

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



LA SIMULACION DEL TRANSITO
EN COMPUTADORAS

TESIS PRESENTADA
EN OPCION AL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
CON ESPECIALIDAD EN
INGENIERIA DE TRANSITO

POR

ING. GILBERTO HERNANDEZ Y ESPINOSA

ASESOR: ING. PEDRO CHAVELAS

MONTERREY, N. L. NOVIEMBRE DE 1987

TESIS. LA ACCION DEL TRASTO

EN COMPUTADORAS

TM
Z6834
.C5
FIC
1987
H4



1020091198



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

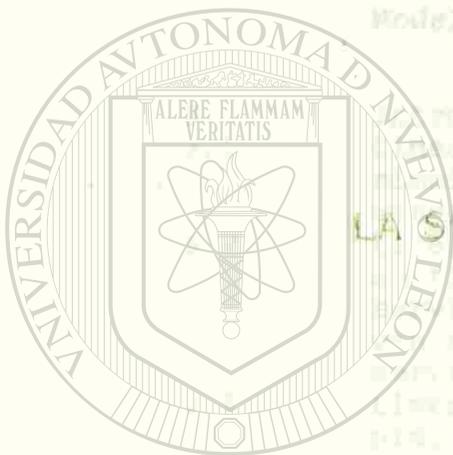


DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



LA SIMULACION DEL TRANSITO
EN COMPUTADORAS

UANL

TESIS PRESENTADA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

EN OPCIÓN AL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CON ESPECIALIDAD EN
INGENIERIA DE TRANSITO

POR

ING. GILBERTO HERNANDEZ Y ESPINOSA

ASESOR: ING. PEDRO CHAVELAS



MONTERREY, N. L.

NOVIEMBRE DE 1987

- 2.3.2 Algunas leyes de probabilidad para variables aleatorias continuas
 - 2.3.2.1 Distribución exponencial negativa
 - 2.3.2.2 Distribución exponencial negativa desviada
 - 2.3.2.3 Distribución Erlang
 - 2.3.2.4 Distribución normal
- 2.3.3 Aplicaciones en Ingeniería de Tránsito
- 2.4 Pruebas de hipótesis
 - 2.4.1 La Chi cuadrada
 - 2.4.2 La T de Student

CAPITULO III

Modelos de Líneas de Espera

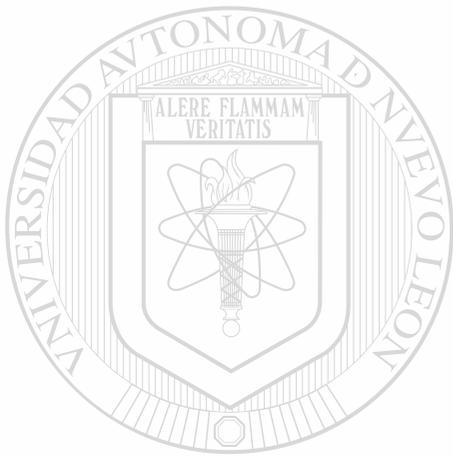
- 3 Introducción
 - 3.1 Líneas de espera con estación de servicio simple, llegadas tipo Poisson y tiempo de servicio exponencial
 - 3.2 Líneas de espera con estaciones de servicio múltiples, llegadas tipo Poisson tiempo de servicio exponencial y los vehículos se mueven a la primer vacante de la estación de servicio
 - 3.3 Línea de espera con estación de servicio simple, llegadas tipo Poisson y tiempo de servicio Erlang
 - 3.4 Aplicaciones
 - 3.5 Conclusiones

CAPITULO IV

Simulación del Flujo del Tránsito

- 4 Introducción
 - 4.1 Naturaleza de simulación
 - 4.2 Definición del sistema
 - 4.2.1 Generación de la variable aleatoria
 - 4.2.1.1 Generación de números aleatorios
 - 4.2.1.2 Producción de variable aleatoria deseada
 - 4.3 Formulación del modelo
 - 4.3.1 Ejemplo de simulación: Intersección con factor de carga
 - 4.3.2 Ejemplo de simulación: Intersección simple de cuatro ramas
 - 4.3.3 Ejemplo de simulación: Areas de convergencia en autopistas

- 4.4 El programa del computo
- 4.5 Validación
- 4.6 Planeación y diseño del experimento
 - 4.6.1 Diseño general de experimentos de simulación
 - 4.6.2 Comienzo de la simulación
- 4.7 Interpretación de resultados
- 4.8 Resumen



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

I LA SIMULACION DEL TRANSITO EN COMPUTADORAS

I Sistemas

Un sistema es un conjunto de entidades o componentes relacionados entre si con un elemento teleológico en común.

La forma en que el sistema alcanza sus objetivos puede ser medida. A esa medida se le denomina medida de eficiencia, la cual puede estar referida a cada componente o al sistema completo.

Un componente se denomina separable si el incremento o decremento de su medida de eficiencia no afecta a los demás componentes.

Cada componente posee una serie de características o atributos que en el caso de los modelos matemáticos se denominan variables.

1.1 Modelos

Los sentidos, la inteligencia y demás características del ser humano, le permiten formarse una imagen del mundo que le rodea y en base a ello tomar decisiones. Es decir, el hombre establece la base de su conducta en modelos. Un modelo es en resumen, una representación de la realidad. En consecuencia una simplificación de la misma.

Clasificación de los modelos

Los modelos se pueden clasificar desde diversos puntos de vista.

1.1.1 Por su abstracción

Icónicos o Iconográficos

Son representaciones a mayor o menor escala de las características relevantes de objetos o eventos.

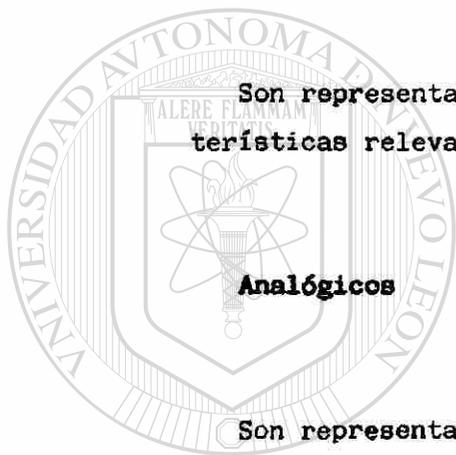
Analógicos

Son representaciones que involucran una sustitución de la característica relevante por una de naturaleza semejante.

Simbólicos

En estos modelos las propiedades o características de los eventos u objetos a representar se expresan por símbolos.

Por su naturaleza los modelos simbólicos a su vez se pueden clasificar en conceptuales y matemáticos.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Conceptuales

Emplean el lenguaje natural para la representación de atributos.

Matemáticos

Se ajustan a la sintaxis del lenguaje matemático para representar atributos

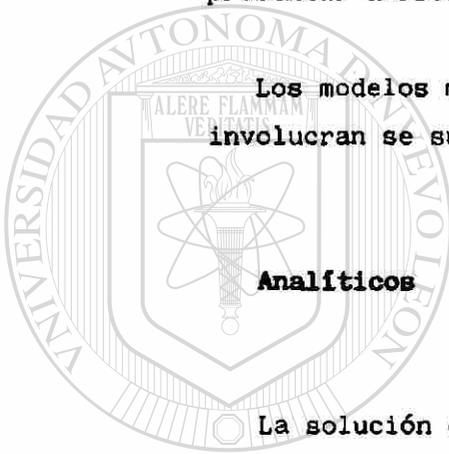
Los modelos matemáticos de acuerdo al tipo de solución que involucran se subdividen en:

Analíticos

La solución es única y la precisión depende del número de cifras significativas empleadas por el investigador.

Numéricos

La solución no es única en el sentido de que ésta depende de la velocidad de convergencia del algoritmo involucrado. Independientemente del total de cifras significativas, la solución en general es aproximada.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

1.1.2 Por su referencia al tiempo

Estáticos

El tiempo no se involucra ni como parámetro ni como variable.

Dinámicos

Involucran al tiempo como parámetro o como variable.

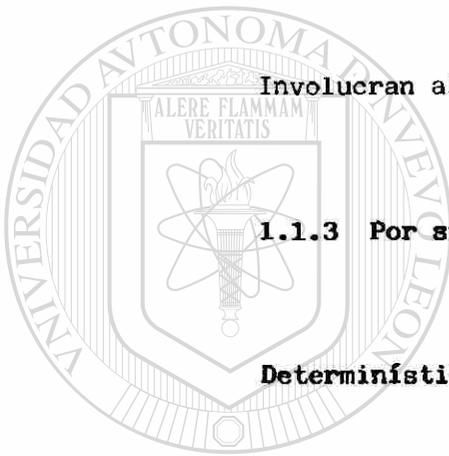
1.1.3 Por su grado de incertidumbre

Determinísticos

No contemplan la incertidumbre ni en sus relaciones ni en las soluciones.

Estocásticos

Contemplan la incertidumbre medida en términos probabilísticos.



UANL

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

1.2 Simulación en computadoras

En concepto moderno de la simulación se inició en 1940 cuando los científicos Von Newman y Ulam, utilizaron por primera vez lo que llamaron Técnicas de Montecarlo para resolver ciertos problemas de protección nuclear que eran o demasiado costosos para resolverse experimentalmente, o demasiado complejos para resolverse analíticamente.

Con el advenimiento y difusión de las computadoras el uso y aplicación de la simulación se incrementaron en complejidad y amplitud.

1.2.1 Definición de simulación

Los autores modernos han vertido diversas definiciones entre las cuales se pueden referir las siguientes:

Según Thomas Naylor: "Simulación es una técnica numérica para conducir experimentos en una computadora digital. Estos experimentos comprenden ciertos tipos de relaciones matemáticas y lógicas, las cuales son necesarias para describir el comportamiento y la estructura de sistemas complejos del mundo real a través de largos períodos de tiempo".

Por otro lado, Robert E. Shannon define la simulación de la siguiente manera: "Simulación es el proceso de diseñar y desarrollar un modelo computarizado de un sistema o proceso y conducir experimentos con este modelo, con el propósito de entender el comportamiento del sistema o evaluar varias estrategias con las cuales se pueden operar el sistema". Ambas definiciones

son válidas y se apegan a cualquier trabajo en el cual hay necesidad de generar cientos de números aleatorios o quizás miles de estos para poder simular cualquier sistema.

1.3 Etapas en la realización de un estudio de simulación

1.3.1 Definición del Sistema

En esta etapa se delimita el sistema e identifican componentes. Se definen las variables, restricciones, interrelaciones, medidas de efectividad y objetivos del proyecto.

1.3.2 Formulación del modelo

Se establecen las funciones de identidad y de comportamiento de las variables, sus relaciones lógicas y los diagramas que describen totalmente el modelo.

1.3.3 Recolección de datos

Los datos que el modelo va a requerir se pueden obtener de registros administrativos, observación directa o experimentos de corto alcance.

1.3.4 Implementación del modelo

Con el modelo definido, el siguiente paso es decidir si se utiliza algún lenguaje de alto nivel como Fortran, Algol, Pascal, Basic, etc., o si se emplea un lenguaje o paquete orientado a la simulación como SIMCRIP, DYNAMO, GASP, SIMULA, GPSS, etc.

1.3.5 Validación

Se comparan los resultados preliminares de la implementación del modelo con la actuación real del sistema que se pretende modelar.

Las formas más comunes para validar son:

- a) Opinión de expertos
- b) Pruebas estadísticas para verificar la predicción de datos históricos
- c) La observación del comportamiento del modelo ante cambios en el comportamiento del sistema

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

1.3.6 Experimentación

Una vez validado el modelo, se puede proceder a generar los datos deseados, a realizar análisis de sensibilidad de los resultados requeridos y a cambiar parámetros dentro de las posibilidades del propio modelo.

1.3.7 Interpretación

Las soluciones que se obtienen con los modelos de simulación son de tipo semiestructurado, ya que no se obtienen decisiones, sino información para la toma de decisiones.

1.3.8 Documentación

La documentación se refiere a aspectos metodológicos y a los resultados de la experimentación en el contexto del modelo.

1.4 Números pseudoaleatorios

Uno de los aspectos más importantes de las técnicas de Montecarlo, es el que se refiere a la generación de números aleatorios.

Inicialmente se emplearon métodos manuales tales como el lanzamiento de dados y monedas, las cartas y ruletas. Se creía que solamente los dispositivos mecánicos eran capaces de producir verdaderos números aleatorios. Las desventajas evidentes de tales métodos eran la lentitud e incapacidad de reproducir la serie.

Por el año de 1955 la corporación RAND produjo y grabó en una cinta para computadora una tabla con 1.000,000 de dígitos.

La desventaja continuó siendo la velocidad de lectura de la cinta y la posibilidad de agotar la serie.

Jonh Von Newman sugirió la idea de los cuadros medios, método que se basaba en las operaciones aritméticas de la computadoras.

Su idea consistía en elevar el cuadro el número aleatorio precedente y extraer los dígitos centrales; por ejemplo, si en la generación de números de cuatro dígitos se llegará al número 5232, se procedía a elevarlo al cuadrado y al obtener 27,373,824 el siguiente número aleatorio lo forman los cuatro dígitos centrales, es decir 3738 y el procedimiento se repetía en forma recursiva.

Esta técnica tenía como desventaja la posibilidad de generar un cero, con lo que la serie terminaba y no cumplía las propiedades deseadas de los números aleatorios.

En general, se acepta que se dispone de un buen generador de números aleatorios (o pseudoaleatorios puesto que se producen en forma determinística) si los números se distribuyen uniformemente, son estadísticamente independientes y son reproductibles.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Actualmente el método más frecuentemente empleado es el método congruencial. En este método se emplea una fórmula recursiva basada en el cálculo de residuos de acuerdo al módulo m de una transformación lineal.

Una fórmula típica para generar números aleatorios es la siguiente:

$$X_{n+1} = r X_n \text{ Mod}(n)$$

Un elemento inicial X_0 llamado similla, se multiplica por r y el producto se reduce módulo N . El número obtenido será X_1 , al cual se le aplica iterativamente el procedimiento. La sucesión resultante X_0, X_1, X_2, \dots se distribuye uniformemente en el intervalo $(0, N)$.

Por ejemplo considerese

$$\begin{aligned} X_0 &= 01 \\ r &= 13 \\ N &= 100 \end{aligned}$$

Ahora generamos la serie de acuerdo a lo expuesto con anterioridad.

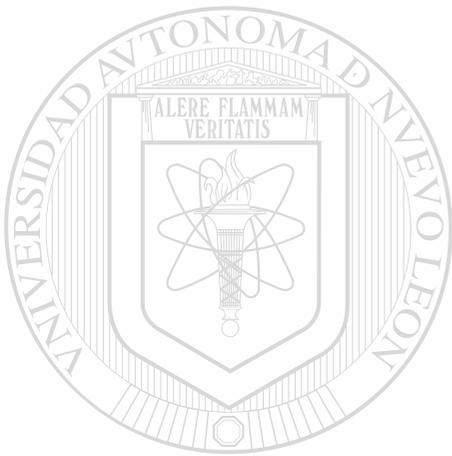
01, 13, 69, 97, 61, 93, 09, 17, 21, 73, 49, 37, 81, 53, 89, 57, 41, 33, 29, 77.

A partir de este último número se repite la serie 01, 13, 69, 97, etc.

Para computadoras decimales una fórmula que genera una sucesión de longitud $5 \times 10^{5-3}$ es la siguiente:

$$X_{n+1} = 7^9 X_n \text{ Mod}(10^5); X_0 = 1$$

Las computadoras actuales generalmente tienen incorporada una función intrínseca (RAND, RANF, etc.), que cumple con propiedades estadísticas deseables en la generación de números aleatorios.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

II PROBABILIDAD Y ESTADISTICA EN EL FLUJO DEL TRANSITO

2 Introducción

En Ingeniería de Tránsito, algunas variables se pueden describir en términos probabilísticos y otras, no es posible. -- Unos cuantos ejemplos ilustrarán este punto. Considerese el -- diseño de un área de almacenamiento para el movimiento de vuelta izquierda, y de la un tanto impredecible naturaleza aleatoria del flujo del tránsito y arribos vehiculares, el número de vehículos que dará vuelta variará de ciclo a ciclo. Por esto, el ingeniero requiere asociar las probabilidades con diferentes números de arribos vehiculares durante un ciclo. En el diseño de un área de convergencia o entrecruzamiento, el ingeniero necesita conocer la probabilidad asociada con un tamaño -- aceptable de intervalo que esté disponible para los vehículos -- que se entrecruzan, por lo tanto, se necesita conocer los volúmenes probables para cualquier obra o proyecto.

No obstante, para obras cuyo flujo se ha registrado sobre -- períodos largos, estimar el tránsito en el futuro es difícil y no siempre es certero. Así, siempre habrá necesidad de estar -- asociando probabilidades con un estimador.

El ingeniero también tiene un interés en el uso estadístico de la probabilidad, particularmente en aplicaciones de muestreo, inferencia estadística y pruebas de hipótesis. Por lo -- anterior, se discutirán en este capítulo las principales aplicaciones al flujo del tránsito.

2.1 Medidas estadísticas y variables aleatorias

En todos los casos, el ingeniero deberá partir de una descripción adecuada de las características de diseño o flujo del tránsito, cuyos valores cambian; estas características se llaman variables. También, estas variables caen dentro de dos clases generales: discretas o continuas.

Variables discretas, son aquellas que pueden asumir solamente un número contable o finito de valores sobre el rango de consideración, mientras que las variables continuas pueden tomar cualquier valor sobre un rango dado. Un ejemplo de una variable discreta puede ser el número de vehículos que pasan en un punto particular sobre una carretera durante un intervalo de cinco minutos, mientras que un ejemplo de una variable continua, puede ser la velocidad de los vehículos, cuando estos pasan por el mismo punto.

Al tratar con grandes cantidades de datos o variables, el ingeniero frecuentemente describe los resultados en dos formas, numérica y gráfica. Se puede usar una tabla de frecuencias, por ejemplo, para enumerar la concordancia de datos a la frecuencia con la cual las variables también tomaron valores discretos o valores de cierta clase.

La tabla 2.1 incluye la frecuencia para una serie de observaciones efectuadas en una intersección para determinar el número o frecuencia de intervalos de 30 segundos que tienen diferentes vehículos en el arribo.

El histograma o representación gráfica para los datos de la tabla 2.1 se muestra en la figura 2.1, y claramente indica va-

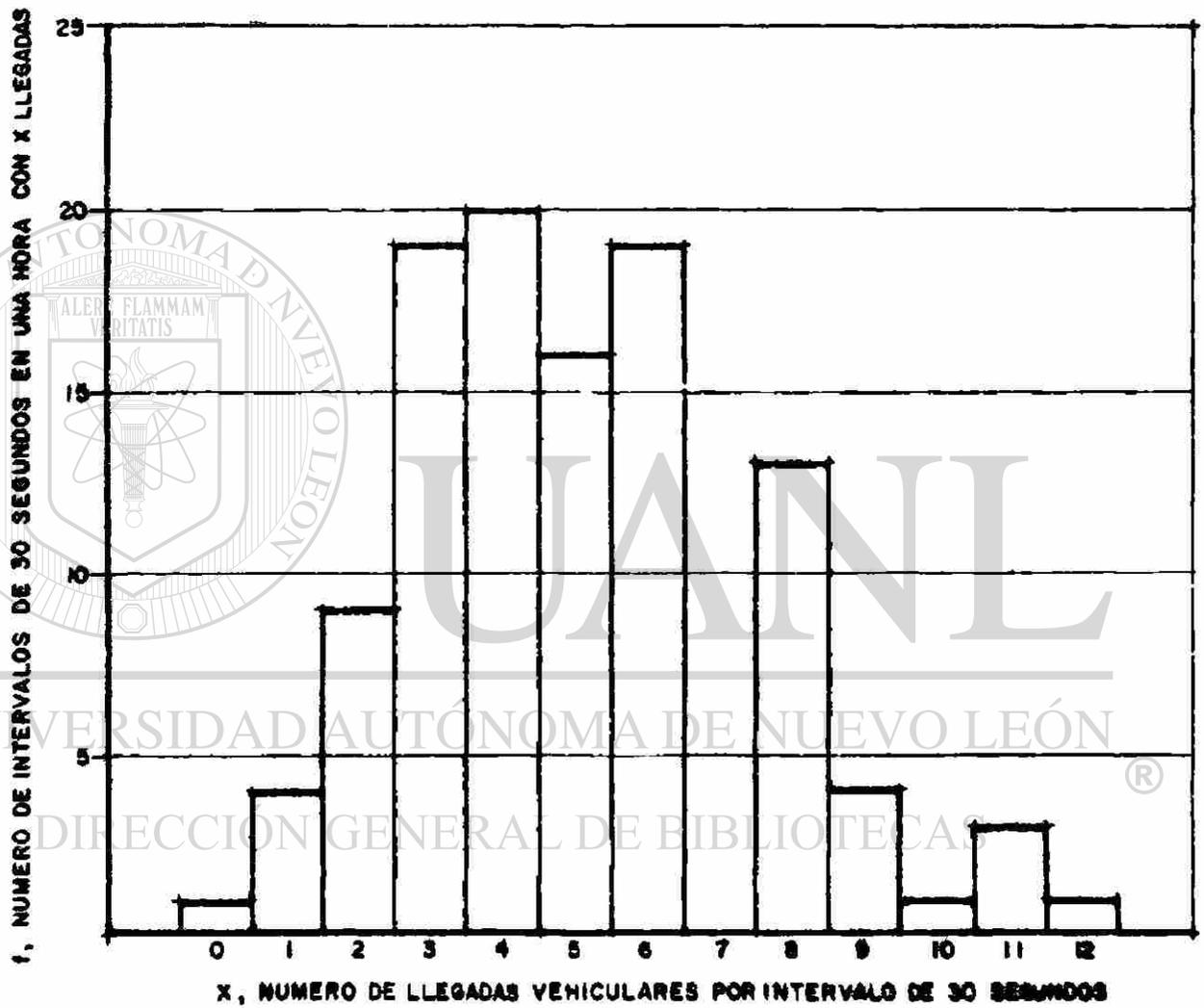


FIG. 2.1 HISTOGRAMA PARA EL NUMERO DE INTERVALOS CON DIFERENTES LLEGADAS VEHICULARES.

rias facetas de las observaciones. Por ejemplo, la mayoría de las observaciones indican entre tres y seis vehículos por intervalo de 30 segundos, la observación promedio muestra cuatro o cinco vehículos por intervalo de 30 segundos, y todas las observaciones, por así decirlo, diseminados sobre un amplio rango de valores de arriba. Por lo tanto, algunas medidas estadísticas comunes pueden ser de gran valor en la descripción de estos y otros datos.

2.1.1 La media

El término común promedio o media aritmética (normalmente o simplemente llamada la media), frecuentemente es usada para caracterizar conteos cotidianos y es una media útil para resaltar un conjunto de observaciones, en número simple, indiferente de la forma en que se hayan efectuado las observaciones. Si $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ son n valores observados de alguna variable x , la media del conjunto de n observaciones será :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (2.1)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

En donde :

\bar{x} = media de los valores observados

n = número de observaciones en la muestra

x_i = valor variable para la i esima observación

$$\sum_{i=1}^n x_i = \text{suma de las } n \text{ observaciones} = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

j	x_j	f_j
1	0	1
2	1	4
3	2	9
4	3	19
5	4	20
6	5	16
7	6	19
8	7	10
9	8	13
10	9	4
11	10	1
12	11	3
$c = 13$	12	1

Tabla 2.1 Frecuencia de intervalos de 30 segundos, por hora, con arribos vehiculares

- j = número de clase o evento
 x_j = valor de la variable (número de arribos vehiculares por intervalo de 30 segundos)
 f_j = frecuencia de las ocurrencias durante una hora (número de intervalos de 30 segundos con x_j arribos)
 c = número de clases o eventos

La ecuación (2.1) se aplica a datos no agrupados y es una "media aritmética simple no ponderada". Por lo tanto, para casos en donde los datos están agrupados dentro de clase (tales como el número de vehículos sin un cierto intervalo de velocidad o velocidad de clase), o cuando los datos están agrupados de acuerdo a la frecuencia de ocurrencia de algún evento (tal como un intervalo de 30 segundos), será necesario usar una media aritmética ponderada.

La media aritmética ponderada está dada por :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^c p_j x_j}{\sum_{j=1}^c p_j} = \frac{\sum_{j=1}^c f_j x_j}{n} \quad (2.2)$$

En donde :

- \bar{x} = media ponderada de los valores observados
 x_j = valor variable para la j esima clase o para el j esimo evento
 f_j = frecuencia de los valores observados cayendo en la j esima clase o evento
 c = número de clases o número posible de eventos
 n = número de observaciones en la muestra

Así, para los datos de la tabla 2,1, la media ponderada \bar{x} , es :

$$\bar{x} = \frac{(1.0) + (4.1) + (4.2) + (19.3) + \dots + (3.11) + 1.12}{120}$$

$$\bar{x} = \frac{618}{120}$$

$\bar{x} = 5.15$ arribos vehiculares por intervalos de 30 segundos

En el inciso posterior, se le dará considerable atención al muestreo de una población de una totalidad de datos, sin embargo, algunos juicios serán de ayuda en este punto, por ejemplo, se pueden hacer observaciones de un día completo cada mes, durante todo el año para estimar el volumen horario promedio sobre una carretera para ese año en particular. En este caso, - la población total de datos es el volumen de tránsito que ocurre durante las 8,760 horas del año, en tanto que la muestra - incluirá datos de solamente 288 horas durante el año. El volumen horario medio "verdadero" de la población total es igual - al volumen anual total dividido entre 288. Para distinguir entre los dos casos, se usará para cada uno un símbolo* diferente.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

μ = media verdadera de la población total
 \bar{x} = media estimada o media basada sobre una muestra del total de la población

2.1.2 Medidas de dispersión

La medida de un conjunto de observaciones dadas, no es un - indicador de la disminución o dispersión de los datos poblacio

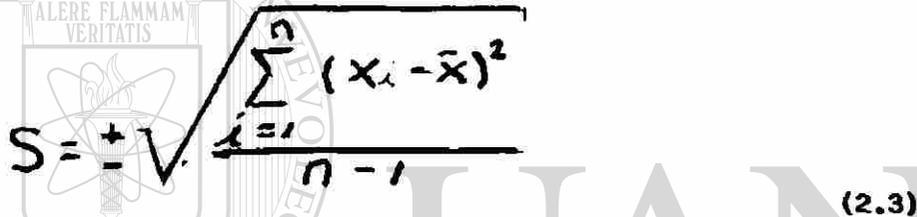
* Generalmente usaremos símbolos griegos para valores "verdaderos" de parámetros o variables, y símbolos arábigos para estimadores del valor verdadero. También el uso del símbolo - testa (\wedge) significa que los parámetros son estimados.

nales, de los cuales las observaciones se tomaron. La medida más significativa de la dispersión en la "variación" (también lo es la desviación estandar que es la raíz cuadrada de la variación); la variación puede ser estimada como sigue**:

$$S^2 = \widehat{\text{var}} [x],$$

En donde :

$\widehat{\text{var}}$ Es la variación estimada, y



$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (2.3)$$

En donde :

S = desviación estandar estimada basada en una muestra de n observaciones

x_i = valor observado para la i esima observación

\bar{x} = la media de n observaciones

n = número de observaciones de la variable x

Valiosamente, este estimador de la variación o " S^2 " es un estimador imparcial del cambio verdadero de la población, indiferente de la distribución de la cual las observaciones fueron obtenidas y es útil para cualquier tipo de distribución.

* Al no encontrar en el diccionario la palabra variancia, se optó por usar el significado literal del vocablo inglés variance, el cual es "variación".

**La variación verdadera (o variación de la totalidad de datos) se definirá en la sección 2.3.1 y 2.3.2 de variables aleatorias discretas y continuas respectivamente.

Como se anotó arriba, la variación sirve para medir la dispersión de los datos o para medir la extensión para la cual -- los valores de x_j están todos juntos o agrupados alrededor de la media, por ejemplo, cuando la distribución o histograma presenta un pico puntiagudo, la variación será pequeña; cuando -- los valores de x_i no están juntos en concordancia, pero varían en amplitud y difieren considerablemente de la media, el histograma será menos puntiagudo y la variación será mayor.

Dicho en otras palabras la variación estadística se define como el momento de segundo orden con respecto a la media.

Algunas apreciaciones de la manera en la cual el histograma cambia de forma con la variación, se pueden obtener de las curvas y datos mostrados posteriormente en la figura 2.11.

La ecuación (2.3) puede ser modificada como sigue, con el objeto de calcular la desviación estandar estimada a partir de unos datos agrupados.

$$S = \pm \sqrt{\frac{\sum_{j=1} f_j (x_j - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (2.4)$$

La tabla 2.2 muestra el cálculo de la desviación estandar - estimada basada sobre los datos observados de la tabla 2.1.

2.2 Conceptos básicos de probabilidad

Una propiedad general de probabilidad se puede establecer como sigue: $P(E)$, y es la probabilidad de ocurrencia de cualquier evento E , es un número real en el rango 0 a 1.

Una probabilidad de cero indica un evento imposible, mientras que una probabilidad de uno indica un evento certero.

