FORMULACIÓN MATEMÁTICA DE ECUACIONES DE DIMENSIONAMIENTO DE COSTURA DE TUBERÍA HELICOIDAL

José Alfredo Sánchez De León
UANL-FCQ
Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Químicas
San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México

Resumen:

En este artículo se presenta la formulación matemática de un conjunto de ecuaciones que pueden ser utilizadas para la determinación de ciertas variables críticas del proceso de fabricación de tubería helicoidal: longitud, ángulo de inclinación y rotaciones de costura y longitud de lámina requerida para su fabricación. Se establece una relación de estas variables críticas con otras provenientes directamente de información específica del producto y del proceso, las cuales son: diámetro y longitud de tubo y ancho de lámina para su producción. La idea de generar estas ecuaciones surge debido a la necesidad de llevar a cabo la predicción de los valores de estas variables críticas ante alguna modificación en parámetros de proceso, sin la necesidad de contar físicamente con una unidad de fabricación para realizar la medición de las mismas. Se investigó en libros de matemáticas, en normas de fabricación aplicables y en la red; no obstante, no se encontró la información requerida, por lo que se procedió a llevar a cabo esta formulación.

Palabras claves:

función vectorial, longitud de curva alisada, ecuación paramétrica, tubería helicoidal

Introducción

En la industria metal mecánica, de entre la variedad de materiales cilíndricos producidos, se encuentran la tubería soldada longitudinalmente y la soldada helicoidalmente. Para llevar a cabo la formación geométrica de un tubo, es necesario unir dos segmentos de lámina a lo largo de toda la pieza mediante soldadura. La interfaz (soldadura) formada entre estos dos segmentos se denomina costura, y representa un segmento de material muy controlado en el proceso.

En la tubería soldada longitudinalmente, por ejemplo, HFW (High Frecuency Welding), las características de la costura se pueden obtener directamente del tubo: la longitud de costura es igual a la longitud del tubo, y como el material no rota, la costura no presenta inclinación. En el caso de la tubería soldada helicoidalmente DSAW (Double Submerged Arc Welding), debido a que el molino formador transfiere rotación al material, la determinación de la longitud de costura se torna menos intuitiva y además surgen nuevas variables como son el ángulo de inclinación de costura y rotación.

Las principales variantes que se podrían presentar en el proceso que afectan a las variables críticas descritas son, principalmente, la utilización de distintos anchos de rollo y la producción de diferentes diámetros y longitudes, por lo cual, la formulación se base en ellas. Normalmente, para llevar a cabo la determinación de estas variables se procedería a medir físicamente una unidad de producción de material mediante instrumentos como cinta métrica y transportador.

A través de este documento, se describe, primeramente de manera detallada, la formulación matemática de las ecuaciones que expresan el cálculo de las principales variables críticas descritas anteriormente asociadas al proceso de fabricación. Posteriormente, se presenta un ejemplo de aplicación en campo de cada una de las ecuaciones obtenidas mediante este análisis.

Establecimiento de función vectorial representativa

La siguiente función vectorial paramétrica describe la espiral elíptica [1]:

$$r(t) = \langle a\cos t\,\mathbf{i} + b\cos t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} \rangle$$

Cuando $a=b$ la función se convierte en la de una espiral circular de radio r $(r=a=b)$. Para describir la helicoide se necesita establecer el parámetro (t) como posición angular, (de $0 - 2\pi$, por ejemplo). El tercer término de la función hace referencia al eje z, de tal manera que es necesario establecer una relación adecuada entre el eje z y la posición angular de la helicoide:

Se requiere que la distancia horizontal Δz sea igual a A, que representa la distancia horizontal de un punto a otro de la helicoide (o longitud de paso) cuando $\Delta t = 2\pi$, tal como se muestra en la **Figura 1**:

