Modelando incertidumbre en el diseño de una cadena de suministro

ÁNGELES BÁEZ O.*, YAJAIRA CARDONA V.**, ADA ÁLVAREZ S.**

En los últimos años, la modelación matemática de problemas de cadenas de suministro ha adquirido gran importancia, debido a que éstos involucran problemas relevantes: reducción de inventarios, minimización de costos de operación, maximización de ganancias, etcétera.

Un subproblema frecuente dentro de los problemas de diseño de cadena de suministro es el de ubicación de instalaciones. En Snyder[1] se encuentra una amplia recopilación de éstos, y se incluyen algunas aplicaciones. Dentro de los estudios que consideran explícitamente la incertidumbre, se puede mencionar el trabajo de Birge y Louveaux,[2] en el que presenta la versión estocástica del problema capacitado P–mediana, y el problema capacitado de ubicación con carga fija. Por su parte, Snyder y Daskin[3] aplican la metodología de robustez para un problema de ubicación de instalaciones no capacitado, combinan las medidas de mínimo costo esperado y *p*–robustez. Albareda-Sambola y Fernández[4] abordan un problema discreto de localización en el que se supone que las plantas en caso de abrirse tendrán una capacidad limitada conocida e incorporar el factor de incertidumbre en las demandas de los clientes. El problema se resuelve bajo el enfoque de la programación estocástica con recurso.

Tsiakis *et al.*[5] consideran una cadena multinivel, multiproducto, con incertidumbre en las demandas, con base en escenarios. Guillén *et al.*[6] generalizan en cierta forma ese trabajo, toman en cuenta dos objetivos.

Los trabajos anteriores consideran o bien un solo aspecto de la cadena de suministro (sólo asignación o transportación u otros), o bien consideran un solo nivel, o un solo criterio de desempeño, etcétera.

El problema que se aborda en este trabajo se basa en un diseño de cadena de suministro de dos niveles, en donde el producto es enviado de las plantas a los almacenes en el primer nivel, y de los almacenes a los centros de distribución en el segundo. Se cuentan con diversos medios de transporte para enviar el producto a lo largo de la cadena, los cuales se diferencian entre sí por el tiempo empleado y el costo. La demanda de los productos en los centros de distribución se considerará aleatoria, y se modelará a través de escenarios. Las decisiones fundamentales consisten en la selección de los almacenes (también denominados "bodegas") a abrir y la selección del servi-

* Matemáticas aplicadas, UAQ. Contacto: mabo601@gmail.com
** Posgrado en Ingeniería de Sistemas, UANL.
Contacto: yaja.carval@gmail.com; amas94@yahoo.com

cio de transporte entre cada par de instalaciones. Asimismo, deben determinarse los flujos del producto de las plantas a las bodegas, y desde éstas hacia los centros de distribución.

Descripción del problema

A continuación se describirá con un poco más de detalle el problema abordado. Primero se introducirá el problema determinista; posteriormente se harán las adecuaciones pertinentes para modelar la incertidumbre.

El número de plantas existentes, así como sus capacidades, son fijas y conocidas de antemano, el número de centros de distribución existentes también es fijo y cada uno de ellos tiene asociado una demanda del producto. Las bodegas tienen definidas una capacidad y un costo fijo por abrirse, el cual depende del lugar donde se ubiquen. Además, se manejan varios tipos de servicio de transporte para trasladar el producto entre cada par de instalaciones, los cuales están caracterizados por dos parámetros: costo y tiempo. Estos parámetros se relacionan mutuamente, ya que a un tiempo menor de transporte corresponde un costo mayor.