2.2.1 La ley de la probabilidad total

Si dos eventos son mutuamente excluyentes (es decir, un evento ocurre, luego el otro no puede ocurrir), la probabilidad total de que cualquiera, el uno o el otro, de estos eventos ocurra a la misma vez es :

$$P(A \text{ o } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (2.5)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

2.2.2 La ley de la probabilidad conjunta

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Si la ocurrencia de dos eventos es independiente (es decir, la ocurrencia de un evento no ha influenciado sobre la ocurrencia del otro), luego la probabilidad de que ambos eventos ocurran al mismo tiempo, o $P(A \text{ y } B)$, es :

$$P(A \text{ y } B) = P(A \cap B) = P(A \times B) = P(A) * P(B)$$

j	x_j	$x_j - \bar{x}$	$(x_j - \bar{x})^2$	f_j	$f_j (x_j - \bar{x})^2$
1	0	- 5.15	26.52	1	26.52
2	1	- 4.15	17.22	4	68.88
3	2	- 3.15	9.92	9	89.28
4	3	- 2.15	4.62	19	87.78
5	4	- 1.15	1.32	20	26.40
6	5	- 0.15	0.02	16	0.32
7	6	+ 0.85	0.72	19	13.68
8	7	+ 1.85	3.42	10	34.20
9	8	+ 2.85	8.12	13	105.56
10	9	+ 3.85	14.82	4	59.28
11	10	+ 4.85	23.52	1	23.52
12	11	+ 5.85	34.22	3	102.66
13	12	+ 6.85	46.92	1	46.92
				120	685

Tabla 2.2 Cálculos de la desviación estandar estimada en base a los arribos vehiculares por intervalos de 30 segundos (obtenidos en una muestra de una hora).

En general, la probabilidad de que ambos eventos ocurran al mismo tiempo puede escribirse como :

$$P(A \text{ y } B) = P(A) * P(B|A)$$

En donde $P(B|A)$ está expresando la probabilidad condicional; esto es, $P(B|A)$ es la probabilidad de que ocurra B dado que el evento A ha ocurrido. Si los eventos A y B son independientes, luego $P(B|A) = P(B)$.

Para ilustrar el uso de los axiomas 2.2.1 y 2.2.2, considere la probabilidad de un vehículo arribando en un punto en un camino con un intervalo de tiempo t. En este intervalo de tiempo t, dos eventos mutuamente excluyentes o resultados pueden ocurrir: uno de dos, el vehículo arriba o, éste no lo hace.

Si :

p = probabilidad de arribos en un tiempo t (o "suceso")

q = probabilidad de no arribo en un tiempo t (o "falla")

Luego, de la ley de la probabilidad total*, nosotros tenemos:

$$P(S \text{ o } F) = P(S \cup F) = P(S) + P(F) = p + q = 1$$

Si este experimento es repetido por "n" intentos o "n" intervalos de tiempo de longitud "t", y si el resultado que ocurre en diferentes intervalos de tiempo es independiente, la probabilidad de una secuencia específica** de sucesos y fallas ocurridos pueden ser determinados de la ley de probabilidad conjunta. De esta ley se puede mostrar que la probabilidad de una secuencia ordenada de resultados es como sigue :

* Un arribo durante un intervalo t o evento "exitoso" está denotado por "S", y ningún arribo durante el intervalo "t" o "falla", está nombrado por "F".

**Una secuencia específica de resultados (tales como dos fallas y luego un éxito) frecuentemente se refiere a una permutación o arreglo de resultados, cuando no nos interesa la secuencia de resultados.

$$P (\text{secuencia ordenada de } k \text{ en } n) = p^k q^{n-k} \quad (2.6)$$

En donde P (secuencia ordenada de k en n) es la probabilidad de que k éxitos ocurran en n intentos en una secuencia específica u orden (o, que k arribos ocurrirán en " n " intervalos de tiempo en una secuencia específica).

La ecuación (2.6) no toma en cuenta el número de diferentes caminos o secuencia en los cuales k éxitos pueden ocurrir, pero provee la probabilidad de solamente una secuencia específica. Nos permite considerar y calcular un caso en el cual cuatro intervalos de tiempo sucesivos son examinados y el total de la probabilidad de tener solamente un éxito (un arribo en solamente uno de los cuatro intervalos de tiempo) y tres fallas (tres intervalos que no tienen arribos vehiculares).

Cuando nosotros no estamos interesados con el orden en el cual esos o estos eventos ocurrirán, la condición de un éxito y tres fallas puede estar satisfecha por más que un orden o secuencia de eventos; en otras palabras, si nosotros examinamos u observamos cuatro intervalos de tiempo, la condición puede estar satisfecha por uno cualquiera de los siguientes eventos diferentes ordenados de éxitos o fallas.

S F F F (Arribo solamente durante el primer intervalo),
 F S F F (Arribo solamente durante el segundo intervalo),
 F F S F (Arribo solamente durante el tercer intervalo) y
 F F F S (Arribo solamente durante el cuarto intervalo).

La probabilidad que una cualquiera de estas cuatro secuencias de eventos ocurran, P (secuencia ordenada de 1 en 4), es idéntica y puede determinarse de la ecuación (2.6). Por lo tanto, la probabilidad total de tener un éxito en cuatro inter

valos de tiempo es igual a la suma de las probabilidades asociadas con las cuatro secuencias individuales de eventos.

Esto es por la ley de la probabilidad total en donde las cuatro secuencias son mutuamente excluyentes; por ejemplo, si una secuencia ocurre, ninguna de las otras tres podrá ocurrir.

El número de formas diferentes u órdenes en las cuales una combinación de eventos ocurrirá o el número de posibles permutaciones para una combinación de eventos se puede determinar con la siguiente ecuación.

Número de diferentes secuencias o permutaciones de k éxitos en n intentos es* :

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (2.7)$$

Así, para el primer ejemplo y un éxito en cuatro intentos, el número de diferentes secuencias u órdenes es :

$$\frac{4!}{1!(4-1)!} = 4$$

Es importante anotar que en este ejemplo nosotros no podemos o al menos no necesitamos distinguir entre las tres fallas (o intervalos sin arribos, todos de los cuales son iguales o -

* Esta ecuación se aplica solamente cuando un evento tiene solo dos posibles resultados (tales como "águila o sol" o "suceso o falla").

de la misma manera) y su orden; así, es necesario calcular - las permutaciones relacionadas al intento u orden en el cual los éxitos ocurrirán*.

Combinando las ecuaciones (2.6) y (2.7), la ecuación para determinar la probabilidad de k éxitos en n intentos (sin tener en cuenta la secuencia de éxitos o fallas), P (k en n), - será :

$$P(k \text{ en } n) = \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k * q^{(n-k)} \quad (2.8)$$

Esta probabilidad total o P (k en n) algunas veces se le llama ley de probabilidad binomial de la variable k para parámetros n y p. Aplicando la ecuación (2.8) para nuestro ejemplo de un vehículo arribando en cuatro intervalos de tiempo :

$$P(1 \text{ en } 4) = \frac{4!}{1! (4-1)!} p^1 * q^{(4-1)} = 4 p q^3$$

Para facilidad de cálculo, particularmente cuando "n" y "k" son grandes, la probabilidad total sucesiva puede ser calculada como sigue :

$$P(k+1 \text{ en } n) = \frac{(n-k)p}{(k+1)q} P(k \text{ en } n) \quad (2.9)$$

* Si las fallas fueron numeradas F₁, F₂, F₃ y se distinguieron una de la otra, luego, cada una de las cuatro secuencias mostradas primeramente tendrán seis permutaciones. Por ejemplo, la primer secuencia podría escribirse de la siguiente forma :

$$SF_1 F_2 F_3; SF_1 F_3 F_2; SF_2 F_1 F_3; SF_2 F_3 F_1; SF_3 F_2 F_1$$

Consideremos otro ejemplo. En una cierta intersección se ha supuesto que los arribos vehiculares están espaciados aleatoriamente y que durante cualquier período de 20 segundos la probabilidad de un vehículo arribando y dando vuelta a la izquierda es $\frac{1}{4}$ *

El ingeniero desea determinar, en el movimiento de vuelta izquierda las probabilidades de que cero, uno o dos, dentro de cuatro períodos de 20 segundos sucesivos, tendrán vehículos dando vuelta izquierda.

Suponiendo que los eventos ocurrirán en un período de tiempo cualquiera, es independiente de los eventos ocurridos en otro período de tiempo, la probabilidad requerida se podrá determinar de las ecuaciones (2.8) ó (2.9).

1) Utilizando la ecuación (2.8), los cálculos son como sigue:

$$p = \frac{1}{4} \quad q = \frac{3}{4} \quad n = 4 \text{ períodos de tiempo}$$

Para cero intervalos teniendo arribos de vehículos que dan vuelta izquierda $k = 0$ y

$$P(0 \text{ en } 4) = \frac{4!}{0! (4 - 0)!} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{4!}{4!} \cdot 1 \cdot \frac{81}{256} = \frac{81}{256}$$

Para un intervalo, teniendo arribos de vuelta izquierda, $k = 1$, y

$$P(1 \text{ en } 4) = \frac{4!}{1! (4 - 1)!} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{4!}{3!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{27}{64} = \frac{108}{256}$$

Para dos intervalos teniendo arribos de vuelta izquierda, $k = 2$, y

* Notese que esta es la probabilidad conjunta de un vehículo arribando y dando vuelta izquierda, también se supone aquí, que no más de un vehículo dando vuelta izquierda puede arribar durante cualquier período de 20 segundos.

$$P(2 \text{ en } 4) = \frac{4!}{2! (4-2)!} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{4!}{2! 2!} \frac{1}{16} \frac{9}{16} = \frac{54}{256}$$

2) Usando la ecuación (2.9), los cálculos son como sigue :

Para un intervalo teniendo arribos de vuelta izquierda, y usando $P(0 \text{ en } 4)$ de la ecuación (2.8),

$$P(1 \text{ en } 4) = \frac{4}{1} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{(3/4)} \frac{81}{256} = \frac{108}{256}$$

Para dos intervalos teniendo arribos de vuelta izquierda,

$$P(2 \text{ en } 4) = \frac{3}{2} \frac{1}{3} \frac{108}{256} = \frac{54}{256}$$

Los datos de este ejemplo están dibujados en la figura 2.2, la cual muestra la probabilidad de la función densidad para el número de intervalos en los cuales arriban vehículos que dan vuelta izquierda.

El ingeniero frecuentemente necesita conocer no solamente la probabilidad de la ocurrencia de un valor particular de la variable, sino también la probabilidad de la variable siendo mayor o menor que algún valor particular. Es decir, en el ejemplo anterior de una intersección, el ingeniero deseará conocer la probabilidad total,

$$P(2 \text{ ó menos en } 4) = P(0 \text{ en } 4) + P(1 \text{ en } 4) + P(2 \text{ en } 4)$$

en donde $P(2 \text{ ó menos en } 4)$ es la probabilidad de que k será igual a, o menor de 2, y es el valor de la función distribución cuando la variable k tiene un valor de 2.

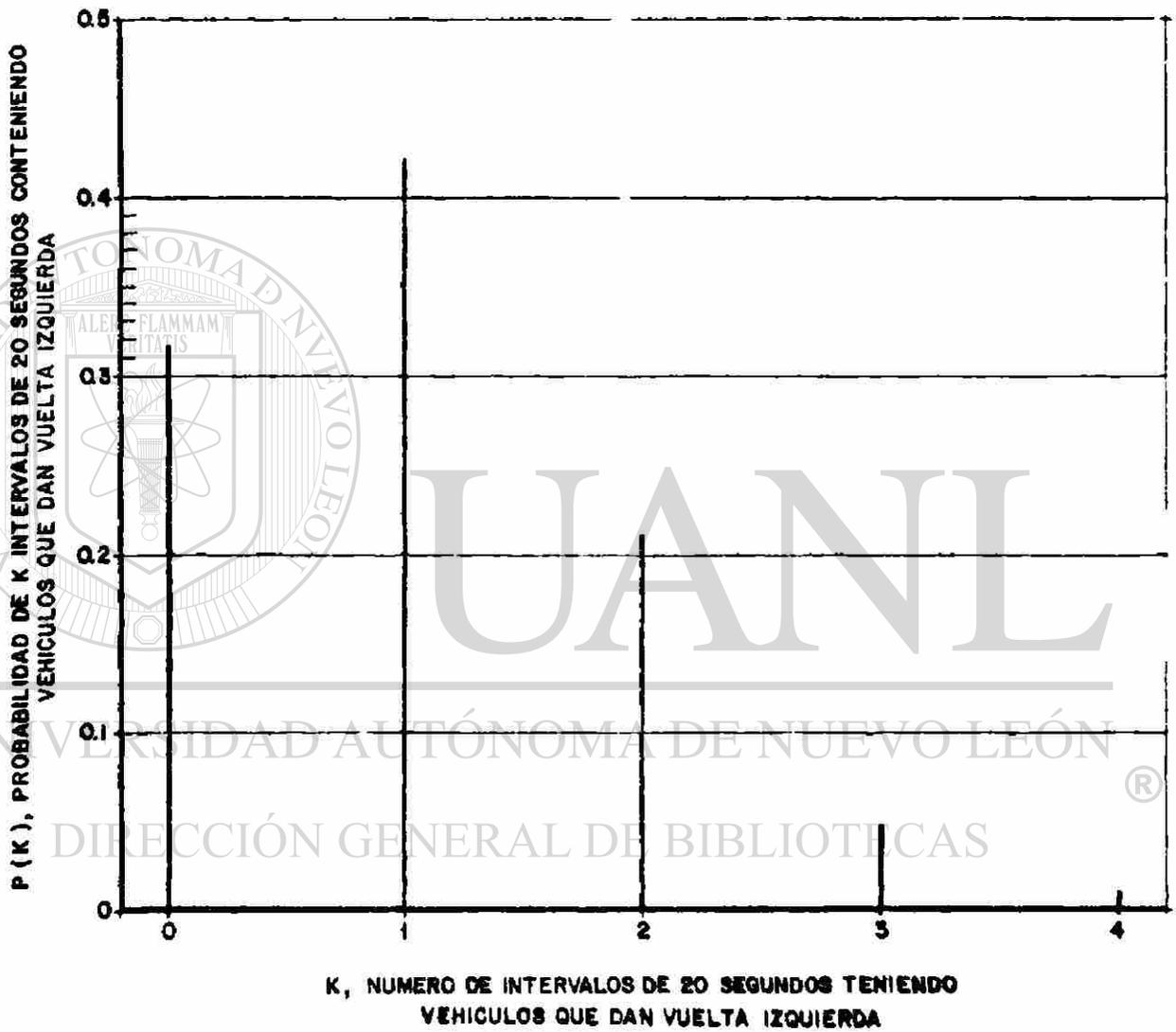


FIGURA 2.2 EJEMPLO DE LA FUNCION DE DENSIDAD PROBABILISTICA PARA VEHICULOS QUE DAN VUELTA IZQUIERDA

Mas generalmente, la probabilidad de k o menos ocurrencias, P(k o menos), es llamada la función distribución de la variable k, y se obtiene sumando los términos de la función probabilidad para todos los valores de la variable igual a, o menor que k. En adelante será mas conveniente usar símbolos simples para representar la densidad de probabilidad y las funciones de distribución para cualquier variable k discreta. Así :

$p(k)$ = Función de la densidad de probabilidad para variables discretas k; provee probabilidades de variable teniendo algún valor particular k.

$F(k)$ = Función distribución para variables discretas k; provee la probabilidad asociada con variables teniendo valores iguales a, o menores que algún valor particular k.

Matemáticamente :

$$p(k) = P(k), \quad (2.10)$$

y :

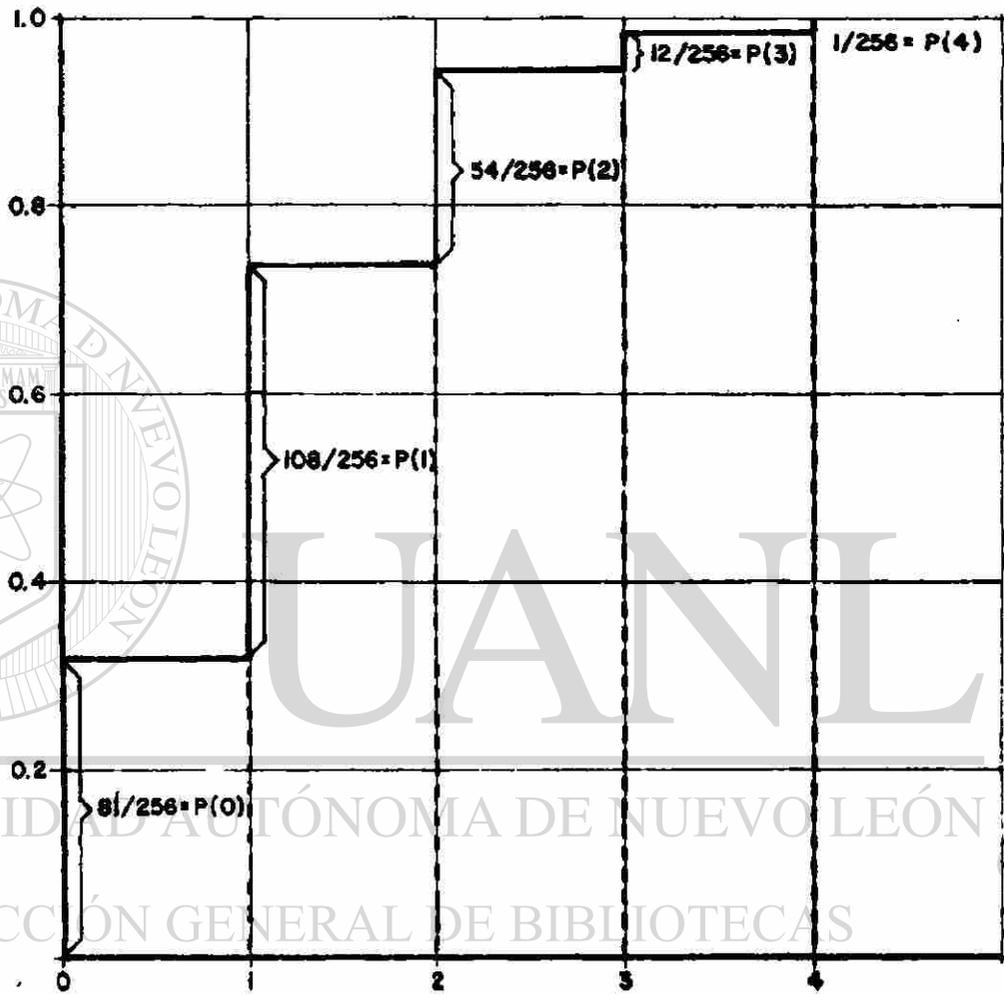
$$F(k) = P(k \text{ o menos}) = \sum p(i) \quad \forall i \leq k \quad \text{y} \quad \forall p(i) > 0 \quad (2.11)$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Para la distribución binomial, mostrada con la ecuación (2.8), $p(k)$ será P(k en n) y $F(k)$ será P(k o menos en n).

La tabla 2.3 muestra los valores correspondientes de la densidad de probabilidad y funciones de distribución para el ejemplo anterior de vehículos de vuelta izquierda, y la gráfica de la función distribución se muestra en la figura 2.3. Como se ve en esta figura, la función distribución para una variable -

$P(k \text{ ó MENOS EN } 4) \text{ ó } F(k)$, PROBABILIDAD DE k INTERVALOS DE 20 SEGUNDOS O MENOS
CONTENIENDO VEHICULOS QUE DAN VUELTA IZQUIERDA



K, NUMERO DE INTERVALOS DE 20 SEGUNDOS CONTENIENDO
VEHICULOS QUE DAN VUELTA IZQUIERDA

FIGURA 2.3 FUNCION DE DISTRIBUCION PARA EL EJEMPLO DE LOS
VEHICULOS QUE DAN VUELTA IZQUIERDA

discreta será discontinua entre valores admisibles de la variable, pero tomará un escalón finito igual a la densidad de probabilidad en cada valor admisible de k^* . El rango de probabilidad de esta función siempre será entre cero y uno, de donde -- cualquier distribución debe producir probabilidad unidad para el conjunto entero de valores admisibles de la variable; matemáticamente.

$$\sum p(k) = 1.0$$

$$\forall k \quad y \quad \forall p(k) > 0$$

Para variables continuas se usará una notación ligeramente diferente, $f(x)$, para representar la función de densidad probabilística, además la integral se empleará para relacionar la probabilidad de densidad y las funciones de distribución. Así para variables continuas, en la cual x es una variable simulada para la variable aleatoria X ,

$$f(x) = P(x)$$

$$F(x) = P(x \text{ o menos}) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

y :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.0$$

* En otras palabras la función distribución incrementa a cada valor de k por la cual $P(k)$ es mayor que cero.

k	p (k)	F (k)
0	81/256	81/256
1	108/256	189/256
2	54/256	243/256
3	12/256	255/256
4	1/256	256/256

Tabla 2.3 Valores de $p(k)$ y $F(k)$ para un número de intervalos de 20 segundos que tienen arribos vehiculares para vuelta izquierda.

2.3 Distribuciones estadísticas en el flujo del tránsito

Las distribuciones estadísticas son una herramienta útil y sencilla en la descripción de muchos de los procesos con los cuales el ingeniero deberá intervenir. Estas distribuciones estadísticas se pueden colocar en dos grandes categorías :

1) Distribuciones discretas o de conteo. En estas distribuciones, la variable es el número de eventos, por ejemplo, el número de vehículos en un período de tiempo dado o longitud de intervalo, el número de accidentes en un período de tiempo dado o el número de violaciones de una ley en particular. Las cuatro distribuciones discretas más comunes son :

- Distribución de Poisson
- Distribución Binomial
- Distribución de Pascal
- Distribución Geométrica.

2) Distribuciones continuas o de intervalos. Son usadas para describir variables que pueden tomar cualquier valor sobre un intervalo de valores. Ejemplos de variables continuas son el tamaño de un intervalo, el tiempo entre accidentes en una localidad y la velocidad vehicular.

Las cuatro distribuciones continuas más comunes son :

- Distribución Exponencial Negativa
- Distribución Exponencial Negativa Desviada
- Distribución de Erlang
- Distribución Normal.

2.3.1 Algunas leyes de probabilidad para variables aleatorias discretas

Hay muchas funciones de probabilidad que puede usar por el ingeniero de tránsito, las más comunes se discutirán en esta y en las secciones siguientes.

La ley de probabilidad o función masa de probabilidad para una variable discreta, describe la probabilidad que la variable aleatoria toma sobre cualquier valor particular en este rango. Para cualquier variable aleatoria discreta, $p(x)$ es la probabilidad de la variable aleatoria siendo igual a x , en donde $p(x) \geq 0$. También,

$$\sum p(x) = 1.0$$
$$\forall x \quad \forall p(x) > 0$$

La media (o valor esperado) y variación de una variable aleatoria discreta se puede determinar como sigue :

$$\mu = E[x] = \sum x p(x),$$

$$\forall x y \forall p(x) > 0$$

Además

$$\sigma^2 = \text{Var}[x] = E[(x - \mu)^2]$$

$$= E[x^2] - (E[x])^2 = E[x^2] - \mu^2$$

$$= \sum x^2 p(x) - \mu^2$$

$$\forall x y \forall p(x) > 0$$

2.3.1.1 Distribución de Poisson

La distribución de Poisson sirve como una aproximación útil de la distribución binomial y puede ser deducida como el caso-límite de aquella distribución con "n" aproximaciones infinitas y "p" aproximaciones cero, así que "n" veces "p" es finita y se aproxima como un límite. La función masa de probabilidad para la distribución de Poisson es como sigue :

$$p(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \quad (2.12)$$

$$\forall x = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

en donde :

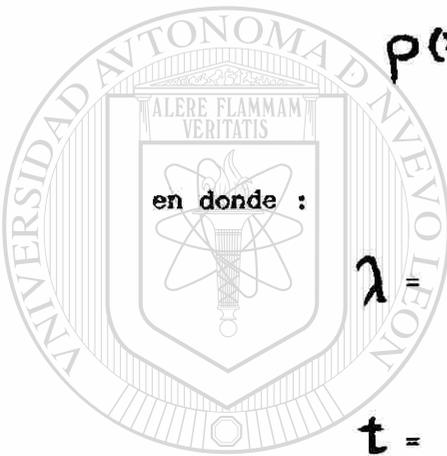
- $\mu = np$, la media verdadera de la población
- $x =$ valor entero de variables aleatorias discretas
- $e =$ base de los logaritmos naturales

Los valores de esta función de probabilidad está tabulada - en la tabla 2.4 para ciertos valores de μ . La desviación es tandar de la distribución de Poisson es :

$$\sigma = \sqrt{\mu} \quad (2.13)$$

La distribución de Poisson puede también escribirse como si gue :

$$p(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \quad (2.14)$$



λ = Número promedio de eventos ocurriendo por - unidad de tiempo (o tasa media de ocurrencia)

t = Intervalo de tiempo

x = Número exacto de eventos ocurriendo durante cualquier intervalo t

$\mu = \lambda t$, la media verdadera o número promedio - de eventos ocurriendo durante cualquier intervalo t

$\sigma = \sqrt{\lambda t}$, la desviación estandar verdadera.

Una fórmula de ayuda para facilitar los cálculos de la distribución de Poisson, se puede deducir como sigue : de la ecua

ción (2.14),

$$p(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}, \quad p(x+1) = \frac{\mu^{x+1} e^{-\mu}}{(x+1)!}.$$

Dividiendo $p(x+1)$ por $p(x)$ tenemos que :

$$\frac{p(x+1)}{p(x)} = \frac{\mu}{x+1}.$$

$$\text{Luego entonces } p(x+1) = \frac{\mu}{x+1} \cdot p(x) \quad (2.15)$$

Ciertas propiedades de la distribución de Poisson incluidas sus ventajas computacionales (relativas a la distribución binomial); hacen esta de uso particular para los ingenieros; de esta manera, es de importancia considerar los cálculos de estas probabilidades acumulativas.

PROBABILIDAD DE TODOS LOS EVENTOS O $P(x \geq 0)$.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

De la ley de probabilidad total, se obtiene que la suma de todos los eventos posibles será igual a 1.0; así :

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} = 1.0 \quad (2.16)$$

PROBABILIDAD DE K O MENOS EVENTOS, $P(x \leq k)$. Ya que

$$P(x \leq 2) = F(2) = P(0) + P(1) + P(2),$$

$$P(x \leq 3) = F(3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$$

y demás; pudiendo establecer que :

$$P(x \leq k) = F(k) = \sum_{x=0}^k P(x) \quad (2.17)$$

PROBABILIDAD DE MAS QUE K EVENTOS ó $P(x > k)$

Esta probabilidad será igual a todos los eventos menos la probabilidad de k o menos eventos. Así, de las ecuaciones (2.16) y (2.17)

$$P(x > k) = 1 - \sum_{x=0}^k p(x) = 1 - F(k) \quad (2.18)$$

Notese que debido a que la variable es discreta solo tomará valores enteros,

$$P(x > k) = P(x \geq k + 1)$$

PROBABILIDAD DE MENOS QUE k EVENTOS ó $P(x < k)$

Puesto que la variable x es discreta y solamente toma valores enteros, se obtiene directamente de la ecuación (2.17) que:

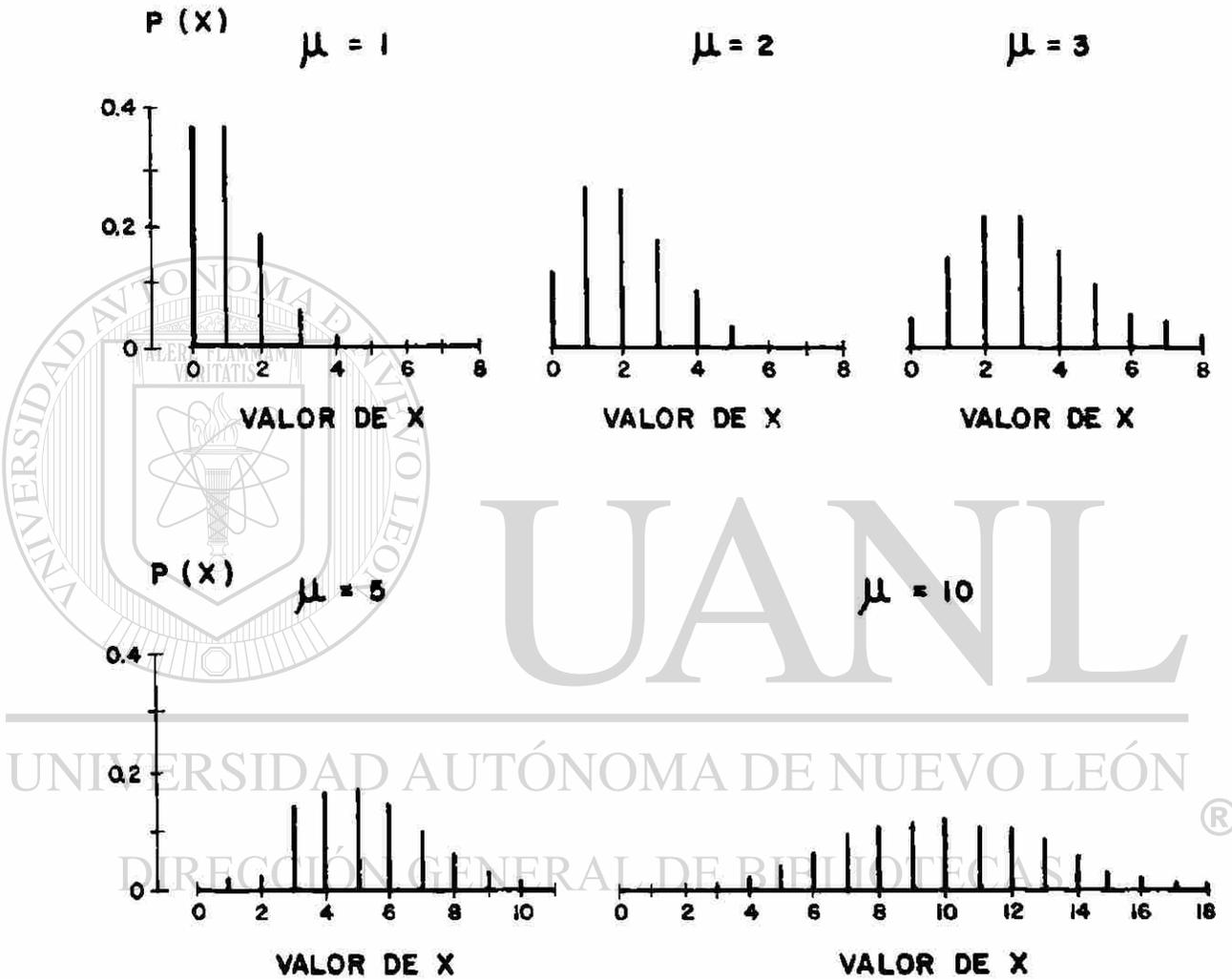


FIGURA 2.4 PROBABILIDAD DE POISSON PARA FUNCIONES DE DENSIDAD PARA DIFERENTES VALORES DE μ

$$P(x < k) = \sum_{x=0}^{k-1} p(x) = F(k-1) \quad (2.19)$$

Los resultados principales son :

Probabilidad de k o menos eventos $F(k) = P(x \leq k) = \sum_{x=0}^k p(x)$

Probabilidad de menos que k eventos $F(k-1) = P(x < k) = \sum_{x=0}^{k-1} p(x)$

Probabilidad de k o más eventos $1 - F(k-1) = P(x \geq k) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} p(x)$

Probabilidad de más que k eventos $1 - F(k) = P(x > k) = 1 - \sum_{x=0}^k p(x)$

Probabilidad de todos los eventos $P(x \geq 0) = \sum_{x=0}^{\infty} p(x) = 1.0$

La figura 2.4 ilustra la distribución de Poisson para varios valores de μ . Cuando μ se incrementa, la distribución será más cercana a la simetría, pero para valores pequeños de μ la distribución es altamente sesgada.

