

『貨幣経済の動学理論』精読Ⅱ

根 岸 章

1 はじめに

本研究ノートは、奈良産業大学経済学部の竹山理氏、同じく福留和彦氏と共同で行っている経済数理研究会の活動報告として、小野善康氏の著書『貨幣経済の動学理論⁽¹⁾』（以下 [小野]）のうち、筆者が担当した「第7章 不況の動学経路」の数学的手法の紹介と共に、その内容の不備を補うことを目的としている。

2 数学的定式化

[小野] に即して、各家計の動学的な最適化行動を数学的に定式化する。以下、各変数は大文字を名目値、小文字を実質値とする。

消費しうる財 c は1種類とし、この価格を p とする。資産 A は貨幣 M と証券 B からなるとし、 B の名目市場利子率を $R(=\dot{B}/B) > 0$ とする。

このとき、以下の式が得られる

$$A = B + M$$

$$\pi = \dot{p}/p \quad (\text{インフレ率})$$

$$r = R - \pi \tag{1}$$

$$\dot{A} = RB - pc \quad (\text{予算制約式})$$

$$a = b + m \tag{2}$$

$$\dot{a} = ra - c - Rm \tag{3}$$

重要なのは(2)、(3)である。この2式を c 、 m を制御変数、 a を状態変数とした動学方程式と見る。

b については、企業の価値は生産を y として、

$$q = \int_0^{\infty} y \exp(-\int_0^t r(s) ds) dt$$

となる。証券市場の均衡を仮定して、 $b = q$ となる。

(1) [小野]：小野善康『貨幣経済の動学理論』東京大学出版会、1992年

各家計の時刻 t での効用 $U(t)$ は消費からくるもの $u(c)$ と、貨幣の所有からくるもの $v(m)$ の和で表せるとする (このような経済を [小野] では「貨幣経済」と呼んでいる)。主観的割引率を $\rho > 0$ (定数) として割引現在効用の総和を U とすると、

$$U(t) = u(c) + v(m)$$

$$U = \int_0^{\infty} U(t) \exp(-\rho t) dt \quad (4)$$

となる。

このとき、各家計の最適化行動を求める問題は次のように定式化できる。

[問題] 条件 (2), (3) の下で, (4) の U を最大化する c, m の条件を求めよ。

ハミルトニアン H を

$$H = u(c) + v(m) + \lambda(ra - c - Rm) \quad (5)$$

と置くと、最適解 (c^*, m^*) とその状態 a^* は次の条件で与えられる (解が内点である場合の必要条件)。

$$\dot{a}^*(t) = (\partial/\partial\lambda)H(a^*, c^*, m^*, \lambda) \quad (6)$$

$$\dot{\lambda}(t) = \rho\lambda(t) - (\partial/\partial a)H(a^*, c^*, m^*, \lambda) \quad (7)$$

$$(\partial/\partial c)H(a^*, c^*, m^*, \lambda) = 0 \quad (8)$$

$$(\partial/\partial m)H(a^*, c^*, m^*, \lambda) = 0 \quad (9)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda a^* \exp(-\rho t) = 0 \text{ (横断性条件)} \quad (10)$$

H の具体形 (5) より, (6)~(9) は次のようになる (* は省略して表す)。

$$\dot{a} = ra - c - Rm \quad (11)$$

$$\dot{\lambda} = (\rho - r)\lambda \quad (12)$$

$$u'(c) - \lambda = 0 \quad (13)$$

$$v'(m) - R\lambda = 0 \quad (14)$$

(12)~(14) (および (1)) より, 次の式がでる。[小野] ではこれをケインズ法則と呼んでいる。

$$\rho + \eta_c \dot{c}/c + \pi = R = v'(m)/u'(c) \quad (15)$$

ここで, $\eta_c = -u''(c)c/u'(c)$ は消費の限界効用の弾力性である。

[小野] では cR 平面上で第 1 の等式を表したものを π 曲線と呼び, (m を固定して) 第 2 の等式を表したものを l 曲線と呼ぶ。この 2 曲線を用いた分析を「 π - l 分析」と呼んでいる。

