

**MESTRADO**  
**ECONOMETRIA APLICADA E PREVISÃO**

**TRABALHO FINAL DE MESTRADO**  
**DISSERTAÇÃO**

**ESTIMAÇÃO DO ÍNDICE DE CAUDA NUM CONTEXTO DE DEPENDÊNCIA**

**BRUNO MIGUEL DA SILVA NASCIMENTO**

**OUTUBRO - 2016**

**MESTRADO EM**  
**ECONOMETRIA APLICADA E PREVISÃO**

**TRABALHO FINAL DE MESTRADO**  
**DISSERTAÇÃO**

ESTIMAÇÃO DO ÍNDICE DE CAUDA NUM CONTEXTO DE DEPENDÊNCIA

BRUNO MIGUEL DA SILVA NASCIMENTO

**ORIENTAÇÃO:**

PROF. JOÃO NICOLAU

PROF. PAULO M.M. RODRIGUES

OUTUBRO - 2016

# Abstract

The main goal of this paper is to analyse the behaviour of tail index estimators in a context of data dependence. The tail index estimator measures the distribution tails decay, and allows to set the finite moments of a random variable. The estimators studied was Gabaix and Ibragimov (2011), Hill (1975) and Nicolau and Rodrigues (2015).

To do this analysis, we will use a Monte Carlo Simulation (MCS), where the data generating process can have dependence, or not, and the errors follow a heavily tailed distribution, i.e. a significant mass of the probability distribution is located in the tails of the distribution.

The results showed that, when truncation level is known, the Hill estimator has the best results under the specific data generating processes chosen. However,  $\kappa$  most of the times is unknown and hard to estimate. On the other hand, the Nicolau and Rodrigues (2015) estimator seems to be robust to absent estimations of  $\kappa$ , when compared with others estimators.

**Keywords:** tail index, dependence, GI11 estimator, NR15 estimator and Hill estimator.

# Resumo

O presente trabalho tem como objetivo analisar o comportamento de um conjunto de estimadores do índice de cauda, num contexto de dependência dos dados. O índice de cauda mede o decaimento da cauda das distribuições com caudas pesadas e permite determinar os momentos finitos de uma variável aleatória. Os estimadores analisados foram o estimador de Gabaix and Ibragimov (2011), Hill (1975) e Nicolau and Rodrigues (2015).

Esta análise foi efetuada através de Simulações de Monte Carlo (SMC), onde foram considerados processo geradores de dados com e sem dependência, e com erros provenientes de distribuições com caudas pesadas, i.e. as caudas da distribuição tem uma massa probabilística significativa.

Os resultados apontam para que o estimador de Hill, considerando o nível de truncagem ótimo ( $\kappa^*$ ), tenha o melhor desempenho sob os processos de dados considerados, contudo o  $\kappa^*$ , em geral, é desconhecido e de difícil estimação. Por sua vez, o estimador de Nicolau and Rodrigues (2015) apresenta uma robustez face ao desconhecimento do  $\kappa$ , quando comparado com os outros estimadores.

**Palavras-Chave:** índice de cauda, dependência, estimador GI11, estimador NR15 e estimador Hill.

# Agradecimentos

Em primeiro lugar quero expressar o meu muito obrigado aos meus orientadores, Professor João Nicolau e Professor Paulo M. M. Rodrigues. Em especial por todo o apoio, disponibilidade e conselhos dados ao longo desta jornada.

Ao corpo docente do mestrado em Econometria Aplicada e Previsão, quero agradecer, por todo o conhecimento transmitido ao longo da parte curricular. Tendo este sido muito importante para a elaboração deste trabalho.

Agradecer também à minha família por toda a paciência e apoio durante os últimos anos.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Revisão da literatura</b>	<b>2</b>
2.1	Distribuições com caudas pesadas . . . . .	2
2.2	Estimação do índice de cauda . . . . .	4
2.2.1	Estimador de Hill (1975) . . . . .	5
2.2.2	Estimador de Gabaix e Ibragimov (2011) . . . . .	5
2.2.3	Estimador de Nicolau e Rodrigues (2015) . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Simulação de Monte Carlo – Metodologia</b>	<b>8</b>
3.1	Processos Geradores de Dados (PGD) . . . . .	9
3.1.1	Distribuições . . . . .	9
3.1.2	Parametrização das distribuições . . . . .	12
3.1.3	Independência, dependências e tipos de dependência . . . . .	14
3.2	Procedimento . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Simulação de Monte Carlo – Resultados</b>	<b>18</b>
4.1	Escolha do $\kappa$ ótimo . . . . .	22
4.2	Estimação do índice de cauda . . . . .	24
4.3	Estimação do erro padrão . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>28</b>
<b>A</b>	<b>Anexo – Tabelas</b>	
<b>B</b>	<b>Anexo – Gráficos</b>	

# 1. Introdução

Os estudos empíricos sobre as séries temporais financeiras têm descrito um conjunto de regularidades empíricas (capítulo 3 de Nicolau (2012)), em parte sobre a distribuição marginal dos retornos dos ativos financeiros. Uma das regularidades incide sobre a distribuição dos retornos ser leptocúrtica, i.e., a distribuição ter uma *kurtosis* superior à da distribuição Normal (que é de 3), o que leva à existência de eventos extremos<sup>1</sup> com maior frequência do que numa distribuição Normal. Segundo Ibragimov (2009) estas distribuições têm caudas pesadas uma vez que as suas caudas apresentam uma massa probabilística e *kurtosis* superior à distribuição Normal. A principal diferença deste tipo de distribuições face à distribuição Normal é que as caudas da função densidade probabilidade (fdp) da Normal decaem exponencialmente para zero quando  $x \rightarrow \infty$ , enquanto as fdp com caudas pesadas têm um decaimento polinomial, ou seja, mais lento do que no caso da Normal. Este decaimento polinomial está associado a um expoente  $\alpha$  que se dá o nome de índice de cauda. Quanto menor este índice for, maior será a massa probabilística presente na cauda e assim maior será a probabilidade da existência de eventos extremos. Assim, a estimação deste índice poderá importante para o estudo dos retornos de ativo financeiro, por exemplo. Outros exemplos da importância do conhecimento do índice de cauda, em particular a *Zipf's Law*, podem ser encontrados em Gabaix (1999, 2009, 2016) e Ibragimov et al. (2015).

O presente trabalho procura avaliar um conjunto de estimadores do índice de cauda, no contexto “ideal”, i.e., com dados independentes e identicamente distribuídos (iid), e também num contexto de dependência. Esta análise é relevante uma vez que, em geral, as séries temporais apresentam dependências, quer na média (autorregressiva ou médias móveis), quer na variância (GARCH). Para além da análise da robustez dos estimadores face à presença de dependência, também é avaliada

---

<sup>1</sup>Por eventos extremos entenda-se retornos de um ativo financeiro muito elevados e/ou muito baixos face ao retorno médio.

a robustez destes face a desvios da distribuição de Pareto. Os estimadores considerados neste trabalho são: o estimador mais popular proposto por Hill (1975), denotado por  $\hat{\alpha}_{Hill}$ ; o estimador baseado na regressão *log-log Rank-Size* com os desenvolvimentos propostos por Gabaix and Ibragimov (2011), denotado por  $\hat{\alpha}_{GI11}$ ; e o estimador, também baseado numa regressão, recentemente proposto por Nicolau and Rodrigues (2015), denotado por  $\hat{\alpha}_{NR15}$ . Enquanto estimador de Hill e o GI11 partilham a característica de ambos utilizarem estatísticas de ordem, por outro lado o estimador GI11 e o NR15 são baseados em estimações OLS de determinadas regressões. A avaliação dos estimadores é feita através de simulação de Monte Carlo, onde são considerados diferentes processos geradores de dados (PGD) de diferentes dimensões. Para além da dimensão, os PGD variam também ao nível da distribuição dos erros, da presença ou ausência de dependência e no caso da presença de dependência também variam com o tipo de dependência.

O presente trabalho encontra-se organizado da seguinte forma: no capítulo 2 é feita uma breve revisão da literatura sobre fdp com caudas pesadas e são expostas as principais características dos estimadores avaliados; no capítulo 3 é descrito o procedimento da simulação de Monte Carlo e são apresentados detalhadamente os processos geradores de dados utilizados; o capítulo 4 consiste nos resultados obtidos da simulação efetuada, por fim serão apresentadas as principais conclusões do trabalho no capítulo 5.

## 2. Revisão da literatura

### 2.1. Distribuições com caudas pesadas

Segundo Ibragimov (2009) a distribuição de uma variável aleatória,  $X$ , tem caudas pesadas se a massa probabilística presente nas caudas é superior à presente nas caudas da distribuição Normal. Uma das formas de avaliar este peso nas caudas é através do cálculo da *kurtosis*, comparando o valor obtido com 3, que é, por definição,



a *kurtosis* da distribuição Normal. Em geral, as caudas pesadas apresentam um decaimento polinomial, enquadrando-se, por isso, na definição de distribuição *power law* (PL)<sup>2</sup>, ou seja, para a cauda direita (superior) verifica-se,

$$P(X > x) \sim \frac{c_D}{x^{\alpha_D}} \quad (2.1)$$

e/ou para a cauda esquerda (inferior) verifica-se,

$$P(X < -x) \sim \frac{c_E}{x^{\alpha_E}} \quad (2.2)$$

onde  $\alpha_D, \alpha_E > 0$ , sendo  $\alpha_i$  o índice da cauda  $i$ , medindo o decaimento da cauda respetiva e  $\sim$  é tal que, considerando  $f(x) \sim g(x)$ , o  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ . Assim, a análise do “peso” de cada cauda pode ser feita com recurso ao índice de cauda. Por exemplo, um ativo financeiro com  $\alpha = 3$  apresenta mais movimentos extremos que um ativo com um  $\alpha > 3$ . Isto quer dizer que à medida que  $\alpha$  diminui a existência de movimentos extremos face à média aumenta, ou seja, existe uma relação inversa entre o valor do índice de cauda e a existência de movimentos extremos, como é explícito pela equação (2.1). Por exemplo, para a distribuição Normal estandardizada a  $P(X > 3) \approx 0.0013$ , enquanto que para a distribuição T-Student<sup>3</sup> com  $\alpha = 3$  a  $P(X > 3) \approx 0.0069$  e com  $\alpha = 4$  a  $P(X > 3) \approx 0.0066$ . Note-se a diferença considerável entre os três casos, principalmente pelo facto de numa amostra com 1000 observações, no caso da distribuição Normal, só uma observação é maior que 3, enquanto com  $\alpha = 3$  teríamos perto de 7 observações maiores que 3.

O valor assumido por  $\alpha$  também é relevante para a determinação dos momentos finitos de uma variável aleatória. Isto porque todos os momentos de ordem  $k$ , cujo  $k \geq \alpha$  são infinitos,  $E(X^k) = \infty$ , enquanto que quando  $k < \alpha$  temos  $E(X^k) < \infty$ .

---

<sup>2</sup>Gabaix (2009) define que uma variável aleatória  $Z$  segue uma distribuição PL se, pelo menos, para a cauda direita (superior) se verifica (2.1).

<sup>3</sup>Segundo Beirlant et al. (2004) o índice de cauda desta distribuição é igual aos graus de liberdade. Para um comparação, com a distribuição Normal estandardizada considerou-se uma T-Student com variância unitária.

Por exemplo, os momentos associados ao coeficiente de assimetria e à *kurtosis* são infinitos para uma variável aleatória com  $\alpha \leq 3$ . Outras implicações, em termos económicos, financeiros e/ou estatísticos, dos valores assumidos pelo índice de cauda podem ser encontradas em Ibragimov et al. (2015).

O exemplo mais claro que cumpre a condição (2.1) é a distribuição de Pareto, uma vez que a sua função distribuição é dada por  $F(x) = 1 - \delta^\alpha x^{-\alpha}$ . Neste caso, a PL verifica-se para todo o  $x$ , motivo pelo qual é usual referir-se às caudas pesadas como caudas de Pareto. São outros exemplos de distribuições com caudas pesadas, as distribuições  $\alpha$ -Stable, Burr e T-Student. Note-se que a condição (2.1) e/ou (2.2) podem ser verificadas tanto em distribuições simétricas (T-Student) como assimétricas (Burr).

## 2.2. Estimação do índice de cauda

Os estimadores considerados neste trabalho são os estimadores propostos em Hill (1975), Gabaix and Ibragimov (2011) e Nicolau and Rodrigues (2015).<sup>4</sup> O ponto de partida dos três estimadores é semelhante, na medida em que: o estimador de Hill, segundo Beirlant et al. (2004), pode ser visto como um estimador de máxima verosimilhança da distribuição de Pareto; no artigo Gabaix and Ibragimov (2011) o estimador baseia-se na estimação OLS da regressão Rank-Size que pode ser vista como a versão empírica de (2.1) e o estimador proposto por Nicolau and Rodrigues (2015) é construído sobre a função *survival* da distribuição Pareto e sendo posteriormente alargado a uma cauda do tipo Pareto.

---

<sup>4</sup>Na secção 4.3 do livro de Beirlant et al. (2004) são apresentados outros estimadores para o índice de cauda.

### 2.2.1. Estimador de Hill (1975)

Considere-se a variável aleatória de interesse,  $X$ , definida através de estatísticas de ordem, onde  $X_{(1)} \geq X_{(2)} \geq \dots \geq X_{(N)}$ . O estimador de Hill (1975) é dado por

$$\hat{\alpha}_{Hill} := \left\{ \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n \log X_{(i)} - \log X_{(n+1)} \right] \right\}^{-1} \quad (2.3)$$

onde  $n = [N \times \kappa]$  e que  $[a]$  representa a parte inteira de  $a$ . As propriedades assintóticas do estimador de Hill são desenvolvidos em Hall (1982), onde se conclui que para  $1 - F(x) = Cx^{-\alpha}[1 + O(x^{-\beta})]$  com  $C, \alpha, \beta > 0$  e se  $n \rightarrow \infty$  e  $n/N^{2\beta/(2\beta+\alpha)} \rightarrow 0$  quando  $N \rightarrow \infty$ , então

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha} - \alpha) \xrightarrow{d} N(0, \alpha^2). \quad (2.4)$$

Deste resultado é possível verificar que o erro padrão do estimador de Hill é dado por

$$EP(\hat{\alpha}) = \sqrt{\frac{\alpha^2}{n}}. \quad (2.5)$$

### 2.2.2. Estimador de Gabaix e Ibragimov (2011)

Seja  $X_{(i)}$  a estatística de ordem da variável de interesse,  $X$ , o índice de cauda pode ser estimado através da aplicação do estimador OLS à seguinte regressão:

$$\log(t - \gamma) = c + \alpha \log(X_{(t)}), \quad t = 1, \dots, n \quad (2.6)$$

onde  $n = [N \times \kappa]$ . Inicialmente este estimador era aplicado considerando  $\gamma = 0$ , como se pode ver, por exemplo, em Gabaix (1999). Com o estudo elaborado por Gabaix and Ibragimov (2011), através do desenvolvimento da teoria assintótica do estimador, os autores demonstram que a utilização de  $\gamma = 0.5$  é ótima, no sentido

da redução do enviesamento do estimador. Ainda nas propriedades assintóticas do estimador, os autores provam a sua normalidade assintótica, i.e.,

$$\sqrt{\frac{n}{2}} \left( \frac{\hat{\alpha}}{\alpha} - 1 \right) = Z + O_p \left( \frac{\log^2 n}{n} \right) \quad (2.7)$$

onde  $Z \xrightarrow{d} N(0, 1)$ . Deste resultado é possível verificar que o erro padrão do estimador, com  $\gamma = 0.5$ , é dado por

$$\text{EP}(\hat{\alpha}) = \sqrt{\frac{2\alpha^2}{n}}. \quad (2.8)$$

Para além das propriedades assintóticas do estimador, os autores fazem uma simulação de Monte Carlo onde os resultados corroboram a conclusão de que a utilização de  $\gamma = 0.5$  produz um enviesamento menor que com  $\gamma = 0$  e ainda que a utilização da expressão (2.8) para a variância também produz melhores resultados que a utilização da variância OLS. Neste estudo de simulação dos autores utilizaram processos geradores de dados sem e com dependência, com diferentes distribuições e níveis de truncagem. Por fim, os autores afirmam que segundo resultados preliminares não reportados, este estimador é mais robusto que o estimador de Hill em cenários de desvio face à PL e que um problema reside na escolha ótima do  $n$ . O presente trabalho procura, através de simulações, contribuir para a clarificação destas duas afirmações.

### 2.2.3. Estimador de Nicolau e Rodrigues (2015)

Ao contrario do estimador de Hill (1975) e de Gabaix and Ibragimov (2011), o estimador proposto por Nicolau and Rodrigues (2015) não requer a utilização de estatísticas de ordem para a sua utilização. Assim, considere-se  $X$  como a variável de interesse, de dimensão  $N$ , sobre a qual se pretende obter a estimativa do índice de cauda. A estimativa pode ser obtida pela aplicação do estimador OLS ao seguinte

modelo,

$$\log \bar{F}_n(x_i) = \theta + \alpha z_i + \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.9)$$

onde  $\bar{F}_n(x_i) = N^{-1} \sum_{t=1}^N \mathcal{I}_{\{X_t > x_i\}}$ ,  $\mathcal{I}_{\{\cdot\}}$  é a função indicadora,  $x_i = (1 - u_i)^{-1/\alpha} x_0$ ,  $z_i = \alpha^{-1} \log(1 - u_i)$ ,  $u_i = \frac{i}{n}$ ,  $x_0 = F^{-1}(1 - k)$  e  $n = [N \times \kappa]$ . No mesmo trabalho os autores desenvolvem as propriedades assintóticas do estimador, concluindo que para uma variável aleatória com  $1 - F(x) = ax^{-\alpha}[1 + bx^{-\beta} + o(x^{-\beta})]$  com  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > \alpha$ ,  $N = cn^\gamma$ ,  $\gamma > 1$  e se  $N \rightarrow \infty$ , então

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha} - \alpha) \xrightarrow{d} N(0, 2\alpha^2) \quad (2.10)$$

Assim, a expressão para o erro padrão do estimador é igual à obtida por Gabaix and Ibragimov (2011), ou seja,

$$\text{EP}(\hat{\alpha}) = \sqrt{\frac{2\alpha^2}{n}} \quad (2.11)$$

Embora pareça necessário, *a priori*, ter um valor para  $\alpha$  os autores referem que, apesar de existir um custo de eficiência, é possível aplicar este estimador com a definição de um  $\alpha$  qualquer desde que positivo. Deste modo, o estimador é auto-suficiente, não necessitando de outro estimador para gerar  $x_i$  e  $z_i$ . Por fim, os autores efetuam uma simulação onde comparam o comportamento do estimador que propõem com o estimador de Hill e com estimador baseado na regressão Rank-Size com  $\gamma = 0$  e  $\gamma = 0.5$ . Nesta simulação os autores utilizam dados com e sem dependência e diferentes distribuições, analisando os resultados para diferentes níveis de truncagem. Os resultados estabelecem uma superioridade por parte dos estimador proposto face aos outros estimadores, destacando também a superioridade do estimador com a correção de Gabaix and Ibragimov (2011) face ao estimador de Hill e ao Rank Size com  $\gamma = 0$ .

### 3. Simulação de Monte Carlo – Metodologia

O objetivo geral deste trabalho, que consiste em avaliar o comportamento de três estimadores num contexto de dependência, pode ser dividido em três objetivos específicos. Considerando os três estimadores, o primeiro objetivo passa por encontrar o  $\kappa$  que otimiza as propriedades dos estimadores, i.e., para cada PGD encontrar o nível de truncagem que otimiza as propriedades de cada um dos estimadores. Tendo o  $\kappa$  ótimo, os outros objetivos passam por comparar os estimadores quanto à sua qualidade em estimar o índice de cauda e também por averiguar a qualidade das expressões do erro padrão dos respetivos estimadores.

Para o cumprimento dos objetivos recorreu-se a uma simulação de Monte Carlo (SMC), que consistiu em gerar um conjunto de dados, com um índice de cauda conhecido e avaliar o comportamento dos três estimadores e das respetivas expressões para o erro padrão. Para o primeiro objetivo específico foi necessário estimar o índice de cauda para diferentes valores de  $\kappa$  e para cada um destes valores procurar aquele que otimiza as capacidades de cada um dos estimadores. Dado o conhecimento desse  $\kappa$  ótimo, doravante denotado por  $\kappa^*$ , é possível dar resposta aos outros dois objetivos, i.e., tendo os três estimadores “na sua capacidade máxima” compará-los quanto à sua capacidade na estimação do índice de cauda e do erro padrão.

Ao nível do software, este trabalho foi desenvolvido utilizando programa R com os pacotes de base (R Core Team, 2016), mais os seguintes pacotes: dplyr (Wickham and Francois, 2016), ggplot2 (Wickham, 2009), reshape2 (Wickham, 2007), stable-dist (Wuertz et al., 2015), tidyr (Wickham, 2016) e xtable (Dahl, 2016). Os códigos para a implementação dos estimadores e para parte dos processos geradores de dados foram criados pelo o autor do presente trabalho.

Nas próximas secções procura-se expor de forma clara e completa as principais características da SMC. Inicialmente, na secção 3.1 aborda-se os processos que geraram os dados utilizados na simulação. Esta análise é feita em duas dimensões: a

primeira consiste em descrever as distribuições utilizadas; e a segunda em expor as principais características das dependências usadas. A seção 3.2 procura expor como foi efetuada a simulação e as estatísticas calculadas com os resultados da simulação. Sendo que estas estatísticas obtidas serão analisadas, com detalhe, no capítulo 4.

### 3.1. Processos Geradores de Dados (PGD)

Para uma análise abrangente foram considerados diferentes processos geradores de dados (PGD), que podem ser agrupados quanto à distribuição (foram consideradas 6 distribuições diferentes), à presença ou ausência de dependência e ao tipo de dependência (no total 3 dependências diferentes), e quanto à dimensão do processo/número de observações (3 casos). Tanto nas distribuições, como nas dependências foi considerado mais do que uma parametrização. No total foram considerados perto de 300 casos diferentes.

No que diz respeito ao número de observações,  $N$ , foi definido que este assume os seguintes valores:  $N = \{500, 2000, 5000\}$ . Este conjunto de valores permite avaliar o comportamento dos três estimadores para dimensões pequenas (500) e dimensões grandes (2000 e 5000). Em séries temporais financeiras, com frequências elevadas, e.g. dados diários, basta considerar os últimos 5 anos para termos uma amostra com mais de 1000 observações. No caso de ações de empresas com alguma história, por exemplo, de empresas cotadas na bolsa desde os anos 90, facilmente se atingem séries financeiras com mais de 5000 observações diárias.

Os próximos dois pontos procuram clarificar como foram construídos os PGDs e as suas principais características no que toca à distribuição e à dependência.

#### 3.1.1. Distribuições

As distribuições consideradas foram a  $\alpha$ -Stable simétrica, Burr (Tipo XII), Cauchy, Lévy, Normal, Pareto e T-Student. Note-se que a distribuição Normal só é utilizada com a dependência GARCH, uma vez que nos casos de independência ou

dependência da média (por via autorregressiva ou de médias móveis) a distribuição produzida não tem caudas pesadas.