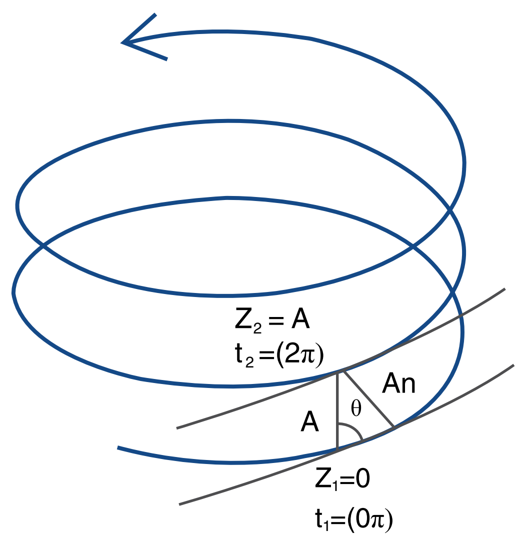

Figura 1

Estableciendo esto en una relación, e introduciendo el operador diferencial:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{A}{2\pi}$$

Integrando y despejando para z:

$$z = \frac{A}{2\pi}t$$

Pero es necesario expresar la relación anterior en términos del ancho de cinta para un tubo helicoidal An. Según la **Figura 1**, se tendría entonces que:

$$A = \frac{An}{sen\theta}$$

Así de esta manera se establece:

$$z = \frac{An}{2\pi sen\theta}t$$

Con todas las relaciones anteriores ahora podríamos expresar la función vectorial que describa la helicoide en términos de las variables que representan físicamente un tubo:

$$r(t) = \left\langle \frac{1}{2} D\cos t\mathbf{i} + \frac{1}{2} D\,\mathrm{sen}\,t\mathbf{j} + \frac{An}{2\pi\,\mathrm{sen}\theta} t\mathbf{k} \right\rangle \qquad (1)$$

Donde
D = Diámetro de tubo
An = Ancho de lámina de fabricación

Longitud de la curva alisada

Ahora se puede obtener la longitud alisada de la curva en un segmento de referencia, por ejemplo de $0 - 2\pi$:

$$s = \int_a^b |r'(t)|\, dt$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} D\cos t\mathbf{i}\right)\right]^2 + \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} D\,\mathrm{sen}\,t\mathbf{j}\right)\right]^2 + \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{An}{2\pi\,\mathrm{sen}\theta} t\mathbf{k}\right)\right]^2}\, dt$$

Diferenciando el radical, integrando, sustituyendo y simplificando obtenemos:

$$s = 2\pi \sqrt{\frac{1}{4} D^2 + \left(\frac{An}{2\pi\,\mathrm{sen}\theta}\right)^2} \qquad (2)$$

Que brinda la longitud de la curva en el segmento de $0 - 2\pi$.

Longitud de costura

Ahora bien, en este segmento de la curva ($0 - 2\pi$) la distancia horizontal a lo largo del eje z es A o $An/\mathrm{sen}\theta$; entonces el cociente de la función anterior con la distancia horizontal del segmento, daría la longitud de curva por unidad de longitud horizontal (eje z); y al multiplicarlo por una longitud arbitraria (longitud de tubo, por ejemplo) arrojaría la longitud de la helicoide en todo ese segmento:

$$LC = \frac{2\pi\,\mathrm{sen}\theta \; \frac{1}{4} D^2 + \left(\frac{An}{2\pi\,\mathrm{sen}\theta}\right)^2}{An} L \qquad (3)$$

Donde:

LC = Longitud de costura

L = Longitud de tubo helicoidal (arbitraria)

θ = Ángulo de inclinación de la costura con respecto a la dirección del radio

Si obtenemos un vector tangente en un punto de la curva y otro vector ortogonal a este en el mismo punto, entonces el ángulo que se formaría entre estos dos vectores sería igual al ángulo de inclinación de la costura θ, tal como se ilustra en la **Figura 2**:

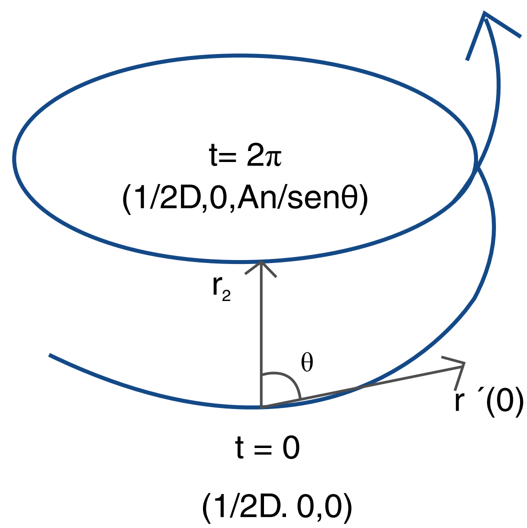

Figura 2

Vector tangente

Se obtiene la derivada de la función vectorial $r(t)$:

$$r'(t) = \left\langle -\frac{1}{2} D\,\mathrm{sen}\,t\mathbf{i} + \frac{1}{2} D\cos t\mathbf{j} + \frac{An}{2\pi\,\mathrm{sen}\theta}\mathbf{k} \right\rangle$$

Se evalúa el vector en un punto de referencia, por ejemplo en t=0:

$$r'(0) = \left\langle \frac{1}{2} D\mathbf{j} + \frac{An}{2\pi\,\mathrm{sen}\theta}\mathbf{k} \right\rangle$$

Vector ortogonal

Se obtiene un vector entre el mismo punto de referencia t=0 y entre otro, como t=2π, de tal manera que sea paralelo al eje z:

$$A=\left(\frac{1}{2}D,0,0\right) \qquad B=\left(\frac{1}{2}D,0,\frac{An}{sen\theta}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}=\left(0,0\ \frac{An}{sen\theta}\right)$$

Entonces se representa el vector:

$$r_2=\left\langle \frac{An}{sen\theta}\mathbf{k}\right\rangle$$

Ambos vectores son ortogonales a sí mismos. Se procede ahora a determinar el ángulo que se forma de la intersección de estos dos vectores.

Ángulo entre el vector tangente y ortogonal

Ahora se procede a determinar el ángulo que se forma entre estos dos vectores [2]:

$$\cos\theta=\frac{r'(0)-r_2}{|r'(0)||r_2|}$$

Sustituyendo r´(0) y r_2 :

$$\cos\theta=\frac{\frac{An^2}{2\pi sen^2\theta}}{\sqrt{\frac{1}{4}D^2+\frac{An^2}{(2\pi)^2 sen^2\theta}}\sqrt{\frac{An^2}{sen^2\theta}}}$$

Despejando para θ, y empleando las identidades trigonométricas adecuadas para simplificar [3]:

$$\theta=\arccos\left(\frac{An}{\pi D}\right) \qquad (4)$$

Ahora, sustituyendo (4) en (3), obtenemos:

$$LC=\frac{2\pi}{An}\sqrt{\left[1-\left(\frac{An}{\pi D}\right)^2\right]}-\sqrt{\frac{1}{4}D^2+\left(\frac{An}{2\pi\sqrt{1-\left(\frac{An}{\pi D}\right)^2}}\right)^2}-L$$

Simplificando:

$$LC=\frac{\pi D}{An}L \qquad (5)$$

Que representa la ecuación de longitud de costura.

Ángulo de inclinación de costura

El ángulo de inclinación de la costura con respecto al eje horizontal paralelo a la dirección de r estaría dado por el complemento de θ para $\pi/2$.

Entonces:

$$\theta_c=\pi/2-\theta$$

$$\theta_c=\pi/2-\arccos\left(\frac{An}{\pi D}\right) \qquad (6)$$

Donde:

θc = Ángulo de inclinación de costura

Rotación de costura

Es posible obtener la cantidad de revoluciones de la costura en el tubo a lo largo de toda su longitud.

Como la longitud del segmento alisado S equivale a 2π rad ó 1 rev, entonces el cociente de la longitud de costura con el segmento S, daría exactamente el número de segmentos totales en todo el intervalo L.