3 動学経路

外生変数の変化に応じて、ケインズ法則 (15) に沿った各家計の最適化行動の動学経路について考察する。

[小野] に従って、以下の仮定をおく。

仮定 1. $u' > 0, u'' < 0, v' > 0, v'' < 0$

仮定 2. $\pi = \phi(c/y - 1), \phi(0) = 0, \phi' > 0$

仮定 3. $y = \text{定数} > 0$

仮定 4. $M = \text{定数} > 0$

仮定 5. $\eta_c = 1 \Leftrightarrow u(c) = K \log c$. さらに $K = 1$ とする。

仮定 6. $\lim_{m \rightarrow \infty} v'(m) = \beta > 0$

仮定 1 は効用関数の凸性を仮定したものである。仮定 2 は財市場の価格調整速度を規定するものである。仮定 3, 4, 5 は簡単化のための仮定である。仮定 6 が [小野] 独特の仮定で、小野氏はこれを「貨幣愛」と呼んでいる。

制御変数 (c, m) の動学経路を求めるために、まずケインズ法則の第 1・第 3 辺の等式を変形し仮定 5 を用いると、

$$\dot{c}/c = cv'(m) - \rho - \phi(c/y - 1) \quad (16)$$

をえる。仮定 4 より m の変化率は $-\phi$ に等しくなるから、仮定 2 と合わせて

$$\dot{m}/m = -\phi(c/y - 1) \quad (17)$$

をえる。(16), (17) は 1 階常微分方程式系となるので、適当な初期条件を与えれば、解が得られる。

cm 平面上での位相図を描くために、まず $\dot{c} = 0, \dot{m} = 0$ の 2 つの曲線の形状や配置を考える。 $\dot{m} = 0$ の曲線に関しては、(17) で $\dot{m} = 0$ とおくことより、 $\phi(c/y - 1) = 0$ となり、 ϕ の単調性の仮定 2 より、 $c = y$ が得られる。ただし、 $m = 0$ も $\dot{m} = 0$ を満たしている。

$\dot{c} = 0$ の曲線はこのままではまだ煩雑になるので、以下の仮定を置く。

仮定 7. 価格調整速度 ϕ' は一定値 $\alpha (> 0)$ である。

このとき $\phi(c/y - 1) = \alpha(c/y - 1)$ となる。したがって、(16) より

$$\dot{c}/c = (v'(m)y - \alpha)c/y - (\rho - \alpha) \quad (18)$$

となり $\dot{c} = 0$ より、

$$c = \frac{\rho - \alpha}{v'(m)y - \alpha} y \quad (19)$$

をえる。ただし $c=0$ も $\dot{c}=0$ を満たしている。

また、仮定 7 より (17) は

$$\dot{m}/m = -\alpha(c/y - 1) \quad (20)$$

となる。

曲線 $\dot{c}=0$ の形状に関しては、[小野] では、場合分けを 4 つにしているが、これでは場合分けが単純すぎる。このことについて次節において詳しく考察する。

4 場合分けの考察

本節では、パラメータ α , βy , ρ の大小関係による変化について考察し、どのような場合分けを行うべきかについてみていく。

曲線 $c(m)$

$\dot{c}=0$ 曲線を表す関数を $c(m)$ とおくと、

$$c(m) := \frac{(\rho - \alpha)y}{v'(m)y - \alpha} \quad (21)$$

これより、 $\alpha \neq \rho$ なら $c(m) \neq 0$ である。またこの関数を微分すると

$$c'(m) = -\frac{(\rho - \alpha)y^2 v''(m)}{(v'(m)y - \alpha)^2}$$

なので、 $v''(m) \leq 0$ より

$$\alpha < \rho \iff c(m) \text{ は増加}$$

$$\rho < \alpha \iff c(m) \text{ は減少}$$

が成り立つ。

3 つのパラメータ (α , βy , ρ) による、関数 $c(m)$ の増加・減少の場合分けを $\alpha - \beta y$ 平面での領域に分けると図 1 のようになる。