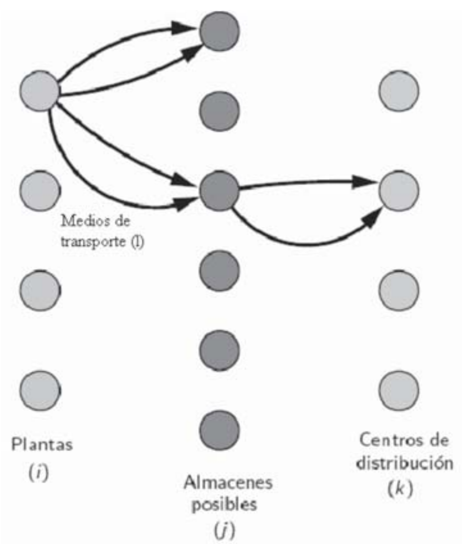

Fig. 1. Cadena de suministro de dos niveles.

Los objetivos que se plantean son:

(1) f_1: minimizar el costo total en que se incurre (por abrir las bodegas y por transportar el producto).

(2) f_2: minimizar el tiempo máximo que toma mover el producto a lo largo de la cadena.

Las variables de decisión involucradas son las siguientes:

X_{ijl}: cantidad transportada de la planta i a la bodega j, utilizando el arco ijl.

Y_{jkl}: cantidad transportada de la bodega j al centro de distribución k, utilizando el arco jkl.

$$Z_j \begin{cases} 1 & \text{si la bodega } j \text{ se abre} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$A_{ijl} \begin{cases} 1 & \text{si el arco } ijl \text{ se usa para transportar producto de la planta } i \text{ a la bodega } j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$B_{jkl} \begin{cases} 1 & \text{si el arco } jkl \text{ se usa para transportar producto de la bodega } j \text{ al centro de distribución } k \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A continuación se describen algunos de los parámetros involucrados en las funciones–objetivo y en las restricciones que se mostrarán más adelante.

CP_{ijl}: costo por transportar una unidad de producto de la planta i a la bodega, usando el arco ijl.

CW_{jkl}: costo por transportar una unidad de producto de la bodega j al centro de distribución k, usando el arco jkl.

TP_{ijl}: tiempo por transportar cualquier cantidad de producto de la planta i a la bodega j, usando el arco ijl.

TW_{jkl}: tiempo por transportar cualquier cantidad de producto de la bodega j al centro de distribución k, usando el arco jkl.

D_k: demanda en el centro de distribución k.

F_j: costo fijo por abrir una bodega j.

$$\min f_1 = \overbrace{\sum_{j\in J} F_j Z_j}^{\text{Costo fijo por abrir bodegas.}} + \overbrace{\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{l\in LP_{ij}} CP_{ijl} X_{ijl} + \sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\sum_{l\in LW_{jk}} CW_{jkl} Y_{jkl}}^{\text{Costo por transportar producto a través de la cadena.}}$$

$$\min f_2 = \underbrace{\max_{j}\left(\max_{i,l}\left(TP_{ijl}A_{ijl}\right) + \max_{k,l}\left(TW_{jkl}B_{jkl}\right)\right)}_{\text{Tiempo máximo que toma transportar el producto de las plantas a las bodegas y de éstas a los centros de distribución.}}$$

Para no tratar con un problema de *minmax*, se linealiza la función objetivo del tiempo, y se introducen al modelo algunas variables auxiliares y restricciones. De esta manera, la segunda función-objetivo queda reformulada como: $\min f_2 = T$.

El modelo desarrollado por Olivares[7] contempla, entre otras cosas, que cada centro de distribución sea abastecido por una sola bodega, que el flujo que sale de las plantas o bodegas no exceda la capacidad de las mismas, y que sea sólo a través de medios de transporte activos. También considera las restricciones usuales de balance, esto es, que el flujo que entra a cada bodega desde las plantas salga hacia los centros de distribución.

Dado que el problema en cuestión es biobjetivo, al resolverlo no se obtiene una solución única, sino un conjunto de soluciones que tienen la característica de que para cada una de ellas no existe otra que haga mejor uno de los objetivos sin empeorar de forma simultánea al otro. A este conjunto de soluciones se les denomina eficientes.[8]

Ejemplo I (caso determinista)

Se presenta una instancia de dos plantas, dos ubicaciones potenciales para abrir las bodegas, dos centros de distribución y dos medios de transporte posibles. En las tablas I a IV se muestran los valores de los parámetros.