De esta manera, dividiendo la ecuación (3) entre la (2) y sustituyendo θ en ambas, se obtiene:

$$R=\frac{LC}{S}$$

$$R=\frac{\frac{2\pi}{An}\sqrt{\left[1-\left(\frac{An}{\pi D}\right)^{2}\right]}-\sqrt{\frac{1}{4}D^{2}+\left(\frac{An}{2\pi\sqrt{1-\left(\frac{An}{\pi D}\right)^{2}}}\right)^{2}}-L}{2\pi\sqrt{\frac{1}{4}D^{2}+\left(\frac{An}{2\pi\sqrt{1-\left(\frac{An}{\pi D}\right)^{2}}}\right)^{2}}}$$

$$R=\frac{L}{An}\sqrt{\left[1-\left(\frac{An}{\pi D}\right)^{2}\right]} \qquad (7)$$

Donde:

R = Cantidad de revoluciones de la costura a lo largo del intervalo L

Longitud de lámina

Finalmente es posible también obtener fácilmente la longitud de lámina mínima necesaria para formar n cantidad de tubos, gracias a las variables obtenidas anteriormente.

La **Figura 3** muestra un segmento de tubo helicoidal cortado en espiral en dirección de la costura y extendido:

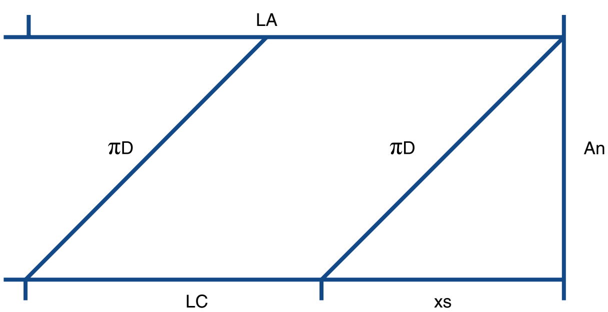

Figura 3

Según la **Figura 3**, xs estaría dada por:

$$xs=\sqrt{(\pi D)^{2}-An^{2}}$$

Donde:

xs= Longitud de tramo de corte (necesario por morfología)

Como a lo largo del segmento LA, el patrón geométrico representa una serie definida, entonces la longitud del segmento estaría dada por el producto del número de patrones geométricos por la longitud de la costura más el tramo de corte xs necesario para obtener la morfología actual del tubo:

$$LA = n\cdot LC_{ext}+\sqrt{(\pi D)^{2}-An^{2}} \qquad (8)$$

Donde:

LA = Longitud mínima de lámina

n = Cantidad de tubos formados

LC_{ext} = Longitud de costura externa

Resumen de ecuaciones de dimensionamiento:

$$LC=\frac{\pi D}{An}L \qquad (5)$$

$$\theta_{c}=\pi/2-\arccos\left(\frac{An}{\pi D}\right) \qquad (6)$$

$$R=\frac{L}{An}\sqrt{\left[1-\left(\frac{An}{\pi D}\right)^{2}\right]} \qquad (7)$$

$$LA = n\cdot LC_{ext}+\sqrt{(\pi D)^{2}-An^{2}} \qquad (8)$$

Donde:

D = Diámetro de tubo

LC = Longitud de costura

LC_{ext} = Longitud de costura externa

An = Ancho de lámina de fabricación

L = Longitud de tubo

θc = Ángulo de inclinación de costura

R = Cantidad de vueltas de costura

LA = Longitud mínima de lámina

n = Cantidad de tubos formados

Ejemplo de aplicación

Para un tubo helicoidal de 48.000" de diámetro externo, de 15 m de longitud y que se fabrica con rollo de acero 1010 de 0.375" de espesor y de 485/8" de ancho; calcular:

a. La longitud de material que es necesario soldar externamente e internamente

b. El ángulo de inclinación de la costura externa

c. La cantidad de vueltas necesarias para formar el tubo

d. Suponiendo que uno de estos tubos se desdobla completamente, ¿cuál sería la longitud total de lámina que se desplegaría?

e. ¿Cantidad de estos tubos que podrían fabricarse con 150m de longitud de esta lámina?

f. Determinar la longitud del cordón de soldadura externo suponiendo que este cordón cuenta con un espesor de 0.110"

Soluciones al ejemplo de aplicación

a. Se utiliza la ecuación (5) con los valores de diámetro externo, ancho de lámina y longitud.