$c(m)$ の極限

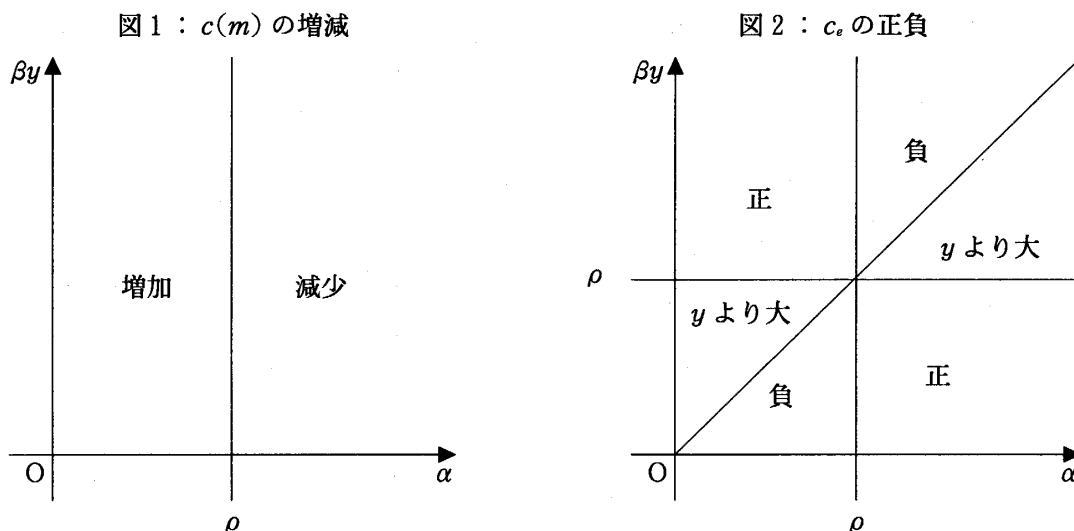
関数 $c(m)$ の $m \rightarrow \infty$ での極限を c_e とおく。すなわち

$$c_e := \frac{(\rho - \alpha)y}{\beta y - \alpha} \quad (22)$$

とする。このとき

$$[\alpha < \rho \text{ かつ } \alpha < \beta y] \text{ または } [\rho < \alpha \text{ または } \beta y < \alpha] \iff c_e > 0$$

$$[\beta y < \alpha < \rho] \text{ または } [\rho < \alpha < \beta y] \iff c_e < 0$$



と, c_e の正負の場合分けができる。さらに,

$$[\alpha < \beta y < \rho] \text{ または } [\rho < \beta y < \alpha] \Leftrightarrow c_e > y$$

となり, y との大小関係が場合分けできる。

この場合分けを $\alpha - \beta y$ 平面での領域にすると図2のようになる。ただし, $y > 0$ より大である場合は当然正である。

さらに, c_e と $c(m)$ の大小関係について考察する。(21), (22) より

$$c_e - c(m) = \frac{\rho - \alpha}{(v'(m)y - \alpha)(\beta y - \alpha)} (v'(m) - \beta)y$$

である。 $v'(m) > \beta$ は常に成り立つので, $\alpha < \beta y$ の場合は

$$\rho < \alpha \Leftrightarrow c_e < c(m)$$

$$\alpha < \rho \Leftrightarrow c(m) < c_e$$

となる。 $\beta y < \alpha$ の場合は $v'(m_a)y = \alpha$ なる $m_a > 0$ の存在を仮定すれば,

$$[\rho < \alpha \text{ かつ } m_a < m] \text{ または } [\alpha < \rho \text{ かつ } m < m_a] \Leftrightarrow c_e < c(m) \quad (23)$$

$$[\rho < \alpha \text{ かつ } m < m_a] \text{ または } [\alpha < \rho \text{ かつ } m_a < m] \Leftrightarrow c(m) < c_e \quad (24)$$

