

# Modelo para el Planeamiento de una Cadena de Suministro bajo Demanda Incierta

Cunico María Laura y Vecchiotti Aldo

INGAR (CONICET-UTN), Avellaneda 3657, Santa Fe (3000), Argentina  
(laura-cunico,aldovec)santafe-conicet.gob.ar

**Resumen.** El problema que se aborda en este artículo tiene como objetivo la asignación óptima de los recursos de producción de una cadena de suministro, para satisfacer, a costo mínimo, las demandas inciertas en un horizonte de tiempo dividido en diversos períodos. Se apunta a brindar un plan de acción que responda eficientemente ante los distintos escenarios que supone el intervalo de incertidumbre, mediante el cual se modelan las especulaciones realizadas sobre las variaciones del mercado consumidor. Para ello, se implementa una metodología de resolución que transforma el modelo FMILP (Fuzzy Mixed Integer Linear Programming) en un MILP del que se desprende una solución óptima única. De este modo, se exhibe un enfoque distinto al existente en la literatura, que permite evitar subjetividades o inconsistencias en la elección de una solución promisoriosa, requerida en procedimientos de análisis de sensibilidad o escenarios.

**Palabras Claves:** Planning, fuzzy sets, programación matemática difusa, demanda incierta.

## 1 Introducción

El deseo de insertarse y fortalecerse como competidores, ante la creciente oferta que revela el mercado actualmente globalizado, fuerza a las industrias a tomar decisiones de carácter tanto táctico como estratégico. La planificación a nivel táctico de operaciones de la cadena de suministro, implica decidir las cantidades globales y los flujos de materiales para la compra, transformación y distribución de productos[1]. Estas decisiones son de vital importancia para garantizar la capacidad de reacción o respuesta ante eventuales fluctuaciones de la demanda.

Por tal motivo es posible hallar, a lo largo de la literatura abierta, una vasta colección de trabajos que apuntan a modelar la incertidumbre inmersa en las demandas de productos finales. Algunos autores como Santoso y otros[2], Higle y otros[3], Higle[4], You y otros[5] han optado por presentar modelos de programación estocásticos o probabilísticos para resolver este tipo de situaciones. Otros autores como Liang[6], Peidro y otros[7, 8], Gen y otros [9], plantean estrategias de modelado para aquellos casos en que los parámetros independientes, que evidencian un comportamiento incierto, sean introducidos mediante lógica difusa. Otro ejemplo es el de Mula y otros [10], quienes focalizan su trabajo en el estudio de los efectos ocasionados por

adfa, p. 1, 2011.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

la incertidumbre, introducida a partir de números borrosos triangulares, mediante un análisis de escenarios que se desprende de la reformulación adoptada. En nuestro caso, proponemos una metodología de resolución diferente a la desarrollada en el último artículo mencionado. Nos centramos en la obtención de un régimen de producción único que, a costo mínimo, permita hacer frente de manera eficaz a las distintas posibilidades que admiten los datos inciertos. Para ello, implementamos el método *max min*, desarrollado por Zimmermann [11, 12], que plantea una transformación del modelo FMILP en un modelo MILP. Esta técnica de resolución exhibe dos características que la destacan sobre el método de análisis de escenarios. En primer lugar, permite eludir las subjetividades impuestas sobre los criterios de definición de los escenarios tales como la elección del tamaño de variación, número y combinación a explorar. Por otro lado, provee una salida única que barre todo el espectro de posibles soluciones dentro del intervalo incierto. En oposición a la utilización de la curva Pareto, que requiere de la evaluación y selección de la solución más promisorias, las decisiones a implementar en nuestro caso se obtienen como respuesta óptima del modelo desarrollado.

El presente artículo se organiza de la siguiente manera: en la sección 2 se introduce y describe brevemente el problema a tratar. A continuación, en la sección 3 se desarrolla el modelo con parámetros conocidos, exhibiendo las explicaciones que motivan la definición de cada restricción, y su respectiva reformulación para introducir la incertidumbre presente en la demanda. En la sección 4, se despliega un caso de estudio y sus resultados, con el objetivo de ilustrar el funcionamiento de los distintos modelos propuestos en el apartado anterior. Finalmente, las conclusiones son presentadas en la sección 5.

## 2 Descripción del problema

El problema que se aborda en este artículo tiene como objetivo determinar la asignación óptima de los recursos de producción de una empresa, para satisfacer las demandas del mercado a un costo mínimo. El horizonte de planificación se divide en varios períodos  $T$  donde las demandas mencionadas no son conocidas con certezas.

