



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**ASPECTOS ASINTÓTICOS Y GEOMÉTRICOS  
DEL CAOS CUÁNTICO**

Trabajo de Tesis Doctoral

**LIC. IGNACIO SEBASTIÁN GOMEZ**

Tesista

**Dr. Mario A. Castagnino**

Director

**Dra. Mariela A. Portesi**

Codirector

LA PLATA, MARZO 2016

*“Armonía, emoción e inercia son las tres cualidades inherentes a la materia que mantienen sujeto al ego en el cuerpo y el alma universal en la naturaleza”– (Bhagavad Gita, XIV, 5).*

# Agradecimientos

A lo largo de esta Tesis Doctoral un sinfín de personas me dieron su apoyo, cariño y motivación, las cuales difícilmente podrían caber en una sola página.

En primer lugar, debo mencionar a las dos personas a las cuales les debo enormemente el no dudar un instante en dirigir mi trabajo de tesis con un gigantesco cariño y entusiasmo: Mario y Mariela. Ellos siempre supieron valorar y extender cada paso que fui dando en base a hermosas discusiones, contribuciones y sugerencias con un grado de perfección, visión y estética que todavía no dejan de asombrarme. De más está decir mi deseo de continuar trabajando con ellos.

En segundo lugar, quiero agradecer a mis padres y a mi hermana que en ningún momento dejaron de brindarme todo su amor y apoyo, que en los lapsos difíciles constituyeron mi timón.

En especial quiero agradecer muchísimo a mi maravillosa compañera que me dió esta vida, Ingrid. Gracias por bancarme tanto en todo momento y siempre con el consejo certero.

No puedo dejar de mencionar a las increíbles siguientes personas que me han acompañado. A Roberto y Marcelo por sus enriquecedoras charlas, reuniones de café, congresos, cuyas reflexiones brindaron aire fresco a mis pensamientos. A los tres mosqueteros de la cuántica, Fede, Sebi y Martincito que son el motor e inspiración de este hermoso grupo con los que comparto siempre divertidas vivencias en cada congreso que asistimos. Al Pipi y a Olimpia, por ser un pilar del conocimiento y de la humildad, que con mucho amor supieron darme consejos que fueron mi guía en el mundo académico. A mis amigos de siempre y otros que fui encontrando en este último tiempo, a Dani, Rodo, Darío. A Garci por la pasión indescriptible que compartimos por el glorioso River Plate.

Por supuesto tengo que hacer una mención especial a Sueño De Espantapájaros y mis amigos de banda Ozzy, Sergio y Facu que conformaron mi cable a tierra musical a lo largo de esta tesis y lo son en mi trabajo cotidiano, por esa energía maravillosa única que nos conecta en cada presentación que hacemos.

Por último y en especial quiero agradecer a mi maestro Esteban, cuyas lecciones de Muay Thai y libros siempre complementan y armonizan mis pensamientos cuánticos.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>10</b>
1.1. Caos clásico . . . . .	10
1.2. Caos cuántico . . . . .	11
1.3. Sistemas dinámicos, teoría de densidades y operadores de Markov . . . . .	14
1.4. Formalismo cuántico . . . . .	17
1.4.1. Límite clásico y límite débil . . . . .	19
1.4.2. Formulación del límite clásico en términos del límite débil . . . . .	19
1.5. Aproximación geometrodinámica informacional al caos . . . . .	23
<b>2. Caracterizaciones asintóticas</b>	<b>25</b>
2.1. La jerarquía ergódica clásica . . . . .	25
2.2. La jerarquía ergódica cuántica (QEH) . . . . .	27
2.2.1. Formalismo . . . . .	28
2.2.2. Ejemplo: el rotor pateado . . . . .	31
2.3. Ensamblajes Gaussianos a partir del nivel mixing cuántico . . . . .	34
2.4. Descomposición espectral de sistemas dinámicos . . . . .	37
2.4.1. El teorema de descomposición espectral de sistemas dinámicos . . . . .	37
2.4.2. Una versión cuántica del teorema de descomposición espectral de sistemas dinámicos (QSDT) . . . . .	39
2.4.3. QSDT y el espectro cuántico . . . . .	41
2.4.4. Ejemplo: Billar de microondas . . . . .	45
<b>3. Escalas temporales características</b>	<b>48</b>
3.1. Caos y el Principio de Correspondencia . . . . .	48
3.1.1. La aproximación estándar . . . . .	49
3.1.2. Granulosidad fundamental con celdas . . . . .	50
3.2. Una condición semiclásica para el caos . . . . .	61
3.2.1. La entropía de Kolmogorov–Sinai y el teorema de Pesin . . . . .	61
3.2.2. Una condición semiclásica para el caos en términos de valores medios cuánticos . . . . .	62
3.2.3. Ejemplo: modelo de Gamow . . . . .	64
<b>4. La jerarquía ergódica geometrodinámica informacional</b>	<b>67</b>
4.1. Ensamblajes Gaussianos dentro de un modelo de variedades estadísticas . . . . .	67
4.2. Hacia una definición geometrodinámica informacional de la jerarquía ergódica . . . . .	73
4.3. Relevancia física: El modelo 2D correlacionado en términos de los niveles de IGEH . . . . .	74

<b>5. Sistemas bipartitos en el formalismo IGAC</b>	<b>77</b>
5.1. Estructura métrica del sistema bipartito y de cada uno de los subsistemas . . . . .	77
5.2. Los tensores $g_{\mu\nu}^{A+B}$ , $g_{\mu\nu}^{A\otimes B}$ , $g_{\mu\nu}^A$ y $g_{\mu\nu}^B$ en el modelo $2D$ correlacionado . . . . .	79
5.3. Una medida de distinguibilidad en el sistema bipartito . . . . .	81
5.4. Ejemplo: Pares de osciladores acoplados e inmersos en un baño térmico . . . . .	83
<b>Conclusiones</b>	<b>87</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>89</b>
<b>Apéndices</b>	<b>93</b>
<b>A. La correlación <math>C(\hat{\rho}(t), \hat{O})</math> de la jerarquía ergódica cuántica</b>	<b>94</b>
<b>B. El nivel Kolmogorov cuántico</b>	<b>96</b>
<b>C. Demostración del lema 2.3</b>	<b>100</b>
<b>D. Demostración del lema 2.4</b>	<b>101</b>
<b>E. Demostración del corolario 2.5</b>	<b>102</b>
<b>F. Demostración del teorema 2.6</b>	<b>103</b>
<b>G. Demostración del teorema 2.7 (QSDT)</b>	<b>104</b>
<b>H. Demostración de la proposición 3.6</b>	<b>108</b>
<b>I. Demostración del lema 3.9</b>	<b>109</b>

# Prefacio

La presente Tesis Doctoral va a ser presentada a la Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, Argentina, como requisito parcial para acceder al título de Doctor en Ciencias, Área Física.

Este trabajo, iniciado en diciembre de 2013, fue realizado conjuntamente en el Instituto de Física de Rosario bajo la dirección del Dr. Mario Castagnino, y en el Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, bajo la codirección de la Dra. Mariela Portesi.

Durante este período conté con el financiamiento del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) por medio de las becas internas de postgrado de tipo I y II.

La mayor parte de los resultados originales que expongo en esta Tesis dieron lugar a las siguientes publicaciones en revistas científicas internacionales con referato (al final de cada referencia se indica a qué capítulo de la Tesis corresponde), como así también, fueron presentados en numerosas ponencias en congresos nacionales e internacionales:

1. I. Gomez and M. Castagnino.  
*Towards a definition of the quantum ergodic hierarchy: Kolmogorov and Bernoulli systems.*  
Physica A **393**, 112–131 (2014).  
Capítulo 2.
2. I. Gomez and M. Castagnino.  
*On the classical limit of quantum mechanics, fundamental graininess and chaos: compatibility of chaos with the correspondence principle.*  
Chaos, Solitons and Fractals **68**, 98–113 (2014).  
Capítulo 3.
3. I. Gomez and M. Castagnino.  
*A quantum version of spectral decomposition theorem of dynamical systems, quantum chaos hierarchy: ergodic, mixing and exact.*  
Chaos, Solitons and Fractals **70**, 99–116 (2015).  
Capítulo 2.
4. I. Gomez, M. Losada, S. Fortin, M. Castagnino and M. Portesi.  
*A semiclassical condition for chaos based on Pesin theorem.*  
International Journal of Theoretical Physics, **7**, 2192–2203 (2015).  
Capítulo 3.

Además de los artículos publicados, los siguientes trabajos se encuentran en preparación y/ó enviados para su próxima publicación:

5. F. Holik, Décio Krause, I. Gomez.  
*Quantum logical structures for identical particles.*  
arXiv:1305.5242 [quant-ph] (2013).  
Capítulo 5.
6. I. S. Gomez, M. Portesi.  
*Gaussian ensembles distributions from mixing quantum systems.*  
arXiv:1503.02751 [quant-ph] (2016).  
Capítulo 2.
7. I. S. Gomez, M. Portesi.  
*Ergodic statistical models: entropic dynamics and chaos.*  
arXiv:1607.08667 [math-ph] (2016).  
Capítulo 4.
8. I. S. Gomez, M. Portesi.  
*Bipartite systems in the informational geometrodynamical approach to chaos.*  
En preparación (2016).  
Capítulo 5.

# Resumen

En esta Tesis Doctoral se desarrollan herramientas geométricas desde el marco teórico de la geometría diferencial y de la teoría de la información para estudiar el caos cuántico y de esta forma dar una visión más completa del mismo. Para ello, en primer lugar estudiamos los fenómenos característicos del caos cuántico y de sus correspondientes escalas temporales en términos de valores medios cuánticos. Esto permitió obtener a una caracterización asintótica de fenómenos del caos cuántico expresada por: 1) la jerarquía ergódica cuántica (abreviadamente QEH, del inglés *Quantum Ergodic Hierarchy*), 2) una versión cuántica del Teorema de Descomposición Espectral de Sistemas Dinámicos (abreviadamente QSDT, del inglés *Quantum Spectrum Decomposition Theorem*), 3) la granulosidad fundamental, 4) una condición de caos en el límite clásico basada en el teorema de Pesin y 5) una derivación de los ensambles Gaussianos desde el nivel *mixing* de la QEH. Estos resultados constituyen una primera parte de la presente Tesis, que enumeramos a continuación.

- Con la QEH se logró extender la jerarquía ergódica clásica a sistemas cuánticos donde cada uno de los niveles de caoticidad (ergódico, *mixing*, Kolmogorov y Bernoulli) quedaron caracterizados por condiciones asintóticas sobre los valores medios cuánticos. Entre otras cosas, se pudieron caracterizar los fenómenos de *dephasing* y localización exponencial del rotor pateado en términos del nivel *mixing* de QEH.
- Admitiendo la aplicación del Teorema de Descomposición Espectral de Sistemas Dinámicos al límite clásico de un sistema cuántico dado, se obtuvo una versión cuántica dando como resultado, entre otras cosas, un estudio del espectro de los sistemas cuánticos pertenecientes a los niveles ergódicos y *mixing* de QEH. Por otra parte, su aplicación a un billar de microondas provisto de un Hamiltoniano efectivo con espectro finito de autovalores complejos, permitió caracterizar sus transiciones caóticas como función de su número de antenas.
- Utilizando las correlaciones del nivel *mixing* de QEH bajo la hipótesis de que el límite débil constituye el estado representativo del sistema cuántico para tiempos grandes, y asumiendo que la probabilidad de los elementos matriciales del Hamiltoniano puede expresarse como la traza de cierto proyector sobre el límite débil, se obtuvieron los ensambles Gaussianos en términos de valores medios cuánticos en el límite clásico.
- Con el objetivo de compatibilizar el Principio de Incertidumbre y el Principio de Correspondencia con la emergencia del caos en el límite clásico, definimos la granulosidad fundamental a partir del estudio de la evolución de celdas en el espacio de fases como el análogo clásico de un punto que se mueve. Esta compatibilidad quedó expresada en términos del rango temporal de la granulosidad fundamental. A partir de las ecuaciones



de movimiento de celdas arbitrarias, en base a dicho rango se obtuvieron las escalas temporales características del caos cuántico, es decir el tiempo de Heisenberg y el tiempo de Ehrenfest.

- Teniendo en cuenta el teorema de Pesin que relaciona los coeficientes de Lyapunov del sistema clásico con su entropía de Kolmogorov–Sinai, se obtuvo una condición semiclassical en términos de valores medios cuánticos para la existencia de caos en el límite clásico. Se aplicó dicha condición al modelo de Gamow provisto de un Hamiltoniano efectivo dando como resultado una dinámica caótica en su límite clásico con la evolución temporal invertida. A partir de este resultado se obtuvo, con la ayuda conjunta del teorema de Pesin y del tiempo de Kolmogorov–Sinai, el exponente de Lyapunov del modelo de Gamow en función de los polos del Hamiltoniano efectivo.

A partir de estas investigaciones de índole asintótica, en la segunda parte de esta Tesis se estudiaron e identificaron posibles medidas de caoticidad relevantes sobre variedades estadísticas dentro del formalismo de la aproximación de información geometrodinámica al caos (IGAC) el cual utiliza el concepto de distancia entre distribuciones, en particular la dada por la métrica de Fisher–Rao. Dicho estudio condujo a los siguientes resultados.

- Se obtuvo una caracterización de los ensambles Gaussianos como un caso particular de un modelo correlacionado estadístico para el caso límite en el que la covarianza entre las variables microscópicas tiende a cero. A su vez, esta caracterización geométrica derivó en una extensión geométrico–informativa de la jerarquía ergódica, denominada jerarquía ergódica geometrodinámica informativa (abreviadamente IGEH, del inglés *information geometrodynamical ergodic hierarchy*).
- Se aplicó el formalismo geométrico–informativo IGAC a sistemas bipartitos lo cual permitió estudiar la estructura métrica de la variedad estadística del sistema total y la de sus subsistemas. Se caracterizaron las dinámicas de los sistemas bipartitos y de sus subsistemas a partir de sus escalares de curvatura y utilizando familias de distribuciones correlacionadas bivariantes.
- Por último, se definió una medida de distinguibilidad para la familia de distribuciones bivariantes del modelo  $2D$  que permitió definir una cota para las correlaciones de la IGEH. Se utilizó dicha cota para ilustrar la transición termodinámica de un ensamble de pares de osciladores acoplados inmersos en un baño térmico en términos del nivel *mixing* informativo de la IGEH.

Consideramos que estos estudios constituyen un conjunto de caracterizaciones asintóticas y geométricas de la dinámica caótica, tanto clásica como cuántica, que se encuentran interconectadas entre sí y que permiten dar una visión más amplia del caos cuántico desde el punto de vista teórico.

# Capítulo 1

## Introducción

Comenzamos realizando un repaso de las nociones y conceptos del caos clásico y cuántico, como así también de los formalismos utilizados a lo largo de esta Tesis Doctoral.

### 1.1. Caos clásico

En mecánica clásica se define el caos o comportamiento caótico como aquel comportamiento determinista típicamente aperiódico con la característica de ser muy sensible a las condiciones iniciales. Este concepto destruye la imagen determinista de la física clásica y muestra que las trayectorias de las ecuaciones de movimiento son en algún sentido aleatorias e impredecibles. El mecanismo para esta propiedad sorprendente de la mecánica clásica está relacionado con la inestabilidad exponencial local presente en el movimiento [1]. La estabilidad local del movimiento está caracterizada por el máximo coeficiente de Lyapunov, definido como el límite

$$\Lambda = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{1}{|t|} \log d(t)$$

donde  $d(t)$  es la distancia al tiempo  $t$  entre dos trayectorias con condiciones iniciales cercanas entre sí y se considera  $d(0) = 1$ . Entonces, la inestabilidad exponencial del movimiento significa que el máximo exponente de Lyapunov  $\Lambda$  es positivo. La predicción del movimiento de la trayectoria para un tiempo suficientemente corto puede ser caracterizada por el parámetro aleatorio [2]

$$r = \frac{h|t|}{|\log \mu|}$$

donde  $\mu$  es la precisión del registro de la trayectoria y  $h$  es la denominada entropía de Kolmogorov-Sinai. La predicción es posible en el intervalo finito de “determinismo temporal”  $r \lesssim 1$ , mientras que  $r \gg 1$  corresponde a la región de aleatoriedad asintótica en cuyo rango temporal casi todas las trayectorias son impredecibles. Cabe señalar que la condición  $h > 0$  es suficiente para que ocurra el movimiento caótico.

Desde el lado de los fundamentos del caos clásico las siguientes aproximaciones se encuentran vinculadas entre sí: la complejidad algorítmica [3], los exponentes de Lyapunov  $\Lambda_+$  [4, 5] y la jerarquía ergódica clásica [6, 7]. Esta última clasifica distintos niveles de caos a partir del decaimiento de un tipo de correlaciones entre subconjuntos del espacio de fases permitiendo de este modo una descripción estadística del caos en el límite asintótico. Asimismo, el teorema de Brudno relaciona la complejidad algorítmica con la entropía de Kolmogorov-Sinai  $h$  mientras

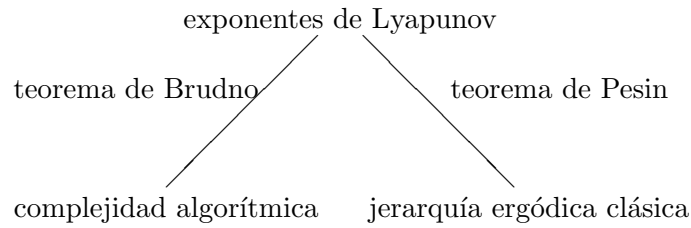


Figura 1.1: La *pirámide caótica* es un diagrama de las relaciones entre la jerarquía ergódica clásica, los exponentes de Lyapunov y la complejidad algorítmica, por medio de los teoremas de Pesin y de Brudno.

que el teorema de Pesin relaciona la jerarquía ergódica clásica con los exponentes de Lyapunov. Las relaciones entre estos indicadores caóticos se ilustra en la *pirámide caótica* de la Fig. 1.

Es importante destacar que la inestabilidad exponencial implica un espectro continuo, y esto a su vez trae como consecuencia un decaimiento de las correlaciones de tal forma que la medida de la intersección entre dos conjuntos del espacio de fase alejados entre sí temporalmente tiende al producto de la medida entre dichos conjuntos para tiempos grandes. Esta propiedad llamada *mixing*, constituye uno de los niveles de la jerarquía ergódica, y es la que permite una descripción estadística de la dinámica, la cual se tratará con detalles en el Capítulo 2. El punto clave es que *mixing* establece la independencia estadística de diferentes partes suficientemente separadas en el tiempo de una trayectoria dinámica. Esta es la principal razón de la aplicación de la teoría de probabilidad en física clásica que nos permite el cálculo de características estadísticas tales como difusión, relajación, funciones de distribución, etc.

Por consiguiente, la aplicación de la teoría de probabilidad en la dinámica clásica nos permite reemplazar la descripción en términos de trayectorias por otra equivalente en términos de funciones distribución, las cuales si no son singulares, representan no una única trayectoria sino un continuo de ellas. Por otra parte, la función distribución satisface una ecuación de Liouville lineal. En términos de distribuciones, la propiedad *mixing* implica la aproximación a un estado estacionario en el límite asintótico de tiempos grandes para toda distribución inicial suave. Este proceso es denominado *relajación estadística* y será frecuentemente utilizado en el desarrollo de los capítulos de la presente Tesis.

Para deshacerse de su complicada estructura, la distribución debe ser de “grano grueso”, es decir, debe ser promediada sobre algún dominio del espacio de fases. La evolución de la distribución de grano grueso es descrita por una ecuación cinética, esto es, por una ecuación de difusión. Más aún, la distribución de grano grueso converge a un estado estacionario suave (en el sentido de la diferenciabilidad) que es constante. Cabe señalar que esta operación de grano grueso será fundamental para la caracterización de las escalas temporales del caos cuántico que se desarrolla en el Capítulo 3. Finalizamos esta sección remarcando las dos propiedades fundamentales de la mecánica clásica que son necesarias para que la dinámica caótica ocurra: (i) un espectro continuo, y (ii) un espacio de fases continuo.

## 1.2. Caos cuántico

El problema del caos cuántico surgió alrededor de los ‘70s a partir de los intentos de comprender los fenómenos del caos clásico en términos de la mecánica cuántica en el límite clásico. Si bien aún en la actualidad no existe un consenso en la comunidad científica sobre una definición rigurosa del caos cuántico, se suele aceptar como el estudio de los aspectos mecano-cuánticos de

los sistemas cuánticos que admiten una descripción clásica caótica [1, 8, 9, 10]. Es decir, aquellos sistemas cuánticos cuyo comportamiento cuando la constante de Planck es despreciable frente a otras cantidades (límite clásico) pueden ser caracterizados por los indicadores del caos clásico que mencionamos anteriormente como los coeficientes de Lyapunov, la complejidad algorítmica, etc [11, 12].

Investigaciones preliminares pusieron en evidencia una dificultad muy profunda en el hecho de que las condiciones mencionadas anteriormente para la dinámica caótica clásica, el tener un espectro continuo y un espacio de fases continuo, son violadas por la mecánica cuántica: la condición (i) es violada debido a la naturaleza discreta del espectro cuántico y la condición (ii) es violada debido a que el Principio de Incertidumbre establece un espacio de fases cuántico discretizado en celdas de tamaño mínimo dadas por  $\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar$  (por cada grado de libertad). La situación se vuelve aún más crítica al considerar el Principio de Correspondencia que establece la emergencia de todos los fenómenos clásicos sin excepción, en particular el caos clásico, en el límite clásico de la mecánica cuántica. Surgió entonces la idea de que una manera de reconciliar el espectro discreto con el Principio de Correspondencia es la introducción de algunas escalas temporales características del movimiento cuántico. El punto clave fue identificar que la distinción entre los espectros discreto y continuo no es ambigua solamente en el límite asintótico  $t \rightarrow \infty$ . Esta idea fue sugerida por experimentos numéricos en caos cuántico en los cuales se utilizó un modelo muy simple y emblemático en la literatura, el rotor pateado [1].

De esta forma, se identificaron los aspectos dinámicos del caos cuántico dentro del dominio temporal. Se logró caracterizar al caos cuántico como una propiedad de la evolución temporal asintótica que ocurre, dentro de una escala de tiempo  $t^*$  determinada por la densidad de estados  $\rho = \frac{dE_n}{dn}$  que expresa una derivada discretizada entre niveles de energía adyacentes. En efecto, escribiendo una solución completamente general de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo  $\Psi(x, t) = \sum_n c_n \exp(-i \frac{E_n}{\hbar} t) \Psi(x)$  uno ve que la naturaleza cuasi-periódica de la evolución temporal se muestra, en promedio, cuando la diferencia de dos fases adyacentes crece en  $2\pi$ , esto es  $t^* = 2\pi \hbar \rho$ . Esta escala temporal es denominada tiempo de Heisenberg y luego de  $t^*$  la evolución temporal es dominada por las fluctuaciones cuánticas. Entonces el caos cuántico genuino es sólo posible dentro de una escala  $t < t^*$  donde fenómenos con una descripción semiclásica son posibles tales como la relajación, la sensibilidad exponencial, etc. Sin embargo, no todos los fenómenos caóticos pueden ser observados en mecánica cuántica hasta un tiempo  $t^*$ , existen muchos de corta vida. Por ejemplo la sensibilidad exponencial a las condiciones iniciales sólo puede ser simulada hasta el tiempo de Ehrenfest  $t_E = \frac{\ln(A_0/\hbar)}{\lambda}$  donde  $A_0$  es el volumen del espacio de fases explorado por una trayectoria clásica caótica y  $\lambda$  es el exponente de Lyapunov clásico midiendo la tasa de divergencia exponencial  $\delta x(t) \sim \exp(\lambda t) \delta x(0)$  de trayectorias cercanas clásicas. Hasta el tiempo  $t_E$ , paquetes de onda Gaussianos centrados en trayectorias clásicas pueden ser utilizados para una descripción semiclásica del movimiento cuántico [13]. El tiempo de Heisenberg  $t^*$  y el tiempo de Ehrenfest  $t_E$  son las dos escalas temporales características del caos cuántico. Otro aspecto importante de la dependencia temporal del caos cuántico es el eco de Loschmidt o decaimiento de la fidelidad [14]. La fidelidad ha sido propuesta por Peres [15] como una analogía natural en mecánica cuántica de los coeficientes de Lyapunov y de la sensibilidad a las condiciones iniciales, como

$$F(t) = |\langle \Psi_0(t) | \Psi_\varepsilon(t) \rangle|^2 = |\langle \Psi(0) | U_0(-t) U_\varepsilon(t) | \Psi(0) \rangle|^2 \quad (1.1)$$

donde  $|\Psi_0(t)\rangle = U_0(t)|\Psi(0)\rangle$ ,  $|\Psi_\varepsilon(t)\rangle = U_\varepsilon(t)|\Psi(0)\rangle$ ,  $\varepsilon$  es un parámetro positivo chico, y  $U_0(t)$ ,  $U_\varepsilon(t)$  son la evolución temporal no perturbada y perturbada respectivamente. La primera igualdad (fidelidad) de (1.1) puede ser interpretada como la probabilidad de que dos evoluciones cuánticas cercanas finalicen en el mismo estado mientras que la segunda igualdad (eco de

Loschmidt) es la probabilidad de que el estado evolucionado hacia adelante por la evolución perturbada compuesto con la reversión temporal por la evolución sin perturbar para la misma cantidad de tiempo, finalice en el mismo estado inicial. La fidelidad es una medida de la estabilidad del movimiento cuántico. El formalismo del eco de Loschmidt puede ser conectado íntimamente con la teoría de la decoherencia en sistemas cuánticos abiertos [14].

Así como es importante considerar los aspectos dinámicos del caos cuántico el dominio temporal, también se destacan los aspectos estacionarios en el dominio de la energía. Desde los '50s, ha sido reconocido por Wigner [16] y luego por Dyson [17], que muchas características de los niveles de energía de núcleos complejos o resonancias de vida media larga pueden ser descriptos por un modelo estadístico de matrices aleatorias. La idea de Wigner fue que para un sistema cuántico suficientemente complicado con muchos grados de libertad como un núcleo pesado, uno puede considerar que los elementos matriciales del Hamiltoniano en una base arbitraria están distribuidos al azar. Este modelo dió origen a la teoría de matrices aleatorias la cual predice que la distribución estadística de los espaciamientos entre niveles de energía adyacentes obedece distribuciones universales que sólo dependen de ciertas propiedades de simetría. A comienzos de los '80s comenzó a acumularse evidencia numérica dando cuenta de que, el espectro de sistemas muy simples pero no integrables y clásicamente caóticos, también exhibían fluctuaciones universales de niveles de energía descriptas por la teoría de matrices aleatorias, a través de los ensambles Gaussianos. Estos ensambles modelan el comportamiento caótico de sistemas cuánticos partiendo de la hipótesis de una determinada correlación entre los elementos matriciales  $H_{ij}$  del Hamiltoniano  $\hat{H}$  del sistema cuántico.

Las dos condiciones para la distribución de probabilidad  $P(H_{11}, \dots, H_{NN})$  de los elementos matriciales  $H_{ij}$  que definen los ensambles Gaussianos son [8, pags. 73-74]

$$P(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN}) = P(H_{11})P(H_{12}) \cdots P(H_{NN}) \quad (\text{condición de aleatoriedad}) \quad (1.2)$$

$$P(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN}) = P(H'_{11}, H'_{12}, \dots, H'_{NN}) \quad (\text{condición de invarianza}) \quad (1.3)$$

donde  $\hat{H}'$  es obtenido a partir de  $\hat{H}$  por medio de una transformación ortogonal, unitaria ó simpléctica de acuerdo a que el ensamble Gaussiano sea ortogonal (GOE), unitario (GUE) ó simpléctico (GSE), respectivamente. La ecuación (1.3) expresa la invarianza de  $P(H_{11}, \dots, H_{NN})$  frente a una transformación ortogonal, unitaria o simpléctica. La ecuación (1.2) nos dice que en el régimen completamente caótico de un sistema cuántico caótico los detalles de la interacción no son relevantes de tal manera que podemos reemplazar los elementos matriciales de su Hamiltoniano por una matriz cuyos elementos no están correlacionados entre sí. La observación de que “*correlaciones espectrales de corto alcance de sistemas cuánticos que son fuertemente caóticos en el límite clásico, obedecen leyes universales de fluctuación que están dadas por ensambles de matrices al azar sin parámetros libres*” ha sido reconocida como la conjetura de caos cuántico y a pesar de no haber sido rigurosamente probada, sigue siendo uno de los resultados más importantes y establecidos en el campo [18]. Uno de los modelos paradigmáticos estándares donde la conjetura de caos cuántico ha sido demostrada de forma más convincente es el billar cuántico. El problema de Schrödinger estacionario para una partícula de masa  $m$  moviéndose libremente dentro de un dominio planar (mesa de billar)  $\mathcal{D}$  y colisionando con las paredes está descripto por la bien conocida ecuación de Helmholtz para la función de onda de la partícula

$$\nabla^2 \Psi(x, y) + k^2 \Psi(x, y) = 0 \quad (1.4)$$

con condiciones de Dirichlet  $\Psi|_{\partial\mathcal{D}} = 0$ , siendo  $\partial\mathcal{D}$  la frontera de  $\mathcal{D}$ , y teniendo un conjunto discreto de soluciones  $\{k_n, \Psi_n : n = 1, 2, \dots\}$  con las autoenergías  $E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}$ . Se demuestra

numéricamente que, por ejemplo, para dominios circulares el sistema es integrable mientras que para dominios tipo cardioide (propuesto por Robnik [19]) el comportamiento es totalmente caótico.

Vemos entonces que los aspectos dinámicos y estacionarios del caos cuántico surgen en principio independientemente unos de los otros pero están íntimamente relacionados y caracterizan a todos los fenómenos del caos cuántico. Esta interrelación se verá con detalle en el Capítulo 3 donde se trata la granulosidad fundamental de la mecánica cuántica como una manera de compatibilizar el Principio de Correspondencia con el caos en el límite clásico.

### 1.3. Sistemas dinámicos, teoría de densidades y operadores de Markov

Los sistemas dinámicos son uno de los objetos más extendidamente estudiados en la Física así como en la Matemática [10, 11, 12, 20]. En el contexto de la teoría de la medida, un sistema dinámico se define como la cuaterna  $(X, \Sigma, \mu, \tau)$  donde  $X$  es un conjunto (típicamente el espacio de fases en mecánica clásica),  $\Sigma$  es una  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$ ,  $\mu$  es una medida finita sobre  $\Sigma$ , y el mapa  $\tau : X \rightarrow X$  es una transformación que preserva la medida. La interpretación física de esta definición es que un sistema dinámico establece una regla que describe la dependencia de un punto, representando el estado del sistema, en un espacio geométrico (el espacio de fases). Esta regla es determinista en el sentido de que, para un dado intervalo de tiempo, el estado del sistema sólo sigue una única trayectoria.

Desde sus orígenes en la mecánica Newtoniana hasta su posterior definición matemática, se ha desarrollado numerosas herramientas tanto teóricas como prácticas en el ámbito de los sistemas dinámicos. Algunas de ellas que cabe señalar por su relevancia son los mapas discretos, la teoría de bifurcaciones, nudos topológicos, etc. Éstas aproximaciones dan diferentes descripciones locales y globales de los sistemas dinámicos. Sin embargo, en la mayoría de los casos lo más importante resulta ser el comportamiento asintótico del sistema como ya mencionamos en el caos clásico. Más aún, un caso de gran interés es el estudio de la aproximación al equilibrio de un sistema dinámico donde podemos utilizar las herramientas de la teoría del caos clásico. Aquí es donde aparece naturalmente la descripción estadística del sistema, que matemáticamente nos lleva al concepto de función de distribución (definida como densidad, matemáticamente) de un sistema físico, indispensable cuando éste posee un alto número de grados de libertad.

Para poder utilizar estas herramientas es necesario establecer el formalismo de los sistemas dinámicos. Adoptaremos la definición de sistemas dinámicos dada en el contexto de la teoría de la medida [6, 7] ya que nos permitirá conectar cantidades escritas en términos de medidas por medio de valores medios de operadores cuánticos, como veremos más en el Capítulo 2. Cabe señalar que ésta definición de sistemas dinámicos es equivalente a la dada en el contexto de flujos de campos vectoriales y ecuaciones diferenciales [12, 20].

Comenzamos recordando los elementos matemáticos de teoría de los sistemas dinámicos en el marco de la teoría de la medida que utilizaremos a lo largo de ésta Tesis, basado en [6, 7]. Dado un conjunto  $X$ ,  $\Sigma$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$  si se satisface:

- (i)  $X \in \Sigma$
- (ii)  $A, B \in \Sigma \implies A \setminus B \in \Sigma$
- (iii)  $(B_i) \in \Sigma \implies \cup_i B_i \in \Sigma$  (donde  $i$  es un índice numerable)

Una función  $\mu$  es una *medida de probabilidad* sobre  $\Sigma$  si se cumple:

- (i)  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, 1]$  y  $\mu(X) = 1$
- (ii) Para toda familia numerable  $(B_i) \in \Sigma$  tal que  $B_j \cap B_k = \emptyset$  si  $j \neq k$  se tiene  $\mu(\cup_i B_i) = \sum_i \mu(B_i)$

Un *espacio medible* es toda terna de la forma  $(X, \Sigma, \mu)$ . Dado un espacio medible  $(X, \Sigma, \mu)$ , un *automorfismo*  $T$  que *preserva la medida*  $\mu$  es una función  $T : X \rightarrow X$ , que satisface

$$\forall A \in \Sigma : \mu(T^{-1}A) = \mu(A) \quad (1.5)$$

Entonces se dice que la familia de transformaciones  $\tau = \{T_t : X \rightarrow X\}_{t \in \mathbb{R}}$  que satisfacen (1.5) y las siguientes propiedades

- (i)  $T_0(x) = x$  para todo  $x \in X$ ,
- (ii)  $T_{t_1}(T_{t_2}(x)) = T_{t_1+t_2}(x)$  para todo  $x \in X$  y  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ,
- (iii) el mapa  $(t, x) \rightarrow T_t(x)$  de  $\mathbb{R} \times X$  en  $X$  es continuo,

es un grupo de automorfismos que preservan la medida y lo llamaremos una *ley dinámica*  $\tau$ . En el caso general, se requiere que  $\tau$  sólo sea un semigrupo, como es el caso de los sistemas semidinámicos. En sistemas dinámicos  $\tau$  es un grupo, y por lo tanto los sistemas dinámicos se consideran inversibles mientras que los sistemas semidinámicos podrían no serlo. Decimos que la cuaterna  $(X, \Sigma, \mu, \tau)$  es un *sistema dinámico*.

El concepto de densidad es una noción central. Dado un sistema dinámico  $(X, \Sigma, \mu, \tau)$  y  $D(X, \Sigma, \mu) = \{f \in L^1(X, \Sigma, \mu) : f \geq 0 ; \|f\| = 1\}$ , decimos que toda función  $f \in D(X, \Sigma, \mu, \tau)$  es una *densidad*.

Señalamos que en mecánica clásica lo usual es tomar  $X$  como el espacio de fases  $\Gamma$ ,  $\Sigma = \mathcal{P}(\Gamma)$  como el conjunto de partes del espacio de fases,  $\mu$  como la medida de Lebesgue y  $T_t$  como la evolución temporal dada por las ecuaciones de Hamilton.

Para un sistema clásico  $S$  con un estado inicial dado por una densidad sabemos que su evolución temporal está determinada por la ecuación de Liouville. Excepto en casos sencillos, sabemos que esta ecuación no tiene solución exacta y, por lo tanto, nos vemos obligados a utilizar otra estrategia para estudiar la evolución del sistema. En este sentido, los operadores de Markov son muy útiles debido a que permiten deducir propiedades globales asintóticas de las densidades. Bajo ciertas hipótesis sobre los operadores de Markov se pueden obtener condiciones para la existencia de una densidad de equilibrio  $f_*$ , que corresponde físicamente a la aproximación al equilibrio del sistema. La aproximación al equilibrio en el límite asintótico por medio de los operadores de Markov constituirá el vínculo entre límite clásico y la versión cuántica del teorema de descomposición espectral para sistemas dinámicos, que será estudiado en el Capítulo 2. Presentamos una breve revisión de las propiedades básicas de los operadores de Markov necesarias para el desarrollo de los resultados de esta Tesis.

Dado un espacio medible  $(X, \Sigma, \mu)$  un operador lineal  $P : L^1 \rightarrow L^1$  se llama un *operador de Markov* si satisface para toda  $f \in L^1$ ,  $f \geq 0$

- (i)  $Pf \geq 0$
- (ii)  $\|Pf\| = \|f\|$

De (ii) se sigue que  $P$  es *monótono*, esto es, si  $f, g \in L^1$  con  $f \geq g$  entonces  $Pf \geq Pg$ .

Sean  $(X, \Sigma, \mu)$  una  $\sigma$ -álgebra y  $f \in L^1$ . Si  $P$  es un operador de Markov entonces

- (i)  $\|Pf\| \leq \|f\|$  (*contractividad*)
- (ii)  $|Pf(x)| \leq P|f(x)| \quad \forall x \in X$

La noción de *punto fijo* de un operador de Markov es fundamental para establecer la aproximación al equilibrio de una densidad.

Sea  $P$  un operador de Markov. Si  $f \in L^1$  con  $Pf = f$  entonces  $f$  se llama un *punto fijo* de  $P$ . De la misma forma, toda  $f \in D(X, \Sigma, \mu)$  que cumple  $Pf = f$  se llama *densidad estacionaria* de  $P$ .

Una familia de automorfismos  $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  representando la evolución temporal de cualquier sistema dinámico permite definir una clase especial de operadores de Markov llamada *operadores de Frobenius-Perron*.

Dado un espacio medible  $(X, \Sigma, \mu)$  y  $T : X \rightarrow X$  un *automorfismo no singular* (o sea,  $\mu(T^{-1}(A)) = 0$  para todo  $A \in \Sigma$  tal que  $\mu(A) = 0$ ) el único operador  $P : L^1 \rightarrow L^1$  definido para todo  $A \in \Sigma$  por la ecuación

$$\int_A Pf(x)\mu(x)dx = \int_{T^{-1}(A)} f(x)\mu(x)dx \quad (1.6)$$

se llama *operador de Frobenius-Perron* correspondiente a  $T$ .

De (1.6) vemos que el operador de Frobenius-Perron es lineal y posee las siguientes propiedades.

Sea  $T$  un automorfismo. Si  $P$  y  $P_n$  son los operadores de Frobenius-Perron correspondientes a  $T$  y  $T^n$  respectivamente, entonces se tiene

- (i)  $\int_X Pf(x)\mu(dx) = \int_X f(x)\mu(dx)$
- (ii)  $P_n = P^n$  siendo  $P^n = \underbrace{P \circ \dots \circ P}_{n \text{ veces}}$

El adjunto del operador de Frobenius-Perron cumple un rol importante en la descripción de la evolución de las funciones definidas en el espacio de fases y está dado por la siguiente definición.

Dado un espacio medible  $(X, \Sigma, \mu)$  y  $T : X \rightarrow X$  un *automorfismo no singular*, el único operador  $U : L^\infty \rightarrow L^\infty$  definido para todo  $f \in L^\infty$  por

$$Uf(x) = f(T(x)) \quad (1.7)$$

se llama *operador de Koopman* correspondiente a  $T$ . De (1.7) vemos que el operador de Koopman es lineal y satisface las siguientes propiedades.

Sea  $T$  un automorfismo. Si  $U$  y  $U_n$  son los operadores de Koopman de  $T$  y  $T^n$  respectivamente, entonces para todo  $f \in L^1, g \in L^\infty, n \in \mathbb{N}_0$  se tiene

- (i)  $\|Uf\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$
- (ii)  $U_n = U^n$  siendo  $U^n = \underbrace{U \circ \dots \circ U}_{n \text{ veces}}$

$$(iii) \langle P_n f, g \rangle = \langle f, U_n g \rangle$$

donde  $\langle f, g \rangle = \int_X f(x)g(x)\mu(dx)$  para todo  $f \in L^1, g \in L^\infty$ .

Con éstas definiciones podemos establecer los niveles de la *jerarquía ergódica* en términos de densidades y operadores de Markov. Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio medible normalizado (es decir,  $\mu(X) = 1$ ),  $T : X \rightarrow X$  un automorfismo y  $P, U$  los operadores de Frobenius-Perron y de Koopman de  $T$ . Entonces, para todo par  $f \in L^1, g \in L^\infty$  se tiene



- (i)  $T$  es *ergódico*  $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \langle P^k f, g \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \langle f, U_k g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle$
- (ii)  $T$  es *mixing*  $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \langle P^n f, g \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, U_n g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle$
- (iii)  $T$  es *exacto*  $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|P^n f - \langle f, 1 \rangle\| = 0$

A partir de estas definiciones se sigue que

$$\text{exacto} \longrightarrow \text{mixing} \longrightarrow \text{ergódico} \quad (1.8)$$

Cabe señalar que estos niveles son sustancialmente diferentes entre sí. Por último, introducimos la noción de operador constrictivo que permite asegurar la existencia de una densidad de equilibrio. Un operador de Markov  $P$  se llama *constrictivo* si existe un conjunto precompacto  $\mathcal{F} \subseteq L^1$  tal que para todo  $f \in D(X, \Sigma, \mu)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(P^n f, \mathcal{F}) = 0 \quad (1.9)$$

siendo  $d(P^n f, \mathcal{F}) = \inf_{g \in \mathcal{F}} \|P^n f - g\|$  la distancia entre el conjunto  $\mathcal{F}$  y  $P^n f$ .

De esta definición se puede demostrar que todo operador de Markov constrictivo posee una densidad estacionaria [7, pag. 90].

**Teorema 1.1** (*Existencia de densidades de equilibrio*) Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio medible normalizado, y  $P : L^1 \rightarrow L^1$  un operador de Markov constrictivo. Entonces  $P$  posee una densidad estacionaria, esto es, existe una densidad  $f_* \in L^1$  tal que  $P f_* = f_*$ .

La existencia de densidades de equilibrio puede ser relevante para la obtención de posibles marcos teóricos del caos cuántico. Por ejemplo, en el billar cuántico la afirmación de ergodicidad cuántica es equivalente a la afirmación de equidistribución de la densidad de probabilidad de los autoestados.

## 1.4. Formalismo cuántico

Dado un sistema cuántico con  $N + 1$  grados de libertad provisto de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  denotaremos el álgebra cuántica de observables por  $\mathcal{A}$ , definido matemáticamente como el anillo de operadores (con la suma y producto usual)  $\hat{A} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$  tales que  $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$  para todo  $\hat{A} \in \mathcal{A}$  donde  $\hat{A}^\dagger$  es el conjugado hermítico de  $\hat{A}$ .

Los estados cuánticos están representados por el cono positivo de matrices densidad que están en el dual de  $\mathcal{A}$ , denotado por  $\mathcal{A}'$ , esto es  $\mathcal{N} = \{\hat{\rho} \in \mathcal{A}' : \hat{\rho}(\hat{I}) = 1, \hat{\rho}(\hat{A}\hat{A}^\dagger) \geq 0 \forall \hat{A} \in \mathcal{A}\}$  donde  $\hat{I}$  es el operador identidad en  $\mathcal{A}$ .

La acción  $\hat{\rho}(\hat{A})$  de un estado  $\hat{\rho}$  sobre un observable  $\hat{A}$  es el *valor medio* de  $\hat{A}$  en  $\hat{\rho}$  que está dado por  $\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{A})$  siendo  $\text{Tr}(\dots)$  la operación de traza sobre un operador. A lo largo de esta Tesis Doctoral también usaremos la notación usual  $\langle \hat{A} \rangle_{\hat{\rho}}$  para los valores medios.

Si  $\hat{A} \in \mathcal{A}$  entonces la *transformada de Wigner* de  $\hat{A}$  es la función de distribución definida sobre  $\mathbb{R}^{2(N+1)}$  dada por [21]

$$W_{\hat{A}}(q, p) = \frac{1}{h^{N+1}} \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \langle q + \Delta | \hat{A} | q - \Delta \rangle e^{2i\frac{p\Delta}{h}} d\Delta \quad (1.10)$$

donde  $q, p, \Delta \in \mathbb{R}^{N+1}$ .

El conjunto de todas las distribuciones  $\mathcal{A}_q = \{W_{\hat{A}}(q, p) : \hat{A} \in \mathcal{A}\}$  se llama *álgebra cuasi-clásica*. Dado un estado puro  $\hat{\rho}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ , su transformada de Wigner  $W_{\hat{\rho}}$  puede ser negativa,

con lo cual  $\mathcal{A}_q$  no es un álgebra clásica. Por esta razón,  $\rho(q, p) = W_{\hat{\rho}}(q, p)$  se dice que es una distribución de cuasiprobabilidad siendo  $\hat{\rho} \in \mathcal{N}$  cualquier matriz densidad del sistema cuántico. Dado  $\hat{A} \in \mathcal{A}$  se define el *símbolo de Weyl* de  $\hat{A}$  como [21]

$$\widetilde{W}_{\hat{A}}(q, p) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \langle q + \Delta | \hat{A} | q - \Delta \rangle e^{2i\frac{p\Delta}{\hbar}} d\Delta \quad (1.11)$$

Dados dos operadores  $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{A}$  podemos introducir el *producto estrella* [22]

$$\widetilde{W}_{\hat{A}}(q, p) * \widetilde{W}_{\hat{B}}(q, p) = \widetilde{W}_{\hat{A}}(q, p) \exp\left(-\frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_a \omega^{ab} \overrightarrow{\partial}_b\right) \widetilde{W}_{\hat{B}}(q, p) = \widetilde{W}_{\hat{A}\hat{B}}(q, p) \quad (1.12)$$

siendo  $\omega^{ab}$  el tensor métrico de  $\mathbb{R}^{(N+1)}$ . Del desarrollo en serie de la exponencial se deduce de (1.12) que

$$\widetilde{W}_{\hat{A}\hat{B}}(q, p) = \widetilde{W}_{\hat{A}}(q, p) \widetilde{W}_{\hat{B}}(q, p) + \mathcal{O}(\hbar) \quad (1.13)$$

El contenido físico del álgebra cuasiclásica  $\mathcal{A}_q$  está dado por el *corchete de Moyal* definido como

$$\{\widetilde{W}_{\hat{A}}, \widetilde{W}_{\hat{B}}\}_{MB} = \frac{1}{i\hbar} (\widetilde{W}_{\hat{A}} * \widetilde{W}_{\hat{B}} - \widetilde{W}_{\hat{B}} * \widetilde{W}_{\hat{A}})$$

A su vez, de (1.10), (1.11) y (1.14) se deduce que el corchete de Moyal es la transformada de Wigner del conmutador cuántico, esto es

$$\{\widetilde{W}_{\hat{A}}, \widetilde{W}_{\hat{B}}\}_{MB} = \frac{1}{i\hbar} W_{[\hat{A}, \hat{B}]}$$

La relación entre las álgebras clásica  $\mathcal{A}_{cl}$ , compuesta por todas las funciones  $f : \mathbb{R}^{2(N+1)} \mapsto \mathbb{R}$  con la suma y producto usual de funciones, y la cuasiclásica  $\mathcal{A}_q$  está determinada por

$$\{f, g\}_{MB} = \{f, g\}_{PB} + \mathcal{O}(\hbar^2)$$

siendo  $f, g : \mathbb{R}^{2(N+1)} \mapsto \mathbb{R}$  dos funciones cualesquiera donde

$$\{f, g\}_{PB} = \sum_{i=1}^{N+1} \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

es el *corchete de Poisson*.

La transformada de Wigner y su inversa definen un isomorfismo entre el álgebra cuántica  $\mathcal{A}$  y el álgebra cuasiclásica  $\mathcal{A}_q$

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_q \quad , \quad \mathcal{A}_q \longrightarrow \mathcal{A}$$

El mapa así definido se llama *mapa de Weyl–Wigner–Moyal*. En el límite clásico se tiene que  $\mathcal{A}_q$  tiende a  $\mathcal{A}_{cl}$  debido a que cuando  $\hbar \rightarrow 0$  el producto estrella tiende al producto usual entre funciones (como puede verse de (1.12)) y el corchete de Moyal tiende al de Poisson, siendo  $\hbar$  el parámetro de deformación de la cuantización.

Dado el producto escalar  $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^{2(N+1)}} f(q, p) g(q, p) dq dp$  entre dos funciones  $f, g : \mathbb{R}^{2(N+1)} \mapsto \mathbb{R}$  una propiedad relevante de la transformada de Wigner es [21]

$$Tr(\hat{A}\hat{B}) = \langle W_{\hat{A}}, \widetilde{W}_{\hat{B}} \rangle \quad (1.14)$$

siendo  $\hat{A}, \hat{B}$  dos operadores cualesquiera del álgebra cuántica. La ecuación (1.14) nos dice que el valor medio de un observable  $\hat{O}$  en el estado  $\hat{\rho}$  puede ser calculado en el álgebra cuántica  $\mathcal{A}$  como la traza de  $\hat{\rho}\hat{O}$  ó bien en la cuasiclásica  $\mathcal{A}_q$  como la integral sobre  $\mathbb{R}^{2(N+1)}$  del producto  $W_{\hat{\rho}}(q, p)\widetilde{W}_{\hat{O}}(q, p)$ .

Si  $I(q, p)$  es la función identidad de  $\mathbb{R}^{2(N+1)}$ , de la definición del símbolo de Weyl (1.11) se deduce que  $\widetilde{W}_{\hat{I}}(q, p) = I(q, p)$  y por lo tanto, dado un estado  $\hat{\rho}$ , poniendo  $\hat{A} = \hat{\rho}$  y  $\hat{B} = \hat{I}$  en (1.14) se tiene

$$Tr(\hat{\rho}\hat{I}) = \langle W_{\hat{\rho}}, \widetilde{W}_{\hat{I}} \rangle = 1$$

que no es otra cosa que la normalización de  $\hat{\rho}$ .

### 1.4.1. Límite clásico y límite débil

El límite clásico es el estudio de los sistemas cuánticos cuando la constante de Planck puede despreciarse frente a otras magnitudes relevantes, en cuyo caso el comportamiento del sistema puede ser predicho por las leyes de la mecánica clásica. Con el objetivo de compatibilizar las predicciones de la mecánica cuántica a nivel microscópico con las de la mecánica clásica a nivel macroscópico, en un trabajo fundacional de 1920, Niels Bohr introdujo el *Principio de Correspondencia* [23]: “el comportamiento de los sistemas descritos por la mecánica cuántica reproduce el predicho por la física clásica en el límite de números cuánticos grandes”. En otras palabras, el Principio de Correspondencia establece la transición de las magnitudes cuánticas a las de sus análogos clásicos a medida que los valores de la constante de Planck se aproximan a cero.