A distribuição  **$\alpha$ -Stable simétrica**, tirando alguns casos particulares<sup>5</sup>, tem uma função densidade probabilidade desconhecida, ou seja, não tem uma fórmula fechada. Esta distribuição é parametrizada por três elementos:  $\alpha$  representa o índice de cauda<sup>6</sup>,  $\sigma$  define a escala da distribuição e  $\mu$  a localização desta. Segundo Samorodnitsky and Taqqu (1994), para simular uma variável aleatória proveniente de uma distribuição  $\alpha$ -Stable simétrica, com  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$ , utiliza-se a seguinte fórmula

$$\varepsilon_i = \frac{\sin \alpha \gamma_i}{(\cos \gamma_i)^{1/\alpha}} \left( \frac{\cos [(1 - \alpha) \gamma_i]}{W_i} \right)^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} \quad (3.1)$$

onde  $\gamma_i$  é um valor aleatório gerado por uma distribuição Uniforme entre  $(-\pi/2, \pi/2)$  e  $W_i$  é o valor aleatório de uma exponencial de média 1.

Existem diversos tipos de parametrização para a distribuição **Burr** (ver Kleiber and Kotz (2003)), sendo que foi escolhido o tipo XII. Este tipo da distribuição Burr está definido em  $\mathbb{R}^+$  e tem a função de distribuição dada por,

$$F(x) = 1 - \left[ \frac{\eta}{(\eta + x^\tau)} \right]^\lambda \quad (3.2)$$

onde  $x, \eta, \lambda, \tau > 0$ . Para gerar uma série proveniente desta distribuição utilizou-se a seguinte expressão,

$$\varepsilon_i = F^{-1}(u_i | \eta, \lambda, \tau) = \left[ \eta(1 - u_i)^{-\lambda^{-1}} - \eta \right]^{\tau^{-1}} \quad (3.3)$$

onde  $u_i$  é um valor aleatório entre 0 e 1, produzido por uma distribuição uniforme. Segundo Beirlant et al. (2004), no caso desta distribuição, o índice de cauda é dado

---

<sup>5</sup>Alguns dos casos em que a fdp da  $\alpha$ -Stable simétrica tem uma fórmula fechada ocorre quando  $\alpha = 2$  temos a distribuição Normal e  $\alpha = 1$  temos a distribuição Cauchy.

<sup>6</sup>Apenas quando  $\alpha \in (0, 2)$ . Ver, por exemplo, Ibragimov (2009).



por  $\lambda\tau$ .

A distribuição de **Cauchy** tem como únicos parâmetros o parâmetro de localização ( $\mu$ ) e o parâmetro de escala ( $\sigma$ ). A sua função de distribuição é dada por

$$F(x) = \frac{1}{\pi \tan^{-1}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)} + \frac{1}{2}. \quad (3.4)$$

Segundo Samorodnitsky and Taqqu (1994) esta distribuição pode ser gerada com a seguinte fórmula,

$$\varepsilon_i = F^{-1}(u_i|\mu, \sigma) = \sigma \tan u_i + \mu \quad (3.5)$$

onde  $u_i$  é um valor aleatório produzido por uma distribuição uniforme definida entre  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Ainda no mesmo trabalho é referido que a distribuição de Cauchy é um caso particular da  $\alpha$ -Stable simétrica com  $\alpha = 1$ , logo o índice de cauda associado é de 1. Note-se que ao contrário, por exemplo da Burr, os parâmetros da distribuição Cauchy não alteram o índice de cauda.

Tal como a distribuição Cauchy, a distribuição **Lévy** também é um caso particular da distribuição  $\alpha$ -Stable, com a diferença de não ser simétrica. A Lévy corresponde a uma distribuição  $\alpha$ -Stable com  $\alpha = 0.5$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\mu = 0$  e  $\beta = 1$  ou  $\beta = -1$ , onde  $\beta$  é o parâmetro relativo à assimetria<sup>7</sup>. A função distribuição, com o parâmetro de localização igual a 0 e o parâmetro de escala igual a 1, é dada por

$$F(x) = \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{x^{-1}}}{\sqrt{2}}\right) \quad (3.6)$$

onde  $x > 0$  e  $\operatorname{erfc}$  é a função de erro complementar. A distribuição Lévy pode ser gerada como o inverso do quadrado da distribuição Normal estandardizada, i.e.,

$$\varepsilon_i = \frac{1}{Z_i^2} \quad (3.7)$$

---

<sup>7</sup>Com  $\beta = 1$  a cauda pesada é a direita e o contrário com  $\beta = -1$ .

onde  $Z_i$  é um valor aleatório proveniente de uma distribuição normal estandardizada. Como a correspondência com a  $\alpha$ -Stable dá-se com  $\alpha = 0.5$ , então este valor é também o índice de cauda.

A distribuição de **Pareto**, como referido no capítulo 2, segue uma PL para todo o seu domínio, i.e., a sua função distribuição é um polinómio de grau  $\alpha$ . Assim sendo, a função distribuição de Pareto é dada por,

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\delta}{x}\right)^\alpha \quad (3.8)$$

onde  $x > c$ . Esta distribuição é usada em tópicos de desigualdade na riqueza e no rendimento, onde um  $\alpha$  pequeno representa um maior nível de desigualdade (ver Gabaix (2009) e Gabaix (2016)). Deste modo, esta ideia poderá também ser adaptada aos retornos do ativos financeiros. Considere-se uma percentagem dos maiores retornos observados. Um  $\alpha$  menor significa uma maior desigualdade nos retornos, ou seja, a magnitude dos retornos é mais extremada. No fundo, esta é uma das leituras possíveis do estudo do índice de cauda de uma série financeira.

Na modelação de séries financeiras é usual utilizar-se a distribuição **T-Student** como possível distribuição teórica para os retornos. A função distribuição é dada por,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} dx \quad (3.9)$$

onde  $\Gamma(\cdot)$  é a função Gama. Neste caso o índice de cauda é dado pelos graus de liberdade,  $v$ .

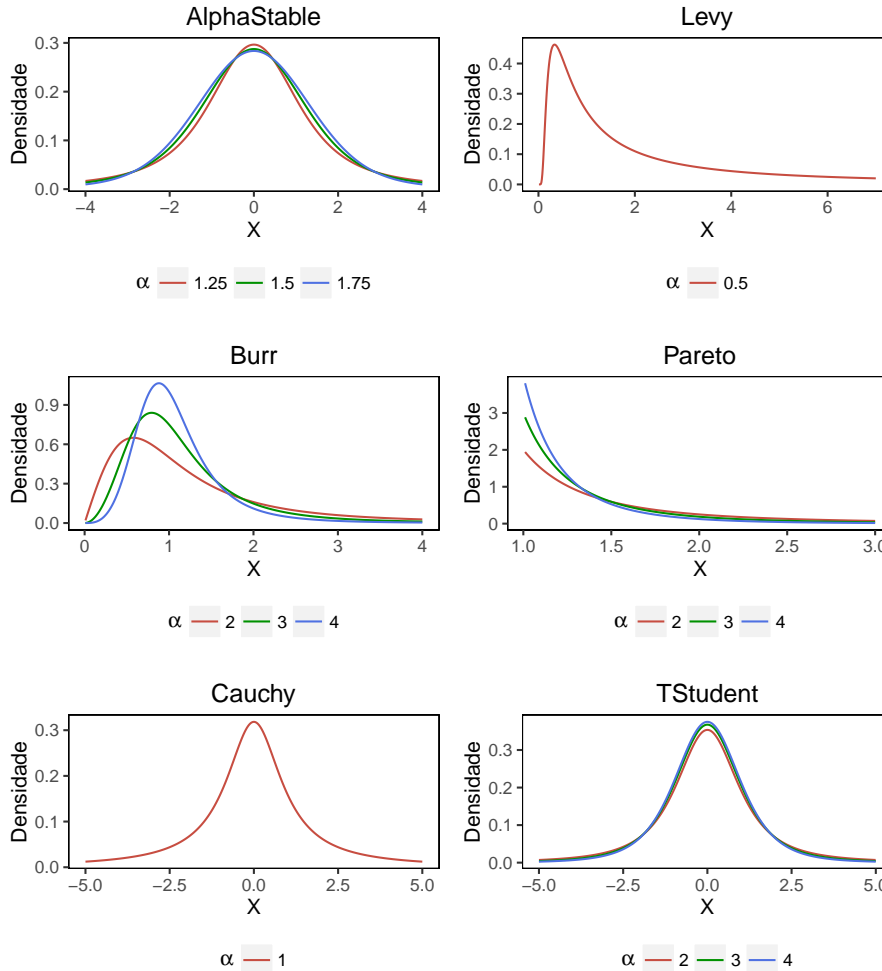
### 3.1.2. Parametrização das distribuições

A tabela 3.1 resume a parametrização utilizada para a SMC. Esta parametrização procura ser o mais completa possível, para uma análise mais cuidada dos estimadores. Gabaix (2009) e Gabaix (2016) abordam, por área de aplicação do índice de

**Tabela 3.1:** Parametrização das distribuições a utilizar nos PGDs.

Distribuição	Parâmetros	Índice de cauda
$\alpha$ -Stable	$\alpha = \{1.25, 1.50, 1.75\}$ ;	$\alpha$
Burr	$\eta = \lambda = 1$ ; $\tau = \{2, 3, 4\}$ ;	$\tau$
Cauchy	$\mu = 0$ ; $\sigma = 1$ ;	1
Lévy	$\mu = 0$ ; $\sigma = 1$ ;	0.5
Pareto	$\alpha = \{2, 3, 4\}$ ; $\delta = 1$ ;	$\alpha$
T-Student	$v = \{2, 3, 4\}$ ;	$v$

cauda, diversos valores que este pode assumir. Por exemplo, dizem que nos retornos o índice de cauda anda em torno de 3, na análise da riqueza este é de 1.5 e no rendimento varia entre 1.5 e 3. Outro exemplo é a *Zipf's Law* onde se espera um índice de cauda de 1.



**Figura 3.1:** Funções densidade probabilidade das distribuições consideradas.

O conjunto de distribuições considerado é vasto e procura ser um grupo heterogêneo, partilhando a característica de todas terem caudas pesadas. Considerando a figura 3.1, esta heterogeneidade verifica-se por existirem distribuições que são: simétricas ( $\alpha$ -Stable simétrica, Cauchy e T-Student), por contra ponto as distribuições Burr, Lévy e Pareto que são assimétricas; definidas em  $\mathbb{R}^+$  (casos da Burr, Lévy e Pareto) e outras definidas em  $\mathbb{R}$ . Na mesma figura é possível constatar as implicações que a variação do índice de cauda tem nas funções densidade probabilidade. Note-se, como referido no capítulo 2, este tipo de distribuições tem um decaimento para 0 lento. Através da análise da figura 3.1, é possível observar que para a mesma distribuição, à medida que o índice de cauda ( $\alpha$ ) diminui, a cauda da distribuição distancia-se do eixo do X, isto é, tem uma maior massa probabilística associada a valores elevados de X.

### 3.1.3. Independência, dependências e tipos de dependência

Uma parte dos PGDs não tem dependência, ou seja, são **independentes e identicamente distribuídos** (IID). Esta opção permite avaliar os estimadores num contexto, que à partida, lhes é mais favorável e num contexto de algumas aplicações de dados seccionais,<sup>8</sup> existentes para estes estimadores. Neste caso as séries são dadas por

$$y_i = \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, N \quad (3.10)$$

Apesar da pertinência do caso IID, este não se verifica para as séries temporais. Em geral, considera-se que as séries podem ser dependentes na média ou na variância. Para o primeiro caso são considerados dois tipos de dependência: a dependência autorregressiva de ordem 1 e a dependência de médias móveis de ordem 1, doravante denominadas por dependências AR e MA, respetivamente. No que diz respeito à

---

<sup>8</sup>Exemplos das aplicações referidas são: Zipf's Law, estudo da dimensão das empresas e outras baseadas em dados seccionais, onde não existe dependência entre as observações.

dependência na variância, é considerada a dependência *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* (GARCH).

A **dependência AR** (de ordem 1) é dada por,

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, N \quad (3.11)$$

onde  $y_0$  assumiu o valor 0, enquanto a **dependência MA** (de ordem 1) é dada por,

$$y_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1} \quad t = 1, \dots, N \quad (3.12)$$

onde  $\varepsilon_0 = 0$ . A principal diferença entre estas duas dependências é a duração do efeito de um choque no momento  $t$ . Independentemente dos parâmetros, desde que  $|\phi| < 1$  e  $|\theta| < 1$ , na dependência MA de ordem 1 o efeito do choque em  $t$  só produz efeitos em  $t + 1$ , enquanto que na dependência AR de ordem 1 este efeito perdura por algum tempo. Assim, e como se verá na análise dos resultados, a dependência AR é mais “forte” (considerando a mesma parametrização) que a dependência MA, o que provoca uma maior distorção face ao caso de dados IID. Para uma análise detalhada destas duas dependências ver Wei (2006). No que diz respeito à SMC ambas as dependências foram parametrizadas com os mesmos valores,  $\phi = \theta = \{0.25, 0.50, 0.75\}$ .

Na simulação também é considerada a **dependência GARCH**, com erros provenientes de uma distribuição Normal estandardizada e de uma T-Student com  $v = 4$  e variância unitária. Esta dependência permite captar algumas das características das séries temporais financeiras, entre as quais os *clusters* de volatilidade da série e o excesso de *kurtosis* da distribuição marginal. Ao contrário das outras dependências utilizadas neste trabalho, a dependência GARCH altera o índice de cauda consoante

os seus parâmetros. Considere-se a dependência GARCH(1,1) dada por

$$y_t = u_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad (3.13)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (3.14)$$

onde  $\omega = 1$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.9$  quando  $\varepsilon_t$  provem de uma distribuição Normal e  $\beta = \{0.8, 0.88, 0.9\}$  quando  $\varepsilon_t$  provem da T-Student. Os índices de cauda correspondentes foram deduzidos em Davis and Mikosch (2009). Para o caso IGARCH(1,1), independentemente da distribuição de  $\varepsilon_t$ , o índice de cauda é 2, enquanto que para o caso da T-Student com  $\beta = \{0.8, 0.88\}$ , o índice de cauda é de 3.68 e 2.90, respetivamente.

### 3.2. Procedimento

Inicialmente foram criados os PGDs definidos no ponto anterior com as combinações possíveis, i.e., para todas as distribuições, exceto para a Normal, foram criados os PGDs com dados IID e dados com dependências AR e MA, não esquecendo todas as possíveis dimensões e parametrizações diferentes. No que concerne à dependência GARCH, esta só foi aplicada às distribuições Normal e T-Student. Para cada PGD foram acrescentadas 50 observações com o objetivo de iniciar os processos com dependência. Foram geradas 1000 réplicas (S) de cada PGD.

Como referido no início deste capítulo, para encontrar o  $\kappa^*$  foi necessário estimar os índices de cauda para cada PGD com diferentes  $\kappa$  e procurar aquele que minimizasse a raiz do erro quadrático médio. Assim, definiram-se as sequências de valores possíveis para  $\kappa$  da seguinte forma:

$$\kappa = 0.01, 0.02, \dots, \kappa^{max} \quad (3.15)$$

onde o  $\kappa^{max}$  varia consoante a distribuição. Para distribuições simétricas em torno

de 0 ( $\alpha$ -Stable simétrica, Cauchy, Normal e T-Student), o  $\kappa^{max} = 0.4$ . No caso das distribuições de Burr e Lévy como são assimétricas, com a moda menor que a mediana, o  $\kappa^{max} = 0.6$ . No caso da distribuição de Pareto o  $\kappa^{max} = 1$ , porque esta verifica a PL em todo  $X$ .

Tendo o  $\kappa^*$  já é possível cumprir os outros dois objetivos específicos. Para que uma comparação completa entre os estimadores fosse possível de ser realizada, foi necessário recorrer a um conjunto de estatísticas. Tanto na análise da estimação do índice de cauda, como do erro padrão, foi necessário compará-los em três dimensões: o nível de truncagem ótimo necessário, o enviesamento e a eficiência dos estimadores. Para avaliar o nível de truncagem ótimo recorreu-se ao  $\kappa^*$  no formato percentual, i.e., um  $\kappa^* = 0.01$ , no próximo capítulo é  $\kappa\%_i = \kappa^* \times 100 = 1\%$ . No que concerne ao enviesamento utiliza-se o enviesamento relativo, em percentagem, que é dado por,

$$\text{Env}_j = \frac{100}{\beta} \left( \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (\hat{\beta}_i^{(j)} - \beta) \right) \quad (3.16)$$

onde  $\beta$  é o verdadeiro valor,  $\hat{\beta}$  é o estimador de  $\beta$ , que no caso deste trabalho pode ser o estimador do índice de cauda ou do erro padrão, e  $j$  identifica um dos três estimadores, i.e.,  $j = \{Hill, GI11, NR15\}$ . Para a avaliação da eficiência calculou-se a variância das estimativas obtidas do estimador  $j$ , denotando-se a estatística por  $\text{var}_j$ . Como é provável que os estimadores mais eficientes possam não ser os menos enviesados, recorreu-se a uma estatística que engloba as duas características, que é a raiz do erro quadrático médio relativo, denotado por  $EQ_j$ . Esta estatística não é mais do que a raiz do erro quadrático médio ponderada pelo verdadeiro valor, ou seja,

$$EQ_j = \frac{100}{\beta} \left( \sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (\hat{\beta}_i^{(j)} - \beta)^2} \right) \quad (3.17)$$

onde  $\beta$  é o verdadeiro valor,  $\hat{\beta}$  é o estimador de  $\beta$  e  $j$  identifica um dos três estima-

dores, i.e.,  $j = \{Hill, GI11, NR15\}$ .

A obtenção do verdadeiro valor para o cálculo das estatísticas difere se estamos a avaliar o índice de cauda ou o erro padrão do estimador. No primeiro caso, o verdadeiro valor,  $\alpha$ , é dado pelas parametrizações das distribuições e das dependências como foi referido na secção 3.1.1. No segundo caso, o verdadeiro erro padrão do estimador,  $EP(\hat{\alpha}_j)$ , é dado pela raiz da variância das estimativas do índice de cauda.

No anexo A é apresentada um outra estatística, que consiste na média das estimativas do índice de cauda ou do erro padrão, sendo denotadas por  $\bar{\alpha}_j$  e  $\bar{\sigma}_j$ , respetivamente.

## 4. Simulação de Monte Carlo – Resultados

Neste capítulo é feita uma análise detalhada dos resultados da simulação de Monte Carlo. Antes de iniciar, considere-se as seguintes abreviaturas para os estimadores: Hill para o estimador Hill (1975), GI11 para Gabaix and Ibragimov (2011) e NR15 para Nicolau and Rodrigues (2015). Os resultados, presentes neste capítulo, são resultados médios por distribuição, dependência ou distribuição e dependência. Os resultados mais detalhados estão apresentados nas tabelas do anexo A.

Em geral, considerando a situação ótima, ou seja, quando  $\kappa = \kappa^*$ , o estimador de Hill tende a obter melhores resultados do que os outros estimadores considerados. Contudo, como se verá na secção 4.1 e pelos gráficos no anexo B, o estimador de Hill é menos robusto que os outros, em especial o NR15, quando o  $\kappa^*$  é desconhecido.

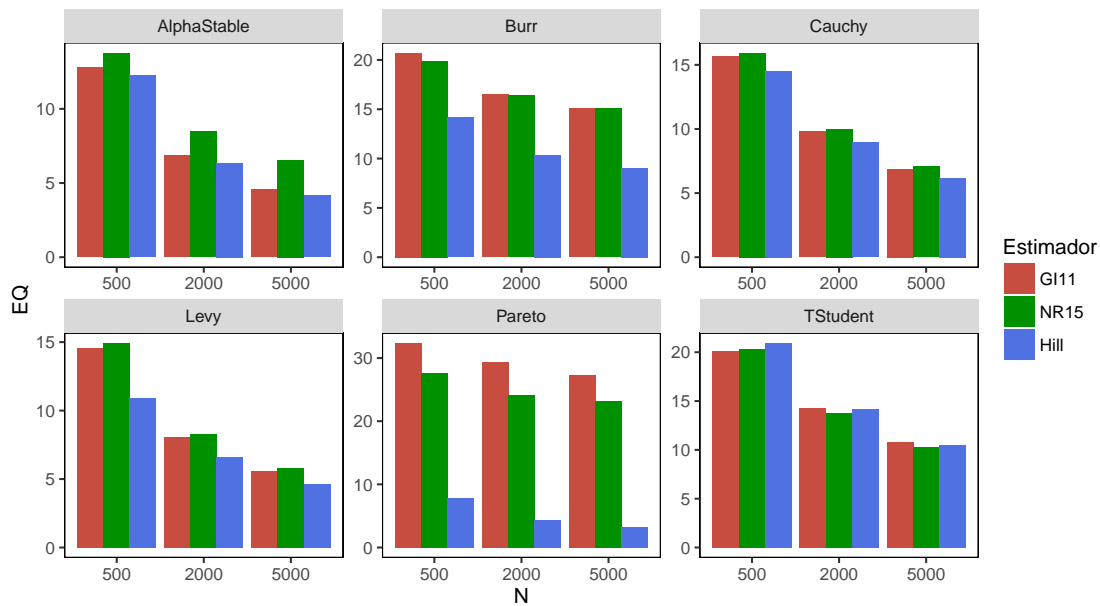
O conjunto de gráficos presente na figura 4.1<sup>9</sup> retrata a média do EQ para cada distribuição<sup>10</sup>, neste caso é possível constatar, que à medida que o número de observações aumenta, o EQ médio diminui. Outro aspeto importante a salientar é que, tirando o caso da distribuição de Pareto, a *performance* dos estimadores é relativa-

---

<sup>9</sup>Note-se que os gráficos presentes nas figuras 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 apresentam escalas diferentes.

<sup>10</sup>Para o cálculo do EQ médio foi excluída a dependência GARCH, para que as distribuições sejam comparáveis. Note-se que as distribuições presentes no gráfico foram construídas sob independência, dependência AR e MA.





**Figura 4.1:** EQ médio da estimação do índice de cauda por distribuição.

mente próxima e a diferença tende a diminuir à medida que a amostra aumenta.

O desempenho dos estimadores por tipo de dependência pode ser encontrado na figura 4.2. No caso IID os estimadores apresentam resultados semelhantes, contudo com dependência já se verificam algumas diferenças. Com dependência AR e MA o estimador de Hill tende a obter melhores resultados que os outros estimadores. Esta diferença é maior quando a dependência é AR, pois este tipo de dependência é mais “forte” que a dependência MA. No que diz respeito à dependência GARCH, os estimadores baseados em regressões obtêm melhores resultados, sendo que entre estes a diferença é pequena e diminui com o aumento de  $N$ , enquanto a diferença destes face ao estimador de Hill permanece.

No que concerne à estimação do erro padrão dos estimadores, como se pode ver pelas figuras 4.3 e 4.4, não há propriamente um padrão geral favorável a um estimador. Contudo, existem alguns contextos que favorecem uns estimadores para o erro padrão<sup>11</sup> em detrimento de outros. Em termos de desempenho dos estimadores face a diferentes distribuições (figura 4.3), nota-se um comportamento semelhante

<sup>11</sup>Por estimadores para o erro padrão entenda-se as expressões do erro padrão apresentadas no capítulo 2. Por exemplo, quando se refere ao estimador de Hill para o erro padrão está-se a referir à utilização da expressão (2.5) enquanto estimador.

entre o estimador GI11 e o Hill. O estimador NR15 para o erro padrão apresenta um desempenho superior aos demais, quando a distribuição é a de Pareto, enquanto se for  $\alpha$ -Stable os resultados são inferiores aos outros estimadores. Outro aspeto relevante centra-se na deterioração da qualidade do estimador NR15 à medida que a dimensão da amostra aumenta. O que já não é verdade, em geral, para os outros estimadores.