となる。 m_a の存在を保証するために, 効用関数 v に以下の仮定を追加する。

仮定8. $\lim_{m \rightarrow +0} v'(m) = \infty$ である。

$\alpha < \beta y$ のときは $m_a = \infty$ であるとする。 m_a は $c(m)$ が発散するときの m の値である。

以上の式から, c_e と $c(m)$ の大小の領域を $\alpha - \beta y$ 平面に表すと, 図3になる。図中の言葉は c_e から見た関係で, 「小から大」や「大から小」は m の増加につれて, 大小が逆転することを表している ((23), (24) を縦に見よ)。

図 3 : c_α と $c(m)$ の大小関係

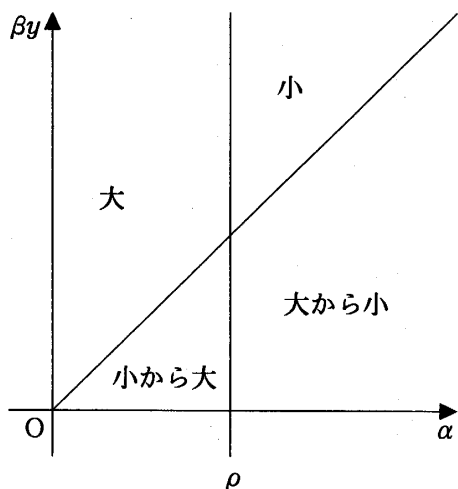


図 4 : 2 曲線の交点の存在領域

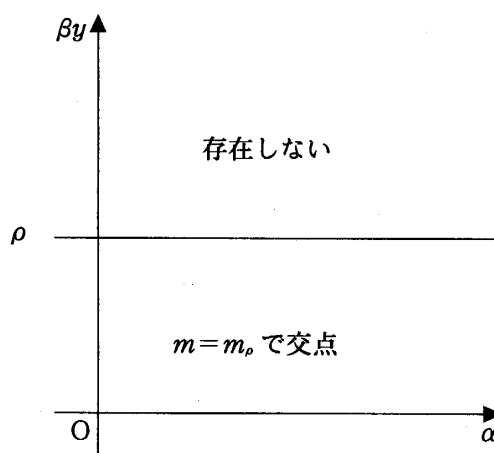
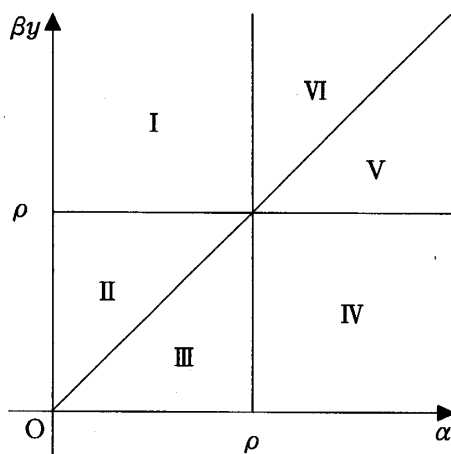


図 5 : パラメータの区分



2 曲線の交点

$c=0$ 曲線と $m=0$ 曲線の交点の存在について考える。

$$\text{交点が存在する} \iff c(m)=y \text{ が解を持つ}$$

$$\iff v'(m)y=\rho$$

であるから、 $\rho \leq \beta y$ なら交点は存在しない。 $\beta y < \rho$ のときは、仮定 8 より $v(m_\rho)y=\rho$ なる m_ρ が唯一つ存在し交点の存在は保証される。 $\rho \leq \beta y$ のときは $m_\rho = \infty$ とする。