Tabla I. Demanda.

Centro de distribución	Demanda
1	7938
2	9879

Tabla II. Capacidad y costo fijo.

	Capacidad	Costo
Planta 1	9808	-----
Planta 2	11496	-----
Bodega 1	23236	124017.680
Bodega 2	10147	54157.660

Tabla III. Costo y tiempo de transporte de las plantas a las bodegas.

	Transporte 1		Transporte 2	
Planta - bodega	Costo	Tiempo	Costo	Tiempo
1-1	3	19	3	17
1-2	4	14	6	9
2-1	10	5	4	13
2-2	5	11	3	19

Tabla IV. Costo y tiempo de transporte de las bodegas a los centros de distribución.

	Transporte 1		Transporte 2	
Bodega – centro de distribución	Costo	Tiempo	Costo	Tiempo
1-1	5	11	7	7
1-2	8	6	7	7
2-1	2	22	3	18
2-2	3	17	2	23

Las soluciones eficientes se obtuvieron con el método de la ε-restricción.[8]

Tabla V. Conjunto de soluciones eficientes.

f_1 (Costo)	f_2 (Tiempo)
291074.340	42
294320.680	30
294320.680	28

Al tomador de decisiones se le presenta el conjunto de soluciones eficientes mostradas en la tabla V para que elija cuál solución implementará. Si selecciona la opción más económica en tiempo, la red sería la mostrada en la figura 2, con las características que se presentan en la tabla VI.

En este caso se decide ubicar una bodega en el sitio 1; además, en el primer nivel de la cadena se manda producto desde ambas plantas hacia esa única bodega abierta, y se utiliza el medio de transporte 2, representado por la línea puntea-

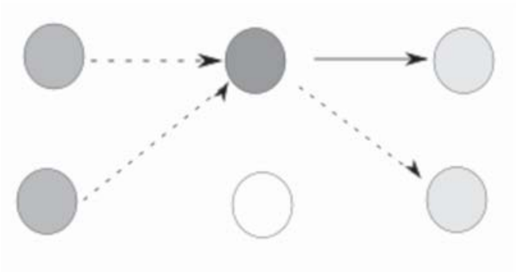

Fig. 2. Cadena de suministro elegida por el decisor.

da; y en el segundo nivel se utilizan ambos servicios de transporte para enviar el producto de la bodega a los dos centros de distribución, el medio de transporte 1 se representa por la línea continua.

Tabla VI. Cantidad de flujo que se envía a través de la cadena.

Planta - Bodega	Transporte	Flujo
1-1	2	9808
2-1	2	8009
Bodega - CD	Transporte	Flujo
1-1	1	7938
1-2	2	9879
f_1 = 294 320.680		
f_2 = 28		

Ejemplo II (introduciendo incertidumbre)

Supongamos, como es usual, que en el momento del diseño no se conoce con exactitud el valor que se presentará en la demanda de los centros de distribución. Consideremos, por ejemplo, que tomará uno de dos valores posibles: uno de demanda alta (que denominaremos escenario uno), mostrado anteriormente en la tabla I, y otro de demanda baja (denominado escenario dos), que se muestra en la tabla VII. Ambos escenarios se asumirán equiprobables.

Tabla VII. Demanda baja.

Centro de distribución	Demanda
1	3965
2	3901

Una práctica usual es "ignorar" la incertidumbre a la hora de modelar el problema y en su lugar resolver el problema determinista, que se obtiene al tomar para las demandas el promedio o valor esperado de sus valores posibles, esto se muestra en la tabla VIII.

Tabla VIII. Demanda promedio.

Centro de distribución	Demanda
1	5951.5
2	6890

Resolviendo tal problema, denominado *problema del valor esperado*, el conjunto de soluciones eficientes sería el que aparece en la tabla IX.