Concentrando a análise na agregação dos resultados por tipo de dependências, figura 4.4, verificamos que, com independência ou uma dependência mais “fraca” (MA), o estimador de Hill apresenta melhores resultados. No caso da dependência GARCH, os estimadores baseados em regressões tendem a obter melhores resultados que o estimador de Hill. Já com dependência AR, o estimador NR15 para amostras de pequena dimensão é melhor que os restantes, embora perca qualidade à medida que a dimensão da amostra aumenta, passando nesse caso, o estimador de Hill a obter melhores resultados.

Ao compararmos os resultados presentes nas figuras 4.1 com os da 4.3 e os da 4.2 com os da 4.4 observa-se alguma dicotomia dos resultados. Ou seja, na estimação do índice de cauda existiam alguns padrões e um estimador que, com  $\kappa^*$ , tinha um desempenho superior, enquanto que na estimação do erro padrão não se observa uma regularidade clara.

Nas próximas secções procurar-se-á dar resposta aos objetivos específicos enunciados no capítulo anterior e dissecar algumas das conclusões já retiradas. A primeira secção avalia o  $\kappa^*$  de cada estimador para diferentes PGDs. Na segunda secção analisa-se com mais detalhe a qualidade dos estimadores na estimação do índice de cauda, tanto ao nível do enviesamento, bem como da eficiência. A última secção é semelhante à anterior só que analisa a estimação do erro padrão em vez da estimação do índice de cauda.

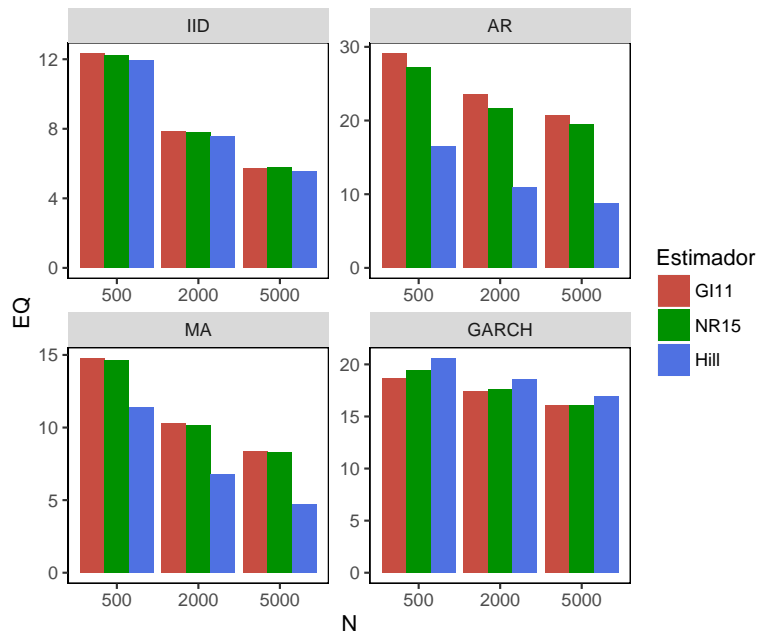


Figura 4.2: EQ médio da estimação do índice de cauda por dependência.

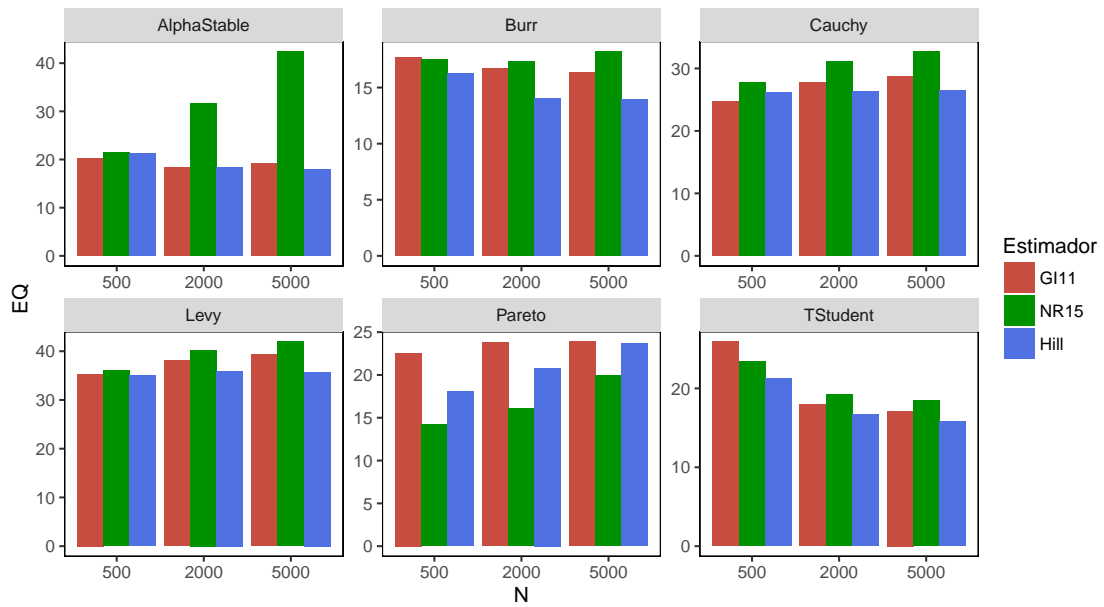


Figura 4.3: EQ médio da estimação do erro padrão por distribuição.

## 4.1. Escolha do $\kappa$ ótimo

**Tabela 4.1:** Valores médios de  $\kappa^*$  por estimador, distribuição e dependência.

Distribuição	Tipo Dep.	500 obs.			2000 obs.			5000 obs.		
		$\kappa\%_{GI11}$	$\kappa\%_{NR15}$	$\kappa\%_{Hill}$	$\kappa\%_{GI11}$	$\kappa\%_{NR15}$	$\kappa\%_{Hill}$	$\kappa\%_{GI11}$	$\kappa\%_{NR15}$	$\kappa\%_{Hill}$
$\alpha$ -Stable	IID	30	31	20	29	32	19	29	32	19
$\alpha$ -Stable	AR	32	33	21	31	34	20	30	34	19
$\alpha$ -Stable	MA	31	32	20	30	32	19	29	33	19
Burr	IID	28	26	15	19	18	9	14	13	7
Burr	AR	59	59	52	58	58	50	57	58	50
Burr	MA	56	56	36	53	54	33	52	53	32
Cauchy	IID	27	25	15	21	20	13	18	18	11
Cauchy	AR	30	32	20	27	27	15	23	24	13
Cauchy	MA	29	27	18	23	22	13	20	19	11
Lévy	IID	60	60	44	56	56	33	48	46	25
Lévy	AR	60	60	57	60	60	48	60	60	39
Lévy	MA	60	60	49	60	60	37	54	52	31
Normal	GARCH	28	30	19	25	28	15	22	28	12
Pareto	IID	100	100	99	100	100	100	100	100	100
Pareto	AR	100	100	99	80	100	99	15	100	99
Pareto	MA	100	100	98	100	100	98	100	100	98
T-Student	IID	8	7	5	5	5	3	4	4	2
T-Student	AR	12	11	7	9	9	5	8	8	4
T-Student	MA	10	10	6	7	7	4	6	5	3
T-Student	GARCH	12	11	7	8	9	4	6	7	3

Na tabela 4.1 estão os valores referentes ao  $\kappa^*$  para diferentes distribuições, dependências e estimadores. O primeiro aspecto a salientar é de que o estimador de Hill atinge o seu ótimo com um  $\kappa^*$  menor. O  $\kappa^*$  do estimador de Hill ronda, em geral, entre metade a dois terços do  $\kappa^*$  para os estimadores baseados numa regressão. Por sua vez, os estimadores GI11 e NR15 apresentam valores muito semelhantes para  $\kappa^*$ .

À medida que a dimensão da amostra aumenta, para a maioria dos casos, o  $\kappa^*$  tende a diminuir. Por exemplo, para a distribuição T-Student, com dados IID, este passa de 8% para 4%, quando a amostra aumenta de 500 para 5000. Por outro lado, os processos baseados na distribuição  $\alpha$ -Stable apresentam uma constância no seu  $\kappa^*$ , rondando os 30% e os 20% para os estimadores baseados numa regressão e para

o estimador de Hill, respetivamente. No caso da distribuição de Pareto, como visto anteriormente, esta segue uma PL em todo o seu domínio, portanto é lógico que, em geral, não requeira uma truncagem dos dados, logo  $\kappa\% = 100$ .

Relembrando o gráfico das densidades (gráfico 3.1), todas as distribuições, à exceção da Pareto, só verificam a PL em parte do seu domínio. Assim, requerem que seja feita uma truncagem. Esta ideia é corroborada pelos  $\kappa^*$  encontrados através da simulação. Outro aspeto relevante passa pela relação entre o índice de cauda e o  $\kappa^*$ . Recorrendo às tabelas, mais detalhadas, presentes no anexo A, verifica-se que à medida que o índice de cauda aumenta, mais observações são necessárias, i.e., um maior  $\kappa^*$ .

Foi visto no início do capítulo que a existência de dependência tinha repercussões na qualidade do estimador. O  $\kappa^*$ , por seu turno, também é afetado pela existência ou não de dependência e pelo tipo desta, caso exista. Face ao caso onde os dados são IID, o  $\kappa^*$  aumenta quando se introduz uma dependência MA e aumenta ainda mais quando a dependência é AR. No que diz respeito à dependência GARCH, esta também aumenta o  $\kappa^*$  e em magnitudes semelhantes à dependência AR. Voltando aos dados mais detalhados do anexo A, observamos que também o parâmetro associado à dependência é relevante para explicar as variações do  $\kappa^*$ . Valores mais elevados de dependência estão associados a valores mais altos de  $\kappa^*$ .

Apesar de toda a análise ser feita com base num  $\kappa$  ótimo, na realidade este  $\kappa$  é desconhecido e de difícil estimação. Embora destes resultados possam ser tiradas algumas intuições para a escolha de um  $\kappa$ , é valorizado um estimador que seja robusto à escolha do  $\kappa$ . Neste sentido, foram gerados os gráficos presentes no anexo B. Estes gráficos permitem observar que, para amostras com 5000 observações<sup>12</sup>, o estimador NR15 é o mais robusto à escolha do  $\kappa$ , seguido do GI11 e com o estimador de Hill a evidenciar uma incapacidade para estimações com um  $\kappa$  que não o ótimo. Assim, apesar do bom desempenho do estimador de Hill com  $\kappa^*$ , regra geral o  $\kappa^*$  é

---

<sup>12</sup>Este padrão também se verifica para amostras mais pequenas.

desconhecido, portanto o desempenho deste estimador diminui. Já com o estimador NR15, este efeito é menor, i.e., o desconhecimento de  $\kappa^*$  não tem efeitos tão elevados no desempenho do estimador NR15 como nos outros estimadores considerados.

## 4.2. Estimação do índice de cauda

Como foi visto no início deste capítulo, o estimador de Hill é o que produz melhores resultados no PGDs considerados (com o  $\kappa^*$  conhecido). Nesta secção procura-se comparar os estimadores quanto ao seu enviesamento e à sua eficiência.<sup>13</sup> Em geral, o enviesamento, como pode ser visto na tabela 4.2, diminui à medida que a dimensão das séries aumenta. Uma vez que o enviesamento encontrado nas SMC é negativo, os estimadores subestimam o verdadeiro valor do índice de cauda.

**Tabela 4.2:** Enviesamento médio da estimação do índice de cauda.

Distribuição	Tipo Dep.	500 obs.			2000 obs.			5000 obs.		
		$Env_{GI11}$	$Env_{NR15}$	$Env_{Hill}$	$Env_{GI11}$	$Env_{NR15}$	$Env_{Hill}$	$Env_{GI11}$	$Env_{NR15}$	$Env_{Hill}$
$\alpha$ -Stable	IID	-2.36	-1.48	-2.25	-1.21	-0.45	-1.11	-0.61	-0.02	0.44
$\alpha$ -Stable	AR	-2.73	-1.81	-3.75	-1.82	-1.49	-1.44	-1.33	-0.42	-0.69
$\alpha$ -Stable	MA	-3.93	-3.10	-2.74	-1.76	-0.75	-1.23	-1.01	-0.37	-0.20
Burr	IID	-8.12	-6.67	-6.48	-5.22	-4.21	-4.00	-3.70	-2.89	-3.31
Burr	AR	29.06	28.53	14.76	28.13	28.03	14.68	28.30	28.05	14.86
Burr	MA	-0.80	-0.48	-2.31	0.27	0.63	-0.83	0.79	1.07	-0.35
Cauchy	IID	-6.75	-4.89	-4.07	-3.89	-2.62	-3.52	-2.46	-1.74	-2.37
Cauchy	AR	-4.70	-5.59	-6.97	-5.22	-3.77	-4.77	-3.63	-2.59	-3.00
Cauchy	MA	-7.30	-5.24	-6.60	-4.67	-3.07	-3.80	-2.83	-1.95	-2.43
Lévy	IID	-2.44	-1.51	-3.17	-2.36	-1.64	-1.99	-1.54	-1.00	-0.97
Lévy	AR	5.32	5.89	-3.11	-0.90	0.44	-3.76	-1.65	-0.45	-2.46
Lévy	MA	-1.63	-0.90	-3.90	-2.61	-1.83	-2.42	-1.94	-1.31	-1.68
Normal	GARCH	-2.53	-1.73	-4.35	-4.68	-3.60	-5.20	-5.67	-5.43	-4.53
Pareto	IID	0.08	1.16	0.35	-0.21	0.25	-0.03	-0.07	0.17	0.05
Pareto	AR	51.60	42.83	7.71	48.77	39.23	3.82	40.21	37.93	2.87
Pareto	MA	17.23	16.23	-0.26	16.58	15.01	0.07	16.71	14.82	0.18
T-Student	IID	-14.94	-15.08	-13.14	-11.66	-10.36	-11.58	-8.78	-8.03	-8.54
T-Student	AR	-10.88	-11.00	-11.11	-7.42	-6.77	-6.82	-5.13	-4.17	-4.48
T-Student	MA	-12.38	-13.24	-12.77	-8.80	-7.94	-8.65	-6.28	-5.12	-5.63
T-Student	GARCH	-10.26	-11.19	-12.18	-9.18	-8.81	-9.35	-7.77	-7.60	-7.13

O estimador NR15 é o que apresenta, em geral, um menor enviesamento, sendo

<sup>13</sup>Note-se que o Erro Quadrático Médio, que serve de base o EQ, pode ser decomposto em enviesamento e eficiência.

este mais robusto à distribuição utilizada do que à dependência. Já o estimador de Hill, que em geral acompanha o estimador NR15 em termos de enviesamento, apresenta uma maior indiferença em relação ao tipo de dependência do que à distribuição. Por outro lado, na estimação do índice de cauda, com as distribuições definidas em  $\mathbb{R}^+$ , o estimador de Hill apresenta uma *performance* superior aos outros estimadores, em particular quando a distribuição é a Pareto. Na estimação do índice de cauda com dependência GARCH, o estimador NR15 tem um desempenho superior ao dos outros.

**Tabela 4.3:** Eficiência média da estimação do índice de cauda.

Distribuição	Tipo Dep.	500 obs.			2000 obs.			5000 obs.		
		$Var_{GI11}$	$Var_{NR15}$	$Var_{Hill}$	$Var_{GI11}$	$Var_{NR15}$	$Var_{Hill}$	$Var_{GI11}$	$Var_{NR15}$	$Var_{Hill}$
$\alpha$ -Stable	IID	0.0201	0.0249	0.0213	0.0055	0.0097	0.0056	0.0023	0.0058	0.0024
$\alpha$ -Stable	AR	0.0487	0.0577	0.0419	0.0137	0.0213	0.0113	0.0062	0.0138	0.0048
$\alpha$ -Stable	MA	0.0277	0.0345	0.0274	0.0080	0.0143	0.0072	0.0035	0.0086	0.0031
Burr	IID	0.0945	0.0941	0.1110	0.0408	0.0407	0.0489	0.0226	0.0231	0.0256
Burr	AR	0.2318	0.1737	0.0908	0.0718	0.0542	0.0239	0.0303	0.0232	0.0097
Burr	MA	0.0686	0.0627	0.0595	0.0193	0.0201	0.0160	0.0077	0.0089	0.0068
Cauchy	IID	0.0106	0.0119	0.0119	0.0040	0.0045	0.0036	0.0019	0.0021	0.0016
Cauchy	AR	0.0300	0.0321	0.0236	0.0106	0.0133	0.0088	0.0056	0.0073	0.0046
Cauchy	MA	0.0159	0.0191	0.0136	0.0060	0.0072	0.0053	0.0030	0.0035	0.0026
Lévy	IID	0.0014	0.0015	0.0010	0.0004	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002
Lévy	AR	0.0105	0.0117	0.0051	0.0034	0.0038	0.0017	0.0016	0.0019	0.0009
Lévy	MA	0.0027	0.0027	0.0016	0.0007	0.0008	0.0006	0.0003	0.0004	0.0003
Normal	GARCH	0.0743	0.0874	0.0904	0.0915	0.0990	0.1069	0.1003	0.1027	0.1216
Pareto	IID	0.0357	0.0320	0.0184	0.0092	0.0087	0.0047	0.0039	0.0039	0.0020
Pareto	AR	0.2578	0.1191	0.0565	0.1088	0.0349	0.0176	0.4701	0.0172	0.0096
Pareto	MA	0.0761	0.0535	0.0231	0.0198	0.0155	0.0061	0.0086	0.0071	0.0026
T-Student	IID	0.3043	0.2694	0.3922	0.1433	0.1321	0.1365	0.0957	0.0836	0.1031
T-Student	AR	0.2634	0.2769	0.2941	0.1421	0.1297	0.1407	0.0852	0.0806	0.0854
T-Student	MA	0.2780	0.2520	0.2996	0.1460	0.1363	0.1476	0.0897	0.0869	0.0929
T-Student	GARCH	0.2686	0.2828	0.3042	0.2014	0.1992	0.2163	0.1555	0.1458	0.1848

Em termos de eficiência, o estimador de Hill é o que tem os melhores resultados. Contudo, esta eficiência é sensível às distribuições utilizadas. Por exemplo, o estimador tem uma menor eficiência quando as distribuições utilizadas são a  $\alpha$ -Stable e a T-Student. Esta superioridade do estimador de Hill na eficiência pode ser a principal razão para a sua qualidade da estimação do índice de cauda, quando avaliada

pelo EQ. Isto quer dizer que, apesar do estimador de NR15 ser o menos enviesado, o estimador de Hill, dada a sua eficiência na estimação do índice de cauda, acaba por produzir melhores resultados em termos de EQ.

Por fim, recorrendo aos dados detalhados presentes no anexo A, é possível verificar que, em geral, a qualidade da estimação do índice de cauda diminui com o aumento do índice de cauda e, como seria de esperar, diminui com o aumento do parâmetro associado à dependência. Estas constatações são confirmadas pelos gráficos do anexo B, onde para além do  $\kappa^*$ , também tem em linha de conta os valores para  $\kappa$ . Através dos gráficos, verifica-se que as curvas tendem a subir quando a dependência aumenta, refletindo a perda de qualidade. Nos mesmos gráficos observa-se ainda um aumento do declive das curvas a quando do aumento do índice de cauda.

### 4.3. Estimação do erro padrão

No início do presente capítulo concluiu-se que, em termos de EQ, não há um padrão que permita eleger um estimador para o erro padrão como o melhor. A análise feita com base no EQ pode ser estendida à análise do enviesamento e da eficiência. A tabela 4.4 retrata o enviesamento médio por distribuição, dependência e estimador. Os resultados apontam para a ausência de um padrão que permita uma generalização dos resultados a favor de um estimador.

Apesar da inexistência de um padrão geral, é possível encontrar pequenos padrões, tais como, o menor enviesamento do estimador de Hill num contexto de dados IID. Esta vantagem do estimador de Hill, num contexto IID, corrobora a ideia já transmitida através da figura 4.4.

Na tabela 4.3 encontra-se a média das estimativas da variância do estimador de índice de cauda, ou seja, estas estimativas são o quadrado do erro padrão em estudo nesta secção. Combinando a tabela 4.3 com a 4.4 nota-se que as expressões para o erro padrão tendem a aumentar o enviesamento (tornando-se mais negativo), à medida que a dimensão da amostra aumenta, o que coincide com a diminuição,



**Tabela 4.4:** Enviesamento médio da estimação do erro padrão.

Distribuição	Tipo Dep.	500 obs.			2000 obs.			5000 obs.		
		$Env_{GI11}$	$Env_{NR15}$	$Env_{Hil}$	$Env_{GI11}$	$Env_{NR15}$	$Env_{Hil}$	$Env_{GI11}$	$Env_{NR15}$	$Env_{Hil}$
$\alpha$ -Stable	IID	18.82	8.49	0.34	15.49	-10.80	0.71	15.44	-24.08	0.10
$\alpha$ -Stable	AR	-19.01	-24.28	-27.54	-23.18	-40.13	-26.73	-25.79	-51.17	-27.08
$\alpha$ -Stable	MA	-2.61	-10.57	-12.98	-5.84	-28.04	-12.46	-7.71	-39.26	-12.82
Burr	IID	11.09	13.21	0.77	5.88	7.49	0.64	6.51	8.14	0.48
Burr	AR	-16.98	-10.86	-18.86	-22.79	-19.52	-18.80	-22.95	-21.98	-19.63
Burr	MA	-1.87	0.49	-9.59	-4.84	-8.55	-7.47	-3.86	-12.01	-8.82
Cauchy	IID	10.29	7.53	1.68	4.93	2.14	0.21	5.67	0.37	3.08
Cauchy	AR	-31.30	-35.60	-35.68	-40.34	-45.34	-38.45	-42.98	-48.75	-39.51
Cauchy	MA	-14.44	-17.77	-16.83	-19.96	-23.33	-19.54	-20.77	-25.39	-19.93
Lévy	IID	4.97	3.85	2.81	4.19	-2.00	3.68	2.25	-0.92	3.32
Lévy	AR	-53.90	-55.76	-55.31	-61.38	-62.79	-57.52	-63.76	-66.55	-58.47
Lévy	MA	-23.39	-23.06	-22.82	-24.96	-29.14	-24.13	-26.66	-30.10	-23.20
Normal	GARCH	-16.00	-19.08	-34.73	-60.13	-62.62	-66.52	-74.60	-77.10	-77.65
Pareto	IID	4.21	10.09	3.50	2.50	5.30	1.06	-1.09	0.12	-1.40
Pareto	AR	-31.77	-14.80	-29.54	-34.56	-22.06	-36.07	-31.32	-28.37	-40.97
Pareto	MA	-16.25	-3.81	-9.11	-18.32	-11.26	-11.31	-21.65	-17.19	-13.45
T-Student	IID	20.41	15.10	1.35	12.52	14.75	2.11	11.52	14.60	5.57
T-Student	AR	7.32	2.56	-9.42	-7.19	-5.47	-12.81	-11.86	-9.51	-13.65
T-Student	MA	11.84	7.84	-5.95	-1.11	1.46	-6.68	-4.94	-1.12	-7.51
T-Student	GARCH	4.62	-1.35	-16.44	-23.84	-25.01	-32.22	-33.05	-33.01	-38.07

em média, da variância do estimador do índice de cauda. Isto pode indicar um sobre impacto do aumento da amostra, uma vez que os três estimadores têm no denominador o número de observações utilizadas na estimação.