これより、2 曲線の交点の存在・非存在を $\alpha-\beta y$ 平面の領域で分けると、図 4 のようになる。

$v'(m)$ は減少関数なので、 m_α と m_ρ の関係は

$$\rho < \alpha \iff m_\alpha < m_\rho$$

$$\alpha < \rho \iff m_\rho < m_\alpha$$

となる。

以上の4つの図をもとに、3つのパラメータ α , βy , ρ による場合分けをまとめると、図5の6つの領域に分ければ良いことになる。

[小野]においては、図5中のII, III領域とV, VI領域をそれぞれ一つとして場合分けを行っている。このため、曲線 $c(m)$ の形状についてあいまいなまま mc 平面の図が描かれている。

5 不況の動学経路

[小野]では不況の継続性を問題にしている。したがって、最適化行動において初期に $c < y$ であった状態がどうなっていくのかを見ている。そこで、(18), (20)に従う動点が mc 平面上でどちらに動いていくのかを考察しよう。

$\dot{m}=0$, $\dot{c}=0$ 曲線上以外の点において、 m に関しては、 $c > y$ では $\dot{m} < 0$ となり、 $c < y$ では $\dot{m} > 0$ となり、さらに c が y から離れるほど、また m が大きいほど m の変化率は大きくなる。ことが(20)から容易にわかる。

(18), (21)より $m \neq m_a$ のとき

$$\dot{c}/c = (\rho - \alpha) \left(\frac{c}{c(m)} - 1 \right) \quad (25)$$

と変形できるので、

「 $\alpha < \rho$ かつ $c/c(m) > 1$ 」または「 $\rho < \alpha$ かつ $c/c(m) < 1$ 」 $\Leftrightarrow c$ は増加

「 $\alpha < \rho$ かつ $c/c(m) < 1$ 」または「 $\rho < \alpha$ かつ $c/c(m) > 1$ 」 $\Leftrightarrow c$ は減少

が成り立つ。したがって、 $c(m)$ に比べ c が大きいほど c の変化率も大きいことがわかる。 $m = m_a$ のときは、(18)より $\dot{c} = (\alpha - \rho)c$ となる。

これで、 mc 平面上でのおおよその流れの方向はわかるが、横断性条件(10)を満たすかどうかは不明である。そこで、 $m=0$ もしくは $c=0$ 付近での横断性条件について考察する。[小野]では、 $c > y$, $m > 0$ で(18), (20)を満たす動学経路は、有限時間で $m < 0$ にいたるとしてあるが、 $c > y$, $m < 0$ においては $\dot{m} > 0$ となるので、このようなことは起こりえない。ただし、 c の増加速度が m の減少速度を上まわるので、有限時間で $m=0$ に到達し、後は c 軸に沿って上昇していくことになる。仮定8の下では、このときの c の速度は無限大になってしまうので、仮定8を少し緩めて「 $v'(0)$ は十分に大」として考えると、 c の増大は \exp より早く、 $m=0$ より(11)は $\dot{a} = ra - c$ となるので、 c の増大速度と考え合わせると a は有限時間で0になる。⁽²⁾したがって、最適化行動が内点であるということに反している。