Tabla IX. Conjunto de soluciones eficientes para el problema de valor esperado.

f_1 (Costo)	f_2 (Tiempo)
243563.18	28
255466.18	24

La desventaja que presenta esta estrategia, esto es, tomar como posibles soluciones las que arroja la resolución del problema de valor esperado, es que en realidad se presentará solamente uno de los dos escenarios para las demandas, no el valor promedio, y puede suceder que la solución escogida por el tomador de decisiones no se ajuste bien a los parámetros del escenario que se presente.

Modelando la incertidumbre

Dado que en realidad puede presentarse cualquiera de los dos escenarios, se pretende obtener un diseño de red que sea capaz de manejar cualquiera de los dos (o más) escenarios que se presenten. Para ello, se propone modelarlo como un problema de programación estocástica de dos estados. Se llama de dos estados porque las decisiones que se toman antes que se devele la incertidumbre se denominan de primer estado, mientras que las que se toman después de conocer los valores que tomaron los parámetros inciertos se denominan de segundo estado.[2] En este caso las variables de decisión y funciones objetivo se convierten en:

X_{sijl}: cantidad transportada de la planta *i* a la bodega *j,* utilizando el arco *ijl* bajo el escenario *s.*

Y_{sjkl}: cantidad transportada de la bodega *j* al centro de distribución *k,* utilizando el arco *jkl* bajo el escenario *s.*

$$Z_j \begin{cases} 1 & \text{si la bodega } j \text{ se abre} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$A_{ijl} \begin{cases} 1 & \text{si el arco } ijl \text{ se usa para transportar producto de la planta i a la bodega } j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$B_{jkl} \begin{cases} 1 & \text{si el arco } jkl \text{ se usa para transportar producto de la bodega } j \text{ al centro de distribución } k \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Con esta nueva formulación del problema, las decisiones de primer estado serán determinar qué bodegas abrir y cuáles transportes emplear en ambos niveles de la cadena de suministro (*Z,A,B*), y las de segundo estado consistirán en determinar los flujos en ambos niveles de la cadena de suministro para cada escenario potencial (*X,Y*). Cabe destacar que con el modelo que proponemos el diseño de la cadena será el mismo para cualquier escenario que se presente, lo que variará en cada escenario será la cantidad de flujo enviada a través de los arcos, en dependencia de la demanda que realmente se presentó.

Las funciones objetivos tomarán la forma:

$$\min f_1 = \sum_{j\in J} F_j Z_j + \sum_{s\in S} p(s) \overbrace{\left(\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{l\in LP_{ij}} CP_{ijl} X_{sijl} + \sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\sum_{l\in LW_{jk}} CW_{jkl} Y_{sjkl} \right)}^{\text{Valor esperado del costo por transportar producto.}}$$

$$\min f_2 = T$$

donde *p(s)* representa la probabilidad de ocurrencia de cada escenario.

Resolviendo el problema estocástico en forma extensiva, esto es, considerando en la formulación explícitamente las variables de segundo estado (flujos) para todos los escenarios, las soluciones obtenidas son:

Tabla X. Conjunto de soluciones eficientes para el problema estocástico.

f_1 (Costo)	f_2 (Tiempo)
308 503.340	24
329 732.680	12

Estas soluciones eficientes se muestran al decisor para que elija finalmente una para su implementación. Si el decisor selecciona, como en los casos anteriores, la opción más económica en tiempo, la red sería:

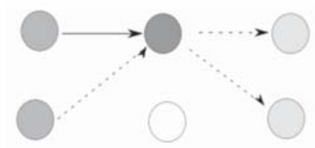

Fig. 3. Solución para el problema estocástico.

