



Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Física

Integrabilidad en la
correspondencia AdS/CFT

Tesis presentada para optar al grado de
Doctor de la Facultad de Ciencias Exactas

Fidel Iván Schaposnik Massolo
bajo la dirección de Diego H. Correa

2016

Agradecimientos

A mi papá, a mi hermana y a Romina,
por su paciencia y apoyo incondicional.

A Diego,
por compartir conmigo su experiencia
y ayudarme a lo largo de todo este trabajo.

Resumen

Este trabajo de tesis se aboca al estudio de la correspondencia AdS/CFT, concentrándose específicamente en las estructuras integrables presentes en este contexto. El objetivo del trabajo es la obtención de resultados exactos, que proporcionan una corroboración altamente no trivial de la conjetura a la vez que esclarecen aspectos relevantes tanto de la teoría de cuerdas como de las teorías de campos conformes.

En el capítulo 1 se motiva el estudio de la correspondencia AdS/CFT como una realización concreta del principio holográfico, destacando su relevancia dentro del contexto más amplio de la física de altas energías. Se mencionan algunas de sus características principales, como ser su carácter de dualidad fuerte/débil, que la transforman en una herramienta poderosa a la hora de obtener resultados no perturbativos. Asimismo, se presenta un esquema general del trabajo con el objetivo de orientar al lector sobre la estructura y los temas a tratar a lo largo del mismo.

Los capítulos 2 y 3 presentan algunos de los conceptos fundamentales para el desarrollo del resto del trabajo. En el primero se deriva heurísticamente la correspondencia AdS/CFT, comenzando en general y pasando luego al caso particular que relaciona la teoría de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills 4-dimensional con grupo de simetría $SU(N)$ y la teoría de cuerdas supersimétrica tipo IIB formulada en el espacio $AdS_5 \times S^5$. Se establecen allí algunas de las definiciones y propiedades generales de ambas teorías que serán relevantes en capítulos posteriores, y se mencionan también varias de las verificaciones de precisión realizadas para sustentar la conjetura. En el segundo se introduce el objeto de estudio específico de la tesis, que son los lazos de Wilson de la teoría $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills y sus duales holográficos, las cuerdas y D-branas de la teoría de cuerdas tipo IIB. Este capítulo concluye con los primeros ejemplos de la aplicación de la dualidad.

El capítulo 4 presenta los primeros resultados originales obtenidos por el tesista, que conciernen a los lazos de Wilson en representaciones totalmente simétricas del grupo de gauge. Desarrollando alternativamente los dos puntos de vista duales, que corresponden a la aproximación de supergravedad en la teoría de cuerdas y a la expansión perturbativa en la teoría de campos, se presenta evidencia en apoyo de la exponenciación de cierto tipo de diagramas de Feynman en el límite en el que el rango de la representación es grande.

Los capítulos 5 y 6 introducen el concepto de integrabilidad, así como su realización en el marco de la conjetura AdS/CFT. Una vez elaborados algunos de los elementos fundamentales que conforman la estructura de un sistema integrable, se presentan resultados originales obtenidos para el caso concreto de un lazo de Wilson con inserciones. En particular, se determina el factor de *dressing* que acompaña a la matriz de reflexión que describe el borde de una cadena de espines insertada en una línea de Wilson en la representación antisimétrica del grupo de gauge. También se describe el sistema de ecuaciones integrales conocido como *ansatz* de Bethe termodinámico, que captura las correcciones debidas al tamaño finito de la cadena. El mismo se aplica tanto a la corroboración del resultado mencionado anteriormente, como a la expansión a segundo orden de la dimensión anómala de *cusp*, asociada a la divergencia logarítmica presente en un lazo de Wilson con un quiebre. Este desarrollo motivará la reformulación de las ecuaciones correspondientes para tener en cuenta algunas de las propiedades analíticas de la expansión, otro de los resultados originales en cuya obtención colaboró el tesista.

El trabajo de tesis concluye con un capítulo dedicado a la Discusión y conclusiones, tanto de los resultados obtenidos como del panorama más general del área de investigación del doctorando. En este se resaltan algunas de las ideas más generales que atravesaron los distintos temas desarrollados, y se presentan también direcciones futuras de investigación. Para facilitar la lectura se relegan a los apéndices los detalles técnicos de algunos de los cálculos realizados, así como la especificación de las convenciones y notación utilizadas.

Índice general

1. Introducción	3
2. Correspondencia AdS/CFT	9
2.1. Motivación	9
2.2. Espacio anti de Sitter	12
2.2.1. Estructura causal	15
2.3. $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills	17
2.4. El diccionario y sus verificaciones	19
3. Lazos de Wilson	27
3.1. Lazos de Wilson en teorías de gauge	27
3.2. Potencial quark-antiquark	30
3.3. Lazos de Wilson en la dualidad AdS/CFT	33
3.3.1. Representaciones de rango superior	36
3.4. Lazos de Wilson supersimétricos	39
3.4.1. Ejemplos	42
4. Límite de ladders para los lazos de Wilson	47
4.1. D3-brana dual a $W_E[\mathcal{C}_\angle, \mathcal{S}_k]$	48
4.1.1. Ángulo de cusp pequeño	51
4.1.2. Límite de κ grande	53
4.2. Análisis perturbativo	55
4.2.1. Diagramas ladder	57
4.2.2. Diagramas de interacción	59
4.3. Exponenciación para contornos más generales	62
4.3.1. D3-brana dual para k grande	63
4.3.2. Evaluación on-shell	67

5. Integrabilidad en AdS/CFT	71
5.1. Cargas conservadas y ecuación de Yang-Baxter	73
5.2. Operador de dilataciones a 1-loop	78
5.3. Ansatz de Bethe	83
5.3.1. Ansatz de Bethe asintótico	92
5.4. Factor de reflexión en D5-branas integrables	103
5.4.1. Cuerdas clásicas terminando en D5-branas con flujos	104
5.4.2. Factor de reflexión en el límite de acoplamiento fuerte	109
5.4.3. Cuerdas entre D5-branas que forman ángulos	114
5.4.4. Condición de crossing de borde	121
6. Ansatz de Bethe termodinámico	131
6.1. TBA en teorías integrables	134
6.1.1. Ansatz de Bethe termodinámico de borde	141
6.2. Verificación de factores de dressing por correcciones tipo Lüscher	143
6.3. Sistema Y	148
6.4. Potencial quark-antiquark a 2-loops	153
6.4.1. Reformulación de las ecuaciones de TBA de borde	159
6.4.2. Expansión a acoplamiento débil	165
7. Discusión y conclusiones	169
A. Elementos de teoría de cuerdas	177
A.1. Acción para la cuerda relativista	177
A.2. Acción para D-branas	182
B. Factores de color de diagramas ladder	185
Bibliografía	189

Índice de figuras

2.1.	Diagrama conforme del espacio plano	16
3.1.	Loop de Wilson rectangular	30
3.2.	Loop de Wilson con un cusp	32
3.3.	Mapa plano cilindro para el loop de Wilson con un cusp	33
3.4.	Diagrama de Young para una representación de $U(N)$ genérica	37
3.5.	Loops de Wilson rectangular y con cusp en $\mathcal{N} = 4$ sYM	41
4.1.	D3-brana con un ángulo de cusp interno	50
4.2.	Diagramas tipo ladder a 2-loops	57
4.3.	Diagramas de interacción a 2 loops	59
4.4.	Ejemplos de diagramas a 3 loops	60
4.5.	Diagramas de 3-loops con un escalón	62
4.6.	Lazo de Wilson con trayectoria arbitraria en el espacio interno	63
5.1.	Procesos $3 \rightarrow 3$ y ecuación de Yang-Baxter	76
5.2.	Ecuación de Yang-Baxter de borde	77
5.3.	Condición de unitaridad de la matriz S	94
5.4.	Condición de crossing de la matriz S	97
5.5.	Reflexión en un borde mediante <i>doubling trick</i>	100
5.6.	Condición de crossing para el borde	101
5.7.	Condición de unitaridad para el borde	102
5.8.	D5-brana con volumen de mundo $AdS_2 \times S^4$	106
5.9.	D5-brana con volumen de mundo $AdS_4 \times S^2$	107
5.10.	Cuerda sustentada entre D5-branas formando un ángulo	116
6.1.	Correcciones por tamaño finito tipo Lüscher	133
6.2.	Toroide de radios L y \tilde{L} para la deducción del TBA	134
6.3.	Cilindros vertical y acostado para la deducción del BTBA	141

Nomenclatura

A continuación se detallan las abreviaciones y siglas utilizadas a lo largo de este trabajo:

AdS	anti de Sitter
BTBA	TBA de borde
CFT	<i>conformal field theory</i> , teoría de campos conforme
IR	infrarrojo
QCD	<i>quantum chromodynamics</i> , cromodinámica cuántica
QED	<i>quantum electrodynamics</i> , electrodinámica cuántica
R-R	Ramond-Ramond
sYM	super Yang-Mills
TBA	<i>thermodynamic Bethe ansatz</i> , ansatz de Bethe termodinámico
UV	ultravioleta

Se usarán las convenciones:

D	Dimensiones espacio-temporales
d	Dimensiones espaciales
R	Radio de curvatura de AdS
\mathcal{R}	Escalar de Ricci
\mathfrak{R}	Representación de un grupo
\equiv	Identificación via AdS/CFT
$:=$	Definición de notación
AdS_n	Espacio anti de Sitter n -dimensional
$EAdS_n$	Espacio anti de Sitter euclídeo n -dimensional
S^n	Espacio esférico n -dimensional
$\eta_{\mu\nu}$	Métrica de Minkowski
ε	Tensor de Levi-Civita

Capítulo 1

Introducción

La correspondencia AdS/CFT se enmarca dentro del contexto general de las dualidades gauge/gravedad, que establecen relaciones entre teorías de campos con simetría de gauge y teorías gravitatorias. En sus diversas versiones, la teoría de gravedad involucrada tiene siempre una dimensión espacial adicional a las de la teoría de campos dual, cuya descripción se alcanza en el borde de la teoría gravitatoria, es decir para cierto valor límite de la coordenada espacial extra. Se trata por lo tanto de realizaciones del principio holográfico [1, 2], por el cual la descripción de un sistema puede ser realizada o bien a través del análisis de la dinámica gravitatoria de su interior, o bien por medio de los grados de libertad de su frontera. Un primer indicio de este principio reside en los agujeros negros, cuya entropía es proporcional al área en unidades de Planck de su horizonte de eventos [3, 4]. Como dicha entropía es además la máxima entre todos los sistemas con la misma área [5], resulta natural suponer que la descripción de la gravedad cuántica en un dado volumen puede realizarse por medio de grados de libertad localizados en su superficie, a razón de uno por unidad de Planck.

Para comprender la relevancia de la conjetura AdS/CFT y el contexto en el que se desarrolla, es conveniente realizar un breve recorrido por el estado actual de la física de altas energías. El panorama en esta disciplina tiene hoy dos facetas principales. Por un lado, existe un acuerdo excepcionalmente bueno entre la descripción microscópica provista por el Modelo Estándar de la física de partículas y los experimentos realizados hasta ahora para ponerlo a prueba [6]. En efecto, la reciente observación del bosón de Higgs en el *Large Hadron Collider* [7, 8] constituye una fuerte evidencia en favor de la descripción de la naturaleza por medio de una teoría cuántica de campos con simetría de gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, ya que esta es la última pieza que completa un esquema teórico desarrollado y puesto a prueba en innumerables ocasiones desde la segunda mitad del siglo XX, [9–11].

Sin embargo, se sabe también que el Modelo Estándar no está completo, ya que si bien describe correctamente los fenómenos que ocurren a las escalas de energía que podemos observar no incluye los efectos de la gravedad cuántica que son relevantes a escalas de energía mayores. Las energías en cuestión corresponden a distancias del orden de la longitud de Planck, para las cuales no disponemos de una teoría satisfactoria de la gravitación debido a la imposibilidad de realizar su cuantización por los métodos perturbativos usuales. Esperamos entonces que un desarrollo teórico proporcione un cambio de paradigma conceptual, que nos permita unificar la gravedad con la teoría cuántica de campos, aún si con el estado actual de la tecnología resultaría en la práctica esencialmente imposible ponerlo a prueba experimentalmente.

La teoría de cuerdas fue inicialmente desarrollada en la década de 1960 para dar cuenta de la gran cantidad de mesones y hadrones que por entonces se descubrían en los aceleradores de partículas. A pesar de tener un éxito parcial, fue reemplazada en esta tarea por la teoría de QCD, uno de los ingredientes fundamentales del Modelo Estándar. Sin embargo, aparecieron en escena más tarde una serie de indicios que sugerían a la teoría de cuerdas como candidata a proporcionar una descripción cuántica de la gravedad.

El precepto fundamental de la teoría de cuerdas es el abandono del concepto de partícula puntual, que es central en toda teoría de campos. En efecto, mientras que en estas las partículas son excitaciones de los campos fundamentales que interactúan localmente, en la teoría de cuerdas el objeto fundamental es una cuerda extendida en una dimensión espacial, [12–16]. Las distintas oscilaciones de la cuerda tienen entonces un espectro de masas y energías, y debido a que las dimensiones de la cuerda son muy pequeñas sus distintos estados de excitación se perciben a bajas energías como las distintas partículas físicas. Sin embargo, las interacciones ocurren siempre en el plano de las cuerdas con una extensión finita, de modo que no ocurren en un único punto y se ven constreñidas por las posibilidades que tengan las cuerdas de unirse o separarse.

Toda teoría de cuerdas contiene en su espectro una partícula no masiva de espín dos, cuya única interacción posible es la de la gravedad. Es en este sentido en el que la teoría de cuerdas proporciona una teoría cuántica de la gravedad, aunque el precio a pagar por ello no es menor. De hecho, para que la teoría sea consistente debe formularse en un espacio-tiempo con dimensiones adicionales, e incluir excitaciones fermiónicas que hacen a la teoría supersimétrica (la teoría de cuerdas puramente bosónica sólo es viable en 26 dimensiones, pero contiene partículas taquiónicas que la hacen inestable). En el espacio plano, la teoría de cuerdas debe formularse en 10 dimensiones espacio-temporales, 6 de las cuales deberían por lo tanto compactificarse

por el mecanismo de Kaluza-Klein para justificar el hecho de que no las observamos cotidianamente, [17].

En este marco, la correspondencia AdS/CFT establece una relación entre las dos grandes áreas de la física de altas energías mencionadas hasta aquí. De un lado de la correspondencia hay una teoría de cuerdas, candidata a proporcionar una descripción de la gravedad cuántica, mientras que del otro lado se encuentra una teoría de campos similar en muchos aspectos al Modelo Estándar. Lo que es más, la relación que se establece entre ellas es una dualidad, en tanto identifica regímenes complementarios de ambas teorías: la teoría de campos fuertemente acoplada corresponde a la teoría de cuerdas en el límite en el que es posible su tratamiento perturbativo, mientras que al régimen cuántico de la teoría de cuerdas le corresponde el acoplamiento débil en la teoría de campos. Por esta razón, la correspondencia resulta de gran interés para el desarrollo de ambas áreas.

Desde el punto de vista de la teoría de campos, tener acceso al régimen de acoplamiento fuerte abre las puertas al análisis de fenómenos hasta ahora inexplorados, que podrían allanar el camino para responder algunos de los problemas abiertos más relevantes en este contexto. En efecto, cuestiones relacionadas con la física de bajas energías en QCD, como por ejemplo el confinamiento o la ruptura de la simetría quiral, no han podido ser resueltas hasta ahora debido a que es inviable el tratamiento perturbativo tradicional que ha sido tan exitoso para energías más altas gracias a la libertad asintótica. Antes de la conjetura AdS/CFT el único camino a seguir en estos casos pasaba por la simulación numérica, pero ahora disponemos además de resultados para teorías de gauge prototípicas, que pueden indicar el camino a seguir en un tratamiento analítico.

Invirtiendo el punto de vista, la correspondencia puede entenderse como una definición no perturbativa de la teoría de cuerdas, y más en general de una teoría cuántica de la gravedad. En este sentido, la información que puede proveer resulta invaluable a la hora de dirigir la búsqueda de la teoría cuántica de la gravedad, así como su unificación con el Modelo Estándar. Esto es especialmente cierto considerando que la conjetura tiene su origen en argumentos muy generales, que pueden aplicarse fuera de los contextos usuales para dar lugar a realizaciones novedosas de la correspondencia. Así, por el principio holográfico una teoría conforme en D dimensiones define una teoría de la gravedad cuántica en el espacio AdS con $D + 1$ dimensiones, mientras que considerando la teoría de cuerdas en geometrías AdS más generales pueden definirse teorías conformes para las cuales no existe una formulación lagrangiana. Incluso,

llegado el caso, lo mismo podría hacerse con cualquier otra teoría cuántica de la gravedad de la que se tuviera una formulación en el espacio AdS, requerido por la simetría conforme.

Finalmente, en la interfaz entre ambas teorías ha surgido además un terreno fecundo para el desarrollo de técnicas y herramientas sofisticadas cuya función principal es implementar en forma concreta la correspondencia, realizando predicciones y corroborándolas en la medida de lo posible. Es aquí donde aparece la integrabilidad, que proporciona un mecanismo que permite resolver algunos problemas analíticamente y en forma exacta en el acoplamiento. Esto no solamente es útil como corroboración de la validez de la conjetura AdS/CFT, ya que nos permite interpolar continuamente entre los regímenes de acoplamiento fuerte y débil, sino que además muchas veces aclara nuestra comprensión sobre la misma, enseñándonos al mismo tiempo algo sobre las teorías a ambos lados.

Este trabajo está dedicado a la obtención de resultados exactos como los descritos en el párrafo anterior [18–21]. Algunos de ellos podrán alcanzarse gracias a la integrabilidad subyacente de los observables estudiados, mientras que otros dependerán exclusivamente de la consideración de ciertos límites particulares. En cualquier caso, el objetivo es comprender lo más profundamente posible la dualidad AdS/CFT para poder considerar todas sus consecuencias, y de este modo avanzar hacia la solución de algunos de los grandes problemas actuales de la física de altas energías. La estructura de esta tesis es la siguiente.

En el capítulo 2 se presenta la conjetura AdS/CFT. Luego de una motivación más general, se introduce la versión prototípica de esta dualidad, de la que nos ocuparemos exclusivamente. Se mencionan algunas de sus características principales y se describen asimismo los ingredientes fundamentales a ambos lados de la correspondencia.

En el capítulo 3 se introducen los lazos de Wilson, primero para teorías de gauge en general y luego para el caso particular de la teoría $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills. Se discute finalmente su descripción dual bajo AdS/CFT en términos de cuerdas o D-branas, siendo esta relación el eje central que atraviesa todos los desarrollos realizados por este autor.

El capítulo 4 presenta los primeros resultados originales de esta tesis. Estos fueron obtenidos en [20, 21] y no dependen de la integrabilidad sino de las propiedades de la teoría de campos y las representaciones elegidas para su grupo de gauge.

El capítulo 5 se dedica al concepto de integrabilidad, haciendo especial énfasis en el contexto en el que aparece en el marco de la correspondencia AdS/CFT. Este capítulo concluye con la presentación de los resultados obtenidos en [18]. El capítulo

6 continúa con la exposición de la integrabilidad introduciendo el ansatz de Bethe termodinámico, que permite calcular valores de expectación de ciertos lazos de Wilson mediante un sistema de ecuaciones cuya expansión se realizó en [19].

Las conclusiones de esta tesis se presentan en el capítulo 7. Se dejan para los apéndices tanto exposiciones de algunos temas específicos que constituyen el trasfondo en el que se desarrolló el trabajo, como así también detalles técnicos que podrían ser engorrosos de estar presentes en el texto principal.

Capítulo 2

Correspondencia AdS/CFT

En este capítulo introducimos la correspondencia AdS/CFT siguiendo el camino que históricamente llevó a conjeturarla [22], y haciendo especial énfasis en la versión más estudiada de la dualidad, que relaciona la teoría de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills en cuatro dimensiones con la teoría de cuerdas supersimétricas tipo IIB en el espacio $AdS_5 \times S^5$. Esta realización proporcionará un marco teórico común para todos los resultados presentados en este trabajo [18–21], y los ingredientes principales a ambos lados serán delineados en las secciones 2.2 y 2.3, complementados por el apéndice A. Si bien los argumentos expuestos en apoyo de la conjetura son puramente heurísticos, no existiendo en la literatura una demostración rigurosa de la misma, los chequeos y verificaciones que se presentan en la sección 2.4 la hacen esencialmente irrefutable en la práctica.

Existen diversas referencias que proporcionan una introducción pedagógica más detallada a este tema, entre las cuales se destacan [23–27]. En particular, [23] provee una bibliografía minuciosa con referencias a los trabajos originales en los que se desarrollaron los diversos avances en el área.

2.1. Motivación

La correspondencia AdS/CFT es una aplicación del principio holográfico [1, 2], la cual establece una dualidad entre teorías de campos conformes en D dimensiones y teorías gravitatorias formuladas en el espacio anti de Sitter en $D + 1$ dimensiones. La motivación principal para conjeturar la equivalencia de teorías aparentemente tan disímiles consiste en considerar a la gravedad como proveniente de la teoría de cuerdas¹, y analizar el límite de bajas energías de un arreglo de D-branas coincidentes,

¹Se refiere al lector al apéndice A para una breve reseña de los elementos fundamentales de la teoría de cuerdas.

[22]. Sin embargo, las mismas conclusiones pueden obtenerse mediante argumentos completamente distintos, [28].

Esquemáticamente, la acción de una teoría de cuerdas en presencia de D-branas superpuestas puede separarse en tres términos,

$$S = S_{\text{bulk}} + S_{\text{branas}} + S_{\text{int}}, \quad (2.1)$$

donde S_{bulk} corresponde a las cuerdas cerradas que se propagan en todo el espacio-tiempo, S_{branas} corresponde a las cuerdas abiertas cuyos extremos se hallan fijos a alguna de las D -branas, y S_{int} representa los términos de interacción entre ambos sectores. Las cuerdas cerradas tienen tanto modos masivos como no masivos, siendo estos últimos los que resultan en la supergravedad, a la que se acoplan los modos masivos.

En el límite de bajas energías, o límite de desacoplamiento de Maldacena, consideramos $\alpha' \rightarrow 0$ manteniendo el acoplamiento de las cuerdas g_s y demás parámetros adimensionales fijos. En este límite, los modos masivos de las cuerdas cerradas se desacoplan dejando solamente la supergravedad, a la vez que $S_{\text{int}} \rightarrow 0$ dado que los términos de interacción son proporcionales a $g_s \alpha'^2$. Como además la constante de Newton es proporcional a $g_s^2 \alpha'^4$, la supergravedad es de hecho libre y queda desacoplada de la teoría efectiva a bajas energías de las cuerdas abiertas.

Ahora bien, una descripción alternativa de las D-branas está dada por las p-branas o branas negras, soluciones clásicas de supergravedad que corresponden a agujeros negros extendidos, [29]. Cerca del horizonte de estas soluciones la geometría es aproximadamente AdS, y el factor de curvatura es tal que los modos masivos de las cuerdas cerradas permanecen relevantes incluso en el límite de bajas energías. Lejos del horizonte tenemos una vez más únicamente la supergravedad libre, que se desacopla de la dinámica del horizonte.

Comparando las dos descripciones dadas para el mismo sistema, e ignorando el factor común a ambos lados provisto por la supergravedad libre, podemos concluir que la teoría efectiva a bajas energías de las excitaciones de un arreglo de D-branas debe ser equivalente a la teoría de cuerdas original cuando tomamos el límite del horizonte cercano, es decir formulada en un espacio anti de Sitter. Por supuesto, esto no constituye una demostración rigurosa de la conjetura sino que es más bien un argumento heurístico. Sin embargo, las consecuencias de esta identificación son muchas y muy diversas, existiendo chequeos de precisión que las ponen a prueba con éxito y que se mencionan al final de este capítulo.

Hasta aquí, los razonamientos que realizamos han sido más bien genéricos, sin entrar en detalles respecto a la forma concreta en que podemos implementar cada uno de los pasos indicados. Las distintas realizaciones de la correspondencia AdS/CFT resultan de los diversos puntos de partida que podemos elegir, en términos de la teoría de cuerdas y el arreglo de D-branas considerado. En su versión prototípica, la conjetura relaciona la teoría de cuerdas supersimétricas tipo IIB formulada en un espacio de fondo con geometría $AdS_5 \times S^5$, con la teoría de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills con grupo de gauge $SU(N)$ formulada en $D = 4$ dimensiones.

Para motivarla como se delineó anteriormente, consideramos en la teoría de cuerdas supersimétricas tipo IIB, formulada en el espacio plano, un arreglo de N D3-branas coincidentes. Cada extremo de una cuerda fijo a estas D3-branas contribuye un factor N de Chan-Paton adicional al factor de acoplamiento g_s de las cuerdas, de modo que una descripción perturbativa será posible cuando $g_s N \ll 1$. La teoría efectiva a bajas energías de las excitaciones de estas D3-branas es una teoría de gauge en $D = 3 + 1$ dimensiones. Esta teoría tiene 16 supercargas dado que las D3-branas preservan la mitad de las 32 supersimetrías de la teoría [30], y su grupo de gauge es en principio $U(N)$. Dicho grupo se reduce a $SU(N)$ al remover un factor $U(1)$ correspondiente a la coordenada colectiva que representa el movimiento conjunto de todo el arreglo de D3-branas, de modo que la teoría efectiva resultante es $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills en $D = 4$ dimensiones y con grupo de gauge $SU(N)$. Esta teoría se describirá más en detalle en la sección 2.3.

Por otro lado, Polchinski mostró en [31] que existen soluciones de supergravedad clásica con p-branas que son fuente de los mismos flujos de R-R que las D-branas. La métrica de una 3-brana negra con N unidades de flujo es

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{H(r)}} \eta_{\nu\mu} dx^\mu dx^\nu + \sqrt{H(r)} \delta_{mn} dx^m dx^n, \quad (2.2)$$

donde la brana se extiende en las direcciones $\mu, \nu = 0, \dots, 3$ y es ortogonal a las direcciones $m, n = 4, \dots, 9$. La función armónica $H(r)$ es

$$H(r) = 1 + \frac{R^4}{r^4} \quad \text{con} \quad R^4 = 4\pi g_s N \alpha'^2 \quad \text{y} \quad r^2 = \delta_{mn} x^m x^n, \quad (2.3)$$

y si bien la métrica es singular en el límite $r \rightarrow 0$ está bien comportada en el horizonte cercano, $r \ll 1$. En esta región, la geometría es aproximadamente

$$ds^2 \simeq \frac{r^2}{R^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{R^2}{r^2} dr^2 + R^2 d\Omega_5^2, \quad (2.4)$$

donde $d\Omega_5^2$ es la métrica de S^5 . Como veremos en la siguiente sección, los dos primeros términos de la métrica anterior corresponden a AdS_5 , de manera que en el horizonte

cercano la solución de 3-brana negra (2.2) se reduce a $AdS_5 \times S^5$ con el radio de curvatura de ambos factores igual a R . Cabe resaltar que la descripción en términos de p-branas es válida cuando este radio de curvatura es grande en comparación con la longitud característica de las cuerdas, $l_s = \sqrt{\alpha'}$, es decir en el régimen $g_s N \gg 1$ complementario al perturbativo. También observamos que el factor de curvatura $g_{00} \sim r^2$ es responsable de que los modos masivos de las cuerdas cerradas sean relevantes en el límite $r \rightarrow 0$ para la teoría efectiva a bajas energías, mientras que se desacoplan para r finito [32, 33].

Suponiendo que las D-branas y las p-branas son de hecho dos descripciones distintas del mismo sistema físico, y que existe una continuación adiabática en g_s que nos permite pasar de una a otra, vemos que si dicha continuación conmuta con el límite de bajas energías podemos descartar el sector de la supergravedad libre presente en ambas descripciones. Concluimos entonces que las teorías efectivas en los regímenes $g_s N \ll 1$ y $g_s N \gg 1$ deben ser equivalentes. Para el primero tenemos una teoría de gauge conforme, mientras que para el segundo se trata de la teoría de cuerdas completa formulada en $AdS_5 \times S^5$, de modo que podemos escribir

$$\mathcal{N} = 4, SU(N) \text{ sYM en } D = 4 \quad \equiv \quad \text{teoría de cuerdas tipo IIB en } AdS_5 \times S^5 .$$

Llamamos a esta realización particular de la conjetura AdS_5/CFT_4 , para abreviar distinguiéndola al mismo tiempo de otras realizaciones posibles.

Si bien hay diversas objeciones que pueden realizarse a los argumentos expuestos hasta aquí para motivar la conjetura AdS/CFT, ya sea en general o para la versión prototípica que nos ocupa en este trabajo, existe un gran número de chequeos de precisión que corroboran la validez de la dualidad para observables específicos. Algunas de estas verificaciones directas se mencionarán en la sección final de este capítulo, pero basta decir por ahora que su número y diversidad es tal que tornan improbables incluso las interpretaciones débiles en las que la dualidad solamente vale para ciertos estados o en un límite específico del espacio de parámetros. La interpretación más natural de la evidencia acumulada hasta ahora es por lo tanto que la equivalencia de ambas teorías es exacta, al menos en la medida en que se dispone de una construcción explícita del lado de la teoría de campos, y de aproximaciones controladas del lado de la teoría de cuerdas.

2.2. Espacio anti de Sitter

El espacio anti de Sitter es un espacio hiperbólico pseudo-Riemanniano de curvatura negativa constante. Es por lo tanto el equivalente con signatura lorentziana del

espacio hiperbólico de Lobachevsky cuando la signatura es euclídea (el espacio de de Sitter es el equivalente con signatura lorentziana del espacio esférico con signatura euclídea, teniendo ambos curvatura constante y positiva).

Es conveniente representar el espacio AdS en D dimensiones, al que denominaremos AdS_D , como una superficie hiperbólica embebida en el espacio plano de $D + 1$ dimensiones con signatura $(D - 1, 2)$, cuya métrica es

$$ds^2 = -dX_0^2 + dX_1^2 + \cdots + dX_{D-1}^2 - dX_D^2. \quad (2.5)$$

El espacio AdS_D queda definido entonces por el hiperboloide

$$-X_0^2 + X_1^2 + \cdots + X_{D-1}^2 - X_D^2 = -R^2, \quad (2.6)$$

siendo R conocido como el radio de anti de Sitter. La condición anterior puede satisfacerse tomando

$$\begin{aligned} X_0 &= R \cosh \rho \cos \tau, \\ X_i &= R \sinh \rho \Theta_i \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, D - 1, \\ X_D &= R \cosh \rho \sin \tau, \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde Θ_i es una parametrización de S^{D-2} , es decir que satisface $\sum_{i=1}^{D-1} \Theta_i^2 = 1$. La métrica inducida sobre AdS_D por esta parametrización es

$$ds^2 = R^2 \left(-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{D-2}^2 \right), \quad (2.8)$$

y si bien en (2.7) se tiene en principio la identificación de los puntos $\tau \sim \tau + 2\pi$, vamos a considerar el cubrimiento universal del hiperboloide que se obtiene al descompactificar la coordenada temporal tomando $-\infty < \tau < \infty$. De este modo, la topología del espacio pasa de ser $S^1 \times \mathbb{R}^{D-1}$ a $\mathbb{R}^{1,D-1}$, y el espacio AdS_D puede representarse como un cilindro. En efecto, realizando el cambio de variables $\rho \mapsto \tilde{\rho}$ dado por la relación $\tan(\tilde{\rho}/2) = \tanh(\rho/2)$ con $\tilde{\rho} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la métrica de AdS_D es a menos de un factor conforme

$$ds^2 \propto -d\tau^2 + d\tilde{\rho}^2 + \sin^2 \tilde{\rho} d\Omega_{D-2}^2. \quad (2.9)$$

La representamos entonces con un cilindro en el que la dirección vertical corresponde a τ , la dirección radial corresponde a $\tilde{\rho}$, y los círculos con $\tilde{\rho}$ y τ fijos representan esferas $D - 2$ dimensionales con radio $\sin \tilde{\rho}$.

Las coordenadas (τ, ρ, Θ_i) se conocen como coordenadas globales, y cubren todo el hiperboloide de AdS_D una vez tomando $\rho > 0$. Un conjunto alternativo de coordenadas, conocido como coordenadas de Poincaré, viene dado por la parametrización

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{2u} (1 + u^2 (-t^2 + \vec{x}^2 + R^2)) , \\ X_i &= R u x_i \quad \text{para } i = 1, \dots, D-2 , \\ X_{D-1} &= \frac{1}{2u} (1 + u^2 (-t^2 + \vec{x}^2 - R^2)) , \\ X_D &= R u t , \end{aligned} \tag{2.10}$$

con $u > 0$ y $(t, \vec{x}) \in \mathbb{R}^{1, D-2}$. La métrica inducida en AdS_D es en este caso²

$$ds^2 = R^2 \left(\frac{du^2}{u^2} + u^2 (-t^2 + \vec{x}^2) \right) , \tag{2.11}$$

pero las coordenadas (u, t, \vec{x}) cubren sólo la mitad del hiperboloide. Una forma alternativa de las coordenadas de Poincaré corresponde al cambio de variables $z = 1/u$, mediante el cual la métrica toma la forma conformemente plana

$$ds^2 = R^2 \frac{dz^2 - t^2 + \vec{x}^2}{z^2} . \tag{2.12}$$

Como la métrica de AdS_D es estática en la coordenada temporal, para las aplicaciones de teoría cuántica de campos suele ser conveniente realizar una rotación de Wick dada por $\tau = i\tau_E$ en coordenadas globales o $t = it_E$ en coordenadas de Poincaré. El espacio obtenido de este modo se conoce como espacio de anti de Sitter euclídeo, o $EAdS_D$, y la métrica resultante es en las distintas coordenadas

$$ds_E^2 = R^2 (\cosh^2 \rho d\tau_E^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{D-2}^2) , \tag{2.13}$$

$$= R^2 \left(\frac{du^2}{u^2} + u^2 (t_E^2 + \vec{x}^2) \right) , \tag{2.14}$$

$$= R^2 \frac{dz^2 + t_E^2 + \vec{x}^2}{z^2} . \tag{2.15}$$

Observamos que si bien las coordenadas de Poincaré no cubren todo el espacio cuando la signatura es lorentziana, sí lo hacen cuando pasamos a signatura euclídea.

Por construcción, el espacio AdS_D tiene el grupo de isometrías $SO(D-1, 2)$, que consiste en las pseudo-rotaciones del espacio plano $D+1$ dimensional y que dejan

²Como ya se anticipó, observamos que los dos primeros términos de la métrica del horizonte cercano (2.4) corresponden a las coordenadas de Poincaré en AdS_5 definiendo $r = R^2 u$ e identificando el radio de curvatura R .

invariante la condición (2.6). Su dimensión es $D(D+1)/2$, de modo que se trata de un espacio maximalmente simétrico cuyo tensor de Riemann toma por lo tanto la forma

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\mathcal{R}}{D(D-1)}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}), \quad (2.16)$$

con $g_{\mu\nu}$ la métrica de AdS_D y \mathcal{R} el escalar de curvatura. El tensor de Ricci y la curvatura escalar son

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} = \frac{\mathcal{R}}{D}g_{\mu\nu} \quad \text{y} \quad \mathcal{R} = -\frac{D(D-1)}{R^2}, \quad (2.17)$$

de modo que el espacio AdS_D es solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío con constante cosmológica,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{con} \quad \Lambda = -\frac{(D-1)(D-2)}{2R^2}. \quad (2.18)$$

El subgrupo compacto maximal de $SO(D-1, 2)$ es $SO(2) \times SO(D-1)$, de manera que las coordenadas globales evidencian que el factor $SO(D-1)$ corresponde a las rotaciones en S^{D-2} , mientras que el factor $SO(2)$ da lugar a las traslaciones temporales. En cambio, las coordenadas de Poincaré hacen explícito el subgrupo de Poincaré $ISO(D-2, 1) \subset SO(D-1, 2)$.

2.2.1. Estructura causal

Para estudiar la estructura causal del espacio AdS, es conveniente en las coordenadas globales (2.8) definir una coordenada θ a partir de $\tan \theta = \sinh \rho$, de manera que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ para $\rho > 0$. La métrica de AdS_D toma entonces la forma

$$ds^2 = \frac{R^2}{\cos^2 \theta} (-d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_{D-2}^2) \propto -d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_{D-2}^2, \quad (2.19)$$

donde en la expresión a la derecha hicimos explícito el hecho de que los factores globales no afectan a la estructura causal del espacio-tiempo. Es conveniente comparar esto con el caso del espacio de Minkowski en D dimensiones, que en coordenadas esféricas toma la forma

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2. \quad (2.20)$$

Pasando a las coordenadas del cono de luz $u_{\pm} = t \pm r$ y definiendo luego τ y θ a partir de $u_{\pm} = \tan \frac{\tau \pm \theta}{2}$, tenemos

$$\begin{aligned} ds^2 &= -du_+ du_- + \frac{1}{4}(u_+ - u_-)^2 d\Omega_{D-2}^2, \\ &= \frac{-d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_{D-2}^2}{(\cos \theta - \cos \tau)^2}, \\ &\propto -d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_{D-2}^2, \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde además de la condición $|\frac{\tau+\theta}{2}| < \frac{\pi}{2}$ impuesta por el cambio de variables, tenemos la restricción adicional $\theta > 0$ para que $r > 0$. El triángulo definido en el plano (θ, τ) por estas condiciones se muestra en la figura 2.1, y puede ser continuado analíticamente para $0 < \theta < \pi$ y $\tau \in \mathbb{R}$. De este modo vemos que la compactificación conforme del espacio AdS_D es la mitad del espacio de Minkowski D -dimensional, y tiene un borde en $\theta = \pi/2$ que corresponde a $\rho \rightarrow \infty$ en coordenadas globales. Este tiene la topología de $\mathbb{R} \times S^{D-2}$, y como se extiende en la dirección temporal debemos imponer una condición de borde adecuada para que el problema de Cauchy en AdS_D esté bien formulado.

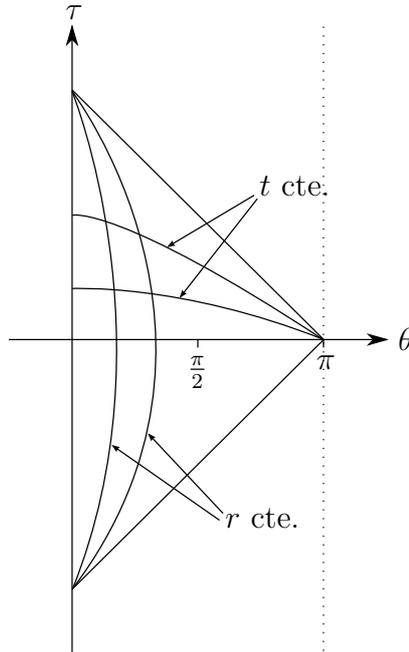


Figura 2.1: Compactificación conforme del espacio plano de Minkowski, donde cada punto en la banda $0 < \theta < \pi$ corresponde a una esfera S^{D-2} . El espacio AdS_D puede ser compactificado conformemente en la banda $0 < \theta < \pi/2$.

En las coordenadas de Poincaré (2.12) es claro que el borde está ubicado en $z \rightarrow 0$, teniendo el espacio allí la topología del espacio plano de Minkowski. La distinción entre la topología del borde de AdS en unas y otras coordenadas será importante en el contexto de la conjetura AdS/CFT, ya que las teorías conformes pueden formularse tanto en el espacio plano como en espacios cilíndricos. Entonces, para las aplicaciones de la dualidad la elección de las coordenadas en AdS deberá ser la adecuada para que su borde tenga la topología del espacio en el que se define la teoría conforme correspondiente.

2.3. $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills

La teoría de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills en $D = 4$ dimensiones fue considerada originalmente por Brink, Scherk y Schwarz en [34]. Su acción puede obtenerse por reducción dimensional de la acción para la teoría de $\mathcal{N} = 1$ super Yang-Mills 10-dimensional, que tiene la forma sencilla

$$S_{\mathcal{N}=1} = \int d^{10}x \text{Tr} \left\{ -\frac{1}{2} F_{MN} F^{MN} + i \bar{\Psi} \Gamma^M D_M \Psi \right\}, \quad (2.22)$$

donde $M, N = 0, 1, \dots, 9$ son índices de Lorentz del espacio de Minkowski en 10 dimensiones y Γ^M son las matrices gamma de dicho espacio. Tanto el campo vectorial $A_M = A_M^a T^a$ como el espinorial $\Psi = \Psi^a T^a$ se encuentran en la representación adjunta del grupo de gauge G , cuyos generadores son T^a para $a = 1, \dots, |G|$, y a lo largo de este trabajo vamos a considerar siempre $G = SU(N)$ ó $G = U(N)$. El espinor Ψ es de Majorana-Weyl, de modo que en 10 dimensiones tiene 16 componentes reales, 8 de las cuales son independientes on-shell. Esto se corresponde con los $10 - 2 = 8$ grados de libertad bosónicos que tiene el campo vectorial on-shell. Finalmente, el tensor de intensidad de campo F_{MN} y la derivada covariante D_M se definen como es usual,

$$F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M + g_{10} [A_M, A_N] \quad \text{y} \quad D_M = \partial_M + g_{10} A_M, \quad (2.23)$$

donde introdujimos la constante de acoplamiento 10-dimensional g_{10} .

Para efectuar la reducción dimensional imponemos que los campos no dependen de las 6 dimensiones identificadas por $M = 4, \dots, 9$, e integramos en estas direcciones en la acción. Podemos redefinir los campos con un factor $1/g_{10}$ y absorber el resultado de la integración en una nueva constante de acoplamiento g_{YM} que aparece únicamente como coeficiente global de la acción. El campo de gauge se descompone según $A_M = (A_\mu, \Phi_I)$, siendo $\mu = 0, \dots, 3$ y $I = 1, \dots, 6$, es decir en un campo vectorial 4-dimensional y seis campos escalares. Identificando la representación espinorial de Weyl de $SO(6)$ con la representación fundamental de $SU(4)$, el espinor Ψ se descompone en cuatro espinores 4-dimensionales λ^i con $i = 1, \dots, 4$. Para escribir la acción, es conveniente transformar el índice $I = 1, \dots, 6$ de $SO(6)$ en un par de índices anti-simétricos en la representación bifundamental de $SU(4)$, de modo que los coeficientes de Clebsch-Gordan correspondientes mapean a los campos escalares según $\Phi_I \mapsto \Phi_{ij}$. Los campos Φ_{ij} son complejos pero satisfacen una condición de realidad,

$$\Phi_{ij}^\dagger = \Phi^{ij} \quad \text{con} \quad \Phi^{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijkl} \Phi_{ij}. \quad (2.24)$$

Al realizar este procedimiento, la acción de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills puede escribirse como

$$S_{\mathcal{N}=4} = \frac{-1}{g_{\text{YM}}^2} \int d^4x \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\lambda}_i \gamma^\mu D_\mu \lambda^i + D_\mu \Phi_{ij} D^\mu \Phi^{ij} + 2\lambda^i [\Phi_{ij}, \lambda^j] - \frac{1}{2} [\Phi_{ij}, \Phi_{kl}] [\Phi^{ij}, \Phi^{kl}] \right\}. \quad (2.25)$$

Alternativamente, podemos recombinar los espinores 4-dimensionales y escribir la acción en la forma abreviada³

$$S_{\mathcal{N}=4} = \frac{-1}{g_{\text{YM}}^2} \int d^4x \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\Psi} \Gamma^\mu D_\mu \Psi + (D_\mu \Phi_I)^2 + \bar{\Psi} \Gamma^I [\Phi_I, \Psi] - \frac{1}{2} [\Phi_I, \Phi_J]^2 \right\}. \quad (2.26)$$

La acción 10-dimensional (2.22) tiene la supersimetría

$$\delta A_M = \bar{\epsilon} \Gamma_M \Psi \quad \text{y} \quad \delta \Psi = -\frac{1}{2} \Gamma^{MN} F_{MN} \epsilon, \quad (2.27)$$

donde ϵ es un espinor de Majorana-Weyl en 10 dimensiones. Podemos aplicar la reducción dimensional sobre estas expresiones para obtener las transformaciones de supersimetría en 4 dimensiones, que dependerán de cuatro espinores ϵ^i dando así $\mathcal{N} = 4$ como esperábamos.

La teoría de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills es conforme, como se conjeturó originalmente en [35] y se demostró luego en [36]. Esto significa que la invariancia conforme clásica de la teoría se mantiene a nivel cuántico. En efecto, la función β para una teoría de campos de gauge en la representación adjunta de $SU(N)$ es a 1-loop [37]

$$\beta(g_{\text{YM}}) = \mu \frac{\partial g_{\text{YM}}}{\partial \mu} = \frac{g_{\text{YM}}^2 N}{16\pi^2} \left(\frac{11}{3} - \frac{1}{6} N_b - \frac{1}{3} N_f \right), \quad (2.28)$$

donde N_b y N_f son el número de escalares reales y de fermiones de Weyl de la teoría, respectivamente. Por lo tanto, con $N_b = 6$ y $N_f = 2 \times 4$ la función β de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills se anula a 1-loop, y de hecho también se anula a todo orden [38–40].

El grupo conforme en 4 dimensiones es $SO(2,4) \simeq SU(2,2)$, y la simetría R está dada por la simetría remanente de la reducción dimensional, $SO(6) \sim SU(4)$. Esto significa que $SU(2,2) \times SU(4)$ es la parte bosónica del grupo de simetrías de la teoría, que al incluir las supersimetrías resulta ser $PSU(2,2|4)$. Hay 15 generadores del álgebra conforme, 10 de los cuales son generadores del álgebra de Poincaré en 4 dimensiones (P_μ para las cuatro traslaciones espacio-temporales, $M_{\mu\nu}$ para las seis

³Las matrices de Dirac 4-dimensionales γ^μ se relacionan con las 10-dimensionales Γ^M mediante la descomposición $\Gamma^M = (\gamma^\mu \otimes \mathbf{1}, \gamma^5 \otimes \tilde{\gamma}^I)$, donde $\tilde{\gamma}^I$ son las matrices de Dirac 6-dimensionales.

transformaciones de Lorentz). Los cinco generadores restantes corresponden a las transformaciones conformes especiales y a las dilataciones (K_μ y D , respectivamente). Sus relaciones de conmutación son [41]

$$\begin{aligned}
[D, P_\mu] &= -iP_\mu \quad , \quad [D, M_{\mu\nu}] = 0 \quad , \quad [D, K_\mu] = iK_\mu \quad , \\
[M_{\mu\nu}, P_\rho] &= i\eta_{\rho\nu}P_\mu - \eta_{\mu\rho}P_\nu \quad , \quad [M_{\mu\nu}, K_\rho] = i\eta_{\rho\nu}K_\mu - i\eta_{\mu\rho}K_\nu \quad , \\
[P_\mu, K_\mu] &= 2i(M_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}D) \quad .
\end{aligned}
\tag{2.29}$$

2.4. El diccionario y sus verificaciones

Una vez motivada la conjetura AdS/CFT, es necesario hacer más explícita la relación que propone entre sus dos lados para que realmente tenga una utilidad práctica. Nos concentramos entonces en la versión prototípica que hemos discutido más detalladamente hasta aquí, y nos abocamos al desarrollo de un diccionario que identifique las cantidades físicas relevantes de ambas teorías.

Comenzamos por la identificación de las simetrías a uno y otro lado de la correspondencia, lo cual constituye un control de consistencia básico sobre la viabilidad de la propuesta. Como se vio en la sección 2.2 el espacio AdS_5 tiene el grupo de isometrías $SO(4, 2)$, que es el mismo que el grupo conforme en $D = 3 + 1$ dimensiones. A su vez, la simetría $SO(6)$ del factor S^5 tiene correlato en la simetría R de la teoría de campos, que actúa aplicando una rotación en el espacio interno de los seis campos escalares de la teoría, $SU(4)_R \sim SO(6)$. Finalmente, podemos identificar también las simetrías fermiónicas a ambos lados, de modo que coincide de hecho el grupo completo de supersimetrías $PSU(2, 2|4)$.

Pasando ahora a los parámetros libres, los argumentos expuestos en la sección 2.1 sugieren identificar el rango N del grupo de gauge $SU(N)$ de la teoría conforme con el flujo de la 5-forma de R-R en la esfera S^5 , cuya fuente es el conjunto de D-branas superpuestas del lado de la teoría de cuerdas,

$$\int_{S^5} F_5 \equiv N \quad .
\tag{2.30}$$

Del mismo modo, dado que la teoría de campos surge como la teoría efectiva a bajas energías de las excitaciones de las D-branas en la teoría de cuerdas, debe existir una relación entre el acoplamiento g_{YM} de la teoría conforme y el acoplamiento g_s de las cuerdas. Ahora bien, las excitaciones de las D-branas son cuerdas abiertas cuyos extremos se hallan fijos a ellas. En este caso, las cuerdas son no masivas porque tienen longitud nula, no habiendo separación física entre las branas superpuestas,

y llevan dos índices en la representación fundamental de $U(N)$ que identifican las D-branas a las que están fijos sus extremos. Son entonces campos no masivos en la representación adjunta de $U(N)$, es decir que corresponden al campo de gauge A_μ de la teoría efectiva. El acoplamiento del campo de gauge es precisamente g_{YM} , mientras que el acoplamiento de las cuerdas abiertas es $\sim \sqrt{g_s}$ dado que dos extremos de una cuerda abierta pueden unirse para formar una cuerda cerrada. Un cálculo preciso resultará luego en la identificación [14]

$$g_{\text{YM}}^2 \equiv 4\pi g_s. \quad (2.31)$$

La teoría de cuerdas tiene además un parámetro dimensional $l_s = \sqrt{\alpha'}$, que es la longitud característica de la cuerda y no es físico en la medida en la que no se lo compare con alguna otra escala. La ecuación (2.3) introduce entonces una relación entre el radio de AdS y la combinación de parámetros

$$\frac{R^4}{l_s^4} = 4\pi g_s N \equiv g_{\text{YM}}^2 N = \lambda, \quad (2.32)$$

donde introdujimos el acoplamiento de 't Hooft λ , que es un parámetro natural a considerar para las expansiones perturbativas a ambos lados de la conjetura. Por un lado, si bien en $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills podríamos esperar en principio que el desarrollo perturbativo sea simplemente en potencias de la constante de acoplamiento g_{YM}^2 , 't Hooft mostró en [42] que para una teoría de gauge con campos en la representación adjunta los parámetros físicos relevantes son de hecho el acoplamiento efectivo λ y $1/N$. Por otro lado, la aproximación de supergravedad clásica es válida en teoría de cuerdas cuando la curvatura del espacio es mucho mayor que la longitud característica de las cuerdas, es decir si $\lambda^{1/4} = R/l_s \gg 1$. Como además debemos evitar las correcciones debidas a cuerdas cuánticas requerimos $g_s \rightarrow 0$, de manera que debemos tomar $N \rightarrow \infty$ para poder mantener el acoplamiento de 't Hooft fijo en algún valor muy grande.

Podemos ahora expresar en forma más precisa un aspecto cualitativo de la correspondencia AdS/CFT que es de suma importancia, y que se conoce como su carácter fuerte/débil. Este la transforma en una dualidad propiamente dicha, en el sentido de que relaciona teorías en regímenes complementarios: cuando la teoría de campos está débilmente acoplada $\lambda \ll 1$ y la teoría de cuerdas es puramente cuántica, mientras que cuando esta última es esencialmente clásica $\lambda \gg 1$ y la teoría de campos se halla fuertemente acoplada.

Esta propiedad de la conjetura la hace a la vez muy potente y difícil de corroborar o demostrar. El poder emana de la posibilidad de realizar cálculos accediendo

a regímenes de ambas teorías que son imposibles de explorar con las herramientas tradicionales. La dificultad para corroborar en forma directa los resultados obtenidos es inherente a su carácter no perturbativo, y limita fuertemente las posibilidades de interpretarlos o dilucidar su origen. Es posible realizar verificaciones de la dualidad analizando magnitudes cuya dependencia en el acoplamiento está por algún motivo restringida, como es por ejemplo el caso de las funciones de tres puntos que son BPS, [43]. Sin embargo, es de todos modos muy importante el desarrollo de herramientas no perturbativas que nos permitan realizar chequeos de precisión considerando observables con una dependencia no trivial en el acoplamiento. Este trabajo tiene como objetivo presentar resultados exactos que nos permiten interpolar continuamente entre ambos lados de la dualidad. Algunos de ellos se basan en la identificación de estructuras integrables [18, 19], como se verá en los capítulos 5 y 6, mientras que los otros resultan de la consideración de límites paramétricos muy particulares [20, 21], sobre los que ahondaremos en el capítulo 4.

Continuamos la formulación del diccionario analizando la relación entre los observables a los dos lados de la correspondencia. En una teoría conforme como $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills, no existen estados asintóticos debido a que un estado con partículas alejadas entre sí puede relacionarse mediante una transformación conforme con otro en el que las partículas se encuentran muy cerca unas de otras. Por lo tanto, no es posible definir una matriz S de forma consistente y debemos concentrar nuestra atención sobre los operadores y sus funciones de correlación.

Consideremos por ejemplo la deformación de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills dada por un operador marginal \hat{O} que modifica el valor de la constante de acoplamiento g_{YM} . Como vimos, esto debe corresponder a una modificación del acoplamiento g_s de la teoría de cuerdas, que es fijado por el valor de expectación del dilatón. Este es a su vez determinado por la condición impuesta para el campo ϕ del dilatón en el borde de AdS_5 , es decir por $\phi_0(t, \vec{x}) = \phi(t, \vec{x}, z)|_{z=0}$ en coordenadas de Poincaré, de modo que podemos esquemáticamente asociar al operador \hat{O} con la condición de borde ϕ_0 .

Para calcular funciones de correlación del operador \hat{O} en la teoría conforme podemos incorporar a la acción una corriente acoplada al mismo, para definir así la funcional generatriz

$$Z_{\text{CFT}}[j(x)] = \left\langle \exp \left\{ \int d^4x j(x) \hat{O}(x) \right\} \right\rangle_{\mathcal{N}=4 \text{ sYM}} . \quad (2.33)$$

En la definición anterior $j(x)$ es una función arbitraria, y las funciones de correlación de \hat{O} se calculan entonces tomando derivadas funcionales de Z_{CFT} respecto a la corriente, fijando luego $j(x) = 0$.

Del lado de la teoría de cuerdas, la condición de borde para el campo del dilatón aparece en otra funcional generatriz, a saber la función de partición de la teoría. Resulta entonces natural realizar la identificación $j \equiv \phi_0$, donde observamos que ambas son cantidades 4-dimensionales: una tiene soporte en todo el espacio-tiempo de la teoría conforme, mientras que la otra tiene soporte en el borde de AdS_5 . Vemos entonces que la conjetura AdS_5/CFT_4 puede expresarse en la forma [44, 45],

$$Z_{\text{CFT}}[\phi_0(x)] \equiv Z_{\text{IIB}} \left[\phi(x, z) \Big|_{z=0} = \phi_0(x) \right], \quad (2.34)$$

donde Z_{IIB} es la función de partición de la teoría de cuerdas supersimétrica tipo IIB formulada en el espacio $AdS_5 \times S^5$.

Debemos hacer hincapié en una salvedad en la expresión (2.34), que tiene que ver con el comportamiento asintótico de los campos en la teoría de cuerdas y se ve más claramente cuando trabajamos con signatura euclídea. Notamos que la ecuación de ondas de un campo masivo en $EAdS_{D+1}$ con masa m tiene dos soluciones independientes, caracterizadas por su comportamiento cerca del horizonte. Definiendo⁴

$$\Delta = \frac{D}{2} + \sqrt{\frac{D^2}{4} + R^2 m^2}, \quad (2.35)$$

las dos soluciones se comportan como $z^{D-\Delta}$ y z^Δ cuando $z \rightarrow 0$. Para tener un campo finito en el interior de la geometría, la elección consistente resulta de tomar la solución que se comporta como $z^{D-\Delta}$, es decir que es divergente en el horizonte. Por lo tanto, debemos introducir un cutoff en la posición $z = \epsilon$ para imponer allí la condición de borde

$$\phi(x, z)|_{z=\epsilon} = \epsilon^{D-\Delta} \phi_0(x), \quad (2.36)$$

analizando finalmente el límite $\epsilon \rightarrow 0$ con cuidado. Este tipo de procedimiento estará implícito siempre que consideremos (2.34) o expresiones equivalentes. En cualquier caso, como ϕ es adimensional esto significa que ϕ_0 tiene dimensionalidad $\Delta - D$, de modo que la identificación $j \equiv \phi_0$ en (2.33) implica que el operador dual \hat{O} tiene dimensión conforme Δ .

⁴Para campos escalares, la condición de normalizabilidad en el infinito, equivalente a requerir la estabilidad de los campos correspondientes, implica la cota de Breitenlohner-Freedman [46, 47] para la masa m dada por la condición de realidad de Δ , esto es $m^2 R^2 \geq -D^2/4$.

La ecuación (2.34) es el principal resultado presentado en este capítulo, en la medida en que pone en términos precisos y contrastables la realización de la correspondencia AdS/CFT que estamos discutiendo. Identificaciones enteramente similares deben existir para los otros campos de la teoría de cuerdas, incluyendo los no escalares como los campos fermiónicos y tensoriales, correspondiéndole a cada uno de ellos algún operador de la teoría conforme. Una expresión similar a (2.34) para los lazos de Wilson, observables no locales de la teoría conforme, será considerada en el capítulo que sigue y proporcionará una herramienta para poner a prueba los resultados originales a ser elaborados a lo largo de todo este trabajo. Dado que en todos los casos la información sobre los operadores duales se encuentra en las condiciones de borde de los campos en AdS, podemos decir que la teoría de campos “vive” en el borde de AdS, aunque debemos recordar siempre que la información sobre la teoría está de hecho en las interacciones de la teoría de cuerdas, que ocurren en el interior de la geometría.

Como ya mencionamos, podemos utilizar este tipo de relaciones para calcular cantidades físicas en una u otra teoría cuando se encuentran en un régimen no perturbativo. En particular, para calcular valores de expectación de la teoría conforme fuertemente acoplada debemos considerar el límite de supergravedad de la teoría de cuerdas. Ya vimos que una condición necesaria para poder hacerlo es que el radio de curvatura de AdS sea muy grande en unidades de la longitud de las cuerdas, y esto implica $\lambda \gg 1$. En este caso, tendremos esquemáticamente cuando la signatura es euclídea

$$Z_{\text{CFT}} \equiv e^{-S_{\text{SUGRA}}} , \quad (2.37)$$

donde S_{SUGRA} es la acción de la supergravedad tipo IIB evaluada on-shell, es decir cuando los campos son solución de las ecuaciones de movimiento clásicas con las condiciones de borde provistas por la correspondencia. Como en la teoría de gauge los parámetros de la expansión perturbativa son de hecho el acoplamiento efectivo λ y $1/N$, (2.37) nos permite entonces acceder a la teoría de gauge fuertemente acoplada en el límite planar $N \rightarrow \infty$. En este límite, los diagramas no planares se hallan suprimidos por potencias de $1/N^2$, de modo que representan correcciones que pueden realizarse orden a orden en la expansión perturbativa en λ .

Concluimos este capítulo mencionando dos de las verificaciones directas más importantes de la identificación (2.34) realizadas hasta ahora.

Por un lado, podemos considerar el espectro de operadores de la teoría conforme para intentar hallar el mapeo que identifica los campos duales en AdS. Para que la conjetura tenga sentido, la identificación debe ser unívoca y completa, al menos hasta

donde es posible describir ambos espectros en detalle. Por las razones ya expuestas, realizarla es inviable para los operadores cuya dependencia en λ es complicada, pero debería ser posible para los operadores “protegidos” de las correcciones cuánticas en λ por la supersimetría.

Los operadores de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills son combinaciones invariantes de gauge de los campos de la teoría. Por propiedades de la representación adjunta del grupo de gauge $SU(N)$, para definir operadores locales podemos únicamente tomar trazas o productos de trazas de los campos evaluados todos en un mismo punto. Como existen argumentos totalmente generales para mostrar que los valores de expectación de operadores con productos de dos o más trazas están suprimidos por potencias de $1/N$ respecto a los de operadores con una traza simple, en el límite planar $N \rightarrow \infty$ nos concentramos únicamente en estos últimos.

Podemos distinguir además entre los operadores primarios, que son aniquilados por los generadores K_μ del grupo superconforme, y los descendientes que se obtienen al actuar con los generadores P_μ sobre los operadores primarios, ver el álgebra (2.3). Algunos de los operadores primarios se encuentran en representaciones cortas del grupo superconforme, y a estos se los conoce como operadores primarios quirales. No existe una construcción sistemática de operadores primarios quirales en $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills, pero se sabe que basta considerar solamente combinaciones lineales de trazas de campos escalares.

Si bien no sabemos construir el espectro completo de la teoría de cuerdas supersimétrica tipo IIB en $AdS_5 \times S^5$, podemos considerar el espectro de estados resultante de realizar la reducción dimensional de la supergravedad tipo IIB, [48]. Organizándolo en representaciones del grupo superconforme [49], observamos un acuerdo perfecto entre las masas del espectro resultante y las dimensiones de escala de los operadores quirales primarios de la teoría conforme, al menos hasta la escala de masas hasta la que se puede confiar en la reducción dimensional de la supergravedad. Esta es fijada por la escala de las cuerdas, y el hecho de que no se encuentren en el espectro más estados hasta dicha escala sugiere que aquellos estados que no corresponden a operadores primarios quirales tienen dimensiones que crecen como $\lambda^{1/4}$ cuando $\lambda \gg 1$. Esto no tiene una explicación satisfactoria en la teoría de campos, sino que puede considerarse una predicción de la dualidad.

Por otro lado, podemos analizar las anomalías que surgen del rompimiento de la invariancia de escala o de la simetría R de la teoría conforme por efectos cuánticos, cuando se acopla la teoría a campos externos. Estas pueden calcularse exactamente por medio de diagramas 1-loop porque no reciben correcciones cuánticas de orden

superior, de modo que el resultado puede contrastarse con el obtenido en la teoría de cuerdas en el régimen de acoplamiento fuerte. Esto fue realizado para la anomalía de Adler-Bell-Jackiw [50] y la anomalía de Weyl [51], encontrando en ambos casos un acuerdo perfecto entre ambos lados de la correspondencia.

Capítulo 3

Lazos de Wilson

En este capítulo introducimos el lazo o *loop* de Wilson, un objeto de especial importancia en toda teoría de gauge. De una u otra forma, los loops de Wilson estarán presentes en todos los resultados originales a presentarse [18–21], de modo que constituyen un eje central de este trabajo. Su relación con diversos observables físicos de la teoría se discute en la sección (3.2), primero para teorías de gauge en general y luego para teorías conformes como $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills. En la sección 3.3 desarrollamos el punto de vista dual en términos de la correspondencia AdS/CFT, lo cual nos permitirá concluir este capítulo discutiendo dos ejemplos ilustrativos correspondientes a los loops de Wilson circular y recto.

3.1. Lazos de Wilson en teorías de gauge

En una teoría de gauge abeliana como el electromagnetismo, el loop de Wilson para un contorno cerrado \mathcal{C} está definido por

$$W[\mathcal{C}] = \exp \left\{ i \oint_{\mathcal{C}} A_{\mu} dx^{\mu} \right\}, \quad (3.1)$$

donde A_{μ} es el campo de gauge que transforma según $A_{\mu}(x) \mapsto A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\alpha(x)$ cuando los campos de materia transforman según $\psi(x) \mapsto e^{i\alpha(x)}\psi(x)$. Podemos ver que $W[\mathcal{C}]$ es invariante de gauge usando el teorema de Stokes para escribir

$$W[\mathcal{C}] = \exp \left\{ \frac{i}{2} \oint_{\Sigma_{\mathcal{C}}} F_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} \right\}, \quad (3.2)$$

donde $\Sigma_{\mathcal{C}}$ es la superficie delimitada por el contorno \mathcal{C} , $d\sigma^{\mu\nu}$ es un elemento de área en dicha superficie, y $F_{\mu\nu}$ es el tensor de intensidad de campo definido por

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}, \quad (3.3)$$

que es evidentemente invariante de gauge. La importancia del loop de Wilson radica en gran medida en que cualquier otra función del campo vectorial A_μ que sea invariante de gauge puede ser escrita como una combinación de lazos para diversas elecciones del contorno \mathcal{C} . En otras palabras, los lazos de Wilson proveen una base completa para los invariantes de gauge de la teoría.

Para adaptar el concepto de loop de Wilson a teorías de gauge no abelianas, es conveniente generalizar ligeramente (3.1) considerando curvas abiertas $\mathcal{C}(x, y)$ que representan caminos del punto x al punto y . La línea de Wilson definida por

$$W[\mathcal{C}(x, y)] = \exp \left\{ i \int_{\mathcal{C}(x, y)} A_\mu dx'^\mu \right\}, \quad (3.4)$$

no es invariante de gauge sino que transforma según

$$W[\mathcal{C}(x, y)] \mapsto e^{i\alpha(y)} W[\mathcal{C}(x, y)] e^{-i\alpha(x)}, \quad (3.5)$$

como puede verse inmediatamente insertando en la definición la transformación del campo vectorial. Por esta razón, también se la conoce como *comparador*, ya que define un transporte paralelo para los campos de materia tal que su transformación de gauge es llevada del punto x al punto y ,

$$W[\mathcal{C}(x, y)]\psi(x) \mapsto e^{i\alpha(y)} W[\mathcal{C}(x, y)]\psi(x). \quad (3.6)$$

En una teoría de gauge no abeliana hay tantos campos de gauge como generadores tenga el grupo de simetría G de la teoría. De este modo, $A_\mu = A_\mu^a T^a$ para $a = 1, \dots, |G|$, siendo T^a los generadores del grupo. Los campos de materia transforman según $\psi(x) \mapsto U(x)\psi(x)$, donde $U(x) = e^{i\alpha^a(x)T^a}$ es un elemento de G , que suponemos unitario, $U(x)U(x)^\dagger = 1$. La transformación del campo de gauge es

$$A_\mu(x) \mapsto U(x)A_\mu(x)U(x)^\dagger + iU(x)\partial_\mu U(x)^\dagger, \quad (3.7)$$

mientras que el tensor de intensidad de campo es

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \quad (3.8)$$

y transforma según $F_{\mu\nu}(x) \mapsto U(x)F_{\mu\nu}(x)U(x)^\dagger$.

Ahora bien, una expresión como (3.4) no tiene sentido en el caso no abeliano, dado que los generadores no conmutan entre sí en los distintos puntos a lo largo del camino

$\mathcal{C}(x, y)$. Debemos especificar por lo tanto el orden en el que se toman los generadores, para lo cual definimos la exponencial ordenada a lo largo del camino como

$$W[\mathcal{C}(x, y)] = \text{Pexp} \left\{ i \int_{\mathcal{C}(x, y)} A_\mu dx'^\mu \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{n-1} \exp \{ i A_\mu(\xi_i) \Delta \xi_i^\mu \}, \quad (3.9)$$

donde la secuencia $\{\xi_1 = x, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n = y\}$ define una partición del camino $\mathcal{C}(x, y)$, y $\Delta \xi_i = \xi_{i+1} - \xi_i$. Para n suficientemente grande, la separación entre los puntos de la partición es suficientemente chica como para aproximar cada uno de los términos en la definición a primer orden en $\Delta \xi_i$. Un término genérico transforma según

$$\begin{aligned} 1 + i A_\mu(\xi_i) \Delta \xi_i^\mu &\mapsto 1 + i \Delta \xi_i^\mu U(\xi_i) A_\mu(\xi_i) U(\xi_i)^\dagger - \Delta \xi_i^\mu U(\xi_i) \partial_\mu U(\xi_i)^\dagger \\ &= U(\xi_{i+1}) (1 + i A_\mu(\xi_i) \Delta \xi_i^\mu) U(\xi_i)^\dagger, \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde usamos $U(\xi_{i+1})U(\xi_i)^\dagger = 1 + (\partial_\mu U(\xi_i)) U(\xi_i)^\dagger \Delta \xi_i^\mu + \mathcal{O}(\Delta \xi_i^2)$. Por lo tanto, la definición (3.9) es adecuada en la medida en que generaliza la ley de transformación para la línea de Wilson abeliana, teniéndose ahora

$$W[\mathcal{C}(x, y)] \mapsto U(y) W[\mathcal{C}(x, y)] U(x)^\dagger. \quad (3.11)$$

Nótese sin embargo que no obtenemos un invariante cuando la línea de Wilson comienza y termina en el mismo punto, es decir cuando $\mathcal{C}(x, y = x)$ forma de hecho una curva cerrada. Podemos remediar esto definiendo el lazo de Wilson para la curva cerrada \mathcal{C} tomando la traza de $W[\mathcal{C}(x, x)]$, ya que la ciclicidad de la traza se encarga de hacer invariante de gauge e independiente de x al objeto resultante. Tenemos entonces

$$W[\mathcal{C}, \mathfrak{R}] = \frac{1}{\dim \mathfrak{R}} \text{Tr}_{\mathfrak{R}} \text{Pexp} \left\{ i \oint_{\mathcal{C}} A_\mu dx^\mu \right\}, \quad (3.12)$$

donde hicimos explícito el hecho de que la traza depende de la representación \mathfrak{R} considerada para el grupo G , e introdujimos un factor de normalización convencional. Como en este trabajo vamos a ocuparnos exclusivamente de teorías de gauge no abelianas, la expresión dada arriba en términos de la representación \mathfrak{R} del grupo de gauge será a partir de ahora nuestra definición principal de lazo de Wilson, entendiendo por lo tanto que al escribir $W[\mathcal{C}]$ el loop de Wilson está implícitamente en la representación fundamental.

