奈良産業大学『産業と経済』第19巻第3•4号（2004年12月）219－226

〔研究ノート〕

税制が消費に与える影響の研究に対する数学的注意

根　岸　　　章

1　はじめに

福留和彦は［福留］[1] において，直間比率の変更が消費にどのように影響を与えるかの数学的モデル（以下，福留モデルとする）を導入し，小野善康の［小野］[2] における主張に裏づけを与えることを試みている。福留モデルは，所得層は2分割して，それぞれの消費性向の違いから総需要の減少を結論しようとしている。

この研究ノートでは，福留モデルを一般化したモデルを導入して，それを用いた分析をすると共に，小野氏の主張における若干の問題点を指摘する。すなわち，消費性向と限界消費性向の条件の違いを指摘するものである。

2節では，所得 y を連続的に値をとるものとして，福留モデルを一般化したモデルの設定を与えている。3節では，福留モデルの分析を行っている[3]。すなわち，y のとりうる値を2値として，消費性向の違いから，総需要の減少を導いている。4節では，一般化したモデルでの分析を行っているが，その際，条件として，消費性向の逓減ではなく，限界消費性向の逓減を用いている。5節では，4節の条件として，消費性向を用いなかった理由を考察する。

2　モデルの設定

まず，時間変数を $s=0, 1$ とし，それぞれ税制の変更前と変更後の時点を表すとする。また，個人所得を y $(0 \leq y < \infty)$ とし，現れるすべての変量を s, y の関数とする。

個人別のミクロモデルでは，次の関数をおく。

$n(s)$: 消費税率　$m(s, y)$: 所得税率　$t(s, y)$: 個人の税の総額

$x=x(s, y)$: 可処分所得　$c(s, y):=\tilde{c}(x)$: 消費関数

（1）［福留］「直間比率の変更が景気に与える影響—ひとつの計算例—」『産業と経済』17巻1号 奈良産業大学経済経営学会 2002年

（2）［小野］『景気と経済政策』岩波書店 1998年

（3）［福留］における計算には誤りがある。

これらの関数の間には，以下の関係がある。

$$t(s,\ y)=m(s,\ y)y+n(s)c(s,\ y) \tag{1}$$

$$x(s,\ y)=y-t(s,\ y) \tag{2}$$

マクロモデルでは，次の関数をおく。

$\beta(y)$: 所得 y の人の人口比率　N: 全人口　$T(s)$: 税収　$C(s)$: 総需要

これらのマクロモデルの関数はミクロモデルの関数と以下のような関係がある。

$$\int_0^\infty \beta(y)dy=1$$

$$T(s)=N\int_0^\infty t(s,\ y)\beta(y)dy \tag{3}$$

$$C(s)=N\int_0^\infty c(s,\ y)\beta(y)dy \tag{4}$$

モデル全体として，消費関数は所得によって決まっていることと，税制変更前後で，所得の分布や人口に変化がないことを注意しておく。また，計算を簡単にするため，各関数は適当な階数まで微分可能とする。

各変量本来の意味から自然に決まる以下の仮定を各関数におく。

(n, 1) $0<n(s)$

(m, 1) $0\leq m(s,\ y)<1$

(xc, 1) $0\leq \tilde{c}(x)$

(b, 1) $0\leq\beta(y)$

さらに，以下の仮定をおく。これは，税の公平性等の観点から導入される。

(m, 2) $m'(s,\ y)\geq 0$

(m, 3)[4] $(m(s,\ y)y)'=m'(s,\ y)y+m(s,\ y)<1$

(xc, 2) $\dfrac{d\tilde{c}}{dx}(x)>0$

ただし，$'$ は y による微分を表している。以下，常にこの表現を用いる。

さて，以上の仮定から，$c'(s,\ y)=\dfrac{d\tilde{c}}{dx}(x)x'(s,\ y)$ に注意すると，次のことが導ける（証明は省略する）。