Existen varios formalismos para estudiar el límite clásico [24, 25, 26, 27, 28]. En particular, el límite débil es uno de ellos y es el que utilizaremos a lo largo de esta Tesis que, entre otras cosas, permite tratar a los observables como los objetos centrales y a los estados como funcionales de éstos [28, 29, 30]. Una de sus principales características es que establece un tipo específico de correlación que da una imagen intuitiva del proceso de relajación de un sistema cuántico, es decir de su aproximación al equilibrio en el límite asintótico. La definición formal del límite débil es la siguiente.

Dado un sistema cuántico, si  $\hat{\rho} \in \mathcal{N}$  es un estado inicial y  $\hat{\rho}(t)$  el estado al tiempo  $t$ , decimos que  $\hat{\rho}_* \in \mathcal{N}$  es el *límite débil* de  $\hat{\rho}$  si se verifica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t)} = \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_*} \quad (1.15)$$

para todo observable  $\hat{O} \in \mathcal{A}$ . La ecuación (1.15) expresa que  $\hat{\rho}_*$  tiene el significado de una especie de promedio de “grano grueso” de  $\hat{\rho}$  sobre el conjunto de observables  $\mathcal{A}$  donde el valor medio  $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t)}$  tiende al valor constante  $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_*}$  para tiempos grandes. Considerando que el valor medio  $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t)}$  contiene información sobre las correlaciones cuánticas de  $\hat{\rho}$  al tiempo  $t$ , entonces es razonable asumir que  $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_*}$  representa las correlaciones de  $\hat{\rho}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , es decir en el límite asintótico. En este sentido decimos que el límite débil  $\hat{\rho}_*$  es, un “estado de equilibrio”, dado que las correlaciones de  $\hat{\rho}$  están contenidas en  $\hat{\rho}_*$  en el límite asintótico.

### 1.4.2. Formulación del límite clásico en términos del límite débil

El contenido del límite débil como aproximación al límite clásico se pone en evidencia al escribir explícitamente el valor medio de un observable  $\hat{O}$  en un estado  $\hat{\rho}(t)$  a tiempo  $t$ .

Sea  $S$  un sistema cuántico con un Hamiltoniano hermítico  $\hat{H}$ . Sea  $\{|a\rangle\}$  su base de autovalores, llamados *autoestados*. Los autovalores  $\{E_a\}$  constituyen el *espectro cuántico* y son las energías del sistema, que en este caso son reales en virtud de la hermiticidad de  $\hat{H}$ . Dependiendo del sistema cuántico que se trate, el espectro cuántico puede llegar a ser discreto, continuo, complejo o una combinación de éstos. Se tiene el conjunto de relaciones

$$\begin{aligned}\hat{H}|a\rangle &= E_a|a\rangle \quad , \quad \langle a|\hat{H} = \langle a|E_a \\ \langle a|b\rangle &= \delta_{ab} \quad (\text{ortonormalidad}) \\ \hat{I} &= \sum_a |a\rangle\langle a| \quad (\text{completitud})\end{aligned}\tag{1.16}$$

que caracterizan completamente a la base de autoestados y donde estamos asumiendo que no hay degeneración, es decir que todos los autovalores son distintos. Cabe señalar que de (1.16) se deduce que los estados  $\hat{\rho}_a = |a\rangle\langle a|$  son puros, es decir que  $\hat{\rho}_a^2 = \hat{\rho}_a$  para todo  $a$ . Podemos expandir el estado  $\hat{\rho}$  en la base  $\{|a\rangle\}$

$$\hat{\rho} = \sum_a \sum_b \rho_{ab} |a\rangle\langle b| \quad \text{con} \quad \rho_{ab} = \langle a|\hat{\rho}|b\rangle\tag{1.17}$$

El estado  $\hat{\rho}$  al tiempo  $t$  está dado por el operador de evolución  $\hat{U}(t) = e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}$ . Esto es,

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t)\hat{\rho}\hat{U}(t)^\dagger = e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}\hat{\rho}e^{i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}\tag{1.18}$$

De (1.16), (1.17) y (1.18) se tiene

$$\hat{\rho}(t) = \sum_a \sum_b \rho_{ab} e^{-i\frac{(E_a - E_b)t}{\hbar}} |a\rangle\langle b|\tag{1.19}$$

De igual forma que  $\hat{\rho}$ , dado un observable  $\hat{O}$  podemos expandirlo en la base  $\{|a\rangle\}$

$$\hat{O} = \sum_a \sum_b O_{ab} |a\rangle\langle b| \quad \text{con} \quad O_{ab} = \langle a|\hat{O}|b\rangle\tag{1.20}$$

Haciendo el producto  $\hat{\rho}\hat{O}$ , de (1.19) y (1.20) obtenemos

$$\hat{\rho}(t)\hat{O} = \sum_a \sum_b \left( \sum_c \rho_{ac} e^{-i\frac{(E_a - E_c)t}{\hbar}} O_{cb} \right) |a\rangle\langle b|\tag{1.21}$$

Tomando la traza de  $\hat{\rho}(t)\hat{O}$  y usando (1.21) se obtiene el valor medio de  $\hat{O}$  en el estado  $\hat{\rho}$  al tiempo  $t$

$$\begin{aligned}\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t)} &= \sum_D + \sum_{ND}(t) \\ \sum_D &= \sum_a \rho_{aa} O_{aa} \\ \sum_{ND}(t) &= \sum_{a \neq b} \sum_{b \neq a} \rho_{ab} O_{ba} e^{-i\frac{(E_a - E_b)t}{\hbar}}\end{aligned}\tag{1.22}$$

La ecuación (1.22) expresa que el valor medio  $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t)}$  posee dos tipos de términos, los diagonales denotados por  $\sum_D$  que son constantes, y los no diagonales denotados por  $\sum_{ND}(t)$  cuya dependencia temporal está en función de los factores oscilatorios  $e^{-i\frac{(E_a-E_b)t}{\hbar}}$ . En otras palabras,  $\sum_{ND}(t)$  expresa las interferencias cuánticas entre los estados de la base  $\{|a\rangle\}$ , o sea es la parte puramente cuántica de  $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t)}$ .

Además, dado que los coeficientes  $\rho_{aa} = \langle a|\hat{\rho}|a\rangle$  son no negativos y suman uno ya que  $\sum_a \rho_{aa} = \text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$ , se sigue que  $\sum_D$  tiene la estructura de un valor medio clásico. Más aún, definiendo el estado  $\hat{\rho}_* = \sum_a \rho_{aa}|a\rangle\langle a|$ , que es una mezcla de los estados puros  $|a\rangle\langle a|$ , podemos reescribir  $\sum_D$  como

$$\sum_D = \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_*} \quad (1.23)$$

De (1.22) y (1.23) resulta

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t)} &= \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_*} + \sum_{ND}(t) \\ \hat{\rho}_* &= \sum_a \rho_{aa}|a\rangle\langle a| \\ \sum_{ND}(t) &= \sum_{a \neq b} \sum_{b \neq a} \rho_{ab} O_{ba} e^{-i\frac{(E_a-E_b)t}{\hbar}} \end{aligned} \quad (1.24)$$

La ecuación (1.24) representa la base del formalismo de límite clásico en el lenguaje del límite débil. De la definición (1.15) y (1.24) se concluye que el límite débil del estado  $\hat{\rho}$  existe sí y sólo si la parte no diagonal  $\sum_{ND}(t)$  puede hacerse arbitrariamente pequeña en el límite asintótico, es decir la cancelación de las interferencias cuánticas, que es una forma de establecer el límite clásico a través de los valores medios cuánticos. Dado que el espectro de la mayoría de los sistemas cuánticos de interés es discreto, una forma de llevar a cabo ésto es imponiendo que  $\hbar$  sea mucho más pequeña que la diferencia entre niveles de energía adyacentes. De esta manera se puede aproximar el espectro por un continuo y la sumatoria  $\sum_{ND}(t)$  puede reescribirse en términos de integrales

$$\sum_{ND}(t) \approx \iint \rho(a,b) O(b,a) e^{-i\frac{(E_a-E_b)t}{\hbar}} da db \quad \text{si} \quad \forall E_a, E_b : \frac{|E_a-E_b|}{\hbar} \ll 1 \quad (1.25)$$

Asumiendo ciertas condiciones de regularidad sobre la función  $\rho(a,b)O(b,a)$  (por ej. que sea un elemento del espacio  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$ ) podemos aplicar el lema de Riemann–Lebesgue. Luego, tomando el límite asintótico en (1.25) resulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{ND}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \iint \rho(a,b) O(b,a) e^{-i\frac{(E_a-E_b)t}{\hbar}} da db = 0 \quad (1.26)$$

Aplicaremos el formalismo del límite débil para estudiar del comportamiento asintótico de los sistemas cuánticos caóticos, que se tratará en los siguientes capítulos. Primeramente, debemos señalar la relación entre el comportamiento caótico de un sistema de acuerdo al número de constantes de movimiento. Dado un sistema cuántico  $S$  se define su límite clásico, que denotamos por  $S_{cl}$ , como el análogo clásico de  $S$  en el límite  $\hbar \rightarrow 0$ . En el caso general  $S_{cl}$  podría tener más grados de libertad que constantes de movimiento. En cualquier caso, el teorema de Caratheodory establece que, un sistema clásico descrito por un Hamiltoniano  $H(q,p)$  con  $N+1$  grados de libertad posee  $N+1$  constantes “locales” de movimiento.

Más precisamente, un sistema clásico, en particular  $S_{cl}$ , posee  $N + 1$  constantes de movimiento locales si su Hamiltoniano es una constante definida sobre el espacio de fases y si existen  $N$  constantes de movimiento  $\{O_i(q, p)\}_{i=1, \dots, N}$  satisfaciendo

$$\{H(q, p), O_i(q, p)\}_{PB} = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial O_i}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial O_i}{\partial p_j} \right) \quad (1.27)$$

sobre un dominio maximal  $\mathcal{D}_\phi \subseteq \Gamma$  alrededor de todo punto  $\phi = (q, p) \in \Gamma$ . En particular, cuando todos los dominios  $\mathcal{D}_\phi$  son iguales a  $\Gamma$ , el límite clásico  $S_{cl}$  se dice *integrable*. En otro caso,  $S_{cl}$  se dice *no integrable*.

Ahora recordamos las etapas para recuperar la mecánica clásica en  $S_{cl}$  a partir del límite débil aplicado sobre  $S$  [31].

- (i) En la primera etapa la parte no diagonal de los valores medios cuánticos  $\sum_{ND}(t)$ , que es la que contiene las correlaciones cuánticas de  $\hat{\rho}(t)$ , permanece no nula a lo largo de la evolución cuántica. Mientras tanto, la parte diagonal  $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_*}$  admite una interpretación por ignorancia, o sea posee una estructura de valor medio estadístico clásico.
- (ii) En la segunda etapa se aplica el límite débil para obtener el límite clásico dentro de los intervalos de las escalas temporales del caos cuántico  $t \lesssim \tau = \tau(\hbar)$  con el objetivo de compatibilizar el Principio de Correspondencia y el caos, como veremos en el Capítulo 3. El límite débil de  $\hat{\rho}(t)$  es obtenido de la descomposición  $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t)} = \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_*} + \sum(t)$  donde  $\sum(t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ . La densidad de equilibrio es obtenida a partir de  $\rho_*(q, p) = W_{\hat{\rho}_*}(q, p)$  que es la parte independiente del tiempo de la función de Wigner  $\rho(q, p, t) = W_{\hat{\rho}(t)}(q, p) = \rho_*(q, p) + f(q, p, t)$  donde  $f(q, p, t)$  manifiesta los efectos cuánticos en el espacio de fases.
- (iii) En la tercera y última etapa, la densidad de equilibrio  $\rho_*(q, p)$  se expresa como una descomposición de trayectorias clásicas  $\tau(q, p) = \tau_0 + \omega t$ ,  $\theta_i(q, p) = \theta_{i0} + p_i t$  (donde  $i$  denota los dominios maximales  $\mathcal{D}_{\phi_i}$ ) sobre las hipersuperficies  $H(q, p) = \omega$ ,  $P_{iI}(q, p) = p_{iI}$  con  $I = 1, \dots, N$ . Por lo tanto, se obtienen las trayectorias clásicas y la mecánica clásica es recuperada a partir de la mecánica cuántica.

Podemos ilustrar los pasos (i), (ii), (iii) en el siguiente esquema

mecánica cuántica $\hbar \neq 0, t < \infty$ $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t)} = \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_*} + \sum_{ND}(t)$ donde $\sum_{ND}(t)$ contiene <i>las correlaciones cuánticas</i>	$\mapsto$ mecánica clásica estadística $\hbar \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, t \lesssim \tau = \tau(\hbar)$ $\hat{\rho}(t) \longrightarrow \hat{\rho}_*$ (límite débil) $\rho_*(q, p) = W_{\hat{\rho}_*}(q, p)$	$\mapsto$ mecánica clásica $\rho_*(q, p)$ está descompuesta <i>en trayectorias clásicas</i> $H(q, p) = \omega, P_{iI}(q, p) = p_i$
---	---	--

(1.28)

Estos pasos proveen un método para estudiar el límite clásico en fenómenos como la relajación estadística y la decoherencia en sistemas cerrados y abiertos [28, 29, 30], y en el caos cuántico [31, 32, 33, 34, 35, 36].

## 1.5. Aproximación geometrodinámica informacional al caos

Hemos visto que el estudio del caos cuántico involucra el proceso del límite clásico, buscando a que comportamiento caótico tienden las magnitudes cuánticas, valores medios, distribuciones de Wigner, etc. a medida que la constante de Planck se aproxima a cero. Asimismo, el comportamiento caótico se identifica por medio de caracterizaciones asintóticas como las mencionadas anteriormente, como por ejemplo la jerarquía ergódica y los exponentes de Lyapunov. Es decir que a primera vista, el caos cuántico involucra una doble tarea tanto en el límite clásico de cantidades cuánticas como en la utilización de indicadores asintóticos de caos. En ese sentido, lo ideal sería encontrar un único formalismo que diese cuenta de ambos límites, tanto el clásico como el asintótico.

Una aproximación que reúne estas características es considerar que el conocimiento de nuestro sistema está dado por una distribución de probabilidad de las variables de interés del sistema (que definen el *microespacio*) junto con los valores medios y correlaciones entre ellas (los cuales definen el *macroespacio*). Luego, la dinámica del sistema se deduce a partir de la geometría del macroespacio utilizando ecuaciones geodésicas, escalares geométricos, etc. La idea clave es que las correlaciones entre elementos del macroespacio permiten codificar el límite clásico, mientras que el límite asintótico está representado por la evolución de toda magnitud geométrica a lo largo de las geodésicas, como se explicará con más detalle en los Capítulos 4 y 5.

Este es precisamente el formalismo de la aproximación geometrodinámica al caos (IGAC) [37, 38, 39, 40] (del inglés, Information Geometrodynamical Approach to Chaos) que utilizaremos en los Capítulos 4 y 5 de esta Tesis como caracterización geométrica del caos cuántico y complementaria a las dadas en los Capítulos 2 y 3.

IGAC constituye una aplicación del formalismo denominado Dinámica Entrópica (Entropic Dynamics, en inglés) el cual resulta de la combinación de inferencia inductiva (métodos de máxima entropía *MaxEnt*) con geometría de información (IG) [41]. ED es una aproximación construida sobre variedades estadísticas  $\mathcal{M}_S$  cuyos elementos son distribuciones de probabilidad  $\{P(X|\Theta)\}$  que están uno a uno con un conjunto  $\{\Theta\}$  de variables macroscópicas que parametrizan convenientemente los puntos sobre  $\mathcal{M}_S$ . El conjunto  $\{\Theta\}$  se denomina el espacio de parametrización y se denota  $\mathcal{D}_\Theta$ . Una vez definidos estos objetos, en este caso la variedad estadística  $\mathcal{M}_S$  y las variables macroscópicas  $\{\Theta\}$ , los pasos para la construcción de una forma de dinámica entrópica son los siguientes:

- Se selecciona un conjunto de microestados  $\{x_k\}$  con  $k = 1, \dots, l$  que caracteriza al sistema, denominado microespacio  $l$ -dimensional. Los microestados podrían ser interactuantes entre sí o no, o bien podrían no contener información relevante para la dinámica microscópica, lo importante es que a partir de éstos se pueden inferir predicciones “macroscópicas” del sistema.
- Una vez definido el microespacio se selecciona el macroespacio que contiene la información relevante de los microestados. El macroespacio está definido entonces por  $2l$  restricciones de información, por ejemplo los valores de expectación  $\mu_k$  y varianzas  $\sigma_k$  de las variables  $\{x_k\}$ , y además de estas restricciones los microestados  $x_k$  deben satisfacer la condición de normalización. Por ejemplo, podríamos asumir que los microestados  $x_k$  están distribuidos de manera independiente  $p_k(x_k|\mu_k, \sigma_k)$ .
- Una vez que los microestados  $x_k$  y las restricciones de información  $\mu_k, \sigma_k$  han sido seleccionados, y para el caso de variables independientes, se definen las distribuciones de

probabilidad  $p(X|\Theta) = \prod_{k=1}^l p_k(x_k|\mu_k, \sigma_k)$  que codifican la información relevante disponible del sistema siendo  $X = (x_1, \dots, x_l)$  un vector microscópico  $l$ -dimensional y  $\Theta = (\mu_1, \dots, \mu_l, \sigma_1, \dots, \sigma_l)$  un vector macroscópico  $2l$ -dimensional. Es decir, los conjuntos  $\{X\}$  y  $\{\Theta\}$  definen el microespacio y el macroespacio del sistema respectivamente. La variedad estadística se define como el conjunto  $\mathcal{M}_S = \{p(X|\Theta) : p(X|\Theta) = \prod_{k=1}^l p_k(x_k|\mu_k, \sigma_k)\}$ .

- Luego se dota a  $\mathcal{M}_S$  de una estructura métrica, más precisamente la dada por la métrica de Fisher-Rao [41]

$$g_{\mu\nu}(\Theta) = \int dX p(X|\Theta) \partial_\mu \log p(X|\Theta) \partial_\nu \log p(X|\Theta) \quad (1.29)$$

donde  $\mu, \nu = 1, \dots, 2l$  y  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial \Theta^\mu}$ . Esta métrica define una manera de distinguir macroestados de  $\mathcal{M}_S$ .

Cabe mencionar que ED puede ser derivado del principio de mínima acción estándar (del tipo Jacobi). La ecuaciones geodésicas de las macrovariables están dadas por las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas de segundo orden y no lineales

$$\frac{d^2 \Theta^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{d\Theta^\mu}{d\tau} \frac{d\Theta^\nu}{d\tau} = 0 \quad (1.30)$$

siendo  $\tau$  un coeficiente que parametriza las curvas geodésicas. Estas ecuaciones describen una dinámica reversible cuya solución es la trayectoria entre un macroestado inicial  $\Theta^{(inicial)}$  y un macroestado final  $\Theta^{(final)}$ . Dada la métrica informacional de Fisher-Rao, la estrategia principal es aplicar los métodos estándares de la geometría diferencial Riemanniana para estudiar la estructura geométrico-informacional de la variedad  $\mathcal{M}_S$  subyacente a la dinámica entrópica. Entre éstos se incluyen los coeficientes de la conexión  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ , el tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ , el tensor de Riemann  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ , curvaturas seccionales  $\mathcal{K}_{\mathcal{M}_S}$ , escalar de curvatura  $\mathcal{R}_{\mathcal{M}_S}$ , tensor de Weyl  $W_{\mu\nu\rho\sigma}$ , vectores de Killing  $\xi^\mu$  y vectores de Jacobi  $J^\mu$ . La razón de porque estas cantidades geométricas permiten caracterizar al caos es la siguiente. El caos es identificado por la ocurrencia de dos fenómenos: 1) fuerte dependencia sobre las condiciones iniciales y divergencia exponencial de la intensidad del vector de Jacobi, es decir, el estiramiento de las trayectorias dinámicas; y 2) compacidad de la variedad del espacio de configuración, es decir, el plegamiento de las trayectorias dinámicas. La negatividad del escalar de Ricci  $\mathcal{R}_{\mathcal{M}_S}$  es una condición suficiente (pero no necesaria) para la inestabilidad local del flujo geodésico, constituyendo un criterio fuerte de inestabilidad local. Y debido a que el escalar de Ricci es la suma de todas las curvaturas seccionales  $\mathcal{K}_{\mathcal{M}_S}$ , entonces los signos de  $\mathcal{K}_{\mathcal{M}_S}$  son de importancia básica para la caracterización propia del caos. Otra herramienta poderosa para estudiar la estabilidad e inestabilidad de un flujo geodésico es la ecuación de Jacobi-Levi-Civita (JLC), la cual describe de qué forma las geodésicas cercanas se dispersan y relaciona la estabilidad e inestabilidad de un flujo geodésico con las propiedades de curvatura de la variedad.

Finalmente, se puede ver que el régimen asintótico de evolución difusiva describiendo un crecimiento exponencial medio de los elementos de volumen sobre  $\mathcal{M}_S$  proporciona otro indicador de caoticidad dinámica.



## Capítulo 2

# Caracterizaciones asintóticas

El comportamiento asintótico es uno de los aspectos más importantes a considerar en el estudio de los sistemas dinámicos [6, 7, 10, 11, 12]. Entre otras cosas, para determinar si un sistema dinámico es caótico se deben considerar tiempos grandes para comprobar el alejamiento exponencial de trayectorias con condiciones iniciales próximas entre sí. Es por ello que en el límite asintótico existen diversos indicadores de caoticidad tales como los coeficientes de Lyapunov, la entropía de Kolmogorov–Sinai, la complejidad algorítmica, etc., que como mencionamos en la introducción, se encuentran relacionados entre sí.

En este capítulo, presentamos el estudio de los sistemas dinámicos utilizando caracterizaciones asintóticas del caos clásico dadas en términos de correlaciones entre subconjuntos del espacio de fases, de donde se derivan por ejemplo las nociones de ergodicidad y *mixing*. Comenzamos describiendo la jerarquía ergódica clásica, que nos permitirá definir una extensión cuántica de la misma para caracterizar fenómenos del caos cuántico.

### 2.1. La jerarquía ergódica clásica

La jerarquía ergódica clásica clasifica el nivel caótico de un sistema dinámico en términos de un tipo de correlaciones entre subconjuntos del espacio de fases. Dado un sistema dinámico  $(\Gamma, \Sigma, \mu, \tau)$ , se puede definir la siguiente correlación  $C(A, B)$  entre dos subconjuntos  $A, B \subseteq \Gamma$ :

$$C(A, B) = \mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B) \quad (2.1)$$

Si el espacio de fases  $\Gamma$  está normalizado, es decir  $\mu(\Gamma) = 1$ , se puede interpretar al número real no negativo  $\mu(A)$  como la probabilidad de hallar al sistema en un punto del espacio de fases dentro de  $A$ . En tal caso,  $C(A, B)$  da la diferencia entre la probabilidad de  $A \cap B$  y el producto de las probabilidades de  $A$  y de  $B$ . Entonces, en esta interpretación probabilística, la correlación  $C(A, B)$  mide cuán “independientes” son los subconjuntos  $A$  y  $B$ . Esto se ve al considerar dos subconjuntos  $A, B \subseteq \Gamma$  tales que  $C(A, B) = 0$ , en cuyo caso se tiene  $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$ , es decir que  $A$  y  $B$  son independientes.

Dados  $A, B \subseteq \Gamma$ , a partir de la correlación  $C(A, B)$  y de la transformación  $T_t$  (ó en forma discreta  $T_k$ ) que lleva el sistema dinámico desde el instante  $t_0 = 0$  hasta el tiempo  $t$  (ó bien después del  $k$ -ésimo paso temporal), se definen los cuatro niveles de la jerarquía ergódica clásica de la siguiente manera. Se dice que la transformación  $T_t$  es

- *ergódica* si

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T C(T_t A, B) dt = 0 \quad (2.2)$$

o equivalentemente, de manera discreta, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} C(T_k A, B) = 0 \quad (2.3)$$

- *Mixing* si

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C(T_t A, B) = 0 \quad (2.4)$$

o equivalentemente, de manera discreta, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C(T_n A, B) = 0 \quad (2.5)$$

- *Kolmogorov* si para todo entero  $r$ , para todo  $A_0, A_1, \dots, A_r \subseteq \Gamma$  y para todo  $\varepsilon > 0$  existe un entero  $n_0 > 0$  tal que si  $n \geq n_0$  se tiene para todo  $B \in \sigma_{n,r}(A_1, \dots, A_r)$

$$|C(A_0, B)| < \varepsilon \quad (2.6)$$

siendo  $\sigma_{n,r}(A_1, \dots, A_r)$  la mínima  $\sigma$ -álgebra generada por  $\{T^k A_i : k \geq n ; i = 1, \dots, r\}$ .

- *Bernoulli* si

$$C(T_t A, B) = 0 \quad (2.7)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Podemos ver que estos niveles exhiben diferentes tipos de decaimiento de la correlación  $C(T_t A, B)$  desde el nivel más débil, el ergódico, hasta el el más fuerte, el Bernoulli. Es decir, se tiene

$$\text{Ergódico} \supset \text{Mixing} \supset \text{Kolmogorov} \supset \text{Bernoulli}$$

siendo las inclusiones estrictas. Veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 2.1** Consideremos  $\Gamma = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $\Sigma$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $[0, 1] \times [0, 1]$ ,  $\mu$  la medida de Lebesgue de  $\mathbb{R}^2$  y  $\tau$  la familia de transformaciones dadas por iteraciones de  $S(x, y) = (\sqrt{2} + x, \sqrt{3} + y)$ . Entonces, en virtud de que la transformación  $S(x, y)$  es ergódica el sistema dinámico resulta ergódico [7, pag. 63]. En la Fig. 2.1. se ilustra el efecto de  $S(x, y)$  sobre una distribución al azar de 1000 puntos en el cuadrado  $[0, \frac{1}{10}] \times [0, \frac{1}{10}]$ . Notamos como la distribución de puntos se mueve recorriendo todo el espacio de fases, conservando su forma y sin dispersarse.

**Ejemplo 2.2** Consideremos  $\Gamma = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $\Sigma$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $[0, 1] \times [0, 1]$ ,  $\mu$  la medida de Lebesgue de  $\mathbb{R}^2$  y  $\tau$  la familia de transformaciones dadas por iteraciones de  $T(x, y) = (x + y, x + 2y)$ . Entonces, en virtud de que la transformación  $T(x, y)$  es *mixing* el sistema dinámico resulta *mixing* [7, pag. 64]. En la Fig. 2.2. se ilustra el efecto de  $T(x, y)$  sobre una distribución al azar de 1000 puntos del cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Notemos como la distribución de puntos se estira en la dirección de la recta  $y = \frac{3}{2}x$  difundiéndose a lo largo de todo el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

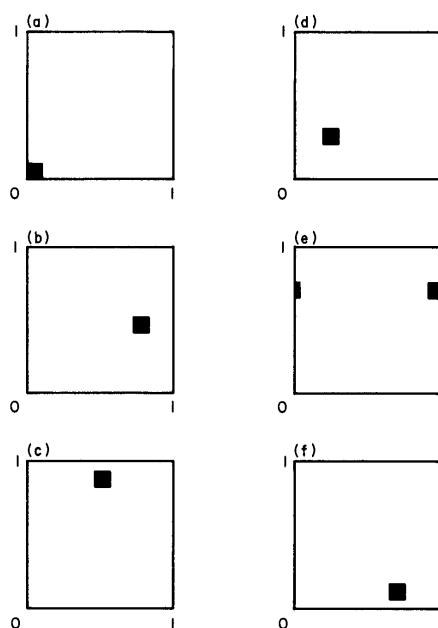


Figura 2.1: Iteraciones sucesivas de la transformación ergódica  $S(x, y)$  del Ejemplo 2.1 sobre una distribución al azar de 1000 puntos en  $[0, \frac{1}{10}] \times [0, \frac{1}{10}]$ .

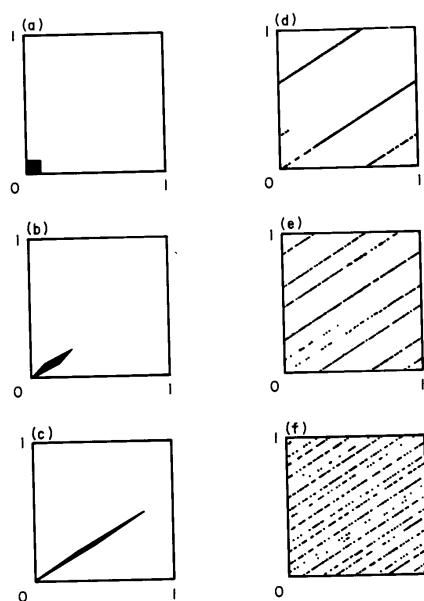


Figura 2.2: Iteraciones sucesivas de la transformación mixing  $T(x, y)$  del Ejemplo 2.2 sobre una distribución al azar de 1000 puntos en  $[0, \frac{1}{10}] \times [0, \frac{1}{10}]$ .

## 2.2. La jerarquía ergódica cuántica (QEH)

En los trabajos que dieron lugar a esta Tesis Doctoral se aborda el caos cuántico desde el punto de vista de la definición de Michael Berry [42], la cual tiene como hipótesis *ad hoc* la

existencia del límite clásico mediante la siguiente definición:

“Un sistema cuántico es caótico si su límite clásico es caótico”.

Esta *caología cuántica* como ha sido denominada originalmente por Berry, es lo que posteriormente pasó a llamarse “caos cuántico”.

Considerando que hay ejemplos de sistemas cuánticos que exhiben caos y no poseen análogo clásico (como por ejemplo un espín en interacción con un baño de un número grande  $N$  de espines y con las constantes de acoplamientos  $g_i$  entre el espín y el baño distribuídas al azar) en principio podría pensarse que esta definición restringe bastante su grado de aplicación a los fenómenos del caos cuántico. No obstante, una gran familia de sistemas cuánticos, los denominados “clásicamente caóticos” son suficientes para testear y verificar la mayoría de las caracterizaciones del caos cuántico que existen en la literatura, es decir, la aproximación semiclásica WKB, la teoría de matrices aleatorias, los billares cuánticos, la teoría de Floquet, etc. Precisamente, los sistemas cuánticos clásicamente caóticos son aquellos que poseen un analogo clásico caótico y por lo tanto permiten la aplicación de la definición de Berry.

Teniendo en cuenta a esta familia de sistemas cuánticos y a la jerarquía ergódica clásica como caracterización del caos clásico, el paso siguiente es investigar que información se puede obtener sobre un sistema cuántico que posee límite clásico al aplicarle el formalismo de la jerarquía ergódica. Realizamos una traducción a lenguaje cuántico de los cuatro niveles de la jerarquía ergódica clásica descrita en la sección anterior. El resultado obtenido es la jerarquía ergódica cuántica consistente de cuatro niveles: ergódico, *mixing*, Kolmogorov y Bernoulli cuánticos. Así como la jerarquía ergódica clásica clasifica el nivel de caoticidad de acuerdo a correlaciones entre subconjuntos del espacio de fases, de forma análoga la jerarquía ergódica cuántica caracteriza el caos de un sistema cuántico de acuerdo a correlaciones entre estados y observables. Todo el desarrollo de esta sección está basado en el trabajo [32]. Veamos primero como obtener los niveles de la jerarquía ergódica cuántica.

### 2.2.1. Formalismo

Comenzamos con la observación importante de que la correlación de la jerarquía ergódica clásica dada por la fórmula  $C(A, B) = \mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)$ , puede también expresarse de manera equivalente en diferentes formalismos matemáticos. Este punto es clave para pasar de la jerarquía ergódica clásica a su versión cuántica. Emplearemos los siguientes tres tipos de lenguaje para la correlación  $C(A, B)$ .

(i) En el lenguaje de conjuntos medibles, como

$$C(A, B) = \mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B) \quad (2.8)$$

(ii) en el lenguaje de las distribuciones, como

$$C(f, g) = \langle f, g \rangle - \langle f, 1_\Gamma \rangle \langle g, 1_\Gamma \rangle \quad (2.9)$$

donde  $1_\Gamma$  es la identidad sobre  $\Gamma$ ;

(iii) y en lenguaje cuántico, como

$$C(\hat{A}, \hat{B}) = \text{Tr}(\hat{A}\hat{B}) - h^{N+1}\text{Tr}(\hat{A})\text{Tr}(\hat{B}) \quad (2.10)$$

donde  $\hat{A}, \hat{B}$  son operadores.

Veamos la relación entre los lenguajes (i), (ii) y (iii).

(i) y (ii): Por definición se tiene que  $\mu(A) = \int_{\Gamma} 1_A(q, p) dqdp$ , por lo tanto de acuerdo a la ec. (2.8) nos queda

$$\begin{aligned} C(A, B) &= \int_{\Gamma} 1_{A \cap B}(q, p) dqdp - \int_{\Gamma} 1_A(q, p) dqdp \int_{\Gamma} 1_B(q, p) dqdp \\ &= \int_{\Gamma} 1_A(q, p) 1_B(q, p) dqdp - \int_{\Gamma} 1_A(q, p) dqdp \int_{\Gamma} 1_B(q, p) dqdp \end{aligned} \quad (2.11)$$

Sean  $f, g$  dos distribuciones sobre  $\Gamma$ , entonces podemos desarrollarlas en términos de funciones características, es decir

$$\begin{aligned} f(q, p) &= \sum_i a_i 1_{A_i}(q, p) \\ g(q, p) &= \sum_j b_j 1_{B_j}(q, p) \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde  $\{A_i\}, \{B_j\}$  son particiones numerables del espacio de fases  $\Gamma$ . Entonces, aplicando la expresión  $C(A, B)$  de (2.11) para cada  $A_i, B_j$ , multiplicando a ambos miembros por  $a_i b_j$  y sumando sobre los índices  $i$  y  $j$  se tiene

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j C(A_i, B_j) &= \int_{\Gamma} \sum_i a_i 1_{A_i}(q, p) \sum_j b_j 1_{B_j}(q, p) dqdp \\ &\quad - \int_{\Gamma} \sum_i a_i 1_{A_i}(q, p) dqdp \int_{\Gamma} \sum_j b_j 1_{B_j}(q, p) dqdp \end{aligned} \quad (2.13)$$

Luego, de (2.12) se tiene

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j C(A_i, B_j) &= \int_{\Gamma} f(q, p) g(q, p) dqdp - \int_{\Gamma} f(q, p) dqdp \int_{\Gamma} g(q, p) dqdp \\ &= \langle f, g \rangle - \langle f, 1_{\Gamma} \rangle \langle g, 1_{\Gamma} \rangle \end{aligned} \quad (2.14)$$

Es decir que hemos recuperado la correlación  $C(f, g)$ .

(i) y (ii): Sean  $\hat{A}, \hat{B}$  dos observables y consideremos  $f(q, p) = W_{\hat{A}}(q, p)$ ,  $g(q, p) = \widetilde{W}_{\hat{B}}(q, p)$ . En particular, por la ec. (2.9) se tiene

$$\begin{aligned} C(W_{\hat{A}}, \widetilde{W}_{\hat{B}}) &= \int_{\Gamma} W_{\hat{A}}(q, p) \widetilde{W}_{\hat{B}}(q, p) dqdp - \int_{\Gamma} W_{\hat{A}}(q, p) dqdp \int_{\Gamma} \widetilde{W}_{\hat{B}}(q, p) dqdp = \\ &\quad \int_{\Gamma} W_{\hat{A}}(q, p) \widetilde{W}_{\hat{B}}(q, p) dqdp - h^{N+1} \int_{\Gamma} W_{\hat{A}}(q, p) dqdp \int_{\Gamma} W_{\hat{B}}(q, p) dqdp \end{aligned} \quad (2.15)$$

Luego, por la propiedad (1.14) de la transformada de Wigner, (2.15) se puede expresar como

$$C(W_{\hat{A}}, \widetilde{W}_{\hat{B}}) = \text{Tr}(\hat{A}\hat{B}) - h^{N+1} \text{Tr}(\hat{A}) \text{Tr}(\hat{B}) := C(\hat{A}, \hat{B}) \quad (2.16)$$

(iii) y (i): Sean  $A, B \subseteq \Gamma$ . Consideremos los operadores  $\hat{A}, \hat{B}$  tales que  $W_{\hat{A}}(q, p) = 1_A(q, p)$  y  $W_{\hat{B}}(q, p) = 1_B(q, p)/h^{N+1}$ . Es decir que  $\widetilde{W}_{\hat{B}}(q, p) = 1_B(q, p)$ . Entonces (2.10) y la propiedad (1.14) de la transformada de Wigner resulta

$$\begin{aligned} C(\hat{A}, \hat{B}) &= \text{Tr}(\hat{A}\hat{B}) - h^{N+1} \text{Tr}(\hat{A}) \text{Tr}(\hat{B}) = \langle W_{\hat{A}}, \widetilde{W}_{\hat{B}} \rangle - h^{N+1} \langle W_{\hat{A}}, 1_{\Gamma} \rangle \langle W_{\hat{B}}, 1_{\Gamma} \rangle = \\ &\quad \langle 1_A, 1_B \rangle - \langle 1_A, 1_{\Gamma} \rangle \langle 1_B, 1_{\Gamma} \rangle = \langle 1_{A \cap B}, 1_{\Gamma} \rangle - \langle 1_A, 1_{\Gamma} \rangle \langle 1_B, 1_{\Gamma} \rangle = \\ &\quad \mu(A \cap B) - \mu(A) \mu(B) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Por lo tanto los lenguajes (i), (ii) y (iii) son intercambiables.

Consideremos el operador de Frobenius–Perron  $P_t$  del Capítulo 1, sección 1.3. En general existen varias distribuciones  $f_*$  que son puntos fijos de  $P_t$ , o sea  $P_t f_* = f_*$ , interpretadas físicamente como distribuciones de equilibrio. En el caso de un sistema ergódico existe una única  $f_*$  [7, pag. 45], y por lo tanto consideraremos que estamos en esta situación. Dado que en

teoría ergódica sólo se consideran medidas  $\mu$  que son invariantes (es decir  $\mu(S^{-1}(A)) = \mu(A)$ ) para todo  $A \in \Sigma$  y alguna función  $S : X \mapsto X$ , [7, pag. 45]) y en virtud de que  $f_*$  es un punto fijo de  $P_t$ , de la definición del operador de Frobenius–Perron se puede demostrar que la medida  $\mu_*$  dada por

$$\mu_*(A) = \int_A f_*(q, p) dq dp \quad (2.18)$$

es invariante bajo las transformaciones  $T_t$ , [7, pag. 46]. Si pensamos a  $f_*(q, p)$  como la densidad de puntos que ocupa el sistema en el espacio de fases en el límite asintótico, entonces  $f_*(q, p)$  no es otra cosa que la densidad de la ecuación de Liouville, cuya evolución se expresa matemáticamente por medio del *teorema de Liouville* [4, 5, 10, 11]

$$\frac{df_*}{dt} = \frac{\partial f_*}{\partial t} + \{f_*, H\}_{PB} = 0$$

siendo  $\{ , \}_{PB}$  el corchete de Poisson y  $\frac{df_*}{dt} = 0$  se interpreta como una situación de equilibrio estadístico del sistema donde los volúmenes del espacio de fase no cambian con el tiempo. Todo esto motiva la siguiente definición de una correlación  $C_*(A, B)$  por medio de  $\mu_*$ .

$$C_*(A, B) = \mu_*(A \cap B) - \mu_*(A)\mu_*(B) \quad (2.19)$$

Dados un estado  $\hat{\rho}$  al tiempo  $t$  y un observable  $\hat{O}$ , y a partir de  $C_*(A, B)$ , se busca una correlación cuántica  $C(\hat{\rho}(t), \hat{O})$  entre  $\hat{\rho}(t)$  y  $\hat{O}$ . Utilizando (2.19) y propiedades de la transformación de Wigner se obtiene la correlación de la jerarquía ergódica cuántica (cuya demostración se encuentra en el Apéndice)

$$C(\hat{\rho}(t), \hat{O}) = \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t)} - \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_*} \quad (2.20)$$

siendo  $\hat{\rho}_*$  el estado cuántico representativo del equilibrio tal que  $W_{\hat{\rho}_*}(q, p) = f_*(q, p)$ .

Luego, reemplazando la correlación  $C(T_t A, B)$  por  $C(\hat{\rho}(t), \hat{O})$  en cada uno de los niveles de la jerarquía ergódica clásica obtenemos los niveles de la jerarquía ergódica cuántica. Siendo  $\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t)\hat{\rho}\hat{U}(t)^\dagger$  el estado  $\hat{\rho}$  al tiempo  $t$  se dice que el operador de evolución cuántico  $\hat{U}(t)$  es

- *ergódico cuántico* si

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T C(\hat{\rho}(t), \hat{O}) dt = 0 \quad (2.21)$$

o equivalentemente de manera discreta si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} C(\hat{\rho}(k), \hat{O}) = 0 \quad (2.22)$$

donde  $\hat{\rho}(k) = \hat{\rho}(t = k) = \hat{U}(k)\hat{\rho}\hat{U}(k)^\dagger$  es el estado inicial  $\hat{\rho}$  después de  $k$  pasos temporales discretizados, y el operador  $\hat{U}(k)$  es cualquier operador unitario que represente la evolución temporal cuántica. En general, tendremos que  $\hat{U}(k) = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t_k}$  siendo  $\hat{H}$  el Hamiltoniano del sistema cuántico y  $\{t_k\}$  una discretización temporal arbitraria.

- *mixing cuántico* si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(\hat{\rho}(t), \hat{O}) = 0 \quad (2.23)$$

o equivalentemente de manera discreta si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C(\hat{\rho}(n), \hat{O}) = 0 \quad (2.24)$$

- *Kolmogorov cuántico* si para todo conjunto de observables  $\hat{O}_1, \hat{O}_2, \dots, \hat{O}_i, \dots$  y para todo  $m_j \in \mathbb{N}_0$  se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \hat{O}_1 \prod_{j=2}^{\infty} \hat{O}_j(n + m_j) \rangle_{\hat{\rho}(n+m_1)} = \langle \hat{O}_1 \rangle_{\hat{\rho}_*} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \prod_{j=2}^{\infty} \hat{O}_j(n + m_j) \rangle_{\hat{\rho}(n+m_1)} \quad (2.25)$$

- *Bernoulli cuántico* si

$$C(\hat{\rho}(t), \hat{O}) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.26)$$

A estos niveles debemos agregar la condición de *no integrabilidad* del Hamiltoniano  $\hat{H}$  del sistema cuántico en cuestión. De otro modo se tendría que el oscilador armónico cuántico unidimensional sería ergódico cuántico, lo cual carece de sentido en virtud de que su límite clásico (el oscilador clásico unidimensional) no es ergódico.

Es pertinente hacer las siguientes observaciones respecto a los niveles de la jerarquía ergódica cuántica:

- Las correlaciones de la jerarquía ergódica clásica entre subconjuntos del espacio de fases se traducen en correlaciones entre observables y estados para la jerarquía ergódica cuántica. Análogamente a la jerarquía ergódica clásica, su versión cuántica también es una caracterización asintótica, es decir a tiempos grandes.
- De acuerdo a la definición de límite débil dada en la introducción, se puede ver que corresponde al estado  $\hat{\rho}_*$  de la definición del nivel *mixing* cuántico.
- El nivel Kolmogorov cuántico implica una condición sobre un conjunto de observables en virtud de la presencia de la  $\sigma$ -álgebra dada por la definición del nivel de Kolmogorov clásico. La demostración en detalle se encuentra en el Apéndice.
- Al igual que con la jerarquía ergódica clásica, se tienen las siguientes inclusiones para el caso cuántico

$$\text{Ergódico cuántico} \supset \text{Mixing cuántico} \supset \text{Kolmogorov cuántico} \supset \text{Bernoulli cuántico}$$

donde nuevamente las inclusiones son estrictas.

### 2.2.2. Ejemplo: el rotor pateado

Aplicaremos los niveles de la jerarquía ergódica cuántica para caracterizar fenómenos del caos cuántico. Para ello consideramos un ejemplo emblemático de la literatura: el rotor pateado.

El rotor pateado es uno de los sistemas caóticos más estudiados en la literatura [1, 8, 9]. Entre otras cosas, el rotor pateado expresa de manera simple la física del caos cuando es descrita por un Hamiltoniano del tipo  $H_0 + \lambda H'$ , donde  $H_0$  es la parte no perturbada y  $\lambda H'$  representa una perturbación dependiente de un parámetro continuo  $\lambda$  que típicamente rompe la integrabilidad de  $H_0$ . Clásicamente, al variar el parámetro  $\lambda$  se observa la transición de diferentes regímenes de la dinámica del sistema. Pasando del régimen regular e integrable  $\lambda = 0$  hasta un valor crítico  $\lambda_c$ , característico del sistema, donde habitualmente las regiones de estabilidad del espacio de fases se retuercen y estiran dando lugar al surgimiento de un mar caótico. A partir de valores más grandes que el valor crítico, es decir  $\lambda \gg \lambda_c$ , el espacio de fases se encuentra cubierto casi en su totalidad por el mar caótico con la presencia de sólo algunas pocas islas de estabilidad. Este

es el régimen conocido como totalmente caótico. Por otra parte, la dinámica de muchos sistemas cuánticos clásicamente caóticos puede ser mapeada en la del rotor pateado. El Hamiltoniano cuántico del rotor pateado está dado por [8, pag. 145]

$$\hat{H} = \hat{L}^2 + \lambda \cos \hat{\theta} \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(t - n\tau) \quad (2.27)$$

y describe la rotación libre en un ángulo  $\theta$  de un péndulo de momento angular  $\hat{L}$ , pateado a intervalos de período  $\tau$  por un potencial gravitacional de fuerza  $\lambda$ , donde el momento de inercia ha sido normalizado. Para la descripción mecano-cuántica necesitamos el operador de evolución temporal el cual, de acuerdo a la periodicidad temporal del potencial, está dado por el operador de Floquet

$$\hat{F} = e^{-\frac{i}{\hbar} \lambda \cos \hat{\theta}} e^{-\frac{i}{2\hbar} \tau \hat{L}^2} \quad (2.28)$$

A diferencia del operador de evolución temporal  $U(t) = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}$ , dado por el Hamiltoniano, se dice que el operador  $\hat{F}$  da una descripción *estroboscópica* del sistema. En este caso la evolución se encuentra discretizada en intervalos temporales dados por pasos finitos igualmente espaciados, es decir  $t_0 = 0, t_1 = \tau, t_2 = 2\tau, \dots, t_n = n\tau, \dots$

Es conveniente utilizar la base de autofunciones de  $\hat{F}$ , la cual denotaremos por  $\{|k\rangle\}$ . Si  $\hat{\rho}$  es un estado arbitrario entonces podemos expresarlo en la base  $\{|k\rangle\}$ , cuyos autovalores  $\{e^{-i\phi_k}\}$  son las fases de Floquet [8, pag. 137], como

$$\hat{\rho} = \sum_k \rho_{kk} |k\rangle\langle k| + \sum_{k \neq k'} \sum_{k' \neq k} \rho_{kk'} |k\rangle\langle k'| \quad (2.29)$$

Para poder obtener el estado después de  $N$  intervalos, correspondiente al tiempo  $t = N\tau$ , debemos aplicar sucesivamente  $N$  veces el operador  $\hat{F}$  sobre  $\hat{\rho}$ . De esta forma nos queda

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(N\tau) &= \hat{F}^N \hat{\rho} (\hat{F}^\dagger)^N = \sum_k \rho_{kk} \hat{F}^N |k\rangle\langle k| (\hat{F}^\dagger)^N + \sum_{k \neq k'} \sum_{k' \neq k} \rho_{kk'} \hat{F}^N |k\rangle\langle k'| (\hat{F}^\dagger)^N \\ &= \sum_k \rho_{kk} |k\rangle\langle k| + \sum_{k \neq k'} \sum_{k' \neq k} \rho_{kk'} e^{-iN(\phi_k - \phi_{k'})} |k\rangle\langle k'| \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde la primera y segunda sumas de (2.30) contienen los términos diagonales y no diagonales de  $\hat{\rho}(N\tau)$ .

Veamos ahora cómo caracterizar los regímenes del rotor pateado utilizando los niveles de la jerarquía ergódica. Comenzamos por el caso  $\lambda \ll 1$  que corresponde a un comportamiento pseudointegrable y regular. En este régimen la dinámica es casi idéntica a la del péndulo libre y, por lo tanto, al ser el sistema integrable la jerarquía ergódica clásica no puede aplicarse.

Cuando  $\lambda \sim \lambda_c$ , siendo  $\lambda_c = 0,9716\dots$  el valor crítico, el sistema se vuelve no integrable y su comportamiento es estocástico y difusivo. En este régimen se dice que el espacio de fases es mixto debido a la presencia de zonas regulares coexistiendo con un mar caótico, siendo el sistema no integrable. Si se eligen condiciones iniciales que se encuentren en el mar caótico, el rotor eventualmente explorará todo el espacio de fases accesible. La no integrabilidad en este régimen nos permite aplicar el análisis del nivel ergódico cuántico. Dado que la evolución temporal dada por  $\hat{F}$  es discreta, es conveniente utilizar la definición discretizada (2.22) del nivel ergódico cuántico. Sea  $\hat{O}$  un observable, entonces usando la (2.30), el valor medio de  $\hat{O}$  en  $\hat{\rho}$  en el instante  $N\tau$  se escribe

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(N\tau)} = \sum_k \rho_{kk} O_{kk} + \sum_{k \neq k'} \sum_{k' \neq k} e^{-iN(\phi_k - \phi_{k'})} \rho_{kk'} O_{kk'} \quad (2.31)$$



siendo  $O_{kk'} = \langle k | \hat{O} | k' \rangle$ . La sumatoria doble en  $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(N\tau)}$  corresponde a los términos de interferencia cuántica, mientras que la primera sumatoria es la parte “clásica” del valor medio ya que admite una interpretación por ignorancia como un valor medio estadístico clásico. De (2.31) se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(l\tau)} &= \sum_k \rho_{kk} O_{kk} + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k \neq k'} \sum_{k' \neq k} e^{-il(\phi_k - \phi_{k'})} \rho_{kk'} O_{kk'} \\ &= \sum_k \rho_{kk} O_{kk} + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k \neq k'} \sum_{k' \neq k} \sum_{l=0}^{N-1} e^{-il(\phi_k - \phi_{k'})} \rho_{kk'} O_{kk'} = \\ &\sum_k \rho_{kk} O_{kk} + \sum_{k \neq k'} \sum_{k' \neq k} \rho_{kk'} O_{kk'} \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-iN(\phi_k - \phi_{k'})}}{1 - e^{-i(\phi_k - \phi_{k'})}} \right) = \sum_k \rho_{kk} O_{kk} = \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_*} \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde usamos que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-iN(\phi_k - \phi_{k'})}}{1 - e^{-i(\phi_k - \phi_{k'})}} = 0$  para todo  $k \neq k'$  y que  $\hat{\rho}_* = \sum_k \rho_{kk} |k\rangle \langle k|$ . Entonces, la ecuación (2.32) expresa que el rotor pateado es ergódico cuántico para valores del parámetro  $\lambda \sim \lambda_c$ . En este caso se dice que  $\hat{\rho}_*$  es el *límite de Césaro* del estado  $\hat{\rho}$  ya que  $\hat{\rho}_*$  representa el estado de equilibrio “en promedio temporal”. Equivalentemente, decimos que  $\hat{\rho}$  “tiende” en promedio temporal a  $\hat{\rho}_*$ .