3.2. Potencial quark-antiquark

Una de las preguntas más profundas que podemos hacer sobre una teoría de gauge concierne a su carácter de confinante. Por esto entendemos que exista una fuerza constante que se oponga a la separación de un quark y un antiquark, de modo tal que aislarlos completamente requiera infinito trabajo. Por lo tanto, el confinamiento está asociado a la existencia de un potencial lineal entre el quark y el antiquark,

$$V_{q\bar{q}}(L) \propto L, \quad (3.13)$$

donde L es la separación entre ambas partículas y la constante de proporcionalidad se conoce como la tensión de la cuerda de QCD (en referencia a la descripción efectiva del tubo de flujo de color eléctrico responsable del confinamiento en QCD). Para calcular el potencial $V_{q\bar{q}}(L)$ debemos considerar entonces un quark y un antiquark infinitamente pesados, de modo que permanezcan estáticos con una separación L constante. Esto corresponde a considerar dos trayectorias que son rectas infinitas extendidas en la dirección temporal, que podemos aproximar con una curva cerrada rectangular como se muestra en la figura 3.1.

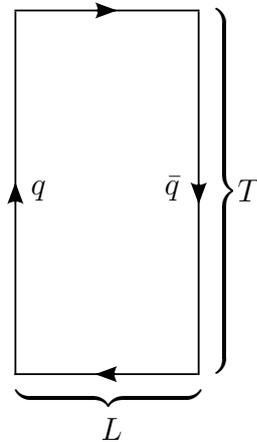


Figura 3.1: Rectángulo de lados de longitud T y L , orientado con el lado de longitud T en la dirección temporal. En el límite $T \rightarrow \infty$, el loop de Wilson definido para este rectángulo calcula el potencial quark-antiquark de la teoría.

Ahora bien, el loop de Wilson puede interpretarse como la fase adquirida por una partícula de prueba que sigue la trayectoria \mathcal{C} . Esto puede motivarse observando que al incorporar una partícula de prueba al sistema se agrega un término a la acción que es esquemáticamente

$$\int j^\mu A_\mu dx = \int_{\mathcal{C}} A_\mu dx^\mu, \quad (3.14)$$

donde $j^\mu(x)$ es la corriente de prueba y $A_\mu(x)$ actúa como un potencial externo. En el caso de teorías de gauge no abelianas, la representación \mathfrak{R} del grupo de gauge se relaciona con la carga de la partícula de prueba, de modo que cuando trabajamos en la representación fundamental decimos que la partícula en cuestión es un quark o antiquark de la teoría.

Continuando con esta analogía, para el rectángulo de la figura 3.1 tendremos

$$\langle W[\mathcal{C}_{\parallel}] \rangle \sim \exp \left\{ i \int_0^T dt (A_t(\vec{x}_q) - A_t(\vec{x}_{\bar{q}})) \right\} = e^{iTV_{q\bar{q}}(L)}, \quad (3.15)$$

donde en el límite $T \rightarrow \infty$ estamos despreciando los lados del rectángulo orientados espacialmente. Haciendo una rotación de Wick para pasar al espacio euclídeo, obtenemos finalmente

$$\langle W_E[\mathcal{C}_{\parallel}] \rangle \sim e^{-TV_{q\bar{q}}(L)}, \quad (3.16)$$

de manera que para una teoría confinante el logaritmo del valor de expectación del loop de Wilson rectangular en el límite $T \rightarrow \infty$ es proporcional a su área $T \times L$. Dado que podemos aproximar un contorno arbitrario \mathcal{C} por la unión de rectángulos infinitamente delgados, esta conclusión se aplica de hecho a todos los lazos de Wilson de una teoría confinante y se conoce como “ley del área”.

Para una teoría conforme como $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills no puede haber confinamiento. En efecto, el valor de expectación de todo loop de Wilson debe ser invariante de escala, de modo que en el caso rectangular sólo puede depender de la combinación adimensional T/L . Por lo tanto, el potencial quark-antiquark no es lineal sino coulombiano,

$$V_{q\bar{q}}(L) \propto \frac{1}{L}. \quad (3.17)$$

Esto no significa, sin embargo, que disminuya la relevancia física de este observable. Por el contrario, el coeficiente numérico de la ecuación anterior depende de los detalles de la teoría, y es en general una función de las constantes de acoplamiento en principio desconocida. Existen además diversas generalizaciones no triviales de $V_{q\bar{q}}(L)$ que es posible estudiar, y sobre las que ahondaremos más adelante.

Concluimos esta sección definiendo otro lazo de Wilson que, en una teoría conforme, está íntimamente ligado al loop de Wilson rectangular introducido para calcular el potencial quark-antiquark. Se trata de la cuña o *cusp*, originalmente estudiada por Polyakov en [52] y graficada esquemáticamente en la figura 3.2.

El valor de expectación de este lazo de Wilson desarrolla una divergencia infrarroja debida a su extensión infinita y otra ultravioleta debida a la cuña o quiebre que le da su nombre, y que consideramos localizada en el origen. Introduciendo un *cutoff*

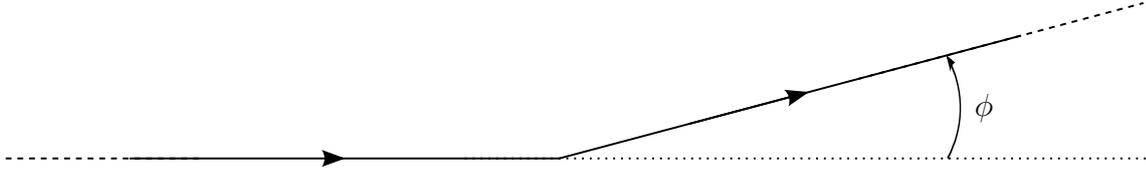


Figura 3.2: Loop de Wilson con un cusp o quiebre de ángulo ϕ .

infrarrojo Λ_{IR} y otro ultravioleta Λ_{UV} , observamos que en una teoría conforme la invariancia de escala implica que la dependencia funcional puede ser solamente en la combinación adimensional $\Lambda_{\text{UV}}/\Lambda_{\text{IR}}$. Como la divergencia es de tipo logarítmico, en signatura euclídea tenemos

$$\langle W_E[\mathcal{C}_\angle] \rangle \sim e^{-\Gamma_{\text{cusp}}(\phi) \log \frac{\Lambda_{\text{UV}}}{\Lambda_{\text{IR}}}}, \quad (3.18)$$

con $\Gamma_{\text{cusp}}(\phi)$ una función desconocida del ángulo de quiebre ϕ , que se conoce como dimensión anómala de cusp. Esta se relaciona, entre otras cosas, con la energía radiada por una partícula en movimiento [53], que es

$$\Delta E = 2\pi B \int dt \dot{\vec{v}}^2 \quad (3.19)$$

en el régimen de bajas velocidades $|\vec{v}| \ll 1$, siendo B una función del acoplamiento conocida como “función de Bremsstrahlung” y definida por la expansión a ángulos pequeños de la dimensión anómala de cusp,

$$\Gamma_{\text{cusp}}(\phi) = -B\phi^2 + \mathcal{O}(\phi^4). \quad (3.20)$$

Ahora bien, existe una transformación conforme que lleva el plano \mathbb{R}^4 al cilindro $\mathbb{R} \times S^3$. En efecto, si escribimos la métrica de \mathbb{R}^4 en coordenadas esféricas como

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega_3^2, \quad (3.21)$$

podemos definir un mapa plano-cilindro tomando $t = \log r$, de manera que $r \rightarrow 0$ corresponde a $t \rightarrow -\infty$ y $r \rightarrow \infty$ corresponde a $t \rightarrow +\infty$. Tomando al ángulo de quiebre ϕ en la coordenada azimutal de S^3 , bajo este mapeo el loop de Wilson con un cusp en \mathbb{R}^4 es llevado a dos líneas infinitas y antiparalelas en el cilindro $\mathbb{R} \times S^3$. Cuando $\phi = 0$ dichas líneas son antipodales, mientras que para un ángulo de cusp ϕ arbitrario forman un ángulo $\delta = \pi - \phi$ en S^3 , como puede verse en la figura 3.3.

Ahora bien, la trayectoria del lado derecho de la figura 3.3 es precisamente aquella que habríamos utilizado para definir el potencial quark-antiquark en el cilindro $\mathbb{R} \times S^3$,

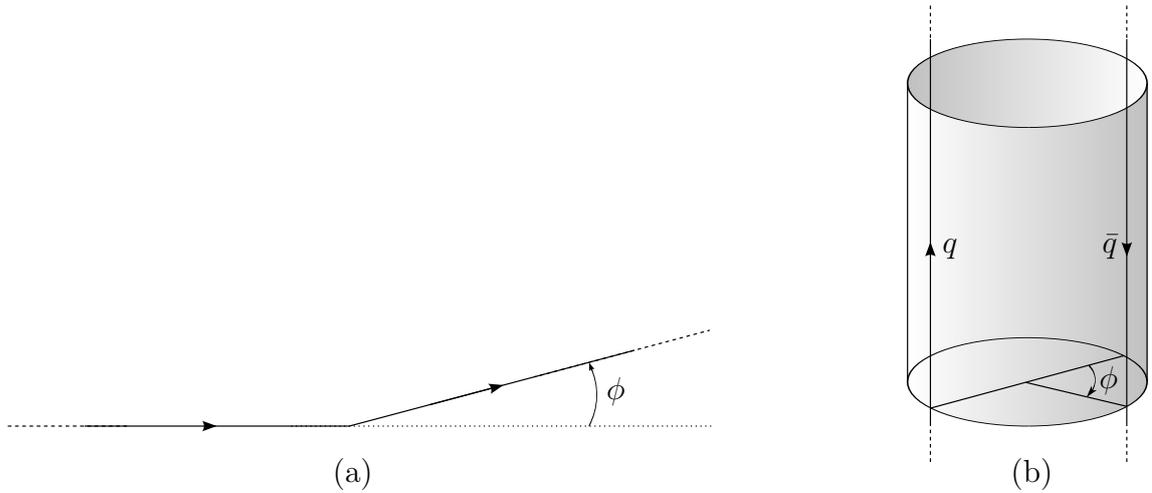


Figura 3.3: (a) Loop de Wilson con un cusp de ángulo ϕ en el plano \mathbb{R}^4 ; (b) imagen del contorno trazado en (a) bajo el mapa $\mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R} \times S^3$, donde cada punto graficado sobre el cilindro corresponde a un subespacio S^2 , y las líneas se extienden en la dirección temporal.

identificando la distancia L con la separación angular δ en la esfera S^3 . Como en una teoría conforme el valor de expectación de los lazos de Wilson no puede verse afectado por una transformación conforme, podemos poner en términos más precisos la relación anunciada entre los lazos de Wilson rectangular y con cusp comparando (3.16) con (3.18). Identificando los factores divergentes antes y después del mapeo,

$$T = T_{\text{UV}} - T_{\text{IR}} \quad \longleftrightarrow \quad \log \frac{\Lambda_{\text{UV}}}{\Lambda_{\text{IR}}}, \quad (3.22)$$

llegamos de este modo a la conclusión de que la dimensión anómala de cusp $\Gamma_{\text{cusp}}(\phi)$ debe ser identificada con el potencial quark-antiquark $V_{q\bar{q}}(\phi)$ en la esfera S^3 . Más aún, en el límite $\phi \rightarrow \pi$ que corresponde a $\delta \rightarrow 0$, la curvatura del cilindro se torna despreciable y recuperamos el potencial quark-antiquark en el plano.

3.3. Lazos de Wilson en la dualidad AdS/CFT

Para motivar el punto de vista dual por la conjetura AdS/CFT de los lazos de Wilson, podemos inspirarnos en el caso del contorno rectangular utilizado para calcular el potencial quark-antiquark. En QCD, dicho potencial es producido por el tubo de flujo de color cuya descripción efectiva, se vio en la Introducción, puede ser realizada por medio de una cuerda abierta extendida entre el quark y el antiquark en cuestión. Esto sugiere considerar cuerdas abiertas del lado de la teoría de cuerdas, con sus extremos correspondientemente fijados a las D-branas que dan origen a la geometría curva de AdS.

Para ser más específicos, consideramos ahora en forma análoga a la sección 2.1 la superposición de $N + 1$ D-branas en la teoría de cuerdas formulada en el espacio plano. Las cuerdas extendidas entre ellas son no masivas y llevan dos índices fundamentales de $U(N + 1)$, de modo que corresponden a un campo de gauge en la representación adjunta de este grupo. Si separamos una de las branas del conjunto, rompiendo efectivamente la simetría $U(N + 1) \mapsto U(N) \times U(1)$, tendremos un sector con cuerdas no masivas cuyos extremos terminan en el conjunto de N branas superpuestas, dando lugar a un campo de gauge de $U(N)$, acompañado de un sector de cuerdas masivas. Este último estará compuesto por las cuerdas con un extremo fijo a la D-brana separada y el otro fijo a alguna de las branas del conjunto, de modo que los estados correspondientes llevan solamente un índice en la representación fundamental de $U(N)$. La masa de estas cuerdas será proporcional a su extensión, siendo la constante de proporcionalidad la tensión $T = (2\pi\alpha')^{-1}$, y al llevar un índice en la representación fundamental podemos identificarlas con los quarks.

Como nos interesa estudiar las trayectorias de quarks de prueba, que son infinitamente masivos, debemos tomar el límite en el que la D-brana separada es llevada a una distancia infinita del resto, de modo que en la geometría del horizonte cercano resulta ubicada en el borde de AdS. Siendo allí donde reside la teoría de campos, es natural entonces imponer que el extremo de la cuerda fijo a dicha brana sigue la trayectoria del loop de Wilson dual en la teoría de campos.

Ahora bien, en la realización de la conjetura AdS/CFT que nos ocupa en este trabajo la teoría de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills en $D = 4$ dimensiones es dual a la teoría de cuerdas tipo IIB formulada en un espacio de fondo con la geometría $AdS_5 \times S^5$. Si bien hemos identificado a los lazos de Wilson en la teoría de campos con cuerdas abiertas del lado gravitatorio, uno de cuyos extremos está fijo al borde de AdS_5 , no podemos ignorar el hecho de que dichas cuerdas existen en un espacio mayor. Esto es, a medida que el extremo de la cuerda recorre en el borde de AdS_5 la trayectoria \mathcal{C} asociada al loop de Wilson $W[\mathcal{C}]$, también se mueve en el factor esférico S^5 de la geometría. Dado que, como vimos en el capítulo anterior, la simetría $SO(6)$ de la esfera S^5 está ligada a la simetría R del lado de gauge, que implementa las rotaciones $SU(4)_R$ entre los seis campos escalares de la teoría conforme, esto motiva la generalización de la definición (3.12) para el caso de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills introduciendo un acoplamiento del lazo de Wilson a los campos escalares, [54]. Tendremos entonces

$$W[\mathcal{C}, \mathfrak{R}] = \frac{1}{\dim \mathfrak{R}} \text{Tr}_{\mathfrak{R}} \text{Pexp} \left\{ i \oint_{\mathcal{C}} A_{\mu} dx^{\mu} + n^I \Phi_I |dx| \right\}, \quad (3.23)$$

donde n^I con $I = 1, \dots, 6$ es un vector unitario de \mathbb{R}^6 que parametriza el acoplamiento a los campos escalares o, alternativamente, la posición del extremo de la cuerda en S^5 cuando \mathfrak{R} es la representación fundamental. Este acoplamiento con el espacio interno puede variar de un punto a otro de la trayectoria física, y no es necesario para la invariancia de gauge que forme una trayectoria cerrada, como sí ocurre en el espacio físico. En la fórmula de arriba entendemos entonces que el contorno \mathcal{C} parametriza tanto la trayectoria en el espacio físico x^μ como en el espacio interno n^I . Trabajamos además en una representación arbitraria a pesar de que la discusión dada hasta ahora sólo se aplica al caso de la representación fundamental, anunciando desde ya que la definición razonable en este caso particular se generalizará de la forma más natural posible.

La discusión dada hasta aquí sugiere entonces expresar la conjetura AdS/CFT para los lazos de Wilson en la representación fundamental en forma similar a (2.34), es decir escribiendo

$$\langle W[\mathcal{C}] \rangle_{\mathcal{N}=4 \text{ sYM}} \equiv Z_{\text{IIB}} \left[\phi_{\text{string}} \Big|_{\mathcal{C}} \right], \quad (3.24)$$

donde $Z_{\text{IIB}}[\phi_{\text{string}}|_{\mathcal{C}}]$ es la función de partición de la teoría de cuerdas supersimétrica tipo IIB formulada en $AdS_5 \times S_5$, en presencia de una cuerda abierta cuyos extremos siguen la trayectoria \mathcal{C} en el borde de AdS. En el límite de supergravedad $\lambda \gg 1$ y $N \rightarrow \infty$, esta función de partición se reduce a¹

$$Z_{\text{IIB}} \simeq e^{iS_{\text{NG}}}, \quad (3.25)$$

donde S_{NG} es la acción de Nambu-Goto para la cuerda evaluada on-shell, es decir en la solución de las ecuaciones de movimiento con la condición de borde imponiendo que la cuerda termine en \mathcal{C} .

Más adelante será necesario realizar una rotación de Wick para pasar al espacio euclídeo, de modo que observamos ahora mismo que el acoplamiento a los escalares adquiere un factor $-i$ proveniente de $|dx|$, de manera que en este caso la definición (3.23) pasa a ser [55, 56]

$$W_E[\mathcal{C}, \mathfrak{R}] = \frac{1}{\dim \mathfrak{R}} \text{Tr}_{\mathfrak{R}} \text{Pexp} \left\{ \oint_{\mathcal{C}} i A_\mu dx^\mu + n^I \Phi_I |dx| \right\}. \quad (3.26)$$

Análogamente al caso lorentziano, tendremos en el límite de supergravedad

$$\langle W_E[\mathcal{C}] \rangle_{\mathcal{N}=4 \text{ sYM}} \equiv e^{-S_{\text{NG}}}. \quad (3.27)$$

¹Recordamos del apéndice A que la acción de de Nambu-Goto viene con un factor $R^2/\alpha' = \sqrt{\lambda}$, de manera que el régimen $\lambda \gg 1$ corresponde al límite semiclásico en el que la función de partición puede evaluarse en el punto de ensilladura.

Como la acción de Nambu-Goto no es otra cosa que el área de la superficie de la hoja de mundo de la cuerda, y las ecuaciones de movimiento extremizan la acción, al evaluar on-shell S_{NG} resulta ser el área mínima de la hoja de mundo de la cuerda que termina en \mathcal{C} en el borde de AdS. Si la métrica fuera plana esta sería trivialmente el área de la superficie del espacio 4-dimensional delimitada por \mathcal{C} , como podría esperarse para una teoría confinante. Sin embargo, como el espacio es curvo la superficie de área mínima no está contenida en el borde de AdS sino que penetra en su interior, de modo que la teoría no es confinante (como ya sabíamos, dado que es conforme).

Por lo demás, como la superficie debe llegar al borde de AdS su área es necesariamente divergente. En ciertos casos que caracterizaremos en la sección 3.4, conocidos como lazos de Wilson BPS, sabemos que la supersimetría implica que no puede haber divergencias ultravioletas. Para obtener resultados razonables debemos entonces introducir en la práctica un cutoff en la dirección radial, y evaluar la acción en $z = \epsilon$ para tomar luego la parte finita cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Esto es equivalente a considerar los términos de borde de la acción que resultan de integrar por partes para imponer condiciones de contorno de Neumann en las direcciones espaciales en las que la cuerda no está fija. Estos términos evidentemente no modifican las ecuaciones de movimiento, pero sí alteran el valor de la acción on-shell, volviéndola finita [56].

3.3.1. Representaciones de rango superior

Para representaciones \mathfrak{R} genéricas no disponemos de una asociación intuitiva como la utilizada en el caso de la representación fundamental, que nos permitió identificar al par quark-antiquark con una cuerda abierta. Sin embargo, teniendo en cuenta el procedimiento llevado a cabo en aquel caso podemos intentar idear uno similar recordando que una representación \mathfrak{R} de rango k de $U(N)$ queda completamente determinada por un diagrama de Young con k casillas como el de la figura 3.4.

Podemos entonces discutir la representación \mathfrak{R} en términos de la combinación de P representaciones totalmente simétricas de rangos n_1, \dots, n_P , o alternativamente como la combinación de Q representaciones totalmente antisimétricas de rangos m_1, \dots, m_Q , siendo²

$$\sum_{i=1}^P n_i = k = \sum_{i=1}^Q m_i \quad \text{con} \quad n_i \geq n_{i+1} \quad \text{y} \quad m_i \geq m_{i+1}. \quad (3.28)$$

²Nótese que como no podemos tomar más de N índices totalmente antisimétricos de $U(N)$, tenemos la restricción adicional $m_i \leq N$, o equivalentemente $P \leq N$.

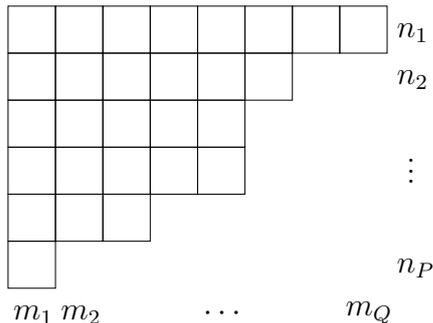


Figura 3.4: Diagrama de Young para una representación de $U(N)$ genérica \mathfrak{R} . El diagrama tiene P filas de longitudes n_1, \dots, n_P y Q columnas de alturas m_1, \dots, m_Q , siendo los conjuntos $\{n_i\}$ y $\{m_i\}$ particiones ordenadas decrecientemente del rango k de la representación.

Tomando primero el punto de vista de las representaciones simétricas, vemos que debemos asignar k índices fundamentales a las P filas del diagrama, lo cual sugiere considerar k cuerdas abiertas y P branas adicionales, por analogía con el caso de la representación fundamental que tiene $k = P = Q = 1$. Cada una de las cuerdas tendrá uno de sus extremos fijo a alguna de las N branas que dan origen a la geometría de AdS, estando el otro fijo a una de las P branas extra. Claramente, todas las cuerdas cuyos extremos están fijos a un mismo par de D-branas forman un conjunto completamente simétrico, de modo que la partición $\{n_i\}$ determina cuántas cuerdas terminan en cada una de las P branas, y está ordenada porque no existe otra forma de distinguir entre estas últimas.

Tenemos por lo tanto un conjunto de $N + P$ D3-branas, cuya teoría efectiva a bajas energías es una teoría de gauge con grupo de simetría $U(N + P)$, y repetimos el procedimiento realizado anteriormente para romper la simetría según $U(N + P) \mapsto U(N) \times U(P)$. Esto corresponde a separar las P branas para luego llevarlas hasta el infinito, de modo que cada una de las cuerdas abiertas se describe a bajas energías como un bosón W infinitamente masivo. La acción efectiva a bajas energías puede entonces descomponerse según

$$S_{\mathcal{N}=4}^{U(N+P)} = S_{\mathcal{N}=4}^{U(N)} + S_{\mathcal{N}=4}^{U(P)} + S_W + S_{\text{int}}, \quad (3.29)$$

donde S_W es la acción efectiva para los bosones W infinitamente masivos y S_{int} contiene todos los términos correspondientes a su interacción con las branas. En el límite de bajas energías la acción efectiva $S_{\mathcal{N}=4}^{U(P)}$ de las branas en el infinito se desacopla de la región del horizonte cercano que da lugar a la geometría AdS, de modo que sólo debemos considerar los grados de libertad de los bosones W. La condición de que sus extremos terminan en las branas en el infinito según la partición dada por $\{n_i\}$ debe

imponerse introduciendo un proyector sobre este subespacio de estados al momento de realizar la integración sobre los grados de libertad correspondientes. Un cálculo explícito [57] muestra que el resultado de la integración es la inserción del loop de Wilson $W[\mathcal{C}, \mathfrak{R}]$ en la teoría de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills con grupo de gauge $U(N)$.

Desde el punto de vista de la teoría de cuerdas, tenemos como resultado de este procedimiento P D3-branas en el espacio $AdS_5 \times S_5$, la i -ésima de ellas con n_i unidades de carga fundamental. Su volumen de mundo adquiere la geometría $AdS_2 \times S_2$ en el límite del horizonte cercano [55, 58, 59], y está completamente contenido en el factor AdS_5 del espacio 10-dimensional. Como para generar la geometría AdS llevamos las branas al infinito y tomamos el límite del horizonte cercano, estas deben llegar al borde de AdS. Es natural por lo tanto identificar la parte espacial del contorno \mathcal{C} del loop de Wilson dual con la curva que las D-branas trazan allí. Como en el caso de la representación fundamental, el acoplamiento a los escalares determinará la posición de las D-branas en el factor S^5 cuando alcanzan el borde de AdS. De este modo, una vez más la conjetura relaciona a los observables de la teoría conforme con las condiciones de borde de sus duales gravitatorios. Más explícitamente, tendremos

$$\left\langle W[\mathcal{C}, \mathfrak{R}] \right\rangle_{\mathcal{N}=4 \text{ sYM}} \equiv Z_{\text{IIB}} \left[\phi_{\text{branas}} \Big|_{\mathcal{C}} \right], \quad (3.30)$$

donde $Z_{\text{IIB}}[\phi_{\text{branas}}|_{\mathcal{C}}]$ es la función de partición de la teoría de cuerdas supersimétrica tipo IIB formulada en $AdS_5 \times S_5$, en presencia de P D3-branas que siguen la trayectoria \mathcal{C} en el borde de AdS. En el límite de supergravedad $\lambda \gg 1$ y $N \rightarrow \infty$ corresponde considerar solamente la aproximación semiclásica dada por el punto de ensilladura, es decir que en signatura euclídea

$$\left\langle W_E[\mathcal{C}, \mathfrak{R}] \right\rangle_{\mathcal{N}=4 \text{ sYM}} \equiv e^{-S_{\text{DBI+WZ}}}, \quad (3.31)$$

donde $S_{\text{DBI+WZ}}$ es la acción de Dirac-Born-Infeld con el término de Wess-Zumino, evaluada on-shell en la solución clásica de sus ecuaciones de movimiento que satisface las condiciones de borde dadas por \mathcal{C} .

Pasamos ahora a la descripción del mismo lazo de Wilson desde el punto de vista alternativo de la representación \mathfrak{R} , que corresponde a tomar Q representaciones totalmente antisimétricas de rangos m_1, \dots, m_Q . Observamos que en la construcción de D3-branas anterior, los grados de libertad de la teoría de campos que vive en el defecto constituido por el conjunto de P D3-branas son 0+1 dimensionales, ya que se trata de cuerdas abiertas sin extensión. Podemos por lo tanto cuantizarlos como es usual considerándolos bosónicos, o alternativamente también es posible cuantizarlos considerándolos como fermiónicos. Ambas descripciones están relacionadas por la

transformación de bosonización, pero la cuantización fermiónica es la adecuada para tratar grados de libertad anticonmutantes, asociados a una representación totalmente antisimétrica. En [60] se muestra que la bosonización relaciona al conjunto de P D3-branas con un conjunto equivalente de Q D5-branas, la i -ésima de las cuales tiene m_i unidades de carga fundamental. Estas D5-branas tienen un volumen de mundo que es $AdS_2 \times S^4$, donde ahora el factor AdS_2 está embebido en AdS_5 y el factor $S^4 \subset S^5$ tiene un radio que depende de m_i . La parte espacial del contorno \mathcal{C} determina la curva que trazan las D5-branas en el borde de AdS, como era de esperar, mientras que el acoplamiento al espacio interno determina la dirección en S^5 alrededor de la cual están enrolladas las S^4 .

Concluimos esta sección mencionando dos casos particulares que serán especialmente importantes, ya que son el objeto de estudio de capítulos posteriores. Se trata de los lazos de Wilson en representaciones totalmente simétricas o antisimétricas, cada uno de los cuales tiene dos descripciones alternativas en términos de D3 o D5-branas. En el caso de las representaciones totalmente simétricas, observamos que la descripción más natural es en términos de una única D3-brana con volumen de mundo $AdS_2 \times S^2$, siendo el rango k de la representación cualquier valor positivo. En cambio, en el caso de las representaciones totalmente antisimétricas la descripción más natural corresponde a una única D5-brana con volumen de mundo $AdS_2 \times S^4$, estando además limitado el rango k de la representación por la condición $k \leq N$. Cada una de estas situaciones será descrita en detalle más adelante, pero desde ya esperamos para ambas que el límite $k \rightarrow 1$ reproduzca los resultados hallados para la representación fundamental.

3.4. Lazos de Wilson supersimétricos

La definición (3.23), o alternativamente (3.26) en signatura euclídea, no es la más general posible para un lazo de Wilson en $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills. En efecto, podríamos haber escrito

$$W[\mathcal{C}, \mathfrak{R}] = \frac{1}{\dim \mathfrak{R}} \text{Tr}_{\mathfrak{R}} \text{Pexp} \left\{ i \oint_{\mathcal{C}} A_{\mu} dx^{\mu} + \Phi_I dy^I + \lambda^i d\theta_i \right\}, \quad (3.32)$$

introduciendo acoplamientos totalmente generales (x^{μ}, y^I, θ_i) para todos los campos de la teoría. Estos pueden variar punto a punto a lo largo de \mathcal{C} , y el operador así definido será invariante de gauge siempre que x recorra una curva cerrada.

Ahora bien, los operadores bosónicos con $\theta_i = 0$ a lo largo de toda la curva son primarios, en el sentido de que aquellos operadores con acoplamiento no nulo a los

fermiones pueden obtenerse actuando sobre ellos con los generadores de supersimetría. Por lo tanto, vamos considerar solamente el caso $\theta_i = 0$ dejando así de lado los operadores descendientes.

Si queremos que además los lazos de Wilson en cuestión preserven algunas de las supersimetrías de la teoría, debemos imponer que la variación supersimétrica de nuestra definición se anule. Esto será particularmente útil a la hora de identificar y comparar resultados en la teoría dual, de modo que exigimos

$$\delta W[\mathcal{C}, \mathfrak{R}] = 0 \quad \Longrightarrow \quad \delta \oint_{\mathcal{C}} A_{\mu} dx^{\mu} + \Phi_I dy^I = 0, \quad (3.33)$$

lo cual requiere que punto a punto se satisfaga la condición

$$\delta A_{\mu} \dot{x}^{\mu} + \delta \Phi_I \dot{y}^I = 0, \quad (3.34)$$

donde \dot{x}^{μ} y \dot{y}^I denotan derivadas respecto al parámetro de la curva. Usando la transformación de supersimetría (2.27) tenemos entonces

$$\bar{\epsilon}(\Gamma_{\mu} \dot{x}^{\mu} + \Gamma_I \dot{y}^I) \Psi = 0, \quad (3.35)$$

y como las matrices Γ^M son de cuadrado nulo esto implica $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 0$. Por lo tanto, \dot{x}^{μ} debe ser tipo tiempo y $\dot{y}^I = n^I \sqrt{-\dot{x}^2}$ con n^I un vector unitario de \mathbb{R}^6 , es decir que $dy^I = n^I |dx|$. Esta última es la condición que, junto a $\theta_i = 0$ transforma la definición más general (3.32) en nuestra definición original (3.23).

El loop de Wilson así definido es localmente supersimétrico, pero para que sea globalmente supersimétrico debemos exigir que el mismo espinor satisfaga la condición de supersimetría en todos los puntos de la curva. La forma más sencilla de lograrlo es requerir que n^I sea constante y x^{μ} una recta, de manera que podamos hacer a la ecuación (3.35) independiente del parámetro de la curva mediante un boost. Por lo tanto, hemos encontrado lazos de Wilson supersimétricos que son rectos y tienen un acoplamiento constante a los escalares, preservando la mitad de las supersimetrías de la teoría, es decir que son 1/2 BPS. Estos loops de Wilson fueron originalmente considerados en [56], mientras que diversas generalizaciones preservando menos supersimetrías fueron estudiadas en [61, 62].

Los argumentos presentados hasta aquí sugieren inmediatamente la generalización de los dos contornos particularmente relevantes introducidos en la sección 3.2. Teniendo en cuenta la supersimetría, vamos a definir los lazos de Wilson rectangular y con cusp en $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills introduciendo acoplamientos a los escalares

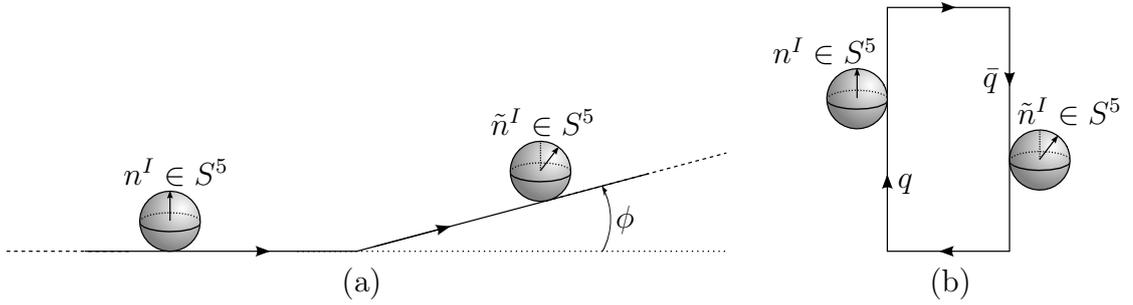


Figura 3.5: (a) Loop de Wilson con un cusp geométrico ϕ , en el que el acoplamiento a los escalares pasa de ser n^I a \tilde{n}^I precisamente en el punto de quiebre; (b) loop de Wilson rectangular con un acoplamiento a los escalares n^I para el quark y \tilde{n}^I para el anti-quark. En ambos casos n^I y \tilde{n}^I son constantes y $n^I \tilde{n}^I = \cos \theta$ define el ángulo de cusp interno θ .

como se ve en la figura 3.5. Los acoplamientos n^I y \tilde{n}^I son constantes, de modo que ahora introducimos un nuevo parámetro dado por $n^I \tilde{n}^I = \cos \theta$, que podemos llamar *cusp interno* ya que es un quiebre en el ángulo que forma el acoplamiento a los escalares en el espacio interno S^5 . De este modo, tanto el potencial quark-anti-quark como la dimensión anómala de cusp pasan a depender de θ , es decir que tenemos $V_{q\bar{q}}(L, \theta)$ y $\Gamma_{\text{cusp}}(\phi, \theta)$, manteniéndose la relación entre ambos ya discutida para las teorías conformes.

La dimensión anómala de cusp de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills ha merecido mucha atención recientemente, principalmente limitada a partículas en la representación fundamental³. En algunos casos específicos, es posible obtener en cierto límite resultados exactos en la teoría de gauge, pudiendo compararse su expansión a acoplamiento fuerte con cálculos explícitos del lado de la teoría de cuerdas. Un ejemplo de lo anterior es el límite de ángulos de cusp pequeños $\phi, \theta \ll 1$, en el que el operador $W[\mathcal{C}_\perp]$ es cuasi-BPS. En este régimen podemos expandir a la dimensión anómala de cusp como

$$\Gamma_{\text{cusp}}(\phi, \theta) = (\theta^2 - \phi^2)B + \mathcal{O}(\phi^4, \theta^4), \quad (3.36)$$

donde nuevamente B es la función de Bremsstrahlung introducida en (3.19). En $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills existe una relación entre esta función y el valor de expectación de un loop de Wilson circular, que discutiremos con más detalle posteriormente. Por ahora, mencionamos solamente que [53]

$$B_{\mathfrak{R}}(\lambda, N) = \frac{1}{2\pi^2} \lambda \partial_\lambda \langle W_E[\mathcal{C}_\circ, \mathfrak{R}] \rangle, \quad (3.37)$$

³Algunos de los trabajos que se ocupan de la dimensión anómala de cusp en $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills son [19, 53, 63–76], y también se han estudiado sus generalizaciones a otras teorías, por ejemplo ABJM en tres dimensiones [77–82].

donde hicimos explícita la dependencia de la función de Bremsstrahlung en todos sus parámetros. En particular, para el caso de la representación fundamental aplicando la técnica de localización supersimétrica se obtiene una expresión exacta en λ y N para el valor de expectación del loop de Wilson circular en signatura euclídea [83],

$$\langle W_E[\mathcal{C}_o] \rangle = \frac{e^{\frac{\lambda}{8N}}}{N} L_{N-1}^1 \left(-\frac{\lambda}{4N} \right), \quad (3.38)$$

con $L_n^\alpha(z)$ los polinomios de Laguerre generalizados. Utilizando (3.37) se puede obtener entonces una expresión exacta para la función de Bremsstrahlung en este caso, que resulta ser [53, 64],

$$B(\lambda, N) = \frac{\lambda}{16\pi^2 N} \frac{L_{N-1}^2 \left(-\frac{\lambda}{4N} \right) + L_{N-2}^2 \left(-\frac{\lambda}{4N} \right)}{L_{N-1}^1 \left(-\frac{\lambda}{4N} \right)}. \quad (3.39)$$

Otro régimen interesante para considerar es el que corresponde a la continuación analítica de $\Gamma_{\text{cusp}}(\phi, \theta)$ dada por $i\theta \gg 1$. En este límite, se encuentra para el lazo de Wilson en la representación fundamental que los diagramas tipo *ladder* dominan en el cálculo perturbativo de la dimensión anómala de cusp [65]. Estos son diagramas de Feynman que no poseen vértices internos, y pueden resumarse resolviendo una ecuación de Bethe-Salpeter [84]. En el capítulo siguiente presentaremos dos resultados para representaciones de rango superior, considerando límites que hacen a los cálculos tratables en estos casos [20, 21].

3.4.1. Ejemplos

Para ilustrar algunos de los conceptos introducidos en este capítulo, concluimos presentando dos ejemplos de loops de Wilson en la representación fundamental, cuyo valor de expectación podemos calcular en el régimen de acoplamiento fuerte gracias a la conjetura AdS/CFT. Esta será una buena práctica para tener en mente cuando, en los capítulos siguientes, se describan cálculos similares para contornos y representaciones más generales.

Comenzamos con el ejemplo más sencillo que podemos considerar, que corresponde al lazo de Wilson recto 1/2 BPS. En este caso, la simetría del problema es tal que no es necesario resolver las ecuaciones de movimiento para hallar la superficie de área mínima de la cuerda dual. En efecto, luego de hacer el boost que lleva al sistema comóvil a la partícula, la recta debe ser en la dirección temporal t_E y por simetría la superficie de área mínima será entonces un plano que llega en el borde de AdS a dicha recta, extendiéndose en su interior hasta el horizonte. Trabajando en coordenadas de

Poincaré con signatura euclídea, parametrizamos la recta con $t_E = \tau$. Por invariancia frente a traslaciones temporales debemos tener $z(\tau, \sigma) = z(\sigma)$, y por invariancia frente a reparametrizaciones tenemos la libertad de elegir $z(\sigma) = \sigma$. La hoja de mundo de la cuerda no tiene dependencia en los parámetros τ y σ para ninguna de las demás coordenadas del espacio-tiempo, de manera que la acción de Nambu-Goto on-shell es

$$S_{\text{NG}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \sqrt{\det(g_{\mu\nu} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu)} = \frac{R^2}{2\pi\alpha'} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} d\sigma \frac{1}{\sigma^2}. \quad (3.40)$$

Esta acción es divergente, pero como ya mencionamos anteriormente debemos reintroducir el término de borde que surge al integrar por partes para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange en la dirección z , debido a que en este caso las condiciones de contorno para la cuerda son tipo Neumann. Este término no es más que aquel que realiza la transformada de Legendre de la acción de Nambu-Goto en la dirección z , y tiene la forma

$$S_{\text{borde}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Pi_z z \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} = \frac{R^2}{2\pi\alpha'} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{\sigma} \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} \quad \text{con} \quad \Pi_z = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{NG}}}{\partial \dot{z}}, \quad (3.41)$$

donde $\dot{z} = \frac{\partial z}{\partial \sigma}$. Introduciendo un cutoff en la dirección radial en la posición $z = \epsilon$, vemos que

$$S_{\text{NG}} + S_{\text{borde}} = \frac{R^2}{2\pi\alpha'} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left(-\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} \right) = 0, \quad (3.42)$$

y como la dependencia en el cutoff se cancela completamente tenemos un resultado regular en el límite $\epsilon \rightarrow 0$. La prescripción (3.27) resulta entonces en que para este caso $\langle W_E[\mathcal{C}] \rangle = 1$ a orden dominante en el régimen $\lambda \gg 1$, como podíamos esperar a partir de un cálculo perturbativo [85]. El resultado anterior fue originalmente obtenido en aquel trabajo, siendo motivado por [54, 55] poco después de formulada la conjetura AdS/CFT. Su extensión a lazos de Wilson en otras representaciones se hizo más tarde en [57, 60, 86].

Pasamos ahora a un ejemplo algo más interesante, correspondiente al loop de Wilson circular en la representación fundamental. Consideramos entonces un círculo contenido en el plano $x_1 - x_2$ del borde de $EAdS_5$ en coordenadas de Poincaré, e introducimos coordenadas polares en dicho plano. La parte relevante de la métrica será entonces

$$ds^2 = R^2 \frac{dt_E^2 + dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dx_3^2}{z^2}, \quad (3.43)$$

y en este caso es conveniente parametrizar el círculo en el borde tomando $\varphi = \tau$ con $0 < \tau < 2\pi$. Por invariancia frente a traslaciones en las direcciones t_E y x_3 no hay dependencia en los parámetros de la cuerda para su hoja de mundo en estas

direcciones, y por simetría tendremos que z y r pueden depender únicamente de σ . La invariancia frente a reparametrizaciones nos permite tomar $r = \sigma$, de manera que debemos resolver para $z(r)$ en la acción de Nambu-Goto,

$$S_{\text{NG}} = \frac{R^2}{\alpha'} \int dr r \frac{\sqrt{1 + \dot{z}^2}}{z^2}, \quad (3.44)$$

donde ahora $\dot{z} = \frac{\partial z}{\partial r}$. La ecuación de movimiento para $z(r)$ es entonces

$$(2\sigma + z\dot{z})(1 + \dot{z}^2) + \sigma z\ddot{z} = 0, \quad (3.45)$$

y su solución es $z(r) = \sqrt{r_0^2 - r}$, es decir que la superficie forma una semi-esfera de radio r_0 cuyo volumen penetra en el interior del espacio-tiempo. La coordenada r tiene entonces el rango $0 < r < r_0$, correspondiendo $r \rightarrow r_0$ al borde de $EAdS_5$. La acción on shell será en este caso

$$S_{\text{NG}} = \frac{R^2}{\alpha'} \int_0^{r_0} dr \frac{r/r_0}{[1 - (r/r_0)^2]^{3/2}}, \quad (3.46)$$

mientras que el término de borde resulta ser

$$S_{\text{borde}} = \frac{R^2}{\alpha'} \Pi_z z \Big|_{r=0}^{r=r_0} = - \frac{R^2}{\alpha'} \frac{(r/r_0)^2}{\sqrt{1 - (r/r_0)^2}} \Big|_{r=0}^{r=r_0}. \quad (3.47)$$

Nuevamente, introduciendo un cutoff en la dirección radial considerando radios hasta $r = r_0 - \epsilon$ vemos que

$$S_{\text{NG}} = \frac{R}{\alpha'} \left[\frac{r_0}{\sqrt{(2r_0 - \epsilon)\epsilon}} - 1 \right] \quad \text{y} \quad S_{\text{borde}} = - \frac{R}{\alpha'} \frac{(r_0 - \epsilon)^2}{r_0 \sqrt{(2r_0 - \epsilon)\epsilon}}, \quad (3.48)$$

de modo que la acción on-shell total es regular en el límite $\epsilon \rightarrow 0$, siendo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} S_{\text{NG}} + S_{\text{borde}} = - \frac{R^2}{\alpha'} = -\sqrt{\lambda} \quad \implies \quad \langle W_E[\mathcal{C}_o] \rangle = e^{\sqrt{\lambda}}. \quad (3.49)$$

Observamos que para $N \rightarrow \infty$ el resultado exacto (3.38) proveniente de la teoría de gauge se reduce a

$$\langle W_E[\mathcal{C}_o] \rangle \simeq \frac{2}{\sqrt{\lambda}} I_1(\sqrt{\lambda}), \quad (3.50)$$

donde $I_1(z)$ es una función de Bessel, de modo que en el régimen $\lambda \gg 1$ se tiene

$$\langle W_E[\mathcal{C}_o] \rangle \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{\sqrt{\lambda}}}{\lambda^{3/4}}, \quad (3.51)$$

es decir que nuestro resultado (3.48) está de acuerdo con la predicción de la teoría de gauge [87].

Corresponde hacer algunos comentarios sobre este resultado para el lazo de Wilson circular, considerado originalmente en [56,88]. En primer lugar, observamos que como esperamos por la invariancia conforme no hay dependencia del valor de expectación con el radio r_0 del círculo. Por otra parte, existe una transformación conforme que mapea al círculo en la recta y viceversa, de modo que una vez más se trata de un lazo 1/2 BPS [89,90]. Sin embargo, como pudimos ver los resultados para ambos casos no coinciden, lo cual se debe a la aparición de una anomalía en la transformación conforme aplicada. Esta está asociada al punto en el infinito que debe agregarse para llevar la recta al plano, y desde el punto de vista perturbativo es responsable de que los propagadores gluónico y escalar combinados no se anulen, como en el caso recto, sino que sean una constante finita. De hecho, al realizar la expansión perturbativa puede verificarse que los únicos diagramas de Feynman que contribuyen son los ladders, pudiendo resumírseles en un modelo de matrices gaussiano 0-dimensional. Esto fue conjeturado inicialmente en [85], para ser luego demostrado por la técnica de localización supersimétrica [83]. El resultado obtenido al resolver el modelo de matrices es un ejemplo paradigmático de un chequeo de precisión de la dualidad AdS/CFT, ya que al ser exacto en λ hace posible interpolar entre ambos lados de la conjetura.

Capítulo 4

Límite de ladders para los lazos de Wilson

Vimos en el capítulo anterior que podemos considerar lazos de Wilson en $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills en cualquier representación \mathfrak{R} del grupo de gauge. Resulta natural entonces intentar extender el estudio de la dimensión anómala de cusp $\Gamma_{\text{cusp}}(\phi, \theta)$ a partículas que transforman en representaciones distintas a la fundamental, siendo este el caso más frecuentemente analizado en la literatura. Sabemos que los objetos duales a los lazos de Wilson en las representaciones de rango superior son D-branas de prueba¹ que se extienden en AdS_5 , llegando al borde del espacio a lo largo de la curva que define el loop de Wilson. Para la representación totalmente simétrica de rango k , debemos considerar en la teoría de cuerdas una única D3-brana [57, 60, 91], de modo que será hasta cierto punto viable un tratamiento analítico.

En este capítulo nos proponemos entonces considerar D3-branas que corresponden a lazos de Wilson con un cusp interno θ en representaciones totalmente simétricas del grupo de gauge, es decir que vamos a tomar el ángulo de cusp geométrico $\phi = 0$. Como estos operadores no son en general supersimétricos las ecuaciones de movimiento para las coordenadas de las branas duales son realmente de segundo orden, y no de primero como ocurre cuando se analizan operadores BPS. Si bien no podemos resolverlas analíticamente para un ángulo de cusp θ y rango k arbitrarios por ser altamente no lineales, es posible obtener resultados en dos límites particulares que resultan interesantes en tanto permiten realizar una comparación con resultados obtenidos en la teoría de gauge a partir de la expansión perturbativa.

El primer límite que consideramos es el de ángulo de cusp interno pequeño, $\theta \ll 1$, para el que encontramos una solución de D3-brana explícita que es válida para todo

¹En los casos en los que el número de casillas del diagrama de la representación es mucho menor que N^2 las D-branas duales no deforman la geometría de fondo.

valor del rango k . Como vimos anteriormente, el valor de la acción on-shell renormalizada se relaciona con el valor de expectación del loop de Wilson dual, lo cual nos permite verificar para la representación totalmente simétrica $\mathfrak{R} = \mathcal{S}_k$ la relación (3.37) a partir de la expansión (3.36). Este constituye el primer chequeo explícito de esta conjetura para una representación distinta a la fundamental.

El segundo límite que vamos a analizar es aquel en el que $k\sqrt{\lambda} \gg N$. En este caso, observamos que la acción on-shell de la D3-brana que corresponde al régimen de acoplamiento fuerte del lazo de Wilson es simplemente la exponencial del resultado a 1-loop del diagrama tipo ladder que corresponde al primer orden del régimen perturbativo. Para explicar esta relación en principio inesperada entre el análisis perturbativo a acoplamiento débil y el resultado obtenido por medio de la dualidad AdS/CFT, realizamos un análisis de los diagramas de Feynman con vértices internos, y con argumentos de teoría de grupos verificamos que son subdominantes en este límite en particular. De hecho, se tiene que el diagrama tipo ladder a ℓ -loops es proporcional al diagrama ladder de 1-loop elevado a la potencia ℓ , lo cual resulta en la exponenciación observada.

Finalmente, como el origen de la exponenciación eikonal observada está en cuestiones de tipo diagramático, relacionadas con los coeficientes de Casimir de \mathcal{S}_k en el límite $k \gg N$, ésta es totalmente independiente de la geometría del contorno \mathcal{C} del lazo de Wilson considerado. Esta observación nos permite conjeturar que la exponenciación eikonal es de hecho más general, debiendo ser válida independientemente del contorno, es decir que

$$\langle W[\mathcal{C}, \mathcal{S}_k] \rangle \simeq \exp \langle W^{(1)}[\mathcal{C}, \mathcal{S}_k] \rangle \quad \text{para} \quad k \gg N. \quad (4.1)$$

Para justificar esta conjetura, presentaremos una generalización parcial del resultado obtenido para el caso del loop de Wilson con un cusp interno, que extiende el resultado obtenido a un lazo de Wilson recto en el que el acoplamiento a los campos escalares en S^5 es totalmente arbitrario.

4.1. D3-brana dual a $W_E[\mathcal{C}_\angle, \mathcal{S}_k]$

En esta sección nos proponemos encontrar la D3-brana de prueba que es el dual holográfico de la línea de Wilson con un cusp interno en la representación simétrica de orden k de $U(N)$. Como ya mencionamos, vamos a fijar el cusp geométrico en $\phi = 0$ de modo que el principal desafío consiste en lidiar con el espacio esférico interno, en

el que la D3-brana tiene una descripción no trivial. Este caso será suficiente para desarrollar los chequeos que queremos realizar en el régimen de acoplamiento fuerte.

Es conveniente en este caso usar las siguientes coordenadas para la parte relevante de la métrica de $EAdS_5 \times S^5$:

$$\frac{ds^2}{R^2} = \frac{du^2}{1+u^2} + (1+u^2)d\tau^2 + u^2 (d\psi^2 + \sin^2 \psi d\Omega_2^2) + d\vartheta^2. \quad (4.2)$$

Aquí, R es el radio de AdS, u se relaciona con la coordenada radial ρ de la métrica global (2.8) por medio de $u = \sinh \rho$, y $d\Omega_2^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi d\xi^2$ es la métrica de una $S^2 \subset EAdS_5$. Por brevedad, nos quedamos solamente con el ángulo polar ϑ del factor S^5 de la métrica interna, suprimiendo las coordenadas que no van a tener relevancia en lo que sigue. Tomamos como coordenadas del volumen de mundo de la D3-brana a (τ, ψ, χ, ξ) , siendo las demás coordenadas funciones de ψ , es decir que $u = u(\psi)$ y $\vartheta = \vartheta(\psi)$. El volumen de mundo de la brana tiene un campo de gauge $F_{\psi\tau} = A'_\tau(\psi)$, cuya carga conservada está relacionada con el rango k de la representación \mathcal{S}_k considerada. El borde de AdS se encuentra en $\psi = 0, \pi$, y vemos que al mapear conformemente la trayectoria del plano al cilindro $\psi = 0$ corresponde a la sección del contorno que va de $-\infty$ a 0 , mientras que $\psi = \pi$ corresponde a la sección que va de 0 a ∞ . La esfera bidimensional en el volumen de mundo de la brana se achica continuamente a lo largo de estas líneas en el borde, siendo determinado el ángulo de cusp interno por los valores de borde de la coordenada angular polar en S^5 , es decir que $\theta = \vartheta(\pi) - \vartheta(0)$. La figura 4.1 muestra el volumen de mundo de la D3-brana aquí descrita.

Los términos de Dirac-Born-Infeld y Wess-Zumino de la acción para una brana con volumen de mundo de signatura euclídea son

$$S_{\text{DBI}} = \frac{2N}{\pi} \int d\tau d\psi u^2 \sin^2 \psi \sqrt{(1+u^2) \left(u^2 + \frac{(u')^2}{1+u^2} + (\vartheta')^2 \right) + \frac{4\pi^2}{\lambda} F_{\psi\tau}^2}, \quad (4.3)$$

$$S_{\text{WZ}} = -\frac{2N}{\pi} \int d\tau d\psi u^4 \sin^2 \psi, \quad (4.4)$$

donde las primas indican derivación respecto a ψ , la tensión de la brana es $T_{\text{D3}} = \frac{N}{2\pi^2 R^4}$ y ya realizamos la integración sobre la S^2 .

Esta acción tiene dos cantidades conservadas evidentes, que corresponden a los

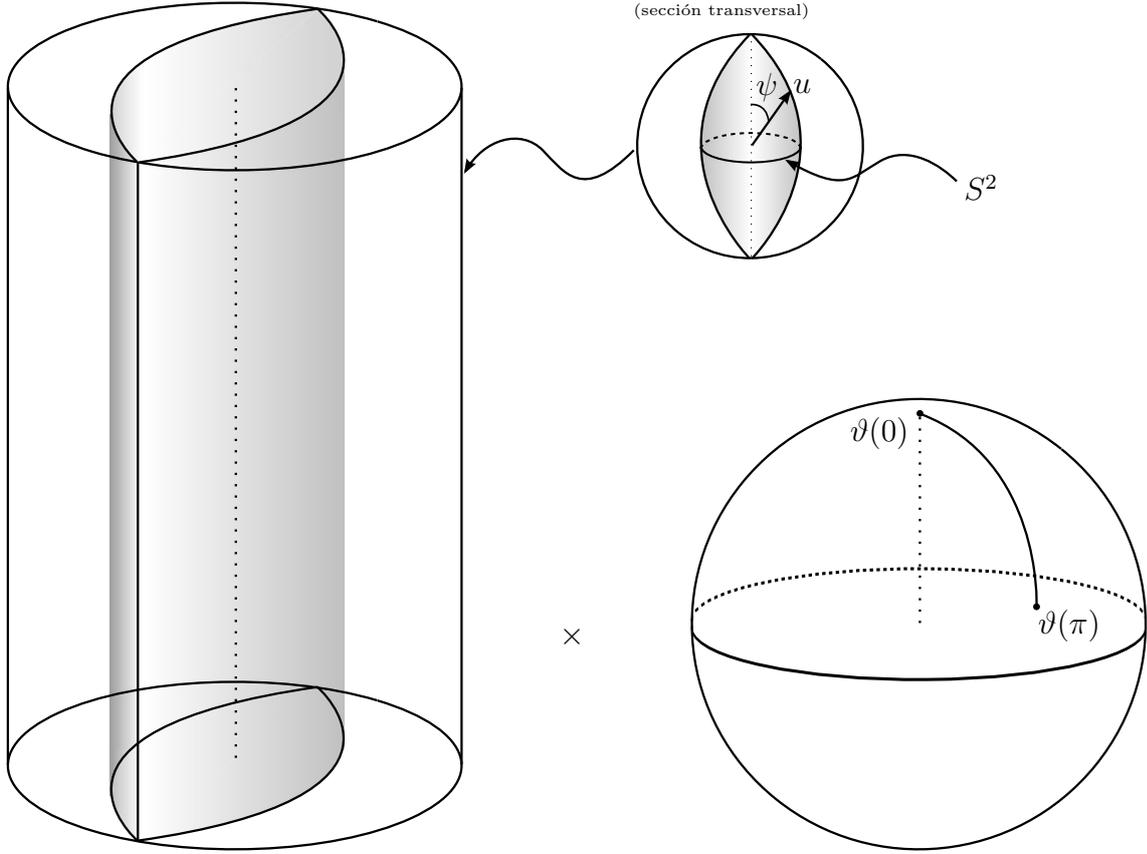


Figura 4.1: D3-brana con un ángulo de cusp interno. El volumen de mundo se muestra en sombreado, y es parametrizado por las coordenadas (τ, ψ, χ, ξ) . La brana alcanza el borde de AdS en $\psi = 0, \pi$, donde colapsa la esfera S^2 , como se muestra en la sección transversal obtenida a τ constante. El ángulo de cusp interno en la S^5 viene dado por $\theta = \vartheta(\pi) - \vartheta(0)$.

momentos conjugados a ϑ y A_τ , dados respectivamente por

$$\Pi_\vartheta = \frac{1}{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta'} = \frac{2}{\pi} \frac{u^2 \sin^2 \psi (1 + u^2) \vartheta'}{\sqrt{(1 + u^2) \left(u^2 + \frac{(u')^2}{1 + u^2} + (\vartheta')^2 \right) + 4\pi^2 F_{\psi\tau}^2 / \lambda}}, \quad (4.5)$$

$$i\Pi_A = \frac{1}{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A'_\tau} = \frac{8\pi}{\lambda} \frac{u^2 \sin^2 \psi F_{\psi\tau}}{\sqrt{(1 + u^2) \left(u^2 + \frac{(u')^2}{1 + u^2} + (\vartheta')^2 \right) + 4\pi^2 F_{\psi\tau}^2 / \lambda}}. \quad (4.6)$$

En la segunda expresión de arriba, el momento para el campo A_μ se definió con un i para obtener de este modo una cantidad real, ya que en la teoría en espacio euclídeo el campo de gauge es de hecho imaginario. En cualquier caso, estas definiciones pueden invertirse para hallar ϑ' y $F_{\psi\tau}$ en términos de las dos constantes Π_ϑ y Π_A , que están asociadas directamente con el ángulo de cusp y el rango de la representación del lazo

de Wilson dual. Esto nos permite quedarnos con una única ecuación de movimiento dada para $u(\psi)$. Esta ecuación es altamente no lineal, y por lo tanto muy complicada,

$$\begin{aligned}
0 = & -16u^2 \sin^2 \psi (u^2 + 1) (u'^2 + u^4 + u^2)^2 \\
& \times \sqrt{\frac{\lambda \Pi_A^2 + 16u^6 \sin^4 \psi + 16u^4 \sin^4 \psi - 4\pi^2 \Pi_\vartheta^2 + \lambda \Pi_A^2 u^2}{(u^2 + 1) (u'^2 + u^4 + u^2)}} \\
& + u^6 (5\lambda \Pi_A^2 + 160 \sin^4 \psi u'^2 + 48 \sin^4 \psi - 4\pi^2 \Pi_\vartheta^2) \\
& + 4u^4 (\lambda \Pi_A^2 + u'^2 (\lambda \Pi_A^2 + 16 \sin^4 \psi) - 2\pi^2 \Pi_\vartheta^2) \\
& + 2u^8 (\lambda \Pi_A^2 + 48 \sin^4 \psi u'^2 + 80 \sin^4 \psi) \\
& - 2u^3 (16 \sin^3 \psi \cos \psi u'^3 + (\lambda \Pi_A^2 - 2\pi^2 \Pi_\vartheta^2) u'') \\
& - u^5 (u'' (\lambda \Pi_A^2 + 16 \sin^4 \psi) + 32 \sin^3 \psi \cos \psi u'^3 + 32 \sin^3 \psi \cos \psi u') \\
& - 16u^9 \sin^3 \psi (\sin \psi u'' + 2 \cos \psi u') - 32u^7 \sin^3 \psi (\sin \psi u'' + 2 \cos \psi u') \\
& + 64u^{12} \sin^4 \psi + 176u^{10} \sin^4 \psi + u (4\pi^2 \Pi_\vartheta^2 - \lambda \Pi_A^2) u'' \\
& + u^2 (\lambda \Pi_A^2 - 4\pi^2 \Pi_\vartheta^2 + 6 (\lambda \Pi_A^2 - 2\pi^2 \Pi_\vartheta^2) u'^2) + 2 (\lambda \Pi_A^2 - 4\pi^2 \Pi_\vartheta^2) u'^2.
\end{aligned}$$

En lo que sigue, resolvemos esta ecuación diferencial en dos límites particulares.

4.1.1. Ángulo de cusp pequeño

Consideramos primero el límite en el que el ángulo de cusp interno es pequeño, $\theta \ll 1$, que como veremos más adelante corresponde a tomar Π_ϑ pequeño. Para $\theta = 0$ la brana se encuentra fija en un punto de la esfera S^5 , y debemos recuperar la solución de D3-brana 1/2 BPS de [91],

$$u(\psi) = \frac{\kappa}{\sin \psi}, \quad \text{donde} \quad \kappa = \frac{k\sqrt{\lambda}}{4N}. \quad (4.7)$$

En esta expresión, k es un entero que determina la carga fundamental disuelta en el volumen de mundo de la brana, y se identifica vía la correspondencia AdS/CFT con el rango de la representación simétrica del grupo de gauge en la teoría conforme. Hacemos por lo tanto el ansatz que sigue para la coordenada $u(\psi)$ de la brana,

$$u(\psi) = \frac{\kappa}{\sin \psi} [1 + \Pi_\vartheta F_1(\psi) + \Pi_\vartheta^2 F_2(\psi) + \mathcal{O}(\Pi_\vartheta^3)], \quad (4.8)$$

que es básicamente una expansión alrededor del límite 1/2 BPS en el que la solución es dada por $u(\psi) = \kappa/\sin \psi$. Este límite fija además

$$\Pi_A = \frac{4\kappa}{\sqrt{\lambda}} = \frac{k}{N}, \quad (4.9)$$

que es lo que vamos a usar en el desarrollo que sigue. Expandiendo la ecuación de movimiento de $u(\psi)$ para Π_ϑ pequeño, encontramos

$$\begin{aligned} 2 \sin 2\psi F_1'(\psi) + (1 + 2\kappa^2 - \cos 2\psi) F_1''(\psi) &= 0, \\ 2 \sin 2\psi F_2'(\psi) + (1 + 2\kappa^2 - \cos 2\psi) F_2''(\psi) &= \frac{\pi^2}{1 + 2\kappa^2 - \cos 2\psi}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

cuya solución es

$$F_1(\psi) = 0 \quad , \quad F_2(\psi) = \frac{\pi^2}{8\kappa^2(1 + \kappa^2)} \left(\arctan^2 \left(\frac{\kappa \cot \psi}{\sqrt{1 + \kappa^2}} \right) - \frac{\pi^2}{4} \right). \quad (4.11)$$

En esta solución las constantes de integración fueron fijadas de modo que

$$F_i(0) = 0 \quad \text{y} \quad F_i'(\pi/2) = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, 2. \quad (4.12)$$

La primera condición implica que en el borde la brana reproduce la solución 1/2 BPS dada por [91], mientras que la segunda condición garantiza un perfil suave, sin quiebres en el punto medio. Observamos sin embargo que la función $F_2(\psi)$ en (4.11) puede usarse para representar la configuración en el rango completo $0 \leq \psi \leq \pi$.

En este punto, debemos evaluar la acción (4.3) on-shell, expandiéndola previamente para $\Pi_\vartheta \ll 1$. Encontramos de este modo

$$S_{\text{DBI}} + S_{\text{WZ}} = -TN \frac{\pi^2}{4} \frac{\kappa}{(1 + \kappa^2)^{3/2}} \Pi_\vartheta^2 + \mathcal{O}(\Pi_\vartheta^4), \quad (4.13)$$

donde $T = \int d\tau$ es un cutoff infrarrojo para la extensión de la brana en la dirección τ . Si bien este resultado es finito, debemos de todos modos incluir los términos de borde adecuados para los campos. Como vimos anteriormente, estos tienen la forma de transformadas de Legendre,

$$S_{\text{borde}} = - \int d\tau (u \Pi_u + A_\tau \Pi_A) \Big|_{\psi=0}^{\psi=\pi}, \quad (4.14)$$

y modifican las condiciones de contorno de los campos correspondientes intercambiando condiciones tipo Neumann y Dirichlet [56, 91]. Más concretamente, tenemos

$$S_{\text{borde}} = TN \frac{\pi^2}{4} \frac{1 + 2\kappa^2}{\kappa(1 + \kappa^2)^{3/2}} \Pi_\vartheta^2 + \mathcal{O}(\Pi_\vartheta^4), \quad (4.15)$$

de modo que reuniendo ambas contribuciones obtenemos

$$\log \langle W_E[\mathcal{C}_\mathcal{L}, \mathcal{S}_k] \rangle = -TN \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\kappa \sqrt{1 + \kappa^2}} \Pi_\vartheta^2 + \mathcal{O}(\Pi_\vartheta^4). \quad (4.16)$$

Para convertir Π_ϑ en esta expresión en una dependencia explícita en el ángulo de cusp interno, vemos que por definición

$$\theta = \int_0^\pi d\psi \vartheta'(\psi). \quad (4.17)$$

A primer orden en el ángulo de cusp pequeño, esta relación resulta ser

$$\Pi_\vartheta = \frac{2\kappa\sqrt{1+\kappa^2}}{\pi^2}\theta + \mathcal{O}(\theta^2), \quad (4.18)$$

lo que nos da finalmente

$$\log \langle W_E[\mathcal{C}_\angle, \mathcal{S}_k] \rangle = -T \frac{N}{\pi^2} \kappa \sqrt{1+\kappa^2} \theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4). \quad (4.19)$$

Esto significa que en el régimen de acoplamiento fuerte la función de Bremsstrahlung es

$$B_{\mathcal{S}_k} \simeq \frac{N}{\pi^2} \kappa \sqrt{1+\kappa^2} \quad \text{para} \quad N, \lambda \gg 1 \quad \text{y todo} \quad \kappa. \quad (4.20)$$

El mismo límite de acoplamiento fuerte para la función de Bremsstrahlung de cargas en la representación totalmente simétrica puede extraerse directamente de [92], donde se considera una carga siguiendo una trayectoria hiperbólica. Más recientemente, se construyeron D3-branas duales a cargas que siguen trayectorias tipo tiempo arbitrarias, y el cálculo de su potencia radiada es asimismo consistente con nuestro resultado [76]. Vale notar por último que el límite $k \rightarrow 1$ de (4.20) coincide con el límite $N \rightarrow \infty$ y $\lambda \rightarrow \infty$ del resultado exacto para la representación fundamental, dado por (3.39).

4.1.2. Límite de κ grande

Un segundo límite interesante que podemos considerar corresponde a $\kappa \gg 1$. Para la solución de ángulo de cusp pequeño hallada anteriormente este límite es

$$u(\psi) = \frac{\kappa}{\sin \psi} \left(1 - \frac{\pi^2}{8} \psi(\pi - \psi) \frac{\Pi_\vartheta^2}{\kappa^4} + \dots \right), \quad (4.21)$$

y vemos que las correcciones se organizan en potencias de $\frac{\Pi_\vartheta}{\kappa^2}$. Esto sugiere la definición de un nuevo parámetro de expansión,

$$\pi_\vartheta = \frac{\pi^2}{2\kappa^2} \Pi_\vartheta, \quad (4.22)$$

que vamos a dejar fijo a medida que κ y Π_ϑ van a infinito. Hacemos entonces el siguiente ansatz para un ángulo de cusp θ arbitrario

$$u(\psi) = \frac{\kappa}{\sin \psi} F(\psi), \quad (4.23)$$

lo cual resulta en la ecuación de movimiento válida para κ grande y π_ϑ fijo

$$4F^3 F'' - \pi^2 \pi_\vartheta^2 = 0. \quad (4.24)$$

La solución de esta ecuación con $F(0) = F(\pi) = 1$ tal que $F(\psi) \rightarrow 1$ cuando $\pi_\vartheta \rightarrow 0$ es

$$F(\psi) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\pi^2 - 2\psi(\pi - \psi) \left(1 - \sqrt{1 - \pi_\vartheta^2}\right)}. \quad (4.25)$$

Podemos ahora relacionar π_ϑ con el ángulo de cusp θ , de manera que para $0 \leq \pi_\vartheta \leq 1$

$$\theta = \int_0^\pi d\psi \vartheta'(\psi) = \int_0^\pi d\psi \frac{\pi \pi_\vartheta}{\pi^2 - 2\psi(\pi - \psi) \left(1 - \sqrt{1 - \pi_\vartheta^2}\right)} + \mathcal{O}(\kappa^{-1}) \quad (4.26)$$

$$= \arcsin \pi_\vartheta + \mathcal{O}(\kappa^{-1}). \quad (4.27)$$

Como hicimos antes, queremos calcular la acción (4.3) on-shell, y en el límite de κ grande esta se reduce a

$$S_{\text{DBI}} + S_{\text{WZ}} = -T \frac{2N\kappa^2}{\pi^2} \left(1 - \sqrt{1 - \pi_\vartheta^2}\right) + \mathcal{O}(\kappa) \quad (4.28)$$

$$= -T \frac{2N\kappa^2}{\pi^2} (1 - \cos \theta) + \mathcal{O}(\kappa). \quad (4.29)$$

Para los términos de borde tenemos

$$S_{\text{borde}} = T \frac{4N\kappa^2}{\pi^2} (1 - \cos \theta) + \mathcal{O}(\kappa), \quad (4.30)$$

de modo que a fin de cuentas

$$\log \langle W_E[\mathcal{C}_\perp, \mathcal{S}_k] \rangle = -T \frac{2N\kappa^2}{\pi^2} (1 - \cos \theta) + \mathcal{O}(\kappa). \quad (4.31)$$

La dimensión anómala de cusp para un ángulo de cusp θ genérico en el límite de κ grande es entonces

$$\Gamma_{\text{cusp}}^{\mathcal{S}_k}(0, \theta) = \frac{2N\kappa^2}{\pi^2} (1 - \cos \theta) \quad \text{para} \quad \kappa, N, \lambda \gg 1 \quad \text{y todo} \quad \theta. \quad (4.32)$$

De (4.32) podemos extraer la función de Bremsstrahlung realizando una expansión para ángulos pequeños, $\theta \ll 1$. Por supuesto, el resultado coincide con el límite de $\kappa \gg 1$ de (4.11), siendo

$$B_{\mathcal{S}_k} = \frac{k^2 \lambda}{16\pi^2 N} \quad \text{para} \quad N, \lambda \gg 1. \quad (4.33)$$

Esto concuerda perfectamente con la predicción proveniente de la teoría de gauge obtenida en [93] mediante la técnica de localización supersimétrica. Esto puede considerarse como un chequeo no trivial de la conjetura (3.37) de [53] para representaciones distintas a la fundamental.