2.3.1.2 La Distribución Binomial

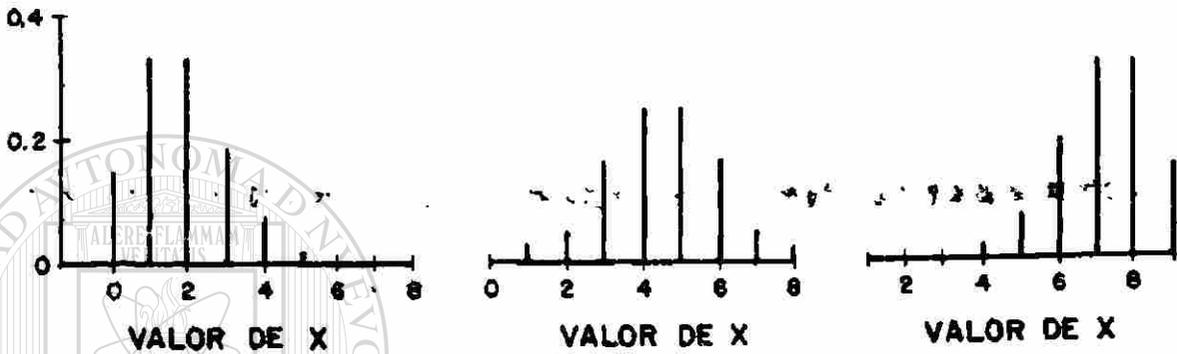
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Una distribución importante es la Binomial cuya función de densidad probabilística es como sigue :

$$p(x) = \frac{n!}{x! (n-x)!} p^x q^{(n-x)} \quad (2.20)$$

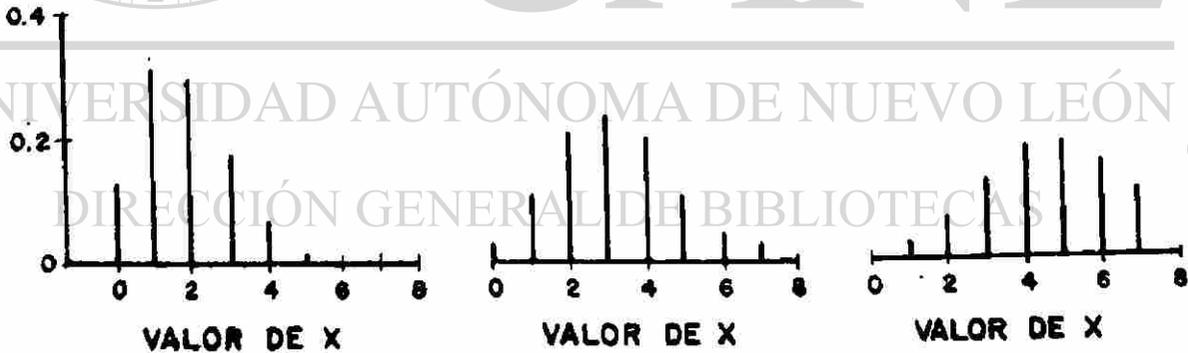
En donde todos los términos y símbolos fueron definidos anteriormente. Esta distribución es aplicable solamente a varia

$P(X)$
 $n = 9, p = 0.2$ $n = 9, p = 0.5$ $n = 9, p = 0.8$



(a)

$P(X)$
 $n = 9, p = 0.2$ $n = 16, p = 0.2$ $n = 25, p = 0.2$



(b)

FIGURA 2.5 FUNCION BINOMINAL DE DENSIDAD PROBABILISTICA PARA DIFERENTES VALORES DE p y n (a) FUNCIONES CON n FIJA; (b) FUNCIONES CON p FIJA

bles discretas cuyo rango de valores está definido como se anotó en la ecuación. También la distribución solamente se puede aplicar a experimentos dicotómicos (divididos en dos, por ejemplo, para aquellos con solo dos posibles resultados para cada intento); para experimentos con más de dos posibles resultados se aplica la distribución multinomial.

Se debe manifestar que la ecuación (2.20) es la forma más general de la ecuación (2.8), la cual se aplica al ejemplo de vehículos que dan vuelta izquierda.

La figura 2.5 ilustra el efecto sobre la forma de las variaciones de la distribución en el valor de "n" y "p". La distribución es simétrica si "p" es igual a 0.5, pero para todos los valores, se obtuvo una distribución no simétrica. Hay que hacer notar que cuando el valor de n, se incrementa, el sesgo o asimetría de la distribución binomial es menos pronunciada.

Para la distribución binomial, nosotros podemos establecer sin prueba* que :

$$\mu = np = \text{Media verdadera de la población} \quad (2.21)$$

$$\sigma = npq = \text{Desviación estandar verdadera de la población} \quad (2.22)$$

* Para la ley de probabilidad binomial,

$$\mu = E[x] = \sum_{x=0}^n x p(x) = np$$

$$\sigma^2 = \text{Var}[x] = E[x^2] - (E[x])^2 = \sum_{x=0}^n x^2 p(x) - \mu^2 = npq$$

Como ejemplo explicativo, pondremos lo siguiente :

Después de examinar cuidadosamente los datos de campo de -- 100 grupos de cinco vehículos cada uno, que con respecto a cada grupo de cinco vehículos, aquellos que excedan 96 km/h se -- podrán representar por medio de la distribución binomial, y -- que p la probabilidad de que cualquier vehículo exceda 96 km/h es 0.568*. Sobre estas bases, se quiere determinar la frecuencia esperada de ocurrencia para cada valor de x (en donde x es igual al número de vehículos en un grupo de cinco, excediendo 96 km/h. Para la distribución binomial ecuación (2.20), con $n = 5$ y $p = 0.568$, la probabilidad de 0, 1, 2, 3, 4 ó 5 vehículos excediendo 96 km/h en un grupo de cinco, puede obtenerse -- como sigue :

$$n = 5, \quad p = 0.568, \quad q = 0.432$$

$$p(0) = \frac{5!}{0! (5 - 0)!} p^0 q^5 = (0.432)^5 = 0.015$$

usando la fórmula de repetición (2.9)

$$p(1) = \frac{5 \times 0.568 \times 0.015}{0.432} = 0.0987$$

$$p(2) = \frac{4 \times 0.568 \times 0.0987}{2 \times 0.432} = 0.2604$$

$$p(3) = \frac{3 \times 0.568 \times 0.2604}{3 \times 0.432} = 0.3420$$

$$p(4) = \frac{2 \times 0.568 \times 0.3420}{4 \times 0.432} = 0.2250$$

$$p(5) = \frac{0.568 \times 0.2250}{5 \times 0.432} = 0.0591$$

* Para este ejemplo, cada vehículo que es observado excederá -- o no 96 km/h; de tal manera que cada experimento es dicotómi -- co.

Para la distribución binomial la probabilidad de cada valor de x está dado por $p(x)$, y si 100 grupos de cinco vehículos -- son observados, la frecuencia de grupos teniendo x vehículos -- excediendo 96 km/h está dada por :

$$\text{Freq} = 100 p(x) \quad (2.23)$$

La tabla 2.4 muestra el valor de $p(x)$, la frecuencia y la función de distribución acumulativa $F(x)$ para este ejemplo. La función de densidad probabilística está ilustrada en la figura 2.6 y la función de distribución está trazada en la figura 2.7.

x	$p(x)$	freq = $p(x) 100$	$F(x)$	$F(x)100$
0	0.015	1.5	0.015	1.5
1	0.099	9.9	0.114	11.4
2	0.260	26.0	0.374	37.4
3	0.342	34.2	0.716	71.6
4	0.225	22.5	0.941	94.1
5	0.059	5.9	1.000	100.0
TOTAL	1.000	100.0		

Tabla 2.4 Valores de $p(x)$ y $F(x)$ para vehículos en grupos de cinco excediendo 100 km/hr, y frecuencias para 100-grupos de cinco vehículos ($n = 5$; $p = 0.568$)

La tabla 2.5 muestra dos comparaciones entre la distribución Binomial y la de Poisson, la primera con n igual a 100 y p igual a 0.01 (μ es igual a 1.0) y la segunda con n igual a 20 y p -

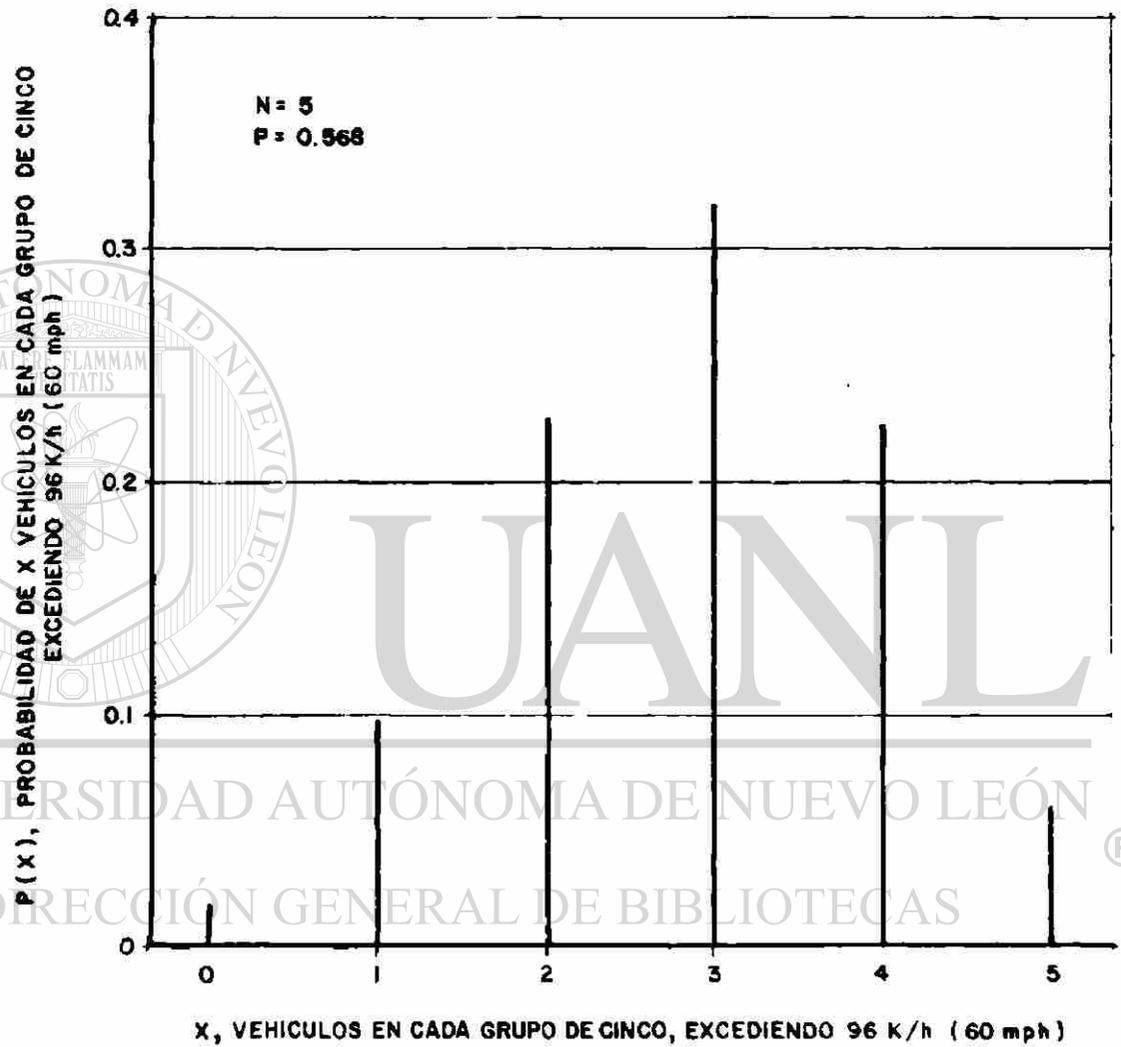


FIGURA 2.6 FUNCION DE DENSIDAD PROBABILISTICA PARA VEHICULOS EN CADA GRUPO DE CINCO, EXCEDIENDO 96 K/h (60mph)

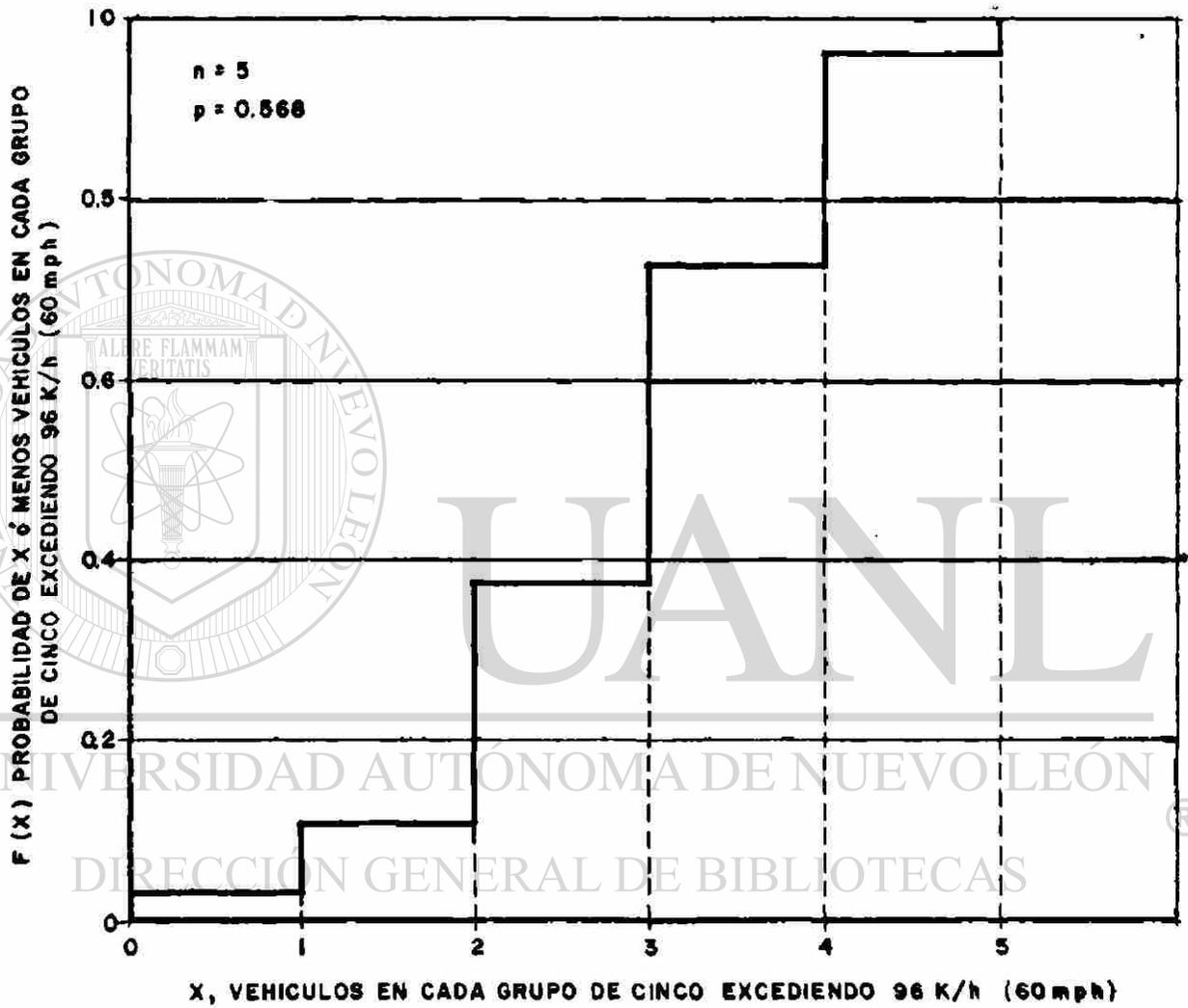


FIGURA 2.7 FUNCION DE DISTRIBUCION PARA UN NUMERO DE VEHICULOS EN CADA GRUPO DE CINCO EXCEDIENDO 96 K/h (60 mph)

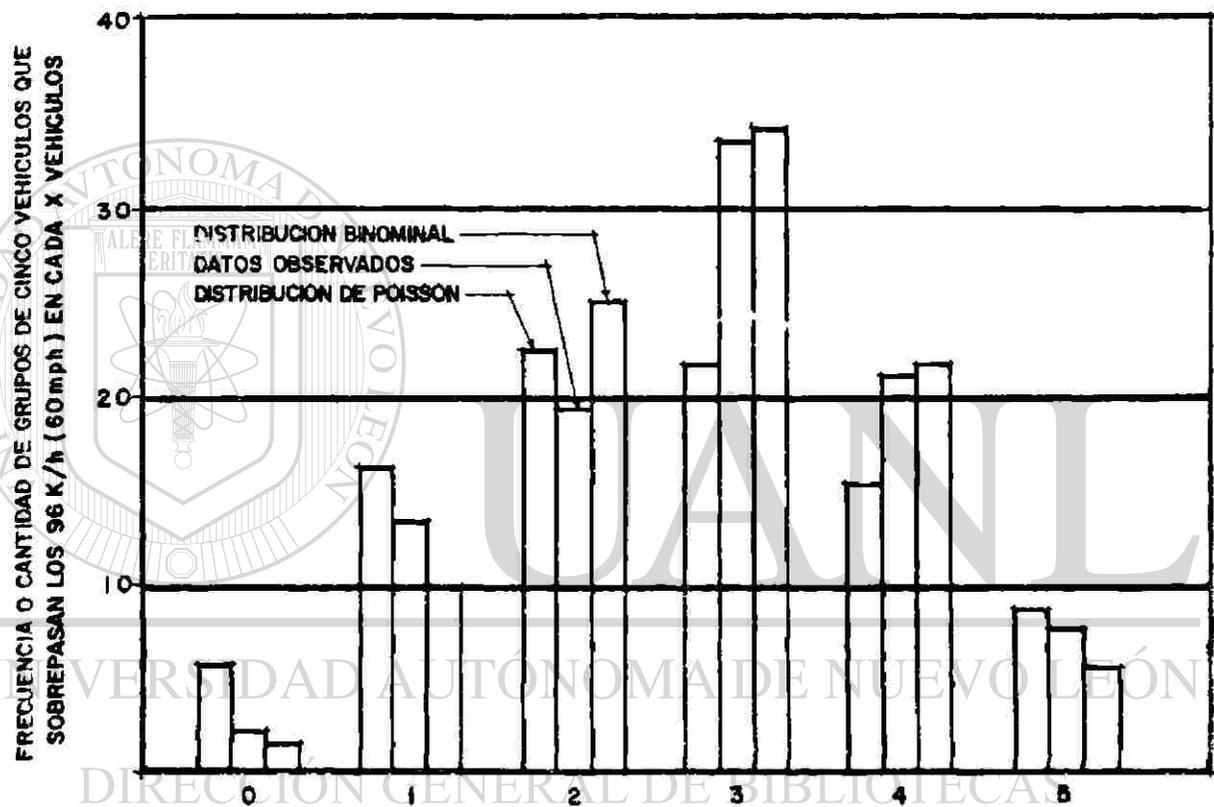
igual a 0.01 (μ es igual a 0.2); por supuesto, para la distribución de Poisson μ es igual a n más p . Es evidente que la de Poisson se aproxima mucho a la Binomial bajo estas condiciones (particularmente para valores pequeños de p). Fig. 2.7.1.

x	n = 100, p = 0.01, $\mu = 1$		n = 20, p = 0.01, $\mu = 0.2$	
	Poisson	Binomial	Poisson	Binomial
0	0.3679	0.3660	0.8187	0.8179
1	0.3679	0.3698	0.1637	0.1652
2	0.1839	0.1848	0.0164	0.0159
3	0.0613	0.0610	0.0011	--
4	0.0153	0.0150	0.0001	--
5	0.0031	0.0029	--	--
6	0.0005	0.0004	--	--
7	0.0001	--	--	--
--	--	--	--	--

Tabla 2.5 Comparación de los valores de $p(x)$ para las distribuciones de Poisson y Binomial.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Para ilustrar la distribución de Poisson, del ejemplo previo, los datos de las frecuencias (usando la distribución binomial) serán comparados ambos, los datos de campo y los calculados - por medio de la distribución de Poisson. Generalmente el ingeniero deseará determinar cuan bien las observaciones de campo pueden ser representadas por ambas, la distribución de Poisson y la Binomial. Los datos observados se muestran en la tabla - 2.6, y pueden ser usados para determinar la media aritmética - \bar{x} , el "mejor estimador" de la media poblacional (esto es, \bar{x} es el mejor estimador de μ), también, de la ecuación 2.2.



X, VEHICULOS QUE SOBREPASAN LOS 96 K/h (60 mph) EN CADA GRUPO DE CINCO

FIGURA 2.7.1 FUNCION DE FRECUENCIA OBSERVADA Y TEORICA PARA NUMEROS DE VEHICULOS EN CADA GRUPO DE CINCO QUE SOBREPASAN LOS 96 K/h (60 mph)

$$\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^6 f_j x_j}{\sum_{j=1}^6 f_j}$$

Aplicando esta ecuación a los datos observados en la tabla-2.6, tenemos que :

$$\bar{x} = \frac{2 \times 0 + 14 \times 1 + 20 \times 2 + 34 \times 3 + 22 \times 4 + 8 \times 5}{2 + 14 + 20 + 34 + 22 + 8}$$

$$\bar{x} = \frac{284}{100} = 2.84$$

el cual es el número promedio observado de vehículos, con respecto a cada grupo de cinco, excediendo 96. Ya que para este ejemplo, n es igual a 5, el valor de p puede ser estimado como sigue* :

$$\hat{\mu} = n \hat{p},$$

$$\hat{p} = \frac{\bar{x}}{n} = \frac{2.84}{5} = 0.568$$

j	x_j	frecuencia observada
1	0	2
2	1	14
3	2	20
4	3	34
5	4	22
6	5	8

Tabla 2.6 Datos observados en campo sobre un número de vehículos en cada grupo de cinco excediendo 100 km/h.

* El sombrero o signo ^ colocado sobre p indica que el valor de \hat{p} es un estimador de la media verdadera basado sobre los datos de muestra

x_j = Número de vehículos en cada grupo de cinco excediendo 100 km/h

frecuencia observada = Número de grupos de cinco vehículos (fuera de 100 grupos observados) en los cuales x vehículos excedieran 100 km/h.

Este último valor, por supuesto, es el que fué usado para calcular las frecuencias y probabilidades de la distribución Binomial anteriormente tabulado en la tabla 2.4

Para la distribución de Poisson, el producto \hat{p} por n o \bar{x} , provee un estimador de μ (que es $\mu = n\hat{p} = \bar{x}$); luego, de la ecuación (2.20), y una \bar{x} igual a 2.84, tenemos que :

$$p(0) = \frac{2.84^0 e^{-2.84}}{0!} = 0.05843, \text{ para } x = 0,$$

y usando en forma recurrente la ecuación (2.19),

$$p(1) = \frac{2.84 \times 0.05843}{1} = 0.166,$$

$$p(2) = \frac{2.84 \times 0.166}{2} = 0.236,$$

$$p(3) = \frac{2.84 \times 0.236}{3} = 0.223,$$

$$p(4) = \frac{2.84 \times 0.223}{4} = 0.158,$$

$$p(5) = \frac{2.84 \times 0.158}{5} = 0.090.$$

y así sucesivamente, se debería enfatizar que la distribución de Poisson es dependiente solamente sobre el valor de μ para el cálculo de $p(x)$, y que la variable x puede tomar cualquier valor entero entre cero e infinito, así el uso de la distribución de Poisson producirá probabilidades para la ocurrencia de

"más que" cinco vehículos excediendo de 60 mph en cada grupo de cinco vehículos aún cuando una ocurrencia tal no es posible. Sin embargo alguna apreciación puede ser obtenida de la aplicación y mecánicas de la distribución de Poisson, de su alcance para que se compare con la distribución Binomial como una medida para representar las condiciones de campo.

Si el número de vehículos excediendo 60 mph está representado por la distribución de Poisson, dado un promedio de 2.84 -- vehículos fuera de cada grupo de uno la frecuencia esperada -- para 100 observaciones de grupos de cinco vehículos será :

$$\text{Freq} = 100 p(x)$$

como se muestra en la tabla 2.7, estos valores pueden ser comparados con aquellos calculados cuando supusieron una distribución Binomial y con las frecuencias observadas.

La siguiente figura ilustra las frecuencias observadas y ambas frecuencias teóricas, y permite una comparación usual.

Para estos datos (por ejemplo con un valor relativamente -- grande de p), parecería que la distribución de Poisson no es -- particularmente una buena aproximación para la distribución bi -- nomial. Esto no está implícito, aunque sí bien, la distribu -- ción de Poisson representa o no representa adecuadamente los -- datos observados o la totalidad de los datos de campo, ni ésta hace reducir el hecho que la distribución de Poisson es una -- función probabilística, que tiene propiedades únicas y aplica -- ciones que no están en una forma dependiente sobre el funciona -- miento de la distribución binomial y que sirven para represen -- tar muchas clases de datos observados sin ciertos límites espe -- cíficos. El procedimiento para determinar la bondad de ajuste

de una distribución para datos observados, y para ciertas pruebas de hipótesis, se describirán mas tarde en este capítulo.

x	Frecuencias teóricas		Frecuencias observadas
	Binomial	Poisson	
0	1.5	5.8	2
1	9.9	16.6	14
2	26.0	23.6	20
3	34.2	22.3	34
4	22.5	15.8	22
5	5.9	9.0	8
TOTAL	100.0	93.1*	100

Tabla 2.7 Comparación de las frecuencias teóricas y observadas para el número de vehículos en cada grupo de cinco excediendo 100 km/h.

* El total de la distribución de Poisson no es igual a 100, puesto que solamente cinco fuera de todos los "eventos posibles" (esto es, $x = 0, 1, 2, \dots$) han sido incluidos.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

2.3.1.3 Distribución de Pascal
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Quando los conteos del tránsito contienen dos períodos diferentes, uno en la hora de máxima demanda y otro fuera de ésta la combinación de los resultados de una distribución con una alta variación. Una situación muy común pero menos obvia, ocurre corriente abajo a partir de un semáforo para el tránsito: durante la primera parte del ciclo, el volúmen del tránsito es

alto (usualmente a nivel de saturación); durante la última porción del ciclo frecuentemente habrá poco tránsito. Si los períodos de conteo corresponden a la porción verde del ciclo del semáforo, efectos cíclicos quedarán disfrazados. Como quiera que sea, si el período de conteo es corto (10 segundos), habrá períodos de alto volumen y períodos de bajo volumen; podrá haber períodos uniformes de flujo intermedio. Así, la combinación de todos los períodos contados nos dará una distribución con una variación muy alta.

La tabla 2.8 ilustra el fenómeno en donde el período de conteo está sincronizado con el ciclo del semáforo; aquí, con intervalos de 30 segundos, los datos observados se pueden ajustar aceptablemente a una distribución de Poisson (con un 5 % de nivel de confiabilidad de acuerdo a la prueba de la Chi cuadrada). Cuando los mismos datos se analizan en intervalos de 10 segundos, aparece un fenómeno de no aleatoriedad, de tal manera que la distribución de Pascal se podrá ajustar, como se demostrará mas adelante.