Para la parte externa del tubo se utilizan los datos directamente de la siguiente manera:

$$LC = \frac{\pi(48.00")}{48\frac{5}{8}"}\left(15m\ \frac{1"}{0.0254m}\right) = 1831" = 46.52m$$

Para dar un valor de: 46.52m.

Para la parte interna del tubo se toma $D=D_{ext}-2*(espesor)$ para obtener: 45.79m.

$$LC = \frac{\pi[(48" - 2(0.375")]}{48\frac{5}{8}"}\left(15m\ \frac{1"}{0.0254m}\right) = 1802.81"$$

$$= 45.79m$$

b. Se aplica la ecuación (6) con los valores antes mencionados para obtener: 18.81°.

$$\theta_c = \left[\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\frac{48\frac{5}{8}"}{\pi(48")}\right)\right]\left[\frac{180°}{1rad}\right]$$

c. Se utiliza directamente la ecuación (7) y se obtiene: 11.5 rev ó 11 rev + 180 grados.

$$R = \frac{15m\ \frac{1"}{0.0254m}}{48\frac{5}{8}"}\sqrt{\left[1 - \left(\frac{48\frac{5}{8}"}{\pi(48")}\right)^2\right]}$$

d. Se aplica la ecuación (8) para n=1 y se obtiene: 50.14m.

$$LA = (1)\,(1831.42") + \sqrt{[\pi(48")]^2 - \left(48\frac{5}{8}"\right)^2}$$

e. De la ecuación (8) se despeja para n, se sustituye con LA=150m y con los valores antes obtenidos para dar: n=3.14=3 tubos

$$n = \frac{\left(150m\ \frac{1"}{0.0254m}\right) - \sqrt{[\pi(48")]^2 - \left(48\frac{5}{8}"\right)^2}}{1831.42"}$$

f. Se toma la ecuación (5) y se calcula LC adicionando al valor del diámetro externo dos veces el espesor del cordón de soldadura, para obtener: 46.73m.

$$LC = \frac{\pi\,(48.00" + 0.220")}{48\frac{5}{8}"}\left(150m\ \frac{1"}{0.0254m}\right)$$

Conclusiones

El conjunto de ecuaciones de dimensionamiento de tubería helicoidal obtenido mediante este análisis representa una buena opción para la determinación las variables críticas dimensionales en el proceso de producción de la tubería helicoidal mencionadas anteriormente, utilizando datos de entrada inherentes de proceso: diámetro de tubo, longitud y ancho de lámina.

Si bien en este artículo se describe la aplicación del conjunto de ecuaciones en la industria metal mecánica a la tubería helicoidal de acero, de igual manera su campo de aplicación puede ser en realidad más generalizado, pudiéndose aplicar en otros ramos con otros materiales, por ejemplo, tubos de cartón, o cualquier otro objeto cuyo proceso de unión también se lleve a cabo en forma espiral.

El análisis que se describe en este artículo fue desarrollado debido a una necesidad que surgió en la planta de TH Tubería Helicoidal, S.A. de C.V., una empresa del grupo Villacero [4], la cual se dedica a la producción de tubería helicoidal de acero en distintos diámetros.

Referencias

[1] Smith, R. T., Minton & Roland B. *Calculus concepts & connections*. McGraw-Hill. 2006.

[2] Anton, H. *Introducción al álgebra lineal*. 2a ed. Editorial Limusa. 1998.

[3] Dugopolski, M. *Trigonometry*. Addison Wesley. 2003.

[4] Grupo Villacero. Recuperado de: http://www.villacero.com

Datos del autor:

José Alfredo Sánchez de León

Es Ingeniero Químico egresado de la Facultad de Ciencias Químicas de la UANL. Actualmente se desempeña como Supervisor de Control de Calidad en una empresa del grupo Villacero.

Dirección del autor: Tubería Nacional, S.A. de C.V.
Av. Diego Diaz de Berlanga #1002 Sur, Col. Nogalar, San Nicolás de los Garza, N.L. C.P. 66480.

Email: jose.sanchez@villacero.com; dirac_1902@hotmail.com