4.2. Análisis perturbativo

Nos interesa ahora conectar los resultados obtenidos en la sección anterior desde el punto de vista de la supergravedad con un análisis perturbativo cuando el acoplamiento de 't Hooft es pequeño. En particular, nos vamos a concentrar en el estudio de líneas de Wilson en la representación totalmente simétrica de rango k en el régimen de κ grande, y observamos que cuando el acoplamiento es débil esta condición implica $k \gg N$. Vamos a mostrar que en este límite los diagramas tipo ladder son los únicos que contribuyen al valor de expectación del operador. Lo que es más, la serie perturbativa completa se exponencia, de manera que la dimensión anómala de cusp (4.32) resulta ser determinada simplemente por el resultado a primer orden del acoplamiento débil. La exponenciación correspondiente aparentemente se debe sólo al comportamiento de los factores de color en éste límite, y no guarda relación con la geometría específica del loop de Wilson considerado. Esta observación será clave para proponer la conjetura (4.1), así como para elaborar un chequeo más fuerte de la misma a ser presentado en la próxima sección.

El análisis perturbativo comienza por la expansión de la línea de Wilson a orden cuadrático en los campos. El contorno del lazo de Wilson con cusp en $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills puede ser parametrizado como

$$x^\mu(s) = \left(s \cos \frac{\phi}{2}, -|s| \sin \frac{\phi}{2}, 0, 0 \right) \quad , \quad n^I(s) = \left(\cos \frac{\theta}{2}, \text{sgn}(s) \sin \frac{\theta}{2}, 0, 0, 0, 0 \right) \quad , \quad (4.34)$$

donde s es el parámetro sobre la curva y $\text{sgn}(s)$ es la función signo. En nuestro caso consideramos una recta en el espacio físico de modo que solamente es no trivial el acoplamiento a los campos escalares de la teoría. Sin embargo, por el momento vamos a mantener el cusp geométrico ϕ arbitrario, tomando $\phi = 0$ en el resultado obtenido más adelante.

El valor de expectación de vacío del operador de Wilson es a 1-loop²

$$\langle W_E[\mathcal{C}_\angle, \mathfrak{R}] \rangle \simeq 1 + \frac{\text{Tr}(T^a T^b)}{\dim(\mathfrak{R})} \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 \int_{s_1}^{\infty} ds_2 \left(n_1^I n_2^J \langle \Phi_I^a(x_1) \Phi_J^b(x_2) \rangle - \dot{x}_1^\mu \dot{x}_2^\nu \langle A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2) \rangle \right) . \quad (4.35)$$

Por brevedad, usamos la notación $x_i = x(s_i)$ y $n_i = n(s_i)$. Los generadores T^a están en la representación \mathfrak{R} del grupo de gauge $U(N)$. Usando los propagadores en el gauge

²Nótese que el factor $1/2!$ que viene del desarrollo de Taylor de la exponencial se compensa al elegir un orden particular sobre el camino, en este caso $s_2 \geq s_1$. Esto es válido para todos los órdenes de la expansión perturbativa.

de Feynman

$$\langle \Phi_I^a(x) \Phi_J^b(y) \rangle = \frac{g_{\text{YM}}^2}{4\pi^2} \frac{\delta^{ab} \delta_{IJ}}{|x-y|^2}, \quad \langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle = \frac{g_{\text{YM}}^2}{4\pi^2} \frac{\delta^{ab} \delta_{\mu\nu}}{|x-y|^2}, \quad (4.36)$$

es fácil ver que la contribución neta proviene de la región con $s_1 \leq 0$ y $s_2 \geq 0$, dando entonces

$$\langle W_E[\mathcal{C}_\angle, \mathfrak{R}] \rangle \simeq 1 + \frac{\text{Tr}(T^a T^a)}{\dim(\mathfrak{R})} \frac{g_{\text{YM}}^2}{4\pi^2} \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 \frac{\cos \phi - \cos \theta}{s_1^2 + s_2^2 + 2s_1 s_2 \cos \phi}. \quad (4.37)$$

El factor de color de esta contribución a 1-loop es

$$\text{Tr}(T^a T^a) = \dim(\mathfrak{R}) \frac{C_2(\mathfrak{R})}{2}, \quad (4.38)$$

donde $C_2(\mathfrak{R})/2$ es el coeficiente del operador de Casimir cuadrático de la representación \mathfrak{R} (ver el apéndice B para un resumen más detallado de las convenciones utilizadas). Las integrales en (4.37) son las mismas que aparecen en el caso de la representación fundamental [85], y al hacerlas llegamos a

$$\langle W_E[\mathcal{C}_\angle, \mathfrak{R}] \rangle = 1 - \frac{\lambda}{8\pi^2} \frac{C_2(\mathfrak{R})}{N} (\cos \phi - \cos \theta) \frac{\phi}{\sin \phi} \log \left(\frac{\Lambda_{\text{IR}}}{\Lambda_{\text{UV}}} \right) + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (4.39)$$

La presencia de las divergencias logarítmicas, reguladas aquí por la introducción de cutoffs en el infrarrojo y el ultravioleta, es típica de los contornos que tienen quiebres o auto-intersecciones, [56].

Para la representación totalmente simétrica de rango k , el resultado a 1-loop para la dimensión anómala de cusp es entonces

$$\Gamma_{\text{cusp}}^{\mathcal{S}_k}(\phi, \theta) = \frac{\lambda k(N+k-1)}{8\pi^2 N} (\cos \phi - \cos \theta) \frac{\phi}{\sin \phi} + \mathcal{O}(\lambda^2), \quad (4.40)$$

donde usamos que $C_2(\mathcal{S}_k) = k(N+k-1)$. Este resultado es válido para todo valor de k y N , y para ángulos de cusp ϕ y θ totalmente arbitrarios.

Resulta interesante en este punto considerar el límite de $\kappa \gg 1$ del resultado anterior para la representación totalmente simétrica, porque en este límite podemos comparar con el análisis a acoplamiento fuerte proveniente de la supergravedad³, ver 4.1.2. Cuando el acoplamiento es débil, κ grande implica $k \gg N$, de modo que tomando $\phi = 0$ la dimensión anómala de cusp (4.40) se torna

$$\Gamma_{\text{cusp}}^{\mathcal{S}_k}(0, \theta) = \frac{\lambda k^2}{8\pi^2 N} (1 - \cos \theta) + \mathcal{O} \left(\lambda^2, \frac{1}{k}, \frac{N}{k} \right). \quad (4.41)$$

³En toda esta sección consideramos implícitamente $N \gg 1$ para poder comparar el régimen perturbativo con el de acoplamiento fuerte a través de la conjetura AdS/CFT.

Resulta remarcable que, como habíamos anticipado, el resultado a 1-loop coincide con el resultado obtenido para acoplamiento fuerte, (4.32). En lo que sigue, vamos a argumentar que $\Gamma_{\text{cusp}}^{\mathcal{S}_k}$ no recibe correcciones de orden superior en el régimen $k \gg N$.

Para analizar las contribuciones a loops más altos, resulta conveniente clasificarlas en dos categorías, una correspondiente a los diagramas tipo ladder, que no contienen vértices internos, y la otra correspondiente a los diagramas que sí los tienen.

4.2.1. Diagramas ladder

El diagrama de 1-loop calculado en (4.37) es el diagrama tipo ladder más sencillo posible. Para $\phi = 0$ y un ángulo de cusp interno θ arbitrario es

$$\langle W_E[\mathcal{C}_\angle, \mathcal{S}_k]_{\text{lad}}^{(1)} \rangle = \frac{C_2(\mathcal{S}_k)}{2} \frac{\lambda}{4\pi^2 N} \int_0^\infty dt_1 \int_0^\infty ds_1 \frac{1 - \cos \theta}{(s_1 + t_1)^2}. \quad (4.42)$$

Para calcular los diagramas de orden superior, recordamos que cuando un propagador empieza y termina en la misma semi-recta la contribución correspondiente se anula [85]. Por lo tanto, a 2-loops hay dos tipos de diagramas:

$$\langle W_E[\mathcal{C}_\angle, \mathcal{S}_k]_{\text{lad}}^{(2)} \rangle = \frac{\text{Tr}(T^a T^a T^b T^b)}{\dim(\mathcal{S}_k)} \left(\frac{\lambda}{4\pi^2 N} \right)^2 \int_0^\infty dt_1 \int_0^\infty ds_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{s_1} ds_2 \frac{(1 - \cos \theta)^2}{(s_1 + t_1)^2 (s_2 + t_2)^2} \quad (4.43)$$

$$+ \frac{\text{Tr}(T^a T^b T^a T^b)}{\dim(\mathcal{S}_k)} \left(\frac{\lambda}{4\pi^2 N} \right)^2 \int_0^\infty dt_1 \int_0^\infty ds_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{s_1} ds_2 \frac{(1 - \cos \theta)^2}{(s_1 + t_2)^2 (s_2 + t_1)^2}. \quad (4.44)$$

La primera línea en (4.43) proviene del diagrama tipo ladder con dos escalones



Figura 4.2: Diagramas tipo ladder a 2-loops. El diagrama (a) tiene los escalones paralelos, mientras que el (b) los tiene cruzados.

paralelos, mientras que la segunda línea corresponde al diagrama con escalones que se cruzan, como se grafica en la figura 4.2. Ambos diagramas tienen distintos factores de color que provienen de tomar las trazas de los generadores en distinto orden. En

el caso de la representación totalmente simétrica, como se muestra en el apéndice B podemos ver que

$$\frac{\text{Tr}(T^a T^b T^a T^b)}{\text{Tr}(T^a T^a T^b T^b)} = 1 - \frac{N}{k(N+k-1)} + \frac{1}{(N+k-1)^2}. \quad (4.45)$$

En esta expresión, vemos que para la representación fundamental $k = 1$ y el diagrama tipo ladder que tiene un cruce es subdominante en el límite planar $N \rightarrow \infty$. Sin embargo, para $k > 1$ este diagrama contribuye al mismo orden que el de escalones paralelos, y debe por lo tanto tenerse en cuenta. Hacer esto para un caso totalmente general sería complicado, ya que son solamente los diagramas tipo ladder sin cruces los que pueden resumarse resolviendo una ecuación integral de Bethe-Salpeter, y es justamente esta la razón por la que el caso de la representación fundamental es particularmente simple.

Ahora bien, en el límite $k \gg 1$ también ocurre una simplificación crucial. A menos de términos de orden N/k^2 , tenemos de hecho

$$\text{Tr}(T^a T^b T^a T^b) \simeq \text{Tr}(T^a T^a T^b T^b) = \dim(\mathcal{S}_k) \left(\frac{C_2(\mathcal{S}_k)}{2} \right)^2, \quad (4.46)$$

como se ve en el apéndice B. El hecho de que los dos términos en (4.43) adquieren una normalización con el mismo factor de color hace que, combinando las integrales, el integrando sea simétrico frente al intercambio de los índices 1 y 2. Todas las integrales pueden entonces extenderse desde menos hasta más infinito, de manera que nos queda un único término, a saber

$$\begin{aligned} \langle W_E[\mathcal{C}_\angle, \mathcal{S}_k]_{\text{lad}}^{(2)} \rangle &\simeq \frac{1}{2} \left(\frac{C_2(\mathcal{S}_k)}{2} \frac{\lambda}{4\pi^2 N} \right)^2 \left(\int_0^\infty dt_1 \int_0^\infty ds_1 \frac{1 - \cos \theta}{(s_1 + t_1)^2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \langle W_E[\mathcal{C}_\angle, \mathcal{S}_k]_{\text{lad}}^{(1)} \rangle^2. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Para órdenes superiores aparecen más diagramas tipo ladder distintos, cada uno de los cuales tiene un factor de color diferente proveniente de tomar la traza de los generadores en un orden particular. Sin embargo, podemos verificar que a orden ℓ

$$\text{Tr}(T^{a_1} \dots T^{a_\ell} T^{\sigma(a_1)} \dots T^{\sigma(a_\ell)}) \simeq \text{Tr}(T^{a_1} T^{a_1} \dots T^{a_\ell} T^{a_\ell}) = \dim(\mathcal{S}_k) \left(\frac{C_2(\mathcal{S}_k)}{2} \right)^\ell, \quad (4.48)$$

para toda permutación σ de ℓ índices cuando $k \gg N$. Por lo tanto, la contribución de las integrales para k grande de los diagramas tipo ladder a ℓ -loops es

$$\sum_\sigma \prod_{i=1}^{\ell} \int_0^{t_{i-1}} dt_i \int_0^{s_{i-1}} ds_i \frac{1}{(s_i + t_{\sigma(i)})^2} = \frac{1}{\ell!} \left(\int_0^\infty dt_1 \int_0^\infty ds_1 \frac{1}{(s_1 + t_1)^2} \right)^\ell, \quad (4.49)$$

donde definimos $s_0 = t_0 = \infty$ y la suma se realiza sobre todas las permutaciones posibles de ℓ elementos. Tenemos entonces

$$\langle W_E[\mathcal{C}_\angle, \mathcal{S}_k]_{\text{lad}}^{(\ell)} \rangle \simeq \frac{1}{\ell!} \langle W_E[\mathcal{C}_\angle, \mathcal{S}_k]_{\text{lad}}^{(1)} \rangle^\ell, \quad (4.50)$$

lo cual resulta en una exponenciación eikonal de las contribuciones de los diagramas ladder a orden dominante en k grande, dada por

$$\langle W_E[\mathcal{C}_\angle, \mathcal{S}_k]_{\text{lad}} \rangle = \sum_{\ell=0}^{\infty} \langle W_E[\mathcal{C}_\angle, \mathcal{S}_k]_{\text{lad}}^{(\ell)} \rangle \simeq \exp \langle W_E[\mathcal{C}_\angle, \mathcal{S}_k]_{\text{lad}}^{(1)} \rangle. \quad (4.51)$$

Enfatizamos que este resultado es válido para la representación totalmente simétrica \mathcal{S}_k , cuando el rango k de dicha representación es muy grande, $k \gg N$.

4.2.2. Diagramas de interacción

Para demostrar la propuesta (4.1), debemos ver que los diagramas tipo ladder son la única contribución al orden dominante del valor de expectación del lazo de Wilson considerado. En principio, deberíamos considerar también los diagramas de interacción, que comienzan a contribuir a 2-loops como se ve en la figura 4.3. Sin necesidad de calcular explícitamente las integrales correspondientes, vamos a considerar los factores de color asociados a estos diagramas para argumentar que sus contribuciones son subdominantes en el régimen $k \gg N$.

Como diagramas de interacción a 2-loops tenemos la corrección por auto-interacción al propagador, así como el diagrama con un vértice interno de tres patas. La corrección



Figura 4.3: Diagramas de interacción a 2 loops. El diagrama (a) es la corrección de auto-interacción al propagador, mientras que el diagrama (b) corresponde a un vértice interno de tres patas.

por auto-interacción recibe contribuciones de todos los campos de la teoría, además de los campos fantasma. En cualquier caso, notamos que el factor global de color que acompaña a este diagrama es

$$\frac{g_{\text{YM}}^4}{\dim(\mathfrak{R})} \text{Tr}(R_j^i R_l^k) f_{imp}^{j n q} f_{knq}^{l m p} \propto \left(\frac{\lambda}{N} \right)^2 (N C_2(\mathfrak{R}) - C_1(\mathfrak{R})^2), \quad (4.52)$$

donde usamos la base canónica descrita en el apéndice B, en la que las constantes de estructura son $f_{jln}^{ikm} \propto \delta_l^i \delta_n^k \delta_j^m - \delta_j^k \delta_n^i \delta_l^m$.

El diagrama con un vértice interno de tres patas resulta de contraer el término de tercer orden en la expansión de Taylor de la exponencial en el loop de Wilson con los dos vértices de tres patas de la acción de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills, que son esquemáticamente $f^{mnp} (\partial A^m A^n A^p + \partial \Phi^m A^n \Phi^p)$. Esta contracción resulta en el mismo factor de color que (4.52),

$$\frac{g_{\text{YM}}^4}{\dim(\mathfrak{R})} \text{Tr}(R_i^j R_k^l R_m^n) f_{jln}^{ikm} \propto \left(\frac{\lambda}{N} \right)^2 (NC_2(\mathfrak{R}) - C_1(\mathfrak{R})^2). \quad (4.53)$$

Para las representaciones totalmente simétricas con $k \gg N \gg 1$, los coeficientes del p -ésimo Casimir son a primer orden $C_p(\mathcal{S}_k) \simeq k^p$. Por lo tanto, los diagramas de interacción a 2-loops están suprimidos por un factor N/k^2 si se los compara con la contribución a 2-loops de los diagramas tipo ladder, ver (4.47).

A órdenes mayores tenemos contribuciones de cada vez más diagramas. En la figura 4.4 se muestran algunos ejemplos de diagramas de 3-loops con cuatro patas sobre el lazo de Wilson.

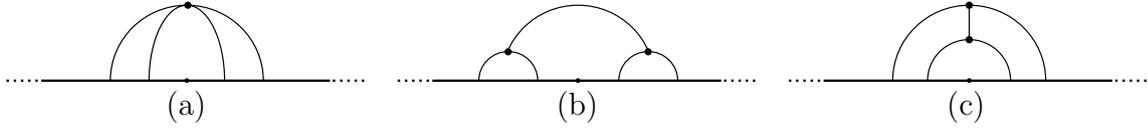


Figura 4.4: Algunos ejemplos de diagramas a 3-loops con cuatro patas sobre el lazo de Wilson.

En general, un diagrama de ℓ -loops lleva el acoplamiento $g_{\text{YM}}^{2\ell} = (\lambda/N)^\ell$, que se obtiene de unir P propagadores y V vértices siendo $\ell = P - V$. De los P propagadores, $P_{(i)}$ son internos, mientras que $P_{(e)}$ de los externos conectan al lazo con un vértice y los restantes $P_{(r)}$ son escalones que conectan dos puntos del lazo. De los V vértices, $V_{(3)}$ son de tres patas y contribuyen cada uno una constante de estructura f^{bcd} , mientras que $V_{(4)}$ son de cuatro patas y contribuyen en cambio un factor $f^{lmn} f^{lpq}$ cada uno. Los números de vértices y propagadores se relacionan entonces con el orden ℓ del diagrama según

$$\ell = P_{(i)} + P_{(e)} + P_{(r)} - V_{(3)} - V_{(4)} \quad , \quad 3V_{(3)} + 4V_{(4)} = 2P_{(i)} + P_{(e)}. \quad (4.54)$$

El factor de color de los diagramas correspondientes es

$$\frac{g_{\text{YM}}^{2\ell}}{\dim(\mathfrak{R})} \text{Tr}(T^{a_1} \dots T^{a_G}) \prod_{i=1}^{V_{(3)}} f^{b_i c_i d_i} \prod_{j=1}^{V_{(4)}} f^{l m_j n_j} f^{l p_j q_j} \sum_{(r,s) \in S} \prod_{\alpha=1}^P \delta^{r_\alpha s_\alpha}, \quad (4.55)$$

donde $G = P_{(e)} + 2P_{(r)}$ es el número de generadores y S es el conjunto de índices que pueden conectarse con los propagadores, que podemos especificar esquemáticamente como $S = \{(a, bcd), (a, mnpq), (bcd, mnpq)\}$, pero excluyendo los *tadpoles* producidos al tomar $(r, s) = (bcd, bcd)$ y $(r, s) = (mnpq, mnpq)$. Combinando las expresiones en (4.54), vemos que

$$G = 2\ell - V_{(3)} - 2V_{(4)}. \quad (4.56)$$

En general, la traza de G generadores resultará en una suma de términos de la forma

$$\prod_{s=1}^G C_s(\mathfrak{R})^{q_s} \quad , \quad \forall q_s : \quad 0 \leq q_s \leq G \quad \text{con} \quad \sum_{s=1}^G s q_s \leq G. \quad (4.57)$$

Luego, para las representaciones totalmente simétricas \mathcal{S}_k con $k \gg N$,

$$\prod_{s=1}^G C_s(\mathfrak{R})^{q_s} \lesssim k^G. \quad (4.58)$$

Esta cota puede no saturarse cuando la contracción de generadores consecutivos con constantes de estructura da lugar a conmutadores, que producen factores relativos de N/k . Aparece además un factor adicional de N por cada loop interno, pero esto requiere vértices adicionales de manera que al comparar con diagramas tipo ladder del mismo orden el factor relativo siempre es al menos N/k^2 . Por lo tanto, de (4.56) y (4.58) resulta claro que los diagramas tipo ladder dominan para cada orden ℓ fijo.

Podemos verificar estos argumentos generales para algunos ejemplos específicos de diagramas graficados en la figura 4.4. Dichos diagramas vienen acompañados de los factores de color

$$\frac{g_{\text{YM}}^6}{\dim(\mathfrak{R})} \text{Tr}(R_i^j R_k^l R_m^n R_p^q) f_{tjl}^{sik} f_{snq}^{tmp} \propto \left(\frac{\lambda}{N}\right)^3 N (NC_2(\mathfrak{R}) - C_1(\mathfrak{R})^2), \quad (4.59)$$

que para representaciones totalmente simétricas de rango $k \gg N$ están suprimidos por un factor $(N/k^2)^2$ cuando se los compara con los diagramas tipo ladder correspondientes.

Al mismo orden en λ , otra posibilidad es agregar un escalón a los diagramas a 2-loops que se grafican en la figura 4.3. Si el escalón es paralelo al ya existente, como en la figura 4.5 (a), el factor de color (4.53) adquiere un $\frac{\lambda}{N}C_2$ adicional. En cambio, si el nuevo escalón cruza al anterior, como en la figura 4.5 (b), el factor total se vuelve proporcional a $(\frac{\lambda}{N})^3(NC_2^2 + NC_1^2 - N^2C_2 - C_2C_1^2)$. En cualquier caso, para $k \gg N$ ambas contribuciones son subdominantes por un factor de N/k^2 cuando se las compara con los diagramas tipo ladder correspondientes al orden λ^3 .



Figura 4.5: Diagramas de 3-loops que se obtienen de agregar un escalón a los diagramas de interacción de 2-loops.

Dado que las interacciones no contribuyen al primer orden en $k \gg N$, vemos que en este límite

$$\langle W_E[\mathcal{C}_\angle, \mathcal{S}_k] \rangle \simeq \langle W_E[\mathcal{C}_\angle, \mathcal{S}_k]_{\text{lad}} \rangle \simeq \exp \left\langle W_E[\mathcal{C}_\angle, \mathcal{S}_k]_{\text{lad}}^{(1)} \right\rangle, \quad (4.60)$$

es decir que el resultado a 1-loop del diagrama ladder captura completamente el valor de expectación del operador.

Concluimos esta sección precisando un poco más el significado del límite $k \gg N$ que estamos considerando. Recordamos que si una D-brana es “demasiado pesada”, su reacción sobre la geometría puede deformar el espacio de fondo $AdS_5 \times S^5$. En el lenguaje de la teoría de gauge, esto ocurre cuando el operador insertado está en la misma escala de potencias de N que la acción, es decir N^2 . Por lo tanto, podemos evitar la reacción que deforma la geometría de fondo si tomamos $k \sim \mathcal{O}(N^\nu)$ con $1 < \nu < 2$, que es lo que supusimos implícitamente a lo largo de todo este desarrollo.

4.3. Exponenciación para contornos más generales

Los argumentos expuestos en la sección anterior no dependen de ningún detalle de la geometría del lazo de Wilson considerado, sino de consideraciones de teoría de grupos completamente generales. Esto sugiere que la exponenciación no está limitada al caso de líneas con quiebres, como anticipamos al comenzar este capítulo, y de hecho en [94] ya se había observado para el círculo 1/2 BPS. Ahora bien, el círculo es solo un representante de una familia infinita de operadores que genéricamente son 1/8 BPS y pueden definirse para contornos arbitrarios en una esfera bidimensional, siendo el valor de expectación de todos los miembros de dicha familia capturado por el mismo modelo matricial gaussiano [95–98]. La única diferencia es que el acoplamiento en el modelo de matrices se modifica a través de un factor que depende solamente de la geometría del lazo⁴, pero que es independiente de la representación \mathfrak{R} elegida. Por

⁴Más específicamente, si A_{in} y A_{out} son las áreas de las superficies de S^2 dentro y fuera del lazo, respectivamente, el acoplamiento en el modelo de matrices viene dado por $g_{\text{YM}}^2 \rightarrow g_{\text{YM}}^2 A_{\text{in}} A_{\text{out}} / 4\pi^2$.

lo tanto, una exponenciación similar debe ocurrir también para estos operadores, lo cual constituye un apoyo no trivial a favor de la generalidad de la propuesta (4.1).

En esta sección vamos a realizar una verificación más sofisticada de dicha propuesta, para lo cual consideramos un lazo de Wilson recto en $EAdS_5$ pero con una trayectoria arbitraria en el espacio interno S^5 . Dejamos entonces que el acoplamiento n^I a los escalares sea totalmente arbitrario a lo largo de la trayectoria, es decir que se trata de un vector unitario de \mathbb{R}^6 que depende del parámetro s de la curva. Como en todo este capítulo tomamos al lazo en la representación totalmente simétrica de rango k de $U(N)$, es decir que $\mathfrak{A} = \mathcal{S}_k$.

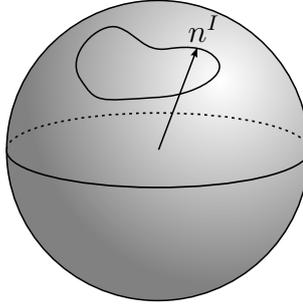


Figura 4.6: Trayectoria arbitraria en el espacio interno S^5 .

Para comparar con los resultados de supergravedad obtenidos en coordenadas globales, será conveniente realizar el mapeo del plano al cilindro para llevar el loop de Wilson recto a dos líneas antipodales en $\mathbb{R} \times S^3$. En las coordenadas (4.2) dichas rectas están en $\psi = 0$ y $\psi = \pi$, y podemos usar el tiempo global τ como parámetro sobre la curva. En estas coordenadas, la expansión a 1-loop (4.35) toma la forma

$$\langle W_E[\mathcal{C}, \mathcal{S}_k] \rangle \simeq 1 + \frac{\lambda}{32\pi^2} \frac{k^2}{N} \iint d\tau d\tau' \frac{1 - n_\psi^I(\tau) n_{\psi'}^I(\tau')}{\cosh(\tau - \tau') - \cos(\psi - \psi')} \Big|_{\psi, \psi'=0, \pi}, \quad (4.61)$$

donde ya consideramos los valores de las constantes dependientes de la representación en el límite $k \gg N$, y separamos la trayectoria $n^I(s)$ en dos partes $n_0^I(\tau)$ y $n_\pi^I(\tau)$. El segundo término en esta expresión deberá coincidir, para que se verifique (4.1), con menos la acción on-shell de la configuración de la D3-brana dual, que pasamos a estudiar a continuación.

4.3.1. D3-brana dual para k grande

Partimos de la acción para una D3-brana con volumen de mundo asintóticamente $AdS_2 \times S^2$, escrita en coordenadas globales similares a (4.2),

$$\frac{ds^2}{R^2} = \frac{du^2}{1+u^2} + (1+u^2) d\tau^2 + u^2 (d\psi^2 + \sin^2 \psi d\Omega_2^2) + d\Omega_5^2, \quad (4.62)$$

donde recuperamos la dependencia en todos los ángulos del espacio interno S^5 , que llamamos φ_i para $i = 1, \dots, 5$. El volumen de mundo de la D3-brana se extiende en las coordenadas $\zeta^I = (\tau, \psi, \theta, \phi)$, donde ahora θ y ϕ parametrizan la $S^2 \subset \text{AdS}_5$ (no confundir con los ángulos de cusp, que en este caso no están definidos). Hacemos el ansatz $u(\tau, \psi)$ y $\varphi_i(\tau, \psi)$, con el cual la parte de Dirac-Born-Infeld de la acción es

$$S_{\text{DBI}} = \frac{N}{2\pi^2} \int d^4\zeta \sqrt{\det \left(\frac{dx^\mu}{d\zeta^I} \frac{dx^\nu}{d\zeta^J} g_{\mu\nu} + \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} F_{IJ} \right)}, \quad (4.63)$$

donde suponemos que las únicas componentes no nulas del tensor de campo electromagnético son $F_{\psi\tau} = -F_{\tau\psi} = \partial_\psi A_\tau(\tau, \psi)$. Para el término de Wess-Zumino tenemos

$$S_{\text{WZ}} = -\frac{2N}{\pi} \int d\tau d\psi \sin^2 \psi u(\tau, \psi)^4, \quad (4.64)$$

donde ya realizamos la integración trivial sobre el factor S^2 . Dado que la acción $S = S_{\text{DBI}} + S_{\text{WZ}}$ solamente depende de $\partial_\psi A_\tau(\tau, \psi)$, podemos usar la ecuación de movimiento para $A_\tau(\tau, \psi)$ para introducir el momento

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{DBI+WZ}}}{\partial (\partial_\psi A_\tau)} = i\Pi_A(\tau), \quad (4.65)$$

donde como ya vimos el factor i asegura que $\Pi_A(\tau)$ es una cantidad real, siendo el campo de gauge imaginario en la teoría euclídea.

Podemos resolver esta ecuación para $A_\tau(\tau, \psi)$ en términos de $\Pi_A(\tau)$, $u(\tau, \psi)$ y $\varphi_i(\tau, \psi)$, para luego usar esto en las ecuaciones de movimiento restantes. Como vimos en el capítulo anterior, la información sobre el lazo de Wilson dual se encuentra codificada en el flujo eléctrico que lleva la D3-brana, así como en las condiciones de borde para las coordenadas de la brana. Para buscar soluciones a estas ecuaciones, vamos a considerar la deformación de la solución 1/2 BPS conocida en la literatura [63], de modo que generalizando (4.8) y (4.9) tomamos

$$u(\tau, \psi) = \frac{\kappa}{\sin \psi} f(\tau, \psi) \quad \text{y} \quad \Pi_A(\tau) = \frac{k}{N} p_A(\tau), \quad (4.66)$$

donde $\kappa = k\sqrt{\lambda}/4N$ como antes. Nótese que como queremos relacionar nuestra solución a un loop de Wilson en la representación totalmente simétrica de rango k , vamos a considerar desde ya $p_A(\tau) \mapsto 1$. Más aún, nos interesa exclusivamente el límite $k \rightarrow \infty$, en el que las ecuaciones de movimiento se simplifican drásticamente.

Antes de considerar el caso más general, comenzamos por analizar una trayectoria contenida en un $S^1 \subset S^5$. Por ejemplo, si tomamos $\varphi_1 = \dots = \varphi_4 = \frac{\pi}{2}$ tenemos

$$\Delta f = f |\vec{\nabla} \varphi_5|^2 \quad \text{y} \quad f \Delta \varphi_5 + 2 \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} \varphi_5 = 0, \quad (4.67)$$

donde $\Delta = \vec{\nabla}^2$ es el operador de Laplace. Las ecuaciones (4.67) deben ser resueltas con las condiciones de borde⁵

$$f(\tau, \psi) \Big|_{\psi=0, \pi} = 1 \quad , \quad \varphi_5(\tau, \psi) \Big|_{\psi=0, \pi} = a_\psi(\tau) , \quad (4.68)$$

para funciones arbitrarias $a_\psi(\tau)$ que corresponden en el lazo de Wilson dual a la elección

$$n_\psi^I(\tau) = (0, 0, 0, 0, \sin a_\psi(\tau), \cos a_\psi(\tau)) . \quad (4.69)$$

Para buscar las soluciones de estas ecuaciones de movimiento, perturbamos la solución 1/2 BPS con $f = 1$ y $\varphi_5 = 0$,

$$f(\tau, \psi) = 1 + \epsilon f_1(\tau, \psi) + \epsilon^2 f_2(\tau, \psi) + \dots , \quad (4.70)$$

$$\varphi_5(\tau, \psi) = \epsilon \phi_1(\tau, \psi) + \epsilon^2 \phi_2(\tau, \psi) + \dots , \quad (4.71)$$

e introducimos esta expansión en las ecuaciones (4.67). Encontramos de este modo que f_{2n+1} y ϕ_{2n} se anulan porque deben resolver la ecuación de Laplace con condiciones de borde tipo Dirichlet nulas. Los f_{2n} y ϕ_{2n-1} son no nulos y satisfacen

$$\Delta f_{2n} = \sum_{j=0}^{n-1} f_{2j} \sum_{i=1}^{n-j} \vec{\nabla} \phi_{2i-1} \cdot \vec{\nabla} \phi_{2(n-j)-(2i-1)} , \quad (4.72)$$

$$\Delta \phi_{2n-1} = - \sum_{i=1}^n 2 \vec{\nabla} f_{2i} \cdot \vec{\nabla} \phi_{2n-2i+1} + f_{2i} \Delta \phi_{2n-2i+1} , \quad (4.73)$$

donde definimos por conveniencia $f_0(\tau, \psi) = 1$. Para hallar la solución del sistema (4.72)-(4.73), es conveniente definir funciones g_n tales que

$$g_n = \begin{cases} f_n & \text{si } n \text{ es par ,} \\ i\phi_n & \text{si } n \text{ es impar ,} \end{cases} \quad (4.74)$$

lo cual nos permite escribir la ecuación para el m -ésimo coeficiente g_m en términos de ciertas particiones ordenadas y restringidas P_m^{1e} del número m ,

$$\Delta \left(\sum_{\mathcal{Y} \in P_m^{1e}} \prod_{y_i \in \mathcal{Y}} g_{y_i} \right) = 0 , \quad (4.75)$$

⁵En nuestro caso, hay dos condiciones de borde, una en $\psi = 0$ y la otra en $\psi = \pi$, de modo que tendríamos

$$\varphi_5(\tau, 0) = a_0(\tau) \quad y \quad \varphi_5(\tau, \pi) = a_\pi(\tau) .$$

donde los elementos de P_m^{1e} contienen a lo sumo un elemento par. Si excluimos la partición trivial, la solución para el coeficiente g_m viene dada en términos de los anteriores,

$$g_m = - \sum_{\mathcal{Y} \in P_m^{1e'}} \prod_{y_i \in \mathcal{Y}} g_{y_i}, \quad (4.76)$$

donde la suma es ahora sobre las particiones no-triviales y ordenadas $P_m^{1e'}$ que contienen a lo sumo un elemento par. Estas particiones restringidas, junto con sus correspondientes coeficientes, pueden ser codificadas convenientemente en la siguiente función generatriz,

$$\begin{aligned} Z(\epsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k} \epsilon^{2k} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (g_{2n-1} \epsilon^{2n-1})^l \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k} \epsilon^{2k} \exp \left(i \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{2n-1} \epsilon^{2n-1} \right) = f e^{i\varphi_5}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

La ecuación (4.75) asegura que el laplaciano de esta función generatriz se anula. Esto significa que expandir alrededor de la solución BPS era innecesario, dado que con un cambio de variables adecuado el sistema (4.67) podría haberse desacoplado y linearizado. En efecto, si definimos la función compleja $Z(\tau, \psi) = f(\tau, \psi) e^{i\varphi_5(\tau, \psi)}$ vemos que

$$\Delta Z = e^{i\varphi_5} \left(\Delta f - f |\vec{\nabla} \varphi_5|^2 \right) + i e^{i\varphi_5} \left(f \Delta \varphi_5 + 2 \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} \varphi_5 \right). \quad (4.78)$$

Luego $\Delta Z = 0$ es equivalente al sistema original, (4.67). Para resolver la ecuación de Laplace con condiciones de contorno de Dirichlet, es decir

$$\Delta Z = 0 \quad \text{con} \quad Z \Big|_{\psi=0, \pi} = e^{i a_\psi(\tau)}, \quad (4.79)$$

podemos usar el método de la función de Green. En nuestro caso el dominio es una banda bidimensional con bordes en $\psi = 0$ y $\psi = \pi$, de modo que usamos la función de Green

$$G(\tau, \psi; \tau', \psi') = \frac{1}{4\pi} \log \frac{\cosh(\tau - \tau') - \cos(\psi + \psi')}{\cosh(\tau - \tau') - \cos(\psi - \psi')}. \quad (4.80)$$

Luego la solución a este problema de Dirichlet es

$$Z(\tau, \psi) = \int d\tau' \partial'_\perp G(\tau, \psi; \tau', \psi') e^{i a_{\psi'}(\tau')} \Big|_{\psi'=0, \pi}, \quad (4.81)$$

donde ∂'_\perp denota la derivada normal al borde saliendo del dominio, de manera que $\partial'_\perp = -\partial_{\psi'}$ en $\psi' = 0$ y $\partial'_\perp = +\partial_{\psi'}$ en $\psi' = \pi$.

Disponiendo de la intuición provista por el caso del contorno en S^1 , podemos proceder a resolver el caso de la trayectoria general en S^5 . Introduciendo la notación $\chi^a = (f, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5)$, las ecuaciones de movimiento en el límite de k grande se pueden escribir compactamente como

$$\Delta \chi^a = \Gamma^a_{bc} \vec{\nabla} \chi^b \cdot \vec{\nabla} \chi^c, \quad (4.82)$$

donde Γ^a_{bc} son los símbolos de Christoffel de \mathbb{R}^6 en coordenadas esféricas con f cumpliendo el rol del radio. Introduciendo coordenadas cartesianas X^I

$$\begin{aligned} X^1(\tau, \psi) &= f(\tau, \psi) \sin \varphi_1(\tau, \psi) \sin \varphi_2(\tau, \psi) \sin \varphi_3(\tau, \psi) \sin \varphi_4(\tau, \psi) \sin \varphi_5(\tau, \psi), \\ X^2(\tau, \psi) &= f(\tau, \psi) \sin \varphi_1(\tau, \psi) \sin \varphi_2(\tau, \psi) \sin \varphi_3(\tau, \psi) \sin \varphi_4(\tau, \psi) \cos \varphi_5(\tau, \psi), \\ X^3(\tau, \psi) &= f(\tau, \psi) \sin \varphi_1(\tau, \psi) \sin \varphi_2(\tau, \psi) \sin \varphi_3(\tau, \psi) \cos \varphi_4(\tau, \psi), \\ X^4(\tau, \psi) &= f(\tau, \psi) \sin \varphi_1(\tau, \psi) \sin \varphi_2(\tau, \psi) \cos \varphi_3(\tau, \psi), \\ X^5(\tau, \psi) &= f(\tau, \psi) \sin \varphi_1(\tau, \psi) \cos \varphi_2(\tau, \psi), \\ X^6(\tau, \psi) &= f(\tau, \psi) \cos \varphi_1(\tau, \psi), \end{aligned} \quad (4.83)$$

las ecuaciones (4.82) se tornan

$$\Delta X^I = 0, \quad (4.84)$$

debiendo ser resueltas con las condiciones de borde

$$X^I(\tau, \psi) \Big|_{\psi=0, \pi} = n^I_{\psi}(\tau). \quad (4.85)$$

Por lo tanto, en el límite de k grande la solución para una trayectoria arbitraria es

$$X^I(\tau, \psi) = \int d\tau' \partial'_{\perp} G(\tau, \psi; \tau', \psi') n^I_{\psi'}(\tau') \Big|_{\psi'=0, \pi}. \quad (4.86)$$

4.3.2. Evaluación on-shell

Para evaluar la acción on-shell, debemos considerar como lo hicimos anteriormente los términos de borde que acompañan a $S_{\text{DBI}} + S_{\text{WZ}}$, que tienen la forma

$$S_{\text{borde}} = - \int d\tau \left(u \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{DBI+WZ}}}{\partial(\partial_{\psi} u)} + A_{\tau} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{DBI+WZ}}}{\partial(\partial_{\psi} A_{\tau})} \right) \Big|_{\psi=0}^{\psi=\pi}. \quad (4.87)$$

El término de borde para A_{τ} puede reescribirse como una integral de volumen

$$\int d\tau A_{\tau}(\tau, \psi) \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{DBI+WZ}}}{\partial(\partial_{\psi} A_{\tau})} \Big|_{\psi=0}^{\psi=\pi} = Ni \int d\tau d\psi \partial_{\psi} A_{\tau}(\tau, \psi) \Pi_A(\tau), \quad (4.88)$$

y si hacemos lo propio para el término de borde para u , podemos escribir la acción on-shell completa como una integral sobre el volumen. Juntando todas las contribuciones, tenemos en el límite $k \rightarrow \infty$

$$S_{\text{on-shell}} = \frac{k^2 \lambda}{16\pi N} \int d\tau d\psi \left(\frac{1-f^2}{\sin^2 \psi} - |\vec{\nabla} f|^2 - 2f\Delta f + f^2 \sum_{i=1}^5 |\vec{\nabla} \varphi_i|^2 \prod_{j=1}^{i-1} \sin^2 \varphi_j + 2(\partial_\tau f)^2 + 2f(\cot \psi \partial_\psi f + \partial_\tau^2 f) \right). \quad (4.89)$$

Usando la ecuación de movimiento para f , que establece

$$\Delta f = f \sum_{i=1}^5 |\vec{\nabla} \varphi_i|^2 \prod_{j=1}^{i-1} \sin^2 \varphi_j, \quad (4.90)$$

podemos reescribirla como

$$S_{\text{on-shell}} = \frac{k^2 \lambda}{16\pi N} \int d\tau d\psi \left(\frac{1}{2} \Delta f^2 + \partial_\psi [\cot \psi (f^2 - 1) - \partial_\psi f^2] \right). \quad (4.91)$$

El segundo término en la expresión de arriba resulta al realizar la integración en un término de borde que se anula al tomar $f(\tau, \psi) \rightarrow 1$ allí. Si usamos además que $X^i X^i = f^2$, podemos ver que la acción on-shell se obtiene de evaluar la integral

$$S_{\text{on-shell}} = \frac{k^2 \lambda}{32\pi N} \int d\tau d\psi \Delta (X^I X^I) = \frac{k^2 \lambda}{16\pi N} \int d\tau X^I \partial_\perp X^I \Big|_{\psi=0, \pi}. \quad (4.92)$$

Usando la representación (4.86), esta toma la forma de una integral doble sobre el borde,

$$S_{\text{on-shell}} = \frac{k^2 \lambda}{16\pi N} \iint d\tau d\tau' \partial_\perp \partial'_\perp G(\tau, \psi; \tau', \psi') n_\psi^I(\tau) n_{\psi'}^I(\tau') \Big|_{\psi, \psi'=0, \pi}, \quad (4.93)$$

que tiene la forma genérica

$$\mathcal{I}[u, v] = \iint d\tau d\tau' u_\psi(\tau) v_{\psi'}(\tau') \partial_\perp \partial'_\perp G(\tau, \psi; \tau', \psi') \Big|_{\psi, \psi'=0, \pi}. \quad (4.94)$$

Se trata de hecho de cuatro integrales separadas según la elección de $\psi, \psi' = 0, \pi$, de manera que es conveniente ahora realizar un cambio de variables para juntarlas en una única integral. Tomamos para ello

$$x = e^\tau \cos \psi \quad \text{y} \quad y = e^\tau \sin \psi, \quad (4.95)$$

de modo que mapeamos la banda $(\tau, \psi) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$ en el semiplano $y > 0$, y entonces

$$\mathcal{I}[u, v] = \iint dx dx' u(x) v(x') \partial_y \partial_{y'} \tilde{G}(x, y; x', y') \Big|_{y, y'=0}. \quad (4.96)$$

En estas variables, la función de Green (4.80) toma la forma más sencilla

$$\tilde{G}(x, y; x', y') = \frac{1}{4\pi} \log \frac{(x - x')^2 + (y + y')^2}{(x - x')^2 + (y - y')^2}, \quad (4.97)$$

de modo que

$$\mathcal{I}[u, v] = \frac{1}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0} \iint dx dx' u(x) v(x') \frac{(x - x')^2 - y^2}{(y^2 + (x - x')^2)^2}. \quad (4.98)$$

Tomar el límite $y \rightarrow 0$ en este punto, es decir antes de realizar la integración, sería incorrecto porque nos dejaría con un integrando conteniendo un polo doble, que no sería físico. Por lo tanto, antes de tomar el límite reescribimos el integrando como una integral de valor principal,

$$\mathcal{I}[u, v] = \frac{1}{\pi^2} \lim_{y \rightarrow 0} \iint dx dx' u(x) v(x') \oint_{z \neq x} \frac{dz}{(z - x)^2} \left(\frac{y}{y^2 + (z - x')^2} - \frac{y}{y^2 + (x - x')^2} \right),$$

para luego introducir otra integración localizada por una delta de Dirac, y en última instancia replicar la expresión completa

$$\begin{aligned} \mathcal{I}[u, v] &= \lim_{y \rightarrow 0} \iint dx dx' u(x) v(x') \int dz \oint_{z \neq z'} \frac{dz \delta(z' - x)}{2\pi^2 (z - z')^2} \left(\frac{y}{y^2 + (z - x')^2} - \frac{y}{y^2 + (z' - x')^2} \right) \\ &+ \lim_{y \rightarrow 0} \iint dx dx' u(x) v(x') \int dz \oint_{z' \neq z} \frac{dz' \delta(z - x)}{2\pi^2 (z - z')^2} \left(\frac{y}{y^2 + (z' - x')^2} - \frac{y}{y^2 + (z - x')^2} \right). \end{aligned}$$

Si ahora tomamos el límite dentro de estas integrales obtenemos cuatro productos de deltas de Dirac, cuya combinación resulta en una integral convergente aun sin considerar su valor principal,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}[u, v] &= \iint dx dx' u(x) v(x') \iint dz dz' \frac{(\delta(z - x) - \delta(z' - x))(\delta(z' - x') - \delta(z - x'))}{2\pi(z - z')^2} \\ &= \iint dz dz' \frac{(u(z) - u(z'))(v(z') - v(z))}{2\pi(z - z')^2}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Podemos finalmente expresar este resultado en términos de las coordenadas originales. Para $z > 0$ tenemos que $z = e^\tau$ corresponde a la línea en $\psi = 0$, mientras que para $z < 0$ tomamos $z = -e^\tau$. Luego

$$\mathcal{I}[u, v] = -\frac{1}{4\pi} \iint d\tau d\tau' \frac{(u_\psi(\tau) - u_{\psi'}(\tau'))(v_\psi(\tau) - v_{\psi'}(\tau'))}{\cosh(\tau - \tau') - \cos(\psi - \psi')} \Big|_{\psi, \psi'=0, \pi}, \quad (4.100)$$

y aplicando este resultado en (4.93) llegamos a que

$$S_{\text{on-shell}} = -\frac{k^2 \lambda}{64\pi^2 N} \iint d\tau d\tau' \frac{[n_\psi^I(\tau) - n_{\psi'}^I(\tau')]^2}{\cosh(\tau - \tau') - \cos(\psi - \psi')} \Big|_{\psi, \psi'=0, \pi}. \quad (4.101)$$

Como n^I es un vector unitario, la acción on-shell resulta ser entonces

$$S_{\text{on-shell}} = -\frac{k^2\lambda}{32\pi^2 N} \iint d\tau d\tau' \frac{1 - n_{\psi}^i(\tau)n_{\psi'}^i(\tau')}{\cosh(\tau - \tau') - \cos(\psi - \psi')} \Big|_{\psi, \psi'=0, \pi}, \quad (4.102)$$

y esta expresión es exactamente menos la contribución a 1-loop del valor de expectación del lazo de Wilson en una representación de rango grande dada en (4.61).

El acuerdo entre la evaluación de la acción on-shell y el valor de expectación a 1-loop en el límite de k grande es indicador de que la exponenciación de diagramas tipo ladder propuesta en la sección anterior es correcta. Cabe resaltar que si bien la trayectoria del lazo de Wilson considerado en el espacio-tiempo es una recta, en el espacio interno se trata de una trayectoria completamente arbitraria. Por lo tanto, esta verificación de la exponenciación es mucho más general que la que habíamos hecho anteriormente, en la que el loop de Wilson tenía un cusp interno que corresponde a tomar una trayectoria con una función escalón en una $S^1 \subset S^5$. Se refuerza de este modo la idea de que la exponenciación de ladders en el límite de representaciones de rango grande ocurre para loops de Wilson arbitrarios, ya que este resultado a orden dominante en el rango k no depende de ningún argumento de supersimetría, es decir que no parece relacionado de forma evidente a un límite cuasi-BPS.

Concluimos este capítulo observando que la exponenciación observada es similar a la exponenciación eikonal abeliana de QED, según la cual el valor de expectación de vacío de un lazo de Wilson se calcula en forma exacta como la exponencial del resultado a 1-loop, dado por el propagador fotónico [99]. Para teorías no abelianas el valor de expectación de vacío del lazo de Wilson es la exponencial de una expresión más complicada, a la que no contribuye solamente el diagrama a 1-loop. Dado que la parte abeliana se exponencia, es posible escribir esta expresión en términos de un conjunto más pequeño de diagramas conocidos como redes [100–102]. Sin embargo, en el límite que consideramos todos estos diagramas son tales que su contribución a $\langle W_E[\mathcal{C}, \mathcal{S}_k] \rangle$ es subdominante frente a la parte abeliana que involucra potencias del Casimir cuadrático.

Capítulo 5

Integrabilidad en AdS/CFT

Clásicamente, un sistema es integrable en el sentido de Liouville si tiene $2n$ grados de libertad y n cargas conservadas, incluyendo al hamiltoniano, cuyos corchetes de Poisson se anulan. Es posible en este caso “resolver” el sistema, por lo que entendemos dejar expresadas las soluciones a las ecuaciones de movimiento en términos de las n cargas conservadas. Por analogía, decimos que un sistema cuántico es integrable cuando dispone de un conjunto infinito de cargas conservadas, lo cual generalmente está también asociado a la posibilidad de resolverlo exactamente, ya sea en su espectro o su evolución temporal. Si bien muchas veces la solución encontrada por la vía de la integrabilidad es en cierto sentido formal, en la medida en la que no aporta expresiones cerradas para todas las cantidades físicas relevantes, siempre implica una construcción explícita cuyas dificultades, de existir, resultan de tipo algebraico. Incluso en estos casos, como se trata de un método no perturbativo ofrece importantes ventajas sobre los enfoques más tradicionales, entre ellas la posibilidad de realizar expansiones sistemáticas a acoplamiento fuerte.

En el marco de la conjetura AdS_5/CFT_4 , la integrabilidad aparece en el límite planar $N \rightarrow \infty$ a ambos lados de la dualidad. En la teoría conforme, fue observada por primera vez en la expansión a 1-loop del operador de dilataciones de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills, [103]. Si bien los primeros resultados se obtuvieron para ciertos sectores del espectro de operadores de la teoría, más tarde pudo establecerse la integrabilidad del espectro completo a 1-loop, para luego extender este resultado a órdenes superiores [104–106]. Del lado de la gravedad, puede establecerse asimismo la integrabilidad clásica de la teoría de cuerdas supersimétrica en $AdS_5 \times S^5$, formulada en términos de un modelo σ no lineal [107]. Por lo tanto, es razonable esperar que la integrabilidad sea de hecho una propiedad no perturbativa que persiste independientemente del valor que tome el acoplamiento, y bajo esta suposición es posible avanzar considerablemente

hacia una descripción exacta en el acoplamiento para ciertos observables de interés en el contexto de la conjetura.

En este capítulo nos proponemos realizar una introducción a la integrabilidad tal como se presenta en la realización prototípica de la dualidad AdS/CFT que venimos considerando. Obviaremos por lo tanto toda mención a otras realizaciones de la conjetura, en las que también se observa bajo ciertas circunstancias la presencia de integrabilidad [108–112]. Nos limitaremos además a la discusión del tema en relación al cálculo de la dimensión conforme de los operadores de la teoría de gauge, dejando de lado otros contextos en los que se presentan sistemas integrables, como ser el cálculo de amplitudes de dispersión y loops de Wilson poligonales de lados nulos, [113].

Comenzamos considerando las consecuencias que trae la existencia de un conjunto infinito de cantidades conservadas en una teoría de campos relativista. Si bien como veremos más adelante este no es el caso que nos concierne en lo inmediato, resulta esclarecedor para establecer algunas de las propiedades y estructuras que son comunes a todos los sistemas integrables. Pasamos luego al estudio perturbativo del operador de dilataciones de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills, en el que podemos apreciar cómo es posible identificar el problema de la diagonalización de la matriz de mezcla de operadores con el de encontrar el espectro de una cadena de espines cuyo hamiltoniano es integrable. Esto motivará la discusión del ansatz de Bethe, así como su extensión a todo orden dada por el ansatz de Bethe asintótico. Habiendo expuesto esta herramienta fundamental, pasamos a considerar otros observables de la teoría conforme que presentan integrabilidad, como son los lazos de Wilson con inserciones de operadores. Estos pueden asociarse a cadenas de espines abiertas, en las que los extremos están fijos a un loop de Wilson que provee condiciones de borde que preservan la integrabilidad. Su estudio puede realizarse por medio del ansatz de Bethe de borde, o desde el punto de vista dual en términos de D-branas a las que están fijas cuerdas abiertas. Será en este último punto en el que nos enfocaremos en la sección final de este capítulo, presentando los resultados originales obtenidos en [18] para el factor de reflexión que adquieren las excitaciones de las cuerdas cuando se reflejan en dichas D-branas. Nótese que dejamos para el capítulo siguiente todo aquello que se relaciona con las correcciones por tamaño finito que recibe el ansatz de Bethe asintótico, algunas de las cuales serán relevantes para los sistemas estudiados aquí.

Corresponde terminar esta introducción aclarando que la integrabilidad en general, y la integrabilidad en la conjetura AdS/CFT en particular, son temas demasiado extensos para pretender cubrirlos por completo en esta tesis. Mencionamos entonces algunas de las referencias principales a las que el lector puede acudir para profundizar

en las cuestiones que aquí no se presentan, o cuya exposición se ve limitada por cuestiones de espacio. Para una introducción a la integrabilidad clásica, puede consultarse el libro clásico [114], o la más reciente revisión [115]. Para una exposición enfocada exclusivamente en las aplicaciones a la conjetura AdS/CFT la referencia ineludible es [116], que contiene buena parte de los temas que vamos a discutir en lo que sigue. Las referencias a otros trabajos donde se discuten algunas cuestiones más específicas se darán a lo largo del texto, a medida que sea relevante hacerlo.

5.1. Cargas conservadas y ecuación de Yang-Baxter

Consideremos una teoría de campos relativista en 1+1 dimensiones con partículas masivas identificadas por un índice a . La energía y el momento de estas partículas pueden parametrizarse con una *rapidity* $\theta \in \mathbb{R}$ según $E = m_a \cosh(\theta)$ y $p = m_a \sinh(\theta)$. Como la teoría es masiva, todas las interacciones son de corto alcance y el espacio de Hilbert se descompone por lo tanto en estados en los que las partículas se hallan muy separadas unas de otras, de modo que podemos considerarlas prácticamente libres. Las transiciones entre estos estados cuasi libres ocurren cuando las funciones de onda se solapan y las partículas interactúan.

Identificamos con $A_{a_i}(\theta_i)$ a una partícula de tipo a_i que se propaga con rapidity θ_i , y observamos que como tenemos una sola dimensión espacial el orden de una secuencia de símbolos de este tipo puede asociarse unívocamente al orden de las correspondientes partículas en el espacio. Vemos entonces que un estado cuasi libre de n partículas puede identificarse con la secuencia

$$|A_{a_1}(\theta_1) \cdots A_{a_n}(\theta_n)\rangle, \quad (5.1)$$

y diremos que este es un estado *entrante* si no presenta interacciones con $t \rightarrow -\infty$, mientras que será *saliente* si no presenta interacciones con $t \rightarrow +\infty$. En un estado entrante las rapidities están ordenadas en orden decreciente, mientras que en un estado saliente el orden de las mismas será creciente. Un estado arbitrario puede ser descrito en términos de una suma sobre estados asintóticos de este tipo. La relación entre ambas bases, es decir la evolución de un estado entrante en un estado saliente, es dada por la matriz de scattering o matriz S , que nos permite escribir al menos formalmente

$$|A_{a_1}(\theta_1) \cdots A_{a_n}(\theta_n)\rangle = \sum_{n'} \sum_{\{\theta'_i\}} S_{a_1 \cdots a_n}^{b_1 \cdots b_{n'}}(\theta_1, \dots, \theta_n; \theta'_1, \dots, \theta'_{n'}) |A_{b_1}(\theta'_1) \cdots A_{b_{n'}}(\theta'_{n'})\rangle, \quad (5.2)$$

donde la suma sobre los conjuntos $\{\theta'_i\}$ involucra en general una secuencia de integrales. La conservación de la energía y el momento totales por separado implica que también se conservan $\hat{Q}_{\pm 1} = \hat{E} \pm \hat{p}$, y esto impone una condición sobre los conjuntos de rapidities,

$$m_{a_1} e^{\pm\theta_1} + \cdots + m_{a_n} e^{\pm\theta_n} = m_{b_1} e^{\pm\theta'_1} + \cdots + m_{b_{n'}} e^{\pm\theta'_{n'}} , \quad (5.3)$$

que también podemos considerar como restricciones sobre la matriz S. De haber otras cargas conservadas, estas en general transformarán en representaciones de mayor orden del grupo de Lorentz en 1+1 dimensiones, es decir que sobre estados de una partícula tendremos

$$\hat{Q}_s | A_a(\theta) \rangle = q_a^{(s)} e^{s\theta} | A_a(\theta) \rangle , \quad (5.4)$$

donde $s \in \mathbb{Z}$ es el espín de Lorentz de la carga \hat{Q}_s . Vamos a concentrar nuestra atención sobre las cargas conservadas que provienen de integrales de densidades locales de carga, que no son el único tipo de cargas conservadas que puede haber en la teoría, pero que tienen la importante propiedad de que resultan aditivas cuando actúan sobre los estados cuasi libres,

$$\hat{Q}_s | A_{a_1}(\theta_1) \cdots A_{a_n}(\theta_n) \rangle = \left(q_{a_1}^{(s)} e^{s\theta_1} + \cdots + q_{a_n}^{(s)} e^{s\theta_n} \right) | A_{a_1}(\theta_1) \cdots A_{a_n}(\theta_n) \rangle . \quad (5.5)$$

Aplicada a (5.2), cada una de estas cargas dará lugar a una restricción análoga a (5.3), a saber

$$q_{a_1}^{(s)} e^{s\theta_1} + \cdots + q_{a_n}^{(s)} e^{s\theta_n} = q_{b_1}^{(s)} e^{s\theta'_1} + \cdots + q_{b_{n'}}^{(s)} e^{s\theta'_{n'}} , \quad (5.6)$$

y podemos imaginar que, dado un conjunto infinito de cargas de espín superior, las restricciones serán tan fuertes que la única forma de satisfacerlas será la trivial¹, es decir $n' = n$ con

$$\theta_i = \theta'_{\sigma_i} \quad \text{y} \quad q_{a_i}^{(s)} = q_{b_{\sigma_i}}^{(s)} \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, n \quad \text{y} \quad s \neq 0, \quad (5.7)$$

siendo σ una permutación de n elementos. Esto corresponde a establecer que en la teoría considerada no hay producción ni aniquilación de partículas, y que el conjunto de momentos de entrada es idéntico al conjunto de momentos de salida, a menos de un reordenamiento. Decimos en este caso que la matriz S es puramente elástica.

Para visualizar el efecto que tiene la existencia de cargas de espín superior recordemos que usando $\hat{Q}_{\pm 1}$ podemos construir el operador \hat{p} , que corresponde a una

¹Si bien para algunas teorías se podría en principio tener soluciones no triviales que satisfagan las infinitas restricciones impuestas, en general estas corresponderán a conjuntos de valores específicos de las rapidities de entrada θ_i que resultan no ser físicos desde un primer momento.

traslación constante en la dirección espacial. En general, utilizando dos cargas conjugadas \hat{Q}_s y \hat{Q}_{-s} podemos construir otra carga conservada \hat{p}_s que esencialmente corresponde a una traslación espacial que depende del momento como p^{s-1} , [117]. Si disponemos de hecho de una torre infinita de pares de cargas conjugadas con $s = 2, 3, \dots$, con una combinación lineal adecuada de las mismas podremos construir una carga conservada \hat{Q} que genera una traslación cuya dependencia en el momento es totalmente arbitraria, por ejemplo haciendo que \hat{Q} sólo afecte a las partículas con un momento específico. En un diagrama espacio-temporal, esto corresponde a desplazar horizontalmente la línea de mundo de las partículas con dicho momento en una distancia arbitraria, dejando fijas las demás líneas de mundo. Esto modifica la forma del diagrama, pero como \hat{Q} es una carga conservada sabemos que la amplitud de un proceso no puede verse afectada.

Si las líneas de mundo no fueran rectas infinitas, moviéndolas de este modo podríamos “desarmar” los puntos de interacción, lo cual no tiene sentido. Esta es la interpretación geométrica de las propiedades de la matriz S que habíamos enunciado antes, (5.7), pero tiene además una consecuencia adicional especialmente importante. Esta aparece por primera vez al considerar procesos $3 \rightarrow 3$, que con las restricciones impuestas podrían tener, en principio, interacciones entre las tres partículas presentes. Sin embargo, para que esto sea posible sus tres momentos deben ser diferentes, y entonces el hecho de que podamos desplazar horizontalmente cada una de las líneas de mundo por separado nos permite ver que la amplitud de este proceso debe ser idéntica a la de los procesos en los que la interacción es una secuencia de procesos $2 \rightarrow 2$, ver figura 5.1.

Esta propiedad se conoce como *relación triángulo-estrella* y da cuenta de la factorización de la matriz S [118], que puede extenderse a procesos con más partículas. En efecto, para todo proceso de la forma $n \rightarrow n$ por los argumentos expuestos arriba la matriz S debe descomponerse en un producto de factores correspondientes a procesos de tipo $2 \rightarrow 2$,

$$S_{a_1 \dots a_n}^{a_{\sigma_1} \dots a_{\sigma_n}} = \prod_{(i,j) \in \sigma} S_{a_i a_j}^{a_{\sigma_j} a_{\sigma_i}}(\theta_i, \theta_j). \quad (5.8)$$

Para el caso particular de los procesos $3 \rightarrow 3$ la igualdad de las dos descomposiciones posibles da cuenta de la condición conocida como *ecuación de Yang-Baxter*,

$$S_{a_1 a_2}^{c_2 c_1}(\theta_1, \theta_2) S_{c_1 a_3}^{b_3 b_1}(\theta_1, \theta_3) S_{c_2 c_3}^{b_2 b_3}(\theta_2, \theta_3) = S_{a_2 a_3}^{c_3 c_2}(\theta_2, \theta_3) S_{a_1 c_3}^{b_3 c_1}(\theta_1, \theta_3) S_{c_1 c_2}^{b_2 b_1}(\theta_1, \theta_2), \quad (5.9)$$

mientras que para procesos con más partículas no tenemos condiciones adicionales porque podemos utilizar repetidamente la relación anterior.

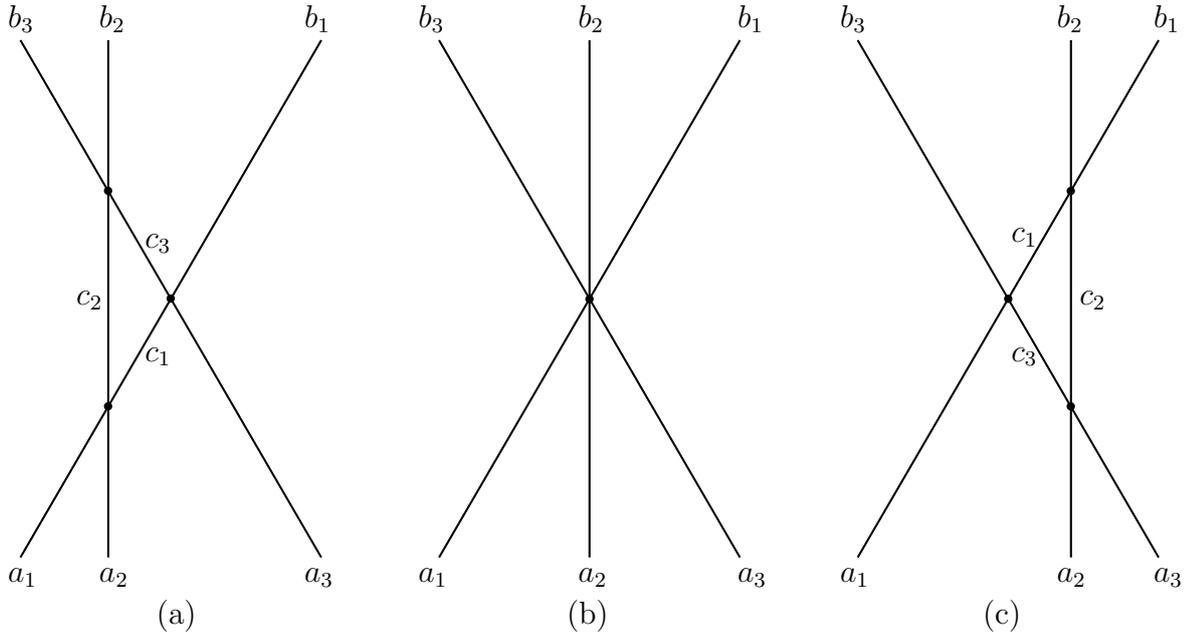


Figura 5.1: Tres formas distintas en las que puede ocurrir un proceso $3 \rightarrow 3$. En (a) y (c) todas las interacciones entre las partículas son de a pares, mientras que en (b) hay una interacción entre las tres partículas. En una teoría integrable estas tres opciones son equivalentes, y la igualdad de (a) y (c) resulta en la ecuación de Yang-Baxter.

Nótese que el razonamiento empleado hasta aquí se puede formalizar y generalizar de modo de no requerir dos cargas conjugadas, sino solamente una carga de orden positivo y otra de orden negativo con espines distintos de ± 1 respectivamente, que deberán provenir de integrales de densidades de carga locales en teorías masivas [119]. Otra generalización posible consiste en considerar teorías que no están definidas en un volumen infinito, sino en uno finito o semi-infinito. En este último caso, la dimensión espacial tiene un borde con el que las partículas pueden interactuar, siendo la interacción tal que se mantiene la integrabilidad del sistema. Para que esto ocurra, las partículas deben reflejarse en el borde al chocar con él, pero como éste puede tener grados de libertad internos la partícula reflejada no necesariamente es la misma que la incidente. Podemos describir el proceso haciendo uso de una matriz de reflexión $R_{ab}^{cd}(\theta)$, de modo que

$$|A_a(\theta)\rangle_b = \sum_{c,d} R_{ab}^{cd}(\theta) |A_c(-\theta)\rangle_d, \quad (5.10)$$

donde en el estado identificamos con un subíndice el grado de libertad de borde. Considerando la reflexión sucesiva de dos partículas en el mismo borde, e igualando como antes diagramas espacio-temporales en los que las líneas de mundo se han desplazado horizontalmente, podemos llegar a una relación equivalente a (5.9), ver figura 5.2. Esta se conoce como *ecuación de Yang-Baxter de borde*, y toma la forma

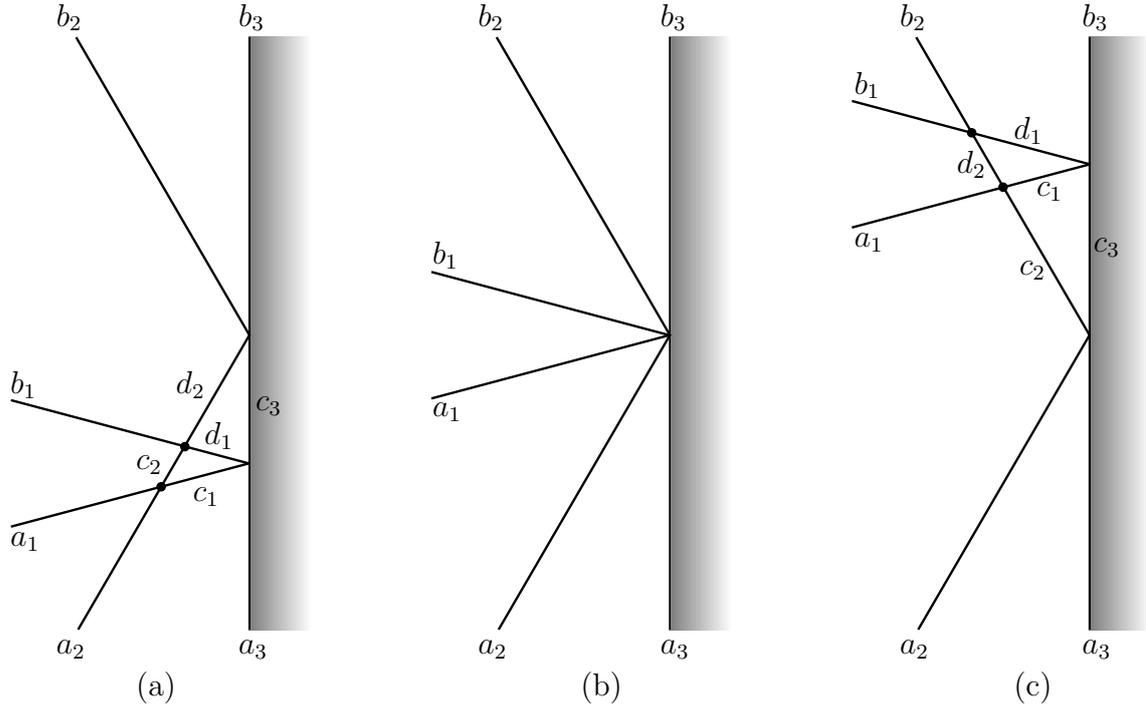


Figura 5.2: Tres formas distintas en las que puede ocurrir el proceso de reflexión de dos partículas en un borde. En (a) y (c) cada una de las partículas se refleja por separado e interactúa con la otra en el interior del espacio, mientras que en (b) hay una interacción simultánea entre ambas partículas y el borde. En una teoría integrable estas tres descripciones del proceso son equivalentes, y la igualdad de (a) y (c) resulta en la ecuación de Yang-Baxter de borde.

$$\begin{aligned}
S_{a_1 a_2}^{c_2 c_1}(\theta_1, \theta_2) R_{c_1 a_3}^{d_1 c_3}(\theta_1) S_{c_2 d_1}^{b_1 d_2}(\theta_2, -\theta_1) R_{d_2 c_3}^{b_2 b_3}(\theta_2) = \\
R_{a_2 a_3}^{c_2 c_3}(\theta_2) S_{a_1 c_2}^{d_2 c_1}(\theta_1, -\theta_2) R_{c_1 c_3}^{d_1 b_3}(\theta_1) S_{d_2 d_1}^{b_1 b_2}(-\theta_2, -\theta_1).
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Como en el caso de las interacciones en el interior del espacio, un proceso con más de dos reflexiones sucesivas no aportará nuevas condiciones, dado que podemos aplicar sucesivamente la propiedad anterior.