Número de vehículos por intervalo*	FRECUENCIA	
	Observada	Teórica, en base a la -- distribución de Poisson**
0	9	5.6
1	16	17.2
2	30	26.3
3	22	26.9
4	19	20.6
5	10	12.6
6	3	6.5
7	7	2.8
8	3	1.1
9	1	0.4
TOTALES	120	120.0

Tabla 2.8 Arribos del tránsito en la avenida* Durfee, en el acceso norte; los intervalos considerados son de 30 seg.

$$m = \frac{368}{120} = 3.067$$

* El volúmen es de 368 veh/h

** Este arreglo es aceptable con un 5% de nivel de significancia con la prueba de la χ^2 , como se verá en el inciso 2.4.1

Es similar en forma a la distribución binomial, pero en su aplicación es casi opuesta. En la distribución binomial, el número de intentos "n" fué ajustado y el número de sucesos "x" fué distribuido. En la distribución de Pascal, el número de sucesos "x", es ajustado y el número de intentos "n" requerirá estar distribuido para obtener "x" sucesos. La forma en que esta distribución se usa con más frecuencia es para definir -- $x = n - k$, de tal manera que la distribución de Pascal es la siguiente :

$$P(x) = C_{k-1}^{x+k-1} p^k q^x; \forall x = 0, 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

en donde :

$P(x)$ = Probabilidad de que x fallas ocurran en "n" intentos -- antes de obtener "k" sucesos

p = Probabilidad de suceso en un intento

$q = 1 - p$

k = Número de sucesos en "n" intentos, en donde el último intento es un suceso

El valor esperado de x es

$$E(x) = \frac{kq}{p}$$

La variación de x es

$$\text{Var}(x) = \frac{kq}{p^2}$$

Si m es la media (tabla 2.8) de los datos observados y S^2 es la variación de dichos datos, tenemos que :

$$p = \frac{m}{S^2} \quad (2.24)$$

$$k = \frac{m^2}{S^2 - m} \quad (2.25)$$

$$q = (1 - p) \quad (2.26)$$

Las llamadas fórmulas recurrentes para la distribución de - Pascal son las siguientes :

$$P(0) = p^k \quad (2.27)$$

$$P(x) = \frac{x + k - 1}{x} q P(x - 1); \forall x \geq 1 \quad (2.28)$$

2.3.1.4 Distribución Geométrica

Esta distribución es un caso especial de la de Pascal, en - la cual el proceso continúa hasta que hay un suceso $k - 1$. La distribución geométrica de la probabilidad de que "n" intentos se requieran para obtener un suceso y está expresada como :

$$p(n) = pq^{n-1} \quad (2.29)$$

el valor esperado de n es :

$$E(n) = \frac{1}{p}$$

y la variación de n es :

$$\text{Var}(n) = \frac{q}{p^2}$$

Como resumen de las distribuciones elementales de conteo se puede decir lo siguiente :

El método para ajustar alguna de las distribuciones discretas a los datos observados consiste en probar cual de las distribuciones es aplicable y luego estimar los parámetros de la distribución seleccionada. Para esto, se calcula la media \bar{X} y la variación S^2 de los datos observados y luego se obtiene la razón media/variación. Si esta razón es aproximadamente igual a uno, la distribución que se utilizará será la de Poisson. Si esta razón es apreciablemente más grande que uno, se deberá -- utilizar la distribución binomial, y si es apreciablemente menor que uno, la distribución de Pascal será la apropiada (tabla 2.9).

- 1) La distribución de Poisson representa la ocurrencia aleatoria de los eventos discretos.
- 2) En conteos de poco tránsito en donde los datos observados producen una razón media/variación aproximadamente igual a uno, la distribución de Poisson se puede ajustar a los datos observados.
- 3) En conteos de tránsito congestionado en donde los datos observados producen una razón de la media a la variación sustancialmente menor que uno, la distribución binomial se ajustará a los datos observados.
- 4) En conteos del tránsito en donde hay una variación cíclica en el flujo o en donde la media del flujo cambia constantemente durante el período de conteo, donde la razón de la media a la variación es sustancialmente mas grande que uno, la distribución de Pascal se podrá ajustar a los datos observados.

2.3.2 Algunas leyes de probabilidad para variables aleatorias continuas

La discusión hasta aquí ha tratado con variables aleatorias discretas y en particular con cuatro funciones de probabilidad, sin embargo, muchas variables aleatorias son continuas y por lo tanto pueden asumir cualquier valor dentro de un rango específico de valores. En contraste con el caso para una variable aleatoria discreta, las probabilidades para variables aleatorias continuas, toman valores exactos o específicos y no tienen otro significado que una relación con la función de distribución.

Para una variable aleatoria continua, la función de distribución $F(x)$ o la probabilidad de que la variable sea igual a o menor que x está relacionada a la función de densidad probabilística $f(x)$ como sigue :

$$dF(x) = f(x) dx \quad (2.30)$$

esta relación puede también observarse en la figura 2.8.

Para una variable aleatoria continua "con un rango de valores admisibles" desde M hasta N , las siguientes funciones adicionales serán útiles:

$$F(N) = \int_M^N f(x) dx = 1.0$$

$$F(m) = \int_M^m f(x) dx \quad \forall M \leq m \leq N,$$

$$P(x > m) = 1 - F(m) = 1 - \int_M^m f(x) dx \\ = \int_m^N f(x) dx, \\ \forall M \leq m \leq N$$

$$P(m < x < n) = \int_m^n f(x) dx; \quad \forall M \leq m \leq N; \quad \forall M \leq n - N \\ \text{y siendo } m \leq n.$$

SIN ESCALA

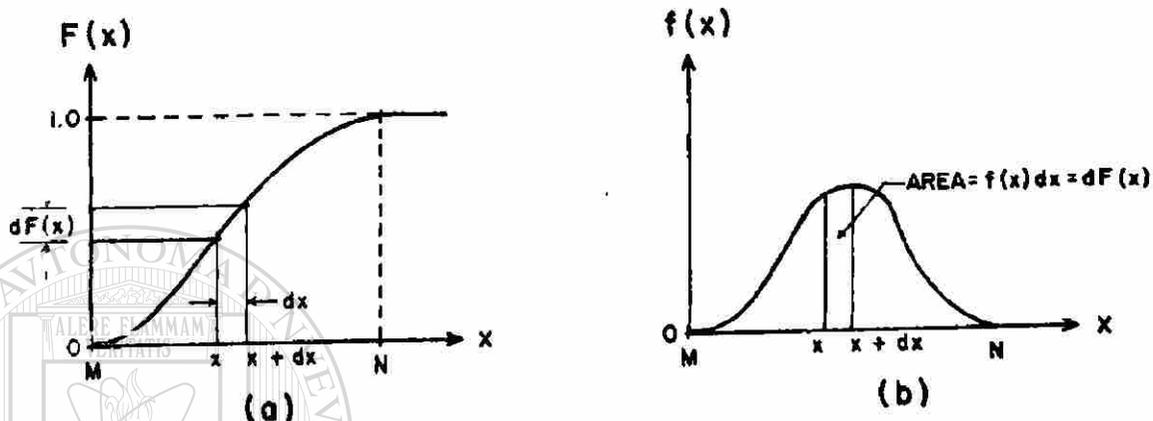


FIGURA 2.8 FUNCIONES DE DISTRIBUCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD PARA UNA SERIE DE VALORES DESDE M HASTA N

(a) FUNCION DE DISTRIBUCION PARA X

(b) FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD PARA X

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

®

en donde $P(x > m)$ es la probabilidad de que la variable x será mayor que m , y $P(x < n)$ es la probabilidad de que la variable x sea mayor que m pero menor que n .

Como es lógico, el área bajo la curva será igual a la unidad, la cual queda definida como sigue :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.0$$

También, para cualquier variable aleatoria continua, su media (o esperanza) μ y variación σ^2 puede ser determinada como sigue :

$$\mu = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

$$\sigma^2 = \text{Var}[x] = E[(x - \mu)^2]$$

$$= E[x^2] - \mu^2$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

2.3.2.1 Distribución Exponencial Negativa

Otras distribuciones son especialmente útiles para representar variables continuas aleatorias; esta es una forma de la distribución Exponencial, y puede ser derivada de la distribución de Poisson como sigue, la ley de probabilidad de Poisson es :

$$p(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

en donde $p(x)$ = probabilidad de x ocurrencias durante el intervalo t

λ = número promedio de eventos ocurridos por unidad de tiempo (tasa media de ocurrencia)

t = Intervalo de tiempo sobre el cual ocurren x eventos

x = número exacto de eventos ocurriendo durante cualquier intervalo de tiempo t

$\mu = \lambda t$ = número promedio de eventos ocurridos durante cualquier intervalo de tiempo t .

Cuando x es igual a cero (cuando no arriban vehículos durante un intervalo de tiempo de longitud t), la ecuación se reduce a :

$$p(h \geq T) = P(x = 0 \text{ en un tiempo } T) = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!}$$

$$P(0) = e^{-\lambda t} \quad (2.31) \quad \forall t \geq 0$$

en donde h representa el intervalo (Gap o Headway*) entre arribos. Esta expresión puede servir como una función de distribución de probabilidad continua para representar la probabilidad de que un intervalo (Gap o Headway) h sea al menos de longitud t .

* **Gap** : Un intervalo de la corriente principal que es evaluado por un vehículo de la corriente secundaria desfilado, cualquiera de las dos maniobras, incorporarse a o cruzar la corriente principal. Las unidades pueden ser tiempo o distancia (space gap).

Headway : Intervalo de tiempo entre vehículos que transitan en el mismo carril medidos entre los frentes vehiculares consecutivos.

La probabilidad de que un intervalo h , en distancia, sea menor que t , o $P(h < t)$, será :

$$P(h < t) = 1 - e^{-\lambda h}$$

y la función de densidad probabilística para esta distribución es :

$$f(h) = \lambda e^{-\lambda h}$$

ya que :

$$P(h \geq t) = \int_t^{\infty} f(h) dh = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda h} = e^{-\lambda t}$$

El uso de esta distribución se puede ilustrar, por ejemplo, suponiendo que los intervalos de tiempo (intervalos entre arribos vehiculares) son distribuidos exponencialmente sobre un camino en particular, para este caso, los datos se recolectaron de arribos vehiculares de un camino de Boston; en un período de 2,289 seg., 318 vehículos arribaron y se procesaron así:

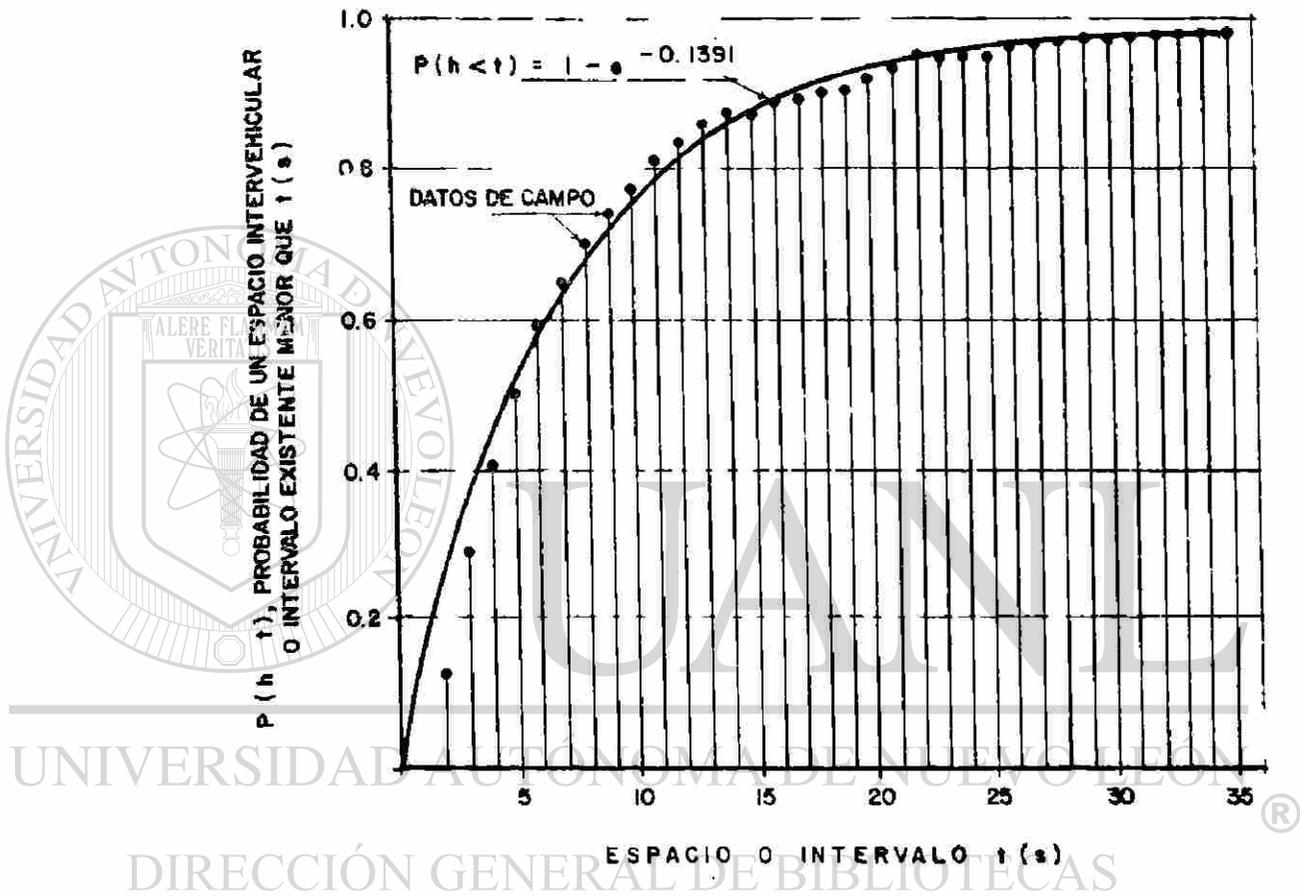
$$\hat{\lambda} = \frac{V}{T} = \frac{318}{2289}$$

$$\hat{\lambda} = 0.139 \text{ veh/seg}$$

también para esos datos :

$$P(h < t) = F(t) = 1 - e^{-0.139 t} \quad (2.32)$$

Las probabilidades asociadas con Gaps observadas de varias longitudes o menores (o valores de t o menores) pueden calcularse directamente con la ecuación anterior; se muestran gráficamente en la figura 2.9 a lo largo de las observaciones actuales, para un valor de $\hat{\lambda}$ (o valor paramétrico estimado) igual a 0.139 vehículos por segundo.



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

FIGURA 2.9 FUNCIONES DE DISTRIBUCION PARA INTERVALOS OBSERVADA Y EXPONENCIAL

2.3.2.2 Distribución Exponencial Desviada

Esta distribución se propuso como una distribución compuesta del tipo Poisson para la descripción de los intervalos vehiculares. Esta distribución es una variación de la distribución exponencial negativa en donde se tiene la prohibición de un intervalo mínimo denominado por la letra griega τ . La fórmula de esta distribución es :

$$P(h \leq t) = 1 - e^{-(t - \tau)/(T/V - \tau)} \quad (2.33)$$

en donde:

T = duración del flujo V , en segundos

V = flujo vehicular durante un intervalo de tiempo T

τ = intervalo de arribo mínimo en segundos

t = longitud de los intervalos de arribo en segundos

La densidad de probabilidad para esta distribución está dada por la siguiente fórmula :

$$p(t) = \frac{1}{T - \tau} e^{-(t - \tau)/(T/V - \tau)} \quad \text{para } t \geq \tau$$

$$y \quad p(t) = 0 \quad \text{para } t < \tau$$

2.3.2.3 Distribución de Erlang

Esta distribución es una manera mas general para trabajar con intervalos, los cuales pueden variar por cambios en el pa-

rámetro "a".

La forma acumulativa de la distribución de Erlang se puede establecer como sigue :

$$P(t < \tau) = 1 - e^{-\lambda t} \left(1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \dots + \frac{(\lambda t)^{a-1}}{(a-1)!} \right) \quad (2.34)$$

La función de densidad de probabilidad se puede establecer como :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{a-1}}{(a-1)!} \quad \forall a = 1, 2, 3, \dots$$

en donde :

- t = la variable de tiempo
- τ = un valor específico de tiempo
- λ = la razón de ocurrencia de eventos
- a = el coeficiente de aleatoriedad.

La distribución Exponencial Negativa es un miembro de la familia Erlang. Puede recalcarse que la distribución exponencial negativa representa una distribución de eventos completamente al azar. Dentro de la familia Erlang esto corresponde a "a = 1"; si este valor se sustituye en las ecuaciones anteriores se obtienen la distribución de probabilidad negativa y la función de densidad de probabilidad.

Un miembro de la familia de distribuciones Erlang puede usarse para representar la distribución de intervalos entre eventos, si los eventos no son aleatoriamente distribuidos. Un valor aproximado de "a" se determina para un proceso usando la siguiente relación :

$$a = \frac{t^{-2}}{S^2}$$

en donde para un espaciamento o intervalos observados

\bar{t} = la media de los espaciamentos observados

S^2 = La variación de los espaciamentos observados

2.3.2.4 Distribución Normal

Sin duda alguna la más conocida y utilizada es la función de distribución Normal, cuya función de densidad tiene la siguiente expresión :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.35)$$

$$\forall -\infty < x < \infty$$

en donde :

μ = media de la población total

σ = desviación estandar de la población "total"

La versatilidad de aplicaciones de esta función está basada en la teoría del límite central, la cual establece que la distribución de probabilidad de la suma de N valores de la variable aleatoria x independiente e idénticamente distribuidos con media μ y variación V se aproxima asintóticamente a una normal sin importar la distribución original de x.

El parámetro μ (llamado valor medio de la distribución) puede tomar cualquier valor y σ (llamado desviación estandar de la distribución) debe ser positiva.

La función de densidad acumulada para la distribución nor--

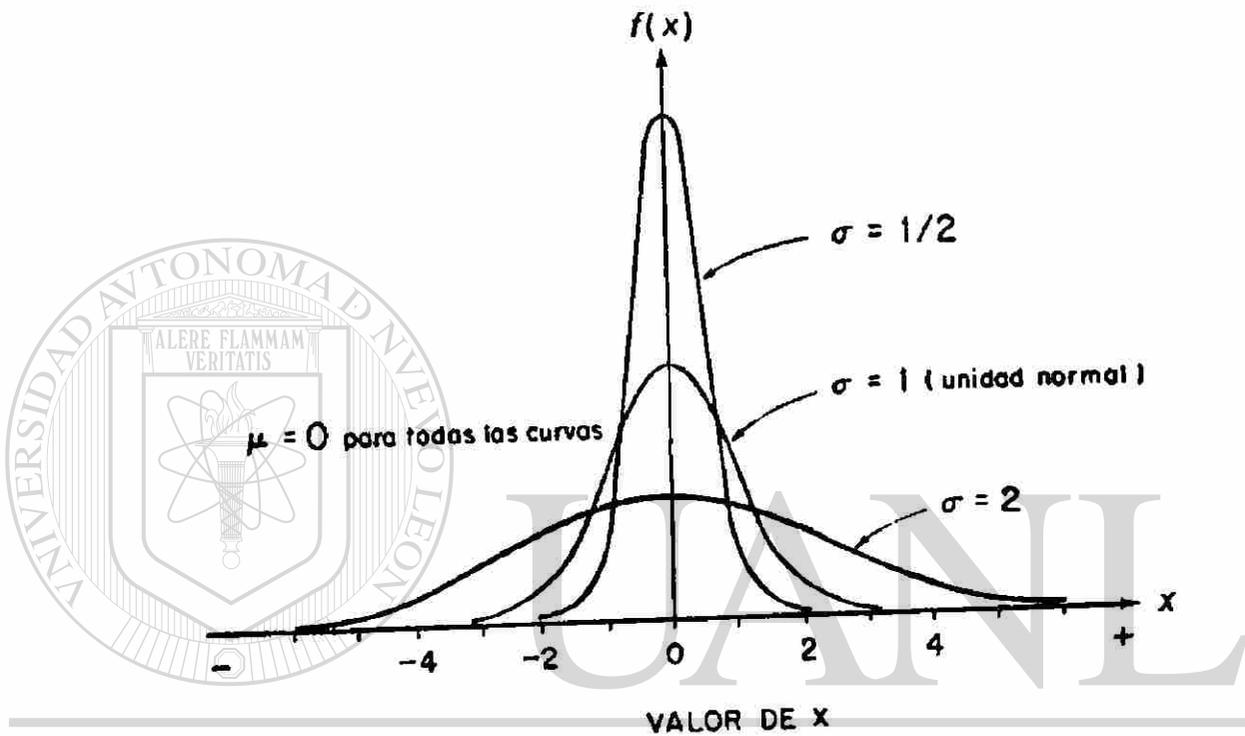


FIGURA 2.10a FUNCIONES DE DENSIDAD PROBABILISTICA PARA DISTRIBUCIONES NORMALES CON MEDIAS IGUALES ($\mu = 0$) Y DIFERENTES VARIACIONES.

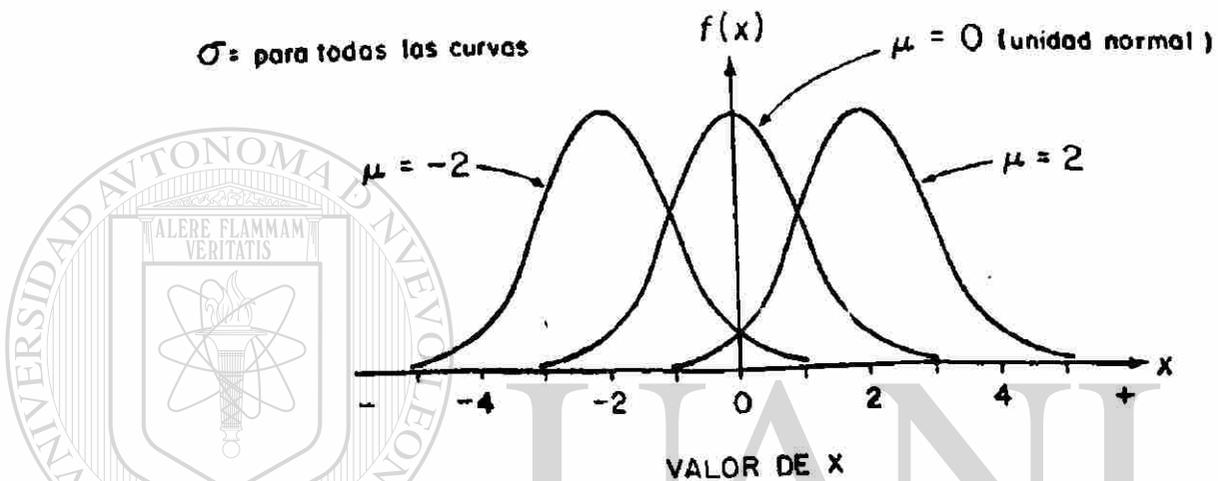


FIGURA 2.10b FUNCIONES DE DENSIDAD PROBABILISTICA PARA DISTRIBUCIONES NORMALES CON IGUAL VARIACION ($\sigma = 1$) Y VARIAS MEDIAS.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

mal es :

$$F(a) = P(x < a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

En la figura 2.10 se ilustra la distribución Normal y su --
función de densidad acumulada, cuando los parámetros de la dis-
tribución son : μ y σ

2.3.3 Aplicaciones en Ingeniería de Tránsito

Esta sección presenta algunos ejemplos de las aplicaciones-
de las distribuciones del tránsito que aquí se han presentado.

Distribución Binomial

Considerese que se encontró en los archivos de accidentes -
que los sábados por la noche, 25% de todos los conductores han
bebido. Si se paran a cuatro conductores, ¿ cuál es la proba-
bilidad de que sólo dos hayan bebido ?

Definiremos un "suceso" al hecho de encontrar a un conduc--
tor bebido; de tal forma que tendremos lo siguiente :

$$n = 5$$

$$x = 2$$

$$p = 0.25$$

$$q = 0.75$$

$$P(x) = \frac{n!}{x! (n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$P(x) = \frac{135}{512} = 0.264$$

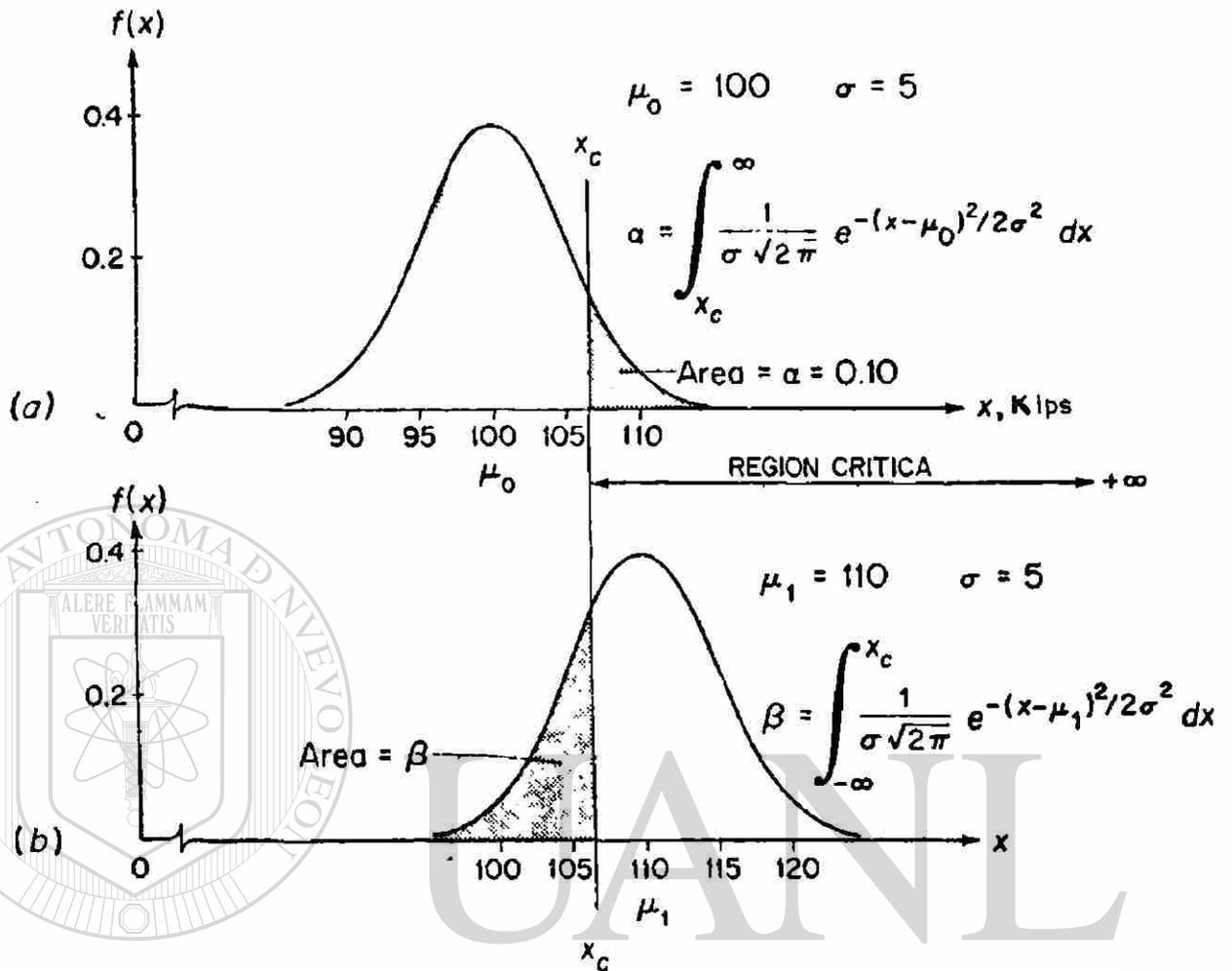


FIG. 2.11 HIPOTESIS PARA UNA RELACION PARCIAL DE PRUEBA DE DISTRIBUCION CON FLUCTUACION CONOCIDA (a) HIPOTESIS INEFICAZ (b) HIPOTESIS ALTERNA

ficancia.

Tercero, para esta prueba particular, el nivel de significancia también define la región crítica o de rechazo. Esto es, la región de los valores de observación para los cuales la hipótesis nula será rechazada. La región crítica será como se muestra en la figura 2.11 a e incluye todos los valores de x (la habilidad de carga del puente, en kips) sobre x_c . Matemáticamente la relación entre el nivel de significancia y el valor crítico x_c es como sigue :

$$\alpha = \int_{x_c}^{\infty} f(x) dx = \int_{x_c}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu_0)^2/2\sigma^2} dx$$

para este caso particular :

$$0.10 = \int_{x_c}^{\infty} \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-(x-100)^2/50} dx$$

En donde el área total bajo la curva de la distribución normal es igual a 1.0, la ecuación anterior se puede cambiar por la siguiente :

$$1 - \alpha = \int_{-\infty}^{x_c} f(x) dx ,$$

$$0.9 = \int_{-\infty}^{x_c} \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-(x-100)^2/50} dx$$

El valor de x_c puede determinarse haciendo uso de las tablas de la uninormal. Específicamente nosotros podemos hacer que $(1 - \alpha)$ ó 0.9 sea igual a $\Phi(u)$ o $F(u)$, y determinar el valor de "u" asociado con esta probabilidad a partir de la tabla 2.9 . En este caso, $u = 1.282$ para $F(u)$ igual a 0.9; de otro modo "u y x_c " se pueden relacionar usando la ecuación

(2.32) y substituyendo a , con x_c .

Así :

$$u = \frac{x_c - \mu_0}{\sigma}$$

ó

$$1.282 = \frac{x_c - 100}{5}$$

luego el valor x_c será :

$$x_c = 5(1.282) + 100 = 106.141 \text{ kips}$$

Consecuentemente para el nivel de significancias de 0.10, - la hipótesis nula será rechazada y la modificación se supone - incrementará la media. Como quiera que sea, la observación es - más grande que 106.141 kips. Puesto que nuestras pruebas da- - rán valor de 110 kips, la hipótesis nula se rechaza (para $\alpha = 0.10$) y se asume que la media de la habilidad del puente - para cargar es más grande que μ_0 .