Das expressões para o erro padrão verifica-se que estas dependem da estimativa do índice de cauda. Assim, seria razoável assumir que a qualidade da estimação do erro padrão estivesse indexada à qualidade da estimação do índice de cauda. Contudo, isto não se verifica, uma vez que a qualidade das estimativas para o índice de cauda tendem a melhorar com a amostra e o mesmo não se verifica na estimação do erro padrão.

A eficiência dos estimadores do erro padrão tende a melhorar à medida que a dimensão da amostra aumenta. Isto quer dizer que com grandes amostras a variabilidade das estimativas do erro padrão é pequena. Note-se que a eficiência da estimação do erro padrão é afetada negativamente com desvios face à PL e com a

existência de dependência.

## 5. Conclusões

O presente trabalho procurou comparar o comportamento de três estimadores do índice de cauda em diversos contextos. Para além da estimação do índice, procurou-se também avaliar a capacidade de estimação das expressões para o erro padrão, uma vez que o conhecimento deste é pertinente para, por exemplo, contextos de inferência estatística.

Em primeiro lugar, foi efetuada uma análise às propriedades assintóticas dos estimadores, onde se observou que o erro padrão do estimador GI11 é igual ao do estimador NR15. Nessa mesma análise verificou-se que os três estimadores seguem, assintoticamente, uma distribuição Normal.

Em segundo lugar, definiu-se as características da simulação de Monte Carlo efetuada com o objetivo de não só responder ao objetivo mais lato (avaliar o comportamento dos estimadores), bem como para responder a objetivos mais detalhados. Para tal, foi necessário considerar um conjunto significativo de distribuições e dependências. Na escolha das distribuições e das dependências foi feita uma seleção diversificada com o intuito da simulação ser abrangente.

Em terceiro lugar, para uma comparação entre os estimadores foi efetuada uma simulação que procurou encontrar o nível de truncagem ótimo. Os resultados apontam para que o  $\kappa^*$  associado ao estimador de Hill seja, em média metade ou dois terços dos  $\kappa^*$  dos estimadores baseados em regressões. Concluiu-se ainda que, apesar das suas boas qualidades, o estimador de Hill é menos robusto ao desconhecimento de  $\kappa^*$ .

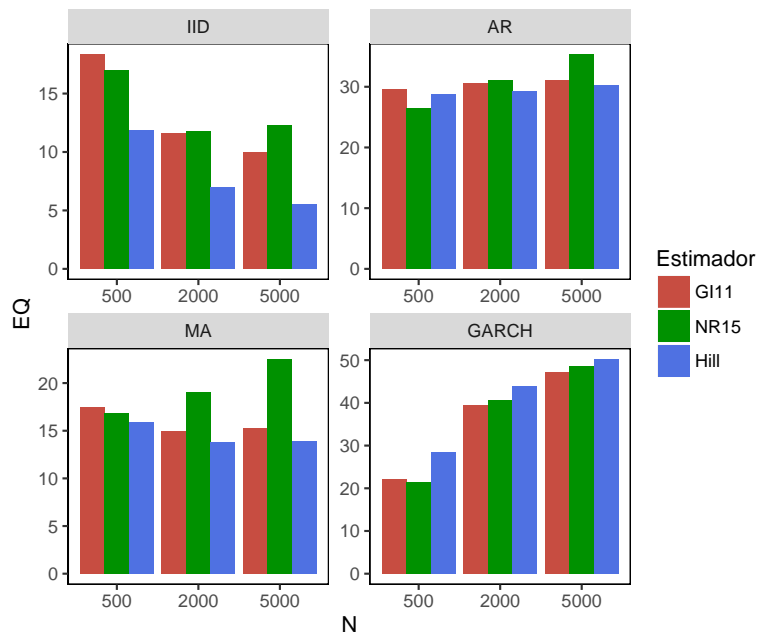
Em quarto lugar, considerando os  $\kappa^*$  verificou-se que o estimador de Hill é o estimador que melhores resultados tem na estimação do índice de cauda. Contudo, e como referido no capítulo anterior, com o  $\kappa^*$  desconhecido o estimador de NR15 tendem a ser mais robusto à escolha de  $\kappa$ . Para além disto, ainda se pode concluir

**Tabela 4.5:** Eficiência média da estimação do erro padrão.

Distribuição Tipo Dep.	500 obs.			2000 obs.			5000 obs.		
	$Var_{GII1}$	$Var_{NR15}$	$Var_{Hil}$	$Var_{GII1}$	$Var_{NR15}$	$Var_{Hil}$	$Var_{GII1}$	$Var_{NR15}$	$Var_{Hil}$
$\alpha$ -Stable	0.0003	0.0004	0.0002	$1.9 \times 10^{-5}$	$3.8 \times 10^{-5}$	$1.4 \times 10^{-5}$	$3.1 \times 10^{-6}$	$9.1 \times 10^{-6}$	$2.5 \times 10^{-6}$
$\alpha$ -Stable	0.0006	0.0008	0.0004	$4.4 \times 10^{-5}$	$8 \times 10^{-5}$	$2.8 \times 10^{-5}$	$8.1 \times 10^{-6}$	$2.1 \times 10^{-5}$	$4.9 \times 10^{-6}$
$\alpha$ -Stable	0.0004	0.0005	0.0003	$2.6 \times 10^{-5}$	$5.6 \times 10^{-5}$	$1.8 \times 10^{-5}$	$4.7 \times 10^{-6}$	$1.4 \times 10^{-5}$	$3.1 \times 10^{-6}$
Burr	0.0013	0.0014	0.0015	0.0002	0.0002	0.0003	$6.5 \times 10^{-5}$	$7 \times 10^{-5}$	$7.3 \times 10^{-5}$
Burr	0.0015	0.0011	0.0003	0.0001	$9.1 \times 10^{-5}$	$2.3 \times 10^{-5}$	$2 \times 10^{-5}$	$1.6 \times 10^{-5}$	$3.8 \times 10^{-6}$
Burr	0.0005	0.0004	0.0003	$3.6 \times 10^{-5}$	$3.8 \times 10^{-5}$	$2.4 \times 10^{-5}$	$5.9 \times 10^{-6}$	$6.7 \times 10^{-6}$	$4.3 \times 10^{-6}$
Cauchy	0.0002	0.0002	0.0002	$1.9 \times 10^{-5}$	$2.3 \times 10^{-5}$	$1.4 \times 10^{-5}$	$4.2 \times 10^{-6}$	$4.7 \times 10^{-6}$	$3 \times 10^{-6}$
Cauchy	0.0004	0.0005	0.0002	$3.8 \times 10^{-5}$	$5.1 \times 10^{-5}$	$2.7 \times 10^{-5}$	$9.2 \times 10^{-6}$	$1.2 \times 10^{-5}$	$6.7 \times 10^{-6}$
Cauchy	0.0002	0.0003	0.0002	$2.5 \times 10^{-5}$	$3.4 \times 10^{-5}$	$1.9 \times 10^{-5}$	$6 \times 10^{-6}$	$7.2 \times 10^{-6}$	$4.4 \times 10^{-6}$
Lévy	$9.6 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-5}$	$4.6 \times 10^{-6}$	$7 \times 10^{-7}$	$8 \times 10^{-7}$	$5.1 \times 10^{-7}$	$1.6 \times 10^{-7}$	$1.9 \times 10^{-7}$	$1.5 \times 10^{-7}$
Lévy	$7 \times 10^{-5}$	$8.3 \times 10^{-5}$	$1.7 \times 10^{-5}$	$5.7 \times 10^{-6}$	$6.6 \times 10^{-6}$	$1.7 \times 10^{-6}$	$1.1 \times 10^{-6}$	$1.3 \times 10^{-6}$	$4.3 \times 10^{-7}$
Lévy	$1.8 \times 10^{-5}$	$1.9 \times 10^{-5}$	$6.4 \times 10^{-6}$	$1.2 \times 10^{-6}$	$1.4 \times 10^{-6}$	$7.3 \times 10^{-7}$	$2.5 \times 10^{-7}$	$2.9 \times 10^{-7}$	$1.6 \times 10^{-7}$
Normal	GARCH	0.001	0.0010	0.0004	0.0004	0.0004	0.0002	0.0002	0.0002
Pareto	IID	0.0001	0.0001	$3.7 \times 10^{-5}$	$9.2 \times 10^{-6}$	$2.4 \times 10^{-6}$	$1.6 \times 10^{-6}$	$1.5 \times 10^{-6}$	$4 \times 10^{-7}$
Pareto	AR	0.0010	0.0005	0.0001	0.0004	$3.5 \times 10^{-5}$	$8.8 \times 10^{-6}$	$0.0077$	$6.9 \times 10^{-6}$
Pareto	MA	0.0003	0.0002	$4.7 \times 10^{-5}$	$2 \times 10^{-5}$	$1.6 \times 10^{-5}$	$3.1 \times 10^{-6}$	$3.4 \times 10^{-6}$	$5.2 \times 10^{-7}$
T-Student	IID	0.0210	0.0150	0.0230	0.0041	0.0034	0.0029	0.0017	0.0013
T-Student	AR	0.0120	0.0120	0.0100	0.0029	0.0023	0.0022	0.0009	0.0008
T-Student	MA	0.0150	0.0120	0.0120	0.0032	0.0028	0.0011	0.0011	0.0011
T-Student	GARCH	0.0150	0.0140	0.0120	0.0048	0.0043	0.0040	0.0021	0.0018

que tanto os desvios face à PL, a existência ou não de dependência e o aumento do índice de cauda associado são fatores que decrescem a qualidade da estimação nos três estimadores.

Em quinto e último lugar, também foi analisada a estimação do erro padrão associado ao estimador. Neste caso foi difícil encontrar um padrão geral, que permita eleger um estimador face a outro.



**Figura 4.4:** EQ médio da estimação do erro padrão por dependência.

## Bibliografia

Beirlant, J., Goegebeur, Y., Teugels, J. and Segers, J. (2004), *Statistics of Extremes*, John Wiley & Sons, Ltd.

**URL:** <http://dx.doi.org/10.1002/0470012382>

Dahl, D. B. (2016), *xtable: Export Tables to LaTeX or HTML*. R package version 1.8-2.

**URL:** <https://CRAN.R-project.org/package=xtable>

Davis, R. A. and Mikosch, T. (2009), Extreme value theory for garch processes, in T. Mikosch, J.-P. Kreiß, A. R. Davis and G. T. Andersen, eds, 'Handbook of Financial Time Series', Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, pp. 187–200.

**URL:** [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-71297-8\\_8](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-71297-8_8)

Gabaix, X. (1999), 'Zipf's law for cities: An explanation', *The Quarterly Journal of Economics* **114**(3), 739–767.

**URL:** <http://dx.doi.org/10.1162/003355399556133>

Gabaix, X. (2009), 'Power laws in economics and finance', *Annual Review of Economics* **1**(1), 255–294.

**URL:** <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.economics.050708.142940>

Gabaix, X. (2016), 'Power laws in economics: An introduction†.', *Journal of Economic Perspectives* **30**(1), 185–206.

**URL:** <http://dx.doi.org/10.1257/jep.30.1.185>

Gabaix, X. and Ibragimov, R. (2011), 'Rank - 1/2: A simple way to improve the ols estimation of tail exponents', *Journal of Business & Economic Statistics* **29**(1), 24–39.

**URL:** <http://dx.doi.org/10.1198/jbes.2009.06157>

- Hall, P. (1982), ‘On some simple estimates of an exponent of regular variation’, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* **44**(1), 37–42.  
**URL:** <http://www.jstor.org/stable/2984706>
- Hill, B. M. (1975), ‘A simple general approach to inference about the tail of a distribution’, *Ann. Statist.* **3**(5), 1163–1174.  
**URL:** <http://dx.doi.org/10.1214/aos/1176343247>
- Ibragimov, M., Ibragimov, R. and Walden, J. (2015), *Heavy-Tailed Distributions and Robustness in Economics and Finance*, Springer International Publishing.  
**URL:** <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-16877-7>
- Ibragimov, R. (2009), heavy-tailed densities, in S. N. Durlauf and L. E. Blume, eds, ‘The New Palgrave Dictionary of Economics’, Palgrave Macmillan, Basingstoke.  
**URL:** <http://dx.doi.org/10.1057/9780230226203.1893>
- Kleiber, C. and Kotz, S. (2003), *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*, John Wiley & Sons, Inc.  
**URL:** <http://dx.doi.org/10.1002/0471457175>
- Nicolau, J. (2012), *Modelação de Séries Temporais Financeiras*, Edições Almedina.  
**URL:** [http://www.almedina.net/catalog/product\\_info.php?products\\_id=20200](http://www.almedina.net/catalog/product_info.php?products_id=20200)
- Nicolau, J. and Rodrigues, P. M. M. (2015), A new regression-based tail index estimator: An application to exchange rates, Working paper, Working Paper.  
**URL:** <https://www.bportugal.pt/en-US/EstudosEconomicos/EconomistasInvestigadores/Pages/BdPPublicationsResearchDetail.aspx?PublicationId=902>
- R Core Team (2016), *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.  
**URL:** <https://www.R-project.org/>

Samorodnitsky, G. and Taqqu, M. S. (1994), *Stable non-Gaussian random processes.*, Stochastic Modeling., Chapman & Hall, New York.

**URL:** <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=msn&AN=MR1280932&lang=pt-br&site=eds-live&scope=site>

Wei, W. W. (2006), *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*, 2 edn, Pearson.

**URL:** <http://www.mypearsonstore.com/bookstore/time-series-analysis-univariate-and-multivariate-methods-9780321322166>

Wickham, H. (2007), ‘Reshaping data with the reshape package’, *Journal of Statistical Software* **21**(12), 1–20.

**URL:** <http://www.jstatsoft.org/v21/i12/>

Wickham, H. (2009), *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*, Springer-Verlag New York.

**URL:** <http://ggplot2.org>

Wickham, H. (2016), *tidyr: Easily Tidy Data with ‘spread()’ and ‘gather()’ Functions*. R package version 0.5.1.

**URL:** <https://CRAN.R-project.org/package=tidyr>

Wickham, H. and Francois, R. (2016), *dplyr: A Grammar of Data Manipulation*. R package version 0.5.0.

**URL:** <https://CRAN.R-project.org/package=dplyr>

Wuertz, D., Maechler, M. and core team members., R. (2015), *stabledist: Stable Distribution Functions*. R package version 0.7-0.

**URL:** <https://CRAN.R-project.org/package=stabledist>



# A. Anexo – Tabelas

## A 1.1 - Resultados da simulação I - $k$ ótimo e estimação de $\alpha$

Distribuição	Tipo Dep.	$\phi / \theta$	$\kappa\%_{GI11}$	$\kappa\%_{NR15}$	$\kappa\%_{Hill}$	$\alpha$	$\bar{\alpha}_{GI11}$	$\bar{\alpha}_{NR15}$	$\bar{\alpha}_{Hill}$	$EQ_{GI11}$	$EQ_{NR15}$	$EQ_{Hill}$
$\alpha$ -Stable	IID	0.00	28	27	18	1.25	1.20	1.22	1.22	10.82	10.82	10.30
$\alpha$ -Stable	IID	0.00	31	31	21	1.50	1.46	1.48	1.47	9.74	10.67	9.77
$\alpha$ -Stable	IID	0.00	32	35	22	1.75	1.75	1.74	1.71	9.01	10.25	9.75
$\alpha$ -Stable	AR	0.25	30	28	19	1.25	1.19	1.21	1.21	12.41	12.89	11.61
$\alpha$ -Stable	AR	0.25	32	33	21	1.50	1.45	1.46	1.46	11.06	11.97	10.57
$\alpha$ -Stable	AR	0.25	33	36	22	1.75	1.70	1.71	1.72	9.99	11.31	10.39
$\alpha$ -Stable	AR	0.50	32	33	21	1.25	1.18	1.19	1.18	14.83	15.69	14.09
$\alpha$ -Stable	AR	0.50	32	34	21	1.50	1.46	1.46	1.47	13.58	14.61	12.86
$\alpha$ -Stable	AR	0.50	33	36	22	1.75	1.71	1.71	1.72	12.55	13.89	12.50
$\alpha$ -Stable	AR	0.75	32	32	23	1.25	1.21	1.23	1.16	19.91	21.38	18.90
$\alpha$ -Stable	AR	0.75	31	33	23	1.50	1.52	1.50	1.42	19.75	20.76	17.59
$\alpha$ -Stable	AR	0.75	33	33	23	1.75	1.72	1.81	1.67	18.11	20.08	16.85
$\alpha$ -Stable	MA	0.25	30	28	19	1.25	1.19	1.22	1.21	12.26	12.60	11.29
$\alpha$ -Stable	MA	0.25	32	33	21	1.50	1.44	1.46	1.47	10.91	11.91	10.32
$\alpha$ -Stable	MA	0.25	33	36	22	1.75	1.71	1.71	1.71	9.78	11.14	10.29
$\alpha$ -Stable	MA	0.50	31	30	20	1.25	1.18	1.20	1.19	13.20	13.79	12.17
$\alpha$ -Stable	MA	0.50	32	33	21	1.50	1.45	1.46	1.47	11.99	13.13	11.22
$\alpha$ -Stable	MA	0.50	33	36	22	1.75	1.71	1.70	1.72	10.92	12.25	11.10
$\alpha$ -Stable	MA	0.75	31	30	20	1.25	1.17	1.19	1.19	13.58	14.08	12.47
$\alpha$ -Stable	MA	0.75	32	33	21	1.50	1.44	1.44	1.47	12.45	13.53	11.96
$\alpha$ -Stable	MA	0.75	33	35	22	1.75	1.71	1.71	1.72	11.41	12.56	11.34
Burr	IID	0.00	28	26	15	2.00	1.84	1.87	1.87	12.79	11.98	12.52
Burr	IID	0.00	28	26	15	3.00	2.76	2.80	2.81	12.79	11.94	12.52
Burr	IID	0.00	28	26	15	4.00	3.68	3.73	3.74	12.79	11.94	12.52
Burr	AR	0.25	56	57	34	2.00	1.94	1.95	1.95	8.73	8.60	8.29
Burr	AR	0.25	59	57	36	3.00	2.93	2.96	2.94	7.72	7.41	7.65
Burr	AR	0.25	60	59	38	4.00	3.94	3.94	3.92	7.22	6.77	7.39
Burr	AR	0.50	60	60	60	2.00	2.29	2.31	1.99	19.23	19.62	7.24
Burr	AR	0.50	60	60	60	3.00	3.64	3.64	3.09	24.32	23.68	7.58
Burr	AR	0.50	60	60	60	4.00	5.02	4.97	4.20	27.90	26.14	8.53
Burr	AR	0.75	60	60	60	2.00	3.02	3.04	2.67	56.88	56.60	36.21
Burr	AR	0.75	60	60	60	3.00	5.16	5.10	4.37	75.70	72.81	47.76
Burr	AR	0.75	60	60	60	4.00	7.38	7.19	6.09	87.26	81.87	53.97
Burr	MA	0.25	48	47	28	2.00	1.92	1.94	1.93	9.75	9.35	9.38
Burr	MA	0.25	50	49	28	3.00	2.90	2.93	2.93	8.70	8.22	8.63
Burr	MA	0.25	52	49	32	4.00	3.89	3.92	3.88	8.15	7.61	8.28
Burr	MA	0.50	59	60	34	2.00	1.93	1.95	1.96	9.42	9.54	9.17
Burr	MA	0.50	60	60	39	3.00	2.99	3.00	2.94	8.35	8.15	8.08
Burr	MA	0.50	60	60	41	4.00	4.07	4.03	3.93	8.27	7.38	7.55
Burr	MA	0.75	60	60	38	2.00	1.96	1.98	1.94	9.51	9.84	9.11
Burr	MA	0.75	60	60	43	3.00	3.07	3.07	2.93	9.40	9.10	8.13
Burr	MA	0.75	60	60	44	4.00	4.20	4.15	3.96	10.26	8.83	7.53
Cauchy	IID	0.00	27	25	15	1.00	0.93	0.95	0.96	12.30	11.95	11.62
Cauchy	AR	0.25	30	28	18	1.00	0.93	0.94	0.94	14.25	14.55	13.50
Cauchy	AR	0.50	32	34	20	1.00	0.93	0.93	0.93	16.48	17.37	15.86
Cauchy	AR	0.75	30	34	23	1.00	1.00	0.96	0.92	22.79	23.37	20.49
Cauchy	MA	0.25	28	26	18	1.00	0.93	0.96	0.94	14.00	14.13	12.89
Cauchy	MA	0.50	30	28	19	1.00	0.93	0.94	0.93	14.68	14.99	13.45
Cauchy	MA	0.75	30	27	19	1.00	0.92	0.94	0.93	14.97	15.21	13.79
Lévy	IID	0.00	60	60	44	0.50	0.49	0.49	0.48	7.97	7.80	7.09
Lévy	AR	0.25	60	60	54	0.50	0.50	0.51	0.48	14.02	14.46	10.58
Lévy	AR	0.50	60	60	59	0.50	0.52	0.52	0.48	19.03	20.01	13.29
Lévy	AR	0.75	60	60	60	0.50	0.56	0.56	0.49	28.98	30.83	19.05

Continua na página seguinte.