Finalmente, para definir una teoría integrable en un volumen finito no es necesario introducir nuevos ingredientes. Podemos optar por imponer condiciones de borde periódicas, en cuyo caso tendremos una condición de cuantización de los momentos de las partículas dada en términos de la matriz S , como así también es posible imponer condiciones de borde abiertas, resultando esto en una condición de cuantización de los momentos que involucra, además de la matriz S , a las matrices de reflexión en los bordes izquierdo y derecho. Presentaremos las ecuaciones correspondientes más adelante, cuando consideremos un ejemplo concreto de un modelo integrable junto a su solución en la sección 5.3.

Cabe mencionar un aspecto relevante que es particular de las teorías 1+1-di-

mensionales consideradas. En estas teorías, los desplazamientos en las trayectorias espacio-temporales de las partículas, que son posibles gracias a la existencia de cargas conservadas de espín mayor a uno, sólo pueden ocurrir en una única dirección espacial. Por lo tanto, si dos líneas se cruzan en un diagrama también se cruzarán una vez desplazadas, dado que son infinitas.

Más en general, si nos ocupáramos de teorías en $D = d+1$ dimensiones, deberíamos esperar que sean admisibles desplazamientos en las d dimensiones espaciales. En caso de que $d > 1$, las líneas que se cruzan en un diagrama pueden dejar de hacerlo una vez que son desplazadas. Este argumento provee un indicio de que en teorías $d+1$ -dimensionales con $d > 1$, si existen cargas conservadas de espín $|s| > 1$ todas las interacciones deben ser triviales, de modo que se trata de hecho de teorías libres. Este es, en efecto, un teorema demostrado rigurosamente por Coleman y Mandula en 1967, [120].

5.2. Operador de dilataciones a 1-loop

Como vimos en el capítulo 2, el espectro de dimensiones de escala de los operadores de la teoría conforme se relaciona vía la conjetura AdS/CFT con el espectro de energías de los campos duales en AdS. En esta sección nos proponemos por lo tanto iniciar el estudio perturbativo del operador de dilataciones de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills [121], con el objetivo de identificar estructuras integrables cuya generalización nos permita más adelante realizar una descripción no perturbativa, pasible de ser comparada con los resultados obtenidos en el régimen de acoplamiento fuerte a partir del límite de supergravedad de la teoría de cuerdas.

Para calcular la dimensión de escala de un operador O , podemos considerar la función de correlación de dicho operador con su conjugado, que por análisis dimensional es

$$\langle O(x)\bar{O}(y) \rangle \propto \frac{1}{|x-y|^{2\Delta}}. \quad (5.12)$$

La dimensión de escala de O es $\Delta = \Delta_0 + \gamma$, donde Δ_0 es la dimensión de escala “desnuda” correspondiente a la teoría libre, mientras que γ es la dimensión anómala debida a las correcciones cuánticas que aparecen cuando el acoplamiento g_{YM} es no nulo. En el régimen de acoplamiento débil, $\gamma \ll \Delta_0$ y podemos expandir

$$\langle O(x)\bar{O}(y) \rangle \propto \frac{1}{|x-y|^{2\Delta_0}} (1 - \gamma \log \Lambda^2 |x-y|^2 + \mathcal{O}(\gamma^2)), \quad (5.13)$$

donde Λ es un cutoff.

Ya mencionamos que los operadores invariantes de gauge en una teoría con grupo de gauge $SU(N)$ son trazas o productos de trazas de los campos de la teoría y sus derivadas. En el límite planar $N \rightarrow \infty$ las funciones de correlación de los operadores con productos de trazas están suprimidas por potencias de $1/N$, de manera que basta considerar los operadores que son trazas simples. Como $F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]$, podemos limitarnos también a la consideración de operadores en los que las derivadas que actúan sobre un mismo campo están simetrizadas, y usando las ecuaciones de movimiento es posible además reescribir ciertas combinaciones de derivadas actuando sobre los campos. En cualquier caso, como la parte bosónica del grupo de simetría $PSU(2, 2|4)$ es $SU(2, 2) \times SU(4)$, todo operador invariante de gauge tendrá asociadas seis cargas, $(\Delta, S_1, S_2, J_1, J_2, J_3)$. Además de la dimensión de escala Δ , estas corresponden a los espines S_1 y S_2 del grupo de Lorentz $SO(1, 3)$, y a las cargas J_1, J_2 y J_3 de la simetría $SO(6)_R$.

Vamos a concentrarnos por el momento en el sector $SO(6)$ de los campos escalares, de modo que un operador genérico tendrá la forma

$$O_{I_1 \dots I_L}(x) = \left(\frac{4\pi^2}{N} \right)^{L/2} \text{Tr}[\Phi_{I_1}(x) \cdots \Phi_{I_L}(x)], \quad (5.14)$$

donde introdujimos un factor de normalización que será conveniente más adelante. Para calcular funciones de correlación a nivel árbol usamos el propagador (4.36), que al absorber la constante de acoplamiento en los campos como hicimos en (2.26) resulta en²

$$\langle (\Phi_I)^i_j(x) (\bar{\Phi}_J)^k_l(y) \rangle = \frac{\delta_{IJ}}{4\pi^2} \frac{\delta^i_l \delta^k_j}{|x - y|^2}, \quad (5.15)$$

donde hicimos explícitos los índices de la representación adjunta de $SU(N)$. Entonces, tendremos a nivel árbol

$$\langle O_{I_1 \dots I_L}(x) \bar{O}_{J_1 \dots J_L}(y) \rangle_{(0\text{-loop})} = \frac{1}{|x - y|^{2L}} (\delta_{I_1 J_1} \cdots \delta_{I_L J_L} + \text{cicl.}) + \cdots, \quad (5.16)$$

siendo la suma sobre las permutaciones cíclicas de los índices J_1, \dots, J_L . El término escrito arriba es aquel que surge de las L contracciones planares posibles entre ambos operadores, cada una de las cuales provee un factor $N/4\pi^2$ compensando por la normalización, y los puntos suspensivos contienen todas las contribuciones de las contracciones no planares. Estas contribuciones vienen suprimidas por potencias de $1/N$,

²En el límite planar $N \rightarrow \infty$, podemos despreciar la diferencia entre $SU(N)$ y $U(N)$ dada por la condición $(\Phi_I)^i_i = 0$.

y serán subdominantes siempre que $L \ll N$, ya que de lo contrario la mayor proporción de diagramas no planares puede hacer que estos dominen frente a los diagramas planares.

Para calcular la corrección a 1-loop, debemos considerar los vértices de interacción de los campos escalares en la acción (2.26). Comenzando por el vértice de cuatro patas de los campos escalares dado por

$$S_{\Phi^4} = -\frac{1}{2g_{\text{YM}}^2} \int d^4z \text{Tr} [\Phi_I, \Phi_J]^2, \quad (5.17)$$

debemos insertarlo en el correlador contrayendo dos de sus campos con $O_{I_1 \dots I_L}(x)$ y los otros dos con $\bar{O}_{J_1 \dots J_L}(y)$. Para tener diagramas planares los campos contraídos con el vértice en $O_{I_1 \dots I_L}(x)$ y $\bar{O}_{J_1 \dots J_L}(y)$ deben ser vecinos, de modo que en el límite planar obtendremos términos de la forma

$$\begin{aligned} \langle O_{I_1 \dots I_L}(x) \bar{O}_{J_1 \dots J_L}(y) \rangle_{(1\text{-loop}, \Phi^4)} &= \frac{g_{\text{YM}}^2 N}{32\pi^4 |x-y|^{2L-4}} \int \frac{d^4z}{|x-z|^4 |y-z|^4} \\ &\times \sum_{k=1}^L \left(2\delta_{I_1 J_1} \cdots \delta_{I_k J_{k+1}} \delta_{I_{k+1} J_k} \cdots \delta_{I_L J_L} \right. \\ &\quad - \delta_{I_1 J_1} \cdots \delta_{I_k J_k} \delta_{I_{k+1} J_{k+1}} \cdots \delta_{I_L J_L} \\ &\quad \left. - \delta_{I_1 J_1} \cdots \delta_{I_k I_k} \delta_{J_{k+1} J_{k+1}} \cdots \delta_{I_L J_L} + \text{cicl.} \right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Aparece así el acoplamiento de 't Hooft $\lambda = g_{\text{YM}}^2 N$ como parámetro natural de la expansión, y vemos que la integral debe ser regularizada pasando a la signatura euclídea e introduciendo un cutoff ultravioleta Λ , resultando esto en

$$\int \frac{d^4z}{|x-z|^4 |y-z|^4} \simeq \frac{2}{|x-y|^4} \int_{1/\Lambda}^{|x-y|} \frac{d\xi}{\xi} d\Omega_3 = \frac{2\pi^2}{|x-y|^4} \log \Lambda^2 |x-y|^2. \quad (5.19)$$

Entonces la corrección a 1-loop debida al vértice de 4 patas de los campos escalares es en el límite planar

$$\begin{aligned} \langle O_{I_1 \dots I_L}(x) \bar{O}_{J_1 \dots J_L}(y) \rangle_{(1\text{-loop}, \Phi^4)} &= -\frac{\lambda}{16\pi^2} \frac{\log \Lambda^2 |x-y|^2}{|x-y|^{2L}} \\ &\times \sum_{k=1}^L (1 - 2P_{k,k+1} + K_{k,k+1}) \delta_{I_1 J_1} \cdots \delta_{I_L J_L} + \text{cicl.}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

donde $P_{k,k+1}$ es el operador que intercambia los índices k y $k+1$ y $K_{k,k+1}$ es el operador que los contrae, es decir que

$$P_{k,k+1} \delta_{I_1 J_1} \cdots \delta_{I_L J_L} = \delta_{I_1 J_1} \cdots \delta_{I_k J_{k+1}} \delta_{I_{k+1} J_k} \cdots \delta_{I_L J_L}, \quad (5.21)$$

$$K_{k,k+1} \delta_{I_1 J_1} \cdots \delta_{I_L J_L} = \delta_{I_1 J_1} \cdots \delta_{I_k I_{k+1}} \delta_{J_k J_{k+1}} \cdots \delta_{I_L J_L}. \quad (5.22)$$

A este resultado debemos agregarle la contribución de los propagadores gluónicos al orden 1-loop, que surgen de las interacciones de los escalares con el campo vectorial dentro de las derivadas covariantes de su término cinético. Sin embargo, dado que estos propagadores no tienen índices de color sabemos que su contribución será proporcional al resultado a nivel árbol (5.16), de modo que el resultado a 1-loop es

$$\begin{aligned} \langle O_{I_1 \dots I_L}(x) \bar{O}_{J_1 \dots J_L}(y) \rangle_{(1\text{-loop})} &= -\frac{\lambda}{16\pi^2} \frac{\log \Lambda^2 |x-y|^2}{|x-y|^{2L}} \\ &\times \sum_{k=1}^L (1 + C - 2P_{k,k+1} + K_{k,k+1}) \delta_{I_1 J_1} \cdots \delta_{I_L J_L} + \text{cicl.}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

para alguna constante C que podemos fijar considerando un operador específico. Definimos para ello las combinaciones complejas

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 + i\Phi_2) \quad , \quad W = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_3 + i\Phi_4) \quad \text{y} \quad X = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_5 + i\Phi_6), \quad (5.24)$$

que tienen $\Delta_0 = 1$, al igual que sus campos conjugados \bar{Z} , \bar{W} y \bar{X} . Las cargas R correspondientes son $J_1 = \pm 1$, $J_2 = \pm 1$ y $J_3 = \pm 1$ respectivamente, siendo las demás cargas nulas y el signo negativo válido para los campos conjugados. El operador $O_L(x) = (4\pi^2/N)^{L/2} \text{Tr}(Z^L)$ tiene entonces cargas $(L, 0, 0, L, 0, 0)$, donde $\Delta = \Delta_0$ porque al tener $\Delta_0 = J_1$ se trata de un operador quirral primario, que no recibe correcciones cuánticas en su dimensión de escala. Ahora bien, para este operador $K_{k,k+1} \mapsto 0$ porque $O_L(x)$ tiene solamente campos Z y no \bar{Z} , mientras que $P_{k,k+1} \mapsto 1$ porque se trata de un operador simétrico frente al intercambio de cualquier par de índices. Por lo tanto, la anulación del término de 1-loop para este operador implica $C = 1$, es decir que

$$\begin{aligned} \langle O_{I_1 \dots I_L}(x) \bar{O}_{J_1 \dots J_L}(y) \rangle_{(1\text{-loop})} &= -\frac{\lambda}{8\pi^2} \frac{\log \Lambda^2 |x-y|^2}{|x-y|^{2L}} \\ &\times \sum_{k=1}^L (1 - P_{k,k+1} + \frac{1}{2}K_{k,k+1}) \delta_{I_1 J_1} \cdots \delta_{I_L J_L} + \text{cicl.}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Comparando esta expresión con (5.13), podemos identificar al primer orden de la dimensión anómala $\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \Gamma_n / n!$ con

$$\lambda \Gamma_1 = \frac{\lambda}{8\pi^2} \sum_{k=1}^L (1 - P_{k,k+1} + \frac{1}{2}K_{k,k+1}). \quad (5.26)$$

La presencia de $P_{k,k+1}$ y $K_{k,k+1}$ en esta expresión da cuenta de la mezcla de operadores a 1-loop, y significa que el problema de hallar la dimensión anómala a este orden es equivalente al de diagonalizar el operador Γ_1 .

Podemos pensar a los operadores (5.14) como formando un espacio de Hilbert que es el producto tensorial de L representaciones vectoriales de $SO(6)$. La ciclicidad de la traza implica que en este espacio debemos restringirnos a los estados invariantes frente a un corrimiento en los índices $I_k \mapsto I_{k+1}$, corrimiento que claramente conmuta con Γ_1 . Como además Γ_1 actúa linealmente y es hermítico, podemos interpretarlo como un hamiltoniano para una cadena de L espines de $SO(6)$ con condiciones periódicas. Dado que $P_{k,k+1}$ y $K_{k,k+1}$ sólo operan sobre sitios contiguos de la cadena, esta tiene únicamente interacciones a primeros vecinos.

Si nos restringimos a un subespacio $SU(2) \subset SO(6)$, considerando por ejemplo solamente los operadores compuestos por campos Z y X , vemos que como no mezclamos campos conjugados $K_{k,k+1} \mapsto 0$ y el hamiltoniano toma la forma [103]

$$\lambda \Gamma_1^{SU(2)} = \frac{\lambda}{8\pi^2} \sum_{k=1}^L (1 - P_{k,k+1}). \quad (5.27)$$

Como veremos en la sección que sigue, este es el ejemplo paradigmático de un hamiltoniano integrable, correspondiente a la cadena de espines de Heisenberg.

Corresponde terminar esta sección con algunos comentarios respecto al resultado anterior. Este puede generalizarse a operadores compuestos por todos los campos de la teoría y sus derivadas, es decir que podemos identificar el problema de hallar la dimensión anómala de dichos operadores a 1-loop con el de diagonalizar un hamiltoniano para cierta cadena de espines. Como en el caso general podemos tener un número infinito de derivadas actuando sobre cada campo, el espacio de Hilbert de cada sitio de la cadena es una representación infinito-dimensional del grupo de simetrías completo $PSU(2, 2|4)$. El hamiltoniano correspondiente seguirá teniendo interacciones solamente a primeros vecinos, aunque ya no será en una forma tan sencilla como las presentadas hasta aquí [122, 123]. Se puede demostrar, sin embargo, que este hamiltoniano también es integrable.

En general, el estudio perturbativo del operador de dilataciones se realiza restringiendo los operadores considerados a ciertos sectores contenidos en el grupo completo $PSU(2, 2|4)$. En esta sección trabajamos en el sector $SO(6)$, quedándonos solamente al final con un subsector $SU(2) \subset SO(6)$. Podríamos habernos preguntado si esto era consistente, es decir si la mezcla de operadores no podría eventualmente llevarnos fuera de dicho sector. Para comprender por qué esto no ocurrió, debemos notar que el operador de dilataciones conmuta con los generadores de las simetrías de Lorentz

y R. Por lo tanto, no puede mezclarse operadores con distintos conjuntos de cargas conservadas, y esto debe respetarse orden a orden en la expansión perturbativa.

Los operadores del sector $SU(2)$ considerado tienen cargas $(L, 0, 0, L - K, 0, K)$, siendo L la cantidad total de operadores en la traza, y $L - K$ y K las cantidades de operadores Z y X respectivamente. Estos operadores sólo pueden mezclarse entre sí, de modo que el sector $SU(2)$ es cerrado a todo orden en λ . Al agregar un tercer campo escalar, tendremos operadores como $\text{Tr}(ZWX) \in SU(3)$, que tienen carga $(3, 0, 0, 1, 1, 1)$ y pueden mezclarse con la traza de dos fermiones de cargas $(\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. El sector cerrado a todo orden perturbativo que resulta de incorporar a dichos fermiones es el $SU(2|3)$, ver [124]. Como el sector $SO(6)$ contiene al $SU(3)$ anterior, no es cerrado a todo orden perturbativo. Sin embargo, como la mezcla con los fermiones cambia el número total de campos en el operador, y esto puede ocurrir a partir de 2-loops, el sector $SO(6)$ sí es cerrado a 1-loop, como ya vimos. Finalmente, mencionamos un último sector cerrado que difiere de los anteriores en tanto a cada sitio de la cadena de espines le corresponde una representación infinitodimensional del grupo. Se trata del sector $SU(1, 1)$, que contiene un único escalar Z sobre el que pueden actuar derivadas con una única polarización. El hamiltoniano correspondiente actúa moviendo las derivadas de un sitio a su vecino, y tiene un análogo en QCD [125–127].

5.3. Ansatz de Bethe

En la sección anterior vimos que el problema de encontrar la dimensión de escala a 1-loop de los operadores en el sector $SU(2)$ de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills es equivalente al de resolver el espectro del hamiltoniano (5.27), correspondiente a la cadena de espines de Heisenberg [128]. Dejamos entonces a un lado, por el momento, el contexto en el que surgió el problema, y nos enfocamos en su descripción en términos de una cadena de espines de $SU(2)$. En esta sección presentamos la solución a este problema hallada por Hans Bethe en 1931, [129], que servirá para introducir la herramienta principal que nos permite resolver sistemas integrables, conocida en la actualidad como *ansatz de Bethe*.

Consideramos entonces una cadena o red unidimensional con sitios identificados por un índice k , que toma valores que dependen de la geometría de la cadena. Cada uno de los sitios contiene un espín $s = 1/2$, es decir un doblete en la representación

fundamental de $SU(2)$ que puede ser un espín hacia arriba o hacia abajo,

$$\uparrow \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \downarrow \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (5.28)$$

El espacio de Hilbert correspondiente es

$$\mathcal{H} = \bigotimes_k V = \bigotimes_k \mathbb{C}^2 , \quad (5.29)$$

donde $V = \mathbb{C}^2$ es el espacio vectorial en el que se encuentra cada uno de los espines. Muchos de los operadores con los que vamos a trabajar actúan no trivialmente sobre un solo sitio de la cadena, de modo que introducimos la notación X_k para hacer referencia a un operador que actúa como

$$X_k = \underbrace{\mathbb{I} \otimes \cdots \otimes \mathbb{I} \otimes X \otimes \mathbb{I} \otimes \cdots \otimes \mathbb{I}}_{X \text{ en la posición } k} , \quad (5.30)$$

donde \mathbb{I} es la identidad en V y X es el operador correspondiente definido para un sitio. En particular, los operadores de espín sobre cada sitio de la cadena son

$$S_k^i = \frac{\sigma_k^i}{2} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3 , \quad (5.31)$$

donde las matrices σ_k^i actúan sobre el k -ésimo sitio de la cadena como las matrices de Pauli,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (5.32)$$

Definiendo convencionalmente un nuevo acoplamiento a través de $g = \sqrt{\lambda}/4\pi$, el hamiltoniano (5.27) toma la forma³

$$H_{\text{int}} = 2g^2 \sum_k (1 - P_{k,k+1}) , \quad (5.33)$$

donde como antes $P_{k,k+1}$ es el operador que permuta los espines en las posiciones k y $k + 1$. También puede reescribirse como

$$H_{\text{int}} = 4g^2 \sum_k \left(\frac{1}{4} - \vec{S}_k \cdot \vec{S}_{k+1} \right) , \quad (5.34)$$

y usando las reglas de conmutación $[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\varepsilon^{ijk}\sigma^k$ puede verse que se satisface $[S_k^i, S_{k'}^j] = i\varepsilon^{ijl}\delta_{k,k'}S_k^l$, de modo que los operadores de espín total definidos como

$$S^i = \sum_k S_k^i , \quad (5.35)$$

³Llamamos a este hamiltoniano *interior* porque para cadenas finitas y semi-infinitas deberán agregársele términos de borde para formar el hamiltoniano completo (no así para las cadenas infinita y periódica).

conmutan con el hamiltoniano, $[H_{\text{int}}, S^i] = 0$. El sistema preserva entonces la simetría $SU(2)$, y como en particular se conserva S^3 vemos que el hamiltoniano sólo puede mezclar estados con una cantidad fija de espines \uparrow y \downarrow (subespacios o *sectores* del espacio de Hilbert del problema). Por lo tanto, los autoestados del hamiltoniano tendrán un número definido de espines de cada tipo.

Definimos el vacío ferromagnético $|\emptyset\rangle$ como el estado que tiene espín \uparrow en todos los sitios de la cadena⁴, y observamos inmediatamente que al tratarse de un estado totalmente simétrico frente al intercambio de espines en posiciones contiguas, es un autoestado del hamiltoniano con autovalor nulo, $H_{\text{int}}|\emptyset\rangle = 0$. Este será el estado de referencia sobre el cual se propagarán impurezas de espín \downarrow , también conocidas como *magnones*. Estas impurezas son indistinguibles unas de otras, y gracias a la conservación de la componente del espín S^3 mencionada más arriba, es inmediato observar que el número de magnones es conservado. Esto significa que, como en el caso de las teorías de campos integrables, no hay en este modelo creación ni aniquilación de partículas.

Llamaremos $|k\rangle$ al estado con una impureza en la k -ésima posición de la cadena, de modo que por ejemplo la acción del operador $P_{k,k+1}$ sobre estados de este tipo es

$$\begin{aligned} P_{k,k+1}|k\rangle &= |k+1\rangle, \\ P_{k,k+1}|k+1\rangle &= |k\rangle, \\ P_{k,k+1}|k'\rangle &= |k'\rangle \quad \forall k' \neq k, k+1. \end{aligned}$$

Similarmente, podemos definir los estados de dos impurezas $|k, k'\rangle$ como aquellos que tienen un espín \downarrow en la posición k y otro en la posición $k' > k$. En general, para el sector con n impurezas en la cadena definimos los estados $|k_1, \dots, k_n\rangle$ como aquellos que tienen a las impurezas en los sitios $k_1 < \dots < k_n$.

Cadena infinita

Para el caso en el que la cadena es infinita tenemos que los sitios vienen identificados por $k = -\infty, \dots, \infty$. Comenzamos por considerar estados con un magnón, y observamos que si bien $|k\rangle$ no es un autoestado del hamiltoniano, podemos construir un estado tipo “onda plana”, definido como

$$|\varphi(p)\rangle = \sum_k e^{ipk} |k\rangle, \quad (5.36)$$

⁴Nótese que si bien utilizamos al espín \uparrow para definir al vacío ferromagnético, nada nos impediría usar al espín \downarrow en su lugar. Mientras se preserve la simetría $SU(2)$, todos los resultados obtenidos en uno y otro caso serán equivalentes, pero si esta simetría llegara a romperse una y otra descripción del sistema comenzarán a diferir en forma no trivial.

y verificamos en forma explícita que este sí es un autoestado del hamiltoniano, $H_{\text{int}} |\varphi(p)\rangle = 8g^2 \sin^2\left(\frac{p}{2}\right) |\varphi(p)\rangle$. Observamos de esta manera que los magnones poseen la relación de dispersión no relativista

$$E_p = 8g^2 \sin^2\left(\frac{p}{2}\right). \quad (5.37)$$

Para el sector con dos magnones, la superposición de dos ondas planas,

$$|\varphi(p_1, p_2)\rangle = \sum_{k < k'} e^{ip_1 k + ip_2 k'} |k, k'\rangle, \quad (5.38)$$

no es un autoestado del hamiltoniano, debido en particular a los términos en los que ambas impurezas son adyacentes. Vemos de hecho que

$$\begin{aligned} H_{\text{int}} |\varphi(p_1, p_2)\rangle &= (E_{p_1} + E_{p_2}) |\varphi(p_1, p_2)\rangle \\ &\quad - 2g^2 \sum_k e^{i(p_1 + p_2)k} (2e^{ip_2} - e^{ip_1 + ip_2} - 1) |k, k+1\rangle. \end{aligned} \quad (5.39)$$

En la terminología empleada en 5.1, el estado $|\varphi(p_1, p_2)\rangle$ es un estado entrante cuando $p_1 > p_2$, es decir cuando la impureza de la izquierda tiene mayor momento que la impureza de la derecha, mientras que es un estado saliente cuando $p_1 < p_2$. El *ansatz de Bethe* consiste en proponer que los autoestados del hamiltoniano tienen la forma

$$|\psi(p_1, p_2)\rangle = |\varphi(p_1, p_2)\rangle + S(p_1, p_2) |\varphi(p_2, p_1)\rangle, \quad (5.40)$$

es decir, proponemos que se trata de una superposición de un estado entrante y otro saliente, con un factor relativo $S(p_1, p_2)$ entre ambos. Llamamos a este último *factor de scattering*, y queda determinado cuando exigimos que se trate en efecto de un autoestado del hamiltoniano. Esto es, la condición $H_{\text{int}} |\psi(p_1, p_2)\rangle = (E_{p_1} + E_{p_2}) |\varphi(p_1, p_2)\rangle$ resulta en que debemos tomar

$$S(p_1, p_2) = -\frac{2e^{ip_2} - e^{ip_1 + ip_2} - 1}{2e^{ip_1} - e^{ip_1 + ip_2} - 1}, \quad (5.41)$$

o en términos de las rapidities definidas por $u_i = u(p_i)$ con $u(p) = \frac{1}{2} \cot \frac{p}{2}$,

$$S(u_1, u_2) = \frac{u_1 - u_2 - i}{u_1 - u_2 + i}. \quad (5.42)$$

Este procedimiento se puede generalizar para el sector del espacio de Hilbert con n impurezas. Construimos en este caso superposiciones de n ondas planas que tienen la forma

$$|\varphi(p_1, \dots, p_n)\rangle = \sum_{k_1 < \dots < k_n} e^{i \sum_{i=1}^n p_i k_i} |k_1, \dots, k_n\rangle, \quad (5.43)$$

y proponemos que los autoestados del hamiltoniano son

$$|\psi(p_1, \dots, p_n)\rangle = \sum_{\sigma \in \Pi_n} S(p_{\sigma_1}, \dots, p_{\sigma_n}) |\varphi(p_{\sigma_1}, \dots, p_{\sigma_n})\rangle, \quad (5.44)$$

donde Π_n es el conjunto de las permutaciones de n elementos. El hecho de que el sistema sea integrable nos permite asegurar que el factor de scattering de n impurezas siempre puede factorizarse en un producto de factores de scattering de dos impurezas, que ya evaluamos en (5.41). Así, para cada $\sigma \in \Pi_n$ podemos escribir en forma análoga a (5.8)

$$S(p_{\sigma_1}, \dots, p_{\sigma_n}) = \prod_{(i,j) \in \sigma} S(p_i, p_j), \quad (5.45)$$

donde la productoria recorre todos los pares de trasposiciones de dos elementos en los que se descompone la permutación considerada⁵. Usando esta expresión, es fácil ver que el estado definido según (5.44) es efectivamente un autoestado del hamiltoniano, siendo

$$H_{\text{int}} |\psi(p_1, \dots, p_n)\rangle = \left(\sum_{i=1}^n E_{p_i} \right) |\psi(p_1, \dots, p_n)\rangle. \quad (5.46)$$

Cadena periódica

En el caso de una cadena periódica de longitud L , los sitios de la cadena están identificados por un índice $k = 1, \dots, L$, donde la condición de periodicidad consiste en asociar los demás valores enteros según $k \leftrightarrow k + L$. Observamos que la diagonalización del hamiltoniano se reduce en este caso a la diagonalización de una matriz de $2^L \times 2^L$, pero el ansatz de Bethe tiene la ventaja de que nos permite hacer esto para todo valor de L , e incluso tomar el *límite termodinámico* $L \rightarrow \infty$. La onda plana (5.36) sigue siendo un autoestado del hamiltoniano, pero la condición de periodicidad impone que se cumpla

$$|\varphi(p)\rangle = e^{-ipL} |\varphi(p)\rangle, \quad (5.47)$$

de modo que $e^{ipL} = 1$. Esta es entonces la discretización usual que se tiene para el momento de una partícula en un círculo de longitud L .

⁵Observamos que esta descomposición no es única, pero a pesar de ello la expresión dada para el factor de scattering de n impurezas no es ambigua, ya que las ecuaciones de Yang-Baxter (5.9) nos aseguran que todas las formas posibles de descomponer el factor de scattering son equivalentes: para la cadena de espines de $SU(2)$, el factor de scattering es simplemente un número complejo y esta condición se satisface trivialmente, dando cuenta de que reordenar las trasposiciones que componen una permutación no afecta el resultado final; en casos más generales cada sitio de la cadena tiene un espacio de Hilbert de dimensión mayor, de modo que los factores de scattering son matriciales y la condición (5.9) pasa a ser no trivial.

Para estados de dos impurezas, la condición de periodicidad $|k, k'\rangle = |k', k + L\rangle$ aplicada simultáneamente a ambos términos impone la discretización usual para el momento total, $e^{i(p_1+p_2)L} = 1$. Sin embargo, esta condición es de hecho más fuerte dado que se puede aplicar a cada término del autoestado $|\psi(p_1, p_2)\rangle$ por separado. Es fácil ver usando $S(p_1, p_2) = S(p_2, p_1)^{-1}$ que esto implica las condiciones

$$e^{ip_1L}S(p_1, p_2) = 1 \quad \text{y} \quad e^{ip_2L}S(p_2, p_1) = 1, \quad (5.48)$$

que se conocen como *ecuaciones de Bethe* y discretizan los valores que pueden tomar los momentos p_1 y p_2 de los magnones.

En el caso general del sector de n impurezas, los autoestados tienen la misma forma que en el caso infinito pero nuevamente tendremos que investigar más en detalle las consecuencias de la condición de periodicidad $|k_1, \dots, k_n\rangle = |k_2, \dots, k_n, k_1 + L\rangle$. Nuevamente, tendremos por un lado la discretización del momento total,

$$e^{i\sum_n p_n L} = 1, \quad (5.49)$$

mientras que imponiendo la periodicidad para cada uno de los términos del autoestado por separado llegamos a la forma general de las ecuaciones de Bethe,

$$e^{ip_k L} \prod_{k' \neq k} S(p_k, p_{k'}) = 1 \quad \text{para} \quad k = 1, \dots, n. \quad (5.50)$$

En el contexto de la correspondencia AdS_5/CFT_4 tenemos una condición adicional debida a que las cadenas periódicas simplemente representan una traza de campos de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills. Entonces, la condición de periodicidad debe ser suplementada por la condición de invariancia de los estados frente a un desplazamiento simultáneo de todas las impurezas en un sitio, que refleja la ciclicidad de la traza. Como ante este corrimiento la función de onda (5.44) adquiriría un factor $e^{i\sum_{i=1}^n p_i}$, el momento total de los magnones debe anularse,

$$\sum_{i=1}^n p_i = 0. \quad (5.51)$$

Cadena semi-infinita

Para una cadena semi-infinita, el índice k puede tomar los valores $k = 1, 2, \dots, \infty$, y tendremos que imponer condiciones de contorno adecuadas para que el sistema siga siendo integrable. Agregamos entonces al hamiltoniano un término de borde, de modo que tenemos por ejemplo

$$H = H_{\text{int}} + H_{\text{iz}} \quad \text{con} \quad H_{\text{iz}} = 2g^2 A q_1^\dagger. \quad (5.52)$$

Aquí q_k^\downarrow es el operador de proyección sobre el estado \downarrow en el k -ésimo sitio de la cadena, y podemos definir análogamente q_k^\uparrow , de modo que en términos matriciales

$$q^\uparrow = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad q^\downarrow = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.53)$$

Observamos que

$$H|\uparrow \cdots\rangle = 0 \quad y \quad H|\downarrow \cdots\rangle = 2g^2 A |\downarrow \cdots\rangle, \quad (5.54)$$

de manera que para $A \neq 0$ se ha roto la simetría $SU(2)$. Sin embargo, $[H_{iz}, S^3] = 0$ de modo que la componente S^3 aún se conserva, y por lo tanto los autoestados del hamiltoniano poseen un número definido de impurezas, lo cual es necesario para que se pueda formular el ansatz de Bethe y que el sistema resulte integrable.

Vemos también que dado que se perdió la simetría $SU(2)$, en este caso dejarán de ser equivalentes las descripciones del sistema basadas en los dos vacíos ferromagnéticos posibles, $|\emptyset\rangle_\uparrow = |\uparrow \cdots\rangle$ con impurezas \downarrow y $|\emptyset\rangle_\downarrow = |\downarrow \cdots\rangle$ con impurezas \uparrow . De hecho, la formulación usando $|\emptyset\rangle_\downarrow$ y el término de borde (5.52) será equivalente a la formulación con el vacío usual $|\emptyset\rangle_\uparrow$ y el término de borde $\tilde{H}_{iz} = 2g^2 A q_1^\uparrow$, en la que el vacío ferromagnético deja de tener autovalor nulo para tener autovalor A .

Para aplicar el ansatz de Bethe, debemos notar que la onda plana (5.36) ya no es un autoestado del hamiltoniano, porque tenemos

$$H|\varphi(p)\rangle = E_p |\varphi(p)\rangle + 2g^2 (1 - e^{ip} (1 - A)) |1\rangle. \quad (5.55)$$

Esto es, como la introducción de un borde rompe la invarianza traslacional del sistema las autofunciones no tendrán un valor de momento p definido. Proponemos entonces para la autofunción la superposición de una función tipo onda plana de momento p con otra reflejada de momento $-p$,

$$|\psi(p)\rangle = |\varphi(p)\rangle + R(p) |\varphi(-p)\rangle, \quad (5.56)$$

y vemos que podemos hacer que este sea un autoestado del hamiltoniano (5.52) tomando

$$R(p) = -\frac{1 - e^{ip} (1 - A)}{1 - e^{-ip} (1 - A)}. \quad (5.57)$$

Los autoestados para el sector con $n > 1$ impurezas se escribirán en forma similar a (5.44), pero teniendo en cuenta la posibilidad de que los magnones se reflejen en el borde y cambie así el signo de su momento, de modo que la propuesta será

$$|\psi(p_1, \dots, p_n)\rangle = \sum_{\substack{\sigma \in \Pi_n \\ P \subset \{p_i\}}} \left(\prod_{p_i \in P} R(p_i) \right) S(p'_{\sigma_1}, \dots, p'_{\sigma_N}) |\varphi(p'_{\sigma_1}, \dots, p'_{\sigma_N})\rangle, \quad (5.58)$$

donde

$$p'_i = \begin{cases} p_i & \text{si } p_i \notin P, \\ -p_i & \text{si } p_i \in P. \end{cases} \quad (5.59)$$

Como la construcción de los autoestados no impone en este caso ninguna restricción al valor de A , tenemos que este es un parámetro libre del modelo que no afecta a la integrabilidad del sistema. Para cadenas de espines más generales, los parámetros libres introducidos en los términos de borde deberán tomar ciertos valores específicos para preservar la integrabilidad del sistema. En cualquier caso, los modelos $SU(2)$ abiertos que se obtienen en el marco de la correspondencia AdS/CFT corresponden a valores específicos de A . Por ejemplo, para operadores insertados en loops de Wilson se obtiene el hamiltoniano del caso $A = 0$ [130]. Para operadores insertados en un determinante de campos Z se obtiene el hamiltoniano del caso $A = 1$ [131]. En cambio, para uno de los casos con materia en la fundamental en los extremos se obtiene el hamiltoniano del caso $A = 2$ [132].

Cadena abierta

Nos referiremos a la cadena con dos bordes como cadena abierta. En este caso, el índice k puede tomar los valores $k = 1, \dots, L$, y debemos agregar otro término de borde al hamiltoniano, de modo que hacemos

$$H = H_{\text{int}} + H_{\text{iz}} + H_{\text{der}} \quad \text{con} \quad H_{\text{iz}} = 2g^2 A q_1^\dagger \quad \text{y} \quad H_{\text{der}} = 2g^2 B q_L^\dagger. \quad (5.60)$$

Los estados de una impureza (5.56) con $R_A(p)$ definida como en (5.57) no serán en general autoestados de este hamiltoniano. Tenemos de hecho

$$\begin{aligned} H | \psi(p) \rangle &= E_p | \psi(p) \rangle + 2g^2 e^{ip(L+1)} (1 - e^{-ip} (1 - B)) | L \rangle \\ &\quad + 2g^2 R_A(p) e^{-ip(L+1)} (1 - e^{ip} (1 - B)) | L \rangle, \end{aligned} \quad (5.61)$$

luego para que este sea un autoestado exigimos

$$e^{2ip(L+1)} = -R_A(p) \frac{1 - e^{ip} (1 - B)}{1 - e^{-ip} (1 - B)} = R_A(p) R_B(p), \quad (5.62)$$

con $R_B(p)$ definido según (5.57) con $A \mapsto B$. Esta es una condición que discretiza los valores del momento p análoga para el caso abierto a las ecuaciones de Bethe de la cadena periódica. En general, en el sector con n impurezas se tendrán autofunciones definidas según (5.58), estando los momentos sujetos a las *ecuaciones de Bethe de borde*,

$$e^{2ip_k(L+1)} = R_A(p_k) R_B(p_k) \prod_{k' \neq k} S(p_{k'}, p_k) S(-p_k, p_{k'}) \quad \text{para} \quad k = 1, \dots, n. \quad (5.63)$$

Cadenas de espines más generales

La presentación realizada a lo largo de esta sección se limitó al estudio de las cadenas de espines de $SU(2)$, que como vimos en la sección 5.2 aparecen en el contexto de la dualidad AdS/CFT al estudiar el sector $SU(2)$ de los operadores de traza simple de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills. Lo que es más, al considerar siempre el modelo de Heisenberg nos limitamos al estudio del operador de dilataciones a 1-loop dentro de este sector. Si bien esto fue conveniente para realizar una exposición concisa del ansatz de Bethe en coordenadas, ya que nos permitió hacerlo sin incurrir en complicaciones algebraicas, debemos mencionar varias direcciones en las que es posible realizar generalizaciones.

Por un lado, podríamos considerar órdenes superiores del operador de dilataciones, que corresponden a modelos de cadenas de espines con interacciones a vecinos más lejanos. En el sector $SU(2)$ es posible avanzar en el análisis perturbativo hasta 3-loops, modificándose así el modelo de Heisenberg considerado anteriormente. El hamiltoniano para la cadena de espines de $SU(2)$ correspondiente resulta ser integrable, pero la formulación del ansatz de Bethe se ve considerablemente complicada. En particular, resulta necesario incorporar términos de contacto en los autoestados del ansatz, que modifican el factor de scattering cuando las impurezas son contiguas. Estos términos pueden hallarse orden a orden, pero el tratamiento se vuelve rápidamente demasiado complicado. En la próxima sección veremos que considerando las ecuaciones de Yang-Baxter y las simetrías del problema, es posible saltar enteramente este proceso y realizar un *ansatz de Bethe asintótico* válido a todo orden perturbativo, a menos de las correcciones por tamaño finito discutidas en el capítulo 6.

Por otro lado, ampliando el espectro de campos de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills que consideramos formando parte de los operadores de traza simple, podríamos analizar sectores más grandes del espacio de Hilbert. Las cadenas de espines resultantes no tienen un sólo tipo de impurezas, de manera que debemos modificar el ansatz de Bethe para tener en cuenta el “sabor” de los magnones que se propagan por la cadena. El procedimiento resultante se conoce como *ansatz de Bethe anidado*, ya que involucra realizar un primer ansatz de Bethe como el presentado aquí, para luego realizar sucesivamente otros similares teniendo en cuenta las impurezas de sabor que se propagan sobre la cadena de impurezas del nivel anterior.

Finalmente, debemos resaltar que existe una formulación más moderna del ansatz de Bethe que hace más transparentes las generalizaciones mencionadas arriba. Esta se conoce como *ansatz de Bethe algebraico*, y proporciona un mecanismo constructivo que permite generar hamiltonianos integrables para cadenas de espines cuyos sitios se

hallan en representaciones arbitrarias del grupo de simetría considerado. En el proceso se obtiene también el conjunto infinito de cargas conservadas que conmutan con el hamiltoniano en cuestión, demostrando de este modo su integrabilidad, así como los operadores de creación y destrucción que pueden utilizarse para construir explícitamente los autoestados del hamiltoniano. Todo esto permite una caracterización más detallada de los modelos integrables estudiados, pero resultará innecesario para desarrollar las aplicaciones que vamos a presentar en esta tesis. El lector interesado puede referirse a [133, 134] para una introducción pedagógica a estos temas, mientras que puede consultar [135] para una exposición en el contexto de la conjetura AdS/CFT.

5.3.1. Ansatz de Bethe asintótico

Como vimos en la sección 5.2, el estudio del espectro de autovalores del operador de dilataciones a 1-loop resultó en la identificación de este problema con el de la diagonalización de un hamiltoniano correspondiente a una cadena de espines con interacciones a primeros vecinos. Podemos realizar un análisis similar a órdenes superiores, lo cual resulta en identificaciones enteramente análogas: a ℓ -loops las dimensiones anómalas de los operadores de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills vienen dadas en el límite planar por el espectro de un hamiltoniano para cierta cadena de espines en la que cada sitio tiene interacciones con sus ℓ vecinos más cercanos. Los hamiltonianos correspondientes se conocen solamente para los primeros órdenes perturbativos, [104–106, 136], y si bien puede verse que son integrables su tratamiento se dificulta por la mezcla dinámica de operadores con distinta cantidad de campos en sus trazas, así como por la necesidad de introducir las modificaciones al ansatz de Bethe discutidas anteriormente.

Ahora bien, desde el punto de vista dual es posible establecer la integrabilidad clásica de la teoría de cuerdas supersimétrica tipo IIB formulada en el espacio $AdS_5 \times S^5$. Sin entrar en mayores detalles, mencionamos solamente que para ello se considera la acción de la teoría en la formulación de Metsaev-Tseytlin [137], que corresponde a considerar un modelo sigma en el espacio resultante de tomar el cociente $PSU(2, 2|4)/[SO(4, 1) \times SO(5)]$. Generalizando los resultados obtenidos para el caso del espacio plano, [107], es posible entonces establecer la integrabilidad de la teoría como consecuencia de la gradación \mathbb{Z}_4 del espacio cociente considerado, [138, 139].

Habiendo hallado evidencia de integrabilidad a ambos lados de la dualidad, correspondientes a los regímenes de acoplamiento fuerte y débil, resulta natural suponer que esta es una propiedad no perturbativa que se mantiene independientemente del valor del acoplamiento en ambas teorías. Si bien no será posible probar esto rigurosamente, vamos a ver que las condiciones necesarias para la presencia de integrabilidad

discutidas en la sección 5.1 son tan restrictivas que, combinándolas con consideraciones de simetría, hacen posible determinar los ingredientes fundamentales de toda descripción integrable. En efecto, es posible determinar la relación de dispersión y las matrices de scattering y reflexión de la dualidad AdS_5/CFT_4 como funciones exactas del acoplamiento de 't Hooft λ , [140–147]. Dado que la cadena de espines considerada tiene interacciones de largo alcance cuando el acoplamiento es finito, el procedimiento utilizado será válido solamente en el límite asintótico, en el que las cadenas son muy largas y las impurezas que se propagan por ellas están muy alejadas unas de otras. Dejamos por lo tanto para el próximo capítulo la evaluación de las correcciones por tamaño finito que recibe esta construcción, pero mencionamos desde ya que con estas herramientas podremos escribir ecuaciones de Bethe cuya solución en los regímenes de acoplamiento fuerte o débil consituirá una verificación *a posteriori* de la suposición de integrabilidad.

Para determinar la matriz de scattering, comenzamos observando que la elección del vacío ferromagnético sobre el que se formula el ansatz de Bethe rompe la simetría global $PSU(2, 2|4)$, dejando una simetría remanente $SU(2|2) \times SU(2|2)$. Esto significa que, a diferencia del sector $SU(2)$ en el que las impurezas que se propagan sobre el vacío son de un único sabor, en el caso general estas se encuentran en la representación bifundamental de la extensión central de $SU(2|2)^2$. Esta debe ser una simetría de la matriz S , que como ya vimos representa el factor adquirido por un estado cuando se intercambia el orden relativo de dos excitaciones. La matriz S de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills se factoriza entonces en un producto tensorial de dos matrices idénticas, cada una de las cuales puede ser interpretada como la matriz S de una teoría integrable con simetría $SU(2|2)$ con extensión central. Los estados de dicha teoría análogos a (5.1) son entonces

$$|A_{i_1}(p_1) \cdots A_{i_n}(p_n)\rangle = \hat{A}_{i_1}^\dagger(p_1) \cdots \hat{A}_{i_n}^\dagger(p_n) |\emptyset\rangle, \quad (5.64)$$

donde introdujimos los operadores de Zamolodchikov-Faddeev $\hat{A}_i^\dagger(p)$, que al actuar sobre un estado crean a la izquierda de todas las excitaciones presentes otra de momento p y sabor $i = 1, 2, 3, 4$, correspondiente a una impureza en la representación fundamental de $SU(2|2)$, [118, 148]. En las cadenas con interacción a primeros vecinos estos estados son simplemente superposiciones de ondas planas, como (5.43) para el modelo de Heisenberg, pero cuando el acoplamiento es finito esperamos tener interacciones de largo alcance, por lo que los estados que definimos de este modo son

asintóticos. Esto significa que consideramos a todas las impurezas infinitamente separadas unas de otras, para lo cual necesitamos que la longitud de la cadena también sea infinita (aunque, para que el límite planar tenga sentido, debemos mantener siempre $L \ll N$). Este es el origen del nombre *ansatz de Bethe asintótico*, y hará necesario introducir más adelante correcciones por el tamaño finito de la cadena.

Por definición, la matriz S resulta de intercambiar el orden de dos operadores de Zamolodchikov-Faddeev, definiendo de este modo el álgebra de Zamolodchikov-Faddeev

$$\hat{A}_i^\dagger(p_1)\hat{A}_j^\dagger(p_2) = S_{ij}^{j'i'}(p_1, p_2)\hat{A}_{j'}^\dagger(p_2)\hat{A}_{i'}^\dagger(p_1). \quad (5.65)$$

Resulta inmediata entonces la condición de unitaridad que podemos representar como se ve en la figura 5.3, y que es

$$S_{ij}^{j'i'}(p_1, p_2)S_{j'i'}^{i''j''}(p_2, p_1) = \delta_i^{i''}\delta_j^{j''}. \quad (5.66)$$

En este contexto, las ecuaciones de Yang-Baxter (5.9) no son más que la condición de consistencia que surge de requerir la igualdad de los resultados obtenidos al llevar $\hat{A}_i^\dagger(p_1)\hat{A}_j^\dagger(p_2)\hat{A}_k^\dagger(p_3)$ a la forma $\hat{A}_{k'}^\dagger(p_3)\hat{A}_{j'}^\dagger(p_2)\hat{A}_{i'}^\dagger(p_1)$ aplicando el álgebra por dos caminos distintos.

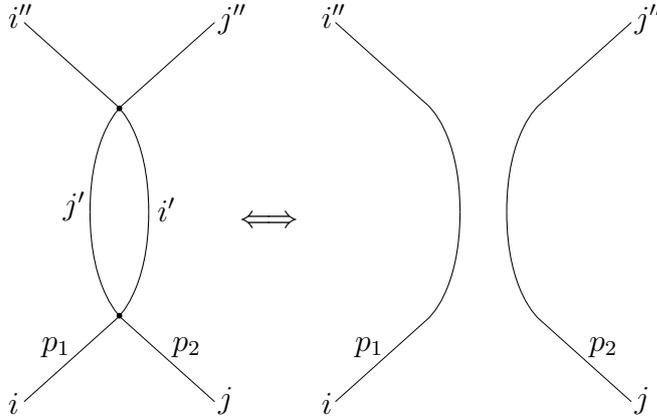


Figura 5.3: Representación gráfica de la condición de unitaridad de la matriz S .

El álgebra de $SU(2|2)$ con extensión central contiene los generadores de rotaciones \mathbb{L}_a^b y \mathbb{R}_α^β , los generadores de supersimetrías \mathbb{Q}_α^a y $\mathbb{Q}_a^{\dagger\alpha}$, y las extensiones centrales \mathbb{C} , \mathbb{C}^\dagger y \mathbb{H} (aquí y hasta el final de esta sección, los índices latinos a, b, \dots toman los valores $\{1, 2\}$, mientras que los índices griegos α, β, \dots toman los valores $\{3, 4\}$). Las reglas de conmutación para estos generadores pueden encontrarse en [149], pero para nuestros propósitos solamente necesitamos conocer su acción sobre los operadores de

Zamolodchikov-Faddeev, que viene dada por

$$\begin{aligned}
[\mathbb{L}_a^b, \hat{A}_c^\dagger(p)] &= (\delta_c^b \delta_a^d - \frac{1}{2} \delta_a^b \delta_c^d) \hat{A}_d^\dagger(p), & [\mathbb{L}_a^b, \hat{A}_\gamma^\dagger(p)] &= 0, \\
[\mathbb{R}_\alpha^\beta, \hat{A}_\gamma^\dagger(p)] &= (\delta_\gamma^\beta \delta_\alpha^\rho - \frac{1}{2} \delta_\alpha^\beta \delta_\gamma^\rho) \hat{A}_\rho^\dagger(p), & [\mathbb{R}_\alpha^\beta, \hat{A}_c^\dagger(p)] &= 0, \\
\mathbb{Q}_\alpha^a \hat{A}_b^\dagger(p) &= e^{-ip/2} \left[a(p) \delta_b^a \hat{A}_\alpha^\dagger(p) + \hat{A}_b^\dagger(p) \mathbb{Q}_\alpha^a \right], \\
\mathbb{Q}_\alpha^a \hat{A}_\beta^\dagger(p) &= e^{-ip/2} \left[b(p) \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon^{ab} \hat{A}_b^\dagger(p) - \hat{A}_\beta^\dagger(p) \mathbb{Q}_\alpha^a \right], \\
\mathbb{Q}_a^{\dagger\alpha} \hat{A}_b^\dagger(p) &= e^{ip/2} \left[c(p) \varepsilon_{ab} \varepsilon^{\alpha\beta} \hat{A}_\beta^\dagger(p) + \hat{A}_b^\dagger(p) \mathbb{Q}_a^{\dagger\alpha} \right], \\
\mathbb{Q}_a^{\dagger\alpha} \hat{A}_\beta^\dagger(p) &= e^{ip/2} \left[d(p) \delta_\beta^\alpha \hat{A}_a^\dagger(p) - \hat{A}_\beta^\dagger(p) \mathbb{Q}_a^{\dagger\alpha} \right], \\
\mathbb{C} \hat{A}_i^\dagger(p) &= e^{-ip} \left[a(p) b(p) \hat{A}_i^\dagger(p) + \hat{A}_i^\dagger(p) \mathbb{C} \right], \\
\mathbb{C}^\dagger \hat{A}_i^\dagger(p) &= e^{ip} \left[c(p) d(p) \hat{A}_i^\dagger(p) + \hat{A}_i^\dagger(p) \mathbb{C}^\dagger \right], \\
\mathbb{H} \hat{A}_i^\dagger &= [a(p) d(p) + b(p) c(p)] \hat{A}_i^\dagger(p) + \hat{A}_i^\dagger(p) \mathbb{H}.
\end{aligned} \tag{5.67}$$

En estas expresiones, a, b, c y d son coeficientes dependientes del momento que deben satisfacer $ad - bc = 1$ para que ésta sea una representación del álgebra de simetrías, y $d = a^*$ y $c = b^*$ para que se trate de hecho de una representación unitaria. Si suponemos que los generadores se anulan actuando sobre el vacío, aplicando \mathbb{C} sobre (5.65) en el vacío tenemos la condición

$$e^{-ip_1} a(p_1) b(p_1) + e^{-i(p_1+p_2)} a(p_2) b(p_2) = e^{-ip_2} a(p_2) b(p_2) + e^{-i(p_1+p_2)} a(p_1) b(p_1), \tag{5.68}$$

de donde $a(p)b(p) = ig(e^{ip} - 1)$ para alguna constante g a determinar, siendo el factor i incluido desde ahora por conveniencia. Parametrizamos las soluciones a esta ecuación usando las variables de Zhukovsky $x^\pm(p)$, definidas por

$$\frac{x^+}{x^-} = e^{ip} \quad \text{y} \quad x^+ + \frac{1}{x^+} - x^- - \frac{1}{x^-} = \frac{i}{g}, \tag{5.69}$$

siendo entonces los coeficientes

$$a = \sqrt{g}\eta, \quad b = \sqrt{g} \frac{i}{\eta} \left(\frac{x^+}{x^-} - 1 \right), \quad c = -\sqrt{g} \frac{\eta}{x^+} \quad \text{y} \quad d = \sqrt{g} \frac{x^+}{i\eta} \left(1 - \frac{x^-}{x^+} \right), \tag{5.70}$$

donde introdujimos un parámetro adicional $\eta = e^{ip/4} \sqrt{i(x^- - x^+)}$ que será útil más adelante.

Observamos que actuando con \mathbb{H} sobre estados de una partícula tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{H} |A_i(p)\rangle &= -ig \left(x^+ - \frac{1}{x^+} - x^- + \frac{1}{x^-} \right) = \sqrt{1 + 16g^2 \sin^2 \frac{p}{2}} \\
&= 1 + 8g^2 \sin^2 \left(\frac{p}{2} \right) + \mathcal{O}(g^4),
\end{aligned} \tag{5.71}$$

de modo que comparando con (5.37) identificamos a $\mathbb{H} - 1$ con la dimensión anómala γ , justificando de este modo el uso de la letra g en ambos contextos. Esta identificación implica que hemos determinado la relación de dispersión para los magnones a todo orden perturbativo [150], siempre y cuando supongamos que la función $g(\lambda) = \sqrt{\lambda}/4\pi$ no recibe correcciones de orden superior, como parece ser el caso considerando la evidencia provista por los primeros órdenes perturbativos.

Podemos determinar la matriz S de forma similar, aplicando los generadores del álgebra de simetrías a estados de dos partículas y utilizando luego el álgebra de Zamolodchikov-Faddeev (5.65) para obtener condiciones de consistencia. Los elementos de matriz no nulos pueden parametrizarse como (para $a \neq b$ y $\alpha \neq \beta$)

$$\begin{aligned}
S_{aa}^{aa} &= A, & S_{\alpha\alpha}^{\alpha\alpha} &= D, \\
S_{ab}^{ab} &= \frac{1}{2}(A + B), & S_{ab}^{ba} &= \frac{1}{2}(A - B), \\
S_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(D + E), & S_{\alpha\beta}^{\beta\alpha} &= \frac{1}{2}(D - E), \\
S_{ab}^{\beta\alpha} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\varepsilon^{\alpha\beta}C, & S_{\alpha\beta}^{ba} &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{ab}\varepsilon_{\alpha\beta}F, \\
S_{\alpha a}^{\alpha a} &= G, & S_{\alpha a}^{\alpha\alpha} &= H, & S_{a\alpha}^{\alpha a} &= I, & S_{a\alpha}^{\alpha\alpha} &= J,
\end{aligned} \tag{5.72}$$

donde si llamamos $\eta_1 = \eta(p_1)e^{ip_2/2}$, $\tilde{\eta}_1 = \eta(p_1)$, $\eta_2 = \eta(p_2)$ y $\tilde{\eta}_2 = \eta(p_2)e^{ip_1/2}$ tenemos para $x_i^\pm = x^\pm(p_i)$

$$\begin{aligned}
A &= S_0 \frac{x_2^- - x_1^+ \eta_1 \eta_2}{x_2^+ - x_1^- \tilde{\eta}_1 \tilde{\eta}_2}, & D &= -S_0, \\
B &= -S_0 \left[\frac{x_2^- - x_1^+}{x_2^+ - x_1^-} + 2 \frac{(x_1^- - x_1^+)(x_2^- - x_2^+)(x_2^- + x_1^+)}{(x_1^- - x_2^+)(x_1^- x_2^- - x_1^+ x_2^+)} \right] \frac{\eta_1 \eta_2}{\tilde{\eta}_1 \tilde{\eta}_2}, \\
C &= S_0 \frac{2i\eta_1 \eta_2 x_1^- x_2^- (x_1^+ - x_2^+)}{x_1^+ x_2^+ (x_1^- - x_2^+)(x_1^- x_2^- - x_1^+ x_2^+)}, \\
E &= S_0 \left[1 - 2 \frac{(x_1^- - x_1^+)(x_2^- - x_2^+)(x_1^- + x_2^+)}{(x_1^- - x_2^+)(x_1^- x_2^- - x_1^+ x_2^+)} \right], \\
F &= S_0 \frac{2i(x_1^- - x_1^+)(x_2^- - x_2^+)(x_1^+ - x_2^+)}{\tilde{\eta}_1 \tilde{\eta}_2 (x_1^- - x_2^+)(1 - x_1^- x_2^-)}, \\
G &= S_0 \frac{(x_1^+ - x_1^-) \eta_2}{(x_1^- - x_2^+) \tilde{\eta}_1}, & H &= S_0 \frac{(x_1^+ - x_2^+) \eta_2}{(x_1^- - x_2^+) \tilde{\eta}_2}, \\
I &= S_0 \frac{(x_2^- - x_1^-) \eta_1}{(x_2^+ - x_1^-) \tilde{\eta}_1}, & J &= S_0 \frac{(x_2^+ - x_2^-) \eta_1}{(x_1^- - x_2^+) \tilde{\eta}_2}.
\end{aligned} \tag{5.73}$$

Podemos verificar que la matriz S hallada de este modo satisface las ecuaciones de Yang-Baxter (5.9), en las que se cancela el factor escalar indeterminado S_0 . Este factor se conoce como *factor de scattering*, y en principio está constreñido solamente por la

condición de unitaridad (5.66), de modo que debe satisfacer

$$S_0(p_1, p_2)S_0(p_2, p_1) = 1. \quad (5.74)$$

Es usual escribir al factor de scattering en la forma [145, 146]

$$S_0(p_1, p_2)^2 = \frac{x_1^- - x_2^+}{x_1^+ - x_2^-} \frac{1 - \frac{1}{x_1^+ x_2^-}}{1 - \frac{1}{x_1^- x_2^+}} \sigma(p_1, p_2)^2, \quad (5.75)$$

porque de este modo se incorpora un polo simple que reproduce la estructura de estados ligados de la teoría [151], de manera que la condición de unitaridad requiere que el *factor de dressing* $\sigma(p_1, p_2)$ satisfaga

$$\sigma(p_1, p_2)\sigma(p_2, p_1) = 1. \quad (5.76)$$

Para suplementar esta condición vamos a requerir la *condición de crossing*, que corresponde a exigir que la dispersión de una partícula con un singlete partícula-antipartícula sea trivial. Esto se ve graficado en la figura 5.4, y puede expresarse como

$$\sum_{j, i'} S_{j i'}^{i' j'}(q, p) S_{j i'}^{i'' j''}(\bar{q}, p) = \delta_i^{i''} \delta^{j' j''}, \quad (5.77)$$

donde para mayor claridad hicimos explícitas las sumas del lado izquierdo, y anotamos como \bar{q} al momento de la antipartícula que se obtiene al realizar la transformación de crossing sobre el momento q de la partícula. Esto corresponde a hacer $(q, E_q) \mapsto (\bar{q}, E_{\bar{q}}) = (-q, -E_q)$, o en las variables de Zhukovsky $x^\pm \mapsto 1/x^\pm$, como puede verse en (5.69) y (5.71), y se explica en detalle en [152].

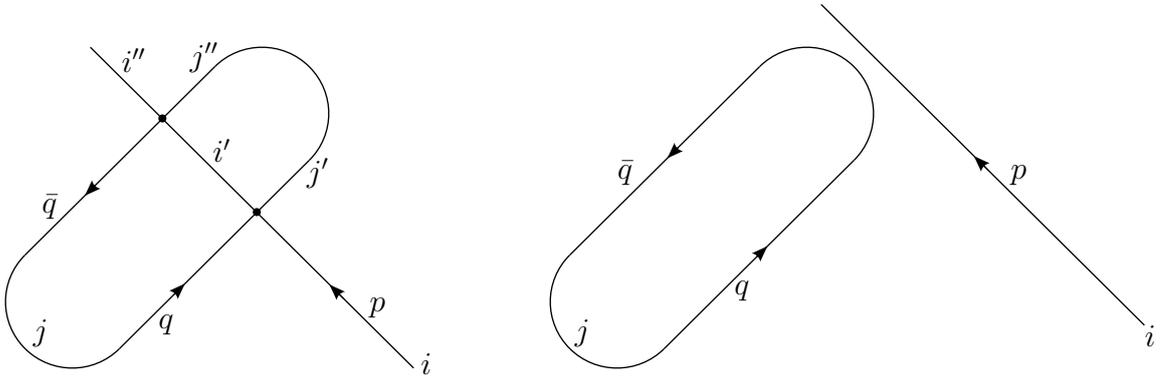


Figura 5.4: Representación gráfica de la condición de crossing para la dispersión de una partícula con un singlete partícula-antipartícula.

La parte matricial de la condición de crossing se satisface automáticamente, de modo que nos queda una condición sobre el factor de dressing que puede expresarse

como

$$\sigma(q, p)\sigma(\bar{q}, p) = \frac{1 - \frac{1}{x^+y^+}}{1 - \frac{1}{x^-y^-}} \frac{1 - \frac{1}{x^+y^-}}{1 - \frac{1}{x^-y^+}}, \quad (5.78)$$

donde $y^\pm = x^\pm(q)$ y realizamos una continuación analítica cruzando un corte para hacer $y^- \mapsto 1/y^-$. Esta es una ecuación funcional que tiene infinitas soluciones, de modo que para resolverla tendremos que incorporar consideraciones acerca de la estructura analítica de la solución físicamente relevante que queremos hallar. Sin embargo, vamos a proceder en sentido inverso presentando primero la solución para luego comentar cuáles son sus propiedades más importantes. Para esto, comenzamos por escribir $\sigma(q, p)$ en la forma más general posible para una cadena de espines integrable con interacciones de largo alcance [153]

$$\sigma(q, p) = \exp \{i\chi(x^+, y^-) - i\chi(x^-, y^-) - i\chi(x^+, y^+) + i\chi(x^-, y^+)\}, \quad (5.79)$$

y vemos que la solución de (5.78) en la representación de Dorey-Hofman-Maldacena está dada entonces por

$$\chi(x, y) = -i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2\pi i} \oint_{|z'|=1} \frac{dz'}{2\pi i} \frac{1}{x-z} \frac{1}{x-z'} \log \frac{\Gamma \left[1 + ig \left(z + \frac{1}{z} - z' - \frac{1}{z'} \right) \right]}{\Gamma \left[1 - ig \left(z + \frac{1}{z} - z' - \frac{1}{z'} \right) \right]}. \quad (5.80)$$

Esta solución de la ecuación de crossing no incorpora nuevos polos o ceros simples, como debe ocurrir para mantener la estructura de estados ligados ya ajustada por (5.75). En cambio, sí incorpora polos y ceros dobles que corresponden al intercambio de pares de estados compuestos, siendo esto posible como se vio en [154]. Como además no incluye ningún otro polo, cero o punto de ramificación que no sea explícitamente requerido por la ecuación misma, podemos decir que se trata de hecho de una solución mínima de la condición de crossing. Finalmente, se trata de una función analítica en el dominio físico $|x| > 1$, cuyo comportamiento asintótico es compatible con la dispersión trivial de las partículas con excitaciones de momento nulo, como es de esperar dado que estas últimas corresponden a transformaciones de simetría global.

De este modo, concluimos la construcción de los dos ingredientes principales que componen la descripción de un sistema integrable infinito o con condiciones de borde periódicas, es decir la relación de dispersión y la matriz S. Hicimos esto aplicando únicamente argumentos de simetría sobre el requerimiento de integrabilidad, es decir que en particular no conocemos el hamiltoniano de la cadena de espines con interacciones de largo alcance que estamos describiendo. Sin embargo, esto no nos impide escribir las ecuaciones de Bethe que generalizan (5.50), cuyas soluciones nos permiten hallar el espectro de energías de la teoría. No vamos a presentar dichas ecuaciones en este

trabajo, dado que para hacerlo deberíamos introducir el ansatz de Bethe algebraico anidado [143, 145–147], y de todos modos no vamos a necesitarlas en lo que sigue. El lector interesado puede consultar [149] para una motivación y revisión breve del sistema de ecuaciones correspondiente.

Ansatz de Bethe asintótico de borde

En la sección que sigue, vamos a considerar operadores de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills que pueden asociarse a cadenas de espines abiertas. Estos serán construidos insertando una “palabra” formada por los campos de la teoría en un lazo de Wilson con un cusp [67]. Ya vimos un ejemplo de este tipo de sistemas en el modelo de Heisenberg, en el que consideramos una cadena de espines de $SU(2)$ con términos de borde integrables introducidos arbitrariamente. En el caso que nos interesa ahora, los términos de borde estarán determinados por las dos líneas semi-infinitas del lazo de Wilson. De este modo, tendremos por ejemplo

$$W_E[\mathcal{C}_Z]_{I_1 \dots I_L} = \text{Pexp} \left\{ \int_{-\infty}^0 (iA_t + n^I \Phi_I) dt \right\}_j^i \left(\Phi_{I_1}(0) \dots \Phi_{I_L}(0) \right)_k^j \quad (5.81)$$

$$\times \text{Pexp} \left\{ \int_0^\infty (iA_t + \tilde{n}^I \Phi_I) dt \right\}_i^k .$$

Como se mencionó en la primera parte de esta sección, la descripción de sistemas integrables con bordes involucra la incorporación de un nuevo ingrediente, en la forma de la matriz de reflexión. Debemos por lo tanto determinar ahora esta matriz, para lo cual aplicamos el mismo procedimiento que el utilizado para hallar la matriz S . Esto es, suponiendo que las condiciones de borde preservan la integrabilidad vamos a aplicar consideraciones acerca de las simetrías del lazo de Wilson que las proporciona para buscar, conociendo la matriz S , soluciones a las ecuaciones de Yang-Baxter de borde (5.11). Una vez hallada la solución buscada, podremos verificar *a posteriori* que la suposición de integrabilidad no fue infundada.

Los lazos de Wilson con cusp introducidos en el capítulo 3 preservan el grupo de simetría $OSp(4^*|4)$, donde la estrella indica que la parte bosónica corresponde a la parte real de $SO(4)$, que es $SO(4^*) \sim SL(2) \times SU(2)$. Si el acoplamiento a los campos escalares se hace de modo tal que el ángulo de cusp interno θ se halla en la dirección de W , la elección del vacío ferromagnético de campos Z implica que la simetría remanente $SU(2|2)^2$ se reduce a $SU(2|2)_D$ al introducir el borde, donde el subíndice indica que se trata de hecho de una combinación diagonal de los dos factores de $SU(2|2)^2$.