(t, 1) $m'(s,\ y)y+m(s,\ y)\leq t'(s,\ y)<1$

(x, 1) $0<x'(s,\ y)\leq 1-m'(s,\ y)y-m(s,\ y)$

(yc, 1) $c'(s,\ y)>0$

以下の仮定は，各モデルによって適宜用いる。

（4） 所得税の伸びが所得の伸びより小さいという条件

(xc, 3) $\dfrac{d^2\tilde{c}}{dx^2}(x)<0$

(xc, 4) $x>0$ において[5], $\dfrac{d}{dx}(\tilde{c}(x)/x)<0$

(xc, 3) は限界消費性向の逓減を表し，(xc, 4) は消費性向の逓減を表している。(xc, 4) は次の仮定に置き換えることができる。

(xc, 5) $\dfrac{d\tilde{c}}{dx}(x)x<\tilde{c}(x)$

(xc, 5) は $x>0$ なら (xc, 4) と同値な条件となり，$x<0$ では (xc, 2) より常に成りたつ[6]。また，このことから，(xc, 1), (xc, 2) の仮定の下

(xc, 3) ⇒ (xc, 5)

が成りたつ（$x>0$ で $\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{d\tilde{c}}{dx}(x)\right)\leq\dfrac{d\tilde{c}}{dx}(x)$ の両辺を積分)。

以上の議論から，限界消費性向の逓減の方が，消費性向の逓減より強い条件であることがわかる。このことは，5節で問題にする。

また，(n, 1), (m, 2), (xc, 1), (xc, 2), (xc, 5) の仮定より，

(yc, 2) $y>0$ ならば $(c(s, y)/y)'<0$

が成りたつ。これは，以下のように示すことができる（関数の変数は省略して表示，$d\tilde{c}$ は $\tilde{c}$ の x による導関数)。

$$(c/y)'=(c'y-c)/y^2<(d\tilde{c}x'y-d\tilde{c}x)/y^2=d\tilde{c}(x/y)' \tag{5}$$

ここで，(1), (2)式より

$$(x/y)'=((y-t)/y)'=((y-my-nc)/y)'=-m'-n(c/y)' \tag{6}$$

となるので，(6)式を(5)式に代入して変形すると，(m, 2), (xc, 2) より

$$(1+n\tilde{c})(c/y)'<-m'd\tilde{c}\leq 0$$

左辺の係数は正であるから，(yc, 2) がでてくる。

3 福留モデルの考察

福留モデルにおいては，所得は y_1, y_2($y_1<y_2$) の二つの値のみとなっている。さらに $i=1, 2$ として

$$t(s, y_i)=m_i(s)y_i+n(s)c_i(s) \tag{7}$$

$$c_i(s)=\alpha_i(y_i-t_i(s)) \tag{8}$$

としている。ただし，消費性向 α_i は，$0<\alpha_2<\alpha_1<1$ を仮定する。また，仮定 (n, 1) と仮定

(5) $c(s, 0)=c_0(s)>0$ ならば，$x(s, 0)<0$ となる。$x\leq 0$ では，消費性向は定義されない。
(6) $\tilde{c}(0)=0$ なら $x\geq 0$ なので，このとき，この条件は $x=0$ では考えない。

(m, 1) をこの場合に当てはめたものを仮定する。これをマクロ化したものを

$$T_i(s)=N\beta_i t_i(s) \tag{9}$$

$$C_i(s)=N\beta_i c_i(s) \tag{10}$$

ただし，人口比率 β_i は，$\beta_1+\beta_2=1$ が成りたつ正数としている。それぞれが低所得層 ($i=1$) と高所得層 ($i=2$) での税負担と消費の総額を表している。

s による差分を Δ で表すことにすると[7]

$$\Delta t_i=y_i\Delta m_i+c_i\Delta n+n\Delta c_i \tag{11}$$

$$\Delta c_i=-\alpha_i\Delta t_i \tag{12}$$

$$\Delta T_i=N\beta_i\Delta t_i \tag{13}$$

$$\Delta C_i=N\beta_i\Delta c_i \tag{14}$$

ここで，福留モデルでは，次を仮定する。

(n, 2) $\Delta n>0$

(m, 4) $\Delta m_1=0,\ \Delta m_2<0$

(T, 1) $\Delta T=\Delta T_1+\Delta T_2=0$

これらの仮定は，消費税を上げ，低所得者では所得税減税をせず，高所得者のみ所得税減税をし，全体の税収は変化しないとする税制の変更を表している。

(11), (12)式より Δc を消去して

$$\Delta t_i=\frac{y_i\Delta m_i+c_i\Delta n}{1+n\alpha_i}$$

となる。仮定 (n, 1) と α の仮定より，右辺の分母は常に正である。$i=1$ のとき (m, 4) より分子の第 1 項は 0, (n, 2) より第 2 項は正だから[8]，$\Delta t_1>0$ が示せる。一方 (T, 1), (13)式より，