Cuando  $\lambda \gg 5$  el régimen se vuelve totalmente caótico y la localización exponencial es el fenómeno característico que tiene lugar. En efecto, en este caso la distribución cuántica esperada  $f_N(L)$  del valor medio cuadrático del momento angular  $\langle \hat{L}^2 \rangle$  después de  $N$  patadas está dada por [8, pag. 149]

$$f_N(L) = \frac{1}{l_s} e^{-\frac{2|L|}{l_s}} \quad (2.33)$$

Esta localización exponencial implica que para un número de patadas  $N \leq l_s$  estamos en el rango de difusión clásica mientras que para  $N \gg l_s$  estamos en el régimen totalmente caótico. Para  $N \gg l_s$  las fases  $e^{-iN(\phi_k - \phi_{k'})}$  oscilan tan rápido que solo los términos con  $k = k'$  sobreviven en (2.31), fenómeno también conocido como *dephasing* o desfase que constituye una de las peculiaridades del caos cuántico. Esto significa que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(N\tau)} = \sum_k \rho_{kk} O_{kk} = \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_*} \quad (2.34)$$

con  $\hat{\rho}_* = \sum_k \rho_{kk} |k\rangle \langle k|$ .

De acuerdo a la versión discreta de la definición del nivel *mixing* cuántico, la ec. (2.34) expresa que el rotor pateado es *mixing* cuántico para  $\lambda \gg 5$ . Como resultado del régimen totalmente caótico se produce un *dephasing* donde el estado  $\hat{\rho}$  decohere a su límite débil  $\hat{\rho}_*$  con un valor medio de estructura clásica dado por  $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_*} = \sum_k \rho_{kk} O_{kk}$ .

Mas aún, podemos estimar el tiempo de decoherencia  $t_D$ . Dado que las fases  $e^{-iN(\phi_k - \phi_{k'})}$  oscilan rápidamente si  $N \gg l_s$  entonces la parte no diagonal de los valores medios tienden a cancelarse a partir de un tiempo  $t = N\tau \gg \tau l_s$ . De aquí que se pueda hacer la estimación  $t_D \sim \tau l_s$  en función del parámetro característico macroscópico del sistema  $\tau$  y del ancho de la localización  $l_s$ .

Finalmente, como  $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(N\tau)} \approx \sum_k \rho_{kk} O_{kk} = cte.$  para  $N \gg l_s$  es decir para  $t \gg t_D$ , entonces por la definición del nivel de Bernoulli cuántico vemos que el rotor pateado pasa de *mixing* cuántico a ser Bernoulli cuántico en el intervalo temporal  $t \gg t_D$ .

De esta forma hemos caracterizado las transiciones de fase caóticas del rotor pateado, junto con sus respectivos fenómenos de difusión estocástica y localización exponencial, en términos de los niveles ergódico, *mixing* y Bernoulli de la jerarquía ergódica cuántica. Esta caracterización

se resume en el siguiente esquema.

$$\begin{aligned}
 \lambda \ll 1 &\implies \text{régimen integrable y regular} \implies \text{no se aplica la QEH} \\
 \lambda \sim \lambda_c = 0,9716\dots &\implies \text{régimen no integrable,} \implies \text{ergódico cuántico} \\
 &\quad \text{difusivo – estocástico} \\
 \lambda \gg 5 &\implies \text{régimen no integrable} \implies \text{mixing cuántico} \quad (2.35) \\
 &\quad \text{y totalmente caótico} \quad \text{Bernoulli cuántico para } t \sim t_D = \tau l_s
 \end{aligned}$$

### 2.3. Ensamblés Gaussianos a partir del nivel mixing cuántico

Hemos visto que el nivel de *mixing* cuántico corresponde a un tipo específico de correlación entre observables y estados dado por (2.23) para evoluciones continuas y por (2.24) para las discretas. Dado que el nivel *mixing* cuántico implica el límite débil entonces uno podría preguntarse: ¿Cual es la diferencia entre el límite débil que expresa una relajación en los valores medios y el nivel de mixing cuántico de la jerarquía ergódica cuántica? Para ello, en [36] hemos establecido los siguientes resultados que en conjunto permiten dar una respuesta, cuyas demostraciones se dan en el Apéndice.

**Lema 2.3** *Sea  $f_*$  una distribución normalizada que además es un punto fijo del operador de Frobenius-Perron  $P_t$  y consideremos las funciones características  $1_{A_1}, 1_{A_2}, \dots, 1_{A_n} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  siendo  $A_1, A_2, \dots, A_n$  subconjuntos del espacio de fases  $\Gamma$ . Si la dinámica en  $\Gamma$  es mixing entonces*

$$\int_{\Gamma} f_* 1_{A_1} \cdots 1_{A_n} = \left( \int_{\Gamma} f_* 1_{A_1} \right) \cdots \left( \int_{\Gamma} f_* 1_{A_n} \right) \quad (2.36)$$

Este lema expresa que en una dinámica *mixing* y para una distribución que es un punto fijo del operador de Frobenius-Perron, el valor medio de un producto de funciones puede ser factorizado como el producto de los valores medios correspondientes a cada una de las funciones. Asimismo, esta propiedad de factorización puede ser extendida para el caso cuántico. Introducimos para ello algunos resultado previos, en el contexto del nivel *mixing* cuántico.

**Lema 2.4** *El límite débil  $\hat{\rho}_*$  es un punto fijo del operador de evolución  $\hat{U}_t = e^{-it\hat{H}/\hbar}$  siendo  $\hat{H}$  el Hamiltoniano del sistema cuántico, es decir  $\hat{U}_t \hat{\rho}_* \hat{U}_t^\dagger = \hat{\rho}_*$ .*

El lema 2.4 da una justificación del estado  $\hat{\rho}_*$  como representativo del equilibrio. Un caso particular del lema 2.3 ocurre cuando  $f_*$  es la transformada de Wigner del estado  $\hat{\rho}_*$ , como se indica en el siguiente corolario.

**Corolario 2.5** *Si la dinámica en el espacio de fases es mixing entonces la transformación de Wigner  $W_{\hat{\rho}_*}(q, p)$  de  $\hat{\rho}_*$  es un punto fijo del operador de Frobenius-Perron  $P_t$  asociado con la evolución clásica  $T_t$  dada por las ecuaciones de Hamilton.*

Juntando los lemas 2.3, 2.4 y el corolario 2.5 se obtiene el siguiente teorema que constituye una caracterización de las correlaciones de un producto de observables dentro del nivel *mixing* cuántico.

**Teorema 2.6** *Consideremos un sistema cuántico que satisface el nivel *mixing* cuántico. Sean  $\hat{O}_1, \hat{O}_2, \dots, \hat{O}_n$  observables. Entonces cuando  $\hbar \rightarrow 0$  se tiene*

$$\langle \hat{O}_1 \hat{O}_2 \cdots \hat{O}_n \rangle_{\hat{\rho}_*} = \langle \hat{O}_1 \rangle_{\hat{\rho}_*} \langle \hat{O}_2 \rangle_{\hat{\rho}_*} \cdots \langle \hat{O}_n \rangle_{\hat{\rho}_*} \quad (2.37)$$

Este teorema es la expresión de las correlaciones del nivel *mixing* cuántico de un producto de observables en el límite clásico: la propiedad de factorización describe la forma de las correlaciones del estado de equilibrio  $\hat{\rho}_*$  del nivel *mixing* cuántico. La factorización (2.37) expresa una especie de *no correlación* entre los observables  $\hat{O}_1, \hat{O}_2, \dots, \hat{O}_n$  en el límite clásico  $\hbar \rightarrow 0$ .

Ahora veremos cómo esta propiedad es clave para obtener la distribución aleatoria de los elementos matriciales del Hamiltoniano de un sistema cuántico caótico, o sea los ensembles Gaussianos. La sorprendente capacidad predictiva de tales ensembles podría deberse a la simplicidad de las hipótesis. Todo el desarrollo de esta sección está basado en el trabajo [36].

Comencemos por establecer la conexión entre los ensembles Gaussianos y el nivel *mixing* cuántico de la jerarquía ergódica cuántica. Para realizar esto, consideraremos un sistema cuántico  $S$  que satisface el nivel *mixing* cuántico cuyo Hamiltoniano se asume desconocido y de dimensión finita  $N$ . Nos focalizaremos sólo en las propiedades asintóticas para tiempos grandes de  $S$ . Por lo tanto, dado un estado inicial  $\hat{\rho}$  suponemos que el comportamiento de  $S$  a tiempos grandes está dado por el límite débil  $\hat{\rho}_*$  de  $\hat{\rho}$ , representativo del equilibrio del sistema.

Recordemos que los ensembles Gaussianos son el conjunto de matrices cuadradas de  $N \times N$  cuyos elementos  $H_{ij}$  están distribuidos de acuerdo a las siguientes ecuaciones:

$$P(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN}) = P(H_{11})P(H_{12}) \cdots P(H_{NN}) \quad (2.38)$$

$$P(H'_{11}, H'_{12}, \dots, H'_{NN}) = P(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN}) \quad (2.39)$$

donde (2.38) expresa la distribución al azar de los  $H_{ij}$  que implica una no-correlación entre ellos, y (2.39) expresa la invarianza de  $P(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN})$  frente a una transformación  $(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN}) \rightarrow (H'_{11}, H'_{12}, \dots, H'_{NN})$  ortogonal, unitaria o simpléctica que define si el ensemble Gaussiano es ortogonal, unitario o simpléctico respectivamente.

Motivados por la regla de Born y teniendo en cuenta que el límite débil  $\hat{\rho}_*$  es el estado representativo del sistema para tiempos grandes entonces es lógico pensar que  $\hat{\rho}_*$  también debe contener información acerca de las correlaciones entre los elementos  $H_{ij}$  en el límite asintótico de tiempos grandes. Podemos justificar esta consideración a partir de lo siguiente.

Es un hecho bien conocido que el caos cuántico sólo puede darse dinámicamente dentro de sus escalas temporales características ( $\tau \propto \hbar^{-\alpha}$  en el caso regular y  $\tau \propto -\log \hbar$  en el caso caótico) donde fenómenos típicos con una descripción semiclassical tales como la relajación, la inestabilidad exponencial, etc son posibles. Estos fenómenos constituyen parte de los aspectos dinámicos del caos cuántico en el dominio temporal. Sin embargo, en el dominio temporal la universalidad de las leyes de fluctuación de niveles predichas por los ensembles Gaussianos también se manifiesta. Esto muestra la íntima relación entre los dos puntos de vista del caos cuántico, los aspectos estacionarios en el dominio de la energía y los dinámicos en el dominio temporal. Más precisamente, el rango temporal de validez de aplicación de la teoría de matrices aleatorias se encuentra hasta el tiempo de Ehrenfest  $\tau_E \propto -\log \hbar$ . Teniendo en cuenta esto, es razonable considerar que las probabilidades  $P(H_{ij})$  puedan pensarse en el límite clásico y en el límite asintótico de tiempos grandes a partir de la siguiente propuesta ó hipótesis.

- Las probabilidades  $P(H_{ij})$  de la distribución de probabilidad de los ensembles Gaussianos (Ecs. (2.38) y (2.39)) pueden ser calculadas en el estado de equilibrio  $\hat{\rho}_*$  por medio de la regla de Born como  $P(H_{ij}) = \langle \hat{\pi}_{ij} \rangle_{\hat{\rho}_*}$  donde  $\hat{\pi}_{ij}$  son proyectores para todo  $i, j = 1, \dots, N$ .

Matemáticamente no es difícil imaginar un operador que deba satisfacer ésta hipótesis, al menos en el límite clásico  $\hbar \rightarrow 0$ .

Dado que  $Tr(\hat{\rho}_* \hat{I}) = \int_{\Gamma} dqdp \rho_*(q, p) = 1$ ,  $\rho_*(q, p) \geq 0$  y  $0 \leq P(H_{ij}) \leq 1$  siendo  $\hat{I}$  el operador identidad, entonces existe un subconjunto  $E_{ij} \subseteq \Gamma$  tal que

$$\int_{E_{ij}} dqdp \rho_*(q, p) = \int_{\Gamma} dqdp \rho_*(q, p) 1_{E_{ij}}(q, p) = P(H_{ij})$$

Ahora bien, el operador buscado  $\hat{\pi}_{ij}$  debe cumplir  $\widetilde{W}_{\hat{\pi}_{ij}}(q, p) = 1_{E_{ij}}(q, p)$ , entonces por (1.14) se tiene

$$\langle \hat{\pi}_{ij} \rangle_{\hat{\rho}_*} = \langle W_{\hat{\rho}_*}, \widetilde{W}_{\hat{\pi}_{ij}} \rangle = \langle \hat{\rho}_*(q, p), 1_{E_{ij}}(q, p) \rangle = \int_{\Gamma} dqdp \rho_*(q, p) 1_{E_{ij}}(q, p) = P(H_{ij})$$

Además, de (1.13) resulta

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{\hat{\pi}_{ij}^2}(q, p) &= W_{\hat{\pi}_{ij}}(q, p) * \widetilde{W}_{\hat{\pi}_{ij}}(q, p) = 1_{E_{ij}}(q, p) 1_{E_{ij}}(q, p) + \mathcal{O}(\hbar) = \\ &= 1_{E_{ij}}(q, p) + \mathcal{O}(\hbar) = \widetilde{W}_{\hat{\pi}_{ij}}(q, p) + \mathcal{O}(\hbar) \end{aligned}$$

Luego, en el límite clásico  $\hbar \rightarrow 0$  tenemos

$$\widetilde{W}_{\hat{\pi}_{ij}^2}(q, p) - \widetilde{W}_{\hat{\pi}_{ij}}(q, p) \approx 0$$

Y recordando que el símbolo de Weyl es un mapa lineal biyectivo concluimos que en el límite clásico,  $\hat{\pi}_{ij}$  resulta un proyector, o sea

$$\hat{\pi}_{ij}^2 = \hat{\pi}_{ij}$$

El paso siguiente es expresar la probabilidad de todos los elementos matriciales  $H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN}$ , denotada por  $P(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN})$ , en términos de  $\hat{\rho}_*$  y los proyectores  $\hat{\pi}_{ij}$ . Dado que cada  $\hat{\pi}_{ij}$  permite obtener  $P(H_{ij})$  entonces es natural considerar que

$$P(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN}) = \langle \hat{\pi}_{11} \hat{\pi}_{12} \cdots \hat{\pi}_{NN} \rangle_{\hat{\rho}_*} \quad (2.40)$$

El orden del producto es indistinto ya que los  $\hat{\pi}_{ij}$  conmutan en el límite clásico. En ese caso, podemos usar el teorema 2.6 en (2.40) y obtenemos

$$P(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN}) = \langle \hat{\pi}_{11} \rangle_{\hat{\rho}_*} \langle \hat{\pi}_{12} \rangle_{\hat{\rho}_*} \cdots \langle \hat{\pi}_{NN} \rangle_{\hat{\rho}_*} = P(H_{11}) P(H_{12}) \cdots P(H_{NN}) \quad (2.41)$$

que no es otra cosa que la condición de distribución al azar de los ensambles Gaussianos dada por (2.38).

La condición de invarianza se obtiene de la siguiente forma. Consideremos dos bases  $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$  y  $\{|b_j\rangle\}_{j=1}^N$  del espacio de Hilbert del sistema cuántico con  $|b_k\rangle = \hat{U}|a_k\rangle$  para todo  $k = 1, \dots, N$  donde  $\hat{U}$  es una transformación ortogonal, unitaria o simpléctica. Sean  $\hat{H}$  y  $\hat{H}'$  el Hamiltoniano del sistema cuántico en las bases  $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$  y  $\{|b_j\rangle\}_{j=1}^N$  respectivamente. Sean  $\hat{\pi}_{kl}$  y  $\hat{\pi}'_{kl}$  los conjuntos de proyectores que satisfacen la hipótesis escritos en las bases  $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$  y  $\{|b_j\rangle\}_{j=1}^N$ . Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \hat{\pi}'_{kl} &= \hat{U} \hat{\pi}_{kl} \hat{U}^\dagger \quad \forall k, l = 1, \dots, N \\ \hat{U} \hat{U}^\dagger &= \hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{I} \end{aligned} \quad (2.42)$$

siendo  $\hat{U}^\dagger$  el operador transpuesto, el complejo conjugado ó el dual de  $\hat{U}$ , según  $\hat{U}$  sea una transformación ortogonal, unitaria o simpléctica respectivamente. Dado que el Hamiltoniano transformado es  $\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger$  entonces es claro que

$$P(H'_{kl}) = \langle \hat{\pi}'_{kl} \rangle_{\hat{\rho}'_*} \quad \forall k, l = 1, \dots, N \quad (2.43)$$

siendo  $\hat{\rho}'_* = \hat{U}\hat{\rho}_*\hat{U}^\dagger$  el estado  $\hat{\rho}_*$  dado en la base  $\{|b_j\rangle\}_{j=1}^N$ . Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} P(H'_{11}, H'_{12}, \dots, H'_{NN}) &= \langle \hat{\pi}'_{11} \hat{\pi}'_{12} \cdots \hat{\pi}'_{NN} \rangle_{\hat{\rho}'_*} = \langle \hat{U} \hat{\pi}_{11} \hat{U}^\dagger \hat{U} \hat{\pi}_{12} \hat{U}^\dagger \cdots \hat{U} \hat{\pi}_{NN} \hat{U}^\dagger \rangle_{\hat{\rho}'_*} \\ &= \langle \hat{U} \hat{\pi}_{11} \hat{\pi}_{12} \cdots \hat{\pi}_{NN} \hat{U}^\dagger \rangle_{\hat{\rho}'_*} = Tr(\hat{\rho}'_* \hat{U} \hat{\pi}_{11} \hat{\pi}_{12} \cdots \hat{\pi}_{NN} \hat{U}^\dagger) = Tr(\hat{U}^\dagger \hat{\rho}'_* \hat{U} \hat{\pi}_{11} \hat{\pi}_{12} \cdots \hat{\pi}_{NN}) \\ &= Tr(\hat{\rho}_* \hat{\pi}_{11} \hat{\pi}_{12} \cdots \hat{\pi}_{NN}) = \langle \hat{\pi}_{11} \hat{\pi}_{12} \cdots \hat{\pi}_{NN} \rangle_{\hat{\rho}_*} = P(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN}) \end{aligned} \quad (2.44)$$

que es la condición de invarianza (2.39).

## 2.4. Descomposición espectral de sistemas dinámicos

Como describimos anteriormente, la jerarquía ergódica clásica clasifica el caos a partir del decaimiento de las correlaciones entre subconjuntos del espacio de fases de manera asintótica. También mencionamos que este hecho está de acuerdo con que el caos “genuino” sólo puede darse a tiempos grandes para el cual existen indicadores típicos tales como los exponentes de Lyapunov que expresan la inestabilidad exponencial del sistema.

En esta sección se describe otra caracterización asintótica del caos a partir del teorema de descomposición espectral de sistemas dinámicos (SDT, spectral decomposition theorem) que expresa la evolución temporal de cualquier densidad como una suma de funciones características donde la cantidad de términos de dicha descomposición da cuenta de la ergodicidad y *mixing* del sistema. Por medio del SDT se obtendrá una versión cuántica que permitirá extender los conceptos de ergodicidad y *mixing* al caso cuántico, relacionarlos con los niveles de la jerarquía ergódica cuántica y también dar una clasificación del espectro cuántico en dichos casos. A continuación describimos el teorema de descomposición espectral de sistemas dinámicos en su versión clásica. Todo el desarrollo de esta sección está basado en el trabajo [34].

### 2.4.1. El teorema de descomposición espectral de sistemas dinámicos

Con los preliminares matemáticos de teoría de densidades y operadores de Markov dados en la introducción, podemos presentar el teorema de descomposición espectral de sistemas dinámicos [7, pag. 88].

**Teorema de descomposición espectral (SDT1) (versión I)** *Sea  $P$  un operador de Markov constrictivo. Entonces existen un entero  $r$ , dos familias de funciones no negativas  $g_i \in D(X, \Sigma, \mu)$  y  $k_i \in L^\infty$  con  $i = 1, \dots, r$ , y un operador  $Q : L^1 \rightarrow L^1$  tal que para toda densidad  $f \in L^1$ ,  $Pf$  puede ser escrita como*

$$Pf(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i(f) g_i(x) + Qf(x) \quad (2.45)$$

siendo

$$\lambda_i(f) = \int_X f(x) k_i(x) d\mu(x) = \langle f(x), k_i(x) \rangle, \quad (2.46)$$

donde las funciones  $g_i$  y el operador  $Q$  tienen las siguientes propiedades:

- (i)  $g_i(x)g_j(x) = 0$  para todo  $i \neq j$ , es decir, las funciones  $g_i$  poseen soportes disjuntos;
- (ii) Para cada entero  $i$  existe un único entero  $\alpha(i)$  tal que  $Pg_i = g_{\alpha(i)}$ . Además,  $\alpha(i) = \alpha(j)$  si  $i \neq j$  y por lo tanto el operador  $P$  actúa como una permutación entre las funciones  $g_i$ ;
- (iii)  $\|P^n Qf\| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Asumiendo que la evolución temporal dada por la familia de transformaciones  $\{T_t\}$  posee un operador de Frobenius-Perron constrictivo, entonces la ecuación (2.45) describe la evolución temporal discretizada de cualquier densidad  $f$ . La misma está expresada por un término que oscila entre las funciones  $g_i$  más otro, denotado por  $Qf$ , que tiende a cero para tiempos grandes y que está asociado con el proceso de relajación como veremos a continuación. Usando la propiedad (ii) del SDT en la ec. (2.45) se obtiene

$$P^n f(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i(f) g_{\alpha^n(i)}(x) + P^{n-1} Qf(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_{\alpha^{-n}(i)}(f) g_i(x) + Q_n f(x)$$

donde  $Q_n f(x) = P^{n-1} Qf(x)$  y  $\alpha^{-n}(i)$  es la permutación inversa de  $\alpha^n(i)$ .

Cuando el espacio medible  $\Gamma$  es normalizable (o sea,  $\mu(\Gamma) = 1$ ) y el operador de Markov  $P$  posee una densidad estacionaria constante  $f_*$  (si  $P$  es el operador de Frobenius-Perron esto es equivalente a que  $\mu_f$  sea invariante [7, pag. 46]) el teorema de descomposición espectral adopta la siguiente forma [7, pag. 90].

**Teorema de descomposición espectral (SDT2) (versión II)** Sean  $(\Gamma, \Sigma, \mu)$  un espacio medible normalizado y  $P : L^1 \rightarrow L^1$  un operador de Markov constrictivo. Si  $P$  posee una densidad estacionaria entonces la representación de  $P^n f$  para toda  $f \in L^1$  adopta la forma simple

$$P^n f(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_{\alpha^{-n}(i)}(f) \bar{1}_{A_i}(x) + Q_n f(x) \quad (2.47)$$

donde  $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$  es una partición de  $\Gamma$ , siendo

$$\bar{1}_{A_i}(x) = \frac{1}{\mu(A_i)} 1_{A_i} \quad (2.48)$$

$$\mu(A_i) = \mu(A_j) \quad \text{si} \quad j = \alpha^n(i) \quad \text{para algún } n$$

Escrito en esta versión II, el teorema de descomposición espectral permite caracterizar los niveles de la jerarquía ergódica clásica por medio de la permutación  $\alpha$ . Este es el contenido del siguiente teorema [7, pag. 92–94].

**El Teorema de descomposición espectral y la jerarquía ergódica:** Sean  $(\Gamma, \Sigma, \mu)$  un espacio medible normalizado y  $P : L^1 \rightarrow L^1$  un operador de Markov constrictivo. Entonces

- (a)  $P$  es ergódico si y sólo si la permutación  $\alpha$  es cíclica.
- (b) Si en la descomposición dada por (2.47) se tiene  $r = 1$ , entonces  $P$  es exacto.
- (c) Si  $P$  es mixing, entonces  $r = 1$  en la descomposición de (2.47).

Notemos que bajo las hipótesis de este teorema se tiene que  $P$  mixing implica  $P$  exacto, y dado que  $P$  exacto implica  $P$  mixing se sigue que  $P$  es mixing si y sólo si  $r = 1$ . Por lo tanto, el teorema da una condición necesaria y suficiente para que  $P$  sea mixing, es decir para que la descomposición (2.47) posea un solo término.

Dado un sistema dinámico  $(\Gamma, \Sigma, \mu, \tau)$  hemos visto que la constrictividad de un operador de Markov y la normalización del espacio medible  $\Gamma$  son suficientes para garantizar la existencia de una densidad estacionaria y por lo tanto, para obtener una representación de la evolución temporal de cualquier densidad por medio del SDT, cuya interpretación física es la siguiente. Si el Hamiltoniano clásico es tal que el operador de Frobenius–Perron asociado a la evolución temporal  $T$  dada por las ecuaciones de Hamilton admite una densidad de equilibrio  $f_*$  (es decir,  $Pf_* = f_*$ ), entonces en el límite asintótico ( $n \rightarrow \infty$ ) cualquier densidad  $f$  que caracterice el estado inicial del sistema oscilará entre funciones características  $\bar{1}_{A_i}(x)$  más un término  $Q_n f(x)$  tendiendo a cero.

### 2.4.2. Una versión cuántica del teorema de descomposición espectral de sistemas dinámicos (QSDT)

La motivación original que surgió para la búsqueda de una versión cuántica del Teorema de descomposición espectral descrito, estuvo basada en una caracterización alternativa de los sistemas cuánticos caóticos, además de la que proviene de QEH.

En ese sentido y para mantener un amplio grado de generalidad de los sistemas cuánticos caóticos, que en muchos casos son descritos por medio de sistemas abiertos, supondremos que el álgebra cuántica  $\mathcal{A}$  contiene observables no necesariamente hermíticos. Esta relajación de la condición de hermiticidad está motivada por las siguientes razones.

- El interés en el estudio de Hamiltonianos no hermíticos relacionados con la interpretación de fenómenos de transporte, resonancia nuclear, típicos de los sistemas abiertos.
- En sistemas de *scattering* uno puede considerar resonancias cuánticas, es decir estados cuasiestacionarios, en vez de soluciones de scattering [43]. Estas resonancias, cuyos autovalores poseen parte imaginaria no nula, juegan un rol en los sistemas abiertos similar al de los autoestados en los sistemas cerrados.
- Cualquier medida sobre un sistema ondulatorio cambia drásticamente sus propiedades convirtiendo niveles de energía discretos en resonancias que pueden ser descritas por un Hamiltoniano no hermítico [44, 45, 46].
- Con el propósito de tener en cuenta evoluciones temporales no unitarias que aparecen en la descripción de sistemas cuánticos abiertos, la introducción de observables no hermíticos se convierte en algo natural y fundamental desde el punto de vista teórico.
- Los operadores no hermíticos son frecuentemente usados para representar matemáticamente a potenciales que describen procesos de ionización o disociación en sistemas cuánticos abiertos, causando que el sistema se divida en subsistemas no interactuantes que se mueven libremente [46].
- El valor de expectación complejo de un observable no hermítico  $\hat{O}$  dado por  $\langle \hat{O} \rangle = |A_{\hat{O}}| e^{i\alpha}$  puede ser físicamente interpretado postulando que el módulo  $|A_{\hat{O}}|$  y la fase  $\alpha$  son cantidades medibles [46].

Presentaremos una versión cuántica del SDT cuyas conclusiones serán válidas para sistemas cuánticos abiertos y cerrados [34]. Es interesante señalar una aproximación entrópica del caos cuántico relativa a los sistemas cuánticos abiertos que considera [47]: “la aproximación de conectar el caos con la impredecibilidad de los resultados obtenidos a partir del proceso de medición es el camino correcto en el caso cuántico”. Es decir que desde la aproximación entrópica el caos en los sistemas cuánticos sólo puede darse genuinamente como consecuencia del azar intrínseco de los resultados de la medición cuántica, y por ende, suscribe los mismos a la presencia de un entorno con el cual se produzcan estas mediciones. Señalamos que el punto de vista que nosotros adoptaremos es de carácter más general, incluyendo la posibilidad de caos cuántico tanto en sistemas abiertos como cerrados, que lo podemos resumir en el siguiente esquema.

*sistemas cuánticos cerrados*  $\longrightarrow$  *observables hermiticos*  $\longrightarrow$  *caos cuántico “intrínseco”*

*sistemas cuánticos abiertos*  $\longrightarrow$  *observables no hermiticos*  $\longrightarrow$  *caos cuántico “genuino”*

Este esquema muestra la relación entre los operadores hermíticos (no hermíticos) y las evoluciones unitarias (no unitarias) en el contexto de los sistemas cerrados (abiertos).

La aproximación entrópica se encuentra respaldada sobre la base de la interacción del sistema cuántico con su ambiente, dando como resultado (y bajo ciertos regímenes) una dinámica caótica como puede verse en sistemas de muchos espines, billares cuánticos de microondas, etc. Por otro lado, sistemas caóticos cerrados como el billar de Sinai presentan una manifestación del caos cuántico, el *dephasing*, como resultado de una decoherencia dinámica producto de la evolución caótica de un paquete de ondas planas coherente inicial [48].

Teniendo en cuenta estas consideraciones previas, dado un sistema cuántico  $S$  y su límite clásico  $S_{cl}$ , para obtener una versión cuántica del teorema de descomposición espectral de sistemas dinámicos asumiremos la siguiente hipótesis:

*Si  $\hat{U}_t$  representa el operador de evolución de  $S$  entonces la correspondiente evolución clásica  $T_t$  de  $S_{cl}$  posee un operador de Frobenius–Perron constrictivo  $P_t$ .*

Esta hipótesis nos permite garantizar la existencia de una densidad de equilibrio  $f_*$  y en consecuencia, la aplicación de SDT sobre  $S_{cl}$ , a partir del cual obtenemos la siguiente versión cuántica cuya demostración se encuentra en el Apéndice.

### **Teorema 2.7 (Versión cuántica del teorema de descomposición espectral–QSDT)**

*Sean  $\hat{\rho}$  un estado y  $\hat{O}$  un observable. Entonces existen estados  $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots, \hat{\rho}_r$ ; observables  $\hat{O}_1, \hat{O}_2, \dots, \hat{O}_r$ ; una permutación  $\alpha : \{1, \dots, r\} \longrightarrow \{1, \dots, r\}$  y  $\tilde{\rho}_0 \in \mathcal{A}^l$  tales que*

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(n)} = \sum_{i=1}^r \lambda_{\alpha^{-n}(i)} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_i} + \langle \hat{O} \rangle_{\tilde{\rho}_0(n-1)} \quad (2.49)$$

*siendo  $\hat{\rho}(n) = \hat{U}(n)\hat{\rho}\hat{U}(n)^\dagger$  con  $\hat{U}(n)$  un operador de evolución temporal discreto, y  $\lambda_i(\hat{\rho}) = \langle \hat{O}_i \rangle_{\hat{\rho}}$ . Además,  $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots, \hat{\rho}_r$  y  $\tilde{\rho}_0$  poseen las siguientes propiedades:*

- (i) *Los estados  $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots, \hat{\rho}_r$  son ortogonales con la norma Hilbert–Schmidt, es decir  $\text{Tr}(\hat{\rho}_i\hat{\rho}_j) = 0$  si  $i \neq j$ . Mas aún, se tiene la siguiente descomposición de la identidad*

$$\hat{I} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \hat{\rho}_i \quad \text{con } \alpha_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i = \frac{1}{h^{N+1}} \quad ; \quad (2.50)$$



- (ii) Para cada entero  $i$  existe un único entero  $\alpha(i)$  tal que  $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{U}^\dagger \hat{\rho}_i \hat{U}} = \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_{\alpha(i)}}$  con  $\alpha(i) \neq \alpha(j)$  si  $i \neq j$ . Es decir que el operador de evolución permuta los estados  $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots, \hat{\rho}_r$ .
- (iii)  $\langle \hat{O} \rangle_{\tilde{\rho}_0(n-1)} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Si ahora combinamos SDT y QSDT obtenemos la siguiente caracterización de los niveles de la jerarquía ergódica cuántica y también una posible extensión cuántica del nivel exacto en términos de la descomposición dada por (2.49).

**Teorema 2.8 (La jerarquía ergódica cuántica en términos del QSDT)** *Sea  $S$  un sistema cuántico con límite clásico, que denotamos por  $S_{cl}$ . Supongamos que  $\hat{U}$  es un operador de evolución temporal discretizado cuyo análogo clásico  $T$ , que representa la evolución temporal de  $S_c$ , posee un operador de Frobenius-Perron que es de Markov y constrictivo. Entonces*

- (a)  $\hat{U}$  es ergódico cuántico  $\iff$  la permutación  $\alpha$  es cíclica.
- (b) Si en la descomposición de (2.49) se tiene  $r = 1 \implies \hat{U}$  es exacto cuántico.
- (c) Si  $\hat{U}$  es mixing cuántico  $\implies r = 1$  en la descomposición (2.49).

Análogamente a su versión relativa a la jerarquía ergódica clásica, se tiene que  $\hat{U}$  es exacto cuántico  $\iff \hat{U}$  es mixing cuántico  $\iff r = 1$ .

### 2.4.3. QSDT y el espectro cuántico

Además de dar una caracterización de los valores medios de los niveles ergódico cuántico y mixing de la jerarquía ergódica cuántica, QSDT conjuntamente con el teorema 2.8 proporcionan una conexión entre estos niveles y el tipo de espectro que éstos presentan. A lo largo de toda la sección asumiremos que la evolución temporal está discretizada y está dada por el Hamiltoniano  $\hat{H}$  del sistema cuántico, es decir consideramos que el operador de evolución temporal  $\hat{U}(n)$  es de la forma

$$\hat{U}(n) = e^{-i \frac{\hat{H}}{\hbar} \tau n} \quad (2.51)$$

donde  $\tau > 0$  es un parámetro real que define los pasos de la discretización. Cabe señalar que en diversos sistemas cuánticos de interés aparece naturalmente una evolución temporal discretizada, como vimos con el ejemplo del rotor pateado en la sección 2.2.1.

#### Espectro discreto real

Asumamos que el espectro de energía es discreto y finito. Sea  $\{|1\rangle, \dots, |N\rangle\}$  una base de autovectores con sus correspondientes autovalores  $E_1, \dots, E_N$  y sus autofrecuencias  $\omega_1 = \frac{E_1}{\hbar}, \dots, \omega_N = \frac{E_N}{\hbar}$ . Consideremos un estado inicial  $\hat{\rho}$  y un observable  $\hat{O}$ . Entonces podemos expandir a  $\{\hat{\rho}$  en la base  $|1\rangle, \dots, |N\rangle\}$  obteniendo

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^N \rho_i |i\rangle \langle i| + \sum_{i \neq j}^N \rho_{ij} |i\rangle \langle j| \quad (2.52)$$

Llamemos  $O_{ij}$  a los elementos matriciales de  $\hat{O}$  en la base  $\{|1\rangle, \dots, |N\rangle\}$ , es decir  $O_{ij} = \langle i | \hat{O} | j \rangle$ . Entonces, el valor medio de  $\hat{O}$  en el estado  $\hat{\rho}$  después de  $n$  intervalos  $\tau$  está dado por

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(\tau n)} = \text{Tr}(\hat{\rho}(\tau n) \hat{O}) = \text{Tr}(\hat{U}(\tau n) \hat{\rho} \hat{U}(\tau n)^\dagger \hat{O}) = \sum_{i=1}^N \rho_i O_{ii} + \sum_{i \neq j}^N \rho_{ij} O_{ij} e^{-i(\omega_i - \omega_j) \tau n} \quad (2.53)$$

Por otro lado, QSDT nos da la descomposición de  $\langle O \rangle_{\hat{\rho}(\tau n)}$  en la forma

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(\tau n)} = \sum_{i=1}^r \lambda_{\alpha^{-n}(i)}(\hat{\rho}) \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_i} + \langle \hat{O} \rangle_{\tilde{\rho}_0(n-1)} \quad (2.54)$$

Igualando (2.53) y (2.54) se tiene

$$\sum_{i=1}^N \rho_i O_{ii} + \sum_{i \neq j}^N \rho_{ij} O_{ij} e^{-i(\omega_i - \omega_j)\tau n} = \sum_{i=1}^r \lambda_{\alpha^{-n}(i)}(\hat{\rho}) \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_i} + \langle \hat{O} \rangle_{\tilde{\rho}_0(n-1)} \quad (2.55)$$

A partir de esta ecuación podemos hacer las siguientes observaciones.

- (a) Si suponemos que el sistema es ergódico cuántico entonces por el teorema 2.8 la permutación  $\alpha$  es cíclica y de aquí se sigue que  $\sum_{i=1}^r \lambda_{\alpha^{-n}(i)}(\hat{\rho}) \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_i}$  debe ser una función periódica con período  $r$ . Además, debido a que  $\langle \hat{O} \rangle_{\tilde{\rho}_0(n-1)}$  tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$  entonces el lado derecho de (2.55) es cuasiperiódica en función de  $n$ . Ahora, el lado izquierdo de (2.55) contiene el término  $\sum_{i=1}^N \rho_i O_{ii}$  que es constante y por lo tanto se sigue que  $\sum_{i \neq j}^N \rho_{ij} O_{ij} e^{-i(\omega_i - \omega_j)\tau n}$  es una función cuasiperiódica de  $n$ . Esta observación determina condiciones sobre las frecuencias  $\omega_1, \dots, \omega_N$ .
- (b) Supongamos ahora que  $\omega_1, \dots, \omega_N$  están racionalmente relacionadas. Esto significa que para todo  $i, j = 1, \dots, N$  existen  $k_{ij}, l_{ij} \in \mathbb{N}$  tales que

$$\frac{\omega_i}{\omega_j} = \frac{k_{ij}}{l_{ij}} \quad (2.56)$$

Entonces, se puede probar que  $\sum_{i \neq j}^N \rho_{ij} O_{ij} e^{-i(\omega_i - \omega_j)\tau n}$  es una función periódica de  $n$  de período  $\tau r$  [34]. Por lo tanto, si asumimos que el sistema es ergódico cuántico, por (a) se sigue que  $\sum_{i \neq j}^N \rho_{ij} O_{ij} e^{-i(\omega_i - \omega_j)\alpha n}$  es función cuasiperiódica de  $n$ . Luego  $\sum_{i \neq j}^N \rho_{ij} O_{ij} e^{-i(\omega_i - \omega_j)\tau n}$  es periódica y cuasiperiódica simultáneamente, lo cual es un absurdo.

Resumiendo, dado un sistema cuántico  $S$  de espectro discreto, real y finito tal que su límite clásico  $S_{cl}$  con una evolución  $T_t$  tiene asociado un operador de Frobenius–Perron  $P$  de Markov y constrictivo; y considerando que la evolución cuántica es de la forma  $\hat{U}(n) = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}\tau n}$  se tienen los siguientes condiciones respecto a la ergodicidad cuántica:

- Si  $\hat{U}$  es ergódico cuántico entonces los valores medios  $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(n)}$  son funciones cuasiperiódicas de  $n$  para todo estado inicial  $\hat{\rho}$  y observable  $\hat{O}$ .
- Si las autofrecuencias  $\omega_1, \dots, \omega_N$  están racionalmente relacionadas entonces  $\hat{U}$  no es ergódico cuántico.
- Si  $\hat{U}$  es ergódico cuántico entonces  $\omega_1, \dots, \omega_N$  no están racionalmente relacionadas.

Es interesante observar que si asociamos las autofrecuencias  $\omega_1, \dots, \omega_N$  con las correspondientes a las velocidades angulares de  $N$  osciladores independientes y autónomos, entonces la segunda condición es idéntica a la ergodicidad de la *rotación sobre el toro  $d$ -dimensional* en [7, pag. 190]. Además, vemos que la tercera condición corresponde al contrarrecíproco de la segunda.

### Espectro discreto complejo

Ahora consideraremos que el espectro es discreto, finito y complejo. Este es el caso de los sistemas cuánticos descritos por un Hamiltoniano efectivo no hermítico  $\hat{H}_{\text{ef}}$  que aparecen típicamente en física atómica, molecular, nuclear y en las reacciones químicas. Los autoestados con autovalores complejos representan estados, denominados “cuasiestacionarios”, de un sistema cuántico abierto en interacción con un ambiente donde la parte imaginaria de los autovalores está asociada con los decaimientos de éstos.

Nuevamente, consideramos que la evolución temporal después de  $n$  pasos sucesivos está dada por  $\hat{U}(n) = e^{-i\frac{\hat{H}_{\text{ef}}}{\hbar}\tau n}$  siendo  $\tau > 0$  un parámetro real que define el paso de la discretización. Sean  $E_1 = \hbar\omega_1 + i\gamma_1, E_2 = \hbar\omega_2 + i\gamma_2, \dots, E_N = \hbar\omega_N + i\gamma_N$  los autovalores de  $\hat{H}_{\text{ef}}$ . La no hermiticidad de  $\hat{H}_{\text{ef}}$  implica la existencia de dos bases de autovectores llamados  $\{\langle \tilde{1}|, \langle \tilde{2}|, \dots, \langle \tilde{N}| \}$  autovectores a izquierda y  $\{|1\rangle, |2\rangle, \dots, |N\rangle\}$  autovectores a derecha

$$\hat{H}_{\text{ef}}|j\rangle = E_j|j\rangle \quad , \quad \langle \tilde{j}|\hat{H}_{\text{ef}} = \langle \tilde{j}|E_j \quad j = 1, \dots, N \quad (2.57)$$

que satisfacen

$$\begin{aligned} \langle \tilde{j}|k\rangle &= \delta_{jk} \quad j, k = 1, \dots, N \quad (\text{biortogonalidad}) \\ \sum_{j=1}^N |j\rangle\langle \tilde{j}| &= \hat{I} \quad (\text{completitud}) \end{aligned} \quad (2.58)$$

siendo  $\hat{I}$  el operador identidad. Los autovalores  $E_j = \hbar\omega_j + i\gamma_j$  contienen las autoenergías  $\hbar\omega_j$  y los anchos de resonancia  $-\gamma_j > 0$ . En un caso más realista podemos suponer que sólo los primeros  $K$  autovalores son reales siendo  $1 \leq K \leq N$ , es decir  $\gamma_j = 0$  para todo  $j = 1, \dots, K$ . Podemos expresar cualquier estado  $\hat{\rho}$  en la base  $\{|j\rangle\}_{j=1}^N$  y cobase  $\{|\langle \tilde{k}|\}_{k=1}^N$  como

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^N \rho_i |i\rangle\langle \tilde{i}| + \sum_{j \neq j'}^N \rho_{jj'} |j\rangle\langle \tilde{j}'| \quad (2.59)$$

A partir de esta ecuación se tiene

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\tau n) &= \hat{U}(n)\hat{\rho}\hat{U}^\dagger(n) = \hat{U}(n) \left( \sum_{i=1}^N \rho_i |i\rangle\langle \tilde{i}| + \sum_{j \neq j'}^N \rho_{jj'} |j\rangle\langle \tilde{j}'| \right) \hat{U}(n)^\dagger = \\ &= \sum_{i=1}^K \rho_i |i\rangle\langle \tilde{i}| + \sum_{j \neq j'}^K \rho_{jj'} e^{-i(\omega_j - \omega_{j'})\tau n} |j\rangle\langle \tilde{j}'| + \sum_{j=K+1}^N \rho_j e^{2\tau n \frac{\gamma_j}{\hbar}} |j\rangle\langle \tilde{j}| + \\ &+ \sum_{j \neq j', j \text{ ó } j' \in \{K+1, \dots, N\}} \rho_{jj'} e^{-i(\omega_j - \omega_{j'})\tau n} e^{\frac{(\gamma_j + \gamma_{j'})}{\hbar}\tau n} |j\rangle\langle \tilde{j}'| \end{aligned} \quad (2.60)$$

Los vectores  $|K+1\rangle, |K+2\rangle, \dots, |N\rangle$  representan estados de un sistema abierto en interacción con un ambiente y los coeficientes de las últimas dos sumas pueden interpretarse como las probabilidades de hallar una partícula en uno de los estados  $|K+1\rangle, |K+2\rangle, \dots, |N\rangle$  “dentro del sistema”. Dado que éstos coeficientes decrecen exponencialmente y representan las probabilidades de transición a autoestados cuasiestacionarios, sus anchos de resonancia  $-\gamma_j$  están relacionados con las vidas medias  $\Gamma_j$  a través de  $-\gamma_j \sim \frac{\hbar}{\Gamma_j}$ .

El siguiente paso es mostrar cómo los estados cuasiestacionarios pueden ser interpretados en términos del QSDT. A partir de (2.60) el valor medio de un observable  $\hat{O}$  en el estado  $\hat{\rho}$  después de  $n$  intervalos  $\tau$  está dado por

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(\tau n)} &= \sum_{i=1}^K \rho_i O_i + \sum_{j \neq j'}^K \rho_{jj'} O_{jj'} e^{-i(\omega_j - \omega_{j'})\tau n} + \sum_{j=K+1}^N \rho_j O_j e^{2\tau n \frac{\gamma_j}{\hbar}} + \\ &\quad \sum_{j \neq j', j \text{ ó } j' \in \{K+1, \dots, N\}} \rho_{jj'} O_{jj'} e^{-i(\omega_j - \omega_{j'})\tau n} e^{\frac{(\gamma_j + \gamma_{j'})}{\hbar} \tau n} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Por lo tanto, por el QSDT se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \lambda_{\alpha^{-n}(i)} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_i} + \langle \hat{O} \rangle_{\tilde{\rho}_0(n-1)} &= \sum_{i=1}^K \rho_i O_i + \sum_{j \neq j'}^K \rho_{jj'} O_{jj'} e^{-i(\omega_j - \omega_{j'})\tau n} + \\ &\quad \sum_{j=K+1}^N \rho_j O_j e^{2\beta n \frac{\gamma_j}{\hbar}} + \sum_{j \neq j', j \text{ ó } j' \in \{K+1, \dots, N\}} \rho_{jj'} O_{jj'} e^{-i(\omega_j - \omega_{j'})\tau n} e^{\frac{(\gamma_j + \gamma_{j'})}{\hbar} \tau n} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Dado que  $\langle \hat{O} \rangle_{\tilde{\rho}_0(n-1)} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y las dos últimas sumas del lado derecho de esta ecuación son los únicos términos que decaen, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \lambda_{\alpha^{-n}(i)} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_i} &= \sum_{i=1}^K \rho_i O_i + \sum_{j \neq j'}^K \rho_{jj'}^* O_{jj'} e^{-i(\omega_j - \omega_{j'})\tau n} \\ \langle \hat{O} \rangle_{\tilde{\rho}_0(n-1)} &= \sum_{j=K+1}^N \rho_j O_j e^{2\beta n \frac{\gamma_j}{\hbar}} + \sum_{j \neq j', j \text{ ó } j' \in \{K+1, \dots, N\}} \rho_{jj'}^* O_{jj'} e^{-i(\omega_j - \omega_{j'})\tau n} e^{\frac{(\gamma_j + \gamma_{j'})}{\hbar} \tau n} \end{aligned} \quad (2.63)$$

A partir de (2.63) y QSDT concluimos que el número de estados cuasiestacionarios  $|K+1\rangle, |K+2\rangle, \dots, |N\rangle$  determina la naturaleza caótica del sistema cuántico. Por ejemplo, si sólo tenemos un único autovalor real  $E_1$  entonces tenemos máximo número de estados cuasiestacionarios  $|2\rangle, |3\rangle, \dots, |N\rangle$ . En este caso  $K = 1$  y  $\sum_{i=1}^r \lambda_{\alpha^{-n}(i)} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_i}$  es igual a  $\rho_1 O_1$ . Entonces  $r = 1$ , es decir que el sistema es *mixing cuántico*. Cuando  $K = 2$  tenemos dos autovalores reales  $E_1, E_2$ , y  $\sum_{i=1}^r \lambda_{\alpha^{-n}(i)} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_i}$  es igual a  $\rho_1 O_1 + \rho_2 O_2 + \rho_{12}^* O_{12} e^{-i\frac{(\omega_1 - \omega_2)}{\hbar} \beta n} + \rho_{21}^* O_{21} e^{-i\frac{(\omega_2 - \omega_1)}{\hbar} \beta n}$  que es una función oscilatoria de  $n$  si  $\omega_1, \omega_2$  están racionalmente relacionadas. En ese caso la permutación  $\alpha(n)$  resulta cíclica y de acuerdo al teorema 2.8, condición (a) se deduce que el sistema es *ergódico cuántico*.

Podemos ver que en el caso de espectro finito existe una diferencia sustancial entre tener autovalores reales y complejos. En el caso de autovalores reales si las frecuencias están racionalmente relacionadas el sistema no es ergódico cuántico. Mientras que en el caso de espectro complejo si las partes reales de los autovalores están racionalmente relacionadas entonces el sistema es ergódico cuántico. Esto es así porque en el caso complejo el término de decaimiento del QSDT está dado por las exponenciales decrecientes cuyos decaimientos contienen los anchos de resonancia  $-\gamma_j$ . En resumen, QSDT brinda una caracterización de los sistemas cuánticos abiertos de espectro discreto complejo donde los términos exponencialmente decrecientes de los valores medios están asociados con el término de decaimiento de QSDT, dado por  $\langle \hat{O} \rangle_{\tilde{\rho}_0(n-1)}$ .