En este caso se abre la bodega uno. En el primer nivel se manda producto de la planta uno con el medio de transporte uno, y de la planta dos a la bodega uno se utiliza el medio de transporte dos, y en el segundo nivel de la cadena se utiliza sólo el medio de transporte dos para enviar el producto de la bodega a los dos centros de distribución. En la tabla XI se muestra la cantidad de flujo que se envía en cada uno de los escenarios posibles a través de la cadena.

Tabla XI. Escenarios de demanda alta y baja.

		Esc 1	Esc 2
Planta-bodegas	Transporte	Flujo	Flujo
1.1	1	9808	7865
2.1	2	8009	1
bodega-CD	Transporte	Flujo	Flujo
1.1	2	7938	3965
1.2	2	9879	3901

Experimentación computacional

Cabe destacar que al formular el problema en su forma extensiva, todas aquellas restricciones que incluían alguna variable de decisión de flujo tuvieron que ser modificadas, por lo que el número de variables y restricciones aumentó considerablemente. Por ejemplo, en el caso determinista, la variable X_{ij} representa la cantidad de flujo enviado en el primer nivel de la cadena, en la forma extensiva esta variable representa la cantidad de flujo enviado en el primer nivel en determinado escenario. Entonces, por cada restricción que involucre alguna variable de segundo estado tendremos tantas restricciones como escenarios se estén considerando. Por ejemplo, en el modelo determinista tenemos una restricción que indica que debemos satisfacer la demanda para cada centro de distribución, a partir del flujo proveniente de las bodegas.

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in LW_{jk}} Y_{jkl} = D_k \qquad \forall k \in K$$

Entonces, en la forma extensiva tendremos que satisfacer la demanda de cada centro de distribución en cada escenario posible:

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in LW_{jk}} Y_{sjkl} = D_{sk} \qquad \forall s \in S, \quad k \in K$$

Aquí, S denota el conjunto de escenarios posibles para la demanda; K el conjunto de centros de distribución, y LW_{jk} denota el conjunto de arcos l entre los nodos j y k.

Para nuestro caso, en la parte determinista teníamos dos restricciones (una por cada centro de distribución), mientras que en la formulación estocástica del problema a través de la forma extensiva ahora tenemos cuatro restricciones (dos por cada escenario).

Con la finalidad de determinar cómo crecía el tiempo de computación al crecer el tamaño de las instancias cuando se resolvía el modelo en su forma extensiva, se realizó un estudio a través del paquete computacional GAMS.

Las instancias con las que se experimentó se muestran en la tabla XII; la primera columna muestra el tamaño de la instancia, la cual está organizada como Plantas- Bodegas-Centros de Distribución-Medios de Transporte-Escenarios; la segunda columna muestra el tiempo de CPU que se requirió para resolver dicha instancia.

Tabla XII. Instancias experimentales.

Tamaño	Tiempo (segundos)
3-3-4-2-2	0.468
3-3-4-2-3	0.900
5-5-5-2-2	3.510
5-5-5-2-3	5.380
5-5-5-5-2	126.880
5-5-5-5-3	224.630
5-5-20-2-2	1000.030
5-5-20-2-3	1000.050

Se pudo observar que a mayor tamaño de la instancia, el tiempo de computación se incrementaba grandemente. Esto sugiere la necesidad de implementar algoritmos de programación estocástica que aprovechen algunas de las propiedades estructurales del modelo y resuelvan el problema de una manera más eficiente.

Conclusiones

El problema de diseño de cadena de suministro abordado se ilustró para el caso de dos escenarios (demanda alta y baja). La resolución del problema determinista para cada escenario de forma independiente ayudó a entender cuáles decisiones serían las más adecuadas en caso de que se presentara una u otra situación.