$c=0$ の付近においては、常に $\dot{m} > 0$ であるが、仮定5より $\lambda = 1/c$ となるので

$$(\dot{\lambda}m)/(\lambda m) = \rho - v'(m)c \quad (26)$$

(2) このとき、 $a=m=b=q=0$ となっているので、当然 $c=0$ となる。

図 6 : 領域 I

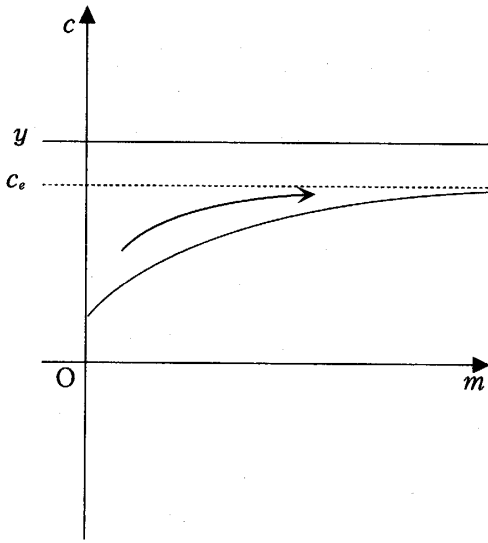


図 7 : 領域 II

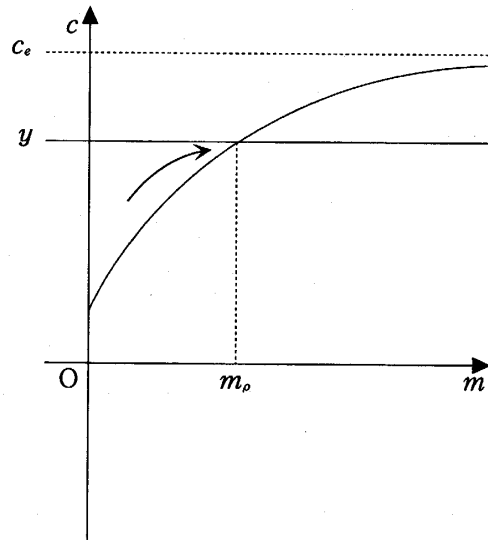


図 8 : 領域 III

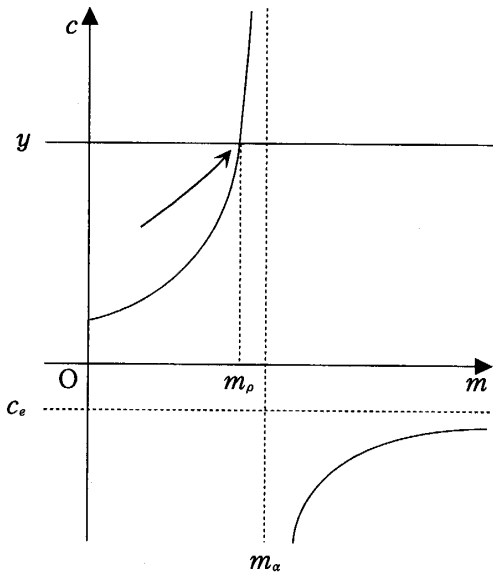
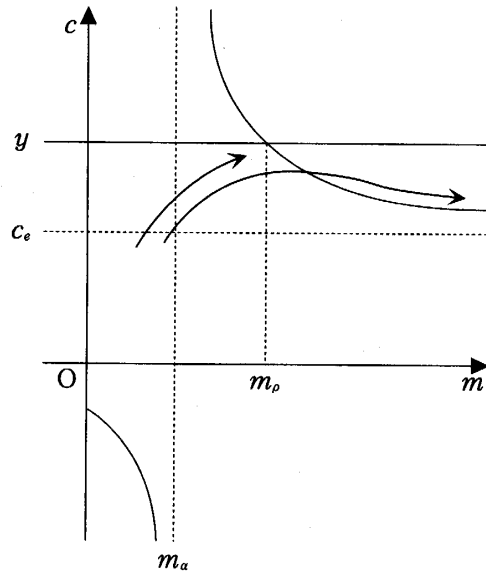


図 9 : 領域 IV



となる。[小野]では、 $c \searrow 0$ から (26) の右辺第 2 項を単純に無視して $\lambda m \exp(-\rho t)$ は 0 に近づかないとしているが、これは誤りである。 c の減少が遅い場合、例えば $1/\log m$ 程度の場合は $\lambda m \exp(-\rho t)$ は 0 になる。ただし、 $c=0$ の付近でも (18) の右辺第 2 項が残るので、 c の減少速度は \exp であることが言え、横断性条件 (10) は満たされなくなる。