### 2.4.4. Ejemplo: Billar de microondas

Los billares de microondas son ejemplos especiales de sistemas de scattering [8]. Típicamente, para determinar el espectro de tales sistemas se utilizan antenas como canales de dispersión. Un acoplamiento externo determina las posiciones de las resonancias y sus respectivos anchos, donde el espectro se ve modificado por la presencia del acoplamiento entre las antenas. Podemos comenzar el análisis con una expresión de la matriz de dispersión

$$\hat{S} = \hat{1} - 2i\hat{W}^\dagger \frac{\hat{1}}{E - \hat{H}_0 + i\hat{W}\hat{W}^\dagger} \hat{W} \quad (2.64)$$

donde  $\hat{1}$  es la matriz identidad,  $\hat{H}_0$  es el Hamiltoniano no perturbado que se asume que es una matriz truncada  $N \times N$ -dimensional y los elementos matriciales  $W_{nk}$  de  $\hat{W}$  contienen información acerca de las fuerzas de acoplamiento entre el  $k$ -ésimo canal y la  $n$ -ésima resonancia. Los polos de la matriz de dispersión son los autovalores del *Hamiltoniano efectivo*

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - i\hat{W}\hat{W}^\dagger \quad (2.65)$$

La información acerca de los anchos y saltos de transición inducidos por las antenas está completamente contenida en los autovalores del Hamiltoniano efectivo  $\hat{H}$ . Los Hamiltonianos efectivos de este tipo son utilizados ampliamente en el ámbito de la física nuclear [46]. Vamos a focalizarnos solamente en el caso límite de fuerzas de acoplamiento grandes donde  $\hat{H}$  está dominado por el término  $-i\hat{W}\hat{W}^\dagger$ . La clave es seleccionar una base donde este término sea diagonal y  $\hat{H}_0$  pueda ser tratado como una perturbación. Si tenemos  $K$  canales sin pérdida de generalidad podemos asumir que los  $K$  vectores  $\hat{w}_k$  con componentes  $W_{nk}$  son mutuamente ortogonales,

$$\hat{w}_k^\dagger \hat{w}_l = \sum_n W_{nk}^* W_{nl} = |\hat{w}_k|^2 \delta_{kl} \quad (2.66)$$

Entonces podemos tomar la base ortogonal compuesta por los  $K$  vectores  $\hat{v}_k = \frac{\hat{w}_k}{|\hat{w}_k|}$  y los  $N - K$  vectores  $\hat{u}_\alpha$  donde  $\hat{H}_0$  es diagonal en el subespacio generado por los vectores  $\hat{u}_\alpha$ . Usando teoría de perturbaciones, a primer orden los autovalores de  $\hat{H}$  son [8]

$$\begin{aligned} E_l &= \hat{v}_l^\dagger \hat{H}_0 \hat{v}_l - i|\hat{w}_l| & l \leq K \\ E_l &= \hat{u}_l^\dagger \hat{H}_0 \hat{u}_l & l > K \end{aligned} \quad (2.67)$$

Ahora podemos considerar el Hamiltoniano

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{l=1}^K E_l |\nu_l\rangle \langle \tilde{\nu}_l| + \sum_{m=K+1}^N E_m |u_m\rangle \langle \tilde{u}_m| \quad (2.68)$$

el cual es una aproximación a primer orden del Hamiltoniano efectivo  $\hat{H}$ . Hemos renombrado  $\hat{v}_l$ ,  $\hat{u}_m$  como  $|\nu_l\rangle$ ,  $|u_m\rangle$  respectivamente, y el Hamiltoniano  $\hat{\mathcal{H}}$  ha sido expresado en dos sumatorias  $\sum_{l=1}^K$ ,  $\sum_{m=K+1}^N$  para analizar los diferentes casos según el número de canales  $K$ . Los vectores a izquierda  $\langle \tilde{\nu}_l|$ ,  $\langle \tilde{u}_m|$  son aquellos que están definidos por (2.57) y (2.58). Sea  $\hat{\rho}$  un estado dado por

$$\hat{\rho} = \sum_{l=1}^K \sum_{l'=1}^K \rho_{ll'} |\nu_l\rangle \langle \tilde{\nu}_{l'}| + \sum_{m=K+1}^N \sum_{m'=K+1}^N \rho_{mm'} |u_m\rangle \langle \tilde{u}_{m'}| + \left\{ \sum_{\sigma=1}^K \sum_{\lambda=K+1}^N \rho_{\sigma\lambda} |\nu_\sigma\rangle \langle \tilde{u}_\lambda| + h.c. \right\} \quad (2.69)$$

siendo  $\rho_{ij} = \langle i|\hat{\rho}|j\rangle$  para todo  $i, j = 1, \dots, N$  y las primeras dos sumas de (2.69) los bloques diagonales correspondientes a los subespacios generados por  $\{|\nu_l\rangle\}_{l=1}^K$  y  $\{|u_m\rangle\}_{m=K+1}^N$  respectivamente. El tercer término de (2.69) contiene elementos no diagonales de  $\hat{\rho}$  que conectan subespacios generados por  $\{|\nu_l\rangle\}_{l=1}^K$ ,  $\{|u_m\rangle\}_{m=K+1}^N$  y *h.c.* denota la operación de conjugado hermítico. Renombremos  $\hat{\nu}_l^\dagger \hat{H}_0 \hat{\nu}_l$  y  $\hat{u}_m^\dagger \hat{H}_0 \hat{u}_m$  como  $\gamma_l$  y  $\omega_m$  para todo  $l, m$ . El operador de evolución  $\hat{U}(n)$  está dado por  $e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}\tau n}$  así que  $\hat{\rho}$  después de  $n$  intervalos  $\tau$  es

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\tau n) &= \hat{U}(n)\hat{\rho}\hat{U}(n)^\dagger = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}\tau n}\hat{\rho}e^{i\frac{\hat{H}}{\hbar}\tau n} = \sum_{l=1}^K \sum_{l'=1}^K \rho_{ll'} e^{-\frac{(|\hat{w}_l|+|\hat{w}_{l'}|)\tau n}{\hbar}} e^{-i(\gamma_l-\gamma_{l'})\tau n} |\nu_l\rangle\langle\nu_{l'}| \\ &+ \sum_{m=K+1}^N \sum_{m'=K+1}^N \rho_{mm'} e^{-i(\omega_m-\omega_{m'})\tau n} |u_m\rangle\langle u_{m'}| + \left\{ \sum_{\sigma=1}^K \sum_{\lambda=K+1}^N \rho_{\sigma\lambda} e^{-\frac{|\hat{w}_\sigma|\tau n}{\hbar}} e^{-i(\gamma_\sigma-\omega_\lambda)\tau n} |\nu_\sigma\rangle\langle u_\lambda| + h.c. \right\} \end{aligned} \quad (2.70)$$

Entonces, el valor medio de un observable  $\hat{O}$  en el estado  $\hat{\rho}$  luego de  $n$  intervalos  $\tau$  es

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(\tau n)} &= \text{tr}(\hat{\rho}(\tau n)\hat{O}) = \sum_{l=1}^K \sum_{l'=1}^K \rho_{ll'} O_{ll'} e^{-\frac{(|\hat{w}_l|+|\hat{w}_{l'}|)\tau n}{\hbar}} e^{-i(\gamma_l-\gamma_{l'})\tau n} \\ &+ \sum_{m=K+1}^N \sum_{m'=K+1}^N \rho_{mm'} O_{mm'} e^{-i(\omega_m-\omega_{m'})\tau n} + \left\{ \sum_{\sigma=1}^K \sum_{\lambda=K+1}^N \rho_{\sigma\lambda} O_{\sigma\lambda} e^{-\frac{|\hat{w}_\sigma|\tau n}{\hbar}} e^{-i(\gamma_\sigma-\omega_\lambda)\tau n} + h.c. \right\} \end{aligned} \quad (2.71)$$

con  $O_{ij} = \langle i|\hat{O}|j\rangle$  para todo  $i, j = 1, \dots, N$ . De (2.71) vemos que la primera y tercera sumas decaen exponencialmente cuando  $n \rightarrow \infty$  mientras que la segunda suma oscila de acuerdo a las diferencias  $\omega_m - \omega_{m'}$ . Esta observación es crucial en orden de analizar diferentes casos según el número de canales  $K$ . Además, por el QSDT se tiene

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(\tau n)} = \sum_{i=1}^r \langle \hat{O}_{\alpha^{-n}(i)} \rangle_{\hat{\rho}} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_i} + \langle \hat{O} \rangle_{\tilde{\rho}_0(n-1)} \quad (2.72)$$

Considerando la observación anterior y comparando (2.71) y (2.72) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \langle \hat{O}_{\alpha^{-n}(i)} \rangle_{\hat{\rho}} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_i} &= \sum_{m=K+1}^N \sum_{m'=K+1}^N \rho_{mm'} O_{mm'} e^{-i(\omega_m-\omega_{m'})\tau n} \\ \langle \hat{O} \rangle_{\tilde{\rho}_0(n-1)} &= \sum_{l=1}^K \sum_{l'=1}^K \rho_{ll'} O_{ll'} e^{-\frac{(|\hat{w}_l|+|\hat{w}_{l'}|)\tau n}{\hbar}} e^{-i(\gamma_l-\gamma_{l'})\tau n} \\ &+ \left\{ \sum_{\sigma=1}^K \sum_{\lambda=K+1}^N \rho_{\sigma\lambda} O_{\sigma\lambda} e^{-\frac{|\hat{w}_\sigma|\tau n}{\hbar}} e^{-i(\gamma_\sigma-\omega_\lambda)\tau n} + h.c. \right\} \end{aligned} \quad (2.73)$$

La primera de las ecuaciones de (2.73) da la parte oscilatoria de  $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(n)}$  mientras que la segunda expresa sus términos de decaimiento. Esto puede ser considerado como una caracterización “global” de QSDT acerca del espectro a primer orden de los billares de microondas en el caso límite de grandes fuerzas de acoplamiento.

Yendo en más en detalle, consideremos un billar de microondas rectangular cuyos valores medios cuánticos están dados por (2.73). En este caso el Hamiltoniano no perturbado  $\hat{H}_0$  posee

autofrecuencias  $\gamma_l = \frac{\hat{v}_l^\dagger \hat{H}_0 \hat{v}_l}{\hbar}$ ,  $\omega_m = \frac{\hat{u}_m^\dagger \hat{H}_0 \hat{u}_m}{\hbar}$  las cuales podemos asumir que están racionalmente relacionadas para todo  $l = 1, \dots, K$ ;  $m = K + 1, \dots, N$ . Entonces por la observación de la sección 2.4.3. se tiene que la suma doble de la primera de las ecuaciones de (2.73) es una función periódica de  $n$ . Variando el número total de canales  $K$  podemos obtener diferentes transiciones caóticas desde el régimen integrable hasta el más caótico.

Comenzamos con  $K = 0$  que corresponde al caso *integrable*  $\hat{W} = 0$ . Entonces  $|\hat{w}_l| = 0$  para todo  $l = 1, \dots, K$  en (2.67) con lo cual cualquier valor medio cuántico no tendrá términos de decaimiento, esto es, todos los términos de  $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(n)}$  en (2.71) son oscilatorios. Puesto que no hay términos de decaimiento entonces QSDT no se aplica en este caso.

Caso  $1 \leq K < N - 1$ : En este caso  $\hat{W} \neq 0$  y tenemos un decaimiento exponencial del término que corresponde a  $\langle \hat{O} \rangle_{\tilde{\rho}_0(n-1)}$  con tiempos característicos  $\tau_{ll'} = \frac{\hbar}{|\hat{w}_l| + |\hat{w}_{l'}|}$ ,  $\tau_\sigma = \frac{\hbar}{|\hat{w}_\sigma|}$  para todo  $l, l', \sigma = 1, \dots, K$ . Dado que las frecuencias  $\omega_l$  están racionalmente relacionadas para todo  $m = K + 1, \dots, N$  entonces el lado derecho de la primera de las ecuaciones de (2.73) es una función periódica de  $n$ . Por lo tanto, a partir del teorema QSDT se tiene que el billar de microondas es *ergódico cuántico* para  $1 \leq K < N - 1$ . Este es el caso correspondiente al régimen pseudointegrable ( $K = 1$ ) y caótico ( $K > 1$ ).

Caso  $K = N - 1$ : Cuando  $K = N - 1$  tenemos que  $\langle \hat{O} \rangle_{\tilde{\rho}_0(n-1)}$  decae exponencialmente con tiempos característicos  $\tau_{ll'} = \frac{\hbar}{|\hat{w}_l| + |\hat{w}_{l'}|}$ ,  $\tau_\sigma = \frac{\hbar}{|\hat{w}_\sigma|}$  para todo  $l, l', \sigma = 1, \dots, N - 1$  y el lado derecho de la primera de las ecuaciones de (2.73) posee solo un único término,  $\rho_{NN} O_{NN}$ . Entonces por QSDT se sigue que  $r = 1$  y esto significa que el billar de microondas es *mixing cuántico*. Por lo tanto, si  $K = N - 1$  el billar de microondas es *mixing cuántico*. Este caso corresponde al régimen con número máximo de términos que decaen exponencialmente.

El caso  $K = N$  queda físicamente excluido, de lo contrario todos los valores cuánticos  $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(n)}$  tenderían a cero.

Por lo tanto, la aplicación de QSDT a los billares de microondas expresa que el incremento en el número de canales de acoplamiento  $K$  puede ser interpretado como transiciones caóticas desde el régimen integrable ( $K = 0$ ), pasando por el ergódico cuántico ( $1 < K \leq N - 1$ ) hasta alcanzar el *mixing cuántico* ( $K = N - 1$ ).

En la Tabla I se muestra esquemáticamente la caracterización QSDT de los billares de microondas en el límite de acoplamientos grandes, donde nuevamente las dimensiones del billar se han tomado de tal forma que las frecuencias del Hamiltoniano no perturbado  $\hat{H}_0$  están racionalmente relacionadas.

Tabla I: Caracterización QSDT de los billares de microondas

Número de canales $K$	Valores medios cuánticos $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(n)}$	Nivel, régimen
$K = 0$	puramente oscilatorio	ninguno, integrable
$1 \leq K < N - 1$	términos con decaimiento exponencial	<b>ergódico cuántico</b> , caótico
$K = N - 1$	máximo número de términos exponenciales	<b>mixing cuántico</b> , completamente caótico

## Capítulo 3

# Escalas temporales características

Los aspectos caóticos de los sistemas cuánticos se manifiestan dentro de escalas temporales características bien definidas, que son los rangos temporales en los cuales los comportamientos clásico y cuántico se solapan y descripciones semiclásicas de procesos típicos tales como la relajación, inestabilidad exponencial y localización entre otros, son posibles. Dado que toda descripción semiclásica implica tomar el límite clásico y las manifestaciones caóticas clásicas se realizan en el límite asintótico, entonces las escalas características del caos cuántico deben necesariamente poseer una estrecha relación tanto con el límite clásico como con el asintótico. A su vez, el surgimiento del caos en el límite clásico debe estar en concordancia con el Principio de Correspondencia. A continuación se describe el problema del caos en el límite clásico con el Principio de Correspondencia y la aproximación de la granulosidad como una posible solución al mismo.

### 3.1. Caos y el Principio de Correspondencia

Parece ser que Einstein fue el primero en darse cuenta de una posible amenaza del caos a la mecánica cuántica en un trabajo que fue ignorado por cuarenta años [49]. Una vista panorámica de esta incompatibilidad entre caos clásico y mecánica cuántica puede hallarse en [3, 10, 50, 51].

Para comprender esta amenaza del caos a la mecánica cuántica y en concordancia con la definición de Berry, una contribución al problema fue el límite clásico para sistemas cuánticos cerrados con espectro continuo [29]. Esta aproximación, llamada SID (del inglés “Self Induced Decoherence”, decoherencia autoinducida) está basada en la interferencia destructiva para un tiempo de decoherencia (finito o no) de la parte no diagonal de los valores medios cuánticos. Esta aproximación permite la utilización del lema de Riemann–Lebesgue para demostrar el límite clásico de una clase de sistemas cuánticos caóticos, como se realizamos en [32]. Ahora mostraremos cómo el caos pone cierta presión sobre el Principio de Correspondencia y de qué forma se puede evitar a partir del formalismo del límite clásico de sistemas cuánticos cerrados.

Cabe mencionar que una importante fuente de inspiración han sido los libros de Roland Omnès [52, 53], en los cuales se da una caracterización del caos cuántico como la evolución de una celda en el espacio de fases hacia otra distorsionada (llamada tipo ameba) como consecuencia de la dinámica caótica cuántica del sistema en cuestión. En este capítulo seguimos esencialmente y caracterizamos la distorsión de una celda, compuesta por cubos de tamaño mínimo dados por el Principio de Incertidumbre, a lo largo de su evolución dinámica caótica como la principal amenaza al Principio de Correspondencia. Asimismo, señalamos que la aproximación estándar de la granulosidad, es decir el hecho de tener un espacio de fases discretizado que en el caso



cuántico se debe al Principio de Incertidumbre, ya ha sido estudiado tanto en el caso clásico como en el cuántico por medio de la entropía de Kolmogorov–Sinai y sus versiones cuánticas [54, 55, 56, 57, 58]. En estas versiones, sus autores indican que no existe una amenaza al Principio de Correspondencia sino solamente la emergencia de una escala temporal típica logarítmica proporcional a  $\log \hbar^{-1}$  que señala la no conmutatividad de los límites  $t \rightarrow \infty$  y  $\hbar \rightarrow 0$ .

Sin embargo, veremos que el comportamiento tipo ameba exhibido en la evolución de las celdas involucra una “distribución de grano grueso”, es decir una distribución promediada sobre rectángulos del espacio de fases. Este grano grueso es utilizado para deshacerse de la estructura complicada que presenta el espacio de fases a medida que se alcanza la relajación del sistema [1]. Un caso típico de esta situación es la de los sistemas abiertos en interacción con un ambiente, donde perfiles estacionarios de la función de Wigner presentan fisuras (*scars*) y a medida que el sistema evoluciona se estira difundiéndose a lo largo de ciertas direcciones determinadas por la ecuación maestra.

Más aun, mostraremos una conexión entre los tiempos característicos del caos cuántico y un parámetro adimensional que mide el grado de deformación de las celdas a medida que el sistema cuántico evoluciona. Esta conexión estará situada en el corazón de la *granulosidad fundamental*, es decir del estudio de la granulosidad a partir de la dinámica de celdas de tamaño mínimo dado por el Principio de Incertidumbre, la cual permitirá compatibilizar el caos con el Principio de Correspondencia dentro de un rango temporal dado por los tiempos característicos del caos cuántico. Comenzamos con una breve revisión de la aproximación estándar de la granulosidad en la mecánica cuántica. Todo el desarrollo de este capítulo está basado en el trabajo [31].

### 3.1.1. La aproximación estándar

En mecánica clásica, para que el caos ocurra es necesario que el sistema posea un espectro continuo y un espacio de fases continuo [1]. No obstante, en el caso cuántico la mayoría de los sistemas que presentan características caóticas en su límite clásico poseen espectro discreto. Además de eso, el principio de correspondencia implica la transición de la mecánica cuántica a la clásica para todos los fenómenos sin excepción, incluido el caos. Sin embargo, por el principio de incertidumbre en mecánica cuántica se tiene un espacio de fases discretizado, y por lo tanto no continuo, compuesto por celdas de tamaño finito  $\Delta x \Delta p \geq \hbar$  por cada grado de libertad. De todo esto, la pregunta natural que surge es: ¿Cómo podemos proporcionar un formalismo cuántico que explique la emergencia del caos en el límite clásico, y que al mismo tiempo sea consistente con el principio de incertidumbre y el principio de correspondencia?

Aquí es donde el tratamiento de la granulosidad surge como una posible respuesta. Existen varias aproximaciones de la granulosidad que tratan de resolver el problema evitando ser una amenaza al principio de correspondencia. Una opción podría ser la cuantización de sistemas caóticos pero, debido a la compacidad del espacio de fases, la cuantización da lugar a un espectro de energía discreto. Entonces la situación no parece ser tan simple a primera vista y uno debe buscar otros indicadores que de algún modo capturen las principales propiedades relacionadas con el espectro continuo de los sistemas caóticos. La entropía de Kolmogorov–Sinai [59] (abreviadamente entropía KS) es uno de los indicadores más robustos y significativos tanto en la teoría como en las aplicaciones. La razón de esto es que uno puede modelar el comportamiento del espectro continuo de sistemas caóticos clásicos a partir de modelos clásicos discretizados tales que las entropías KS del sistema continuo y de los discretizados tienden a coincidir para cierto rango apropiado. Recordemos que la entropía KS asigna medidas a conjuntos de trayectorias y computa la entropía de Shannon por unidad de paso temporal del ensamble de dichos conjuntos de trayectorias en el límite de infinitos pasos temporales. Además, el teorema de Pesin

relaciona la entropía KS con los coeficientes de Lyapunov [60]. Para una descripción cuántica de los sistemas caóticos, necesitaríamos una extensión cuántica de la entropía-KS. En este sentido existen varios candidatos no conmutativos [61, 62, 63, 64, 65] con la presencia de un rango temporal finito donde la versión clásica y cuántica coinciden, hecho que es considerado como la principal peculiaridad del caos cuántico [1].

Por lo tanto, el problema de la granulosidad está íntimamente relacionado con las escalas temporales del caos cuántico y debe ser necesariamente compatible con la restricción a éstas. Dos escalas temporales bien distinguidas caracterizan el movimiento cuántico clásicamente caótico: el tiempo de relajación  $\tau_H$  (llamado *tiempo de Heisenberg*) y la escala logarítmica (llamado *tiempo de Ehrenfest*)  $\tau_E$ . Sólo para límites clásicos regulares se espera que la mecánica cuántica y la clásica se superpongan sobre tiempos  $t$  tales que

$$t \lesssim \tau_H \propto \hbar^{-\alpha} \quad \text{para algún } \alpha > 0 \quad (3.1)$$

donde  $\tau_H$  determina el llamado régimen semiclásico, es decir la escala temporal para la que fenómenos como la localización exponencial y la relajación pueden ocurrir. Más aun, el espectro discreto no puede ser resuelto si  $t \lesssim \tau_H$ . La escala logarítmica  $\tau_E$  es mucho más pequeña que  $\tau_H$  y está relacionada con una fuerte propiedad caótica, la inestabilidad exponencial. Básicamente,  $\tau_E$  determina el intervalo de tiempo para el cual el movimiento de un paquete de ondas es tan aleatorio como la trayectoria clásica difundiéndose por todo el espacio de fases. Se tiene

$$\tau_E \sim \frac{\log q}{h_{KS}} \propto -\log \hbar \quad (3.2)$$

siendo  $q = \frac{S}{\hbar}$  el parámetro cuasiclásico,  $S$  el valor de la acción clásica y  $h_{KS}$  la entropía KS del límite clásico. La importancia del tiempo de Ehrenfest  $\tau_E$  es que indica la escala típica para un límite clásico adaptado a los sistemas cuánticos clásicamente caóticos. Cabe señalar que algunos autores consideran que  $\tau_E$  constituye una resolución satisfactoria a la aparente contradicción entre el Principio de Correspondencia y el transitorio cuántico finito dado por  $\tau_H$ , y la evidencia de que los límites clásico y asintótico no conmutan [1]. Es decir,

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \lim_{q \rightarrow \infty} \neq \lim_{q \rightarrow \infty} \lim_{|t| \rightarrow \infty} \quad (3.3)$$

siendo el primer límite el que conduce al caos clásico mientras que el segundo representa un comportamiento cuántico sin caos en absoluto. Al final de este capítulo estudiaremos la relación entre la granulosidad y las escalas temporales del caos cuántico.

### 3.1.2. Granulosidad fundamental con celdas

Como mencionamos anteriormente, el punto clave para una caracterización del caos cuántico es promediar una función distribución representativa de la llegada al equilibrio del sistema, sobre rectángulos (celdas) de tamaño mínimo en el espacio de fases, obteniendo de esta forma una distribución de grano grueso. La motivación de esta aproximación reside en el hecho de que podemos obtener un límite clásico siguiendo las trayectorias de celdas, que consideraremos como el análogo clásico de un punto que se mueve, y estudiando su deformación debido a la dinámica cuántica del sistema [52].

Para ello, necesitamos definir de manera cuántica una noción análoga a la de “un punto clásico que se mueve”. Es bien sabido que las relaciones de conmutación y su consecuencia,

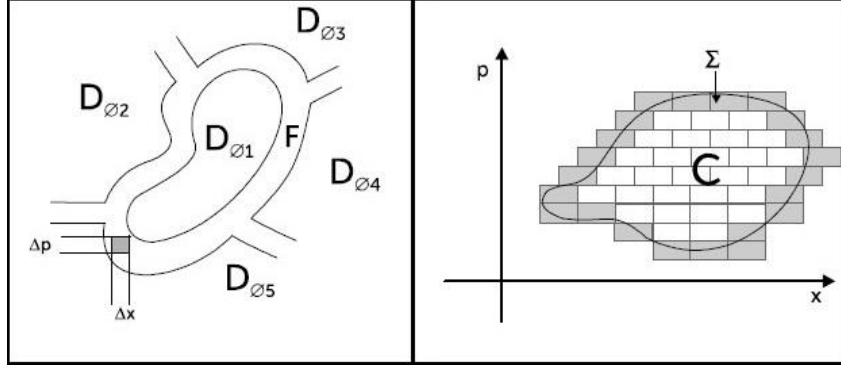


Figura 3.1: En la figura de la izquierda se muestra un dominio particular bidimensional  $D_{\phi_1}$  y su frontera  $F$ , donde las cajas de tamaño mínimo  $\Delta x \Delta p = \frac{1}{2} \hbar$  discretizan el espacio de fases dando lugar a la granulosidad. En la figura de la derecha se muestra una celda  $C^T$  siendo:  $C$  el interior de  $C^T$  compuesto de cajas de tamaño mínimo  $\Delta_{\Theta} \Delta_J$  dadas por el Principio de Incertidumbre y  $\Sigma$  el conjunto de cajas  $\Delta_{\Theta} \Delta_J$  que intersecan la frontera  $B$  de  $C^T$ .

el principio de incertidumbre, establecen una granulosidad fundamental en el espacio de fases cuántico. Más precisamente, si llamamos  $\hat{J}$  y  $\hat{\Theta}$  a dos operadores conjugados arbitrarios se tiene

$$[\hat{\Theta}, \hat{J}] = i\hbar \hat{I} \quad (3.4)$$

y entonces

$$\Delta_{\Theta} \Delta_J \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3.5)$$

donde  $\Delta_{\Theta}$  y  $\Delta_J$  están definidas como las varianzas para algún estado *típico*  $\hat{\rho}$ , el único con las mínimas dimensiones que podemos determinar en nuestro experimento en el sentido de Ballentine [66]. En general diferentes elecciones de  $\hat{\rho}$  darán diferentes cocientes  $\Delta_{\Theta}/\Delta_J$  pero los resultados serán los mismos cualitativamente. Entonces consideraremos que las cajas rectangulares  $\Delta_{\Theta} \Delta_J$  de volumen  $\hbar$  (ó los poliedros rectangulares de volumen  $\hbar^{N+1}$ , en el caso  $2(N+1)$ -dimensional) serán aquellas que tengan el volumen mínimo que pueda determinarse con nuestro aparato de medición. Precisamente,

$$vol(\Delta_{\Theta} \Delta_J) = \hbar$$

para un espacio de fases bidimensional o en el caso  $2(N+1)$ -dimensional

$$vol \left( \prod_{i=0}^N \Delta_{\Theta_i} \prod_{i=0}^N \Delta_{J_i} \right) = \hbar^{N+1}$$

Esta la característica principal del espacio de fases cuántico: su granulosidad, la cual será el origen de la amenaza al principio de correspondencia. Cabe destacar que la granulosidad aparece en muchos otros contextos [67, 68]. En el libro de Omnès [52], las celdas producidas por la granulosidad fundamental son descritas en coordenadas  $(x, p)$  usando la teoría matemática del análisis microlocal basada en el trabajo [69]. En nuestra aproximación cambiaremos las coordenadas  $(x, p)$  por las  $(J, \Theta)$  donde  $J$  serán las constantes de movimiento y  $\Theta$  las correspondientes variables conjugadas y donde, además, las relaciones de conmutación (3.4) y el principio de incertidumbre (3.5) jugarán el papel principal. Para ver cómo funciona la granulosidad fundamental consideremos un conjunto cerrado simplemente conexo, en un espacio de fases bidimensional,

al que llamaremos celda  $C^T$  con su frontera continua  $B$ , como puede verse en la Fig. 3.1. Las coordenadas  $(J, \Theta)$  y un grilla de cajas rectangulares  $\Delta_\Theta \Delta_J$  (en el caso general  $2^{N+1}$  cajas poliédricas) definen los dos dominios relacionados con  $C^T$ :  $\Sigma$  el conjunto de cajas que interseca  $B$ , y  $C$  el conjunto compuesto por las cajas interiores a la celda  $C^T$ . Con el propósito de comparar el tamaño del volumen del interior de la celda  $C^T$  con el de su frontera, definimos el siguiente parámetro adimensional

$$\Omega = \frac{\text{vol}\Sigma}{\text{vol}(C)}$$

Es claro que  $\Omega \ll 1$  corresponde a una celda voluminosa mientras que  $\Omega \gg 1$  corresponde a una celda elongada y deformada. Además, si queremos que una celda represente un punto real es necesario que  $\Omega < 1$ , ya que si  $\Omega > 1$  entonces el volumen del interior de  $C$  es más pequeño que el volumen de la frontera  $\Sigma$  y no sabemos con certeza si sus puntos pertenecen ó no a  $C^T$  dado que  $B \subset \Sigma$ . Por lo tanto, si  $\Omega \gg 1$  perdemos completamente la noción de un punto real y la descripción de las trayectorias clásicas como el movimiento de  $C^T$  carece de sentido.

Análogamente, Omnès define proyectores semiclásicos para cada celda y muestra que si  $\Omega$  es muy grande entonces la definición de estos proyectores pierde completamente su significado y la clasicidad se pierde, es decir que Omnès obtiene una conclusión similar.

De ahora en más, en todos los casos donde el parámetro cuasiclásico  $q = \frac{S}{\hbar}$  es finito llamaremos *una amenaza al principio de correspondencia* al rango temporal que está afuera de la validez de la granulosidad fundamental con celdas y donde esta aproximación no debería asociarse necesariamente con la emergencia de los dos límites no conmutativos  $t \rightarrow \infty$  y  $\hbar \rightarrow 0$ .

En la siguiente sección consideraremos las celdas y sus evoluciones en varios casos y estimaremos sus correspondientes parámetros  $\Omega$ .

### Las trayectorias clásicas

Si consideramos que nuestro sistema cuántico posee un límite débil representado por  $\hat{\rho}_*$ , entonces la distribución clásica  $\rho_*(\phi) = \rho_S(\phi) = W_{\hat{\rho}_*}(\phi)$  (siendo  $\phi = (q, p) \in \Gamma$ ) es aquella a la cual converge el sistema en el espacio de fases  $2(N+1)$ -dimensional  $\Gamma$  para tiempos largos. A su vez, si el límite clásico no es integrable, por el teorema de Caratheodory existen  $N+1$  constantes de movimiento locales  $\{\omega, p_{i1}, \dots, p_{iN}\}$  en cada dominio  $D_{\phi_i}$  alrededor de cada punto  $\phi_i \in \Gamma$  y  $\Gamma = \cup_i D_{\phi_i}$  que definen las hipersuperficies  $H(\phi) = \omega$ ,  $P_{iI}(\phi) = p_{iI}$  con  $I = 1, \dots, N$ . En el caso integrable se tiene que  $D_{\phi_i} = \Gamma$  para todo  $\phi_i$ . Es decir que  $H(\phi)$  y  $P_{iI}(\phi)$  son nuestras variables "impulso". No obstante, la distribución  $\rho_*(\phi)$  no define las trayectorias de "puntos" sobre estas hipersuperficies dado que no fija valores definidos para las variables de configuración canónicamente conjugadas a  $H(\phi)$  y  $P_{iI}(\phi)$ . Es razonable que esto sea así debido a que la existencia de trayectorias definidas violaría el Principio de Incertidumbre. En efecto, sabemos que si  $\hat{H}$  and  $\hat{P}_{iI}$  poseen valores definidos, entonces los valores de los observables que no conmutan con ellos están completamente indeterminados.

Llamemos  $\hat{J}$  a las variables de impulso  $\hat{H}$  y  $\hat{P}_{iI}$  (constantes de movimiento), y  $\hat{\Theta}$  a las correspondientes variables conjugadas, todas éstas definidas en los dominios  $D_{\phi_i}$ . Las ecuaciones de movimiento en la representación de Heisenberg son

$$\frac{d\hat{J}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{J}] \quad , \quad \frac{d\hat{\Theta}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\Theta}] \quad (3.6)$$

y dado que  $[\hat{H}, \hat{J}] = 0$  (cuando  $\hat{J} = \hat{H}$  esto es trivial) entonces

$$\frac{d\hat{J}}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{d\hat{\Theta}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\Theta}] \quad (3.7)$$

Dentro del dominio  $D_{\phi_i}$ , si consideramos a  $\hat{H}$  expandido en serie de potencias de  $\hat{J} = \hat{P}_i I$  como

$$\hat{H} = F(\hat{J}) = \sum_n a_n \hat{J}^n \quad (3.8)$$

y dado que  $[\hat{\Theta}, \hat{J}] = i\hbar\hat{I}$ , se tiene  $[\hat{\Theta}, \hat{J}^n] = in\hbar\hat{J}^{(n-1)}$ . Luego,

$$[\hat{H}, \hat{\Theta}] = -i\hbar \frac{d\hat{H}}{d\hat{J}}$$

donde  $\hat{H}$  y  $\hat{J}$  son constantes en el tiempo, por lo tanto llamando  $\hat{V}(0) = \frac{d\hat{H}}{d\hat{J}}$ , que es otra constante en el tiempo, se tiene

$$\hat{J}(t) = \hat{J}(0) \quad , \quad \hat{\Theta}(t) = \hat{\Theta}(0) + \hat{V}(0)t$$

Tomando la transformada de Wigner de  $\hat{J}(t)$  y  $\hat{\Theta}(t)$  y teniendo en cuenta la linealidad se obtiene

$$J(\phi, t) = J(\phi, 0) \quad , \quad \Theta(\phi, t) = \Theta(\phi, 0) + V(\phi, 0)t \quad (3.9)$$

Utilizaremos esta ecuación para seguir el movimiento de las cajas de tamaño mínimo y las celdas en el espacio de fases. En todo el análisis siguiente consideraremos un espacio de fases  $\Gamma$  bidimensional pero los razonamientos valdrán independientemente de la dimensión de  $\Gamma$ .

Primero consideremos un caja rectangular en movimiento de tamaño  $\Delta_{\Theta}\Delta_J$  con  $\Delta_{\Theta}\Delta_J \sim \hbar$  (en el caso general  $\hbar^{N+1}$ ) que simbolizaremos por un pequeño cuadrado en las figuras 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 y sólo por un punto en las figura 3.6. Consideremos la función distribución dada por la transformación de Wigner del límite débil,  $W_{\hat{\rho}_*} = \rho_*(\phi) = \rho_*(j, \theta)$  siendo  $\phi = (j, \theta) \in \Gamma$ . Entonces definimos los valores medios

$$\begin{aligned} \bar{j}(\phi, t) &= \int_{\Delta_{\Theta}\Delta_J} J(j, \theta, t) \rho_*(j, \theta) dj d\theta \quad ; \quad \bar{\theta}(\phi, t) = \int_{\Delta_{\Theta}\Delta_J} \Theta(j, \theta, t) \rho_*(j, \theta) dj d\theta, \\ \bar{v}(\phi, t) &= \int_{\Delta_{\Theta}\Delta_J} V(j, \theta, t) \rho_*(j, \theta) dj d\theta; \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde  $\rho_*(j, \theta)$  no es una función del tiempo dado que, de acuerdo al corolario 2.5, es un punto fijo del operador de Frobenius–Perron asociado a la evolución clásica  $T_t$ . Además

$$\begin{aligned} J(j, \theta, t) &= W_{\hat{J}(t)} \\ \Theta(j, \theta, t) &= W_{\hat{\Theta}(t)} \\ V(j, \theta, t) &= W_{\hat{V}(0)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Luego usando (3.9) se tiene

$$\bar{j}(\phi, t) = \bar{j}(\phi, 0) \quad , \quad \bar{\theta}(\phi, t) = \bar{\theta}(\phi, 0) + \bar{v}(\phi, 0)t \quad (3.12)$$

de tal forma que las cajas de tamaño mínimo  $\Delta_{\Theta}\Delta_J$  se mueven a lo largo de trayectorias clásicas de nuestro sistema.

Ahora bien, debido al Principio de Incertidumbre las cajas  $\Delta_{\Theta}\Delta_J$  no pueden deformarse. Entonces, de ahora en más consideraremos que dichas cajas son nuestra mejor noción teórica de un punto ubicado en  $(\bar{j}, \bar{\theta})$ . Consideraremos celdas rectangulares cuyo movimiento estará dado por (3.12) y compuestas por cajas rígidas  $\Delta_{\Theta}\Delta_J$ . De esta forma, al tener en cuenta la

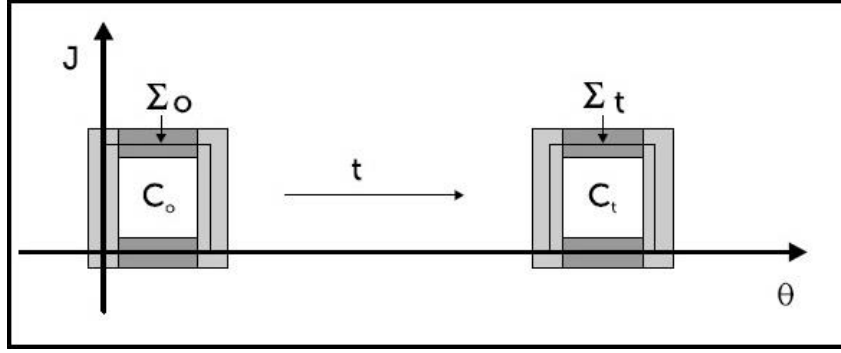


Figura 3.2: Hamiltoniano lineal en  $J$ . Evolución de una celda con velocidad constante. Dado que no hay deformación de la celda entonces no hay amenaza al principio de correspondencia para ningún tiempo  $t$ . Las regiones  $C_0, \Sigma_0$  y  $C_t, \Sigma_t$  son el interior de la celda  $C^T$  y el conjunto de cajas rígidas que intersecan la frontera de  $C^T$ , inicialmente y al instante  $t$  respectivamente.

granulosidad del espacio de fases cuántico y la distribución  $W_{\hat{\rho}_*} = \rho_*(j, \theta)$ , se pueden obtener las trayectorias clásicas de puntos teóricos  $(\bar{j}, \bar{\theta})$  completando el límite cuántico-clásico de una manera compatible con el Principio de Correspondencia.

Pero recordemos que los puntos físicos reales no son estas cajas rígidas  $\Delta_\Theta \Delta_J$  sino las celdas con  $\Omega < 1$  debido a que los aparatos de medición no pueden registrar a las cajas elementales  $\Delta_\Theta \Delta_J$ , sino más bien celdas mucho más grandes cuyas dimensiones son mucho más grandes que la constante de Planck. En los siguientes ejemplos veremos cómo es la evolución de estas celdas que consideramos como el análogo de puntos físicos reales. Más aún, mostraremos la interacción entre los puntos teóricos (cajas elementales rígidas) y los puntos físicos reales (celdas).

**Ejemplo 3.1 (Hamiltoniano lineal en  $J$ )** Consideremos un espacio de fases bidimensional, un dominio  $D_\phi$  y el sistema de coordenadas  $(J, \Theta)$ . Asumamos que el Hamiltoniano es lineal en  $\hat{J}$ , es decir  $\hat{H} = a_0 \hat{I} + a_1 \hat{J}$ . Entonces  $\hat{V} = a_1 \hat{I}$  y se tiene

$$J(\phi, t) = J(\phi, 0) \quad , \quad \Theta(\phi, t) = \Theta(\phi, 0) + a_1 t$$

Entonces las trayectorias de las cajas de tamaño mínimo (puntos teóricos) resultan

$$\bar{j}(t) = \bar{j}(0) \quad , \quad \bar{\theta}(t) = \bar{\theta}(0) + a_1 t \quad (3.13)$$

Como puede verse en la Fig. 3.2, en este caso obtenemos un movimiento de traslación uniforme con velocidad  $\bar{v}[\bar{j}(0)] = \frac{d\bar{j}}{dt} = a_1$ , a lo largo de todas las trayectorias. Entonces, al considerar dos líneas horizontales  $\bar{j} = \bar{j}_1$  y  $\bar{j} = \bar{j}_2$ , y sus respectivas velocidades  $\bar{v}[\bar{j}_1] = \bar{v}[\bar{j}_2] = a_1$ , resulta

$$\bar{v}(\bar{j}_1) - \bar{v}(\bar{j}_2) = 0 \quad (3.14)$$

Luego, si consideramos una celda inicial rectangular, esta no será deformada por el movimiento. Dado que no hay deformación se tiene que, si inicialmente es  $\Omega < 1$ , entonces  $\Omega$  seguirá siendo menor que 1 para todo instante  $t$ . Por lo tanto, en este caso trivial la celda representa un punto físico real moviéndose de acuerdo a (3.13). En otras palabras, en este caso hemos completado el límite clásico y el Principio de Correspondencia se satisface.

**Ejemplo 3.2 (Hamiltoniano cuadrático en  $J$ )** Manteniendo el mismo espacio de fases bidimensional, el mismo dominio  $D_\phi$  y las mismas coordenadas  $(J, \Theta)$  que en el Ejemplo 3.1,

ahora consideramos que  $\hat{H}$  es cuadrático en  $\hat{J}$ . Esto es,  $\hat{H} = a_0\hat{I} + a_1\hat{J} + a_2\hat{J}^2$ ,  $\hat{V} = a_1\hat{I} + 2a_2\hat{J}$ , entonces

$$J(\phi, t) = J(\phi, 0) \quad , \quad \Theta(\phi, t) = \Theta(\phi, 0) + [a_1I + 2a_2J(\phi, 0)]t$$

y con el mismo razonamiento que en el ejemplo anterior se tiene

$$\bar{j}(t) = \bar{j}(0) \quad , \quad \bar{\theta}(t) = \bar{\theta}(0) + [a_1 + 2a_2\bar{j}(0)]t$$

De la Fig. 3.3 vemos que en este caso tenemos un movimiento uniforme con velocidad constante  $\bar{v}[\bar{j}(0)] = a_1 + 2a_2\bar{j}(0)$  a lo largo de líneas rectas paralelas al eje  $\theta$ . Más precisamente,

$$\bar{\theta}(t) = \bar{\theta}(0) + \bar{v}[\bar{j}(0)]t$$

Consideremos dos líneas horizontales  $\bar{j} = \bar{j}_1$  y  $\bar{j} = \bar{j}_2$ , entonces la diferencia entre las velocidades de las dos líneas es

$$\bar{v}(\bar{j}_1) - \bar{v}(\bar{j}_2) = 2a_2(\bar{j}_1 - \bar{j}_2) = v \quad (3.15)$$

Sean  $(J, \Theta)$  las dimensiones de la celda rectangular inicial y  $\Delta_J, \Delta_\Theta$  las dimensiones de las cajas rígidas. Dado que la longitud de la base es constante se tiene que el volumen  $\text{vol}(C)$  también es constante. Luego, el movimiento deformará la celda inicial rectangular en un paralelogramo como puede verse de la Fig. 3.3. donde la altura permanecerá siendo  $J$  y la base cambiará según  $\Theta + \Delta\theta$ , es decir que hay una elongación  $\Delta\theta$ . Más precisamente

$$\Delta\theta = vt$$

Podemos calcular explícitamente la evolución del parámetro  $\Omega$  en este caso: el número de cajas nuevas  $N_c$  que aparecen en el tiempo  $t$  será

$$N_c = 2 \frac{\Delta\theta}{\Delta_\Theta} = 2 \frac{vt}{\Delta_\Theta} \quad (3.16)$$

Entonces

$$\Omega = \frac{\text{vol}\Sigma}{\text{vol}(C)} = \frac{\text{vol}\Sigma + \Delta\text{vol}\Sigma}{\text{vol}(C)} = \frac{\text{vol}\Sigma + N_c\Delta_J\Delta_\Theta}{\text{vol}(C)} \quad (3.17)$$

Por lo tanto,

$$\Delta\Omega = \frac{N_c\Delta_J\Delta_\Theta}{\text{vol}(C)} = \frac{N_c\hbar}{\text{vol}(C)} = 2 \frac{v}{\Delta_\Theta} \frac{\hbar}{\text{vol}(C)} t = 2 \frac{\Delta\theta}{\Delta_\Theta} \frac{\hbar}{\text{vol}(C)} > 0 \quad (3.18)$$

Luego, se tienen las siguientes observaciones:

- (a) El aumento  $\Delta\Omega$  es proporcional al tiempo  $t$  y la elongación  $\Delta\theta$  en unidades de  $\Delta_\Theta$ .
- (b)  $\Delta\Omega$  es proporcional a  $\frac{\hbar}{\text{vol}(C)}$ , con lo cual en el límite clásico  $\frac{\hbar}{\text{vol}(C)} \rightarrow 0$  (que equivale al límite  $q = \frac{\text{vol}(C)}{\hbar} \rightarrow \infty$  siendo  $q$  el parámetro cuasiclásico) tenemos  $\Delta\Omega \rightarrow 0$ , es decir que el Principio de Correspondencia se satisface.

La conclusión más importante es que, en el caso general, incluso si  $\frac{\hbar}{\text{vol}(C)}$  fuese pequeño pero estando muy lejos del límite  $\frac{\hbar}{\text{vol}(C)} \rightarrow 0$ , luego de un tiempo  $t$ , se tendrá  $\Omega \gg 1$ . En cuyo caso, la celda deja de ser un buen modelo de un punto físico real, lo cual significa que para dicho tiempo  $t$  aparece la amenaza al Principio de Correspondencia. Esto sucede aún si el sistema es integrable, es decir  $D_\phi = \Gamma$ , y con el Hamiltoniano de una partícula libre  $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{P}^2$ .

Por lo tanto, la granulosidad fundamental sin caos aún puede ser una amenaza al Principio de Correspondencia en el caso de que  $\frac{\hbar}{\text{vol}(C)}$  sea finito. Este es el caso del límite clásico en una dinámica regular e integrable con la escala temporal dada por el tiempo de Heisenberg.

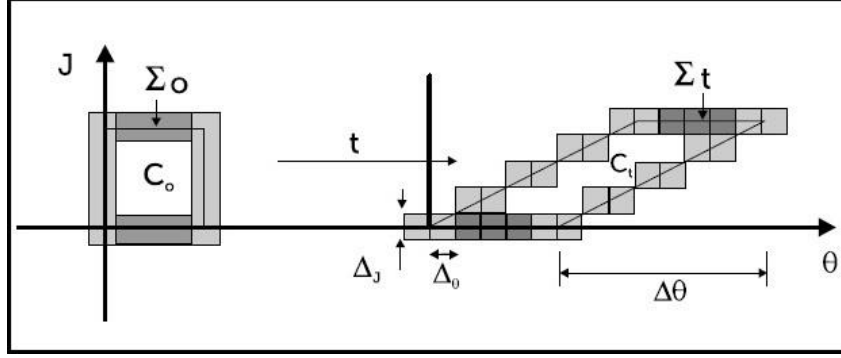


Figura 3.3: Hamiltoniano cuadrático en  $J$ . Evolución de una celda con velocidad lineal en  $t$ . En este caso hay amenaza al Principio de Correspondencia para valores finitos de  $\frac{\hbar}{\text{vol}(C)}$  y aparece un rango temporal de validez de la granulosidad fundamental donde la celda constituye un buen modelo de punto físico real en movimiento, es decir  $\Omega \ll 1$ .

**Ejemplo 3.3 (Hamiltoniano con potencias mayores a dos en  $J$ )** En el caso más general el Hamiltoniano estará dado por  $\hat{H} = a_0\hat{I} + a_1\hat{J} + a_2\hat{J}^2 + a_3\hat{J}^3 + \dots$  y la ecuación (3.14) se convierte en

$$\bar{v}(\bar{j}_1) - \bar{v}(\bar{j}_2) = 2a_2(\bar{j}_1 - \bar{j}_2) + 3a_3(\bar{j}_1^2 - \bar{j}_2^2) + \dots \quad (3.19)$$

Como puede verse en la Fig. 3.4, no hay deformaciones verticales pero existen fuertes deformaciones horizontales. Esto implica que para Hamiltonianos con potencias mayores que 2 surge la amenaza del caos al principio de correspondencia. Ahora consideremos

$$\hat{H} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\hat{J}) e^{in\frac{\hat{J}}{\Delta_J}}$$

entonces

$$\bar{v}(\bar{j}) = \sum_{n=0}^{\infty} [A'_n(\bar{j}) + \frac{in}{\Delta_J} A_n(\bar{j})] e^{in\frac{\bar{j}}{\Delta_J}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\bar{j}) e^{in\frac{\bar{j}}{\Delta_J}}$$

y

$$\bar{\theta}(\bar{j}, t) = \bar{\theta}(\bar{j}, 0) + \bar{v}(\bar{j})t = \bar{\theta}(\bar{j}, 0) + t \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\bar{j}) e^{in\frac{\bar{j}}{\Delta_J}}$$

La elongación de la celda estará dada por

$$\Delta\theta = t \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\bar{j}) e^{in\frac{\bar{j}}{\Delta_J}}$$

Tomemos el caso más simple  $B_m(\bar{j}) = \text{constante} \neq 0$  y  $B_n(\bar{j}) = 0$  para todo  $n$  que se muestra en la Fig. 3.5. Entonces tenemos

$$\Delta\theta = tB_m e^{i\frac{\bar{j}}{\Delta_J}} \quad , \quad \text{Re}(\Delta\theta) = tB_m \cos(m\frac{\bar{j}}{\Delta_J})$$

donde la longitud de onda de las oscilaciones de las curvas verticales de la frontera de la celda es  $\lambda = \frac{\Delta_J}{m}$  y se tiene que  $\lambda \ll \Delta_J$  si  $m \gg 1$ . Por lo tanto,

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta \text{vol} \Sigma}{\text{vol}(C)} = 2 \frac{J \Delta\theta}{J \Theta} = 2 \frac{B_m}{\Theta} t$$



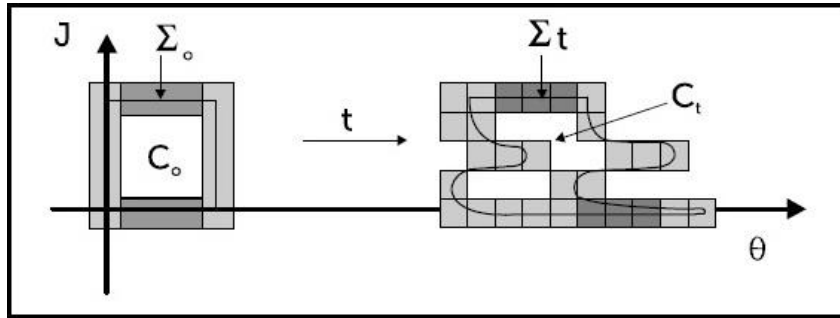


Figura 3.4: Hamiltoniano con potencias mayores que 2 en  $J$ . Evolución de una celda con velocidad no lineal en  $t$ . Las fuertes deformaciones horizontales de la celda indican la amenaza del caos al principio de correspondencia.