La cadena de suministro consiste de varias plantas  $S$  cuya ubicación y disponibilidad horaria de producción son conocidas. Se consideran además, tres grandes grupos de productos intervinientes en la actividad: los productos primarios o materias primas  $I^{RM}$ , los productos intermedios  $I^{IP}$  y los productos finales o terminados  $I^{FP}$ . Se supone que los dos primeros conjuntos de productos mencionados, pueden ser procesados y enviados de un sitio a otro de la cadena de suministro, para ser transformados posteriormente en productos finales y transportados a los clientes.

Por otro lado, los productos con características semejantes, tales como tiempo de procesamiento, costos fijos o variables de producción, costos de almacenamiento y transporte, etc., son agrupados en familias  $F$ .

Otra característica del problema, consiste en el establecimiento de un nivel de inventario mínimo por producto, como protección ante la incertidumbre presente en la demanda. Las desviaciones bajo estos niveles de seguridad, así como la insatisfacción

de la demanda medida a partir de las pérdidas en las ventas, son penalizadas en los costos.

Las decisiones más relevantes a tomar consisten en la determinación del producto, lugar y número de unidades a producir, considerando el compromiso existente entre la disminución de los costos y la satisfacción de la demanda.

### 3 Formulación del problema

#### 3.1 Modelado sin Incertidumbre

Se utiliza como base de este trabajo un modelo mixto entero lineal (MILP) para el planeamiento de una cadena de suministro, formulado originalmente por McDonald y otros[1]. Esta propuesta presenta algunas consideraciones, que serán detalladas a continuación junto con una descripción exhaustiva de las ecuaciones que conforman el modelo planteado.

**Función Objetivo.** La función objetivo, presentada en la ecuación (1), apunta a minimizar las pérdidas, determinadas como la suma de los costos debidos a la cantidad de productos producidos  $i \notin I^{RM}$  en el sitio  $s$  a tiempo  $t$ ,  $P_{ist}$ ; los costos de inventario por período y por unidad de producto  $i \notin I^{RM}$  en el sitio  $s$ ,  $I_{ist}$ ; los costos por penalización en la pérdida de ventas de productos finales  $i \in I^{FP}$ ,  $I_{it}^-$ ; los costos debidos a la violación del stock de seguridad establecido por unidad de  $i \in I$  en el sitio  $s$  a tiempo  $t$ ,  $I_{ist}$ ; los costos correspondientes a los flujos de productos intermedios  $i \in I^P$  desde el sitio  $s$  al sitio  $s'$  en el período  $t$ ,  $\sigma_{iss't}$  y los costos fijos de producción del producto  $i$  en el sitio  $s$  en el período  $t$ . Notar que los sumandos son afectados por los coeficientes de costo variable de producción  $v_{is}$ , de inventario  $h_{is}$ , de penalización por escasez de productos terminados  $\mu_{is}$ , de penalización por violación del stock de seguridad fijado  $\xi_{is}$ , de transporte  $t_{ss'}$  y los costos fijos de producción por familia de producto  $FC_f$ . Considerar también que  $T$  representa el número total de períodos en que se fracciona el horizonte de estudio. Además, en esta ecuación, se utiliza una variable binaria de decisión  $Y_{ist}$  que toma valor no nulo en el caso de que el  $i$  se produzca en el sitio  $s$  a tiempo  $t$ .

$$\begin{aligned}
 COSTO = & \sum_{ist} v_{is} P_{ist} + \sum_{ist} (h_{is} T) I_{ist} + \sum_{ist} \mu_{is} I_{it}^- + \sum_{ist} \xi_{is} I_{ist} + \sum_{iss't} t_{ss'} \sigma_{iss't} \\
 & + \sum_{istf \in F} FC_f Y_{ist}
 \end{aligned} \tag{1}$$

**Restricciones de Tiempo.** El número de unidades de  $i \notin I^{RM}$  producida en el sitio  $s$  a tiempo  $t$ ,  $P_{ist}$ , se determina a partir del producto entre el tiempo requerido para producir el producto  $i \notin I^{RM}$  en el sitio  $s$ ,  $RL_{ist}$  y la tasa de efectividad o rendimien-

to de la familia  $f \in F$  requerida para elaborar  $i$ ,  $R_f$ . Dado que esta relación se satisface sólo cuando se decide producir en el período  $t$  el producto  $i$  en la instalación  $s$ , se introduce un parámetro suficientemente grande, llamado  $BM$ , de modo tal que cuando la variable decisión  $Y_{ist}$  toma valor cero, las ecuaciones (2) y (3) resulten redundantes y en caso contrario, se obtiene la igualdad deseada.

$$P_{ist} \leq R_f R L_{ist} - BM (1 - Y_{ist}), \forall i \notin I^{RM}, \forall i \in F, \forall s, \forall t \quad (2)$$

$$P_{ist} \geq R_f R L_{ist} + BM (1 - Y_{ist}), \forall i \notin I^{RM}, \forall i \in F, \forall s, \forall t \quad (3)$$