Si para dar solución al problema se hubiera ignorado la incertidumbre, resolviendo el problema determinista de valor esperado (considerando el valor esperado de la demanda) y posteriormente hubiera ocurrido el escenario de demanda alta, es evidente que las decisiones tomadas no habrían sido las adecuadas para el escenario presentado. A lo largo de este artículo se mostró que una manera de solucionar dicha situación es aplicar la programación estocástica con recurso (forma extensiva) ya que ésta, al considerar explícitamente las variables de segundo estado, permite tomar decisiones más adecuadas que tienen en cuenta los escenarios que pueden ocurrir. Para nuestro caso, el diseño de la cadena (conjunto de bodegas a abrir y la selección de medios de transporte en ambos niveles) es la misma para cada escenario, mientras que los flujos están en dependencia del escenario de demanda que se presente.

La ventaja de formular el problema mediante la forma extensiva de un programa estocástico de dos estados con recurso es que se resuelve un problema lineal determinista; sin embargo, el número de variables y de restricciones se incrementa considerablemente a medida que aumenta el número de escenarios posibles. Con frecuencia el tipo de problemas aquí presentados poseen ciertas propiedades estructurales, las cuales podrían ser aprovechadas para hacer más eficiente el método de solución. Esto reduciría el tiempo de cómputo requerido y permitiría obtener soluciones exactas para el problema biobjetivo en instancias más grandes.

Resumen

En este artículo se presenta el problema del diseño de una cadena de suministro de dos niveles con dos criterios de desempeño: costo y tiempo. En el primer nivel el producto debe enviarse de las plantas a las bodegas y en el segundo debe enviarse de las bodegas a los centros de distribución. En este trabajo se considera incertidumbre en las demandas de los centros de distribución las cuales han sido modeladas a través de escenarios. El diseño consiste en seleccionar qué bodegas deben abrirse y qué medios de transporte deben seleccionarse. A través de un ejemplo se describe la versión determinista del problema y posteriormente se introduce la incertidumbre. Se explican los aspectos fundamentales del modelo estocástico de dos estados que se propone y se muestran algunos resultados computacionales que ilustran la dificultad de los paquetes comerciales para resolver este tipo de problemas de forma exacta.

Palabras clave: Cadena de suministro, Incertidumbre, Multiobjetivo, Programación estocástica.

Abstract

We address the problem of designing a two-level supply chain with two performance criteria: cost and time. In the first level the manufacturing plants should send product to warehouses, while in the second one the product is sent from warehouses to distribution centres. The demand in each distribution centre presents uncertainty, which has been modelled through scenarios. The decisions are: to determine where to open (and how many) warehouses from the potential location set, and to select the transportation option. Through an example we describe the deterministic version of the problem. Later, uncertainty is introduced, describing the main aspects of the two-stage stochastic model that we propose. Computational results show that it is very hard to solve the problem by exact methods.

Key words: Supply Chain, Uncertainty, multiobjective, Stochastic programming.

Referencias

1. L.V. Snyder, Facility location under uncertainty: a review, IIE Transactions, 38, 537–554, 2006.
2. J.R. Birge y F. Louveaux, Introduction to Stochastic Programming, Springer– Verlag, 1997.

3. L.V. Snyder y M.S. Daskin, Stochastic p-robust location problem, IIE Transactions, 38, 971-985, 2006.
4. M. Albareda–Sambola, E. Fernández, Algunos problemas estocásticos de localización discreta: un enfoque unificador. Optimización bajo incertidumbre, 2, ASEPUMA, 254–270, 2004.
5. P. Tsiakis, N. Shah y C. Pantelides, Design of Multi–echelon supply chain networks under demand uncertainty, Ind. Eng. Chem. Res, 40, 3585–3604, 2001.
6. G. Guillén, F.D. Mele, M.J. Bagajewicz, A. Espuña, L. Puigjaner, Multiobjective supply chain design under uncertainty, Chemical Engineering Science, 60, 1535-1553, 2005.
7. E. Olivares, Capacited Fixed Cost Facility Location Problem with Lead Time Choices. Ph.D. dissertation, ITESM Campus Monterrey, México, 2007.
8. M. Ehrgott. Multicriteria Optimization, Springer Verlag, 2005.

Recibido: 3 abril 2009
Aceptado: 18 mayo 2009