Ahora bien, es posible determinar la matriz de reflexión notando que como la simetría remanente es $SU(2|2)_D$, podemos realizar exactamente el mismo procedimiento que el utilizado para la matriz S , para la cual se resolvió cada uno de los factores $SU(2|2)$ por separado. La matriz de reflexión se relaciona entonces con la parte diagonal de la matriz S construida como el producto tensorial de los dos factores [155]. Esto corresponde a considerar que para cada partícula física de momento p tenemos una compañera imaginaria que existe del otro lado del borde con momento $-p$, de manera que una reflexión no es más que la dispersión que ocurre entre una y otra cuando alcanzan simultáneamente el borde, es decir que esperamos

$$R_{ij}^{kl}(p) \sim S_{ij}^{kl}(p, -p), \quad (5.82)$$

como se grafica esquemáticamente en la figura 5.5.

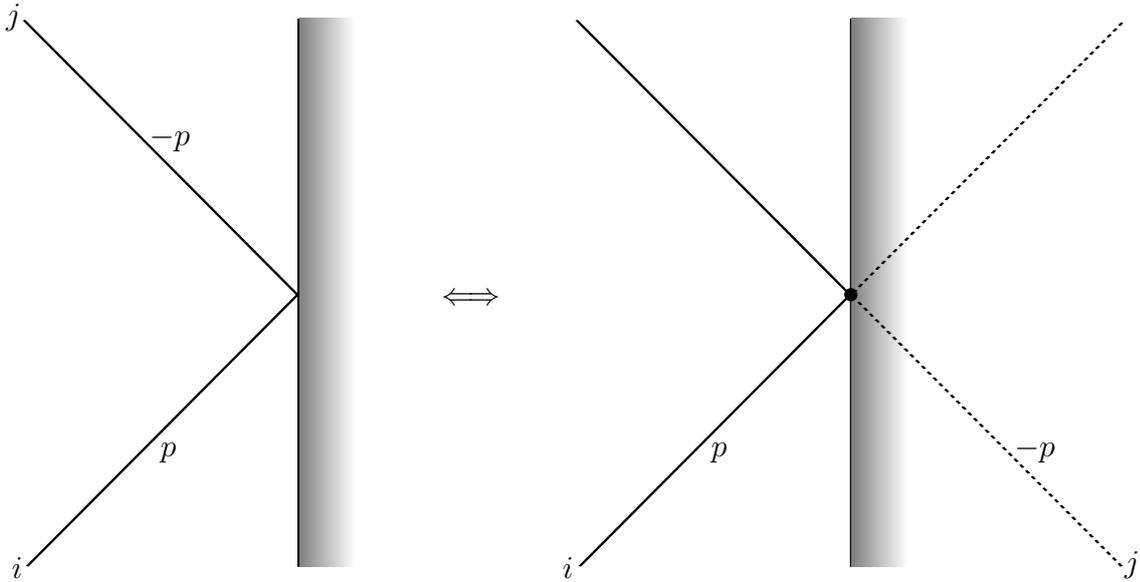


Figura 5.5: Representación esquemática de la reflexión en un borde entendida como la dispersión de una partícula real de momento p con una partícula imaginaria de momento $-p$ que se propaga del otro lado del borde. Esto se conoce como *doubling trick* porque implica duplicar el espacio de la teoría integrable semi-infinita.

De este modo, suponiendo solamente que el borde no tiene grados de libertad⁶ podemos utilizar argumentos de simetría como los ya expuestos para determinar la matriz de reflexión a menos de un factor escalar R_0 , que por analogía llamamos factor de reflexión de borde. Observamos que este no viene determinado por el factor de scattering S_0 a través del *doubling trick* descrito, ya que en el caso de la matriz S

⁶En este caso no se tiene evidencia de la presencia de grados de libertad de borde en ninguno de los límites para el acoplamiento que nos permite estudiar la conjetura AdS/CFT.

el factor de scattering se fijó independientemente por medio de los requerimientos de unitaridad y simetría de crossing. Debemos realizar requerimientos similares para el

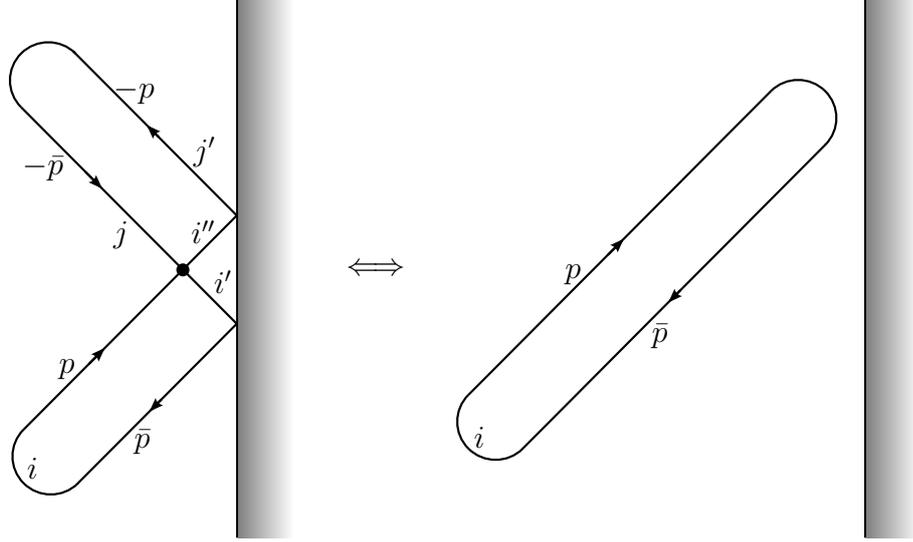


Figura 5.6: Representación esquemática de la condición de crossing de borde: la reflexión de un singlete partícula-antipartícula debe ser trivial.

caso de la matriz R, de manera que consideramos la reflexión de un singlete partícula-antipartícula en el borde e imponemos que debe ser trivial. Este proceso se grafica en la figura 5.6, e impone la *condición de crossing de borde*

$$\sum_{i', i''} R_i^{i'}(\bar{p}) S_{i' i''}^{j j'}(p, -\bar{p}) R_{i''}^{j'}(p) = \delta_i^j \delta_i^{j'} , \quad (5.83)$$

Nuevamente, la parte matricial de esta ecuación se satisface automáticamente, de modo que resulta una restricción para el factor de reflexión de borde

$$R_0(p) R_0(\bar{p}) = \sigma(p, -\bar{p})^2 , \quad (5.84)$$

donde $\sigma(p, q)$ es el factor de dressing de la matriz S. Esta condición suplementa al requerimiento de unitaridad, que se grafica en la figura 5.7 e implica la condición

$$R_i^j(p) R_j^k(-p) = \delta_i^k \quad \implies \quad R_0(p) R_0(-p) = 1 . \quad (5.85)$$

Introduciendo la parametrización

$$R_0(p) = \frac{1}{\sigma_B(p) \sigma(p, -p)} \left(\frac{1 + \frac{1}{(x^-)^2}}{1 + \frac{1}{(x^+)^2}} \right) , \quad (5.86)$$

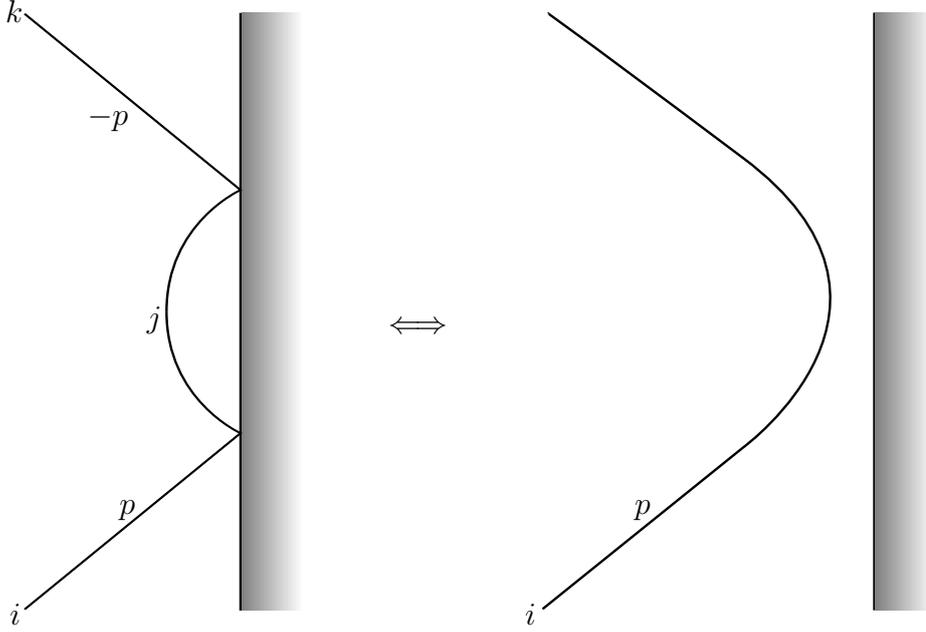


Figura 5.7: Representación esquemática de la condición de unitariedad.

tenemos que la ecuación de crossing para el *factor de dressing de borde* $\sigma_B(p)$ es

$$\sigma_B(p)\sigma_B(\bar{p}) = \frac{x^- + \frac{1}{x^-}}{x^+ + \frac{1}{x^+}}, \quad (5.87)$$

y su solución puede hallarse mediante un procedimiento similar al utilizado para el caso de $\sigma(p, q)$, siendo dada por $\sigma_B^0(p) = \exp\{i\chi(x^+) - i\chi(x^-)\}$ con

$$i\chi(x) = \begin{cases} i\Phi(x) = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{x-z} \log \left\{ \frac{\sinh [2\pi g(z + \frac{1}{z})]}{2\pi g(z + \frac{1}{z})} \right\} & \text{si } |x| > 1, \\ i\Phi(x) + \log \left\{ \frac{\sinh [2\pi g(x + \frac{1}{x})]}{2\pi g(x + \frac{1}{x})} \right\} & \text{si } |x| < 1. \end{cases} \quad (5.88)$$

Nuevamente, esta es solamente una de las infinitas soluciones posibles de la ecuación de crossing de borde, pero puede justificarse su elección para el caso de lazos de Wilson en la representación fundamental por medio de la verificación directa de las consecuencias físicas que tiene en los regímenes de acoplamiento débil y fuerte.

De este modo, completamos la descripción del sistema integrable obtenido al insertar una palabra de campos en un lazo de Wilson con cusp en la representación fundamental de $SU(N)$ en $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills. Esta corresponde a una cadena de espines abierta en la que las impurezas en la palabra interactúan entre sí según la matriz S asintótica hallada anteriormente, y se reflejan en los bordes como indica la matriz R que se obtiene al aplicar el doubling trick. Podemos plantear entonces las

ecuaciones de Yang-Baxter de borde (5.11), cuyas soluciones determinan el espectro de la cadena, o equivalentemente las dimensiones anómalas de escala de los operadores de loop de Wilson con inserciones [67]. En el próximo capítulo vamos a considerar las correcciones por tamaño L finito que deben incorporarse a esta descripción, para en algunos casos tomar incluso el límite $L \rightarrow 0$ y calcular así dimensiones anómalas de lazos de Wilson sin inserciones. Sin embargo, antes vamos a estudiar cómo puede generalizarse este análisis para el caso de otros lazos de Wilson.

5.4. Factor de reflexión en D5-branas integrables

El factor de dressing de borde $\sigma_B(p)$ introducido en (5.86) corresponde al factor de reflexión utilizado para calcular dimensiones anómalas de operadores en los que las condiciones de contorno son impuestas por lazos de Wilson semi-infinitos en la representación fundamental, (5.81). El problema es directamente generalizable para el caso en que las condiciones de contorno son impuestas por lazos de Wilson en otras representaciones. Todos los argumentos de simetría usados para determinar la matriz de reflexión y su factor de dressing siguen valiendo. La distinción entre los diversos casos provendrá únicamente de la elección de la solución a la condición de crossing.

En este capítulo, vamos a analizar cómo podemos determinar el factor de reflexión para sistemas integrables abiertos de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills cuya descripción dual corresponde a D5-branas en $AdS_5 \times S^5$. Para ello, consideramos diversos cálculos en la teoría de cuerdas que nos permiten determinar el límite de acoplamiento fuerte de dicho factor, información que utilizamos luego para orientar la elección de la solución de las ecuaciones de crossing y unitaridad presentadas en la sección anterior.

Más específicamente, consideramos dos familias de D5-branas en la geometría $AdS_5 \times S^5$. La primera familia corresponde a D5-branas cuyo volumen de mundo tiene la geometría de $AdS_2 \times S^4$, con un campo eléctrico en el factor AdS_2 . La segunda familia contiene en cambio D5-branas con la geometría $AdS_4 \times S^2$ que tienen un campo magnético en el factor S^2 .

Todas estas D5-branas son $\frac{1}{2}$ -BPS, pero las dos familias tienen interpretaciones distintas del lado de la teoría conforme dual. Las D5-branas de la primera familia son la descripción dual de lazos de Wilson $\frac{1}{2}$ -BPS en la representación totalmente antisimétrica de rango k del grupo $SU(N)$ de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills, [156], donde k se relaciona con el flujo del campo eléctrico en la D5-brana. Estas branas se relacionan con estados de multi-quarks [157], y son de hecho un caso límite de las branas

consideradas en [158]. La parte matricial de la matriz de reflexión en este caso ciertamente no puede depender del rango k de la representación del grupo, dado que es fijada por las consideraciones de simetría totalmente generales expuestas en la sección anterior [66, 67]. Por lo tanto, será la misma que en el caso límite $k = 1$, en el que el tamaño de la esfera S^4 se anula y la D5-brana se reduce a la cuerda dual a un lazo de Wilson $\frac{1}{2}$ -BPS en la representación fundamental. Por lo tanto, la única diferencia con este caso será a lo sumo en un factor de reflexión global, que como vimos no es fijado por argumentos de simetría y puede por lo tanto depender de k .

Las D5-branas de la segunda familia se interpretan en la teoría conforme dual como teniendo hipermultipletes fundamentales que viven en un defecto 2+1 dimensional dentro de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills [159]. El campo magnético en la D5-brana se interpreta en la teoría dual a partir de la adquisición de un valor de expectación de vacío para algunos de los campos del hipermultiplete fundamental [160]. Nuevamente, la simetría que se utiliza para fijar la matriz de reflexión es independiente de la cantidad de flujo magnético, y por ende dicha matriz debe ser la misma que la hallada en [161]. En este caso los campos en la fundamental definidos en el defecto se pueden contraer con los extremos de una cadena de operadores de campos de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills, y el ansatz de Bethe se utiliza para calcular dimensiones anómalas de operadores de la forma

$$\hat{O}_{I_1 \dots I_L}(x) \sim \bar{Q}_i \left(\Phi_{I_1}(x) \cdots \Phi_{I_L}(x) \right)_j^i Q^j. \quad (5.89)$$

Vamos a proceder como sigue. En la subsección 5.4.1 presentamos las soluciones de cuerdas clásicas abiertas con momento angular muy grande en el factor S^5 , cuyos extremos están fijos a las D5-branas discutidas más arriba. En la subsección 5.4.2 estudiamos las excitaciones que se propagan en la hoja de mundo, y calculamos los retrasos temporales que resultan de su reflexión, lo cual nos permite obtener los factores de reflexión de borde en el límite de acoplamiento fuerte. Procedemos en luego en la subsección 5.4.3 a calcular la diferencia entre la energía y el momento angular de las cuerdas cuyos extremos se encuentran fijos a D5-branas que forman un ángulo, en el límite de momento angular grande pero finito. Finalmente, en la subsección 5.4.4 analizamos distintas soluciones de las condiciones de crossing y unitaridad que son consistentes con los resultados obtenidos.

5.4.1. Cuerdas clásicas terminando en D5-branas con flujos

En lo que sigue describimos cuerdas semiclásicas abiertas que rotan en $AdS_5 \times S^5$ y cuyos extremos están fijos a ciertos tipos de D5-branas. En primer lugar consideramos

el límite en el que llevan un momento angular L muy grande en la esfera S^5 , resultando esto en $E - L = 0$. Más adelante, usamos estas configuraciones como estados de referencia sobre los que se propagan impurezas.

Comenzamos describiendo las D5-branas que vamos a utilizar para imponer las condiciones de borde para las cuerdas abiertas. Consideramos dos familias de D5-branas:

1. D5-branas con volumen de mundo $AdS_2 \times S^4$ y un campo eléctrico;
2. D5-branas con volumen de mundo $AdS_4 \times S^2$ y un campo magnético.

Escribiendo la métrica de $AdS_5 \times S^5$ en coordenadas globales como

$$ds^2 = R^2(-\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_3^2 + d\alpha^2 + \sin^2 \alpha d\Omega_4^2), \quad (5.90)$$

las D5-branas de la primera familia se extienden en las direcciones t, ρ y Ω_4 , mientras que se encuentran fijas en un valor α_0 del ángulo azimutal. Este valor se relaciona con la intensidad del campo eléctrico en el factor AdS del volumen de mundo según

$$F = F_{t\rho} dt \wedge d\rho \quad \text{con} \quad F_{t\rho} = \pm 2g \cosh \rho \cos \alpha_0. \quad (5.91)$$

La mitad de este volumen de mundo está en un punto⁷ de la esfera Ω_3 de AdS especificado por $\beta = \beta_0$ y $\psi_1 = \psi_2 = \frac{\pi}{2}$, mientras que la otra mitad está en $\beta_0 + \pi$ y $\psi_1 = \psi_2 = \frac{\pi}{2}$, ver figura 5.8. Entonces, el signo \pm de arriba corresponde a superficies en $\beta = \beta_0$ y $\beta = \beta_0 + \pi$, respectivamente.

Cuando no hay campo eléctrico, el factor S^4 del volumen de mundo es de tamaño máximo y se encuentra en el ecuador de la esfera S^5 . A medida que el flujo eléctrico en la D5-brana aumenta, el factor S^4 del volumen de mundo se desplaza alejándose del ecuador. La cantidad de flujo eléctrico está discretizada según [162, 163]

$$\frac{k}{N} = \frac{\alpha_0}{\pi} - \frac{\sin 2\alpha_0}{2\pi}, \quad (5.92)$$

donde k es un entero. Como vimos en el capítulo 3, estas D5-branas son duales a lazos de Wilson BPS en representaciones totalmente antisimétricas de $SU(N)$, correspondiendo el entero k al rango de dicha representación [156].

⁷Para la 3-esfera en AdS usamos las coordenadas

$$d\Omega_3^2 = d\psi_1^2 + \sin^2 \psi_1 (d\psi_2^2 + \sin^2 \psi_2 d\beta^2).$$

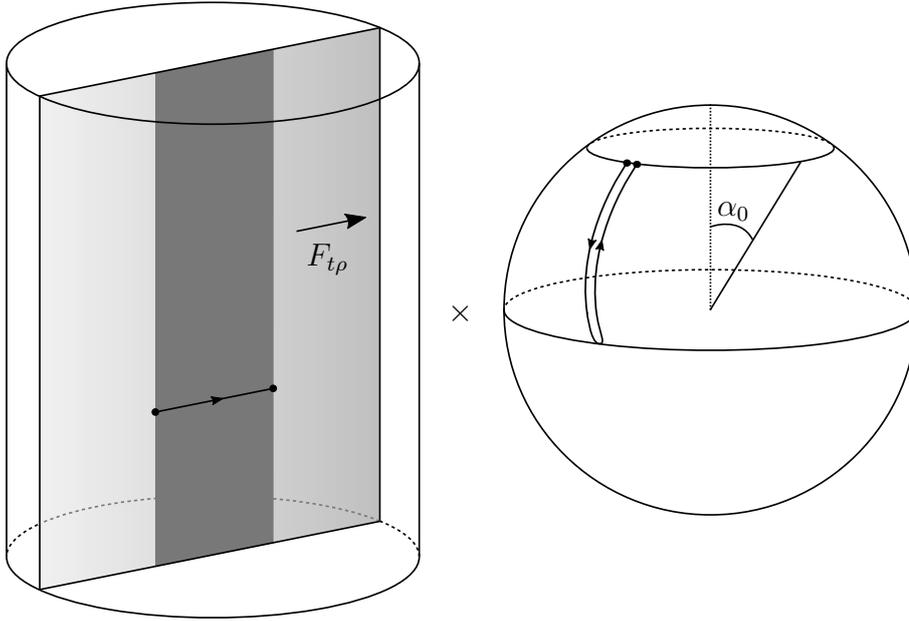


Figura 5.8: En sombreado traslúcido mostramos el volumen de mundo de la D5-brana, *i.e.* un factor AdS_2 contenido en AdS_5 y un S^4 en la esfera S^5 . En gris sólido se grafica la hoja de mundo de una cuerda abierta con momento angular grande cuyos extremos se encuentran fijos a esta D5-brana.

La segunda familia de soluciones de D5-branas fue encontrada en [164]. En este caso, el factor AdS del volumen de mundo se define a través de la posición radial de la brana como función del ángulo en el que se encuentra en el $S^3 \subset AdS_5$, como se muestra esquemáticamente en la figura 5.9. en la S^5 la D5-brana se extiende a lo largo del ángulo azimutal α y de un círculo en Ω_4 . Esto define una S^2 en la que podemos encender un campo magnético,

$$F = F_{\alpha\varphi} d\alpha \wedge d\varphi = \frac{q}{2} \sin \alpha d\alpha \wedge d\varphi, \quad (5.93)$$

donde q es el entero que especifica el flujo magnético. Estas D5-branas penetran en el interior de AdS desde el borde hasta una distancia ρ_0 dada por

$$\sinh \rho_0 = \frac{|q|}{4g}. \quad (5.94)$$

Cuerdas semiclásicas

Presentamos ahora las soluciones de cuerdas abiertas que llevan un momento angular L muy grande, y tienen sus extremos fijos a las D5-branas descritas arriba. Por el momento, consideramos solamente las soluciones de cuerdas dobladas, que se

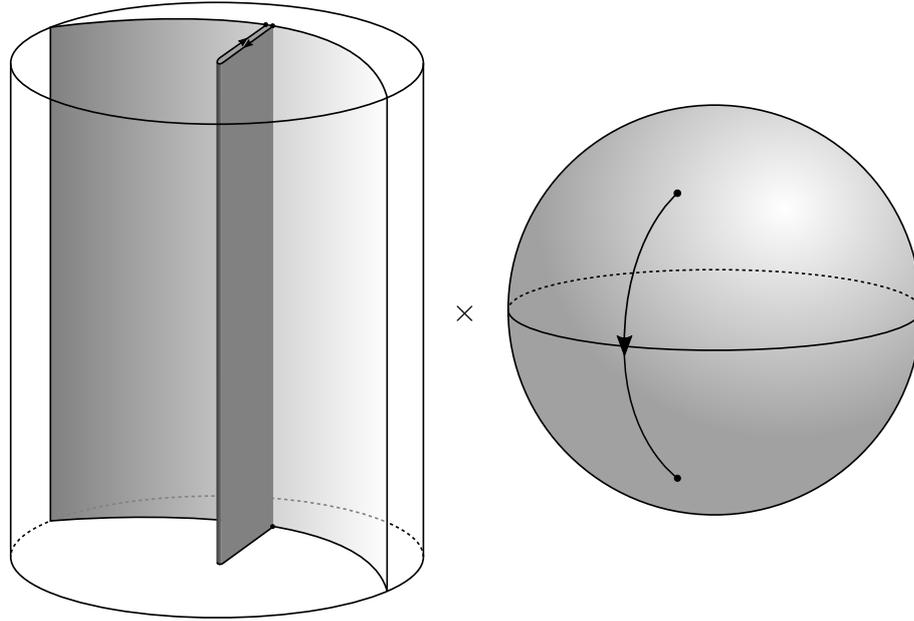


Figura 5.9: En sombreado traslúcido se muestra el volumen de mundo de la D5-brana, *i.e.* un factor AdS_4 contenido en AdS_5 y un S^2 en la esfera. En sombreado sólido se representa la hoja de mundo de una cuerda con momento angular grande cuyos extremos se hallan fijos a esta D5-brana.

extienden a lo largo del ángulo azimutal de la esfera y de la coordenada radial de AdS, dejando para más adelante el estudio de las configuraciones más generales. Buscamos por lo tanto cuerdas que se extienden en las direcciones ρ y α , mientras que giran alrededor de un φ que parametriza un círculo en la S^4 ,

$$t = \tau, \quad \varphi = \omega\tau, \quad (5.95)$$

$$\rho = \rho(\sigma), \quad \alpha = \alpha(\sigma). \quad (5.96)$$

las ecuaciones de movimiento pueden obtenerse de la acción de Nambu-Goto,

$$S_{\text{NG}} = -2g \int d^2\sigma \sqrt{(\cosh^2 \rho - \omega^2 \sin^2 \alpha)(\rho'^2 + \alpha'^2)}, \quad (5.97)$$

que debe ser suplementada por los términos de borde

$$S_{\text{borde}} = \int d\tau A_\mu \frac{dX^\mu}{d\tau} \Big|_{\sigma=\pi} - \int d\tau A_\mu \frac{dX^\mu}{d\tau} \Big|_{\sigma=0}, \quad (5.98)$$

dado que las D5-branas soportan campos electromagnéticos.

Concentrémonos primero en las condiciones de borde impuestas por una D5-brana de la primera familia. Para $\alpha(\sigma)$ son de tipo Dirichlet, estando los extremos de la cuerda fijos en un valor α_0 . Debido al momento angular la cuerda se estirará alejándose

de α_0 hacia el ecuador de la S^5 , y en el límite $L \rightarrow \infty$ la cuerda está doblada, extendiéndose desde α_0 hasta llegar al ecuador, para volver finalmente a α_0 . En AdS la cuerda se extiende en la coordenada radial desde 0 hasta ρ_0 , debido a que el campo eléctrico tira de sus extremos en sentidos opuestos. De ahora en más, nos limitamos a una mitad de la cuerda doblada, de modo que la condición de borde impuesta por un término como (5.98) se aplica solamente al extremo derecho, mientras que el extremo izquierdo se mueve a lo largo de una geodésica nula, *i.e.* $\rho = 0$ y $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

La cuerda puede parametrizarse con α , y es entonces fácil ver que las ecuaciones de movimiento son resueltas por

$$\cosh \rho = \frac{1}{\sin \alpha} \quad \text{y} \quad \omega = 1. \quad (5.99)$$

En cuanto a la condición de borde para el extremo derecho, tenemos

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{NG}}}{\partial \rho'} + F_{t\rho} \right) \Big|_{\alpha=\alpha_0} = 0, \quad (5.100)$$

y es inmediata la verificación de que la solución (5.99) satisface esta condición⁸,

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{NG}}}{\partial \rho'} + F_{t\rho} \right) \Big|_{\alpha=\alpha_0} = 2g (\cot \alpha_0 - \cos \alpha_0 \cosh \rho(\alpha_0)) = 0. \quad (5.101)$$

Esta solución es una *fracción* de aquella hallada por Drukker y Kawamoto en [130], y se reduce a esta en el límite $\alpha_0 \rightarrow 0$.

Nos interesa ahora calcular la energía y el momento angular de esta solución. Tanto E como L son divergentes, pero nos interesa de hecho la diferencia $E - L$. Existen dos contribuciones a dicha diferencia, una proveniente de las densidades en el interior y la otra del término de borde, y ambas se cancelan exactamente,

$$\begin{aligned} E - L &= 2g \int_{\pi/2}^{\alpha_0} d\alpha \frac{1}{\cos \alpha} \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \sin^2 \alpha \right) + A_t \Big|_{\alpha=\alpha_0} \\ &= -2g \frac{\cos^2 \alpha_0}{\sin \alpha_0} + 2g \cos \alpha_0 \sinh \rho(\alpha_0) = 0. \end{aligned} \quad (5.102)$$

Aquí usamos

$$A_t = 2g \sinh \rho \cos \alpha_0, \quad (5.103)$$

que es el potencial vectorial que resulta en (5.91) para el extremo derecho.

⁸En las convenciones que estamos usando el extremo derecho se encuentra en $\beta_0 + \pi$.

En esta parametrización, la densidad de momento angular se torna infinita a medida que α se acerca a $\frac{\pi}{2}$. Alternativamente, podemos parametrizar la solución en términos de una coordenada espacial semi-infinita $x \in (-\infty, 0]$:

$$\rho = \operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{\tanh(x_0 - x)} \right), \quad (5.104)$$

$$\alpha = \arccos \left(\frac{1}{\cosh(x_0 - x)} \right), \quad (5.105)$$

$$\varphi = t, \quad (5.106)$$

donde $\cosh x_0 = \frac{1}{\cos \alpha_0}$ y $x_0 > 0$. En este gauge la solución es un solitón estático en la recta semi-infinita. Lejos del solitón, *i.e.* para $x \ll 0$, la densidad de momento angular se vuelve constante.

Pasamos ahora a considerar cuerdas abiertas cuyos extremos están fijos a D5-branas de la segunda familia. Los términos de borde son en este caso distintos, resultando esto en otras condiciones de borde. En este caso, es más natural usar ρ para parametrizar la cuerda tomando $0 < \rho < \rho_0$, y entonces tendremos que el extremo derecho se encuentra fijo en ρ_0 . La condición de borde para este extremo es ahora

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{NG}}}{\partial \alpha'} + F_{\varphi\alpha} \right) \Big|_{\rho=\rho_0} = 0. \quad (5.107)$$

Por supuesto, (5.99) sigue siendo una solución de las ecuaciones de movimiento. Sorprendentemente, también satisface esta nueva condición de contorno, y la configuración correspondiente sigue teniendo $E = L$.

5.4.2. Factor de reflexión en el límite de acoplamiento fuerte

Vamos a considerar ahora soluciones más generales de cuerdas clásicas. Sobre el solitón estático que encontramos en la sección 5.4.1 podemos incorporar solitones propagándose, que se reflejan en el borde derecho. A partir de la solución que corresponde a un solitón reflejándose calcularemos el retraso temporal asociado a la reflexión, y de este será posible obtener el factor de reflexión.

Utilizando la reducción de Pohlmeyer, pueden relacionarse soluciones clásicas para un modelo σ en la esfera S^2 con soluciones clásicas para el modelo de sin-Gordon [165]. La reducción de Pohlmeyer puede generalizarse para relacionar soluciones del modelo σ en el espacio $AdS_2 \times S^2$ con soluciones del modelo sin/sinh-Gordon [166]. Si el

modelo σ está definido en la semi-recta, lo mismo ocurrirá con el sistema sin/sinh-Gordon. Podemos parametrizar a los factores AdS_2 y S^2 con

$$\begin{aligned}\eta^1 &= \cosh \rho \cos \tau, & n^1 &= \sin \alpha \cos \varphi, \\ \eta^2 &= \cosh \rho \sin \tau, & n^2 &= \sin \alpha \sin \varphi, \\ \eta^3 &= \sinh \rho, & n^3 &= \cos \alpha,\end{aligned}\tag{5.108}$$

donde η^i y n^i satisfacen las condiciones $\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta} = -(\eta^1)^2 - (\eta^2)^2 + (\eta^3)^2 = -1$ y $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = (n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 = 1$. Los vínculos de Virasoro para una cuerda en esta parametrización son

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\eta}}^2 + \boldsymbol{\eta}'^2 &= -1, & \dot{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\eta}' &= 0, \\ \dot{\mathbf{n}}^2 + \mathbf{n}'^2 &= 1, & \dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}' &= 0,\end{aligned}$$

donde debemos usar los productos escalares para $\boldsymbol{\eta}$ ó \mathbf{n} según el caso.

Luego de la reducción de Pohlmeyer, los campos del modelo σ se relacionan con los campos de sin-Gordon $\boldsymbol{\Phi}$ y sinh-Gordon $\boldsymbol{\varphi}$ de acuerdo a

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}^2 - \boldsymbol{\eta}'^2 = -\cosh 2\boldsymbol{\varphi},\tag{5.109}$$

$$\dot{\mathbf{n}}^2 - \mathbf{n}'^2 = \cos 2\boldsymbol{\Phi}.\tag{5.110}$$

Concentremos nuestra atención sobre la parte de sin-Gordon del sistema. La ecuación de movimiento es

$$\boldsymbol{\Phi}'' - \ddot{\boldsymbol{\Phi}} = \frac{1}{2} \sin 2\boldsymbol{\Phi}.\tag{5.111}$$

En la semi-recta $x \leq 0$, las condiciones de borde más generales compatibles con la integrabilidad son [167]

$$\boldsymbol{\Phi}' \Big|_{x=0} = M \sin(\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Phi}_0) \Big|_{x=0},\tag{5.112}$$

donde M y $\boldsymbol{\Phi}_0$ son constantes. Vamos a mostrar a continuación que las condiciones de borde heredadas de los distintos tipos de D5-branas del modelo σ se encuentran dentro de este conjunto.

D5-brana con campo eléctrico y volumen de mundo $AdS_2 \times S^4$

En este caso la D5-brana se encuentra en algún valor α_0 , de manera que en el modelo σ los campos α y φ satisfacen condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann, respectivamente,

$$\dot{\alpha} \Big|_{x=0} = 0, \quad \varphi' \Big|_{x=0} = 0.\tag{5.113}$$

Por lo tanto, el primer vínculo de Virasoro es en el borde

$$\alpha'^2 \Big|_{x=0} + \sin^2 \alpha_0 \dot{\varphi}^2 \Big|_{x=0} = 1. \quad (5.114)$$

El campo de sin-Gordon se relaciona con los campos del modelo σ según

$$\cos 2\Phi = \dot{\alpha}^2 - \alpha'^2 + \sin^2 \alpha \left(\dot{\varphi}^2 - \varphi'^2 \right), \quad (5.115)$$

y por ende concluimos que

$$\sin \Phi \Big|_{x=0} = \alpha' \Big|_{x=0}, \quad \cos \Phi \Big|_{x=0} = \sin \alpha_0 \dot{\varphi} \Big|_{x=0}. \quad (5.116)$$

Considerando la derivada de la ecuación (5.115) y el primer vínculo de Virasoro, obtenemos

$$\Phi' \Big|_{x=0} = -\cot \alpha_0 \cos \Phi \Big|_{x=0}, \quad (5.117)$$

que es una condición de borde consistente con la integrabilidad, es decir que tiene la forma (5.112) si tomamos $M = \cot \alpha_0$ y $\Phi_0 = \frac{\pi}{2}$.

La configuración con un solitón estático (5.104)-(5.106) es un caso particular de una solución que satisface la condición de borde (5.117), pero vamos a considerar en lo que sigue soluciones más generales. Se conocen soluciones multisolitónicas en el modelo de sin-Gordon con condiciones de borde integrables, [168]. Para obtener un solitón que se refleja en el borde, podemos considerar dos solitones en la recta completa $(-\infty, \infty)$, uno con velocidad v y el otro siendo su imagen respecto a $x = 0$, es decir con velocidad $-v$. Para el tipo de condiciones de contorno que estamos considerando hay además un solitón estático en el borde. Para estas soluciones, que satisfacen las condiciones de contorno (5.112), se conoce el desfase clásico a (ver (2.15) en [168]). El retraso temporal clásico se obtiene de este a través de la relación clásica $\Delta T = a \frac{\sqrt{1-v^2}}{v}$, donde v es la velocidad del solitón. Como función de la rapidity definida por $v = \tanh \theta$, el retraso temporal es

$$\Delta T = \frac{1}{\sinh \theta} \log \left[\pm \tanh^2 \frac{\theta}{2} \tanh^2 \theta \frac{\tanh \frac{1}{2}(\theta + i\eta) \tanh \frac{1}{2}(\theta - i\eta)}{\tanh \frac{1}{2}(\theta + \zeta) \tanh \frac{1}{2}(\theta - \zeta)} \right], \quad (5.118)$$

donde ζ y η parametrizan a M y Φ_0 a través de

$$M \cos \Phi_0 = \cosh \zeta \cos \eta, \quad M \sin \Phi_0 = \sinh \zeta \sin \eta, \quad (5.119)$$

y la rapidity θ se relaciona con la energía y el momento en el modelo σ de acuerdo a

$$\cosh \theta = \frac{4g}{\epsilon} = \frac{1}{\left| \sin \frac{p}{2} \right|}. \quad (5.120)$$

Los signos \pm en (5.118) corresponden a los casos $|\theta| \geq \zeta$. Nos interesa en particular el tipo de condiciones de borde obtenidas cuando $M = \cot \alpha_0$ y $\Phi_0 = \frac{\pi}{2}$. Para estas, tenemos

$$\Delta T = 2 \tan \frac{p}{2} \log \left(\cos \frac{p}{2} \right) + \tan \frac{p}{2} \log \left[\left(\frac{1 - \sin \frac{p}{2}}{1 + \sin \frac{p}{2}} \right) \left(\frac{\sin \alpha_0 + \sin \frac{p}{2}}{|\sin \alpha_0 - \sin \frac{p}{2}|} \right) \right]. \quad (5.121)$$

El segundo término es el retraso debido al solitón estático en el borde. Como podíamos esperar de antemano, este término se anula para $\alpha_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, es decir cuando no hay solitón en el borde.

El retraso temporal se relaciona con la fase δ que caracteriza el factor de reflexión $R_0 = e^{i\delta}$ [169]. Más precisamente,

$$\frac{d\epsilon}{dp} \Delta T = \frac{d\delta}{dp}, \quad (5.122)$$

lo cual nos permite obtener δ por integración. Consideramos ahora un borde derecho y separamos $\delta = \delta_0 + \delta_{\text{extra}}$. Aquí, δ_0 es la fase de reflexión que correspondería si el solitón estático tuviera $\alpha_0 = 0$. Como ya fue calculada anteriormente, nos concentramos en la fase adicional δ_{extra} . En general, las fases de dispersión y reflexión dependen del gauge elegido en el modelo σ . En particular, en el gauge del modelo σ tal que la densidad de momento es constante⁹ δ_0 es [66, 67, 131]

$$\delta_0 = -8g \cos \frac{p}{2} \log \left(\cos \frac{p}{2} \right) - 4g \cos \frac{p}{2} \log \left(\frac{1 - \sin \frac{p}{2}}{1 + \sin \frac{p}{2}} \right). \quad (5.123)$$

Para δ_{extra} , en el gauge del modelo σ en el que la densidad de momento no es constante obtenemos

$$\delta_{\text{extra}} = -4g \cos \frac{p}{2} \log \left| \frac{\sin \alpha_0 + \sin \frac{p}{2}}{\sin \alpha_0 - \sin \frac{p}{2}} \right| + 4g \cos \alpha_0 \log \left| \frac{\sin(\frac{p}{2} + \alpha_0)}{\sin(\frac{p}{2} - \alpha_0)} \right| + 4gp(\sin \alpha_0 - 1). \quad (5.124)$$

Para traducir esto al gauge en el que la densidad de momento es constante, debemos tener en cuenta la longitud del solitón en el borde, como se discute en detalle para la fase de dispersión en el interior en [170]. Sea Δx el intervalo del solitón de borde en nuestro gauge y $\Delta x'$ el intervalo correspondiente en el gauge con densidad de momento constante. Este último se relaciona con el momento total L según $L = 2g\Delta x'$, de modo que el cambio en la longitud del solitón de borde es

$$2g\Delta x - L = 2g \int_{-\infty}^0 \left(1 - \frac{dL}{dx} \right) dx = 2g \int_{-\infty}^0 dx \cos^2 \alpha(x) = 2g(1 - \sin \alpha_0), \quad (5.125)$$

⁹Si integráramos (5.121) para $\alpha_0 = 0$ obtendríamos un término adicional $8g \cos(\frac{p}{2})$ debido a que calculamos ΔT en un gauge del modelo σ para el cual la densidad de momento no es uniforme. El cálculo de δ_0 en el gauge con densidad de momento constante se realizó en detalle en [131].

donde $\alpha(x)$ es dado por (5.105). Por lo tanto, en un gauge con densidad de momento no-uniforme el último término de (5.124) se compensa con el doble de este cambio de longitud¹⁰. Entonces, en el gauge en el que la densidad de momento es constante la fase de reflexión en el borde derecho es

$$\begin{aligned} \delta = & -8g \cos \frac{p}{2} \log \left(\cos \frac{p}{2} \right) - 4g \cos \frac{p}{2} \log \left(\frac{1 - \sin \frac{p}{2}}{1 + \sin \frac{p}{2}} \right) \\ & - 4g \cos \frac{p}{2} \log \left| \frac{\sin \alpha_0 + \sin \frac{p}{2}}{\sin \alpha_0 - \sin \frac{p}{2}} \right| + 4g \cos \alpha_0 \log \left| \frac{\sin(\frac{p}{2} + \alpha_0)}{\sin(\frac{p}{2} - \alpha_0)} \right|. \end{aligned} \quad (5.126)$$

Nótese que en el límite $\alpha_0 \rightarrow 0$ la segunda línea en (5.126) se anula, de modo que recuperamos en este caso el resultado para una cuerda que se extiende hasta el borde de AdS [66,67]. En cambio, cuando $\frac{p}{2} = \pm \alpha_0$ los dos términos adicionales en la segunda línea aparentan tener divergencias logarítmicas si se los considera por separado, pero estas se cancelan entre sí para dar una fase de reflexión regular en el límite de acoplamiento fuerte.

D5-brana con campo magnético y volumen de mundo $AdS_4 \times S^2$

En este otro caso la D5-brana se extiende a lo largo de ambas coordenadas α y φ , de modo que estas satisfacen condiciones de contorno tipo Neumann, pero modificadas debido a la presencia del campo magnético en la S^2 . Tendremos entonces

$$\alpha' \Big|_{x=0} - \frac{q}{2} \sin \alpha \dot{\varphi} \Big|_{x=0} = 0, \quad \sin \alpha \varphi' \Big|_{x=0} + \frac{q}{2} \dot{\alpha} \Big|_{x=0} = 0, \quad (5.127)$$

donde q da cuenta de la cantidad de flujo magnético en S^2 .

El primer vínculo de Virasoro implica al ser evaluado en el borde

$$\sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 \Big|_{x=0} = \frac{1}{1 + (\frac{q}{2})^2} - \dot{\alpha}^2 \Big|_{x=0}, \quad (5.128)$$

de donde obtenemos

$$\cos 2\Phi \Big|_{x=0} = \frac{1 - (\frac{q}{2})^2}{1 + (\frac{q}{2})^2} \equiv \cos 2\Phi_0. \quad (5.129)$$

Por lo tanto, tenemos en este caso condiciones de contorno de Dirichlet para el campo de sin-Gordon, lo cual corresponde a $M \rightarrow \infty$ en (5.112).

El retraso temporal se obtiene en este caso de (5.118) tomando $\zeta \rightarrow \infty$, y obtenemos así

$$\Delta T = 2 \tan \frac{p}{2} \log \left(\cos \frac{p}{2} \right) + \tan \frac{p}{2} \log \left[\left(\frac{1 - \sin \frac{p}{2}}{1 + \sin \frac{p}{2}} \right) \left(\frac{1 + \cos \Phi_0 \sin \frac{p}{2}}{1 - \cos \Phi_0 \sin \frac{p}{2}} \right) \right]. \quad (5.130)$$

¹⁰Las ecuaciones de Bethe de borde dependen de dos veces la longitud del sistema, ver por ejemplo (5.63).

Al igual que antes, podemos separar la fase de reflexión resultante escribiéndola como $\delta = \delta_0 + \delta_{\text{extra}}$, donde

$$\begin{aligned} \delta_{\text{extra}} = & -4g \cos \frac{p}{2} \log \left(\frac{1 + \cos \Phi_0 \sin \frac{p}{2}}{1 - \cos \Phi_0 \sin \frac{p}{2}} \right) - 8g \tan \Phi_0 \arctan(\sin \Phi_0 \tan \frac{p}{2}) \\ & + 4gp \left(\frac{1}{\cos \Phi_0} - 1 \right). \end{aligned} \quad (5.131)$$

El solitón estático en el borde es el mismo que el que consideramos anteriormente si identificamos $\cos \Phi_0$ con $\sin \alpha_0$. Debe entonces sustraerse el mismo término (5.125) para expresar la fase de reflexión en el gauge en el que la densidad de momento es constante. Obtenemos de este modo

$$\begin{aligned} \delta = & -8g \cos \frac{p}{2} \log \left(\cos \frac{p}{2} \right) - 4g \cos \frac{p}{2} \log \left(\frac{1 - \sin \frac{p}{2}}{1 + \sin \frac{p}{2}} \right) - 4g \cos \frac{p}{2} \log \left(\frac{1 + \cos \Phi_0 \sin \frac{p}{2}}{1 - \cos \Phi_0 \sin \frac{p}{2}} \right) \\ & - 8g \tan \Phi_0 \arctan(\sin \Phi_0 \tan \frac{p}{2}) + 4gp \left(\frac{1}{\cos \Phi_0} - \cos \Phi_0 \right). \end{aligned} \quad (5.132)$$

5.4.3. Cuerdas entre D5-branas que forman ángulos

En esta sección continuamos con el estudio de las cuerdas con momento angular grande, pero introducimos un par de modificaciones importantes. En primer lugar, vamos a considerar cuerdas abiertas que tienen sus extremos fijos a dos D5-branas, cuyos ejes para los factores esféricos o de AdS son oblicuos, *i.e.* forman un ángulo θ en la esfera S^5 y un ángulo ϕ en AdS_5 . En segundo lugar, vamos a considerar ahora que el momento angular es grande pero finito.

Para estas configuraciones, la diferencia $E - L$ ya no se anula. Vamos a calcularla aquí explícitamente a orden dominante en las correcciones por momento angular finito. Para las D5-branas de la primera familia, hacemos esto en dos regímenes distintos¹¹: cuando $\frac{\pi}{2} - \alpha_0$ es finito y cuando $\alpha_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$. En el primer caso, la cuerda es larga y $E - L$ puede hallarse clásicamente. En el segundo, la cuerda es corta y $E - L$ debe calcularse a nivel cuántico. Esto puede hacerse porque la cuerda corta sólo se propaga en un entorno de una geodésica nula, de modo que los niveles más bajos de su espectro corresponden a los de una cuerda abierta en un espacio de fondo de ondas pp.

La razón por la que estos cálculos son relevantes radica en que la desviación respecto al 0 de $E - L$ puede interpretarse como la corrección dominante por tamaño finito, que puede obtenerse independientemente por medio de un cálculo tipo Lüscher. Dado que, como veremos en el próximo capítulo, esta corrección depende de una

¹¹Una distinción análoga puede hacerse para las D5-branas de la segunda familia, diferenciando cuando Φ_0 es finito o infinitesimal.

continuación analítica del factor de dressing de borde, los resultados de esta sección constituyen un chequeo de consistencia para cualquier propuesta exacta para el factor de reflexión.

Cuerda semiclásica entre D5-branas que forman ángulos

Consideramos ahora una cuerda semiclásica con momento angular L grande, extendida entre dos D5-branas de la primera de las familias descritas en 5.4.1, cuando $\frac{\pi}{2} - \alpha_0$ es finito. Vamos a separar las D5-branas con un ángulo ϕ en el espacio AdS y un ángulo θ en la esfera. Este cálculo generaliza el realizado en [67, 69], y nos enfocamos solamente en la situación con L grande.

Debido a la separación angular entre las D5-branas, la cuerda semiclásica se propaga ahora en $AdS_3 \times S^3$. Para su métrica usamos las coordenadas

$$ds^2 = R^2 \left(\frac{dr^2}{1+r^2} - (1+r^2)dt^2 + r^2 df^2 + \frac{d\varrho^2}{1-\varrho^2} + (1-\varrho^2)d\xi_1^2 + \varrho^2 d\xi_2^2 \right), \quad (5.133)$$

y parametrizamos la solución clásica para la cuerda con

$$y_1 + iy_2 = e^{it} \sqrt{1+r^2} = e^{i\kappa\tau} \sqrt{1+r(\sigma)^2}, \quad y_3 + iy_4 = e^{if} r = e^{if(\sigma)} r(\sigma), \quad (5.134)$$

$$x_1 + ix_2 = e^{i\xi_1} \sqrt{1-\varrho^2} = e^{i\gamma\tau} \sqrt{1-\varrho(\sigma)^2}, \quad x_3 + ix_4 = e^{i\xi_2} \varrho = e^{i\varphi(\sigma)} \varrho(\sigma). \quad (5.135)$$

Trabajamos en el gauge conforme, y tomamos el rango de la coordenada espacial de la hoja de mundo como $\sigma \in [-s/2, s/2]$. Los extremos de la cuerda están fijos a D5-branas de la primera familia, de manera que las condiciones de contorno son las discutidas en la sección 5.4.1. En las coordenadas globales (5.90) usadas anteriormente, las D5-branas se ubican en el ángulo azimutal¹² α_0 . Cuando expresamos esto en las coordenadas (5.133), la posición de una de las D5-branas está dada por $\varrho \sin \xi_2 = \cos \alpha_0$, mientras que la posición de la otra corresponde a $\varrho \sin(\xi_2 - \theta) = \cos \alpha_0$.

En lo que sigue consideramos una cuerda que *cuelga* entre estas dos D5-branas, separadas por un ángulo θ como se ve en la figura 5.10. A su vez, ambas D5-branas están separadas por un ángulo ϕ en una esfera contenida en AdS.

Al introducir el ansatz (5.134)-(5.135) en las ecuaciones de movimiento y los vínculos de Virasoro obtenemos

$$\ell_\phi = r^2 f', \quad D_\phi := -\ell_\phi^2 + (\kappa^2 - 1)r^2 + \kappa^2 r^4 = \frac{r^2 (r')^2}{1+r^2}, \quad (5.136)$$

$$\ell_\theta = \varrho^2 \varphi', \quad D_\theta := -\ell_\theta^2 - (\gamma^2 - 1)\varrho^2 + \gamma^2 \varrho^4 = \frac{\varrho^2 (\varrho')^2}{1-\varrho^2}, \quad (5.137)$$

¹²Definido respecto a distintos ejes, que forman entre sí un ángulo θ .

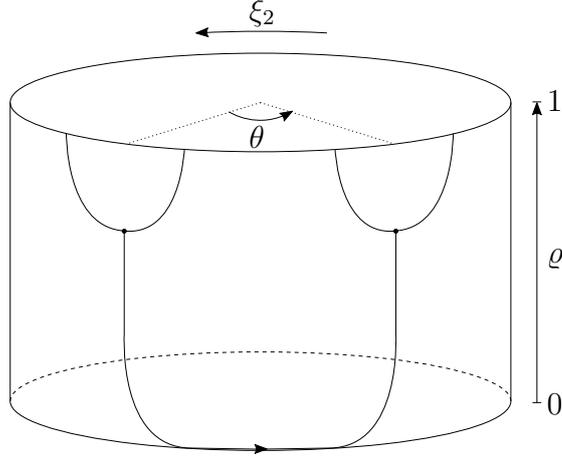


Figura 5.10: Se representan esquemáticamente las coordenadas ϱ y ξ_2 de la métrica (5.133) en forma cilíndrica. Las D5-branas están separadas por un ángulo θ , y entre ellas pende una cuerda con momento angular grande.

donde D_ϕ y D_θ son notaciones abreviadas. La extensión de la coordenada espacial de la hoja de mundo puede obtenerse en términos de $r(\sigma)$ ó $\varrho(\sigma)$ usando (5.136) ó (5.137),

$$\frac{s}{2} = \int_{r_0}^{r_{\max}} \frac{r dr}{\sqrt{1+r^2}\sqrt{D_\phi}} = \int_{\varrho_0}^{\varrho_{\max}} \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}\sqrt{D_\theta}}. \quad (5.138)$$

Para una cuerda con momento angular grande, $r_{\max} = \cot \alpha_0$ y $\varrho_{\max} = \cos \alpha_0$, mientras que r_0 y ϱ_0 son los valores de r y ϱ en $\sigma = 0$. Como tenemos la condición de borde $r'(0) = \varrho'(0) = 0$, estos últimos pueden obtenerse de

$$0 = -\ell_\phi^2 + (\kappa^2 - 1)r_0^2 + \kappa^2 r_0^4, \quad 0 = -\ell_\theta^2 - (\gamma^2 - 1)\varrho_0^2 + \gamma^2 \varrho_0^4. \quad (5.139)$$

Nos interesa aquí solamente la solución con L muy grande. Cuando el momento angular L y la energía E tienden a infinito, se tiene $\varrho_0, r_0 \rightarrow 0$, así como $\gamma, \kappa \rightarrow 1$ y $\ell_\theta, \ell_\phi \rightarrow 0$. Por lo tanto, vamos a re-escalarlos según

$$\kappa = 1 + \epsilon \frac{c_\phi}{2}, \quad \ell_\phi = \epsilon \frac{\hat{\ell}_\phi}{2}, \quad r(\sigma) = \sqrt{\epsilon} u(\sigma), \quad (5.140)$$

$$\gamma = 1 + \epsilon \frac{c_\theta}{2}, \quad \ell_\theta = \epsilon \frac{\hat{\ell}_\theta}{2}, \quad \varrho(\sigma) = \sqrt{\epsilon} v(\sigma). \quad (5.141)$$

Los valores mínimos de las variables así escalados serán

$$u_0^2 = \frac{-c_\phi + \sqrt{c_\phi^2 + \hat{\ell}_\phi^2}}{2}, \quad v_0^2 = \frac{c_\theta + \sqrt{c_\theta^2 + \hat{\ell}_\theta^2}}{2}. \quad (5.142)$$

En el límite de L grande, la amplitud angular de la cuerda es dada por la separación angular de las D-branas, *i.e.* $\Delta f = \pi - \phi$ y $\Delta \varphi = \theta$. Usando (5.136) y (5.137), los

ángulos de separación vienen dados en términos de $r(\sigma)$ ó $\varrho(\sigma)$, y son a primer orden en la expansión con ϵ chico

$$\pi - \phi = \int_{r_0}^{r_{\max}} \frac{2\ell_\phi dr}{r\sqrt{1+r^2}\sqrt{D_\phi}} = \int_{u_0}^{\infty} \frac{\hat{\ell}_\phi du}{u\sqrt{(u^2 - u_0^2)(v^2 + v_0^2 + c_\phi)}} = -\arctan(\hat{\ell}_\phi/c_\phi), \quad (5.143)$$

$$\theta = \int_{\varrho_0}^{\varrho_{\max}} \frac{2\ell_\theta d\varrho}{\varrho\sqrt{1-\varrho^2}\sqrt{D_\theta}} = \int_{v_0}^{\infty} \frac{\hat{\ell}_\theta dv}{v\sqrt{(v^2 - v_0^2)(v^2 + v_0^2 - c_\theta)}} = \arctan(\hat{\ell}_\theta/c_\theta). \quad (5.144)$$

Si bien tenemos algo de libertad en la elección de c_θ y c_ϕ , estas están relacionadas porque las dos integrales en (5.138) deben coincidir. De la primera integral, en el límite de ϵ pequeño tenemos

$$\frac{s}{2} = \log 4 - \frac{1}{2} \log [\epsilon(2u_0^2 + c_\phi)] - \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 + r_{\max}^2}}{r_{\max}} \right), \quad (5.145)$$

mientras que de la segunda integral en (5.138) resulta

$$\frac{s}{2} = \log 4 - \frac{1}{2} \log [\epsilon(2v_0^2 - c_\theta)] - \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \varrho_{\max}^2}}{\varrho_{\max}} \right). \quad (5.146)$$

Esto implica, usando (5.142), la relación

$$\sqrt{c_\phi^2 + \hat{\ell}_\phi^2} = \sqrt{c_\theta^2 + \hat{\ell}_\theta^2}. \quad (5.147)$$

Considerando (5.143) y (5.144), podemos tomar directamente

$$c_\phi = \cos \phi, \quad c_\theta = \cos \theta, \quad (5.148)$$

lo cual resulta en¹³

$$\epsilon = 16e^{-s} \left(\frac{\varrho_{\max}}{1 + \sqrt{1 - \varrho_{\max}^2}} \right)^2. \quad (5.149)$$

Como anticipamos, nos interesa la diferencia entre la energía y el momento angular de esta configuración, que está dada por

$$E - L = 4g\kappa \int_{r_0}^{r_{\max}} dr \frac{r\sqrt{1+r^2}}{\sqrt{D_\phi}} - 4g\gamma \int_{\varrho_0}^{\varrho_{\max}} d\varrho \frac{\varrho\sqrt{1-\varrho^2}}{\sqrt{D_\theta}} - 2A_t \Big|_{r=r_{\max}}, \quad (5.150)$$

donde el último término viene del término de borde debido al campo eléctrico. En las coordenadas que estamos usando $A_t = 2gr \cos \alpha_0$. Siguiendo el procedimiento de [67],

¹³La definición de ϵ usada aquí es distinta a la de [67].

calculamos $L - 2gs$ y $E - 2gs$ por separado. Al primer orden subdominante en la expansión a ϵ chico tenemos

$$L - 2gs = -4g + g \cos \theta \epsilon + 4g \sqrt{1 - \varrho_{\max}^2}, \quad (5.151)$$

$$E - 2gs = -4g + g \cos \phi \epsilon + 4g \sqrt{1 + r_{\max}^2} - 4gr_{\max} \varrho_{\max}. \quad (5.152)$$

Dado que $\sqrt{1 + r_{\max}^2} - r_{\max} \varrho_{\max} - \sqrt{1 - \varrho_{\max}^2} = 0$, los términos que son independientes de ϵ se cancelan en la diferencia, como esperábamos. Obtenemos luego

$$\begin{aligned} E - L &= 16ge^{-s} \left(\frac{\varrho_{\max}}{1 + \sqrt{1 - \varrho_{\max}^2}} \right)^2 (\cos \phi - \cos \theta) \\ &= \frac{16g}{e^{2-2\sin \alpha_0}} \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_0}{2} \right) (\cos \phi - \cos \theta) e^{-\frac{L}{2g}}, \end{aligned} \quad (5.153)$$

donde usamos (5.151) para expresar s en términos de L .

Para las D5-branas de la segunda familia descrita en la sección 5.4.1, el cálculo correspondiente se realiza en forma análoga. No presentamos entonces los detalles sino simplemente el resultado,

$$E - L = \frac{16g}{e^{2-2\cos \Phi_0}} \tan^2 \left(\frac{\Phi_0}{2} \right) (\cos \phi - \cos \theta) e^{-\frac{L}{2g}}. \quad (5.154)$$

Cuerda cuántica entre D5-branas que forman ángulos

Los resultados anteriores son válidos para valores finitos de $\frac{\pi}{2} - \alpha_0$, de lo contrario la aproximación semiclásica deja de ser consistente. Una cuerda con momento angular grande fija a una D5-brana maximal con $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ es prácticamente puntual. Por lo tanto, sólo explora un entorno de una geodésica nula, que corresponde a una partícula girando en la esfera S^5 . Luego los estados más bajos del espectro de la cuerda corresponden a los de una cuerda abierta en una geometría de fondo de ondas pp, estando sus extremos fijos a una D5-brana que se ve esencialmente plana.

En el límite de Penrose, que corresponde a ampliar el entorno de la geodésica nula [171, 172], la métrica se reduce a

$$ds^2 = -4 du dv - z^2 du^2 + d\bar{z}^2, \quad (5.155)$$

donde $\bar{z} \in \mathbb{R}^8$. La D5-brana se vuelve plana en este límite, estando fija en las coordenadas $z^1 = z^2 = z^3 = 0$ que vienen del factor AdS, y en la coordenada $z^5 = 0$ para las coordenadas que vienen de la esfera S^5 .

Si consideramos una cuerda abierta con sus extremos fijos a una brana plana en la geometría de fondo de ondas pp, como la brana es BPS las contribuciones a la energía de vacío de los modos bosónicos y fermiónicos de la cuerda se cancelan exactamente. Queremos sin embargo considerar una cuerda abierta con uno de sus extremos en la D5-brana en $z^5 = 0$ descrita arriba, estando el otro extremo fijo a otra brana que ha sido rotada en el plano (z^5, z^6) , *i.e.* ubicada en $\cos\theta z^5 + \sin\theta z^6 = 0$. En otras palabras, para el extremo izquierdo la cuerda tiene condiciones de contorno tipo Dirichlet y Neumann en z^5 y z^6 respectivamente¹⁴,

$$z^5 \propto \sum_n a_n^5 e^{i\tau\omega_n} \sin k_n \sigma, \quad (5.156)$$

$$z^6 \propto \sum_n a_n^6 e^{i\tau\omega_n} \cos k_n \sigma, \quad (5.157)$$

donde $\omega_n = \sqrt{m^2 + k_n^2}$ para $m = \frac{L}{2\pi g}$. Ahora bien, para el extremo derecho las condiciones de contorno *rotadas* para la cuerda implican que debemos tomar $k_n = n \mp \frac{\theta}{\pi}$ cuando $a_n^5 = \pm a_n^6$.

De forma análoga, los modos fermiónicos de la cuerda presentan corrimientos similares, sólo que en este caso se trata de $\mp \frac{\theta}{2\pi}$. Como consecuencia de todo esto la energía de vacío, o más precisamente $E - L$, ya no se anula para la cuerda abierta. Podemos calcular $E - L$ directamente a partir de la diferencia entre las contribuciones con y sin los corrimientos,

$$\begin{aligned} E - L = & \frac{1}{2m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{m^2 + \left(n - \frac{\theta}{\pi}\right)^2} - \frac{1}{2m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{m^2 + n^2} \\ & - \frac{2}{m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{m^2 + \left(n - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2} + \frac{2}{m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{m^2 + n^2}, \end{aligned} \quad (5.158)$$

donde la primera línea viene de los modos bosónicos, mientras que la segunda proviene de los modos fermiónicos. Resulta conveniente introducir la notación

$$h(\theta, m) := \frac{1}{m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{m^2 + \left(n - \frac{\theta}{\pi}\right)^2} - \frac{1}{m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{m^2 + n^2}, \quad (5.159)$$

ya que nos permite escribir

$$E - L = \frac{1}{2} h(\theta, m) - 2h\left(\frac{\theta}{2}, m\right). \quad (5.160)$$

¹⁴Usamos el símbolo \propto para resaltar que estamos obviando un factor de normalización.

Consideramos primero

$$\frac{1}{m} \partial_m(m h) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m^2 + (n - \frac{\theta}{\pi})^2}} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \quad (5.161)$$

y usamos la fórmula de resumación de Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k), \quad (5.162)$$

donde \tilde{f} denota la transformada de Fourier¹⁵ de f . Entonces

$$\frac{1}{m} \partial_m(m h) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) (e^{-2ik\theta} - 1), \quad (5.163)$$

para

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{m^2 + x^2}} \implies \tilde{f}(w) = 2K_0(2\pi m |w|), \quad (5.164)$$

donde K_0 es una función de Bessel modificada del segundo tipo, y nos interesa solamente el límite de $m = \frac{L}{2\pi g}$ grande de esta resumación. Para m grande

$$\tilde{f}(k) \sim \frac{e^{-2\pi|k|m}}{\sqrt{|k|m}}, \quad (5.165)$$

y la suma está dominada por los términos con $k = \pm 1$. Entonces

$$\frac{1}{m} \partial_m(m h) \sim \frac{2e^{-2\pi m}}{\sqrt{m}} (\cos 2\theta - 1), \quad (5.166)$$

lo cual resulta en

$$h(\theta, m) \sim -\frac{e^{-2\pi m}}{\pi\sqrt{m}} (\cos 2\theta - 1). \quad (5.167)$$

Por lo tanto,

$$E - L \sim -\frac{e^{-2\pi m}}{2\pi\sqrt{m}} (\cos 2\theta - 1) + 2\frac{e^{-2\pi m}}{\pi\sqrt{m}} (\cos \theta - 1) = -\sqrt{\frac{2g}{\pi L}} e^{-\frac{L}{g}} (\cos \theta - 1)^2. \quad (5.168)$$

Si consideramos además que una de las D5-branas está también rotada en el plano (z^3, z^4) en un ángulo ϕ , el ω_n correspondiente a estas coordenadas bosónicas recibe

¹⁵En este trabajo usamos la definición

$$\tilde{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-2\pi i w x} f(x).$$

un corrimiento $n \mapsto n \pm \frac{\phi}{\pi}$. En cambio, las frecuencias de los modos fermiónicos se modifican como $n \mapsto n \pm (\frac{\theta}{2\pi} \pm \frac{\phi}{2\pi})$, de manera que

$$\begin{aligned} E - L &= \frac{1}{2}h(\phi, m) + \frac{1}{2}h(\theta, m) - h\left(\frac{\theta+\phi}{2}, m\right) - h\left(\frac{\theta-\phi}{2}, m\right) \\ &\sim -\sqrt{\frac{2g}{\pi L}} e^{-\frac{L}{g}} (\cos \theta - \cos \phi)^2. \end{aligned} \quad (5.169)$$

Finalmente, observamos que un resultado idéntico se aplica a las D5-branas maximales de la segunda familia, que se obtienen cuando $\Phi_0 \rightarrow 0$.

5.4.4. Condición de crossing de borde

Las dos familias infinitas de D5-branas estudiadas en esta sección tienen algo en común. Todos sus miembros preservan la misma simetría de fondo: un factor $SU(2|2)$ diagonal del grupo de simetría $SU(2|2)^2$ usual. Por lo tanto, a menos de una constante multiplicativa global las matrices de reflexión son idénticas, e iguales también a la matriz de reflexión discutida en la sección 5.3.1. En otras palabras, en términos del problema de dispersión en el borde desconocemos solamente el factor de reflexión que corresponde a cada caso. Como ya vimos, estos factores están restringidos por la condición de crossing de borde.

Para un borde derecho, en todos los casos que consideramos el factor de reflexión desconocido $R_0(p)$ debe satisfacer la ecuación de crossing (5.84), presentada anteriormente y deducida en [66, 67],

$$R_0(p)R_0(\bar{p}) = \sigma(p, -\bar{p})^2, \quad (5.170)$$

donde $\sigma(p_1, p_2)$ es el factor de dressing del interior [145, 146] y \bar{p} indica como antes la transformación de crossing. Vimos también que la condición de unitaridad corresponde a (5.85)

$$R_0(p)R_0(-p) = 1, \quad (5.171)$$

de modo que procediendo como en la sección (5.3.1) podemos escribir ambas condiciones en la forma

$$\sigma_B(p)\sigma_B(\bar{p}) = \frac{x^- + \frac{1}{x^-}}{x^+ + \frac{1}{x^+}} \quad y \quad \sigma_B(p)\sigma_B(-p) = 1, \quad (5.172)$$

con $\sigma_B(p)$ definido en (5.86). Un factor de dressing de borde que constituye una solución particular de este sistema se halló en [66, 67], y es el $\sigma_B^0(p) = \exp\{i\chi(x^+) - i\chi(x^-)\}$ definido por (5.88).

En el régimen de acoplamiento fuerte esta solución se reduce al límite $\alpha_0 \rightarrow 0$ de (5.126), o equivalentemente al límite $\Phi_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ de (5.132). Sin embargo, para recuperar (5.126) y (5.132) en general debemos buscar nuevas soluciones de las mismas condiciones de crossing y unitaridad, (5.172). Para ello, vamos a tomar $\sigma_B(p) = \sigma_B^0(p)\sigma_T(p)$. El factor de dressing desconocido $\sigma_T(p)$ satisface ahora condiciones de crossing y unitaridad “*triviales*”,

$$\sigma_T(p)\sigma_T(\bar{p}) = 1, \quad \sigma_T(p)\sigma_T(-p) = 1. \quad (5.173)$$

Como vamos a ver, hay infinitas formas de resolver el sistema trivial (5.173). Sin embargo, nuestro análisis no pretende ser exhaustivo: vamos a observar simplemente que las soluciones obtenidas de un modo particular son compatibles con todos los resultados hallados anteriormente para el límite de acoplamiento fuerte.

Comenzamos proponiendo que $\sigma_T(p)$ debe tener la forma

$$\sigma_T(p) = e^{i\chi_T(x^+) - i\chi_T(x^-)}, \quad (5.174)$$

y usamos para definir $\chi_T(x)$ una integral sobre un contorno del plano complejo, por analogía con (5.88). En particular, en términos de una función genérica F definimos

$$\Phi_F(x) = i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{x-z} \log F\left(z + \frac{1}{z}\right). \quad (5.175)$$

Tomamos al argumento de la función genérica como $z + \frac{1}{z}$ para que, independientemente de F , la integral de contorno siempre satisfaga

$$\Phi_F(x) + \Phi_F(1/x) = \Phi_F(0). \quad (5.176)$$

Esta propiedad es análoga a la discutida en [173] para el factor de dressing de la matriz S , y será útil a la hora de satisfacer la condición de crossing de borde. Para $\chi_T(x)$ consideramos soluciones de la forma

$$\chi_T(x) = \begin{cases} \Phi_F(x) & \text{si } |x| > 1, \\ \Phi_F(x) + i \log F\left(x + \frac{1}{x}\right) & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (5.177)$$

Para que esta sea una solución de la condición de crossing trivial, requerimos que

$$\chi_T(x^+) - \chi_T(x^-) + \chi_T(1/x^+) - \chi_T(1/x^-) = 0, \quad (5.178)$$

y debido a la propiedad (5.176) esto implica simplemente

$$F\left(x^+ + \frac{1}{x^+}\right) = F\left(x^- + \frac{1}{x^-}\right). \quad (5.179)$$

Usando el vínculo que relaciona a los parámetros espectrales x^\pm ,

$$F\left(x^- + \frac{1}{x^-}\right) = F\left(x^- + \frac{1}{x^-} + \frac{i}{g}\right). \quad (5.180)$$

Luego la ecuación de crossing trivial se satisface siempre que F sea periódica en el eje imaginario con período i/g . En cuanto a la unitariedad, basta exigir que $\chi_T(x)$ sea una función par, y puede comprobarse directamente que esto ocurre siempre que F tenga paridad definida, ya sea par o impar.