En las ecuaciones (4) y (5) se limita superiormente el tiempo de producción por producto  $i$  y por planta  $s$ , respectivamente, mediante la cantidad máxima de horas disponibles en cada período,  $H_t$ .

$$R L_{ist} \leq H_t Y_{ist}, \forall i, \forall s, \forall t \quad (4)$$

$${}_i R L_{ist} \leq H_t, \forall s, \forall t \quad (5)$$

Por otro lado, en la ecuación (6), se establece que el tiempo de producción de cada producto  $i \notin I^{RM}$  no puede ser inferior al tiempo requerido por la familia a la que pertenece,  $MRL_f$ .

$$R L_{ist} \geq MRL_f Y_{ist}, \forall i \in F \cap I^{IP} \cup I^{FP}, \forall s, \forall t \quad (6)$$

Además, las cantidades producidas de cada producto  $i$  estarán acotadas también por la capacidad horaria máxima en cada planta, como se muestra en la ecuación (7).

$$P_{ist} \leq R_f H_t Y_{ist}, \forall f, \forall i \in F, \forall s, \forall t \quad (7)$$

**Restricciones de Consumo.** En la ecuación (8) se establece que la cantidad de material  $i \in I^{RM} \cup I^{IP}$  consumido en el sitio  $s$  en el período  $t$ ,  $C_{ist}$ , se calcula como la suma del producto entre la cantidad de materiales  $i \in I^{RM} \cup I^{IP}$  que deben ser consumidos para producir una unidad de producto  $i' \notin I^{RM}$ ,  $\beta_{ii'}$  y la cantidad de unidades producidas de dicho producto  $i'$ .

$$C_{ist} = \sum_{i'} \beta_{ii'} P_{i'st}, \forall i \notin I^{FP}, \forall s, \forall t \quad (8)$$

En particular, la cantidad de material  $i \in I^{IP}$  consumido en el sitio  $s$  en el período  $t$ ,  $C_{ist}$ , es igual al flujo de productos intermedios desde el sitio  $s$  hasta  $s'$  a tiempo  $t$ ,  $\sigma_{is'st}$ . Esto se presenta en la ecuación (9).

$$C_{ist} = \sum_{s'} \sigma_{is'st}, \forall i \in I^{IP}, \forall s, \forall t \quad (9)$$

**Restricciones de Inventario.** En (10) se define el stock existente del material  $i \in I \notin I^{FP}$  en la planta  $s$  en el primer período,  $I_{ist_1}$ ; mientras que en la ecuación (11)

se calcula el inventario de cada ítem en el período  $t$  como la suma entre la cantidad de unidades existentes en el período inmediatamente anterior y la cantidades unidades producidas en el período actual, menos el flujo de dicho material desde el sitio considerado a los otros sitios y las ventas de productos intermedios y terminados,  $S_{ist}$ .

$$I_{ist} = INV_{i,s}, \forall i \notin I^{FP}, \forall s, t = 1 \quad (10)$$

$$I_{ist} = I_{is,t-1} + P_{ist} - \sum_{s'} \sigma_{iss't} - S_{ist}, \forall i \notin I^{RM}, \forall s, \forall t > 1 \quad (11)$$

En la ecuación (12) se establece que la escasez en la oferta del producto  $i \in I^{FP}$  de un período a otro,  $I_{it}^-$  se calcula como la diferencia entre la demanda,  $d_{it}$  y el número de unidades vendidas de dicho ítem,  $S_{ist}$ .

$$I_{it}^- \geq I_{i,t-1}^- + d_{it} - S_{ist}, \forall i \in I^{FP}, \forall t > 1 \quad (12)$$

Además, en (13), se limita el número de unidades faltantes en cada período por la suma de las demandas totales registradas en todos los períodos anteriores.

$$I_{it}^- \leq \sum_{t'} d_{it'}, \forall i \in I^{FP}, \forall t' \leq t, \forall t \quad (13)$$

Las ecuaciones (14) y (15) determinan para cada producto  $i \in I$  en las distintas plantas  $s$ , el exceso y la desviación del inventario,  $I_{ist}$ , respecto del nivel de stock de seguridad fijado,  $I_{ist}^L$ .

$$I_{ist} \geq I_{ist}^L - I_{ist}, \forall i, \forall s, \forall t \quad (14)$$

$$I_{ist} \leq I_{ist}^L, \forall i, \forall s, \forall t \quad (15)$$

**Restricciones sobre las Ventas.** Si bien, la demanda de un período puede ser satisfecha con las ventas de el o los períodos siguientes, las ventas totales a tiempo  $t$  no pueden exceder la demanda total en el mismo período, como se muestra en la ecuación (16).

$$\sum_{s,t'} S_{ist'} \leq \sum_{t'} d_{it'}, \forall i \notin I^{RM}, \forall s, \forall t' \leq t, \forall t \quad (16)$$

Finalmente, el modelo matemático determinístico está constituido por las ecuaciones (1)-(16).