Distribuição	Tipo Dep.	$\phi / \theta$	$\kappa\%_{GI11}$	$\kappa\%_{NR15}$	$\kappa\%_{Hill}$	$\alpha$	$\bar{\alpha}_{GI11}$	$\bar{\alpha}_{NR15}$	$\bar{\alpha}_{Hill}$	$EQ_{GI11}$	$EQ_{NR15}$	$EQ_{Hill}$
Lévy	MA	0.25	60	60	47	0.50	0.49	0.50	0.48	10.45	10.41	8.66
Lévy	MA	0.50	60	60	50	0.50	0.49	0.50	0.48	10.65	10.53	8.87
Lévy	MA	0.75	60	60	51	0.50	0.49	0.49	0.48	10.71	10.43	9.00
Normal	GARCH	0.90	28	30	19	2.00	1.95	1.97	1.91	13.85	14.88	15.64
Pareto	IID	0.00	100	100	99	2.00	2.00	2.02	2.01	6.07	5.91	4.37
Pareto	IID	0.00	100	100	99	3.00	3.00	3.04	3.01	6.07	5.89	4.37
Pareto	IID	0.00	100	100	99	4.00	4.00	4.04	4.01	6.07	5.83	4.37
Pareto	AR	0.25	100	100	99	2.00	2.31	2.31	2.00	18.10	17.21	5.25
Pareto	AR	0.25	100	100	100	3.00	3.58	3.56	2.99	21.31	20.14	5.04
Pareto	AR	0.25	100	100	100	4.00	4.86	4.82	4.05	23.16	21.73	5.16
Pareto	AR	0.50	100	100	100	2.00	2.68	2.62	1.96	36.67	32.96	6.76
Pareto	AR	0.50	100	100	100	3.00	4.34	4.15	3.11	46.54	39.73	7.48
Pareto	AR	0.50	100	100	100	4.00	6.03	5.70	4.27	52.38	43.49	9.46
Pareto	AR	0.75	100	100	100	2.00	3.41	3.22	2.22	74.89	64.10	14.78
Pareto	AR	0.75	100	100	100	3.00	5.89	5.27	3.65	99.34	77.04	23.97
Pareto	AR	0.75	100	100	100	4.00	8.46	7.29	5.10	113.78	83.43	29.33
Pareto	MA	0.25	100	100	98	2.00	2.21	2.21	1.99	13.31	13.01	4.98
Pareto	MA	0.25	100	100	99	3.00	3.41	3.41	3.00	15.78	15.18	4.80
Pareto	MA	0.25	100	100	100	4.00	4.61	4.60	3.95	17.21	16.33	4.68
Pareto	MA	0.50	100	100	97	2.00	2.27	2.27	2.00	16.49	16.01	5.19
Pareto	MA	0.50	100	100	99	3.00	3.57	3.54	2.98	21.14	19.45	5.00
Pareto	MA	0.50	100	100	99	4.00	4.89	4.80	4.04	24.02	21.32	5.06
Pareto	MA	0.75	100	100	97	2.00	2.29	2.29	1.99	17.54	16.90	5.26
Pareto	MA	0.75	100	100	99	3.00	3.63	3.58	2.97	23.10	20.88	5.06
Pareto	MA	0.75	100	100	99	4.00	5.00	4.87	4.03	26.63	23.01	5.04
T-Student	IID	0.00	13	12	8	2.00	1.78	1.80	1.79	17.14	16.56	17.32
T-Student	IID	0.00	7	6	4	3.00	2.57	2.61	2.65	21.84	21.62	22.16
T-Student	IID	0.00	5	5	3	4.00	3.22	3.11	3.31	27.40	28.02	28.05
T-Student	AR	0.25	15	14	9	2.00	1.81	1.82	1.82	15.84	15.60	16.33
T-Student	AR	0.25	8	7	5	3.00	2.60	2.63	2.62	20.23	20.21	20.83
T-Student	AR	0.25	6	5	4	4.00	3.21	3.21	3.19	26.17	26.76	27.20
T-Student	AR	0.50	18	18	11	2.00	1.87	1.86	1.86	15.60	15.78	15.78
T-Student	AR	0.50	10	10	6	3.00	2.73	2.68	2.74	18.17	18.25	19.34
T-Student	AR	0.50	7	6	5	4.00	3.40	3.36	3.30	22.52	23.19	24.09
T-Student	AR	0.75	24	24	15	2.00	1.86	1.87	1.85	17.11	17.69	17.51
T-Student	AR	0.75	15	14	9	3.00	2.78	2.76	2.79	18.14	18.35	19.07
T-Student	AR	0.75	10	8	6	4.00	3.58	3.60	3.57	20.76	21.64	22.45
T-Student	MA	0.25	14	14	9	2.00	1.82	1.82	1.81	16.11	15.81	16.58
T-Student	MA	0.25	8	8	5	3.00	2.60	2.57	2.62	20.25	20.26	20.80
T-Student	MA	0.25	6	5	4	4.00	3.21	3.20	3.19	26.25	26.77	27.11
T-Student	MA	0.50	17	16	10	2.00	1.82	1.83	1.83	16.42	16.43	16.71
T-Student	MA	0.50	10	9	6	3.00	2.65	2.66	2.67	19.20	19.12	20.38
T-Student	MA	0.50	6	6	4	4.00	3.42	3.27	3.38	24.00	24.86	25.43
T-Student	MA	0.75	18	17	11	2.00	1.82	1.83	1.82	16.91	17.20	17.05
T-Student	MA	0.75	11	10	7	3.00	2.67	2.66	2.65	19.37	19.32	20.51
T-Student	MA	0.75	7	7	5	4.00	3.45	3.28	3.32	23.33	24.47	24.84
T-Student	GARCH	0.80	6	5	4	3.68	3.00	2.98	2.97	26.04	26.89	27.36
T-Student	GARCH	0.88	9	8	6	2.90	2.64	2.61	2.55	19.98	20.77	22.33
T-Student	GARCH	0.90	21	22	13	2.00	1.94	1.91	1.90	14.97	15.15	17.07

**Tabela A.1:** Resultados gerais da simulação para séries com 500 observações.

Distribuição	Tipo Dep.	$\phi / \theta$	$\kappa\%_{GI11}$	$\kappa\%_{NR15}$	$\kappa\%_{Hill}$	$\alpha$	$\bar{\alpha}_{GI11}$	$\bar{\alpha}_{NR15}$	$\bar{\alpha}_{Hill}$	$EQ_{GI11}$	$EQ_{NR15}$	$EQ_{Hill}$
$\alpha$ -Stable	IID	0.00	26	26	17	1.25	1.23	1.24	1.23	5.90	6.19	5.37
$\alpha$ -Stable	IID	0.00	30	32	20	1.50	1.50	1.50	1.50	5.08	6.41	4.92
$\alpha$ -Stable	IID	0.00	33	38	22	1.75	1.72	1.74	1.72	4.61	6.80	5.14
$\alpha$ -Stable	AR	0.25	27	27	17	1.25	1.22	1.24	1.23	7.22	7.79	6.29
$\alpha$ -Stable	AR	0.25	31	33	20	1.50	1.48	1.49	1.50	5.97	7.63	5.43
$\alpha$ -Stable	AR	0.25	33	38	22	1.75	1.73	1.75	1.72	5.19	7.55	5.40
$\alpha$ -Stable	AR	0.50	28	30	18	1.25	1.21	1.23	1.23	8.89	9.93	7.71
$\alpha$ -Stable	AR	0.50	31	35	20	1.50	1.48	1.48	1.50	7.41	9.39	6.43

Continua na página seguinte.

Distribuição	Tipo Dep.	$\phi / \theta$	$\kappa\%_{GI11}$	$\kappa\%_{NR15}$	$\kappa\%_{Hill}$	$\alpha$	$\bar{\alpha}_{GI11}$	$\bar{\alpha}_{NR15}$	$\bar{\alpha}_{Hill}$	$EQ_{GI11}$	$EQ_{NR15}$	$EQ_{Hill}$
$\alpha$ -Stable	AR	0.50	33	39	22	1.75	1.73	1.73	1.72	6.15	8.77	6.02
$\alpha$ -Stable	AR	0.75	31	35	20	1.25	1.21	1.21	1.20	11.76	13.13	10.64
$\alpha$ -Stable	AR	0.75	32	37	21	1.50	1.47	1.46	1.48	10.22	12.09	9.01
$\alpha$ -Stable	AR	0.75	33	39	22	1.75	1.73	1.72	1.73	8.82	11.24	8.11
$\alpha$ -Stable	MA	0.25	27	27	17	1.25	1.22	1.24	1.23	6.94	7.46	6.11
$\alpha$ -Stable	MA	0.25	31	33	20	1.50	1.48	1.49	1.50	5.83	7.48	5.31
$\alpha$ -Stable	MA	0.25	33	38	22	1.75	1.73	1.75	1.72	5.08	7.49	5.31
$\alpha$ -Stable	MA	0.50	27	27	18	1.25	1.22	1.24	1.22	7.47	8.09	6.59
$\alpha$ -Stable	MA	0.50	31	33	20	1.50	1.48	1.49	1.50	6.35	8.13	5.72
$\alpha$ -Stable	MA	0.50	33	38	22	1.75	1.73	1.75	1.72	5.43	8.12	5.54
$\alpha$ -Stable	MA	0.75	28	28	18	1.25	1.21	1.23	1.22	7.64	8.17	6.79
$\alpha$ -Stable	MA	0.75	31	33	20	1.50	1.48	1.49	1.50	6.54	8.23	5.94
$\alpha$ -Stable	MA	0.75	33	38	22	1.75	1.73	1.73	1.72	5.61	8.17	5.62
Burr	IID	0.00	19	19	9	2.00	1.90	1.91	1.92	8.33	7.83	8.16
Burr	IID	0.00	19	18	9	3.00	2.84	2.88	2.88	8.33	7.73	8.16
Burr	IID	0.00	19	18	9	4.00	3.79	3.83	3.84	8.33	7.71	8.16
Burr	AR	0.25	51	52	28	2.00	1.97	1.99	1.99	4.84	5.05	4.30
Burr	AR	0.25	55	56	33	3.00	2.98	2.98	2.98	4.09	4.19	3.88
Burr	AR	0.25	57	57	35	4.00	3.98	3.97	3.97	3.75	3.69	3.70
Burr	AR	0.50	60	60	59	2.00	2.27	2.29	2.00	15.12	15.96	3.74
Burr	AR	0.50	60	60	60	3.00	3.62	3.63	3.08	21.67	21.69	4.32
Burr	AR	0.50	60	60	60	4.00	5.01	4.97	4.18	25.92	24.87	5.65
Burr	AR	0.75	60	60	60	2.00	2.92	2.95	2.64	48.41	49.44	32.60
Burr	AR	0.75	60	60	60	3.00	5.05	5.04	4.33	69.72	68.98	44.97
Burr	AR	0.75	60	60	60	4.00	7.27	7.16	6.04	82.68	79.61	51.34
Burr	MA	0.25	40	41	23	2.00	1.96	1.97	1.97	5.56	5.56	5.08
Burr	MA	0.25	44	45	26	3.00	2.97	2.97	2.97	4.75	4.68	4.46
Burr	MA	0.25	47	46	28	4.00	3.96	3.98	3.96	4.35	4.18	4.20
Burr	MA	0.50	53	56	31	2.00	1.97	1.98	1.98	5.14	5.58	4.69
Burr	MA	0.50	60	60	36	3.00	2.99	3.01	2.99	4.25	4.68	4.03
Burr	MA	0.50	60	60	39	4.00	4.07	4.06	3.97	4.48	4.29	3.78
Burr	MA	0.75	56	60	34	2.00	1.98	1.99	1.98	5.07	5.63	4.75
Burr	MA	0.75	60	60	40	3.00	3.07	3.09	2.98	5.17	5.91	4.04
Burr	MA	0.75	60	60	42	4.00	4.21	4.19	4.00	6.86	6.44	3.82
Cauchy	IID	0.00	21	20	13	1.00	0.96	0.97	0.96	7.42	7.17	6.93
Cauchy	AR	0.25	24	23	13	1.00	0.96	0.97	0.97	9.21	9.29	8.21
Cauchy	AR	0.50	27	26	16	1.00	0.95	0.97	0.95	11.06	11.55	9.96
Cauchy	AR	0.75	30	33	18	1.00	0.94	0.95	0.94	13.93	14.99	13.01
Cauchy	MA	0.25	23	22	14	1.00	0.96	0.97	0.96	8.69	8.62	7.79
Cauchy	MA	0.50	24	22	13	1.00	0.95	0.97	0.97	9.14	9.13	8.25
Cauchy	MA	0.75	24	22	14	1.00	0.95	0.97	0.96	9.31	9.28	8.54
Lévy	IID	0.00	56	56	33	0.50	0.49	0.49	0.49	4.61	4.53	4.18
Lévy	AR	0.25	60	60	42	0.50	0.49	0.49	0.48	8.06	8.24	6.52
Lévy	AR	0.50	60	60	48	0.50	0.49	0.50	0.48	10.69	11.10	8.35
Lévy	AR	0.75	60	60	54	0.50	0.50	0.51	0.48	15.47	16.53	11.40
Lévy	MA	0.25	60	60	39	0.50	0.49	0.49	0.49	5.83	5.87	5.18
Lévy	MA	0.50	60	60	37	0.50	0.49	0.49	0.49	5.92	5.95	5.28
Lévy	MA	0.75	60	60	37	0.50	0.49	0.49	0.49	5.96	5.97	5.38
Normal	GARCH	0.90	25	28	15	2.00	1.91	1.93	1.90	15.82	16.13	17.15
Pareto	IID	0.00	100	100	100	2.00	2.00	2.01	2.00	3.08	3.02	2.21
Pareto	IID	0.00	100	100	100	3.00	2.99	3.01	3.00	3.08	3.02	2.21
Pareto	IID	0.00	100	100	100	4.00	3.99	4.01	4.00	3.08	3.01	2.21
Pareto	AR	0.25	100	100	99	2.00	2.30	2.27	1.99	15.59	14.18	2.71
Pareto	AR	0.25	12	100	100	3.00	3.45	3.51	2.91	19.02	17.56	3.94
Pareto	AR	0.25	11	100	100	4.00	4.69	4.76	3.95	21.25	19.39	2.92
Pareto	AR	0.50	100	100	99	2.00	2.64	2.55	2.08	33.06	28.46	5.36
Pareto	AR	0.50	100	100	100	3.00	4.30	4.07	2.98	43.78	36.11	3.50
Pareto	AR	0.50	100	100	100	4.00	5.98	5.59	4.09	50.05	40.04	4.13
Pareto	AR	0.75	100	100	100	2.00	3.31	3.10	2.06	67.26	56.26	6.24
Pareto	AR	0.75	100	100	100	3.00	5.78	5.09	3.38	93.57	70.20	13.96
Pareto	AR	0.75	100	100	100	4.00	8.34	7.02	4.72	109.06	75.82	18.92
Pareto	MA	0.25	100	100	97	2.00	2.20	2.19	2.00	10.70	10.14	2.60

Continua na página seguinte.

Distribuição	Tipo Dep.	$\phi / \theta$	$\kappa\%_{GI11}$	$\kappa\%_{NR15}$	$\kappa\%_{Hill}$	$\alpha$	$\bar{\alpha}_{GI11}$	$\bar{\alpha}_{NR15}$	$\bar{\alpha}_{Hill}$	$EQ_{GI11}$	$EQ_{NR15}$	$EQ_{Hill}$
Pareto	MA	0.25	100	100	99	3.00	3.39	3.37	2.99	13.66	12.74	2.46
Pareto	MA	0.25	100	100	99	4.00	4.59	4.55	4.04	15.33	14.16	2.61
Pareto	MA	0.50	100	100	97	2.00	2.26	2.24	1.99	13.79	12.98	2.74
Pareto	MA	0.50	100	100	99	3.00	3.55	3.50	2.96	18.96	17.09	2.76
Pareto	MA	0.50	100	100	99	4.00	4.86	4.76	4.02	22.10	19.34	2.53
Pareto	MA	0.75	100	100	96	2.00	2.28	2.26	2.01	14.84	13.99	2.77
Pareto	MA	0.75	100	100	98	3.00	3.61	3.55	3.02	20.91	18.73	2.72
Pareto	MA	0.75	100	100	99	4.00	4.97	4.83	4.01	24.71	21.24	2.53
T-Student	IID	0.00	9	8	5	2.00	1.85	1.89	1.86	11.75	10.97	11.54
T-Student	IID	0.00	5	4	3	3.00	2.65	2.72	2.65	15.99	15.05	16.07
T-Student	IID	0.00	3	3	2	4.00	3.37	3.36	3.35	20.65	20.08	20.69
T-Student	AR	0.25	11	10	6	2.00	1.87	1.91	1.89	10.93	10.28	10.36
T-Student	AR	0.25	5	5	3	3.00	2.73	2.73	2.73	14.72	13.94	14.64
T-Student	AR	0.25	3	3	2	4.00	3.46	3.44	3.43	19.44	18.83	19.58
T-Student	AR	0.50	15	15	8	2.00	1.90	1.92	1.93	10.77	10.58	9.92
T-Student	AR	0.50	8	7	4	3.00	2.79	2.84	2.84	12.70	12.10	12.58
T-Student	AR	0.50	4	4	3	4.00	3.65	3.62	3.52	16.22	15.45	16.77
T-Student	AR	0.75	21	22	12	2.00	1.90	1.92	1.93	11.89	12.44	11.07
T-Student	AR	0.75	13	13	7	3.00	2.84	2.85	2.89	11.94	11.71	11.80
T-Student	AR	0.75	8	7	4	4.00	3.73	3.78	3.83	13.75	13.31	14.33
T-Student	MA	0.25	11	10	6	2.00	1.86	1.90	1.88	11.12	10.42	10.60
T-Student	MA	0.25	5	5	3	3.00	2.72	2.73	2.73	14.81	14.04	14.57
T-Student	MA	0.25	3	3	2	4.00	3.45	3.44	3.42	19.55	18.94	19.77
T-Student	MA	0.50	13	13	7	2.00	1.88	1.90	1.90	11.07	10.67	10.37
T-Student	MA	0.50	7	6	4	3.00	2.76	2.81	2.76	13.76	13.01	13.53
T-Student	MA	0.50	4	4	2	4.00	3.55	3.52	3.61	17.45	16.95	18.02
T-Student	MA	0.75	14	14	8	2.00	1.88	1.90	1.89	11.17	10.86	10.49
T-Student	MA	0.75	8	7	5	3.00	2.78	2.83	2.74	13.64	13.05	13.45
T-Student	MA	0.75	5	4	3	4.00	3.58	3.64	3.54	16.75	16.25	17.15
T-Student	GARCH	0.80	3	3	2	3.68	3.19	3.15	3.12	20.27	20.32	21.25
T-Student	GARCH	0.88	6	5	3	2.90	2.65	2.70	2.67	17.46	17.73	18.35
T-Student	GARCH	0.90	17	19	9	2.00	1.89	1.90	1.90	16.28	16.34	17.58

**Tabela A.2:** Resultados gerais da simulação para séries com 2000 observações.

Distribuição	Tipo Dep.	$\phi / \theta$	$\kappa\%_{GI11}$	$\kappa\%_{NR15}$	$\kappa\%_{Hill}$	$\alpha$	$\bar{\alpha}_{GI11}$	$\bar{\alpha}_{NR15}$	$\bar{\alpha}_{Hill}$	$EQ_{GI11}$	$EQ_{NR15}$	$EQ_{Hill}$
$\alpha$ -Stable	IID	0.00	25	26	16	1.25	1.24	1.24	1.25	3.79	4.24	3.49
$\alpha$ -Stable	IID	0.00	30	33	20	1.50	1.50	1.50	1.50	3.21	4.74	3.18
$\alpha$ -Stable	IID	0.00	33	39	21	1.75	1.73	1.76	1.77	2.97	5.58	3.44
$\alpha$ -Stable	AR	0.25	26	26	17	1.25	1.24	1.25	1.24	4.80	5.50	3.97
$\alpha$ -Stable	AR	0.25	31	33	20	1.50	1.48	1.51	1.50	3.88	5.86	3.44
$\alpha$ -Stable	AR	0.25	33	40	21	1.75	1.73	1.74	1.77	3.36	6.28	3.63
$\alpha$ -Stable	AR	0.50	27	28	17	1.25	1.23	1.24	1.24	6.16	7.15	5.09
$\alpha$ -Stable	AR	0.50	31	34	20	1.50	1.49	1.50	1.50	4.90	7.38	4.12
$\alpha$ -Stable	AR	0.50	33	40	22	1.75	1.73	1.75	1.72	4.10	7.45	4.14
$\alpha$ -Stable	AR	0.75	28	31	18	1.25	1.22	1.24	1.23	8.45	10.02	7.16
$\alpha$ -Stable	AR	0.75	32	37	21	1.50	1.47	1.47	1.48	7.02	9.77	5.89
$\alpha$ -Stable	AR	0.75	33	40	22	1.75	1.74	1.75	1.73	5.77	9.29	5.30
$\alpha$ -Stable	MA	0.25	26	26	17	1.25	1.23	1.25	1.24	4.54	5.18	3.85
$\alpha$ -Stable	MA	0.25	30	33	20	1.50	1.50	1.50	1.50	3.77	5.66	3.33
$\alpha$ -Stable	MA	0.25	33	40	21	1.75	1.73	1.74	1.77	3.28	6.22	3.61
$\alpha$ -Stable	MA	0.50	26	27	17	1.25	1.24	1.24	1.24	4.90	5.58	4.20
$\alpha$ -Stable	MA	0.50	31	33	20	1.50	1.48	1.51	1.50	4.13	6.14	3.59
$\alpha$ -Stable	MA	0.50	33	40	21	1.75	1.73	1.74	1.77	3.60	6.72	3.87
$\alpha$ -Stable	MA	0.75	26	26	17	1.25	1.23	1.25	1.24	5.04	5.67	4.32
$\alpha$ -Stable	MA	0.75	31	33	20	1.50	1.48	1.50	1.50	4.29	6.17	3.84
$\alpha$ -Stable	MA	0.75	33	40	22	1.75	1.73	1.72	1.72	3.73	6.78	3.95
Burr	IID	0.00	14	14	7	2.00	1.93	1.94	1.93	6.08	5.71	6.12
Burr	IID	0.00	14	13	7	3.00	2.89	2.92	2.90	6.08	5.67	6.12
Burr	IID	0.00	14	13	7	4.00	3.85	3.88	3.87	6.08	5.66	6.12
Burr	AR	0.25	49	51	28	2.00	1.99	1.99	1.99	3.07	3.32	2.80

Continua na página seguinte.