Finalmente se deberá indicar que si la media verdadera fue- - ra actualmente 110 kips (el valor observado), o al menos mayor que 100 kips (el valor de μ_0), una segunda forma de error o -- error tipo II podrá hacerse si la hipótesis nula fuera inco- - rrectamente aceptada. Esto es, refiriendonos a la figura --- 2.11 b, un error tipo II podrá ocurrir, en cualquier momento -- que el valor observado de x esté por abajo de x_c (dado que la - media verdadera fué en efecto mayor que μ_0). La probabilidad - de hacer un error tipo II (cuando en efecto $\mu > \mu_0$) es igual a-

β ó.

$$\beta = \int_{-\infty}^{x_c} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}} dx = F(x_c)$$

Para determinar β , el valor de x_c es conocido y es igual a 106.141 y su valor correspondiente de u se puede encontrar como sigue (suponiendo que σ es igual a 110) :

$$u = \frac{x_c - \mu_1}{\sigma} = \frac{106.141 - 110}{5} = - \frac{3.859}{5} = - 0.7718$$

El valor que le corresponde a $F(u)$ con respecto al valor negativo obtenido anteriormente, se puede encontrar haciendo uso de la siguiente relación :

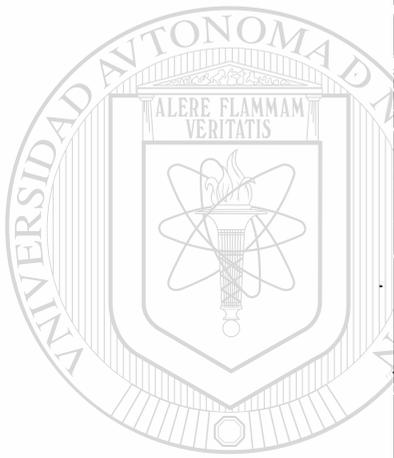
$$F(-u) = 1 - F(u),$$

Así, utilizando la tabla 2.9, el valor de $F(u)$, en donde u es + 0.7718, está alrededor de 0.7800, y por lo tanto :

$$\beta = F(-u) = F(-0.7718) = 1 - 0.7800 = 0.22$$

De las relaciones matemáticas anteriores y de la figura 2.11, es evidente que una reducción en el nivel de significancia usualmente produce una reducción en el error tipo I (la probabilidad de rechazar incorrectamente la hipótesis nula) y un incremento en el error tipo II (la probabilidad de aceptar incorrectamente la hipótesis nula)*. Ambos de estos cambios deberán tenerse muy claros en mente cuando ajustemos el nivel de significancia aceptable, y en general el analista querrá maximizar el poder de la prueba, en donde el poder es igual a $(1 - \beta)$.

* Estas son las relaciones que usualmente pero no siempre se aplicarán dependiendo de la forma de las distribuciones para las hipótesis nula y alterna (por ejemplo, unimodal contra bimodal, etc).



u	$P(y < u)^*$	$P(-u < y < u)†$
0.0	0.5000	0
0.1	0.5398	0.0797
0.2	0.5793	0.1585
0.3	0.6179	0.2358
0.4	0.6554	0.3108
0.5	0.6915	0.3829
0.6	0.7257	0.4515
0.7	0.7580	0.5161
0.8	0.7881	0.5763
0.9	0.8169	0.6319
1.0	0.8413	0.6827
1.1	0.8643	0.7287
1.2	0.8849	0.7699
1.3	0.9032	0.8064
1.4	0.9192	0.8385
1.5	0.9332	0.8664
1.6	0.9452	0.8904
1.7	0.9554	0.9109
1.8	0.9641	0.9281
1.9	0.9713	0.9426
2.0	0.9772	0.9545
2.1	0.9821	0.9643
2.2	0.9861	0.9722
2.3	0.9893	0.9786
2.4	0.9918	0.9836
2.5	0.9938	0.9876
2.6	0.9953	0.9907
2.7	0.9965	0.9931
2.8	0.9974	0.9949
2.9	0.9981	0.9963
3.0	0.9987	0.9973
Fractiles:		
1.036	0.8500	0.7000
1.2816	0.9000	0.8000
1.6449	0.9500	0.9000
1.9600	0.9750	0.9500
2.0537	0.9800	0.9600
2.3263	0.9900	0.9800
2.5758	0.9950	0.9900

$$* P(y < u) = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = \Phi(u) = F(u).$$

$$† P(-u < y < u) = \int_{-u}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = \Phi(u) - \Phi(-u) = F(u) - F(-u).$$

TABLA 29 PROBABILIDADES PARA CIERTAS PROPIEDADES DE DISTRIBUCION DE UNI-NORMAL (LA MEDIA ES 0 Y LA DESVIACION ES 1)

Otro ejemplo para esta misma distribución considera el acceso a una intersección con un carril especial de vuelta izquierda, el cual está provisto de una fase especial para este movimiento. Un promedio de 20 vehículos arriban a la intersección por ciclo, y un 25% dan vuelta izquierda. ¿Cuál es la probabilidad de que la fase de vuelta izquierda no sea usada en un ciclo dado ?

Para este caso :

$n = 20$ vehículos arribando

$x = 0$ vehículos de vuelta izquierda

$p = 0.25$

$q = 0.75$

$$P(x) = \frac{n!}{x! (n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$P(0) = (0.75)^{20} = 0.0032$$

La siguiente tabla ilustra el ajuste de una distribución binomial para datos del flujo de una autopista congestionada, en donde la relación variación-media = 0.535. Por comparación, se ha ajustado también una distribución de Poisson, pero se puede notar que la distribución Binomial produce un arreglo mucho mejor.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Número de vehículos por intervalo*	Freq. observada	Frecuencia teórica por	
		Distribución Binomial**	Distribución de Poisson
3	0	0.3	1.3
4	3	1.0	2.5
5	0	2.9	4.7
6	8	6.2	7.1
7	10	9.8	8.8
8	11	12.3	9.4
9	10	12.1	8.8
10	11	9.4	7.3
11	9	5.8	5.4
12	1	2.8	3.7
	1	1.0	2.3
	0	0.4	2.7
TOTAL	64	64.0	64.0

* Medidos en intervalos de 15 segundos

** El ajuste de la distribución Binomial se establece para una prueba de bondad de ajuste por medio de la Chi cuadrada a un nivel del 5% de significancia. El ajuste para la distribución de Poisson no es estable.

Dirección Binomial Negativa

Un intervalo de tránsito tiene instalados tres nuevos semáforos que requieren controles manuales, su experiencia indica que cuando los nuevos controles se toman de la bodega aproximadamente 60% están listos para su uso y alrededor del 40% restante requiere más o menos una semana para su ajuste. ¿Cuál es la probabilidad de que de cinco controladores que se toman de la bodega tres de ellos no requieren ajuste ?

$k = 3$ controles manuales

$n = 5$ controles

$x = n - k = 2$

$p = 0.6$

$q = 0.4$

$$P(x) = \frac{(x + k - 1)!}{(k - 1)! x!} p^k q^x$$

$$P(x) = (6) (0.6)^3 (0.4)^2$$

$$P(x) = 0.207$$

Así la probabilidad es de 0.207 de que exactamente cinco -- controladores tendrán que ser tomados de la bodega para obtener tres controles que no necesiten ajuste.

La siguiente tabla ilustra los datos para una situación cíclica que registra el tránsito después de un semáforo. Si bien el ajuste para la distribución binomial negativa de los datos es aceptable. No lo es para la distribución de Poisson.

Número de vehículos por intervalos	Frec. observada	Frecuencia teórica	
		Distribución de Poisson	Distribución Binomial Negativa
0	139	129.6	140.4
1	128	132.4	122.0
2	54	67.7	62.2
3	25	23.1	24.2
4	10	5.9	8.0
5	3	1.2	2.3
5	0	0.1	0.9
TOTAL	360	360.0	360.0

Distribución de Poisson

Una intersección ha tenido dos accidentes por año en los últimos tres años. ¿Cuál es la probabilidad de que habrá cinco accidentes en la intersección en el próximo año ?

$m = 2$ accidentes (número esperado de accidentes en un año)

$x = 5$ accidentes

$$P(x) = \frac{m^x e^{-m}}{x!}$$

$$P(x) = 0.036$$

La inversa de este resultado nos indica que en un año de un período de 28 años la intersección tendrá cinco accidentes.

Otro ejemplo referente a esta distribución está referido a la frecuencia de arribos comparados con un conteo de arribos observados, para tal efecto se presenta la siguiente tabla.

Número de vehículos por períodos de 10 segundos*	Frec. observada	total de vehículos**	frecuencia teórica***
0	94	0	97.0
1	63	63	59.9
2	21	42	18.5
3	2	6	3.8
3	0	0	0.8
T O T A L	180	111	180.0

* Debido a que hubo 111 vehículos en 180 períodos de 10 segundos el volumen horario fué de 222 vehículos

** Se obtiene multiplicando la columna 1 por la columna 2.

*** (Frec. teórica) = (frec. total observada) = $\frac{m^x e^{-m}}{x!}$

en donde : $m = \frac{(\text{total de vehículos})}{(\text{frec. total observada})}$

$$= \frac{111}{180}$$

$x =$ valor en la columna 1.

Distribución Exponencial Negativa

Con una señal de alto, los vehículos requieren un intervalo de 6 segundos en el flujo de la corriente principal para poder cruzar la corriente. si la tasa del flujo en la corriente principal es de 1,200 vehículos por hora, ¿ cuál es la probabilidad de que cualquier intervalo dado sea de 6 segundos o mayor?

$$\tau = 6 \text{ segundos}$$

$$\lambda = 1,200 \text{ vehículos por hora} = 1/3 \text{ de vehículos por seg.}$$

$$\begin{aligned} P(t \geq \tau) &= e^{-\lambda \tau} \\ &= e^{-(1/3)(6)} = e^{-2} \\ &= 0.135 \end{aligned}$$

Así, acorde a esta distribución, aproximadamente 13.5% de los intervalos serán mayores a seis segundos.

Distribución Exponencial Negativa Desviada

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

En el ejemplo previo si el intervalo mínimo es de un segundo, ¿ cuál es la probabilidad de que un intervalo dado sea mayor a 6 segundos ?

$$c = 1 \text{ segundo}$$

$$\tau = 6 \text{ segundos}$$

$$\lambda = 1,200 \text{ vehículos por hora} = 1.3 \text{ de vehículo por segundo}$$

$$\bar{t} = \frac{1}{\lambda} = 3 \text{ segundos de intervalo}$$

$$\begin{aligned} P(t \geq \tau) &= e^{-\lambda(\tau - c) / (\bar{t} - c)} \\ &= e^{-5/2} \\ &= .082 \end{aligned}$$

De esta manera se aprecia que con la distribución Exponencial Desviada aproximadamente 8.2% de los intervalos serán mayores a 6 segundos.

Distribución Normal

Supóngase que se está en proceso de arreglar límites de velocidades sobre una carretera y se tienen muchas razones para creer (correctamente o erróneamente), que las velocidades de -- viaje de los vehículos individuales se distribuirán normalmente. También, datos muestreados aleatoriamente y tomados antes de la imposición de un límite de velocidad nos dieron los si-- guientes estandares μ y σ como sigue :

$$\bar{x} = 75.6 \text{ mph (estimador de } \mu \text{)}$$

$$s = \pm 5.52 \text{ mph (estimador de } \sigma \text{)}$$

Supóngase que nosotros no tenemos "estandares o criterios" para ajustar el límite de velocidad, preferimos primero determinar las circunstancias asociadas con arreglos al límite de - velocidad que más o menos nos incluyan un 85% de las velocidades de todos los vehículos, y luego determinar las circunstancias asociadas con el ajuste al límite de velocidad que incluyan todos los vehículos viajando a velocidades iguales a o por abajo a la velocidad media más dos veces la desviación estandar.

En ambos casos, nosotros desearemos conocer tanto la veloci-- dad límite requerida como el porcentaje de vehículos acomodados.

1) Límite de velocidad que incluya el 85% de los vehículos de la tabla A tenemos que $P(y < 1.036)$ es 0.85, y así u para la -

distribución uninormal es 1.036; este valor de u corresponde -
al límite de la distribución transformada f(y) por lo tanto,

$$u = 1.036 = \frac{a - \mu}{\sigma}$$

$$u = 1.036 = \frac{a - \bar{x}}{s}$$

$$u = 1.036 = \frac{a - 75.6}{5.52}$$

Resolviendo la última ecuación obtenemos el límite A para -
la distribución Normal f(x): $a = 1.036 \times 5.52 + 75.6 = 81.32$ -
mph.

En otras palabras, las velocidades del 85% de los vehículos
estarán en o por debajo de los 81.32 mph (esto será cierto si-
las velocidades vehiculares están normalmente distribuidas con
la media y la variación tal y como se estimaron).

2) Velocidades vehiculares por abajo de la velocidad media --
más dos veces la desviación estandar: en este caso el límite A
para la distribución de velocidad será como sigue :

$$a = \mu + 2\sigma$$

$$a = \bar{x} + 2s = 75.6 + 2 \times 5.52 = 86.64 \text{ mph}$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Transformando el límite de acuerdo a la siguiente considera-
ción tenemos lo siguiente :

$$u = \frac{a - \mu}{\sigma} = \frac{a - \bar{x}}{s} = \frac{86.64 - 75.6}{5.52} = 2.000$$

Este valor de u corresponde a los valores de u mostrados en
la tabla A, y es el límite asociado como una función de distri-
bución probabilística acumulativa $P(y < u)$ de alrededor de ---

0.9772 (de nuevo $P(y < u)$ es igual a $P(x < a)$). Por lo tanto bajo nuestras consideraciones, las velocidades de aproximadamente 97.72% estarán en o por abajo de una velocidad de ---- 86.64 mph.

Distribución de Erlang

Las siguientes dos tablas ilustran el ajuste de una distribución de Erlang a los intervalos observados a una autopista; más específicamente la primera tabla demuestra la estimación de los parámetros a partir de la primera mitad de los datos, y la segunda tabla la prueba de la bondad de ajuste a la otra mitad de los datos por el método de Kolmogorov-Smirnoff (K - S). Esta prueba alterna para la bondad de ajuste, especialmente -- aplicada a tamaños de muestra pequeños. El ajuste mostrado en la segunda tabla es estable que un nivel de confianza del 5%.

Se debe hacer notar que ambas tablas se dan en forma acumulativa inversa análoga a la figura A.

2.4 Pruebas de Hipótesis

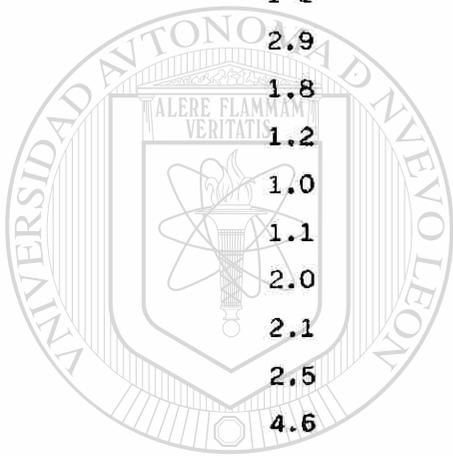
Hay muchos modelos en donde el ingeniero debe probar hipótesis que él ha hecho acerca del comportamiento del flujo del -- tránsito o acerca de un conjunto de datos; en las discusiones -- previas de las distribuciones Binomial, Poisson, Normal y Expo -- nencial, por ejemplo, nosotros supusimos -- sin prueba -- que -- esas distribuciones podrían ser usadas para representar las -- condiciones del flujo o características anotadas. Estas hipótesis y otras con relación a la magnitud para lo cual los da -- tos de muestra son representativos deberán ser examinados en -- detalle; preguntas típicas para ser contestadas son :

ESTIMACION DE LOS PARAMETROS PARA LA DISTRIBUCION DE ERLANG*

INTERVALOS	OBSERVADOS**	CUADRADOS DE LOS INTERVALOS
	0.9	0.81
	2.1	4.41
	2.5	6.25
	3.8	14.44
	1.4	1.96
	1.1	1.21
	2.9	8.41
	1.8	3.24
	1.2	1.44
	1.0	1.00
	1.1	1.21
	2.0	4.00
	2.1	4.41
	2.5	6.25
	4.6	21.16
	1.1	1.21
	5.7	32.49
	3.1	9.61
	2.3	5.29
	3.5	12.25
	0.9	0.81
	5.6	31.36
	0.8	0.64
	1.7	2.89
	1.4	1.96

* Datos tomados de Gerlough y Barnes

** Observaciones utilizadas 2, 4, 6, ... 50.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



- 1.- ¿Cuál es la forma de la distribución para la población - de la cual estos datos fueron obtenidos ?
- 2.- ¿ Fueron dos o más conjuntos de muestras obtenidas de la- misma distribución (o población)?
- 3.- ¿ Hay una diferencia significativa entre las poblaciones- de las cuales dos medias muestrales fueron extraídas ?

Estas y otras preguntas pueden solamente ser contestadas en términos probabilísticos por la aplicación de un número de procedimientos estadísticos denominados "significancia" o "pruebas de hipótesis". Una prueba de significancia es un procedimiento matemático aplicado a datos empíricos para decisión, en grupos de probabilidad, ya sea que se formulen o no convenientemente hipótesis defendibles.

Los estadísticos han desarrollado muchas pruebas de significancia para satisfacer necesidades y condiciones particulares, solamente dos de las cuales se detallarán aquí. Se deberá enfatizar que otras pruebas de significancia estadística son provechosas y en algunos problemas serán mas aplicables. Además de eso, el tema íntegro de análisis de la variación ha sido ignorado dentro de este tratamiento, no porque éste sea de poca importancia, sino mas bien, porque para esto se necesita un tratamiento mas detallado y complejo.

Por principio será de ayuda repetir y enfatizar algunas nociones fundamentales.

Primero.- Pruebas de significancia o pruebas de hipótesis- se harán cuando se haga uso de estadísticas que sirvan como estimadores de los parámetros poblacionales.

Segundo.- Puesto que los datos empíricos o estadísticos se usaron para las pruebas de hipótesis, uno nunca puede negar -- ser "cierto" que la estadística es o no representativa de las poblaciones de las cuales ellos fueron reunidos y así uno de -- ningún modo puede estar seguro de que la hipótesis es o no válida en realidad.

Tercero.- Las pruebas de significancia estadística solamente proveen al ingeniero probabilidades de haber hecho hipótesis razonables; así el problema importante todavía afronta lo de tener que decidir cual es un nivel de aceptación razonable, o cual es una probabilidad lo bastante alta o verosímil de hipótesis aceptable para justificar éstas no rechazando alguna -- de las hipótesis. En resumen, la definición de un nivel adecuado o grado de aceptación es un resultado crítico y no se -- puede resolver sobre el terreno estadístico.

También se deberá enfatizar que la hipótesis apropiada variará acorde a la hipótesis que está siendo probada y la distribución particular involucrada; en algunos casos habrá una prueba "uniformemente más poderosa".

Para ilustrar la naturaleza general de las pruebas de hipótesis, la filosofía fundamental de ellas, y algunos de sus más importantes aspectos, consideraremos un ejemplo que involucra una hipótesis simple alrededor de la media de una variable --- aleatoria que está normalmente distribuida. Para este ejemplo, supondremos que*:

1.- La habilidad de un cierto tipo de puente para soportar un peso móvil (digamos un puente tipo A) está normalmente distribuida con media μ_0 de 100 kips y con una desviación estandar σ de 5 kips (kilopounds).

* No nos concierne con qué suposiciones razonables o con qué--- problemas se estableció su validez.

2.- La habilidad del puente tipo A con una ligera modificación (digamos tipo B) también estará normalmente distribuida y con una desviación estándar de 5 kips; de cualquier modo, se estableció en la hipótesis que el puente tipo B tendrá una media más alta μ_1 , que el tipo A (esto es, $\mu_1 > \mu_0$).

Se llevó a cabo una prueba simple de campo sobre la modificación del puente tipo B e indicó que para esta prueba la habilidad de cargar un peso fué de 110 kips. Basados en una observación simple y una significancia o nivel de aceptación $\alpha = 0.10$, es razonable para rechazar la hipótesis nula de que la capacidad de cargar un peso del puente con modificación (puente tipo B) es inalterable, es decir, es razonable suponer que la modificación incrementó la capacidad de carga.

Por lo tanto, nosotros estamos probando conocer si es más razonable que la media μ_0 es la media verdadera para el puente modificado tipo B o si es más razonable suponer (sobre las bases de la simple observación) que la media verdadera μ_1 del puente modificado tipo B es mayor que μ_0 .

Primero, esta es una prueba unilateral puesto que nosotros solamente estamos interesados en probar incrementos en la media.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Segundo, para esta prueba el nivel de significancia α define la probabilidad de rechazar la hipótesis (que la media está inalterada por la modificación) cuando en efecto la media verdadera no ha sido incrementada por la modificación. se llama error tipo I el rechazar incorrectamente la hipótesis nula. Cuando la hipótesis nula es en el acto verdadera (es decir --- cuando la media es inalterada por modificación), un error tipo I ocurrirá con una probabilidad igual a α , el nivel de signi-

2.4.1 La Chi Cuadrada

La distribución muestral Chi Cuadrada se define como sigue :

$$x^2 = \sum_{i=1}^n \frac{f_i - e_i}{e_i}$$

donde f_i , la frecuencia de observaciones muestrales en la clase i , e_i es la frecuencia de la distribución teórica correspondiente a las f_i y n es el número de clases en las que se han definido las observaciones.

Si α representa la probabilidad de que x^2 exceda un valor particular, digamos A , entonces las tablas de la Chi Cuadrada proporcionan aquellos valores de x^2 para aquellos que la probabilidad de x^2 sea mayor que A , para varios valores de α .

La siguiente figura ilustra la distribución Chi Cuadrada correspondiente a ciertos valores de su parámetro denominado "Grados de libertad" ($v \geq 3$).

Si x tiene una distribución normal con μ y σ , entonces se puede demostrar que $Z = (X - \mu) / \sigma$ tiene una distribución normal (0, 1) y $Z^2 = (X - \mu)^2 / \sigma^2$ tiene una distribución Chi Cuadrada con un grado de libertad. Si una muestra de tamaño n se selecciona de una población normal con media μ y desviación estandar σ , entonces :

$$z^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 / \sigma^2$$

tiene una distribución Chi Cuadrada con n grados de libertad.

Si se denota por v los grados de libertad, entonces, a medida que v crece, la Chi Cuadrada se aproxima a una distribución normal con

$$\mu = v, \text{ y } \sigma^2 = 2v$$

para $v = 30$, la distribución normal es una buena aproximación de la Chi Cuadrada.

Sea x una variable aleatoria con media μ y variación σ^2 :

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \mu)^2}{n}$$

A partir de una muestra de tamaño m , se puede obtener un estimador insesgado de la variación poblacional mediante:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - \bar{x})^2}{m-1}$$

en la siguiente expresión:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{m}}}$$

Se observa que la distribución muestral de una población normal es también normal con media μ y desviación estándar $\frac{\sigma}{\sqrt{m}}$. Generalmente no se conoce la σ de la población y se tiene que inferir ésta a través de S , la cual es la desviación estándar de la muestra.

2.4.2 La T de Student

El estimador siguiente $t = \frac{(\bar{x} - \mu) \sqrt{m}}{S}$ tiene una dis

tribución t o de Student con $v = m - 1$ grados de libertad. A diferencia de la distribución Chi Cuadrada la distribución t - se aproxima a 1 cuando m es suficientemente grande. Para $v < 30$ esta distribución se puede aproximar mediante una distribución normal estandar.

Si se tienen dos muestras independientes n_1 y n_2 , seleccionados de dos poblaciones con distribución normal y variaciones σ_1 y σ_2 respectivamente, si las variaciones de las muestras son s_1^2 y s_2^2 entonces la variable aleatoria $(s_1^2/\sigma_1^2)/(s_2^2/\sigma_2^2)$ tiene una distribución F o de Fisher. Esta distribución es -- asimétrica y depende de dos parámetros $v_1 = n_1 - 1$ y $v_2 = n_2 - 1$ que son grados de libertad en el numerador y en el denominador respectivamente.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

III. MODELOS DE LINEAS DE ESPERA

3. Introducción

En los términos más simples, la teoría de las líneas de espera está en función de sus longitudes y sus demoras; más formalmente, el propósito de esta teoría es brindar una descripción matemática de los procesos que dan lugar a la formación de este fenómeno, para permitir un análisis detallado de las consecuencias de formar líneas de espera. Entre las preguntas más relevantes por analizar, para una situación particular son:

¿Cuál es la probabilidad de que se pueda retrasar una llegada o de que se encuentre con una línea de espera ?

¿Cuál es el tiempo de demora esperado ?

¿Cuál es el tiempo de demora esperado, dado que una llegada esta retrasada por una línea de espera ?

¿Cuál es el tiempo de demora esperado en una fila (en contraste con el tiempo total de espera o el tiempo perdido en servicio) ?

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Para considerar con propiedad estas preguntas y otras relacionadas con el sistema, se requiere hacer consideración de la naturaleza probabilística del proceso, aunado al hecho de que ambos, tanto las llegadas del tránsito y el servicio del mismo varían en tiempo. La conducta de las líneas de espera y modelos necesarios para describir o caracterizar éstas, depende de

una representación explícita de tres elementos del proceso:

- (1) Características de las llegadas
- (2) Características de las salidas; y
- (3) Características del servicio. (Disciplina de las líneas de espera).

Para detallar la variación en las llegadas y de la manera de como aplicarlas a la Ingeniería de Tránsito, se deben considerar tres características básicas, que son:

Primero. Es necesario describir la tasa de llegadas de vehículos en una caseta de cobro, en una intersección o en las rampas de acceso a las autopistas, por ejemplo, si los vehículos llegan uniformemente cada 3 segundos, para así formar una distribución de Poisson.

Segundo. Debe detallarse la capacidad de las casetas de cobro, intersecciones, o autopistas para desalojar o brindar servicio a los vehículos. Más específicamente, mientras que en promedio un vehículo puede requerir solo 6 segundos para abandonar la caseta de cobro o solo 2 segundos para entrar a una intersección con semáforos (una vez que se ha colocado en su carril), estas salidas o tasas de servicio pueden variar considerablemente en tiempos de acuerdo a una distribución exponencial.

Tercero. Es necesario detallar los procedimientos por los cuales se asigna la llegada de vehículos a las líneas de

espera, o las facilidades del servicio. Por ejemplo, en situación de líneas de espera múltiples los usuarios pueden elegir arbitrariamente el camino a la caseta de cobro o estar asignados a un carril en particular por un patrullero o señal luminosa; también todos los vehículos se analizan en base de "el primero que llegue, es el primero que se atiende" o si algún vehículo tiene prioridad (por ejemplo: una ambu-lancia).

Las relaciones más simples e importantes de la teoría elemental de líneas de espera se consideran en este artículo, de bido a que se presentarán y aplicarán a situaciones particulares del flujo del tránsito, sin embargo, debe hacerse hincapié en que estas relaciones son válidas por completo solo para las consideraciones de estado estable; esto es, solo cuando los patrones de llegada y de servicio se sostienen por períodos indefinidamente grandes de tiempo. Como consecuencia, estos modelos de líneas de espera no pueden aplicarse a ciertas situaciones pico, por ejemplo; en las que el flujo de llegada excede a las capacidades que facilitan los períodos cortos de una o dos horas, ni se pueden usar para describir el comportamiento de líneas de espera transitorias. Por el contrario, para el estado no estable y casos de líneas de espera transitorias será necesario hacer uso de modelos más complejos y técnicas de programación (tales como las técnicas de simulacion de Montecarlo); como el espacio no permite una extensión apropiada de la teoría de líneas de espera para explicar con más realidad las condiciones de máxima demanda y de estado no estable, podríamos enfatizar la importancia de un tratamiento más avanzado y completo.

A menudo se presentan situaciones de decisión en las cuales, las unidades que llegan a recibir servicio deben esperar antes de que puedan obtenerlo. Si se conocen las leyes que gobiernan las llegadas, los tiempos de servicio y el orden en que las unidades que llegan se atienden, entonces la naturaleza de esta situación de espera puede estudiarse y analizarse matemáticamente.

Los vehículos, que llegan pueden formar una línea y recibir servicio a través de una sola estación, como el acceso a una autopista; pueden formar una línea y recibir servicio a través de varias estaciones, como en el acceso a un puente; o pueden formar varias líneas y recibir servicio a través de muchas estaciones, como en las casetas de cobro de una autopista. En este estudio supondremos únicamente una clase de disciplina de la línea de espera: El primero que llega, el primero que sale; una unidad entra a servicio en el momento que una estación queda vacía.

A continuación se describen tres casos más comunes de líneas de espera en el flujo del tránsito.

3.1 Línea de espera con estación de servicio simple, llegadas tipo Poisson, tiempos de servicio exponencial.

Para este caso, las llegadas vehiculares a una estación de servicio simple (ya sea una caseta de cobro, un carril para dar vuelta a la izquierda, etc) se supone que son aleatorios

y están dados por la ecuación.

$$f(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

Donde:

$f(x)$ = Probabilidad de exactamente "X" llegadas en un tiempo "t"

λ = Número promedio de llegadas por unidad de tiempo.

También, se supone que las casetas de cobro, estaciones de servicio, etc., pueden desalojar vehículos a una tasa promedio de μ vehículos por unidad de tiempo, así el tiempo de servicio promedio es $1/\mu$. Más aún, se supuso que el tiempo servido para vehículos puede ser representado por una función de probabilidad exponencial, dada por la siguiente expresión:

$$f(s) = \mu e^{-\mu s}$$

$$\mu = \frac{1}{\text{tiempo promedio de serv.}} = \frac{1}{S}$$

Donde:

$f(s)$ = Es la probabilidad de que un vehículo tome "s" unidades de tiempo para ser servido.

Habiendo hecho estas suposiciones, se pueden deducir las relaciones de líneas de espera y demoras mostradas en la Tabla 1. En esta tabla, el número de vehículos o el tiempo perdido en el sistema, se refiere al total de vehículos formando líneas de espera (demorándose mientras están esperando en la línea), pero no incluye el tiempo perdido en el servicio (ejemplo 1).