### 3.2 Modelado bajo Incertidumbre

Proponemos reformular el modelo presentado anteriormente, para el caso en que la demanda no sea conocida con certeza en los distintos períodos. Para modelar esta situación, recurrimos al método *max min*, el cual propone convertir un MILP con vector independiente a valores difusos (FMILP), de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min Z &= cx \\ \text{sa: } Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

donde  $b = b, b + \delta_b$ , en un MILP como sigue:

$$\begin{aligned} \max \lambda \\ \text{sa: } \lambda &\leq \frac{1}{\delta_b} b + \delta_b - Ax \\ \lambda &\leq \frac{1}{\delta_z} Z_{b+\delta_b} - c^T x \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

donde  $\delta_z = Z_{b+\delta_b} - Z_b$  siendo  $Z_b$  y  $Z_{b+\delta_b}$  las soluciones óptimas de los problemas con valores independientes  $b$  y  $b + \delta_b$ , respectivamente.

En nuestro caso, suponemos una desviación en la demanda del 20% respecto de los valores registrados. Por lo tanto, definiendo  $d_{it}^{INF} = d_{it} - 0,2d_{it}$  y  $d_{it}^{SUP} = d_{it} + 0,2d_{it}$  podemos expresar el intervalo de incertidumbre como:

$$d_{it} = d_{it}^{INF}, d_{it}^{SUP} \equiv d_{it}^{INF}, d_{it}^{INF} + \delta_{it}$$

siendo  $\delta_{it} = 0,4d_{it}$ . En principio, se requiere resolver dos problemas MILP, uno con valor de demanda  $d_{it}^{INF}$  y el segundo con valor  $d_{it}^{SUP}$ , para determinar los valores correspondientes a  $Z_b$  y  $Z_{b+d_b}$ , respectivamente. Luego, reescribiremos las ecuaciones (12), (13) y (16) que involucran los datos inciertos y la ecuación (1) correspondiente a la función objetivo del problema original, como se muestra en las ecuaciones (17)-(20).

$$\lambda \leq \frac{1}{\delta_{it}} I_{it}^- - I_{i,t-1}^- - d_{it}^{SUP} + S_{ist}, \quad \forall i \in I^{FP}, \forall t > 1 \quad (17)$$

$$\lambda \leq \frac{1}{\delta_{it}} t' \leq t d_{it'}^{SUP} - I_{it}^-, \quad \forall i \in I^{FP}, \forall t \quad (18)$$

$$\lambda \leq \frac{1}{\delta_{it}} t' \leq t d_{it'}^{SUP} - s_{t' \leq t} S_{ist'}, \quad \forall i \notin I^{RM}, \forall s, \forall t \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \lambda \leq \frac{1}{\delta_z} Z_{b+\delta_b} - \frac{1}{\delta_z} & v_{is} P_{ist} + (h_{is} - T) I_{ist} + \mu_{is} I_{it}^- + \xi_{is} I_{ist} + t_{ss'} \sigma_{iss't} \\ & + FC_f Y_{ist} \\ & \text{istf} \in F \end{aligned} \quad (20)$$

De este modo, resulta que el modelo matemático propuesto es un MILP que apunta a maximizar  $\lambda$  sujeto a las restricciones (2)-(11), (14), (15), (17)-(20).

## 4 Caso de Estudio

### 4.1 Descripción y Datos

El caso de estudio considerado en este trabajo consiste en 34 productos ( $I = I^{IP} \cup I^{FP}$ ) a procesarse en dos plantas ( $S$ ), en doce períodos ( $T$ ), bajo las siguientes restricciones:

- Los productos  $i_1$  a  $i_{23}$  sólo se tratan en  $s_1$  y son agrupados en 11 familias ( $F$ ), listadas a continuación  $f_1 = i_1, i_2, i_3$ ,  $f_2 = i_4, i_5$ ,  $f_3 = i_6, i_7$ ,  $f_4 = i_8, i_9$ ,  $f_5 = i_{10}, i_{11}$ ,  $f_6 = i_{12}, i_{13}$ ,  $f_7 = i_{14}, i_{15}$ ,  $f_8 = i_{16}, i_{17}$ ,  $f_9 = i_{18}, i_{19}$ ,  $f_{10} = i_{20}, i_{21}$ ,  $f_{11} = i_{22}, i_{23}$ . Los restantes ítems son producidos en  $s_2$ .
- El sitio  $s_2$  depende de  $s_1$ . La producción de cada producto  $i_{24}$  a  $i_{34}$  requiere de una unidad del primer producto de cada familia  $F$  en orden de aparición, esto significa que, para producir una unidad de  $i_{24}$  se requiere de una unidad de  $i_1$ , para producir una unidad de  $i_{25}$  se requiere de una unidad de  $i_4$ , etc.
- Sólo se supone stock inicial en el sitio  $s_1$ , motivo por el cual la variable  $INV_{i,s}$  se independiza del conjunto de índices  $S$ , resultando  $INV_i$ . Los mencionados niveles de stock se listan en la **Tabla 1**.
- El stock de seguridad  $I_{ist}^L$ , junto con los costos variables de producción ( $v_{is}$ ), los costos de inventario  $h_{is}$  y de penalidad por pérdida de ventas  $\mu_{is}$ , para el sitio  $s_1$ , se detallan en la **Tabla 1**. Observar que el stock de seguridad es igual para cada período de tiempo considerado y que los costos por desviación bajo el nivel del stock de seguridad  $\xi_{is}$  se calculan como el doble del costo por inventario.
- Para cada producto elaborado en  $s_2$  se fija, el inventario inicio en cero y el stock de seguridad en 113 unidades. Además, se suponen costos variables de producción unitarios, de inventario y de penalidad por pérdidas de ventas equivalentes a \$0,28 y \$5, respectivamente.
- Se asumen costos unitarios por flujos de productos entre los distintos sitios  $t_{ss'}$ .
- Los costos fijos  $FC_f$ , los tiempos mínimos ( $MRL_f$ ) y las tasas de  $(R_f)$  por familia se presentan en la **Tabla 2**.
- Las demandas de cada producto se exhiben en la **Tabla 3**. Notar que los pedidos de  $i_{24}$  a  $i_{34}$  se calculan como el 50% de la demanda correspondiente a la familia de productos utilizada para su elaboración.
- La máxima cantidad de horas disponibles para producción ( $H_t$ ), en cada período de tiempo, se detallan en la última fila de la **Tabla 3**.

**Tabla 1.** Inventario inicial ( $INV_i$ ), stock de seguridad fijado ( $I_{ist}^L$ ) y costos unitarios de producción ( $v_{is}$ ), inventario  $h_{is}$  y de penalidad por pérdida de ventas  $\mu_{is}$ , de cada producto  $i$ .

$I$	$INV$ ( $U$ )	$I^L$ ( $U$ )	$v_{is1}$ (\$/U)	$h_{is1}$ (\$/U)	$\mu_{is1}$ (\$/U)
$i_1$	110	115	0,88	0,25	4,4
$i_2$	16	113	0,88	0,25	4,4
$i_3$	35	101	0,88	0,25	4,4
$i_4$	25	101	0,88	0,25	4,4
$i_5$	55	108	0,88	0,25	4,4
$i_6$	0	103	0,88	0,25	4,4
$i_7$	100	140	0,88	0,25	4,4
$i_8$	30	114	0,78	0,22	3,9
$i_9$	65	104	0,78	0,22	3,9
$i_{10}$	65	116	0,86	0,24	4,3
$i_{11}$	8	101	0,86	0,24	4,3
$i_{12}$	0	104	0,86	0,24	4,3
$i_{13}$	42	103	0,86	0,24	4,3
$i_{14}$	0	101	0,84	0,24	4,2
$i_{15}$	100	119	0,8	0,22	4
$i_{16}$	6	105	0,84	0,24	4,2
$i_{17}$	85	141	0,84	0,24	4,2
$i_{18}$	92	127	0,8	0,22	4
$i_{19}$	18	105	0,8	0,22	4
$i_{20}$	6	149	0,92	0,26	4,6
$i_{21}$	110	124	0,92	0,26	4,6
$i_{22}$	0	105	0,9	0,25	4,5
$i_{23}$	15	104	0,9	0,25	4,5

**Tabla 2.** Costos fijos de producción ( $FC_f$ ), tiempos mínimos de procesamiento ( $MRL_f$ ) y tasas de rendimiento de producción ( $R_f$ ), por familia  $f$ .

$F$	$FC_f$ (\$/U)	$MRL_f$ (hs)	$R_f$ (U)
$f_1$	4,4	22	0,85
$f_2$	6,2	60	0,42
$f_3$	6,2	29	0,88
$f_4$	0,2	3	0,44
$f_5$	6	31	0,82
$f_6$	6	33	0,77
$f_7$	4,2	19	0,97
$f_8$	4,2	22	0,82
$f_9$	4	19	0,97
$f_{10}$	9	50	0,7
$f_{11}$	8,8	50	0,71



**Tabla 3.** Demandas registradas por producto  $i$  procesado en  $s_1$   $d_{it}$  y límite de horas disponibles para producción  $H_t$ , por período de tiempo.