Distribuição	Tipo Dep.	$\phi / \theta$	$\kappa\%_{GI11}$	$\kappa\%_{NR15}$	$\kappa\%_{Hill}$	$\alpha$	$\bar{\alpha}_{GI11}$	$\bar{\alpha}_{NR15}$	$\bar{\alpha}_{Hill}$	$EQ_{GI11}$	$EQ_{NR15}$	$EQ_{Hill}$
Burr	AR	0.25	55	56	33	3.00	2.99	2.99	2.99	2.55	2.74	2.48
Burr	AR	0.25	57	57	34	4.00	3.99	3.98	4.01	2.32	2.40	2.36
Burr	AR	0.50	60	60	59	2.00	2.27	2.28	2.00	14.25	14.89	2.36
Burr	AR	0.50	60	60	60	3.00	3.63	3.63	3.09	21.36	21.29	3.64
Burr	AR	0.50	60	60	60	4.00	5.02	4.98	4.19	25.82	24.81	5.26
Burr	AR	0.75	60	60	60	2.00	2.91	2.93	2.63	46.59	47.38	31.92
Burr	AR	0.75	60	60	60	3.00	5.05	5.04	4.33	68.87	68.25	44.54
Burr	AR	0.75	60	60	60	4.00	7.28	7.17	6.04	82.27	79.58	51.09
Burr	MA	0.25	37	38	21	2.00	1.98	1.99	1.99	3.60	3.68	3.32
Burr	MA	0.25	43	44	25	3.00	2.98	2.99	2.99	2.98	3.06	2.91
Burr	MA	0.25	46	46	27	4.00	3.99	3.99	3.98	2.71	2.71	2.69
Burr	MA	0.50	51	55	30	2.00	1.99	1.99	1.99	3.25	3.71	3.08
Burr	MA	0.50	60	60	36	3.00	3.00	3.03	2.99	2.65	3.22	2.61
Burr	MA	0.50	60	60	39	4.00	4.08	4.08	3.98	3.30	3.31	2.43
Burr	MA	0.75	56	60	33	2.00	1.99	2.00	1.99	3.19	3.78	3.02
Burr	MA	0.75	60	60	39	3.00	3.08	3.11	3.00	3.85	4.88	2.66
Burr	MA	0.75	60	60	42	4.00	4.22	4.21	4.01	6.14	6.00	2.46
Cauchy	IID	0.00	18	18	11	1.00	0.98	0.98	0.98	5.00	4.91	4.68
Cauchy	AR	0.25	21	21	12	1.00	0.97	0.98	0.97	6.41	6.51	5.62
Cauchy	AR	0.50	23	23	13	1.00	0.97	0.98	0.97	7.89	8.31	6.92
Cauchy	AR	0.75	27	28	15	1.00	0.96	0.97	0.96	10.28	11.27	9.27
Cauchy	MA	0.25	20	19	11	1.00	0.97	0.98	0.98	5.94	5.98	5.32
Cauchy	MA	0.50	20	20	12	1.00	0.97	0.98	0.97	6.23	6.30	5.69
Cauchy	MA	0.75	20	20	12	1.00	0.97	0.98	0.97	6.35	6.40	5.82
Lévy	IID	0.00	48	46	25	0.50	0.49	0.50	0.50	3.18	3.10	2.88
Lévy	AR	0.25	60	60	32	0.50	0.49	0.49	0.49	5.58	5.81	4.58
Lévy	AR	0.50	60	60	39	0.50	0.49	0.50	0.49	7.37	7.82	5.98
Lévy	AR	0.75	60	60	46	0.50	0.50	0.50	0.48	10.72	11.66	8.28
Lévy	MA	0.25	54	53	32	0.50	0.49	0.49	0.49	4.08	4.08	3.56
Lévy	MA	0.50	54	52	32	0.50	0.49	0.49	0.49	4.14	4.12	3.65
Lévy	MA	0.75	54	52	31	0.50	0.49	0.49	0.49	4.16	4.13	3.68
Normal	GARCH	0.90	22	28	12	2.00	1.89	1.89	1.91	16.81	16.91	18.01
Pareto	IID	0.00	100	100	100	2.00	2.00	2.00	2.00	2.02	2.01	1.44
Pareto	IID	0.00	100	100	100	3.00	3.00	3.01	3.00	2.02	2.01	1.44
Pareto	IID	0.00	100	100	100	4.00	4.00	4.01	4.00	2.02	2.00	1.44
Pareto	AR	0.25	9	100	99	2.00	2.19	2.26	2.00	13.42	13.46	1.75
Pareto	AR	0.25	6	100	99	3.00	3.37	3.50	3.10	16.26	16.97	3.66
Pareto	AR	0.25	6	100	100	4.00	4.61	4.75	3.92	18.61	18.87	2.63
Pareto	AR	0.50	5	100	99	2.00	2.42	2.54	2.08	27.20	27.17	4.68
Pareto	AR	0.50	3	100	100	3.00	3.93	4.04	2.93	37.29	35.02	3.37
Pareto	AR	0.50	2	100	100	4.00	5.55	5.55	4.02	45.67	38.96	2.53
Pareto	AR	0.75	4	100	100	2.00	2.94	3.05	1.99	57.41	53.38	4.21
Pareto	AR	0.75	2	100	100	3.00	5.37	5.02	3.27	91.52	67.50	10.06
Pareto	AR	0.75	100	100	100	4.00	8.32	6.89	4.56	108.36	72.53	14.79
Pareto	MA	0.25	100	100	97	2.00	2.20	2.18	2.00	10.33	9.50	1.68
Pareto	MA	0.25	100	100	99	3.00	3.39	3.36	2.99	13.44	12.26	1.60
Pareto	MA	0.25	100	100	99	4.00	4.60	4.54	4.04	15.16	13.77	1.91
Pareto	MA	0.50	100	100	97	2.00	2.26	2.24	1.99	13.43	12.29	1.83
Pareto	MA	0.50	100	100	99	3.00	3.55	3.49	2.97	18.75	16.61	1.95
Pareto	MA	0.50	100	100	99	4.00	4.87	4.75	4.02	21.96	18.99	1.74
Pareto	MA	0.75	100	100	96	2.00	2.28	2.26	2.01	14.50	13.31	1.82
Pareto	MA	0.75	100	100	98	3.00	3.61	3.54	3.03	20.72	18.29	1.90
Pareto	MA	0.75	100	100	99	4.00	4.98	4.83	4.02	24.60	20.96	1.68
T-Student	IID	0.00	7	7	4	2.00	1.89	1.91	1.89	8.72	8.11	8.47
T-Student	IID	0.00	3	3	2	3.00	2.76	2.78	2.73	12.41	11.53	12.48
T-Student	IID	0.00	2	2	1	4.00	3.50	3.52	3.56	16.58	15.70	16.18
T-Student	AR	0.25	9	8	4	2.00	1.91	1.94	1.94	8.10	7.54	7.65
T-Student	AR	0.25	4	3	2	3.00	2.77	2.85	2.80	11.41	10.57	11.26
T-Student	AR	0.25	2	2	1	4.00	3.58	3.60	3.65	15.45	14.46	15.21
T-Student	AR	0.50	13	13	7	2.00	1.93	1.95	1.95	7.79	7.59	7.06
T-Student	AR	0.50	6	6	3	3.00	2.87	2.89	2.91	9.60	8.97	9.36
T-Student	AR	0.50	3	3	2	4.00	3.75	3.75	3.68	12.37	11.47	12.33

Continua na página seguinte.

Distribuição	Tipo Dep.	$\phi / \theta$	$\kappa\%_{GI11}$	$\kappa\%_{NR15}$	$\kappa\%_{Hil}$	$\alpha$	$\bar{\alpha}_{GI11}$	$\bar{\alpha}_{NR15}$	$\bar{\alpha}_{Hil}$	$EQ_{GI11}$	$EQ_{NR15}$	$EQ_{Hil}$
T-Student	AR	0.75	19	20	11	2.00	1.94	1.97	1.96	8.50	9.14	7.44
T-Student	AR	0.75	11	12	6	3.00	2.94	2.91	2.96	8.70	8.70	8.14
T-Student	AR	0.75	7	6	4	4.00	3.81	3.91	3.78	9.90	9.41	10.05
T-Student	MA	0.25	8	8	4	2.00	1.92	1.93	1.94	8.19	7.62	7.75
T-Student	MA	0.25	4	3	2	3.00	2.77	2.84	2.79	11.52	10.67	11.32
T-Student	MA	0.25	2	2	1	4.00	3.57	3.59	3.65	15.53	14.56	15.27
T-Student	MA	0.50	11	10	6	2.00	1.91	1.95	1.93	7.98	7.64	7.40
T-Student	MA	0.50	5	5	3	3.00	2.84	2.86	2.83	10.47	9.72	10.13
T-Student	MA	0.50	3	3	2	4.00	3.65	3.65	3.58	13.49	12.73	13.88
T-Student	MA	0.75	11	11	6	2.00	1.94	1.95	1.95	7.97	7.71	7.41
T-Student	MA	0.75	6	6	3	3.00	2.87	2.88	2.91	10.17	9.54	9.87
T-Student	MA	0.75	4	3	2	4.00	3.68	3.80	3.73	12.80	12.17	12.51
T-Student	GARCH	0.80	2	2	1	3.68	3.28	3.27	3.33	16.75	16.14	17.02
T-Student	GARCH	0.88	4	4	2	2.90	2.71	2.70	2.71	15.30	15.38	16.15
T-Student	GARCH	0.90	14	16	7	2.00	1.88	1.90	1.89	15.65	15.77	16.67

**Tabela A.3:** Resultados gerais da simulação para séries com 5000 observações.

## A 1.2 - Resultados da simulação II - estimação de $\sigma_\alpha$

Distribuição	Tipo Dep.	$\phi / \theta$	$\alpha$	$EP(\hat{\alpha}_{GI11})$	$\hat{\sigma}_{GI11}$	$EP(\hat{\alpha}_{NR15})$	$\hat{\sigma}_{NR15}$	$EP(\hat{\alpha}_{Hil})$	$\hat{\sigma}_{Hil}$	$EQ_{GI11}$	$EQ_{NR15}$	$EQ_{Hil}$
$\alpha$ -Stable	IID	0.00	1.25	0.125	0.143	0.131	0.145	0.125	0.129	18.866	16.486	10.864
$\alpha$ -Stable	IID	0.00	1.50	0.140	0.166	0.159	0.168	0.142	0.143	21.311	13.324	9.761
$\alpha$ -Stable	IID	0.00	1.75	0.158	0.195	0.179	0.195	0.167	0.163	26.311	15.212	9.739
$\alpha$ -Stable	AR	0.25	1.25	0.144	0.138	0.156	0.140	0.140	0.124	12.318	15.844	15.067
$\alpha$ -Stable	AR	0.25	1.50	0.157	0.162	0.175	0.163	0.155	0.143	11.622	13.882	12.332
$\alpha$ -Stable	AR	0.25	1.75	0.169	0.188	0.194	0.193	0.179	0.164	15.598	12.033	12.783
$\alpha$ -Stable	AR	0.50	1.25	0.173	0.132	0.186	0.133	0.161	0.115	25.939	31.148	30.319
$\alpha$ -Stable	AR	0.50	1.50	0.200	0.163	0.215	0.163	0.191	0.143	21.416	26.810	26.585
$\alpha$ -Stable	AR	0.50	1.75	0.216	0.188	0.240	0.195	0.217	0.164	16.913	21.880	26.139
$\alpha$ -Stable	AR	0.75	1.25	0.247	0.136	0.267	0.143	0.218	0.108	46.264	48.131	51.301
$\alpha$ -Stable	AR	0.75	1.50	0.296	0.172	0.312	0.173	0.251	0.132	43.226	45.807	48.238
$\alpha$ -Stable	AR	0.75	1.75	0.316	0.190	0.347	0.213	0.285	0.156	41.435	40.174	46.180
$\alpha$ -Stable	MA	0.25	1.25	0.140	0.137	0.154	0.143	0.134	0.124	11.714	14.181	12.880
$\alpha$ -Stable	MA	0.25	1.50	0.154	0.161	0.174	0.163	0.151	0.143	12.245	13.659	11.083
$\alpha$ -Stable	MA	0.25	1.75	0.165	0.188	0.191	0.193	0.177	0.164	17.487	12.213	12.113
$\alpha$ -Stable	MA	0.50	1.25	0.148	0.134	0.165	0.138	0.141	0.119	14.828	20.430	18.296
$\alpha$ -Stable	MA	0.50	1.50	0.172	0.162	0.193	0.164	0.165	0.143	12.568	19.376	16.483
$\alpha$ -Stable	MA	0.50	1.75	0.187	0.188	0.209	0.193	0.192	0.164	11.032	14.306	17.420
$\alpha$ -Stable	MA	0.75	1.25	0.152	0.133	0.165	0.137	0.145	0.119	16.815	21.164	20.358
$\alpha$ -Stable	MA	0.75	1.50	0.178	0.162	0.195	0.163	0.177	0.143	14.642	20.588	21.279
$\alpha$ -Stable	MA	0.75	1.75	0.195	0.188	0.217	0.196	0.197	0.164	11.602	15.638	19.043
Burr	IID	0.00	2.00	0.198	0.220	0.201	0.225	0.214	0.216	16.297	17.102	11.567
Burr	IID	0.00	3.00	0.297	0.329	0.298	0.337	0.321	0.324	16.297	17.819	11.567
Burr	IID	0.00	4.00	0.395	0.439	0.391	0.448	0.429	0.432	16.297	18.854	11.567
Burr	AR	0.25	2.00	0.163	0.162	0.164	0.160	0.158	0.149	8.377	8.739	9.279
Burr	AR	0.25	3.00	0.222	0.242	0.218	0.242	0.223	0.219	12.126	13.886	7.598
Burr	AR	0.25	4.00	0.283	0.322	0.264	0.320	0.284	0.284	16.046	22.824	7.251
Burr	AR	0.50	2.00	0.256	0.187	0.246	0.186	0.145	0.115	28.117	25.576	21.272
Burr	AR	0.50	3.00	0.354	0.297	0.317	0.293	0.207	0.179	18.027	11.086	14.861
Burr	AR	0.50	4.00	0.448	0.410	0.388	0.400	0.275	0.243	11.683	8.632	13.170
Burr	AR	0.75	2.00	0.509	0.246	0.455	0.245	0.287	0.154	52.281	46.901	46.679
Burr	AR	0.75	3.00	0.712	0.421	0.602	0.411	0.406	0.253	41.675	32.771	38.207
Burr	AR	0.75	4.00	0.879	0.602	0.733	0.579	0.525	0.352	32.519	22.511	33.465
Burr	MA	0.25	2.00	0.176	0.175	0.177	0.176	0.174	0.163	9.141	9.241	10.464
Burr	MA	0.25	3.00	0.243	0.260	0.236	0.260	0.249	0.243	11.287	13.782	8.649
Burr	MA	0.25	4.00	0.306	0.341	0.295	0.349	0.308	0.307	14.445	20.269	7.918
Burr	MA	0.50	2.00	0.175	0.159	0.184	0.158	0.178	0.150	12.406	16.432	17.582

Continua na página seguinte.

Distribuição	Tipo	Dep.	$\phi / \theta$	$\alpha$	EP( $\hat{\alpha}_{GI11}$ )	$\hat{\sigma}_{GI11}$	EP( $\hat{\alpha}_{NR15}$ )	$\hat{\sigma}_{NR15}$	EP( $\hat{\alpha}_{Hil}$ )	$\hat{\sigma}_{Hil}$	$EQ_{GI11}$	$EQ_{NR15}$	$EQ_{Hil}$
Burr	MA		0.50	3.00	0.250	0.244	0.245	0.242	0.236	0.211	8.528	8.201	12.792
Burr	MA		0.50	4.00	0.323	0.332	0.293	0.325	0.294	0.275	8.612	13.512	9.686
Burr	MA		0.75	2.00	0.185	0.160	0.195	0.160	0.174	0.141	15.906	19.885	20.140
Burr	MA		0.75	3.00	0.274	0.251	0.264	0.248	0.234	0.200	11.775	10.136	16.058
Burr	MA		0.75	4.00	0.356	0.343	0.320	0.335	0.299	0.267	8.877	9.311	12.628
Cauchy	IID		0.00	1.00	0.103	0.113	0.109	0.117	0.109	0.111	15.936	14.839	11.663
Cauchy	AR		0.25	1.00	0.124	0.107	0.134	0.109	0.120	0.099	17.902	22.230	20.389
Cauchy	AR		0.50	1.00	0.150	0.104	0.159	0.103	0.143	0.093	32.641	37.534	36.387
Cauchy	AR		0.75	1.00	0.228	0.115	0.230	0.109	0.189	0.086	50.879	54.100	55.380
Cauchy	MA		0.25	1.00	0.122	0.109	0.134	0.116	0.113	0.099	15.665	18.490	16.142
Cauchy	MA		0.50	1.00	0.127	0.107	0.139	0.111	0.116	0.096	19.350	23.563	20.339
Cauchy	MA		0.75	1.00	0.129	0.107	0.141	0.113	0.121	0.096	20.891	23.612	23.087
Lévy	IID		0.00	0.50	0.038	0.040	0.038	0.040	0.032	0.033	9.556	9.097	7.300
Lévy	AR		0.25	0.50	0.070	0.041	0.072	0.041	0.049	0.029	42.002	43.615	40.603
Lévy	AR		0.50	0.50	0.093	0.042	0.097	0.043	0.063	0.028	54.993	56.909	56.123
Lévy	AR		0.75	0.50	0.134	0.045	0.143	0.046	0.095	0.029	66.608	68.672	70.205
Lévy	MA		0.25	0.50	0.052	0.040	0.052	0.040	0.040	0.032	23.727	24.221	22.109
Lévy	MA		0.50	0.50	0.053	0.040	0.052	0.040	0.039	0.030	25.110	25.016	23.930
Lévy	MA		0.75	0.50	0.053	0.040	0.052	0.040	0.040	0.030	25.484	24.315	25.053
Normal	GARCH		0.90	2.00	0.273	0.229	0.296	0.239	0.301	0.196	19.844	22.414	36.213
Pareto	IID		0.00	2.00	0.121	0.127	0.116	0.127	0.087	0.090	7.596	11.656	5.697
Pareto	IID		0.00	3.00	0.182	0.190	0.173	0.190	0.131	0.135	7.596	11.752	5.697
Pareto	IID		0.00	4.00	0.243	0.253	0.229	0.254	0.174	0.180	7.596	12.260	5.697
Pareto	AR		0.25	2.00	0.182	0.146	0.160	0.145	0.105	0.090	20.820	11.277	14.915
Pareto	AR		0.25	3.00	0.263	0.227	0.219	0.223	0.151	0.134	15.194	6.600	12.257
Pareto	AR		0.25	4.00	0.343	0.307	0.282	0.302	0.201	0.181	12.114	9.656	10.866
Pareto	AR		0.50	2.00	0.277	0.169	0.237	0.164	0.129	0.088	39.400	31.238	32.206
Pareto	AR		0.50	3.00	0.398	0.274	0.296	0.261	0.194	0.139	31.650	13.406	28.769
Pareto	AR		0.50	4.00	0.511	0.382	0.364	0.358	0.261	0.191	26.136	6.509	27.214
Pareto	AR		0.75	2.00	0.502	0.216	0.382	0.203	0.199	0.099	57.388	47.401	50.382
Pareto	AR		0.75	3.00	0.721	0.373	0.446	0.331	0.308	0.163	48.722	26.696	47.301
Pareto	AR		0.75	4.00	0.912	0.535	0.545	0.457	0.421	0.228	41.834	17.305	46.089
Pareto	MA		0.25	2.00	0.164	0.140	0.148	0.139	0.099	0.090	16.206	8.906	10.205
Pareto	MA		0.25	3.00	0.241	0.216	0.207	0.214	0.144	0.135	12.230	7.032	7.709
Pareto	MA		0.25	4.00	0.316	0.292	0.268	0.288	0.181	0.177	9.886	9.932	4.995
Pareto	MA		0.50	2.00	0.183	0.144	0.169	0.143	0.104	0.091	22.371	17.035	13.448
Pareto	MA		0.50	3.00	0.274	0.226	0.232	0.222	0.148	0.134	18.600	7.556	10.773
Pareto	MA		0.50	4.00	0.360	0.309	0.291	0.301	0.199	0.181	15.449	7.156	9.783
Pareto	MA		0.75	2.00	0.190	0.145	0.176	0.144	0.105	0.090	24.425	19.341	14.515
Pareto	MA		0.75	3.00	0.287	0.230	0.240	0.225	0.149	0.133	20.986	8.949	11.196
Pareto	MA		0.75	4.00	0.379	0.316	0.299	0.306	0.199	0.181	17.740	6.680	10.179
T-Student	IID		0.00	2.00	0.262	0.312	0.265	0.310	0.275	0.283	25.963	24.600	16.049
T-Student	IID		0.00	3.00	0.494	0.614	0.515	0.599	0.568	0.593	34.144	28.056	22.799
T-Student	IID		0.00	4.00	0.775	0.912	0.688	0.768	0.882	0.854	33.347	27.032	26.011
T-Student	AR		0.25	2.00	0.254	0.296	0.258	0.294	0.273	0.271	23.146	21.480	14.918
T-Student	AR		0.25	3.00	0.460	0.582	0.481	0.568	0.498	0.524	34.780	28.163	20.687
T-Student	AR		0.25	4.00	0.692	0.830	0.720	0.791	0.731	0.714	32.649	26.210	22.470
T-Student	AR		0.50	2.00	0.282	0.278	0.284	0.269	0.284	0.251	14.952	15.754	17.713
T-Student	AR		0.50	3.00	0.472	0.545	0.443	0.499	0.520	0.501	25.300	22.540	18.618
T-Student	AR		0.50	4.00	0.673	0.813	0.674	0.772	0.659	0.659	31.674	27.051	19.990
T-Student	AR		0.75	2.00	0.312	0.240	0.328	0.240	0.318	0.214	26.406	29.860	34.730
T-Student	AR		0.75	3.00	0.500	0.455	0.497	0.448	0.532	0.416	18.660	18.895	26.463
T-Student	AR		0.75	4.00	0.717	0.716	0.767	0.739	0.788	0.651	19.990	20.566	25.145
T-Student	MA		0.25	2.00	0.270	0.308	0.259	0.293	0.274	0.270	22.078	20.898	14.960
T-Student	MA		0.25	3.00	0.456	0.581	0.434	0.527	0.498	0.525	35.409	29.492	20.701
T-Student	MA		0.25	4.00	0.691	0.829	0.714	0.789	0.718	0.713	32.562	26.483	22.361
T-Student	MA		0.50	2.00	0.274	0.279	0.284	0.279	0.289	0.259	15.437	15.747	17.568
T-Student	MA		0.50	3.00	0.454	0.529	0.461	0.518	0.516	0.488	25.925	23.125	19.044
T-Student	MA		0.50	4.00	0.764	0.882	0.676	0.752	0.807	0.756	30.113	25.375	23.230
T-Student	MA		0.75	2.00	0.285	0.271	0.298	0.271	0.290	0.246	15.657	17.726	20.512
T-Student	MA		0.75	3.00	0.476	0.508	0.466	0.497	0.504	0.448	20.245	19.830	20.321
T-Student	MA		0.75	4.00	0.756	0.825	0.667	0.711	0.720	0.663	25.609	22.449	21.500

Continua na página seguinte.

Distribuição	Tipo Dep.	$\phi / \theta$	$\alpha$	EP( $\hat{\alpha}_{GI11}$ )	$\hat{\sigma}_{GI11}$	EP( $\hat{\alpha}_{NR15}$ )	$\hat{\sigma}_{NR15}$	EP( $\hat{\alpha}_{Hil}$ )	$\hat{\sigma}_{Hil}$	$EQ_{GI11}$	$EQ_{NR15}$	$EQ_{Hil}$
T-Student	GARCH	0.80	3.68	0.673	0.774	0.697	0.735	0.714	0.664	29.846	24.931	23.420
T-Student	GARCH	0.88	2.90	0.517	0.556	0.528	0.538	0.545	0.466	22.388	20.409	23.342
T-Student	GARCH	0.90	2.00	0.293	0.267	0.290	0.257	0.326	0.235	16.313	17.623	30.400