Es importante mencionar que en situaciones de carriles de entrada y facilidades de servicio múltiple, los modelos de líneas de espera de estación simple o de un solo carril mostrados en la Tabla 1 se pueden aplicar, si el flujo está dividido de manera igual entre las facilidades del servicio.

La intensidad del tránsito es un indicador importante del sistema y puede considerarse como una razón capacidad-utilización para medir el alcance en el cual la tasa de llegada (λ) se aproxima a la tasa de capacidad (medida como μ); mientras la razón ρ se acerca a 1.0, obviamente el sistema o la facilidad de acceso se "paraliza", o hay línea de espera virtualmente constante.*

Estos efectos se ilustran en las figuras 1a y 1b, en las que se observa que para las proporciones de intensidad de 0.5 o menos, las líneas de espera son prácticamente insignificantes, y en proporciones de 0.75 o más la longitud promedio de las líneas de espera se incrementa con rapidez.

* Nuevamente estas relaciones valen solamente para condiciones de estado estable (por ejemplo cuando la media de arribo y las tasas de servicio son sostenidas por períodos de tiempo indefinido).

Estas relaciones se pueden utilizar para otros propósitos por ingenieros y proyectistas, tales como corroborar obras ya diseñadas o aplicarse a situaciones donde los límites superiores están establecidos, usando los modelos 1, 8 y 9 de la Tabla 1.

$$P(n \leq x) = \sum_{n=0}^x (\rho)^n (1 - \rho) \quad (1a)$$

$$P(n \leq x) = 1 - \rho^{x+1} = 1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{x+1} \quad (1b)$$

Donde $P(n \leq x)$ es la probabilidad de que "n" (número de vehículos en el sistema sea igual o menos que "x"). Con la ecuación (1b), el proyectista puede determinar la probabilidad de que "n" no exceda algún valor crítico "x", dando la tasa de llegada esperada λ y la tasa de servicio propuesta μ . Alternativamente, puede determinar la tasa de servicio que debe brindar el sistema para ser compatible con algún nivel de probabilidad deseado y tasa esperada de arribo, para un cierto diseño.

Similarmente el proyectista puede usar los modelos 8 y 9 (de la Tabla 1) para determinar la probabilidad de que el tiempo perdido (o empleado) en el sistema o en las líneas de espera

Tabla 1.- Ecuaciones matemáticas de las líneas de espera para una estación de servicio o caseta de cobro, con arribos tipo Poisson y tiempo de servicio exponencial * para condiciones de estado estable y

Modelo de línea de espera	Descripción del modelo
$p(n) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = (\rho)^n (1 - \rho)$	$P(n)$ = Probabilidad de tener exactamente "n" vehículos en el sistema
$\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1 - \rho}$	\bar{n} = Número promedio de vehículos en el sistema
$\text{Var}[n] = \frac{\lambda \mu}{(\mu - \lambda)^2} = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}$	Var [n] = Variación de "n" (número de vehículos en el sistema)
$\bar{q} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho^2}{(1 - \rho)}$	\bar{q} = Longitud promedio de la línea
$f(d) = (\mu - \lambda)e^{-(\lambda - \mu)d}$	$f(d)$ = Probabilidad de haber tenido empleado un tiempo "d" en el sistema
$\bar{d} = \frac{1}{\mu - \lambda}$	\bar{d} = Tiempo promedio de empleo en el sistema
$\bar{w} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \bar{d} - \frac{1}{\mu}$	\bar{w} = Tiempo promedio de espera empleado en la línea
$P(d \leq t) = 1 - e^{-(1 - \rho)\mu t}$	$P(d \leq t)$ = Probabilidad de haber tenido empleado un tiempo "t" o menor en el sistema
$P(w \leq t) = 1 - \rho e^{-(1 - \rho)\mu t}$	$P(w \leq t)$ = Probabilidad de haber esperado un tiempo "t" o menor en la línea

*

λ = Número promedio de arribos vehiculares por unidad de tiempo

μ = Número promedio de vehículos servidos por unidad de tiempo

\bar{s} = Tiempo promedio de servicio por vehículos

ρ = Intensidad del tránsito o factor de utilización. = $\frac{\lambda}{\mu}$

no exceda algún valor crítico de "t". Alternativamente puede determinar la tasa de servicio que se requiere para ser compatible con algunos valores de demanda críticos y niveles de probabilidad.

3.2 Línea de espera con estaciones de servicio múltiples, llegadas tipo Poisson, tiempo de servicio exponencial y los vehículos se mueven a la primer vacante de la estación de servicio.

En la sección I, las características de líneas de espera se determinaron para las situaciones de estación simple y para el caso de estaciones múltiples en donde las llegadas se dividen de manera uniforme entre las estaciones de servicio. En contraste, esta sección supone que los vehículos que lleguen no se dividen de manera uniforme entre las estaciones de servicio, más bien, los vehículos en la línea de espera se incorporan directamente a la primera estación que se desocupa. En esencia, se supone que los vehículos no se forman atrás de una u otra caseta de cobro mientras van llegando, sino que se mantienen detrás de las estaciones (en el orden en que llegan) hasta que haya una vacante en una y otra estación. También, se supone que cada estación de servicio o carril tiene la misma tasa de servicio. Con el procedimiento anterior de línea de espera, el número de vehículos en la línea será cero a menos que "n", el número de vehículos en el sistema sea mayor que "k", el número de estaciones de servicio o canales de servicio. Algunos de los modelos más apropiados para demoras y líneas de espera para este caso particular se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2.- Ecuaciones matemáticas de las líneas de espera, para estaciones múltiples, con arribos tipo Poisson, tiempo de Servicio Exponencial, y los vehículos que esperan tienen la libertad de moverse a la primera estación vacante * para condiciones de estado estable

Modelos de Colas	Descripción de Modelo
$p(n) = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p(0)$ <p>para $n = 0, 1, \dots, k-1$</p>	$p(n)$ = Probabilidad de tener exactamente "n" vehículos en el sistema para $0 \leq n \leq K$
$p(n) = \frac{1}{k! k^{n-k}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p(0)$ <p>para $n \geq k$</p>	$p(n)$ = Probabilidad de tener exactamente "n" vehículos en el sistema para $n \geq K$
$p(0) = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right] + \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \frac{k\mu}{k\mu - \lambda}}$	$p(0)$ = Probabilidad de tener cero vehículos en el sistema
$\bar{n} = \frac{\lambda \mu \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k}{(k-1)! (k\mu - \lambda)^2} p(0) + \frac{\lambda}{\mu}$	\bar{n} = Número promedio de vehículos en el sistema
$\bar{q} = \frac{\lambda \mu \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k}{(k-1)! (k\mu - \lambda)^2} p(0)$	\bar{q} = Longitud promedio de la cola
$\bar{d} = \frac{\mu \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k}{(k-1)! (k\mu - \lambda)^2} p(0) + \frac{1}{\mu}$	\bar{d} = Tiempo promedio de espera en el sistema
$\bar{w} = \frac{\mu \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k}{(k-1)! (k\mu - \lambda)^2} p(0)$	\bar{w} = Tiempo promedio gastado en esperar, en la cola
$P(d \leq t) = 1 - e^{-\mu t} \left\{ 1 + \frac{P(n \geq k)}{k} \frac{1 - e^{-\mu k t} [1 - (\lambda/\mu k) - (1/k)]}{1 - (\lambda/\mu k) - (1/k)} \right\}$	$P(d \leq t)$ = Probabilidad de emplear un tiempo "t" o menor en el sistema
$P(n \geq k) = \sum_{n=k}^{\infty} p(n) = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \frac{p(0)}{k! \left(1 - \frac{\lambda}{\mu k} \right)}$	$P(n \leq K)$ = Probabilidad de espera en la cola

* $\lambda = K \lambda_k$

K = Número de estaciones de servicio (caseta de cobro), cada una en una tasa de servicio.

λ_k = Tasa media de arribo por estación (como se usó en el ejemplo 1 y en la

Significativamente, esta disciplina particular del sistema resultará en una reducción substancial tanto en sostenimiento, como en demora, relativa a la situación inicial donde se suponía que los vehículos se formarían o distribuirían de manera ordenada detrás de las estaciones de servicio. (Básicamente esta disciplina de líneas de espera asegura que las estaciones de servicio se usarán a la máxima capacidad mientras que exista la línea de espera). Para demostrar los efectos de esta disciplina, la misma llegada básica y datos de servicio usados en el ejemplo 1 se aplicarán a los modelos de la Tabla 2 (ejemplo 2).

3.3 Línea de espera con estación de servicio simple, llegada tipo Poisson, tiempo de servicio Erlang.

Los modelos de líneas de espera incluidos en las dos secciones previas se basaban en las suposiciones de que los tiempos de servicio serían distribuidos exponencialmente y que la tasa de servicio sería constante para todas las tasas de arribo.

Ninguna de estas suposiciones parecen ser particularmente válidas para un número de circunstancias importantes de tránsito, la investigación en el aspecto primario la han registrado Bluden y más tarde Edi.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

El trabajo de Blunden y sus colegas sugieren, que la familia Erlang de las distribuciones tiempo-servicio, caracterizan un número de situaciones de servicio del tránsito y sirve como una aproximación razonable. Esta familia de distribuciones tiempo-servicio tiene una función de densidad generalizada como sigue:

$$f(s) = \frac{(\mu k)^k}{(k-1)!} s^{k-1} e^{-\mu k s}$$

$$\forall s \geq 0$$

Donde:

$f(s)$ Es igual a la probabilidad de tener un tiempo de servicio de exactamente "s" unidades de tiempo (por ejemplo, tiempo de servicio de "s" segundos).

μ Promedio de la tasa de servicio (vehículos servidos por unidad de tiempo). $\approx 1/\bar{s}$

\bar{s} Promedio del tiempo de servicio (por vehículo).

$$\bar{s} = 1/\mu$$

$\text{Var}[s]$ Variación del tiempo de servicio (por vehículo).

$$\text{Var}[s] = 1/\mu^2$$

La función de distribución para la ley de la probabilidad Erlang en la ecuación (2), es como sigue:

$$P(s > t | k) = \int_t^{\infty} \frac{(k t)^k}{(k-1)!} s^{k-1} e^{-k s} ds$$

Esta expresión puede ser transformada en la siguiente:

$$P(s > t | k) = e^{-k t} \sum_{n=1}^k \frac{(k t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Donde:

$P(s > t | k)$ es la probabilidad de que el tiempo de servicio "s" sea mayor que "t", dado algún valor del parámetro "k".

Las figuras 2a y 2b ilustran dos aplicaciones posibles de las distribuciones Erlang de tiempo-servicio, aunque solamente la última indica el límite al cual se comparan las distribuciones observadas e hipotetizadas.

Tabla 3.- Ecuaciones para líneas de espera en estaciones de servicio simples con arribo tipo Poisson y tiempos * de servicio Erlang para condiciones de estado estable.

Modelo de línea de espera	Descripción del modelo
$1 \quad \bar{n} = \frac{(k+1)\lambda^2}{(2k)(\mu)(\mu-\lambda)} + \frac{\lambda}{\mu}$	\bar{n} = Número promedio de vehículos en el sistema
$2 \quad \bar{q} = \frac{(k+1)\lambda^2}{(2k)(\mu)(\mu-\lambda)} = \bar{n} - \frac{\lambda}{\mu}$	\bar{q} = Longitud promedio de la línea
$3 \quad \bar{d} = \frac{(k+1)\lambda}{(2k)(\mu)(\mu-\lambda)} + \frac{1}{\mu}$	\bar{d} = Tiempo promedio empleado en el sistema
$4 \quad \bar{w} = \frac{(k+1)\lambda}{(2k)(\mu)(\mu-\lambda)} = \bar{d} - \frac{1}{\mu}$	\bar{w} = Tiempo promedio de espera empleado en la línea

*

k y μ Son los parámetros de tiempo-servicio para la distribución de Erlang;—
 k es un entero positivo; λ es la media o tasa promedio de arribos.

3.4 APLICACIONES

Ejemplo 1:

Supongamos que un volumen por hora de 1,500 vehículos se aproxima a un túnel, dividiéndose de manera igual en tres casetas de cobro a la entrada del túnel cada una puede manejar un máximo de 600 vehículos por hora. En estas circunstancias, las características del cobro y la demora serán como sigue:

Llegadas tipo Poisson y tiempo de servicio exponencial.

$$\lambda = \frac{1500}{3 \times 3600} = \frac{5}{36} \text{ veh/seg. (arribando en cada estación).}$$

$$\mu = \frac{600}{3600} = \frac{1}{6} \text{ veh/seg. (servidos en cada estación).}$$

$$\bar{s} = \frac{1}{\mu} = 6 \text{ seg/veh servido.}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6}$$

$$p(n) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \rho^n (1 - \rho) = 0.167 = p(0)$$

$$\bar{n} = \frac{\rho}{(1 - \rho)} = 5 \text{ veh. en el sistema.}$$

$$\bar{q} = \frac{\rho^2}{(1 - \rho)} = 4.16 \text{ veh. en la línea.}$$

$$\bar{d} = \frac{1}{\mu - \lambda} = 36 \text{ seg/veh. en el sistema.}$$

$$\bar{w} = \bar{d} - \frac{1}{\mu} = 30 \text{ seg/veh en la línea.}$$

Ejemplo 2:

$k = 3$ estaciones de servicio

$\lambda = 3 \left(\frac{5}{36} \right) = \frac{5}{12}$ vehículo/segundo (aproximándose al túnel),

$\mu = \frac{1}{6}$ vehículo/segundo (sirviendo en cada estación),

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{2},$$

$$p(0) = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^2 \frac{1}{n!} \left(\frac{5}{2} \right)^n \right] + \frac{1}{3!} \left(\frac{5}{2} \right)^3 \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{5}{12}}} = \frac{4}{89},$$

$$\bar{n} = \frac{\left(\frac{5}{12} \right) \left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{5}{2} \right)^3}{2 \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{12} \right)^2} \cdot \frac{4}{89} + \frac{5}{2} = 6.01 \text{ vehiculos en el sistema,}$$

$$\bar{q} = \bar{n} - \frac{\lambda}{\mu} = 3.51 \text{ vehiculos en la línea,}$$

$$\bar{d} = \frac{\bar{q}}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 8.41 + 6 = 14.41 \text{ segundos empleados en el sistema, } \textcircled{R}$$

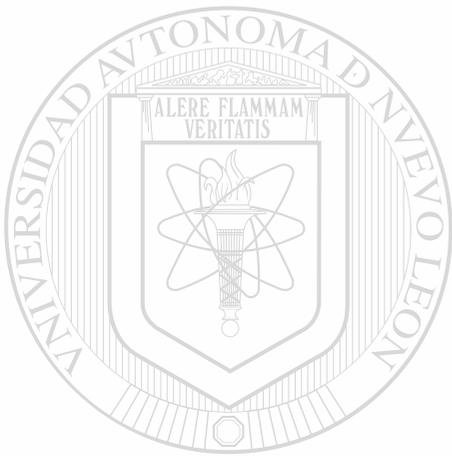
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\bar{w} = 8.41 \text{ segundos empleados en la línea.}$$

La comparación de estos datos con los del ejemplo uno, muestran que el promedio de la longitud de la fila "q" se redujo ligeramente, no así el tiempo empleado en el sistema y en la fila, ya que ambos se redujeron marcadamente, por el más eficiente uso de las estaciones de servicio.

en la fila, ya que ambos se redujeron marcadamente, por el más eficiente uso de las estaciones de servicio.

Los modelos de líneas de espera de estación simple apropiados para las llegadas Poisson, para los tiempos de servicio Erlang, y para la disciplina de líneas de espera "el que llega primero se le atiende primero". Se muestra en la Tabla 3.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

3.5 CONCLUSIONES

Cuando la razón del número promedio de vehículos que arriban por unidad de tiempo " " al número promedio de vehículos servidos por unidad de tiempo " " tiende a uno, nos indica que el sistema está llegando al límite de saturación, lo cual paralizará al sistema. Para evitar esto, se deberán hacer algunas de las siguientes modificaciones:

- Aumentar el número de estaciones de servicio
- Incrementar el tiempo medio de servicio en una o más estaciones.
- Dividir una línea de espera o amalgamar varias de ellas

Estos cambios deberán ser evaluados considerando primero su efecto sobre las características medias de la línea de espera, y traduciendo entonces estos cambios en las características medias a cambio en la medida de efectividad seleccionada.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



C A P I T U L O I V

SIMULACION DEL FLUJO DEL TRANSITO

4. I N T R O D U C C I O N

Como en cualquier discusión de procedimientos teóricos, uno tiene el - deseo creciente para conducir la experimentación. En algunos casos hay - un deseo de ensayar un modelo particular; en otros para valuar un paráme- tro o un constante. A pesar de eso en otras situaciones hay un deseo pa- ra investigar situaciones que aún no han cedido a tratamientos teóricos. A veces hay una necesidad de experimentación simple para aprovechar bas- tante conocimiento de un sistema a modelarse. La conducción del experi- mento de tránsito tiene muchas dificultades sobre la estructura de opera- ción. El experimentador debe elegir un sitio conveniente, preparar ade- cuada instrumentación y entonces esperar a que ocurra la apropiada condi- ción de tránsito. Si la condición finaliza solo en poco tiempo, las prue- bas deben conducirse durante varios días o semanas; como resultado, no - puede ser posible repetir un problema en el campo. Algunas situaciones - de tránsito no deben ocurrir absolutamente sobre una obra en operación. Al- gunas corridas experimentales deben implicar condiciones que pudieran ser peligrosas. Algunos experimentos fuertes requieren la construcción de es- tructuras costosas. Las pruebas de rodada, tales como las que son mante- nidas en el laboratorio británico de investigaciones de transportes y ca- minos de Crowthorne, Inglaterra, capacitan la ejecución de un cierto ran- go de pruebas que requieren la detallada construcción o la imposición de- peligos. Pero los mismos experimentos en una prueba de rodada pueden -- ser muy costosos, requiriendo la provisión de vehículos, conductores, etc.

Desde el desarrollo de las computadoras automáticas de alta velocidad, ha habido una creciente tendencia a usar la simulación en la computadora- digital como un método de conducir una variedad de experimentos, especial- mente, aquéllos concernientes a sistemas que tienen importantes aspectos- aleatorios.

4.1.- NATURALEZA DE SIMULACION

Durante los 20 años pasados se dieron varias definiciones e interpretaciones al término "simulación". Actualmente el tratamiento se refiere a un experimento ejecutado en un modelo artificial de un sistema real. El predominio de las simulaciones comunes es utilizar las computadoras digitales para llevar a cabo un modelo. Tal es el caso de las simulaciones del flujo de tránsito. Aunque recientemente algunos investigadores examinaron el posible uso de las computadoras analógicas para la simulación del flujo de tránsito y pocos propusieron la aplicación de computadoras "híbridas", la importancia en las simulaciones de flujo de tránsito permanece en las que se ejecutan con el uso de una computadora digital.

Los motivos para la simulación abarcan (pero no necesariamente deben limitarse):

1).- La necesidad de probar el comportamiento de un sistema nuevo o el procedimiento de operación anterior a su estructura actual.

a) La construcción de un sistema nuevo puede ser muy costoso y/o tardado.

b) La experimentación con el sistema real puede acarrear considerables riesgos (tales como accidentes de tránsito).

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

2).- La necesidad de probar sistemas alternativos bajo condiciones idénticas (por ejemplo: nunca es posible reproducir exactamente una condición de tránsito específica en campo; en simulación es muy rutinario someter las mismas condiciones de tránsito a diferentes sistemas alternativos).

Cualquier simulación debe dividirse en los siguientes pasos:

- 1.- Definición del sistema
- 2.- Formulación de un modelo
- 3.- Recolección de datos

4.- Implementación del modelo

5.- Validación

a) Diseño de un experimento que dará la información deseada

b) Determinación de cómo cada una de las corridas de prueba serán ejecutadas.

6.- Experimentación

a) Validación del modelo

b) Simulación de nuevas condiciones.

7.- Interpretación de resultados

8.- Documentación.

Cada uno de esos pasos es discutido en los siguientes párrafos.

4.2.- DEFINICION DEL SISTEMA

Aunque las indicaciones para la simulación del flujo de tránsito tuvieron lugar alrededor de 1949, no fué sino varios años después en los que hubo la publicación de documentos discutiendo posibles técnicas, y fué -- aproximadamente en 1954 en que las simulaciones de tránsito fueran corridas en computadoras en los Estados Unidos. Se hicieron muchos estudios con respecto a cómo conducir simulaciones de tránsito. Cerca de 1960 se aceptó generalmente que la simulación de tránsito es posible y práctica, y los esfuerzos se dirigieron al desarrollo, validación y uso de programas de simulación a gran escala. El trabajo descrito por Wagner es típico de esos esfuerzos.

4.2.1.- GENERACION DE LA VARIABLE ALEATORIA

Uno de los rangos mas importantes de la simulación de tránsito es la capacidad de generar eventos aleatorios. Tal generación tiene lugar en dos pasos:

Primero, es generado un número aleatorio siguiendo una distribución -- uniforme (rectangular). Segundo, este número se trata como una probabilidad para ser sustituido en una función de distribución apropiada para resolver el evento asociado.

4.2.1.1.- GENERACION DE NUMEROS ALEATORIOS

Muchos sistemas de programación tienen generadores de números aleatorios interconstruidos. Cuando se usa un sistema de este tipo, el experimentador simplemente puede pedir números aleatorios, usando la orden apropiada para ese sistema. Aún cuando muchos programadores actuales de simulación tienen un generador de números aleatorios disponible para ellos, es interesante y vale la pena familiarizarse con los fundamentos de tal generación.

En lugar de números aleatorios se usará, mas correctamente, el término "números pseudoaleatorios"; los procedimientos usados para generar números son altamente no aleatorios, sin embargo, los números generados, cuando se sujetan a pruebas estadísticas no muestran cualquier aleatoriedad. Hay muchos algoritmos que pueden usarse para generar números pseudoaleatorios, pero uno de los que permanecen mas comunes en virtud de su formalidad y fácil de llevar a cabo es el procedimiento multiplicativo simple. Este método puede describirse como sigue:

$$R_m = pR_{m-1} \text{ Mod } b^n \quad (4.1)$$

donde:

R_m = el emécimo número aleatorio

p = el multiplicador

n = número de dígitos en un lenguaje normal en la computadora utilizada

b = número base del computo

$\text{Mod } b^n$ = instrucción para usar únicamente el orden bajo o menos significativo de la mitad del producto total ($2n$ - dígitos) (el residuo después de dividir el producto por b^n - el número de veces integral máximo); y

R_0 = cualquier número impar seleccionado como un número de --
comienzo.

Este procedimiento multiplicativo es un caso especial de un algoritmo-
general "congruencial", el cual puede ser establecido:

$$R_m = [pR_{m-1} + c] \text{ Mod } b^n \quad (4.2)$$

Así, el procedimiento multiplicativo es un método congruencial con $c=0$.
Los resultados de tales algoritmos de generación pueden ser usados como -
una serie de fracciones siguiendo una distribución uniforme (rectangular).
Como ejemplo del procedimiento multiplicativo, damos $R_0 = 3$, $p = 97$ y --
 $b^n = 100$ (por ejemplo; $b = 10$, $n = 2$).

Entonces:

$$03 \times 97 = 02.91$$

$$91 \times 97 = 88.27$$

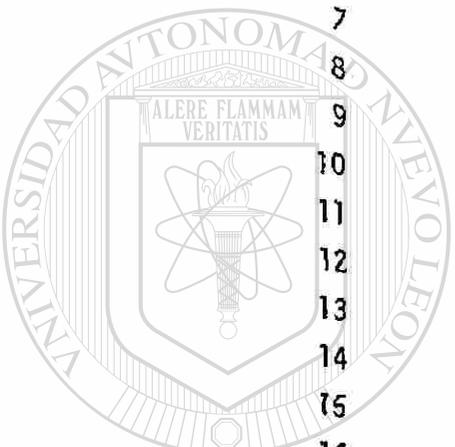
$$R_1 = 91$$

$$R_2 = 27, \text{ etc.}$$

Los resultados de la muestra del proceso de generación están dados en-
la tabla 4.1, en la cual puede verse que las "series aleatorias" consis-
ten de 20 valores, después la serie se repite. ®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Esto ilustra uno de los problemas en el uso de tales procedimientos de
generación pseudoaleatoria (por ejemplo: un período repetitivo). Sin em-
bargo, si el tamaño del lenguaje de computo es suficientemente grande y-
los valores de R_0 y p son seleccionados apropiadamente, usualmente el pe-
ríodo es suficientemente largo para mas fines de simulación. Se hará no-
tar que para exceptuar el último número aleatorio, es posible reestable-
cer las series sin retorno al principio en cada comienzo. Alternativamen-
te, si en algún experimento particular se desea proporcionar, digamos, --
las mismas series de llegadas de tránsito para cada parte del experimento,
usando el mismo valor de comienzo para la generación aleatoria, se propor-
cionarán estos rasgos.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

ALERE FLAMMAM VERITATIS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Rn	Rm
0	03
1	91
2	27
3	19
4	43
5	71
6	87
7	39
8	83
9	51
10	47
11	59
12	23
13	31
14	07
15	79
16	63
17	11
18	67
19	99
20	03

TABLA 4.1 EJEMPLO DE NÚMEROS ALEATORIOS

El valor de p debe ser seleccionado para tener una base de cuál es el principio relativo al número base del computo y elevarlo al mayor exponente que puede contenerse en un lenguaje de computo. Si es necesario designar un generador para el período más grande posible, pueden usarse los procedimientos discutidos por Hull y Dobell.

4.2.1.2.- PRODUCCION DE VARIABLE ALEATORIA DESEADA

La producción de variable aleatoria deseada trazada en una función de distribución específica puede explicarse haciendo uso de la figura 4.1, en la que se presenta la distribución de probabilidad acumulativa de una variable x . Aunque esta curva de distribuciones puede ser el concepto de como representar la probabilidad como función y el valor de x como argumento, en la presente aplicación las funciones de las variables están invertidas. El número aleatorio generado (fracción) como se describe en la sección 4.2.1.1 se interpreta como una probabilidad y es usado como argumento para registrar la distribución, dando el valor de x como la función. Para este procedimiento es necesario usar la distribución de probabilidad (acumulativa) en lugar de la función de densidad de probabilidad.

Cuando es conocida una expresión analítica para la distribución acumulativa, la transformación puede completarse por el procedimiento simple de ecuación simultánea. Por ejemplo, en la obtención de variables clasificadas de acuerdo a la distribución exponencial negativa, la solución procede como sigue:

$$p(h < t) = 1 - e^{-t/T}$$

lo cual se simplifica a:

$$p = 1 - e^{-t/T}$$

$$t = -T \ln(1 - p)$$

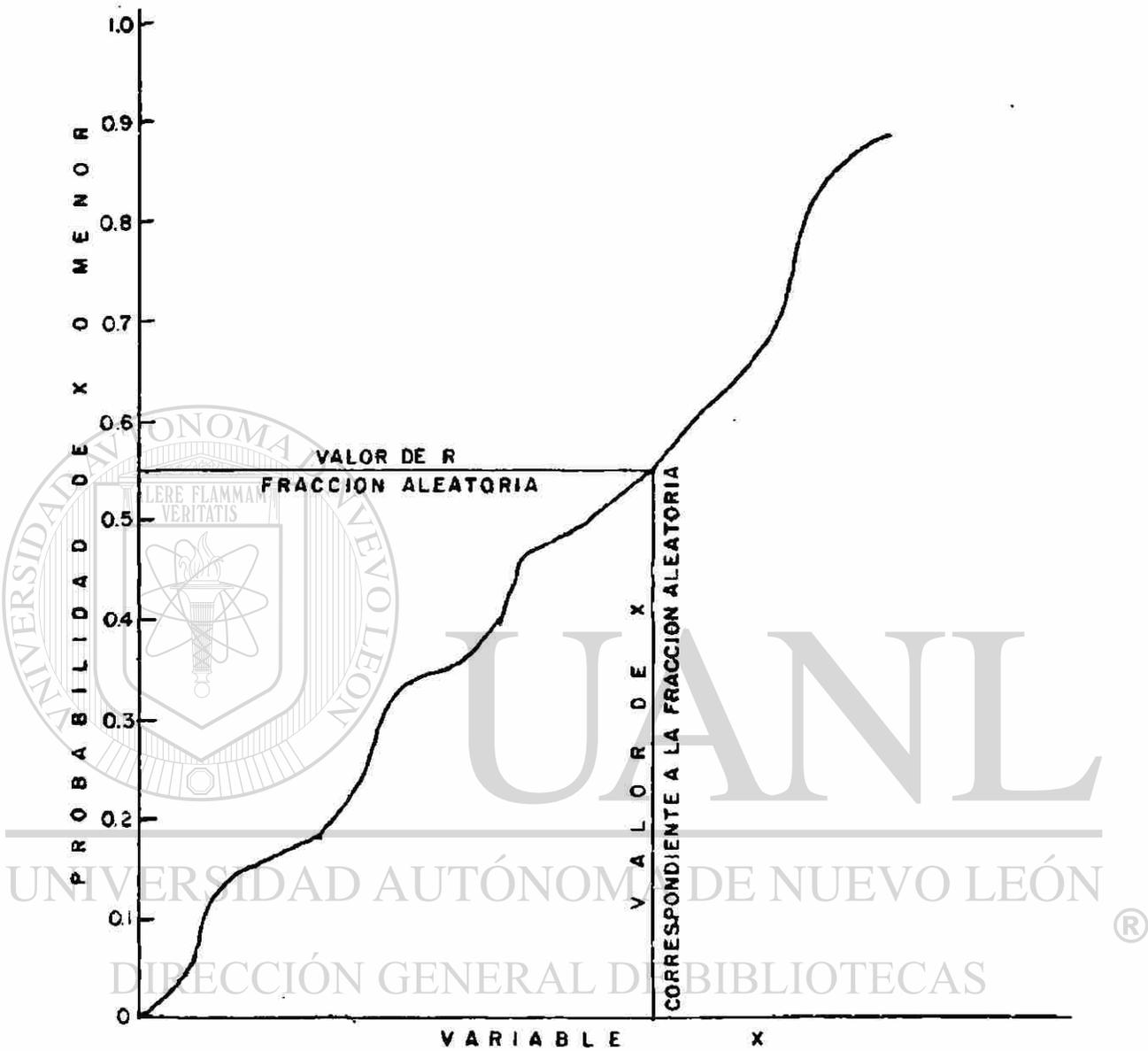


FIGURA 4.1 UTILIZACION DE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULATIVAS PARA CONVERTIR NUMEROS ALEATORIOS DE UNA DISTRIBUCION UNIFORME A LA DISTRIBUCION DESEADA.