$I$	$d_{it}$											
	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$t_{11}$	$t_{12}$
$i_1$	114	115	117	114	114	114	118	115	110	116	114	114
$i_2$	110	111	111	111	112	115	110	112	112	111	112	112
$i_3$	101	101	101	101	100	101	101	101	102	101	101	101
$i_4$	100	101	100	100	100	100	100	100	101	100	100	100
$i_5$	107	108	109	108	108	108	111	105	107	107	107	107
$i_6$	102	102	102	101	103	102	102	103	102	102	102	102
$i_7$	132	133	135	134	145	140	141	145	142	143	142	141
$i_8$	114	115	116	114	114	114	114	115	110	114	114	114
$i_9$	104	103	104	102	104	103	104	103	104	104	104	104
$i_{10}$	115	116	115	115	114	115	115	115	116	115	115	115
$i_{11}$	101	100	101	101	100	101	100	101	100	101	100	101
$i_{12}$	103	102	104	103	102	104	103	104	102	104	103	105
$i_{13}$	103	103	103	103	103	103	102	103	103	103	103	103
$i_{14}$	100	100	100	100	100	100	101	100	100	100	100	100
$i_{15}$	118	119	118	118	118	117	117	122	119	119	121	120
$i_{16}$	105	104	105	104	103	104	105	105	105	105	104	104
$i_{17}$	148	150	148	148	148	135	136	135	135	135	135	133
$i_{18}$	125	130	125	124	131	125	125	126	131	129	124	129
$i_{19}$	103	105	106	103	105	104	104	104	104	104	105	104
$i_{20}$	158	154	152	150	150	148	148	145	142	144	144	142
$i_{21}$	126	124	123	123	122	124	123	124	123	122	124	123
$i_{22}$	105	104	104	104	104	104	104	104	1047	104	104	104
$i_{23}$	105	106	102	102	101	103	104	104	104	102	104	103
$i_{24}$	107	107,5	108,5	107	107	107	109	107,5	105	108	107	107
$i_{25}$	100	100,5	100	100	100	100	100	100	100,5	100	100	100
$i_{26}$	101	101	101	100,5	101,5	101	101	101,5	101	101	101	101
$i_{27}$	107	107,5	108	107	107	107	107	107,5	105	107	107	107
$i_{28}$	107,5	108	107,5	107,5	107	107,5	107,5	107,5	108	107,5	107,5	107,5
$i_{29}$	101,5	101	102	101,5	101	102	101,5	102	101	102	101,5	102,5
$i_{30}$	100	100	100	100	100	100	100,5	100	100	100	100	100
$i_{31}$	102,5	102	102,5	102	101,5	102	102,5	102,5	102,5	102,5	102	102
$i_{32}$	112,5	115	112,5	112	115,5	112,5	112,5	113	115,5	114,5	112	114,5
$i_{33}$	129	127	126	125	125	124	124	122,5	121	122	122	121
$i_{34}$	102,5	102	102	102	102	102	102	102	102	102	102	102
$H_t$ (hs)	3200	3200	2800	3200	3200	3200	3200	1300	3200	1500	3200	2900

## 4.2 Resultados

Los modelos presentados en la sección previa, fueron programados en GAMS 23.7 (General Algebraic Modeling System)[13] y ejecutado en una computadora personal con procesador Intel Core i7. El tiempo de resolución total, utilizando el resolvidor CPLEX, fue significativamente inferior a un minuto. Las estadísticas de cada modelo se muestran en la **Tabla 4**. De la misma puede observarse que el crecimiento del modelo al introducir incertidumbre mediante la reformulación propuesta, sólo se percibe en el número de ecuaciones y de variables continuas; siendo este crecimiento inferior al 0,5% en ambos casos.

**Tabla 4.** Estadísticas de los modelos determinísticos y difusos presentados

	<i>Determinístico</i>	<i>Difuso</i>
<i>Ecuaciones</i>	8429	8465
<i>Variables Continuas</i>	7897	7899
<i>Variables Discretas</i>	816	816

Los costos mínimos hallados con demanda media y demanda incierta son \$374260 y \$582000, respectivamente. En la **Fig.1** se presentan los niveles de producción (unidades elaboradas por producto) sobre todo el horizonte de estudio, derivados de la solución óptima de cada modelo exhibido. Puede observarse aquí que, el número de unidades producidas considerando incertidumbre es, en un 50% de los casos, más elevado que los determinados con demanda media, mientras que la situación inversa se presenta en aproximadamente un 35% de los casos. Estas diferencias responden al hecho de que la penalización fijada por demanda insatisfecha resulta más significativa, sobre los costos totales, que los costos por exceso de inventario. Además, en un 65% de los productos finales se garantiza la satisfacción, como mínimo, de la demanda media.