Por consiguiente, cuando  $t \rightarrow \infty$  se tiene  $\Delta\Omega \rightarrow \infty$  y tenemos una amenaza al principio de correspondencia sin rescate en el límite clásico.

**Ejemplo 3.4 (Comportamiento tipo “ameba”)** Las cosas pueden tornarse más dramáticas si en vez de un único  $D_\phi$  consideramos dos dominios  $D_{\phi_1}$  y  $D_{\phi_2}$  junto con su zona de unión  $\mathcal{F}$  como en la Fig. 3.6 de la izquierda. Más precisamente, supongamos que en  $D_{\phi_1}$  tenemos dos movimientos paralelos y sólo una deformación tipo “paralelogramo”, y usamos las coordenadas  $(\theta, j)$  de  $D_{\phi_1}$ .

Pero ni en  $\mathcal{F}$  ni en  $D_{\phi_2}$  la coordenada  $j$  es una constante de movimiento, así que en  $D_{\phi_2}$  el movimiento se convierte completamente deformado como en la figura 3.6 de la izquierda. Luego, si la celda pasa por varias zonas de unión  $\mathcal{F}$  entonces es claro que la celda regular inicial se convertirá en un objeto tipo ameba como se muestra en la Fig. 3.6. de la derecha donde  $\Omega \gg 1$ . Recordemos que por simplicidad los puntos en la Fig. 3.6. tienen un volumen  $\hbar$ . Luego, como consecuencia del caos el volumen de la ameba se convierte de orden  $\hbar$  y el límite clásico carece de sentido. Debemos señalar que las fuertes deformaciones de la celda original rectangular están prohibidas por el Principio de Indeterminación que mantiene las cajas de tamaño mínimo completamente rígidas.

Otra manera de ver que existe un verdadero problema con el Principio de Correspondencia es considerar al movimiento clásico del centro de la celda inicial (donde las probabilidades de hallar la partícula son no nulas) como el movimiento real de una partícula clásica. Entonces, en el caso caótico podría suceder que a un tiempo  $t$  la celda tenga forma de ameba como en la Fig. 3.6. de la derecha. En cuyo caso el centro de la celda original estaría situado afuera de la celda tipo ameba en una zona de probabilidad cero y por lo tanto no podría representar el movimiento real de una partícula clásica a partir de dicho instante  $t$ .

Por lo tanto, de estos ejemplos puede verse que el caos y la granulosidad fundamental son una amenaza tanto para el límite clásico de la mecánica cuántica como para su interpretación, sino se tienen en cuenta los rangos temporales donde el modelo de la celda es una válida representación física de un punto que se mueve. Como último ejemplo veamos el caso del sistema clásico de Henón–Heiles.

**Ejemplo 3.5 (Sistema de Henón–Heiles)** El sistema clásico de Henón–Heiles posee un Hamiltoniano clásico dado por [11]

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{2}y^3$$

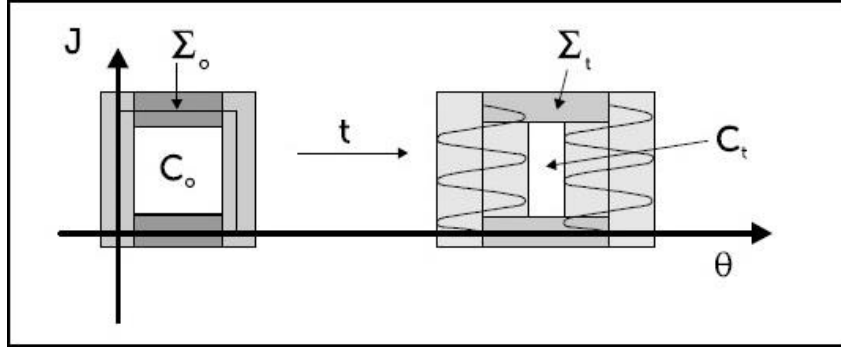


Figura 3.5: Hamiltoniano oscilatorio en  $J$ . Evolución de una celda con velocidad periódica en  $t$ . En este caso se observan oscilaciones verticales de las paredes de la celda y dado que  $\Delta\Omega$  no depende de  $\hbar$ , entonces surge la amenaza al principio de correspondencia sin rescate posible en el límite clásico  $\frac{\hbar}{\text{vol}(C)} \rightarrow 0$ .

Podemos observar que:

- (a) El Hamiltoniano no es integrable en todo el espacio de fases y por lo tanto tendremos una situación similar a la de la figura 3.6.
- (b) Para una energía  $E = \frac{1}{12}$  los toros permanecen prácticamente intactos de acuerdo a [11], Fig. 44a. Pero en un dominio grande  $D_\phi$  y en un caso más realista con  $\text{vol}D_\phi \gg \hbar^2$  el Principio de Correspondencia podría estar lejos de verse amenazado por el caos, al menos para períodos cortos de tiempo. Estos dominios  $D_\phi$  se convierten mas pequeños para  $E = \frac{1}{8}$  ([11], fig. 44b) y probablemente muy diminutos para  $E = \frac{1}{6}$  ([11], Fig. 44c). Así que en tales casos podríamos tener serios problemas con el caos dado que para altas energías se tendría  $\text{vol}(D_\phi) \approx \hbar^2$ . Podemos obtener estas conclusiones debido a que nuestro método nos permite evaluar el volumen  $\text{vol}(D_\phi)$  sobre las superficies definidas por las constantes de movimiento (toros) a partir de las secciones de Poincaré.

Por lo tanto concluimos que cuando los dominios  $D_\phi$  son del orden de  $\hbar$  el Principio de Correspondencia tiene problemas. Pero también vemos que para altas energías no existe un límite de altas energías bien definido. Este ejemplo de Henón–Heiles nos muestra la amenaza del caos al Principio de Correspondencia aún en el límite de altas energías.

A continuación analizamos como la amenaza del caos al Principio de Correspondencia puede suprimirse teniendo en cuenta la relación entre la granulosidad fundamental y las escalas temporales características del caos cuántico.

### Escalas temporales y granulosidad fundamental

Como hemos mencionado en la sección anterior, la granulosidad debe ser compatible con las escalas temporales del caos cuántico dentro de las cuales los fenómenos típicos como la relajación estadística, la localización exponencial y la inestabilidad exponencial pueden ocurrir. Estas escalas temporales son un intento de reconciliar el espectro discreto con el Principio de Correspondencia donde la distinción entre el discreto y el continuo se convierte relevante solamente para tiempos grandes [1].

Hemos visto que la condición  $\Omega < 1$  representa el rango temporal permitido donde la noción de un punto real y la descripción de las trayectorias clásicas son posibles. La idea clave es que

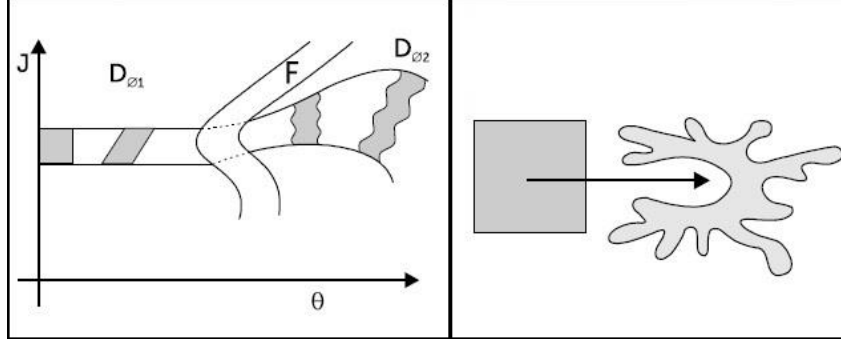


Figura 3.6: En la figura de la izquierda se muestra una celda inicial rectangular que es dispersada por una frontera  $F$ . En la figura de la derecha se muestra la deformación de la celda, inicialmente rectangular, que luego de repetidos pasajes a través de las fronteras  $F$  se va convirtiendo en un tipo “ameba”.

$\Omega \ll 1$  (celda voluminosa) implica un rango temporal de validez de la granulosidad fundamental que puede ser identificado con alguno de las escalas características del caos cuántico. Como en los ejemplos anteriores, consideremos un dominio  $D_\phi$  en un espacio de fases bidimensional, las coordenadas conjugadas  $(J, \Theta)$  y un Hamiltoniano

$$\hat{H} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{J}^n \quad (3.20)$$

En tal caso, la diferencia de velocidades es, de acuerdo a (3.19)

$$v = \bar{v}(\bar{j}_1) - \bar{v}(\bar{j}_2) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \hat{J}^{(n-1)} = 2a_2(\bar{j}_1 - \bar{j}_2) + 3a_3(\bar{j}_1^2 - \bar{j}_2^2) + \dots \quad (3.21)$$

Por otro lado, la evolución de  $\Omega$  puede darse en términos del número de nuevas cajas rígidas  $N_c(t)$  que aparecen al instante  $t$  de acuerdo a las ecuaciones (3.17) y (3.18)

$$\Delta\Omega = \frac{N_c(t)\Delta_J\Delta_\Theta}{\text{vol}(C)} = \frac{N_c(t)\hbar}{\text{vol}(C)} \quad (3.22)$$

Consideremos que inicialmente tenemos una celda voluminosa, es decir  $\Omega \ll 1$ . Con el objetivo de obtener las dos escalas temporales características del caos cuántico, es decir el tiempo de Heisenberg y el tiempo de Ehrenfest, necesitamos sólo considerar dos casos: el caso de velocidad lineal (Fig. 3.3) y el de velocidad no lineal (Fig. 3.4), respectivamente. Sea  $\Omega'$  el valor de  $\Omega$  al instante  $t$ . Entonces, por (3.17) se tiene

$$\Omega' = \Omega + \Delta\Omega \quad (3.23)$$

Por hipótesis es  $\Omega \ll 1$ , por lo tanto si imponemos que  $\Omega' = \Omega + \Delta\Omega \lesssim 1$ , es decir, consideramos el rango permitido de la granulosidad. Entonces, esta condición se traduce en

$$\Delta\Omega \lesssim 1 \quad (3.24)$$

que de acuerdo a (3.22) se convierte en

$$\frac{N_c(t)\hbar}{\text{vol}(C)} \lesssim 1 \quad (3.25)$$

Veamos ahora que (3.25) contiene las diferentes escalas temporales según la forma del Hamiltoniano dado por (3.20). Cuando la velocidad es lineal se tiene  $a_n = 0$  para todo  $n \geq 3$  en el Hamiltoniano de (3.20). En tal caso, podemos reemplazar (3.16) en (3.25) y obtenemos

$$2 \frac{v}{\Delta_\Theta} \frac{\hbar}{\text{vol}(C)} t \lesssim 1 \quad (3.26)$$

Ahora, dado que  $v$ ,  $\Delta_\Theta$ , y  $\text{vol}(C)$  están fijos, de (3.26) se tiene

$$t \lesssim \left( \frac{\Delta_\Theta}{2v} \text{vol}(C) \right) \hbar^{-1} = \tau_H \propto \hbar^{-1} \quad (3.27)$$

Por lo tanto, hemos obtenido el tiempo de Heisenberg  $\tau_H = \left( \frac{\Delta_\Theta}{2v} \text{vol}(C) \right) \hbar^{-1}$  para el caso de un Hamiltoniano  $\hat{H} = a_0 \hat{I} + a_1 \hat{J} + a_2 \hat{J}^2$  que es consistente con el denominado régimen semiclásico de los límites clásicos regulares (sin caos). En otras palabras, para sistemas bidimensionales nuestra aproximación de granulosidad fundamental con celdas implica un rango temporal de validez de la granulosidad dado por la escala temporal  $\tau_H = \left( \frac{\Delta_\Theta}{2v} \text{vol}(C) \right) \hbar^{-1}$  para el caso de un Hamiltoniano cuadrático en  $J$ . Por lo tanto, se sigue que existe amenaza al Principio de Correspondencia sólo para tiempos  $t > \tau_H$  que están fuera del rango de validez de la granulosidad fundamental.

Ahora veamos el otro caso, cuando el Hamiltoniano tiene potencias mayores que 2, es decir  $\hat{H} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{J}^n$  con  $a_n \neq 0$  para algún  $n \geq 3$ . Como mencionamos en el ejemplo 25, existen sólo fuertes deformaciones horizontales de las celdas como se ven en las figuras 3.4 y 3.5. Este caso incluye la inestabilidad exponencial donde el movimiento de un paquete de onda es tan aleatorio como la trayectoria clásica y el paquete se difunde exponencialmente a una tasa clásica dada por la entropía KS, denotada por  $h_{KS}$ . Por lo tanto, podemos razonablemente suponer que el número de cajas rígidas nuevas  $N_c(t)$  que aparecen al instante  $t$ , es proporcional a  $\exp(h_{KS}t)$  a medida que el paquete se difunde. Aquí estamos teniendo en mente que la difusión exponencial se traduce en una elongación exponencial de la celda a medida que esta evoluciona en el tiempo. Entonces se tiene

$$N_c(t) \propto e^{h_{KS}t} \quad (3.28)$$

Entonces, reemplazando (3.28) en (3.25) nos queda

$$\hbar \frac{e^{h_{KS}t}}{\text{vol}(C)} \lesssim 1 \quad (3.29)$$

Ahora, tomando logaritmo a ambos miembros de (3.29) obtenemos

$$h_{KS}t + \log\left(\frac{\hbar}{\text{vol}(C)}\right) \lesssim 0 \quad (3.30)$$

Es decir,

$$t \lesssim -\frac{1}{h_{KS}} \log\left(\frac{\hbar}{\text{vol}(C)}\right) = \tau_E \propto -\log \hbar \quad (3.31)$$

que no es otra cosa que la escala logarítmica  $\tau_E = -\frac{1}{h_{KS}} \log\left(\frac{\hbar}{\text{vol}(C)}\right)$  dada anteriormente por (3.2) con el parámetro cuasiclásico  $q = \frac{\text{vol}C}{\hbar}$ , es decir que en este caso la acción clásica  $S$  es igual al volumen de la celda  $\text{vol}C$ . En este caso la granulosidad fundamental es una amenaza al Principio de Correspondencia sólo cuando  $t > \tau_E$ . Dado que  $\tau_E < \tau_H$  entonces vemos que el caso de velocidad no lineal (con  $a_n \neq 0$  para algún  $n \geq 3$  y típicamente caótico) restringe el rango temporal mucho más que el caso de velocidad lineal (sin caos). Por lo tanto, concluimos que el caos incrementa la amenaza al Principio de Correspondencia.

## 3.2. Una condición semiclásica para el caos

En el Capítulo 2 vimos que la jerarquía ergódica cuántica (QEH) clasifica el nivel caótico de los sistemas cuánticos según la forma en que las correlaciones cuánticas entre estados y observables decaen en el límite asintótico. Ahora usaremos la idea de QEH de jerarquizar el caos con valores medios cuánticos para presentar una condición semiclásica de caos en el límite clásico por medio del teorema de Pesin. Más precisamente, utilizando la transformada de Wigner expresaremos cantidades clásicas en términos valores medios cuánticos. En particular, aplicaremos esta técnica al teorema de Pesin. A continuación hacemos un breve repaso de la entropía de Kolmogorov–Sinai y el teorema de Pesin. Todo el desarrollo de este capítulo está basado en el paper [35].

### 3.2.1. La entropía de Kolmogorov–Sinai y el teorema de Pesin

Presentamos las nociones generales que utilizaremos de la entropía KS y del teorema de Pesin dentro del formalismo estándar de la teoría de la medida. Consideremos un sistema dinámico  $(\Gamma, \Sigma, \mu, \{T_t\}_{t \in J})$  donde  $\Gamma$  es el espacio de fases,  $\Sigma$  es una  $\sigma$ -álgebra,  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, 1]$  es una medida normalizada y  $\{T_t\}_{t \in J}$  es un semigrupo de transformaciones que preservan la medida. Por ejemplo,  $T_t$  podría ser la transformación clásica de Liouville ó la transformación clásica correspondiente asociada a la evolución cuántica. El conjunto  $J$  se considera el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$  para el caso de sistemas dinámicos continuos y  $\mathbb{Z}$  para el caso discreto. Dada una transformación que preserve la medida  $T_j$  denotaremos por  $T^{-j}$  a la inversa de  $T_j$ , o sea  $T^{-j} = T_j^{-1}$ .

Dividamos el espacio de fases  $\Gamma$  en una partición  $Q$  de  $m$  subconjuntos  $A_i$  con medida  $\mu(A_i)$  para cada  $i = 1, \dots, m$ . Dadas dos particiones  $A$  y  $B$  la partición  $A \vee B$  está definida por  $\{a_i \cup b_j : a_i \in A, b_j \in B\}$ , es decir que  $A \vee B$  es un refinamiento de  $A$  y  $B$ . La entropía de la partición  $Q$  es

$$H(Q) = - \sum_{i=1}^m \mu(A_i) \log \mu(A_i) \quad (3.32)$$

A partir de (3.32) y de la partición  $\bigvee_{j=0}^n T^{-j}Q$  se define la entropía KS del sistema dinámico como

$$h_{KS} = \sup_Q \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\bigvee_{j=0}^n T^{-j}Q) \right\} \quad (3.33)$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones finitas  $Q$  de  $\Gamma$  y  $T^{-j}Q = \{T^{-j}a : a \in Q\}$ . Un primer significado de la entropía KS que puede mencionarse es el dado por el teorema de Brudno, a partir del cual puede probarse que  $h_{KS}$  mide la impredecibilidad media de información de todas las posibles trayectorias en el espacio de fases. Como mencionamos anteriormente en la sección 3.1., la entropía KS es uno de los indicadores más robustos dentro del caos clásico y cuántico, y esta relevancia se hace más patente si consideramos los exponentes de Lyapunov.

Es un hecho bien conocido que el caos clásico puede definirse por medio del incremento exponencial de la distancia  $d(t)$  entre dos trayectorias que comienzan desde condiciones iniciales cercanas entre sí. Cuantitativamente, esto está relacionado con el exponente de Lyapunov positivo más grande del sistema [70]. A su vez, el movimiento exponencialmente inestable es caótico dado que casi todas las trayectorias son impredecibles para tiempos grandes. Aquí es

donde entra en juego el teorema de Pesin, el cual establece que [12, 71, 72]

$$h_{KS} = \int_{\Gamma} \left[ \sum_{\sigma_i(q,p) > 0} \sigma_i(q,p) \right] dqdp \quad (3.34)$$

siendo  $\sigma_i(q,p)$  los exponentes de Lyapunov del sistema,  $(q,p) \in \Gamma \subseteq \mathbb{R}^{2(N+1)}$  y  $2(N+1)$  la dimensión del espacio de fases. En el caso particular de que los exponentes de Lyapunov son constantes sobre todo el espacio de fases se tiene

$$h_{KS} = \sum_{\sigma > 0} \sigma$$

Es decir, en este caso la entropía KS es simplemente la suma de los exponentes de Lyapunov. Es apropiado hacer un comentario sobre el interés de la fórmula (3.34) y su significado físico. El teorema de Pesin relaciona la entropía KS, es decir la impredecibilidad media de información de todas las posibles trayectorias, con la inestabilidad exponencial del movimiento. De aquí se sigue que el contenido principal del teorema de Pesin es que la positividad de la entropía KS  $h_{KS} > 0$  constituye una condición suficiente para el movimiento caótico.

### 3.2.2. Una condición semiclásica para el caos en términos de valores medios cuánticos

Utilizaremos la condición  $h_{KS} > 0$  para estudiar el caos en el límite clásico donde la positividad de  $h_{KS}$  será dada a partir de una condición semiclásica. Con los preliminares anteriores y las propiedades de la transformación de Wigner estamos en condiciones de reescribir el teorema de Pesin en términos de valores medios cuánticos.

Como punto de partida haremos las siguientes hipótesis. Sea  $S$  un sistema cuántico con su álgebra de operadores  $\mathcal{A}$ . Al igual que en los capítulos anteriores,  $S$  posee un límite clásico  $S_{cl}$  que es un sistema dinámico  $(\Gamma, \Sigma, \mu, \{T_t\}_{t \in J})$  con un espacio de fases  $\Gamma$  de dimensión  $2(N+1)$ . Dado que el proceso de generar la entropía KS involucra un secuencia discreta de pasos, entonces la evolución también está forzada a ser discretizada. Ya vimos evoluciones discretizadas en el caso del rotor pateado del Capítulo 2 donde se utiliza como operador de evolución al operador de Floquet  $\hat{F}(\tau n)$ , es decir  $\hat{U}(n) = \hat{F}(\tau n)$  siendo  $\tau$  la periodicidad del potencial.

Al igual que en el caso del teorema QSDT, consideramos al operador de evolución cuántico dado por el Hamiltoniano y discretizado de la siguiente forma  $\hat{U}(j) = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}\alpha j}$  donde  $\alpha$  es un parámetro real continuo que define los pasos temporales y  $j$  indica el  $j$ -ésimo paso.

Primeramente, dado un instante  $t$  vamos a necesitar expresar los volúmenes de conjuntos del espacio de fases en términos de valores medios cuánticos, que se obtendrá como aplicación de la siguiente proposición, cuyas demostración se encuentra en el Apéndice.

**Proposición 3.6** *Sea  $\hat{A}$  un operador del álgebra cuántica cuyo símbolo de Weyl es  $\widetilde{W}_{\hat{A}}(q,p)$ . Entonces el símbolo de  $\hat{A}(-t) = \hat{U}(t)^\dagger \hat{A} \hat{U}(t)$  es  $\widetilde{W}_{\hat{A}}(T_t q, T_t p) = \widetilde{W}_{\hat{A}}(q(t), p(t))$ , esto es*

$$\widetilde{W}_{\hat{A}}(q(t), p(t)) = \widetilde{W}_{\hat{U}(t)^\dagger \hat{A} \hat{U}(t)}(q, p) = \widetilde{W}_{\hat{A}(-t)}(q, p) \quad (3.35)$$

Donde  $\hat{U}(t)$  es el operador de evolución dado por el Hamiltoniano cuántico y  $T_t$  es la evolución clásica en el espacio de fases dada por las ecuaciones de Hamilton.

Aplicando la proposición 3.6 a  $\hat{A} = \hat{I}_E$  se obtiene el siguiente corolario.

**Corolario 3.7** Sea  $I_E(q, p)$  la función característica de un conjunto  $E$  del espacio de fases. Sea  $\hat{I}_E$  el operador tal que su símbolo de Weyl es  $\widetilde{W}_{\hat{I}_E}(q, p) = I_E(q, p)$ . Entonces

$$I_{T^{-t}E}(q, p) = \widetilde{W}_{\hat{I}_E(-t)}(q, p) \quad (3.36)$$

Dado que estamos interesados solamente en saber si  $S_{cl}$  es caótico ó no, no necesitamos realizar explícitamente el cálculo de la entropía KS dado por (3.33), que además no es un cálculo sencillo en general. Esto es así debido a la estructura de los conjuntos que componen la partición  $\bigvee_{j=0}^n T^{-j}Q$ . Llamando  $B(A_{k_0}, A_{k_1}, \dots, A_{k_n})$  a cada elemento, vemos que son de la forma

$$B(A_{k_0}, A_{k_1}, \dots, A_{k_n}) = A_{k_0} \cap T^{-1}A_{k_1} \cap \dots \cap T^{-n}A_{k_n} \quad (3.37)$$

La clave está en que para determinar la positividad de la entropía KS, es suficiente con estudiar el comportamiento asintótico de  $\mu(B(A_{k_0}, A_{k_1}, \dots, A_{k_n}))$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , que es el contenido del siguiente lema [12].

**Lema 3.8** Si  $\mu(B(A_{k_0}, A_{k_1}, \dots, A_{k_n}))$  decrece exponencialmente cuando  $n \rightarrow \infty$  entonces la entropía KS es positiva.

Este lema es una condición suficiente para el caos clásico el cual está gobernado por el decrecimiento exponencial de  $\mu(B(k_0, k_1, \dots, k_n))$  en el límite asintótico, es decir sin tener en cuenta los detalles de la dinámica caótica a tiempos finitos. Con la ayuda del corolario 3.7 y del lema 3.8 podemos dar una expresión de  $\mu(B(A_{k_0}, A_{k_1}, \dots, A_{k_n}))$  en términos de valores medios cuánticos, que constituye la siguiente versión cuántica del lema 3.8 cuando  $\hbar \sim 0$ .

**Lema 3.9** Sea  $S$  un sistema cuántico con un límite clásico  $S_{cl}$ . Sea  $Q = \{A_1, \dots, A_M\}$  una partición finita del espacio de fases de  $S_{cl}$ . Sea  $(k_0, k_1, \dots, k_n)$  una  $(n+1)$ -upla con  $k_j = 1, \dots, M$  y consideremos los  $(M+1)$ -operadores  $\hat{I}_{A_1}, \dots, \hat{I}_{A_M}$  tales que  $\widetilde{W}_{\hat{I}_{A_1}}(q, p) = I_{A_1}(q, p), \dots, \widetilde{W}_{\hat{I}_{A_M}}(q, p) = I_{A_M}(q, p)$  son las funciones características correspondientes a  $A_1, \dots, A_M$ .

Si en el límite semiclásico  $\hbar \approx 0$  se tiene que  $\text{Tr}(\prod_{j=0}^n \hat{I}_{A_{k_j}}(-j))$  decrece exponencialmente cuando  $n \rightarrow \infty$  entonces la entropía KS de  $S_{cl}$  es positiva.

Podemos ver que el lema 3.9 nos proporciona una condición de caos en el límite clásico. Más precisamente, nos brinda un método para determinar si  $S_{cl}$  es caótico o no cuya prescripción está dada por los siguientes pasos.

- (a) Tomamos una partición finita arbitraria  $Q = \{A_1, \dots, A_M\}$  del espacio de fases  $\Gamma$  de  $S_{cl}$ .
- (b) Para cualquier  $(n+1)$ -upla  $(k_0, k_1, \dots, k_n)$  con  $k_j \in \{1, \dots, M\}$  obtenemos los operadores  $\hat{I}_{A_{k_j}}(-j) = \hat{U}(j)^\dagger \hat{I}_{A_{k_j}}(0) \hat{U}(j)$  donde  $W_{\hat{I}_{A_{k_j}}(0)}(q, p) = I_{A_{k_j}}(q, p)$ .
- (c) Luego, calculamos  $\text{Tr}(\prod_{j=0}^n \hat{I}_{A_{k_j}}(-j))$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .
- (d) Finalmente, si comprobamos que  $\text{Tr}(\prod_{j=0}^n \hat{I}_{A_{k_j}}(-j))$  decrece exponencialmente cuando  $n \rightarrow \infty$  entonces la entropía KS de  $S_{cl}$  es positiva. Luego, se concluye que  $S_{cl}$  es caótico.

### 3.2.3. Ejemplo: modelo de Gamow

Con el fin de ilustrar la relevancia física de la condición del lema 3.9 aplicaremos la prescripción (a) – (d) a un ejemplo de decoherencia de la literatura: el modelo de Gamow [28, 52]. Este modelo consiste de un oscilador inmerso en un ambiente compuesto por un gran baño de osciladores no interactuantes entre sí, que pueden ser considerados como un continuo.

La degeneración de este sistema impide la aplicación de la teoría de perturbaciones. En vez de ello, podemos aplicar una extensión analítica del Hamiltoniano para obtener un Hamiltoniano efectivo  $H_{eff}$  no hermítico [28, 30, 73, 74, 75, 76]. La no hermiticidad de  $H_{eff}$  provee dos conjuntos de autovectores a izquierda y derecha,  $\{\langle \tilde{m} | \}_{m=0}^{\infty}$  y  $\{|n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$  respectivamente, los cuales satisfacen las siguientes relaciones [46]

$$H_{eff}|n\rangle = z_n|n\rangle, \quad \langle \tilde{n} | H_{eff} = \langle \tilde{n} | z_j, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.38)$$

$$\langle \tilde{m} | n \rangle = \delta_{mn} \quad (bi - ortogonalidad) \quad (3.39)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle \tilde{n}| = \hat{I} \quad (completitud) \quad (3.40)$$

El Hamiltoniano efectivo  $H_{eff}$  está dado por

$$\hat{H} = \sum_{n=0}^{\infty} z_n |n\rangle \langle \tilde{n}| \quad (3.41)$$

donde  $z_n = n(\omega_0 - i\gamma_0)$  son autovalores complejos (excepto  $z_0 = \omega_0$ ) donde  $\gamma_0$  está asociado con el tiempo de relajación  $t_R = \frac{\hbar}{2\gamma_0}$  y  $\omega_0$  es la frecuencia natural del oscilador [52]. Podemos expandir los operadores  $\hat{I}_{A_{k_j}}(j)$  en la base bi-ortogonal  $\{|r\rangle \langle \tilde{s}|\}_{r,s \in \mathbb{N}_0}$

$$\begin{aligned} \hat{I}_{A_{k_j}}(j) &= \alpha_{A_{k_j}}(0,0)|0\rangle \langle 0| + \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_{A_{k_j}}(r,r)e^{-2\frac{\gamma_0}{\hbar}r\alpha j}|r\rangle \langle \tilde{r}| + \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_{A_{k_j}}(0,s)e^{i\frac{\omega_0}{\hbar}(s-1)\alpha j}e^{-\frac{\gamma_0}{\hbar}s\alpha j}|0\rangle \langle \tilde{s}| + \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_{A_{k_j}}(r,0)e^{-i\frac{\omega_0}{\hbar}(r-1)\alpha j}e^{-\frac{\gamma_0}{\hbar}r\alpha j}|r\rangle \langle 0| + \\ &+ \sum_{r,s=1,r \neq s}^{\infty} \alpha_{A_{k_j}}(r,s)e^{-\frac{\gamma_0}{\hbar}(r+s)\alpha j}|r\rangle \langle \tilde{s}| \end{aligned} \quad (3.42)$$

Para poder utilizar el lema 3.9 vamos a utilizar el siguiente argumento: vamos a considerar un sistema “artificial”, denotado por  $S'$ , que evoluciona para atrás en el tiempo con el mismo Hamiltoniano (3.41). Es decir que los operadores  $\hat{I}_{A_{k_j}}(j)$  representan la evolución hacia atrás en  $S'$  de cada uno de ellos, en virtud de que  $\hat{I}_{A_{k_j}}(j) = \hat{I}_{A_{k_j}}(-(-j))$ . El paso siguiente es aplicar la prescripción (a) – (d) de la sección anterior. A partir de (3.42) vemos que para  $j \gg \frac{\hbar}{2\alpha\gamma_0} = \frac{t_R}{\alpha}$  todas las sumas decaen exponencialmente. Entonces, podemos despreciar estos términos y obtener

$$\hat{I}_{A_{k_j}}(j) \simeq \alpha_{A_{k_j}}(0,0)|0\rangle \langle 0| \quad \forall j \gg \frac{t_R}{\alpha} \text{ con } j = 1, \dots, n \quad (3.43)$$

El coeficiente  $\frac{t_R}{\alpha}$  puede ser interpretado como un tiempo de relajación adimensional, donde el parámetro  $\alpha$  define los pasos temporales de la evolución discretizada.



Luego, si  $n \gg \frac{t_R}{\alpha}$  podemos obtener una expresión asintótica de  $\prod_{j=0}^n \hat{I}_{A_{k_j}}(j)$  basándonos en el siguiente razonamiento. Más precisamente, de (3.42) y (3.43) se sigue que si  $n \gg \frac{t_R}{\alpha}$  entonces  $\hat{I}_{A_{k_n}}(n) \simeq \alpha_{A_{k_n}}(0,0)|0\rangle\langle 0|$  es diagonal. Entonces,

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^n \hat{I}_{A_{k_j}}(j) &= \hat{I}_{A_{k_0}}(0)\hat{I}_{A_{k_1}}(1)\cdots\hat{I}_{A_{k_n}}(n) \\ &\simeq \hat{I}_{A_{k_0}}(0)\hat{I}_{A_{k_1}}(1)\cdots\hat{I}_{A_{k_{n-1}}}(n-1)\alpha_{A_{k_n}}(0,0)|0\rangle\langle 0| = \left(\prod_{j=0}^n \alpha_{A_{k_j}}(0,0)\right)|0\rangle\langle 0| \end{aligned}$$

resulta diagonal sin considerar si los operadores  $\hat{I}_{A_{k_0}}(0), \hat{I}_{A_{k_1}}(1), \dots, \hat{I}_{A_{k_{n-1}}}(n-1)$  son diagonales o no. Teniendo en cuenta esto, nos queda

$$\prod_{j=0}^n \hat{I}_{A_{k_j}}(j) \simeq \left(\prod_{j=0}^n \alpha_{A_{k_j}}(0,0)\right)|0\rangle\langle 0| \quad \forall n \gg \frac{t_R}{\alpha} \quad (3.44)$$

y por lo tanto,

$$\text{Tr}\left(\prod_{j=0}^n \hat{I}_{A_{k_j}}(j)\right) \simeq \prod_{j=0}^n \alpha_{A_{k_j}}(0,0) \quad \forall n \gg \frac{t_R}{\alpha} \quad (3.45)$$

Hasta la ec. (3.45) hemos completado los pasos (a) – (c) de nuestra prescripción (sección 5.2). El último (d) paso es verificar si  $\text{Tr}\left(\prod_{j=0}^n \hat{I}_{A_{k_j}}(j)\right)$  decae exponencialmente cuando  $n \rightarrow \infty$ . Para ello, primero notemos de (3.42) que cuando  $j \rightarrow \infty$  tenemos

$$\mu(A_{k_j}(j)) = \text{Tr}(\hat{I}_{A_{k_j}}(j)) \rightarrow \alpha_{A_{k_j}}(0,0) \quad (3.46)$$

Dado que estamos considerando un movimiento acotado del oscilador, entonces podemos considerar que el espacio de fases  $\Gamma$  está normalizado. Cabe señalar que el espacio de fases de un sistema caótico no integrable es una variedad compacta. Para el caso de un movimiento regular e integrable, el espacio de fases puede tomarse sobre un toro. Luego, de (3.46) tenemos

$$\mu(\Gamma) = 1 > \mu(A_{k_j}(j)) \rightarrow \alpha_{A_{k_j}}(0,0) \quad (3.47)$$

Además, dado que  $\mu(A_{k_j}(j)) \geq 0$  para todo  $j$ , se sigue que  $0 \leq \alpha_{A_{k_j}}(0,0) < 1$ . Mas aún, si  $\mu(A_{k_{j_0}}(j_0)) = 0$  para algún  $k_{j_0}$ , dado que  $\mu(A_{k_{j_0}}(j_0)) = \text{Tr}(\hat{I}_{A_{k_{j_0}}}(j_0))$  entonces de (3.45) y (3.46) se sigue que  $\text{Tr}\left(\prod_{j=0}^n \hat{I}_{A_{k_j}}(j)\right) = 0$  para  $n \gg \frac{t_R}{\alpha}$ . Por lo tanto,

$$\text{Tr}\left(\prod_{j=0}^n \hat{I}_{A_{k_j}}(j)\right) \log \text{Tr}\left(\prod_{j=0}^n \hat{I}_{A_{k_j}}(j)\right) = 0 \quad \text{si } n \gg \frac{t_R}{\alpha} \quad (3.48)$$

donde hemos usado que  $f(0) = 0$  si  $f(x) = x \log(x)$ . En otras palabras, los conjuntos  $A_{k_{j_0}}$  tales que  $\mu(A_{k_{j_0}}(j_0)) = 0$  no contribuyen a la entropía de KS dada por (3.33). Esto significa que alcanza con considerar  $\mu(A_{k_j}(j)) > 0$  para todo  $j$ . Luego se tiene

$$0 < \alpha_{A_{k_j}}(0,0) < 1 \quad \text{para todo } j = 1, \dots, n \quad (3.49)$$

Si llamamos  $\delta_1 = \min\{\alpha_{A_{k_j}}(0,0)\}$  y  $\delta_2 = \max\{\alpha_{A_{k_j}}(0,0)\}$  entonces de (3.49) se sigue que

$$\delta_1^{n+1} < \prod_{j=0}^n \alpha_{A_{k_j}}(0,0) < \delta_2^{n+1} \quad (3.50)$$

Finalmente, de (3.45) y (3.50) obtenemos

$$\delta_1^{n+1} < \left( \prod_{j=0}^n \hat{I}_{A_{k_j}}(j) \right) |\hat{I}| < \delta_2^{n+1} \quad \text{si } n \gg \frac{t_R}{\alpha} \quad (3.51)$$

La ecuación (3.51) implica que  $\text{Tr}(\prod_{j=0}^n \hat{I}_{A_{k_j}}(j))$  decrece exponencialmente cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, de acuerdo el último paso (d), concluimos que el Hamiltoniano efectivo de Gamow presenta una entropía KS positiva. En consecuencia, posee comportamiento caótico en el límite clásico cuando invertimos el orden de la evolución temporal (es decir,  $t \rightarrow -t$ ).

Utilicemos una vez más el sistema artificial  $S'$  para poder obtener los exponentes de Lyapunov del modelo de Gamow. De acuerdo a la sección anterior sabemos que  $S'$  posee una entropía KS positiva y por lo tanto debido al teorema de Pesin  $S'$  tiene exponentes de Lyapunov positivos. Para conocer el valor de éstos, en vez de calcular  $h_{KS}$  explícitamente vamos a utilizar un argumento basado en el tiempo de Kolmogorov–Sinai (o tiempo KS)  $\tau_{KS}$  que está definido de la siguiente forma [77, 78].

De acuerdo a la inestabilidad exponencial caracterizada por  $h_{KS} > 0$ , cualquier número de puntos inicialmente cercanos estarán distribuidos uniformemente sobre toda la superficie de energía constante  $H(q, p) = E = \text{cte}$ . [79]. El tiempo característico para este proceso se llama *tiempo de Kolmogorov–Sinai* que está definido como

$$\tau_{KS} = \frac{1}{h_{KS}} \quad (3.52)$$

Ahora bien, el tiempo característico del modelo Gamow es  $t_R = \frac{\hbar}{2\gamma_0}$  el cual a su vez puede identificarse con el correspondiente al sistema  $S'$  para que las medidas  $\mu(B(A_{k_0}, \dots, A_{k_n}))$  decaigan exponencialmente. Se sigue que  $t_R = \frac{\hbar}{2\gamma_0}$  es también el tiempo característico de  $S'$  y por lo tanto por (3.52) debe ser igual a  $\tau_{KS}$ . Entonces,

$$\tau_{KS} = t_R = \frac{\hbar}{2\gamma_0} = \frac{1}{h_{KS}} \quad (3.53)$$

y por lo tanto,

$$h_{KS} = \frac{2\gamma_0}{\hbar} \quad (3.54)$$

es la entropía KS de  $S'$ . Además, por el teorema de Pesin se tiene

$$\frac{2\gamma_0}{\hbar} = \sum_{\sigma_i > 0} \sigma_i = \sigma_0 \quad (3.55)$$

siendo  $\sigma_0$  el exponente de Lyapunov positivo más grande. No obstante,  $\sigma_0 > 0$  (expansión exponencial de volúmenes en el espacio de fases) con el tiempo hacia atrás en  $S'$  se corresponde con una evolución hacia adelante en el tiempo en el modelo de Gamow y con  $-\sigma_0 < 0$  (contracción exponencial de volúmenes en el espacio de fases). De estos razonamientos se concluye que el exponente de Lyapunov  $\Lambda_0$  del modelo de Gamow es

$$\Lambda_0 = -\sigma_0 = -\frac{2\gamma_0}{\hbar} < 0 \quad (3.56)$$

el cual está en función del polo más chico del Hamiltoniano efectivo  $\hat{H}_{eff}$  y además es negativo debido a que el modelo de Gamow corresponde a un proceso de relajación, es decir con presencia de disipación de energía.

## Capítulo 4

# La jerarquía ergódica geometrodinámica informacional

En los capítulos anteriores se dieron diferentes caracterizaciones asintóticas del caos cuántico que permitieron extender a lenguaje cuántico aproximaciones clásicas tales como los niveles de la jerarquía ergódica, la propiedad *mixing*, etc., que a su vez dan una descripción estadística del comportamiento del sistema por medio de correlaciones entre subconjuntos del espacio de fases. Ahora veremos cómo una de estas caracterizaciones, la jerarquía ergódica, conjuntamente con el formalismo de aproximación geometrodinámica informacional al caos (IGAC), nos permiten realizar un estudio geométrico de los niveles de la jerarquía ergódica y de los ensambles Gaussianos.

IGAC fue desarrollado por Cafaro [37, 38, 39] con el propósito de modelar estadísticamente y predecir las características caóticas de la dinámica de los sistemas físicos por medio de un espacio cuyos elementos son distribuciones de probabilidad, donde la información disponible del sistema está dada por una distribución de probabilidad  $P$  sobre las variables microscópicas  $\{x_i\}$  del sistema que satisfacen un conjunto de ligaduras o restricciones. Luego, las restricciones y la aplicación de *MaxEnt* determinan unívocamente a  $P$ . En primer lugar, la característica principal de IGAC que lo diferencia con respecto a las caracterizaciones anteriores es que está basado en una descripción en términos de una variedad estadística cuya dinámica está dada por ecuaciones geodésicas.

En segundo lugar, una de las ventajas del formalismo IGAC es que dada la métrica en la variedad estadística, es posible inferir características caóticas de su dinámica a lo largo de las geodésicas a partir de cantidades como el tensor de Ricci, curvaturas escalares locales, etc.

Primero daremos el contexto adecuado para luego poder aplicar todo el potencial de IGAC en la jerarquía ergódica y en los ensambles Gaussianos. El contenido de este capítulo está basado en un trabajo que se encuentra en preparación [81].

### 4.1. Ensamblen Gaussianos dentro de un modelo de variedades estadísticas

Comenzamos definiendo el espacio de microestados para el contexto de los ensamble Gaussianos. Consideramos que tenemos un sistema cuántico  $S$  cuyo espacio de Hilbert es  $N$ -dimensional y provisto de un hamiltoniano  $\hat{H}$  que se asume a priori desconocido. Esta hipótesis está justificada dentro del régimen totalmente caótico de los sistemas cuánticos clásicamente caóticos donde los detalles de las interacciones no son relevantes, de tal forma que uno puede modelar

el Hamiltoniano por una matrix cuyos elementos están distribuídos al azar. Es decir que, a priori, los ensambles Gaussianos parten de una descripción probabilística de los elementos del Hamiltoniano lo cual permite realizar un estudio de estos en términos de la IGAC.

Definimos nuestro espacio de microestados  $\{x_k\}_{k=1}^l$  como el espacio de los elementos matriciales de  $\hat{H}$ , esto es, nuestro microestado es  $\{H_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N}$ . El punto clave es definir el macroestado  $\{\Theta\}$  que contendrá la información relevante acerca de los elementos matriciales de  $\hat{H}$ . Seleccionamos el macroestado  $\{\Theta\}$  a partir de las siguientes restricciones o *ligaduras* sobre las variables  $H_{ij}$ , tal como se describe en [37, 38]

$$\begin{aligned} \int p(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN}) H_{ij} dH_{11} dH_{12} \cdots dH_{NN} &= \mu_{ij}, \\ \int p(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN}) (H_{ij} - \mu_{ij})^2 dH_{11} dH_{12} \cdots dH_{NN} &= \sigma_{ij}^2, \\ \int p(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN}) H_{ij} H_{kl} dH_{11} dH_{12} \cdots dH_{NN} &= \sigma_{ij,kl} \quad i \neq j, k \neq l \end{aligned} \quad (4.1)$$

Además de la normalización,

$$\int p(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN}) dH_{11} dH_{12} \cdots dH_{NN} = 1 \quad (4.2)$$

para todo  $i, j, k, l = 1, \dots, N$ . Aquí  $p(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN})$  es la distribución de probabilidad de los elementos matriciales  $H_{ij}$  que queda determinada por el método de Máxima Entropía (en inglés, MaxEnt [40]). Esto es, MaxEnt determina cuál es la distribución  $p(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN})$  que maximiza la entropía, de Shannon en este caso, dada por el funcional

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(p(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN})) &= \\ - \int p(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN}) \log(p(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN})) dH_{11} dH_{12} \cdots dH_{NN} & \end{aligned} \quad (4.3)$$

sujeta a las condiciones (4.1) y (4.2). Entonces, en esta descripción probabilística se acepta que la distribución  $p(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN})$  que maximiza  $\mathcal{H}$  es la que mejor describe nuestro sistema dado que (4.3) representa nuestra falta de información o incerteza acerca del sistema.

Por simplicidad supondremos que todos los valores de expectación  $\mu_{ij}$  son iguales a cero salvo uno para una de las variables  $H_{rs}$ . No obstante, los resultados obtenidos serán válidos más allá de esta simplificación. Por lo tanto, el conjunto de ecuaciones de (4.1) se reduce si consideramos

$$\mu_{ij} = \delta_{ir} \delta_{js} \mu_{rs} \quad (4.4)$$

para algún par  $r, s = 1, \dots, N$  que significa considerar que las medias de todas las variables son nulas salvo para una sola de ellas. Vamos a estudiar el caso de más baja dimensionalidad, es decir  $N = 2$ . Entonces la distribución buscada será de la forma  $p(H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21})$  donde reordenamos las variables por comodidad, teniendo en cuenta que los resultados obtenidos no pueden depender de tal reordenamiento. Aún en este caso se tienen muchas ecuaciones, por lo tanto vamos a suponer que sólo hay correlaciones entre las variables  $H_{11}$  y  $H_{22}$ . Esto significa suponer que la única covarianza  $\sigma_{ij,kl}$  no nula es  $\sigma_{11,22}$ . Notemos que aun así esto es más general que los ensambles Gaussianos dado que en estos se asume que todas las variables están descorrelacionadas lo cual se traduce en que  $\sigma_{ij,kl} = 0$  para todo  $i, j, k, l$ .

Además, de la hermiticidad de  $\hat{H}$  y suponiendo que  $p(H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21})$  es una función analítica de  $H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21}$  se sigue que  $p(H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21}) = p(H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21})^*$ , es

decir que  $p(H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21})$  es real. Entonces a partir de las ecuaciones planteadas obtenemos  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ . Luego, el conjunto de ecuaciones, considerando  $N = 2$  y  $r, s = 1$  en (4.1), (4.2) y (4.4), se convierte en

$$\begin{aligned} \int p(H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21}) H_{11} dH_{11} dH_{12} dH_{21} dH_{22} &= \mu_{11}, \\ \int p(H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21}) (H_{11} - \mu_{11})^2 dH_{11} dH_{12} dH_{21} dH_{22} &= \sigma_{11}^2, \\ \int p(H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21}) H_{12}^2 dH_{11} dH_{12} dH_{21} dH_{22} &= \sigma_{12}^2, \\ \int p(H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21}) H_{22}^2 dH_{11} dH_{12} dH_{21} dH_{22} &= \sigma_{22}^2, \\ \int p(H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21}) H_{11} H_{22} dH_{11} dH_{12} dH_{21} dH_{22} &= \sigma_{11,22} \end{aligned} \quad (4.5)$$

con la condición de normalización,

$$\int p(H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21}) dH_{11} dH_{12} dH_{21} dH_{22} = 1 \quad (4.6)$$

Pensando a  $X_H = (H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21})$  como un vector aleatorio las ecuaciones (4.5) determinan la siguiente matriz de covarianza

$$C_{X_H} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{11,22} & 0 & 0 \\ \sigma_{11,22} & \sigma_{22}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{12}^2 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

siendo  $\sigma_{22,11} = \sigma_{11,22}$ . Es decir que  $X_H$  es un vector Gaussiano donde las variables  $H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21}$  son independientes ó no según sea  $\sigma_{22,11}$  igual o distinto de cero. En el caso particular de los ensambles Gaussianos todas las covarianzas  $\sigma_{ij,kl}$  son cero.