Un número aleatorio puede sustituirse por p ó $(1-p)$ y el valor resultante de t usarse como la salida deseada.

Para la relación exponencial negativa desviada es:

$$t = (T - \bar{t}) [- \ln (1-p)] + \bar{t} \quad (4.3)$$

Sin embargo, si se requiere una distribución continua, tal como la distribución Poisson, debe usarse una solución paso a paso. Este procedimiento se ilustra en la figura 4.2 y se describe como sigue:

Primero, tan luego se genera una fracción aleatoria, se le asigna un valor, formándose la distribución acumulativa de Poisson, término por término, usando la ecuación 4.4.

$$P(x) = \sum_{i=0}^x \frac{m^i e^{-m}}{i!} \quad (4.4)$$

En cada uno de los pasos, la acumulación es comparada con R . Cuando el primer valor $P(x)$ satisface la relación $P(x) \geq R$, se obtiene dicho valor, tomando el correspondiente de x como la variable aleatoria (número de llegadas).

Una alternativa de aproximación adecuada es generar y almacenar progresivamente una tabla con la probabilidad como argumento y el tiempo como función. Esto debe hacerse suponiendo varios valores de t , para luego calcular P . Cuando se establece una pareja ordenada, el correspondiente valor de t se usa como el intervalo de llegada.

Para la producción de variables aleatorias de una distribución normal, pueden usarse los siguientes procedimientos especiales:

- 1).- Deducir 12 fracciones aleatorias de una distribución uniforme.

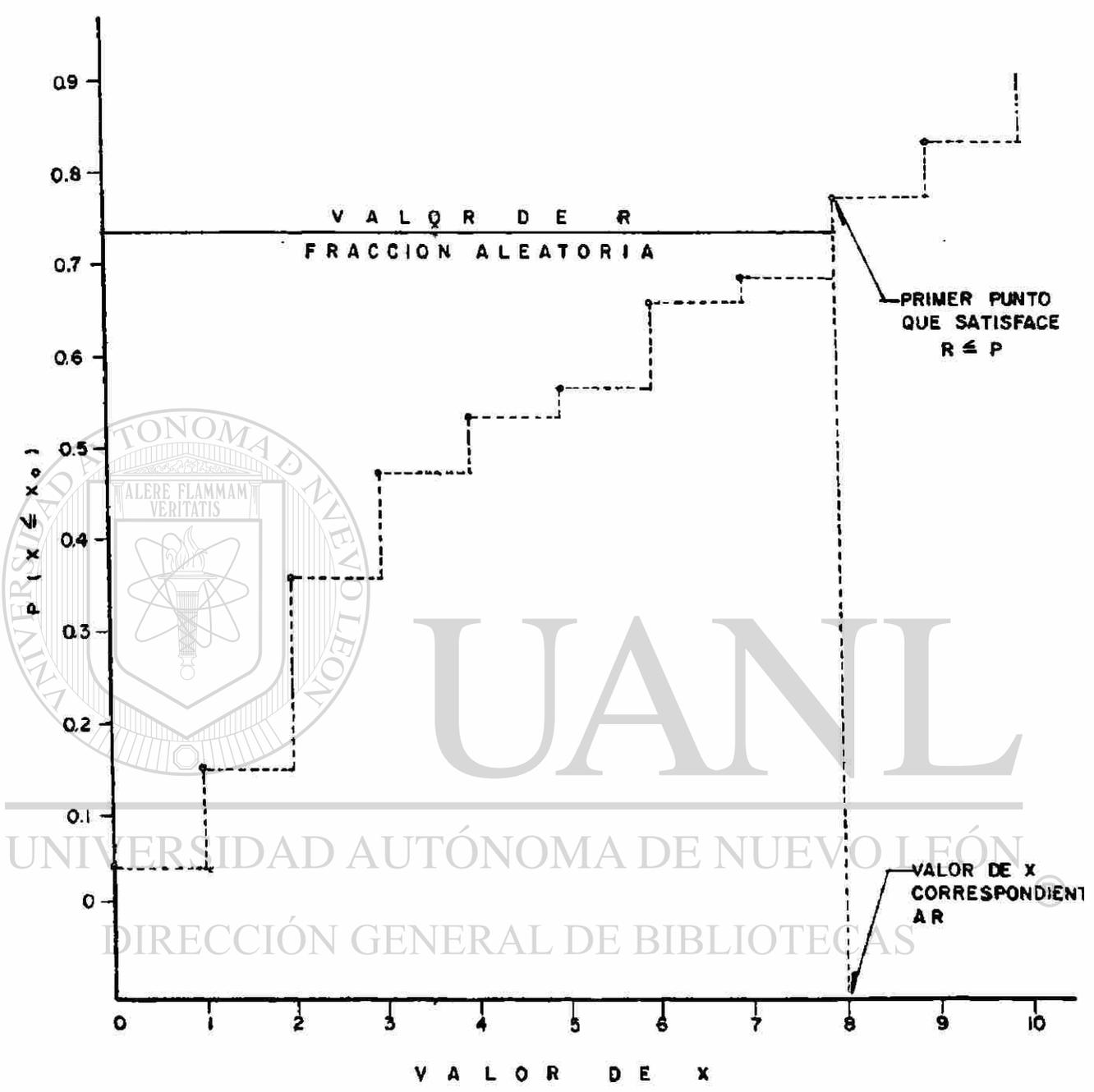


FIGURA 4.2 PRODUCCION DE VARIABLES ALEATORIAS SIGUIENDO UNA DISTRIBUCION A INTERVALOS, USANDO CALCULO PASO A PASO.

- 2).- Tomar la suma de esas fracciones, dando la variable estadística normal.
- 3).- Repita usando 12 fracciones aleatorias diferentes, dando la segunda variable estadística normal.

Los resultados pueden ser variables de una distribución que tiene una media de 6 y una varianza de 1 (este resultado puede ser explicado por el teorema del límite central).

4.3.- FORMULACION DEL MODELO

La formulación del modelo de simulación comienza con la definición o selección de los siguientes artículos:

- 1).- Situación del tránsito por simular
- 2).- Tener definidas las medidas de efectividad.
- 3).- Incluir el grado de complejidad.
- 4).- Elegir el modelo para la generación de llegadas aleatorias de tránsito.

-
- 5).- Procesamiento del tránsito a través del modelo de simulación

4.3.1.- EJEMPLO DE SIMULACION: INTERSECCION CON FACTOR DE CARGA

(Nota: La intersección con factor de carga se ha definido como "una relación del número total de intervalos en verde que son totalmente utilizados por el tránsito durante la hora pico al número total de intervalos en verde en el acceso durante el mismo período).

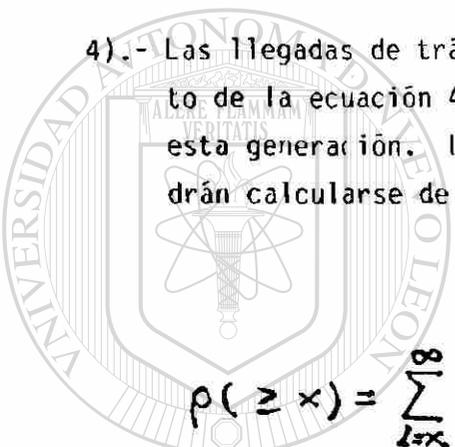
Un estudio del factor de carga, referido a la capacidad, podrá ejecutarse por simulación, se utilizan los siguientes pasos de formulación del modelo:

1).- Situación a ser simulada: acceso a la intersección con semáforos de tiempo fijo, razón de llegadas de la variable aleatoria, razón de salidas de la variable determinística.

2).- Medidas de efectividad; demora de vehículo individual (demora promedio y máxima sobre todos los vehículos), grado de saturación, factor de carga, longitud máxima de la línea de espera.

3).- Se desea un modelo relativamente simple.

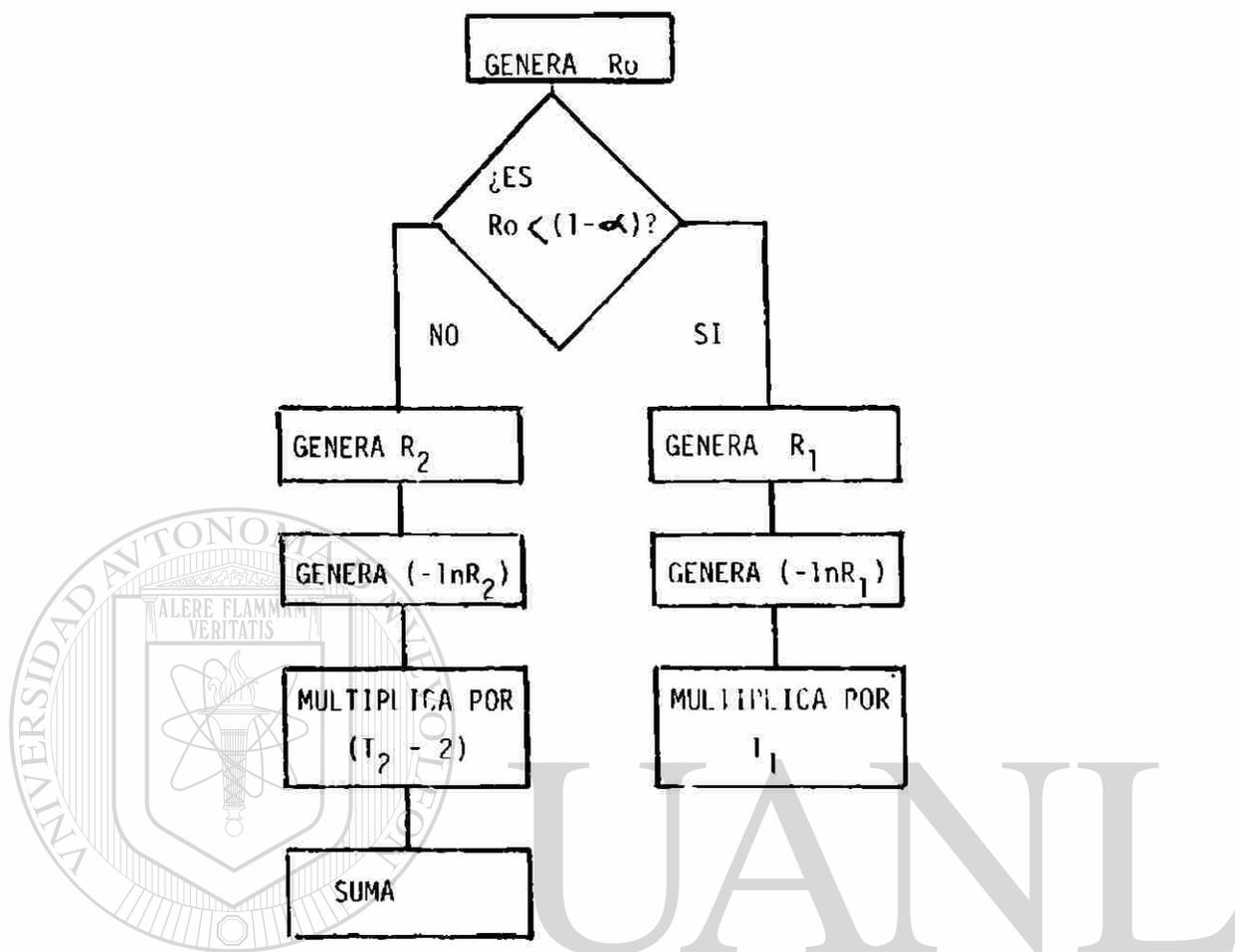
4).- Las llegadas de tránsito podrán seguir el modelo exponencial compuesto de la ecuación 4.5. La figura 4.3 es un diagrama de flujo para esta generación. Los tiempos de llegada de algunas referencias podrán calcularse de acuerdo al método Crecco y Sword.


$$p(\geq x) = \sum_{k=x}^{\infty} \frac{m^k e^{-m}}{k!} \quad (4.5)$$

5).- El algoritmo se define con la siguiente lógica en el procesamiento de vehículos, desde su punto de llegada a través de la intersección: [®]

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

a).- La descarga de la cabeza de la línea de espera se basará en los datos de Greenshields como sigue:



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

FIGURA 4.3 DIAGRAMA DE FLUJO PARA LA GENERACION DEL MODELO EXPONENCIAL -
COMPUESTO DE LA ECUACION 4.4

POSICION EN LA LINEA DE
ESPERA AL INICIAR EL --
VERDE

(M)

TIEMPO DE INICIO DEL VERDE --
HASTA LLEGAR A LA ENTRADA DE--
LA INTERSECCION

(SEG)

1	3.8
2	6.9
3	9.6
4	12.0
5	14.2
6	14.2 + 2.1 (M-5)

b).- Si el semáforo está en verde y no hay línea de espera al tiempo de llegada del próximo vehículo, éste procede a través de la intersección sin demora.

c).- Si el semáforo está en verde y existe línea de espera, los vehículos de la cabeza de la línea de espera proceden a través de la intersección de acuerdo con la tabla de Greenshields. Se procesará cada una de las confluencias de llegada a la línea de espera hasta que sea su turno.

d).- Si el semáforo está en rojo, los vehículos llegan a la línea de espera hasta que cambie a verde.

e).- En cada una de las llegadas se registra el tiempo de los vehículos hasta su salida, de la diferencia entre el tiempo de salidas y el tiempo de llegadas resulta el tiempo de demora.

f).- Se activa el reloj en intervalos uniformes de 0.1 seg.

g).- A medida que cada vehículo abandona la intersección su demora entrará en el promedio de la corrida. En suma, su demora se compara con la máxima anterior y se toma el valor más grande.

- h).- Cuando termine cada indicación de llegadas del semáforo, el estado - comun de éste cambiará dentro del programa.
- i).- Antes de que el semáforo cambie a rojo, se hace una confrontación -- para determinar si el período total del verde fué utilizado.
- j).- En la terminación de una corrida experimental las diferentes medidas de efectividad son calculadas e imprimidas.

6.- El programa será escrito en Basic.

El diagrama de flujo para este programa se presenta en la figura 4.4.

La codificación del programa se dá en el apéndice . Este programa- es relativamente simple en el número de pasos; principalmente; a) No se - considera el tránsito opuesto o cruzado, b) se activa el tiempo en inter- valos uniformes (registros periódicos), y c) solo se genera un tipo de -- evento aleatorio (tiempo de llegadas). Por lo tanto, el programa ilustra los pasos involucrados en la interpretación de una simulación.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

4.3.2.- EJEMPLO DE SIMULACION; INTERSECCION SIMPLE DE CUATRO RAMAS

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

hoy es posible utilizar la simulación en situaciones mas complejas; -- particularmente, la intersección de cuatro ramas mostrada en la figura -- 4.5, descrita por Worrall. Se generan diferentes tipos de eventos aleato- riamente. La intersección consiste de dos calles de un solo sentido, ca- da una con un carril. La calle este-oeste tiene prioridad sobre la norte sur. Se suponen flujos bajos y los intervalos de llegada se supone si--- guen la distribución exponencial negativa de la ecuación 4.6.

$$p(>x) = 1 - \sum_{i=0}^x \frac{m^i e^{-m}}{i!} \quad (4.6)$$

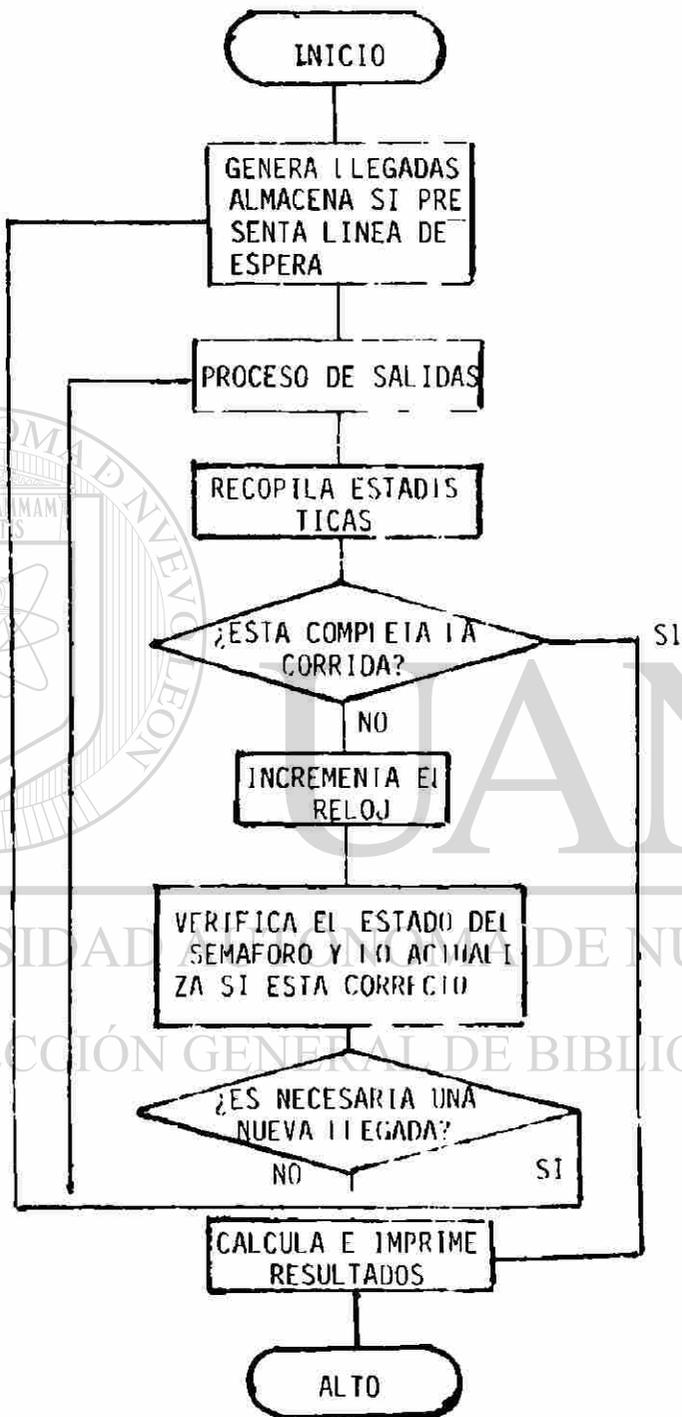


FIGURA 4.4 DIAGRAMA DE FLUJO PARA EL EJEMPLO DE SIMULACION

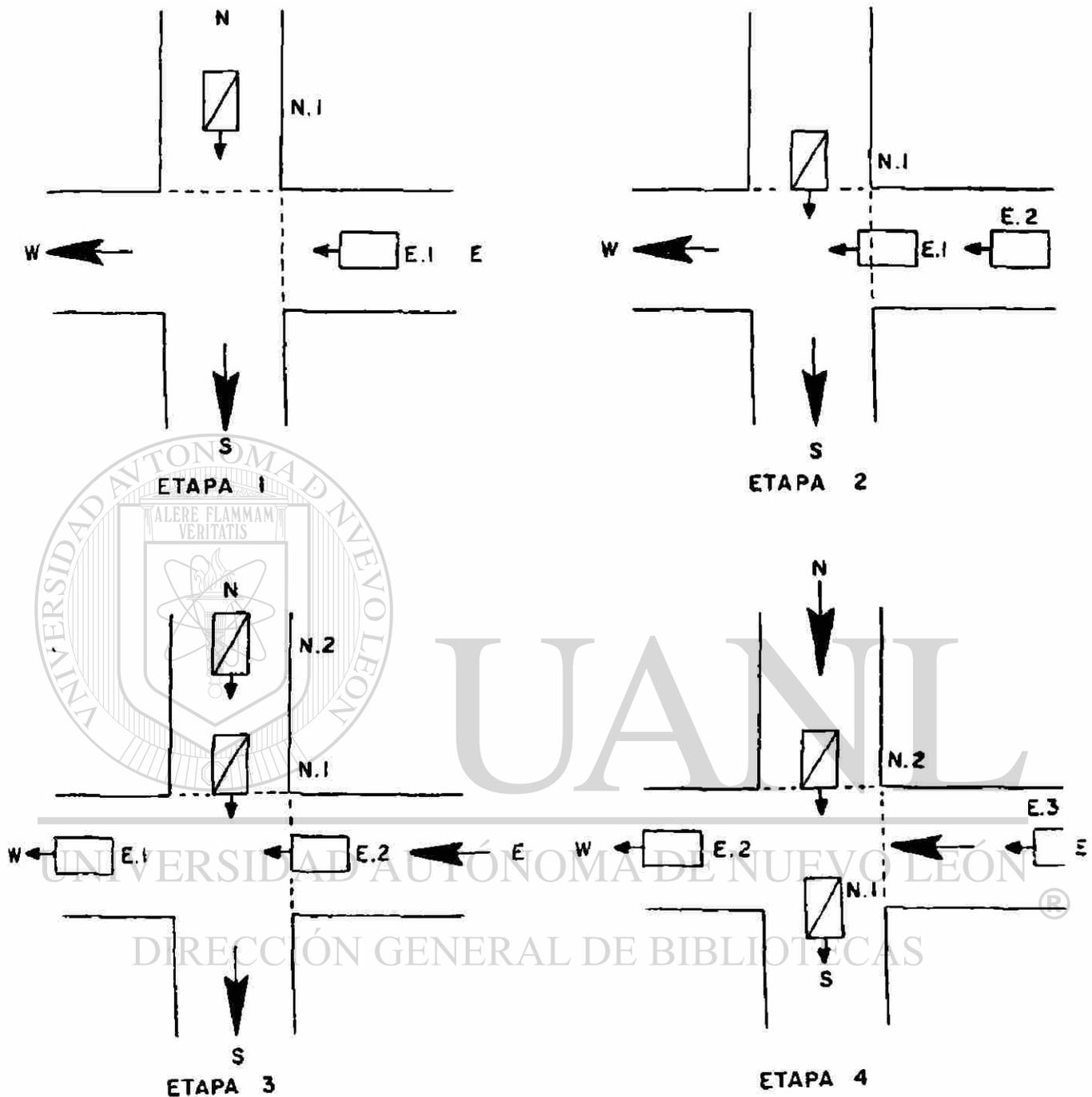


FIGURA 4.5 INTERSECCION SIMULADA QUE PRESENTA ESQUEMATICAMENTE LAS DIFERENTES CON-DICIONES: **Etapa 1,** los vehículos N.1 y E.1 se aproximan a la intersección; **Etapa 2,** el vehículo N.1 llega a la intersección y examina el arroyo E-0 para el intervalo — aceptable, pero el intervalo disponible entre E.1 y E.2 no es aceptable, así el ve- hículo N.1 es demorado; **Etapa 3,** el vehículo N.1 continúa examinando el arroyo E-0 — para el intervalo aceptable y el vehículo N.2 llega a la intersección y forma una li- nea de espera; **Etapa 4,** el intervalo entre los vehículos E.2 y E.3 es aceptable para el vehículo N.1, así, el vehículo N.1 se mueve cruzando la intersección, y el vehí- culo N.2 ha comenzado a mirar para un intervalo aceptable. Sin embargo, el retraso en- tre el N.1 en movimiento y el E.3 llegando no es aceptable para el N.2, así el ve- hículo N.2 es demorado aún.

El valor T en la ecuación se toma como $3600/V$, donde V es el volumen de llegadas en vehículos/hora. (Como datos de entrada), se asigna cada aproximación como probabilidad de que los vehículos virarán o continuarán en línea recta uno delante de otro. Se provee una distribución de aceptación a intervalos, en forma tabular, y se usa para todos los intervalos (ver tabla 4.2).

La figura 4.5 ilustra las decisiones para los vehículos norte-sur (N-S) admitiendo o despreciando los intervalos entre los vehículos este-oeste (E-W). El modelo de simulación se puede describir con la ayuda del diagrama de flujo de la figura 4.6.

Los datos de entrada consisten de los niveles de volumen en las dos aproximaciones y una tabla de intervalos de aceptación.

La operación de entrada se indica por el primer cuadro de la parte superior de la figura 4.6. Esta incluye las colocaciones iniciales de todos los contadores, etc. El lazo de la simulación inicia en el segundo cuadro, "genera el próximo intervalo de llegada N-S". Este intervalo se obtiene en principio generando una fracción aleatoria y sustituyéndola en la ecuación 4.3. El actual tiempo de llegada de la nueva llegada se obtiene por la adición del intervalo del tiempo generado al tiempo de llegada anterior del vehículo N-S.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

En este punto es apropiado probar si la demora del tiempo de llegada del nuevo vehículo N-S excedió la máxima duración del experimento. Si el límite ha sido alcanzado, el programa salta al cálculo e imprime los resultados de salida; si no, el programa continúa.

Se calcula el siguiente tiempo efectivo de llegada del nuevo vehículo N-S. Este es el tiempo en que el vehículo llegará a la línea de parada. Este cálculo comienza determinando si el vehículo N-S anterior ha cruzado la intersección: si no pudo, el nuevo vehículo se une a la línea de espera; si pudo, el nuevo tiempo efectivo de llegada es igual al nuevo tiempo actual de llegada.

Las líneas de espera deben manejarse de distinta manera.

La más efectiva es establecer dentro del computo una serie de tres columnas anchas y de suficiente longitud para acomodar la línea de espera - lo más larga esperada. En suma, un contador en la línea de espera indica el número de vehículos en la misma. Primero se incrementa el contador, - según qué cada nuevo vehículo se una a la línea de espera, entonces se -- selecciona el renglón de la serie correspondiente al contador. Dentro de las tres columnas de este renglón se colocan los tiempos actuales de llegada, el tiempo efectivo de llegada y el tiempo de salida (estos últimos - si pueden calcularse). Como el primer vehículo de la línea de espera sale y cruza la intersección, se aleja el primer renglón de la serie, cada una de las entradas que restan se mueven hacia arriba un renglón y el contador decrece. Al mismo tiempo se efectúan algunos cálculos ulteriores - de salida y tiempos actuales de llegada.

Se determina el intervalo aceptable en el arroyo E-W para el primer -- vehículo de la línea de espera N-S.

Se genera una fracción aleatoria; esta se compara con los valores de - porcentaje de la tabla 4.2 (expresados como fracciones). El intervalo co rrespondiente a la fracción aleatoria se designa como el intervalo mínimo que podrá aceptarse por el vehículo N-S. ®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Ahora se inicia una extensa serie de pruebas con respecto a los inter- valos en el arroyo E-W. Primero, probar si el tiempo efectivo de llegada del vehículo N-S (primero en la línea de espera) es posterior (mayor) al tiempo de llegada generado por el último vehículo E-W. Si es, es neces- ario generar un nuevo intervalo y tiempo de llegada del vehículo E-W. El método utilizado es similar al que se usa para los vehículos N-S. Si el nuevo tiempo de llegada E-W excede el límite de tiempo del experimento, - se termina la corrida (después de calcular e imprimir los resultados de - salida); por otra parte, el contador de tránsito E-W se incrementa, y se-

examina el intervalo disponible en el tránsito E-W para aceptarse por el primer vehículo de la línea de espera N-S. El intervalo disponible es el tiempo de llegada del último vehículo E-W menos el tiempo efectivo de llegada del vehículo N-S. Después de que este intervalo se calcula se compara con el intervalo mínimo disponible calculado anteriormente.

Si el intervalo no es aceptable, el tiempo efectivo de llegada del primer vehículo de la línea de espera N-S es redeterminado para el tiempo de llegada del último vehículo E-W, y se genera un nuevo vehículo E-W. Si el tiempo de llegada de este nuevo vehículo no debe exceder el tiempo de duración del experimento, el contador E-W se incrementa en uno, y se prueba la aceptabilidad del intervalo enfrente de este nuevo vehículo. Si el intervalo disponible (discutido en el párrafo anterior) se considera aceptable, este se acepta y el tiempo de salida del vehículo N-S que entra a la intersección se calcula así como su tiempo efectivo de llegada más la demora apropiada de inicio. Su demora en la línea de espera se calcula por sustracción de su tiempo de llegada de su tiempo de salida. Esta demora se adiciona al registro acumulativo de demoras. Después de que se corrige la línea de espera por la salida de un vehículo, el contador N-S se incrementa y el lazo de la simulación comienza de nuevo con la generación de un nuevo vehículo N-S.

Se ilustran dos puntos importantes para este ejemplo; primero; en suma a la generación aleatoria de llegadas en dos aproximaciones hay una generación aleatoria de intervalos de aceptación. Segundo; el "reloj" no se activa para un intervalo periódico uniforme; en lugar de que la examinación se mueva de un tiempo importante a otro. Estas diferencias en los métodos de "examinar" o "escudriñamiento" son conocidas, respectivamente como "escudriño periódico" y "evento de escudriño".