De este modo hemos alcanzado un plan de producción que permite hacer frente a los distintos escenarios que plantea la demanda incierta, sin recurrir a la replanificación de las actividades ante eventuales fluctuaciones de la demanda. Dado que la solución hallada se desprende de la implementación de un modelo MILP, la misma es óptima en todo el intervalo de variación definido para el parámetro incierto. Por tanto, hemos evitado posibles inconsistencias en la elección de una solución satisfactoria como resultado de la exploración de distintos escenarios.

En la **Tabla 5**, se detalla el plan de producción óptimo que surge como resultado del modelo difuso.

**Tabla 5.** Unidades de producto  $i$  producidas en cada período  $t$ ,  $P_{ist}$  (\*)

$I$	$T$											
	$1$	$2$	$3$	$4$	$5$	$6$	$7$	$8$	$9$	$10$	$11$	$12$
1	18,7	122,7	194,8	265,2	265,2	265,2	272,4	129,0	241,7	18,7	430,2	136,8
2	18,7	101,2	133,2	133,2	134,4	138,0	132,0	18,7	18,7	18,7	151,7	462,9
3	18,7	51,2	121,2	121,2	120,0	121,2	121,2	18,7	18,7	18,7	429,8	121,2
4	25,2	25,2	25,2	25,2	25,2	25,2	25,2	25,2	25,2	25,2	25,2	25,2
5	25,2	25,2	25,2	25,2	25,2	25,2	25,2	25,2	25,2	25,2	25,2	25,2
6	25,5	243,6	243,6	241,8	245,4	243,6	243,6	121,8	367,2	169,2	196,8	122,4
7	25,5	25,5	96,0	160,8	174,0	168,0	169,2	25,5	318,8	25,5	316,4	169,2
8	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
9	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
10	25,4	138,8	252,3	281,6	265,2	267,0	267,0	129,0	25,4	25,4	25,4	568,5
11	25,4	104,0	121,2	121,2	120,0	121,2	120,0	25,4	25,4	25,4	25,4	25,4
12	25,4	243,6	122,4	121,8	121,2	122,4	121,8	25,4	25,4	25,4	25,4	25,4
13	25,4	39,6	25,4	25,4	25,4	25,4	25,4	25,4	25,4	25,4	25,4	25,4
14	18,4	240,0	240,0	240,0	240,0	240,0	241,8	120,0	360,0	240,0	240,0	120,0
15	18,4	18,4	65,9	141,6	141,6	140,4	140,4	18,4	270,7	142,8	145,2	144,0
16	18,0	235,2	123,0	236,4	121,8	235,9	232,9	27,1	218,8	18,0	18,0	18,0
17	18,0	18,0	18,0	18,0	122,6	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0
18	18,4	110,0	285,0	283,2	295,8	285,0	285,0	135,6	446,9	292,2	283,2	154,8
19	18,4	90,0	127,2	123,6	126,0	124,8	126,0	18,4	231,1	18,4	232,3	124,8
20	35,0	325,2	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0
21	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0
22	35,5	247,2	35,5	35,5	35,5	35,5	35,5	35,5	35,5	35,5	35,5	35,5
23	35,5	97,2	35,5	35,5	35,5	35,5	35,5	35,5	35,5	35,5	35,5	35,5
24		204,8	54,4	128,4	128,4	128,4	130,8	129,0	126,0	18,7		
25		75,2	24,0	25,2	25,2	25,2	25,2	25,2	25,2			
26		121,2	121,2	120,6	121,8	121,2	121,2	121,8	121,2	121,2		
27		32,3								1,3	1,3	
28		129,6	129,0	129,0	128,4	129,0	129,0	129,0	25,4	25,4		
29		121,2	122,4	121,8	121,2	122,4	121,8	25,4	25,4	25,4		
30		120,0	120,0	120,0	120,0	120,0	120,6	120,0	120,0	120,0	120,0	
31		122,4	123,0	122,4	121,8	122,4	123,0	27,1	218,8	18,0		
32		138,0	135,0	134,4	138,6	135,0	135,0	135,6	138,6	137,4	134,4	
33		152,4	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0					
34		122,4	35,5	35,5	35,5	35,5	35,5	35,5	35,5			

\*Los productos  $i_1$  a  $i_{23}$  se producen en  $s_1$ , mientras que los restantes se producen en  $s_2$ .