Una observación importante que se desprende de este planteo es que al tratar las variables  $H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21}$  como las componentes de un vector aleatorio se obtiene un marco teórico para analizar los ensambles Gaussianos desde un formalismo más general. Ahora vamos a explorar esa idea. De acuerdo a MaxEnt, la distribución  $p(H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21})$  que maximiza la entropía dada por (4.3) y sujeta a las condiciones (4.5) y (4.6) es

$$\begin{aligned} p(H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21} | \mu_{11}, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{11,22}) &= \\ \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2 - \sigma_{11,22}^2}} \exp\left(-\frac{(H_{11} - \mu_{11})^2\sigma_{22}^2 + H_{22}^2\sigma_{11}^2 - 2H_{11}H_{22}\sigma_{11,22}}{2(\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2 - \sigma_{11,22}^2)}\right) & \frac{1}{2\pi\sigma_{12}^2} \exp\left(-\frac{H_{12}^2 + H_{21}^2}{2\sigma_{12}^2}\right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Con el objetivo de estudiar cuán independientes son  $H_{11}$  y  $H_{22}$ , es conveniente hacer el siguiente cambio de variables,  $\sigma_{11,22} = r\sigma_{11}\sigma_{22}$  con  $-1 \leq r \leq 1$ . De esta forma  $r$  se identifica con el coeficiente de correlación entre  $H_{11}$  y  $H_{22}$ . Ahora bien, asumiendo además que el producto  $\sigma_{11}\sigma_{22} = \Sigma^2$  es una constante positiva y renombrando  $\mu_{11} = \mu$ ,  $\sigma_{11} = \sigma_1$ ,  $\sigma_{12} = \sigma_2$  entonces

reducimos la cantidad de parámetros a simplemente  $\mu, \sigma_1, \sigma_2, r$ . A partir de (4.8) nos queda entonces

$$p(H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21} | \mu, \sigma_1, \sigma_2, r) = \frac{1}{2\pi\Sigma^2\sqrt{1-r^2}} \exp\left(\frac{-\left(\frac{(H_{11}-\mu)^2}{\sigma_1^2} + \frac{H_{22}^2\sigma_1^2}{\Sigma^4} - \frac{2rH_{11}H_{22}}{\Sigma^2}\right)}{2(1-r^2)}\right) \frac{1}{2\pi\sigma_2^2} \exp\left(-\frac{(H_{12}^2+H_{21}^2)}{2\sigma_2^2}\right) \quad (4.9)$$

Vamos a focalizarnos en explorar el espacio de Gaussianas descrito solamente por  $\mu, \sigma_1$  y  $\sigma_2$  que implica considerar que el parámetro  $r$  es fijo. Ahora bien, la métrica inducida por (4.9) está dada por la métrica informacional de Fisher–Rao la cual está definida según la fórmula (1.29)

$$g_{lm}(\theta) = \int dx_1 \cdots dx_N p(x_1, \dots, x_N | \theta_1, \dots, \theta_L) \frac{\partial \log p(\dots | \dots)}{\partial \theta_l} \frac{\partial \log p(\dots | \dots)}{\partial \theta_m} \quad (4.10)$$

siendo  $X = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N\}$  el microespacio y  $\Theta = \{(\theta_1, \dots, \theta_L) \in \mathbb{R}^L\}$  el macroespacio de parámetros.

En nuestro caso  $X = \{(H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21}) \in \mathbb{R}^4\}$  y  $\Theta = \{(\mu, \sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^3 : \mu \in (-\infty, \infty) ; \sigma_1, \sigma_2 \in (0, \infty)\}$ , es decir que se trata de un modelo estadístico 3D.

Sólo necesitamos calcular tres derivadas  $\frac{\partial \log p(H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21} | \mu, \sigma_1, \sigma_2)}{\partial \mu}$ ,  $\frac{\partial \log p(H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21} | \mu, \sigma_1, \sigma_2)}{\partial \sigma_1}$  y  $\frac{\partial \log p(H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21} | \mu, \sigma_1, \sigma_2)}{\partial \sigma_2}$  que por simplicidad en la notación, escribiremos  $\frac{\partial \log p}{\partial \mu}$ ,  $\frac{\partial \log p}{\partial \sigma_1}$  y  $\frac{\partial \log p}{\partial \sigma_2}$ . Sus valores de acuerdo a (4.10) están dados por

$$\frac{\partial \log p}{\partial \mu} = \frac{H_{11} - \mu}{\sigma_1^2(1-r^2)} \quad \frac{\partial \log p}{\partial \sigma_1} = \frac{-1}{2(1-r^2)} \left( -2\frac{H_{11}^2}{\sigma_1^3} + 2\frac{H_{22}^2\sigma_1}{\Sigma^4} \right), \quad \frac{\partial \log p}{\partial \sigma_2} = -\frac{2}{\sigma_2} + \frac{H_{12}^2 + H_{21}^2}{\sigma_2^3} \quad (4.11)$$

A su vez, denotaremos al tensor métrico como  $g_{ij}$  con  $i, j = 1, 2, 3$  donde el índice 1, 2, 3 indica las coordenadas  $\mu, \sigma_1, \sigma_2$  respectivamente. De acuerdo a (4.10), vemos que el cálculo de  $g_{ij}$  involucra integrales Gaussianas y por lo tanto nos será útil el siguiente teorema [80].

**Teorema 4.1** *Sea  $Z = (Z_1, \dots, Z_k)$  un vector de variables aleatorias que sigue una ley normal con valor medio  $\xi \in \mathbb{R}^k$  y matriz de covarianza  $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ . Sean*

$$\mu_{r_1+\dots+r_m}(Z) = \mu_{1+\dots+k}(Z) = E\left(\prod_{j=1}^m Z_j^{r_j}\right), \quad \text{donde } r_1 + \dots + r_m = k \text{ y } r_j \geq 1 \quad (4.12)$$

los momentos centrales de orden  $k$  donde las variables  $Z_j$  no son necesariamente distintas. Entonces,

- (a) Si  $k$  es impar se tiene  $\mu_{1+\dots+k}(Z - \xi) = 0$ .
- (b) Si  $k$  es par con  $k = 2\lambda$  ( $\lambda \geq 1$ ) se tiene  $\mu_{1+\dots+2\lambda}(Z - \xi) = \sum (c_{ij}c_{kl} \cdots c_{mn})$  donde la suma se realiza sobre todas las permutaciones de  $\{1, \dots, 2\lambda\}$  que dan  $(2\lambda-1)!/(2^{\lambda-1}(\lambda-1)!)$  términos en la suma, cada uno siendo el producto de  $\lambda$  covarianzas.

De (4.10) y (4.11) vemos que sólo aparecen momentos de orden 2 y 4. Dado que los de orden 2 son precisamente los elementos de la matriz de covarianza  $C_{X_H}$ , estos no necesitan calcularse.

Aplicando el teorema 4.1 con  $k = 4$  obtenemos

$$\begin{aligned}
E(Z_i^4) &= 3c_{ii}^2 \\
E(Z_i^3 Z_j) &= 3c_{ii}c_{ij} \\
E(Z_i^2 Z_j^2) &= c_{ii}c_{ij} + 2(c_{ij})^2 \\
E(Z_i^2 Z_j Z_p) &= c_{ii}c_{jp} + 2c_{ij}c_{ip} \\
E(Z_i Z_j Z_p Z_q) &= c_{ij}c_{pq} + c_{ip}c_{jq} + c_{iq}c_{jp}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

De (4.7) y (4.9) la matriz de covarianza nos queda

$$C_{X_H} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & r\Sigma^2 & 0 & 0 \\ r\Sigma^2 & \Sigma^4/\sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

Luego, a partir de (4.10), (4.11), (4.13) y (4.14) se tiene que  $g_{ij} = 0$  para todo  $i \neq j$  y por lo tanto la métrica es diagonal para este caso. Los únicos elementos no nulos son  $g_{11}$ ,  $g_{22}$  y  $g_{33}$ , cuyos valores están dados por

$$g_{11} = \frac{1}{\sigma_1^2(1-r^2)} \quad , \quad g_{22} = \frac{4}{\sigma_1^2(1-r^2)} \quad , \quad g_{33} = \frac{2}{\sigma_2^2} \tag{4.15}$$

Por lo tanto el tensor métrico  $g_{ij}$  y su inversa  $g^{kl}$  son

$$\begin{aligned}
g_{ij} &= \frac{1}{\sigma_1^2(1-r^2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_1^2(1-r^2)}{\sigma_2^2} \end{pmatrix} \\
g^{kl} &= \sigma_1^2(1-r^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_2^2}{2\sigma_1^2(1-r^2)} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Es decir que el elemento de línea infinitesimal de Fisher–Rao para este modelo es

$$ds^2 = \frac{1}{\sigma_1^2(1-r^2)} d\mu^2 + \frac{4}{\sigma_1^2(1-r^2)} d\sigma_1^2 + \frac{2}{\sigma_2^2} d\sigma_2^2 \tag{4.17}$$

Se observa una divergencia en la métrica en  $r = \pm 1$ , la cual da cuenta de transiciones de fase caóticas que presenta la dinámica del espacio de parámetros  $\vec{\theta} = (\mu, \sigma_1, \sigma_2)$ . Este hecho será analizado a continuación.

El paso siguiente es, mediante la métrica  $g_{ij}$ , calcular las diferentes cantidades que caracterizan la dinámica y geometría de la variedad estadística tales como los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$ ,

el tensor de Ricci  $R_{ij}$  y el escalar de curvatura  $R = R_{ij}g^{ij}$ . Comenzamos por los los símbolos de Christoffel, los cuales están definidos por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{km}(g_{mj,i} + g_{im,j} - g_{ij,m}) \quad (4.18)$$

donde  $g_{ab,c}$  denota la derivada parcial de  $g_{ab}$  con respecto al índice  $c$ . Utilizando (4.16) y (4.18) obtenemos los siguientes coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  no nulos

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{\sigma_1}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{4\sigma_1}, \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{\sigma_1}, \quad \Gamma_{33}^3 = -\frac{1}{\sigma_2} \quad (4.19)$$

A partir de los símbolos (4.19) podemos obtener el tensor de Ricci  $R_{ij}$  cuya fórmula general es

$$R_{ij} = \partial_k \Gamma_{ij}^k - \partial_j \Gamma_{ik}^k + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kn}^n - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^k \quad (4.20)$$

De (4.19) y (4.20) las únicas componentes diagonales no nulas del tensor de Ricci

$$R_{11} = -\frac{1}{4\sigma_1^2}, \quad R_{22} = -\frac{1}{\sigma_1^2} \quad (4.21)$$

Finalmente, de (4.16) y (4.21) obtenemos el escalar de curvatura de la variedad

$$R = R_{11}g^{11} + R_{22}g^{22} = -\frac{1}{2}(1 - r^2) \quad (4.22)$$

En primer lugar, a partir de (4.22) vemos que la variedad estadística para el modelo propuesto es *globalmente* curvada negativamente para todo valor del parámetro  $r \in (-1, 1)$  y de  $\sigma_2$ . Por lo tanto de la negatividad del escalar de curvatura  $R$  se deduce una dinámica caótica en el macroespacio  $\{(\mu, \sigma_1, \sigma_2) : \mu \in (-\infty, \infty), \sigma_i \in (0, \infty), i = 1, 2\}$ .

En segundo lugar, de (4.22) vemos que el caso no correlacionado  $r = 0, \mu = 0, \sigma_1 = \sigma_2 = \Sigma_0 = cte.$  corresponde a los ensambles Gaussianos, donde se detecta un mínimo valor de la curvatura escalar  $R_{\min}$  que satisface

$$R(r) = -\frac{1}{2}(1 - r^2) \leq R_{\min}(r = 0) = -\frac{1}{2} < 0 \quad \forall -1 \leq r \leq 1 \quad (4.23)$$

Por lo tanto, a partir de (4.23) podemos concluir que el caso no correlacionado es el que presenta más inestabilidad local del flujo geodésico, es decir una mayor dinámica caótica. Para cualquier otro valor de  $r$  no nulo, que corresponde a correlaciones no nulas entre  $H_{11}$  y  $H_{22}$ , la dinámica exhibe menos caoticidad que el caso  $r = 0$ . De aquí se desprenden dos consecuencias.

- (i) Dentro del formalismo geometrodinámico informacional IGAC y utilizando una familia de modelos parametrizada por  $r \in [-1, 1]$  se concluye que aquel correspondiente a los ensambles Gaussianos presenta máxima dinámica caótica que el resto de los modelos con  $r \neq 0$  de dicha familia. Este hecho podría constituir, plausiblemente, una justificación teórica de la utilización de los ensambles Gaussianos para la caracterización de la dinámica de los sistemas clásicamente caóticos.
- (ii) A partir de la ecuación (4.23) puede verse que el escalar de curvatura crece monótonamente con el parámetro  $r$ , es decir que la caoticidad de la dinámica parecería disminuir al aumentar la fuerza de las correlaciones entre las variables microscópicas del modelo. Esto es efectivamente lo que se observa en sistemas correlacionados de muchas partículas tales como electrones en una red fuertemente correlacionados donde la cuantización del sistema en dicho régimen (tight binding) conduce a la supresión de caos. En el formalismo de IGAC esto corresponde al caso de  $r = 1$  o  $r = -1$  para el cual se obtiene, usando (4.23), una curvatura nula.



## 4.2. Hacia una definición geometrodinámica informacional de la jerarquía ergódica

Motivados por las generalizaciones dadas en el Capítulo 2 ahora vamos a dar una extensión de los escalones ergódico, *mixing*, y Bernoulli de la jerarquía ergódica clásica en el lenguaje geométrico informacional de IGAC. Primeramente, recordemos que la correlación de la EH está dada por

$$C(T_t A, B) = \mu(T_t A \cap B) - \mu(A)\mu(B) \quad \forall A, B \subseteq \Gamma \quad (4.24)$$

donde  $A, B$  son subconjuntos del espacio de fases  $\Gamma$  del sistema dinámico  $(\Gamma, \Sigma, \mu, \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}})$ . Para poder expresar la correlación de la EH en el formalismo IGAC es más conveniente utilizar la expresión equivalente de la correlación (4.24) en términos de distribuciones

$$C(f \circ T_t, B) = \int_X (f \circ T_t)(x)g(x)dx - \int_X f(x)dx \int_X g(x)dx \quad \forall f, g \in \mathbb{L}^1(X) \quad (4.25)$$

Ahora bien, en el contexto de IGAC las distribuciones no son otra cosa que los elementos de la variedad estadística  $\mathcal{M}_S$ , es decir distribuciones de probabilidad  $P(X|\Theta)$ . Además, podemos pensar que las integrales de (4.25) están pesadas justamente con las distribuciones de probabilidad  $P(X|\Theta)$ . Luego, estas observaciones se traducen en los siguientes reemplazos para pasar al lenguaje de IGAC

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow \tau \\ \int (f \circ T_t)g &\longrightarrow \int P(X|\Theta(\tau))f(X)g(X)dX \\ \int f &\longrightarrow \int P(X|\Theta(\tau))f(X)dX \\ \int g &\longrightarrow \int P(X|\Theta(\tau))g(X)dX \end{aligned} \quad (4.26)$$

Por último, recordando que  $C(f \circ T_t, B)$  mide cuán independientes son los eventos  $T_t A$  y  $B$  entre sí, en base a esta analogía y dado que el microespacio  $X$  está constituido por una cantidad finita de variables  $x_1, \dots, x_l$  proponemos la siguiente “correlación geometrodinámica informacional”

$$\begin{aligned} C(f_1, \dots, f_l, \tau) = & \quad (4.27) \\ \int P(x_1, \dots, x_l|\Theta(\tau)) \prod_{i=1}^l f_i(x_i)dx_1 \cdots dx_l - \prod_{i=1}^l \int P_i(x_i|\Theta(\tau))f_i(x_i)dx_i & \quad \forall f_1, \dots, f_l \end{aligned}$$

donde las distribuciones  $P_1(x_1|\Theta(\tau)), \dots, P_l(x_l|\Theta(\tau))$  son las marginales de  $P(x_1, \dots, x_l|\Theta(\tau))$ , esto es

$$P_i(x_i|\Theta(\tau)) = \int P(x_1, \dots, x_l|\Theta(\tau))dx_1 \dots_{\neq i} \dots dx_l \quad (4.28)$$

Notemos de (4.27) que la correlación informacional queda parametrizada por  $\tau$ . Esto puede considerarse una generalización del parámetro temporal  $t$  presente en la correlación  $C(T_t A, B)$ . A partir de (4.27) podemos ver que la correlación informacional  $C(f_1, \dots, f_l, \tau)$  mide, análogamente a  $C(f \circ T_t, B)$  en la jerarquía ergódica clásica, cuán independientes son las variables  $x_1, \dots, x_l$  en función del parámetro  $\tau$ .

Habiendo definido  $C(f_1, \dots, f_l, \tau)$  ya podemos establecer los niveles de una versión geometrodinámica informacional de la jerarquía ergódica, que llamamos “jerarquía ergódica geometrodinámica informacional”, abreviadamente IGEH (informational geometrodynamical ergodic hierarchy). Decimos que el modelo estadístico es

- *ergódico informacional* si

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T C(f_1, \dots, f_l, \tau) d\tau = 0 \quad \forall f_1, \dots, f_l, \quad (4.29)$$

- *mixing informacional* si

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(f_1, \dots, f_l, \tau) = 0 \quad \forall f_1, \dots, f_l, \quad (4.30)$$

- *Bernoulli informacional* si

$$C(f_1, \dots, f_l, \tau) = 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \quad \forall f_1, \dots, f_l \quad (4.31)$$

Estos niveles expresan en términos de la correlación  $C(f_1, \dots, f_l, \tau)$  cuán independientes son las variables  $x_1, \dots, x_l$  a lo largo de su evolución sobre las geodésicas al variar el parámetro  $\tau$ . De la definición del nivel caótico más alto, el Bernoulli, se deduce que las distribuciones Gaussianas pertenecen a este nivel. Esto se corresponde con la “natural” manifestación de distribuciones Gaussianas en los regímenes totalmente caóticos tanto en los sistemas clásicos (por ejemplo al considerar variables aleatorias en mapas caóticos) como así también en los sistemas cuánticos clásicamente caóticos al utilizar los ensambles Gaussianos.

### 4.3. Relevancia física: El modelo 2D correlacionado en términos de los niveles de IGEH

Veamos qué caracterización caótica de la dinámica de la variedad estadística nos permiten dar los niveles de la IGEH. Para ello primero consideramos el caso de los ensambles Gaussianos

$$p(H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21} | \mu = 0, \sigma_1 = \sigma_2 = \Sigma_0, r = 0) = \frac{1}{4\pi^2 \Sigma_0^4} \exp\left(-\frac{(H_{11}^2 + H_{22}^2 + H_{12}^2 + H_{21}^2)}{2\Sigma_0^2}\right) \quad (4.32)$$

que según (4.31) vemos que corresponde al nivel Bernoulli informacional, como era de esperar por poseer la curvatura escalar más negativa,  $R = -\frac{1}{2}$ .

Aún más interesante es analizar una transición en la dinámica al variar el parámetro  $r$  en términos de los niveles de IGEH. Para esto, consideremos el modelo 2D correlacionado dado por las restricciones macroscópicas [39]

$$\begin{aligned} \int p(x, y) x dx dy &= \mu_x, \\ \int p(x, y) (x - \mu_x)^2 dx dy &= \sigma_x^2, \\ \int p(x, y) y^2 dx dy &= \sigma_y^2, \\ \int p(x, y) xy dx dy &= \sigma_{xy} \\ \int p(x, y) dx dy &= 1 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Inspirados en el Principio de Incertidumbre donde típicamente dos variables conjugadas  $x, y$  poseen sus varianzas relacionadas de la forma  $\sigma_x \sigma_y = \alpha$  siendo  $\alpha$  un parámetro que mide la correlación entre  $x$  e  $y$ , se agregan las condiciones

$$\sigma_{xy} = r \Sigma^2 = r \sigma_x \sigma_y, \quad -1 \leq r \leq 1, \quad \Sigma = \text{cte.}, \quad \sigma_x = \sigma \quad (4.34)$$

es decir que se restringe la dinámica a la subvariedad  $\{(\mu_x, \sigma) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}\} \subseteq \{(\mu_x, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})\}$  Luego, la familia de distribuciones de probabilidad que satisfacen (4.33) y (4.34) están dadas por [39]

$$p(x, y \mid \mu_x, \sigma, r) = \frac{1}{2\pi \Sigma^2 \sqrt{1-r^2}} \exp\left(\frac{-1}{2(1-r^2)} \left[ \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma^2} + \frac{y^2 \sigma^2}{\Sigma^4} - \frac{2r(x-\mu_x)y}{\Sigma^2} \right]\right) \quad (4.35)$$

con sus correspondientes familias de geodésicas  $\mu_x(\tau)$  y  $\sigma(\tau)$

$$\mu_x(\tau) = \frac{(\mu_0 + 2\sigma_0)[1 + \exp(2\sigma_0 \lambda_+ \tau)] - 4\sigma_0}{1 + \exp(2\sigma_0 \lambda_+ \tau)} \quad (4.36)$$

$$\sigma(\tau) = \frac{2\sigma_0 \exp(\sigma_0 \lambda_+ \tau)}{1 + \exp(2\sigma_0 \lambda_+ \tau)}$$

siendo  $\mu_0 = \mu_x(0)$ ,  $\sigma_0 = \sigma(0)$  y  $\lambda_+ \in \mathbb{R}_{>0}$ . Para simplificar los cálculos elegimos condiciones iniciales tales que  $\mu_0 + 2\sigma_0 = 4\sigma_0$  y sin pérdida de generalizar podemos tomar  $\lambda_+$  tal que  $\sigma_0 \lambda_+ = 1$ . Entonces

$$\mu_x(\tau) = \frac{4\sigma_0 \exp(2\tau)}{1 + \exp(2\tau)}$$

$$\sigma(\tau) = \frac{2\sigma_0 \exp(\tau)}{1 + \exp(2\tau)}$$

Luego, tomando  $\mu_0 = 2\sigma_0$  resulta

$$\frac{\mu_x(\tau)}{\mu_0} = \frac{2 \exp(2\tau)}{1 + \exp(2\tau)} \quad (4.37)$$

$$\frac{\sigma(\tau)}{\sigma_0} = \frac{2 \exp(\tau)}{1 + \exp(2\tau)}$$

Notemos que de (4.37) resulta  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mu_x(\tau) = 2\mu_0$  y  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \sigma(\tau) = 0$ , que implican la localización de la variable  $x$  en el valor  $2\mu_0$  y la deslocalización o completa incerteza acerca de la variable  $y$ . Ahora consideremos que el coeficiente de correlación  $r$  entre  $x$  e  $y$  es una función no nula de  $\tau$  con  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} r(\tau) = 0$ . A este caso pertenecen por ejemplo los sistemas cuánticos abiertos donde la interacción entre el sistema y el ambiente provoca la pérdida de las correlaciones cuánticas entre estos y la emergencia de la clasicidad, es decir el fenómeno de la decoherencia. En dicho régimen la aplicación de la mecánica estadística es válida y el comportamiento asintótico de las correlaciones del sistema corresponde al nivel *mixing* de la jerarquía ergódica. Veamos que esto también es así para el nivel *mixing* informacional. En este caso el microespacio  $(x, y)$  es bidimensional y por lo tanto la correlación  $C(f_1, \dots, f_l, \tau)$  está dada por

$$C(f_1, f_2, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y \mid \mu_x(\tau), \sigma(\tau), r(\tau)) f_1(x) f_2(y) dx dy - \left( \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x, \mid \mu_x(\tau), \sigma(\tau), r(\tau)) f_1(x) dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} p_2(y, \mid \mu_x(\tau), \sigma(\tau), r(\tau)) f_2(y) dy \right) \quad (4.38)$$

siendo

$$p_1(x, \mid \mu_x(\tau), \sigma(\tau), r(\tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y \mid \mu_x(\tau), \sigma(\tau), r(\tau)) dy \quad (4.39)$$

$$p_2(y, \mid \mu_x(\tau), \sigma(\tau), r(\tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y \mid \mu_x(\tau), \sigma(\tau), r(\tau)) dx$$

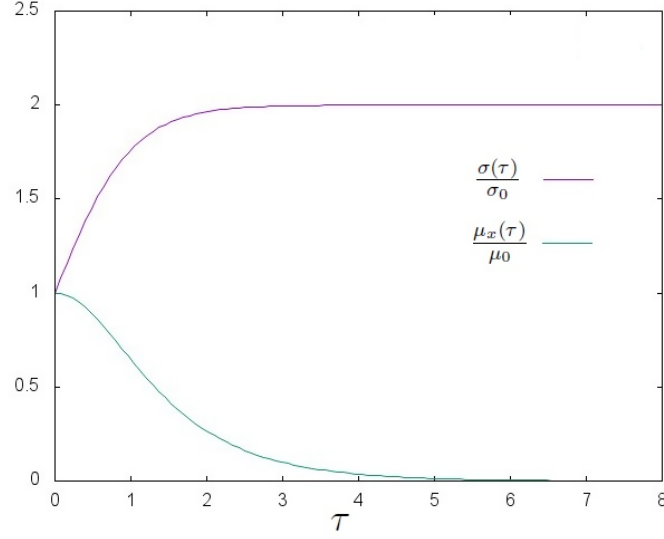


Figura 4.1: Curvas geodésicas normalizadas correspondientes a  $\frac{\mu_x(\tau)}{\mu_0} = \frac{2 \exp(2\tau)}{1 + \exp(2\tau)}$  y  $\frac{\sigma(\tau)}{\sigma_0} = \frac{2 \exp(\tau)}{1 + \exp(2\tau)}$ . Puede verse como la variable  $x$  se localiza rápidamente en torno a  $2\mu_0$ .

A partir de (4.35), (4.37), (4.38) y (4.39) calculamos el límite  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(f_1, f_2, \tau)$ . Notemos que en virtud de que  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} r(\tau) = 0$  resulta

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} p(x, y \mid \mu_x(\tau), \sigma(\tau), r(\tau)) &\simeq \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x(\tau)^2}} \exp\left(\frac{-1}{2} \frac{(x - \mu_x(\tau))^2}{\sigma_x(\tau)^2}\right) &\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y(\tau)^2}} \exp\left(\frac{-1}{2} \frac{y^2}{\sigma_y(\tau)^2}\right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} p_1(x \mid \mu_x(\tau), \sigma(\tau), r(\tau)) &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x(\tau)^2}} \exp\left(\frac{-1}{2} \frac{(x - \mu_x(\tau))^2}{\sigma_x(\tau)^2}\right) \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} p_2(y \mid \mu_x(\tau), \sigma(\tau), r(\tau)) &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y(\tau)^2}} \exp\left(\frac{-1}{2} \frac{y^2}{\sigma_y(\tau)^2}\right) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Sean  $f_1(x)$  y  $f_2(y)$  dos funciones arbitrarias de  $x$  e  $y$  respectivamente. De (4.40) y (4.41) resulta

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} C(f_1, f_2, \tau) &\simeq \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x(\tau)^2}} \exp\left(\frac{-1}{2} \frac{(x - \mu_x(\tau))^2}{\sigma_x(\tau)^2}\right) &\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y(\tau)^2}} \exp\left(\frac{-1}{2} \frac{y^2}{\sigma_y(\tau)^2}\right) f_1(x) f_2(y) dx dy - \\ \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x(\tau)^2}} \exp\left(\frac{-1}{2} \frac{(x - \mu_x(\tau))^2}{\sigma_x(\tau)^2}\right) f_1(x) dx \right) &\left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y(\tau)^2}} \exp\left(\frac{-1}{2} \frac{y^2}{\sigma_y(\tau)^2}\right) f_2(y) dy \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Por lo tanto, de (4.42) se sigue que el modelo 2D correlacionado es *mixing informacional* si  $r$  es una función de  $\tau$  tal que  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} r(\tau) = 0$ . El caso particular  $r = 0$  corresponde al modelo no correlacionado 2D que resulta ser Bernoulli informacional. Podemos resumir el comportamiento del modelo 2D correlacionado en el siguiente esquema

$$\begin{aligned} r(\tau) \text{ tal que } \lim_{\tau \rightarrow \infty} r(\tau) = 0 &\implies \text{mixing informacional} \\ r = 0 &\implies \text{Bernoulli informacional} \end{aligned} \quad (4.43)$$

## Capítulo 5

# Sistemas bipartitos en el formalismo IGAC

Hemos visto cómo el formalismo de aproximación geometrodinámica informacional al caos (IGAC) permite predecir el comportamiento de sistemas físicos cuyas variables dinámicas son  $x_1, \dots, x_l$  (el microespacio  $X$ ) a partir de distribuciones  $P(x_1, \dots, x_l | \Theta)$  obtenidas por medio de la aplicación de *MaxEnt* con las restricciones o ligaduras (relaciones de media, varianza, covarianza, etc.) sobre las variables del microespacio. A su vez, estas restricciones determinan las macrovariables  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$  pertenecientes al macroespacio de parámetros  $\{\Theta\}$  que es donde se mapea la dinámica del sistema. En base a IGAC se caracterizó a los ensambles Gaussianos como un caso particular de modelo estadístico no correlacionado. Esto a su vez, derivó en una extensión de la jerarquía ergódica dentro del formalismo geometrodinámico informacional, denominada *jerarquía ergódica geometrodinámica informacional* (en inglés IGEH, information geometrodynamical ergodic hierarchy).

El objetivo de este capítulo es aplicar el formalismo IGAC y la IGEH a un sistema bipartito para estudiar cuáles son las relaciones existentes entre la dinámica de la variedad estadística del sistema total y la correspondiente a la de los subsistemas. El contenido de este capítulo está basado en un trabajo que se encuentra en preparación [82], con una motivación con respecto a la estructura de los sistemas compuestos inspirada originalmente en [83].

### 5.1. Estructura métrica del sistema bipartito y de cada uno de los subsistemas

Vamos a considerar un sistema  $S$  compuesto por dos subsistemas  $S_A$  y  $S_B$  cuyas variables microscópicas son  $X$  e  $Y$  respectivamente, de tal forma que el microespacio de  $S$  será  $\{X, Y\}$ .

El macroespacio de  $S$  estará dado por  $\{\Theta\} = \{(\Theta_A, \Theta_B, \Theta_{AB})\}$  donde  $\Theta_A$  y  $\Theta_B$  son los macroespacios correspondientes a cada uno de los subsistemas  $S_A$  y  $S_B$  (por ej. las varianzas  $\sigma_{x_i}$  y  $\sigma_{y_j}$  de dos variables  $x_i \in X$ ,  $y_j \in Y$ ), y  $\Theta_{AB}$  es el macroespacio que comparten  $S_A$  y  $S_B$  (por ej. la covarianza  $\sigma_{x_i y_j}$  entre dos variables  $x_i \in X, y_j \in Y$ ).

Sea  $P_{A+B} = P(X, Y | \Theta)$  la distribución del sistema total obtenida por *MaxEnt* bajo un conjunto de restricciones arbitrario sobre  $\{\Theta\} = \{(\Theta_A, \Theta_B, \Theta_{AB})\}$ . Denotamos abreviadamente a las variables microscópicas  $\{x_i\}, \{y_j\}$  como  $X$  e  $Y$ , y las variables macroscópicas del sistema total  $S$  como la terna  $\Theta = (\Theta_A, \Theta_B, \Theta_{AB})$ . La estructura métrica del macroespacio de  $S$  estará

dada por el tensor métrico de Fisher–Rao del sistema total

$$g_{\mu\nu}^{A+B} = \int dXdY P_{A+B}(X, Y|\Theta) \partial_\mu \log P_{A+B}(X, Y|\Theta) \partial_\nu \log P_{A+B}(X, Y|\Theta) \quad (5.1)$$

donde  $\mu, \nu$  son variables en  $\{\Theta\} = \{(\Theta_A, \Theta_B, \Theta_{AB})\}$ . Sean  $P_A(X|\Theta)$  y  $P_B(Y|\Theta)$  las distribuciones marginales con respecto a  $X$  e  $Y$ . Entonces  $P_A(X|\Theta)$  y  $P_B(Y|\Theta)$  no son otra cosa que las distribuciones que resultan de considerar individualmente los subsistemas  $S_A$  y  $S_B$ . En otras palabras, las distribuciones

$$\begin{aligned} P_A(X|\Theta) &= \int dY P_{A+B}(X, Y|\Theta) \\ P_B(Y|\Theta) &= \int dX P_{A+B}(X, Y|\Theta) \end{aligned} \quad (5.2)$$

representan la máxima información de cada uno de los subsistemas a la que podemos acceder a partir de  $P_{A+B}(X, Y|\Theta)$ . En particular, los macroespacios de  $S_A$  y  $S_B$  tienen una estructura métrica dada por

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}^A &= \int dX P_A(X|\Theta) \partial_\mu \log P_A(X|\Theta) \partial_\nu \log P_A(X|\Theta) \\ g_{\mu\nu}^B &= \int dY P_B(Y|\Theta) \partial_\mu \log P_B(Y|\Theta) \partial_\nu \log P_B(Y|\Theta) \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde  $\mu, \nu$  en  $g_{\mu\nu}^A$  y  $g_{\mu\nu}^B$  son variables en  $\Theta_A$  y  $\Theta_B$  respectivamente. En este contexto, surge una pregunta natural: ¿Cual es la relación entre la métrica  $g_{\mu\nu}^{A+B}$  del sistema total y la de cada uno de los subsistemas  $g_{\mu\nu}^A$  y  $g_{\mu\nu}^B$ ?

Podemos dar una respuesta parcial para el caso en que la distribución del sistema total  $P_{A+B}(X, Y|\Theta)$  se escribe como producto de  $P_A(X|\Theta)$  y  $P_B(Y|\Theta)$ . Para ello definamos la siguiente distribución

$$P_{A\otimes B}(X, Y|\Theta) = P_A(X|\Theta) P_B(Y|\Theta) \quad (5.4)$$

que representa a un sistema bipartito (que denotaremos por  $S_{A\otimes B}$ ) donde los subsistemas no interactúan entre sí dado que la factorización  $P_A(X|\Theta) P_B(Y|\Theta)$  manifiesta correlación nula entre las variables  $X$  de  $S_A$  e  $Y$  de  $S_B$ . De esta forma, para cada sistema bipartito  $S_{A+B}$  tenemos una asignación  $S_{A+B} \mapsto S_{A\otimes B}$  de tal forma que

$$P_{A+B}(X, Y|\Theta) \mapsto P_{A\otimes B}(X, Y|\Theta) \quad (5.5)$$

asigna a cada distribución del sistema total la distribución no correlacionada. El tensor métrico del sistema compuesto no correlacionado resulta:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}^{A\otimes B} &= \int dXdY P_{A\otimes B}(X, Y|\Theta) \partial_\mu \log P_{A\otimes B}(X, Y|\Theta) \partial_\nu \log P_{A\otimes B}(X, Y|\Theta) = \\ &= \int dXdY P_A(X|\Theta) P_B(Y|\Theta) \partial_\mu \log (P_A(X|\Theta) P_B(Y|\Theta)) \partial_\nu \log (P_A(X|\Theta) P_B(Y|\Theta)) = \\ &= \int dXdY P_A(X|\Theta) P_B(Y|\Theta) \partial_\mu (\log P_A(X|\Theta) + \log P_B(Y|\Theta)) \partial_\nu (\log P_A(X|\Theta) + \log P_B(Y|\Theta)) = \\ &= \int dXdY P_A(X|\Theta) P_B(Y|\Theta) \{ \partial_\mu \log P_A(X|\Theta) \partial_\nu \log P_A(X|\Theta) + \partial_\mu \log P_B(Y|\Theta) \partial_\nu \log P_B(Y|\Theta) + \\ &\quad \partial_\mu \log P_A(X|\Theta) \partial_\nu \log P_B(Y|\Theta) + \partial_\nu \log P_A(X|\Theta) \partial_\mu \log P_B(Y|\Theta) \} = \\ &\quad g_{\mu\nu}^A + g_{\mu\nu}^B + \\ &= \int dXdY P_A(X|\Theta) P_B(Y|\Theta) \{ \partial_\mu \log P_A(X|\Theta) \partial_\nu \log P_B(Y|\Theta) + \partial_\nu \log P_A(X|\Theta) \partial_\mu \log P_B(Y|\Theta) \} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Esto es,

$$g_{\mu\nu}^{A\otimes B} = g_{\mu\nu}^A + g_{\mu\nu}^B + g_{\mu\nu}^{AB} \quad (5.7)$$

donde definimos

$$g_{\mu\nu}^{AB} = \int dXdY P_A(X|\Theta) P_B(Y|\Theta) \{ \partial_\mu \log P_A(X|\Theta) \partial_\nu \log P_B(Y|\Theta) + \partial_\nu \log P_A(X|\Theta) \partial_\mu \log P_B(Y|\Theta) \}$$

Ahora bien, dado que los valores de expectación de  $\partial_\mu \log P_A(X|\Theta)$  y de  $\partial_\nu \log P_B(Y|\Theta)$  corresponden a valores medios del score de cada uno de los subsistemas, entonces  $g_{\mu\nu}^{AB} = 0$  y por lo tanto

$$g_{\mu\nu}^{A\otimes B} = g_{\mu\nu}^A + g_{\mu\nu}^B \quad (5.8)$$

La ecuación (5.8) expresa la métrica del macroespacio del sistema no correlacionado  $S_{A\otimes B}$  como suma de las métricas correspondientes a los macroespacios de  $S_A$  y  $S_B$ . Es decir, si se tiene un sistema bipartito correlacionado descrito por una distribución  $P_{A+B}$ , la operación de trazar (tomando las distribuciones marginales) sobre  $A$  ó  $B$  borra las correlaciones entre  $A$  y  $B$ . Este hecho no debería sorprender si se tiene en cuenta que la distribución  $P_{A\otimes B}(X, Y|\Theta)$  es el producto de las distribuciones marginales  $P_A(X|\Theta)$  y  $P_B(Y|\Theta)$  como se indica en (5.4).

## 5.2. Los tensores $g_{\mu\nu}^{A+B}$ , $g_{\mu\nu}^{A\otimes B}$ , $g_{\mu\nu}^A$ y $g_{\mu\nu}^B$ en el modelo 2D correlacionado

Para estudiar las características de la dinámica del macroespacio de un sistema bipartito en relación con sus partes, comencemos calculando los tensores  $g_{\mu\nu}^{A+B}$ ,  $g_{\mu\nu}^A$  y  $g_{\mu\nu}^B$  para el modelo 2D correlacionado

$$P_{A+B}(x, y|\mu_x, \sigma, r) = \frac{1}{2\pi\Sigma^2\sqrt{1-r^2}} \exp\left(\frac{-1}{2(1-r^2)} \left[ \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma^2} + \frac{y^2\sigma^2}{\Sigma^4} - \frac{2r(x-\mu_x)y}{\Sigma^2} \right]\right) \quad (5.9)$$

A partir de (5.2) y de (5.9) calculamos las distribuciones marginales  $P_A(x|\mu_x, \sigma, r)$  y  $P_B(y|\mu_x, \sigma, r)$  las cuales nos dan respectivamente

$$P_A(x|\mu_x, \sigma, r) = P_A(x|\mu_x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5.10)$$

$$P_B(y|\mu_x, \sigma, r) = P_B(y|\sigma) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi\Sigma^4}} \exp\left(-\frac{y^2\sigma^2}{2\Sigma^4}\right)$$

De la ecuación (5.10) vemos dos características relevantes, la primera es que en las distribuciones marginales  $P_A(x)$  y  $P_B(y)$  no aparece el parámetro  $r$  como era de esperar de lo dicho en el último párrafo de la sección anterior. Más concretamente,  $P_A(x)$  y  $P_B(y)$  no pueden contener ningún tipo de correlación ya que de lo contrario su producto  $P_{A\otimes B}$  también lo tendría lo cual es una contradicción ya que vimos que  $P_{A\otimes B}$  es una distribución no correlacionada.

La segunda característica a señalar es que  $P_B(y)$  depende sólo de  $\sigma$ , es decir que el macroespacio de uno de los subsistemas, en este caso el  $B$ , ha reducido su dimensionalidad bajo la operación de tomar la distribución marginal. Esto puede explicarse a partir de que la variable  $y$  posee media cero, es decir  $\mu_y = 0$ .

Entonces, a partir de (5.3) y de (5.10) obtenemos los tensores métricos  $g_{\mu\nu}^A$  y  $g_{\mu\nu}^B$  y en consecuencia también  $g_{\mu\nu}^{A\otimes B} = g_{\mu\nu}^A + g_{\mu\nu}^B$

$$g_{\mu\nu}^A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma^2} \end{pmatrix}, \quad g_{\mu\nu}^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma^2} \end{pmatrix}, \quad g_{\mu\nu}^{A\otimes B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{\sigma^2} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Por otra parte, la métrica correspondiente a  $P_{A+B}(x, y | \mu_x, \sigma, r)$  está dada por [39] (la cual denotamos como  $g_{\mu\nu}^{A+B}$ )

$$g_{\mu\nu}^{A+B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2(1-r^2)} & 0 \\ 0 & \frac{4}{\sigma^2(1-r^2)} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

En primer lugar, de (5.11) y (5.12) vemos que  $g_{\mu\nu}^{A+B} |_{r=0} = g_{\mu\nu}^{A \otimes B}$ , es decir que la métrica asociada al sistema no correlacionado  $S_{A \otimes B}$  se obtiene a partir de  $g_{\mu\nu}^{A+B}$  para  $r = 0$ . En segundo lugar, de (5.11) y (5.12) podemos también calcular los símbolos de Christoffel y a partir de estos, obtenemos las curvaturas escalares correspondientes a las variedades estadísticas asociadas a cada uno de los sistemas  $S_A$ ,  $S_B$ ,  $S_{A \otimes B}$  y  $S_{A+B}$ .

Para ello, utilizando (4.18), (4.20) y (4.22) en (5.11) y (5.12) se tienen las siguientes curvaturas escalares

$$R_A = -1 \quad , \quad R_B = 0 \quad , \quad R_{A+B} = -\frac{1}{2}(1-r^2) \quad , \quad R_{A \otimes B} = R_{A+B} |_{r=0} = -\frac{1}{2} \quad (5.13)$$

siendo  $-1 \leq r \leq 1$ . Estos resultados expresan características globales de la geometría del macroespacio del sistema total  $S_{A+B}$ , de la de su sistema asociado no correlacionado  $S_{A \otimes B}$  y de la de cada uno de los subsistemas  $S_A$ ,  $S_B$ .

De (5.13) vemos que, en virtud de que  $-1 = R_A < R_{A+B} = -\frac{1}{2}(1-r^2) \leq 0$ , la curvatura de uno de los subsistemas (en este caso  $S_A$ ) es más negativa que la del sistema total y por lo tanto se deduce que  $S_A$  presenta mayor caoticidad que el sistema total. Por el contrario, el subsistema  $S_B$  presenta curvatura nula y por lo tanto su caoticidad también es nula, para cualquier valor del parámetro  $r \in [-1, 1]$ . De (5.13) también vemos que,  $R_{A \otimes B} = -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}(1-r^2) = R_{A+B} \leq 0$ , lo cual implica una mayor caoticidad del sistema no correlacionado  $S_{A \otimes B}$  que el sistema total.

Por lo tanto, de estas observaciones se deduce que a partir de las distribuciones marginales  $P_A(x)$  y  $P_B(y)$  no es posible reconstruir características geométricas globales del sistema total tales como la curvatura escalar y tampoco es posible deducir propiedades caóticas globales de la dinámica del macroespacio del sistema total. A lo sumo es posible obtener la curvatura del sistema no correlacionado  $S_{A \otimes B}$  que solamente es representativo del sistema total para el caso de correlación nula entre  $S_A$  y  $S_B$ , o sea  $r = 0$ .

Respecto a las ecuaciones de movimiento de los macroespacios de  $S_{A+B}$  y  $S_{A \otimes B}$  es interesante notar que a pesar de poseer diferentes tensores métricos, utilizando (4.18) en  $g_{\mu\nu}^{A+B}$  y  $g_{\mu\nu}^{A \otimes B}$  obtenemos en ambos casos las siguientes ecuaciones geodésicas

$$\frac{d^2 \mu_x}{d\tau^2} - \frac{2}{\sigma} \frac{d\mu_x}{d\tau} \frac{d\sigma}{d\tau} = 0 \quad , \quad \frac{d^2 \sigma}{d\tau^2} + \frac{1}{4\sigma} \left( \frac{d\mu_x}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{\sigma} \left( \frac{d\sigma}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (5.14)$$

Esto nos dice que las ecuaciones geodésicas para  $\mu_x$  y  $\sigma$  no distinguen las correlaciones entre  $S_A$  y  $S_B$ , presentes en la distribución total  $P_{A+B}$  y ausentes en  $P_{A \otimes B}$ . Una explicación matemática posible es que el mismo factor  $\frac{1}{1-r^2}$  aparece multiplicando en ambos elementos de la diagonal de  $g_{\mu\nu}^{A+B}$  de tal forma que al calcular los símbolos de Christoffel el parámetro  $r$  desaparece. En consecuencia, la dinámica del macroespacio (de carácter *local* al aparecer derivadas en las ecuaciones geodésicas) para el caso del modelo correlacionado  $2D$  no permite distinguir una distribución correlacionada de otra que no lo es. A pesar de esto, vemos que a partir de un indicador *global* como la curvatura escalar  $R$ , se deduce una mayor caoticidad en la distribución no correlacionada  $P_{A \otimes B}$  que en la correlacionada  $P_{A+B}$ .



A continuación, nos proponemos buscar otro indicador ó medida (además de la curvatura escalar) que permita distinguir entre familias de distribuciones correlacionadas  $P_{A+B}$  y no correlacionadas  $P_{A\otimes B}$ , para luego poder caracterizar la caoticidad de cada familia en términos de los niveles de la jerarquía ergódica informacional (IGEHE).

### 5.3. Una medida de distinguibilidad en el sistema bipartito

Con el objetivo de poder distinguir distribuciones correlacionadas de la familia  $P_{A+B}(x, y|r, \mu_x, \sigma)$  de distribuciones no correlacionadas de la familia  $P_{A\otimes B}(x, y|\mu_x, \sigma) = P_A(x|\mu_x, \sigma)P_B(y|\sigma)$  y que además puedan ser caracterizadas en términos de los niveles de la IGEHE, proponemos la siguiente medida de distinguibilidad  $F(P_{A+B})$  en el sistema bipartito  $A + B$ .

$$F : \{P_{A+B} \in \mathcal{M}_S\} \mapsto \mathbb{R}$$

$$F(P_{A+B}) = \|P_{A+B} - P_{A\otimes B}\|_\infty = \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |P_{A+B}(x, y) - P_{A\otimes B}(x, y)| \quad (5.15)$$

siendo  $P_{A+B}$  cualquier distribución de la variedad estadística  $\mathcal{M}_S$  del sistema bipartito y  $P_{A\otimes B}$  el producto de las marginales de  $P_{A+B}$ , de acuerdo a (5.4).

Vemos entonces que  $F(P_{A+B})$  es simplemente la norma infinito  $\|\cdot\|_\infty$  entre  $P_{A+B}$  y  $P_{A\otimes B}$ . La interpretación física de  $F(P_{A+B})$  es que nos dice cuan alejada ó no está cualquier distribución  $P_{A+B}$  del sistema bipartito con respecto a la distribución no correlacionada  $P_{A\otimes B}$ .

Por otra parte, hemos visto que las correlaciones  $C(f_1, \dots, f_l, \tau)$  miden también cuan cerca ó lejos los valores medios de cualquier producto de funciones  $f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_l(x_l)$  se expresa como producto de los valores medios de cada  $f_i$ . Ahora bien, en nuestro caso bidimensional para la distribución  $P_{A\otimes B} = P_A(x)P_B(y)$  es claro que el valor medio de un producto  $f_1(x_1)f_2(x_2)$  es igual al producto de los valores medios de  $f(x_1)$  y  $f_2(x_2)$ .