$$0=\Delta T_1+\Delta T_2=N\beta_1\Delta t_1+N\beta_2\Delta t_2$$

だから，

$$\Delta t_2=-\beta_1/\beta_2\cdot\Delta t_1<0$$

したがって，この税制変更の結果，低所得者は増税となり，高所得者は減税となることが示された。

次に，この税制変更の下で総需要 $\Delta C=\Delta C_1+\Delta C_2$ がどうなるかをみてみよう。

(14)式から ΔC を求め，これまで得た式で順次置き換えを行っていくと，

$$\begin{aligned}\Delta C&=\Delta C_1+\Delta C_2\\&=N\beta_1\Delta c_1+N\beta_2\Delta c_2\\&=-N\beta_1\alpha_1\Delta t_1-N\beta_2\alpha_2\Delta t_2\end{aligned}$$

(7) $f(s)$ に対し，$\Delta f=f(1)-f(0)$, $f=(f(0)+f(1))/2$ と表現している。

(8) $c_i>0$ は (7), (8)式と α の仮定から導ける。

$$=-N\beta_1\alpha_1\Delta t_1+N\beta_1\alpha_2\Delta t_1$$
$$=-N(\alpha_1-\alpha_2)\beta_1\Delta t(y_1)<0$$

が成りたつ。よって，この税制変更の結果，総需要が減少することが示せた。

ここで，総需要の増加・減少，すなわち ΔC の正負に対しては，消費性向 α_1, α_2 の大小関係に依存していることが見てとれる。このことを［福留］においては，小野氏の主張の一つの裏付けと見ている。しかし，(8)式の消費関数の形には少し問題があって，簡単に小野氏の主張を裏付けているとはいえない。。このことは5節で詳しく考察する。

4　一般の場合

福留モデルの一般化として，所得のとりうる値が連続である場合の考察をする。消費関数に関しては，(xc, 3) を仮定する。また，税制変更として，(n, 2), (T, 1) に加えて，次の仮定をおく。適当な $0<y_1<y_2$, $0<m<1$ があって

(m, 5) $$\Delta m(y)=\begin{cases}\Delta m(y)=0 & (y\leq y_1)\\ \Delta m(y)=-m<0 & (y\geq y_2)\end{cases}$$

(m, 6) $(\Delta m)'(y)\leq 0$

(m, 5) は，課税限度額が y_1 以上で，最高税率は m 引き下げられたことを表している。(m, 6) は，所得税率の減税幅は高所得者ほど大きいことを表している。この2つの仮定から，

(m, 7) $\Delta m(y)\leq 0$

が導ける。

(1),(2),(3),(4)式において，s での差分を計算するとそれぞれ

$$\Delta t(y)=y\Delta m(y)+c(y)\Delta n+n\Delta c(y) \tag{15}$$
$$\Delta x(y)=-\Delta t(y) \tag{16}$$
$$\Delta T=N\int_0^\infty \Delta t(y)\beta(y)dy \tag{17}$$
$$\Delta C=N\int_0^\infty \Delta c(y)\beta(y)dy \tag{18}$$

となる。ここで，表示の方法は3節と同様である。

ここで，消費関数 $\tilde{c}(x)$ に微分に関する平均値の定理を適用して，

$$\Delta c(y)=\Delta\tilde{c}(x)=\frac{d\tilde{c}}{dx}(\hat{x})\Delta x(y) \tag{19}$$
$$\hat{x}=x(0, y)+\theta\Delta x(y)\quad(0\leq\theta\leq 1) \tag{20}$$

となる。ただし，θ は平均値の定理から決まる y の関数である。

(15),(16),(19)式より $\Delta c(y)$ を消去して，

$$\Delta t(y)=\frac{y\Delta m(y)+c(y)\Delta n}{1+n\dfrac{d\tilde{c}}{dx}(\hat{x})} \tag{21}$$

