pp. 285-305, (1995).
- [8] Peter Gawthrop, Lorcan Smith, "Metamodelling", Prentice-Hall, (1996).
- [9] G. Dauphin-Tanguy y P. Borne, "Order Reduction of Multi-time Scale Systems Using Bond Graphs, the Reciprocal System and Singular Perturbation Method", Journal of the Franklin Institute, Vol. 319, No. 1/2, pp. 157-171. Enero/Febrero 1985.
- [10] C. Suer y G. Dauphin-Tanguy, "Bond Graph Approach to Multi-Time Scale Systems Analysis", Journal of the Franklin Institute, Vol. 328, No. 5/6, pp. 1005-1026, 1991.
- [11] Gonzalez-A. Gilberto, R. Galindo, "Steady-State Values for a Physical with Bond Graph Approach", 9th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, Miedzydroje, Poland pp.1317-1322, 2003.
- [12] Gonzalez-A. Gilberto, R. Galindo, "Direct Control in Bond Graph by State Estimated Feedback for MIMO LTI Systems", Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Control Applications, September 18-20, Glasgow, Scotland, U.K.