Por lo tanto, lo que se desprende de este razonamiento es que tiene que existir una relación entre  $F(P_{A+B})$  y la correlación  $C(f_1, f_2, \tau)$ . En efecto, considerando la definición de  $C(f_1, f_2, \tau)$  dada por (4.27), para el caso bidimensional se tiene

$$\begin{aligned} |C(f_1, f_2, \tau)| &= \left| \int \int dx dy P_{A+B}(x, y) f_1(x) f_2(y) - \int dx P_A(x) f_1(x) \int dy P_B(y) f_2(y) \right| = \\ & \left| \int \int dx dy P_{A+B}(x, y) f_1(x) f_2(y) - \int \int dx dy P_A(x) P_B(y) f_1(x) f_2(y) \right| = \\ & \left| \int \int dx dy (P_{A+B}(x, y) - P_{A\otimes B}(x, y)) f_1(x) f_2(y) \right| \leq \|P_{A+B} - P_{A\otimes B}\|_\infty \left| \int \int dx dy f_1(x) f_2(y) \right| \end{aligned} \quad (5.16)$$

Considerando  $C(f_1, f_2, \tau)$  como una función de la distribución  $P_{A+B}$  del sistema total, de (5.16) llegamos a la siguiente relación entre  $C(f_1, f_2, \tau)$  y la medida  $F(P_{A+B})$

$$|C(P_{A+B}, f_1, f_2, \tau)| \leq F(P_{A+B}) \left| \int \int dx dy f_1(x) f_2(y) \right| \leq F(P_{A+B}) \|f\|_1 \|g\|_1 \quad (5.17)$$

Esta ecuación nos dice que la correlación de la IGEHE está acotada por la medida  $F$  y por  $\|f\|_1 \|g\|_1$ . Vamos a explorar las consecuencias de esta importante relación para la familia de distribuciones del modelo 2D correlacionado dado por (5.9). En primer lugar, utilizando (5.9), (5.10) y (5.15) calculamos  $F(P_{A+B})$

$$\begin{aligned} F(P_{A+B}(x, y|r, \mu_x, \sigma)) &= \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |P_{A+B}(x, y|r, \mu_x, \sigma) - P_{A\otimes B}(x, y|\mu_x, \sigma)| = \\ & \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{1}{2\pi\Sigma^2\sqrt{1-r^2}} \exp\left(\frac{-1}{2(1-r^2)} \left[ \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma^2} + \frac{y^2\sigma^2}{\Sigma^4} - \frac{2r(x-\mu_x)y}{\Sigma^2} \right]\right) - \right. \\ & \left. \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\Sigma^4} \exp\left(-\frac{y^2\sigma^2}{2\Sigma^4}\right) \right| \end{aligned} \quad (5.18)$$

Definiendo nuevas variables adimensionales  $\tilde{x} = \frac{x-\mu x}{\sigma}$  e  $\tilde{y} = y \frac{\sigma}{\Sigma^2}$  la última ecuación nos queda

$$F(P_{A+B}(r, \tilde{x}, \tilde{y})) = \frac{1}{2\pi\Sigma^2} \max_{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \exp\left(\frac{-1}{2(1-r^2)} (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - 2r\tilde{x}\tilde{y})\right) - \exp\left(-\frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{2}\right) \right| \quad (5.19)$$

Por lo tanto para calcular  $F(P_{A+B})$  alcanza con estudiar los máximos y mínimos en todo  $\mathbb{R}^2$  de la función  $G_r(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \exp\left(\frac{-1}{2(1-r^2)} (x^2 + y^2 - 2rxy)\right) - \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$  para cada valor del parámetro  $r \in [-1, 1]$ . Para ello, es conveniente escribir  $G_r(x, y) = g_1(x, y) - g_2(x, y)$  siendo  $g_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \exp\left(\frac{-1}{2(1-r^2)} (x^2 + y^2 - 2rxy)\right)$  y  $g_2(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$ . Luego, debemos encontrar los puntos críticos a partir de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_r(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial x} = g_1(x, y) \left(\frac{-1(x-ry)}{(1-r^2)}\right) - g_2(x, y)(-x) = 0 \\ \frac{\partial G_r(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial y} = g_1(x, y) \left(\frac{-1(y-rx)}{(1-r^2)}\right) - g_2(x, y)(-y) = 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

De (5.20) se sigue que  $y \frac{\partial G_r(x, y)}{\partial x} - x \frac{\partial G_r(x, y)}{\partial y} = 0$ , entonces

$$yg_1(x, y) \left(\frac{-1(x-ry)}{(1-r^2)}\right) + g_2(x, y)xy - xg_1(x, y) \left(\frac{-1(y-rx)}{(1-r^2)}\right) - g_2(x, y)xy = 0$$

y dado que  $g_1(x, y)$  es siempre positivo por ser una función exponencial, se tiene

$$g_1(x, y) \left(\frac{-y(x-ry) + x(y-rx)}{(1-r^2)}\right) = 0 \implies g_1(x, y) \left(\frac{r(y^2 - x^2)}{(1-r^2)}\right) = 0 \implies r = 0 \text{ ó } y = \pm x$$

Si  $r = 0$  es claro que  $P_{A+B}$  es igual a  $P_{A \otimes B}$  y la norma infinito es cero trivialmente. Suponiendo  $r \neq 0$  y reemplazando  $y = \pm x$  en la fórmula de  $G_r(x, y)$  nos queda una función solamente de  $x$ , la cual podemos llamar  $\varphi_r(x)$ . Se tiene entonces

$$\varphi_r(x) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \exp\left(\frac{-x^2}{(1-r^2)} (1 \mp r)\right) - \exp(-x^2) \quad (5.21)$$

Entonces el valor  $F(P_{A+B})$  estará dado por el valor máximo de  $|\varphi_r(x)|$  con  $x \in \mathbb{R}$ . Para ello, calculamos los puntos críticos de  $\varphi_r(x)$ , igualando a cero su derivada se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_r(x)}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \exp\left(\frac{-x^2}{(1-r^2)} (1 \mp r)\right) \left(\frac{-2x}{(1-r^2)} (1 \mp r)\right) + 2x \exp(-x^2) = \\ &2x \left[ \exp(-x^2) - \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \exp\left(\frac{-x^2}{(1-r^2)} (1 \mp r)\right) \left(\frac{1}{(1-r^2)} (1 \mp r)\right) \right] = 0 \\ \implies x = 0 \text{ ó } \exp(-x^2) - \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \exp\left(\frac{-x^2}{(1-r^2)} (1 \mp r)\right) \left(\frac{1}{(1-r^2)} (1 \mp r)\right) &= 0 \end{aligned}$$

Es decir que los puntos críticos de  $\varphi_r(x)$  satisfacen

$$x = 0 \text{ ó } \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \exp\left(\frac{-x^2}{(1-r^2)} (1 \mp r)\right) \left(\frac{1}{(1-r^2)} (1 \mp r)\right) = \exp(-x^2) \quad (5.22)$$

Reemplazando (5.22) en (5.21) se tiene el valor de  $\varphi_r(x)$  en los puntos críticos  $x_c$

$$\varphi_r(x_c) = \left\{ \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - 1, \pm r \exp(-x_c^2) \right\} \quad (5.23)$$

Para poder encontrar explícitamente  $\exp(-x_c^2)$  debemos resolver la segunda de las ecuaciones de (5.22), tomando logaritmo natural a ambos miembros de dicha ecuación se tiene

$$-\frac{x_c^2(1 \mp r)}{(1-r^2)} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-r^2}(1-r^2)}(1 \mp r)\right) = -x_c^2$$

Es decir que

$$\exp(-x_c^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-r^2}(1 \pm r)}\right)^{\left(\frac{1 \pm r}{\mp r}\right)} \quad (5.24)$$

Luego, de (5.24) y de (5.23) se obtienen los siguientes valores de  $\varphi_r(x_c)$  en sus puntos críticos

$$r\left(\sqrt{1-r^2}(1+r)\right)^{-1-\frac{1}{r}}, \quad -r\left(\sqrt{1-r^2}(1-r)\right)^{-1+\frac{1}{r}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - 1 \quad (5.25)$$

Ahora bien, dado que los valores máximos y mínimos de  $G(x, y)$  son justamente los mismos que  $\varphi_r(x)$  sujeto a la restricción  $y = \pm x$  y dado que el máximo valor de  $|G(x, y)|$  corresponde a  $F(P_{A+B})$ , entonces de (5.25) se deduce  $F(P_{A+B})$  está dado por

$$F(P_{A+B}) = \max\left\{|r|\left(\sqrt{1-r^2}(1+r)\right)^{-1-\frac{1}{r}}, |r|\left(\sqrt{1-r^2}(1-r)\right)^{-1+\frac{1}{r}}, \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - 1\right\} \quad (5.26)$$

En la Fig. 5.1 se muestran las curvas  $|r|\left(\sqrt{1-r^2}(1+r)\right)^{-1-\frac{1}{r}}$ ,  $|r|\left(\sqrt{1-r^2}(1-r)\right)^{-1+\frac{1}{r}}$  y  $\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - 1$  para todo  $r \in [-1, 1]$ .

Puede verse que  $F(P_{A+B})$  está dado por la curva violeta  $|r|\left(\sqrt{1-r^2}(1+r)\right)^{-1-\frac{1}{r}}$  para todo valor de  $r$  tal que  $0 \leq r \leq 1$ , mientras que para todo  $-1 \leq r \leq 0$  está dado por la curva negra  $|r|\left(\sqrt{1-r^2}(1-r)\right)^{-1+\frac{1}{r}}$ . Esto implica que

$$F(P_{A+B}) = |r|\left(\sqrt{1-r^2}(1+|r|)\right)^{-1-\frac{1}{|r|}} \quad \forall r \in [-1, 1] \quad (5.27)$$

De la Fig. 5.2 se observa que  $F(P_{A+B})$  decae linealmente con  $r$  cuando  $r \rightarrow 0$ . Más precisamente,  $F(P_{A+B}) \propto |r|$  para  $r \sim 0$  cuya interpretación física es que al anularse las correlaciones  $P_{A+B}$  tiende (en norma infinito) a la distribución no correlacionada  $P_{A \otimes B}$  como es de esperar. Por otro lado, cuando  $r \rightarrow \pm 1$  vemos que  $F(P_{A+B})$  diverge lo cual podría interpretarse como una máxima distinguibilidad para el caso de máxima correlación ( $r = \pm 1$ ) entre las variables  $x$  e  $y$ .

## 5.4. Ejemplo: Pares de osciladores acoplados e inmersos en un baño térmico

Para concluir esta tesis vamos a ilustrar la relevancia física de la IGEH con un ejemplo de sistema bipartito en interacción con un ambiente: un ensamble de pares de osciladores acoplados en un baño térmico. La elección de este ejemplo se justifica por su simpleza y su utilidad como modelo teórico para ilustrar las transiciones de fase de la dinámica de un sistema bipartito.

En primer lugar utilizaremos la descripción estadística dada por el ensamble canónico, esto es, consideraremos que tenemos una colección ó ensamble de un número grande  $N$  de pares

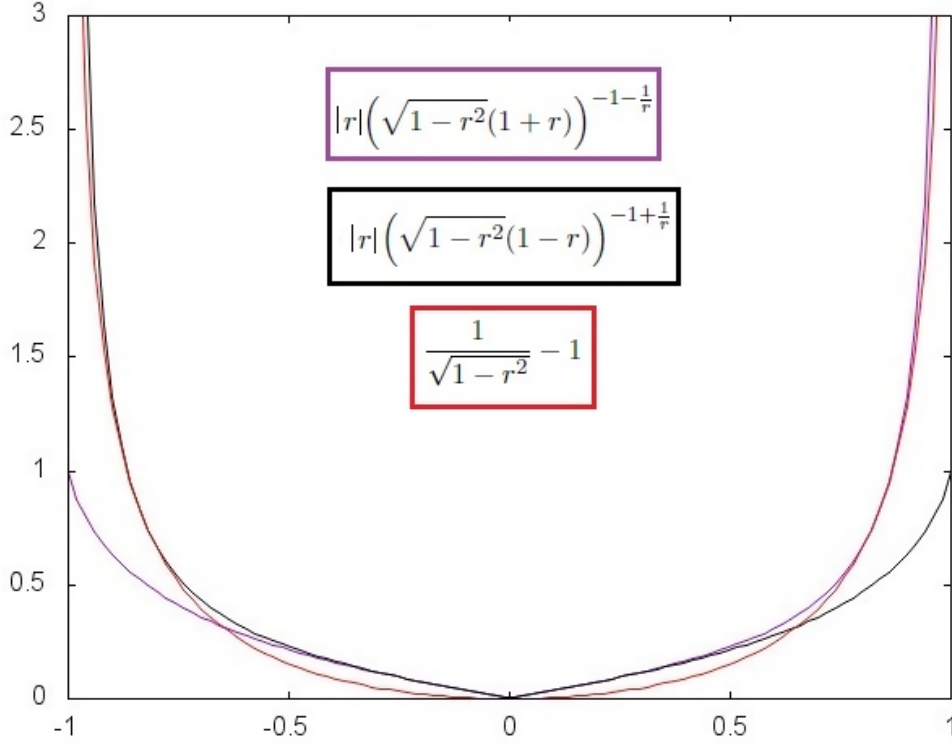


Figura 5.1: Valores de la función  $|G(x, y)|$  en sus puntos críticos para todo  $r \in [-1, 1]$ . La curva roja corresponde al punto crítico  $x_c = 0, y_c = 0$  mientras que las curvas violeta y negra corresponden a los puntos críticos fuera del origen  $(0, 0)$  con  $y_c = x_c$  e  $y_c = -x_c$  respectivamente. Para cada  $r \in [-1, 1]$ , el máximo entre los valores que toman cada una de las curvas es igual a  $F(P_{A+B})$ .

idénticos de osciladores acoplados no interactuantes entre sí, de tal forma que la distribución de energía del ensamble estará dada por

$$P(E) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp(-\beta E) \quad (5.28)$$

donde  $\mathcal{Z}$  es la función de partición y  $\beta = \frac{k_B}{T}$  es el factor de Boltzmann. Ahora bien, dado que los pares no interactúan entre sí podemos considerar que la energía total de nuestro ensamble está dada por la suma de las energías individuales de cada par de osciladores acoplados. Esto es, si  $E$  es la energía total y  $E_i$  es la energía del  $i$ -ésimo par, entonces se tiene simplemente que  $E = \sum_{i=1}^N E_i$ . Consideramos que la energía  $E_i$  del  $i$ -ésimo par está dada por

$$E_i = \frac{p_{i1}^2}{2m_1} + \frac{p_{i2}^2}{2m_2} + \frac{1}{2}m_1\omega_1^2(x_{i1} - x_{i1}^{(0)})^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_2^2(x_{i2} - x_{i2}^{(0)})^2 - r\sqrt{m_1m_2}\omega_1\omega_2(x_{i1} - x_{i1}^{(0)})(x_{i2} - x_{i2}^{(0)}) \quad (5.29)$$

donde  $x_{i1,i2}$ ,  $p_{i1,i2}$  son las coordenadas e impulsos de los osciladores del  $i$ -ésimo par,  $x_{i1,i2}^{(0)}$  sus respectivas posiciones de equilibrio y  $r$  es un parámetro de correlación entre los osciladores de cada par. El término  $-r\sqrt{m_1m_2}\omega_1\omega_2(x_{i1} - x_{i1}^{(0)})(x_{i2} - x_{i2}^{(0)})$  representa la energía de interacción entre los osciladores del  $i$ -ésimo par. Veremos ahora cómo el parámetro  $r$  queda determinado

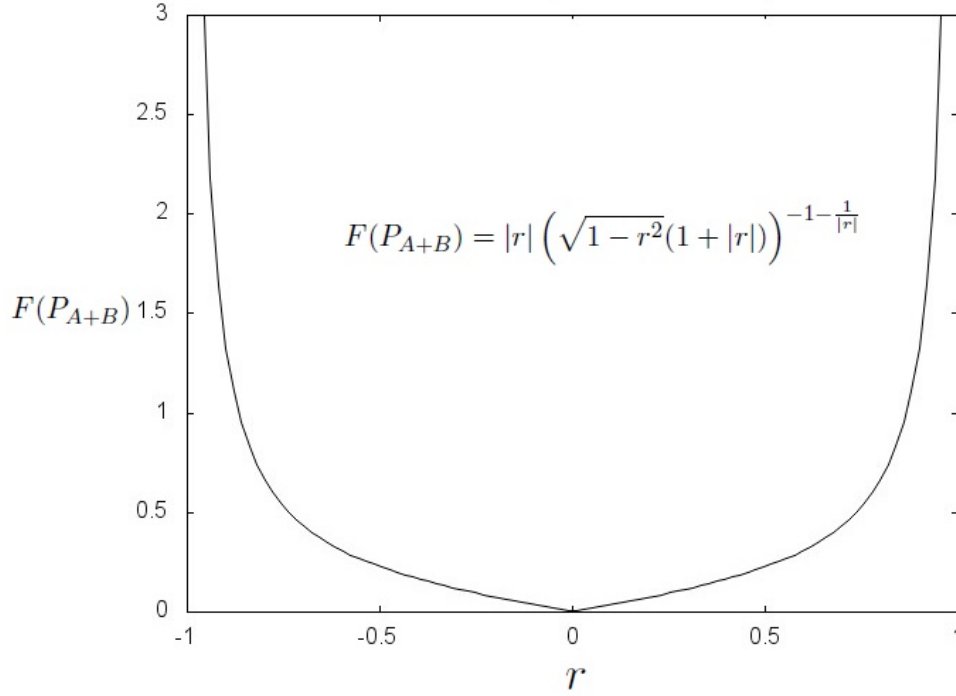


Figura 5.2: Gráfico de  $F(P_{A+B})$  en función del coeficiente de correlación  $r$  en todo el intervalo  $[-1, 1]$ . Se observa un decaimiento lineal en  $r$  para  $r \rightarrow 0$ . Cuando  $r \rightarrow \pm 1$  se tiene que  $F(P_{A+B})$  diverge, que corresponde al caso de correlación máxima entre  $x$  e  $y$ .

por las propiedades estadísticas del sistema. Teniendo en cuenta que  $E = \sum_{i=1}^N E_i$ , de (5.28) resulta

$$P(E) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp(-\beta E) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^N E_i(x_{i1}, p_{i1}, x_{i2}, p_{i2})\right) \quad (5.30)$$

Ahora vamos a focalizar nuestro estudio en la dinámica de un único par de osciladores, que al tratarse de un ensamble de  $N$  idénticos miembros del mismo, podemos elegir sin pérdida de generalidad como aquel descrito por las variables  $(x_{11}, p_{11}, x_{12}, p_{12})$ . Denotemoslo por  $(x_1, p_1, x_2, p_2)$ . Desde el punto de vista de las distribuciones esto equivale matemáticamente a quedarnos simplemente con la distribución marginal  $P(x_1, p_1, x_2, p_2)$  respecto de las variables  $(x_1, p_1, x_2, p_2)$ . Más precisamente, se tiene

$$P(x_1, p_1, x_2, p_2) = \int P(E) dx_{21} dx_{22} dp_{21} dp_{22} \cdots dx_{N1} dx_{N2} dp_{N1} dp_{N2} \quad (5.31)$$

donde la integración se efectúa sobre las variables  $(x_{i1}, p_{i1}, x_{i2}, p_{i2}) \neq (x_{11}, p_{11}, x_{12}, p_{12})$  de los  $N - 1$  pares restantes. De (5.29), (5.30) y (5.31) se sigue que

$$P(x_1, p_1, x_2, p_2) \propto \exp(-\beta \mathcal{E}) \quad (5.32)$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{1}{2}m_1\omega_1^2(x_1 - x_1^{(0)})^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_2^2(x_2 - x_2^{(0)})^2 \\ & - r\sqrt{m_1m_2}\omega_1\omega_2(x_1 - x_1^{(0)})(x_2 - x_2^{(0)}) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Con el propósito de utilizar los resultados de la sección anterior vamos a interesarnos solamente en la distribución  $P(x_1, x_2)$  de las coordenadas del par  $(x_1, x_2)$ . Por lo tanto, para obtener  $P(x_1, x_2)$  simplemente tenemos que integrar  $P(x_1, p_1, x_2, p_2)$  en las variables  $(p_1, p_2)$ . Entonces, de (5.32) y (5.33) se sigue que

$$P(x_1, x_2) = \int \int dp_1 dp_2 P(x_1, p_1, x_2, p_2) \propto \int \int dp_1 dp_2 \exp(-\beta \mathcal{E}) = \quad (5.34)$$

$$\exp\left(-\beta \left(\frac{1}{2}m_1\omega_1^2(x_1 - x_1^{(0)})^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_2^2(x_2 - x_2^{(0)})^2 - r\sqrt{m_1m_2}\omega_1\omega_2(x_1 - x_1^{(0)})(x_2 - x_2^{(0)})\right)\right)$$

Luego, llegamos a la distribución deseada  $P(x_1, x_2)$

$$P(x_1, x_2) = \quad (5.35)$$

$$A \exp\left(-\frac{\beta}{2} \left(m_1\omega_1^2(x_1 - x_1^{(0)})^2 + m_2\omega_2^2(x_2 - x_2^{(0)})^2 - 2r\sqrt{m_1m_2}\omega_1\omega_2(x_1 - x_1^{(0)})(x_2 - x_2^{(0)})\right)\right)$$

Por simplicidad consideremos  $x_2^{(0)} = 0$ . Para determinar la constante de normalización  $A$  y el parámetro  $r$  podemos identificar  $P(x_1, x_2)$  con la distribución  $P_{A+B}(x, y|r, \mu_x, \sigma)$  de la ec. (5.9) a partir de las siguiente redefinición de las variables

$$\mu_x = x_1^{(0)}$$

$$\sigma^2 = \frac{k_B T_0}{m_1 \omega_1^2} \quad (5.36)$$

$$\Sigma^2 = \frac{\sqrt{k_B T_0}}{\sqrt{m_1 m_2 \omega_1^2 \omega_2^2}}$$

siendo  $T_0$  la temperatura ambiente ( $\sim 20^\circ \text{C}$ ). Entonces de (5.9) y (5.36) resulta

$$\frac{1}{1-r^2} = \beta k_B T_0 = \frac{T_0}{T} \quad (5.37)$$

$$A = \frac{1}{2\pi\Sigma^2\sqrt{1-r^2}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{k_B T}} \sqrt{m_1 m_2 \omega_1^2 \omega_2^2}$$

Luego se tiene

$$r^2 = 1 - \frac{T}{T_0} \quad (5.38)$$

Esta relación expresa una caracterización del formalismo de distribuciones de probabilidad sobre la mecánica estadística del ensamble canónico del ejemplo en cuestión. A partir la misma y de la medida de distinguibilidad  $F$  vamos a estudiar el nivel *mixing* informacional de este modelo. En primer lugar, dado que el parámetro  $\tau$  de la ecuaciones geodésicas de  $(\mu_x, \sigma)$  puede elegirse arbitrariamente, entonces se puede tomar  $\tau$  como

$$\tau = \frac{1}{1 - \frac{T}{T_0}} \quad (5.39)$$

Con esta elección del parámetro  $\tau$ , de (5.39) se tiene

$$\begin{aligned} \tau \longrightarrow \infty & \quad \text{si y sólo si} & \quad T \longrightarrow T_0 \\ \tau \longrightarrow 1 & \quad \text{si y sólo si} & \quad T \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.40)$$

En otras palabras, la elección  $\tau = \frac{1}{1 - \frac{T}{T_0}}$  nos permite estudiar la transición  $T \rightarrow T_0$  partiendo desde  $T = 0$ . Esta transición expresa el comportamiento las correlaciones del sistema de osciladores acoplados cuando la temperatura del baño térmico pasa del cero absoluto a temperatura ambiente. Físicamente, a temperatura ambiente es de esperar que si la energía que le entrega el baño a los osciladores, es decir  $k_B T_0$ , es mucho más grande que la energía del estado fundamental de cada uno de los osciladores (o sea  $k_B T_0 \gg m_1 \omega_{1,2}^2$ ) entonces como resultado de la agitación térmica las correlaciones entre los osciladores tienden a cancelarse. En efecto, de (5.38) vemos que  $r \rightarrow 0$  cuando  $T \rightarrow T_0$ .

Veamos ahora que esta transición queda caracterizada en términos del nivel *mixing* informacional. De (5.17) y (5.27) se sigue que

$$|C(P_{A+B}, f_1, f_2, \tau)| \leq |r| \left( \sqrt{1 - r^2(1 + |r|)} \right)^{-1 - \frac{1}{|r|}} \|f\|_1 \|g\|_1 \quad (5.41)$$

Y puesto que

$$\left( \sqrt{1 - r^2(1 + |r|)} \right) \geq 1 \quad \forall r \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad (5.42)$$

Entonces,

$$\left( \sqrt{1 - r^2(1 + |r|)} \right)^{-1 - \frac{1}{|r|}} \leq 1 \quad \forall r \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad (5.43)$$

Luego, de (5.41) y (5.43) resulta

$$|C(P_{A+B}, f_1, f_2, \tau)| \leq |r| \|f\|_1 \|g\|_1 \quad \forall r \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad (5.44)$$

Por otra parte, de (5.38) y (5.39) obtenemos

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} |r| = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{\tau}} = 0 \quad (5.45)$$

Por lo tanto, de (5.44) y (5.45) se sigue que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} |C(P_{A+B}, f_1, f_2, \tau)| \leq \lim_{\tau \rightarrow \infty} |r| \|f\|_1 \|g\|_1 = 0 \implies \lim_{\tau \rightarrow \infty} C(P_{A+B}, f_1, f_2, \tau) = 0 \quad (5.46)$$

y de aquí se deduce que el modelo de osciladores acoplados descrito por la distribución  $P(x_1, x_2)$  (ec. (5.35)) es *mixing informacional* cuando el baño térmico pasa a tener la temperatura ambiente  $T_0$ . A su vez, esto se corresponde con la cancelación de las correlaciones entre los osciladores como consecuencia de la agitación térmica.

Por último, calculemos la curvatura escalar. Reemplazando el valor de  $r^2$  en la expresión de  $R_{A+B}$  de (5.13) por  $1 - \frac{T}{T_0}$  se tiene

$$R_{A+B} = -\frac{T}{2T_0} \quad (5.47)$$

Esto significa que la variedad estadística va aumentando negativamente su curvatura a medida que la temperatura aumenta, partiendo de curvatura nula para  $T = 0$  que corresponde al caso máximamente correlacionado con  $r = \pm 1$ , hasta un valor máximamente negativo de  $-\frac{1}{2}$  a temperatura ambiente donde se alcanza el nivel *mixing* informacional en ausencia de las correlaciones entre cada miembro de cada uno de los pares de osciladores.

# Conclusiones

A lo largo de esta Tesis Doctoral se investigaron múltiples aspectos asintóticos y geométricos del comportamiento de los sistemas cuánticos con límite clásico caótico, cuyos resultados enumeramos a continuación:

- Se ha logrado introducir una definición de los cuatro niveles principales de la jerarquía ergódica cuántica como una extensión de los de la jerarquía ergódica clásica. El nivel de complejidad de las ecuaciones definen cada uno de los niveles de la jerarquía ergódica cuántica comenzando desde el nivel más débil (ergódico cuántico) el cual se expresa como un promedio temporal de valores medios cuánticos, al que le sigue el nivel *mixing* cuántico correspondiente a la condición del límite débil sumado a la condición de no integrabilidad. Y continuando con el nivel Kolmogorov cuántico que expresa una condición sobre un conjunto numerable de observables (que no es otra cosa que la manifestación de la  $\sigma$ -álgebra) para llegar al nivel más fuerte, el nivel Bernoulli cuántico, exhibiendo correlación nula de los valores medios para todo tiempo. Se ha ilustrado la relevancia de la jerarquía ergódica cuántica aplicando el formalismo al rotor pateado y hemos caracterizado su comportamiento caótico en términos del nivel *mixing* cuántico. En dicho caso, las transiciones caóticas se interpretaron como el paso del régimen integrable hasta el completamente caótico perteneciente a los niveles *mixing* y Bernoulli cuántico.
- Se obtuvo una derivación de los ensambles Gaussianos bajo las hipótesis de un límite clásico perteneciente al nivel *mixing* de la jerarquía ergódica clásica y del límite débil como el estado representativo del sistema cuántico en el límite asintótico. Esta derivación representa una caracterización de los aspectos estacionarios del caos cuántico como consecuencia de las correlaciones del nivel *mixing* cuántico de la jerarquía ergódica cuántica.
- Suponiendo que la evolución temporal del límite clásico posee un operador Frobenius-Perron Markoviano se obtuvo una versión cuántica del teorema de descomposición espectral para sistemas dinámicos (QSDT). Con QSDT se pudieron caracterizar los niveles ergódico y *mixing* cuántico en función de la cantidad de términos que presenta la descomposición de la evolución temporal discreta de toda densidad del espacio de fases, como así también sus respectivos espectros cuánticos. Se aplicó QSDT para caracterizar el comportamiento caótico de billares de microondas en el límite de acoplamiento fuerte entre antenas. De igual forma que en el caso del rotor pateado, el resultado relevante que se obtuvo fue que el incremento en el número de canales representa el pasaje a los niveles caóticos más fuertes de la jerarquía ergódica cuántica.
- Se logró compatibilizar el caos con el principio de correspondencia en el límite clásico, utilizando un modelo de celdas de tamaño mínimo dados por el principio de incertidumbre como manifestación de la granulosidad del espacio de fases cuántico. Esta granulosidad



fundamental basada en celdas permitió obtener las dos escalas temporales características del caos cuántico, el tiempo de Heisenberg y el tiempo logarítmico de Ehrenfest, teniendo en cuenta el rango temporal de validez de la misma.

- A partir de la entropía de Kolmogorov–Sinaí y de la expresión de los volúmenes de conjuntos del espacio de fases por medio de las propiedades de la transformación de Wigner y del símbolo de Weyl, se obtuvo una condición semiclásica para determinar el comportamiento caótico del límite clásico de un sistema cuántico. Utilizamos esta condición para caracterizar el comportamiento caótico, con la evolución temporal invertida, del límite clásico del Hamiltoniano efectivo del modelo de Gamow. Luego, en base a este resultado y con la ayuda del teorema de Pesin y del tiempo de Kolmogorov–Sinaí, se logró obtener el exponente de Lyapunov del modelo de Gamow en función del polo de parte imaginaria más pequeña de su Hamiltoniano efectivo. Este resultado constituye una evidencia de la relación entre los exponentes de Lyapunov del límite clásico y los polos del Hamiltoniano efectivo del sistema cuántico.
- Se logró una extensión de la jerarquía ergódica dentro del formalismo geometrodinámico informacional al caos (IGAC), denominada jerarquía ergódica geometrodinámica informacional (IGEHI), la cual permitió caracterizar a los ensambles Gaussianos como caso particular del nivel Bernoulli informacional.
- A partir de un estudio de sistemas bipartitos basado en el formalismo de IGAC, se obtuvieron las métricas de Fisher–Rao de los subsistemas y del sistema total. Como resultado relevante se obtuvo que la operación de tomar la probabilidad marginal respecto a cada subsistema borra las correlaciones entre los mismos para el caso del modelo  $2D$  correlacionado, de la misma forma a lo que sucede con la operación de traza parcial en mecánica cuántica. Como consecuencia de esto, se demostró que las probabilidades marginales no permiten reconstruir características globales del sistema total como la curvatura escalar ni la dinámica del macroespacio dada por las ecuaciones geodésicas.
- Se definió una medida de distinguibilidad para el modelo  $2D$  correlacionado. Esta medida permitió obtener una cota superior para las correlaciones de IGEHI del nivel *mixing* informacional. En base a esta cota y utilizando distribuciones bivariantes con un coeficiente de correlación  $r$ , se pudo demostrar el carácter *mixing* de un ensamble de pares (no interactuantes entre sí) de osciladores unidimensionales acoplados e inmersos en un baño térmico. Al conectar el formalismo de IGAC con el ensamble canónico, el coeficiente  $r$  pudo ser determinado unívocamente por medio del factor de Boltzmann y de ésta forma, la curvatura escalar pudo expresarse linealmente en función de la temperatura del baño.

# Bibliografía

- [1] G. Casati, B. Chirikov, *Quantum Chaos: between order and disorder*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995).
- [2] B. V. Chirikov, *Proc. 2d Intern. Seminar on Group Theory Methods in Physics*, **Vol 1**, 553, Harwood (1985).
- [3] G. Belot, J. Earman, *Stud. His. Philos. Mod. Phys.*, **28**, 147–182 (1997).
- [4] A. Lichtenberg, M. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer, New York (1992).
- [5] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Springer, Ithaca (1985).
- [6] J. Berkovitz, R. Frigg, F. Kronz, *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.*, **37**, 661–691 (2006).
- [7] A. Lasota, M. Mackey, *Probabilistic properties of deterministic systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1985).
- [8] H. Stockmann, *Quantum Chaos: An Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge (1999).
- [9] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos*, Springer–Verlag, Heidelberg (2001).
- [10] M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer Verlag, New York (1990).
- [11] M. Tabor, *Chaos and integrability in nonlinear dynamics*, Wiley, New York (1979).
- [12] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Applied Mathematical Sciences, **38**, pág. 304, Springer, Berlín (2010).
- [13] E. Heller, *Chaos and Quantum Physics*, (1991).
- [14] T. Gorin, T. Prosen, T. Seligmann, M. Znidaric, *Phys. Rep.*, **435**, 33 (2006).
- [15] A. Peres, *Phys. Rev. A*, **30**, 1610 (1984).
- [16] E. Wigner, *Ann. of Math.*, **62**, 548–564 (1955).
- [17] F. J. Dyson, *J. Math. Phys.*, **3**, 1199 (1962).
- [18] O. Bohigas, M. J. Giannoni and C. Schmit, *Phys. Rev. Lett.*, **52**, 1 (1984).
- [19] M. Robnik, *J. Phys. A*, **16**, 3971 (1983).

- [20] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer–Verlag, New York (1991).
- [21] M. Hillery, R. O’Connell, M. Scully, E. Wigner, *Physics Reports*, **106**, 121–167 (1984).
- [22] F. Bayern, M. Flato, M. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Annals of Physics*, **110**, 111–151 (1978).
- [23] N. Bohr, *Zeitschrift für Physik*, **2**, 5, 423–469 (1920).
- [24] L. van Hove, *Phys. A*, **20**, 603 (1954).
- [25] A. Daneri, A. Loinger, G. Prospero, *Nucl. Phys.*, **33**, 267 (1962).
- [26] N. van Kampen, *Phys. A*, **20**, 603 (1969).
- [27] H. Zeh, *Found. Phys.*, **3**, 109 (1973).
- [28] R. Laura, M. Castagnino, *Physical Review E*, **57**, 3948 (1998).
- [29] M. Castagnino, R. Laura, *Phys Rev A*, **62**, 022107 (2000).
- [30] M. Castagnino, S. Fortin, *Modern Physics Letters A*, **26**, 2365–2373 (2011).
- [31] I. Gomez, M. Castagnino, *Chaos, Solitons and Fractals*, **68**, 98–113 (2014).
- [32] I. Gomez, M. Castagnino, *Physica A*, **393**, 112–131 (2014).
- [33] M. Castagnino, O. Lombardi, *Physica A*, **388**, 247–267 (2009).
- [34] I. Gomez, M. Castagnino, *Chaos, Solitons and Fractals*, **70**, 99–116 (2015).
- [35] I. Gomez, M. Losada, S. Fortin, M. Castagnino, M. Portesi, *Int. Journal of Theoretical Phys.*, **7**, 2192–2203 (2015).
- [36] I. S. Gomez, M. Portesi, *Gaussian ensembles distributions from mixing quantum systems*, arXiv:1503.02751 [quant-ph] (2016).
- [37] C. Cafaro, *Chaos, Solitons and Fractals*, **41**, 886 (2009).
- [38] C. Cafaro, S. Mancini, *Phys. D*, **240**, 607 (2011).
- [39] A. Giffin, S. A. Ali, C. Cafaro, *Entropy*, **15**, 4622–4633 (2013).
- [40] A. Giffin, *Maximum Entropy: The Universal Method for Inference*, Ph. D. Thesis, State University of New York at Albany, USA (2008).
- [41] S. Amari, H. Nagaoka, *Methods of Information Geometry*, Oxford University Press (2000).
- [42] M. Berry, *Physica Scripta*, **40**, 335–336 (1989).
- [43] M. Sieber, *J. Phys.*, **106**, 67–121 (1984).
- [44] U. Kuhl, O. Legrand, F. Mortessange, *Prog. Phys.*, **73**, 51 (2009).
- [45] I. Rotten, arXiv:0711.2926 (2007).

- [46] N. Moiseyev, *Non-hermitian quantum mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge (2011).
- [47] W. Slomczynski, K. Zyczkowski, *J. Math. Phys.*, **35**, 700 (1994).
- [48] G. Casati, T. Prosen, *Phys. Lett. A*, **72**, 032111 (2005).
- [49] A. Engel, *The Collected Papers of Albert Einstein*, vol. 6, pág. 434, Princeton U. Press, Princeton (1997).
- [50] K. Ikeda, *Quantum chaos. How incompatible? In: Proceeding of the 5th Yukawa international seminar progress in theoretical physics, phys. supplement*, vol. 116 (1994).
- [51] N. Landsman *Between classical and quantum. In: Butterfield J, Earman John, editors. Philosophy of physics*, Elsevier, Amsterdam (2007).
- [52] R. Omnès, *The Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton (1994).
- [53] R. Omnès, *Understanding Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton (1999).
- [54] A. Crisanti, M. Falcioni, G. Mantica, A. Vulpiani, *Phys. Rev. E*, **50** (1959).
- [55] A. Crisanti, M. Falcioni, G. Mantica, A. Vulpiani, *J. Phys. A*, **26**, 3441 (1993).
- [56] M. Falcioni, G. Mantica, s. Pigolotti, A. Vulpiani, *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 044101 (2003).
- [57] F. Benatti, V. Cappellini, F. Zertuche, *J. Phys. A*, **37**, 105 (2004).
- [58] F. Benatti, V. Cappellini, *J. Math. Phys.*, **46**, 062702 (2005).
- [59] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems. Encyclopedia of mathematics and its applications*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1999).
- [60] R. Mañe, *Ergodic theory and differentiable dynamics*, Springer-Verlag, Berlín (1987).
- [61] A. Connes, H. Narnhofer, W. Thirring, *Commun. Math. Phys.*, **112**, 691 (1987).
- [62] R. Alicki, M. Fannes, *Lett. Math. Phys.*, **32**, 75 (1994).
- [63] D. Voiculescu D, *Commun. Math. Phys.*, **144**, 443 (1992).
- [64] L. Accardi, M. Ohya, N. Watanabe, *Open. Sys. Inf. Dyn.*, **4**, 71 (1997).
- [65] W. Slomczynski, K. Zyczkowski, *J. Math. Phys.*, **35**, 5674 (1994).
- [66] L. Ballentine, *Quantum mechanics, a modern development*, World Scientific, Singapur (1998).
- [67] M. Peskin, D. Schoeder, *An introduction to quantum theory*, Perseus Books, Cambridge (1995).
- [68] R. Sorkin, *Consequences of the space-time topology. In: Coley A et al., editors. Proceeding of the third conference on general relativity and relativistic astrophysics*, World Scientific, Singapur (1990).

- [69] C. Fefferman, *Bull. Am. Math. Soc.*, **9**, 129 (1983).
- [70] K. Zyczkowski, H. Wiedemann, W. Slomczynski, *Vistas in Astronomy*, **37**, 153–156 (1993).
- [71] Y. Pesin, *Characteristic exponents and smooth ergodic theory*, Russian Math Surveys, **32**, 55–114 (1977).
- [72] L. Young, *Entropy*, pág. 283, Princeton University Press, Princeton (2003).
- [73] I. Antoniou, Z. Suchanecki, R. Laura, S. Tasaki, *Physica A*, **241**, 737–772 (1997).
- [74] M. Gadella, G. Pronko, *Fortschritte der Physik*, **59**, 795–859 (2011).
- [75] G. Ordonez, S. Kim, *Physical Review A*, **70**, 032702 (2004).
- [76] A. Bohm, *Quantum mechanics, foundations and applications*, Springer-Verlag, Berlín (1986).
- [77] N. Kylov, *Works on the Foundations of Statistical Mechanics*, Princeton University Press, Princeton (1979).
- [78] G. M. Zaslavsky, *Chaos in Dynamic Systems*, Harwood Academic Publishers, Chur (1985).
- [79] Ch. Dellago, H. A. Posch, *Physical Review E*, **55**, 1 (1997).
- [80] K. Triantafyllopoulos, *Moments and cumulants of the multivariate real and complex Gaussian distributions* (2002).
- [81] I. S. Gomez, M. Portesi, *Ergodic statistical models: entropic dynamics and chaos*, arXiv:1607.08667 [math-ph] (2016).
- [82] I. S. Gomez, M. Portesi, *Bipartite systems in the informational geometrodynamical approach to chaos*, en preparación (2016).
- [83] F. Holik, D. Krause, I. Gomez, *Quantum logical structures for identical particles*, arXiv:1305.5242 [quant-ph] (2013).

## Apéndice A

# La correlación $C(\hat{\rho}(t), \hat{O})$ de la jerarquía ergódica cuántica

Exploremos la cantidad  $C_*(T_t A, B)$  a un dado tiempo  $t$ . Por definición y del hecho de que  $\mu_*$  es invariante bajo las transformaciones  $T_t$  se tiene

$$\begin{aligned} C_*(T_t A, B) &= \mu_*(T_t A \cap B) - \mu_*(A)\mu_*(B) = \\ &= \int_{T_t A \cap B} f_*(q, p) dq dp - \left( \int_A f_*(q, p) dq dp \right) \left( \int_B f_*(q, p) dq dp \right) = \\ &= \int_{\Gamma} f_*(q, p) 1_{T_t A}(q, p) 1_B(q, p) dq dp - \left( \int_{\Gamma} f_*(q, p) 1_A(q, p) dq dp \right) \left( \int_{\Gamma} f_*(q, p) 1_B(q, p) dq dp \right) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

donde  $\Gamma = \mathbb{R}^{2(N+1)}$  es el espacio de fases.

Dado que  $1_{T_t A}(q, p) = 1_A(T_{-t}q, T_{-t}p)$  representando  $(T_{-t}q, T_{-t}p) = (q(-t), p(-t))$  el punto  $(q, p)$  al tiempo  $-t$  con la evolución clásica en el espacio de fases, entonces podemos reescribir (A.1) como

$$\begin{aligned} C_*(T_t A, B) &= \\ &= \int_{\Gamma} f_*(q, p) 1_A(q(-t), p(-t)) 1_B(q, p) dq dp - \left( \int_{\Gamma} f_*(q, p) 1_A(q, p) dq dp \right) \left( \int_{\Gamma} f_*(q, p) 1_B(q, p) dq dp \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Además, podemos desarrollar la distribución de equilibrio  $f_*$  en términos de funciones características, es decir  $f_* = \sum_j c_k 1_{C_k}$  siendo  $f_* \geq 0$ ,  $c_k > 0$  para todo  $k$  y los conjuntos  $\{C_k\}$  forman una partición de  $\Gamma$ . Sea  $f$  una distribución normalizada arbitraria que expandimos por medio de funciones características, o sea  $f = \sum_i a_i 1_{A_i}$ . En particular, como los  $C_k$  constituyen una partición de  $\Gamma$  entonces se tiene que  $1_{A_i} = \sum_k 1_{A_i \cap C_k}$ . Dado que la ec. (A.2) es válida para cualquier par de subconjuntos  $A$  y  $B$  de  $\Gamma$ , entonces para el par  $A_i \cap C_k$  y  $B$  nos queda

$$\begin{aligned} C_*(T_t(A_i \cap C_k), B) &= \\ &= \int_{\Gamma} f_*(q, p) 1_{A_i \cap C_k}(q(-t), p(-t)) 1_B(q, p) dq dp - \left( \int_{\Gamma} f_*(q, p) 1_{A_i \cap C_k}(q, p) dq dp \right) \left( \int_{\Gamma} f_*(q, p) 1_B(q, p) dq dp \right) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Ahora bien,  $f_*$  es igual a  $c_k$  sobre  $C_k$  y por lo tanto también sobre los subconjuntos  $A_i \cap C_k$ , con lo cual podemos reescribir (A.3) como

$$\begin{aligned} C_*(T_t(A_i \cap C_k), B) &= c_k \int_{\Gamma} 1_{A_i \cap C_k}(q(-t), p(-t)) 1_B(q, p) dq dp - \\ &= c_k \left( \int_{\Gamma} 1_{A_i \cap C_k}(q, p) dq dp \right) \left( \int_{\Gamma} f_*(q, p) 1_B(q, p) dq dp \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Luego, multiplicando la ec. (A.4) por  $\frac{a_i}{c_k}$  y sumando sobre los índices  $i$  y  $k$  nos queda

$$\sum_i \sum_k \frac{a_i}{c_k} C_*(T_t(A_i \cap C_k), B) = \sum_i \sum_k \int_{\Gamma} a_i 1_{A_i \cap C_k}(q(-t), p(-t)) 1_B(q, p) dqdp - \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} & (\sum_i \sum_k \int_{\Gamma} a_i 1_{A_i \cap C_k}(q, p) dqdp) (\int_{\Gamma} f_*(q, p) 1_B(q, p) dqdp) \\ &= \int_{\Gamma} f(q(-t), p(-t)) 1_B(q, p) dqdp - (\int_{\Gamma} f(q, p) dqdp) (\int_{\Gamma} f_*(q, p) 1_B(q, p) dqdp) \\ &= \int_{\Gamma} f(q(-t), p(-t)) 1_B(q, p) dqdp - \int_{\Gamma} f_*(q, p) 1_B(q, p) dqdp \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

donde hemos usado que  $f(q, p) = \sum_i \sum_k \int_{\Gamma} a_i 1_{A_i \cap C_k}(q, p)$ ,  $f(q(-t), p(-t)) = \sum_i \sum_k \int_{\Gamma} a_i 1_{A_i \cap C_k}(q(-t), p(-t))$  y que  $\int_{\Gamma} f(q, p) dqdp = 1$ . Más aún, debido a que (A.5) es válida para cualquier función característica  $1_B(q, p)$  y dado que cualquier distribución  $g(q, p)$  puede ser escrita como combinación lineal de funciones características, entonces (A.5) puede extenderse a cualquier función  $g(q, p)$ . Es decir,

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_k \frac{a_i}{c_k} C_*(T_t(A_i \cap C_k), g) &= \int_{\Gamma} f(q(-t), p(-t)) g(q, p) dqdp - \int_{\Gamma} f_*(q, p) g(q, p) dqdp \\ &= \langle f \circ T_{-t}, g \rangle - \langle f_*, g \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Pasemos al lenguaje de operadores. Sean  $\hat{\rho}$  un estado y  $\hat{O}$  un observable arbitrarios. Consideremos el operador  $\hat{\rho}_*$  tal que  $f_*(q, p) = W_{\hat{\rho}_*}(q, p)$ . En particular, (A.7) es válida para  $f(q, p) = W_{\hat{\rho}}(q, p)$ ,  $g(q, p) = \widetilde{W}_{\hat{O}}(q, p)$  y  $f_*(q, p) = W_{\hat{\rho}_*}(q, p)$ , entonces se tiene

$$\sum_i \sum_k \frac{a_i}{c_k} C_*(W_{\hat{\rho}}(-t), \widetilde{W}_{\hat{O}}) = \langle W_{\hat{\rho}} \circ T_{-t}, \widetilde{W}_{\hat{O}} \rangle - \langle W_{\hat{\rho}_*}, \widetilde{W}_{\hat{O}} \rangle := C(\hat{\rho}(t), \hat{O}) \quad (\text{A.8})$$

La ec. (A.8) es la correlación cuántica buscada la cual podemos expresar de manera más compacta utilizando la propiedad de la transformada de Wigner (1.14) y del hecho de que  $W_{\hat{\rho}} \circ T_{-t} = W_{\hat{\rho}}(q(-t), p(-t)) = W_{\hat{\rho}(t)}(q, p)$  (proposición 3.6 del Capítulo 3, sección 3.2.2)

$$C(\hat{\rho}(t), \hat{O}) = \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}(t)}(q, p) \widetilde{W}_{\hat{O}}(q, p) dqdp - \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}_*}(q, p) \widetilde{W}_{\hat{O}}(q, p) dqdp = \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t)} - \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_*}$$

Por lo tanto,

$$C(\hat{\rho}(t), \hat{O}) = \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t)} - \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_*} \quad (\text{A.9})$$

## Apéndice B

# El nivel Kolmogorov cuántico

Recordemos la definición del nivel Kolmogorov de la jerarquía ergódica clásica. La transformación  $T_t$  se dice Kolmogorov si para todo entero  $r$ , para todo  $A_0, A_1, \dots, A_r \subseteq \Gamma$  y para todo  $\varepsilon > 0$  existe un entero  $n_0 > 0$  tal que si  $n \geq n_0$  se tiene para todo  $B \in \sigma_{n,r}(A_1, \dots, A_r)$

$$|C(B, A_0)| < \varepsilon \quad (\text{B.1})$$

siendo  $\sigma_{n,r}(A_1, \dots, A_r)$  la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\{T^k A_i : k \geq n; i = 1, \dots, r\}$ .

Aplicando esta definición y utilizando la correlación  $C_*(A, B) = \mu_*(A \cap B) - \mu_*(A)\mu_*(B)$  con  $\mu_*(A) = \int_A f_*(q, p) dq dp$  siendo  $f_*(q, p)$  punto fijo del operador de Frobenius–Perron, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_0 \cap B} f_*(q, p) dq dp - \int_B f_*(q, p) dq dp \int_{A_0} f_*(q, p) dq dp = 0 \quad (\text{B.2})$$

para todo  $A_0 \subseteq \Gamma$  y todo  $B \in \sigma_{n,r}(A_1, \dots, A_r)$ .

El punto clave es determinar cuáles son los conjuntos de la  $\sigma$ -álgebra  $\sigma_{n,r}(A_1, \dots, A_r) = \sigma(\{T^k A_i : k \geq n; i = 1, \dots, r\})$ . Esta  $\sigma$ -álgebra contiene dos tipos de conjuntos:

- (i)  $\bigcup_i T_{n+n_i} A_{s_i} \setminus T_{n+l_i} A_{p_i}$  con  $n_i, l_i > 0$  y  $s_i, p_i = 1, \dots, r$  que son uniones finitas o numerables de conjuntos de la forma  $T_i A_i \setminus T_j A_j$ .
- (ii)  $\bigcap_i T_{n+n_i} A_{s_i}$  con  $n_i > 0$  y  $s_i = 1, \dots, r$  que son intersecciones finitas o numerables de conjuntos de la forma  $T_i A_i$ .

Comencemos por traducir a lenguaje cuántico la condición (B.2) para los conjuntos del tipo (i). Para este tipo de conjuntos, (B.2) se escribe como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_* \left( \left( \bigcup_i T_{n+n_i} A_{s_i} \setminus T_{n+l_i} A_{p_i} \right) \cap A_0 \right) - \mu_* \left( \bigcup_i T_{n+n_i} A_{s_i} \setminus T_{n+l_i} A_{p_i} \right) \mu_*(A_0) = 0$$

que es igual a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_* \left( \left( \bigcup_i T_{n+n_i} A_{s_i} \cap (T_{n+l_i} A_{p_i})^c \right) \cap A_0 \right) - \mu_* \left( \bigcup_i T_{n+n_i} A_{s_i} \cap (T_{n+l_i} A_{p_i})^c \right) \mu_*(A_0) = 0 \quad (\text{B.3})$$

Por el *principio de inclusión–exclusión* si  $P$  es una medida de probabilidad y  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$  son una cantidad numerable de eventos, entonces la probabilidad de su unión está dada por

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{I \subseteq \mathbb{N}, \#(I)=k} (-1)^{k+1} P\left(\bigcap_{j \in I} Z_j\right) \quad (\text{B.4})$$



Dado que la densidad de equilibrio  $f_*$  es no negativa y está normalizada se sigue que  $\mu_*(A) = \int_A f_*(q, p) dq dp$  es una medida de probabilidad, entonces podemos aplicar el principio de inclusión-exclusión (B.4) en (B.3), con lo cual (B.3) se puede reescribir como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{I \subseteq \mathbb{N}, \#(I)=k} (-1)^{k+1} C_* \left( \bigcap_{j \in I} T_{n+n_j} A_{s_j} \cap (T_{n+l_j} A_{p_j})^c, A_0 \right) = 0$$

es decir,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{I \subseteq \mathbb{N}, \#(I)=k} (-1)^{k+1} \lim_{n \rightarrow \infty} C_* \left( \bigcap_{j \in I} T_{n+n_j} A_{s_j} \cap (T_{n+l_j} A_{p_j})^c, A_0 \right) = 0 \quad (\text{B.5})$$

donde hemos usado que  $C_*(A, B) = \mu_*(A \cap B) - \mu_*(A)\mu_*(B)$ . De (B.5) vemos que la condición del nivel de Kolmogorov se reduce simplemente a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_* \left( \bigcap_{j \in I} T_{n+n_j} A_{s_j} \cap (T_{n+l_j} A_{p_j})^c, A_0 \right) = 0 \quad (\text{B.6})$$

para todo  $A_0 \subseteq \Gamma$  con  $n_j, l_j > 0$  y  $s_j, p_j = 1, \dots, r$ . Más aún, haciendo  $A_{p_j} = \emptyset$  para todo  $p_j$  en (B.6) recuperamos la condición de los conjuntos del tipo (ii). Reescribiendo (B.6) en términos de  $f_*$  nos queda

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bigcap_{j \in I} T_{n+n_j} A_{s_j} \cap (T_{n+l_j} A_{p_j})^c \cap A_0} f_*(q, p) dq dp \\ & - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\bigcap_{j \in I} T_{n+n_j} A_{s_j} \cap (T_{n+l_j} A_{p_j})^c} f_*(q, p) dq dp \right) \left( \int_{A_0} f_*(q, p) dq dp \right) = 0 \end{aligned}$$

o sea,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \prod_{j \in I} 1_{T_{n+n_j} A_{s_j}}(q, p) 1_{(T_{n+l_j} A_{p_j})^c}(q, p) 1_{A_0}(q, p) f_*(q, p) dq dp \\ & - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\Gamma} \prod_{j \in I} 1_{T_{n+n_j} A_{s_j}}(q, p) 1_{(T_{n+l_j} A_{p_j})^c}(q, p) f_*(q, p) dq dp \right) \left( \int_{\Gamma} f_*(q, p) 1_{A_0}(q, p) dq dp \right) = 0 \end{aligned}$$

Ahora, usando que  $1_{(T_{n+l_j} A_{p_j})^c}(q, p) = 1 - 1_{T_{n+l_j} A_{p_j}}(q, p)$  y que  $1_{T_t A}(q, p) = 1_A(T_{-t} q, T_{-t} p) = 1_A(q(-t), p(-t))$  para todo conjunto  $A$  del espacio de fases  $\Gamma$ , nos queda

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \prod_{j \in I} 1_{A_{s_j}}(T_{-n-n_j} q, T_{-n-n_j} p) (1 - 1_{A_{p_j}}(T_{-n-l_j} q, T_{-n-l_j} p)) 1_{A_0}(q, p) f_*(q, p) dq dp \\ & - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\Gamma} \prod_{j \in I} 1_{A_{s_j}}(T_{-n-n_j} q, T_{-n-n_j} p) (1 - 1_{A_{p_j}}(T_{-n-l_j} q, T_{-n-l_j} p)) f_*(q, p) dq dp \right) \\ & \quad \times \left( \int_{\Gamma} f_*(q, p) 1_{A_0}(q, p) dq dp \right) = 0 \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

Dado que (B.7) es válida para funciones características  $1_{A_0}, 1_{A_{s_j}}, 1_{A_{p_j}}$  donde  $A_0, A_{s_j}, A_{p_j}$  son conjuntos arbitrarios del espacio de fases  $\Gamma$  y debido a que toda función puede aproximarse como combinación lineal de funciones características, entonces la ecuación (B.7) es también válida para funciones arbitrarias  $g(q, p), g_{s_j}(q, p), g_{p_j}(q, p)$ . Es decir que se tiene

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \prod_{j \in I} g_{s_j}(T_{-n-n_j} q, T_{-n-n_j} p) (1 - g_{p_j}(T_{-n-l_j} q, T_{-n-l_j} p)) g(q, p) f_*(q, p) dq dp \\ & - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\Gamma} \prod_{j \in I} g_{s_j}(T_{-n-n_j} q, T_{-n-n_j} p) (1 - g_{p_j}(T_{-n-l_j} q, T_{-n-l_j} p)) f_*(q, p) dq dp \right) \\ & \quad \times \left( \int_{\Gamma} f_*(q, p) g(q, p) dq dp \right) = 0 \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, en (B.8) podemos reemplazar  $g_{s_1}(T_{-n-n_1}q, T_{-n-n_1}p)f_*(q, p)$  por  $f(T_{-n-n_1}q, T_{-n-n_1}p)$  siendo  $f(q, p)$  una función arbitraria, y redefinir  $g_{s_j}(T_{-n-n_j}q, T_{-n-n_j}p)(1 - g_{p_j}(T_{-n-l_j}q, T_{-n-l_j}p))$  como  $G_{k_j}(T_{-n-m_j}q, T_{-n-m_j}p)$ . Entonces nos queda

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(T_{-n-n_1}q, T_{-n-n_1}p) \prod_{j \in I} G_{k_j}(T_{-n-m_j}q, T_{-n-m_j}p) g(q, p) dq dp \\ & - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\Gamma} f(T_{-n-n_1}q, T_{-n-n_1}p) \prod_{j \in I} G_{k_j}(T_{-n-m_j}q, T_{-n-m_j}p) dq dp \right) \left( \int_{\Gamma} f_*(q, p) g(q, p) dq dp \right) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

donde  $k_j = 1, \dots, r$  e  $I$  es cualquier subconjunto finito de los números naturales. Vemos que, por ejemplo, haciendo  $G_{k_j} = 0$  en (B.9) se obtiene el nivel mixing de la jerarquía ergódica.