この式の分母は常に正である。そこで，分子の正負を考える。(21)式右辺の分子第1項を $\tilde{t}_1(y)$，第2項を $\tilde{t}_2(y)$ とおく。$\tilde{t}_1(y)$ は (m, 7) より，$y>0$ で非正値関数で，さらに (m, 6) も合わせると，

$$\tilde{t}_1(0)=0,\ \tilde{t}_1(y)\leq 0,\ \tilde{t}_1'(y)\leq 0,\ (\tilde{t}_1(y)/y)'\leq 0$$

を満たしている。一方 $\tilde{t}_2(y)$ は非負値関数で，Δn は y によらない正定数であり，$c(y)=(c(0, y)+c(1, y))/2$ は，(yc, 1)，(yc, 2) より $c'(y)>0$，$(c(y)/y)'<0$ を満たすので，

$$\tilde{t}_2(0)\geq 0,\ \tilde{t}_2(y)\geq 0,\ \tilde{t}_2'(y)>0,\ (\tilde{t}_2(y)/y)'<0$$

を満たしている。このとき，$\tilde{t}_1(y)+\tilde{t}_2(y)=0$ の解は $y>0$ では高々1つであることが示せる。そこで，もし解がないとすると，$y>0$ で $\Delta t(y)>0$ または $\Delta t(y)<0$ となり，仮定 (T, 1) を満たさない。したがって，仮定 (T, 1) の下では方程式の解はただ一つ存在するのでこれを y^* とおく。このとき，

$$\begin{cases}\Delta t(y)>0 & (0<y<y^*)\\ \Delta t(y)<0 & (y>y^*)\end{cases}$$

が成りたっている。また，このとき (x, 1) と(16)，(20)式より

$y<y^*$ においては $\Delta x(y)<0$ より $\hat{x}\leq x(0, y)<x^*$

$y>y^*$ においては $\Delta x(y)>0$ より $\hat{x}\geq x(0, y)>x^*$

となる。ただし $x^*=x(0, y^*)$ である。

(16)，(19)式より $\Delta c(y)=-\dfrac{d\tilde{c}}{dx}(\hat{x})\Delta t(y)$ となるので (xc, 3) も合わせると，

$y<y^*$ においては $\Delta c(y)=\left(-\dfrac{d\tilde{c}}{dx}(\hat{x})\right)\Delta t(y)<-\dfrac{d\tilde{c}}{dx}(x^*)\Delta t(y)$

$y<y^*$ においては $\Delta c(y)=\dfrac{d\tilde{c}}{dx}(\hat{x})(-\Delta t(y))<-\dfrac{d\tilde{c}}{dx}(x^*)\Delta t(y)$

が成りたっている。

仮定 (T, 1) と(17)，(18)式より，

$$\begin{aligned}\Delta C&=N\int_0^{y^*}\beta(y)c(y)dy+N\int_{y^*}^{\infty}\beta(y)c(y)dy\\&=N\int_0^{y^*}\beta(y)\left(-\frac{d\tilde{c}}{dx}(\hat{x})\Delta t(y)\right)dy+N\int_{y^*}^{\infty}\beta(y)\left(-\frac{d\tilde{c}}{dx}(\hat{x})\Delta t(y)\right)dy\\&<N\int_0^{y^*}\beta(y)\left(-\frac{d\tilde{c}}{dx}(x^*)\Delta t(y)\right)dy+N\int_{y^*}^{\infty}\beta(y)\left(-\frac{d\tilde{c}}{dx}(x^*)\Delta t(y)\right)dy\\&=-\frac{d\tilde{c}}{dx}(x^*)\Delta T=0\end{aligned}$$

よって，$\Delta C<0$ が導ける。

以上の議論により，この一般化したモデルにおいては (xc, 3) すなわち，限界消費性向の逓

減の仮定から，総需要の減少が導けることがわかった。福留モデルの一般化としては，(xc, 5) すなわち，消費性向の逓減を仮定し，そこから総需要の減少が導けそうな気がするかもしれない。(xc, 3) を (xc, 5) に置き換えるとどうなるかを次節で考察する。