Dos posibilidades naturales para F son entonces

$$F\left(z + \frac{1}{z}\right) = \sinh\left[2\pi n g\left(z + \frac{1}{z}\right)\right] \quad \text{y} \quad F\left(z + \frac{1}{z}\right) = \cosh\left[2\pi n g\left(z + \frac{1}{z}\right)\right], \quad (5.181)$$

para n entero. Sin embargo, los factores de reflexión resultantes de incorporar estas soluciones triviales de la ecuación de crossing no reproducen en general el comportamiento a acoplamiento fuerte deseado, dado por (5.126) o (5.132) según el caso. Solamente los límites $\alpha_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ y $\Phi_0 \rightarrow 0$ de (5.126) y (5.132) resultan satisfactorios cuando $n = 1$. Más aún, como veremos en el próximo capítulo si usáramos estos factores de reflexión para obtener las correcciones por momento angular finito dadas por (5.169), esto solamente sería posible utilizando la solución con el seno hiperbólico. Por lo tanto, debemos considerar deformaciones de

$$\Phi_{\sinh}(x) = i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{x-z} \log\left\{\sinh\left[2\pi g\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]\right\}, \quad (5.182)$$

y hallar soluciones cuyo límite $g \rightarrow \infty$ sea compatible con los cálculos explícitos (5.126) y (5.132). Para realizar la comparación con estos resultados, vamos a evaluar la contribución a la fase de reflexión proveniente de la solución de la condición de crossing trivial en el límite de acoplamiento fuerte, que tiene la forma

$$\delta_T = \chi_T(x^-) - \chi_T(x^+), \quad (5.183)$$

para $x^\pm = e^{\pm ip/2} + \mathcal{O}(1/g)$. Las soluciones de la condición de crossing trivial deberían ser tales que este δ_T reproduzca el δ_{extra} hallado anteriormente.

Integrales de contorno sobre círculos re-escalados

Nos interesa deformar de algún modo Φ_{\sinh} de forma de introducir cierta dependencia en un parámetro que pueda más adelante relacionarse con la cantidad de flujo electromagnético en las D5-branas consideradas.

Vamos a proceder introduciendo una modificación arbitrariamente, verificando *a posteriori* que posee parte de la dependencia deseada en el límite de acoplamiento fuerte. La deformación particular que vamos a considerar en primer lugar corresponde a tomar el contorno de integración como un círculo de radio r ,

$$\Phi_r(x) = i \oint_{|z|=r} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{x-z} \log \left\{ \sinh \left[2\pi g \left(z + \frac{1}{z} \right) \right] \right\} . \quad (5.184)$$

Observamos que deja de ser válida para Φ_r la propiedad (5.176), que allanaba el camino para resolver la condición de crossing. Existe, sin embargo, una versión deformada de la misma que resultará útil, a saber

$$\Phi_r(x) + \Phi_{1/r}\left(\frac{1}{x}\right) = \Phi_r(0) . \quad (5.185)$$

Luego, combinando dos integrales de contorno de tamaños r y $\frac{1}{r}$ en la definición

$$\Phi_T(x) = \frac{1}{2} \left(\Phi_r(x) + \Phi_{1/r}(x) \right) , \quad (5.186)$$

obtenemos una función con la propiedad deseada,

$$\Phi_T(x) + \Phi_T\left(\frac{1}{x}\right) = \Phi_T(0) . \quad (5.187)$$

Sin pérdida de generalidad, consideramos $0 < r \leq 1$ y usamos la combinación $\Phi_T(x)$ para definir $\chi_T(x)$ en la región fuera del círculo de radio $1/r$. A partir de esta región podemos continuar analíticamente la función a cualquier punto del plano complejo, de modo que

$$\chi_T^{(1)}(x) = \begin{cases} \Phi_T(x) & \text{si } |x| > 1/r , \\ \Phi_T(x) + \frac{i}{2} \log \sinh 2\pi g \left(x + \frac{1}{x} \right) & \text{si } r < |x| < 1/r , \\ \Phi_T(x) + i \log \sinh 2\pi g \left(x + \frac{1}{x} \right) & \text{si } |x| < r . \end{cases} \quad (5.188)$$

Si ahora usamos la relación (5.187) como antes, podemos verificar explícitamente que se satisface la condición de crossing trivial (5.178).

La solución de la ecuación de crossing trivial obtenida de esta $\chi_T^{(1)}$ es válida para cualquier valor del acoplamiento g . Sin embargo, en el límite de acoplamiento fuerte, como veremos a continuación, sólo puede dar cuenta de uno de los términos adicionales en la fase de reflexión de borde (5.131). Incorporamos el ⁽¹⁾ para indicar esto último.

Nos interesa ahora hallar la fase de reflexión en el límite de acoplamiento fuerte para partículas con parámetros espectrales correspondientes a la cinemática física, *i.e.*

con $|x^\pm| > 1$. Para $|x| > r$ podemos expandir el factor $(x - z)^{-1}$ en nuestra definición de $\Phi_r(x)$ como una serie geométrica, de modo de obtener

$$\Phi_r(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(r)}{x^n} \quad \text{con} \quad c_n(r) = i \oint_{|z|=r} dz z^{n-1} \log \left\{ \sinh \left[2\pi g \left(z + \frac{1}{z} \right) \right] \right\}. \quad (5.189)$$

Puede verse que la parte imaginaria de los coeficientes $c_n(r)$ se anula, al igual que la parte real siempre que n es impar. Los coeficientes restantes pueden evaluarse en el límite de acoplamiento fuerte $g \rightarrow \infty$, resultando esto en

$$c_{2k}(r) = -8\pi g (-1)^k r^{2k} \left(\frac{r}{1+2k} + \frac{r^{-1}}{1-2k} \right), \quad (5.190)$$

lo cual al resumar nos da

$$\Phi_r(x) = 4ig \left(x + \frac{1}{x} \right) \arctan \left(\frac{r}{x} \right) + \mathcal{O}(g^0), \quad (5.191)$$

a menos de términos independientes de x que se cancelarán al calcular la fase de reflexión. Usando las definiciones de $\Phi_T(x)$ y $\chi_T(x)$, así como la propiedad (5.185), podemos ahora evaluar el factor de fase de la reflexión debido a la solución trivial de crossing considerada, que en el límite de acoplamiento fuerte resulta ser

$$\delta_T^{(1)} = -4g \cos \frac{p}{2} \log \frac{r^2 + 1 + 2r \sin \frac{p}{2}}{r^2 + 1 - 2r \sin \frac{p}{2}}. \quad (5.192)$$

Si ahora tomamos

$$r = \cot \left(\frac{\Phi_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \quad (5.193)$$

obtenemos

$$\delta_T^{(1)} = -4g \cos \frac{p}{2} \log \frac{1 + \cos \Phi_0 \sin \frac{p}{2}}{1 - \cos \Phi_0 \sin \frac{p}{2}}. \quad (5.194)$$

Este es solamente uno de los términos adicionales en la fase de reflexión de borde 5.131, más precisamente el primero de los allí escritos. Debemos dar cuenta también de los términos restantes a partir de soluciones para las ecuaciones triviales de crossing y unitaridad. Por ejemplo, si consideramos

$$\chi_T^{(2)}(x) = f_2(\Phi_0, g) \log \frac{xr + 1/xr}{x/r + r/x}, \quad (5.195)$$

con r definido en (5.193), vemos que el $\sigma_T^{(2)}(p)$ resultante satisface la ecuación de crossing trivial, al igual que la condición de unitaridad, contribuyendo además a la fase de reflexión de borde en el límite de acoplamiento fuerte

$$\delta_T^{(2)} = 2f_2(\Phi_0, g) \log \frac{i - \sin \Phi_0 \tan \frac{p}{2}}{i + \sin \Phi_0 \tan \frac{p}{2}} = 4if_2(\Phi_0, g) \arctan(\sin \Phi_0 \tan \frac{p}{2}). \quad (5.196)$$

Esto corresponde al segundo término adicional en el factor de fase de reflexión calculado explícitamente, siempre y cuando $f_2(\Phi_0, g)$ se comporte como $2gi \tan \Phi_0$ en el límite de acoplamiento fuerte.

Lo mismo puede hacerse para dar cuenta del tercer término adicional en el factor de fase de reflexión, tomando simplemente

$$\chi_T^{(3)}(x) = f_3(\Phi_0, g) \log x, \quad (5.197)$$

con un límite adecuado para $f_3(\Phi_0, g)$ cuando $g \rightarrow \infty$, a saber

$$f_3(\Phi_0, g) \sim 4gi \left(\frac{1}{\cos \Phi_0} - \cos \Phi_0 \right).$$

Integrales de línea sobre arcos

Consideramos ahora otra forma en la que podemos modificar la propuesta original Φ_{\sinh} . Vamos a considerar

$$\Phi_\gamma(x) = i \int_{\mathcal{C}(\gamma)} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{x - z} \log \left\{ \sinh \left[2\pi g \left(z + \frac{1}{z} \right) \right] \right\}, \quad (5.198)$$

para una curva abierta $\mathcal{C}(\gamma)$ parametrizada por $z(t) = e^{it}$ con $-\gamma < t < \gamma$ y $\pi - \gamma < t < \pi + \gamma$. Como esta curva es invariante frente a $z \mapsto 1/z$, y usamos una función únicamente de $z + \frac{1}{z}$, la propiedad (5.176) se mantiene. Estando definida como una integral a lo largo de un contorno abierto, podemos proponer que χ_T es directamente la integral de línea tanto adentro como afuera del disco unidad. Entonces, la propiedad (5.176) alcanza para concluir que (5.198) resuelve la ecuación de crossing trivial. No se trata, sin embargo, de una función par de x , de modo que para satisfacer la condición de unitaridad definimos $\chi_T(x) = \frac{1}{2}(\Phi_\gamma(x) + \Phi_\gamma(-x))$.

Podemos hacer un análisis en el límite de acoplamiento fuerte para esta propuesta cuando $|x| > 1$ en forma similar al realizado anteriormente, obteniéndose de este modo

$$\chi_T^{(1)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{2k}(\gamma)}{x^{2k}} \quad \text{con} \quad c_{2k}(\gamma) = -16\pi g \frac{2k \cos \gamma \sin(2k\gamma) - \sin \gamma \cos(2k\gamma)}{4k^2 - 1}, \quad (5.199)$$

donde obviamos escribir términos subdominantes en el límite $g \rightarrow \infty$. Esto nos da, a menos de términos independientes de x que se cancelan al calcular el factor de fase de reflexión,

$$\chi_T^{(1)}(x) = 2g \left(x + \frac{1}{x} \right) \left(\operatorname{arctanh} \frac{e^{i\gamma}}{x} - \operatorname{arctanh} \frac{e^{-i\gamma}}{x} \right) + \mathcal{O}(g^0). \quad (5.200)$$

Como antes, el ⁽¹⁾ indica que esta solución de la condición de crossing trivial explica solamente el primer término en (5.124). Para ver esto, evaluamos el factor de fase de reflexión correspondiente a esta solución de la ecuación de crossing, que resulta ser

$$\delta_T^{(1)} = -4g \cos \frac{p}{2} \log \left| \frac{\sin \frac{p}{2} + \sin \gamma}{\sin \frac{p}{2} - \sin \gamma} \right|. \quad (5.201)$$

Si identificamos $\gamma = \alpha_0$, este es el primer término adicional en la fase de reflexión de borde (5.126). Para dar cuenta del segundo término proponemos

$$\chi_T^{(2)}(x) = f(\alpha_0, g) \log \left| \frac{e^{-i\alpha_0 x} - \frac{e^{i\alpha_0}}{x}}{e^{i\alpha_0 x} - \frac{e^{-i\alpha_0}}{x}} \right|, \quad (5.202)$$

que es una solución de las condiciones triviales de crossing y unitariedad, y resulta en

$$\delta_T^{(2)} = 2f(\alpha_0, g) \log \left| \frac{\sin(\frac{p}{2} + \alpha_0)}{\sin(\frac{p}{2} - \alpha_0)} \right|. \quad (5.203)$$

Esto puede identificarse con el segundo término de (5.126) para cualquier $f(\alpha_0, g)$ cuyo límite de acoplamiento fuerte sea $2g \cos \alpha_0$.

Como mencionamos anteriormente, los términos (5.201) y (5.203) de la fase de reflexión resultante se vuelven logarítmicamente divergentes a medida que $p \rightarrow \pm 2\alpha_0$, pero se cancelan mutuamente cuando $f(\alpha_0, g)$ tiene el comportamiento asintótico mencionado. En las propuestas $\chi_T^{(1)}$ y $\chi_T^{(2)}$ las divergencias logarítmicas corresponden a la situación en la que $x \rightarrow \pm e^{\pm\alpha_0}$. En particular, la divergencia logarítmica de $\chi_T^{(1)}(x)$ aparece cuando se evalúa x en los extremos de $\mathcal{C}(\alpha_0)$.

La elección de $f(\alpha_0, g) = g \cos \alpha_0 + \mathcal{O}(g^0)$, necesaria para dar cuenta del resultado explícito obtenido en el límite de acoplamiento fuerte, asegura sin embargo que χ_T es regular en este límite. Si requerimos además que χ_T siga siendo regular en $x = \pm e^{\pm\alpha_0}$ a todo orden en $1/g$, esto nos permite determinar $f(\alpha_0, g)$ exactamente. Para hacer esto, observamos primero que la propuesta (5.202) también puede escribirse en la forma de una integral a lo largo de $\mathcal{C}(\alpha_0)$, a saber

$$\chi_T^{(2)}(x) = -f(\alpha_0, g) \int_{\mathcal{C}(\alpha_0)} \frac{dz}{x - z}, \quad (5.204)$$

a menos de términos independientes de x que se cancelan al calcular σ_T . Podemos escribir por lo tanto χ_T como una única integración sobre $\mathcal{C}(\alpha_0)$. Para que la integral sea regular en $x = \pm e^{\pm\alpha_0}$, debemos exigir que el factor que acompaña a $(x - z)^{-1}$ se anule a medida que z se acerca a los extremos de la curva. Esto fija $f(\alpha_0, g)$, que debe ser

$$2\pi f(\alpha_0, g) = \log [\sinh (4\pi g \cos \alpha_0)], \quad (5.205)$$

lo cual a su vez implica que podemos escribir

$$\chi_T(x) = i \int_{\mathcal{C}(\alpha_0)} \frac{dz}{4\pi i} \left(\frac{1}{x-z} + \frac{1}{-x-z} \right) \log \left[\frac{\sinh \left(2\pi g \left(z + \frac{1}{z} \right) \right)}{\sinh (4\pi g \cos \alpha_0)} \right]. \quad (5.206)$$

Nótese que esta deformación, al igual que la presentada anteriormente cuando $r \rightarrow 1$, se reduce a Φ_{\sinh} cuando $\alpha_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ¹⁶. De hecho, en este límite es conveniente considerar las cantidades completas

$$\sigma_B(p) = \sigma_B^0(p) \sigma_T(p) = e^{i\chi_B(x^+) - i\chi_B(x^-)} \quad \text{con} \quad \chi_B(x) = \chi_B^0(x) + \chi_T(x), \quad (5.207)$$

donde

$$\Phi_B(x) = i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{\log [2\pi g (z + \frac{1}{z})]}{x-z}, \quad (5.208)$$

y $\chi_B(x) = \Phi_B(x)$ para $|x| > 1$, con un término adicional $i \log [2\pi g (x + \frac{1}{x})]$ que debe agregarse para asegurar la continuidad cuando $|x| < 1$. Como esperábamos, la contribución a la fase de reflexión δ proveniente de este σ_B es de orden g^0 en lugar de orden g .

Resumiendo todos nuestros resultados, vemos que el factor de reflexión de borde siempre puede escribirse como

$$R_0(p) = \frac{1}{\sigma_B^0(p) \sigma_T(p) \sigma(p, -p)} \left(\frac{1 + \frac{1}{(x^-)^2}}{1 + \frac{1}{(x^+)^2}} \right), \quad (5.209)$$

donde σ_B^0 es el factor de dressing de borde para la representación fundamental (5.88), propuesto originalmente en [66, 67], e incorporamos el factor de dressing adicional $\sigma_T = e^{i\chi_T(x^+) - i\chi_T(x^-)}$, que es una solución de la condición trivial (5.173). Para las D5-branas de la primera familia, duales a lazos de Wilson $\frac{1}{2}$ -BPS en representaciones totalmente antisimétricas, proponemos

$$\chi_T(x) = i \int_{\mathcal{C}(\alpha_0)} \frac{dz}{4\pi i} \left(\frac{1}{x-z} + \frac{1}{-x-z} \right) \log \left[\frac{\sinh \left(2\pi g \left(z + \frac{1}{z} \right) \right)}{\sinh (4\pi g \cos \alpha_0)} \right], \quad (5.210)$$

con $\mathcal{C}(\alpha_0)$ parametrizado por $z(t) = e^{it}$ con $-\alpha_0 < t < \alpha_0$ y $\pi - \alpha_0 < t < \pi + \alpha_0$. En este caso, nuestra propuesta tiene su dependencia en la constante de acoplamiento g totalmente determinada.

¹⁶Cuando $\alpha_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ la curva $\mathcal{C}(\alpha_0)$ se cierra para formar el círculo unidad, y la contribución de $\chi_T^{(2)}$ se anula.

Por otro lado, para las D5-branas de la segunda familia tenemos

$$\begin{aligned} \chi_T(x) = & i \oint_{|z|=r} \frac{dz}{4\pi i} \frac{\log \left\{ \sinh \left[2\pi g \left(z + \frac{1}{z} \right) \right] \right\}}{x-z} + i \oint_{|z|=1/r} \frac{dz}{4\pi i} \frac{\log \left\{ \sinh \left[2\pi g \left(z + \frac{1}{z} \right) \right] \right\}}{x-z} \\ & + f_2(\Phi_0, g) \log \frac{xr + 1/xr}{x/r + r/x} + f_3(\Phi_0, g) \log x, \end{aligned} \quad (5.211)$$

con $|x| > 1/r$ y debiendo agregarse términos adicionales como en (5.188) cuando $|x| < 1/r$. En esta propuesta, algunas funciones sólo pueden ser determinadas a primer orden en g , dado que no disponemos de un argumento similar al utilizado para fijar la dependencia en el acoplamiento de las funciones correspondientes en el caso anterior.

Nótese que podemos distinguir dos regímenes para los factores de dressing de borde aquí propuestos: cuando α_0 ó Φ_0 toman valores genéricos, y (5.210)-(5.211) son válidas; y cuando $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ ó $\Phi_0 = 0$, es decir que los factores esféricos de las D5-branas consideradas son maximales. Para este último caso nuestras propuestas se tornan

$$\chi_T(x) = i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{\log \left\{ \sinh \left[2\pi g \left(z + \frac{1}{z} \right) \right] \right\}}{x-z} \quad \text{para} \quad |x| > 1. \quad (5.212)$$

lo cual cancela un término idéntico en χ_B^0 y resulta en un factor de dressing completo que puede definirse a partir de

$$\chi_B(x) = i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{\log \left[2\pi g \left(z + \frac{1}{z} \right) \right]}{x-z} \quad \text{para} \quad |x| > 1. \quad (5.213)$$

Capítulo 6

Ansatz de Bethe termodinámico

En el capítulo 5 mostramos que el problema de hallar el espectro de dimensiones de escala de los operadores de traza simple en $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills es equivalente, en el límite planar en el que el número de colores del grupo de gauge $SU(N)$ tiende a infinito, al de diagonalizar el hamiltoniano de una cadena de espines integrable. Hicimos esto primero en forma perturbativa analizando el operador de dilataciones a 1-loop, y luego extendimos el análisis al régimen no perturbativo fijando la relación de dispersión y la matriz S a partir de condiciones de simetría, crossing y unitaridad. Vimos también que es posible extender este resultado a otros operadores, y en particular nos ocupamos de lazos de Wilson con inserciones que corresponden a cadenas de espines integrables con condiciones de contorno abiertas. Nuevamente, aplicando consideraciones de simetría, crossing y unitaridad fue posible determinar el ingrediente nuevo que aparece en la descripción del sistema provista por la integrabilidad, esto es la matriz de reflexión.

El resultado de este proceso es que estamos ahora en condiciones de describir al menos formalmente el espectro de dimensiones de escala de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills para cualquier valor del acoplamiento de 't Hooft λ , para lo cual debemos resolver las ecuaciones de Bethe correspondientes. Estas son esquemáticamente de la forma (5.50) ó (5.63), según nos ocupemos de cadenas de espines periódicas o abiertas, y los conjuntos de momentos que las resuelven nos permiten escribir la energía de los autoestados de la cadena en forma aditiva,

$$E(\{p_i\}) = \sum_{p_i} E_{p_i}, \quad (6.1)$$

donde aparece explícitamente la relación de dispersión (5.71).

Ahora bien, existe una diferencia crucial entre el análisis realizado a 1-loop y la extensión no perturbativa que lo generaliza. Esta radica en que el ansatz de Bethe

presentado en la primera parte de la sección 5.3 es exacto, en la medida en que diagonaliza el hamiltoniano del modelo de Heisenberg para cualquier longitud L de la cadena de espines de $SU(2)$ asociada a los operadores que son la traza simple de L campos Z y X . Mientras se mantenga la condición $L \ll N$, necesaria para que tenga sentido descartar los diagramas no planares e identificar las dimensiones de escala anómalas con las energías de la cadena de espines, el espectro a 1-loop hallado resolviendo estas ecuaciones para cada L no recibe corrección alguna a este orden perturbativo. Lo mismo puede decirse del caso con condiciones de contorno abiertas, así como de las modificaciones al ansatz de Bethe que podemos introducir para estudiar la acción del operador de dilataciones a 1-loop sobre sectores más amplios de operadores.

En cambio, el análisis no perturbativo de la subsección 5.3.1 es asintótico, en tanto requerimos para formularlo que todas las excitaciones de la cadena se encuentren muy separadas unas de otras. Esto implica que esta solución no es exacta salvo en el límite estricto con $L \rightarrow \infty$ y separación infinita entre las excitaciones. Para L finito el espectro hallado por el procedimiento usual recibe correcciones, que tienen su origen en el hecho de que las interacciones en la cadena de espines son de largo alcance. Estas correcciones tienen un análogo en teorías cuánticas de campos formuladas en dominios finitos, ya sea abiertos o con condiciones de contorno periódicas. En efecto, en estas teorías se propagan partículas virtuales que pueden interactuar con las partículas físicas, afectando de este modo su espectro de energías.

Dado que en el contexto de la conjetura AdS/CFT nos interesa utilizar la integrabilidad para interpolar entre ambos lados de la dualidad, debemos tener control sobre las correcciones por tamaño finito si queremos realizar verificaciones de precisión del diccionario. Para teorías cuánticas de campos, Lüscher encontró en [174] la forma de la primera de estas correcciones para la energía de una única partícula en el caso de una teoría relativista, ver figura 6.1. Para aplicarlo a nuestro caso, este resultado debe generalizarse para alcanzar a teorías no relativistas y estados de muchas partículas. Por lo demás, para L suficientemente pequeños será necesario incluir también las correcciones de orden superior. Esto es en general muy complicado, pero para teorías integrables es posible tomar un camino alternativo e incorporar todas las correcciones por tamaño finito simultáneamente, haciendo uso del ansatz de Bethe termodinámico o TBA, introducido en [175]. Como veremos en la sección 6.1, este consiste esencialmente en reformular el problema de hallar la energía del estado fundamental de una teoría integrable en volumen finito, algo en principio complicado, en términos del cálculo de la función de partición térmica para la teoría con las direcciones temporal

y espacial intercambiadas. Como en este último caso la teoría está definida en un volumen infinito, el ansatz de Bethe asintótico es exacto y el problema es entonces mucho más sencillo.

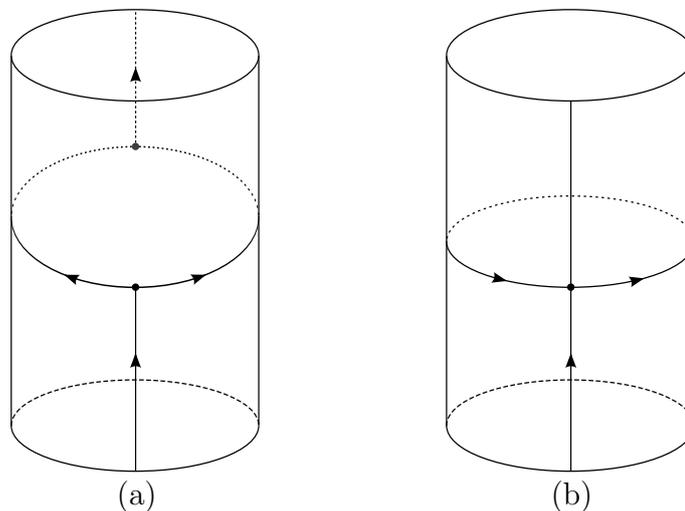


Figura 6.1: Diagrama de las correcciones por tamaño finito a primer orden o tipo *Lüscher*, para una partícula que se propaga en un volumen finito con condiciones de contorno periódicas. En (a) la partícula se divide en dos partículas que se recombinan del lado opuesto, mientras que en (b) interactúa con una partícula virtual que recorre todo el volumen.

En este capítulo presentamos primero el ansatz de Bethe termodinámico para el caso de una teoría relativista, de modo de motivar así su generalización al caso de un sistema integrable no relativista como el que nos ocupa en este trabajo. Aunque históricamente la fórmula de Lüscher es anterior al ansatz de Bethe termodinámico, vamos a proceder en sentido inverso y derivarla de éste como la primera corrección de una serie infinita que puede hallarse iterativamente. Como una aplicación, calculamos usando esta fórmula las correcciones halladas en el capítulo anterior para la diferencia $E - L$ para cuerdas abiertas entre D5-branas que forman ángulos. El objetivo final es describir cómo podemos tener en cuenta las correcciones por tamaño finito que recibe el ansatz de Bethe asintótico para la cadena de espines abierta estudiada en el capítulo anterior. Para ello debemos plantear el ansatz de Bethe termodinámico de borde, el cual nos permitirá realizar la expansión perturbativa a 2-loops de la dimensión anómala de cusp.

6.1. TBA en teorías integrables

Comencemos por calcular las correcciones que recibe la energía del estado fundamental de una teoría cuántica de campos relativista en 1+1 dimensiones, cuando en lugar de considerarla en toda la recta lo hacemos en un círculo de radio L imponiendo para ello condiciones de contorno periódicas. Suponemos que la teoría en cuestión es integrable, de modo que en la recta infinita se puede resolver por medio del ansatz de Bethe. Esto resulta en particular en que la teoría tiene scattering puramente elástico. Más adelante vamos a ver cómo podemos extender los resultados obtenidos a teorías no relativistas o con más de un tipo de partículas, así como a sus estados excitados.

Calcular la función de partición de una teoría en un círculo de radio L y para una temperatura $1/\tilde{L}$ es equivalente a considerar la teoría definida en una geometría toroidal, teniendo las circunferencias que caracterizan al toroide radios L y \tilde{L} . Llamamos x e y a las direcciones correspondientes de un sistema cartesiano sobre el toroide, como se muestra en la figura 6.2. Existen dos formas topológicamente distintas de enfrentar

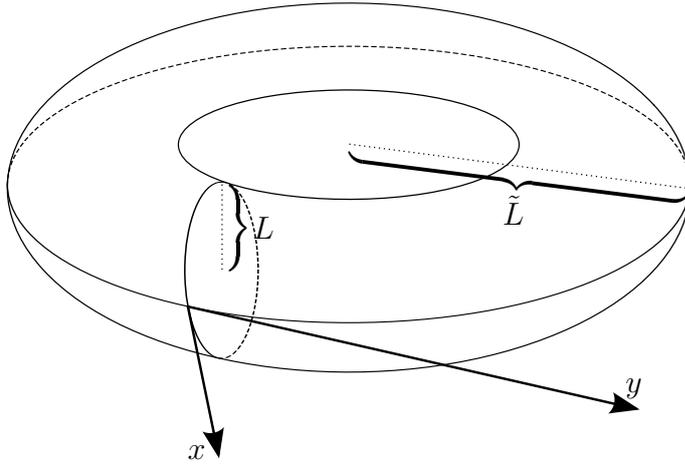


Figura 6.2: Toroide de radios L y \tilde{L} , con la coordenada x en la dirección de longitud $2\pi L$ y la coordenada y en la dirección de longitud $2\pi\tilde{L}$.

el problema: podemos cuantizar en la dirección x y obtener el espacio de estados \mathcal{H} definidos sobre un círculo de radio L , con $-y$ cumpliendo el papel del tiempo euclídeo; o podemos cuantizar en la dirección y y obtener el espacio de estados $\tilde{\mathcal{H}}$ definidos sobre un círculo de radio \tilde{L} , con x cumpliendo el papel del tiempo euclídeo. La función de partición puede entonces calcularse alternativamente de dos formas equivalentes,

$$Z(L, \tilde{L}) = \text{Tr}_{\tilde{\mathcal{H}}} \left(e^{-L\tilde{H}} \right) \quad \text{ó} \quad Z(L, \tilde{L}) = \text{Tr}_{\mathcal{H}} \left(e^{-\tilde{L}H} \right), \quad (6.2)$$

donde los hamiltonianos correspondientes quedan definidos a partir del tensor de esfuerzos $T_{\mu\nu}$ de la teoría,

$$H(L) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi L} T_{yy} dx \quad \text{y} \quad \tilde{H}(\tilde{L}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi\tilde{L}} T_{xx} dy. \quad (6.3)$$

Los momentos se definen en forma análoga,

$$P(L) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi L} T_{xy} dx \quad \text{y} \quad \tilde{P}(\tilde{L}) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi\tilde{L}} T_{xy} dy, \quad (6.4)$$

y la condición de periodicidad hace que estén cuantizados. Tendrán por lo tanto los autovalores $2n\pi/L$ ó $2n\pi/\tilde{L}$ para $n \in \mathbb{Z}$, según el caso.

El cálculo de la función de partición, desde cualquiera de los dos puntos de vista, es en general muy complicado. En lo que sigue, vamos a considerar el límite $\tilde{L} \rightarrow \infty$ con L finito, que es el límite termodinámico en $\tilde{\mathcal{H}}$. En la formulación original, dada por la expresión a la derecha en (6.2) para $Z(L, \tilde{L})$, éste corresponde a un límite de bajas temperaturas en el que la función de partición está dominada por la energía $E_0(L)$ del estado fundamental de \mathcal{H} ,

$$Z(L, \tilde{L}) \sim e^{-\tilde{L}E_0(L)}, \quad (6.5)$$

que es la cantidad que queremos caracterizar.

Desde el punto de vista alternativo la ventaja del límite termodinámico es que el sistema se vuelve infinito y el ansatz de Bethe, que era asintótico, se vuelve exacto. En este caso la función de partición se relaciona con la energía libre $F(L, \tilde{L})$ del sistema $\tilde{\mathcal{H}}$, dada por

$$\log Z(L, \tilde{L}) \sim -LF(L, \tilde{L}). \quad (6.6)$$

En el límite termodinámico debe poder escribirse $F(L, \tilde{L}) = \tilde{L}f(L)$ con $f(L)$ la energía libre por unidad de longitud en $\tilde{\mathcal{H}}$ a la temperatura $1/L$. Comparando los dos puntos de vista tenemos finalmente

$$E_0(L) = Lf(L), \quad (6.7)$$

donde cabe resaltar que estamos relacionando una cantidad de \mathcal{H} en el lado izquierdo con otra de $\tilde{\mathcal{H}}$ en el lado derecho.

Queremos aplicar ahora el formalismo de scattering puramente elástico al análisis de la energía libre del sistema $\tilde{\mathcal{H}}$ en el límite termodinámico. Si la teoría admite solamente partículas sin carga de masas m_a , podemos parametrizar la energía y el momento de las mismas utilizando rapidities θ_i como ya vimos en la sección 5.1.

Definimos como allí los estados asintóticos (5.1), factorizándose la matriz S que los relaciona entre sí según (5.8).

Comenzamos considerando el caso en el que existe un solo tipo de partículas. La amplitud de scattering es entonces un escalar que por invarianza de Lorentz puede depender solamente de la diferencia de las rapidities de las partículas que intervienen en la dispersión, es decir que es $S(\theta_{ij})$ con $\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$. Puede determinarse con argumentos de simetría o, si se conoce una expresión explícita para el hamiltoniano, a partir de la diagonalización del mismo utilizando el ansatz de Bethe. En cualquier caso, deberá satisfacer unitaridad y simetría de crossing, que para un solo tipo de partículas se reducen a las condiciones¹

$$S(\theta)S(-\theta) = 1 \quad \text{y} \quad S(\theta) = S(i\pi - \theta). \quad (6.8)$$

Para θ real esto implica que la amplitud de scattering debe tener módulo igual a la unidad, de modo que se puede escribir en la forma $S(\theta) = e^{i\delta(\theta)}$ con $\delta(\theta)$ real.

Ahora bien, para la teoría definida en una geometría circular de radio \tilde{L} y condiciones de contorno periódicas se tienen las ecuaciones de Bethe, que en este caso escribimos como

$$e^{ip_i\tilde{L}} \prod_{j \neq i} S(\theta_{ij}) = 1 \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.9)$$

Observamos que, a diferencia de las ecuaciones de Bethe (5.50) para las cadenas de espines, ahora el tamaño \tilde{L} del sistema es continuo y no discreto como la longitud de las cadenas. En cualquier caso, estas ecuaciones cuantizan los momentos p_i de las n partículas, y escribiendo el producto de todas ellas es fácil mostrar que implican la cuantización del momento total, es decir que $\tilde{P}(\tilde{L}) = \sum_{i=1}^n p_i = 2n\pi/\tilde{L}$ con n entero. Tomando el logaritmo de estas ecuaciones y armando una combinación adecuada, podemos llevarlas a la forma

$$m\tilde{L} \sinh \theta_i + \sum_{j \neq i} \delta(\theta_{ij}) = 2\pi k_i \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.10)$$

donde $\{k_i\}$ es un conjunto de n números enteros.

Nótese que la amplitud de scattering afecta el modo en que debemos imponer sobre las rapidities las condiciones que surjan del hecho de que las partículas son idénticas. La función de onda del sistema debe ser simétrica o antisimétrica según se

¹Como la teoría es relativista implementamos la transformación de crossing $(E, p) \mapsto (-E, -p)$ mediante $\theta \mapsto i\pi + \theta$. Para teorías no relativistas será necesario generalizar esta transformación adecuadamente, teniendo en cuenta la relación de dispersión correspondiente.

trate de bosones o de fermiones, pero como (6.8) implica en particular que $S(0)^2 = 1$ debemos distinguir dos casos. Si $S(0) = 1$, la función de onda de los estados asintóticos es simétrica frente al intercambio de dos partículas con la misma rapidity. Esto está permitido si las partículas son bosones, en cuyo caso no debemos imponer ninguna condición adicional al conjunto $\{k_i\}$, caso que llamamos *bosónico*. En cambio, como esto está prohibido si se trata de fermiones debemos imponer que no haya dos valores iguales entre las rapidities de las n partículas, y en particular esto implica que no puede haber dos valores iguales en el conjunto $\{k_i\}$, caso que llamamos *fermiónico*. Si $S(0) = -1$, la función de onda es automáticamente antisimétrica frente al intercambio de dos partículas con la misma rapidity, de modo que los roles se invierten: para los fermiones no debemos imponer ninguna condición adicional y tenemos el caso bosónico, mientras que para los bosones esto está prohibido y tenemos entonces el caso fermiónico.

En el límite termodinámico el número de partículas crece proporcionalmente a \tilde{L} , de modo que el espectro de rapidities descrito por (6.10) se “condensa”. Pasamos al continuo introduciendo la densidad $\rho_o(\theta)$, que es el número de partículas con rapidities entre θ y $\theta + d\theta$, y se tendrá entonces que (6.10) toma la forma

$$m\tilde{L} \sinh \theta_i + \int \delta(\theta_i - \theta) \rho_o(\theta) d\theta = 2\pi k_i \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.11)$$

siendo ahora la energía y el momento netos del sistema

$$\tilde{E}(\rho_o) = \int m \cosh(\theta) \rho_o(\theta) d\theta \quad \text{y} \quad \tilde{P}(\rho_o) = \int m \sinh(\theta) \rho_o(\theta) d\theta. \quad (6.12)$$

La ecuación (6.11), pero permitiendo todos los valores enteros k a la derecha, define una densidad de rapidities disponibles $\rho(\theta)$ que tiene la particularidad de estar definida autoconsistentemente con la densidad de rapidities ocupadas. En efecto, partiendo de

$$m\tilde{L} \sinh \theta + \int \delta(\theta - \theta') \rho_o(\theta') d\theta' = 2\pi k(\theta) \quad \text{para} \quad k(\theta) \in \mathbb{Z}, \quad (6.13)$$

podemos diferenciar respecto a θ para obtener

$$2\pi\rho(\theta) = m\tilde{L} \cosh \theta + \int \varphi(\theta - \theta') \rho_o(\theta') d\theta', \quad (6.14)$$

donde $\varphi(\theta) = \partial\delta(\theta)/\partial\theta$.

Ahora bien, dado un conjunto de n enteros $\{k_i\}$, queda definida la densidad de rapidities ocupadas $\rho_o(\theta)$ y a partir de esta la densidad de rapidities disponibles $\rho(\theta)$.

Sin embargo, cada par (ρ_o, ρ) es compatible con un gran número de estados, dado que en cada intervalo de tamaño $d\theta$ debemos distribuir las $\rho_o(\theta)d\theta$ rapidities de las partículas entre las $\rho(\theta)d\theta$ rapidities disponibles. En el caso fermiónico, el número de estados compatibles con el par (ρ_o, ρ) en un intervalo de tamaño $d\theta$ será

$$\frac{(\rho(\theta)d\theta)!}{(\rho(\theta)d\theta - \rho_o(\theta)d\theta)!(\rho_o(\theta)d\theta)!}, \quad (6.15)$$

mientras que en el caso bosónico será

$$\frac{(\rho(\theta)d\theta + \rho_o(\theta)d\theta - 1)!}{(\rho(\theta)d\theta - 1)!(\rho_o(\theta)d\theta)!}. \quad (6.16)$$

El número $\mathcal{N}(\rho_o, \rho)$ de estados compatibles con el par (ρ_o, ρ) es el producto de las cantidades arriba escritas sobre todos los intervalos $d\theta$, de modo que la entropía $S(\rho_o, \rho) = \log \mathcal{N}(\rho_o, \rho)$ del sistema descrito por dicho par es en el límite termodinámico

$$S(\rho_o, \rho) = \mp \int d\theta \left(\rho(\theta) \log \frac{\rho(\theta)}{\rho(\theta) \pm \rho_o(\theta)} \pm \rho_o(\theta) \log \frac{\rho_o(\theta)}{\rho(\theta) \pm \rho_o(\theta)} \right), \quad (6.17)$$

donde el signo de arriba corresponde al caso bosónico y el de abajo al caso fermiónico, y usamos la fórmula de Stirling válida en el límite termodinámico. Con este resultado podemos escribir a la energía libre como

$$F(L, \tilde{L}) = \tilde{L} f(\rho, \rho_o) = \tilde{E}(\rho_o) - \frac{1}{L} S(\rho, \rho_o), \quad (6.18)$$

y hallar $f(\rho, \rho_o)$ minimizando la expresión a la derecha en las variables ρ y ρ_o sujetas a la condición (6.14). La variación de la entropía es

$$\delta S = \mp \int d\theta \left(\delta\rho(\theta) \log \frac{\rho(\theta)}{\rho(\theta) \pm \rho_o(\theta)} \pm \delta\rho_o(\theta) \log \frac{\rho_o(\theta)}{\rho(\theta) \pm \rho_o(\theta)} \right), \quad (6.19)$$

y de (6.14) obtenemos una condición de consistencia sobre las variaciones $\delta\rho(\theta)$ y $\delta\rho_o(\theta)$,

$$2\pi\delta\rho(\theta) = \int \varphi(\theta - \theta') \delta\rho_o(\theta') d\theta', \quad (6.20)$$

luego

$$\delta S = \mp \int d\theta \delta\rho_o(\theta) \left[\left(\int \frac{d\theta'}{2\pi} \varphi(\theta' - \theta) \log \frac{\rho(\theta')}{\rho(\theta') \pm \rho_o(\theta')} \right) \pm \log \frac{\rho_o(\theta)}{\rho(\theta) \pm \rho_o(\theta)} \right].$$

Introduciendo una pseudoenergía $\varepsilon(\theta)$ definida como

$$\frac{\rho_o}{\rho} = \frac{e^{-\varepsilon}}{1 \mp e^{-\varepsilon}} \iff e^{-\varepsilon} = \frac{\rho_o}{\rho \pm \rho_o}, \quad (6.21)$$

llegamos a que

$$\delta S = \mp \int d\theta \delta \rho_o(\theta) \left[\int \frac{d\theta'}{2\pi} \varphi(\theta' - \theta) \log \left(1 \mp e^{-\varepsilon(\theta')} \right) \mp \varepsilon(\theta) \right], \quad (6.22)$$

y recordando ahora (6.12) y (6.18), podemos escribir

$$\delta F = \int d\theta \delta \rho_o(\theta) \left[m \cosh(\theta) - \frac{\varepsilon(\theta)}{L} \pm \frac{1}{L} \int \frac{d\theta'}{2\pi} \varphi(\theta' - \theta) \log \left(1 \mp e^{-\varepsilon(\theta')} \right) \right].$$

Como $\delta \rho_o(\theta)$ es arbitrario la condición extremal implica entonces

$$m \cosh(\theta) - \frac{\varepsilon(\theta)}{L} \pm \frac{1}{L} \int \frac{d\theta'}{2\pi} \varphi(\theta' - \theta) \log \left(1 \mp e^{-\varepsilon(\theta')} \right) = 0. \quad (6.23)$$

Ahora bien, en términos de la pseudoenergía (6.21) la entropía (6.17) se escribe como

$$S = \mp \int d\theta [\rho(\theta) \log (1 \mp e^{-\varepsilon(\theta)}) \pm \rho_o(\theta) \varepsilon(\theta)], \quad (6.24)$$

luego

$$F = \int d\theta \left[\rho_o(\theta) \left(m \cosh(\theta) - \frac{\varepsilon(\theta)}{L} \right) \pm \frac{\rho(\theta)}{L} \log (1 \mp e^{-\varepsilon(\theta)}) \right], \quad (6.25)$$

de modo que usando (6.23) y (6.14) llegamos finalmente a que

$$F = \pm \frac{m\tilde{L}}{L} \int \frac{d\theta}{2\pi} \cosh(\theta) \log (1 \mp e^{-\varepsilon(\theta)}). \quad (6.26)$$

Por lo tanto, de (6.7) y (6.18) obtenemos nuestro resultado final para la energía del estado fundamental de \mathcal{H} , que puede escribirse en la forma

$$E_0(L) = -m \int \frac{d\theta}{2\pi} \cosh(\theta) K(\theta) \quad \text{con} \quad K(\theta) = \mp \log (1 \mp e^{-\varepsilon(\theta)}). \quad (6.27)$$

Esta es una ecuación integral para la energía del estado fundamental con la pseudoenergía $\varepsilon(\theta)$ definida a partir de la condición extremal (6.23) como

$$\varepsilon(\theta) = Lm \cosh \beta + \varphi \star K, \quad (6.28)$$

donde \star denota la operación de convolución. La iteración sobre $\varepsilon(\theta)$ partiendo de $\varepsilon_0(\theta) = mL \cosh(\theta)$ dará una expansión asintótica que será válida en el límite de bajas temperaturas $mL \rightarrow \infty$. Asimismo, para una teoría para la que conocemos $S(\theta)$, y por lo tanto $\varphi(\theta)$, podremos resolver numéricamente las ecuaciones que definen autoconsistentemente $K(\theta)$ y $\varepsilon(\theta)$, usando una vez más $\varepsilon_0(\theta)$ como punto de partida.

Para aplicar este resultado en el contexto de la conjetura AdS/CFT tendremos que generalizarlo en varias direcciones diferentes. Por un lado, debemos tener en cuenta que los sistemas integrables con los que trabajamos no son relativistas sino que tienen la relación de dispersión (5.71), que depende explícitamente del acoplamiento de 't Hooft. A su vez, ya vimos que algunos de los sistemas relevantes son abiertos, de manera que habrá que formular también un ansatz de Bethe termodinámico de borde, análogamente a lo hecho hasta aquí pero basado en las ecuaciones de Bethe de borde. Por otro lado, como tenemos distintos tipos de partículas la dispersión ya no es caracterizada simplemente por una amplitud, sino que tiene realmente carácter matricial. Finalmente, si queremos describir todo el espectro debemos incorporar de algún modo las excitaciones sobre el estado fundamental.

Para llevar a cabo estas generalizaciones, comenzamos observando que partimos de la teoría definida en una geometría toroidal para poder identificar las funciones de partición en \mathcal{H} y $\tilde{\mathcal{H}}$. Ambos sistemas están relacionados por el intercambio de las coordenadas temporal y espacial, algo que podemos lograr por medio de una doble rotación de Wick. Decimos entonces que $\tilde{\mathcal{H}}$ corresponde a la teoría *mirror* de \mathcal{H} , en la que la energía y el momento tienen sus roles intercambiados, es decir que

$$\tilde{E} = ip \quad \text{y} \quad \tilde{p} = iE. \quad (6.29)$$

En una teoría relativista la relación de dispersión es invariante frente a esta transformación, y por ello no distinguimos entre $E(p)$ y $\tilde{E}(\tilde{p})$ durante la deducción del TBA. En cambio, en una teoría no relativista debemos ser cuidadosos en este sentido, y suponer que mientras que la relación de dispersión de la teoría se puede parametrizar en términos de la rapidity θ , la relación de dispersión de la teoría mirror tiene una parametrización distinta, en términos de una rapidity β . También debemos abandonar la suposición de que la amplitud de dispersión depende únicamente de la diferencia entre las rapidities de las partículas intervinientes, de modo que rastreando estos elementos a lo largo del cálculo realizado vemos que las ecuaciones para el TBA pueden escribirse en la forma más general

$$E_0(L) = - \int \frac{d\beta}{2\pi} \tilde{p}'(\beta) K(\beta), \quad (6.30)$$

$$\varepsilon(\beta) = L\tilde{E}(\beta) + \int \frac{d\beta'}{2\pi i} K(\beta') \partial_{\beta'} \log S(\beta', \beta). \quad (6.31)$$

Para describir a los estados excitados de la teoría, observamos que estos pueden identificarse con las singularidades del núcleo $K(\beta)$ que se encuentran en los puntos en los que $1 \mp e^{-\varepsilon(\beta)} = 0$, ver [176]. Podemos continuar analíticamente las integrales

correspondientes integrando por partes y evaluando el resultado utilizando el método de los residuos, de modo de introducir términos fuente en las ecuaciones de TBA, que para un estado excitado pasan a ser

$$E(L) = \sum_i E(\beta_i) - \int \frac{d\beta}{2\pi} \tilde{p}'(\beta) K(\beta), \quad (6.32)$$

$$\varepsilon(\beta) = L\tilde{E}(\beta) + \sum_i \log S(\beta_i, \beta) + \int \frac{d\beta'}{2\pi i} K(\beta') \partial_{\beta'} \log S(\beta', \beta). \quad (6.33)$$

En general, no es trivial identificar qué términos fuente deben incorporarse para describir los estados excitados de cierta teoría en particular, pudiendo en ocasiones requerirse más de un término por cada partícula física [177].

6.1.1. Ansatz de Bethe termodinámico de borde

Para adaptar el ansatz de Bethe termodinámico a sistemas integrables abiertos, debemos partir de la teoría definida en una geometría distinta a la toroidal. Vamos a considerar entonces un cilindro de largo L y radio r , como puede verse en la figura 6.3. Si cuantizamos en la dirección de L tenemos la teoría con condiciones de contorno abiertas a temperatura $1/r$, mientras que si cuantizamos en la dirección de r tenemos en cambio la teoría mirror con condiciones de contorno periódicas evolucionando desde un estado inicial a otro final.

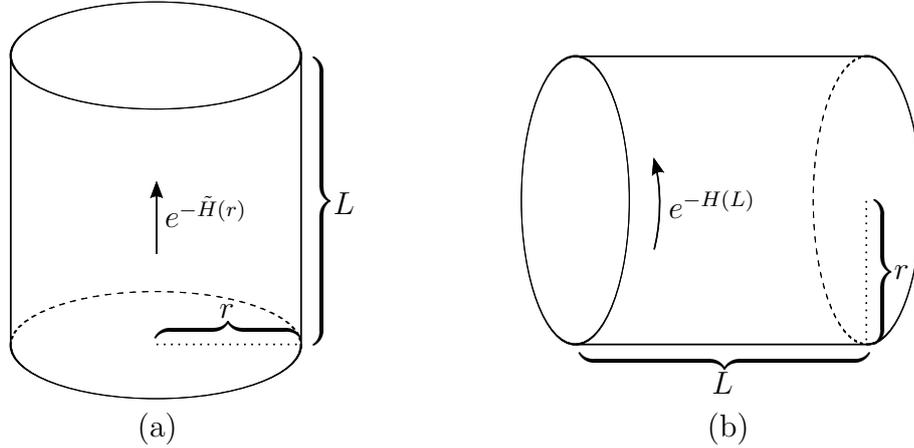


Figura 6.3: Representación esquemática de las dos posibles formulaciones de una QFT en el cilindro. En (a) la teoría está definida en un volumen finito de longitud $2\pi r$ con condiciones de borde periódicas, y el sistema se propaga por un tiempo L entre un estado inicial y otro final. En (b) la teoría está definida en una tira de longitud L con condiciones de borde abiertas, y el sistema se halla a temperatura finita $1/r$.

Las funciones de partición correspondientes son

$$Z(L, r) = \text{Tr} (e^{-rH(L)}) \quad \text{y} \quad Z(L, r) = \langle \psi_i | e^{-L\tilde{H}(r)} | \psi_f \rangle, \quad (6.34)$$

donde $H(L)$ es el hamiltoniano de la teoría en un dominio de longitud L , mientras que $\tilde{H}(r)$ es el hamiltoniano de la teoría mirror con condiciones de contorno periódicas en el círculo de radio r . Los estados de borde $|\psi_{i,f}\rangle$ codifican en la teoría mirror toda la información de las condiciones de contorno abiertas de la teoría original, y en el límite de $r \rightarrow \infty$ pueden escribirse como [167]

$$|\psi_{i,f}\rangle \sim \exp \left\{ \int \frac{d\beta}{2\pi} \psi_{i,f}(\beta) \hat{A}^\dagger(\bar{\beta}) \hat{A}^\dagger(\beta) \right\} |\emptyset\rangle, \quad (6.35)$$

donde omitimos un factor de normalización y entendemos que $\tilde{p}(\bar{\beta}) = -\tilde{p}(\beta)$. Las distribuciones $\psi_{i,f}(\beta)$ proporcionan esencialmente la probabilidad de creación de un “par de Cooper” con momento nulo en el borde, y por simplicidad obviamos la posibilidad de tener contribuciones adicionales provenientes de partículas con momento nulo. Ahora bien, con esta definición es fácil ver que como $\tilde{H}(r)$ es el operador de evolución temporal en la teoría mirror, y el estado de borde $|\psi_f\rangle$ está definido en una base diagonal para este operador, tendremos

$$e^{-L\tilde{H}(r)} |\psi_f\rangle = \left| \psi_f e^{-2L\tilde{E}} \right\rangle, \quad (6.36)$$

es decir que la evolución temporal simplemente realiza un corrimiento de la amplitud $\psi_f(\beta)$ en la cantidad $e^{-2LE(\beta)}$, donde suponemos que $\tilde{E}(\bar{\beta}) = \tilde{E}(\beta)$. En el límite termodinámico $r \rightarrow \infty$, podemos extraer la energía del estado fundamental de la teoría con condiciones de contorno abiertas tomando

$$E_0(L) = - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log \left\langle \psi_i \left| \psi_f e^{-2L\tilde{E}} \right\rangle. \quad (6.37)$$

La evaluación de este producto escalar puede realizarse utilizando el álgebra de Zamolodchikov-Faddeev (5.65), y requiere de una regularización adecuada en el límite termodinámico debido a que los estados de borde (6.35) solo están bien definidos en el límite estricto $r \rightarrow \infty$. Sin entrar en mayores detalles, para lo cual referimos al lector a [178], presentamos el resultado final para el ansatz de Bethe termodinámico de borde, que queda expresado en forma muy similar a (6.30),

$$E_0(L) = - \int \frac{d\beta}{2\pi} \tilde{p}'(\beta) \log \left(1 + \psi_i(\beta)^* \psi_f(\beta) e^{-\varepsilon(\beta)} \right), \quad (6.38)$$

$$\varepsilon(\beta) = 2L\tilde{E}(\beta) + \int \frac{d\beta'}{2\pi i} \varphi_s(\beta', \beta) \log \left(1 + \psi_i(\beta')^* \psi_f(\beta') e^{-\varepsilon(\beta')} \right), \quad (6.39)$$

donde las integrales son sobre los valores de β que corresponden a momentos positivos en la teoría mirror, nos restringimos por simplicidad al caso $S(\beta, \beta) = -1$, e introducimos

$$\varphi_s(\beta', \beta) = \partial_{\beta'} \log S(\beta', \beta) + \partial_{\beta'} \log S(\beta', \bar{\beta}). \quad (6.40)$$

Este resultado puede extenderse inmediatamente a los estados excitados como se hizo antes para el TBA cuando las condiciones de contorno son periódicas. Como en la próxima sección veremos una aplicación concreta, vamos a realizar ahora una expansión para encontrar la primera corrección cuando L es grande. En este caso, la integral en (6.39) es despreciable frente al primer término, de modo que tenemos

$$E_0(L) = - \int \frac{d\beta}{2\pi} \tilde{p}'(\beta) \log \left(1 + \psi_i(\beta)^* \psi_f(\beta) e^{-2L\tilde{E}(\beta)} \right), \quad (6.41)$$

o pasando al espacio de momentos de la teoría mirror y recordando que en general podemos tener muchos tipos de partículas identificados por un índice a ,

$$E_0(L) = - \sum_a \int_0^\infty \frac{d\tilde{p}}{2\pi} \log \left(1 + \psi_i^a(\tilde{p})^* \psi_f^a(\tilde{p}) e^{-2L\tilde{E}_a(\tilde{p})} \right). \quad (6.42)$$

Por último, las distribuciones que dan la probabilidad de creación de “pares de Cooper” están dadas por una extensión analítica de los coeficientes de reflexión [167],

$$\psi^a(\beta) = R^a(i\omega_2 - \beta), \quad \psi^a(\beta)^* = \psi^a(-\beta) = R^a(i\omega_2 + \beta) \quad (6.43)$$

donde $i\omega_2$ es un shift imaginario que da cuenta de la rotación de Wick (6.29)².

6.2. Verificación de factores de dressing por correcciones tipo Lüscher

En la sección 5.4 consideramos un sistema integrable con condiciones de contorno abiertas provistas por lazos de Wilson. Habiendo encontrado la matriz de reflexión por medio del análisis de las simetrías del problema, usamos las condiciones de crossing y unitaridad para proponer en 5.4.4 expresiones para los factores de dressing correspondientes. Estos reproducen satisfactoriamente las fases de reflexión halladas en el régimen de acoplamiento fuerte en 5.4.2, pero podemos usar los resultados de la sección anterior para realizar verificaciones adicionales a estas propuestas. En efecto, los cálculos de 5.4.3 deben interpretarse como la primera corrección por momento angular finito que recibe $E - L$ para cuerdas abiertas entre D5-branas que forman ángulos. Por lo tanto, debería ser posible reproducir estos resultados mediante un cálculo tipo Lüscher. Como este tipo de correcciones por tamaño finito depende de

²En teorías relativistas el shift es $i\frac{\pi}{2}$

$$\psi(\theta) = R(i\frac{\pi}{2} - \theta). \quad (6.44)$$

una continuación analítica de la fase de reflexión de borde, la comparación de los resultados obtenidos por ambos medios constituye un chequeo de la validez de las propuestas realizadas.

La corrección tipo Lüscher para un sistema integrable con condiciones de contorno abiertas tiene la forma (6.42), que escribimos como

$$E - L \sim - \sum_{a=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \log \left[1 + e^{-2L\tilde{E}_a(q)} t_a(q) \right], \quad (6.45)$$

donde identificamos $\tilde{p} \mapsto q$ y $\psi_i^a(\tilde{p})^* \psi_f^a(\tilde{p}) \mapsto t_a(q)$. Usando la matriz de reflexión hallada para los lazos de Wilson y la relación (6.44) tenemos [67]

$$t_a(q) = \sigma_B \bar{\sigma}_B \left(\frac{z^{[-a]}}{z^{[+a]}} \right)^2 \left[2(-1)^a (\cos \phi - \cos \theta) \frac{\sin a\phi}{\sin \phi} \right]^2, \quad (6.46)$$

con

$$\tilde{E}_a(q) = 2 \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\sqrt{a^2 + q^2}}{4g} \right). \quad (6.47)$$

En la ecuación para $t_a(q)$, σ_B y $\bar{\sigma}_B$ son una notación abreviada para

$$\sigma_B = \sigma_B(z^{[+a]}, z^{[-a]}) \quad \text{y} \quad \bar{\sigma}_B = \sigma_B \left(-\frac{1}{z^{[-a]}}, -\frac{1}{z^{[+a]}} \right), \quad (6.48)$$

y

$$z^{[\pm a]} = \frac{q + ia}{4g} \left(\sqrt{1 + \frac{16g^2}{a^2 + q^2}} \pm 1 \right) \quad (6.49)$$

son los parámetros espectrales para partículas en la teoría mirror³. Por lo tanto, la corrección tipo Lüscher es en este caso esencialmente la misma que la discutida en [66,67], salvo por la modificación en el factor de dressing de borde σ_B .

Vamos a evaluar (6.45) en el límite $1 \ll g \ll L$, en el que $\tilde{E}_a(q) \sim \frac{\sqrt{a^2 + q^2}}{2g}$, de manera que la integración será dominada por la región con $q \ll 1$, y la suma sobre a está por lo tanto dominada siempre por el término $a = 1$. Si, como en el caso del lazo de Wilson en la representación fundamental, la combinación $\sigma_B \bar{\sigma}_B$ tiene un polo doble, la contribución dominante corresponderá al intercambio de una única partícula mirror entre ambos bordes, ver [179]. Este caso es el discutido en [66,67], y resulta en

$$E - L \sim -\frac{1}{2} e^{-\frac{L}{2g}} \sqrt{(q^2 t_1(q))|_{q=0}}. \quad (6.50)$$

³En todo este cálculo, $a = 1$ corresponde a una partícula libre mientras que $a = 2, 3, \dots$ corresponden a los estados ligados de dos o más partículas.

En cambio, si $\sigma_B \bar{\sigma}_B$ tiende a una constante cuando $q \rightarrow 0$, la contribución dominante en la corrección de Lüscher tendrá su origen en el intercambio de un par de partículas miror, en cuyo caso

$$E - L \sim - \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} e^{-2L\tilde{E}_1(q)} t_1(q) \sim -\frac{t_1(0)}{4} e^{-\frac{L}{g}} \sqrt{\frac{2g}{L\pi}}. \quad (6.51)$$

Recordamos que escribimos $\sigma_B = \sigma_B^0 \sigma_T$ con σ_B^0 el factor de dressing de borde para el caso de la representación fundamental que tiene un polo, y σ_T una solución de la ecuación de crossing trivial. Luego, dependiendo del comportamiento de $\sigma_T \bar{\sigma}_T$ cuando q va a cero, podemos tener cualquiera de las dos posibilidades mencionadas arriba: si $\sigma_T \bar{\sigma}_T$ tiende a una constante no nula $\sigma_B \bar{\sigma}_B$ mantiene su polo doble; por el contrario, si $\sigma_T \bar{\sigma}_T$ tiene un cero doble cuando $q \rightarrow 0$, este cancelará el polo doble en $\sigma_B^0 \bar{\sigma}_B^0$ y nos dejará con una expresión regular para $\sigma_B \bar{\sigma}_B$ en $q = 0$.

Una mirada a las correcciones por momento angular finito (5.153)-(5.154) y (5.169) nos permite esperar que $\sigma_B \bar{\sigma}_B$ tenga un polo doble en el caso general, pero se torne regular cuando $\alpha_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ o $\Phi_0 \rightarrow 0$.

Para analizar esto, evaluamos $\sigma_T \bar{\sigma}_T$ tal como se la definió en términos de los χ_T introducidos en 5.4.4, analizando su comportamiento cuando q tiende a 0 y en el límite $g \rightarrow \infty$. Esto es, queremos evaluar

$$\sigma_T \bar{\sigma}_T = e^{i[\chi_T(z^{[+a]}) - \chi_T(z^{[-a]}) + \chi_T(-1/z^{[-a]}) - \chi_T(-1/z^{[+a]})]}. \quad (6.52)$$

Consideremos primero el χ_T que contiene los círculos re-escalados, y es la suma de las soluciones a la ecuación de crossing trivial (5.188), (5.195) y (5.197), $\chi_T = \chi_T^{(1)} + \chi_T^{(2)} + \chi_T^{(3)}$. Como $z^{[\pm a]} \rightarrow i$ cuando $q \rightarrow 0$, tenemos que usar el caso $r < |z^{[\pm a]}| < 1/r$ en la definición (5.188). El caso $r = 1$, *i.e.* $\Phi_0 = 0$, es degenerado y será estudiado por separado.

Los términos extra en la definición (5.188) se cancelan exactamente, de modo que solamente debemos lidiar con las integrales de contorno dadas por Φ_T , y usando la propiedad (5.185), obtenemos

$$\sigma_T \bar{\sigma}_T|_{q=0} = e^{i[\Phi_r(z^{[+a]}) - \Phi_r(1/z^{[+a]}) + \Phi_r(1/z^{[-a]}) - \Phi_r(z^{[-a]})]} \sigma_T^{(2)} \bar{\sigma}_T^{(2)} \sigma_T^{(3)} \bar{\sigma}_T^{(3)} \Big|_{q=0}. \quad (6.53)$$

Para todos los términos, el argumento de Φ_r tiene norma mayor que r en el límite $q \rightarrow 0$, de modo que podemos usar (5.191) para evaluarlos en el régimen de acoplamiento fuerte. Para $0 < \Phi_0 < \frac{\pi}{2}$ vemos que $\sigma_T \bar{\sigma}_T$ es regular en $q = 0$ en este régimen, de modo que

$$\sigma_T \bar{\sigma}_T|_{q=0} \sim \tan\left(\frac{\Phi_0}{2}\right)^{4a} e^{4a \cos \Phi_0}. \quad (6.54)$$

Por lo tanto, para Φ_0 no nulo $\sigma_B \bar{\sigma}_B$ mantiene el polo doble. Entonces el resultado de la corrección tipo Lüscher en el límite $1 \ll g \ll L$ adquirirá un factor adicional de $\tan\left(\frac{\Phi_0}{2}\right)^2 e^{2 \cos \Phi_0}$ en comparación con el de [67], dándonos

$$E - L \sim \frac{16g}{e^{2-2 \cos \Phi_0}} (\cos \phi - \cos \theta) \tan^2\left(\frac{\Phi_0}{2}\right) e^{-\frac{L}{2g}}, \quad (6.55)$$

lo cual coincide perfectamente con (5.154).

Pasamos ahora a un cálculo tipo Lüscher similar, pero utilizando esta vez el $\chi_T = \chi_T^{(1)} + \chi_T^{(2)}$ que contiene integrales de contorno sobre arcos, y nos concentramos por el momento en la contribución proveniente de las integrales de línea. Vemos que en este caso como

$$z_0 := z^{[+a]} \Big|_{q=0} = - \frac{1}{z^{[-a]} \Big|_{q=0}}, \quad (6.56)$$

tiende a i en el límite de g grande, no podemos simplemente usar (5.200) para el cálculo de Lüscher. En cambio, consideramos

$$\sigma_T^{(1)} \bar{\sigma}_T^{(1)} \Big|_{q=0} = e^{i[\Phi_\gamma(z_0) - \Phi_\gamma(1/z_0) + \Phi_\gamma(-z_0) - \Phi_\gamma(-1/z_0)]}, \quad (6.57)$$

con

$$\log \left(\sigma_T^{(1)} \bar{\sigma}_T^{(1)} \Big|_{q=0} \right) = \int_{\mathcal{C}(\gamma)} \frac{dz}{2\pi i} \frac{2z(1-z^4)}{(z^2-z_0^2)(1-z^2 z_0^2)} \log \left\{ \sinh \left[2\pi g \left(z + \frac{1}{z} \right) \right] \right\}. \quad (6.58)$$

En esta expresión es seguro tomar el límite de g grande antes de integrar, y obtenemos

$$\begin{aligned} \log \left(\sigma_T^{(1)} \bar{\sigma}_T^{(1)} \Big|_{q=0} \right) &= -4a \int_0^\gamma \frac{1}{\cos t} + \mathcal{O}(1/g) \\ &= 4a \log \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) \right] + \mathcal{O}(1/g), \end{aligned} \quad (6.59)$$

donde recordamos que en este caso $\gamma = \alpha_0$. La contribución proveniente de $\chi_T^{(2)}$ puede evaluarse directamente usando su definición (5.202). La contribución completa de σ_T es entonces

$$\sigma_T \bar{\sigma}_T \Big|_{q=0} \sim \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_0}{2} \right)^{4a} e^{4a \sin \alpha_0}, \quad (6.60)$$

de modo que el resultado final para la corrección tipo Lüscher en el límite $1 \ll g \ll L$ será

$$E - L \sim \frac{16g}{e^{2-2 \sin \alpha_0}} (\cos \phi - \cos \theta) \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_0}{2} \right) e^{-\frac{L}{2g}}, \quad (6.61)$$

lo cual coincide con el cálculo explícito (5.153).

Concluimos esta sección realizando los cálculos para las correcciones tipo Lüscher en los casos $\Phi_0 = 0$ y $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$. Para ambos, el factor de dressing de borde propuesto se reduce a (5.207)-(5.208). Como anticipamos, para que la corrección por tamaño finito concuerde con el resultado explícito (5.169), debemos tener que $\sigma_B \bar{\sigma}_B$ es regular en $q = 0^4$. Entonces

$$E - L \sim -\frac{t_1(0)}{4} e^{-\frac{L}{g}} \sqrt{\frac{2g}{L\pi}} \sim -\sqrt{\frac{2g}{\pi L}} e^{-\frac{L}{g}} (\cos \theta - \cos \phi)^2 \sigma_B \bar{\sigma}_B|_{q=0}, \quad (6.62)$$

y esto está de acuerdo con (5.169) siempre y cuando $\sigma_B \bar{\sigma}_B|_{q=0} = 1$. Para ver que esto es efectivamente así, escribimos

$$\sigma_B \bar{\sigma}_B|_{q=0} = e^{2i[\chi_B(z_0) - \chi_B(-1/z_0)]} = 4\pi^2 g^2 \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right)^2 e^{2i[\Phi_B(z_0) - \Phi_B(-1/z_0)]}, \quad (6.63)$$

donde z_0 está definido por (6.56). Tenemos

$$\Phi_B(z_0) - \Phi_B(-1/z_0) = i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{z_0^2 + 1}{(z_0 - z)(z_0 z + 1)} \log \left[2\pi g \left(z + \frac{1}{z}\right)\right] \quad (6.64)$$

$$= \frac{2i}{\pi} (z_0^4 - 1) \int_0^{\pi/2} \frac{\log(4\pi i g \sin t)}{(z_0^2 + 1)^2 - 4z_0^2 \sin^2 t} dt. \quad (6.65)$$

Esta vez, debemos realizar la integración antes de tomar el límite de g grande. El resultado de la integral es bastante complicado, pero al final del día obtenemos

$$e^{2i[\Phi_B(z_0) - \Phi_B(-1/z_0)]} = -\frac{1}{a^2 \pi^2} + \mathcal{O}(1/g), \quad (6.66)$$

que junto con el otro factor en (6.63) nos da $\sigma_B \bar{\sigma}_B|_{q=0} = 1$ como esperábamos.

Observamos que la solución a las ecuaciones de crossing y unitaridad para D5-branas maximales (5.207)-(5.208) también está determinada para todos los valores del acoplamiento. En este caso, la verificación lograda por medio del cálculo tipo Lüscher solo requirió que, para partículas con cinemática en la teoría mirror, $\sigma_B \bar{\sigma}_B|_{q=0} = 1$. La resumación de Poisson utilizada para calcular $E - L$ para el estado fundamental de una cuerda abierta en la geometría de fondo de ondas pp es esencialmente la misma que el cálculo de (6.51) cuando las correcciones son dominadas por el intercambio de un par de partículas mirror. Esto es porque la fórmula de Lüscher (6.45) fue derivada tratando como libre al intercambio de partículas entre los estados de borde. Esto se corresponde entonces con el hecho de que la suma de Poisson es dominada por los términos con $k = \pm 1$, ver (5.166).

⁴En este punto se torna evidente que la solución con un coseno hiperbólico de (5.181) no es admisible. El término adicional de la definición de χ_B para $|x| < 1$ sería en este caso $i \log \left\{2\pi g \left(x + \frac{1}{x}\right) \cot \left[2\pi g \left(x + \frac{1}{x}\right)\right]\right\}$ y por lo tanto $\sigma_B \bar{\sigma}_B$ continuaría teniendo un polo doble.

6.3. Sistema Y

En la sección 6.1 presentamos el ansatz de Bethe termodinámico para teorías integrables relativistas. Este nos permite calcular la energía del estado fundamental cuando la teoría está definida en un volumen finito, ya sea con condiciones de contorno periódicas o abiertas, en términos de los ingredientes fundamentales de la descripción provista por la integrabilidad del problema en un volumen infinito. Generalizamos luego estos resultados para adaptarlos a teorías no relativistas y estados excitados, de modo que para poder aplicarlos al contexto de la conjetura AdS/CFT solamente nos resta incorporar la posibilidad de que existan en la teoría distintos tipos de partículas, es decir que la dispersión sea no diagonal.