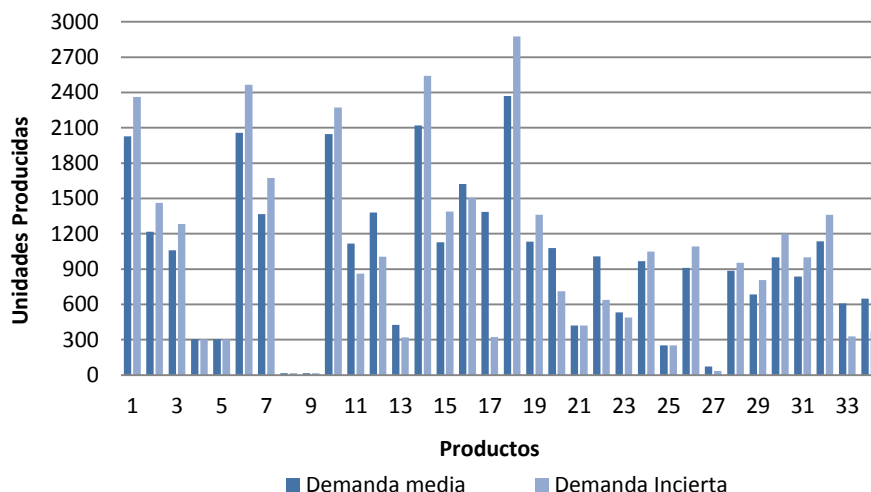


Fig. 1. Producción óptima en ambiente determinístico y bajo incertidumbre

## 5 Conclusiones

En este artículo se presenta una aplicación de la teoría de lógica difusa, para el modelado de una cadena de suministro bajo demanda incierta. Se apunta a proveer un plan de acción que considere la imprecisión propia de las predicciones del mercado consumidor, a fin de evitar demoras o incumplimientos por ajustes en la planificación de las actividades. El principal objetivo perseguido es desarrollar una capacidad de respuesta centrada en la minimización de los costos de la actividad y que involucre penalizaciones por demanda insatisfecha y manejo de inventarios excesivos.

Se implementa una técnica que, mediante la transformación de un modelo FMILP en un MILP, determina un régimen de producción óptimo frente a diversos escenarios procedentes de la posible oscilación de la demanda en el horizonte de planificación. En otras palabras, esta metodología de resolución brinda una solución única al problema planteado, permitiendo eludir las subjetividades impresas tanto en la elaboración y evaluación de escenarios, como en los criterios de decisión requeridos por las soluciones de Pareto para determinar una respuesta promisoriosa.

Otra particularidad de la técnica empleada en este trabajo, es la capacidad que brinda para manipular datos inciertos sin requerir del conocimiento de funciones de distribución que describan su comportamiento.

## 6 Referencias

1. McDonald, C., Karimi, I.: Planning and Scheduling of Parallel Semicontinuous Processes. 1. Production Planning. *Ind. Eng. Chem. Res.* 36, 2691-2700 (1997)
2. Santoso, T., Ahmed, S., Goetschalckx, M., Shapiro, A.: A stochastic programming approach for supply chain network design under uncertainty. *European Journal of Operational Research* . 167, 96-115 (2005)
3. Higle, J., Wallace S.: Sensitivity Analysis and Uncertainty in Linear Programming. *Interfaces*. Volume 33, 53-60 (2003)
4. Higle, J.: Stochastic programming: optimization when uncertainty matters. *Tutorials INFORMS*, 1-24 (2005)
5. You, F., Grossmann, I.: Design of responsive supply chains under demand uncertainty. *Computers and Chemical Engineering*. 32, 3090-3111 (2008)
6. Liang, T.: Application of fuzzy sets to manufacturing/distribution planning decisions in supply chains. *Information Sciences*. 181, 842-854 (2011)
7. Peidro, D., Mula, J., Poler, R.: Fuzzy linear programming for supply chain planning under uncertainty. *International Journal of Information Technology & Decision Making*. Volume 9, 373-392 (2010)
8. Peidro, D., Mula, J., Jimenez, M., Botella, M.: A fuzzy linear programming based approach for tactical supply chain planning in an uncertainty environment. *European Journal of Operational Research*. 205, 65-80 (2010)
9. Gen, M., Tsujimura, Y., Ida, K.: Method for solving multiobjective aggregate production planning problem with fuzzy parameters. *Computers and Industrial Engineering*. Volume 23, 117-120 (1992)
10. Mula, J., Peidro, D., Poler, R.: The effectiveness of a fuzzy mathematical programming approach for supply chain production planning with fuzzy demand. *Int. J. Production Economics*. 128, 136-143 (2010)
11. Zimmermann, H-J.: Description and Optimization of fuzzy systems. *Int. J. General Systems*. Volume 2, 209-215 (1976)
12. Zimmermann, H-J.: Applications of fuzzy set theory to mathematical programming. *Information Sciences*. 36, 29-58 (1985)
13. GAMS Development Corporation. *General Algebraic Modeling System (GAMS) Release 23.7*. Washington, DC, USA (2011)