以上の考察をもとに、パラメータの分類に対応した最適化行動の動学経路を得る。

領域 I では図 6 の矢印付きの曲線に沿った経路のみが可能な経路である。矢印の付かない曲線は $c(m)$ 曲線であり、以下の図も同様とする。この図では $c_e < y$ に漸近していくので不況が永続している。また、 m は増加し続けることになる。

領域 II では図 7 のようになる。 (m_0, y) は定常点であり完全均衡の状態でもある。

図10：領域V

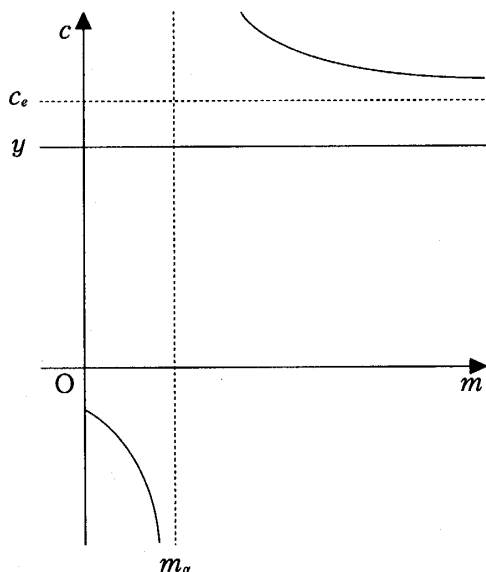
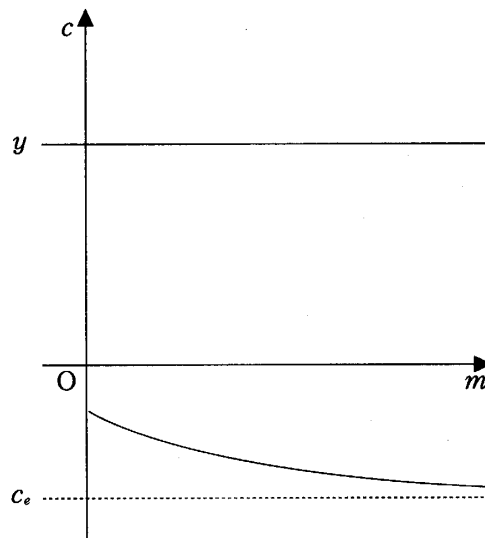


図11：領域VI



領域IIIでは図8のようになる。可能な動学経路については領域IIと同様である。この意味では、[小野]が領域II, IIIを同じものとして扱っているのは、それほどおかしいことではない。

領域IVでは、完全均衡に漸近する経路の他に、 c が $c_e < y$ に漸近し m が増加し続けるという不況が永続する経路が可能となる。

領域V, VIにおいては、可能な動学経路は存在しない。しかし、領域Vでは、 $c(m)$ は $m=0$ に漸近しないので $y < c < c(m)$, $m > m_a$ の所と、 $y < c$, $m < m_a$ の所で、 (m, c) がどうなるかを見ておく必要がある。(25)において右辺は正で上に有界なので、 c はexpの増大であるのに対し、(20)より m の減少は変化率において c の1次式なので、 (m, c) は c 軸に漸近していく。本節最初の議論より、この経路は可能な経路ではない。

[小野]では、領域V, VIが1つにまとめられ、 $c(m)$ が c 軸に漸近するような図が描かれていたが、これは誤解を生みかねないものであろう。

6 ま と め

以上見てきたように、[小野]第7章は大筋において結論に誤りはないが、議論にいくつかの不備が見られた。仮定8については、特に明示されていないが、恒常的インフレ経路(c が発散していく経路)の実現不可能性の証明の箇所等で暗黙のうちに用いられている。 $v'(0)$ があまり大きくならない場合はまた状況が変化するが、本ノートでは扱わない。

研究会においては、好況時($c > y$)から出発した経路がどうなるかについても報告したが、ここでは省略させていただく。