La ecuación (B.9) expresa el nivel de Kolmogorov en el lenguaje de distribuciones y es la que nos permitirá el paso a su reescritura en términos de valores medios cuánticos. Sea  $\hat{\rho}$  un estado y sean  $\hat{O}_0, \hat{O}_1, \dots, \hat{O}_r$  observables. Consideremos el estado  $\hat{\rho}_*$  tal que  $W_{\hat{\rho}_*}(q, p) = f_*(q, p)$ .

En particular, para  $f(q, p) = W_{\hat{\rho}}(q, p)$ ,  $g(q, p) = \widetilde{W}_{\hat{O}_0}(q, p)$ ,  $G_{k_j}(q, p) = \widetilde{W}_{\hat{O}_{k_j}}(q, p)$  se tiene

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}}(T_{-n-n_1}q, T_{-n-n_1}p) \widetilde{W}_{\hat{O}_0}(q, p) \prod_{j \in I} \widetilde{W}_{\hat{O}_{k_j}}(T_{-n-m_j}q, T_{-n-m_j}p) dq dp \\ & - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}}(T_{-n-n_1}q, T_{-n-n_1}p) \prod_{j \in I} \widetilde{W}_{\hat{O}_{k_j}}(T_{-n-m_j}q, T_{-n-m_j}p) dq dp \right) \times \\ & \quad \times \left( \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}_*}(q, p) \widetilde{W}_{\hat{O}_0}(q, p) dq dp \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Además, por la proposición 3.6 del Capítulo 3 tenemos

$$\begin{aligned} W_{\hat{\rho}}(T_{-n-n_1}q, T_{-n-n_1}p) &= W_{\hat{\rho}(n+n_1)}(q, p) \\ \widetilde{W}_{\hat{O}_{k_j}}(T_{-n-m_j}q, T_{-n-m_j}p) &= \widetilde{W}_{\hat{O}_{k_j}(n+m_j)} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Entonces, reemplazando (B.11) en (B.10) obtenemos

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}(n+n_1)}(q, p) \widetilde{W}_{\hat{O}_0}(q, p) \prod_{j \in I} \widetilde{W}_{\hat{O}_{k_j}(n+m_j)}(q, p) dq dp \\ & - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}(n+n_1)}(q, p) \prod_{j \in I} \widetilde{W}_{\hat{O}_{k_j}(n+m_j)}(q, p) dq dp \right) \left( \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}_*}(q, p) \widetilde{W}_{\hat{O}_0}(q, p) dq dp \right) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

En virtud de (1.13), cuando  $\hbar$  es suficientemente chico los productos  $\widetilde{W}_{\hat{O}_0}(q, p) \prod_{j \in I} \widetilde{W}_{\hat{O}_{k_j}(n+m_j)}(q, p)$  y  $\prod_{j \in I} \widetilde{W}_{\hat{O}_{k_j}(n+m_j)}(q, p)$  son casi iguales al producto estrella, es decir

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{\hat{O}_0}(q, p) \prod_{j \in I} \widetilde{W}_{\hat{O}_{k_j}(n+m_j)}(q, p) &\approx \widetilde{W}_{\hat{O}_0 \prod_{j \in I} \hat{O}_{k_j}(n+m_j)}(q, p) \quad \text{si } \hbar \approx 0 \\ & \quad y \\ \prod_{j \in I} \widetilde{W}_{\hat{O}_{k_j}(n+m_j)}(q, p) &\approx \widetilde{W}_{\prod_{j \in I} \hat{O}_{k_j}(n+m_j)}(q, p) \quad \text{si } \hbar \approx 0 \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Reemplazando (B.13) en (B.12) nos queda

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}(n+n_1)}(q, p) \widetilde{W}_{\hat{O}_0 \prod_{j \in I} \hat{O}_{k_j}(n+m_j)}(q, p) dq dp \\ & - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}(n+n_1)}(q, p) \widetilde{W}_{\prod_{j \in I} \hat{O}_{k_j}(n+m_j)}(q, p) dq dp \right) \left( \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}_*}(q, p) \widetilde{W}_{\hat{O}_0}(q, p) dq dp \right) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Luego, por la propiedad (1.14) todas las integrales de (B.14) pueden expresarse trazas de operadores cuánticos, esto es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \hat{O}_0 \prod_{j \in I} \hat{O}_{k_j}(n + m_j) \rangle_{\hat{\rho}(n+n_1)} - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \prod_{j \in I} \hat{O}_{k_j}(n + m_j) \rangle_{\hat{\rho}(n+n_1)} \langle \hat{O}_0 \rangle_{\hat{\rho}_*} = 0 \quad (\text{B.15})$$

Finalmente, como (B.15) es válida para cualquier producto finito  $\prod_{j \in I}$  extendiéndolo a un producto infinito numerable se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \hat{O}_0 \prod_{j=1}^{\infty} \hat{O}_{k_j}(n + m_j) \rangle_{\hat{\rho}(n+n_1)} - \langle \hat{O}_0 \rangle_{\hat{\rho}_*} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \prod_{j=1}^{\infty} \hat{O}_{k_j}(n + m_j) \rangle_{\hat{\rho}(n+n_1)} = 0 \quad (\text{B.16})$$

que es precisamente la condición del nivel de Kolmogorov cuántico (2.25).

## Apéndice C

### Demostración del lema 2.3

Escribamos a  $f_*$  como una combinación lineal de funciones características  $f_* = \sum_i \alpha_i 1_{C_i}$  donde  $C_i \cap C_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ ,  $\int_{\Gamma} f_* = \sum_i \alpha_i \mu(C_i) = 1$  y  $\Gamma = \mathbb{R}^{2(N+1)}$  es el espacio de fases. Por definición, se tiene

$$\mu(T_t A \cap B) = C(T_t A, B) + \mu(A)\mu(B) \quad (\text{C.1})$$

Sean  $A_1$  y  $A_2$  dos subconjuntos de  $\Gamma$ . Entonces, por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_i \alpha_i \sum_j \alpha_j \mu(T_t C_i \cap A_1 \cap C_j \cap A_2) &= \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \{C(T_t C_i, A_1 \cap C_j \cap A_2) + \mu(C_i)\mu(C_j \cap A_1 \cap A_2)\} \\ &= \sum_i \alpha_i \sum_j \alpha_j C(T_t C_i, A_1 \cap C_j \cap A_2) + \sum_i \alpha_i \mu(C_i) \sum_j \alpha_j \mu(C_j \cap A_1 \cap A_2) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j C(T_t C_i, A_1 \cap C_j \cap A_2) + \sum_j \alpha_j \int_{\Gamma} 1_{C_j \cap A_1 \cap A_2} \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j C(T_t C_i, A_1 \cap C_j \cap A_2) + \int_{\Gamma} \sum_j \alpha_j 1_{C_j} 1_{A_1} 1_{A_2} \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j C(T_t C_i, A_1 \cap C_j \cap A_2) + \int_{\Gamma} f_* 1_{A_1} 1_{A_2} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Por otro lado, (C.2) también puede escribirse como

$$\begin{aligned} \sum_i \alpha_i \sum_j \alpha_j \mu(T_t C_i \cap A_1 \cap C_j \cap A_2) &= \sum_i \alpha_i \sum_j \alpha_j \mu(T_t C_i \cap T_t(T_{-t} A_1) \cap C_j \cap A_2) \\ &= \sum_i \alpha_i \sum_j \alpha_j C(T_t(C_i \cap T_{-t} A_1), C_j \cap A_2) + \sum_i \alpha_i \mu(C_i \cap T_{-t} A_1) \sum_j \alpha_j \mu(C_j \cap A_2) \\ &= \sum_i \alpha_i \sum_j \alpha_j C(T_t(C_i \cap T_{-t} A_1), C_j \cap A_2) + \int_{\Gamma} \sum_i \alpha_i 1_{C_i} 1_{T_{-t} A_1} \int_{\Gamma} \sum_j \alpha_j 1_{C_j} 1_{A_2} \\ &= \sum_i \alpha_i \sum_j \alpha_j C(T_t(C_i \cap T_{-t} A_1), C_j \cap A_2) + \int_{\Gamma} f_* 1_{T_{-t} A_1} \int_{\Gamma} f_* 1_{A_2} \\ &= \sum_i \alpha_i \sum_j \alpha_j C(T_t(C_i \cap T_{-t} A_1), C_j \cap A_2) + \int_{T_{-t} A_1} f_* \int_{\Gamma} f_* 1_{A_2} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Además, por la definición del operador de Frobenius–Perron  $P_t$

$$\int_{T_{-t} A_1} f_* = \int_{A_1} P_t f_* = \int_{A_1} f_* = \int_{\Gamma} f_* 1_{A_1} \quad (\text{C.4})$$

donde usamos que  $f_*$  es un punto fijo de  $P_t$ , e.g.  $P_t f_* = f_*$ . De (C.2), (C.3) y (C.4) nos queda

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j C(T_t C_i, A_1 \cap C_j \cap A_2) + \int_{\Gamma} f_* 1_{A_1} 1_{A_2} = \\ \sum_i \alpha_i \sum_j \alpha_j C(T_t(C_i \cap T_{-t} A_1), C_j \cap A_2) + \int_{\Gamma} f_* 1_{A_1} \int_{\Gamma} f_* 1_{A_2} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Tomando el límite  $t \rightarrow \infty$  en (C.5) y teniendo en cuenta que como la dinámica en el espacio de fases es *mixing* entonces las correlaciones  $C(\dots)$  de (C.5) tienden a cero, nos queda

$$\int_{\Gamma} f_* 1_{A_1} 1_{A_2} = \int_{\Gamma} f_* 1_{A_1} \int_{\Gamma} f_* 1_{A_2} \quad (\text{C.6})$$

Para completar la demostración sólo basta aplicar sucesivamente (C.6)  $n - 1$  veces usando que  $1_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n} = 1_{A_1} 1_{A_2} \dots 1_{A_n}$ .

## Apéndice D

### Demostración del lema 2.4

Recordemos la definición del límite débil. Sea  $\hat{\rho} \in \mathcal{N}$  un estado cuántico. Decimos que  $\hat{\rho}_* \in \mathcal{N}$  es el límite débil de  $\hat{\rho}$  si se cumple

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t)} = \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_*} \quad (\text{D.1})$$

para todo observable  $\hat{O}$  del álgebra cuántica  $\mathcal{A}$ .

Sea  $s \in \mathbb{R}$  un número real. En particular,  $\hat{U}_s^\dagger \hat{O} \hat{U}_s$  es un observable siendo  $\hat{U}_s = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}s}$  el operador de evolución dado por el Hamiltoniano  $\hat{H}$  del sistema cuántico al instante  $s$ . Entonces, para  $\hat{U}_s^\dagger \hat{O} \hat{U}_s$ , de la definición (D.1) se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \hat{U}_s^\dagger \hat{O} \hat{U}_s \rangle_{\hat{\rho}(t)} - \langle \hat{U}_s^\dagger \hat{O} \hat{U}_s \rangle_{\hat{\rho}_*} = 0 \quad (\text{D.2})$$

con

$$\begin{aligned} \langle \hat{U}_s^\dagger \hat{O} \hat{U}_s \rangle_{\hat{\rho}(t)} &= \text{Tr}(\hat{\rho}(t) \hat{U}_s^\dagger \hat{O} \hat{U}_s) = \text{Tr}(\hat{U}_t \hat{\rho} \hat{U}_t^\dagger \hat{U}_s^\dagger \hat{O} \hat{U}_s) = \text{Tr}(\hat{U}_s \hat{U}_t \hat{\rho} \hat{U}_t^\dagger \hat{U}_s^\dagger \hat{O}) = \text{Tr}(\hat{U}_{s+t} \hat{\rho} \hat{U}_{s+t}^\dagger \hat{O}) \\ &= \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(s+t)} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

y

$$\langle \hat{U}_s^\dagger \hat{O} \hat{U}_s \rangle_{\hat{\rho}_*} = \text{Tr}(\hat{\rho}_* \hat{U}_s^\dagger \hat{O} \hat{U}_s) = \text{Tr}(\hat{U}_s \hat{\rho}_* \hat{U}_s^\dagger \hat{O}) = \langle \hat{O} \rangle_{\hat{U}_s \hat{\rho}_* \hat{U}_s^\dagger} \quad (\text{D.4})$$

De (D.2), (D.3) y (D.4) se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t+s)} - \langle \hat{O} \rangle_{\hat{U}_s \hat{\rho}_* \hat{U}_s^\dagger} = 0 \quad (\text{D.5})$$

siendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t+s)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t)} = \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_*} \quad (\text{D.6})$$

Luego, de (D.5) and (D.6) se sigue que  $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{U}_s \hat{\rho}_* \hat{U}_s^\dagger} = \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_*}$  para todo observable  $\hat{O}$ , es decir que se tiene

$$\hat{U}_s \hat{\rho}_* \hat{U}_s^\dagger = \hat{\rho}_* \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (\text{D.7})$$

y por lo tanto  $\hat{\rho}_*$  es un punto fijo de  $\hat{U}_s = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}s}$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ .

## Apéndice E

### Demostración del corolario 2.5

Sea  $A$  un conjunto del espacio de fases  $\Gamma = \mathbb{R}^{2(N+1)}$ . Sea  $\hat{I}_A$  el operador cuyo símbolo de Weyl es la función característica de  $A$ ,  $1_A(q, p)$ , es decir  $\widetilde{W}_{\hat{I}_A}(q, p) = 1_A(q, p)$ . Aplicando la definición del operador de Frobenius–Perron,  $\int_E P_t f = \int_{T^{-t}E} f$  para todo  $E \subseteq \Gamma$  y  $f$ , al operador  $\widetilde{W}_{\hat{I}_A}(q, p)$ , utilizando el lema 2.4 y la propiedad de la transformación de Wigner (1.14) se tiene

$$\begin{aligned} \int_A P_t W_{\hat{\rho}_*}(q, p) dq dp &= \int_{T^{-t}A} W_{\hat{\rho}_*}(q, p) dq dp = \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}_*}(q, p) 1_{T^{-t}A}(q, p) dq dp \\ &= \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}_*}(q, p) \widetilde{W}_{\hat{U}_t^\dagger \hat{I}_A \hat{U}_t}(q, p) dq dp = \text{Tr}(\hat{\rho}_* \hat{U}_t^\dagger \hat{I}_A \hat{U}_t) = \text{Tr}(\hat{U}_t \hat{\rho}_* \hat{U}_t^\dagger \hat{I}_A) = \text{Tr}(\hat{\rho}_* \hat{I}_A) \\ &= \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}_*}(q, p) \widetilde{W}_{1_A}(q, p) dq dp = \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}_*}(q, p) 1_A(q, p) dq dp = \int_A W_{\hat{\rho}_*}(q, p) dq dp \quad (\text{E.1}) \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $\widetilde{W}_{\hat{U}_t^\dagger \hat{I}_A \hat{U}_t}(q, p) = 1_{T^{-t}A}(q, p)$  en virtud de la proposición 3.6. Dado que (E.1) es válida para todo conjunto  $A$  se sigue que  $P_t W_{\hat{\rho}_*}(q, p) = W_{\hat{\rho}_*}(q, p)$  y por lo tanto  $W_{\hat{\rho}_*}(q, p)$  es un punto fijo de  $P_t$ .

## Apéndice F

### Demostración del teorema 2.6

Aplicando la propiedad de la transformada de Wigner (1.14) al producto  $\hat{O}_1 \hat{O}_2 \cdots \hat{O}_n$  y al límite débil  $\hat{\rho}_*$  se tiene

$$\langle \hat{O}_1 \hat{O}_2 \cdots \hat{O}_n \rangle_{\hat{\rho}_*} = \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}_*}(q, p) \widetilde{W}_{\hat{O}_1 \cdots \hat{O}_n}(q, p) dqdp \quad (\text{F.1})$$

donde  $\Gamma = \mathbb{R}^{2(N+1)}$ . Además, del producto estrella (1.13) se tiene

$$\widetilde{W}_{\hat{O}_1 \cdots \hat{O}_n}(q, p) = \widetilde{W}_{\hat{O}_1}(q, p) \cdots \widetilde{W}_{\hat{O}_n}(q, p) + \mathcal{O}(\hbar) \quad (\text{F.2})$$

Entonces, en la aproximación de  $\hbar$  muy pequeño podemos despreciar los términos de orden  $0(\hbar)$  de tal manera que de (F.1) y (F.2) se tiene

$$\langle \hat{O}_1 \hat{O}_2 \cdots \hat{O}_n \rangle_{\hat{\rho}_*} = \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}_*}(q, p) \widetilde{W}_{\hat{O}_1}(q, p) \cdots \widetilde{W}_{\hat{O}_n}(q, p) dqdp \quad (\text{F.3})$$

Por el otro lado, expandiendo  $\widetilde{W}_{\hat{O}_1}, \widetilde{W}_{\hat{O}_2}, \dots, \widetilde{W}_{\hat{O}_n}$  como combinaciones lineales de funciones características  $\widetilde{W}_{\hat{O}_1} = \sum_j \alpha_{1j} 1_{C_{1j}}, \widetilde{W}_{\hat{O}_2} = \sum_k \alpha_{2k} 1_{C_{2k}}, \dots, \widetilde{W}_{\hat{O}_n} = \sum_l \alpha_{nl} 1_{C_{nl}}$  y reemplazándolas en (F.3) se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \hat{O}_1 \hat{O}_2 \cdots \hat{O}_n \rangle_{\hat{\rho}_*} &= \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}_*}(q, p) \left( \sum_j \alpha_{1j} 1_{C_{1j}}(q, p) \cdots \sum_j \alpha_{nj} 1_{C_{nj}}(q, p) \right) dqdp \\ &= \sum_j \alpha_{1j} \cdots \sum_j \alpha_{nj} \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}_*}(q, p) 1_{C_{1j}}(q, p) \cdots 1_{C_{1n}}(q, p) dqdp \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Por el corolario 2.5, sabemos que  $W_{\hat{\rho}_*}(q, p)$  es un punto fijo de  $P_t$  entonces aplicando el lema 2.3 sobre la integral  $\int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}_*}(q, p) 1_{C_{1j}}(q, p) \cdots 1_{C_{1n}}(q, p) dqdp$  de (F.4) se tiene

$$\int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}_*} 1_{C_{1j}} \cdots 1_{C_{1n}} = \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}_*} 1_{C_{1j}} \cdots \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}_*} 1_{C_{nj}} \quad (\text{F.5})$$

que a su vez implica

$$\begin{aligned} \sum_j \alpha_{1j} \cdots \sum_j \alpha_{nj} \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}_*} 1_{C_{1j}} \cdots 1_{C_{1n}} &= \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}_*} \sum_j \alpha_{1j} 1_{C_{1j}} \cdots \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}_*} \sum_j \alpha_{nj} 1_{C_{nj}} \\ &= \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}_*} \widetilde{W}_{\hat{O}_1} \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}_*} \widetilde{W}_{\hat{O}_2} \cdots \int_{\Gamma} W_{\hat{\rho}_*} \widetilde{W}_{\hat{O}_n} = \langle \hat{O}_1 \rangle_{\hat{\rho}_*} \langle \hat{O}_2 \rangle_{\hat{\rho}_*} \cdots \langle \hat{O}_n \rangle_{\hat{\rho}_*} \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Finalmente, de (F.4) y (F.6) se tiene

$$\langle \hat{O}_1 \hat{O}_2 \cdots \hat{O}_n \rangle_{\hat{\rho}_*} = \langle \hat{O}_1 \rangle_{\hat{\rho}_*} \langle \hat{O}_2 \rangle_{\hat{\rho}_*} \cdots \langle \hat{O}_n \rangle_{\hat{\rho}_*} \quad (\text{F.7})$$

## Apéndice G

# Demostración del teorema 2.7 (QSDT)

Consideramos que el espacio de fases  $\Gamma$  de  $S_{cl}$  es  $\mathbb{R}^{2(N+1)}$  y que la medida  $d\mu(x)$  es la canónicamente dada por  $d^{N+1}q d^{N+1}p$ . Para abreviar pondremos simplemente al elemento de volumen como  $dqdp$ . Para poder utilizar el teorema SDT es necesario tener un espacio normalizado, por lo tanto consideraremos aproximaciones de  $\mathbb{R}^{2(N+1)}$  de la forma  $\Gamma_\eta = B(0, \eta)$ , es decir la bola de  $\mathbb{R}^{2(N+1)}$  de radio  $\eta > 0$  y centro en el origen. Bajo estas condiciones, para todo  $\eta > 0$  el sistema dinámico  $(\Gamma_\eta, \mu, \Sigma, \{T_t\})$  es normalizado con la norma  $\frac{\mu(\dots)}{\mu(\Gamma_\eta)}$  siendo  $d\mu(x) = dqdp$  la medida usual de Lebesgue de  $\mathbb{R}^{2(N+1)}$ .

Sean  $\hat{\rho}$  un estado inicial y  $\hat{O}$  un observable, y llamemos  $f(q, p) = W_{\hat{\rho}}(q, p)$ ,  $g(q, p) = \widetilde{W}_{\hat{O}}(q, p)$ . En particular,  $f(q, p)$  es una densidad y en virtud de la hipótesis de constrictividad del operador de Frobenius–Perron  $P_t$  asociado a  $T_t$  podemos aplicar el SDT a  $f$ . Ahora bien, multiplicando a ambos miembros de (2.47) por una función  $g(q, p)$  e integrando sobre  $\Gamma_\eta$  nos queda

$$\int_{\Gamma_\eta} P^n f(q, p) g(q, p) \frac{dqdp}{\mu(\Gamma_\eta)} = \sum_{i=1}^{r_\eta} \lambda_{\alpha_\eta^{-n}(i)}(f)_\eta \int_{\Gamma_\eta} \bar{\mathbb{I}}_{A_{i,\eta}}(q, p) g(q, p) \frac{dqdp}{\mu(\Gamma_\eta)} + \int_{\Gamma_\eta} Q_{n,\eta} f(q, p) g(q, p) \frac{dqdp}{\mu(\Gamma_\eta)} \quad , \quad \forall \eta > 0 \quad (\text{G.1})$$

siendo  $\{A_{1,\eta}, A_{2,\eta}, \dots, A_{r_\eta,\eta}\}$  una partición de  $\Gamma_\eta$ . Simplificando el factor  $\frac{1}{\mu(\Gamma_\eta)}$  de ambos miembros y utilizando el producto escalar  $\langle \phi, \varphi \rangle_\eta = \int_{\Gamma_\eta} \phi(q, p) \varphi(q, p) dqdp$  podemos reescribir (G.1) como

$$\langle P^n f, g \rangle_\eta = \sum_{i=1}^{r_\eta} \lambda_{\alpha_\eta^{-n}(i)}(f)_\eta \langle \bar{\mathbb{I}}_{A_{i,\eta}}, g \rangle_\eta + \langle P^{n-1} Q_\eta f, g \rangle_\eta \quad , \quad \forall \eta > 0 \quad (\text{G.2})$$

siendo  $P^{n-1} Q_\eta = Q_{n,\eta}$ . Ahora bien, como el operador de Koopman  $U$  es el dual del operador de Frobenius–Perron  $P$  se tiene  $\langle P^n f, g \rangle_\eta = \langle f, U^n g \rangle_\eta$  y  $\langle P^{n-1} Q_\eta f, g \rangle_\eta = \langle Q_\eta f, U^{n-1} g \rangle_\eta$ . Haciendo estos reemplazos en (G.2) se obtiene

$$\langle f, U^n g \rangle_\eta = \sum_{i=1}^{r_\eta} \lambda_{\alpha_\eta^{-n}(i)}(f)_\eta \langle \bar{\mathbb{I}}_{A_{i,\eta}}, g \rangle_\eta + \langle Q_\eta f, U^{n-1} g \rangle_\eta \quad , \quad \forall \eta > 0 \quad (\text{G.3})$$

Definamos los operadores  $\hat{\rho}_{i,\eta}$  y  $\tilde{\rho}_{0,\eta}$  tales que  $\bar{\mathbb{I}}_{A_{i,\eta}}(q, p) = W_{\hat{\rho}_{i,\eta}}(q, p)$  y  $Q_\eta f(q, p) = W_{\tilde{\rho}_{0,\eta}}(q, p)$ .

Entonces, usando que  $U^n g = g \circ T^n = \widetilde{W}_{\hat{O}}(T^n(q, p)) = \widetilde{W}_{\hat{O}(-n)}(q, p)$  y que  $U^{n-1} g = g(T^{n-1}(q, p)) = \widetilde{W}_{\hat{O}(-(n-1))}(q, p)$  las cuales son una consecuencia de la proposición 3.6, podemos



reescribir (G.3) como

$$\langle W_{\hat{\rho}}, \widetilde{W}_{\hat{O}(-n)} \rangle_{\eta} = \sum_{i=1}^{r_{\eta}} \lambda_{\alpha_{\eta}^{-n}(i)}(f)_{\eta} \langle W_{\hat{\rho}_{i,\eta}}, \widetilde{W}_{\hat{O}} \rangle_{\eta} + \langle W_{\tilde{\rho}_{0,\eta}}, \widetilde{W}_{\hat{O}(-(n-1))} \rangle_{\eta} \quad , \quad \forall \eta > 0 \quad (\text{G.4})$$

También podemos definir los operadores  $\hat{O}_{i,\eta}$  tales que  $k_{i,\eta}(q,p) = \widetilde{W}_{\hat{O}_{i,\eta}}(q,p)$  con lo cual usando la ec. (2.46) podemos escribir los coeficientes  $\lambda_{\alpha_{\eta}^{-n}(i)}(f)_{\eta}$  para cada  $\eta > 0$  como

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha_{\eta}^{-n}(i)}(f)_{\eta} &= \int_{\Gamma_{\eta}} f(q,p) k_{\alpha_{\eta}^{-n}(i)}(q,p) dq dp = \langle f, k_{\alpha_{\eta}^{-n}(i)} \rangle_{\eta} = \langle W_{\hat{\rho}}, \widetilde{W}_{\hat{O}_{\alpha_{\eta}^{-n}(i),\eta}} \rangle_{\eta} \\ &= \lambda_{\alpha_{\eta}^{-n}(i)}(\hat{\rho})_{\eta} \quad , \quad \forall \eta > 0 \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

Usando (G.5) en (G.4) se tiene

$$\langle W_{\hat{\rho}}, \widetilde{W}_{\hat{O}(-n)} \rangle_{\eta} = \sum_{i=1}^{r_{\eta}} \lambda_{\alpha_{\eta}^{-n}(i)}(\hat{\rho})_{\eta} \langle W_{\hat{\rho}_{i,\eta}}, \widetilde{W}_{\hat{O}} \rangle_{\eta} + \langle W_{\tilde{\rho}_{0,\eta}}, \widetilde{W}_{\hat{O}(-(n-1))} \rangle_{\eta} \quad \forall \eta > 0 \quad (\text{G.6})$$

Teniendo en cuenta que  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Gamma_{\eta} = \mathbb{R}^{2(N+1)}$  (en el sentido de conjuntos), en el límite  $\eta \rightarrow \infty$  es razonable considerar válidas las siguientes convergencias (en la mayoría de ellas por la existencia de una subsucesión convergente en un espacio compacto)

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow \infty} r_{\eta} &= r \in \mathbb{N} \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} \alpha_{\eta} &= \alpha \in \sigma(1, 2, \dots, r) \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\eta} &= \langle \cdot, \cdot \rangle \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} \hat{\rho}_{i,\eta} &= \hat{\rho}_i \quad , \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \hat{O}_{i,\eta} = \hat{O}_i \quad \forall i = 1, \dots, r \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} \tilde{\rho}_{0,\eta} &= \tilde{\rho}_{0,\eta} \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

siendo  $\sigma(1, 2, \dots, r)$  las permutaciones de  $r$  elementos y  $\langle \phi, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{2(N+1)}} \phi(q,p) \varphi(q,p) dq dp$  el producto escalar entre funciones en  $\mathbb{R}^{2(N+1)}$ . A su vez, (G.7) implica

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow \infty} W_{\hat{\rho}_{i,\eta}}(q,p) &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} \bar{1}_{A_{i,\eta}}(q,p) = \bar{1}_{A_i}(q,p) \quad \forall i = 1, \dots, r \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} W_{\tilde{\rho}_{0,\eta}}(q,p) &= W_{\tilde{\rho}_0}(q,p) \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{\hat{O}_{i,\eta}}(q,p) &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} k_{i,\eta}(q,p) = k_i(q,p) = \widetilde{W}_{\hat{O}_i}(q,p) \quad \forall i = 1, \dots, r \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} \langle W_{\hat{\rho}}, \widetilde{W}_{\hat{O}_{\alpha_{\eta}^{-n}(i),\eta}} \rangle_{\eta} &= \langle W_{\hat{\rho}}, \widetilde{W}_{\hat{O}_{\alpha^{-n}(i)}} \rangle = \lambda_{\alpha^{-n}(i)}(\hat{\rho}) \quad \forall i = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

Entonces, tomando  $\lim_{\eta \rightarrow \infty}$  en (G.6) y usando (G.7), (G.8) obtenemos

$$\langle W_{\hat{\rho}}, \widetilde{W}_{\hat{O}(-n)} \rangle = \sum_{i=1}^r \lambda_{\alpha^{-n}(i)}(\hat{\rho}) \langle W_{\hat{\rho}_i}, \widetilde{W}_{\hat{O}} \rangle + \langle W_{\tilde{\rho}_0}, \widetilde{W}_{\hat{O}(-(n-1))} \rangle \quad (\text{G.9})$$

Ahora, usando la propiedad de preservación del producto interno de la transformación de Wigner (1.14) nos queda

$$\langle \hat{O}(-n) \rangle_{\hat{\rho}} = \sum_{i=1}^r \lambda_{\alpha^{-n}(i)}(\hat{\rho}) \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_i} + \langle \hat{O}(-(n-1)) \rangle_{\tilde{\rho}_0} \quad (\text{G.10})$$

Finalmente, si recordamos que mantener fijos los estados y evolucionar los observables (picture de Heisenberg) es lo mismo que evolucionar los estados y mantener fijos los observables (picture de Schrödinger), es decir que  $\langle \hat{O}(-n) \rangle_{\hat{\rho}}$  y  $\langle \hat{O}(-(n-1)) \rangle_{\hat{\rho}_0}$  son iguales respectivamente a  $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(n)}$  y  $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_0(n-1)}$ . Luego, la ecuación (G.10) nos queda

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(n)} = \sum_{i=1}^r \lambda_{\alpha^{-n}(i)}(\hat{\rho}) \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_i} + \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_0(n-1)} \quad (\text{G.11})$$

que es precisamente la descomposición dada por (2.49).

(i) : Veamos primero que  $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots, \hat{\rho}_r$  son estados y luego que son ortogonales. Se tiene

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\rho}_i) &= \int_{\mathbb{R}^{2(N+1)}} W_{\hat{\rho}_i}(q, p) dq dp = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\eta} W_{\hat{\rho}_{i,\eta}}(q, p) dq dp \\ &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\eta} \bar{1}_{A_{i,\eta}}(q, p) dq dp = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\eta} \frac{1}{\mu(A_{i,\eta})} 1_{A_{i,\eta}}(q, p) dq dp \\ &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(A_{i,\eta})} \int_{\Gamma_\eta} 1_{A_{i,\eta}}(q, p) dq dp = \lim_{\eta \rightarrow \infty} 1 = 1 \quad \forall i = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (\text{G.12})$$

Utilizando preservación del producto interno (1.14) de la transformada de Wigner se tiene

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\rho}_i \hat{\rho}_j) &= \int_{\mathbb{R}^{2(N+1)}} W_{\hat{\rho}_i}(q, p) \widetilde{W}_{\hat{\rho}_j}(q, p) dq dp = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\eta} W_{\hat{\rho}_{i,\eta}}(q, p) \widetilde{W}_{\hat{\rho}_{j,\eta}}(q, p) dq dp = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} h^{N+1} \int_{\Gamma_\eta} W_{\hat{\rho}_{i,\eta}}(q, p) W_{\hat{\rho}_{j,\eta}}(q, p) dq dp = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} h^{N+1} \int_{\Gamma_\eta} \bar{1}_{A_{i,\eta}}(q, p) \bar{1}_{A_{j,\eta}}(q, p) dq dp = \lim_{\eta \rightarrow \infty} 0 = 0 \quad \text{si } i \neq j \end{aligned} \quad (\text{G.13})$$

en virtud de que las funciones  $\bar{1}_{A_{i,\eta}}(q, p), \bar{1}_{A_{j,\eta}}(q, p)$  tienen soportes disjuntos si  $i \neq j$  para todo  $\eta > 0$ . Dado que los  $A_{1,\eta}, A_{2,\eta}, \dots, A_{r,\eta}$  forman una partición de  $\Gamma_\eta$  para todo  $\eta > 0$  entonces la identidad  $1_{\Gamma_\eta}(q, p)$  puede escribirse como

$$1_{\Gamma_\eta}(q, p) = \sum_{i=1}^{r_\eta} 1_{A_{i,\eta}}(q, p) = \sum_{i=1}^{r_\eta} \mu(A_{i,\eta}) \bar{1}_{A_{i,\eta}}(q, p) \quad , \quad \forall \eta > 0 \quad (\text{G.14})$$

Aplicando la inversa de la transformada de Wigner (G.14) y teniendo en cuenta la linealidad de la misma, para todo  $\eta > 0$  se obtiene

$$\hat{I}_{\Gamma_\eta} = \sum_{i=1}^{r_\eta} \alpha_{i,\eta} \hat{\rho}_{i,\eta} \quad \text{con } \alpha_{i,\eta} = \frac{\mu(A_{i,\eta})}{h^{N+1}} \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{r_\eta} \alpha_{i,\eta} = \sum_{i=1}^{r_\eta} \frac{\mu(A_{i,\eta})}{h^{N+1}} = \frac{1}{h^{N+1}} \quad (\text{G.15})$$

siendo  $\widetilde{W}_{\hat{I}_{\Gamma_\eta}} = 1_{\Gamma_\eta}(q, p)$  la identidad en  $\Gamma_\eta$ . En particular, dado que los  $\mu(A_{i,\eta})$  son números acotados, esto es  $0 \leq \mu(A_{i,\eta}) \leq \frac{1}{h^{N+1}} \quad \forall i = 1, \dots, r_\eta, \forall \eta > 0$ , entonces podemos tomar una subsucesión convergente  $\mu(A_{i,\eta_{i_k}})$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_{i,\eta_{i_k}}) = \mu(A_i)$  para todo  $i = 1, \dots, r$ . Llamemos  $\alpha_i = \frac{\mu(A_i)}{h^{N+1}}$ . Además,  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \hat{I}_{\Gamma_\eta} = \hat{I}$  en la norma Hilbert-Schmidt siendo  $\hat{I}$  el operador identidad en  $\mathbb{R}^{2(N+1)}$ . Entonces, tomando  $\lim_{\eta \rightarrow \infty}$  en (G.15) se tiene

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} \hat{I}_{\Gamma_\eta} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{r_\eta} \alpha_{i,\eta} \hat{\rho}_{i,\eta} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \hat{\rho}_i \quad \text{con } \alpha_i = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\mu(A_{i,\eta})}{h^{N+1}} \geq 0 \quad \text{y} \\ & \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{r_\eta} \frac{\mu(A_{i,\eta})}{h^{N+1}} = \frac{1}{h^{N+1}} \end{aligned} \quad (\text{G.16})$$

(ii) : Aplicando la parte (ii) del SDT se tiene

$$P \bar{1}_{A_{i,\eta}} = \bar{1}_{A_{\alpha_\eta(i)}} \quad \forall \eta > 0 \quad (\text{G.17})$$

donde  $\alpha_\eta : \{1, \dots, r_{eta}\} \rightarrow \{1, \dots, r_\eta\}$  es una permutación sin puntos fijos. Por lo tanto el operador de Frobenius–Perron  $P$  permuta las funciones  $\bar{\Gamma}_{A_{i,\eta}}$ . Sea  $\hat{O}$  un observable y sea  $g(q, p) = \widetilde{W}_{\hat{O}}(q, p)$ . Entonces a partir de (G.17) tenemos

$$\langle P\bar{\Gamma}_{A_{i,\eta}}, g \rangle_\eta = \langle \bar{\Gamma}_{A_{\alpha_\eta(i)}}, g \rangle_\eta = \langle W_{\hat{\rho}_{\alpha_\eta(i)}}, \widetilde{W}_{\hat{O}}(q, p) \rangle_\eta \quad \forall \eta > 0 \quad (\text{G.18})$$

Por otra parte,

$$\langle P\bar{\Gamma}_{A_{i,\eta}}, g \rangle_\eta = \langle \bar{\Gamma}_{A_{i,\eta}}, Ug \rangle_\eta = \langle \bar{\Gamma}_{A_{i,\eta}}, \widetilde{W}_{\hat{O}}(Tq, Tp) \rangle_\eta = \langle W_{\hat{\rho}_{i,\eta}}, \widetilde{W}_{\hat{U}^\dagger \hat{O} \hat{U}} \rangle_\eta \quad \forall \eta > 0 \quad (\text{G.19})$$

Luego, tomando  $\lim_{\eta \rightarrow \infty}$  en (G.18),(G.19) y utilizando los límites dados por (G.7),(G.8) se sigue que  $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{U}^\dagger \hat{\rho}_i \hat{U}} = \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_{\alpha(i)}}$ .

(iii) : Sea  $\hat{O}$  un observable y sea  $\varepsilon > 0$ . En particular por la condición (iii) del SDT se sigue que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$

$$\|P^n Q_\eta f\| < \frac{\varepsilon}{\max\{|O(q, p)| : (q, p) \in \Gamma_\eta\}} \quad \forall \eta > 0 \quad \text{con } O(q, p) = \widetilde{W}_{\hat{O}}(q, p) \quad (\text{G.20})$$

En particular, como  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} P^n Q_\eta f = P^n Q f$  y  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \max\{|O(q, p)| : (q, p) \in \Gamma_\eta\} = \max\{|O(q, p)| : (q, p) \in \mathbb{R}^{2(N+1)}\} = \|O\|_\infty$ , de (G.20) se obtiene

$$\|P^n Q f\| \|O\|_\infty = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \|P^n Q_\eta f\| (\max\{|O(q, p)| : (q, p) \in \Gamma_\eta\}) \leq \varepsilon \quad (\text{G.21})$$

Además, dado que  $Q_\eta f = W_{\tilde{\rho}_{0,\eta}}$  se tiene

$$\langle P^n Q_\eta f, O \rangle_\eta = \langle Q_\eta f, U^n O \rangle_\eta = \langle W_{\tilde{\rho}_{0,\eta}}, \widetilde{W}_{\hat{O}}(T^n q, T^n p) \rangle_\eta \quad \forall \eta > 0 \quad (\text{G.22})$$

Tomando  $\lim_{\eta \rightarrow \infty}$  en (G.22) y usando (G.7),(G.8) nos queda

$$\langle P^n Q f, O \rangle = \langle W_{\tilde{\rho}_{0,\eta}}, \widetilde{W}_{\hat{O}}(T^n q, T^n p) \rangle \quad (\text{G.23})$$

que a su vez implica, en virtud de la transformada de Wigner (1.14)

$$\begin{aligned} \langle P^n Q f, O \rangle &= \langle W_{\tilde{\rho}_{0,\eta}}, \widetilde{W}_{\hat{O}}(T^n q, T^n p) \rangle = \langle W_{\tilde{\rho}_0}, \widetilde{W}_{\hat{U}(n)^\dagger \hat{O} \hat{U}(n)} \rangle = \\ &= \text{Tr}(\tilde{\rho}_0 \hat{U}(n)^\dagger \hat{O} \hat{U}(n)) = \text{Tr}(\hat{U}(n) \tilde{\rho}_0 \hat{U}(n)^\dagger \hat{O}) = \langle \hat{O} \rangle_{\tilde{\rho}_0(n)} \end{aligned} \quad (\text{G.24})$$

Luego, de (G.21) y (G.24) se tiene

$$\langle \hat{O} \rangle_{\tilde{\rho}_0(n)} = \langle P^n Q f, O \rangle \leq \|P^n Q f\| \|O\|_\infty \leq \varepsilon \quad (\text{G.25})$$

Es decir que  $\langle \hat{O} \rangle_{\tilde{\rho}_0(n)}$  tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$  y por lo tanto  $\langle \hat{O} \rangle_{\tilde{\rho}_0(n-1)} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

## Apéndice H

# Demostración de la proposición 3.6

Por definición tenemos

$$\widetilde{W}_{\hat{A}}(q, p) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \langle q + \Delta | \hat{A} | q - \Delta \rangle e^{2i \frac{p\Delta}{\hbar}} d\Delta \quad (\text{H.1})$$

de donde se sigue

$$\widetilde{W}_{\hat{A}}(T_t q, T_t p) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \langle T_t q + \Delta | \hat{A} | T_t q - \Delta \rangle e^{2i \frac{T_t p \Delta}{\hbar}} d\Delta \quad (\text{H.2})$$

Ahora hagamos el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned} \Delta &\longrightarrow \tilde{\Delta} = T_{-t} \Delta \quad , \quad \Delta = T_t \tilde{\Delta} \\ d\Delta &= |T_t| d\tilde{\Delta} \end{aligned} \quad (\text{H.3})$$

siendo  $|T_t|$  el determinante Jacobiano de  $T_t$  restringido a las coordenadas  $q$ , y donde estamos utilizando la misma notación  $T_t$  para la evolución de las coordenadas  $q$  y sus impulsos  $p$ . Podemos suponer que  $|T_t| = 1$  ya que la evolución clásica de Liouville conserva el volumen en el espacio de fases. Entonces, usando (H.3) y que  $|T_t| = 1$ , podemos reescribir (H.2) como

$$\widetilde{W}_{\hat{A}}(T_t q, T_t p) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \langle T_t q + T_t \tilde{\Delta} | \hat{A} | T_t q - T_t \tilde{\Delta} \rangle e^{2i \frac{T_t p T_t \tilde{\Delta}}{\hbar}} d\tilde{\Delta} \quad (\text{H.4})$$

Ahora bien, es claro que

$$\begin{aligned} \langle T_t q + T_t \tilde{\Delta} | &= \langle T_t (q + \tilde{\Delta}) | = \langle q + \tilde{\Delta} | \hat{U}(t)^\dagger \\ |T_t q - T_t \tilde{\Delta} \rangle &= |T_t (q - \tilde{\Delta}) \rangle = \hat{U}(t) |q - \tilde{\Delta} \rangle \end{aligned} \quad (\text{H.5})$$

y además

$$\begin{aligned} e^{2i \frac{T_t p T_t \tilde{\Delta}}{\hbar}} = e^{2i \frac{p \tilde{\Delta}}{\hbar}} &\iff \frac{T_t p T_t \tilde{\Delta}}{\hbar} - \frac{p \tilde{\Delta}}{\hbar} = m\pi \quad \text{con } m \in \mathbb{Z} \\ &\iff p(t) \tilde{\Delta}(t) - p \tilde{\Delta} = mh/2 \end{aligned} \quad (\text{H.6})$$

Si consideramos que nuestro espacio de fases es cuántico, entonces debido al principio de incertidumbre podemos suponer que está grillado por celdas de tamaño mínimo  $h/2$  y con  $h$  pequeño (esto último para que las integrales de (H.1), (H.2) y (H.4) tengan sentido), en cuyo caso se cumplirá la condición (H.6). Luego, reemplazando (H.5) y (H.6) en (H.4) obtenemos el resultado que queríamos demostrar, es decir la ecuación (3.35).

# Apéndice I

## Demostración del lema 3.9

De acuerdo a (3.37) se tiene

$$\begin{aligned} \mu(B(A_{k_0}, A_{k_1}, \dots, A_{k_n})) &= \mu(A_{k_0} \cap T^{-1}A_{k_1} \cap \dots \cap T^{-n}A_{k_n}) = \\ \int_{\mathbb{R}^{N+1}} I_{A_{k_0} \cap T^{-1}A_{k_1} \cap \dots \cap T^{-n}A_{k_n}} dqdp &= \int_{\mathbb{R}^{N+1}} I_{A_{k_0}}(q, p) I_{T^{-1}A_{k_1}}(q, p) \cdots I_{T^{-n}A_{k_n}}(q, p) dqdp \\ &= h^{N+1} \int_{\mathbb{R}^{N+1}} W_{\hat{I}}(q, p) \widetilde{W}_{\hat{I}_{A_{k_0}}(0)}(q, p) \widetilde{W}_{\hat{I}_{A_{k_1}}(-1)}(q, p) \cdots \widetilde{W}_{\hat{I}_{A_{k_n}}(-n)}(q, p) dqdp \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

habiendo usado el corolario 3.7 y que  $h^{N+1}W_{\hat{I}}(q, p) = \widetilde{W}_{\hat{I}}(q, p)$  es la función identidad  $I(q, p)$  en el espacio de fases. Ahora bien, aplicando la propiedad del producto estrella (1.13) al producto  $\widetilde{W}_{\hat{I}_{A_{k_0}}(0)}(q, p) \widetilde{W}_{\hat{I}_{A_{k_1}}(-1)}(q, p) \cdots \widetilde{W}_{\hat{I}_{A_{k_n}}(-n)}(q, p)$  resulta

$$\widetilde{W}_{\hat{I}_{A_{k_0}}(0)\hat{I}_{A_{k_1}}(-1)\dots\hat{I}_{A_{k_n}}(-n)} = \widetilde{W}_{\hat{I}_{A_{k_0}}(0)}(q, p) \widetilde{W}_{\hat{I}_{A_{k_1}}(-1)}(q, p) \cdots \widetilde{W}_{\hat{I}_{A_{k_n}}(-n)}(q, p) + \mathcal{O}(\hbar) \quad (\text{I.2})$$

Luego, despreciando términos de orden  $\mathcal{O}(\hbar)$  y reemplazando (I.2) en (I.1) se obtiene

$$\mu(B(A_{k_0}, A_{k_1}, \dots, A_{k_n})) = h^{N+1} \int_{\mathbb{R}^{N+1}} W_{\hat{I}}(q, p) \widetilde{W}_{\hat{I}_{A_{k_0}}(0)\hat{I}_{A_{k_1}}(-1)\dots\hat{I}_{A_{k_n}}(-n)} dqdp \quad (\text{I.3})$$

Aplicando la propiedad de la transformación de Wigner dada por (1.14) en (I.3) se tiene

$$\begin{aligned} \mu(B(A_{k_0}, A_{k_1}, \dots, A_{k_n})) &= h^{N+1} \text{Tr}(\hat{I}_{A_{k_0}}(0) \hat{I}_{A_{k_1}}(-1) \cdots \hat{I}_{A_{k_n}}(-n)) = \\ &= h^{N+1} \text{Tr}(\prod_{j=0}^n \hat{I}_{A_{k_j}}(-j)) \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

Finalmente, para terminar la demostración se aplica el lema 3.8 a (I.4).