**Tabela A.4:** Resultados gerais da simulação para séries com 500 observações (erro padrão).

Distribuição	Tipo Dep.	$\phi / \theta$	$\alpha$	EP( $\hat{\alpha}_{GI11}$ )	$\hat{\sigma}_{GI11}$	EP( $\hat{\alpha}_{NR15}$ )	$\hat{\sigma}_{NR15}$	EP( $\hat{\alpha}_{Hil}$ )	$\hat{\sigma}_{Hil}$	$EQ_{GI11}$	$EQ_{NR15}$	$EQ_{Hil}$
$\alpha$ -Stable	IID	0.00	1.25	0.070	0.076	0.076	0.076	0.065	0.067	10.766	6.299	6.100
$\alpha$ -Stable	IID	0.00	1.50	0.076	0.086	0.096	0.084	0.074	0.075	14.652	13.712	5.235
$\alpha$ -Stable	IID	0.00	1.75	0.076	0.095	0.119	0.095	0.084	0.082	24.833	20.966	5.259
$\alpha$ -Stable	AR	0.25	1.25	0.087	0.075	0.097	0.075	0.077	0.067	15.250	23.173	14.259
$\alpha$ -Stable	AR	0.25	1.50	0.087	0.084	0.114	0.083	0.081	0.075	6.619	27.931	9.429
$\alpha$ -Stable	AR	0.25	1.75	0.088	0.095	0.132	0.096	0.089	0.082	10.092	28.225	9.635
$\alpha$ -Stable	AR	0.50	1.25	0.105	0.071	0.122	0.071	0.093	0.065	32.625	42.347	31.262
$\alpha$ -Stable	AR	0.50	1.50	0.110	0.084	0.139	0.081	0.097	0.075	24.109	42.270	22.809
$\alpha$ -Stable	AR	0.50	1.75	0.105	0.095	0.152	0.095	0.101	0.082	11.191	37.794	19.557
$\alpha$ -Stable	AR	0.75	1.25	0.140	0.068	0.158	0.066	0.125	0.060	51.436	58.431	52.080
$\alpha$ -Stable	AR	0.75	1.50	0.151	0.082	0.177	0.080	0.133	0.072	45.813	55.043	46.191
$\alpha$ -Stable	AR	0.75	1.75	0.154	0.095	0.195	0.097	0.140	0.082	38.248	50.616	41.472
$\alpha$ -Stable	MA	0.25	1.25	0.082	0.074	0.092	0.075	0.075	0.067	11.221	19.769	11.744
$\alpha$ -Stable	MA	0.25	1.50	0.085	0.084	0.112	0.083	0.080	0.075	5.722	26.548	7.838
$\alpha$ -Stable	MA	0.25	1.75	0.086	0.095	0.131	0.096	0.088	0.082	12.253	27.744	8.328
$\alpha$ -Stable	MA	0.50	1.25	0.089	0.074	0.100	0.075	0.078	0.064	17.820	25.904	17.748
$\alpha$ -Stable	MA	0.50	1.50	0.093	0.084	0.122	0.083	0.086	0.075	11.073	32.283	13.649
$\alpha$ -Stable	MA	0.50	1.75	0.092	0.095	0.142	0.096	0.092	0.082	6.409	33.058	12.013
$\alpha$ -Stable	MA	0.75	1.25	0.088	0.072	0.099	0.073	0.080	0.064	18.688	27.083	20.394
$\alpha$ -Stable	MA	0.75	1.50	0.096	0.084	0.123	0.083	0.089	0.075	13.552	32.947	16.652
$\alpha$ -Stable	MA	0.75	1.75	0.095	0.095	0.142	0.096	0.094	0.082	5.513	33.330	13.432
Burr	IID	0.00	2.00	0.130	0.138	0.131	0.137	0.142	0.143	9.337	8.879	7.477
Burr	IID	0.00	3.00	0.195	0.206	0.197	0.212	0.213	0.215	9.337	10.622	7.477
Burr	IID	0.00	4.00	0.260	0.275	0.257	0.282	0.284	0.286	9.337	12.172	7.477
Burr	AR	0.25	2.00	0.093	0.087	0.100	0.087	0.085	0.083	7.286	13.883	5.277
Burr	AR	0.25	3.00	0.121	0.127	0.125	0.126	0.115	0.116	6.409	4.274	4.078
Burr	AR	0.25	4.00	0.149	0.165	0.145	0.164	0.145	0.150	11.911	14.006	4.969
Burr	AR	0.50	2.00	0.138	0.093	0.141	0.093	0.075	0.058	33.096	34.431	22.533
Burr	AR	0.50	3.00	0.188	0.148	0.179	0.148	0.103	0.089	21.805	18.135	13.611
Burr	AR	0.50	4.00	0.235	0.205	0.210	0.202	0.134	0.121	13.562	5.373	10.302
Burr	AR	0.75	2.00	0.294	0.119	0.261	0.120	0.148	0.076	59.608	54.084	48.520
Burr	AR	0.75	3.00	0.406	0.206	0.342	0.205	0.211	0.125	49.393	40.209	40.737
Burr	AR	0.75	4.00	0.490	0.297	0.400	0.291	0.271	0.174	39.617	27.494	35.865
Burr	MA	0.25	2.00	0.104	0.098	0.108	0.097	0.097	0.092	7.886	11.204	6.884
Burr	MA	0.25	3.00	0.139	0.141	0.138	0.140	0.130	0.130	5.178	4.890	4.383
Burr	MA	0.25	4.00	0.170	0.183	0.166	0.185	0.162	0.167	8.718	12.039	5.210
Burr	MA	0.50	2.00	0.099	0.086	0.110	0.084	0.092	0.080	14.141	24.430	14.070
Burr	MA	0.50	3.00	0.127	0.122	0.140	0.123	0.120	0.111	5.641	12.793	8.259
Burr	MA	0.50	4.00	0.164	0.166	0.160	0.165	0.149	0.142	4.311	5.105	5.731
Burr	MA	0.75	2.00	0.099	0.083	0.112	0.081	0.093	0.076	16.679	27.983	18.668
Burr	MA	0.75	3.00	0.139	0.125	0.151	0.126	0.119	0.105	10.740	16.850	12.324
Burr	MA	0.75	4.00	0.181	0.172	0.174	0.171	0.153	0.138	6.351	4.634	10.318
Cauchy	IID	0.00	1.00	0.063	0.066	0.067	0.068	0.060	0.060	8.479	7.412	6.202
Cauchy	AR	0.25	1.00	0.081	0.062	0.088	0.063	0.075	0.060	24.354	28.361	20.894
Cauchy	AR	0.50	1.00	0.097	0.058	0.111	0.060	0.086	0.053	40.978	46.383	38.494
Cauchy	AR	0.75	1.00	0.126	0.054	0.142	0.053	0.116	0.050	57.304	62.799	57.556
Cauchy	MA	0.25	1.00	0.075	0.063	0.081	0.065	0.067	0.057	17.544	20.951	15.403
Cauchy	MA	0.50	1.00	0.078	0.061	0.086	0.065	0.075	0.060	22.006	25.596	21.396
Cauchy	MA	0.75	1.00	0.079	0.061	0.087	0.065	0.075	0.057	23.499	26.403	24.670
Lévy	IID	0.00	0.50	0.020	0.021	0.021	0.021	0.018	0.019	5.948	4.691	5.354
Lévy	AR	0.25	0.50	0.039	0.020	0.041	0.020	0.029	0.017	48.836	50.852	42.250
Lévy	AR	0.50	0.50	0.053	0.020	0.056	0.020	0.037	0.016	62.189	63.414	58.179
Lévy	AR	0.75	0.50	0.077	0.021	0.082	0.021	0.053	0.015	73.523	74.518	72.419

Continua na página seguinte.



Distribuição	Tipo	Dep.	$\phi / \theta$	$\alpha$	$EP(\hat{\alpha}_{GI11})$	$\hat{\sigma}_{GI11}$	$EP(\hat{\alpha}_{NR15})$	$\hat{\sigma}_{NR15}$	$EP(\hat{\alpha}_{Hil})$	$\hat{\sigma}_{Hil}$	$EQ_{GI11}$	$EQ_{NR15}$	$EQ_{Hil}$
Lévy	MA		0.25	0.50	0.026	0.020	0.028	0.020	0.022	0.017	24.331	28.931	22.294
Lévy	MA		0.50	0.50	0.027	0.020	0.028	0.020	0.024	0.018	25.602	29.656	24.602
Lévy	MA		0.75	0.50	0.027	0.020	0.028	0.020	0.024	0.018	25.950	29.690	26.312
Normal	GARCH		0.90	2.00	0.302	0.121	0.315	0.118	0.327	0.109	60.465	62.921	66.774
Pareto	IID		0.00	2.00	0.062	0.063	0.060	0.063	0.044	0.045	4.032	6.087	2.475
Pareto	IID		0.00	3.00	0.092	0.095	0.090	0.095	0.066	0.067	4.032	6.150	2.475
Pareto	IID		0.00	4.00	0.123	0.126	0.120	0.127	0.088	0.089	4.032	6.269	2.475
Pareto	AR		0.25	2.00	0.094	0.073	0.086	0.072	0.054	0.045	22.982	17.365	16.861
Pareto	AR		0.25	3.00	0.356	0.315	0.116	0.111	0.079	0.065	14.700	5.550	17.489
Pareto	AR		0.25	4.00	0.490	0.448	0.148	0.150	0.105	0.088	12.846	3.504	16.194
Pareto	AR		0.50	2.00	0.147	0.084	0.133	0.081	0.069	0.047	43.254	39.705	32.597
Pareto	AR		0.50	3.00	0.208	0.136	0.159	0.128	0.103	0.067	34.684	19.680	35.162
Pareto	AR		0.50	4.00	0.264	0.189	0.189	0.176	0.139	0.091	28.390	7.451	34.075
Pareto	AR		0.75	2.00	0.285	0.105	0.231	0.098	0.111	0.046	63.292	57.682	58.801
Pareto	AR		0.75	3.00	0.395	0.183	0.239	0.161	0.177	0.076	53.868	32.969	57.306
Pareto	AR		0.75	4.00	0.482	0.264	0.285	0.222	0.245	0.105	45.411	22.483	56.914
Pareto	MA		0.25	2.00	0.084	0.069	0.080	0.069	0.052	0.045	17.447	13.795	12.545
Pareto	MA		0.25	3.00	0.123	0.107	0.110	0.106	0.073	0.067	13.027	4.602	8.253
Pareto	MA		0.25	4.00	0.161	0.145	0.140	0.144	0.097	0.091	10.146	3.940	7.158
Pareto	MA		0.50	2.00	0.093	0.071	0.093	0.071	0.053	0.045	23.762	23.918	15.331
Pareto	MA		0.50	3.00	0.140	0.112	0.126	0.110	0.074	0.067	19.854	12.712	10.579
Pareto	MA		0.50	4.00	0.183	0.154	0.155	0.150	0.099	0.090	16.406	4.456	9.394
Pareto	MA		0.75	2.00	0.097	0.072	0.098	0.071	0.055	0.046	25.805	27.004	16.966
Pareto	MA		0.75	3.00	0.146	0.114	0.133	0.112	0.078	0.068	22.281	16.017	13.015
Pareto	MA		0.75	4.00	0.193	0.157	0.161	0.153	0.101	0.090	18.771	6.093	10.664
T-Student	IID		0.00	2.00	0.178	0.195	0.188	0.206	0.185	0.186	14.051	14.594	10.012
T-Student	IID		0.00	3.00	0.329	0.375	0.352	0.410	0.334	0.342	19.810	22.429	13.159
T-Student	IID		0.00	4.00	0.538	0.616	0.487	0.576	0.514	0.530	23.241	24.953	16.117
T-Student	AR		0.25	2.00	0.177	0.178	0.182	0.187	0.172	0.172	9.570	10.239	9.127
T-Student	AR		0.25	3.00	0.347	0.386	0.321	0.372	0.347	0.353	17.947	20.861	12.990
T-Student	AR		0.25	4.00	0.557	0.631	0.506	0.589	0.533	0.542	22.574	23.757	15.887
T-Student	AR		0.50	2.00	0.190	0.155	0.195	0.155	0.184	0.152	20.157	22.042	18.995
T-Student	AR		0.50	3.00	0.319	0.312	0.326	0.330	0.344	0.318	11.360	11.806	13.519
T-Student	AR		0.50	4.00	0.544	0.577	0.485	0.545	0.471	0.455	16.884	19.385	13.341
T-Student	AR		0.75	2.00	0.217	0.131	0.236	0.130	0.210	0.125	40.099	45.692	41.226
T-Student	AR		0.75	3.00	0.322	0.249	0.320	0.248	0.336	0.244	24.265	24.200	28.570
T-Student	AR		0.75	4.00	0.481	0.417	0.486	0.441	0.549	0.429	17.357	14.980	24.592
T-Student	MA		0.25	2.00	0.176	0.178	0.183	0.186	0.174	0.172	9.567	10.148	9.269
T-Student	MA		0.25	3.00	0.347	0.385	0.323	0.372	0.342	0.352	17.840	20.256	13.214
T-Student	MA		0.25	4.00	0.557	0.630	0.506	0.589	0.537	0.541	22.496	23.568	15.819
T-Student	MA		0.50	2.00	0.185	0.165	0.188	0.164	0.184	0.161	14.128	15.309	15.037
T-Student	MA		0.50	3.00	0.333	0.329	0.339	0.351	0.326	0.308	11.986	13.125	12.414
T-Student	MA		0.50	4.00	0.530	0.561	0.475	0.530	0.606	0.571	16.827	18.951	16.860
T-Student	MA		0.75	2.00	0.189	0.159	0.192	0.159	0.181	0.150	17.930	19.381	19.068
T-Student	MA		0.75	3.00	0.344	0.311	0.352	0.330	0.308	0.274	14.853	13.392	14.848
T-Student	MA		0.75	4.00	0.522	0.506	0.544	0.550	0.507	0.457	14.452	15.084	16.314
T-Student	GARCH		0.80	3.68	0.561	0.582	0.526	0.540	0.551	0.494	18.619	17.306	18.860
T-Student	GARCH		0.88	2.90	0.443	0.343	0.474	0.369	0.482	0.345	26.024	26.018	31.203
T-Student	GARCH		0.90	2.00	0.305	0.145	0.311	0.138	0.336	0.141	53.165	56.011	58.436

**Tabela A.5:** Resultados gerais da simulação para séries com 2000 observações (erro padrão).

Distribuição	Tipo	Dep.	$\phi / \theta$	$\alpha$	$EP(\hat{\alpha}_{GI11})$	$\hat{\sigma}_{GI11}$	$EP(\hat{\alpha}_{NR15})$	$\hat{\sigma}_{NR15}$	$EP(\hat{\alpha}_{Hil})$	$\hat{\sigma}_{Hil}$	$EQ_{GI11}$	$EQ_{NR15}$	$EQ_{Hil}$
$\alpha$ -Stable	IID		0.00	1.25	0.046	0.050	0.053	0.049	0.044	0.044	8.213	8.444	3.735
$\alpha$ -Stable	IID		0.00	1.50	0.048	0.055	0.071	0.053	0.048	0.047	14.444	26.313	3.211
$\alpha$ -Stable	IID		0.00	1.75	0.048	0.060	0.097	0.060	0.055	0.055	25.405	38.948	3.102
$\alpha$ -Stable	AR		0.25	1.25	0.058	0.048	0.069	0.049	0.048	0.042	17.324	29.143	12.206
$\alpha$ -Stable	AR		0.25	1.50	0.056	0.053	0.088	0.053	0.052	0.047	5.604	39.915	8.621
$\alpha$ -Stable	AR		0.25	1.75	0.056	0.060	0.109	0.059	0.058	0.055	9.085	46.013	7.006
$\alpha$ -Stable	AR		0.50	1.25	0.075	0.047	0.089	0.047	0.063	0.043	36.812	47.461	32.502

Continua na página seguinte.

Distribuição	Tipo	Dep.	$\phi / \theta$	$\alpha$	$EP(\hat{\alpha}_{GI11})$	$\hat{\sigma}_{GI11}$	$EP(\hat{\alpha}_{NR15})$	$\hat{\sigma}_{NR15}$	$EP(\hat{\alpha}_{Hil})$	$\hat{\sigma}_{Hil}$	$EQ_{GI11}$	$EQ_{NR15}$	$EQ_{Hil}$
$\alpha$ -Stable	AR		0.50	1.50	0.072	0.053	0.111	0.052	0.062	0.048	26.304	52.992	23.125
$\alpha$ -Stable	AR		0.50	1.75	0.070	0.060	0.130	0.060	0.066	0.052	13.858	54.281	21.242
$\alpha$ -Stable	AR		0.75	1.25	0.102	0.045	0.125	0.045	0.088	0.041	55.467	64.249	53.336
$\alpha$ -Stable	AR		0.75	1.50	0.101	0.052	0.144	0.050	0.085	0.046	48.504	65.287	46.440
$\alpha$ -Stable	AR		0.75	1.75	0.100	0.060	0.163	0.061	0.089	0.052	39.678	62.652	41.935
$\alpha$ -Stable	MA		0.25	1.25	0.055	0.048	0.065	0.049	0.046	0.042	11.987	24.907	9.357
$\alpha$ -Stable	MA		0.25	1.50	0.056	0.055	0.085	0.053	0.050	0.047	4.563	37.959	5.923
$\alpha$ -Stable	MA		0.25	1.75	0.054	0.060	0.108	0.059	0.058	0.055	11.774	45.466	6.562
$\alpha$ -Stable	MA		0.50	1.25	0.059	0.048	0.069	0.048	0.051	0.042	18.875	31.302	17.025
$\alpha$ -Stable	MA		0.50	1.50	0.059	0.053	0.092	0.053	0.054	0.047	10.967	42.682	12.333
$\alpha$ -Stable	MA		0.50	1.75	0.060	0.060	0.117	0.059	0.063	0.055	3.485	49.433	13.502
$\alpha$ -Stable	MA		0.75	1.25	0.061	0.048	0.071	0.049	0.053	0.042	21.278	31.256	19.546
$\alpha$ -Stable	MA		0.75	1.50	0.062	0.053	0.093	0.053	0.058	0.047	14.308	43.119	17.959
$\alpha$ -Stable	MA		0.75	1.75	0.062	0.060	0.116	0.059	0.063	0.052	4.703	49.117	17.508
Burr	IID		0.00	2.00	0.097	0.103	0.097	0.103	0.103	0.103	8.423	8.008	5.364
Burr	IID		0.00	3.00	0.145	0.154	0.149	0.161	0.154	0.155	8.423	9.946	5.364
Burr	IID		0.00	4.00	0.193	0.206	0.194	0.214	0.206	0.207	8.423	11.586	5.364
Burr	AR		0.25	2.00	0.060	0.057	0.066	0.056	0.055	0.052	6.312	15.848	5.870
Burr	AR		0.25	3.00	0.076	0.081	0.082	0.080	0.073	0.074	7.071	3.595	2.517
Burr	AR		0.25	4.00	0.093	0.105	0.095	0.104	0.094	0.097	13.339	10.760	3.920
Burr	AR		0.50	2.00	0.087	0.059	0.092	0.059	0.047	0.037	33.067	36.432	22.074
Burr	AR		0.50	3.00	0.119	0.094	0.117	0.094	0.067	0.056	21.408	20.528	15.842
Burr	AR		0.50	4.00	0.149	0.130	0.137	0.128	0.087	0.077	13.006	6.871	12.504
Burr	AR		0.75	2.00	0.195	0.075	0.171	0.076	0.093	0.048	61.521	55.749	48.594
Burr	AR		0.75	3.00	0.267	0.130	0.225	0.130	0.133	0.079	51.218	42.485	40.426
Burr	AR		0.75	4.00	0.318	0.188	0.261	0.185	0.172	0.110	41.074	29.238	36.040
Burr	MA		0.25	2.00	0.069	0.065	0.073	0.064	0.065	0.061	7.003	12.003	6.582
Burr	MA		0.25	3.00	0.088	0.091	0.091	0.090	0.086	0.084	4.481	3.255	3.364
Burr	MA		0.25	4.00	0.108	0.118	0.108	0.117	0.107	0.108	9.439	9.410	3.230
Burr	MA		0.50	2.00	0.064	0.056	0.074	0.054	0.061	0.051	13.392	27.243	15.631
Burr	MA		0.50	3.00	0.079	0.077	0.093	0.078	0.077	0.070	3.645	16.542	9.114
Burr	MA		0.50	4.00	0.103	0.105	0.107	0.105	0.095	0.090	3.702	2.982	5.814
Burr	MA		0.75	2.00	0.063	0.053	0.075	0.052	0.060	0.049	15.557	31.815	18.278
Burr	MA		0.75	3.00	0.087	0.079	0.101	0.080	0.080	0.068	8.974	21.038	14.895
Burr	MA		0.75	4.00	0.113	0.109	0.116	0.109	0.098	0.087	4.658	7.219	11.306
Cauchy	IID		0.00	1.00	0.044	0.046	0.046	0.046	0.040	0.042	7.374	4.744	5.260
Cauchy	AR		0.25	1.00	0.057	0.042	0.061	0.043	0.050	0.040	25.490	30.822	20.411
Cauchy	AR		0.50	1.00	0.071	0.040	0.080	0.041	0.063	0.038	43.784	49.364	39.774
Cauchy	AR		0.75	1.00	0.092	0.037	0.108	0.036	0.086	0.035	60.355	66.674	59.064
Cauchy	MA		0.25	1.00	0.052	0.043	0.057	0.045	0.049	0.042	17.269	21.931	14.731
Cauchy	MA		0.50	1.00	0.056	0.043	0.060	0.044	0.051	0.040	22.409	27.254	21.771
Cauchy	MA		0.75	1.00	0.057	0.043	0.061	0.044	0.053	0.040	24.087	28.210	24.652
Lévy	IID		0.00	0.50	0.014	0.014	0.015	0.015	0.014	0.014	3.660	3.097	4.358
Lévy	AR		0.25	0.50	0.026	0.013	0.028	0.013	0.021	0.012	50.847	54.976	42.660
Lévy	AR		0.50	0.50	0.036	0.013	0.039	0.013	0.027	0.011	64.495	67.163	59.361
Lévy	AR		0.75	0.50	0.053	0.013	0.058	0.013	0.038	0.010	76.096	77.662	73.545
Lévy	MA		0.25	0.50	0.018	0.013	0.019	0.014	0.016	0.012	25.846	30.038	21.590
Lévy	MA		0.50	0.50	0.018	0.013	0.020	0.014	0.016	0.012	27.104	30.383	23.874
Lévy	MA		0.75	0.50	0.018	0.013	0.020	0.014	0.017	0.012	27.449	30.252	24.554
Normal	GARCH		0.90	2.00	0.317	0.080	0.321	0.073	0.349	0.078	74.718	77.203	77.756
Pareto	IID		0.00	2.00	0.040	0.040	0.040	0.040	0.029	0.028	2.278	1.999	1.991
Pareto	IID		0.00	3.00	0.061	0.060	0.060	0.060	0.043	0.042	2.278	1.999	1.991
Pareto	IID		0.00	4.00	0.081	0.080	0.080	0.080	0.057	0.057	2.278	2.022	1.991
Pareto	AR		0.25	2.00	0.186	0.146	0.058	0.045	0.035	0.028	22.330	22.428	18.450
Pareto	AR		0.25	3.00	0.320	0.275	0.077	0.070	0.052	0.044	16.227	9.588	15.283
Pareto	AR		0.25	4.00	0.428	0.376	0.098	0.095	0.067	0.055	14.572	3.640	17.043
Pareto	AR		0.50	2.00	0.345	0.217	0.093	0.051	0.046	0.030	38.321	45.272	35.009
Pareto	AR		0.50	3.00	0.623	0.454	0.109	0.081	0.073	0.041	29.580	25.596	43.053
Pareto	AR		0.50	4.00	0.971	0.785	0.127	0.111	0.099	0.057	23.832	12.555	42.291
Pareto	AR		0.75	2.00	0.663	0.294	0.166	0.061	0.084	0.028	56.600	63.236	66.384
Pareto	AR		0.75	3.00	1.382	0.760	0.169	0.100	0.135	0.046	47.175	40.813	65.816
Pareto	AR		0.75	4.00	0.334	0.166	0.207	0.138	0.188	0.064	50.147	33.523	65.683

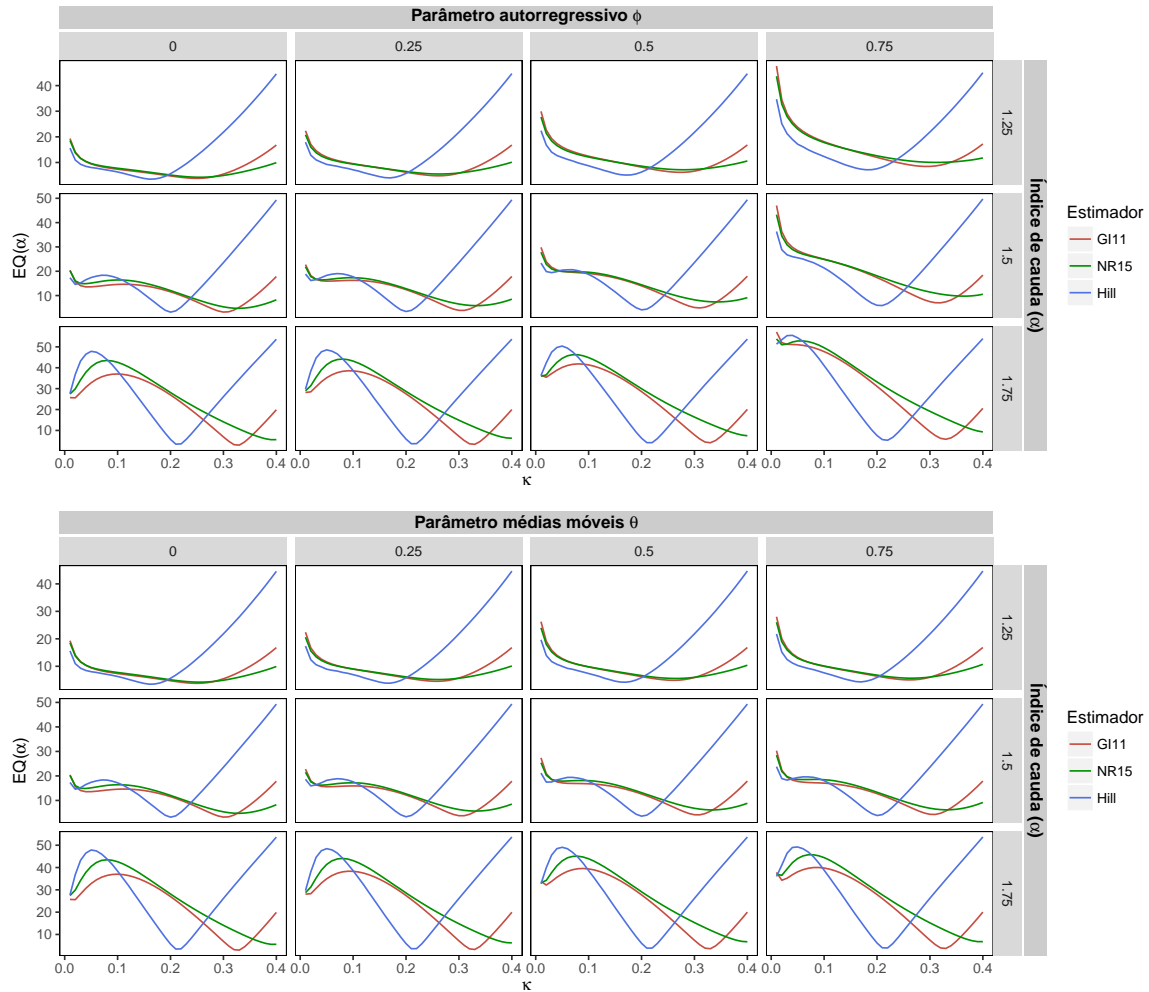
Continua na página seguinte.