En este caso, la amplitud de dispersión es realmente matricial y las ecuaciones de Bethe en cuya condensación se basa el TBA provienen del ansatz de Bethe anidado mencionado en el capítulo anterior. Para cada tipo de cadena de espines tendremos entonces un TBA distinto, pero esquemáticamente podemos esperar que éste tome la forma de un sistema de ecuaciones integrales para las pseudo-energías de las distintas partículas o excitaciones que se propagan. En esta sección nos vamos a concentrar en el caso de la cadena de espines abierta de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills que se discutió en el capítulo 5, cuyas condiciones de borde son provistas por un lazo de Wilson con ángulos de cusp geométrico e interno. No vamos a realizar una derivación del sistema de ecuaciones integrales correspondiente al TBA de borde para este caso, porque para ello deberíamos entrar en detalles que conciernen a las ecuaciones de Bethe anidadas. Presentamos aquí solamente el resultado final obtenido en [67], limitándonos a mencionar que la derivación sigue un camino estándar que resulta en un sistema de ecuaciones similar al que se obtiene para el TBA formulado para los operadores de traza simple de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills [180, 181].

En el ansatz de Bethe termodinámico de borde para las cadenas de espines abiertas de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills que nos ocupan, la energía del estado fundamental viene dada por

$$E_0(L) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{Q=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{d\tilde{P}_Q}{du} L_Q(u), \quad (6.67)$$

donde ahora $Q = 1, 2, \dots$ identifica los modos llamados “masivos” y $\tilde{P}_Q(u)$ es el momento en la teoría mirror de dichos modos, dado por

$$\tilde{P}_Q = 2gx^{[-Q]} - 2gx^{[Q]} + iQ \quad \text{con} \quad u \pm \frac{iQ}{2g} = x^{[\pm Q]} + \frac{1}{x^{[\pm Q]}}, \quad (6.68)$$

siendo u el parámetro espectral que cumple el rol de la rapidity en la sección 6.1. Esta es una generalización inmediata de (6.38), en la que introdujimos un factor $1/2$ para poder realizar las integrales con $-\infty < u < \infty$, aprovechando que $\tilde{P}_Q(u)$ es una función par.

Las funciones $L_Q(u)$ que aparecen en la expresión para $E_0(L)$ se obtienen de la solución de un sistema de ecuaciones integrales acopladas, conocido como sistema Y dado que las funciones desconocidas son las funciones Y_Q para los modos masivos $Q = 1, 2, \dots$, Y_{\pm} para los modos fermiónicos, y finalmente $Y_{m|v}$ y $Y_{m|w}$ con $m = 1, 2, \dots$ para los dos tipos de modos magnónicos. Este sistema toma la forma⁵

$$\begin{aligned}
\log Y_Q &= -2\psi Q - 2(L+1)\tilde{\varepsilon}_Q + \log M_Q + \sum_{Q'=1}^{\infty} L_{Q'} \star K_{\text{sl}(2)}^{Q'Q} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{L}_m \star K_{vw}^{mQ}, \\
&\quad + 2\mathcal{L}_- \hat{\star} K_-^{yQ} + 2\mathcal{L}_+ \hat{\star} K_+^{yQ}, \\
\log Y_{\pm} &= f - t - \sum_{Q=1}^{\infty} L_Q \star K_{\pm}^{Qy} + \sum_{m=1}^{\infty} (\mathcal{L}_m - \tilde{\mathcal{L}}_m) \star K_m, \\
\log Y_{m|v} &= 2mf - \sum_{Q=1}^{\infty} L_Q \star K_{xv}^{Qm} + \sum_{m'=1}^{\infty} \mathcal{L}_{m'} \star K_{m'm} + (\mathcal{L}_- - \mathcal{L}_+) \hat{\star} K_m, \\
\log Y_{m|w} &= 2mt + \sum_{m'=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{L}}_{m'} \star K_{m'm} + (\mathcal{L}_- - \mathcal{L}_+) \hat{\star} K_m,
\end{aligned} \tag{6.69}$$

donde definimos

$$\begin{aligned}
L_Q &= \log(1 + Y_Q), & \mathcal{L}_m &= \log\left(1 + \frac{1}{Y_{m|v}}\right), & \tilde{\mathcal{L}}_m &= \log\left(1 + \frac{1}{Y_{m|w}}\right), \\
\mathcal{L}_{\pm} &= \log\left(1 - \frac{1}{Y_{\pm}}\right), & \tilde{\varepsilon}_Q &= \log \frac{x^{[-Q]}}{x^{[Q]}}.
\end{aligned} \tag{6.70}$$

Como antes, en estas ecuaciones \star denota la operación de convolución y los núcleos correspondientes pueden hallarse en [167]. La contribución del factor de dressing de borde se encuentra en

$$M_Q = \exp \left\{ i\chi(x^{[-Q]}) + i\chi(1/x^{[Q]}) - i\chi(1/x^{[-Q]}) - i\chi(x^{[Q]}) \right\}, \tag{6.71}$$

donde χ está definida como en el capítulo 5, es decir que $\sigma_B(p) = \exp\{i\chi(x^+) - i\chi(x^-)\}$ con $x^{\pm} = x^{[\pm 1]}$. Finalmente, en las ecuaciones de TBA (6.69) aparecen términos fuente

⁵Seguimos para el sistema Y las convenciones de [182], pero abreviamos la notación de $Y_{m|vw}$ a $Y_{m|v}$. Estas convenciones son las mismas que las utilizadas para la descripción del TBA para el caso con condiciones de borde periódicas, [183].

proporcionales a los potenciales químicos ψ , f y t . Estos se identifican con los ángulos de cusp geométrico e interno según [66, 67]

$$\psi = i(\pi - \phi), \quad f = i(\phi - \pi), \quad t = i(\theta - \pi), \quad (6.72)$$

es decir que todos los potenciales químicos son imaginarios. Esto es similar a lo que ocurre en los casos estudiados en [182, 184], y se presenta también en el TBA en otros contextos. En la sección 6.4 vamos a realizar una continuación analítica en estos parámetros, que por el momento vamos a tratar como independientes.

Observamos que los términos fuente de las ecuaciones (6.69), dependientes del conjunto de tres parámetros mencionado arriba, es el más general que podemos agregar a las ecuaciones de TBA sin modificar la forma del sistema Y en cuestión [185]. Estos términos son el elemento novedoso en el sistema abierto respecto al caso con condiciones de contorno periódicas.

Solución asintótica

Para realizar la expansión del sistema Y es conveniente disponer de una solución asintótica, válida para volúmenes grandes, $L \rightarrow \infty$, o en el régimen de acoplamiento débil $g \rightarrow 0$. Esta solución debe satisfacer las ecuaciones de TBA en el límite asintótico en el que los modos masivos son pequeños y por lo tanto los términos con L_Q pueden despreciarse. En este límite todas las funciones Y para los modos no masivos son constantes, y las ecuaciones de TBA se simplifican drásticamente.

En el límite asintótico, necesitamos solamente de las integrales de los núcleos

$$\tilde{K}_{vwx}^{mQ} = \int_{-\infty}^{\infty} du K_{vwx}^{mQ}(u, v) = \begin{cases} m + 1 & \text{si } m < Q \\ Q & \text{si } m \geq Q \end{cases}, \quad (6.73)$$

$$\tilde{K}_m = \int_{-\infty}^{\infty} du K_m(u - v) = 1, \quad (6.74)$$

$$\tilde{K}_{m'm} = \int_{-\infty}^{\infty} du K_{m'm}(u - v) = \begin{cases} 2m' & \text{si } m' < m \\ 2m - 1 & \text{si } m' = m \\ 2m & \text{si } m' > m \end{cases}, \quad (6.75)$$

$$\tilde{K}_{yQ} = \int_{-2}^2 du K_{yQ}(u, v) = 1, \quad (6.76)$$

de modo que las ecuaciones de TBA simplificadas toman la forma

$$\log Y_Q^o = -2\psi Q - 2(L+1)\tilde{\varepsilon}_Q + \log M_Q + 2 \sum_{m=1}^{Q-1} (m+1)\mathcal{L}_m^o + 2Q \sum_{m=Q}^{\infty} \mathcal{L}_m^o + 2\mathcal{L}_+,$$

$$\log Y_+^o = f - t + \sum_{m=1}^{\infty} (\mathcal{L}_m^o - \tilde{\mathcal{L}}_m^o), \quad (6.77)$$

$$\log Y_{m|v}^o = 2mf + \sum_{m'=1}^m 2m'\mathcal{L}_{m'}^o + 2m \sum_{m'=m+1}^{\infty} \mathcal{L}_{m'}^o - \mathcal{L}_m^o, \quad (6.78)$$

$$\log Y_{m|w}^o = 2mt + \sum_{m'=1}^m 2m'\tilde{\mathcal{L}}_{m'}^o + 2m \sum_{m'=m+1}^{\infty} \tilde{\mathcal{L}}_{m'}^o - \tilde{\mathcal{L}}_m^o. \quad (6.79)$$

Podemos reescribir (6.78) en forma más sencilla como

$$\log(1 + Y_{m|v}^o) = 2mf + \sum_{m'=1}^m 2m'\mathcal{L}_{m'}^o + 2m \sum_{m'=m+1}^{\infty} \mathcal{L}_{m'}^o, \quad (6.80)$$

y de esto se obtiene

$$\log(1 + Y_{m+1|v}^o) + \log(1 + Y_{m-1|v}^o) = 2 \log Y_{m|v}^o, \quad (6.81)$$

con la condición de borde

$$Y_{0|v}^o = 0. \quad (6.82)$$

Las funciones asintóticas $Y_{m|v}^o$ son entonces la solución del sistema Y “constante”

$$(Y_{m|v}^o)^2 = (1 + Y_{m+1|v}^o)(1 + Y_{m-1|v}^o), \quad (6.83)$$

con la condición de borde (6.82). La solución a este sistema es conocida, y toma la forma

$$Y_{m|v}^o = \frac{\sinh pm \sinh p(m+2)}{\sinh^2 p}, \quad (6.84)$$

con p un parámetro. Manipulando análogamente (6.79) encontramos que las funciones asintóticas $Y_{m|w}^o$ deben ser

$$Y_{m|w}^o = \frac{\sinh \tilde{p}m \sinh \tilde{p}(m+2)}{\sinh^2 \tilde{p}}. \quad (6.85)$$

Hasta aquí tratamos las sumas infinitas formalmente. Introduciendo la notación

$$\ell_m = \frac{\sinh pm}{\sinh p}, \quad (6.86)$$

escribimos ahora la suma con un cutoff

$$\sum_{m=Q}^{\Lambda} \mathcal{L}_m^o = \ell_{Q+1} - \ell_Q + \ell_{\Lambda+1} - \ell_{\Lambda+2} = \ell_{Q+1} - \ell_Q + \log \frac{\sinh(\Lambda+1)p}{\sinh(\Lambda+2)p}. \quad (6.87)$$

Vemos entonces que el límite $\Lambda \rightarrow \infty$ existe si p tiene una parte real. Suponiendo $p > 0$ tenemos

$$\sum_{m=Q}^{\infty} \mathcal{L}_m^o = \ell_{Q+1} - \ell_Q - p, \quad (6.88)$$

y usando esta fórmula encontramos que las ecuaciones del TBA se satisfacen si $p = f$. De manera análoga podemos llegar a la conclusión de que $\tilde{p} = t > 0$ debe ser real.

Hasta ahora hemos resuelto las ecuaciones (6.78) y (6.79). Usando estos resultados podemos calcular también la solución asintótica de los modos fermiónicos y masivos. En conclusión, para el sistema (6.69) con potenciales químicos f , t y ψ reales se encuentran las soluciones asintóticas

$$Y_{\pm}^o = \frac{\cosh f}{\cosh t}, \quad Y_{m|w}^o = \frac{\sinh mt \sinh(m+2)t}{\sinh^2 t}, \quad Y_{m|v}^o = \frac{\sinh mf \sinh(m+2)f}{\sinh^2 f},$$

$$Y_Q^o = 4e^{-2(f+\psi)Q} \frac{\sinh^2 Qf}{\sinh^2 f} (\cosh f - \cosh t)^2 \left(\frac{x^{[Q]}}{x^{[-Q]}} \right)^{2L+2} M_Q, \quad (6.89)$$

donde usamos un superíndice o para indicar que se trata de los valores en el límite $L \rightarrow \infty$ ó $g \rightarrow 0$.

Claramente, para potenciales químicos reales todas las funciones Y son positivas, como podíamos esperar dada su interpretación en términos del cociente entre el número de huecos y el número de excitaciones, ver por ejemplo (6.21) con $e^\varepsilon \mapsto Y$. Por el contrario, para ángulos reales los potenciales químicos son imaginarios, en cuyo caso los modos magnónicos $Y_{m|v}$ y $Y_{m|w}$ son funciones que no son positivas en todo su dominio. Esto da cuenta de que deben corresponder a un TBA para estados excitados.

Ecuaciones híbridas

Podemos transformar las ecuaciones de TBA en la forma canónica (6.69) para llevarlas a un sistema equivalente, conocido como sistema de ecuaciones híbridas [183]. Como la transformación matemática involucrada solamente afecta las convoluciones y términos de potenciales químicos, su derivación es idéntica a la realizada en [186],

de modo que no vamos a repetirla aquí. El sistema híbrido resultante es

$$\log Y_{m|w} = \tilde{R}_{m+1} \star s + \tilde{R}_{m-1} \star s + \delta_{m1} \log \left(\frac{1 - 1/Y_-}{1 - 1/Y_+} \right) \hat{\star} s, \quad (6.90)$$

$$\log Y_{m|v} = -L_{m+1} \star s + R_{m+1} \star s + R_{m-1} \star s + \delta_{m1} \log \left(\frac{Y_- - 1}{Y_+ - 1} \right) \hat{\star} s, \quad (6.91)$$

$$\log \frac{Y_+}{Y_-} = \sum_{Q=1}^{\infty} L_Q \star K_{Qy}, \quad (6.92)$$

$$\log Y_+ Y_- = - \sum_{Q=1}^{\infty} L_Q \star K_Q + 2 \sum_{Q=1}^{\infty} L_Q \star K_{xv}^{Q1} \star s + 2R_1 \star s - 2\tilde{R}_1 \star s, \quad (6.93)$$

$$\begin{aligned} \log Y_Q &= -2(f + \psi)Q - 2(L + 1)\tilde{\varepsilon}_Q + \log M_Q + \sum_{Q'=1}^{\infty} L_{Q'} \star K_s^{Q'Q} \\ &+ 2R_1 \star s \hat{\star} K_{yQ} + 2R_{Q-1} \star s + \log \left(1 - \frac{1}{Y_+} \right) \left(1 - \frac{1}{Y_-} \right) \hat{\star} K_{yQ} \\ &+ \log \left(\frac{1 - 1/Y_-}{1 - 1/Y_+} \right) \hat{\star} K_Q - 2 \log \left(\frac{Y_- - 1}{Y_+ - 1} \right) \hat{\star} s \star K_{vwx}^{1Q}, \end{aligned} \quad (6.94)$$

donde introdujimos la notación

$$R_m = \log(1 + Y_{m|v}), \quad \tilde{R}_m = \log(1 + Y_{m|w}), \quad R_0 = \tilde{R}_0 = 0, \quad (6.95)$$

y el núcleo universal de TBA

$$s(u) = \frac{g}{2 \cosh(\pi g u)}. \quad (6.96)$$

También abreviamos $K_s^{Q'Q} = K_{\text{sl}(2)}^{Q'Q} + 2s \star K_{vwx}^{Q'-1Q}$, y referimos al lector a [183] para la definición de los demás núcleos.

En este sistema de ecuaciones híbridas solamente aparece explícitamente la suma de los potenciales químicos $f + \Psi$. Los otros parámetros aparecen en el comportamiento asintótico para m grande de las funciones Y magnónicas,

$$\log Y_{m|w} = 2mt + \mathcal{O}(1), \quad \log Y_{m|v} = 2mf + \mathcal{O}(1). \quad (6.97)$$

6.4. Potencial quark-antiquark a 2-loops

Como vimos en el capítulo 3, la dimensión anómala de cusp es una cantidad muy importante en toda teoría de gauge, dado que se relaciona con diversos observables como las divergencias infrarrojas de las amplitudes de dispersión masivas, la energía emitida por un quark acelerado, o el potencial quark-antiquark si la teoría es conforme.

En el límite planar de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills podemos calcular la dimensión anómala de cusp utilizando el ansatz de Bethe termodinámico de borde presentado en este capítulo: la energía $E_0(L)$ del estado fundamental de la cadena de espines abierta insertada en el loop de Wilson con cusp está dada por (6.67) para cualquier L , pero si la evaluamos en $L = 0$ recuperamos el caso de un lazo de Wilson sin inserciones en el cusp. El resultado dependerá de los ángulos ϕ y θ a través de los potenciales químicos que intervienen en las ecuaciones de TBA, y será exacto en el acoplamiento de 't Hooft λ .

En esta sección vamos a realizar una expansión de la energía del estado fundamental $E_0(L)$ a segundo orden, es decir que vamos a considerar correcciones por tamaño finito debidas a interacciones que recorren dos veces todo el largo de la cadena de espines. Esta energía tiene una expansión de la forma

$$\begin{aligned} E_0(L) &= E_0^{(0)}(L) + E_0^{(1)}(L) + \dots \\ &= E_0^{(0,L+1)}(L)\lambda^{L+1} + E_0^{(0,L+2)}(L)\lambda^{L+2} + \dots + E_0^{(1,2L+2)}(L)\lambda^{2L+2} + \dots, \end{aligned} \quad (6.98)$$

donde $E_0^{(i)}(L)$ está asociada a las correcciones por tamaño finito de orden $2i$. Por su parte, en el límite planar la dimensión anómala de cusp $\Gamma(\theta, \phi, \lambda)$ puede expandirse en términos del acoplamiento de 't Hooft según

$$\Gamma(\theta, \phi, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma_k(\theta, \phi) \lambda^k, \quad (6.99)$$

siendo la dependencia en θ a cada orden de la forma

$$\Gamma_k(\theta, \phi) = \frac{1}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^k \left(\frac{\cos \phi - \cos \theta}{\sin \phi} \right)^n \gamma_k^{(n)}(\phi). \quad (6.100)$$

Como nos interesa tomar al final $L = 0$, la expansión a segundo orden de la energía nos permitirá entonces obtener la dimensión anómala de cusp (6.99) a 2-loops en el límite planar. Vamos a limitarnos al estudio del loop de Wilson con cusp en la representación fundamental, para el que el término de 1-loop en esta expansión a acoplamiento débil es sencillamente

$$\gamma_1^{(1)} = \frac{\phi}{2}. \quad (6.101)$$

Hay dos términos que contribuyen a 2-loops⁶, siendo el más sencillo

$$\gamma_2^{(1)} = \frac{\phi}{12}(\phi^2 - \pi^2). \quad (6.102)$$

⁶También se conocen resultados explícitos para Γ_3 y Γ_4 , ver [65, 72, 187].

El otro término es más complicado,

$$\gamma_2^{(2)} = \frac{1}{4} \left[\zeta_3 - \text{Li}_3(e^{2i\phi}) + i\phi \left(\text{Li}_2(e^{2i\phi}) + \frac{\pi^2}{6} \right) - i\frac{\phi^3}{3} \right], \quad (6.103)$$

pero puede caracterizarse completamente por medio de

$$\gamma_2^{(2)}(0) = \gamma_2^{(2)'}(0) = 0 \quad \text{con} \quad \gamma_2^{(2)''}(\phi) = \frac{\phi}{2} \cot \phi. \quad (6.104)$$

En lo que sigue recuperamos esta expresión sorprendentemente sencilla a partir de la expansión a acoplamiento débil de las ecuaciones de TBA de borde.

Hay dos características fundamentales del sistema de ecuaciones de TBA de borde que hacen de la expansión sistemática una tarea considerablemente sutil. La primera es que los ángulos de cusp ϕ y θ , que como vimos entran en las ecuaciones en la forma de potenciales químicos, hacen que los factores de *twist* del sistema sean imaginarios. Un problema asociado a tener potenciales químicos imaginarios es que las funciones Y , si bien son reales, no necesariamente son positivas. Esto parece entrar en contradicción con la interpretación física de las funciones Y del ansatz de Bethe para el estado fundamental como los cocientes entre las densidades de huecos y partículas. Como ya mencionamos, es posible interpretar entonces a los potenciales químicos imaginarios como correspondiendo a “estados excitados”. La otra característica importante es que los bordes de la cadena pueden emitir y absorber partículas de la teoría mirror. Esto se manifiesta en la presencia de singularidades en las fugacidades del borde, y da lugar a integrales de logaritmos con polos dobles en sus argumentos. Cuando calculamos estas integrales aparecen raíces cuadradas, cuyos signos deben extraerse cuidadosamente.

Para lidiar con las sutilezas discutidas en el párrafo anterior, presentamos una formulación alternativa del TBA de borde. En primer lugar, hallamos un dominio de los parámetros en el que las ecuaciones corresponden a un estado fundamental, *i.e.* todos los potenciales químicos son reales. Esto garantiza que el comportamiento asintótico de las funciones Y es siempre positivo, y que las raíces cuadradas mencionadas pueden tomarse en valor absoluto sin correr ningún riesgo. Como a fin de cuentas nos interesa obtener el valor de expectación de lazos de Wilson físicos, para los que los ángulos de cusp son reales, en el resultado final tendremos que continuar analíticamente los potenciales químicos hasta valores imaginarios puros. Al hacerlo cruzamos singularidades en el contorno de integración, lo cual debe analizarse cuidadosamente [188]. Para evitarlo, vamos a deformar los contornos de integración de forma tal que todas las contribuciones sensibles a las ambigüedades de signo de las

raíces cuadradas puedan aislarse. Para hacerlo, movemos los contornos de integración hacia arriba en el plano complejo, para lo cual cruzamos singularidades que corresponden a ceros de los logaritmos que tienen polos dobles. En consecuencia, se generan términos fuente adicionales mientras que las integrales resultantes no tienen polos. El sistema de TBA de borde obtenido de este modo es de tipo excitado.

En este punto, es importante enfatizar que a pesar de que parece más apropiado trabajar con potenciales químicos reales y continuar analíticamente a partir de ellos el resultado final, también se puede trabajar con potenciales químicos imaginarios siempre que se escojan apropiadamente los signos de los términos fuente adicionales debidos a las fugacidades singulares. Siguiendo la intuición física, en [67] se eligieron los signos en la integral para la dimensión anómala de cusp de forma tal que en el límite $\phi \rightarrow \pi$ todas las contribuciones fueran negativas. No es difícil ver que si uno adopta la misma elección para todas las integrales de las ecuaciones de TBA con fugacidades singulares, el resultado final para la dimensión anómala de cusp a 2-loops es el mismo que el que se obtiene al realizar la continuación analítica del resultado obtenido con potenciales químicos reales. Esperamos que esto siga siendo válido a todo orden perturbativo.

En cualquier caso, en la formulación original del TBA de borde para la dimensión anómala de cusp la receta para la elección de los signos es útil solamente para realizar cálculos analíticos de las integrales, dado que la elección del signo afecta solamente a la contribución del polo y no a la integral completa. Dado que al deformar los contornos de integración vamos a aislar la contribución del polo del resto de la integral, esta reformulación de las ecuaciones de TBA de borde parece más apropiada para la realización de estudios numéricos de la dimensión anómala de cusp con ángulos reales [189], tal como se hizo con el TBA para la dimensión anómala del operador de Konishi [190].

Para comenzar, vemos que podemos utilizar la propiedad análoga a (5.176) para el factor de dressing (5.88) de la matriz de reflexión correspondiente al loop de Wilson en la representación fundamental, y esto nos permite escribir (6.71) como

$$M_Q(u) = \exp \left\{ 2i\Phi(x^{[-Q]}) + 2i\Phi(1/x^{[Q]}) - 2i\Phi(0) \right\} \frac{\pi^2(4g^2u^2 + Q^2)}{\sinh^2 2\pi gu}. \quad (6.105)$$

En esta forma, es claro que todos los $M_Q(u)$ tienen un polo doble en $u = 0$. Entonces, en la fórmula para la dimensión anómala de cusp (6.67) es una suma de integrales

que tienen la forma genérica

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} du \mathcal{K}(u) \log Z(u), \quad (6.106)$$

con integrandos que tienen un polo doble en el argumento del logaritmo,

$$Z(u) = 1 + \frac{\Lambda(u)}{u^2}. \quad (6.107)$$

Para (6.67) necesitamos esta integral con

$$\mathcal{K}(u) = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\tilde{P}_Q}{du} \quad \text{y} \quad \Lambda(u) = u^2 Y_Q(u). \quad (6.108)$$

Todos los $\mathcal{K}(u)$ y $\Lambda(u)$ son funciones analíticas reales pares, y además sabemos que $\Lambda(u)$ es asintóticamente chico, del orden $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, donde vamos a usar el parámetro pequeño ϵ para caracterizar el tamaño de los términos en el límite asintótico $L \rightarrow \infty$ ó $g \rightarrow 0$.

A primera vista la integral I es $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, pero la presencia del polo doble en $\log Z$ hace que el integrando no sea uniformemente $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, y esto resulta en que I termina siendo solamente $\mathcal{O}(\epsilon)$. Una situación similar ya fue encontrada anteriormente en el caso del modelo de sinh-Gordon con bordes, ver [188, 191]. El tratamiento de las integrales de la forma (6.106) puede hacerse en forma similar a ese caso.

Si bien (6.106) es convergente, para evitar problemas asociados a que el contorno de integración pasa por el polo doble vamos a deformar dicho contorno en la cantidad $i\eta$. El nuevo contorno de integración es paralelo al eje real, estando separado de éste por la distancia finita η . Como Λ es pequeño y par, hay un cero de $Z(u)$ en el eje imaginario cerca del origen, en $u = iu_0$ tal que

$$Z(iu_0) = 0 \quad \text{con} \quad u_0 = \mathcal{O}(\epsilon). \quad (6.109)$$

Debemos tener en cuenta la contribución de este cero cuando realizamos la deformación del contorno de integración,

$$I = -2\pi i S(iu_0) + \int_{-\infty+i\eta}^{\infty+i\eta} du \mathcal{K}(u) \log Z(u), \quad (6.110)$$

donde S es la primitiva impar de \mathcal{K} ,

$$S'(u) = \mathcal{K}(u) \quad \text{con} \quad S(0) = 0. \quad (6.111)$$

Observamos que la ecuación (6.110) junto con la condición de cuantización (6.109) son completamente equivalentes a (6.106). Se trata, sin embargo, de una expansión en ϵ mucho más conveniente.

Lejos del polo doble podemos expandir $\log Z$ sin mayores riesgos, y debido a que u_0 es pequeño también podemos hacerlo para el término que contiene S . El resultado es

$$I = 2\pi\mathcal{K}(0)\sqrt{\Lambda(0)} + \int_{-\infty+i\eta}^{\infty+i\eta} du \mathcal{K}(u) \frac{\Lambda(u)}{u^2} + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (6.112)$$

donde usamos

$$u_0 = \sqrt{\Lambda(0)} + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (6.113)$$

Usamos ahora la fórmula genérica (6.112) para calcular la contribución a orden dominante a la dimensión anómala de cusp en la expansión a acoplamiento débil, que proviene del primer término en (6.112). Notando que

$$\tilde{P}'_Q(0) = 2g + \mathcal{O}(g^3) \quad \text{y} \quad \Lambda_Q(0) = \left(\frac{4g^2}{Q^2}\right)^{2L+1} C_Q^2 (1 + \mathcal{O}(g^2)), \quad (6.114)$$

donde

$$C_Q = \frac{\cosh f - \cosh t}{\sinh f} (e^{-\psi Q} - e^{-(2f+\psi)Q}), \quad (6.115)$$

encontramos que como $g = \sqrt{\lambda}/4\pi$

$$E_0(L) = \lambda^{L+1} E_0^{(0,L+1)}(L) + \mathcal{O}(\lambda^{L+2}), \quad (6.116)$$

con el coeficiente a orden dominante

$$E_0^{(0,L+1)}(L) = -\frac{1}{2(2\pi)^{2(L+1)}} \sum_{Q=1}^{\infty} \frac{|C_Q|}{Q^{2L+1}}. \quad (6.117)$$

Hay un problema con la ecuación (6.117): tomar el valor absoluto de $C_Q(\phi, \theta)$ para todos los valores de los ángulos de cusp no puede ser correcto, dado que no resultaría en la dimensión anómala de cusp a 1-loop dada por (6.100) y (6.101) al evaluar en $L = 0$. La ecuación (6.117) solo puede ser válida por lo tanto en cierto dominio “seguro”, *i.e.* para ciertos valores de los potenciales químicos. Para todos aquellos valores que se encuentren fuera de este dominio seguro, el resultado correcto puede obtenerse por continuación analítica. El dominio seguro está parametrizado por tres potenciales químicos reales y positivos ψ , f y t , que consideramos independientes y satisfacen

$$\psi > 0, \quad f > t > 0, \quad (6.118)$$

lo cual garantiza que la solución del sistema de ecuaciones de TBA de borde tiene todas las funciones Y positivas.

Aceptando esta receta, podemos ahora calcular $E_0^{(0)}(L)$ en el dominio seguro. Para obtener Γ_1 evaluamos en $L = 0$,

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{4\pi} \frac{\cosh f - \cosh t}{\sinh f} (\mathcal{F}(\psi) - \mathcal{F}(2f + \psi)) , \quad (6.119)$$

donde

$$\mathcal{F}(\psi) = \sum_{Q=1}^{\infty} \frac{e^{-Q\psi}}{Q} = -\log(1 - e^{-\psi}) . \quad (6.120)$$

Esta función tiene un corte a lo largo del eje real negativo, de modo que la continuación desde el eje real positivo hasta valores con parte imaginaria no nula no presenta ningún inconveniente, y tenemos

$$\Gamma_1 = \frac{\cos \phi - \cos \theta}{4\pi \sin \phi} \phi , \quad (6.121)$$

al hacer la continuación analítica

$$\psi \rightarrow i(\pi - \phi) \quad , \quad f \rightarrow i(\phi - \pi) \quad y \quad t \rightarrow i(\theta - \pi) . \quad (6.122)$$

En [67] una receta distinta se utilizó para obtener exactamente el mismo resultado (6.121) para Γ_1 : en la ecuación (6.117) el valor absoluto se eliminó incorporando un factor adicional $(-1)^Q$ para asegurar que en el límite estricto $\phi \rightarrow \pi$ todas las contribuciones para distintos Q sean negativas. Ambas recetas serán exitosas a la hora de reproducir la dimensión anómala de cusp a 2-loops cuando vamos más allá del orden dominante. Como veremos más adelante, la receta de [67] combinada con una deformación del contorno de integración sería útil a la hora de realizar un estudio numérico de las ecuaciones de TBA para ángulos de cusp reales.

6.4.1. Reformulación de las ecuaciones de TBA de borde

El objetivo de esta sección es usar la fórmula genérica (6.110) para reformular las ecuaciones de TBA de borde híbridas, dejándolas en una forma que permita una expansión sistemática para volúmenes grandes, así como su estudio numérico. Las contribuciones provenientes de los polos serán escritas como

$$D_\alpha^\beta(iu_Q) = -2\pi i S_\alpha^\beta(iu_Q) , \quad (6.123)$$

donde α y β hacen referencia a los diversos núcleos que podemos convolucionar con L_Q . Las ecuaciones que obtenemos son

$$\log Y_{m|w} = \tilde{R}_{m+1} \star s + \tilde{R}_{m-1} \star s + \delta_{m1} \log \left(\frac{1 - 1/Y_-}{1 - 1/Y_+} \right) \hat{\star} s, \quad (6.124)$$

$$\log Y_{m|v} = -D_s(iu_{m+1}) - L_{m+1} \star_\eta s + R_{m+1} \star s + R_{m-1} \star s + \delta_{m1} \log \left(\frac{Y_- - 1}{Y_+ - 1} \right) \hat{\star} s, \quad (6.125)$$

$$\log \frac{Y_+}{Y_-} = \sum_{Q=1}^{\infty} (D_{Qy}(iu_Q) + L_Q \star_\eta K_{Qy}), \quad (6.126)$$

$$\begin{aligned} \log Y_+ Y_- = & - \sum_{Q=1}^{\infty} (D_Q(iu_Q) + L_Q \star_\eta K_Q) + 2 \sum_{Q=1}^{\infty} (D_{xvs}^{Q1}(iu_Q) + L_Q \star_\eta K_{xv}^{Q1} \star s) \\ & + 2R_1 \star s - 2\tilde{R}_1 \star s, \end{aligned} \quad (6.127)$$

$$\begin{aligned} \log Y_Q = & -2(f + \psi)Q - 2(L + 1)\tilde{\varepsilon}_Q + \log M_Q + \sum_{Q'=1}^{\infty} \left(D_s^{Q'Q}(iu_{Q'}) + L_{Q'} \star_\eta K_s^{Q'Q} \right) \\ & + 2R_1 \star s \hat{\star} K_{yQ} + 2R_{Q-1} \star s + \log \left(1 - \frac{1}{Y_+} \right) \left(1 - \frac{1}{Y_-} \right) \hat{\star} K_{yQ} \\ & + \log \left(\frac{1 - 1/Y_-}{1 - 1/Y_+} \right) \hat{\star} K_Q - 2 \log \left(\frac{Y_- - 1}{Y_+ - 1} \right) \hat{\star} s \star K_{vwx}^{1Q}. \end{aligned} \quad (6.128)$$

donde la convolución por el contorno de integración deformado es

$$f \star_\eta K = \int_{-\infty+i\eta}^{\infty+i\eta} du f(u) K(u, v). \quad (6.129)$$

La ubicación de los términos fuente está dada por los u_Q , que son determinados a partir de la ecuación

$$1 + Y_Q(iu_Q) = 0. \quad (6.130)$$

Habiendo deformado los contornos de integración, la energía toma ahora la forma

$$E_0(L) = \frac{i}{2} \tilde{P}_Q(iu_Q) - \sum_{Q=1}^{\infty} \int_{-\infty+i\eta}^{\infty+i\eta} \frac{du d\tilde{P}_Q}{4\pi du} L_Q. \quad (6.131)$$

El sistema completo es entonces similar al de un sistema de ecuaciones de TBA para un estado excitado. A continuación realizamos una expansión asintótica de las ecuaciones de TBA de borde así reformuladas válida para volúmenes grandes, o alternativamente en el régimen de acoplamiento débil.

Expansión asintótica

Expandimos ahora las ecuaciones de TBA híbridas reformuladas más arriba primero a orden dominante, y luego al primer orden subdominante en el parámetro $\epsilon = e^{-2\epsilon_Q(L+1)}$. La expansión de las funciones Y será anotada como

$$Y = Y^o(1 + y + \dots), \quad (6.132)$$

y vamos a resolver iterativamente las ecuaciones de TBA de borde junto con la condición de cuantización (6.130) para $u_Q = u_Q^{(0)} + u_Q^{(1)} + \dots$.

A orden dominante los nodos masivos son exponencialmente pequeños, de modo que despreciándolos el sistema Y se separa en dos subsistemas independientes con soluciones asintóticas constantes. Los valores de estas constantes determinan las expresiones exponencialmente chicas Y_Q^o de los nodos masivos a primer orden, lo cual a su vez determina $u_Q^{(0)}$. A primer orden las soluciones Y^o son las halladas anteriormente, (6.89). Las funciones constantes $Y_{n|v}^o$ y $Y_{m|w}^o$ son las mismas que las de las alas del modelo $O(4)$ deformado [182], y pueden escribirse como

$$Y_{m|v}^o = [m]_f [m+2]_f \quad \text{y} \quad Y_{n|w}^o = [n]_t [n+2]_t, \quad (6.133)$$

donde

$$[n]_c = q^{n-1} + q^{n-3} \dots + q^{3-n} + q^{1-n} = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} = \frac{\sinh nc}{\sinh c} \quad \text{con} \quad q = e^c. \quad (6.134)$$

Estas soluciones asintóticas, junto con las fermiónicas Y_{\pm}^o dadas por

$$Y_{\pm}^o = \sqrt{\frac{1 + Y_{1|v}^o}{1 + Y_{1|w}^o}} = \frac{[2]_f}{[2]_t} = \frac{\cosh f}{\cosh t}, \quad (6.135)$$

nos permiten escribir la solución asintótica para los modos masivos como

$$Y_Q^o = [Q]_f^2 ([2]_f - [2]_t)^2 M_Q e^{-2(f+\Psi)Q - 2(L+1)\tilde{\epsilon}_Q}. \quad (6.136)$$

Insertando ahora Y_Q^o en la ecuación (6.130) obtenemos la ubicación asintótica de $u_Q = u_Q^{(0)} + \dots$,

$$u_Q^{(0)} = m_Q [Q]_f ([2]_f - [2]_t) e^{-(f+\Psi)Q - (L+1)\tilde{\epsilon}_Q(0)} > 0 \quad \text{con} \quad m_Q = \sqrt{\lim_{u \rightarrow 0} u^2 M_Q(u)}.$$

A orden dominante el término de la integral en la fórmula de la energía (6.131) puede ser despreciado, de modo que la corrección completa a este orden es

$$E_0^{(0)}(L) = -\frac{1}{2} \sum_{Q=1}^{\infty} \frac{d\tilde{P}_Q}{du}(0) u_Q^{(0)} = -\frac{1}{2} ([2]_f - [2]_t) \sum_{Q=1}^{\infty} \frac{d\tilde{P}_Q}{du}(0) [Q]_f m_Q e^{-(f+\Psi)Q - (L+1)\tilde{\epsilon}_Q(0)}. \quad (6.137)$$

Al primer orden subdominante, debemos incluir el término de la integral en la fórmula para la energía (6.131), y además debemos calcular la corrección a primer orden subdominante para u_Q .

Nos concentramos primero en el cálculo de la corrección a $u_Q = u_Q^{(0)} + u_Q^{(1)} + \dots$, para lo cual usamos la ecuación

$$1 + Y_Q^o(iu_Q)(1 + y_Q(iu_Q)) = 0, \quad (6.138)$$

donde las y_Q deben ser determinadas a partir de las ecuaciones de TBA linearizadas,

$$y_Q = 2\pi u_{Q'} K_s^{Q'Q} + 2A_{1|v} y_{1|v} \star s \hat{\star} K_{yQ} + 2A_{Q-1|v} y_{Q-1|v} \star s - 2 \frac{y_- - y_+}{1 - \frac{1}{Y_+^o}} \hat{\star} s \star K_{vx}^{1Q} + \frac{y_- - y_+}{(Y_+^o - 1)} \hat{\star} K_Q + \frac{y_- + y_+}{(Y_+^o - 1)} \hat{\star} K_{yQ}, \quad (6.139)$$

$$y_+ + y_- = 2 (A_{1|v} y_{1|v} - A_{1|w} y_{1|w}) \star s - 4\pi u_Q K_{xv}^{Q1} \star s - 2\pi u_Q K_Q, \quad (6.140)$$

$$y_+ - y_- = 2\pi u_Q K_{Qy}, \quad (6.141)$$

$$y_{m|v} = (A_{m-1|v} y_{m-1|v} + A_{m+1|v} y_{m+1|v}) \star s - 2\pi u_{m+1} \star s + \delta_{m1} \frac{y_- - y_+}{1 - \frac{1}{Y_+^o}} \hat{\star} s,$$

$$y_{n|w} = (A_{n-1|w} y_{n-1|w} + A_{n+1|w} y_{n+1|w}) \star s + \delta_{n1} \frac{y_+ - y_-}{1 - Y_+^o} \hat{\star} s. \quad (6.142)$$

Aquí, $A_{m|v} = \frac{Y_{m|v}^o}{1 + Y_{m|v}^o} = \frac{[m]_f [m+2]_f}{[m+1]_f^2}$ y $A_{n|w} = \frac{Y_{n|w}^o}{1 + Y_{n|w}^o} = \frac{[n]_t [n+2]_t}{[n+1]_t^2}$, y toda combinación de la forma $u_Q K^{Q'}$ es entendida como $u_Q K^{Q'}(0, v)$.

La solución a este sistema de ecuaciones linearizadas puede escribirse de la forma

$$y_Q = u_{Q'} \mathcal{M}_{Q'Q}. \quad (6.143)$$

La corrección a u_Q se calcula entonces de la ecuación (6.138), y al primer orden subdominante es

$$-u_Q^2 Y_Q^o(iu_Q)(1 + y_Q(iu_Q)) = u_Q^2. \quad (6.144)$$

Como el lado izquierdo es una función par de u_Q podemos quedarnos solamente con el orden dominante,

$$\lim_{u \rightarrow 0} (u^2 Y_Q^o(u))(1 + y_Q(iu_Q^0)) = (u_Q^{(0)})^2 + 2u_Q^{(0)} u_Q^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (6.145)$$

Teniendo en cuenta esta solución a orden dominante llegamos entonces a que

$$u_Q^{(1)} = \frac{1}{2} y_Q(iu_Q^{(0)}) u_Q^{(0)} = \frac{1}{2} u_{Q'}^{(0)} \mathcal{M}_{Q'Q} u_Q^{(0)}. \quad (6.146)$$

El cálculo de $\mathcal{M}_{Q'Q}$ es una generalización del realizado para las correcciones de segundo orden en [182] para las teorías γ -deformadas. Allí se mostró que $\mathcal{M}_{Q'Q}$ puede

ser obtenida de dos maneras alternativas: o bien puede calcularse a partir de las ecuaciones de TBA, o bien puede extraerse directamente de las matrices de scattering y de twist. En esta tesis utilizamos el primero de estos métodos, y referimos al lector a [19] para los detalles acerca del segundo.

Procedemos entonces resolviendo primero la ecuación recursiva para $y_{n|w}$,

$$y_{n|w} = \left(\frac{[n-1]_t [n+1]_t}{[n]_t^2} y_{n-1|w} + \frac{[n+1]_t [n+3]_t}{[n+2]_t^2} y_{n+1|w} \right) \star s + \delta_{n1} c_w \star s, \quad (6.147)$$

donde

$$c_w = \frac{y_+ - y_-}{1 - Y_+^o} (\Theta(u+2) - \Theta(u-2)) = \frac{[2]_t}{[2]_t - [2]_f} 2\pi u_Q K_{Qy} (\Theta(u+2) - \Theta(u-2)), \quad (6.148)$$

siendo Θ la función escalón. Usando la transformada de Fourier $\tilde{s} = (2 \cosh \frac{\omega}{g})^{-1}$, que podemos escribir como $\tilde{s} = (k + k^{-1})^{-1}$ con $k = e^{-\frac{|\omega|}{g}}$, la solución que decrece para n grande, y respeta tanto el comportamiento asintótico de $Y_{n|w}$ como el término inhomogéneo con $\delta_{n,1}$ es

$$\tilde{y}_{n|w} = \frac{\tilde{c}_w k}{[2]_t} \left(\frac{[n+1]_t}{[n]_t} k^{n-1} - \frac{[n+1]_t}{[n+2]_t} k^{n+1} \right). \quad (6.149)$$

Resolvemos luego la recursión para $y_{n|v}$,

$$y_{n|v} = \frac{[n-1]_f [n+1]_f}{[n]_f^2} y_{n-1|v} \star s + \frac{[n+1]_f [n+3]_f}{[n+2]_f^2} y_{n+1|v} \star s - 2\pi u_{n+1} \star s + \delta_{n1} c_v \star s, \quad (6.150)$$

$$c_v = \frac{y_- - y_+}{1 - \frac{1}{Y_+^o}} (\Theta(u+2) - \Theta(u-2)) = \frac{[2]_f}{[2]_t - [2]_f} 2\pi u_Q K_{Qy} (\Theta(u+2) - \Theta(u-2)), \quad (6.151)$$

que en el espacio de Fourier toma la forma

$$(k + k^{-1}) \tilde{y}_{n|v} = \frac{[n-1]_f [n+1]_f}{[n]_f^2} \tilde{y}_{n-1|v} + \frac{[n+1]_f [n+3]_f}{[n+2]_f^2} \tilde{y}_{n+1|v} - \tilde{\mathcal{S}}_{n+1} + \delta_{n1} \tilde{c}_v, \quad (6.152)$$

donde \mathcal{S} corresponde a los términos fuente inhomogéneos. La solución de la ecuación inhomogénea se obtiene eligiendo una combinación adecuada de las soluciones de la ecuación homogénea,

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{N|v} = & \left(\frac{[n+1]_f}{[n]_f} k^{n-1} - \frac{[n+1]_f}{[n+2]_f} k^{n+1} \right) \left(A_- - c \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{\mathcal{S}}_{j+1} k^{-j-2} (k^{-2} [j]_f - [j+2]_f)}{[j+1]_f} \right) \\ & + \left(\frac{[n+1]_f}{[n]_f} k^{1-n} - \frac{[n+1]_f}{[n+2]_f} k^{-n-1} \right) \left(A_+ - c \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{\mathcal{S}}_{j+1} k^{j-2} (k^{-2} [j+2]_f - [j]_f)}{[j+1]_f} \right) \end{aligned} \quad (6.153)$$

donde

$$c^{-1} = (k^{-2} - 1)(qk^{-2} - q^{-1})(q^{-1}k^{-2} - q) \quad \text{con} \quad q = e^f,$$

y A_{\pm} debe determinarse a partir de las condiciones iniciales. Para tener un comportamiento asintótico decreciente cuando $n \rightarrow \infty$ debemos tomar

$$A_+ = c \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\tilde{\mathcal{S}}_{j+1} k^{j-2} (k^{-2}[j+2]_f - [j]_f)}{[j+1]_f}, \quad (6.154)$$

y a partir del valor inicial $n = 1$ encontramos

$$A_- = k \left(\frac{\tilde{c}_v}{[2]_f} - A_+ k \right). \quad (6.155)$$

Una vez determinadas $y_{m|v}$ y $y_{n|w}$, podemos introducir estas expresiones en las ecuaciones para los modos fermiónicos, (6.140) y (6.141). Con estos resultados para los modos magnónicos la contribución completa de u_Q al primer orden subdominante de la corrección por tamaño finito resulta ser

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} y_Q &= u_{Q'} K_{sl(2)}^{Q'Q} + u_{Q'} 2s \star K_{vx}^{Q'-1,Q} + 2[A_{1|v} y_{1|v} \star s \hat{\star} K_{yQ} + A_{Q-1|v} y_{Q-1|v} \star s] \\ &\quad - \frac{u_Q K_{Qy}}{2(Y_+^o - 1)} \hat{\star} (K_Q - s \star K_{yQ}) + \frac{u_Q K_{Qy}}{1 - \frac{1}{Y_+^o}} \hat{\star} s \star K_{vx}^{1Q} + \frac{y_-}{(Y_+^o - 1)} \hat{\star} s \star K_{yQ}. \end{aligned} \quad (6.156)$$

En esta expresión podemos introducir la solución para y_- en términos de $y_{1|v}$ y $y_{1|w}$, que a su vez puede ser reescrita en términos de u_Q . Luego de realizar simplificaciones similares a las realizadas en [182] obtenemos una solución que puede expresarse en forma relativamente sencilla,

$$\begin{aligned} y_{Q_2} &= u_{Q_1} \left\{ 2\pi K_{sl(2)}^{Q_1 Q_2} + 4\pi \sum_{j=0}^{Q_1-2} K_{Q_2-Q_1+2j+1} \star s + \frac{2[2]_t}{[2]_f - [2]_t} \frac{1}{i} \partial_{u_1} \log a_1^{Q_1 Q_2}(u_1, u_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{[2]_f - [2]_t} \frac{1}{i} \partial_{u_1} \left[\frac{[Q_2 - 1]_f}{[Q_2]_f} \log a_2^{Q_1 Q_2}(u_1, u_2) + \frac{[Q_1 - 1]_f}{[Q_1]_f} \log a_2^{Q_2 Q_1}(u_2, u_1) \star \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\pi}{[Q_1]_f [Q_2]_f} \sum_{k=0}^{Q_1-1} [k]_f [k - Q_1]_f \left[[Q_2 + 1]_f K_{Q_2-Q_1+2k-1} - [Q_2 - 1]_f K_{Q_2-Q_1+2k+1} \right] \star s \right\}, \end{aligned} \quad (6.157)$$

donde introdujimos las funciones

$$a_1^{Q_1 Q_2}(u_1, u_2) = A^{-1} \quad , \quad a_2^{Q_1 Q_2}(u_1, u_2) = AB \quad \text{y} \quad a_2^{Q_2 Q_1}(u_2, u_1) \star = AB^{-1}, \quad (6.158)$$

con

$$A = \frac{x_1^- - x_2^+}{x_1^+ - x_2^-} \sqrt{\frac{x_1^+}{x_1^-}} \sqrt{\frac{x_2^-}{x_2^+}} \quad , \quad B = \frac{1 - x_1^+ x_2^+}{1 - x_1^- x_2^-} \sqrt{\frac{x_1^-}{x_1^+}} \sqrt{\frac{x_2^+}{x_2^-}} \quad \text{y} \quad x_i^{\pm} = x^{[\pm Q_i]}. \quad (6.159)$$

Suponiendo que $Q_{21} = Q_2 - Q_1 \geq 0$, podemos además introducir

$$\mathcal{K}_f^{Q_1 Q_2} = \sum_{j=1}^{Q_1-1} [j]_f [Q_{21} + j]_f K_{Q_{21}+2j} \quad \text{y} \quad K_Q = \partial_{u_1} \log \frac{u_1 - u_2 - i\frac{Q}{2g}}{u_1 - u_2 + i\frac{Q}{2g}}, \quad (6.160)$$

o alternativamente

$$\mathcal{K}_f^{Q_1 Q_2} = \sum_{j=0}^{Q_1-2} [Q_{21} + 2j + 1]_f \sum_{k=1}^{Q_1-j-1} K_{Q_{21}+2j+2k}. \quad (6.161)$$

Entonces

$$y_{Q_2} = u_{Q_1} \left\{ 2\pi K_{sl(2)}^{Q_1 Q_2} + \frac{2[2]_t}{[2]_f - [2]_t} \frac{1}{i} \partial_{u_1} \log a_1^{Q_1 Q_2}(u_1, u_2) + \frac{2}{[Q_1]_f [Q_2]_f} \frac{1}{i} \mathcal{K}_f^{Q_1 Q_2} \right. \\ \left. + \frac{2}{[2]_f - [2]_t} \frac{1}{i} \partial_{u_1} \left[\frac{[Q_2 - 1]_f}{[Q_2]_f} \log a_2^{Q_1 Q_2}(u_1, u_2) + \frac{[Q_1 - 1]_f}{[Q_1]_f} \log a_2^{Q_2 Q_1}(u_2, u_1)^* \right] \right\}, \quad (6.162)$$

y vemos que la matriz $\mathcal{M}_{Q_1 Q_2}$ es simétrica. Combinando este resultado con el término de la integral obtenemos la corrección completa al primer orden subdominante,

$$E_0^{(2)}(L) = -\frac{1}{4} \sum_{Q, Q'} \frac{d\tilde{P}_Q}{du}(0) \mathcal{M}_{QQ'} u_Q^{(0)} u_{Q'}^{(0)} - \sum_{Q=1}^{\infty} \int_{-\infty+i\eta}^{\infty+i\eta} \frac{du}{4\pi} \frac{d\tilde{P}_Q}{du} Y_Q^o. \quad (6.163)$$

6.4.2. Expansión a acoplamiento débil

Procedemos ahora a realizar la expansión a acoplamiento débil de las correcciones a orden dominante y subdominante para potenciales químicos reales, para finalmente continuar analíticamente al régimen de ángulos físicos. Primero analizamos a qué órdenes de g^2 contribuyen los distintos términos, y luego realizamos las expansiones correspondientes.

Para el término dominante,

$$E_0^{(0)}(L) = -\frac{1}{2} \sum_{Q=1}^{\infty} \frac{d\tilde{P}_Q}{du}(0) u_Q^{(0)} \quad \text{con} \quad u_Q^{(0)} = ([2]_f - [2]_t) [Q]_f m_Q e^{-(f+\Psi)Q - (L+1)\tilde{\epsilon}_Q(0)}, \quad (6.164)$$

necesitamos la expansión

$$\frac{d\tilde{P}_Q}{du}(0) = 2g - \frac{16g^3}{Q^2} + \dots, \quad e^{-\tilde{\epsilon}_Q(0)} = \frac{4g^2}{Q^2} - \frac{32g^4}{Q^4} + \dots, \quad m_Q = \frac{Q}{2g} + \frac{2\pi^2 g Q}{3} + \dots, \quad (6.165)$$

donde los puntos suspensivos corresponden a términos de orden superior en g^2 . Luego la expansión de $u_Q^{(0)}$ es

$$u_Q^{(0)} = ([2]_f - [2]_t)[Q]_f e^{-(f+\Psi)Q} \left(\frac{2g}{Q} \right)^{2L+1} \left(1 + 4g^2 \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{2(L+2)}{Q^2} \right) + \mathcal{O}(g^4) \right), \quad (6.166)$$

y la corrección a orden dominante de $E_0(L)$ comienza en g^{2L+2} ,

$$E_0^{(0)}(L) = E_0^{(0,L+1)}(L)g^{2(L+1)} + E_0^{(0,L+2)}(L)g^{2(L+2)} + \dots \quad (6.167)$$

Esta es la única corrección hasta la primera subdominante,

$$E_0^{(2)}(L) = -\frac{1}{4} \sum_{Q,Q'} \frac{d\tilde{P}_Q}{du}(0) \mathcal{M}_{QQ'} u_Q^{(0)} u_{Q'}^{(0)} - \sum_{Q=1}^{\infty} \int_{-\infty+i\eta}^{\infty+i\eta} \frac{du}{4\pi} \frac{d\tilde{P}_Q}{du} Y_Q^o. \quad (6.168)$$

La dependencia en g del primer término puede calcularse a partir de $\mathcal{M}_{QQ'} \propto g$, y usando

$$M_Q(u) = \frac{\pi^2(\tilde{P}^2 + Q^2)}{\sinh^2 \pi \tilde{P}} + \dots \quad y \quad e^{-\tilde{\epsilon}_Q(\tilde{P})} = \frac{4g^2}{\tilde{P}^2 + Q^2} + \dots, \quad (6.169)$$

vemos que la integral escala del mismo modo. Esto significa que

$$E_0^{(1)}(L) = E_0^{(1,2L+2)}(L)g^{4(L+1)} + \dots, \quad (6.170)$$

de manera que la expansión de las ecuaciones de TBA para volúmenes grandes se organiza en potencias de $e^{-(L+1)\tilde{\epsilon}_Q}$, *i.e.* aparecen nuevos términos a los órdenes $g^{2n(L+1)}$.

En lo que sigue nos concentramos en la dimensión anómala de cusp, $E_0(0) = \Gamma$ a orden g^4 , dado que ya calculamos en la sección anterior el orden dominante que corresponde a la corrección $\mathcal{O}(g^2)$. Esto implica calcular la corrección de orden g^2 en (6.166), $E_0^{(0,2)} = \Gamma_2^{(0)}$, y evaluar la parte dominante de la expansión en g de (6.168), $E_0^{(1,2)} = \Gamma_2^{(2)}$.

La contribución $\Gamma_2^{(0)}$ puede ser evaluada a

$$\begin{aligned} \Gamma_2^{(0)} &= -([2]_f - [2]_t) \sum_{Q=1}^{\infty} \left(\frac{\pi^2}{6Q} - \frac{2}{Q^3} \right) [Q]_f e^{-(f+\Psi)Q} \\ &= -\frac{(\cosh f - \cosh t)}{\sinh f} \left[\frac{\pi^2}{6} \log \frac{1 - e^{-f}}{1 - e^f} - 2(\text{Li}_3(e^f) - \text{Li}_3(e^{-f})) \right] \\ &= -\frac{(\cos \phi - \cos \theta) \phi}{\sin \phi} \frac{\phi}{6} [\pi^2 - 2\phi^2], \end{aligned} \quad (6.171)$$

donde en la última línea ya sustituimos los ángulos físicos. Observamos que si extraemos un factor $\sinh(f)$ de la suma en la primera línea de (6.171) el resultado es una

suma que se anula para $f = 0$, al igual que su derivada primera, siendo su derivada segunda proporcional al resultado a 1-loop.

Las contribuciones que vienen de $E_0^{(0)}$ son proporcionales a $\frac{(\cos \phi - \cos \theta)}{\sin \phi}$. En particular, $\Gamma_2^{(0)}$ contribuye a $\gamma_2^{(1)}$. Llamamos a esta contribución $\gamma_2^{(1a)}$, y $\gamma_2^{(1b)}$ a la contribución correspondiente que viene de $\Gamma_2^{(2)}$. La dependencia de $\Gamma_2^{(2)}$ en el ángulo θ puede descomponerse como

$$\Gamma_2^{(2)} = \frac{(\cos \phi - \cos \theta)}{\sin \phi} \gamma_2^{(1b)} + \frac{(\cos \phi - \cos \theta)^2}{\sin^2 \phi} \gamma_2^{(2)}. \quad (6.172)$$

El término $\gamma_2^{(1b)}$ viene del término a_1, a_2, a_2^* de \mathcal{M} , y proporciona

$$\begin{aligned} & -2([2]_f - [2]_t) \sum_{Q_1, Q_2=1}^{\infty} \frac{[Q_1]_f [Q_2]_f}{Q_1 Q_2} \left\{ [2]_f \frac{1}{i} \partial_{u_1} \log a_1 + \frac{[Q_1 - 1]_f}{[Q_1]_f} \frac{1}{i} \partial_{u_1} \log a_2^* \right\} \\ & = -2([2]_f - [2]_t) \sum_{Q_1, Q_2=1}^{\infty} \frac{[Q_1]_f [Q_2]_f}{Q_1 Q_2} \left\{ -\frac{[2]_f}{Q_1} + 2 \frac{[Q_1 - 1]_f}{Q_1 [Q_1]_f} \right\}, \end{aligned} \quad (6.173)$$

de donde resulta que

$$\gamma_2^{(1b)} = -2\phi \left(\frac{\phi^2}{2} - \frac{\pi^2}{6} \right). \quad (6.174)$$

Combinando los dos términos $\gamma_2^{(1a)}$ y $\gamma_2^{(1b)}$ llegamos efectivamente a una expresión para $\gamma_2^{(1)}$ que está en perfecto acuerdo con el resultado obtenido de la teoría de gauge.

El término restante $\gamma_2^{(2)}$ puede descomponerse en una parte con la integral $\gamma_2^{(2a)}$, y otra con el término que viene de \mathcal{M} , $\gamma_2^{(2b)}$. El término de la integral es

$$\begin{aligned} & -\frac{g^{-4}}{16} \sum_{Q=1}^{\infty} \int_{-\infty+i\eta}^{\infty+i\eta} \frac{du d\tilde{P}_Q}{4\pi du} [Q]_f^2 ([2]_f - [2]_t)^2 M_Q e^{-2(f+\Psi)Q - 2\tilde{\epsilon}_Q} \\ & = \sum_{Q=1}^{\infty} [Q]_f^2 ([2]_f - [2]_t)^2 e^{-2(f+\Psi)Q} \int_{-\infty+i\eta}^{\infty+i\eta} \frac{dq}{4\pi \sinh^2 \pi q} \frac{\pi^2}{q^2 + Q^2}, \end{aligned} \quad (6.175)$$

y podemos resolver la integral aplicando el teorema de los residuos, siendo

$$-\int_{-\infty+i\eta}^{\infty+i\eta} \frac{dq}{4\pi \sinh^2 \pi q} \frac{\pi^2}{q^2 + Q^2} = \frac{1}{2Q} \Psi_1(Q) - \frac{1}{4Q^3}. \quad (6.176)$$

La suma que aparece es

$$S(\phi) = \sum_{Q=1}^{\infty} \sinh^2(fQ) e^{-2(f+\Psi)Q} \left(\frac{1}{2Q} \Psi_1(Q) - \frac{1}{4Q^3} \right), \quad (6.177)$$

pero es de hecho más fácil realizar la suma de la derivada de $S(\phi)$,

$$S'(\phi) = -\frac{1}{4}\phi(\pi - \phi) \cot(\phi) \quad \text{con} \quad S = 0. \quad (6.178)$$

Llegamos de este modo a

$$\gamma_2^{(2a)} = \int_0^\phi \varphi (\pi - \varphi) \cot(\varphi) d\varphi. \quad (6.179)$$

El término más complicado para evaluar es $\gamma_2^{(2b)}$, y referimos al lector al trabajo original [19] para los detalles de este cálculo. Mencionamos solamente que resulta conveniente calcular las derivadas de $\gamma_2^{(2b)}(\phi)$, encontrándose que

$$\gamma_2^{(2b)''} = \left(\frac{5\phi}{2} - \pi \right) \cot(\phi) + \frac{\phi(\pi - \phi)}{\sin(\phi)^2} \quad \text{con} \quad \gamma_2^{(2b)}(0) = 0 \quad \text{y} \quad \gamma_2^{(2b)'}(0) = -\pi$$

Combinando estos dos términos, $\gamma_2^{(2)} = \gamma_2^{(2a)} + \gamma_2^{(2b)}$ resulta efectivamente estar de acuerdo con el resultado obtenido de la teoría de campos.

Concluimos esta sección con un breve comentario sobre cómo podemos realizar la continuación analítica en los potenciales químicos (6.122) al nivel de las ecuaciones de TBA de borde reformuladas, (6.128).

Al realizar la continuación analítica en los ángulos ninguna singularidad cruza el contorno de integración a medida que lo deformamos alejándolo de los valores $\pm u_Q$. En cambio, lo que se modifica es la solución para (6.130). Dependiendo del ángulo ϕ , algunos de los u_Q están en el semiplano superior y deben tomarse con el signo +, mientras que los otros están en el plano inferior y deben tomarse con el signo -. Más concretamente, en la solución asintótica debemos tomar

$$u_Q^{(0)} = (-1)^Q m_Q [Q]_{i\phi} ([2]_{i\phi} - [2]_{i\theta}) e^{-\frac{R}{2} \tilde{\epsilon}_Q(0)} \quad \text{con} \quad m_Q = \sqrt{\lim_{u \rightarrow 0} u^2 M_Q(u)} > 0. \quad (6.180)$$

Con esta elección de $(-1)^Q$ podemos expandir las ecuaciones de TBA de borde para ángulos reales y comparar los resultados con la continuación analítica del resultado con potenciales químicos reales. Realizamos este cálculo a orden de 2-loops y ambos resultados concuerdan perfectamente. Esto también explica la elección del signo en la raíz cuadrada en el cálculo a 1-loop realizado en [66, 67].

Utilizando este factor $(-1)^Q$ podemos también resolver las ecuaciones de TBA de borde reformuladas (6.128) numéricamente. Comenzamos la solución iterativa para volúmenes grandes con la solución asintótica para las funciones Y dada por (6.89), y usando el valor asintótico de $u_Q^{(0)}$ dado en (6.180) seguimos luego numéricamente cómo las diversas funciones y posiciones de cuantización evolucionan durante la iteración.

Capítulo 7

Discusión y conclusiones

En esta tesis hemos abordado un aspecto particularmente interesante de la conjetura AdS/CFT, a saber su integrabilidad en el límite planar. Nos concentramos para ello en el estudio de la realización prototípica de la conjetura, que relaciona la teoría de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills con grupo de gauge $SU(N)$ en $D = 4$ dimensiones con la teoría de cuerdas supersimétrica tipo IIB formulada en el espacio $AdS_5 \times S^5$. Dejamos por lo tanto a un lado los sistemas integrables que aparecen en otras realizaciones, como por ejemplo la dualidad AdS_4/CFT_3 , [108–112]. En el marco de la dualidad AdS_5/CFT_4 , nos enfocamos en el estudio de sistemas integrables relacionados al cálculo de la dimensión anómala de escala de los operadores de la teoría de campos. En este sentido, obviamos toda discusión de otros problemas en los que aparecen estructuras integrables, como por ejemplo la expansión en producto de operadores “pentágono” para las amplitudes de dispersión [113].

Luego de introducir esquemáticamente la conjetura en el capítulo 2, presentamos algunas de sus características principales así como los elementos fundamentales del diccionario holográfico. Si bien la motivación discutida no puede considerarse una demostración rigurosa, los chequeos mencionados son argumentos convincentes a favor de esta realización de la dualidad gauge/gravedad, y los resultados obtenidos a lo largo de este trabajo deberían constituir verificaciones sobradamente convincentes. En la literatura abundan otros resultados de este tenor, en muchos de los cuales la integrabilidad tiene un papel fundamental. Esto es consecuencia de que, como nos permite obtener resultados exactos en el acoplamiento de 't Hooft λ , hace posible la interpolación entre ambos lados de la dualidad, permitiendo la verificación de la misma para un amplio espectro de observables con valores de expectación que son funciones no triviales del acoplamiento.

En el capítulo 5 discutimos con cierto detalle la integrabilidad, tanto en general como en su manifestación en el límite planar de la teoría de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-

Mills. Para ello analizamos algunas de las consecuencias más importantes que tiene la integrabilidad de una teoría, como por ejemplo la factorización de su matriz S , y consideramos más concretamente el modelo de Heisenberg para la cadena de espines de $SU(2)$, que aparece en el análisis perturbativo del operador de dilataciones de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills. Debemos mencionar aquí que el ansatz de Bethe en coordenadas, que constituye la principal herramienta presentada para resolver este problema, no es la única vía disponible para la solución de sistemas integrables. En efecto, el ansatz de Bethe tiene formulaciones alternativas, como por ejemplo la algebraica y la analítica, cada una de las cuales posee su propia generalización necesaria para el tratamiento de impurezas de sabor. Por otra parte, también hay métodos totalmente distintos para resolver sistemas integrables, como el de separación de variables o la curva espectral cuántica, para los que el lector puede referirse a [192–195] y los trabajos allí citados. Mencionamos solamente que algunos de estos métodos han sido exitosamente aplicados a los problemas discutidos en esta tesis, ver por ejemplo [187, 196].

Concluimos el capítulo 5 presentando resultados para el factor de dressing de la matriz de reflexión asociada a la cadena de espines integrable abierta que resulta de insertar operadores en un lazo de Wilson de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills con cusps. Para ello, estudiamos el problema de dispersión de las excitaciones que se propagan por las cuerdas abiertas cuyos extremos están fijos a ciertas D5-branas, que son los duales holográficos a estos operadores. Consideramos de hecho dos tipos de D5-branas: uno con volumen de mundo $AdS_2 \times S^4$ y campo eléctrico, y otro con volumen de mundo $AdS_4 \times S^2$ y campo magnético. Las D5-branas del primer tipo son la descripción dual de lazos de Wilson 1/2-BPS en la representación totalmente antisimétrica de rango k del grupo $SU(N)$ de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills, mientras que las D5-branas del segundo tipo proveen la descripción dual de una teoría conforme con hipermultipletes fundamentales en un defecto 2+1 dimensional, algunos de cuyos campos fundamentales tienen un valor de expectación de vacío no nulo.

La determinación exacta de las matrices de reflexión permitiría en un caso el cálculo exacto del valor de expectación de deformaciones de los lazos de Wilson 1/2-BPS en representaciones totalmente antisimétricas, obtenidas mediante la inserción en los mismos de operadores en la representación adjunta. En el otro caso, haría posible la descripción exacta del problema espectral en la teoría conforme con un defecto. Como en ambos casos la simetría remanente es un factor $SU(2|2)$ diagonal del grupo $SU(2|2)^2$ usual, la estructura matricial de la matriz de reflexión queda fijada automáticamente, así como las ecuaciones de Bethe anidadas y el ansatz de Bethe termodinámico [66, 67, 161]. El único elemento que falta en esta descripción es

el factor de fase de reflexión σ_B , que es una función del momento de las partículas reflejadas y de la constante de acoplamiento g .

En esta tesis, estudiamos precisamente el factor σ_B para las D5-branas mencionadas más arriba. En primer lugar, se calculó explícitamente σ_B en el límite de acoplamiento fuerte, relacionándolo con el retraso temporal experimentado por los solitones reflejados en la hoja de mundo de la cuerda dual. Procedimos luego a calcular explícitamente la diferencia $E - L$ entre la energía y el momento angular de las cuerdas con extremos fijos a D5-branas que forman ángulos, a primer orden en el límite de L grande pero finito y en el régimen de acoplamiento fuerte. Esto resulta útil porque esta cantidad puede ser relacionada a través de un cálculo tipo Lüscher con cierta continuación analítica de σ_B . Concluimos entonces este capítulo estudiando soluciones de las ecuaciones de crossing y unitaridad que todos los factores de reflexión σ_B deben satisfacer. Si bien existen infinitas soluciones a estas ecuaciones, propusimos ciertas expresiones que son consistentes con todos los resultados explícitos obtenidos anteriormente. Una dirección natural para trabajos futuros, que complementaría en gran medida los resultados aquí expuestos, es el estudio de los factores de dressing σ_B en el límite de acoplamiento débil. Esto podría proveer verificaciones alternativas de las propuestas realizadas, así como aclarar en cierta medida las funciones indeterminadas en (5.211).

En el capítulo 6 expusimos el ansatz de Bethe termodinámico, que nos permite calcular las correcciones por tamaño finito que recibe el ansatz de Bethe asintótico presentado en el capítulo 5. Esta es la herramienta que usamos para implementar concretamente la integrabilidad en el marco de la dualidad AdS_5/CFT_4 , y como primera aplicación de la misma realizamos la verificación mencionada antes para los factores de fase de reflexión propuestos en este trabajo. Un aspecto interesante de estos cálculos tipo Lüscher consiste en que podemos distinguir dos regímenes, correspondiendo uno a D5-branas genéricas y el otro al caso de D5-branas maximales. Para las primeras, la corrección dominante por momento angular finito es de orden $e^{-L/2g}$, mientras que para las segundas el orden de la corrección correspondiente es $e^{-L/g}$. Esto puede entenderse a partir de que los términos propuestos para el factor de dressing de borde σ_B se tornan degenerados en el límite en el que las D5-branas se vuelven maximales, y dejan entonces de poseer el polo que explicaba el orden $e^{-L/2g}$ de las correcciones en el caso genérico.