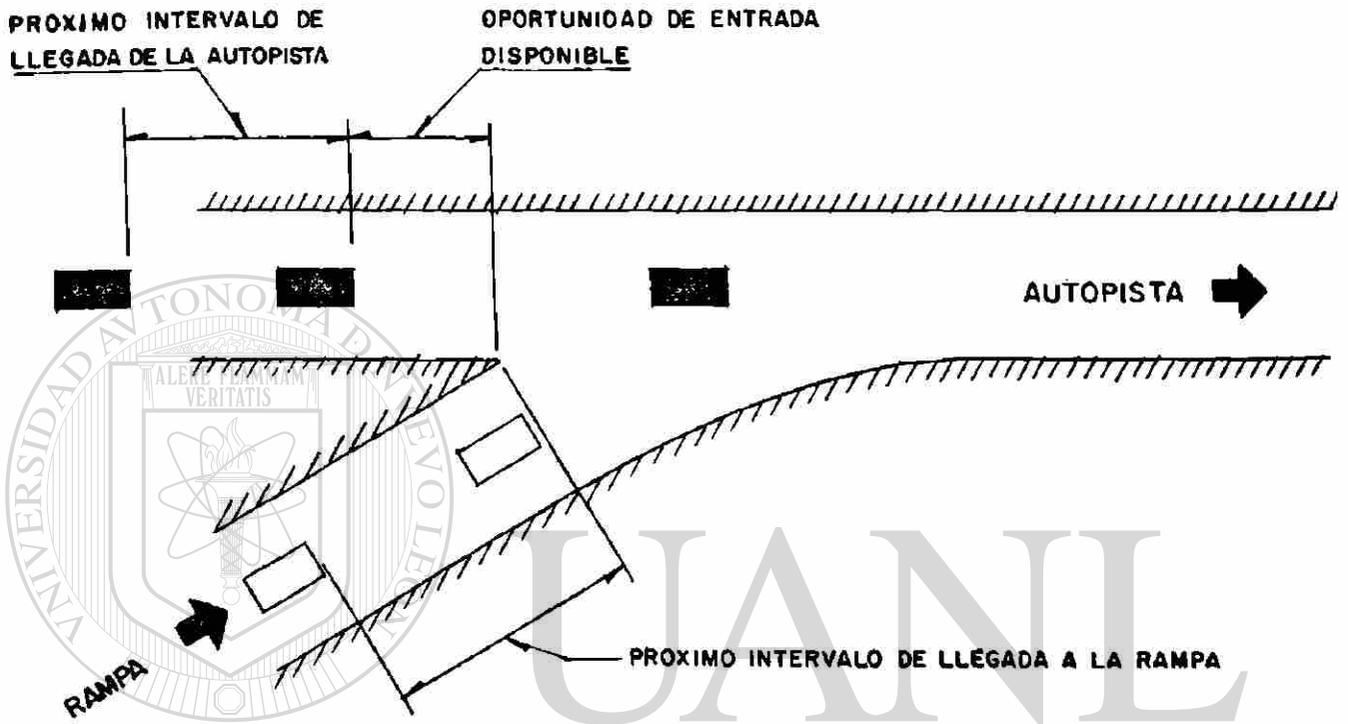
4.3.3.- EJEMPLO DE SIMULACION; AREAS DE CONVERGENCIA EN AUTOPISTAS

Este ejemplo, basado en un documento de Wohl, consiste de una simulación ligeramente mas compleja: la de un área de convergencia en autopista. La figura 4.7 presenta la disposición esquemática de ésta.

La medida de efectividad a ser medida se refiere a los vehículos que entran a la autopista desde la rampa, como función de volúmenes en la autopista y en la rampa.

La formulación del modelo se inicia con diferentes suposiciones, como sigue:

- 1).- El área de convergencia está muy distante de generar tránsito, controla el flujo y permite la aproximación de vehículos a la intersección de la autopista y la rampa en forma aleatoria.
- 2).- Siempre se les dará preferencia a los vehículos de la autopista; así, cuando existan conflictos (entre los vehículos de la rampa y la autopista), sólo los vehículos de la rampa serán demorados para entrar al tránsito.
- 3).- Los vehículos de la autopista no deberán cambiar carril dentro del área de convergencia; de este modo, conviene considerarse solamente el carril de tránsito exterior. Esta área puede representarse mediante una autopista y una rampa, ambas de un solo carril.
- 4).- Cuando se busca un intervalo aceptable en el flujo de la autopista, el vehículo de la rampa considerará ponerse en movimiento o detenerse (demorarse), y entonces se usarán diferentes distribuciones de intervalos aceptables para cada caso.
- 5).- Los primeros vehículos en la línea de la rampa que son detenidos, en tanto que esperan para entrar a la autopista, sufren una pérdida de



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FIGURA 4.7 DISTRIBUCION ESQUEMATICA DEL AREA DE CONVERGENCIA EN DIRECCION GENERAL DE BIBLIOTECAS AUTOPISTA.

aceleración de 5 seg en ingresar al flujo de la misma; los vehículos de la rampa que son demorados pero que entran directamente de una -- segunda posición de la línea tienen la misma pérdida de aceleración. Cuando un primer vehículo es demorado, existe una reacción adicional de inicio de 3.0 seg en ingresar a la autopista; y para un segundo - vehículo en la línea es de 2.0 seg cuando ingresa directamente de esta posición.

6).- Los vehículos de la rampa que son demorados por el vehículo de la autopista y entran directamente a ésta, sufren una demora de 2.0 seg. Estas suposiciones permiten la caracterización de la sección de convergencia en autopista en términos de solamente cinco elementos; co-

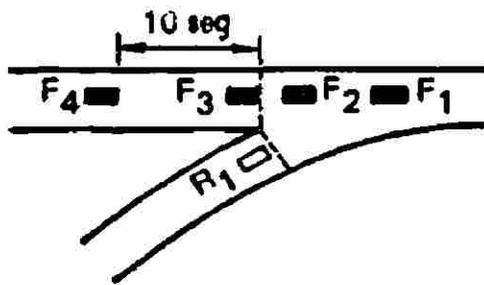
mo sigue:

- 1.- Intervalo de entrada aceptable a baja velocidad relativa (L.R.S) -- (por ejemplo: en el caso en que el vehículo esté en movimiento).
- 2.- Intervalo de entrada aceptable a alta velocidad relativa (H.R.S.) -- (por ejemplo: en el caso en que el vehículo está detenido).
- 3.- Próximo intervalo de llegada en la autopista.

4.- Próximo intervalo de llegada en la rampa.

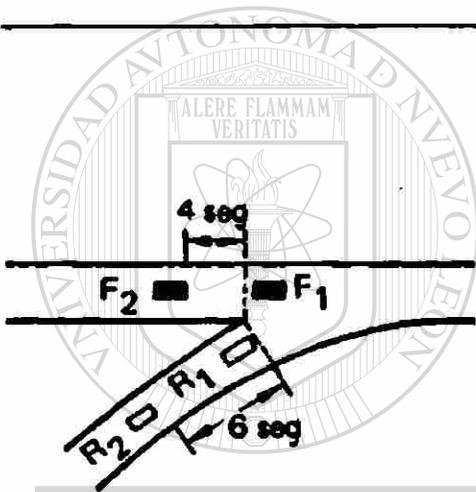
5.- Intervalo disponible de entrada (o de retardo).

Todos estos intervalos (y retardo) se describen sistemáticamente en la figura 4.7. Un intervalo de entrada aceptable a baja velocidad relativa; es un intervalo que es aceptado por un vehículo que entra sin detenerse. Un intervalo de entrada aceptable a alta velocidad relativa es un intervalo que es aceptado por un vehículo que estuvo detenido en la rampa antes de entrar. Sin embargo, se notará que un segundo vehículo en la línea -- que pudo haber sido detenido, pueda entrar, puesto que ha entrado un vehículo en movimiento después del vehículo precedente. La secuencia de -- los eventos de la simulación se indican en la figura 4.8, y la figura 4.9



- 1.- Genera el próximo intervalo de llegada en la autopista (10 seg para F_4)
- 2.- Calcula el tiempo de llegada del vehículo de la autopista (0026 seg para F_4)
- 3.- Calcula el intervalo de entrada disponible (10-seg para R_1)
- 4.- ¿El intervalo disponible es aceptable? Si
- 5.- Calcula el tiempo de salida del vehículo de la rampa (0019 seg para R_1)
- 6.- Calcula la demora del vehículo de la rampa ---- (6 seg para R_1)

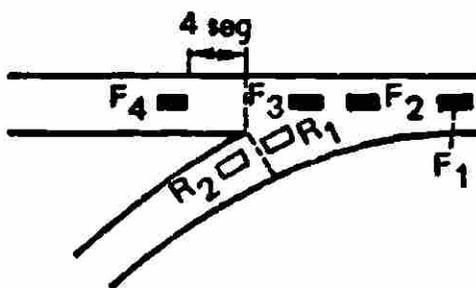
En tiempo $T = 0016$ seg



- 1.- Genera el próximo intervalo de llegada en la -- rampa (6 seg para R_1)
- 2.- Calcula el tiempo de llegada del vehículo de la rampa (0014 seg para R_2)
- 3.- ¿El tiempo de llegada de R_2 es más anticipado que el tiempo de salida del vehículo de la rampa previo (R_1)? Si
- 4.- Calcula el tiempo de observación para el intervalo adecuado para R_2 (tiempo de salida del vehículo previo más la demora de operación = $0019 + 3 = 0022$ seg)

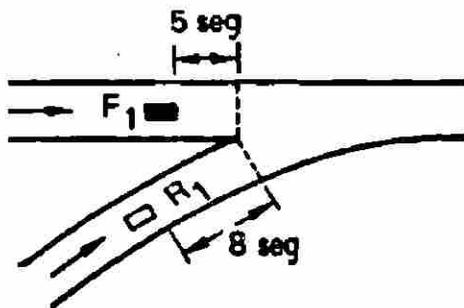
En tiempo $T = 0008$ seg

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



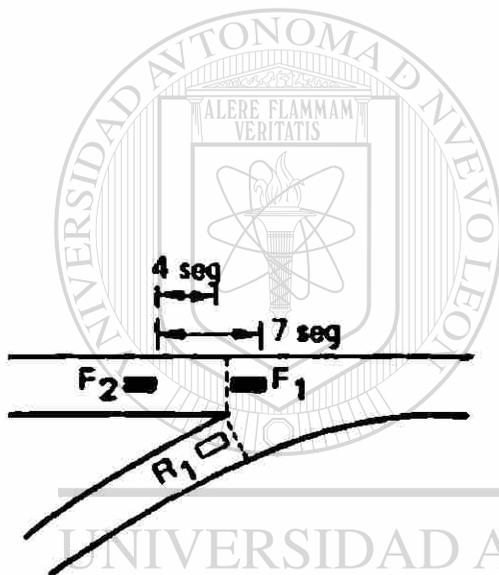
- 1.- ¿El tiempo de llegada del vehículo de la autopista (F_4) anterior al tiempo de observación para el intervalo del vehículo de la rampa (R_2)? Si
- 2.- Calcula el intervalo de entrada disponible (4 - seg para R_2)
- 3.- Genera el intervalo de entrada LRS aceptable -- (3 seg para R_2)
- 4.- ¿El intervalo disponible es aceptable? Si
- 5.- Calcula el tiempo de salida del vehículo de la rampa (0024 seg para R_2)
- 6.- Calcula la demora del vehículo de la rampa (15 seg para R_2)

En tiempo $T = 0022$ seg.



- 1.- Genera el próximo intervalo de llegada a la rampa (8 seg para R_1)
- 2.- Calcula el tiempo de llegada del vehículo de la rampa (0008 seg para R_1)
- 3.- Genera el próximo intervalo de llegada a la au-topista (15 seg para F_1)
- 4.- Calcula el tiempo de llegada del vehículo de la autopista (0005 para F_1)

En tiempo $T = 0000$ seg



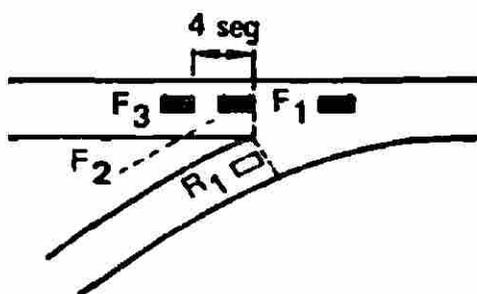
- 1.- ¿El tiempo de llegada del vehículo de la auto-pista (F_1) es anterior al tiempo de llegada del vehículo de la rampa (R_1)? **No**
- 2.- Genera el próximo intervalo de llegada en la autopista (7 seg para F_2)
- 3.- Calcula el tiempo de llegada del vehículo de la autopista (0012 seg para F_2)
- 4.- ¿El tiempo de llegada del vehículo de la auto-pista (F_2) es anterior al tiempo de llegada del vehículo de la rampa (R_1)? **Si**

5.- Calcula el intervalo de entrada **disponible** ---- (4 seg para R_1)

6.- Genera el intervalo de entrada LRS **aceptable** --[®] (5 seg para R_1)

7.- ¿El intervalo disponible es aceptable? **No**

En tiempo $T = 0008$ seg



- 1.- Genera el próximo intervalo de llegada en la autopista (4 seg para F_3)
- 2.- Calcula el tiempo de llegada del vehículo de la autopista (0016 seg para F_3)
- 3.- Calcula el intervalo de entrada disponible (4 - seg para R_1)
- 4.- Genera el intervalo de entrada HRS **aceptable** -- (6 seg para R_1)
- 5.- ¿El intervalo disponible es aceptable? **No**

En tiempo $T = 0012$ seg

en un diagrama de flujo del proceso de computo.

Según es descrito por Wohl:

"La filosofía general y algunos de los mecanismos del modelo pueden describirse mejor si se sigue completamente el ejemplo de la figura 4.8. En este ejemplo el experimento inicia en un tiempo arbitrario tal como $T = 0000$. El primer paso es generar el próximo intervalo de llegada a la rampa (8 seg) y a la autopista (5 seg) y determinar los tiempos en los cuales llegarán los próximos vehículos de la rampa y de la autopista a la nariz de la intersección; estos pasos se indican en la figura 4.8 a. El conductor del vehículo de la rampa basa su decisión de sí o no entra a la autopista en su tiempo esperado de llegada a la nariz de la intersección y la disponibilidad de un intervalo apropiado en la autopista. Si en el tiempo de llegada del vehículo de la rampa a la nariz existe un intervalo aceptable en el flujo de la autopista, podrá entrar. Si no, será demorado y deberá esperar para un intervalo posterior en el flujo de la autopista. La figura 4.8 b presenta las posiciones de los primeros vehículos de la rampa y de la autopista en el tiempo de llegada del vehículo de la rampa a la nariz.

Puesto que el primer vehículo de la autopista ha pasado la nariz antes de la llegada del primer vehículo de la rampa, deberán determinarse el próximo intervalo de llegada de la autopista (7 seg) y su tiempo de llegada a la nariz (0012 seg); además, debe hacerse un chequeo para asegurar que este tiempo de llegada en la autopista (0012 seg) sea posterior al tiempo de llegada en la rampa (0008 seg). Debido a esto, el intervalo o el retraso de entrada disponible (esto es, el intervalo disponible para que el vehículo de la rampa entre al flujo de la autopista) debe ser calculado (esto es de 4 seg). (Si el tiempo de llegada en la autopista, no es anterior al tiempo de llegada en la rampa, deben determinarse tiempos sucesivos de llegada en la autopista hasta que se localice el primero que sea anterior al del vehículo de la rampa). Siguiendo esto, debe generarse el intervalo de entrada L.R.S aceptable (5 seg) para el vehículo de la rampa.

Puesto que el intervalo de entrada disponible no es aceptable, el vehículo de la rampa será demorado hasta que el segundo vehículo de la autopista haya pasado. La figura 4.8 c presenta las posiciones de los vehículos al tiempo de llegada del segundo vehículo de la autopista a la nariz (0012 seg); en este tiempo el vehículo de la rampa examina el próximo intervalo de llegada en la autopista (4 seg), el cual en este caso también es el intervalo de entrada disponible. Puesto que el vehículo de la rampa ha sido demorado, debemos determinar su intervalo H.R.S. aceptable (6 seg). De nuevo, el intervalo de entrada disponible no es aceptable para el vehículo de la rampa, y debe examinarse otro intervalo en la autopista.

La figura 4.8 d presenta los vehículos al tiempo en que llega el tercer vehículo de la autopista a la nariz. Se determina el próximo tiempo de llegada en la autopista (10 seg) y se calcula el tiempo de llegada en la autopista del cuarto vehículo (0026 seg). El intervalo de entrada disponible (10 seg) es mayor que el intervalo H.R.S. aceptable (6 seg); por lo tanto, el vehículo de la rampa puede aceptar el intervalo y entrar a la autopista. El tiempo de salida (0019 seg) para el vehículo de la rampa es la llegada del tercer vehículo de la autopista (0016 seg) más la operación de demora (3 seg) calculada por la demora de reacción de inicio. El paso final es calcular la demora del vehículo de la rampa, la cual es su tiempo de salida (0019 seg) menos su tiempo original de llegada a la nariz (0008 seg) más la demora en la aceleración (5 seg) al entrar al flujo de la autopista. Así, la demora total es de 16 seg.

El segundo vehículo de la rampa no puede entrar a la autopista hasta un tiempo después de la salida del primer vehículo. Sin embargo, el segundo vehículo debe tener una llegada a la rampa anterior al tiempo de salida del primero y haber estado en la línea de espera. Puesto que estamos interesados principalmente con demorar a los vehículos de la rampa que entran al flujo de la autopista, los tiempos originales de llegadas de estos vehículos a la nariz deben calcularse, así como también los tiem

pos en los cuales los vehículos están entrando al flujo de la autopista. Así, los primeros dos pasos de la figura 4.8 e son para generar el próximo intervalo de llegada en la rampa (6 seg) y calcular el tiempo de llegada del segundo vehículo (0014 seg). Siguiendo esto, puede determinarse si los vehículos en la rampa fueron demorados por el vehículo anterior de la misma; esto es, ¿ el tiempo de llegada (del segundo vehículo) es anterior al tiempo de salida del vehículo previo de la rampa ? si el vehículo de la rampa fué demorado por uno previo, el tiempo anterior al vehículo de la rampa puede comenzar a observarse para un intervalo aceptable en la autopista, debe calcularse en base al tiempo de salida del vehículo previo. Consecuentemente, el así llamado tiempo de "observar para el intervalo adecuado" del segundo vehículo de la rampa (0022 seg) es igual al tiempo de salida del vehículo previo (0019seg) más la demora de operación (3 seg) permitida para los tiempos de percepción y reacción, etc.

El siguiente paso es determinar el tiempo de llegada anterior del vehículo de la autopista, el cual es previo al tiempo de observar para el intervalo adecuado del segundo vehículo de la rampa. En este caso, el último tiempo de llegada del vehículo de la autopista calculado (0026 seg para el cuarto vehículo) es anterior al tiempo de observar para el intervalo adecuado del segundo vehículo de la rampa (0022 seg); por lo tanto, el retraso de entrada disponible es la diferencia entre esos dos tiempos, o sea, 4 seg.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Basado en suposiciones mas recientes, debe calcularse un intervalo de entrada LRS aceptable para los vehículos que esperan en la rampa (3 seg). El intervalo de entrada disponible es aceptable, y el segundo vehículo entra a la autopista; ver figura 4.8 f. Su tiempo de salida (0024 seg) es el tiempo de observar para el intervalo adecuado (0022 seg) más la demora de operación de 2 seg; su demora (15 seg) es el tiempo de salida (0024 seg) menos el tiempo de llegada (0014 seg) más 5 seg por demora de aceleración.

Estos pasos pueden repetirse para tantas pruebas de simulación como -- sean deseadas; el número de "muestras" o pruebas serán, por supuesto, función de la ocurrencia requerida y la consideración del tiempo y la economía."

El diagrama de flujo de la figura 4.9 deberá ser "desmembrado" hasta -- el más íntimo detalle para facilitar la programación existente de computadoras. Por ejemplo, la generación del intervalo aceptable del vehículo es ejecutado como se presenta en la figura 4.9 usando las técnicas de la figura 4.10.

4.4.- EL PROGRAMA DE COMPUTO

Teniendo formulada la lógica de un problema de simulación, el siguiente paso es convertirlo, en un programa de computo. Esto se hizo posibleen los primeros días de la simulación de tránsito mediante la escritura laboriosa de un programa en lenguaje de computación. Sin embargo, ahora las simulaciones son auxiliadas por la disponibilidad de una variedad de lenguajes para la ayuda del usuario. Hay lenguajes generales, tal como el FORTRAN, que habilitan el trabajo al programador con relaciones que son de naturaleza esencialmente algebraica. También existen diferentes lenguajes de mayor orden diseñados específicamente para la simulación. Los dos lenguajes que se conocen mejor en los Estados Unidos son el SIMSCRIPT y el GPSS, los cuales son resumidamente descritos en el apéndice D-1. Ahora, los grandes programas de simulación, especialmente aquellos que son utilizados en diferentes centros de computo, pueden codificarse mejor en FORTRAN. Donde muchos programas cortos están siendo escritos para usarse en base a un tiro, esto es válido considerando un lenguaje de simulación especial. (En muchos casos, por supuesto, la selección de un lenguaje de alto orden depende de la computadora disponible o se hace por el manejo del centro de computo. En tales situaciones el usuario adopta por sí mismo el lenguaje disponible).

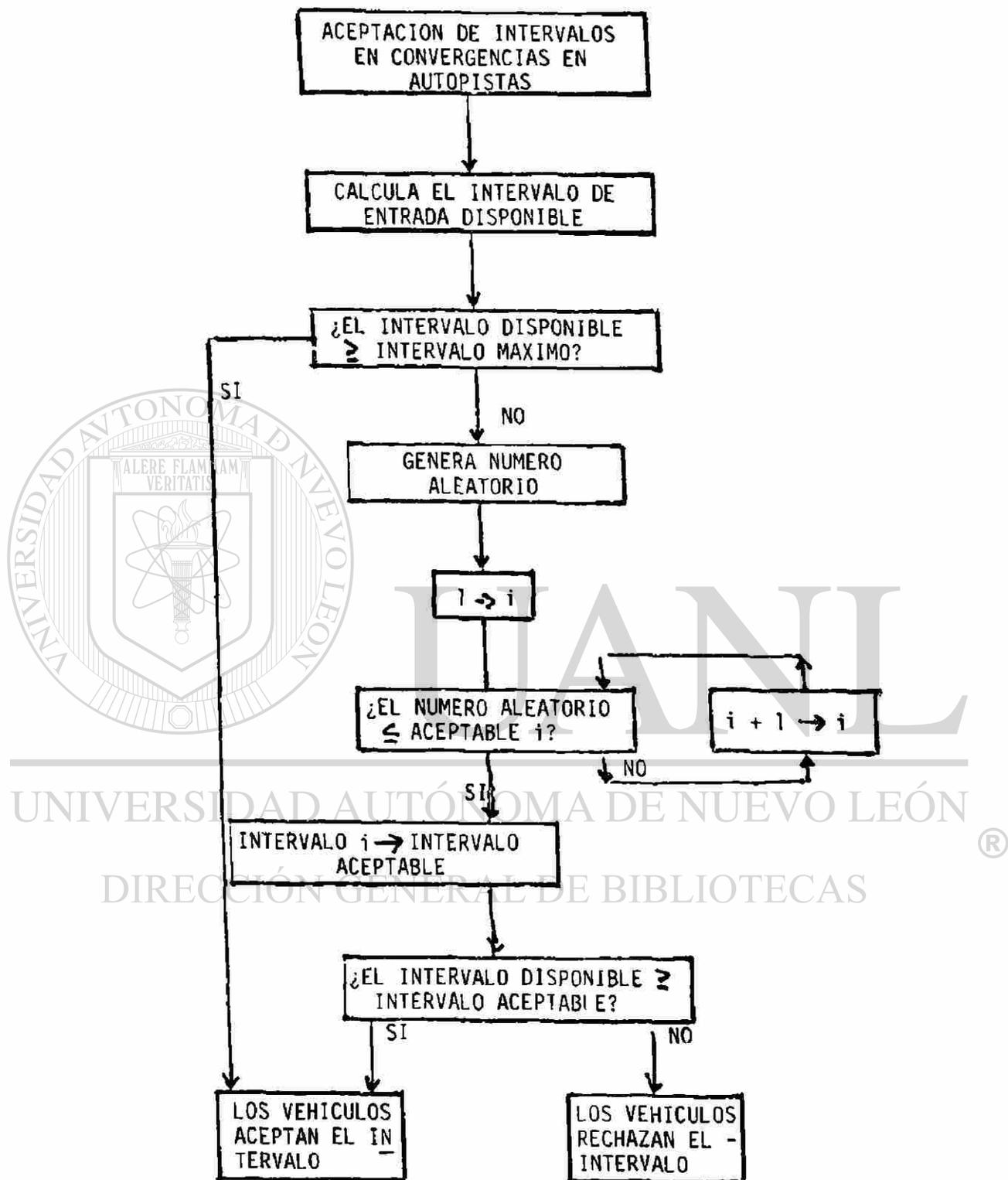


FIGURA 4.10 GENERACION DE ACEPTACION DE INTERVALO EN AUTOPISTA

4.5.- VALIDACION

Hay dos tipos de verificación de salida de un programa de simulación: "paso a paso" y "validación". El paso a paso determina si el programa está trabajando y, si trabaja, si está representando correctamente el modelo según como se definió. La validación es una prueba para determinar si el modelo representa satisfactoriamente el sistema a simularse. La validación, un experimento estadístico, se discute en la ecuación 4.8.

El paso a paso se lleva a cabo en una variedad de maneras. Cuando el programa de simulación está siendo escrito, indudablemente habrá muchas subrutinas u otras secciones especiales que ejecuten funciones particulares. Cada una de ellas deberán chequearse según se escriban. Tales pruebas pueden requerir el escrito de pruebas especiales de rutina para proveer datos e imprimir la capacidad de las subrutinas que son aprobadas. Aunque esto implica trabajo extra, la seguridad de que cada una de las subrutinas están trabajando apropiadamente dentro de la misma, justifica más que el esfuerzo. Estas pruebas deberán, por supuesto, emplear problemas de prueba o datos que guían a resultados conocidos o que pueden ser fácilmente comprobados mediante cálculos manuales. Se deberá tener cuidado para asegurar que los ejercicios de prueba en todos los casos posibles eviten algún resultado falso. ®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Después de que todas las subrutinas han sido probadas y corregidas por separado, entonces se concentra y se prueba el programa completo. Si el programa total es muy largo, muchas veces es conveniente colocar juntas pocas subrutinas a un tiempo, probando a cada paso. Durante las pruebas, si otras medidas debilitan descubrir el origen de un "paso" particular, se puede emplear un rastreo, imprimiendo los resultados después de cada paso en el cálculo. (Muchos centros de computo tienen programas especiales para rastrear). Una vez que el programa ha sido probado y verificado, es leído para los experimentos de validación.

4.6.- PLANEACION Y DISEÑO DEL EXPERIMENTO

Como en toda empresa experimental el diseño estadístico de un experimento de simulación es importante para minimizar la cantidad de experimentación y para habilitar deducciones con los niveles de importancia deseados. Los experimentos de simulación tienen la ventaja sobre los experimentos de campo en que la simulación habilita al experimentador a controlar más fácilmente las diferentes variables y ejecutar réplicas adicionales a voluntad. Esto conduce a algunos experimentadores a desatender que:

- 1.- El tiempo de computo para los experimentos es muy costoso y
- 2.- Cualquier experimento deberá diseñarse de tal manera que el costo de las medidas adicionales sean comparables con el valor de la información adicional a conseguirse.

En relación a computar experimentos de simulación, se considera el diseño experimental para incluir:

- 1°).- Consideración de problemas tales como la selección de factores de nivel y combinaciones, el orden la experimentación, la minimización del error aleatorio y los diseños de simulación clásico y de computo de problemas.
- 2°).- Un sistema para iniciar las corridas de simulación.
- 3°).- Procedimientos de validación.

4.6.1.- DISEÑO GENERAL DE EXPERIMENTOS DE SIMULACION

El espacio no permite un tratado detallado sobre el diseño de experimentos. Los experimentos de simulación utilizan todos los tipos usuales de diseño, con énfasis en respuesta de exploración superficial y muestreo

secuencial. Algunos investigadores se apoyan en el uso de la varianza reducida para minimizar el tamaño de la muestra. Un problema al que se le debe dar atención particular en el diseño de los experimentos de simulación es la tendencia para el proceso aleatorio a correlacionarse y por esto no es analizable por métodos estadísticos tradicionales.

4.6.2.- COMIENZO DE LA SIMULACION

Cuando se comienza una simulación, el sistema se vacía y cualquier medición efectuada sobre las medidas de efectividad esencialmente serán invalidadas. Este problema se maneja mas sencillamente excluyendo un periodo inicial de comienzo del sistema de evaluación. La cuestión difícil es como reconocer cuando se ha obtenido el equilibrio o la estabilidad. Algunas veces la estabilidad puede acelerarse mediante el establecimiento, dentro del sistema, de algunas condiciones de comienzo anteriores a las establecidas para el equilibrio. Se deberán hacer pruebas para asegurar que la ejecución es independiente de las condiciones de comienzo. Fishman ha tratado recientemente algunas de estas técnicas.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

4.7.- INTERPRETACION DE RESULTADOS

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

La interpretación de los resultados del experimento de simulación es similar a la interpretación de cualquier resultado experimental. Muchas veces el resultado está en la prueba de alguna hipótesis; en otros casos la interpretación consiste en ajustar una curva a la salida del experimento.

4.8.- RESUMEN

En la formulación de un modelo de simulación, uno se empeña en conseguir suficiente realismo para describir adecuadamente el fenómeno de interés. Sin embargo, no se podrá ir "sobre la borda" incluyendo detalles extras que no afectarán significativamente a los resultados.

Los programas deberán ser comprobados y validados apropiadamente.

Los programas de simulación de tránsito que son modelados y validados apropiadamente establecen importantes estructuras experimentales para el estudio de tránsito.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