5　所得が 2 値の場合の再考察

この節では，消費性向の逓減と限界消費性向の逓減，すなわち

$$(\mathrm{xc}, 3)\ \frac{d^2\tilde{c}}{dx^2}(x)<0 \text{ と } (\mathrm{xc}, 5)\ \frac{d\tilde{c}}{dx}(x)x<\tilde{c}(x)$$

の条件の違いを考察する。前節を見直してみると，税の増減が 0 となる所得の値 y^* が一意になるための条件は消費性向の逓減で十分であるが，総需要が減少することを示すのには，限界消費性向の逓減を条件として用いている[(9)]。そこで，消費性向の逓減の条件のみでは，総需要の減少を導けない例を示すことにする。

福留モデルと同様，所得は 2 値 $(0<y_1<y_2)$ とし，簡単のため $\beta_1=\beta_2=1/2$ とする。消費関数 $\tilde{c}$ として図 1 の太線のような関数であるとする[(10)]。

図1における x_1, x_2 は，適当な m, n に対し，それぞれ所得 y_1, y_2 から決まる可処分所得であるとする。

(xc, 5) から (yc, 2) が従うので，$\Delta x_1<0$, $\Delta x_2>0$ $(\Delta x_1=-\Delta x_2)$ が成りたつ。よって税制変更後は x_1 は図の左に移動し，x_2 は図の右に移動する。Δm, Δn が十分小さいとすれば x_1 は図の水平な部分のみで移動するので，$\Delta c_1=0$ となり，これより $\Delta C_1=0$ となる。一方 x_2 がわずかでも移動すれば $\Delta c_2>0$ なので，これより $\Delta C_2>0$ となる。したがって，このとき

$$\Delta C=\Delta C_1+\Delta C_2>0$$

が成りたつ。以上の考察から，(xc, 5) すなわち，消費性向が逓減するという仮定では，総需要が減少するための十分条件とはならないことがわかった。

ここで，このモデルと福留モデルの違いを見てみよう。一番の違いは消費関数の与え方であ

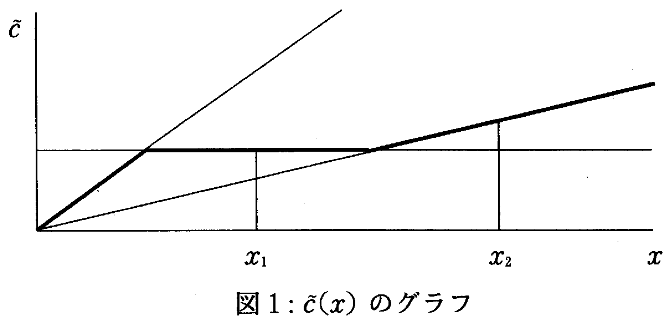

図 1 : $\tilde{c}(x)$ のグラフ

(9)　前者は (yc, 2) より結論，後者は (xc, 3) より結論。

(10)　このままだとこの関数が満たすのは (xc, 2), (xc, 5) で等号がついたものになるので，実際にはごく微小の変化をさせる。

る。福留モデルでは，消費関数は(8)式で与えられた。このとき消費性向αを定数とした。しかし，税制変更後は，低所得層では可処分所得が減少するので，消費性向は増加するほうが妥当である。消費性向を一定に固定するということは図1でx_1がもっと左の原点を通る直線上で交差するときのみを考察していたことになる。したがって，$\alpha_1 > \alpha_2$という仮定は一見，消費性向の逓減を表しているように見えるが，消費関数の与え方が限定されていて，限界消費性向の逓減を含んだ条件となっていたのである。

この研究ノートの結論としては，小野氏の主張において，税制変更による総需要の減少を説明するのに消費性向の逓減を根拠とすることは誤りで，さらに限界消費性向の逓減に相当するような条件を消費関数に付加しなければならない，というものである。[11]

(11)　論者は小野氏の主張が全面的に誤っていると言うつもりはない。そうではなくて，消費性向の逓減と言葉で述べているとき，暗黙のうちに限界消費性向の逓減に相当するグラフを思い浮かべていることに対する，注意を述べているのである。