Dedicamos el resto del capítulo 6 al estudio del sistema Y que implementa el ansatz de Bethe termodinámico de borde para el caso en el que se insertan operadores

de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills en lazos de Wilson con cusps en la representación fundamental. En primer lugar, reformulamos las ecuaciones que describen la dimensión anómala de cusp $\Gamma(\theta, \phi, \lambda)$ de la teoría, para lo cual deformamos los contornos de integración e incluimos explícitamente los residuos de los polos en las singularidades que cruzamos. Esto corresponde a incluir términos fuente en las ecuaciones, lo cual las hace equivalentes a las que obtendríamos para la descripción de estados excitados. Esta reformulación resultó necesaria por al menos dos razones. Por un lado, los ángulos físicos ϕ y θ reales conducen a potenciales químicos imaginarios, que tienen como consecuencia que las funciones Y del sistema no sean siempre positivas. Para los contornos de integración modificados, que corresponden a potenciales químicos reales y por lo tanto ángulos de cusp imaginarios, todas las funciones Y son positivas y podemos estar seguros de que estamos efectivamente describiendo un estado fundamental. Por otro lado, las fugacidades de borde singulares introducen ambigüedades de signos que hacen de la expansión de las ecuaciones algo problemático. La continuación analítica desde ángulos de cusp imaginarios a reales elimina estas ambigüedades introduciendo los signos adecuados para explicar la elección hecha en [66, 67], basada en el análisis cuidadoso de la situación en un dominio seguro. Podemos suponer que un tratamiento similar puede ser realizado para cualquier sistema Y con fugacidades de borde singulares.

Las ecuaciones del ansatz de Bethe termodinámico de borde así reformuladas permiten un tratamiento numérico, además de su expansión sistemática para volúmenes grandes. Para poner a prueba estas ideas, expandimos las ecuaciones a segundo orden para calcular las correcciones por tamaño finito debidas a interacciones entre excitaciones que recorren dos veces toda la longitud de la cadena de espines. Luego de un importante trabajo algebraico, comparamos exitosamente el resultado obtenido con los cálculos explícitos a 2-loops para la dimensión anómala de cusp de la teoría de gauge. Este resultado es entonces un chequeo no trivial de gran precisión para las correcciones por tamaño finito en el límite de acoplamiento débil en los sistemas integrables de la conjetura AdS/CFT que pueden ser descritos mediante el ansatz de Bethe termodinámico. Cálculos similares fueron realizados anteriormente en [182, 184] para teorías γ -deformadas, pero para esos casos no existe un resultado explícito de la teoría de gauge que haga posible una comparación con resultados perturbativos.

Cabe mencionar que en [67] se chequearon correcciones por tamaño finito a segundo y tercer orden, comparándolas con resultados exactos conocidos para la función de Bremsstrahlung [53, 64, 71, 197]. Sin embargo, esto se realizó únicamente en el límite de ángulo de cusp pequeño, en el que sorprendentemente puede además resolverse

el sistema Y exactamente [69]. Se encontró en todos los casos un acuerdo perfecto entre ambas cantidades, lo cual también constituye una verificación muy fuerte de la conjetura y las herramientas utilizadas. Sin embargo, estos resultados dependen exclusivamente del residuo del polo en el factor de reflexión, ya que todas las integrales son dominadas por las contribuciones de polos dobles. Esto significa que si bien involucran todos los órdenes en el acoplamiento de 't Hooft, sólo investigan el límite $u \rightarrow 0$. En cambio, al reproducir el resultado a 2-loops para la dimensión anómala de cusp de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills a partir de la solución del sistema Y obtenido del ansatz de Bethe termodinámico de borde, estamos poniendo a prueba el factor de dressing en el régimen de acoplamiento débil pero para todos los valores de u . Dado que existen en este caso cálculos en la teoría de gauge a 3- y 4-loops para la dimensión anómala de cusp [65, 72], sería particularmente interesante reproducirlos también a partir de las ecuaciones que provienen de la descripción provista por la integrabilidad del problema. Sin embargo, para lograrlo, y posiblemente ir aún más allá, es necesario adoptar una formulación alternativa y más económica, por ejemplo aquella basada en el sistema $P - \mu$, *cf.* [70, 187, 194]. Otra dirección posible para futuras investigaciones consiste en intentar recuperar la ecuación integral de BES de una componente para la dimensión anómala de cusp [146], para lo cual creemos que las ecuaciones reformuladas discutidas en este trabajo serían particularmente útiles.

Finalmente, debemos destacar que la integrabilidad no constituye la única manera en la que se puede poner a prueba la conjetura AdS/CFT de forma no perturbativa. Una técnica muy importante, aunque no discutida en esta tesis, es la localización supersimétrica [83], que se ha utilizado también para estudiar loops de Wilson en $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills [98]. Resultados exactos han sido obtenidos asimismo para otros lazos de Wilson supersimétricos, ver por ejemplo [93, 95–97, 198, 199]. Por otra parte, en ocasiones es posible describir ciertos observables no supersimétricos como perturbaciones de otros que sí lo son. Esto corresponde a realizar una expansión paramétrica de operadores o estados cuasi-BPS alrededor de otros BPS, como se hizo por ejemplo al calcular valores de expectación en el límite BMN para operadores de traza simple [171].

En esta tesis presentamos otro caso en el que es posible obtener resultados no perturbativos fuera del contexto de la integrabilidad. Este se encuentra en los sistemas estudiados en el capítulo 4, que corresponden a lazos de Wilson rectos en AdS_5 y con trayectorias genéricas en S^5 , tomados en representaciones totalmente simétricas del grupo de gauge. En este caso, las simplificaciones que permiten la obtención de resultados exactos no dependen de la supersimetría de la teoría, estando en cambio

basadas sobre consideraciones muy generales de estructuras de color en el grupo $U(N)$ subyacente. Esto sugiere que el fenómeno de exponenciación eikonal observado no se limita solamente a las representaciones totalmente simétricas, sino que es de hecho más general. En particular, representaciones de $U(N)$ caracterizadas por diagramas de Young con k columnas y f filas nos llevarán a las mismas conclusiones, siempre que consideremos el régimen $k \gg N$ con $f \ll N$. Los operadores de Casimir para estas representaciones vienen dados por [200]

$$C_p(\underbrace{k, \dots, k}_{f \text{ veces}}, 0, \dots, 0) = fk(k + N - f)^{p-1} \simeq fk^p, \quad (7.1)$$

y crecen con k del mismo modo que los operadores correspondientes para la representación totalmente simétrica \mathcal{S}_k . Por lo tanto, la dimensión anómala de cusp será dada en este caso por

$$\Gamma_{\text{cusp}}(\underbrace{k, \dots, k}_{f \text{ veces}}, 0, \dots, 0) = f \frac{\lambda k^2}{8\pi^2 N} (\cos \phi - \cos \theta) \frac{\phi}{\sin \phi}, \quad (7.2)$$

lo cual constituye una predicción no trivial proveniente de la teoría de gauge para un cálculo relacionado con la evaluación on-shell de la acción de Dirac-Born-Infeld no abeliana del lado de la teoría de cuerdas. Más aún, no existe ningún requerimiento formal que haga indispensable en el análisis al grupo de gauge $U(N)$, de modo que esta condición también puede relajarse. Entonces, podríamos considerar representaciones totalmente simétricas de rango k de los grupos $O(2N)$, $O(2N + 1)$ y $Sp(2N)^1$, cuyos casimires cuadráticos son $C_2 = 2k(k + 2\alpha)$ con $\alpha = N - 1, N - 1/2$ y N respectivamente. Esto nos llevará a un resultado formalmente similar a (7.2) con $f = 2$, y también representa una predicción de la teoría de gauge, en este caso para un cálculo relacionado con D-branas en $AdS_5 \times \mathbb{RP}^5$, que es la geometría de fondo dual a $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills con grupo de gauge orthogonal o simpléctico [202].

Existen por lo tanto diversas extensiones interesantes de los resultados presentados en el capítulo 4. Además de la verificación de las predicciones mencionadas en el párrafo anterior, una dirección obvia en la que se puede generalizar este resultado consiste en considerar un ángulo de cusp geométrico ϕ no nulo. Para ello, sería necesario encontrar la D3-brana dual, y considerando la figura 4.1 podemos esperar que esto corresponda a tener uno de los extremos de la brana en el borde de AdS en $\psi = \pi - \phi$ en lugar de $\psi = \pi$. También sería interesante considerar lazos de Wilson

¹Las dimensiones anómalas de cusp y los Wilson loops circulares para la teoría de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills con estos grupos de gauge fueron estudiados recientemente en [201].

en representaciones totalmente antisimétricas de rango k , en cuyo caso las D-branas duales serían de la primera de las familias consideradas en la sección 5.4.1. En este caso, sin embargo, no será posible tomar el mismo límite paramétrico dado que el rango de una representación totalmente antisimétrica de $SU(N)$ está acotado por N .

Apéndice A

Elementos de teoría de cuerdas

En este apéndice repasamos algunos elementos de la teoría de cuerdas que son relevantes para los desarrollos que se llevan a cabo en el texto principal. Por supuesto, la teoría de cuerdas es demasiado amplia y compleja para dar aquí una descripción siquiera mínimamente completa. Por ello, nos limitamos esencialmente a una revisión de la cuerda bosónica clásica y las D-branas, que será suficiente para dar una idea general acerca de los conceptos principales de la teoría, así como para precisar nuestras convenciones. Seguimos principalmente el breve resumen del tema realizado en [25], y referimos al lector interesado en ahondar en estas cuestiones a los libros de texto clásicos: Zwiebach provee una introducción pedagógica en [12], Polchinski ofrece un tratamiento más profundo en [13, 14], mientras que los dos volúmenes de Green, Schwarz y Witten [15, 16] constituyen la referencia definitiva sobre la teoría de cuerdas supersimétrica.

A.1. Acción para la cuerda relativista

La teoría de cuerdas pretende generalizar la teoría cuántica de campos tradicional, basada en interacciones locales entre las excitaciones de los campos que interpretamos como partículas. Para ello, la idea fundamental consiste en proponer que los objetos básicos de la teoría no son partículas puntuales sino cuerdas con cierta extensión espacial, que por lo tanto interactúan de forma no local. A priori, hay diversas razones para suponer que esto puede ser beneficioso, entre ellas el hecho de que tener interacciones no localizadas debería mejorar la renormalizabilidad de la teoría, posiblemente haciendo viable incluso la incorporación a la misma de la gravedad.

Para formular la teoría de cuerdas a partir de un principio variacional, podemos seguir esquemáticamente los pasos realizados para hacer lo propio con una partícula puntual. En aquel caso, el punto de partida es identificar a la acción como la longitud

de la línea de mundo de la partícula, que es una curva 0+1 dimensional embebida en el espacio $D = d + 1$ dimensional. Para las cuerdas comenzamos entonces por proponer una expresión análoga para la acción, identificándola con el área de la hoja de mundo de la cuerda. Esta es una superficie 1+1 dimensional que vamos a parametrizar con las coordenadas τ y σ , de modo que la superficie se encuentra en los puntos $x(\tau, \sigma)$. La acción resultante se conoce como acción de Nambu-Goto, y toma la forma

$$S_{\text{NG}} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu)}. \quad (\text{A.1})$$

Aquí, los índices $\mu, \nu = 0, 1, \dots, D - 1$ recorren las direcciones espacio-temporales, mientras que $a, b = 1, 2$ recorren las coordenadas en la hoja de mundo, $\sigma^a = (\tau, \sigma)$. La métrica del espacio de fondo es $g_{\mu\nu}$, y podemos definir la métrica inducida por ella en la hoja de mundo de la cuerda como

$$G_{ab} = g_{\mu\nu} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu. \quad (\text{A.2})$$

Finalmente, $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ es la tensión de la cuerda, y observamos que la acción (A.1) es invariante frente a reparametrizaciones de la hoja de mundo.

En QFT para ciertas aplicaciones es conveniente disponer de una acción cuadrática en los campos de la teoría, lo cual puede lograrse como en el caso de las partículas introduciendo campos auxiliares. Para las cuerdas, la acción resultante es la acción de Polyakov

$$S_{\text{P}} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \sqrt{-\det(\gamma_{cd})} \gamma^{ab} G_{ab}, \quad (\text{A.3})$$

donde γ_{ab} es la métrica intrínseca de la hoja de mundo, que ahora consideramos una variable dinámica. En vista de la definición (A.2), esta es efectivamente una acción cuadrática en los campos $x(\tau, \sigma)$, a diferencia de la acción de Nambu-Goto que es no lineal. Variando la acción respecto a γ^{ab} tenemos

$$\delta S_{\text{P}} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \sqrt{-\det(\gamma_{ef})} \left[G_{ab} - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} G_{cd} \right] \delta \gamma^{ab}, \quad (\text{A.4})$$

donde usamos $\delta \det(\gamma_{cd}) = -\det(\gamma_{ef}) \gamma_{cd} \delta \gamma^{cd}$. Tenemos entonces que las ecuaciones de movimiento para γ_{ab} implican

$$\gamma_{ab} = G_{ab}, \quad (\text{A.5})$$

y sustituyendo esto en la acción de Polyakov (A.3) vemos que se reduce on-shell a la acción de Nambu-Goto (A.1). Esto significa que las teorías obtenidas a partir de una y otra son clásicamente la misma, aunque a nivel cuántico esto no necesariamente es cierto.

Dado que la acción de Polyakov es cuadrática en los campos $x(\tau, \sigma)$, las ecuaciones de movimiento para éstos son sencillamente

$$\partial^a \partial_a x^\mu = 0, \quad (\text{A.6})$$

pero debemos considerar además las condiciones de contorno que deben satisfacer para que se anulen los términos de borde que surgen al integrar por partes para llegar a esta expresión. Estos tienen la forma

$$\int d\tau \sqrt{-\det(\gamma_{ab})} \partial_\sigma x_\mu \delta x^\mu \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=l}, \quad (\text{A.7})$$

donde consideramos $\sigma \in [0, l)$ y debemos entonces distinguir dos casos. Si imponemos condiciones de borde periódicas, $x^\mu(\tau, \sigma + l) = x^\mu(\tau, \sigma)$, los dos términos de borde se cancelan entre sí y tenemos cuerdas cerradas. En cambio, si queremos tener cuerdas abiertas cada término de borde debe anularse por separado, de modo que debemos imponer

$$\delta x^\mu(\tau, \sigma) = 0 \quad \text{ó} \quad \partial_\sigma x^\mu(\tau, \sigma) = 0 \quad \text{para} \quad \sigma = 0, l. \quad (\text{A.8})$$

Esto significa que para cada una de las direcciones espacio-temporales identificadas por $\mu = 0, 1, \dots, D - 1$, debemos elegir entre condiciones de borde de Dirichlet y condiciones de borde de Neumann, y esto para cada uno de los extremos de la cuerda abierta. Esto puede interpretarse a partir de la existencia de D-branas a las que están fijos los extremos de las cuerdas abiertas. Las D-branas son objetos extendidos en algunas de las direcciones espacio temporales, de modo tal que las cuerdas fijas a ellas tienen condiciones de contorno tipo Neumann en dichas direcciones, y condiciones de contorno tipo Dirichlet en las direcciones restantes.

Además de la invarianza de Poincaré espacio-temporal, la acción de Polyakov tiene invarianza frente a los difeomorfismos y transformaciones de Weyl de la hoja de mundo. Estas simetrías nos permiten elegir una forma particular para la métrica de la hoja de mundo, que en el *gauge conforme* tomamos como $\gamma_{ab} = \eta_{ab}$. Con esta elección las ecuaciones de movimiento corresponden a la ecuación de ondas en espacio plano 2-dimensional,

$$(x^\mu)'' - \dot{x}^\mu = 0, \quad (\text{A.9})$$

donde introducimos la notación $(x^\mu)' = \partial_\sigma x^\mu$ y $\dot{x}^\mu = \partial_\tau x^\mu$. Definiendo $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$ tenemos entonces

$$\partial_+ \partial_- x^\mu = 0 \quad \implies \quad x^\mu(\tau, \sigma) = x_L^\mu(\sigma^+) + x_R^\mu(\sigma^-), \quad (\text{A.10})$$

y llamamos a $x_{L,R}^\mu$ los modos izquierdo y derecho, respectivamente. Podemos hacer un desarrollo de Fourier de estos modos en la forma

$$x_L^\mu(\sigma^+) = \frac{1}{2}x_0^\mu + \frac{\alpha'}{2}p^\mu\sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{n} e^{-in\sigma^+}, \quad (\text{A.11})$$

$$x_R^\mu(\sigma^-) = \frac{1}{2}x_0^\mu + \frac{\alpha'}{2}p^\mu\sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\sigma^-}, \quad (\text{A.12})$$

donde introdujimos constantes de normalización que serán convenientes más adelante, y la condición de que x^μ sea real implica que x_0^μ y p^μ son reales, teniéndose además para los coeficientes del desarrollo

$$\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^\dagger \quad \text{y} \quad \tilde{\alpha}_{-n}^\mu = (\tilde{\alpha}_n^\mu)^\dagger. \quad (\text{A.13})$$

Luego tenemos para la solución completa

$$x^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}), \quad (\text{A.14})$$

y en el caso de las cuerdas cerradas la condición de periodicidad se satisface automáticamente tomando $l = 2\pi$, mientras que para las cuerdas abiertas si tomamos $l = \pi$ tenemos que identificar $\tilde{\alpha}_n^\mu = \alpha_n^\mu$. Podemos además incluir el término lineal en la suma definiendo $\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}p^\mu$ para las cuerdas cerradas, y $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'}p^\mu$ para las cuerdas abiertas.

Nótese sin embargo que como fijamos el gauge conforme, debemos imponer por separado las condiciones de gauge. Para ello, definimos el tensor de energía-impulso de la hoja de mundo como es usual

$$T^{ab} = -\frac{4\pi}{\sqrt{\det(\gamma_{cd})}} \frac{\partial S_P}{\partial \gamma_{ab}} = \frac{1}{\alpha'} \left(\partial^a x^\mu \partial^b x_\mu - \frac{1}{2} \gamma^{ab} \partial^c x^\mu \partial_c x_\mu \right), \quad (\text{A.15})$$

y vemos que las ecuaciones de movimiento para la métrica de la hoja de mundo son de hecho $T_{ab} = 0$, de modo que tenemos que imponer las condiciones

$$\dot{x}^2 + x'^2 = 0 \quad \text{y} \quad \dot{x}^\mu x'_\mu = 0, \quad (\text{A.16})$$

que se conocen como *vínculos de Virasoro*. Observamos que para los extremos de las cuerdas abiertas con condiciones de contorno tipo Neumann en todas las direcciones, tenemos $(x^\mu)' = 0$ de manera que el primero de los vínculos implica que los extremos se mueven a la velocidad de la luz, $\dot{x}^2|_{\sigma=0,\pi} = 0$.

En términos del desarrollo (A.14), los vínculos de Virasoro quedan expresados por

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n}^{\mu} \alpha_n^{\mu} = 0, \quad (\text{A.17})$$

$$\tilde{L}_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{m-n}^{\mu} \tilde{\alpha}_n^{\mu} = 0, \quad (\text{A.18})$$

y el hamiltoniano que podemos calcular de la definición usual

$$H = \int_0^l d\sigma (\dot{x}_{\mu} p_{\tau}^{\mu} - \mathcal{L}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l d\sigma T_{00} \quad \text{con} \quad p_{\tau}^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{\mu}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{x}^{\mu}, \quad (\text{A.19})$$

toma la forma

$$H = L_0 + \tilde{L}_0 \quad \text{ó} \quad H = L_0, \quad (\text{A.20})$$

según se trate de cuerdas cerradas o abiertas, respectivamente.

Podemos cuantizar como es usual, promoviendo los coeficientes α_n^{μ} y $\tilde{\alpha}_n^{\mu}$ a operadores e imponiendo relaciones de conmutación canónicas. Sin entrar en mayores detalles, mencionamos solamente que al hacerlo encontramos que la cuantización sólo es consistente cuando la dimensionalidad del espacio-tiempo es $D = 26$, y que el espectro de la teoría de cuerdas bosónica así formulada contiene taquiones. Para resolver este último problema, debemos incorporar modos fermiónicos para desarrollar la teoría de cuerdas supersimétrica, que esta vez solamente es consistente en $D = 10$ dimensiones. En esta perduran los modos no masivos de la cuerda bosónica cerrada, que son el gravitón $g_{\mu\nu}$, el tensor antisimétrico $B_{\mu\nu}$ y el dilatón ϕ , y que constituyen el vacío sobre el cual se propagan los modos masivos cuya escala está dada por $1/\sqrt{\alpha'}$. En el límite de bajas energías $\alpha' \rightarrow 0$ los modos masivos se desacoplan, mientras que los no masivos condensan en valores de fondo clásicos con correcciones cuánticas que resultan en valores de expectación de vacío no nulos.

Podemos incorporar auto-consistentemente las interacciones con los modos no masivos de la cuerda cerrada agregando a la acción de Polyakov un acoplamiento de los mismos con los campos $x(\tau, \sigma)$. Resulta natural acoplar el tensor antisimétrico $B_{\mu\nu}$ con $\varepsilon^{ab} \partial_a x^{\mu} \partial_b x^{\nu}$, lo cual da lugar al término de Wess-Zumino, mientras que el dilatón se acoplará naturalmente al escalar de Ricci de la hoja de mundo, es decir que el sector bosónico vendrá dado por

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \left\{ \sqrt{-\det(\gamma_{cd})} \gamma^{ab} G_{ab} + \alpha' \varepsilon^{ab} \partial_a x^{\mu} \partial_b x^{\nu} B_{\mu\nu} - \alpha' \sqrt{-\det(\gamma_{ab})} \mathcal{R} \phi \right\}. \quad (\text{A.21})$$

El último término en esta expresión está relacionado con el invariante topológico,

$$\frac{1}{4\pi} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det(\gamma_{ab})} \mathfrak{R} = 2(1 - g), \quad (\text{A.22})$$

donde g es el número de huecos que tiene la hoja de mundo, que interpretamos como el orden perturbativo de las interacciones cuánticas de la cuerda. Entonces, como $e^{-S} \propto (e^\phi)^{2(g-1)}$, cada nuevo orden perturbativo está acompañado de un factor $e^{2\phi}$, de modo que asociamos e^ϕ con la constante de acoplamiento g_s de las cuerdas.

A.2. Acción para D-branas

Como vimos en la sección anterior, cada extremo de una cuerda abierta puede tener condiciones de contorno de dos tipos, Dirichlet o Neumann, en cada una de las direcciones del espacio-tiempo. Para la dirección temporal sólo son razonables las condiciones de contorno tipo Neumann, mientras que para las direcciones espaciales podemos elegir cualquiera de las dos opciones.

Interpretamos una cuerda abierta con condiciones de contorno tipo Neumann en p direcciones espaciales, y condiciones de contorno de Dirichlet en las restantes $d - p$, como fija a una superficie extendida en las primeras p direcciones y localizada en las restantes $d - p$. Decimos que esta superficie es una Dp -brana, y Polchinski *et al.* mostraron en [203] que se trata de hecho de objetos dinámicos de la teoría, es decir que poseen grados de libertad intrínsecos que les permiten fluctuar e interactuar con las cuerdas.

Podemos formular un principio variacional para las Dp -branas por analogía con el caso de la cuerda, escribiendo una acción que involucre su volumen de mundo. Como puede verse que es posible tener campos electromagnéticos sobre las branas, escribimos entonces la acción de Dirac-Born-Infeld

$$S_{\text{DBI}} = T_{Dp} \int d^{p+1}\zeta \sqrt{-\det(G_{IJ} + 2\pi\alpha' F_{IJ})}, \quad (\text{A.23})$$

donde los índices $I, J = 0, 1, \dots, p$ recorren las direcciones ζ en las que se extiende la Dp -brana, y F_{IJ} es el tensor de campo electromagnético que soporta. En esta expresión, supusimos que el único campo de fondo encendido es $g_{\mu\nu}$, y usamos la definición de la métrica G_{IJ} inducida en el volumen de mundo dada por el *pullback* de la métrica del espacio tiempo,

$$G_{IJ} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^I} \frac{\partial x^\nu}{\partial \zeta^J} g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.24})$$

A la acción de Dirac-Born-Infeld debemos agregarle el acoplamiento de la Dp -brana a los campos de R-R, que son n -formas antisimétricas. Esto corresponde a un término de Wess-Zumino que podemos escribir como

$$S_{\text{WZ}} = T_{Dp} \int_{p+1} \left[\exp(2\pi\alpha' F_{IJ}) \wedge \sum_n A_{(n)} \right], \quad (\text{A.25})$$

donde entendemos a la exponenciación formalmente en términos del producto \wedge , y nos quedamos solamente con los términos de la misma que completan el integrando hasta que es una $p + 1$ forma.

Por lo tanto, la acción completa para la Dp -brana es

$$S_{Dp} = S_{\text{DBI}} + S_{\text{WZ}}, \quad (\text{A.26})$$

y la tensión T_{Dp} puede relacionarse con la tensión de las cuerdas analizando los procesos de interacción entre ambas, hallándose

$$T_{Dp} = \frac{1}{(2\pi\alpha')^2 (2\pi)^{p-2} g_s \alpha'^{\frac{p-3}{2}}}. \quad (\text{A.27})$$

Evidentemente, esta es una descripción minimalista de la física mucho más amplia de estos objetos muy interesantes, pero para los efectos de este trabajo bastará con lo explicado aquí. Para mayores detalles, referimos al lector interesado a [204].

Apéndice B

Factores de color de diagramas ladder

En este apéndice recogemos algunas fórmulas para los operadores de Casimir de $U(N)$ que usamos durante el análisis perturbativo del capítulo 4. Para más detalles sobre teoría de grupos en general, y las convenciones utilizadas aquí en particular, se refiere al lector a [200].

Sean T^a con $a = 1, \dots, N^2$ los generadores de $U(N)$, que pueden ser tomados en una representación arbitraria \mathfrak{R} del grupo. Estos satisfacen

$$\mathrm{Tr}(T^a T^b) = T(\mathfrak{R}) \delta^{ab}, \quad (\text{B.1})$$

donde $T(\mathfrak{R})$ es la normalización de la representación. Adoptamos las convenciones por las cuales para la representación fundamental $T(\square) = 1/2$, y definimos el operador cuadrático de Casimir como¹

$$T^a T^a = \frac{C_2(\mathfrak{R})}{2} \mathbb{1}_{\dim(\mathfrak{R})}. \quad (\text{B.2})$$

Usando la base canónica, podemos reemplazar los T^a por generadores R_j^i , identificados por dos índices fundamentales $i, j = 1, \dots, N$, que satisfacen el álgebra

$$[R_j^i, R_l^k] = \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta_l^i R_j^k - \delta_j^k R_l^i). \quad (\text{B.3})$$

Por ejemplo, con nuestra normalización los generadores de la representación fundamental en la base canónica son $(R_j^i)_l^k = \delta_l^i \delta_j^k / \sqrt{2}$. Los operadores invariantes de Casimir se definen en forma genérica como

$$R_{i_1}^{i_2} R_{i_2}^{i_3} \dots R_{i_p}^{i_1} = \frac{C_p(\mathfrak{R})}{2^{p/2}} \mathbb{1}_{\dim(\mathfrak{R})}. \quad (\text{B.4})$$

¹El factor 1/2 se incluye en la definición para tener las mismas expresiones que [200] para los coeficientes de Casimir, manteniendo sin embargo una normalización diferente para los generadores: $T^a = (T^a)_{\text{ref}} / \sqrt{2}$.

En particular, para representaciones totalmente simétricas o antisimétricas de rango k , los coeficientes de Casimir son [200]

$$C_p(\mathcal{S}_k) = k(N + k - 1)^{p-1}, \quad (\text{B.5})$$

$$C_p(\mathcal{A}_k) = k(N - k + 1)^{p-1}. \quad (\text{B.6})$$

En el capítulo 4 utilizamos repetidamente que para representaciones simétricas de rango $k \gg N \gg 1$ los coeficientes (B.5) se tornan

$$C_p(\mathcal{S}_k) = k^p \left(1 + (p-1) \frac{N}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}, \frac{N^2}{k^2}\right) \right). \quad (\text{B.7})$$

Análisis perturbativo de diagramas tipo ladder

Los diagramas tipo ladder vienen acompañados de factores de color que son trazas sobre productos de generadores. Aplicando sucesivamente las reglas de conmutación (B.3), estos factores de color pueden expresarse en términos de los coeficientes de Casimir.

El factor de color de un diagrama ladder con un único escalón es dado simplemente por el Casimir cuadrático,

$$\text{Tr}(T^a T^a) = \text{Tr}(R_j^i R_i^j) = \frac{1}{2} \dim(\mathfrak{A}) C_2(\mathfrak{A}). \quad (\text{B.8})$$

Con dos escalones, dos factores de color distintos son posibles,

$$\text{Tr}(T^a T^a T^b T^b) = \text{Tr}(R_j^i R_i^j R_l^k R_k^l) = \frac{1}{4} \dim(\mathfrak{A}) C_2(\mathfrak{A})^2, \quad (\text{B.9})$$

$$\text{Tr}(T^a T^b T^a T^b) = \text{Tr}(R_j^i R_l^k R_i^j R_k^l) = \frac{1}{4} \dim(\mathfrak{A}) (C_2(\mathfrak{A})^2 + C_1(\mathfrak{A})^2 - N C_2(\mathfrak{A})), \quad (\text{B.10})$$

el primero correspondiendo a los escalones paralelos y el segundo a los escalones cruzados, como se ve en el texto principal y la figura 4.2.

Para ser particularmente explícitos, consideremos por ejemplo los diagramas con tres escalones, cuyos factores de color toman la forma $\text{Tr}(T^a T^b T^c T^{\sigma(a)} T^{\sigma(b)} T^{\sigma(c)})$. Cuando $\sigma(a) = c$ ó $\sigma(c) = a$, obtenemos un factor $C_2(\mathfrak{A})$ junto con alguno de los factores de color de los diagramas de dos escalones. Los factores de color genuinamente

nuevos son aquellos que no tienen generadores adyacentes con índices repetidos²

$$\mathrm{Tr}(T^a T^b T^c T^a T^b T^c) = \frac{1}{8} \dim(\mathfrak{R}) (C_2^3 + 3C_1^2 C_2 - 3NC_2^2 - 2NC_1^2 + 2N^2 C_2) , \quad (\text{B.11})$$

$$\mathrm{Tr}(T^a T^b T^c T^a T^c T^b) = \mathrm{Tr}(T^a T^b T^c T^b T^a T^c) , \quad (\text{B.12})$$

$$= \frac{1}{8} \dim(\mathfrak{R}) (C_2^3 + 2C_1^2 C_2 - 2NC_2^2 - NC_1^2 + N^2 C_2) . \quad (\text{B.13})$$

Para diagramas tipo ladder genéricos de ℓ escalones, los factores de color pueden expresarse en términos de coeficientes de Casimir de orden no mayor a $C_\ell(\mathfrak{R})$, y lo que es más importante aún, siempre contendrán un término que se comporta como $C_2(\mathfrak{R})^\ell$. Esto puede probarse fácilmente por inducción. Suponiendo que para toda permutación σ tenemos

$$\mathrm{Tr}(T^{a_1} \dots T^{a_\ell} T^{\sigma(a_1)} \dots T^{\sigma(a_\ell)}) = \dim(\mathfrak{R}) \left(\frac{C_2(\mathfrak{R})}{2} \right)^\ell + \dots , \quad (\text{B.14})$$

siempre podemos usar el álgebra (B.3) y la ciclicidad de la traza, de ser necesario, para mostrar que

$$\mathrm{Tr}(T^{a_1} \dots T^{a_{\ell+1}} T^{\sigma(a_1)} \dots T^{\sigma(a_{\ell+1})}) = \left(\frac{C_2(\mathfrak{R})}{2} \right) \mathrm{Tr}(T^{a_1} \dots T^{a_\ell} T^{\sigma'(a_1)} \dots T^{\sigma'(a_\ell)}) + \dots , \quad (\text{B.15})$$

para lo cual movemos al generador $T^{\sigma(a_i)}$ con $\sigma(a_i) = a_j$ hasta colocarlo junto a T^{a_j} . Los términos omitidos en la fórmula de arriba contienen trazas de a lo sumo $2\ell + 1$ generadores, que surgen del lado derecho de (B.3) y dan lugar a términos de la forma

$$\prod_{s=1}^{\ell+1} C_s(\mathfrak{R})^{q_s} \quad , \quad \forall q_s : \quad 0 \leq q_s \leq \ell + 1 \quad , \quad \sum_{s=1}^{\ell+1} s q_s \leq 2\ell . \quad (\text{B.16})$$

Es fácil ver que la restricción de arriba implica de hecho $q_2 \leq \ell$, de modo que los términos omitidos en (B.15) no pueden comportarse como $C_2(\mathfrak{R})^{\ell+1}$. Junto con el caso base de la inducción y la hipótesis (B.14), queda entonces probada nuestra aseveración inicial.

Un corolario importante de la demostración anterior es que los factores de color para los diagramas tipo ladder con ℓ escalones en la representación totalmente simétrica con $k \gg N \gg 1$ son a primer orden todos iguales, y vienen dados por

$$\mathrm{Tr}(T^{a_1} \dots T^{a_\ell} T^{\sigma(a_1)} \dots T^{\sigma(a_\ell)}) = \dim(\mathcal{S}_k) \left(\frac{k^2}{2} \right)^\ell \left(1 + \ell \frac{N}{k} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{k}, \frac{N^2}{k^2} \right) \right) . \quad (\text{B.17})$$

²Omitimos por brevedad la etiqueta \mathfrak{R} de la representación de los coeficientes de Casimir en estas expresiones.

En esta expresión hemos usado (B.7) en (B.16) para ver que todos los términos distintos a $C_2(\mathcal{S}_k)^\ell$ en (B.15) son subdominantes en este límite, ya que crecen a lo sumo como $k^{2\ell-2}$. Esto es independiente de la permutación σ , confirmando de este modo lo argumentado en (4.45).

Bibliografía

- [1] Gerard 't Hooft. Dimensional reduction in quantum gravity. In *Salamfest 1993:0284-296*, pages 0284–296, 1993.
- [2] Leonard Susskind. The World as a hologram. *J. Math. Phys.*, 36:6377–6396, 1995.
- [3] Jacob D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys. Rev.*, D7:2333–2346, 1973.
- [4] James M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking. The Four laws of black hole mechanics. *Commun. Math. Phys.*, 31:161–170, 1973.
- [5] Jacob D. Bekenstein. Entropy bounds and black hole remnants. *Phys. Rev.*, D49:1912–1921, 1994.
- [6] W. N. Cottingham and D. A. Greenwood. *An introduction to the standard model of particle physics*. Cambridge University Press, 2007.
- [7] Georges Aad et al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett.*, B716:1–29, 2012.
- [8] Serguei Chatrchyan et al. Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. *Phys. Lett.*, B716:30–61, 2012.
- [9] S. L. Glashow. Partial Symmetries of Weak Interactions. *Nucl. Phys.*, 22:579–588, 1961.
- [10] Steven Weinberg. A Model of Leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1264–1266, 1967.
- [11] Abdus Salam. Weak and Electromagnetic Interactions. *Conf. Proc.*, C680519:367–377, 1968.
- [12] B. Zwiebach. *A first course in string theory*. Cambridge University Press, 2006.

- [13] J. Polchinski. *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*. Cambridge University Press, 2007.
- [14] J. Polchinski. *String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*. Cambridge University Press, 2007.
- [15] Michael B. Green, J. H. Schwarz, and Edward Witten. *Superstring Theory. Vol. 2: Loop amplitudes, anomalies and phenomenology*. 1988.
- [16] Michael B. Green, J. H. Schwarz, and Edward Witten. *Superstring Theory. Vol. 1: Introduction*. 1988.
- [17] M. J. Duff, B. E. W. Nilsson, and C. N. Pope. Kaluza-Klein Supergravity. *Phys. Rept.*, 130:1–142, 1986.
- [18] Diego H. Correa and Fidel I. Schaposnik Massolo. D5-brane boundary reflection factors. *JHEP*, 05:095, 2013.
- [19] Zoltán Bajnok, János Balog, Diego H. Correa, Árpád Hegedüs, Fidel I. Schaposnik Massolo, and Gábor Zsolt Tóth. Reformulating the TBA equations for the quark anti-quark potential and their two loop expansion. *JHEP*, 03:056, 2014.
- [20] Diego H. Correa and Fidel I. Schaposnik Massolo. Ladder exponentiation for generic large symmetric representation Wilson loops. *JHEP*, 11:060, 2015.
- [21] Diego H. Correa, Fidel I. Schaposnik Massolo, and Diego Trancanelli. Cusped Wilson lines in symmetric representations. *JHEP*, 08:091, 2015.
- [22] Juan Martin Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Int. J. Theor. Phys.*, 38:1113–1133, 1999. [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)].
- [23] Ofer Aharony, Steven S. Gubser, Juan Martin Maldacena, Hirosi Ooguri, and Yaron Oz. Large N field theories, string theory and gravity. *Phys. Rept.*, 323:183–386, 2000.
- [24] Joseph Polchinski. Introduction to Gauge/Gravity Duality. In *Proceedings, Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics (TASI 2010). String Theory and Its Applications: From meV to the Planck Scale: Boulder, Colorado, USA, June 1-25, 2010*, pages 3–46, 2010.

- [25] Horatiu Nastase. *Introduction to the ADS/CFT Correspondence*. Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
- [26] Eric D'Hoker and Daniel Z. Freedman. Supersymmetric gauge theories and the AdS / CFT correspondence. In *Strings, Branes and Extra Dimensions: TASI 2001: Proceedings*, pages 3–158, 2002.
- [27] Juan Martin Maldacena. TASI 2003 lectures on AdS / CFT. In *Progress in string theory. Proceedings, Summer School, TASI 2003, Boulder, USA, June 2-27, 2003*, pages 155–203, 2003.
- [28] Alexander M. Polyakov. String theory and quark confinement. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 68:1–8, 1998.
- [29] Gary T. Horowitz and Andrew Strominger. Black strings and P-branes. *Nucl. Phys.*, B360:197–209, 1991.
- [30] Edward Witten. Bound states of strings and p-branes. *Nucl. Phys.*, B460:335–350, 1996.
- [31] Joseph Polchinski. Dirichlet Branes and Ramond-Ramond charges. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4724–4727, 1995.
- [32] Igor R. Klebanov. World volume approach to absorption by nondilatonic branes. *Nucl. Phys.*, B496:231–242, 1997.
- [33] Steven S. Gubser, Igor R. Klebanov, and Arkady A. Tseytlin. String theory and classical absorption by three-branes. *Nucl. Phys.*, B499:217–240, 1997.
- [34] Lars Brink, John H. Schwarz, and Joel Scherk. Supersymmetric Yang-Mills Theories. *Nucl. Phys.*, B121:77–92, 1977.
- [35] Michael B. Green, John H. Schwarz, and Lars Brink. N=4 Yang-Mills and N=8 Supergravity as Limits of String Theories. *Nucl. Phys.*, B198:474–492, 1982.
- [36] Martin F. Sohnius and Peter C. West. Conformal Invariance in N=4 Supersymmetric Yang-Mills Theory. *Phys. Lett.*, B100:245, 1981.
- [37] D. J. Gross and Frank Wilczek. Asymptotically Free Gauge Theories. 1. *Phys. Rev.*, D8:3633–3652, 1973.

- [38] Marcus T. Grisaru, M. Rocek, and W. Siegel. Zero value for the three loop beta function in N=4 supersymmetric Yang-Mills theory. 1988.
- [39] Stanley Mandelstam. Light Cone Superspace and the Ultraviolet Finiteness of the N=4 Model. *Nucl. Phys.*, B213:149–168, 1983.
- [40] Lars Brink, Olof Lindgren, and Bengt E. W. Nilsson. The Ultraviolet Finiteness of the N=4 Yang-Mills Theory. *Phys. Lett.*, B123:323–328, 1983.
- [41] Niklas Beisert. Review of AdS/CFT Integrability, Chapter VI.1: Superconformal Symmetry. *Lett. Math. Phys.*, 99:529–545, 2012.
- [42] Gerard 't Hooft. A Planar Diagram Theory for Strong Interactions. *Nucl. Phys.*, B72:461, 1974.
- [43] Sangmin Lee, Shiraz Minwalla, Mukund Rangamani, and Nathan Seiberg. Three point functions of chiral operators in $D = 4$, N=4 SYM at large N. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:697–718, 1998.
- [44] Edward Witten. Anti-de Sitter space and holography. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:253–291, 1998.
- [45] S. S. Gubser, Igor R. Klebanov, and Alexander M. Polyakov. Gauge theory correlators from noncritical string theory. *Phys. Lett.*, B428:105–114, 1998.
- [46] Peter Breitenlohner and Daniel Z. Freedman. Positive Energy in anti-De Sitter Backgrounds and Gauged Extended Supergravity. *Phys. Lett.*, B115:197–201, 1982.
- [47] Peter Breitenlohner and Daniel Z. Freedman. Stability in Gauged Extended Supergravity. *Annals Phys.*, 144:249, 1982.
- [48] H. J. Kim, L. J. Romans, and P. van Nieuwenhuizen. The Mass Spectrum of Chiral N=2 D=10 Supergravity on S^{*5} . *Phys. Rev.*, D32:389, 1985.
- [49] M. Gunaydin and N. Marcus. The Spectrum of the s^{*5} Compactification of the Chiral N=2, D=10 Supergravity and the Unitary Supermultiplets of $U(2, 2/4)$. *Class. Quant. Grav.*, 2:L11, 1985.
- [50] Daniel Z. Freedman, Samir D. Mathur, Alec Matusis, and Leonardo Rastelli. Correlation functions in the CFT(d) / AdS(d+1) correspondence. *Nucl. Phys.*, B546:96–118, 1999.

- [51] M. Henningson and K. Skenderis. The Holographic Weyl anomaly. *JHEP*, 07:023, 1998.
- [52] Alexander M. Polyakov. Gauge Fields as Rings of Glue. *Nucl. Phys.*, B164:171–188, 1980.
- [53] Diego Correa, Johannes Henn, Juan Maldacena, and Amit Sever. An exact formula for the radiation of a moving quark in N=4 super Yang Mills. *JHEP*, 06:048, 2012.
- [54] Juan Martin Maldacena. Wilson loops in large N field theories. *Phys. Rev. Lett.*, 80:4859–4862, 1998.
- [55] Soo-Jong Rey and Jung-Tay Yee. Macroscopic strings as heavy quarks in large N gauge theory and anti-de Sitter supergravity. *Eur. Phys. J.*, C22:379–394, 2001.
- [56] Nadav Drukker, David J. Gross, and Hiroshi Ooguri. Wilson loops and minimal surfaces. *Phys. Rev.*, D60:125006, 1999.
- [57] Jaume Gomis and Filippo Passerini. Wilson Loops as D3-Branes. *JHEP*, 01:097, 2007.
- [58] Curtis G. Callan and Juan Martin Maldacena. Brane death and dynamics from the Born-Infeld action. *Nucl. Phys.*, B513:198–212, 1998.
- [59] G. W. Gibbons. Born-Infeld particles and Dirichlet p-branes. *Nucl. Phys.*, B514:603–639, 1998.
- [60] Jaume Gomis and Filippo Passerini. Holographic Wilson Loops. *JHEP*, 08:074, 2006.
- [61] K. Zarembo. Supersymmetric Wilson loops. *Nucl. Phys.*, B643:157–171, 2002.
- [62] Nadav Drukker. 1/4 BPS circular loops, unstable world-sheet instantons and the matrix model. *JHEP*, 09:004, 2006.
- [63] Nadav Drukker and Valentina Forini. Generalized quark-antiquark potential at weak and strong coupling. *JHEP*, 06:131, 2011.
- [64] Bartomeu Fiol, Blai Garolera, and Aitor Lewkowycz. Exact results for static and radiative fields of a quark in N=4 super Yang-Mills. *JHEP*, 05:093, 2012.

- [65] Diego Correa, Johannes Henn, Juan Maldacena, and Amit Sever. The cusp anomalous dimension at three loops and beyond. *JHEP*, 05:098, 2012.
- [66] Nadav Drukker. Integrable Wilson loops. *JHEP*, 10:135, 2013.
- [67] Diego Correa, Juan Maldacena, and Amit Sever. The quark anti-quark potential and the cusp anomalous dimension from a TBA equation. *JHEP*, 08:134, 2012.
- [68] Johannes M. Henn and Tobias Huber. Systematics of the cusp anomalous dimension. *JHEP*, 11:058, 2012.
- [69] Nikolay Gromov and Amit Sever. Analytic Solution of Bremsstrahlung TBA. *JHEP*, 11:075, 2012.
- [70] Nikolay Gromov, Fedor Levkovich-Maslyuk, and Grigory Sizov. Analytic Solution of Bremsstrahlung TBA II: Turning on the Sphere Angle. *JHEP*, 10:036, 2013.
- [71] Bartomeu Fiol, Blai Garolera, and Genis Torrents. Exact momentum fluctuations of an accelerated quark in N=4 super Yang-Mills. *JHEP*, 06:011, 2013.
- [72] Johannes M. Henn and Tobias Huber. The four-loop cusp anomalous dimension in $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills and analytic integration techniques for Wilson line integrals. *JHEP*, 09:147, 2013.
- [73] Matteo Beccaria and Guido Macorini. On a discrete symmetry of the Bremsstrahlung function in N=4 SYM. *JHEP*, 07:104, 2013.
- [74] Grigory Sizov and Saulius Valatka. Algebraic Curve for a Cusped Wilson Line. *JHEP*, 05:149, 2014.
- [75] Aitor Lewkowycz and Juan Maldacena. Exact results for the entanglement entropy and the energy radiated by a quark. *JHEP*, 05:025, 2014.
- [76] Bartomeu Fiol, Alberto Güijosa, and Juan F. Pedraza. Branes from Light: Embeddings and Energetics for Symmetric k -Quarks in $\mathcal{N} = 4$ SYM. *JHEP*, 01:149, 2015.
- [77] V. Forini, V. Giangreco M. Puletti, and Olof Ohlsson Sax. The generalized cusp in $AdS_4 \times CP^3$ and more one-loop results from semiclassical strings. *J. Phys.*, A46:115402, 2013.

- [78] Luca Griguolo, Daniele Marmiroli, Gabriele Martelloni, and Domenico Seminara. The generalized cusp in ABJ(M) $N = 6$ Super Chern-Simons theories. *JHEP*, 05:113, 2013.
- [79] Marco S. Bianchi, Luca Griguolo, Matias Leoni, Silvia Penati, and Domenico Seminara. BPS Wilson loops and Bremsstrahlung function in ABJ(M): a two loop analysis. *JHEP*, 06:123, 2014.
- [80] Diego H. Correa, Jeremias Aguilera-Damia, and Guillermo A. Silva. Strings in $AdS_4 \times CP^3$ Wilson loops in $\mathcal{N} = 6$ super Chern-Simons-matter and bremsstrahlung functions. *JHEP*, 06:139, 2014.
- [81] Lorenzo Bianchi, Marco S. Bianchi, Alexis Bres, Valentina Forini, and Edoardo Vescovi. Two-loop cusp anomaly in ABJM at strong coupling. *JHEP*, 10:13, 2014.
- [82] Jeremias Aguilera-Damia, Diego H. Correa, and Guillermo A. Silva. Semiclassical partition function for strings dual to Wilson loops with small cusps in ABJM. *JHEP*, 03:002, 2015.
- [83] Vasily Pestun. Localization of gauge theory on a four-sphere and supersymmetric Wilson loops. *Commun. Math. Phys.*, 313:71–129, 2012.
- [84] J. K. Erickson, G. W. Semenoff, R. J. Szabo, and K. Zarembo. Static potential in $N=4$ supersymmetric Yang-Mills theory. *Phys. Rev.*, D61:105006, 2000.
- [85] J. K. Erickson, G. W. Semenoff, and K. Zarembo. Wilson loops in $N=4$ supersymmetric Yang-Mills theory. *Nucl. Phys.*, B582:155–175, 2000.
- [86] Satoshi Yamaguchi. Bubbling geometries for half BPS Wilson lines. *Int. J. Mod. Phys.*, A22:1353–1374, 2007.
- [87] Nadav Drukker and David J. Gross. An Exact prediction of $N=4$ SUSYM theory for string theory. *J. Math. Phys.*, 42:2896–2914, 2001.
- [88] David Eliecer Berenstein, Richard Corrado, Willy Fischler, and Juan Martin Maldacena. The Operator product expansion for Wilson loops and surfaces in the large N limit. *Phys. Rev.*, D59:105023, 1999.
- [89] Andrei Mikhailov. Special contact Wilson loops. 2002.

- [90] Massimo Bianchi, Michael B. Green, and Stefano Kovacs. Instanton corrections to circular Wilson loops in $N=4$ supersymmetric Yang-Mills. *JHEP*, 04:040, 2002.
- [91] Nadav Drukker and Bartomeu Fiol. All-genus calculation of Wilson loops using D-branes. *JHEP*, 02:010, 2005.
- [92] Bartomeu Fiol and Blai Garolera. Energy Loss of an Infinitely Massive Half-Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfeld Particle by Radiation to All Orders in $1/N$. *Phys. Rev. Lett.*, 107:151601, 2011.
- [93] Bartomeu Fiol and Gens Torrents. Exact results for Wilson loops in arbitrary representations. *JHEP*, 01:020, 2014.
- [94] Sean A. Hartnoll and S. Prem Kumar. Higher rank Wilson loops from a matrix model. *JHEP*, 08:026, 2006.
- [95] Nadav Drukker, Simone Giombi, Riccardo Ricci, and Diego Trancanelli. More supersymmetric Wilson loops. *Phys. Rev.*, D76:107703, 2007.
- [96] Nadav Drukker, Simone Giombi, Riccardo Ricci, and Diego Trancanelli. Wilson loops: From four-dimensional SYM to two-dimensional YM. *Phys. Rev.*, D77:047901, 2008.
- [97] Nadav Drukker, Simone Giombi, Riccardo Ricci, and Diego Trancanelli. Supersymmetric Wilson loops on S^3 . *JHEP*, 05:017, 2008.
- [98] Vasily Pestun. Localization of the four-dimensional $N=4$ SYM to a two-sphere and $1/8$ BPS Wilson loops. *JHEP*, 12:067, 2012.
- [99] D. R. Yennie, Steven C. Frautschi, and H. Suura. The infrared divergence phenomena and high-energy processes. *Annals Phys.*, 13:379–452, 1961.
- [100] George F. Sterman. Infrared divergences in perturbative QCD. *AIP Conf. Proc.*, 74:22–40, 1981.
- [101] J. G. M. Gatheral. Exponentiation of Eikonal Cross-sections in Nonabelian Gauge Theories. *Phys. Lett.*, B133:90–94, 1983.
- [102] J. Frenkel and J. C. Taylor. Non-Abelian eikonal exponentiation. *Nucl. Phys.*, B246:231–245, 1984.

- [103] J. A. Minahan and K. Zarembo. The Bethe ansatz for N=4 superYang-Mills. *JHEP*, 03:013, 2003.
- [104] N. Beisert, C. Kristjansen, and M. Staudacher. The Dilatation operator of conformal N=4 superYang-Mills theory. *Nucl. Phys.*, B664:131–184, 2003.
- [105] Niklas Beisert. The Dilatation operator of N=4 super Yang-Mills theory and integrability. *Phys. Rept.*, 405:1–202, 2004.
- [106] Christoph Sieg. Superspace calculation of the three-loop dilatation operator of N=4 SYM theory. *Phys. Rev.*, D84:045014, 2011.
- [107] Marc Henneaux and Luca Mezincescu. A Sigma Model Interpretation of Green-Schwarz Covariant Superstring Action. *Phys. Lett.*, B152:340–342, 1985.
- [108] Gleb Arutyunov and Sergey Frolov. Superstrings on AdS(4) x CP**3 as a Coset Sigma-model. *JHEP*, 09:129, 2008.
- [109] B. Stefanski, jr. Green-Schwarz action for Type IIA strings on AdS(4) x CP**3. *Nucl. Phys.*, B808:80–87, 2009.
- [110] Dongsu Bak and Soo-Jong Rey. Integrable Spin Chain in Superconformal Chern-Simons Theory. *JHEP*, 10:053, 2008.
- [111] J. A. Minahan and K. Zarembo. The Bethe ansatz for superconformal Chern-Simons. *JHEP*, 09:040, 2008.
- [112] Nikolay Gromov and Pedro Vieira. The all loop AdS4/CFT3 Bethe ansatz. *JHEP*, 01:016, 2009.
- [113] Benjamin Basso, Amit Sever, and Pedro Vieira. Spacetime and Flux Tube S-Matrices at Finite Coupling for N=4 Supersymmetric Yang-Mills Theory. *Phys. Rev. Lett.*, 111(9):091602, 2013.
- [114] O. Babelon, D. Bernard, and M. Talon. *Introduction to Classical Integrable Systems*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2003.
- [115] Diego Bombardelli, Alessandra Cagnazzo, Rouven Frassek, Fedor Levkovich-Maslyuk, Florian Loebbert, Stefano Negro, Istvan M. Szcsnyi, Alessandro Sfondrini, Stijn J. van Tongeren, and Alessandro Torrielli. *An Integrability Primer for the Gauge-Gravity Correspondence: an Introduction*. 2016.

- [116] Niklas Beisert et al. Review of AdS/CFT Integrability: An Overview. *Lett. Math. Phys.*, 99:3–32, 2012.
- [117] P. Dorey. Exact S matrices. In *Conformal field theories and integrable models. Proceedings, Eotvos Graduate Course, Budapest, Hungary, August 13-18, 1996*, pages 85–125, 1996.
- [118] Alexander B. Zamolodchikov and Alexei B. Zamolodchikov. Factorized s Matrices in Two-Dimensions as the Exact Solutions of Certain Relativistic Quantum Field Models. *Annals Phys.*, 120:253–291, 1979.
- [119] Stephen J. Parke. Absence of Particle Production and Factorization of the S Matrix in (1+1)-dimensional Models. *Nucl. Phys.*, B174:166–182, 1980.
- [120] Sidney R. Coleman and J. Mandula. All Possible Symmetries of the S Matrix. *Phys. Rev.*, 159:1251–1256, 1967.
- [121] Joseph A. Minahan. Review of AdS/CFT Integrability, Chapter I.1: Spin Chains in N=4 Super Yang-Mills. *Lett. Math. Phys.*, 99:33–58, 2012.
- [122] Niklas Beisert. The complete one loop dilatation operator of N=4 superYang-Mills theory. *Nucl. Phys.*, B676:3–42, 2004.
- [123] Niklas Beisert and Matthias Staudacher. The N=4 SYM integrable super spin chain. *Nucl. Phys.*, B670:439–463, 2003.
- [124] Niklas Beisert. The su(2—3) dynamic spin chain. *Nucl. Phys.*, B682:487–520, 2004.
- [125] L. N. Lipatov. Asymptotic behavior of multicolor QCD at high energies in connection with exactly solvable spin models. *JETP Lett.*, 59:596–599, 1994. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.59,571(1994)].
- [126] L. D. Faddeev and G. P. Korchemsky. High-energy QCD as a completely integrable model. *Phys. Lett.*, B342:311–322, 1995.
- [127] G. P. Korchemsky. Review of AdS/CFT Integrability, Chapter IV.4: Integrability in QCD and N_f4 SYM. *Lett. Math. Phys.*, 99:425–453, 2012.
- [128] W. Heisenberg. Zur Theorie des Ferromagnetismus. *Zeit. Phys.*, 49(9-10):619–636, 1928.

- [129] H. Bethe. On the theory of metals. 1. Eigenvalues and eigenfunctions for the linear atomic chain. *Z. Phys.*, 71:205–226, 1931.
- [130] Nadav Drukker and Shoichi Kawamoto. Small deformations of supersymmetric Wilson loops and open spin-chains. *JHEP*, 07:024, 2006.
- [131] Diego M. Hofman and Juan Martin Maldacena. Reflecting magnons. *JHEP*, 11:063, 2007.
- [132] Oliver DeWolfe and Nelia Mann. Integrable open spin chains in defect conformal field theory. *JHEP*, 04:035, 2004.
- [133] Rafael I. Nepomechie. A Spin chain primer. *Int. J. Mod. Phys.*, B13:2973–2986, 1999.
- [134] L. D. Faddeev. How algebraic Bethe ansatz works for integrable model. In *Relativistic gravitation and gravitational radiation. Proceedings, School of Physics, Les Houches, France, September 26-October 6, 1995*, pages pp. 149–219, 1996.
- [135] Matthias Staudacher. Review of AdS/CFT Integrability, Chapter III.1: Bethe Ansätze and the R-Matrix Formalism. *Lett. Math. Phys.*, 99:191–208, 2012.
- [136] C. Sieg. Review of AdS/CFT Integrability, Chapter I.2: The spectrum from perturbative gauge theory. *Lett. Math. Phys.*, 99:59–84, 2012.
- [137] R. R. Metsaev and Arkady A. Tseytlin. Type IIB superstring action in AdS(5) x S**5 background. *Nucl. Phys.*, B533:109–126, 1998.
- [138] Ido Adam, Amit Dekel, Luca Mazzucato, and Yaron Oz. Integrability of Type II Superstrings on Ramond-Ramond Backgrounds in Various Dimensions. *JHEP*, 06:085, 2007.
- [139] Valentina Giangreco Marotta Puletti. On string integrability: A Journey through the two-dimensional hidden symmetries in the AdS/CFT dualities. *Adv. High Energy Phys.*, 2010:471238, 2010.
- [140] Matthias Staudacher. The Factorized S-matrix of CFT/AdS. *JHEP*, 05:054, 2005.
- [141] Niklas Beisert. The SU(2—2) dynamic S-matrix. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 12:948–979, 2008.

- [142] Niklas Beisert. The Analytic Bethe Ansatz for a Chain with Centrally Extended $su(2-2)$ Symmetry. *J. Stat. Mech.*, 0701:P01017, 2007.
- [143] Romuald A. Janik. The $AdS(5) \times S^5$ superstring worldsheet S-matrix and crossing symmetry. *Phys. Rev.*, D73:086006, 2006.
- [144] G. Arutyunov and S. Frolov. On $AdS(5) \times S^5$ String S-matrix. *Phys. Lett.*, B639:378–382, 2006.
- [145] Niklas Beisert, Rafael Hernandez, and Esperanza Lopez. A Crossing-symmetric phase for $AdS(5) \times S^5$ strings. *JHEP*, 11:070, 2006.
- [146] Niklas Beisert, Burkhard Eden, and Matthias Staudacher. Transcendentality and Crossing. *J. Stat. Mech.*, 0701:P01021, 2007.
- [147] Gleb Arutyunov, Sergey Frolov, and Marija Zamaklar. The Zamolodchikov-Faddeev algebra for $AdS(5) \times S^5$ superstring. *JHEP*, 04:002, 2007.
- [148] L. D. Faddeev. Quantum completely integral models of field theory. *Sov. Sci. Rev.*, C1:107–155, 1980.
- [149] Changrim Ahn and Rafael I. Nepomechie. Review of AdS/CFT Integrability, Chapter III.2: Exact World-Sheet S-Matrix. *Lett. Math. Phys.*, 99:209–229, 2012.
- [150] Alberto Santambrogio and Daniela Zanon. Exact anomalous dimensions of $N=4$ Yang-Mills operators with large R charge. *Phys. Lett.*, B545:425–429, 2002.
- [151] Nick Dorey. Magnon Bound States and the AdS/CFT Correspondence. *J. Phys.*, A39:13119–13128, 2006.
- [152] Pedro Vieira and Dmytro Volin. Review of AdS/CFT Integrability, Chapter III.3: The Dressing factor. *Lett. Math. Phys.*, 99:231–253, 2012.
- [153] N. Beisert and T. Klose. Long-range $gl(n)$ integrable spin chains and plane-wave matrix theory. *J. Stat. Mech.*, 0607:P07006, 2006.
- [154] Nick Dorey, Diego M. Hofman, and Juan Martin Maldacena. On the Singularities of the Magnon S-matrix. *Phys. Rev.*, D76:025011, 2007.
- [155] Diego H. Correa, Vidas Regelskis, and Charles A. S. Young. Integrable achiral D5-brane reflections and asymptotic Bethe equations. *J. Phys.*, A44:325403, 2011.

- [156] Satoshi Yamaguchi. Wilson loops of anti-symmetric representation and D5-branes. *JHEP*, 05:037, 2006.
- [157] Curtis G. Callan, Jr., Alberto Guijosa, and Konstantin G. Savvidy. Baryons and string creation from the five-brane world volume action. *Nucl. Phys.*, B547:127–142, 1999.
- [158] Mariano Chernicoff and Alberto Guijosa. Energy Loss of Gluons, Baryons and k-Quarks in an N=4 SYM Plasma. *JHEP*, 02:084, 2007.
- [159] Oliver DeWolfe, Daniel Z. Freedman, and Hiroshi Ooguri. Holography and defect conformal field theories. *Phys. Rev.*, D66:025009, 2002.
- [160] Daniel Arean, Alfonso V. Ramallo, and Diego Rodriguez-Gomez. Mesons and Higgs branch in defect theories. *Phys. Lett.*, B641:393–400, 2006.
- [161] D. H. Correa and C. A. S. Young. Reflecting magnons from D7 and D5 branes. *J. Phys.*, A41:455401, 2008.
- [162] Jacek Pawelczyk and Soo-Jong Rey. Ramond-ramond flux stabilization of D-branes. *Phys. Lett.*, B493:395–401, 2000.
- [163] J. M. Camino, Angel Paredes, and A. V. Ramallo. Stable wrapped branes. *JHEP*, 05:011, 2001.
- [164] Andreas Karch and Lisa Randall. Open and closed string interpretation of SUSY CFT's on branes with boundaries. *JHEP*, 06:063, 2001.
- [165] K. Pohlmeyer. Integrable Hamiltonian Systems and Interactions Through Quadratic Constraints. *Commun. Math. Phys.*, 46:207–221, 1976.
- [166] M. Grigoriev and Arkady A. Tseytlin. Pohlmeyer reduction of AdS(5) x S**5 superstring sigma model. *Nucl. Phys.*, B800:450–501, 2008.
- [167] Subir Ghoshal and Alexander B. Zamolodchikov. Boundary S matrix and boundary state in two-dimensional integrable quantum field theory. *Int. J. Mod. Phys.*, A9:3841–3886, 1994. [Erratum: *Int. J. Mod. Phys.*A9,4353(1994)].
- [168] H. Saleur, S. Skorik, and N. P. Warner. The Boundary sine-Gordon theory: Classical and semiclassical analysis. *Nucl. Phys.*, B441:421–436, 1995.

- [169] R. Jackiw and G. Woo. Semiclassical Scattering of Quantized Nonlinear Waves. *Phys. Rev.*, D12:1643, 1975.
- [170] Diego M. Hofman and Juan Martin Maldacena. Giant Magnons. *J. Phys.*, A39:13095–13118, 2006.
- [171] David Eliecer Berenstein, Juan Martin Maldacena, and Horatiu Stefan Nastase. Strings in flat space and pp waves from N=4 superYang-Mills. *JHEP*, 04:013, 2002.
- [172] Matthias Blau, Jose M. Figueroa-O’Farrill, Christopher Hull, and George Papadopoulos. Penrose limits and maximal supersymmetry. *Class. Quant. Grav.*, 19:L87–L95, 2002.
- [173] Gleb Arutyunov and Sergey Frolov. The Dressing Factor and Crossing Equations. *J. Phys.*, A42:425401, 2009.
- [174] M. Luscher. Volume Dependence of the Energy Spectrum in Massive Quantum Field Theories. 1. Stable Particle States. *Commun. Math. Phys.*, 104:177, 1986.
- [175] A. B. Zamolodchikov. Thermodynamic Bethe Ansatz in Relativistic Models. Scaling Three State Potts and Lee-yang Models. *Nucl. Phys.*, B342:695–720, 1990.
- [176] Patrick Dorey and Roberto Tateo. Excited states by analytic continuation of TBA equations. *Nucl. Phys.*, B482:639–659, 1996.
- [177] Patrick Dorey and Roberto Tateo. Excited states in some simple perturbed conformal field theories. *Nucl. Phys.*, B515:575–623, 1998.
- [178] A. LeClair, G. Mussardo, H. Saleur, and S. Skorik. Boundary energy and boundary states in integrable quantum field theories. *Nucl. Phys.*, B453:581–618, 1995.
- [179] Z. Bajnok, L. Palla, and G. Takacs. Finite size effects in quantum field theories with boundary from scattering data. *Nucl. Phys.*, B716:519–542, 2005.
- [180] Nikolay Gromov, Vladimir Kazakov, Andrii Kozak, and Pedro Vieira. Exact Spectrum of Anomalous Dimensions of Planar N = 4 Supersymmetric Yang-Mills Theory: TBA and excited states. *Lett. Math. Phys.*, 91:265–287, 2010.

- [181] Nikolay Gromov, Vladimir Kazakov, and Pedro Vieira. Exact Spectrum of Anomalous Dimensions of Planar $\mathcal{N}=4$ Supersymmetric Yang-Mills Theory. *Phys. Rev. Lett.*, 103:131601, 2009.
- [182] Changrim Ahn, Zoltan Bajnok, Diego Bombardelli, and Rafael I. Nepomechie. TBA, NLO Luscher correction, and double wrapping in twisted AdS/CFT. *JHEP*, 12:059, 2011.
- [183] Gleb Arutyunov, Sergey Frolov, and Ryo Suzuki. Exploring the mirror TBA. *JHEP*, 05:031, 2010.
- [184] Marius de Leeuw and Stijn J. van Tongeren. The spectral problem for strings on twisted $AdS_5 \times S^5$. *Nucl. Phys.*, B860:339–376, 2012.
- [185] Andrea Cavaglia, Davide Fioravanti, and Roberto Tateo. Extended Y-system for the AdS_5/CFT_4 correspondence. *Nucl. Phys.*, B843:302–343, 2011.
- [186] Stijn J. van Tongeren. Integrability of the $AdS_5 \times S^5$ superstring and its deformations. *J. Phys.*, A47:433001, 2014.
- [187] Nikolay Gromov and Fedor Levkovich-Maslyuk. Quantum Spectral Curve for a cusped Wilson line in $\mathcal{N} = 4$ SYM. *JHEP*, 04:134, 2016.
- [188] Z. Bajnok, Chaiho Rim, and Al. Zamolodchikov. Sinh-Gordon boundary TBA and boundary Liouville reflection amplitude. *Nucl. Phys.*, B796:622–650, 2008.
- [189] Árpád Hegedus. Extensive numerical study of a D-brane, anti-D-brane system in AdS_5 /CFT_4 . *JHEP*, 04:107, 2015.
- [190] Nikolay Gromov, Vladimir Kazakov, and Pedro Vieira. Exact Spectrum of Planar $\mathcal{N} = 4$ Supersymmetric Yang-Mills Theory: Konishi Dimension at Any Coupling. *Phys. Rev. Lett.*, 104:211601, 2010.
- [191] Z. Bajnok, L. Palla, and G. Takacs. Boundary one-point function, Casimir energy and boundary state formalism in D+1 dimensional QFT. *Nucl. Phys.*, B772:290–322, 2007.
- [192] E. K. Sklyanin. Separation of variables in the classical integrable $SL(3)$ magnetic chain. *Commun. Math. Phys.*, 150:181–192, 1992.
- [193] E. K. Sklyanin. Separation of variables - new trends. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 118:35–60, 1995.

- [194] Nikolay Gromov, Vladimir Kazakov, Sebastien Leurent, and Dmytro Volin. Quantum Spectral Curve for Planar $\mathcal{N} = \text{Super-Yang-Mills}$ Theory. *Phys. Rev. Lett.*, 112(1):011602, 2014.
- [195] Nikolay Gromov, Fedor Levkovich-Maslyuk, and Grigory Sizov. Quantum Spectral Curve and the Numerical Solution of the Spectral Problem in AdS5/CFT4. *JHEP*, 06:036, 2016.
- [196] Nikolay Gromov and Fedor Levkovich-Maslyuk. Quark–anti-quark potential in N=4 SYM. 2016.
- [197] Bartomeu Fiol, Efrat Gerchkovitz, and Zohar Komargodski. Exact Bremsstrahlung Function in $N = 2$ Superconformal Field Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 116(8):081601, 2016.
- [198] Simone Giombi, Vasily Pestun, and Riccardo Ricci. Notes on supersymmetric Wilson loops on a two-sphere. *JHEP*, 07:088, 2010.
- [199] Simone Giombi and Vasily Pestun. Correlators of local operators and 1/8 BPS Wilson loops on S^2 from 2d YM and matrix models. *JHEP*, 10:033, 2010.
- [200] A. O. Barut and R. Raczka. *Theory of Group Representations and Applications*. 1986.
- [201] Bartomeu Fiol, Blai Garolera, and Genis Torrents. Exact probes of orientifolds. *JHEP*, 09:169, 2014.
- [202] Edward Witten. Baryons and branes in anti-de Sitter space. *JHEP*, 07:006, 1998.
- [203] Jin Dai, R. G. Leigh, and Joseph Polchinski. New Connections Between String Theories. *Mod. Phys. Lett.*, A4:2073–2083, 1989.
- [204] Joseph Polchinski. Tasi lectures on D-branes. In *Fields, strings and duality. Proceedings, Summer School, Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, TASI'96, Boulder, USA, June 2-28, 1996*, pages 293–356, 1996.