Distribuição	Tipo	Dep.	$\phi / \theta$	$\alpha$	EP( $\hat{\alpha}_{GI11}$ )	$\hat{\sigma}_{GI11}$	EP( $\hat{\alpha}_{NR15}$ )	$\hat{\sigma}_{NR15}$	EP( $\hat{\alpha}_{Hil}$ )	$\hat{\sigma}_{Hil}$	$EQ_{GI11}$	$EQ_{NR15}$	$EQ_{Hil}$
Pareto	MA		0.25	2.00	0.055	0.044	0.054	0.044	0.033	0.029	20.568	19.059	13.862
Pareto	MA		0.25	3.00	0.081	0.068	0.074	0.067	0.047	0.043	16.331	9.044	10.191
Pareto	MA		0.25	4.00	0.106	0.092	0.094	0.091	0.063	0.057	13.495	3.654	9.075
Pareto	MA		0.50	2.00	0.062	0.045	0.063	0.045	0.034	0.029	26.629	29.595	17.089
Pareto	MA		0.50	3.00	0.092	0.071	0.085	0.070	0.049	0.042	23.015	18.497	13.181
Pareto	MA		0.50	4.00	0.121	0.097	0.105	0.095	0.065	0.057	19.763	9.437	12.030
Pareto	MA		0.75	2.00	0.064	0.046	0.067	0.045	0.036	0.029	28.563	33.051	18.730
Pareto	MA		0.75	3.00	0.097	0.072	0.091	0.071	0.051	0.043	25.318	22.353	14.983
Pareto	MA		0.75	4.00	0.127	0.100	0.109	0.097	0.065	0.057	22.017	11.633	12.604
T-Student	IID		0.00	2.00	0.132	0.143	0.132	0.142	0.128	0.134	10.904	11.211	8.461
T-Student	IID		0.00	3.00	0.281	0.318	0.269	0.313	0.256	0.273	17.606	19.931	11.842
T-Student	IID		0.00	4.00	0.437	0.495	0.401	0.478	0.477	0.504	19.469	23.423	15.242
T-Student	AR		0.25	2.00	0.132	0.127	0.137	0.136	0.141	0.137	7.655	7.151	7.536
T-Student	AR		0.25	3.00	0.254	0.277	0.277	0.320	0.271	0.280	13.494	19.242	10.506
T-Student	AR		0.25	4.00	0.453	0.506	0.417	0.489	0.501	0.517	18.375	21.892	14.482
T-Student	AR		0.50	2.00	0.141	0.107	0.144	0.108	0.133	0.104	24.687	25.740	22.331
T-Student	AR		0.50	3.00	0.259	0.235	0.244	0.233	0.267	0.238	12.414	9.386	13.577
T-Student	AR		0.50	4.00	0.425	0.433	0.384	0.421	0.378	0.368	11.673	14.826	10.292
T-Student	AR		0.75	2.00	0.161	0.089	0.180	0.088	0.143	0.084	44.777	51.291	41.930
T-Student	AR		0.75	3.00	0.254	0.177	0.247	0.168	0.241	0.171	30.815	32.643	29.691
T-Student	AR		0.75	4.00	0.349	0.288	0.366	0.316	0.338	0.267	18.938	16.051	21.950
T-Student	MA		0.25	2.00	0.141	0.135	0.136	0.135	0.141	0.137	8.017	7.107	7.766
T-Student	MA		0.25	3.00	0.254	0.277	0.278	0.319	0.269	0.279	13.462	18.837	10.732
T-Student	MA		0.25	4.00	0.452	0.505	0.418	0.488	0.500	0.516	18.373	21.736	14.500
T-Student	MA		0.50	2.00	0.135	0.115	0.144	0.122	0.128	0.111	15.711	16.405	14.618
T-Student	MA		0.50	3.00	0.272	0.254	0.255	0.252	0.252	0.231	11.008	8.946	11.604
T-Student	MA		0.50	4.00	0.410	0.421	0.374	0.411	0.368	0.358	11.848	14.897	10.349
T-Student	MA		0.75	2.00	0.146	0.117	0.147	0.117	0.140	0.113	20.843	21.301	20.221
T-Student	MA		0.75	3.00	0.275	0.234	0.261	0.232	0.284	0.238	16.962	13.562	18.065
T-Student	MA		0.75	4.00	0.402	0.368	0.443	0.427	0.422	0.373	13.020	11.815	15.332
T-Student	GARCH		0.80	3.68	0.471	0.464	0.434	0.445	0.521	0.471	14.213	13.900	17.089
T-Student	GARCH		0.88	2.90	0.400	0.271	0.399	0.265	0.427	0.271	33.819	34.915	37.961
T-Student	GARCH		0.90	2.00	0.290	0.101	0.300	0.095	0.316	0.101	65.564	68.422	68.204

**Tabela A.6:** Resultados gerais da simulação para séries com 5000 observações (erro padrão).

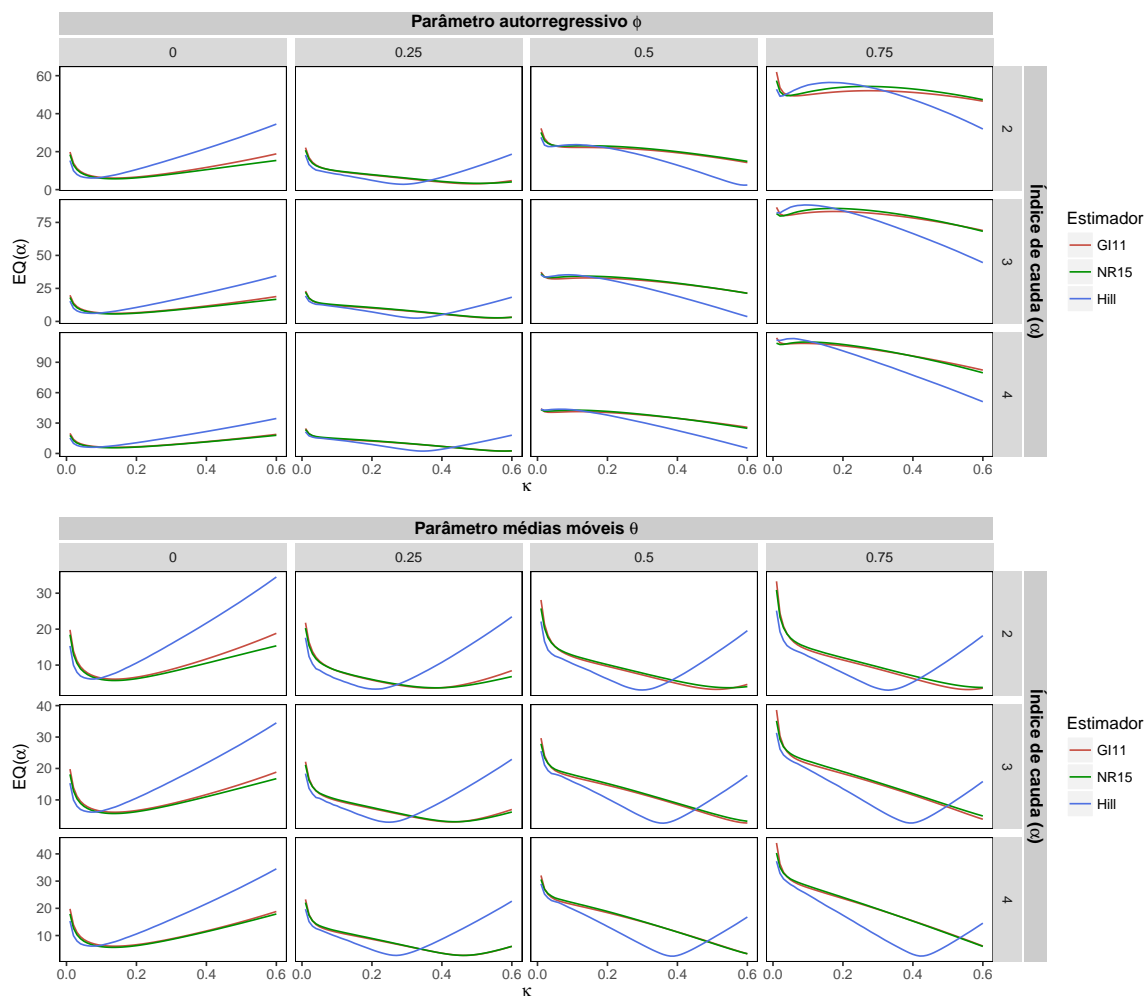
## B. Anexo – Gráficos

Neste anexo estão presentes os gráfico que opõem os valores possíveis de  $\kappa$  com a raiz do Erro Quadrático Médio relativo da estimação do índice de cauda ( $EQ(\alpha)$ ). Foram selecionados os gráficos cuja dimensão das série era de 5000 observações.



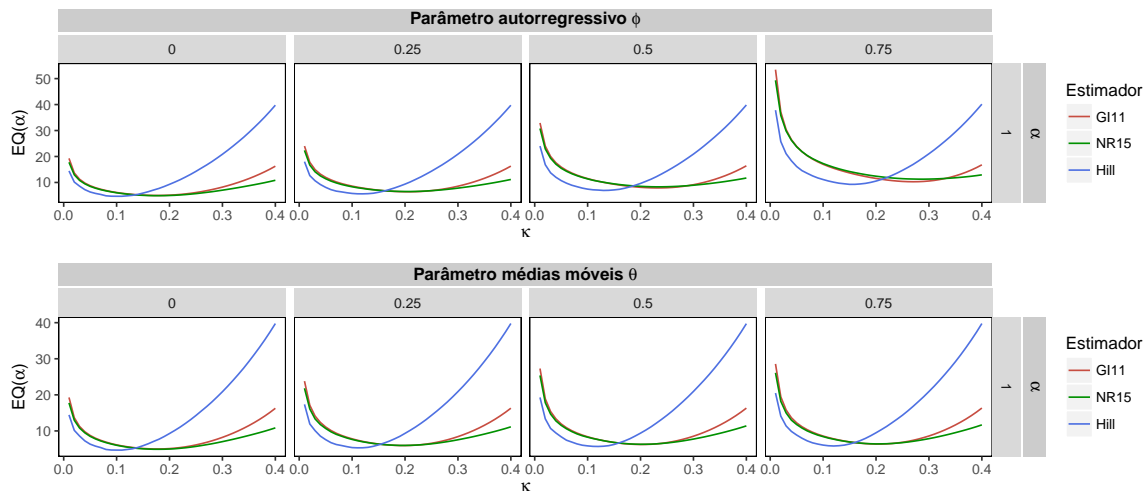
**Figura B.1:** PGD com  $\varepsilon_t \sim$  Alpha Stable

Nota: O primeiro conjunto de gráficos diz respeito aos processos com dependência AR e o segundo com dependência MA. Com  $\theta = \phi = 0$  estamos perante o caso de independência.



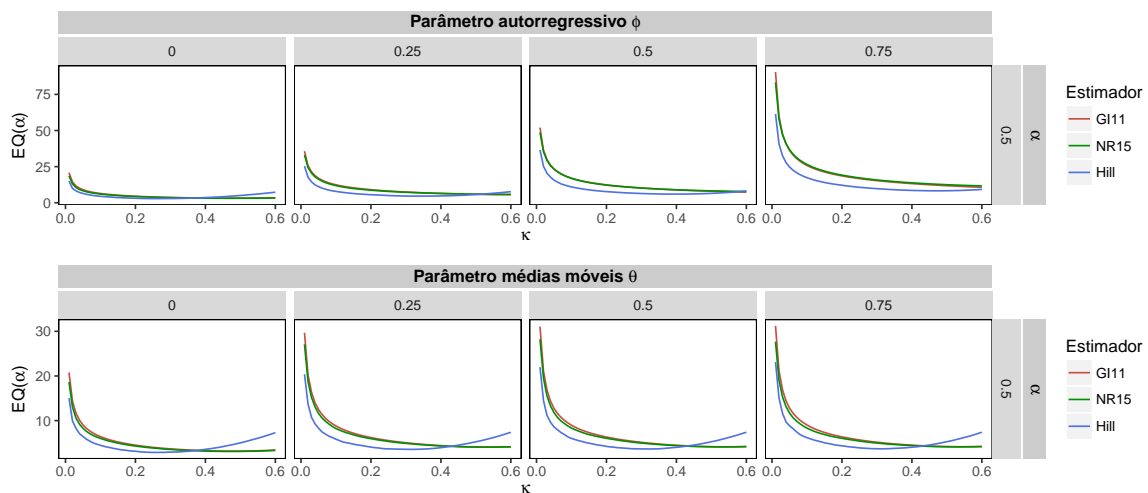
**Figura B.2:** PGD com  $\varepsilon_t \sim \text{Burr}$  (Tipo XII)

Nota: O primeiro conjunto de gráficos diz respeito aos processos com dependência AR e o segundo com dependência MA. Com  $\theta = \phi = 0$  estamos perante o caso de independência.



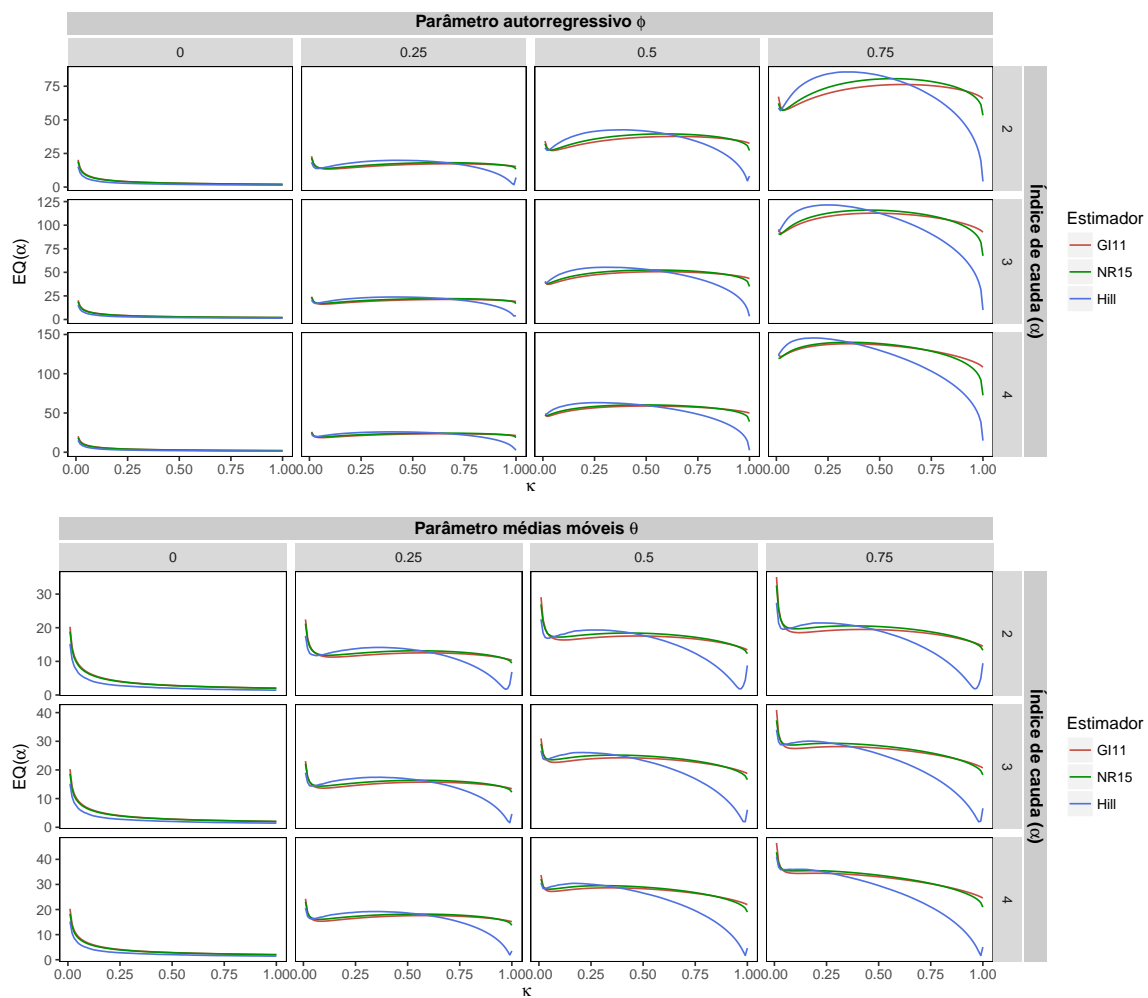
**Figura B.3:** PGD com  $\varepsilon_t \sim \text{Cauchy}$

Nota: O primeiro conjunto de gráficos diz respeito aos processos com dependência AR e o segundo com dependência MA. Com  $\theta = \phi = 0$  estamos perante o caso de independência.



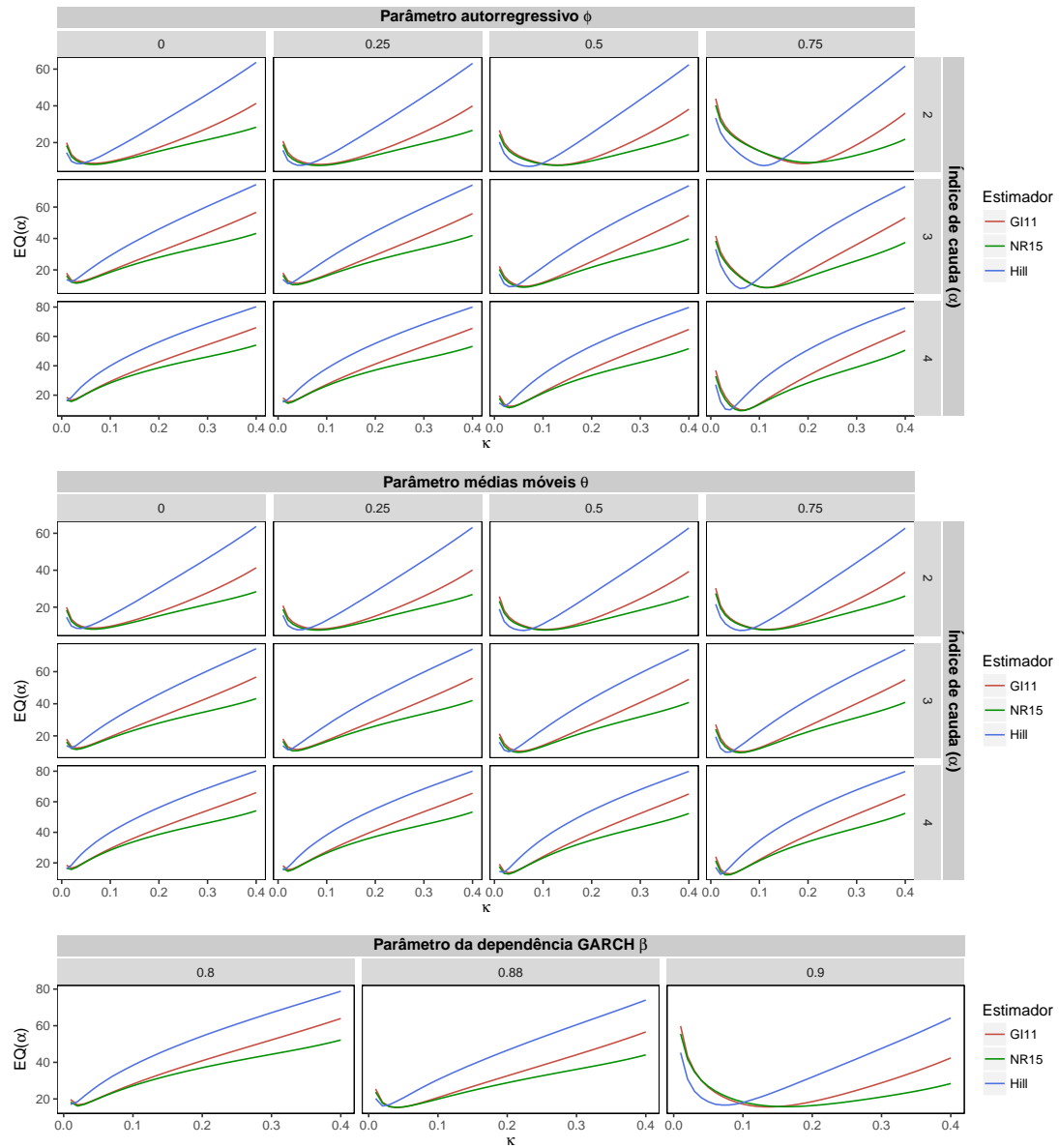
**Figura B.4:** PGD com  $\varepsilon_t \sim \text{Lévy}$

Nota: O primeiro conjunto de gráficos diz respeito aos processos com dependência AR e o segundo com dependência MA. Com  $\theta = \phi = 0$  estamos perante o caso de independência.



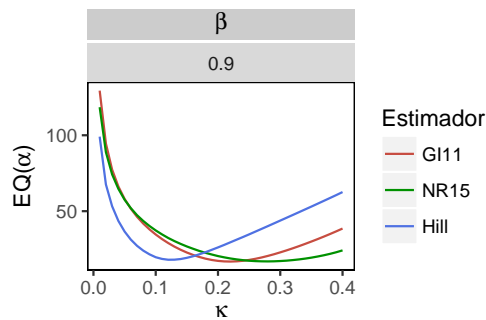
**Figura B.5:** PGD com  $\varepsilon_t \sim \text{Pareto}$

Nota: O primeiro conjunto de gráficos diz respeito aos processos com dependência AR e o segundo com dependência MA. Com  $\theta = \phi = 0$  estamos perante o caso de independência.



**Figura B.6:** PGD com  $\varepsilon_t \sim T\text{-Student}$

Nota: O primeiro conjunto de gráficos diz respeito aos processos com dependência AR, o segundo com dependência MA e o terceiro com dependência GARCH. Com  $\theta = \phi = 0$  estamos perante o caso de independência.



**Figura B.7:** PGD com  $\varepsilon_t \sim \text{Normal}$  com dependência IGARCH